



HAL
open science

Modélisation analytique magnéto-acoustique des machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents : optimisation du dimensionnement

Julien Boisson

► **To cite this version:**

Julien Boisson. Modélisation analytique magnéto-acoustique des machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents : optimisation du dimensionnement. Automatique / Robotique. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2014. Français. NNT : 2014DENS0043 . tel-01151864

HAL Id: tel-01151864

<https://theses.hal.science/tel-01151864v1>

Submitted on 13 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Monsieur BOISSON Julien

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN

Domaine :

Electronique - Electrotechnique - Automatique

Sujet de la thèse :

**MODELISATION ANALYTIQUE MAGNETO-ACOUSTIQUE DES
MACHINES SYNCHRONES A COMMUTATION DE FLUX A AIMANTS
PERMANENTS - OPTIMISATION DU DIMENSIONNEMENT**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le XX/XX/2014 devant le jury composé de :

M. BARAKAT Georges	Professeur à l'Université du Havre	Rapporteur
M. LECOINTE Jean-Philippe	Maître de Conférence à l'Université d'Artois	Rapporteur
M. GABSI Mohamed	Professeur à l'ENS Cachan	Directeur thèse
M. LOUF François	Maître de Conférence à l'ENS Cachan	Encadrant de thèse
M. MININGER Xavier	Professeur à l'Université Paris-Sud	Encadrant de thèse
M. OJEDA Javier	Maître de Conférence à l'ENS Cachan	Encadrant de thèse

Laboratoire SATIE

ENS CACHAN / CNRD / UMR 8029

61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)

Table des matières

Introduction Générale	1
I Problématiques de bruit des Machines Synchrones à Commutation de Flux à Aimants Permanents	3
1 État de l'Art sur les Machines Synchrones à Commutation de Flux à Aimants Permanents	5
1.1 Introduction	5
1.2 Principe de fonctionnement	5
1.3 Historique des MCF-AP	6
1.4 Performances électromagnétiques d'une <i>MCF-AP</i> pentaphasée 20/18	8
1.5 Conclusion	12
2 Génération de bruit dans les <i>MCF-AP</i>	15
2.1 Introduction	15
2.2 Contraintes d'origines magnétiques dans les <i>MCF-AP</i>	16
2.3 Analyse modale de la structure statorique	21
2.4 Réponse vibratoire de la structure statorique	25
2.5 Modèles permettant de prédire et de réduire le bruit acoustique généré par les <i>MCF-AP</i>	29
2.6 Conclusion	31
II Modèle Analytique Magnéto-Acoustique des Machines Synchrones à Commutation de Flux à Aimants Permanents	33
3 Présentation Générale du Modèle Analytique	35
4 Modèle Semi-Analytique Magnéto-Statique 2D des <i>MCF-AP</i>	37
4.1 Introduction	37
4.2 État de l'art sur les différents modèles en magnéto-statique	38
4.3 Présentation du modèle	40
4.4 Résolution formelle des équations de la magnéto-statique pour les <i>MCF-AP</i>	40
4.5 Résolution analytique de l'équation de magnéto-statique	43
4.6 Application des conditions aux limites	52
4.7 Implémentation numérique et résolution	56
4.8 Calcul des différentes grandeurs magnétiques	56
4.9 Validation et intérêt du modèle semi-analytique	58
4.10 Conclusion	70
5 Modèle Analytique permettant la détermination des Modes Propres d'un Stator	71
5.1 Introduction	71
5.2 État de l'art	72
5.3 Expression du quotient de Rayleigh dans le cas général	75
5.4 Application au cas d'un anneau circulaire	77
5.5 Application au stator de machine électrique	102
5.6 Application au stator avec culasse externe	115
5.7 Temps de calculs : comparaison entre le modèle analytique et le modèle éléments finis	122
5.8 Conclusion	122

6	Modèle Analytique Vibratoire - Acoustique	123
6.1	Introduction	123
6.2	État de l'art sur les modèles analytiques permettant l'estimation de la puissance acoustique rayonnée par une machine électrique	124
6.3	Notations utilisées et présentation du modèle	125
6.4	Application au cas où la vitesse de rotation est constante	129
6.5	Application au cas où la vitesse de rotation est variable	132
6.6	Puissance acoustique rayonnée par la structure statorique	136
6.7	Validation du modèle par comparaison avec la simulation par éléments finis et avec des mesures expérimentales	136
6.8	Temps de calculs : comparaison entre le modèle analytique et le modèle éléments finis	141
6.9	Conclusion	142
III	Optimisation Géométrique des Machines Synchrones à Commutation de Flux à Aimants Permanents basée sur le Modèle Analytique Magnéto-Acoustique	143
7	Optimisation Géométrique des <i>MCF-AP</i>	145
8	Présentation de l'Optimisation Géométrique des <i>MCF-AP</i>	147
8.1	Introduction	147
8.2	Définition des différents paramètres	147
8.3	Présentation de l'algorithme d'optimisation	151
9	Études Préliminaires	155
9.1	Limites des optimisations basées sur des critères exclusivement magnétiques	155
9.2	Influence de la géométrie sur les performances magnéto-acoustiques des <i>MCF-AP</i>	157
10	Résultats d'Optimisations Géométriques des <i>MCF-AP</i>	163
10.1	Réglages des différents paramètres d'optimisation	163
10.2	Résultats des optimisations géométriques à vitesse fixe à $\Omega = 1\ 000$ tr/min	164
10.3	Résultats des optimisations géométriques à vitesse variable	176
10.4	Conclusion	181
Conclusion Générale		183
Annexes		186
A	Compléments au Chapitre 2 : Calcul des forces électromagnétiques	189
A.1	Construction du tenseur de Maxwell	189
A.2	Expression de la force électromagnétique	191
B	Compléments au Chapitre 4 : Modèle Magnéto-Statique	193
B.1	Les opérateur vectoriels	193
B.2	Description du problème de magnéto-statique	194
B.3	Notations utilisées pour la résolution dans les différentes zones de la machine	196
B.4	Ecriture des différentes grandeurs magnétiques	197
B.5	Notations utilisées pour l'écriture des conditions aux limites	198
B.6	Implantation numérique	199
B.7	Comparaison à géométrie et hypothèses identiques	206
C	Compléments au Chapitre 5 : Modèle Modes Propres	217
C.1	Validation par comparaison avec la simulation par éléments finis pour un anneau circulaire	217
C.2	Validation par comparaison avec la simulation par éléments finis pour un stator	221

D Compléments au Chapitre 10 : Optimisation Géométrique	223
D.1 Optimisations réalisées à $\Omega = 2\,000$ tr/min	223
D.2 Optimisations réalisées à $\Omega = 3\,000$ tr/min	226
Bibliographie	238

Introduction Générale

Ce travail de thèse s'est déroulé au sein du laboratoire SATIE de l'École Normale Supérieure de Cachan. Il s'inscrit dans la continuité de nombreuses études conduites en son sein, mais également dans d'autres centres de recherche, sur une problématique bien connue mais qui reste toujours d'actualité : la réduction du bruit dans les machines électriques tournantes.

En effet, si la prise de conscience d'une nécessité de diminuer cette « pollution sonore » est relativement ancienne puisqu'elle date des années 1920, le vaste champ de recherches que cette problématique a ouvert ne semble pas se restreindre au fil des années, bien au contraire. De très nombreuses machines ont été étudiées : les machines synchrones (d'induction ou à aimants permanents), les machines asynchrones et les machines à réluctance variable. Les différents phénomènes à l'origine de la génération de ce bruit ont été modélisés, notamment les bruits provenant de phénomènes électro-magnétiques, mécaniques et aérodynamiques. A partir de ces études, de nombreuses solutions permettant leurs réductions ont été avancées comme la proposition de nouvelles règles de construction des machines, l'optimisation de leurs commandes ou encore l'ajout d'actionneurs sur la machine initiale.

L'élément déclencheur du travail présenté dans ce mémoire de thèse provient d'une problématique qui m'a été soumise : l'étude et la réduction du bruit acoustique généré par les machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents.

Ces structures de machines électriques tournantes ont été développées vers la fin des années 1990 et ont fait l'objet d'un brevet déposé par le laboratoire SATIE. Elles ont ensuite été analysées durant les années 2000 jusqu'à aujourd'hui suivant tous les aspects magnétiques. Ainsi, le couple électromagnétique, les pertes, les formes d'ondes avec notamment les forces électromotrices ont été étudiées, modélisées et optimisées.

En revanche, un champ de recherche n'a été lui que trop peu étudié : il s'agit des aspects vibratoires et acoustiques de ces structures. En effet, à notre connaissance, les seules études portant sur ce sujet ont mis en exergue un unique élément entrant en compte dans la génération du bruit : l'ondulation de couple liée à la présence des aimants permanents. Cet élément n'est pas, et de loin, le seul puisque les aspects mécaniques entrent aussi très largement en considération.

Par conséquent, le travail présenté dans ce mémoire de thèse consiste à étudier et à modéliser les performances des machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents afin de prédire le comportement magnétique, mécanique et acoustique de ces structures, ceci dans le but de proposer un algorithme d'optimisation géométrique permettant de limiter le bruit acoustique qu'elles génèrent en fonctionnement. Pour ce faire, ce travail a été divisé en trois parties.

Dans une première partie, nous tenterons d'avoir une vue d'ensemble sur les machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents. Un état de l'art sur ces structures sera tout d'abord proposé avec notamment la présentation du principe de fonctionnement de la commutation de flux, un bref historique de ces machines électriques tournantes ainsi que l'étude des performances électromagnétiques d'une machine pentaphasée 20/18. Ensuite, nous nous intéresserons à l'origine du bruit dans ces structures en nous attardant plus spécifiquement sur les phénomènes magnétiques à l'origine de ce bruit. Une exploration des différentes contraintes magnétiques ainsi qu'une analyse mécanique seront réalisées, nous permettant d'estimer les vibrations générées en fonctionnement. Enfin, nous aborderons les modèles permettant la réduction du bruit acoustique par action sur la géométrie.

Dans une deuxième partie, nous présenterons le modèle analytique magnéto-acoustique permettant d'estimer les grandeurs magnétiques, mécaniques et acoustiques des machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents. Ce modèle sera subdivisé en trois sous-modèles qui seront chacun développé : un modèle magnéto-statique estimant les grandeurs magnétiques, un modèle estimant les modes propres de résonance de la structure statorique et un modèle estimant les vibrations ainsi que la puissance acoustique rayonnée par la machine. Ces différents modèles seront validés par simulations éléments finis et par mesures expérimentales. De plus, leurs domaines d'applications ainsi que leurs limites seront abordés.

Dans une troisième partie, nous appliquerons notre modèle analytique multi-physique magnéto-acoustique dans le cadre d'une optimisation géométrique des machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents afin de maximiser le couple électromagnétique tout en minimisant la puissance acoustique rayonnée. Différentes structures de machines seront abordées et des règles de construction « silencieuse » seront proposées. L'influence de nombreux paramètres sur la génération du bruit sera étudiée. Ces optimisations seront effectuées sur trois types de structures : une structure triphasée 12/10, une structure tétraphasée 16/12 et une structure pentaphasée 20/18. De plus, elles seront réalisées dans deux cas de figure : un cas dans lequel la machine est entraînée à vitesse fixe et un cas dans lequel la machine est entraînée à vitesse variable.

Première partie

**Problématiques de bruit des Machines
Synchrones à Commutation de Flux à
Aimants Permanents**

État de l'Art sur les Machines Synchrones à Commutation de Flux à Aimants Permanents

1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour vocation principale d'être une introduction présentant le principe de fonctionnement des machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents. Avant de commencer, nous allons imposer une notation qui sera utilisée dans tout ce mémoire de thèse et qui servira à désigner ce type de structures : *MCF-AP*. Ce chapitre a été divisé en trois parties. Dans une première partie (Section 1.2), nous commencerons par présenter le principe de fonctionnement de ces machines, à savoir le principe de la commutation de flux ainsi que les différentes particularités associées. Puis, nous dresserons un bref historique des *MCF-AP*, allant de ses origines dans les années 1950 aux dernières recherches effectuées (Section 1.3). Enfin, nous étudierons les performances électromagnétiques d'une machine en particulier : une *MCF-AP* pentaphasée 20/18 (Section 1.4).

1.2 Principe de fonctionnement

Les *MCF-AP* sont des convertisseurs électromécaniques à double saillance qui possèdent la particularité d'avoir tous leurs éléments actifs - enroulements et aimants permanents - au niveau du stator. Le rotor, constitué uniquement de tôles ferromagnétiques, est quant à lui passif. De par leurs structures très particulières, ces machines possèdent de nombreux avantages, alliant ceux des machines synchrones à aimants permanents classiques (puissance et couple massique importants) et ceux des machines à réductance variable (notamment la possibilité d'un fonctionnement à haute vitesse). De plus, grâce à cette localisation des éléments actifs, l'évacuation des calories s'en retrouve facilitée au niveau du stator.

Pour comprendre le principe de fonctionnement des *MCF-AP*, il peut être intéressant de se pencher sur la Figure 1.1 représentant une vue linéarisée d'une cellule de commutation.

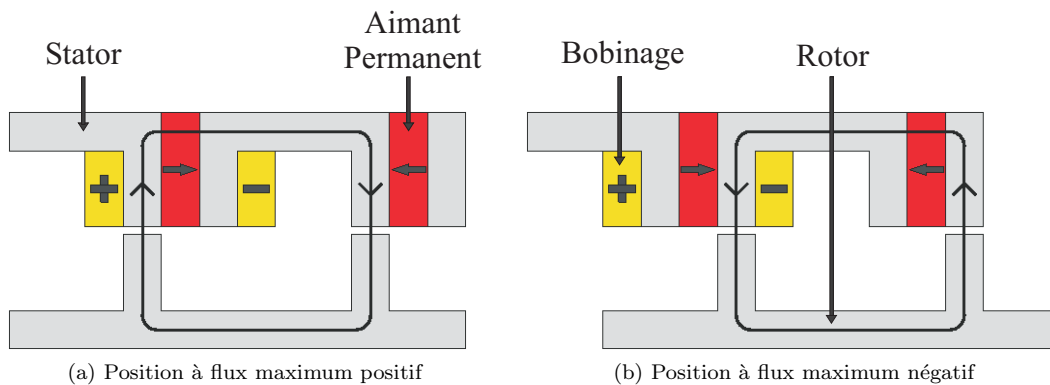


FIGURE 1.1 – Principe de fonctionnement des *MCF-AP*

Les aimants permanents, formant l'inducteur, sont positionnés au niveau des dents statoriques et possèdent une aimantation normale à la dent. De plus, le sens de l'aimantation est inversé pour deux aimants consécutifs. Les enroulements, formant l'induit, sont quant à eux bobinés autour de chaque dent statorique. Lorsque la dent rotorique est alignée avec la dent statorique comme sur la Figure 1.1a, le flux généré par l'inducteur et embrassé par le bobinage est maximum positif. A contrario, lorsque la dent rotorique est alignée avec la dent statorique comme sur la Figure 1.1b, le flux généré par l'inducteur et embrassé par le bobinage est maximum négatif. Le flux a donc *commuté*. Pour se rendre compte du principe de la commutation de flux, nous pouvons également regarder la Figure 1.2 où, cette fois-ci, sont représentées les lignes de flux pour trois positions particulières du rotor : position dans l'axe d à flux maximum positif, position dans l'axe q à flux nul et position à flux maximum négatif. De plus, la Figure 1.3 présente l'allure du flux généré par les aimants dans le bobinage (de la Figure 1.2) en fonction de la position du rotor.

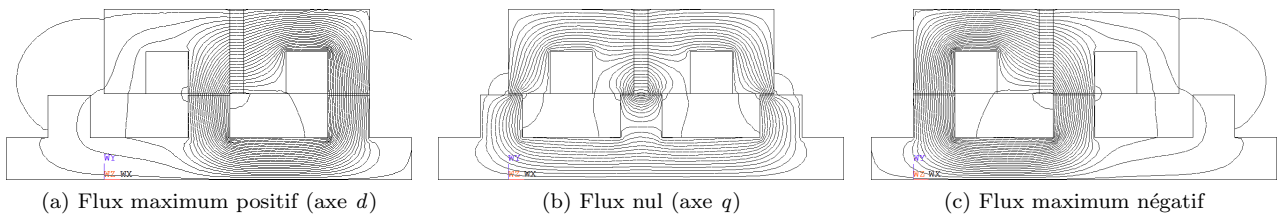


FIGURE 1.2 – Principe de fonctionnement des *MCF-AP*

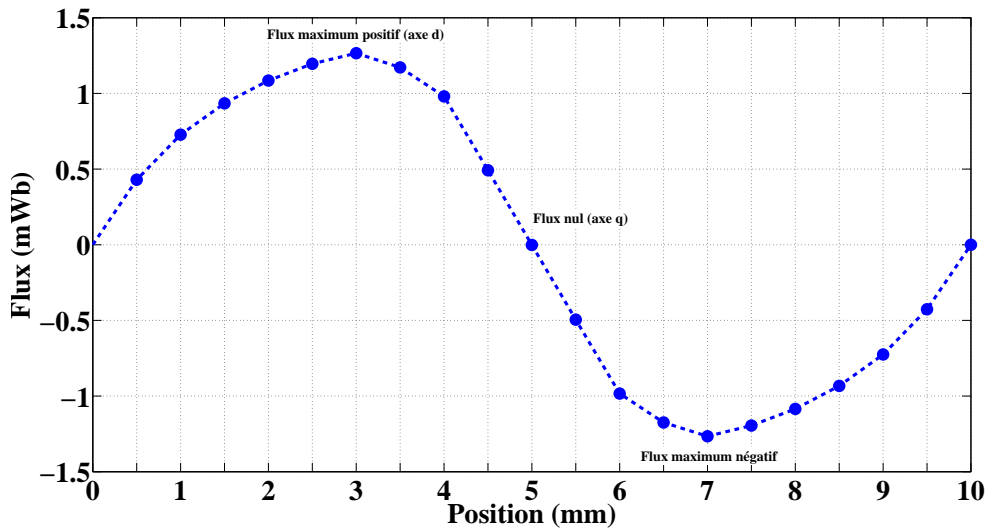


FIGURE 1.3 – Évolution du flux généré par l'inducteur dans la bobine en fonction de la position du rotor

1.3 Historique des MCF-AP

Les toutes premières structures de *MCF-AP* ont été développées dans les années 1950. S. E. RAUCH et L.J. JOHNSON ont proposé une machine monophasée, présentée dans l'article [Rauch and Johnson, 1955]. Initialement, elle était prévue pour fonctionner en alternateur haute fréquence. Après avoir introduit le principe de la commutation de flux (Figure 1.4), ils ont analysé une machine 4/6 (Figure 1.5).

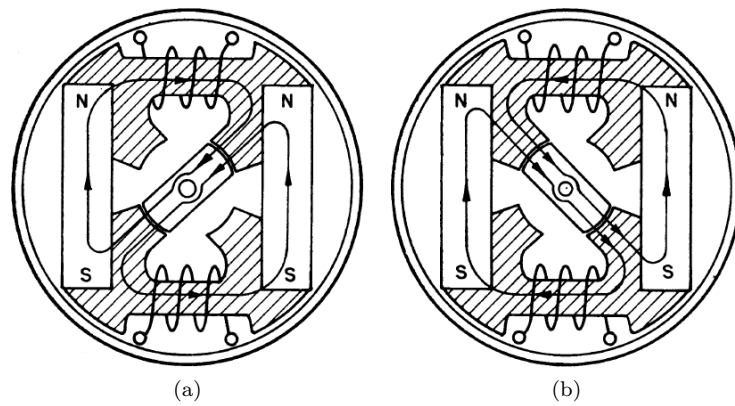


FIGURE 1.4 – Principe de la commutation de flux présenté dans [Rauch and Johnson, 1955]

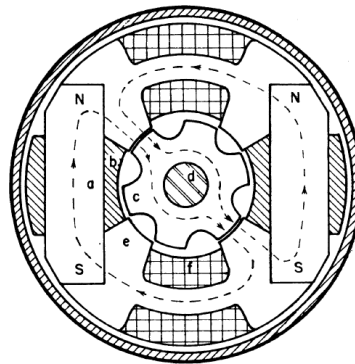


FIGURE 1.5 – Machine monophasée 6/4 présentée dans [Rauch and Johnson, 1955]

A la suite de cet article, les recherches n'ont vraiment décollé que dans les années 1990. Tout d'abord aux États-Unis à l'*University of Wisconsin-Madison* où c'est encore une fois une machine monophasée qui a été étudiée [Liao, 1992] [Sarlioglu et al., 1994] [Liao et al., 1992], puis en France au sein du laboratoire *SATIE* où la première machine triphasée a été proposée et étudiée [Hoang et al., 1997] (voir Figure 1.6) [Hoang et al., 2000].

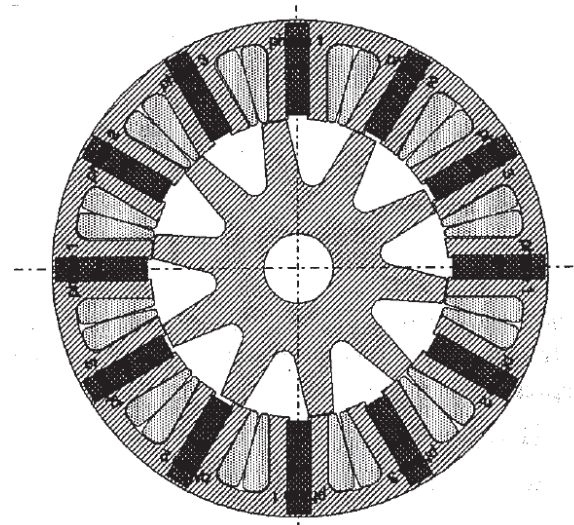


FIGURE 1.6 – Première MCF-AP triphasée [Hoang et al., 1997]

A partir de ce moment là, les recherches se sont accélérées et de nombreuses équipes se sont misent à se pencher sur ces machines pour les étudier sous tous les angles :

- Étude des performances électromagnétiques et notamment les formes d'ondes des forces électromotrices [Zhu et al., 2005] [Zhu and Chen, 2010] [Hua et al., 2006b] [Hua et al., 2007] [Hua and Ming, 2006].
- Optimisation de la géométrie des machines [Yacine et al., 2005] [Chen et al., 2011] [Hua et al., 2006c] [Zhu et al., 2008c] [Hua et al., 2006a].
- Influence du nombre de dents rotoriques et statoriques ainsi que du nombre de phases [Zhu et al., 2008a] [Chen et al., 2008] [Owen et al., 2010] [Chen and Zhu, 2010a] [Chen and Zhu, 2010b] [Chen and Zhu, 2010c] [Thomas et al., 2008].
- Étude des pertes dans les machines et notamment des pertes par effets Joule et des pertes magnétiques [Hoang et al., 2000] [Pang et al., 2006] [Iwasaki et al., 2009] [Thomas et al., 2009] [Zhu et al., 2008b] [Pang et al., 2008].
- Étude et réduction de l'ondulation de couple due au couple de détente [Zhu et al., 2009] [Jia et al., 2010] [Jia et al., 2010] [Hua and Cheng, 2008] [Wang et al., 2010].
- Diagnostic des défauts des phases [Ojeda et al., 2010] [Raminosoa et al., 2011] [Raminosoa and Gerada, 2010a] [Raminosoa and Gerada, 2010c] [Raminosoa and Gerada, 2010b].
- Machine à commutation de flux hybride [Hoang et al., 2007] [Hoang et al., 2011] [Gaussens et al., 2012] [Owen et al., 2009] [Gaussens et al., 2014] [Hoang et al., 2010] [Dong et al., 2010] [Amara et al., 2009].

Enfin, terminons ce bref aperçu historique sur les *MCF-AP* en présentant le nombre de publications sur ces structures au cours des vingt dernières années (Figure 1.7). La recherche s'est effectuée sur *Google Scholar* et, si la liste est forcément non exhaustive, elle permet de se rendre compte de l'intérêt toujours croissant des ces moteurs dans le paysage de la recherche.

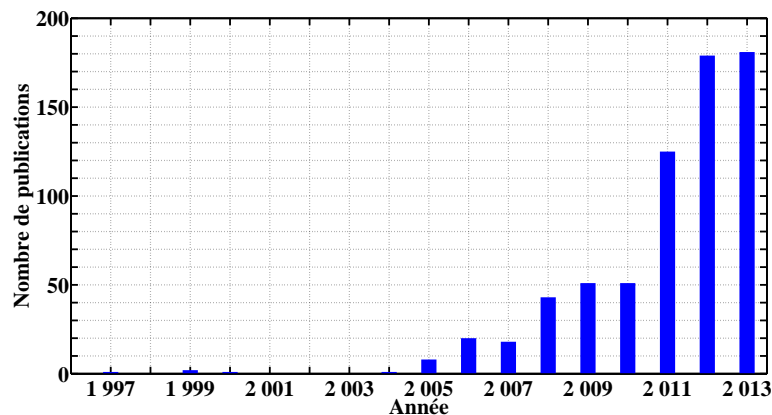


FIGURE 1.7 – Nombre de publications sur les *MCF-AP*

1.4 Performances électromagnétiques d'une *MCF-AP* pentaphasée 20/18

A présent, pour comprendre le fonctionnement des structures à commutation de flux, nous allons nous pencher sur l'étude des performances électromagnétiques d'une *MCF-AP* pentaphasée 20/18. Cette étude est réalisée par simulations éléments finis à l'aide du logiciel ANSYS et par mesures expérimentales sur un prototype existant. Nous présentons la structure sur la Figure 1.8 avec les directions d'aimantation des aimants permanents ainsi que la façon dont est bobiné l'induit. Sur la machine, les phases sont numérotées de 1 à 5. Nous pouvons voir la présence d'un isthme au dessus des aimants permanents, présent pour une meilleure tenue mécanique mais qui court-circuite une partie des aimants permanents. De plus, les dimensions et paramètres principaux de cette machine sont présentées dans le Tableau 1.1. Nous étudions les performances à vide puis en charge.

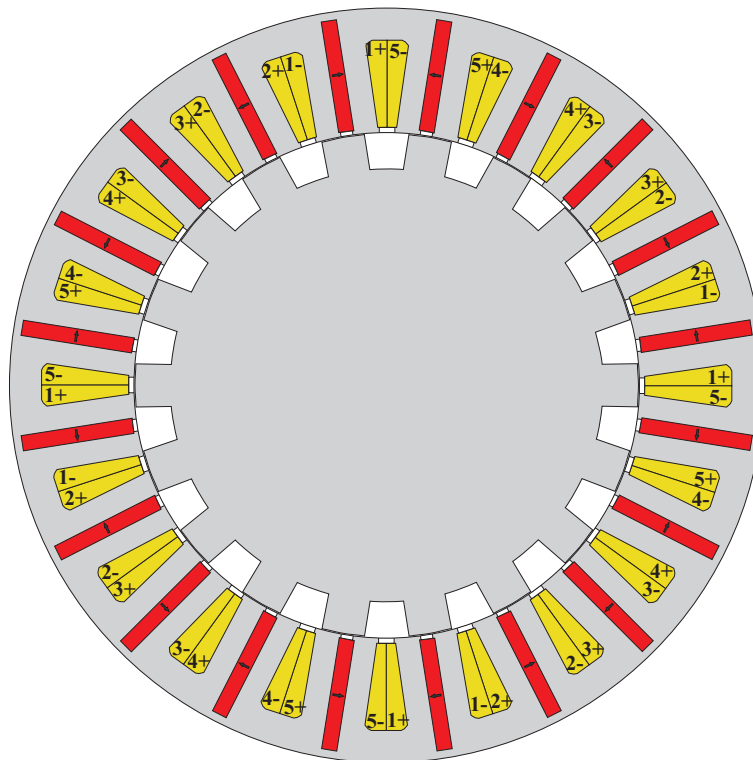


FIGURE 1.8 – Machine pentaphasée 20/18

	MCF-AP 20/18
Nombre de phases	5
Nombre de bobines par phase	4
Nombre de spires par bobine	25
Longueur active	40 mm
Nombre de dents statoriques	20
Nombre de dents rotoriques	18
Rayon intérieur rotor	43 mm
Rayon extérieur rotor	50 mm
Entrefer	0.3 mm
Rayon bobine	69 mm
Rayon extérieur stator	75 mm
Ouverture angulaire dent rotor	0.5
Largeur aimant	3.1 mm
Largeur dent stator	4.7 mm
Induction rémanente des aimants	0.36 T

TABLE 1.1 – Paramètres de la machine pentaphasée

Dans les structures à commutation de flux, le couple électromagnétique provient essentiellement du couple hybride, c'est-à-dire du couple lié à l'interaction entre les aimants permanents et les bobinages d'induit. En effet, malgré la double saillance nécessaire à la commutation de flux, le couple de réluctance de chaque phase se compense avec celui des autres phases. Par conséquent, le couple de réluctance peut être considéré comme nul [Hoang et al., 1997].

1.4.1 Performances électromagnétiques à vide

Commençons par présenter les performances électromagnétiques à vide. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au flux à vide dans les différentes phases en fonction de la position angulaire mécanique du rotor γ (voir Figure 1.9). La période angulaire de ces signaux dépend du nombre de dents rotoriques ($2\pi/N_r$). Cette période est donc de 20° pour la machine pentaphasée 20/18. Sur la Figure 1.10, nous présentons les lignes de champs à vide.

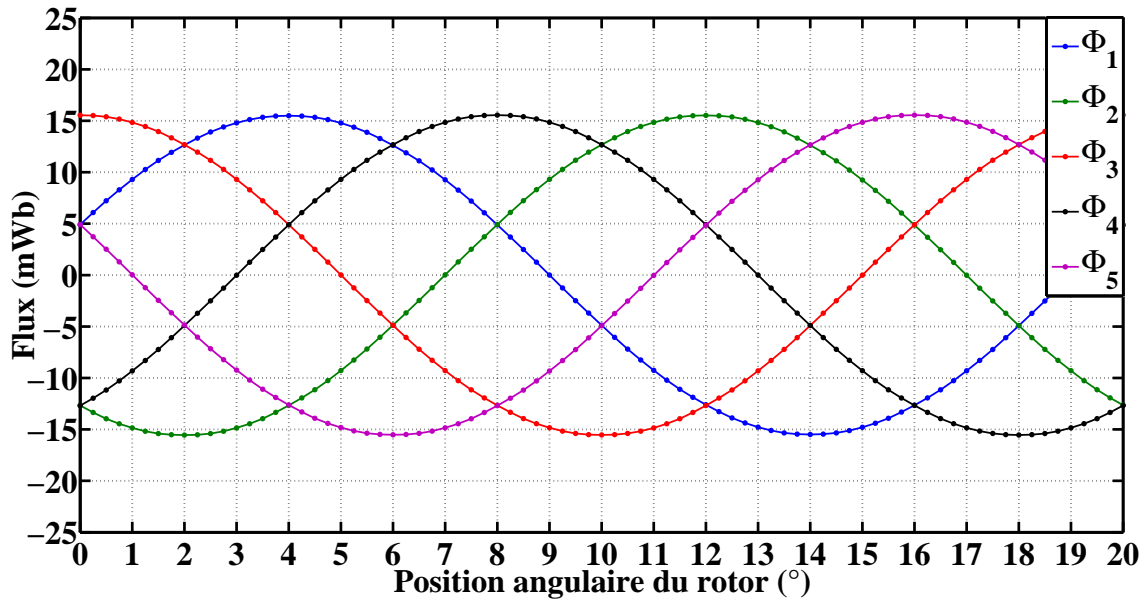
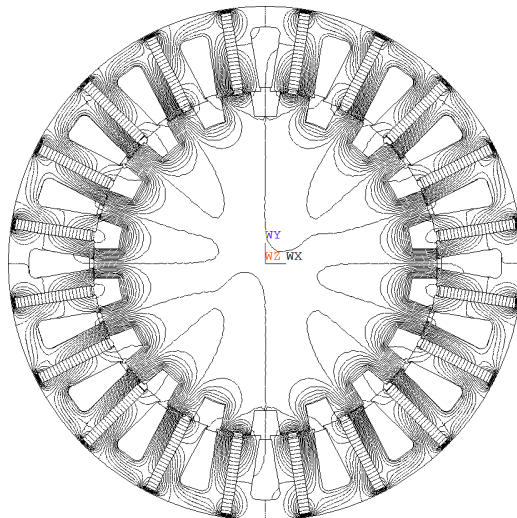


FIGURE 1.9 – Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : flux à vide



(a) MCF-AP 20/18

FIGURE 1.10 – Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : lignes de champs à vide

A partir de ces flux à vide, nous pouvons déduire les forces électromotrices que nous présentons sur la Figure 1.11 pour une vitesse de rotation donnée ($\Omega = 1\,000\text{ tr/min}$) pour les phases 1 et 2. En plus des résultats issus de la simulation éléments finis, nous pouvons superposer les résultats expérimentaux obtenus sur le prototype existant.

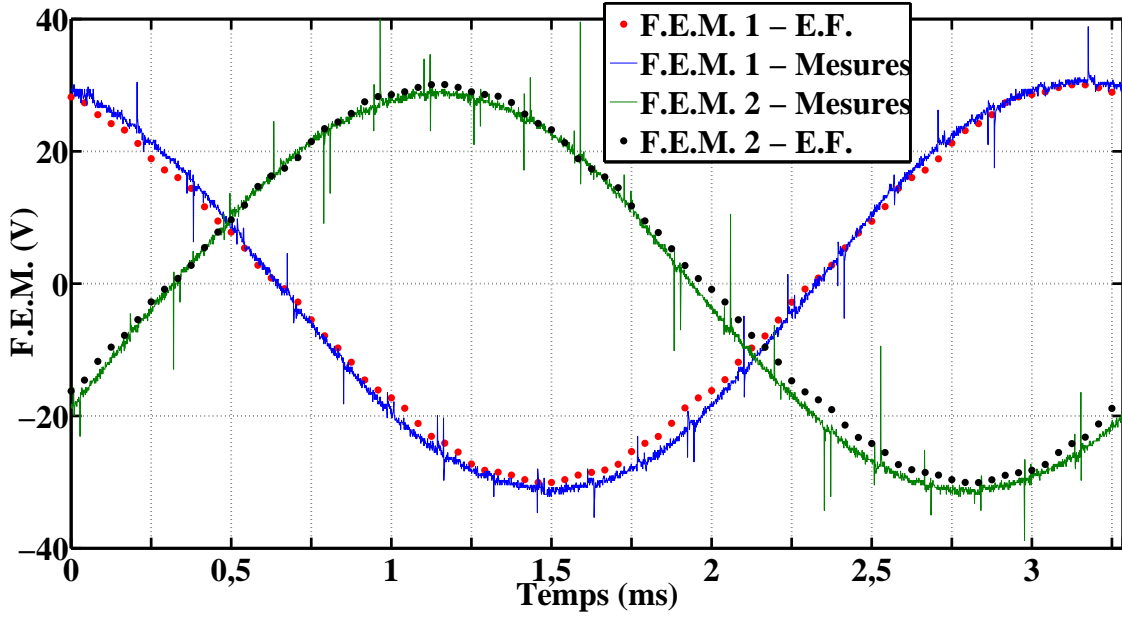


FIGURE 1.11 – Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : F.E.M. à $\Omega = 1\,000\text{ tr/min}$

1.4.2 Performances électromagnétiques en charge

Regardons à présent les performances de cette structure en charge. Pour cela, nous alimentons la machine de la même façon que les machines synchrones, c'est à dire par des courants sinusoïdaux déphasés d'un angle ψ par rapport aux F.E.M.. Soit I la valeur du courant efficace, N_r le nombre de dents rotoriques, γ la position mécanique du rotor, α un angle d'ajustement et enfin ψ l'angle de déphasage entre la F.E.M. et le courant dans la phase considérée. Les courants d'alimentations sont :

$$\begin{cases} i_1 = I\sqrt{2} \cdot \sin(N_r\gamma + \alpha - \psi) \\ i_2 = I\sqrt{2} \cdot \sin(N_r\gamma + \alpha - \psi - \frac{4\pi}{5}) \\ i_3 = I\sqrt{2} \cdot \sin(N_r\gamma + \alpha - \psi - \frac{8\pi}{5}) \\ i_4 = I\sqrt{2} \cdot \sin(N_r\gamma + \alpha - \psi - \frac{2\pi}{5}) \\ i_5 = I\sqrt{2} \cdot \sin(N_r\gamma + \alpha - \psi - \frac{6\pi}{5}) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $\alpha = 110^\circ$. Nous alimentons avec des courants dont la valeur efficace du courant surfacique est de 5 A/mm^2 .

Le couple électromagnétique en fonction de la position mécanique du rotor est présenté sur la Figure 1.12 pour $\psi = 0^\circ$. La période angulaire de ce signal est de $4\pi/(N_r N_s)$, soit 2° pour la *MCF-AP* pentaphasée 20/18. L'ondulation de couple pour la *MCF-AP* pentaphasée 20/18 est de 1.6%.

En plus du couple électromagnétique, nous pouvons nous intéresser aux lignes de champs en charge pour différentes valeurs de ψ ($\psi = 0^\circ$, $\psi = 45^\circ$ et $\psi = 90^\circ$) sur la Figure 1.13.

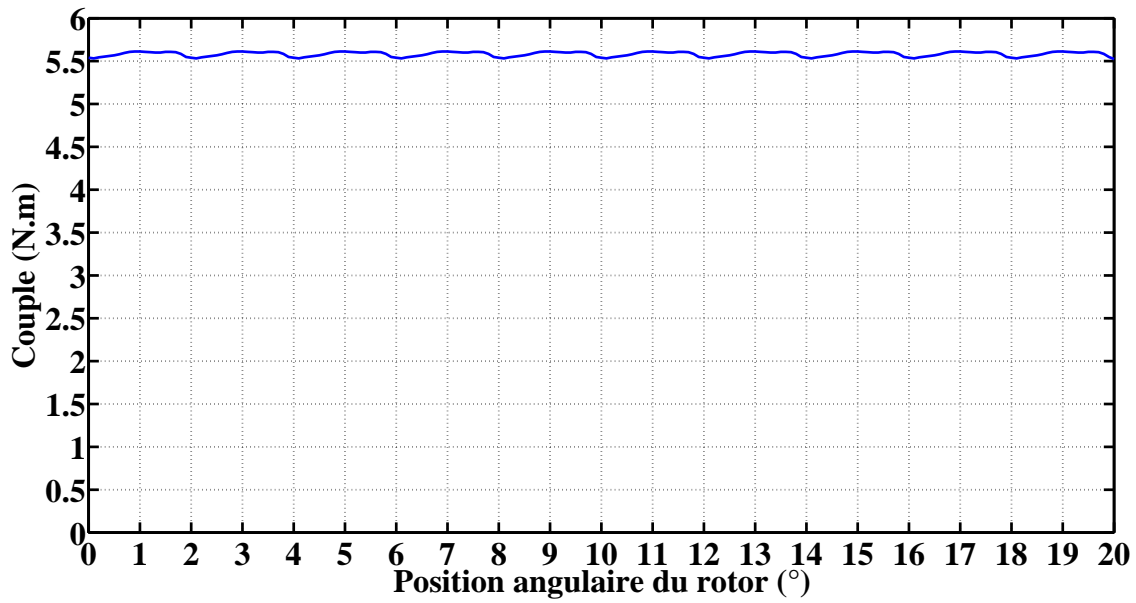
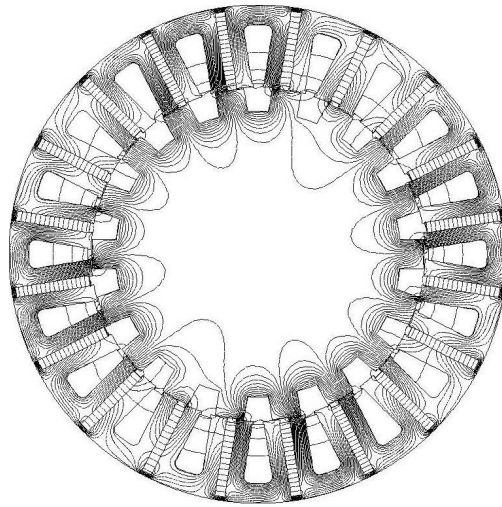


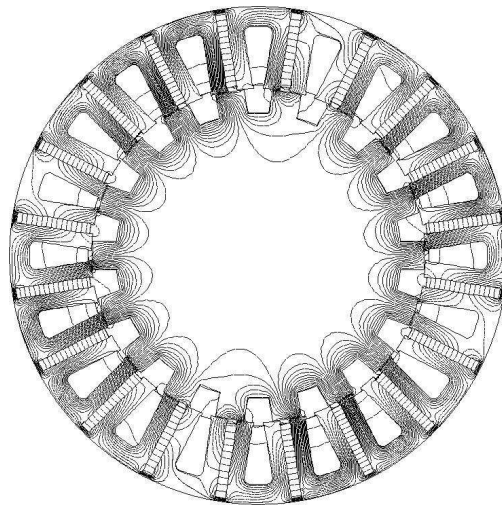
FIGURE 1.12 – Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : couple en charge

1.5 Conclusion

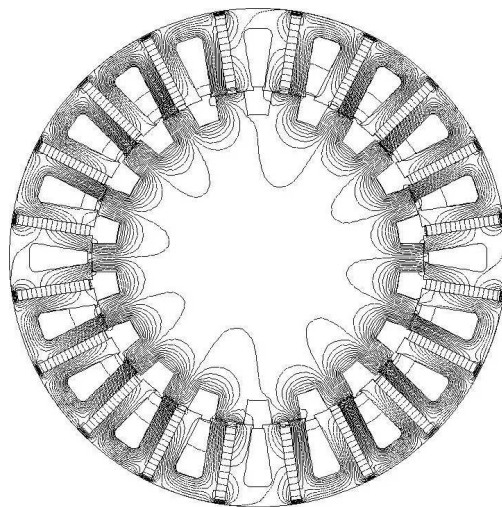
Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art sur les machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents. Nous avons dans un premier temps détaillé le principe de fonctionnement des structures à commutation de flux en étudiant une cellule de commutation linéarisée. Après avoir mis en évidence les principales caractéristiques, nous avons proposé un bref historique de ces machines en référant les principales études qui ont été conduites sur cette topologie. Enfin, nous avons terminé ce chapitre en étudiant les performances électromagnétiques d'une structure pentaphasée 20/18. Nous avons, en particulier, présenté le flux à vide, le couple en charge et les lignes de champs du flux.



(a) *MCF-AP 20/18* : $\psi = 0^\circ$



(b) *MCF-AP 20/18* : $\psi = 45^\circ$



(c) *MCF-AP 20/18* : $\psi = 90^\circ$

FIGURE 1.13 – Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : lignes de champs en charge

Génération de bruit dans les *MCF-AP*

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'origine du bruit dans les *MCF-AP*. Avant de commencer l'étude, nous allons réaliser un bref rappel sur les différents phénomènes physiques à l'origine du bruit dans les machines électriques tournantes en général avec, à chaque fois, des références renvoyant le lecteur à des ouvrages plus détaillés. De manière générale, dans les machines électriques tournantes, le bruit provient de trois phénomènes physiques bien distincts. Ces phénomènes peuvent toutefois engendrer des ondes acoustiques à des fréquences identiques. Ces différents bruits sont :

Les bruits d'origine mécanique dus à d'éventuels défauts de la machine ou aux frottements des pièces mécaniques. Concernant les défauts, on peut citer par exemple un déséquilibre ou un décentrage du rotor. Concernant les frottements, c'est aux niveaux des paliers ou des roulements que la majeure partie du bruit est générée. Des études prédisant les fréquences mises en jeu ainsi que le niveau de puissance acoustique générée existent. Nous pouvons citer dans le cas des machines tournantes [Grigoriev, 1974].

Les bruits d'origine aérodynamique dus au mouvement de l'air à travers la structure. Ce phénomène est prédominant à partir d'une certaine vitesse de rotation [Lisner and Timar, 1999]. La source principale de ce bruit provient des ventilateurs présent au sein de la structure [Bies and Hansen, 2009] [Nau and Mello, 2000] [Gieras et al., 2005] mais également de la présence d'un rotor avec saillance.

Les bruits d'origine électromagnétique liés à une variation des champs et des inductions électromagnétiques. Ce bruit est prédominant à basse et à moyenne vitesse [Camus, 1997]. Les phénomènes électromagnétiques sont multiples. On peut citer les forces de Laplace, les forces de Maxwell ou encore la magnétostriction. Mais ce sont les forces de Maxwell et notamment les forces de Maxwell radiale dans l'entrefer de la machine qui sont prépondérantes [Cassoret, 1996]. C'est pourquoi cette dernière force fait l'objet du plus grand nombre d'études d'émission de bruit des machines.

L'étude du bruit dans les machines électriques tournantes ne date pas d'hier puisque les premières recherches dans ce domaine remontent aux années 1920 [Fritz, 1921] [Chapman, 1922]. Très vite, on a pris conscience de la nécessité de considérer ce phénomène dès la conception de la machine. Ainsi, dans les années 1930, un laboratoire d'acoustique a vu le jour en France pour réduire le bruit des convertisseurs électromécaniques [TI, 1984]. S'attaquant aux causes de ce bruit, les recherches se sont orientées, en grande partie, vers le bruit provenant de phénomènes électromagnétiques. Les années 1950 et 1960 ont ainsi été prolifiques en la matière avec des études très complètes sur les machines d'induction [Jordan, 1950] [Alger and Erdelyi, 1956] [Den Hartog, 1956] [Alger, 1965].

Parmi les différentes contraintes électromagnétiques, ce sont les forces de Maxwell qui vont être prédominantes. Ces forces vont conduire à générer des contraintes mécaniques dans la machine qui vont la déformer et ainsi générer une onde acoustique. La puissance acoustique rayonnée par le convertisseur électromécanique augmente lorsque les fréquences des harmoniques des contraintes magnétiques coïncident avec les fréquences de résonance de la structure [Im et al., 1997] [Le Besnerais et al., 2010c] [Fiedler et al., 2010] [Anwar et al., 2003]. La modélisation de ces contraintes a été étudiée essentiellement sur des machines synchrones [Cassoret, 1996] [Hubert, 2001] [Ait-Hammouda, 2005] et sur des machines à réluctance variable [Camus, 1997] [Mininger, 2005] [Ojeda, 2009]. Une fois la modélisation effectuée, il faut mettre en place des méthodes pour réduire les vibrations de la machine. Nous pouvons citer, par exemple :

- Une optimisation de la forme du courant que l'on injecte dans la machine [Ahn et al., 2004].
- L'éloignement des fréquences de l'excitation des fréquences de résonance de la machine [Torregrossa et al., 2012b].
- Le contrôle actif des vibrations à l'aide d'actionneurs piézoélectriques [Mininger, 2005] [Ojeda, 2009] [Ojeda et al., 2007] [Ojeda et al., 2009].
- Ou, enfin, en amont, dès la conception de la machine à l'aide d'une optimisation de sa géométrie. C'est cette démarche qui sera retenue pour les travaux présentés dans ce mémoire de thèse.

Nous allons donc étudier dans ce chapitre l'origine du bruit provenant de phénomènes magnétiques au sein des *MCF-AP*. Le rotor étant confiné à l'intérieur du stator, nous n'allons pas nous attarder sur son cas. En effet, l'onde acoustique générée par les déformations de ce dernier est grandement absorbée par la structure statorique. Elle rayonnera donc peu à l'extérieur de la machine et n'aura donc pas d'incidence sur la génération du bruit provenant de phénomènes magnétiques.

Ce travail est réalisé ici par simulations éléments finis, toujours à l'aide du logiciel commercial ANSYS, et par mesures expérimentales sur la machine présentée au chapitre précédent, c'est-à-dire une structure pentaphasée 20/18. La démarche que nous avons adoptée est introduite sur la Figure 2.1. Dans un premier temps, nous allons réaliser une exploration des forces de Maxwell au sein de la structure statorique afin d'étudier les différentes contraintes pouvant intervenir dans la déformation de la machine (Section 2.2). Cette étude sera réalisée par simulation éléments finis. Puis, dans un second temps, nous allons étudier les différentes résonances du stator afin d'appréhender l'influence des différentes forces sur ces dernières (Section 2.3). Cette étude sera réalisée par simulations éléments finis et par mesures expérimentales. Enfin, nous présenterons la réponse mécanique de la structure statorique (Section 2.4) en charge. Cette étude sera également réalisée par simulations éléments finis et par mesures expérimentales.

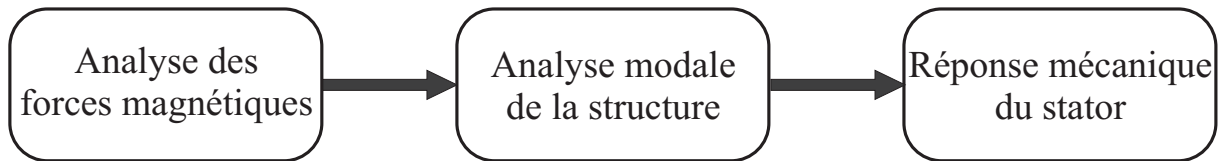


FIGURE 2.1 – Synoptique de l'étude magnéto-vibratoire des *MCF-AP*

Une partie de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans la conférence internationale *Electrical Machines (ICEM), 2012 XXth International Conference on* [Boisson et al., 2012].

2.2 Contraintes d'origines magnétiques dans les *MCF-AP*

Nous allons commencer par réaliser une exploration des contraintes magnétiques de Maxwell pour la structure statorique de la *MCF-AP* présentée au chapitre précédent, afin de comprendre les différentes sollicitations participant à la déformation du stator. Pour cela, nous réalisons une analyse à deux endroits différents de la structure :

- A l'interface entre le stator et l'entrefer de la machine, au niveau des dents statoriques.
- A l'interface entre le stator et les aimants permanents où nous allons étudier la composante normale de la contrainte.

Le calcul des contraintes magnétiques peut se faire à l'aide du tenseur des contraintes de Maxwell. Pour l'obtenir, considérons une surface séparant deux matériaux magnétiques et appelons \vec{n} un vecteur normal à cette surface. Ce vecteur est orientée du matériau possédant la perméabilité la plus élevée vers le matériau possédant la perméabilité la plus faible. La densité surfacique des contraintes magnétiques σ peut se calculer de la manière

suivante [Ren, 1994] [Meessen et al., 2013] [Barre, 2003] :

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left[(\vec{B} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{B} - \frac{1}{2} \cdot (\vec{B})^2 \cdot \vec{n} \right] \quad (2.1)$$

Appelons maintenant \vec{t} un vecteur perpendiculaire à \vec{n} portant les champs tangentiels. L'induction B et le champ magnétique H s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{B} &= B_n \cdot \vec{n} + B_t \cdot \vec{t} \\ \vec{H} &= H_n \cdot \vec{n} + H_t \cdot \vec{t} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

On peut mettre le vecteur des contraintes surfaciques magnétiques sous la forme suivante :

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{B_n^2}{\mu_0} - \mu_0 \cdot H_t^2 \right] \cdot \vec{n} + B_n \cdot H_t \cdot \vec{t} \quad (2.4)$$

Pour une justification plus détaillée de l'utilisation du tenseur de Maxwell, nous invitons le lecteur à se reporter en Annexe (Annexe A).

2.2.1 Contraintes magnétiques à l'interface entre le stator et l'entrefer

Pour pouvoir analyser les contraintes magnétiques à l'interface entre le stator et l'entrefer de la machine, nous allons devoir étudier ces contraintes spatialement puis temporellement. L'étude spatiale nous permet de comprendre comment le stator se déforme et l'étude temporelle nous permet de connaître les fréquences mises en jeux dans la déformation. Pour cela, nous allons considérer, dans un premier temps, une position particulière du rotor (la position présentée sur la Figure 1.8) et observer les contraintes magnétiques le long de l'entrefer pour différentes charges : c'est l'analyse spatiale. Ensuite, nous allons entraîner en rotation la machine et observer l'évolution des contraintes magnétiques au niveau des dents statoriques, à nouveau pour différentes charges : c'est l'analyse temporelle.

Nous allons uniquement étudier les contraintes magnétiques normales (ici radiales) au niveau de l'entrefer de la machine. Nous ne nous intéressons donc pas aux contraintes magnétiques tangentiels et ce, pour deux raisons. La première est que ces contraintes sont plus faibles que les précédentes. La seconde est que ce sont ces contraintes qui sont à l'origine du couple électromagnétique. Les notations utilisées pour présenter les efforts magnétiques sont présentées sur la Figure 2.2.

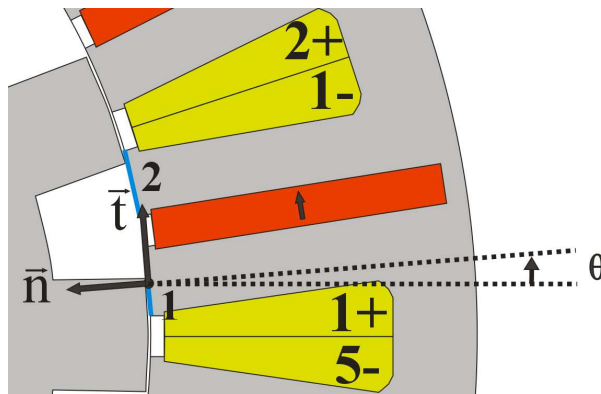


FIGURE 2.2 – Notation pour la présentation des contraintes magnétiques dans l'entrefer

Analyse spatiale

L'analyse spatiale des contraintes magnétiques au niveau de l'entrefer de la machine, combiné à l'analyse modale de la structure statorique, nous donne une première indication sur la manière dont le stator va se déformer. Pour réaliser cette étude, nous allons dans un premier temps illustrer, pour une position particulière du rotor et pour différentes charges, les contraintes magnétiques dans l'entrefer de la machine pour la *MCF-AP* 20/18. Ainsi, nous présentons :

- La FFT spatiale de l'intégrale sur une dent des contraintes magnétiques radiales sur la Figure 2.3.
- Les différents flux magnétiques et les contraintes magnétiques dans l'entrefer pour différentes charges sur la Figure 2.4.

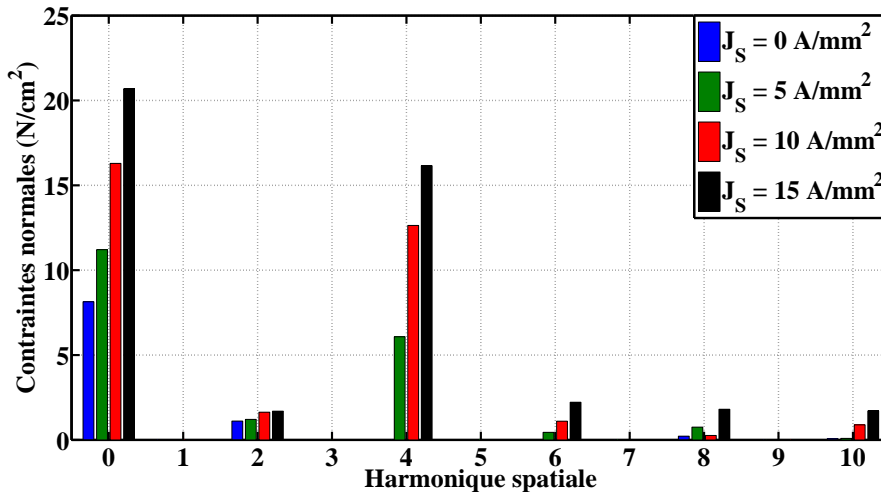
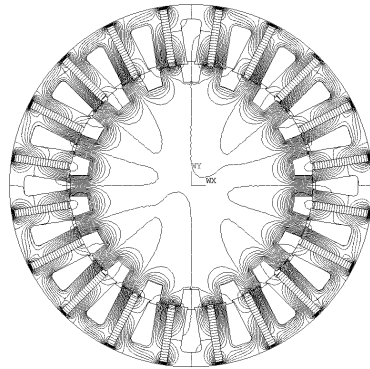


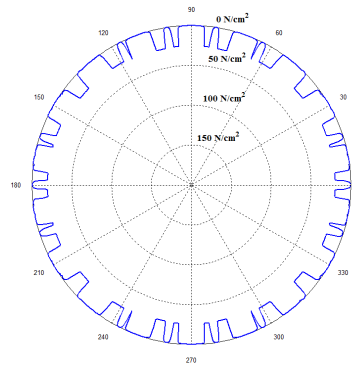
FIGURE 2.3 – FFT spatiale pour la *MCF-AP* 20/18

A partir de l'observation de ces différents résultats, nous sommes amenés à proposer plusieurs remarques sur la répartition spatiale des contraintes magnétiques dans les *MCF-AP* :

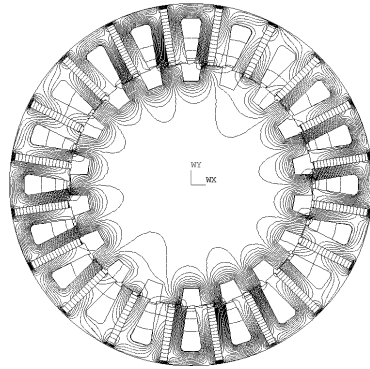
- La première conclusion est plutôt une remarque. Les contraintes magnétiques sont toujours dirigées dans le même sens, à savoir du matériau magnétique possédant la plus grande perméabilité (le stator) vers le matériau possédant la perméabilité la plus faible (l'air). Cela a pour conséquence de diminuer la taille de l'entrefer.
- A vide, c'est-à-dire à $J_s = 0 \text{ A/mm}^2$, des contraintes magnétiques existent même en absence d'alimentation. Cela vient de la présence des aimants permanents. Ces contraintes, bien que plus faibles que celles existantes lorsque la machine est en charge, vont déformer la machine et générer du bruit acoustique si le rotor est en mouvement. Ces dernières peuvent atteindre localement jusqu'à 30 N/cm^2 .
- En charge, les contraintes magnétiques augmentent fortement. A titre d'exemple, pour un courant surfacique de $J_s = 15 \text{ A/mm}^2$, ces contraintes peuvent atteindre localement 150 N/cm^2 .
- Le maximum des contraintes apparaît lorsque les dents statoriques et rotoriques sont en vis-à-vis. A contrario, ces contraintes sont pratiquement nulles lorsque les dents sont en opposition.
- En analysant le spectre de la répartition spatiale des contraintes magnétiques, nous observons un grand nombre d'harmoniques. Ce sont eux qui peuvent exciter les modes propres de la structure statorique.
- Du fait d'une répartition spatiale des forces équilibrées (due aux nombres pairs de dents rotoriques et statoriques), seules les harmoniques spatiaux de rangs pairs interviennent (harmoniques 2, 4, 6, ...). En revanche, en cas de défaut dans une bobine ou lorsqu'il y a un nombre impair de dents, il y a déséquilibre des contraintes magnétiques et donc apparition d'harmoniques de rangs impairs.
- Si nous observons les dix premiers harmoniques spatiaux, nous nous rendons compte que l'harmonique 4 est prédominant. Une plus longue conclusion sur cette dernière observation sera proposée lors de l'analyse modale de la structure statorique.



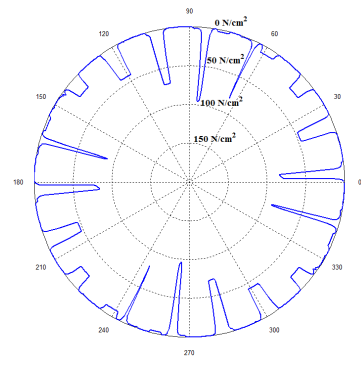
(a) $J_S = 0 \text{ A/mm}^2$ - Flux



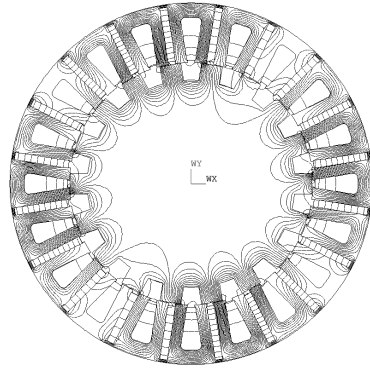
(b) $J_S = 0 \text{ A/mm}^2$ - Contraintes



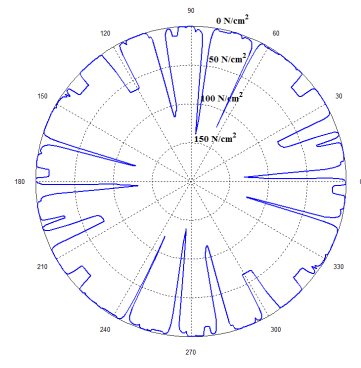
(c) $J_S = 5 \text{ A/mm}^2$ - Flux



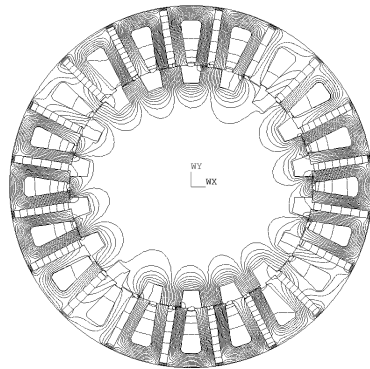
(d) $J_S = 5 \text{ A/mm}^2$ - Contraintes



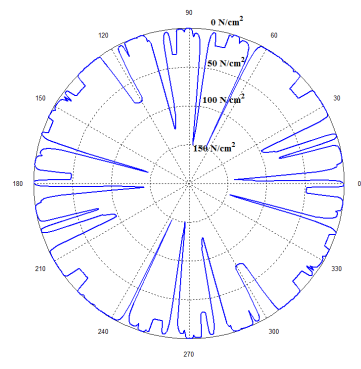
(e) $J_S = 10 \text{ A/mm}^2$ - Flux



(f) $J_S = 10 \text{ A/mm}^2$ - Contraintes



(g) $J_S = 15 \text{ A/mm}^2$ - Flux



(h) $J_S = 15 \text{ A/mm}^2$ - Contraintes

FIGURE 2.4 – Contraintes magnétiques dans l'entrefer pour la *MCF-AP* 20/18

Analyse temporelle

Nous venons d'analyser spatialement les contraintes magnétiques au niveau de l'entrefer de la machine. Cela nous a permis d'anticiper quant à la manière dont la machine va se déformer. Passons à présent à l'analyse temporelle de ces contraintes. Il s'agit de les étudier lorsque le rotor est entraîné en rotation afin de connaître les amplitudes mais également les fréquences mise en jeu. Pour cela, nous allons analyser les contraintes magnétiques moyennes au niveau de la surface dans l'entrefer de deux dents statoriques réparties de part et d'autre d'un aimant permanent (les dents numérotées 1 et 2 sur la Figure 2.2) en fonction de la position rotorique. Les résultats sont présentés sur la Figure 2.5.

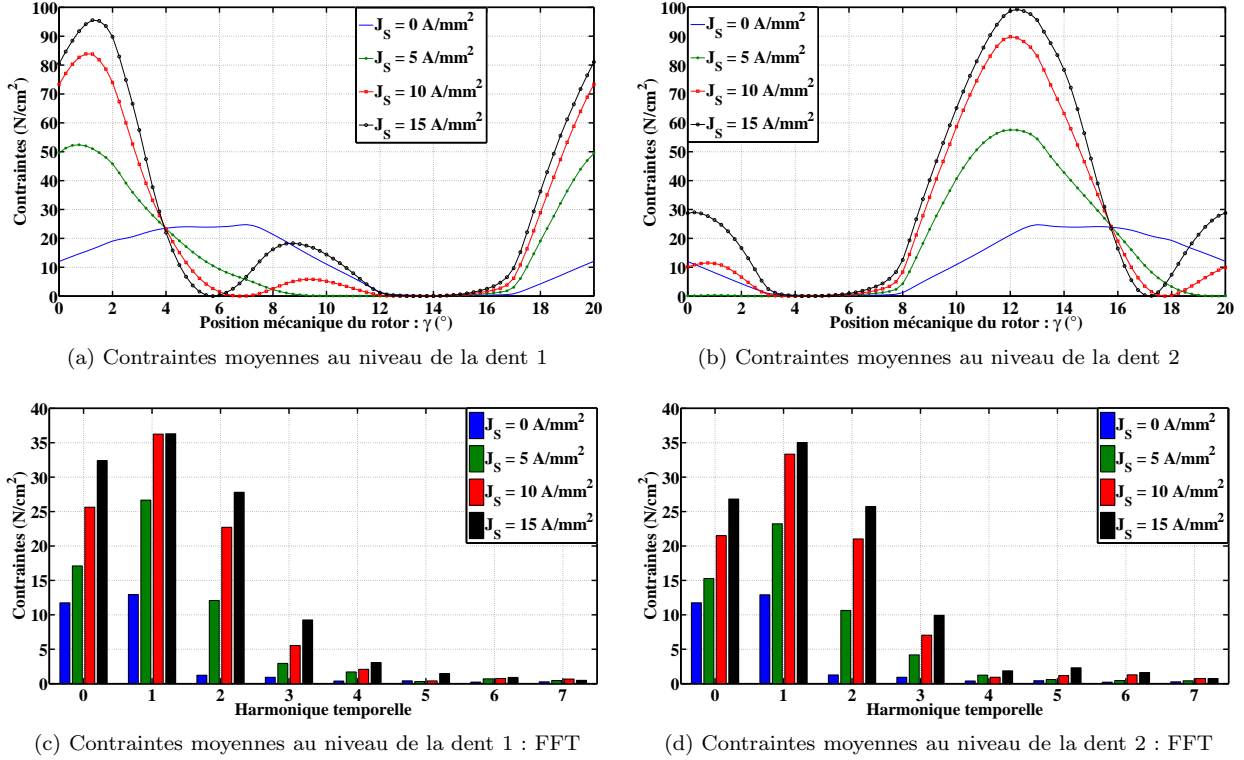


FIGURE 2.5 – Contraintes magnétiques moyennes au niveau des dents pour la *MCF-AP* 20/18

A nouveau, comme pour l'analyse spatiale précédente, nous pouvons faire quelques remarques au vu de ces résultats :

- Lorsque le rotor est entraîné en rotation, les harmoniques temporels des contraintes magnétiques radiales varient à des fréquences f_k en lien avec la vitesse de rotation de la machine :

$$f_k = k \cdot \frac{N_r \cdot \Omega}{60} \quad (2.5)$$

- Nous observons que les principaux harmoniques temporels des contraintes magnétiques sont les harmoniques 1 à 4.
- En charge, le spectre des contraintes magnétiques est plus riche qu'à vide.
- Il existe une dissymétrie des contraintes aux niveaux des dents positionnées de part et d'autre de l'aimant. Cela s'explique par la direction de l'aimantation.

2.2.2 Contraintes magnétiques à l'interface entre le stator et les aimants permanents

Continuons notre exploration des différentes contraintes magnétiques existantes au niveau de la structure statorique. Analysons à présent ce qui se passe à l'interface entre le stator et les aimants permanents. Pour cela, nous allons calculer la contrainte magnétique moyenne de chaque côté de l'aimant permanent présenté sur la Figure 2.2 lors d'un fonctionnement normal, c'est-à-dire lorsque le rotor est entraîné en rotation, pour différentes charges. Nous réalisons ainsi une analyse temporelle. Les résultats sont présentés sur la Figure 2.6.

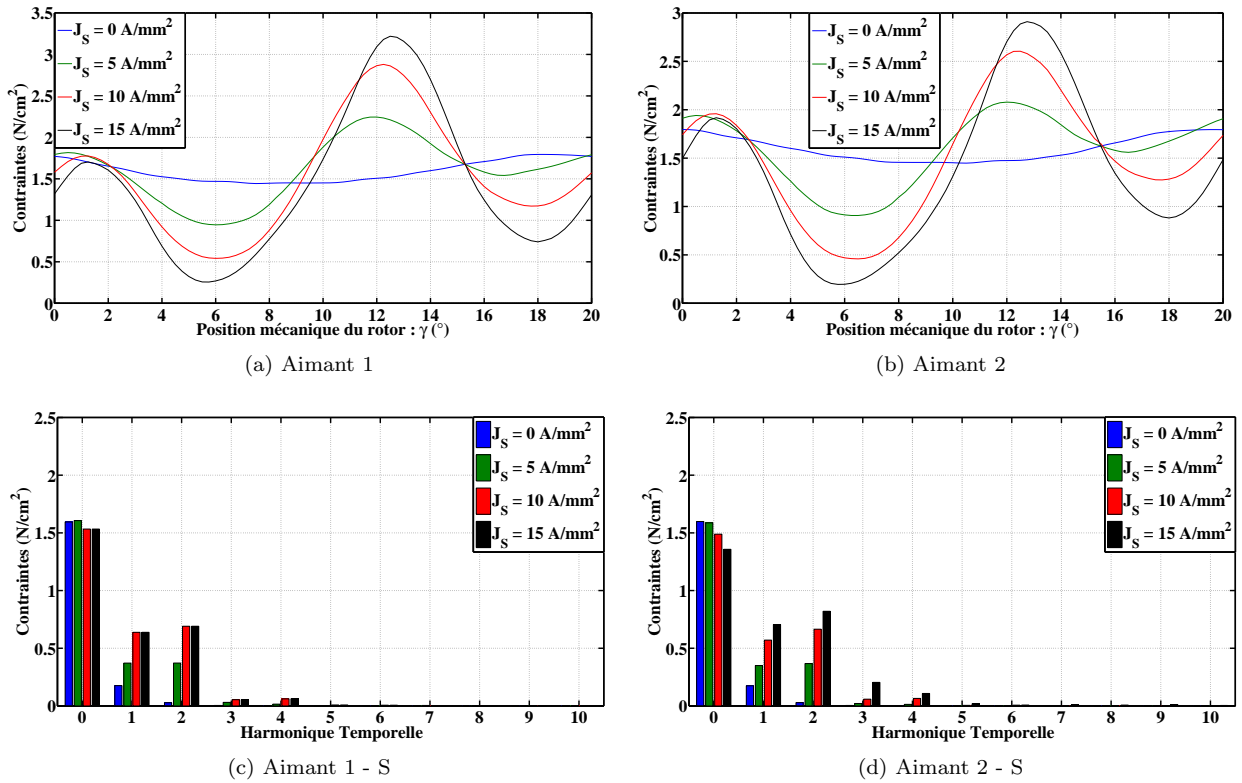


FIGURE 2.6 – Contraintes magnétiques au niveau de l'aimant pour la *MCF-AP 20/18*

Proposons quelques remarques sur ce qui vient d'être présenté :

- Les harmoniques temporels des contraintes magnétiques normales à l'interface entre le stator et les aimants permanents ont les mêmes fréquences que les harmoniques temporels des contraintes magnétiques à l'interface entre le stator et l'entrefer.
- Les amplitudes des contraintes normales à l'interface entre le stator et les aimants permanents sont très faibles devant celles à l'interface entre le stator et l'entrefer. Néanmoins, elles varient dans le temps et peuvent donc exciter les dents statoriques et générer du bruit acoustique.
- A nouveau les harmoniques temporels prépondérants sont les harmoniques 1 à 4. De plus, également comme précédemment, il y a dissymétrie des contraintes du fait de l'aimantation.

2.3 Analyse modale de la structure statorique

Les différentes contraintes magnétiques étudiées précédemment, notamment au niveau de l'entrefer de la machine et au niveau de l'interface entre le stator et les aimants permanents, vont exciter la structure statorique. Cette dernière va se déformer et peut même entrer en résonance :

- si la répartition spatiale des contraintes magnétiques coïncide avec la déformée spatiale des modes propres de résonance du stator,
- **et** si les fréquences des forces excitatrices coïncident avec les fréquences de résonances des modes propres.

Par conséquent, il est primordial de connaître les fréquences des modes propres de la structure statorique et donc d'effectuer une analyse modale. Le stator peut se déformer de différentes manières. Les contraintes magnétiques au niveau de l'entrefer de la machine vont essentiellement « ovaliser » la structure [Mininger, 2005] [Ojeda, 2009] suivant des déformées modales à n lobes, doubles, dont les allures sont présentées sur la Figure 2.7. Les contraintes magnétiques à l'interface entre le stator et les aimants permanents vont, elles, exciter les dents statoriques qui peuvent également entrer en résonance. Néanmoins, les résonances des dents apparaissent le plus souvent à des fréquences non audibles (supérieures à 20 kHz) et sont en plus fortement atténuées par la présence des enroulements [Hubert, 2001].

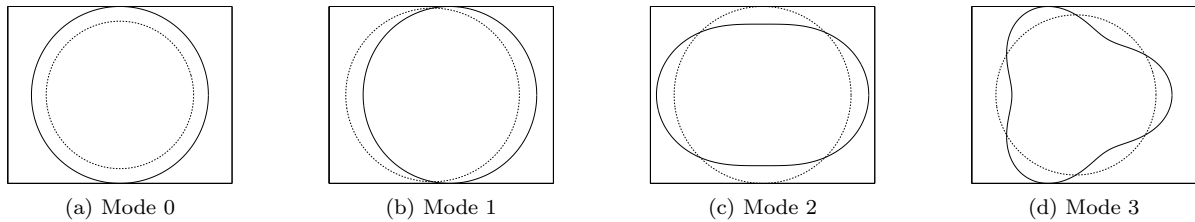


FIGURE 2.7 – Modes propres d'ovalisations de la structure statorique

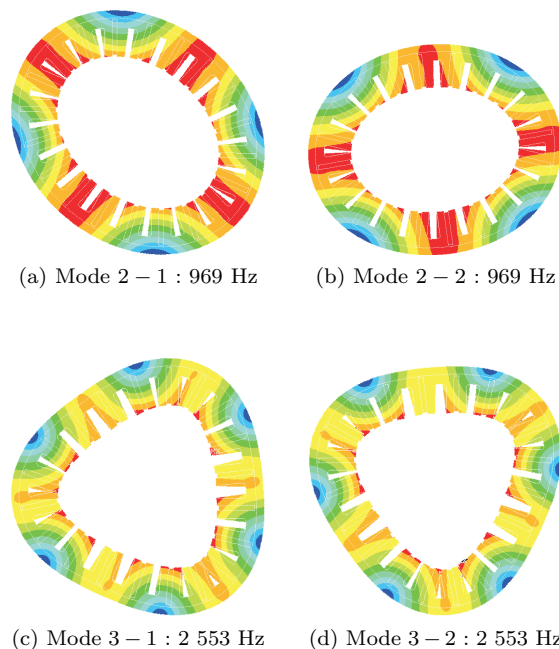
Nous allons effectuer une analyse modale de la structure statorique de deux manières différentes que nous allons comparer. Dans un premier temps, nous réaliserons des simulations éléments finis pour estimer les modes propres de la structure statorique. Ensuite, nous validerons la simulation éléments finis en comparant les résultats avec des mesures expérimentales.

2.3.1 Simulation par la méthode des éléments finis

Afin de réaliser les simulations par la méthode des éléments finis permettant d'obtenir les résonances de la structure statorique, nous avons considéré les points suivantes :

- Le stator est modélisé avec une couronne extérieure en aluminium afin de pouvoir comparer les résultats avec les mesures expérimentales.
- Les enroulements statoriques sont pris en compte en supposant qu'ils rajoutent de la masse à l'ensemble sans rajouter de la rigidité.

Les résultats des premiers modes propres d'ovalisations de la structure statorique sont donnés sur la Figure 2.8.



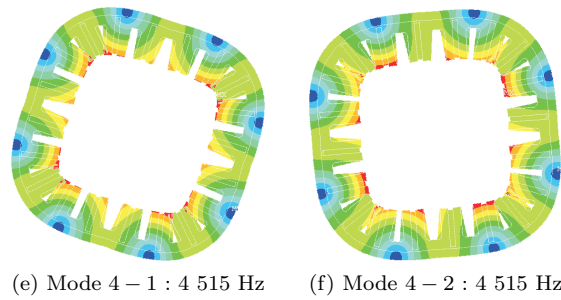


FIGURE 2.8 – Premiers modes propres du stator déterminés par simulation éléments finis (le gradient de couleur indique les amplitudes du déplacement : de rouge (élevée) à bleue (faible))

Sur cette figure, nous venons de présenter les premiers modes propres d’ovalisations en deux dimensions de la structure statorique. A chaque fois, il s’agit de modes doubles à n lobes. De par la symétrie de la machine, ces modes doubles sont à la même fréquence. Ainsi, par exemple, le mode double d’ovalisation d’ordre 2 a ses deux fréquences propres à 969 Hz . De plus, nous pouvons voir que les modes présentés ici sont à des fréquences audibles. Regardons à présent les modes de résonances des dents statoriques. Elles sont présentées sur la Figure 2.9. Nous pouvons apercevoir que ces résonances ont lieu à des fréquences supérieures à 20 kHz donc non audibles (pour notre type de machine).

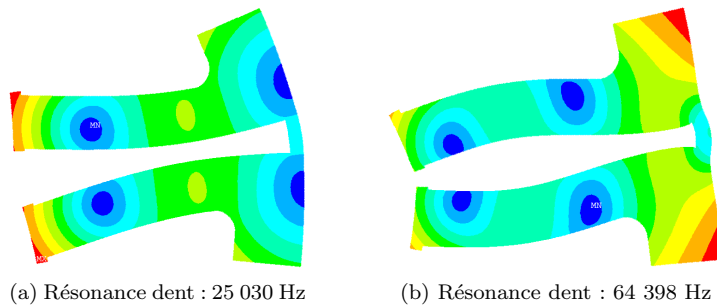


FIGURE 2.9 – Résonances des dents statoriques par simulation éléments finis (le gradient de couleur indique les amplitudes du déplacement : d’amplitude élevée à faible - de rouge à bleue)

2.3.2 Mesures expérimentales

Afin de valider les résultats obtenus par simulations éléments finis, nous les avons comparés avec des mesures expérimentales. Pour cela, nous avons placé un capteur accéléromètre piézoélectrique sur la surface extérieure du stator de la machine (voir Figure 2.10). Ce capteur est placé au-dessus d’une dent statorique. Un courant en créneaux est injecté par l’intermédiaire d’un amplificateur linéaire dans une seule bobine d’une seule phase (la bobine entourant la dent sur laquelle est placé le capteur). L’amplitude de ce courant est de 0.5 A et sa fréquence est supposée très faible devant les fréquences de résonance du stator.

Le fait d’injecter un courant en créneaux dans une seule bobine d’une seule phase de la machine a plusieurs conséquences et notamment :

- Le couple électromagnétique généré est de moyenne nulle : le rotor n’est donc pas entraîné en rotation.
- Dans ce cas particulier, la répartition spatiale des forces n’est pas équilibrée. Cela a pour conséquence d’exciter en particulier tous les modes propres d’ovalisations en deux dimensions, qu’ils soient pairs ou impairs.

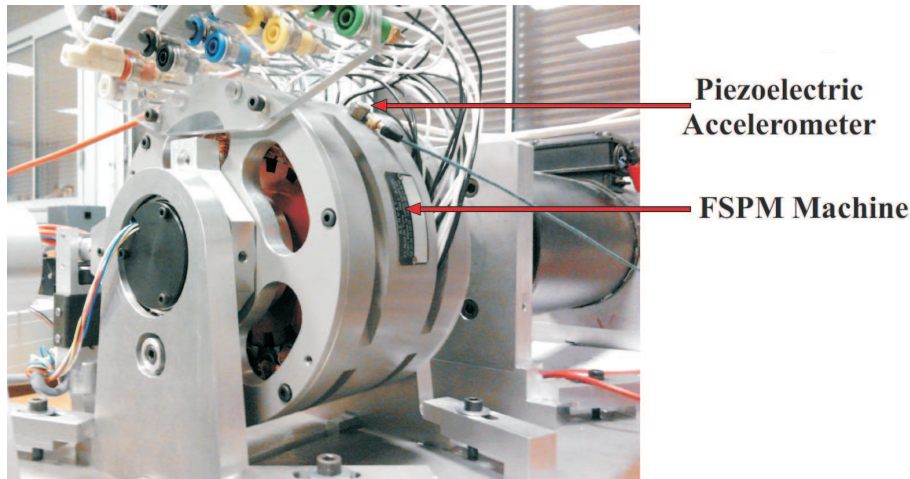


FIGURE 2.10 – Montage expérimental pour les mesures des modes propres

Les résultats des mesures sont présentés sur la Figure 2.11. Le courant est présenté en rouge. Nous mesurons les accélérations du point de la surface extérieure du stator où le capteur piézoélectrique est placé (courbe bleue). A partir de ces relevés temporels, nous déduisons la FFT de cette accélération afin de connaître les différentes résonances de la machine.

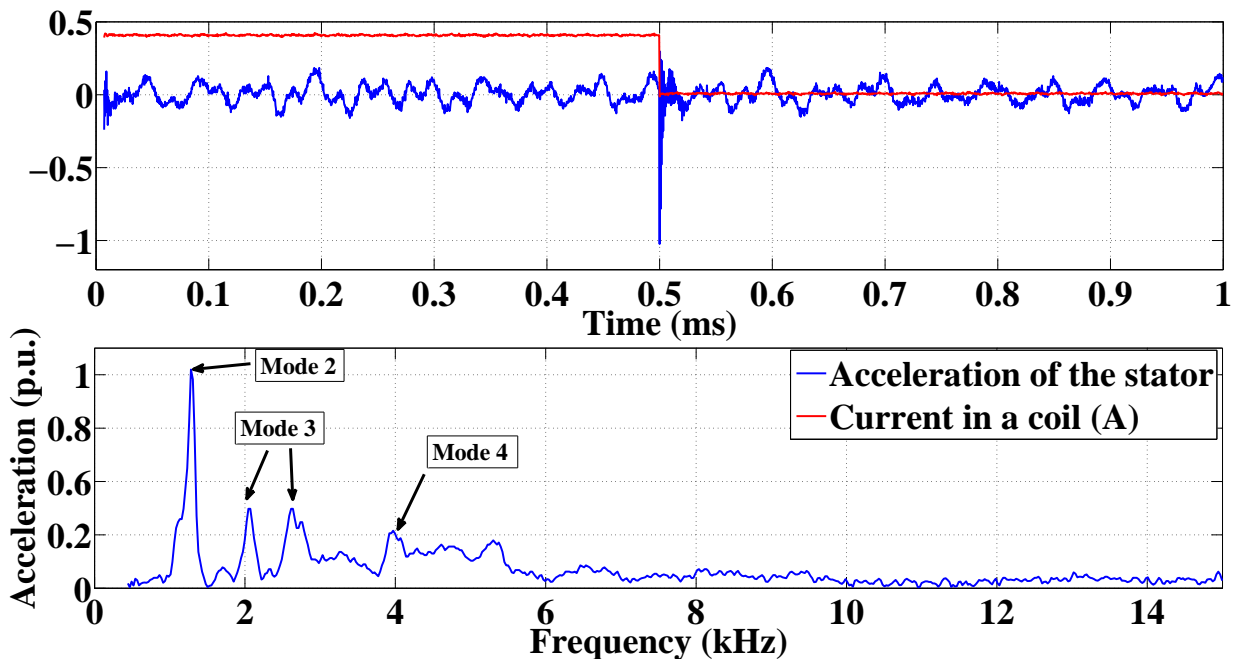


FIGURE 2.11 – Mesures des résonances du stator de la *MCF-AP*

En analysant ces résultats, nous voyons apparaître plusieurs résonances et notamment aux fréquences 1.28 kHz , 2.05 kHz , 2.61 kHz et 3.98 kHz . Cependant, pour le moment, nous ne pouvons pas conclure directement quant à la déformée associée à chacune de ces résonances. Il nous faut réaliser d'autres mesures expérimentales pour cela. Ces nouvelles mesures consistent, cette fois-ci, à injecter un courant sinusoïdal toujours dans la même bobine de la même phase à une des fréquences de résonances obtenues précédemment. Puis, on déplace (collage / décollage) le capteur accéléromètre le long de la surface extérieure du stator et on réalise plusieurs mesures. Les résultats sont présentés, pour les quatre résonances, sur la Figure 2.12. A partir de cette Figure, les modes propres du stator peuvent être déterminés.

2.4. RÉPONSE VIBRATOIRE DE LA STRUCTURE STATORIQUE

Le signal spatial de l'accélération est un signal sinusoïdal de période angulaire spatiale $2\pi/n$ avec n le numéro du mode propre associé. Par conséquent, nous avons noté que :

- Le signal à la fréquence de 1.28 kHz possède une période de π . Nous avons donc affaire à un mode 2.
- Le signal à la fréquence de 2.05 kHz possède une période de $2\pi/3$. Nous avons donc affaire à un mode 3.
- Le signal à la fréquence de 2.61 kHz possède une période de $2\pi/3$. Nous avons donc affaire à un mode 3.
- Le signal à la fréquence de 3.98 kHz possède une période de $\pi/2$. Nous avons donc affaire à un mode 4.

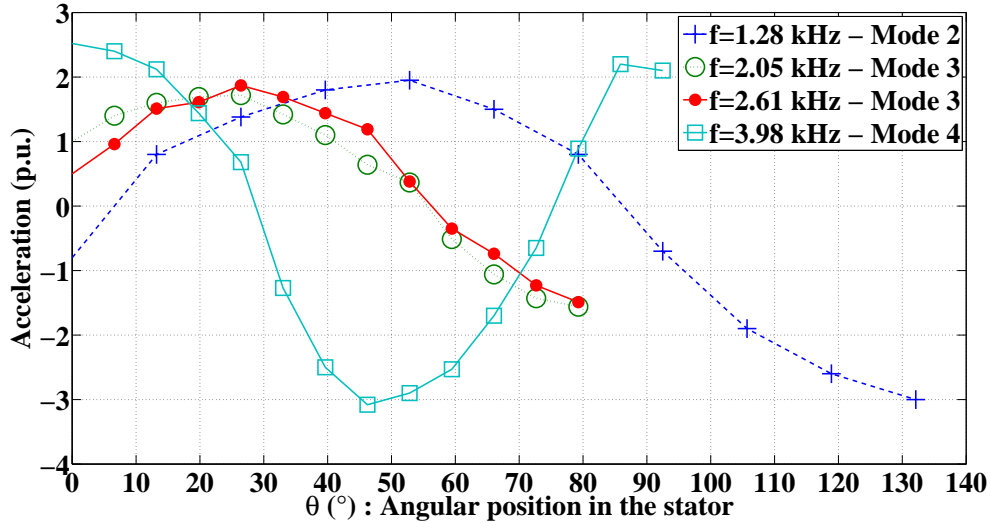


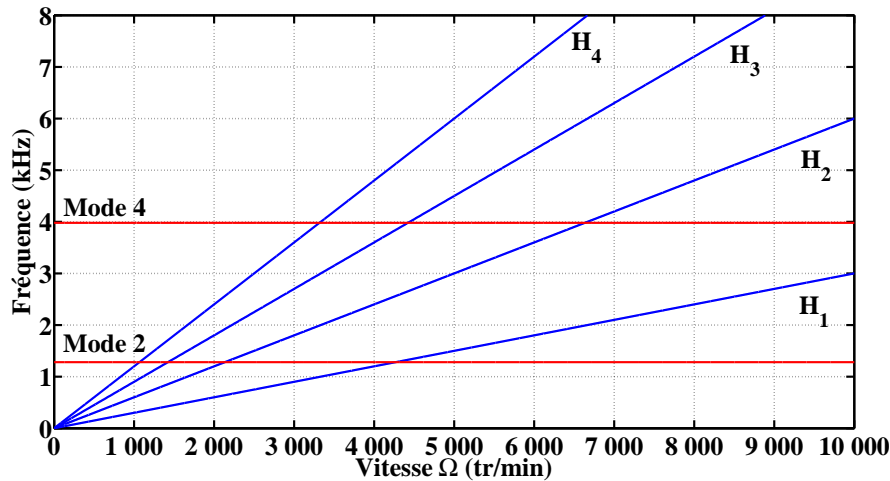
FIGURE 2.12 – Mesures expérimentales de l'accélération afin de déterminer les modes propres de la *MCF-AP*

Maintenant, effectuons une comparaison entre les simulations éléments finis et les mesures expérimentales :

- Les mesures expérimentales des résonances de la structure statorique font apparaître trois modes propres d'ovalisations : les modes 2, 3 et 4. Les modes de rangs plus élevés sont trop atténués pour apparaître.
- Les fréquences obtenues par simulations éléments finis et expérimentales sont proches.
- Avec les simulations éléments finis, les modes doubles (modes 2-1 et 2-2, mode 3-1 et 3-2, mode 4-1 et 4-2) ont les mêmes fréquences.
- En revanche, pour les mesures expérimentales, il y a de petites différences. Les mesures expérimentales permettent de remarquer que les modes doubles 2 ont la même fréquence, comme les modes doubles 4. En revanche, les modes doubles 3 ont des fréquences légèrement différentes due à une asymétrie du moteur expérimental.

2.4 Réponse vibratoire de la structure statorique

A partir des études qui viennent d'être menées, nous sommes en mesure de prédire le comportement vibratoire de la structure statorique. Pour cela, nous allons reprendre le travail qui a été effectué sur la *MCF-AP* 20-18. L'étude spatiale des contraintes magnétiques dans l'entrefer de la machine nous donne une indication sur le mode d'ovalisation qui peut être excité. En reprenant les résultats présentés sur la Figure 2.3, dans le cas d'une *MCF-AP* 20/18 sans défauts, nous nous rendons compte que seuls les modes propres d'ovalisations de rangs pairs peuvent être excités. L'étude temporelle des contraintes magnétiques dans l'entrefer de la machine nous donne, elle, une indication sur le nombre mais également aussi sur les fréquences des harmoniques des forces mise en jeu. Pour ladite machine, nous avons observé essentiellement la présence des quatre premiers harmoniques dont les fréquences sont proportionnelles à la vitesse de rotation de la machine ainsi qu'au rang de l'harmonique considéré (voir Equation 2.5). Enfin, l'analyse modale de la structure statorique nous renseigne sur les fréquences des modes propres d'ovalisation. Ainsi, expérimentalement, nous avons déterminé les fréquences des modes 2, 3 et 4. Combinant tous ces résultats, nous pouvons les résumer en présentant le spectrogramme de la *MCF-AP* 20/18 étudiée (voir Figure 2.13).


 FIGURE 2.13 – Spectrogramme pour la *MCF-AP* 20/18

Le spectrogramme représente les fréquences des vibrations mises en jeu en fonction de la vitesse de rotation de la machine. Les courbes en bleues représentent les fréquences des quatre harmoniques de contraintes. Les courbes en rouges représentent, elles, les fréquences des modes propres d'ovalisation excitables (mode 2 et mode 4). Ainsi, la compréhension des vibrations de la machine s'en retrouve grandement facilité par la lecture de ce graphe. A titre d'exemple, analysons le cas où la machine est entraîné en rotation à la vitesse de $\Omega = 1\,000\text{ tr/min}$. A cette vitesse-là, les fréquences principales des vibrations sont respectivement de 300, 600, 900 et 1 200 Hz. De plus, l'harmonique temporel des contraintes magnétiques de rang 4 entraînera la résonance du mode d'ovalisation d'ordre 2 puisque les fréquences coïncident.

A l'étude de ce spectrogramme, nous pouvons en ajouter une autre : celle de d'étude des déformations de la structure statorique. Pour cela, nous avons réalisé une analyse par simulations éléments finis. Nous nous sommes servis de la connaissance des contraintes magnétiques ainsi que celle des modes propres d'ovalisations de la structure obtenues numériquement précédemment pour prédire, dans deux cas de figure, les accélérations radiales d'un point de la surface extérieure du stator. L'étude a été conduite pour deux vitesses particulières :

- Pour $\Omega = 1\,077\text{ tr/min}$ sur la Figure 2.14a qui présente les accélérations radiales en fonction du temps et sur la Figure 2.14b qui présente le spectre des accélérations radiales.
- Pour $\Omega = 2\,000\text{ tr/min}$ sur la Figure 2.14c qui présente les accélérations radiales en fonction du temps et sur la Figure 2.14d qui présente le spectre des accélérations radiales.

Lorsque la machine est entraînée à la vitesse de rotation de $\Omega = 1\,077\text{ tr/min}$, les harmoniques des contraintes magnétiques sont des multiples de 323 Hz (323 Hz, 646 Hz, 969 Hz, ...). Or, pour ce cas particulier, les fréquences des deux modes doubles d'ordre 2, estimés numériquement à 969 Hz, coïncident parfaitement avec l'harmonique de rang 3 des contraintes magnétiques. Par conséquent ces deux modes doubles sont excités et la machine entre en résonance à cette fréquence particulière. En revanche, lorsque la machine est entraîné à la vitesse de rotation de $\Omega = 2\,000\text{ tr/min}$, les harmoniques des contraintes magnétiques sont des multiples de 600 Hz (600 Hz, 1 200 Hz, 1 800 Hz, ...). Dans ce cas particulier, il n'y a pas de mode excités. La machine se déforme aux fréquences des contraintes magnétiques mais ne résonne pas.

2.4. RÉPONSE VIBRATOIRE DE LA STRUCTURE STATORIQUE

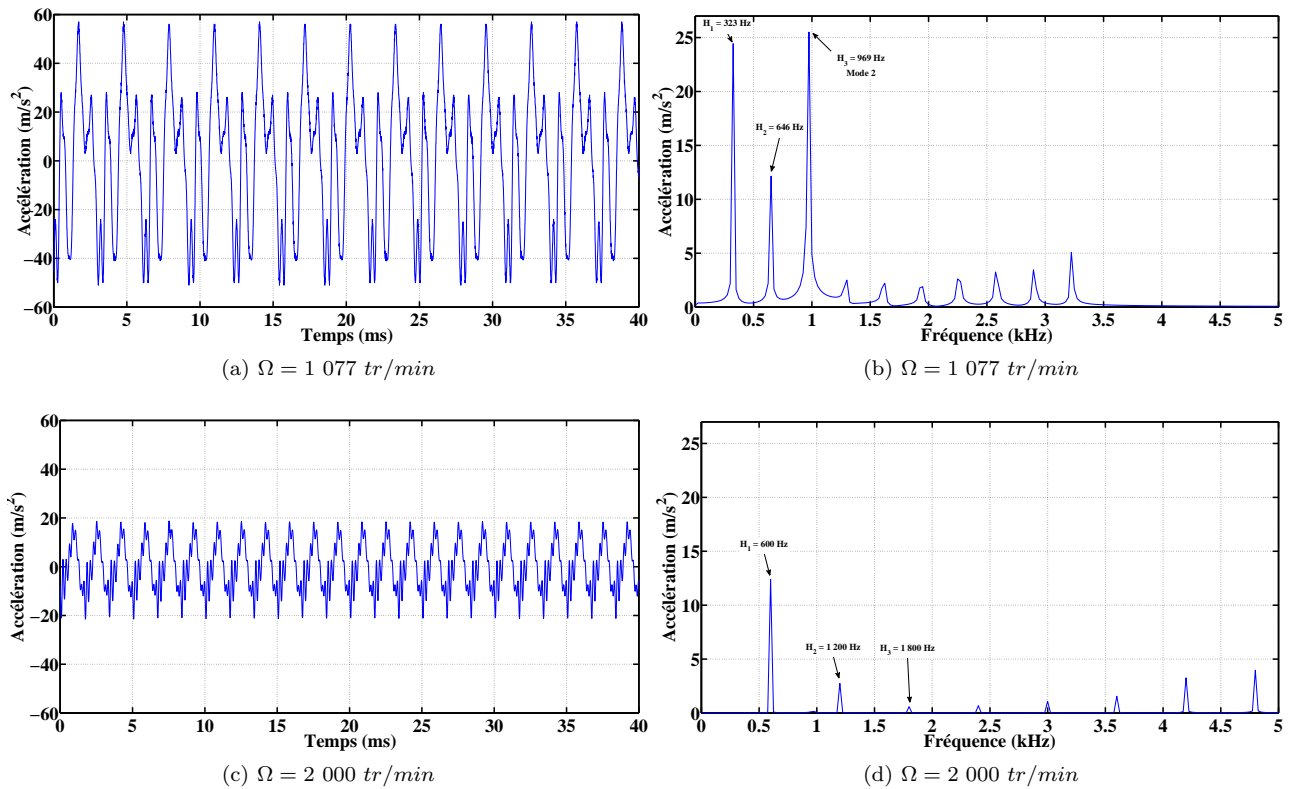
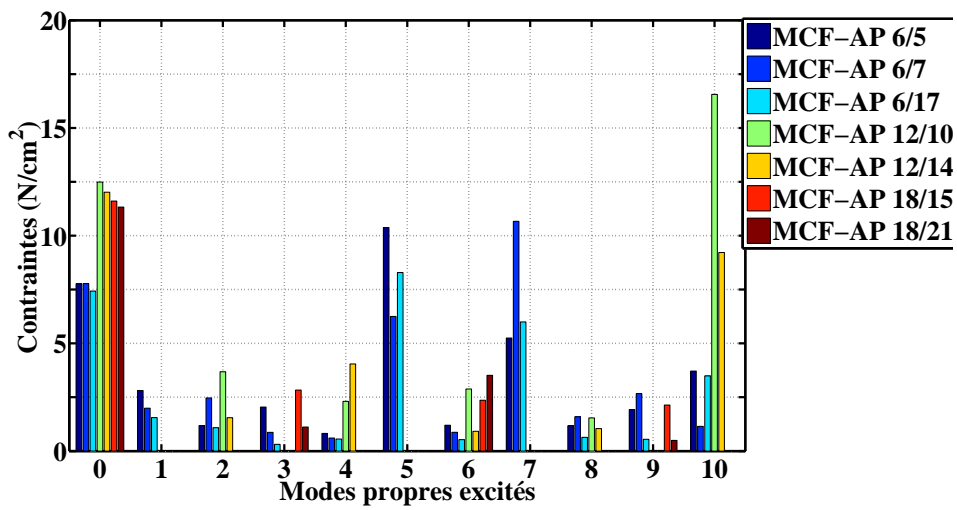


FIGURE 2.14 – Accélération radiale d’un point de la surface extérieure du stator

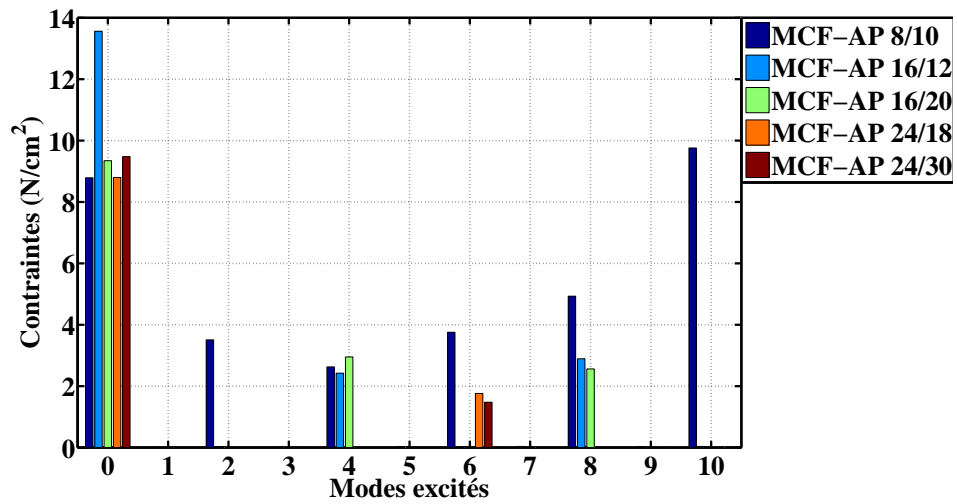
Nous avons mené l’étude pour une *MCF-AP* pentaphasée 20/18. Dans ce cas particulier, seuls les modes propres de rangs pairs peuvent donner lieu à des résonances. Or, il n’est pas satisfaisant de se contenter uniquement de cette structure car il en existe un grand nombre. Par conséquent, nous allons étudier les modes possiblement excités pour différentes structures de *MCF-AP* : triphasées, tetrphasées et pentaphasées. Les modes propres possiblement excités sont présentés sur la Figure 2.15.

En observant ces trois figures, nous pouvons faire quelques conclusions quant aux modes possiblement excitables lors d’un fonctionnement sans défaut :

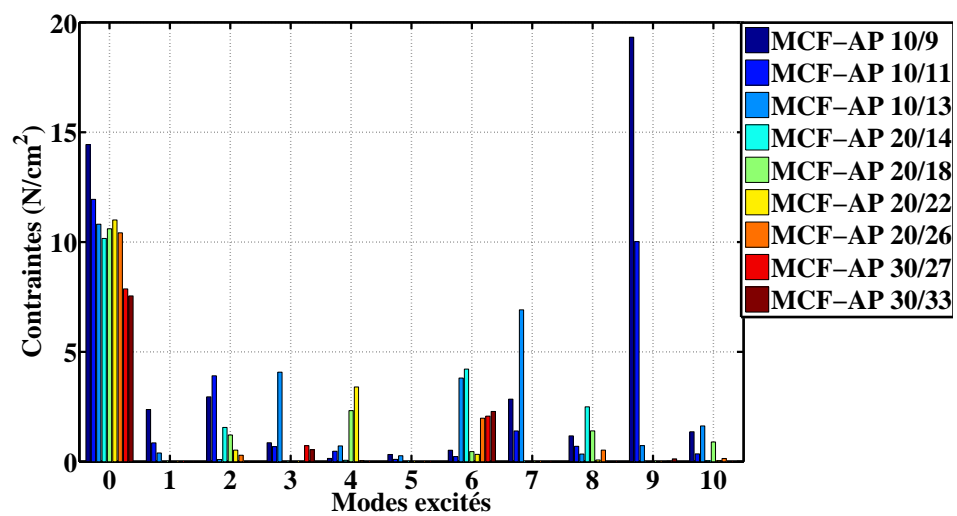
- Si le nombre de dents rotoriques est pair, seuls les modes de rangs pairs peuvent être excités.
- Si le nombre de dents rotoriques est impair, les modes pairs et impairs peuvent être excités.



(a) *MCF-AP* triphasées



(b) *MCF-AP* tetraphasées



(c) *MCF-AP* pentaphasées

FIGURE 2.15 – Modes propres possiblement excités pour différentes structures de *MCF-AP*

2.5 Modèles permettant de prédire et de réduire le bruit acoustique généré par les *MCF-AP*

L'étude conduite sur l'origine du bruit dans les *MCF-AP* a mis en évidence la nécessité de mettre en place une démarche s'appuyant sur plusieurs physiques avec leurs grandeurs associées que nous avons distinguées. La première de ces grandeurs est l'état électromagnétique de la machine et plus particulièrement les différentes forces magnétiques existantes au sein de sa structure. La deuxième est mécanique avec l'estimation des modes propres de résonance de cette dernière afin de prédire la manière dont elle va se déformer et les fréquences mises en jeu. La troisième, enfin, correspond à la pression acoustique : la connaissance de ces déformations va permettre de déduire son rayonnement acoustique.

Ces grandeurs ont été obtenues et présentées pour une seule structure de *MCF-AP* 5-phases 20/18 à l'aide de simulations éléments finis ou à l'aide de mesures expérimentales. Il nous faut, à présent, être capable d'estimer ces mêmes grandeurs quelle que soit la structure proposée afin de construire un modèle multi-physique magnéto-acoustique. Ensuite, la deuxième étape sera d'utiliser ce modèle pour mettre en place des méthodes permettant la réduction du bruit généré sans que cela se fasse au détriment des performances électromagnétiques.

Avant de proposer des méthodes pour pouvoir réduire le bruit acoustique générée par les machines électriques, il faut être en mesure de réaliser un modèle sous la même forme que celui proposé au chapitre précédent sur la Figure 2.1. La question que nous sommes en droit de nous poser est la suivante : quel type de modèle allons-nous adopter ? Classiquement, trois types de modèles sont à envisager : les modèles purement analytiques, les modèles purement numériques et enfin les modèles combinant des parties analytiques à des parties numériques.

Les avantages et les inconvénients des différents types de modèles sont bien connus et peuvent se résumer en un diagramme (voir Figure 2.16). Pour obtenir un modèle rapide, il est nécessaire d'utiliser des formulations analytiques. En revanche, si nous voulons augmenter la précision du modèle, cela doit se faire au détriment de la vitesse en passant par des modèles éléments finis.



FIGURE 2.16 – Comparaison modèle analytique / éléments finis

2.5.1 Modèles de type numériques

Nous avons déjà présenté un modèle utilisant des simulations éléments finis pour la prédiction des performances magnétiques et mécaniques des machines *MCF-AP*. Ce type de modèle a l'avantage d'être très précis en prenant en compte de nombreux phénomènes et plus particulièrement un qui pose problème lors de l'utilisation de modèles analytiques : la prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques. De tels modèles, utilisés sur des structures *MCF-AP*, sont également étudiés dans [Verez, 2014] où l'impact de la combinaison nombre de dents statoriques / nombre de dents rotoriques sur les performances magnéto-acoustiques est étudié.

Néanmoins, l'inconvénient principal des méthodes de types éléments finis est leur temps de calcul trop prohibitif. Par conséquent, il est difficile, voir impossible d'implanter ces modèles dans des boucles d'optimisations géométriques. Des méthodes permettant des simulations éléments finis plus rapides peuvent être proposés comme dans [Torregrossa et al., 2012a] [Torregrossa et al., 2011] [Torregrossa et al., 2012b] où les performances mécaniques pour différentes charges de la machine sont déduites à partir de l'estimation en amont de la réponse impulsionnelle mécanique (voir Figure 2.17).

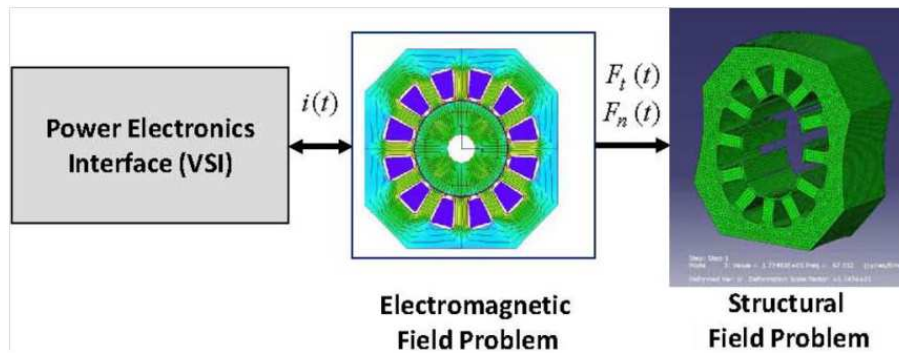


FIGURE 2.17 – Modèle Magnétique et Mécanique [Torregrossa et al., 2012a]

Mais, ces modèles, bien plus rapides, ne sont pas adaptables dans un algorithme d'optimisation géométriques puisqu'on ne connaît pas à priori la réponse impulsionnelle. Par conséquent, les modèles magnéto-acoustiques éléments finis ne sont pas utilisés dans des boucles d'optimisations géométriques. Nous nous tournerons donc plutôt vers les modèles analytiques dans la suite du travail présenté dans ce mémoire.

2.5.2 Modèles analytiques

En acceptant de sacrifier quelque peu la précision des estimations des grandeurs magnéto-acoustiques, nous pouvons utiliser des modèles analytiques pour gagner en temps de calcul et ainsi autoriser la mise en place d'une démarche d'optimisation. C'est le choix retenu par exemple par AIT-HAMMOUDA dans [Ait-Hammouda, 2005] [Ait-Hammouda, 2003] et [A. Ait-Hammouda, 2005] qui a réalisé un modèle analytique magnéto-acoustique appliquée aux machines asynchrones (voir Figure 2.18).

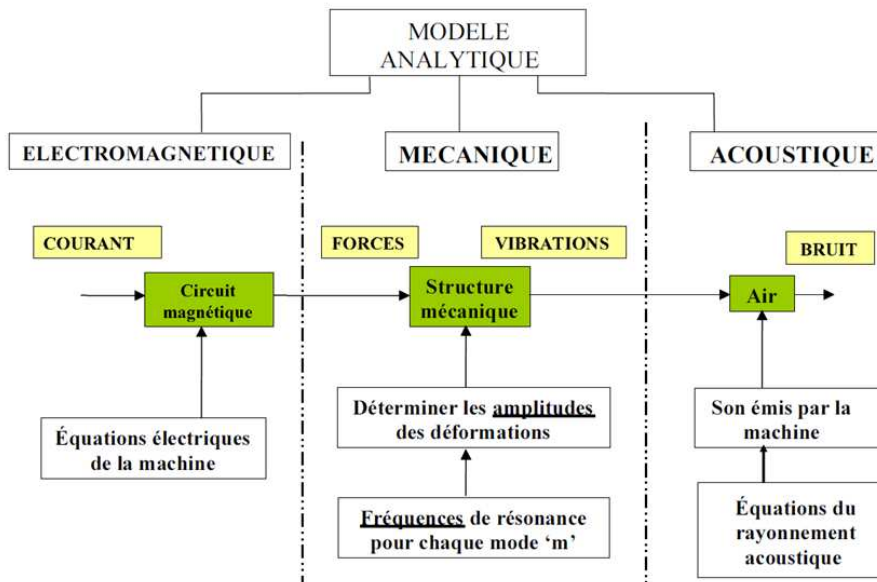


FIGURE 2.18 – Modèle analytique magnéto-acoustique [Ait-Hammouda, 2005]

A partir de modèles analytiques, des algorithmes d'optimisations géométriques peuvent être mis en place comme dans les études de LE BESNERAIS dans [Le Besnerais et al., 2010c] [Le Besnerais, 2008a] [Le Besnerais, 2008b] [Le Besnerais et al., 2010a] [Le Besnerais et al., 2010b] [Le Besnerais et al., 2008] qui a implanté ce type de modèle dans un algorithme d'optimisation NSGA-II (voir Figure 2.19).

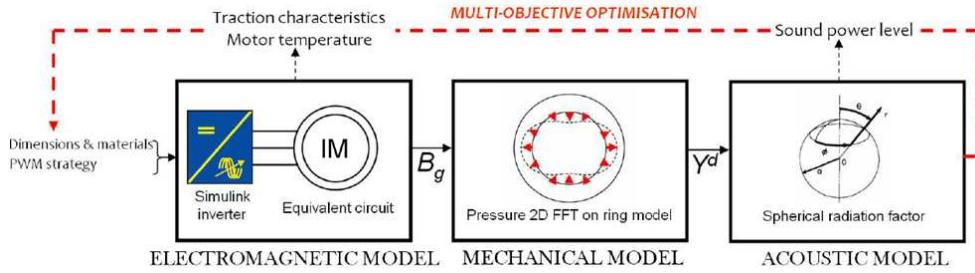


FIGURE 2.19 – Optimisation géométrique utilisant un modèle analytique [Le Besnerais, 2008a]

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'origine du bruit acoustique dans les machines synchrones à commutations de flux à aimants permanents et plus spécifiquement à l'origine du bruit provenant de phénomènes magnétiques. Pour cela, nous avons conduit une étude sur une structure pentaphasée possédant 20 dents statoriques et 18 dents rotoriques.

Nous avons commencé par analyser les contraintes magnétiques existant au sein de la machine à l'aide du tenseur de Maxwell, par simulations éléments finis. Pour cela, nous avons regardé à deux endroits différents de la structure : à l'interface entre le stator et l'entrefer de la machine ainsi qu'à l'interface entre le stator et les aimants permanents. L'étude s'est faite en deux temps : une étude dite spatiale puis une étude dite temporelle. L'étude spatiale nous a permis de connaître la distribution des contraintes magnétiques et d'en déduire que, pour une *MCF-AP* 20/18, seuls les harmoniques des contraintes spatiales de rangs pairs existaient. L'étude temporelle nous a permis de connaître les fréquences des forces mises en jeu. Ainsi, nous avons montré que les fréquences des harmoniques étaient proportionnelles au nombre de dents rotoriques.

Puis, nous avons réalisé une analyse modale de la structure statorique afin de connaître ses modes propres de résonances. Plus particulièrement, nous avons étudié les modes propres d'ovalisation en deux dimensions ainsi que les résonances des dents statoriques. Il est important d'étudier ces modes car le stator peut entrer en résonance et générer un bruit conséquent lorsque la forme spatiale des contraintes magnétiques coïncident avec la déformée spatiale des modes propres et lorsque les fréquences des harmoniques des contraintes magnétiques et les fréquences des modes propres sont proches. Nous avons montré par simulations éléments finis l'apparition de modes doubles à n lobes à différentes fréquences que nous avons comparé avec des mesures expérimentales sur un prototype existant. Nous avons également montré que les résonances des dents apparaissaient à des fréquences supérieures à 20 kHz et étaient inaudibles.

Enfin, nous avons présenté la réponse vibratoire de la structure statorique. Nous avons commencé par tracer le spectrogramme de la *MCF-AP* 20/18 afin de connaître, de manière générale, les fréquences mises en jeu suivant la vitesse de fonctionnement. Puis, nous avons étudié pour deux vitesses de rotations différentes les accélérations radiales d'un point de la surface extérieure du stator de la machine. En particulier, la première vitesse $\Omega = 1\,077\text{ Hz}$ a mis en évidence la résonance liée au mode 2. Nous avons ensuite terminé avec la présentation des différents modes propres excitables dans un certain nombre de structures *MCF-AP* différentes triphasées, tetrphasées et pentaphasées. Nous avons montré que les structures avec un nombre de dents rotoriques pair pouvaient exciter uniquement les modes pairs alors que les structures avec un nombre de dents rotoriques impair pouvaient exciter les modes pairs comme impairs.

Deuxième partie

Modèle Analytique
Magnéto-Acoustique des Machines
Synchrones à Commutation de Flux à
Aimants Permanents

Présentation Générale du Modèle Analytique

L'objectif principal de cette partie est de présenter, de la manière la plus concise mais également la plus complète qu'il soit, un modèle entièrement analytique visant à estimer les états magnétique, mécanique et acoustique des machines à commutation de flux à aimants permanents. L'ambition affichée est de proposer un modèle qui se veut peu coûteux en termes de temps de calcul au regard d'un modèle entièrement numérique, tout en conservant un haut degré de précision dans l'estimation des différentes grandeurs, de manière à pouvoir être intégré dans une boucle d'optimisation. En effet, réaliser une optimisation prenant en compte tous les aspects sus-cités à l'aide de modèles numériques de type éléments finis n'est pas réaliste quant au temps de calcul liés aux performances d'une machine. Le synoptique complet du modèle analytique magnéto-acoustique que nous proposons est présenté sur la Figure 3.1.

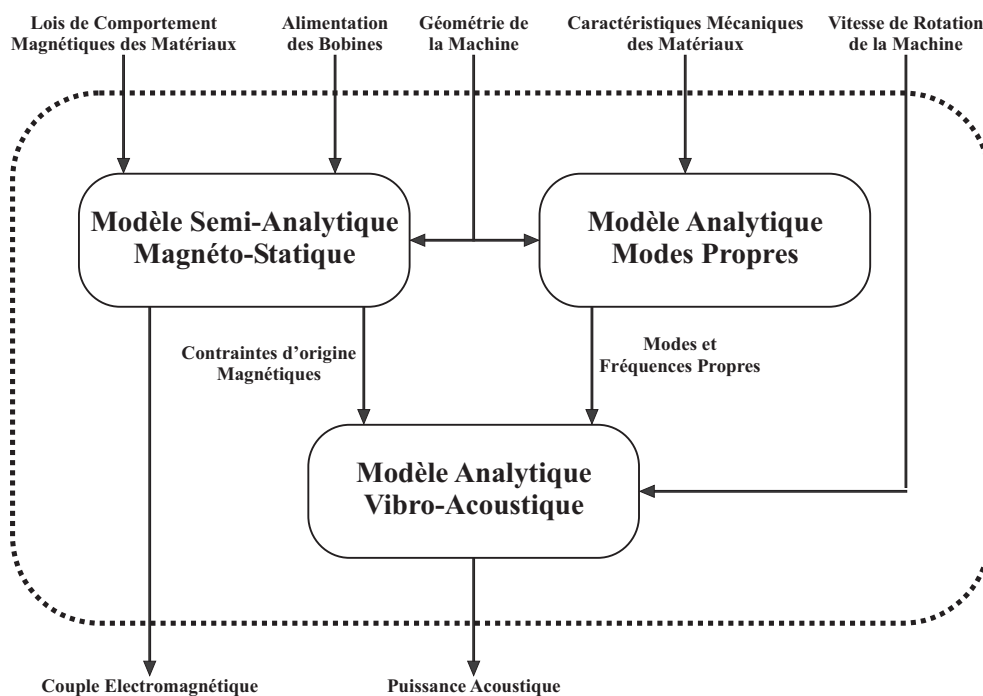


FIGURE 3.1 – Synoptique du modèle analytique magnéto-acoustique

De nombreuses grandeurs possédant un couplage faible, nous avons pris le parti de le subdiviser en trois modèles distincts, à savoir :

- **Un modèle semi-analytique magnéto-statique** ayant pour objectif d'estimer l'état magnétique complet des machines à commutation de flux à aimants permanents, c'est-à-dire le couple électromagnétique ainsi que les flux, potentiels, inductions et champs magnétiques. Ensuite, ce modèle doit en déduire les contraintes d'origine magnétique existantes au sein de la structure à partir de la connaissance de sa géométrie et de son mode d'alimentation.

- **Un modèle analytique modal** estimant les fréquences et les déformées des différents modes propres d'ovalisations 2D des stators des machines électriques à partir de la connaissance de la géométrie et des paramètres mécaniques des matériaux.
- **Un modèle analytique vibro-acoustique**, enfin, permettant d'obtenir les déplacements radiaux de la surface extérieure du stator à partir de la connaissance des contraintes, des fréquences des modes propres et de la vitesse de rotation de la structure, puis d'estimer la puissance acoustique générée par ces déplacements.

Pour réaliser ce modèle, plusieurs hypothèses ont été formulées. Elle seront développées plus amplement dans les chapitres suivants :

- Seul le bruit ayant pour origine des phénomènes magnétiques est considéré. Les bruits prenant pour sources des phénomènes aérodynamiques et mécaniques ont donc été omis.
- La magnétostriction n'est pas prise en compte.
- La déformation du **rotor** induite par les contraintes d'origine magnétique génère une onde acoustique qui n'est pas prise en compte du fait de son confinement au sein du stator. Ainsi, seules les déformations statoriques sont à l'origine d'une génération de bruit acoustique.
- Les contraintes d'origine magnétiques sont essentiellement localisées au niveau de l'entrefer de la machine et seule la composante radiale est considérée pour l'excitation mécanique de la structure.
- Les modes propres de déformation du stator considérés sont les modes 2D d'ovalisations.

Cette partie du mémoire est découpée en plusieurs chapitres, chaque chapitre présentant complètement un modèle. Nous allons donc commencer par présenter le modèle semi-analytique magnéto-statique (Chapitre 4), puis le modèle analytique modal (Chapitre 5) et enfin le modèle analytique vibro-acoustique (Chapitre 6).

Modèle Semi-Analytique Magnéto-Statique 2D des *MCF-AP*

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle semi-analytique magnéto-statique deux dimensions permettant d'estimer l'état magnétique des *MCF-AP* (par là, nous entendons l'estimation du potentiel vecteur, des flux, de l'induction magnétique, champs, couple électromagnétique, et contraintes magnétiques) à partir de la connaissance de la géométrie de la machine, du mode d'alimentation des bobines de la structure et des caractéristiques magnétiques des aimants permanents. Le synoptique du modèle semi-analytique présenté sur la Figure 4.1 détaille les caractéristiques principales de ce modèle.

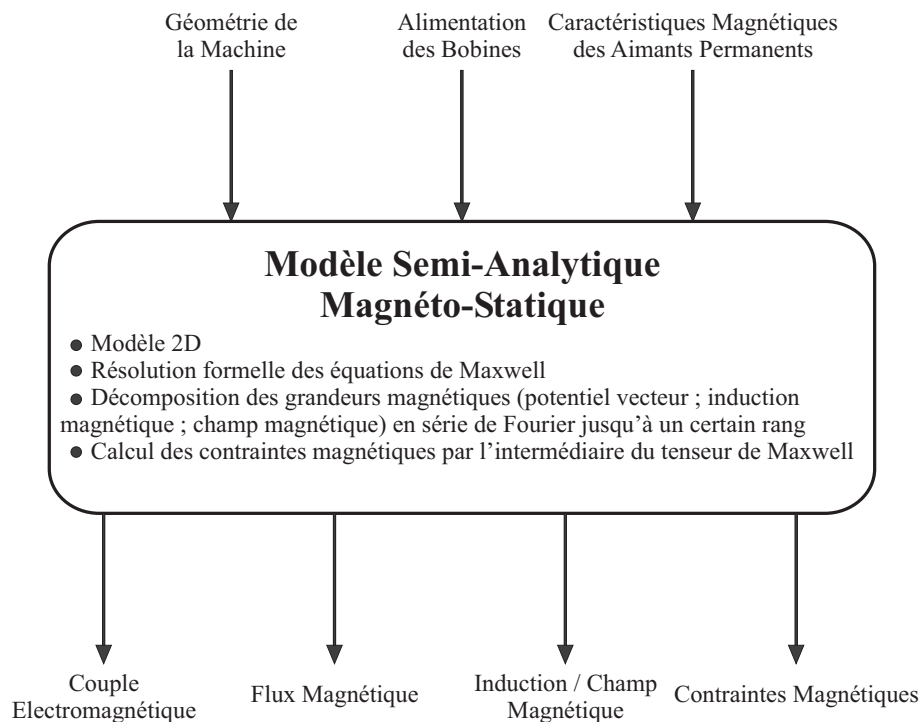


FIGURE 4.1 – Synoptique du modèle semi-analytique magnéto-statique 2D des *MCF-AP*

Ce modèle est basé sur une résolution formelle des équations de Maxwell de la magnéto-statique par développement en série de Fourier. Les différentes grandeurs magnétiques (potentiel vecteur, champs et inductions magnétiques) sont décomposées en série de Fourier jusqu'à un certain rang d'harmoniques et les coefficients de la série de Fourier sont obtenus en appliquant différentes conditions aux limites. Toutes ces notions seront développées par la suite.

Avant de détailler le plan utilisé dans ce chapitre, un mot sur le vocabulaire employé pour désigner ce modèle. Nous parlons de modèle semi-analytique car si les équations de Maxwell sont résolues de façon formelle, les coefficients des différentes séries de Fourier des grandeurs magnétiques sont obtenus par la résolution d'un système matriciel linéaire du type $LX = U$ qui se fera numériquement. Pour cette raison, nous ne pouvons pas parler de modèle purement analytique.

Après avoir réalisé un bref état de l'art (Section 4.2), nous présenterons de manière détaillée le modèle en précisant les différentes hypothèses que nous serons amenées à formuler et en développant les équations de Maxwell de la magnéto-statique (Section 4.3). Puis, à partir du problème de magnéto-statique ainsi posé, nous nous attaquerons à sa résolution formelle (Section 4.4) en appliquant les conditions aux limites (Section 4.6) et en détaillant son implémentation numérique (Section 4.7) afin d'obtenir l'état magnétique complet de la machine. Ensuite, nous calculerons les différentes grandeurs magnétiques (Section 4.8) et nous réaliserons une comparaison de notre modèle avec la simulation par éléments finis afin de le valider mais aussi de justifier son intérêt (Section 4.9).

4.2 État de l'art sur les différents modèles en magnéto-statique

La volonté de proposer des méthodologies permettant une estimation analytique et précise de l'état magnétique complet d'une machine électrique n'est pas nouvelle. Elle résulte du souhait de passer outre la modélisation numérique (généralement de type éléments finis) afin d'obtenir les mêmes résultats, au moins en souhait, pour un temps de calcul nettement inférieur. Il existe principalement deux méthodes pour une estimation analytique : une approche par fonctions de perméances et une approche par résolution formelle des équations de Maxwell par développement en série de Fourier.

Concernant la première méthodologie, non développée dans ce mémoire de travail, nous invitons le lecteur à se reporter sur des travaux déjà existants et notamment le mémoire de thèse de GAUSSENS [Gaussens, 2013] mais également dans [Gibbs, 1958] et [Zhu and Howe, 1993]. Elle consiste à décomposer l'induction radiale d'entrefer B_r sous la forme suivante :

$$B_r(\nu, \theta) = \mu_0 \cdot FMM(\nu) \cdot \Lambda(\nu, \theta) \quad (4.1)$$

avec FMM la force magnétomotrice d'entrefer, Λ la perméance d'entrefer, ν un point dans l'entrefer de la machine et θ la position du rotor. La force électromotrice s'obtient à l'aide du théorème d'Ampère et la fonction de perméance à partir de la géométrie de l'entrefer.

Concernant la méthode dite par résolution formelle des équations de Maxwell par développement en série de Fourier, elle a été développée dans les années 1990. A cette époque les recherches s'orientaient déjà sur des structures à aimants permanents comme par exemple dans [Ittstein, 1991], [Ittstein, 1992] (voir Figure 4.2) et [Ackermann and Sottek, 1995].

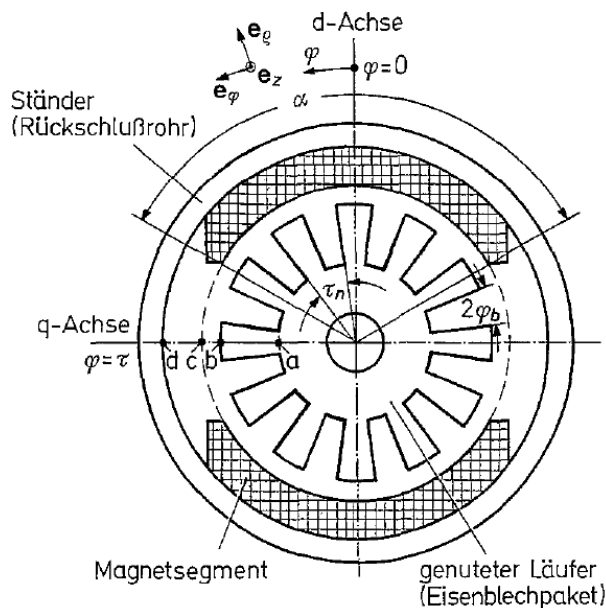


FIGURE 4.2 – Machine à aimants permanents modélisée dans [Ittstein, 1992]

Les nombreux avantages de cette méthode - pour n'en proposer rapidement que deux : méthode précise et rapide - ont fortement contribué à son essor au sein des différents laboratoires de recherche, en cherchant à l'adapter à des structures de plus en plus complexes. Nous pouvons notamment citer pour des structures à simple excitation : LUBIN qui a étudié des structures présentant des encoches et des aimants permanents dans [Lubin et al., 2010a] et [Lubin et al., 2010b], DE LA BARRIÈRE [De la Barrière, 2010] sur des machines synchrones à aimants permanents aussi bien en deux dimensions [de la Barrière et al., 2013] qu'en trois dimensions [de la Barrière et al., 2012], BELLARA également sur des machines synchrones à aimants permanents [Bellara et al., 2009] ou encore GAUSSENS dans [Gaussens, 2013] [Gaussens et al., 2013b] et [Gaussens et al., 2013a] (voir Figure 4.3).

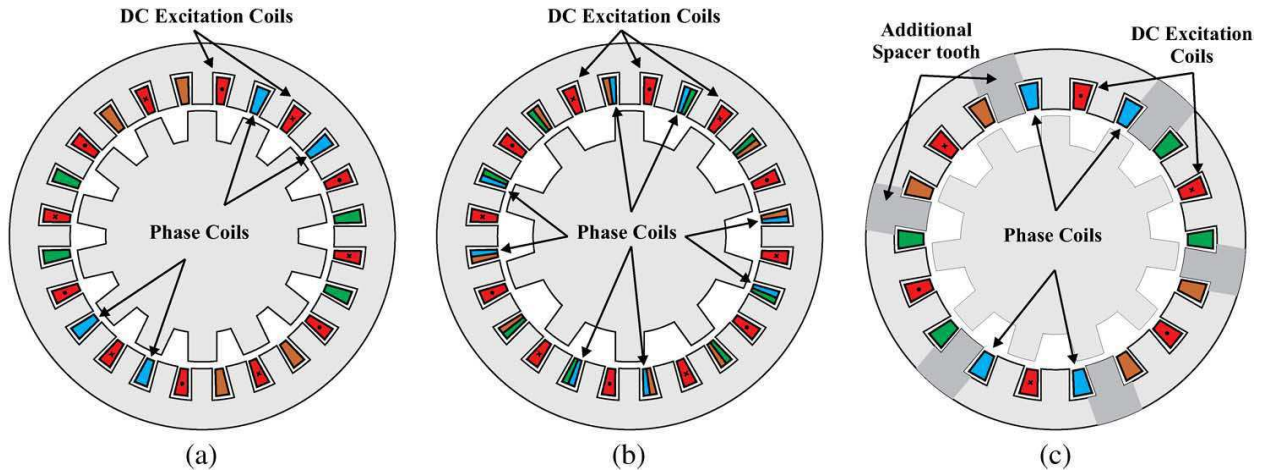


FIGURE 4.3 – Machine à commutation de flux modélisée dans [Gaussens et al., 2013a]

Concernant les structures de *MCF-AP*, nous pouvons citer notamment GYSEN dans [Gysen et al., 2010a] et [Gysen et al., 2010b]. Enfin, les recherches s'orientent à présent sur des structures à double excitations comme dans [Bali et al., 2010] [Boughrara et al., 2012].

Un mot enfin sur une autre application utilisant cette méthode : il s'agit d'étudier l'effet d'une excentricité du rotor sur l'induction magnétique. On peut retrouver ces travaux dans [Kim and Lieu, 1998a] [Kim and Lieu, 1998b] [Kim and Lieu, 2005] (voir Figure 4.4) et enfin dans [Fu and Zhu, 2012].

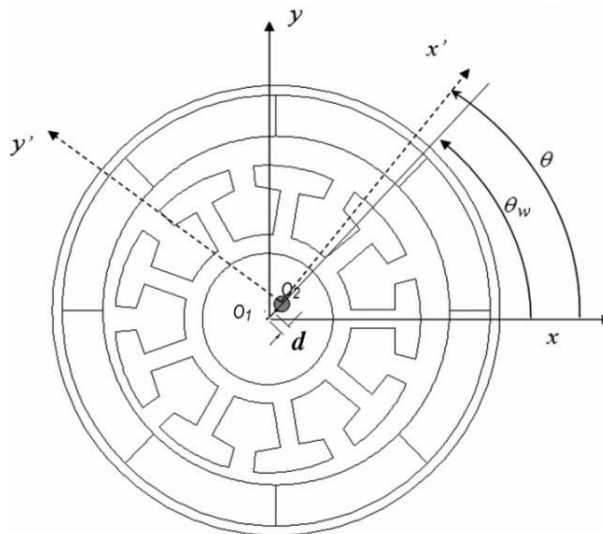


FIGURE 4.4 – Machine avec excentricité du rotor modélisée dans [Kim and Lieu, 2005]

4.3 Présentation du modèle

4.3.1 Hypothèses

Pour mener à bien les différents calculs, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices vont devoir être formulées pour que nous soyons en mesure de résoudre de manière analytique les équations de Maxwell de la magnéto-statique. Ces hypothèses sont les suivantes :

- Le problème à résoudre est supposé être un problème de magnéto-statique pouvant être décrit en deux dimensions. Pour cela, nous négligerons les effets de bords en trois dimensions.
- Les différents matériaux magnétiques sont supposés homogènes, linéaires et non saturables. Cette dernière hypothèse est l'une des hypothèses les plus fortes et doit faire l'objet d'une attention toute particulière pour ne pas se retrouver avec des résultats aberrants (notamment des inductions magnétiques trop élevées).
- La perméabilité du fer est considérée comme étant égale à l'infinie. Cette hypothèse implique que le champ magnétique à l'intérieur du fer est nul et permet une simplification lors de l'application des conditions aux limites. Cependant cette hypothèse entraîne l'impossibilité de la prise en considération de la présence d'isthmes dans la machine (meilleure tenue mécanique mais court-circuitage d'une partie des aimants permanents). Nous pouvons donc déjà voir apparaître une première simplification de la géométrie de la *MCF-AP* qui s'impose.
- La résolution des équations de Maxwell se fera en coordonnées cylindriques. Cette hypothèse est aisément justifiable quand il s'agit de modéliser des machines électriques avec une partie mobile entraînée en rotation. Néanmoins, elle nécessite différentes précautions : qui dit coordonnées cylindriques, dit machine entièrement adaptée pour ce type de coordonnées, ce qui n'est pas le cas pour les *MCF-AP* : les dents statoriques, les dents rotoriques et les aimants permanents, notamment, sont droits. Par conséquent, la géométrie de la machine devra là aussi être modifiée pour s'adapter à la modélisation choisie

4.3.2 Description du problème magnéto-statique

Pour résoudre de manière formelle les équations de Maxwell en magnéto-statique, nous avons été amené à manipuler différents opérateurs vectoriels. Nous invitons donc le lecteur à se reporter sur l'Annexe B, Section B.1 pour un éventuel rappel de ces derniers.

Pour obtenir l'état magnétique complet d'une machine, l'équation de la magnéto-statique 4.2, découlant de l'équation de Maxwell Ampère, est considérée :

$$\Delta \vec{A} = - \left(\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{B}_r \right) \quad (4.2)$$

avec \vec{A} le potentiel vecteur magnétique, \vec{J} le vecteur densité de courant et \vec{B}_r le vecteur induction rémanente. La description détaillée du problème de magnéto-statique est présentée en Annexe B, Section B.2.

4.4 Résolution formelle des équations de la magnéto-statique pour les *MCF-AP*

4.4.1 Décomposition en série de Fourier du potentiel vecteur magnétique

Avant de résoudre l'équation de Maxwell en magnéto-statique en utilisant les coordonnées cylindriques et d'obtenir le potentiel vecteur magnétique, nous allons commencer par introduire les différentes notations qui vont nous servir dans toute la suite. Pour cela, considérons un matériau magnétique quelconque (zone grisée sur la Figure 4.5). Soit M un point de ce matériau, $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère cartésien et $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ un repère cylindrique. Le point M est repéré en coordonnées cylindriques par sa position radiale r et sa position angulaire θ . En ce point règne un potentiel vecteur magnétique $\vec{A}(r, \theta)$, une densité de courant surfacique $\vec{J}(r, \theta)$ et une induction rémanente $B_r(r, \theta)$. Ce matériau est repéré par les positions radiales R_1 et R_2 , par la position angulaire θ_i et par la largeur angulaire β .

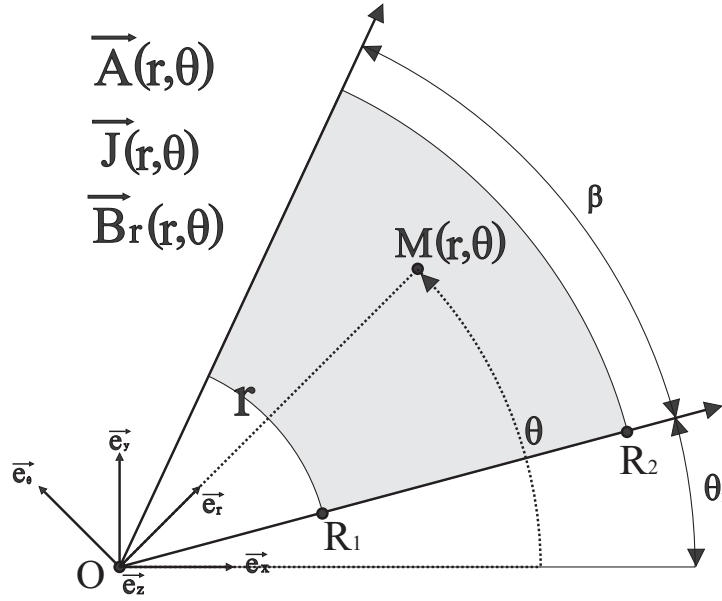


FIGURE 4.5 – Notations utilisées pour la résolution formelle des équations de Maxwell de la magnéto-statique

Le problème de magnéto-statique est considéré ici dans un plan en deux dimensions. Le potentiel vecteur magnétique peut alors se mettre sous la forme :

$$\vec{A}(r, \theta) = A(r, \theta) \cdot \vec{e}_z \quad (4.3)$$

La résolution formelle des équations de Maxwell de la magnéto-statique par développement en série de Fourier consiste à chercher la fonction potentiel vecteur magnétique $\vec{A}(r, \theta)$ comme une fonction périodique de la variable θ . En appelant α la période angulaire de ce signal, le potentiel vecteur étant périodique, il peut se décomposer sous la forme d'une série de Fourier :

$$A(r, \theta) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_{n,c}(r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i)\right) + A_{n,s}(r) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i)\right) \right] \quad (4.4)$$

avec $A_0(r)$, $A_{n,c}(r)$ et $A_{n,s}(r)$ des coefficients, dépendants de la variable r , que l'on déterminera par la suite.

La résolution purement analytique du problème de magnéto-statique par décomposition en série de Fourier est impossible puisqu'il y a un nombre infini de coefficients à déterminer. Par conséquent, nous allons développer le potentiel vecteur magnétique jusqu'à un certain rang d'harmoniques (N). Le choix de N aura une influence sur la précision du calcul mais également sur le temps de calcul, ce qui fera l'objet d'une discussion plus tard. Le potentiel vecteur magnétique peut alors être approximé sous la forme suivante :

$$A(r, \theta) \simeq A_0(r) + \sum_{n=1}^N \left[A_{n,c}(r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i)\right) + A_{n,s}(r) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i)\right) \right] \quad (4.5)$$

La forme du potentiel vecteur magnétique venant d'être donnée par décomposition en série de Fourier, il nous reste à présent à préciser l'obtention des différents coefficients à partir des données physiques du matériau (air, bobine, aimant permanent, ...) et des conditions aux limites. La machine étant constituée de différents matériaux magnétiques, nous allons adopter dans les parties suivantes la démarche pour l'obtention de ce potentiel :

1. Modification de la géométrie de la machine afin de l'adapter aux coordonnées cylindriques
2. Découpage de la machine en différentes zones, chaque zone représentant un unique matériau magnétique
3. Résolution de l'équation de la magnéto-statique dans les différentes zones
4. Application des conditions aux limites pour la détermination des différentes constantes

4.4.2 Modification de la géométrie de la machine

Comme cela a été explicité précédemment, une modification de la géométrie de la machine s'impose pour :

- Supprimer l'isthme se trouvant au dessus des aimants permanents. En effet, l'isthme court-circuite une partie des aimants permanents. Cette zone est donc fortement saturé. Notre modèle ne prend pas en compte la saturation. De plus, puisque la perméabilité du fer est considérée comme infinie, si nous laissons l'isthme, l'aimant serait complètement court-circuiter.
- Adapter la machine aux coordonnées cylindriques

Sur la Figure 4.6 nous pouvons observer à gauche une *MCF-AP*. Il s'agit d'une machine triphasée 12/10 possédant donc 12 dents statoriques et 10 dents rotoriques. Nous pouvons apercevoir non seulement la présence d'un isthme au-dessus des aimants permanents mais aussi des dents et des aimants permanents droits, c'est à dire dont les arrêtes ne suivent pas un rayon du cylindre. Sur la figure de droite (Figure 4.6b), nous avons représenté la même machine avec les deux modifications énoncées à l'instant : suppression de l'isthme et géométrie adaptée aux coordonnées cylindriques à savoir dents et aimants permanents radiaux, c'est à dire dont les arrêtes sont adaptés aux coordonnées cylindriques.

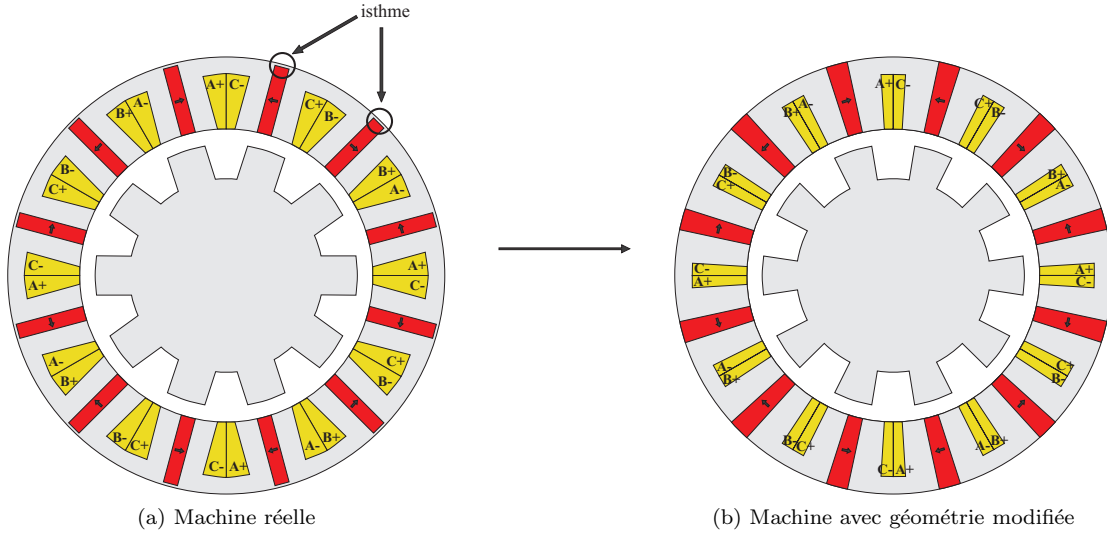


FIGURE 4.6 – Modification de la géométrie de la *MCF-AP* pour la résolution des équations de Maxwell de la magnéto-statique en coordonnées cylindriques

4.4.3 Découpage de la machine en différentes zones

Afin de résoudre l'équation de la magnéto-statique, nous allons découper la machine en différentes zones, chaque zone étant constitué d'un matériau magnétique unique. La machine que nous modélisons est une machine Q phases possédant N_r dents rotoriques et N_s dents statoriques (voir Figure 4.7). Soient $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ un repère cartésien lié au stator et $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ un repère cylindrique. Soit M un point placé au milieu de l'entrefer de la machine. Il est repéré en coordonnées cylindriques par sa position radiale r et sa position angulaire θ . Les différentes zones concernées pour la modélisation de la machine sont notées :

$$\begin{aligned}
 \text{Zone (1)}_i & : \text{Encoche du rotor (Air)} \quad , \quad i = 1, \dots, N_r \\
 \text{Zone (2)} & : \text{Entrefer (Air)} \\
 \text{Zone (3)}_m & : \text{Aimants Permanents} \quad , \quad m = 1, \dots, N_s \\
 \text{Zone (4)}_m & : \text{Bobinages} \quad , \quad m = 1, \dots, N_s
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons voir qu'il y a en tout $N_r + 2 \cdot N_s + 1$ zones différentes sur lesquelles il faudra résoudre l'équation de la magnéto-statique. La définition de ces zones est présentée sur la Figure 4.7. Pour la suite des calculs, nous allons utiliser différentes notations qui sont présentées en Annexe B, Section B.3.

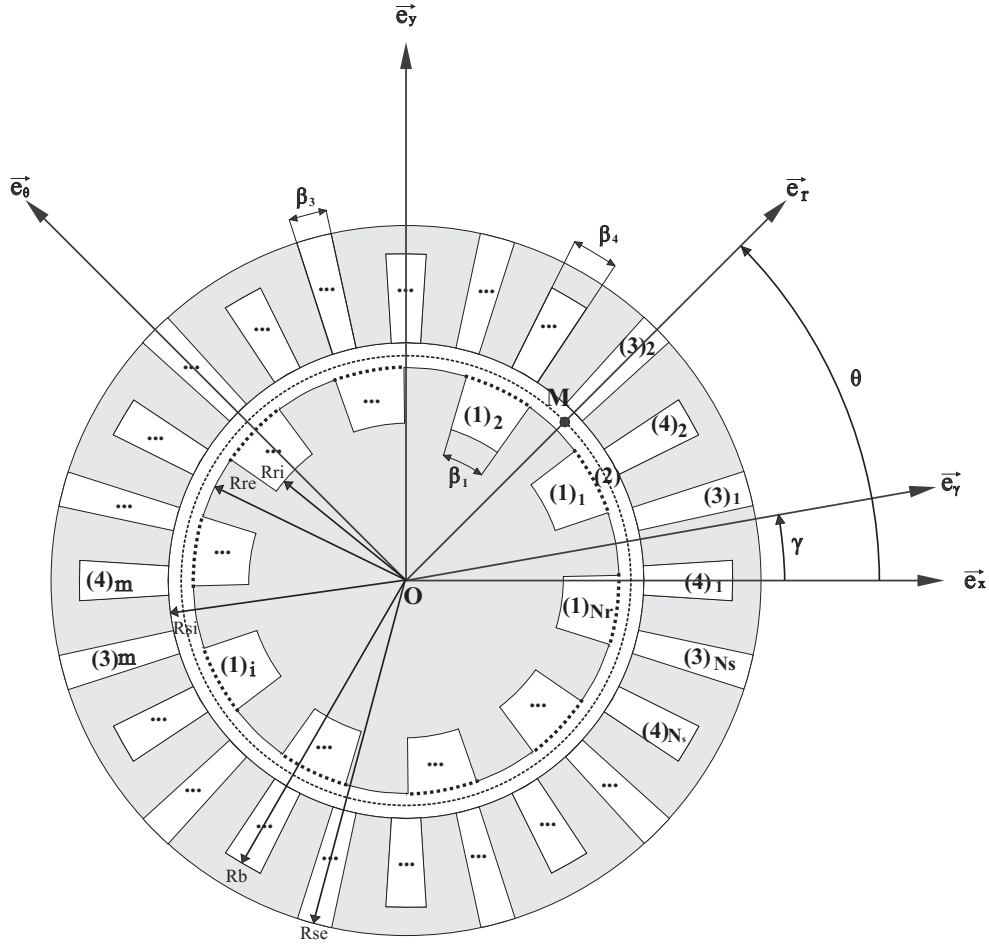


FIGURE 4.7 – Définitions des différentes zones de la machine pour la modélisation magnéto-statique

4.5 Résolution analytique de l'équation de magnéto-statique

Dans cette partie, nous allons écrire le potentiel vecteur dans chaque zone de la machine par développement en série de Fourier. Afin d'appliquer correctement les conditions aux limites, nous allons devoir utiliser une variable différente pour les coefficients de la série de Fourier lorsque deux zones sont en contact. Ainsi, nous allons utiliser la variable k pour les coefficients de la série de Fourier lorsque nous allons donner la forme du potentiel vecteur magnétique dans les zones $(1)_i$, $(3)_m$ et $(4)_m$ et la variable n pour la zone (2). La démarche est détaillée pour la zone (1) et sera similaire pour les autres zones.

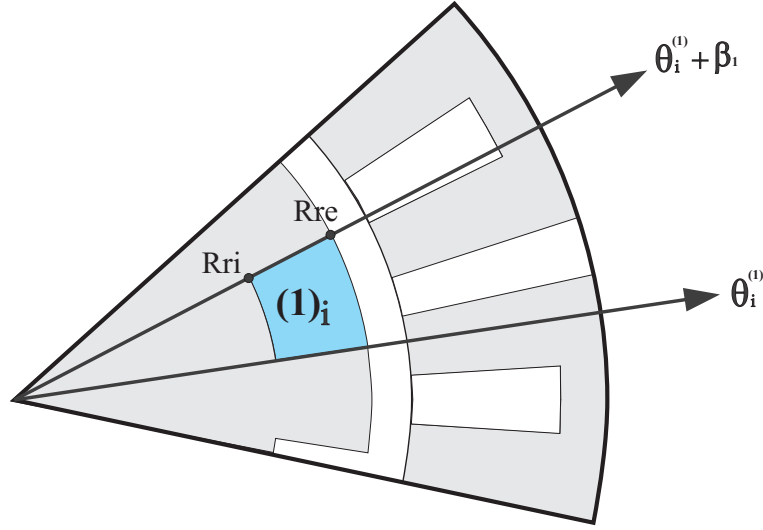
4.5.1 Résolution dans la zone $(1)_i$: Encoche du rotor (Air)

La zone ainsi visée est représentée en bleu sur la Figure 4.8. La zone $(1)_i$ est délimitée par :

$$(r \in [R_{ri}, R_{re}]) \cap (\theta \in [\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(1)} + \beta_1]) \quad (4.6)$$

De plus, la frontière de cette zone est en contact avec les zones suivantes :

$$\begin{aligned} r \leq R_{ri} & : \text{Fer du rotor} \\ r \geq R_{re} & : \text{Zone (2), entrefer} \\ \theta \leq \theta_i^{(1)} & : \text{Fer du rotor} \\ \theta \geq \theta_i^{(1)} + \beta_1 & : \text{Fer du rotor} \end{aligned}$$


 FIGURE 4.8 – Résolution dans la zone $(1)_i$: Encoche du rotor (Air)

Nous allons approximer le potentiel vecteur dans cette zone en développant la série de Fourier jusqu'à la K -ième harmonique(s). Le potentiel vecteur $A_i^{(1)}$ peut alors se mettre sous la forme :

$$A_i^{(1)}(r, \theta) = A_{0,i}^{(1)}(r) + \sum_{k=1}^K \left[A_{k,c,i}^{(1)}(r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) + A_{k,s,i}^{(1)}(r) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) \right] \quad (4.7)$$

Dans cette zone, le matériau considéré est de l'air. Il n'y a alors ni densité de courant ($\vec{J} = \vec{0}$), ni induction rémanente ($\vec{B}_r = \vec{0}$). L'Équation 4.2 projetée sur l'axe \vec{e}_z se résume à l'équation de Laplace qui se met sous la forme suivante :

$$\Delta A_i^{(1)}(r, \theta) = 0 \quad (4.8)$$

En utilisant les coordonnées cylindriques et en considérant le problème comme un problème en deux dimensions, l'équation aux dérivées partielles à résoudre est :

$$\frac{\partial^2 A_i^{(1)}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_i^{(1)}}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial r}(r, \theta) = 0 \quad (4.9)$$

En utilisant la forme du potentiel vecteur magnétique de l'Équation 4.7, nous obtenons :

$$A_{0,i}^{(1)} \ddot{u}(r) + \frac{A_{0,i}^{(1)} \dot{u}(r)}{r} + \sum_{k=1}^K \left[\left[A_{k,c,i}^{(1)} \ddot{u}(r) + \frac{1}{r} \cdot A_{k,c,i}^{(1)} \dot{u}(r) - \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{2\pi k}{\alpha}\right)^2 \cdot A_{k,c,i}^{(1)}(r) \right] \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) + \left[A_{k,s,i}^{(1)} \ddot{u}(r) + \frac{1}{r} \cdot A_{k,s,i}^{(1)} \dot{u}(r) - \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{2\pi k}{\alpha}\right)^2 \cdot A_{k,s,i}^{(1)}(r) \right] \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) \right] = 0 \quad (4.10)$$

La relation précédente doit être vérifiée quel que soit θ . Par conséquent, nous obtenons un système de trois équations aux dérivées partielles : le terme constant en θ , le terme en cosinus et le terme en sinus doivent tous être nuls, ce qui nous donne :

$$\begin{cases} r \cdot A_{0,i}^{(1)} \ddot{u}(r) + A_{0,i}^{(1)} \dot{u}(r) = 0 \\ r^2 \cdot A_{k,c,i}^{(1)} \ddot{u}(r) + r \cdot A_{k,c,i}^{(1)} \dot{u}(r) - \left(\frac{2\pi k}{\alpha}\right)^2 \cdot A_{k,c,i}^{(1)}(r) = 0, \text{ pour } k \in [1, \dots, K] \\ r^2 \cdot A_{k,s,i}^{(1)} \ddot{u}(r) + r \cdot A_{k,s,i}^{(1)} \dot{u}(r) - \left(\frac{2\pi k}{\alpha}\right)^2 \cdot A_{k,s,i}^{(1)}(r) = 0, \text{ pour } k \in [1, \dots, K] \end{cases} \quad (4.11)$$

Les solutions de ces trois équations différentielles sont :

$$\begin{cases} A_0^{(1)}(r) = A_{0,i}^{(1)} + B_{0,i}^{(1)} \cdot \ln(r) \\ A_{k,c,i}^{(1)}(r) = A_{k,i}^{(1)} \cdot r^{\frac{2\pi k}{\alpha}} + B_{k,i}^{(1)} \cdot r^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} \\ A_{k,s,i}^{(1)}(r) = C_{k,i}^{(1)} \cdot r^{\frac{2\pi k}{\alpha}} + D_{k,i}^{(1)} \cdot r^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} \end{cases}, \text{ pour } k \in [1, \dots, K] \quad (4.12)$$

avec $A_{0,i}^{(1)}$, $B_{0,i}^{(1)}$, $A_{k,i}^{(1)}$, $B_{k,i}^{(1)}$, $C_{k,i}^{(1)}$ et $D_{k,i}^{(1)}$ des constantes à déterminer ultérieurement à l'aide des conditions aux limites. Finalement, la solution générale de l'équation de Laplace est :

$$A_i^{(1)}(r, \theta) = A_{0,i}^{(1)} + B_{0,i}^{(1)} \cdot \ln(r) + \sum_{k=1}^K \left[\left(A_{k,i}^{(1)} \cdot r^{\frac{2\pi k}{\alpha}} + B_{k,i}^{(1)} \cdot r^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} \right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) + \left(C_{k,i}^{(1)} \cdot r^{\frac{2\pi k}{\alpha}} + D_{k,i}^{(1)} \cdot r^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) \right] \quad (4.13)$$

Appliquons dès à présent quelques conditions aux limites pour simplifier l'expression du potentiel vecteur que nous venons d'écrire. A l'interface entre deux matériaux magnétiques, la composante tangentielle du champ magnétique est continue. Or, d'après nos hypothèses, le champ magnétique dans le fer est nul. Par conséquent, en s'appuyant à nouveau sur la Figure 4.8, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \text{Suivant } \vec{e}_r : & \begin{cases} H_{r,i}^{(1)}(r, \theta_i^{(1)}) = 0 \\ H_{r,i}^{(1)}(r, \theta_i^{(1)} + \beta_1) = 0 \end{cases} \\ \text{Suivant } \vec{e}_\theta : & H_{\theta,i}^{(1)}(R_{ri}, \theta) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dans la zone $(1)_i$, la relation entre champ magnétique et potentiel vecteur est :

$$\begin{cases} H_{r,i}^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \theta}(r, \theta) \\ H_{\theta,i}^{(1)}(r, \theta) = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial r}(r, \theta) \end{cases} \quad (4.15)$$

On en déduit donc trois conditions aux limites :

$$\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \theta}(r, \theta_i^{(1)}) = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial \theta}(r, \theta_i^{(1)} + \beta_1) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial r}(R_{ri}, \theta) = 0 \quad (4.18)$$

La première condition (Équation 4.16) permet de déduire que dans l'air :

$$\sum_{k=1}^K \frac{2\pi k}{\alpha} \cdot \left(C_{k,i}^{(1)} \cdot r^{\frac{2\pi k}{\alpha}} + D_{k,i}^{(1)} \cdot r^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} \right) = 0 \quad (4.19)$$

Puisque les fonctions $r \rightarrow r^{\frac{2\pi k}{\alpha}}$ et $r \rightarrow r^{-\frac{2\pi k}{\alpha}}$ sont linéairement indépendantes, on en déduit :

$$\begin{cases} C_{k,i}^{(1)} = 0 \\ D_{k,i}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

La seconde condition (Équation 4.17) permet de déduire que :

$$\sum_{k=1}^K \frac{2\pi k}{\alpha} \cdot \left(A_{k,i}^{(1)} \cdot r^{\frac{2\pi k}{\alpha}} + B_{k,i}^{(1)} \cdot r^{-\frac{2\pi k}{\alpha}} \right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot \beta_1\right) = 0 \quad (4.21)$$

soit :

$$\sin\left(\frac{2\pi k}{\alpha} \cdot \beta_1\right) = 0 \quad (4.22)$$

Par conséquent, on en déduit :

$$\alpha = 2\beta_1 \quad (4.23)$$

Après avoir traduit ces deux conditions (Équation 4.16 et Équation 4.17), on peut réécrire le potentiel vecteur dans la zone $(1)_i$:

$$A_i^{(1)}(r, \theta) = A_{0,i}^{(1)} + B_{0,i}^{(1)} \cdot \ln(r) + \sum_{k=1}^K \left(A_{k,i}^{(1)} \cdot r^{\frac{k\pi}{\beta_1}} + B_{k,i}^{(1)} \cdot r^{-\frac{k\pi}{\beta_1}} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) \quad (4.24)$$

Avant de poursuivre et de traduire la troisième condition, nous allons apporter une modification dans l'écriture de l'équation précédente (Équation 4.24). Nous allons poser :

$$\begin{cases} A_{k,i}^{(1)} &= \frac{a_{k,i}^{(1)}}{R_{re}^{\frac{k\pi}{\beta_1}}} \\ B_{k,i}^{(1)} &= \frac{b_{k,i}^{(1)}}{R_{ri}^{-\frac{k\pi}{\beta_1}}} \end{cases} \quad (4.25)$$

Cette modification dans l'écriture du potentiel vecteur n'amènera aucun changement dans le déroulement futur des calculs et n'a pour but qu'une simplification dans l'écriture des conditions aux limites dans deux zones que l'on explicitera plus tard. Ainsi, le potentiel vecteur s'écrit sous la forme :

$$A_i^{(1)}(r, \theta) = A_{0,i}^{(1)} + B_{0,i}^{(1)} \cdot \ln(r) + \sum_{k=1}^K \left(a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} + b_{k,i}^{(1)} \cdot \left(\frac{r}{R_{ri}}\right)^{-\frac{k\pi}{\beta_1}} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) \quad (4.26)$$

La troisième condition (Équation 4.18) permet de déduire que :

$$\frac{B_{0,i}^{(1)}}{R_{ri}} + \sum_{k=1}^K \frac{k\pi}{\beta_1} \cdot \left(a_{k,i}^{(1)} \cdot \frac{1}{R_{re}} \cdot \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}-1} - b_{k,i}^{(1)} \cdot \frac{1}{R_{ri}} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) = 0 \quad (4.27)$$

soit :

$$\begin{cases} B_{0,i}^{(1)} &= 0 \\ b_{k,i}^{(1)} &= a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} \end{cases} \quad (4.28)$$

Finalement le potentiel vecteur dans la zone $(1)_i$ peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{A_i^{(1)}(r, \theta) = A_{0,i}^{(1)} + \sum_{k=1}^K a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_{re}}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} + \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} \cdot \left(\frac{r}{R_{ri}}\right)^{-\frac{k\pi}{\beta_1}} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right)} \quad (4.29)$$

avec $A_{0,i}^{(1)}$ et $a_{k,i}^{(1)}$ des constantes que l'on déterminera par la suite en appliquant les conditions aux limites avec les autres matériaux magnétiques autre que le fer.

4.5.2 Résolution dans la zone (2) : Entrefer (Air)

La démarche est similaire à celle décrite précédemment. La zone concernée est représentée en bleue sur la Figure 4.9. La zone (2) est délimitée par :

$$(r \in [R_{re}, R_{si}]) \cap (\theta \in [0, 2\pi]) \quad (4.30)$$

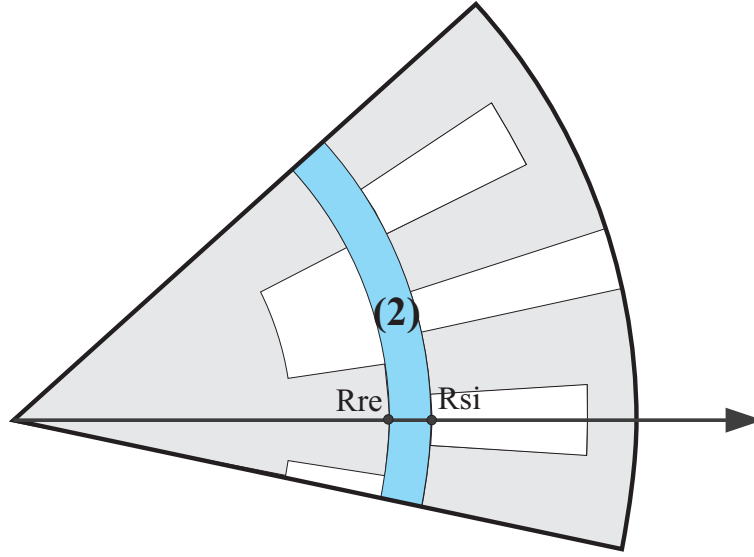


FIGURE 4.9 – Résolution dans la zone (2) : Entrefer (Air)

De plus, la frontière de cette zone est :

$$\begin{aligned} r \leq R_{re} & : \text{Zone (1)}_i \text{ ou fer du rotor} \\ r \geq R_{si} & : \text{Zone (3)}_m, \text{ (4)}_m \text{ ou fer du stator} \end{aligned}$$

La zone concernée est constituée d'air, donc nous pouvons écrire le potentiel vecteur sous la forme (cf Equation 4.13) :

$$A^{(2)}(r, \theta) = A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \cdot \ln(r) + \sum_{n=1}^N \left[\begin{aligned} & \left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} \right) \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot \theta\right) + \\ & \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}} + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} \right) \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot \theta\right) \end{aligned} \right] \quad (4.31)$$

Puisque que la zone (2) s'étant sur l'intervalle $\theta \in [0, 2\pi]$, le potentiel vecteur est 2π périodique. Par conséquent, on a l'égalité :

$$A^{(2)}(r, \theta) = A^{(2)}(r, \theta + 2\pi) \quad (4.32)$$

On en déduit ainsi l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^N \left[\begin{aligned} & \left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} \right) \cdot \left(\cos\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot \theta\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot (\theta + 2\pi)\right) \right) + \\ & \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{\frac{2n\pi}{\alpha}} + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} \right) \cdot \left(\sin\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot \theta\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot (\theta + 2\pi)\right) \right) \end{aligned} \right] = 0 \quad (4.33)$$

Pour que cette condition soit vérifiée tout le temps, il faut par conséquent :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot \theta\right) = \cos\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot (\theta + 2\pi)\right) \\ \sin\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot \theta\right) = \sin\left(\frac{2n\pi}{\alpha} \cdot (\theta + 2\pi)\right) \end{cases} \quad (4.34)$$

Ce qui se traduit finalement par :

$$\alpha = 2\pi \quad (4.35)$$

Le potentiel vecteur dans la zone (2) peut alors se mettre sous la forme :

$$A^{(2)}(r, \theta) = A_0^{(2)} + B_0^{(2)} \cdot \ln(r) + \sum_{n=1}^N \left[\left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \cos(n \cdot \theta) + \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sin(n \cdot \theta) \right] \quad (4.36)$$

Pour simplifier un petit peu l'écriture de ce potentiel, rappelons que ce dernier est défini à une constante près. Nous allons donc imposer ici $A_0^{(2)} = 0$. Les autres constantes dans les autres zones de la machine devront être calculées à partir de cela. De plus, pour calculer $B_0^{(2)}$ nous allons écrire le théorème de Stokes (voir Annexe B). Ici, la circulation C que nous choisissons est un cercle de rayon le milieu de l'entrefer. La surface délimitée n'embrasse pas de courants. Nous avons par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} B^{(2)}(r = R, \theta) \cdot d\theta = 0 \quad (4.37)$$

avec : $R = \frac{R_{ri} + R_{re}}{2}$ le milieu de l'entrefer. Nous pouvons ainsi en déduire que $B_0^{(2)} = 0$. Finalement, le potentiel vecteur dans la zone (2) peut se mettre sous la forme :

$$A^{(2)}(r, \theta) = \sum_{n=1}^N \left[\left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \cos(n \cdot \theta) + \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sin(n \cdot \theta) \right] \quad (4.38)$$

4.5.3 Résolution dans la zone $(3)_m$: Aimants Permanent

Intéressons-nous à présent à la zone $(3)_m$ (voir la Figure 4.10). Il s'agit d'un aimant permanent dont l'induction rémanente (notée $\vec{B}_{r,m}$) est dirigée suivant l'axe \vec{e}_θ :

$$\vec{B}_{r,m} = (-1)^m \cdot B_{rem} \cdot \vec{e}_\theta \quad (4.39)$$

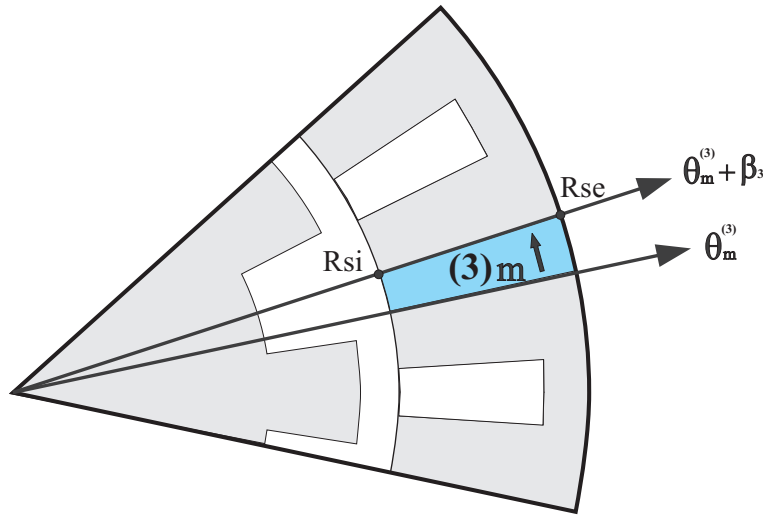


FIGURE 4.10 – Résolution dans la zone $(3)_m$: Aimant Permanent

La zone $(3)_m$ est délimitée par :

$$(r \in [R_{si}, R_{se}]) \cap \left(\theta \in \left[\theta_m^{(3)}, \theta_m^{(3)} + \beta_3 \right] \right) \quad (4.40)$$

De plus, la frontière de cette zone est :

$$\begin{aligned}
 r \leq R_{si} & : \text{ Zone (2), entrefer} \\
 r \geq R_{se} & : \text{ Extérieur machine (potentiel vecteur imposé égale à 0)} \\
 \theta \leq \theta_m^{(3)} & : \text{ Fer du stator} \\
 \theta \geq \theta_m^{(3)} + \beta_3 & : \text{ Fer du stator}
 \end{aligned}$$

Avec la présence d'une induction rémanente, l'équation aux dérivées partielles à résoudre devient alors :

$$\frac{\partial^2 A_m^{(3)}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_m^{(3)}}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_m^{(3)}}{\partial r}(r, \theta) = -\frac{(-1)^m \cdot B_{rem}}{r} \quad (4.41)$$

La résolution de l'équation sans second membre conduit à la solution déjà présentée précédemment. Il est possible de démontrer que la fonction : $(r, \theta) \rightarrow -(-1)^m \cdot B_{rem} \cdot r$ est une solution particulière de l'équation générale. De plus, en s'inspirant de ce qui a été fait précédemment et en écrivant les conditions aux limites suivantes :

$$H_{r,m}^{(3)}(r, \theta_m^{(3)}) = 0 \quad (4.42)$$

$$H_{r,m}^{(3)}(r, \theta_m^{(3)} + \beta_3) = 0 \quad (4.43)$$

La solution générale devient :

$$\begin{aligned}
 A_m^{(3)}(r, \theta) = & -(-1)^m \cdot B_{rem} \cdot r + A_{0,m}^{(3)} + B_{0,m}^{(3)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_{se}}\right) + \\
 & \sum_{k=1}^K \left(a_{k,m}^{(3)} \cdot \left(\frac{r}{R_{se}}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_3}} + b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}}\right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_3} \cdot (\theta - \theta_m^{(3)})\right)
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pour simplifier un peu plus l'expression précédente, nous allons imposer un potentiel vecteur nul sur la frontière extérieure du stator ($r = R_{se}$) :

$$A_m^{(3)}(R_{se}, \theta) = 0 \quad (4.45)$$

ce qui amène aux égalités suivantes :

$$\begin{cases} A_{0,m}^{(3)} = (-1)^m \cdot B_{rem} \cdot R_{se} \\ a_{k,m}^{(3)} = -b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(\frac{R_{se}}{R_{si}}\right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \end{cases} \quad (4.46)$$

Finalement, le potentiel vecteur dans la zone $(3)_m$ peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 A_m^{(3)}(r, \theta) = & (-1)^m \cdot B_{rem} \cdot (R_{se} - r) + B_{0,m}^{(3)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_{se}}\right) + \\
 & \sum_{k=1}^K b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(-\left(\frac{R_{se}}{R_{si}}\right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \cdot \left(\frac{r}{R_{se}}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_3}} + \left(\frac{r}{R_{si}}\right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_3} \cdot (\theta - \theta_m^{(3)})\right)
 \end{aligned}
 } \quad (4.47)$$

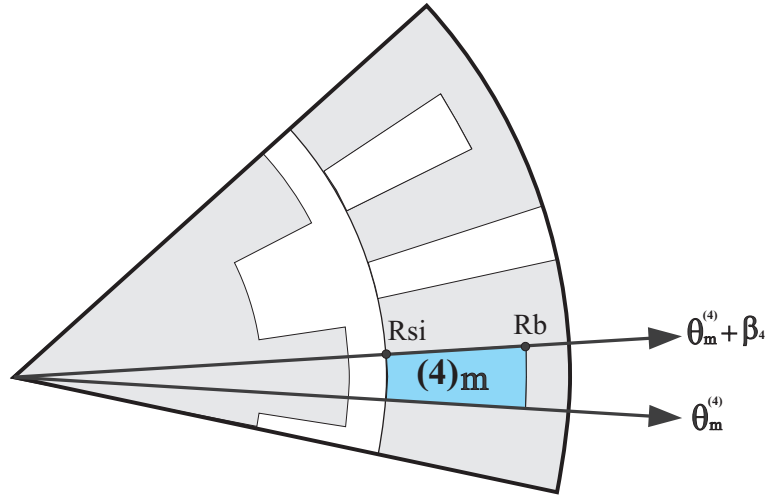
4.5.4 Résolution dans la zone $(4)_m$: Bobine

Dans cette zone, représentée en bleue sur la Figure 4.11, il existe une densité surfacique de courant $J_m(\vec{r}, \theta)$. La zone $(4)_m$ est délimitée par :

$$(r \in [R_{si}, R_b]) \cap (\theta \in [\theta_m^{(4)}, \theta_m^{(4)} + \beta_4]) \quad (4.48)$$

La frontière de cette zone est :

$$\begin{aligned}
 r \leq R_{si} & : \text{ Zone (2), entrefer} \\
 r \geq R_b & : \text{ Fer du stator} \\
 \theta \leq \theta_m^{(4)} & : \text{ Fer du stator} \\
 \theta \geq \theta_m^{(4)} + \beta_4 & : \text{ Fer du stator}
 \end{aligned}$$

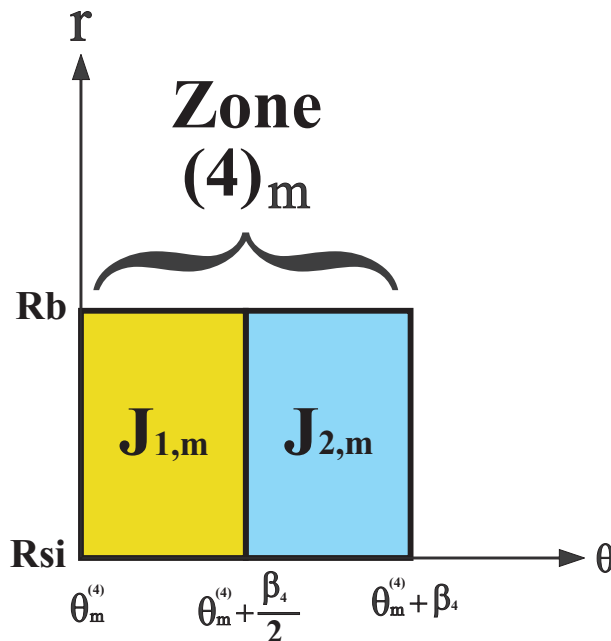

 FIGURE 4.11 – Résolution dans la zone $(4)_m$: Bobines

L'équation aux dérivées partielles à résoudre est alors :

$$\frac{\partial^2 A_m^{(4)}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_m^{(4)}}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_m^{(4)}}{\partial r}(r, \theta) = -\mu_0 \cdot \mu_4 \cdot J_m(r, \theta) \quad (4.49)$$

Il faut expliciter le terme $J_m(r, \theta)$. Pour cela, nous allons nous appuyer sur la Figure 4.12. Dans cette zone, du fait de la présence de deux bobinages distincts, il existe deux densités surfaciques de courants que l'on va noter $J_{1,m}$ et $J_{2,m}$. La fonction $J_m(r, \theta)$ peut être écrite sous la forme :

$$J_m(r, \theta) = \begin{cases} J_{1,m} , & \text{si } \theta \in \left[\theta_m^{(4)}, \theta_m^{(4)} + \frac{\beta_4}{2} \right] \\ J_{2,m} , & \text{si } \theta \in \left[\theta_m^{(4)} + \frac{\beta_4}{2}, \theta_m^{(4)} + \beta_4 \right] \end{cases} \quad (4.50)$$


 FIGURE 4.12 – Répartition de la densité de courant dans la zone $(4)_m$

4.5. RÉSOLUTION ANALYTIQUE DE L'ÉQUATION DE MAGNÉTO-STATIQUE

La densité de courant $J_m(r, \theta)$ peut elle aussi être décomposée en série de Fourier. Nous choisissons de l'expliciter sous la forme d'une fonction paire :

$$J_m(r, \theta) = J_{0,m} + \sum_{k=1}^K J_{k,m} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)})\right) \quad (4.51)$$

Avec :

$$\begin{cases} J_{0,m} = \frac{1}{\beta_4} \cdot \int_{\theta_m^{(4)}}^{\theta_m^{(4)} + \beta_4} J_m(r, \theta) \cdot d\theta \\ J_{k,m} = \frac{2}{\beta_4} \cdot \int_{\theta_m^{(4)}}^{\theta_m^{(4)} + \beta_4} J_m(r, \theta) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)})\right) \cdot d\theta \end{cases} \quad (4.52)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} J_{0,m} = \frac{J_{1,m} + J_{2,m}}{2} \\ J_{k,m} = \frac{2 \cdot (J_{1,m} - J_{2,m}) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \end{cases} \quad (4.53)$$

L'équation aux dérivées partielles peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 A_m^{(4)}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_m^{(4)}}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_m^{(4)}}{\partial r}(r, \theta) = -\mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \left[J_{0,m} + \sum_{k=1}^K J_{k,m} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)})\right) \right] \quad (4.54)$$

A nouveau, l'équation aux dérivées partielles sans second membre correspond à l'équation de Laplace. Une solution particulière ($A_{p,m}^{(4)}$) de l'équation générale est :

$$A_{p,m}^{(4)}(r, \theta) = -\mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \left[\frac{J_{0,m}}{4} \cdot r^2 + \frac{J_{k,m} \cdot r^2}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4}\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)})\right) \right] \quad (4.55)$$

En s'inspirant à nouveau de ce qui a été fait précédemment et en écrivant les conditions aux limites suivantes :

$$H_{r,m}^{(4)}(r, \theta_m^{(4)}) = 0 \quad (4.56)$$

$$H_{r,m}^{(4)}(r, \theta_m^{(4)} + \beta_4) = 0 \quad (4.57)$$

nous pouvons en déduire la forme suivante du potentiel vecteur dans la zone $(4)_m$:

$$\begin{aligned} A_m^{(4)}(r, \theta) = & -\mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{0,m}}{4} \cdot r^2 + A_{0,m}^{(4)} + B_{0,m}^{(4)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_b}\right) + \\ & \sum_{k=1}^K \left(a_{k,m}^{(4)} \cdot \left(\frac{r}{R_b}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} + b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}}\right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} - \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{k,m} \cdot r^2}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4}\right)^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)})\right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

La dernière condition que nous allons écrire est :

$$H_{\theta,m}^{(4)}(R_b, \theta) = 0 \quad (4.59)$$

elle se traduit par :

$$\begin{aligned}
 & -\mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot R_b + \frac{B_{0,m}^{(4)}}{R_b} + \\
 & \sum_{k=1}^K \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot \left[a_{k,m}^{(4)} \cdot \frac{1}{R_b} - b_{k,m}^{(4)} \cdot \frac{1}{R_{si}} \cdot \left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}-1} \right] - \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{2 \cdot J_{k,m} \cdot R_b}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \right) \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot \left(\theta - \theta_m^{(4)} \right) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

soit :

$$\begin{cases} B_{0,m}^{(4)} = \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot R_b^2 \\ a_{k,m}^{(4)} = b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} + \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{\beta_4}{k\pi} \cdot \frac{2 \cdot J_{k,m} \cdot R_b^2}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \end{cases} \tag{4.61}$$

Finalement, le potentiel vecteur magnétique dans la zone $(4)_m$ peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 A_m^{(4)}(r, \theta) = & A_{0,m}^{(4)} + \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot \left(R_b^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{R_b} \right) - \frac{r^2}{2} \right) + \\
 & \sum_{k=1}^K \left[b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(\left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} \cdot \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} + \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} \right) + \right. \\
 & \left. \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{k,m}}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \cdot \left(\frac{\beta_4}{k\pi} \cdot 2 \cdot R_b^2 \cdot \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} - r^2 \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot \left(\theta - \theta_m^{(4)} \right) \right)
 \end{aligned}
 } \tag{4.62}$$

avec $A_{0,m}^{(4)}$ et $b_{k,m}^{(4)}$ des constantes à déterminer.

Pour un résumé des expressions obtenues pour les différentes grandeurs (potentiels, inductions et champs magnétiques), nous invitons le lecteur à se reporter sur l'Annexe B, Section B.4.

4.6 Application des conditions aux limites

Jusqu'à présent, nous avons écrit les conditions aux limites entre les différentes zones de la machine et le fer (soit du rotor, soit du stator) ou l'extérieur de la machine. Cela nous a permis de simplifier quelque peu les expressions des potentiels vecteurs. Néanmoins, il reste des inconnues à déterminer pour connaître parfaitement l'état magnétique de la machine. Ces inconnues vont être déterminées en écrivant les conditions aux limites entre les différentes zones elles-mêmes. Nous allons ranger toutes les inconnues restantes dans un vecteur que nous appellerons X . Ensuite, nous écrirons un système d'équations linéaires permettant de déterminer ce vecteur. La résolution de cette partie du problème sera obtenue numériquement. Le vecteur est écrit sous la forme suivante :

$$X = \left[A_{0,i}^{(1)} \quad a_{k,i}^{(1)} \quad a_n^{(2)} \quad b_n^{(2)} \quad c_n^{(2)} \quad d_n^{(2)} \quad B_{0,m}^{(3)} \quad b_{k,m}^{(3)} \quad A_{0,m}^{(4)} \quad b_{k,m}^{(4)} \right]^T \tag{4.63}$$

En tout, il reste $4 \cdot N + (1 + K) \cdot (N_r + 2 \cdot N_s)$ inconnues à déterminer. Nous allons à présent écrire les conditions aux limites permettant la résolution complète du problème de magnéto-statique. Pour cela nous avons introduit des notations qui sont présentées dans l'Annexe B, Section B.5.

4.6.1 Continuité de la composante normale de l'induction

Entre la zone (1)_i et la zone (2) : air rotor / air entrefer

La première condition aux limites entre les différentes zones que nous allons traduire sous forme d'équations est la continuité de la composante normale de l'induction à l'interface entre la zone (1)_i - air de l'encoche rotorique - et la zone (2) - entrefer. Sur toute la longueur angulaire θ de la zone (1)_i, nous avons l'égalité suivante :

$$B_{r,i}^{(1)}(R_{re}, \theta) = B_r^{(2)}(R_{re}, \theta) \quad (4.64)$$

Puisque ces deux fonctions ne sont pas écrites sous forme de séries de Fourier de même périodicité, nous ne sommes pas en mesure d'obtenir immédiatement l'égalité entre les différents termes de la série. Il nous faut par conséquent modifier l'une des deux fonctions. Nous avons opté sur une modification de $B_r^{(2)}(R_{re}, \theta)$. Nous allons écrire cette fonction comme une fonction périodique de période β_1 , c'est-à-dire :

$$B_r^{(2)}(R_{re}, \theta) = \sum_{k=1}^K B_{k,i}^{(2)} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) \quad (4.65)$$

avec :

$$B_{k,i}^{(2)} = \frac{2}{\beta_1} \cdot \int_{\theta_i^{(1)}}^{\theta_i^{(1)} + \beta_1} B_r^{(2)}(R_{re}, \theta) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)})\right) \quad (4.66)$$

ce qui, en utilisant les notations introduites dans l'Annexe B, Section B.4, nous donne en définitive :

$$\frac{k\pi}{2} \cdot a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(1 + \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}}\right)^{\frac{2k\pi}{\beta_1}}\right) = \sum_{n=1}^N n \cdot \left[\begin{aligned} &\left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{re}}{R_{si}}\right)^n + b_n^{(2)}\right) \cdot \sigma_{i,1}^{(ss)}(n, k) - \\ &\left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{re}}{R_{si}}\right)^n + d_n^{(2)}\right) \cdot \sigma_{i,1}^{(cs)}(n, k) \end{aligned} \right] \quad (4.67)$$

En traduisant cette continuité de la composante normale de l'induction, nous venons d'écrire $K \cdot N_r$ équations.

Entre la zone (2) et la zone (3)_m : air entrefer / aimants permanents

La composante normale de l'induction magnétique doit être continue entre la zone (2) et la zone (3)_m. Cela se traduit par la condition suivante :

$$B_{r,m}^{(3)}(R_{si}, \theta) = B_r^{(2)}(R_{si}, \theta) \quad (4.68)$$

En s'inspirant du raisonnement réalisé dans la partie 4.6.1, nous obtenons :

$$\frac{k\pi}{2} \cdot b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(1 - \left(\frac{R_{si}}{R_{se}}\right)^{\frac{2k\pi}{\beta_3}}\right) = \sum_{n=1}^N n \cdot \left[\begin{aligned} &\left(a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}}\right)^{-n}\right) \cdot \sigma_{m,3}^{(ss)}(n, k) - \\ &\left(c_n^{(2)} + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}}\right)^{-n}\right) \cdot \sigma_{m,3}^{(cs)}(n, k) \end{aligned} \right] \quad (4.69)$$

Nous venons d'écrire $K \cdot N_s$ équations.

Entre la zone (2) et la zone (4)_m : air entrefer / bobines

La composante normale de l'induction magnétique doit être continue entre la zone (2) et la zone (4)_m. Cela se traduit par la condition suivante :

$$B_{r,m}^{(4)}(R_{si}, \theta) = B_r^{(2)}(R_{si}, \theta) \quad (4.70)$$

En s'inspirant du raisonnement réalisé dans la partie 4.6.1, nous obtenons :

$$\frac{k\pi}{2} \cdot \left[\begin{aligned} &b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(1 + \left(\frac{R_{si}}{R_b}\right)^{\frac{2k\pi}{\beta_4}}\right) + \mu_0 \cdot \mu_4 \frac{J_{k,m}}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4}\right)^2} \cdot \left(\frac{\beta_4}{k\pi} \cdot 2 \cdot R_b^2 \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_b}\right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} - R_{si}^2\right) \end{aligned} \right] = \sum_{n=1}^N n \cdot \left[\begin{aligned} &\left(a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}}\right)^{-n}\right) \cdot \sigma_{m,4}^{(ss)}(n, k) - \\ &\left(c_n^{(2)} + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}}\right)^{-n}\right) \cdot \sigma_{m,4}^{(cs)}(n, k) \end{aligned} \right] \quad (4.71)$$

Nous venons de déterminer $K \cdot N_s$ équations.

4.6.2 Continuité de la composante tangentielle du champ magnétique

Entre la zones (1)_i et la zone (2) : air rotor / air entrefer

La composante tangentielle du champ magnétique doit être continue entre la zone (1)_i et la zone (2). Cela nous donne la condition suivante (condition valable pour $\theta \in [\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(1)} + \beta_1]$) :

$$H_{\theta,i}^{(1)}(R_{re}, \theta) = H_{\theta}^{(2)}(R_{re}, \theta) \quad (4.72)$$

Pour pouvoir traduire cette condition sous forme d'une équation, nous allons devoir la modifier. Soit $F_n^{(1)}$ une fonction de la variable θ . Cette fonction est définie comme étant représentative de la composante tangentielle du champ magnétique le long d'un cercle de rayon $r = R_{re}$. Par conséquent, elle est égale à $H_{\theta,i}^{(1)}(R_{re}, \theta)$ lorsque l'interface est air rotor / air entrefer et est égale à 0 lorsque l'interface est fer rotor / air entrefer :

$$F_n^{(1)}(\theta) = \begin{cases} H_{\theta,i}^{(1)}(R_{re}, \theta) & , \text{ si } \theta \in [\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(1)} + \beta_1] \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (4.73)$$

Nous pouvons donc écrire la condition suivante valable cette fois-ci pour $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$H_{\theta}^{(2)}(R_{re}, \theta) = F_n^{(1)}(\theta) \quad (4.74)$$

Nous allons écrire la fonction $F_n^{(1)}(\theta)$ comme une fonction périodique de période 2π :

$$F_n^{(1)}(\theta) = \sum_{n=1}^N \left[A_n^{(1)} \cdot \cos(n\theta) + B_n^{(1)} \cdot \sin(n\theta) \right] \quad (4.75)$$

avec :

$$\begin{cases} A_n^{(1)} &= \frac{2}{2\pi} \cdot \sum_{i=1}^{N_r} \int_{\theta_i^{(1)}}^{\theta_i^{(1)} + \beta_1} H_{\theta,i}^{(1)}(R_{re}, \theta) \cdot \cos(n \cdot \theta) \cdot d\theta \\ B_n^{(1)} &= \frac{2}{2\pi} \cdot \sum_{i=1}^{N_r} \int_{\theta_i^{(1)}}^{\theta_i^{(1)} + \beta_1} H_{\theta,i}^{(1)}(R_{re}, \theta) \cdot \sin(n \cdot \theta) \cdot d\theta \end{cases} \quad (4.76)$$

Ce qui nous donne deux systèmes d'équations :

$$n \cdot \left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{re}}{R_{si}} \right)^n - b_n^{(2)} \right) = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{k=1}^K \frac{k}{\beta_1} \cdot a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(1 - \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{2k\pi}{\beta_1} + 1} \right) \cdot \sigma_{i,1}^{(cc)}(n, k) \quad (4.77)$$

$$n \cdot \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{re}}{R_{si}} \right)^n - d_n^{(2)} \right) = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{k=1}^K \frac{k}{\beta_1} \cdot a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(1 - \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{2k\pi}{\beta_1} + 1} \right) \cdot \sigma_{i,1}^{(sc)}(n, k) \quad (4.78)$$

En traduisant cette continuité de la composante tangentielle du champ magnétique, nous venons d'écrire $2 \cdot N$ équations.

Entre la zone (2) et (3)_m-(4)_m : air entrefer / aimants permanents + bobines

Dans cette partie, nous faisons le même raisonnement que dans la partie 4.6.2. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \pi \cdot n \cdot \left(a_n^{(2)} - b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}} \right)^{-n} \right) &= \sum_{m=1}^{N_s} \left(\frac{B_{0,m}^{(3)}}{\mu_3} \cdot \sigma_{m,3}^{(c)}(n) + \mu_0 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot (R_b^2 - R_{si}^2) \cdot \sigma_{m,4}^{(c)}(n) - \right. \\ &\sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{\mu_3} \cdot \frac{k\pi}{\beta_3} \cdot b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(1 + \left(\frac{R_{si}}{R_{se}} \right)^{\frac{2k\pi}{\beta_3}} \right) \cdot \sigma_{m,3}^{(cc)}(n, k) + \left(\frac{1}{\mu_4} \cdot \frac{k\pi}{\beta_4} \cdot b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(1 - \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{2k\pi}{\beta_4}} \right) + \right. \\ &\left. \left. \mu_0 \cdot \frac{2 \cdot J_{k,m}}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \cdot R_{si} \cdot \left(R_{si} - R_b \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4} - 1} \right) \right) \cdot \sigma_{m,4}^{(cc)}(n, k) \right] \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned}
 \pi \cdot n \cdot \left(c_n^{(2)} - d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}} \right)^{-n} \right) &= \sum_{m=1}^{N_s} \left(\frac{B_{0,m}^{(3)}}{\mu_3} \sigma_{m,3}^{(s)}(n) + \mu_0 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot (R_b^2 - R_{si}^2) \cdot \sigma_{m,4}^{(s)}(n) - \right. \\
 \sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{\mu_3} \cdot \frac{k\pi}{\beta_3} \cdot b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(1 + \left(\frac{R_{si}}{R_{se}} \right)^{\frac{2k\pi}{\beta_3}} \right) \cdot \sigma_{m,3}^{(sc)}(n, k) + \left(\frac{1}{\mu_4} \cdot \frac{k\pi}{\beta_4} \cdot b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(1 - \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{2k\pi}{\beta_4}} \right) + \right. & \quad (4.80) \\
 \left. \left. \mu_0 \cdot \frac{2 \cdot J_{k,m}}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \cdot R_{si} \cdot \left(R_{si} - R_b \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4} - 1} \right) \cdot \sigma_{m,4}^{(sc)}(n, k) \right] \right)
 \end{aligned}$$

On vient de déterminer $2 \cdot N$ équations.

4.6.3 Continuité du potentiel vecteur

Entre la zones (1)_i et (2)

Dans cette partie, nous allons écrire la continuité du potentiel vecteur entre la zones (1)_i et (2). Lorsque $\theta \in [\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(1)} + \beta_1]$, la condition suivante est valable :

$$A_i^{(1)}(R_{re}, \theta) = A_i^{(2)}(R_{re}, \theta) \quad (4.81)$$

Puisque cette égalité est vraie, nous pouvons également écrire :

$$\int_{\theta_i^{(1)}}^{\theta_i^{(1)} + \beta_1} A_i^{(1)}(R_{re}, \theta) \cdot d\theta = \int_{\theta_i^{(1)}}^{\theta_i^{(1)} + \beta_1} A_i^{(2)}(R_{re}, \theta) \cdot d\theta \quad (4.82)$$

ce qui conduit à :

$$A_{0,i}^{(1)} = \frac{1}{\beta_1} \cdot \sum_{n=1}^N \left[\left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{re}}{R_{si}} \right)^n + b_n^{(2)} \right) \cdot \sigma_{i,1}^{(c)}(n) + \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{re}}{R_{si}} \right)^n + d_n^{(2)} \right) \cdot \sigma_{i,1}^{(s)}(n) \right] \quad (4.83)$$

Nous venons d'écrire N_r équations.

Entre la zone (3)_m et (2)

On s'inspire de ce qui a été fait précédemment (Partie 4.6.3). Lorsque $\theta \in [\theta_m^{(3)}, \theta_m^{(3)} + \beta_3]$, la condition suivante est valable :

$$A_m^{(3)}(R_{si}, \theta) = A_m^{(2)}(R_{si}, \theta) \quad (4.84)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 (-1)^m \cdot B_{rem} \cdot (R_{se} - R_{si}) + B_{0,m}^{(3)} \cdot \ln \left(\frac{R_{si}}{R_{se}} \right) &= \\
 \frac{1}{\beta_3} \cdot \sum_{n=1}^N \left[\left(a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sigma_{m,3}^{(c)}(n) + \left(c_n^{(2)} + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sigma_{m,3}^{(s)}(n) \right] & \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

Nous venons d'écrire N_s équations

Entre la zone (4)_m et (2)

Nous faisons toujours le même raisonnement. L'égalité vérifiée pour $\theta \in [\theta_m^{(4)}, \theta_m^{(4)} + \beta_4]$ est :

$$A_m^{(4)}(R_{si}, \theta) = A_m^{(2)}(R_{si}, \theta) \quad (4.86)$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot \left[R_b^2 \cdot \ln \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right) - \frac{R_{si}^2}{2} \right] + A_{0,m}^{(4)} &= \\
 \frac{1}{\beta_4} \cdot \sum_{n=1}^N \left[\left(a_n^{(2)} + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sigma_{m,4}^{(c)}(n) + \left(c_n^{(2)} + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sigma_{m,4}^{(s)}(n) \right] & \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

Nous venons d'écrire N_s équations.

En tout, nous avons écrit : $(KN_r) + (KN_s) + (KN_s) + (2N) + (2N) + (N_r) + (N_s) + (N_s) = 4 \cdot N + (1 + K) \cdot (N_r + 2 \cdot N_s)$. On peut donc obtenir toutes les inconnues.

4.7 Implémentation numérique et résolution

Avec l'application des conditions aux limites détaillées dans la partie précédente, le problème de magnéto-statique peut être résolu. Nous venons d'écrire le système d'équations linéaires permettant la détermination complète de toutes les inconnues composant le vecteur des inconnues X . La complexité des équations semble cependant être un frein à une résolution purement analytique. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour une résolution numérique. Cette résolution numérique conduira bien entendu à des temps de calculs plus importants qu'avec une solution analytique mais sera tout de même moins coûteuse qu'une résolution purement numérique par simulation éléments finis.

Le système d'équations linéaires est mis sous la forme $LX = U$. Pour ne pas alourdir ce chapitre, nous avons opté pour tout présenter en annexe (voir Annexe B, Section B.6). Une fois le système d'équations linéaires écrit sous forme matriciel de type $LX = U$, il ne reste plus qu'à faire une résolution numérique afin d'obtenir le vecteur X . Cette inversion de matrice est réalisée à l'aide du logiciel MATLAB par décomposition QR.

4.8 Calcul des différentes grandeurs magnétiques

Une fois l'inversion du système matriciel linéaire effectuée, le vecteur des inconnues X est désormais déterminé et le potentiel vecteur magnétique à l'intérieur de la machine peut donc en être déduit. À partir de la connaissance des grandeurs magnétiques écrites sous formes de séries de Fourier, il nous reste à présent à en déduire :

- Les différents flux magnétiques à travers les bobinages
- Les contraintes magnétiques présentes au sein de la machine
- Le couple électromagnétique

4.8.1 Calcul des contraintes d'origine magnétique existantes au sein de la machine

Dans cette partie, nous allons donner l'expression des contraintes d'origine magnétique existantes au niveau de l'entrefer de la *MCF-AP* (Figure 4.7). Nous allons déterminer les éléments du tenseur des contraintes de Maxwell au point M , point se trouvant au milieu de l'entrefer : $(r = R = \frac{R_{re} + R_{si}}{2}, \theta \in [0, 2\pi])$. Pour rappel, les calculs sont développés en annexe (voir Annexe A). La contrainte surfacique $\vec{\sigma}(r, \theta)$ au point M repéré en coordonnées cylindriques par la longueur radiale $r = R$ et par l'angle θ peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\sigma}(R, \theta) = \sigma_r(R, \theta) \cdot \vec{e}_r + \sigma_\theta(R, \theta) \cdot \vec{e}_\theta \quad (4.88)$$

avec, dans l'air les termes du tenseur de Maxwell qui peuvent s'exprimer à partir des composantes de B :

$$\begin{cases} \sigma_r(R, \theta) &= -\frac{\left(B_r^{(2)}(R, \theta)\right)^2 - \left(B_\theta^{(2)}(R, \theta)\right)^2}{2 \cdot \mu_0} \\ \sigma_\theta(R, \theta) &= \frac{B_r^{(2)}(R, \theta) \cdot B_\theta^{(2)}(R, \theta)}{\mu_0} \end{cases} \quad (4.89)$$

4.8.2 Calcul du couple électromagnétique

Le couple électromagnétique peut se déduire à partir d'une intégrale du tenseur de Maxwell sur une surface fermée traversant l'entrefer. Soit M un point situé au milieu de l'entrefer. Il est repéré en coordonnées cylindriques par :

$$(r = R, \theta \in [0, 2\pi]) \quad (4.90)$$

Le couple électromagnétique peut se mettre sous la forme :

$$C = \left(\oint_C O\vec{M} \times d\vec{F} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (4.91)$$

4.8. CALCUL DES DIFFÉRENTES GRANDEURS MAGNÉTIQUES

avec $d\vec{F}$ la force électromagnétique élémentaire au point M appliquée à l'élément de surface $d\vec{S}$. La force électromagnétique élémentaire peut se mettre sous la forme :

$$d\vec{F} = (\sigma_r(R, \theta) \cdot \vec{e}_r + \sigma_\theta(R, \theta) \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS \quad (4.92)$$

et l'élément de surface dS :

$$dS = L \cdot R \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta \quad (4.93)$$

avec L la longueur active de la machine. Le couple électromagnétique peut alors se mettre sous la forme :

$$C = \frac{L \cdot R^2}{\mu_0} \cdot \int_0^{2\pi} B_r^{(2)}(R, \theta) \cdot B_\theta^{(2)}(R, \theta) \cdot d\theta \quad (4.94)$$

Finalement, nous obtenons en utilisant les expressions de B dans l'entrefer de la machine :

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\mu_0} \cdot \sum_{n=1}^N n^2 \cdot \left(\frac{R_{re}}{R_{si}} \right)^n \cdot \left(b_n^{(2)} \cdot c_n^{(2)} - a_n^{(2)} \cdot d_n^{(2)} \right) \quad (4.95)$$

4.8.3 Expression analytique du flux magnétique à travers les bobinages

A présent, nous allons donner l'expression analytique du flux magnétique vu par une spire d'un bobinage de la *MCF-AP*. Les différentes notations sont précisées sur la Figure 4.13. Soit $M_1(r_1, \theta_1)$ un point appartenant à l'encoche " - " et $M_2(r_2, \theta_2)$ un point appartenant à l'encoche " + ". Soit L la longueur active de la machine et $d\vec{S}$ un élément de surface orienté défini entre ces deux points. Nous allons émettre l'hypothèse que le flux aux niveaux des encoches est uniforme de manière à considérer le flux moyen au niveau de toute la bobine.

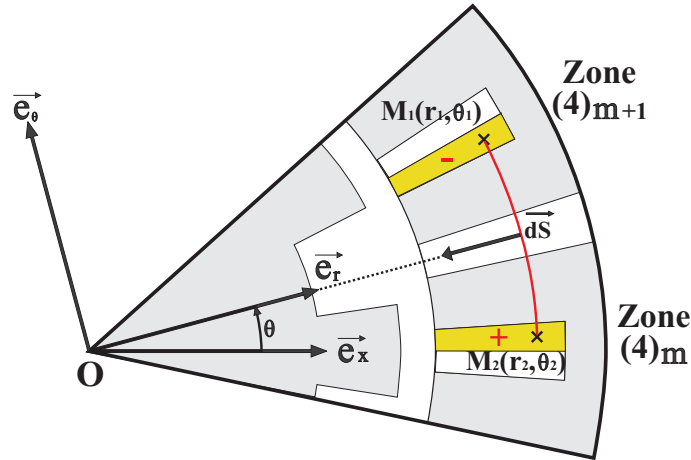


FIGURE 4.13 – Notations utilisées pour le calcul du flux magnétique à travers un bobinage

L'élément de surface orienté $d\vec{S}$ choisi est :

$$d\vec{S} = -L \cdot r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_r \quad (4.96)$$

Le flux à travers la surface $d\vec{S}$, $\varphi_{1,2}$, s'exprime sous la forme :

$$\varphi_{1,2}(M_1, M_2) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.97)$$

Si nous exprimons le flux en utilisant le potentiel vecteur magnétique, nous obtenons :

$$\varphi_{1,2}(M_1, M_2) = L \cdot \left[A^{(+)}(R_2, \theta_2) - A^{(-)}(R_1, \theta_1) \right] \quad (4.98)$$

Le flux moyen à travers un bobinage s'exprime sous la forme :

$$\langle \varphi \rangle = L \cdot \left[A_{moyen}^{(+)} - A_{moyen}^{(-)} \right] \quad (4.99)$$

avec :

$$\begin{cases} A_{moyen}^{(+)} = \frac{1}{S_{encoche}} \cdot \int_{\theta_m^{(4)} + \frac{\beta_4}{2}}^{\theta_m^{(4)} + \beta_4} \int_{R_{si}}^{R_b} A_m^{(4)}(r, \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \\ A_{moyen}^{(-)} = \frac{1}{S_{encoche}} \cdot \int_{\theta_{m+1}^{(4)}}^{\theta_{m+1}^{(4)} + \frac{\beta_4}{2}} \int_{R_{si}}^{R_b} A_{m+1}^{(4)}(r, \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \end{cases} \quad (4.100)$$

et :

$$S_{encoche} = \frac{\beta_4}{4} \cdot (R_b^2 - R_{si}^2) \quad (4.101)$$

Tout calcul fait, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{4 \cdot L \cdot \beta_4}{\beta_4 \cdot (R_b^2 - R_{si}^2)} \cdot \left[\frac{R_b^2 - R_{si}^2}{4} \cdot (A_{0,m}^{(4)} - A_{0,m+1}^{(4)}) + \right. \\ & \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{\beta_4}{32} \cdot (J_{0,m} - J_{0,m+1}) \cdot \left(-3 \cdot R_b^4 + R_{si}^4 \cdot \left(2 \cdot R_b^2 + R_{si}^2 + 4 \cdot R_b^2 \cdot \ln \left(\frac{R_b}{R_{si}} \right) \right) \right) + \\ & \sum_{k=1}^K \left[\frac{\beta_4^2 \cdot (b_{k,m}^{(4)} + b_{k,m+1}^{(4)}) \cdot \left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}}}{k\pi \cdot ((k\pi)^2 - 4 \cdot \beta_4^2)} \times \right. \\ & \left(4 \cdot \beta_4 \cdot R_b^2 - (2 \cdot \beta_4 + k\pi) \cdot \left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} \cdot R_{si}^2 - 2 \cdot \beta_4 \cdot R_{si}^2 \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} + k\pi \cdot R_{si}^2 \cdot \left(\left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} \right) \right) - \\ & \left. \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{\beta_4^3 \cdot \left(-J_{k,m} - J_{k,m+1} + 2 \cdot J_{k,m} \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{2} \right) \right)}{4 \cdot (k\pi)^2 \cdot (k\pi + 2\beta_4)^2 \cdot (k\pi - 2\beta_4)} \times \right. \\ & \left. \left(2\beta_4 \cdot k\pi \cdot (-R_b^4 + R_{si}^4) + (k\pi)^2 \cdot (-R_b^4 + R_{si}^4) + 8 \cdot \beta_4^2 \cdot R_b^2 \cdot \left(R_b^2 - R_{si}^2 \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} \right) \right) \right] \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.102)$$

4.9 Validation et intérêt du modèle semi-analytique

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes attachés à présenter entièrement le modèle semi-analytique magnéto-statique en deux dimensions permettant la détermination de l'état magnétique des *MCF-AP*. A présent, nous devons comparer notre modèle semi-analytique à la simulation par éléments finis afin non seulement de le valider, mais aussi de quantifier ses avantages et ses limites. Le logiciel de simulation basé sur la méthode des éléments finis qui nous a permis de réaliser cette validation est le logiciel commercial ANSYS. Nous avons simulé différentes *MCF-AP* pour en extraire les grandeurs magnétiques qui nous intéressent, afin de les comparer aux résultats obtenus par le modèle semi analytique. Pour ce faire, nous avons opté pour une validation progressive, c'est-à-dire :

- dans un premier temps, nous nous sommes attachés à ne valider le modèle semi-analytique que par rapport au modèle numérique. Cela veut dire que nous avons modélisé la machine sur le logiciel de simulation numérique en considérant les hypothèses nécessaires au modèle semi-analytique (machine à géométrie cylindrique, matériaux magnétiques linéaires non saturables et pas de présence d'isthme). La comparaison entre les deux modèles est présentée non seulement d'un point de vue analyse des grandeurs magnétiques mais également en termes de coût en temps de calculs.
- Dans une seconde étape, nous avons comparé les résultats du modèle à ceux obtenus en considérant dans le modèle éléments finis une machine réelle : machine avec dents et aimants droits, avec des isthmes, avec des matériaux magnétiques saturables.

4.9.1 Comparaison à géométrie et hypothèses identiques

Dans cette approche, nous allons analyser les mêmes machines pour les deux modèles :

- des machines possédant strictement la même géométrie - c'est à dire des machines « adaptées » aux coordonnées cylindriques avec des dents et des aimants dont les frontières sont radiales ou orthoradiales.
- des caractéristiques de matériaux magnétiques identiques - c'est à dire des matériaux magnétiques linéaires non saturables.
- une perméabilité relative du fer infinie. Pratiquement, sur le logiciel ANSYS, la perméabilité relative du fer sera très grande.

Afin de tester non seulement la validité mais également la robustesse de notre modèle, nous avons comparé les grandeurs magnétiques (inductions et champs magnétiques, couple et flux magnétiques) de quatre *MCF-AP* possédant des géométries très différentes. Ces machines très différentes ne sont certes pas réelles mais permettrons bien de tester la robustesse du modèle. Elles sont présentées sur la Figure 4.14. Le Tableau 4.1 récapitule les dimensions de ces machines ainsi que l'induction rémanente des aimants permanents.

Variable	Machine 1	Machine 2	Machine 3	Machine 4	Nom
N_r	10	18	5	12	nombre de dents rotorique s
Q	3	5	3	4	nombre de phase(s)
P	4	4	2	4	nombre de bobine(s) par phase
N_s	12	20	6	16	nombre de dents statoriques (= $P \cdot Q$)
B_{rem}	0.36	1.2	1.2	0.36	induction rémanente des aimants (T)
ϵ_1	0.5	0.5	0.3	0.3	ouverture angulaire encoche du rotor
ϵ_3	0.195	0.25	0.2	0.25	ouverture angulaire aimant
ϵ_4	0.215	0.3	0.3	0.35	ouverture angulaire bobine
R_{ri}	40	45	35	40	rayon interne rotor (mm)
R_{re}	50	50	50	50	rayon externe rotor (mm)
R_{si}	50.5	55	51	50.5	rayon interne stator (mm)
R_b	67	69	62	69	rayon bobine (mm)
R_{se}	75	75	75	75	rayon externe machine (mm)
e	0.5	5	1	0.5	entrefer (mm)
L	40	40	40	40	longueur active (mm)

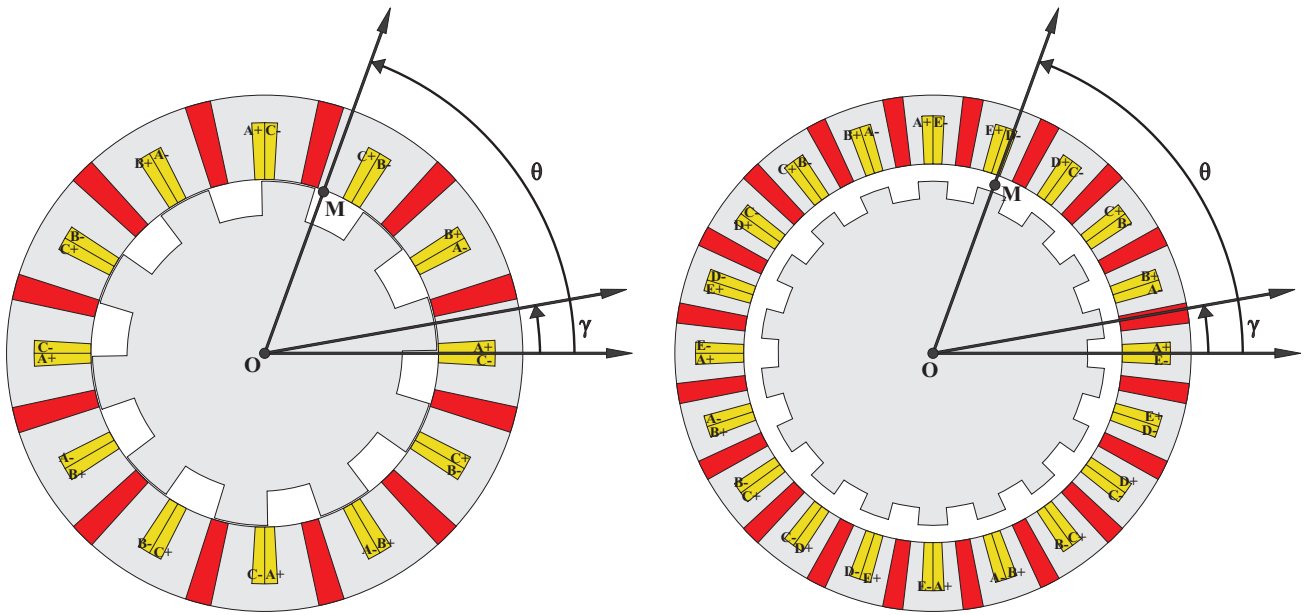
TABLE 4.1 – Principaux paramètres des quatre *MCF-AP*

De plus, nous avons vu lors de l'établissement du modèle qu'un paramètre allait fortement influencer sur la précision des résultats et sur la rapidité du calcul : le choix du nombre d'harmoniques dans l'écriture du potentiel vecteur. L'influence de ce paramètre sera débattue dans la partie suivante. Ici, nous ne nous intéressons qu'à la validation stricte du modèle aussi nous supposons que le nombre d'harmoniques choisis est « suffisamment » élevé. Pour cette partie, pratiquement, $N = 400$ et $K = 200$.

Avant de présenter les résultats, rappelons que γ désigne la position mécanique du rotor et θ repère la position angulaire d'un point M placé au milieu de l'entrefer - à la position radiale : $r = \frac{R_{re} + R_{si}}{2}$.

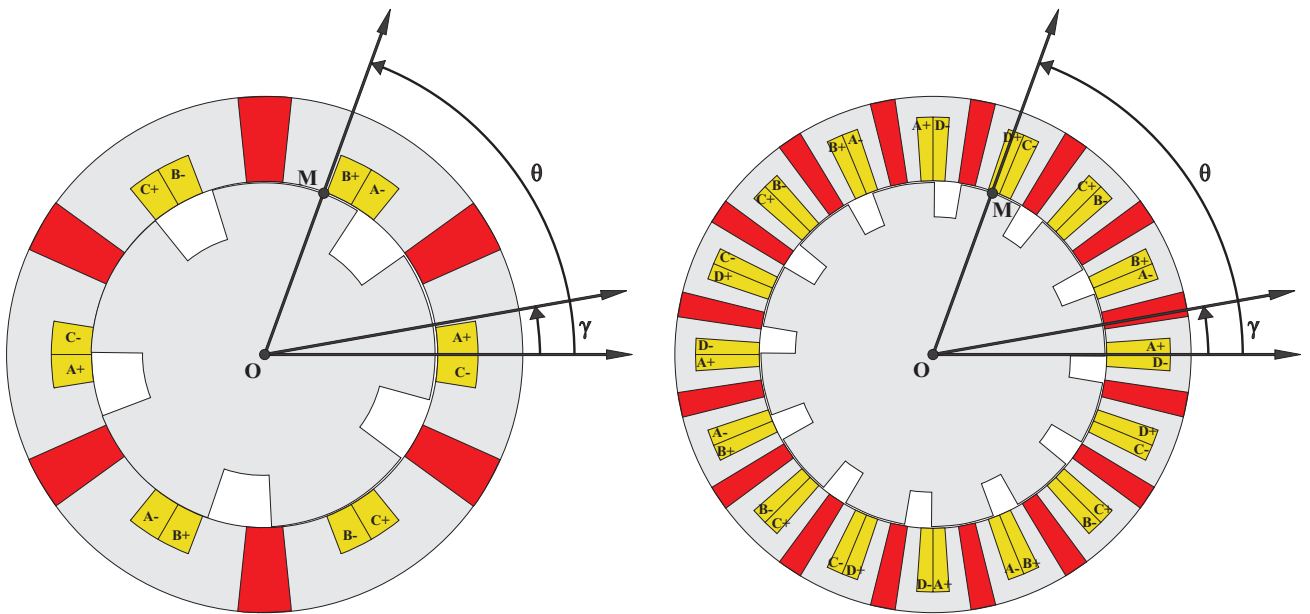
Pour les quatre machines la comparaison est effectuée d'abord à vide (densités de courants nuls dans les bobinages des différentes phases) puis en charge (densités de courants sinusoïdales en phase avec les différentes FEM de valeur efficace $5 A/mm^2$, pour un coefficient de bobinage de 0.5).

Nous allons présenter ici les résultats pour une machine (la machine présentée sur la Figure 4.14a). Les autres résultats sont placés en annexe (voir Annexe B, Section B.7).



(a) Machine 1 : Machine à Commutation de Flux 3-phases-12/10

(b) Machine 2 : Machine à Commutation de Flux 5-phases-20/18



(c) Machine 3 : Machine à Commutation de Flux 3-phases-6/5

(d) Machine 4 : Machine à Commutation de Flux 4-phases-16/12

FIGURE 4.14 – Présentation des *MCF-AP* utilisées pour la validation de notre modèle magnéto-statique

Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1

Caractéristiques à vide présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure 4.15.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure 4.16.
- Flux magnétiques à vide dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure 4.17a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure 4.17b.

4.9. VALIDATION ET INTÉRÊT DU MODÈLE SEMI-ANALYTIQUE

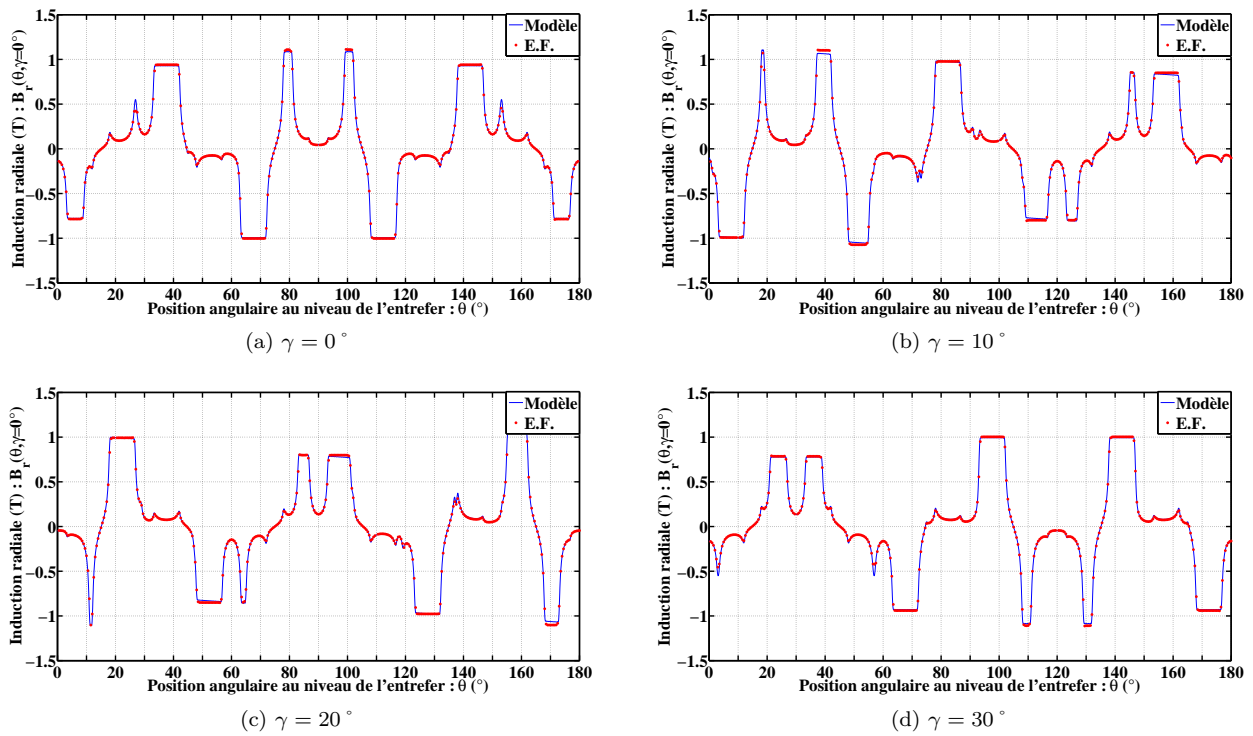


FIGURE 4.15 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer

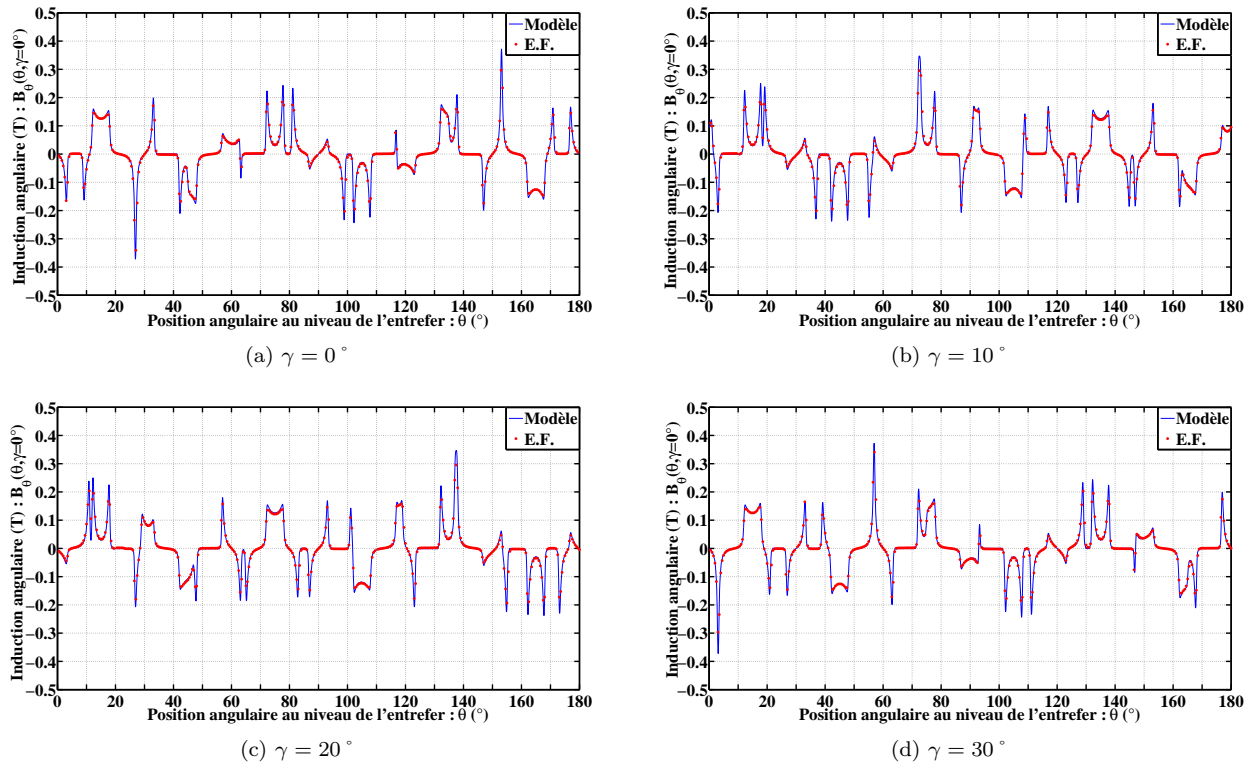


FIGURE 4.16 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer

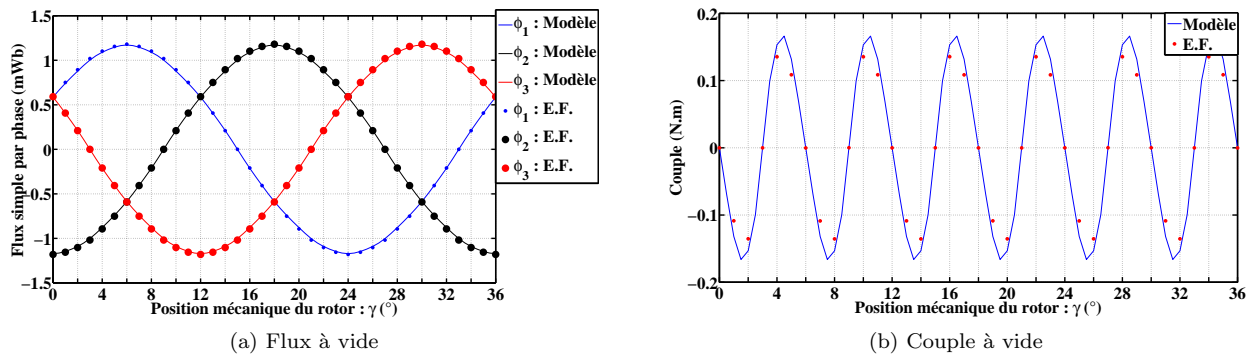


FIGURE 4.17 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Caractéristiques en charge présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure 4.18.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure 4.19.
- Flux magnétiques en charge dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure 4.20a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure 4.20b.

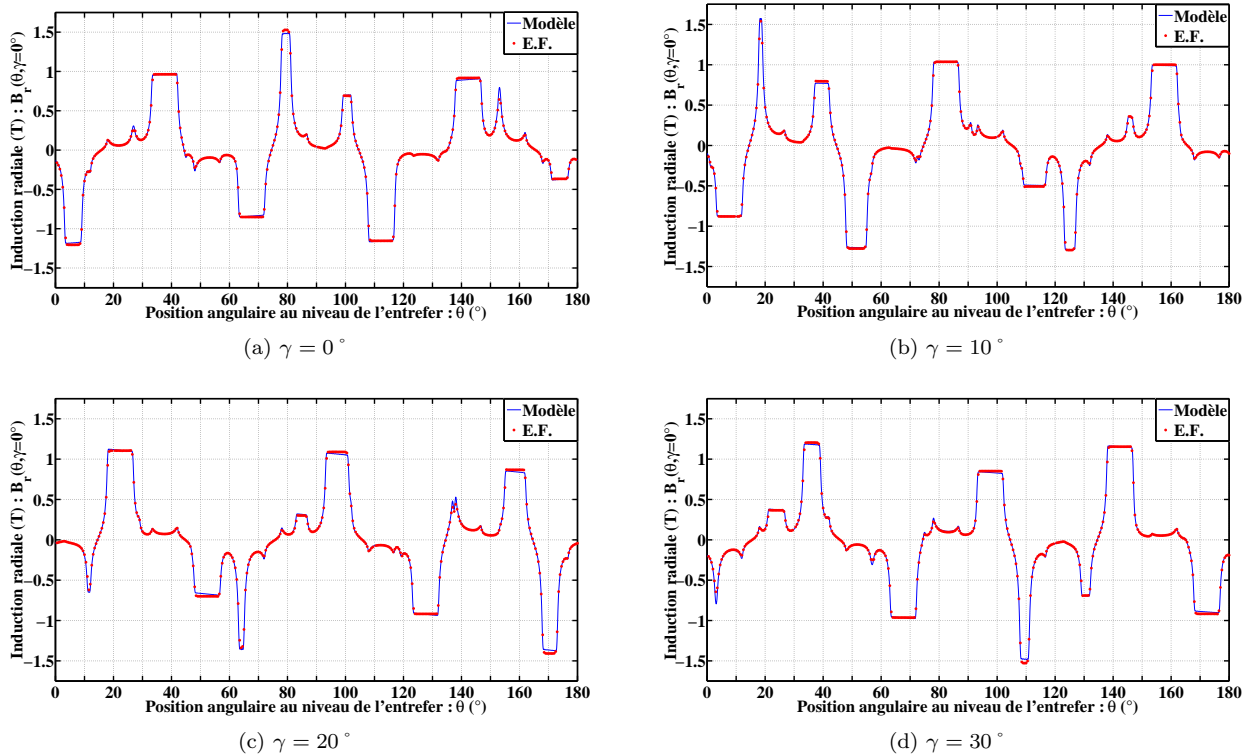


FIGURE 4.18 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer

4.9. VALIDATION ET INTÉRÊT DU MODÈLE SEMI-ANALYTIQUE

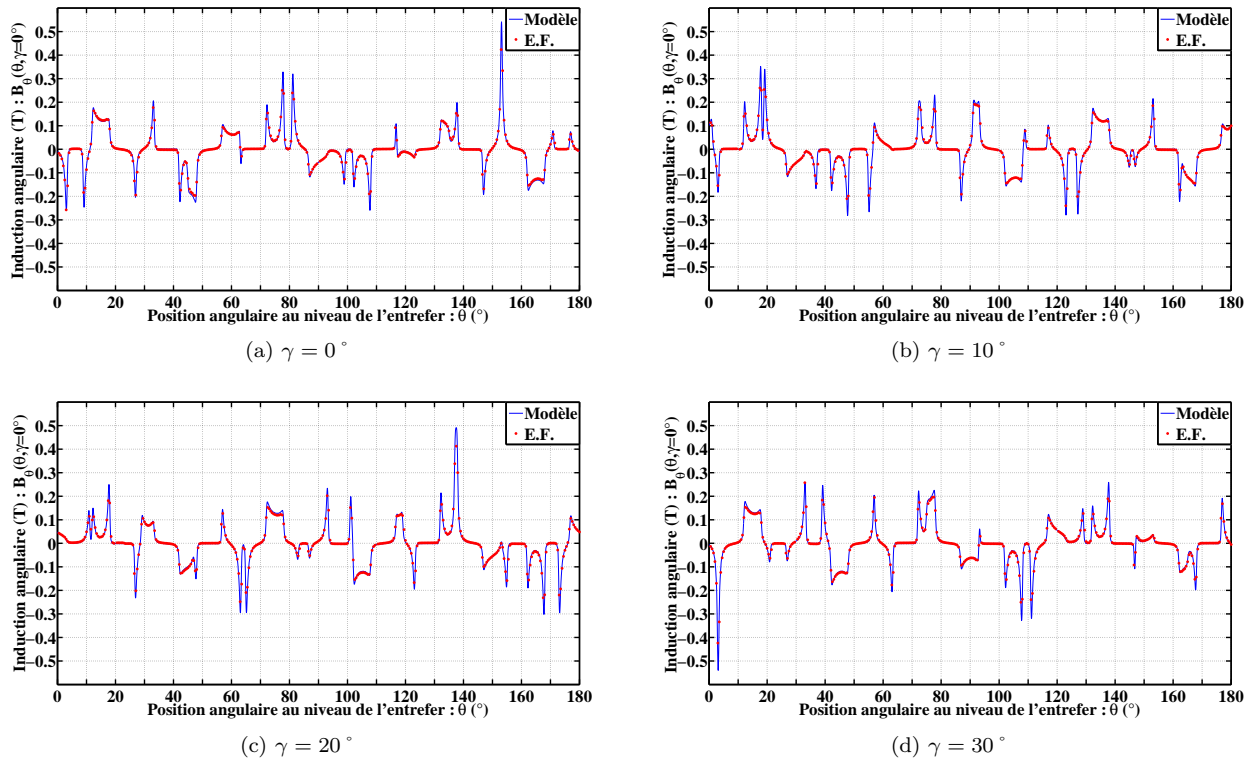


FIGURE 4.19 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer

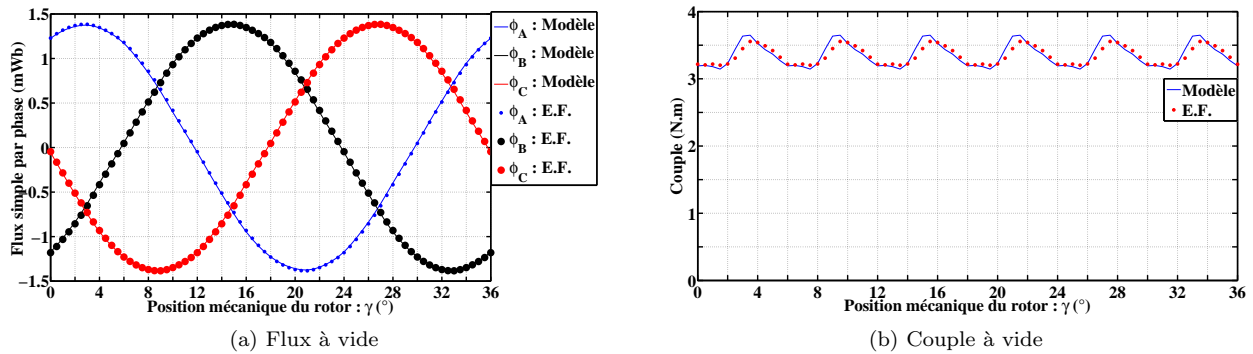


FIGURE 4.20 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Lorsque nous comparons les résultats issus du modèle semi-analytique à ceux issus de la simulation éléments finis, dans le cas des mêmes hypothèses géométriques et magnétiques, nous pouvons réaliser plusieurs conclusions :

- Il y a une très bonne concordance entre les deux modèles. Toutes les grandeurs magnétiques sont correctement estimées : composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique au niveau de l'entrefer (donc aussi les contraintes magnétiques), flux et couple électromagnétique.
- De plus, le modèle est validé dans le cas où la machine est à vide et dans le cas où la machine est en charge et dans plusieurs positions du rotor.
- Le modèle a été validé également pour des machines très différentes : deux machines triphasées 6/5 et 12/10, une machine tetrphasée 16/12 et une machine pentphasée 20/18 avec des caractéristiques très différentes (notamment un entrefer différent).
- La précision du modèle est fortement dépendant du nombre d'harmonique choisi notamment au niveau de

l'entrefer. Plus l'entrefer est petit, plus il faudra augmenter le nombre d'harmoniques N . Pour un entrefer grand (notamment la machine pentaphasée présentée sur la Figure 4.19b), les grandeurs sont très bien estimées.

4.9.2 Comparaison des temps de calcul et influence du choix du nombre d'harmoniques N et K

Afin de quantifier un des principaux avantages du modèle proposé, nous allons, dans cette partie, comparer les temps de calcul entre le modèle semi-analytique et un modèle numérique éléments finis 2D. Pour réaliser l'analyse magnétique de la machine, le logiciel commercial ANSYS a été utilisé. La machine de base est la machine pentaphasée 20/18 de la Figure 4.14b. Le modèle magnétique a été calculé sur une période électrique, c'est à dire avec une position rotorique allant de 0° à 20° avec un pas angulaire de 0.5° .

Pour obtenir une bonne estimation des inductions magnétiques et du couple électromagnétique par simulation éléments finis, il est nécessaire d'avoir un maillage très fin. Chaque itération nécessite un temps de calcul d'environ 3 *min*.

Le temps de calcul du modèle semi-analytique ainsi que sa précision sont très dépendant du choix du nombre d'harmoniques pour le calcul et l'obtention du potentiel vecteur magnétique A dans les différentes zones de la machine. On se propose donc de regarder plus en détails l'influence de N et K . Pour rappel que N est le nombre d'harmoniques dans la zone (2) de la machine, c'est à dire dans l'entrefer, et que K est le nombre d'harmoniques dans chacune des autres zones de la machine. L'influence de ces deux paramètres est présentée sur la Figure 4.21 avec :

- La Figure 4.21a où on présente la précision du modèle semi-analytique par rapport à une simulation éléments finis en fonction du nombre d'harmoniques N pour différents choix de K , pour une position du rotor donnée.
- La Figure 4.21b où on présente le temps de calcul du modèle semi-analytique en fonction du nombre d'harmonique N pour différents choix de K , pour une position du rotor donnée.

L'erreur calculée est une erreur relative moyenne du modèle semi-analytique par rapport au modèle numérique pris comme référence. Si on appelle B_{EF} la composante radiale de l'induction calculée le long de l'entrefer pour une position du rotor donnée par la simulation éléments finis et B_{SA} la composante radiale de l'induction calculée le long de l'entrefer pour la même position du rotor donnée par le modèle semi-analytique, l'erreur relative ϵ est :

$$\epsilon = \sum_i \left| \frac{B_{SA}(i) - B_{EF}(i)}{B_{EF}(i)} \right| \quad (4.103)$$

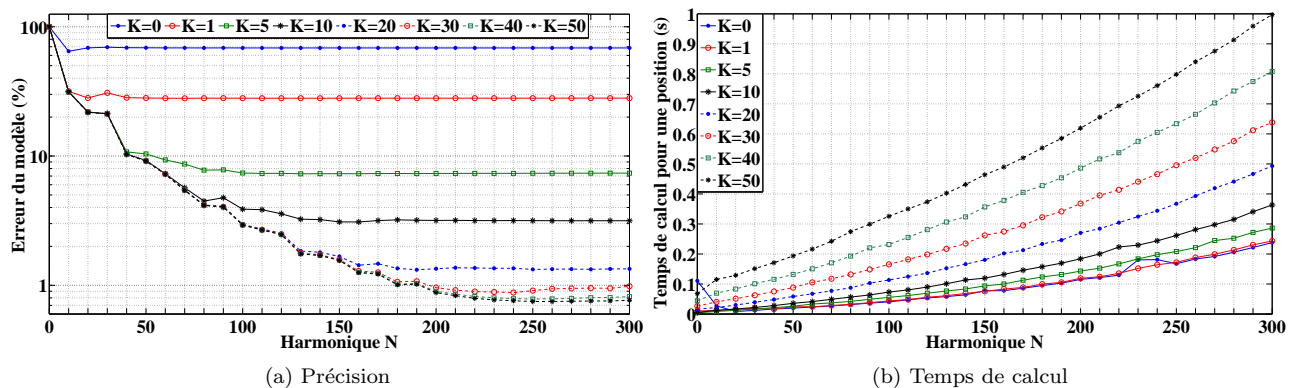


FIGURE 4.21 – Influence du choix du nombre d'harmoniques sur le temps de calcul et la précision du modèle semi-analytique magnéto-statique

Au regard de ces résultats, plusieurs conclusions peuvent être formulées :

- Le choix du nombre d'harmoniques a une influence majeure sur la précision mais également sur le temps de calcul.
- Par exemple, pour $N = 10$ et $K = 1$, l'erreur est de 30% et le temps de calcul pour une position du rotor est de 0.01 s. En revanche, pour $N = 300$ et $K = 50$, l'erreur passe à 0.15 s et le temps de calcul pour une position du rotor à 1 s. Il est donc nécessaire de faire un compromis entre le choix d'un modèle rapide et le choix d'un modèle précis.
- De manière générale, N (harmoniques dans l'entrefer) doit être plus grand K (harmoniques dans les autres zones). En effet, c'est dans l'entrefer que la variation d'induction est la plus importante.
- Le modèle semi-analytique apporte un gain de temps considérable par rapport à la simulation éléments finis pour une précision élevée. En effet, pour $N = 200$ et $K = 30$, l'erreur est inférieure à 1% et le temps de calcul est de 0.1 s pour une position. Par conséquent, pour estimer complètement l'état magnétique de la machine sur les quarante positions, le temps de calcul pour le modèle semi-analytique est de 4 s contre 2 h pour la simulation éléments finis.

4.9.3 Influence de la saturation magnétique

L'une des hypothèses les plus fortes que nous avons été amené à formuler pour la construction du modèle semi-analytique a été de supposer une perméabilité relative infinie dans le fer. Cela avait pour conséquence, entre autre, d'imposer un champ magnétique nul dans ce dernier. Néanmoins, cette simplification peut amener à des résultats très vite aberrants si elle est réalisée sans précaution. Ainsi, l'objectif de cette partie consiste à définir les limites du modèle en le comparant à un modèle numérique éléments finis dans lequel la courbe $B - H$ définissant le comportement magnétique du fer a été choisie non linéaire pour prendre en compte la saturation (Figure 4.22). L'hypothèse d'une perméabilité très forte dans le fer est valable uniquement pour de faibles excitations. L'induction rémanente des aimants a été fixée à 0.36 T et nous avons fait varier la densité de courant injectée dans les bobines.

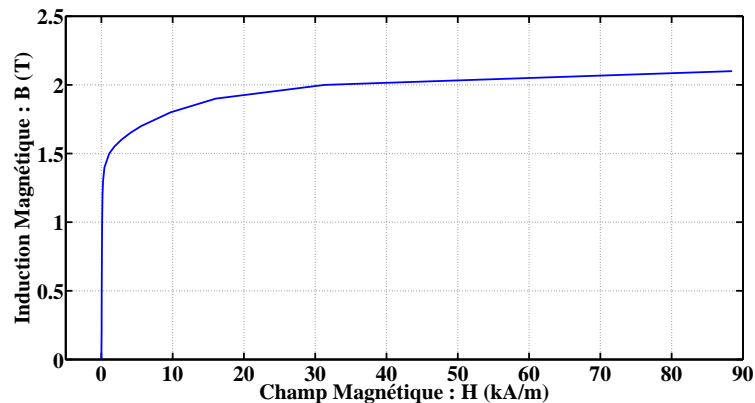
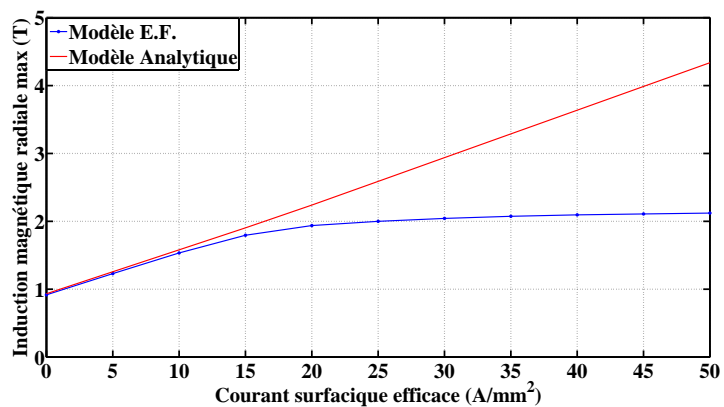
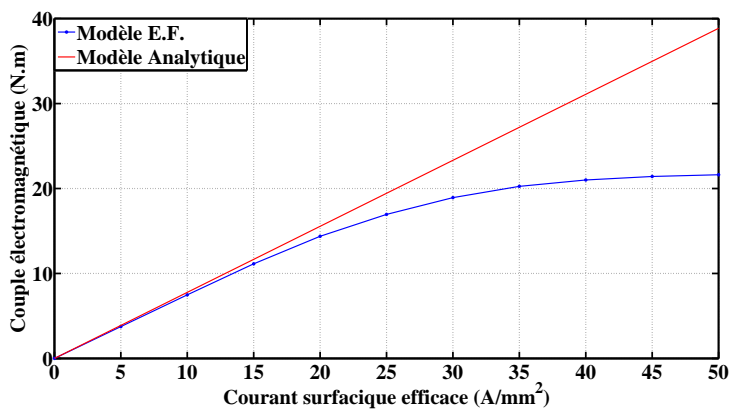


FIGURE 4.22 – Courbe $B - H$ dans le fer

- Sur la Figure 4.23, nous avons comparé les deux modèles en présentant les variations de l'induction maximale radiale dans l'entrefer (Figure 4.23a) et les variations du couple (Figure 4.23b) en fonction de la densité de courant injectée.
- Sur la Figure 4.24, nous avons comparé les deux modèles en présentant l'induction radiale dans l'entrefer pour différentes densité de courants en fonction de la position rotorique, puis la FFT de l'induction radiale afin d'évaluer l'impact de notre hypothèse sur le contenu spectral de B . En effet, ce dernier aura une grande importance sur les forces et les déplacements étudiés dans les parties précédentes.



(a) Induction radiale maximale



(b) Couple

FIGURE 4.23 – Influence de la saturation : induction radiale maximale et couple électromagnétique moyen en fonction de J_S

4.9. VALIDATION ET INTÉRÊT DU MODÈLE SEMI-ANALYTIQUE

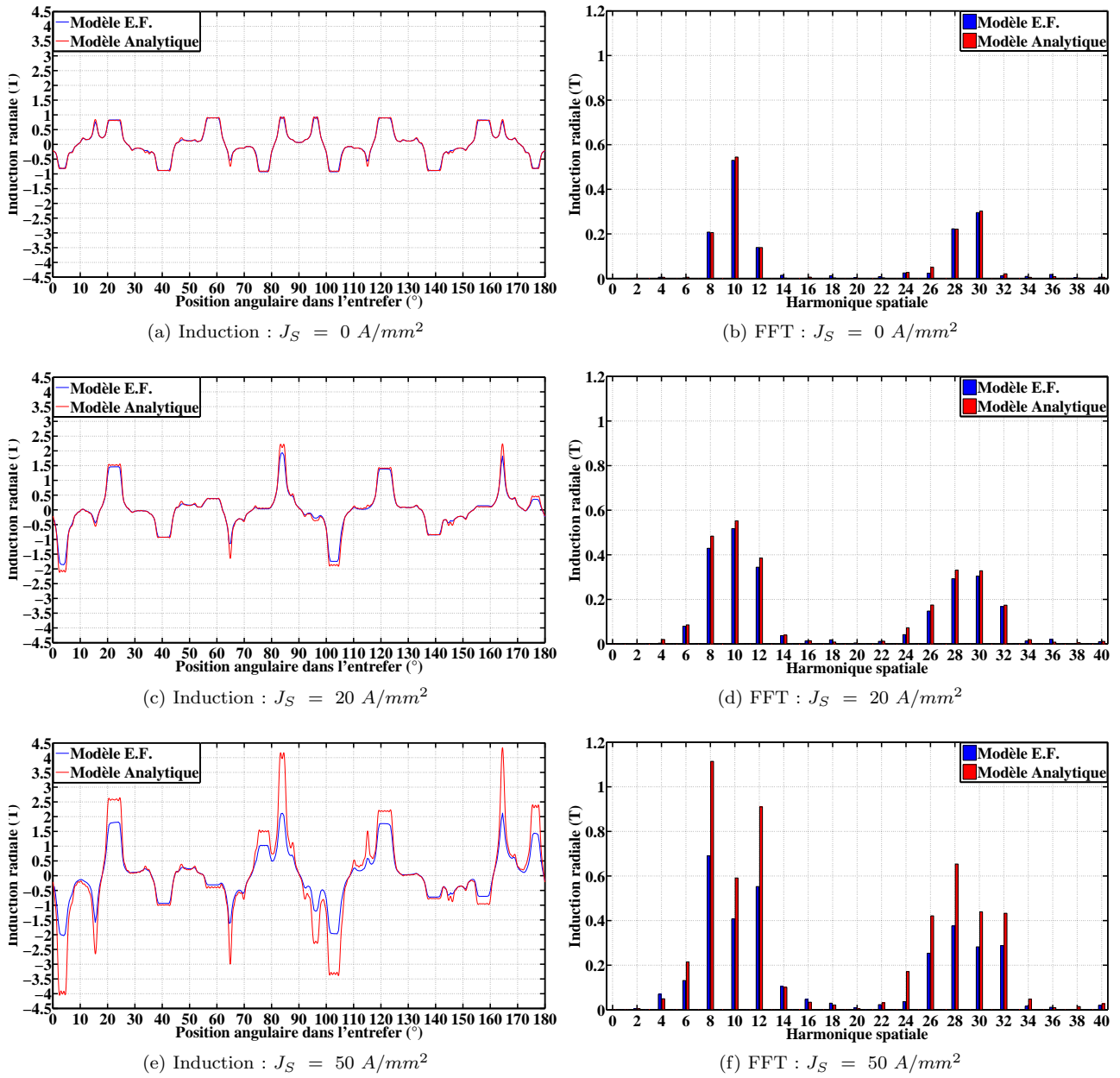


FIGURE 4.24 – Influence de la saturation : Induction radiale pour plusieurs J_S

Une comparaison entre le modèle analytique et le modèle éléments finis avec prise en compte de la saturation permet de conclure que lorsque la saturation magnétique apparaît :

- Le modèle analytique surestime le couple électromagnétique par rapport à la simulation éléments finis.
- Le modèle analytique surestime également les harmoniques d'inductions. Cela se traduira par des harmoniques de contraintes plus élevés et donc à terme, un bruit acoustique généré qui sera certainement surestimé.
- Néanmoins, dans les limites classiques de J_S (inférieure à 15 A/mm^2), l'erreur relative pour B reste inférieure à 5%.

4.9.4 Comment modéliser la machine réelle ?

Avant de conclure sur ce chapitre, il nous reste un point important à analyser : comment utiliser notre modèle pour étudier une machine réelle ? En effet, outre le fait que la modélisation a été effectuée en supposant une perméabilité relative du fer infinie, deux autres hypothèses contraignantes ont été formulées pour mener à bien la modélisation :

- La première est que nous avons supposé que les dents statoriques et rotoriques, ainsi que les aimants permanents, étaient adaptés à une modélisation en coordonnées cylindriques. Or, dans la réalité, ces derniers sont généralement droits. Cela a pour conséquence une légère modification de la machine qui se répercute surtout au niveau de la partie bobinée qui n'a pas la même surface dans les deux cas. Par conséquent, pour modéliser une machine réelle avec notre modèle, il est nécessaire de modifier la densité de courant pour des courants injectés identiques.
- La deuxième hypothèse est la non considération des isthmes dans la machine réelle. Ces isthmes servent à augmenter la tenue mécanique mais présentent la particularité de court-circuiter une partie de l'aimant. Le champ inducteur dans la machine réelle est alors plus faible que dans la machine modélisée. Pour adapter le modèle, il faut donc modifier l'induction rémanente des aimants afin d'obtenir le même champ inducteur.

La machine réelle et la machine modélisée sont représentées sur la Figure 4.25. La machine réelle possède des aimants permanents possédant une induction rémanente de l'ordre de $0.36 T$.

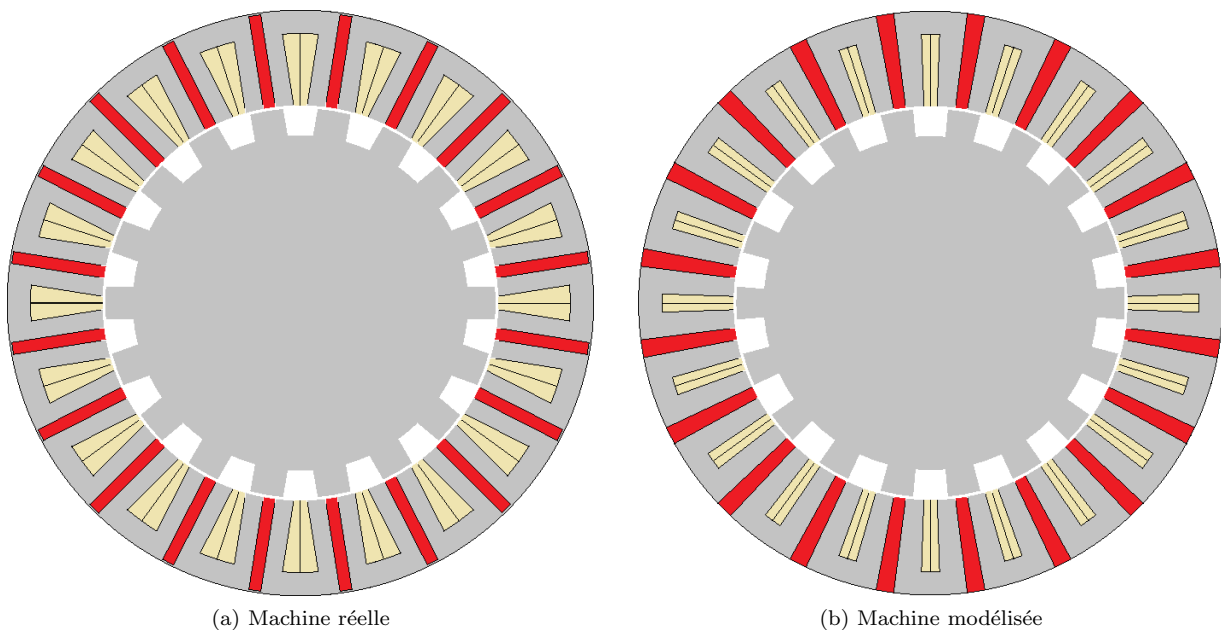


FIGURE 4.25 – Comparaison des géométries de la machine réelle et de la machine modélisée

La présence de l'isthme implique un court-circuitage d'une partie du flux l'aimant, estimé à 35% par éléments fins. Par conséquent, dans notre modèle l'induction rémanente est ajustée à 65% de $0.36 T$. De plus, la densité de courant injectée dans notre modèle semi-analytique est modifiée pour obtenir le même courant que dans la machine réelle. La densité de courant (J'_S) à injecter est alors :

$$J'_S = J_S \cdot \frac{S_R}{S_M} \quad (4.104)$$

4.9. VALIDATION ET INTÉRÊT DU MODÈLE SEMI-ANALYTIQUE

avec J_S la densité de courant dans la machine réelle, S_R la surface des bobines dans la machine réelle et S_M la surface des bobines dans la machine modélisée :

$$\begin{cases} S_R &= \frac{\pi}{N_s} \cdot (R_b^2 - R_{si}^2) - \frac{2\pi}{N_s} \cdot (1 - \epsilon_4) R_{si} \cdot (R_b - R_{si}) \\ S_M &= \frac{\pi \cdot \epsilon_4}{N_s} \cdot (R_b^2 - R_{si}^2) \end{cases} \quad (4.105)$$

La comparaison avec ces termes correcteurs est proposée sur la Figure 4.26 présentant l'induction radiale dans l'entrefer pour une densité de courant de 5 A/mm^2 obtenue :

- par simulation éléments finis pour la machine réelle avec la courbe $B - H$ non linéaire, les dents et aimants droits et la présence des isthmes.
- à l'aide du modèle semi-analytique sans aucune correction.
- à l'aide du modèle semi-analytique en prenant en compte la présence de l'isthme, c'est à dire en modifiant la valeur de l'induction rémanente des aimants permanents.
- à l'aide du modèle semi-analytique en prenant en compte la présence de l'isthme et en corrigeant également la densité de courant.

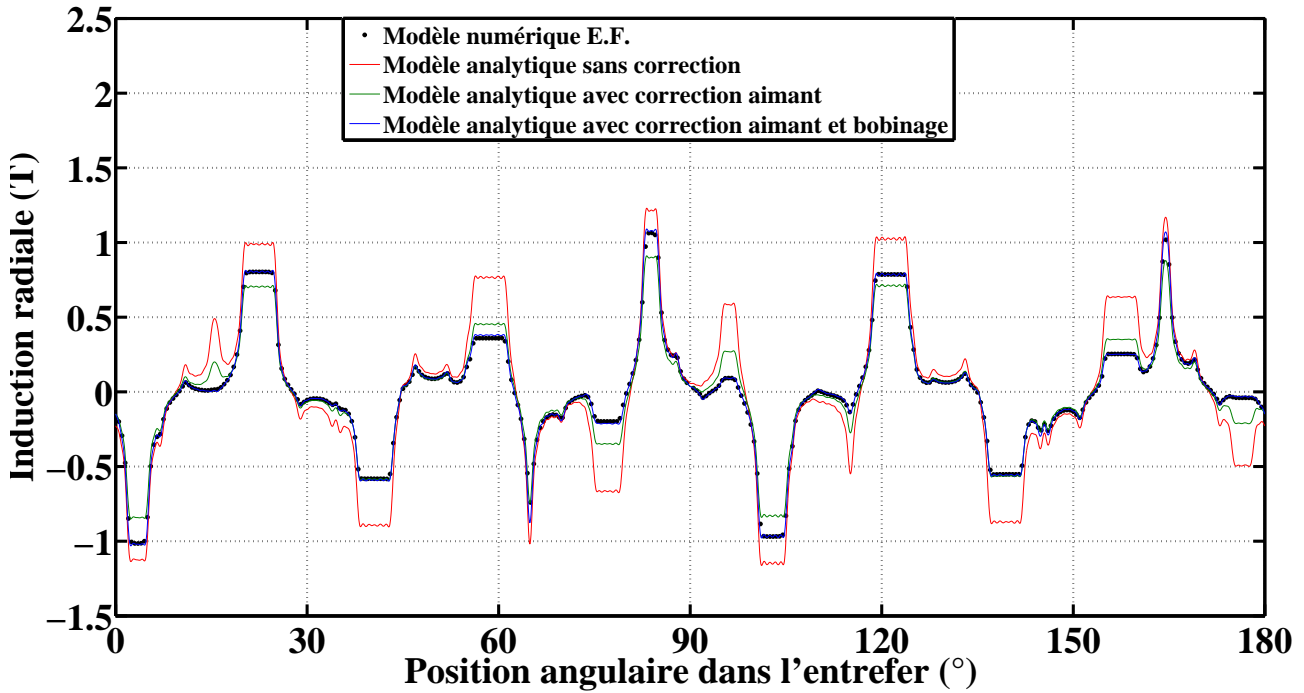


FIGURE 4.26 – Induction radiale : modélisation de la machine réelle

En conclusion sur cette partie :

- Il y a une nette différence entre le modèle semi-analytique sans correction et le modèle numérique éléments finis. En effet, le courant injecté n'est pas le même car la géométrie de la machine est différente. De plus, l'induction rémanente des aimants permanents est trop élevée dans le cas du modèle semi-analytique car le court-circuitage d'une partie de ces aimants n'est pas pris en compte. Par conséquent, l'induction magnétique est surestimée.
- Lorsqu'une correction est appliquée aux aimants permanents (diminution de leurs inductions rémanentes), nous constatons une nette amélioration dans la précision du modèle. Puisque le courant n'est pas ajusté, l'induction magnétique est sous-estimée.
- Enfin, lorsqu'il y a les deux corrections (correction du courant et correction des aimants permanents), l'induction magnétique est correctement évaluée.

4.10 Conclusion

Ce chapitre a été consacré au développement d'un modèle semi-analytique magnéto-statique en deux dimensions adapté pour l'étude de l'état magnétique des *MCF-AP* et plus particulièrement pour l'étude des flux, couple, inductions, champs, potentiel vecteur et contraintes magnétiques. La méthode employée a été la résolution formelle des équations de Maxwell de la magnéto-statique par développement en série de Fourier.

Pour mener à bien le développement des différents calculs, nous avons considéré des matériaux magnétiques linéaires et non saturables. De plus, la perméabilité relative du fer a été considérée comme étant égale à l'infini. La machine a été découpée en différentes zones, chaque zone représentant un matériau magnétique différent (air, bobine, aimant). Le potentiel vecteur magnétique A a ensuite été écrit sous la forme d'une série de Fourier développée jusqu'à un certain rang d'harmoniques. L'équation de Maxwell de la magnéto-statique a été résolue de manière formelle en coordonnées cylindriques, coordonnées particulièrement bien adaptées aux machines électriques tournantes. Toutefois, il a fallu modifier légèrement la géométrie de la machine. Le développement a mis en évidence des coefficients de la série qu'il a fallu déterminer en traduisant les conditions aux limites entre les différents matériaux magnétiques.

Une fois la connaissance complète du potentiel vecteur magnétique A dans la machine, les différentes grandeurs ont pu être déduites. Ce modèle a ensuite été validé en comparant ces grandeurs à celles obtenues à l'aide de simulations éléments finis par l'intermédiaire du logiciel commercial ANSYS pour une géométrie et des caractéristiques de matériaux identiques. Différentes machines ont ainsi été étudiées : deux triphasées 6/5 et 12/10, une tétraphasée 16/12 et une pentaphasée 20/18. Nous avons montré une très bonne concordance des résultats avec une erreur proche de zéro lorsque le nombre d'harmoniques choisi était suffisant.

De plus, le gain en termes de temps de calcul du modèle semi-analytique est particulièrement conséquent en comparaison du temps de calcul du modèle éléments finis. En effet, nous avons montré que pour une *MCF-AP* 20/18 l'état magnétique d'une position du rotor était estimé en 0.1 s à l'aide du modèle semi-analytique pour 200 harmoniques dans l'entrefer et 30 harmoniques dans chacune des autres zones de la machine. En revanche, le modèle éléments finis estime l'état magnétique d'une position du rotor en 3 min. L'écart relatif entre les deux modèles est de moins de 1%. Ainsi, si nous souhaitons estimer les grandeurs magnétiques sur une période électrique complète (correspond ici à 20° mécanique) avec un pas de 0.5°, le modèle semi-analytique durait 4 s contre 2 h pour le modèle semi-analytique.

Une fois la validation du modèle effectuée, nous avons cherché à discuter des différentes limitations du modèle et notamment à étudier l'influence de la saturation magnétique sur la précision du modèle. Pour cela, nous avons considéré une courbe $B - H$ non linéaire sur notre logiciel de simulation éléments finis et nous avons comparé les résultats, notamment les inductions magnétiques, pour différentes densités de courants injectées. Nous avons montré que lorsque les matériaux magnétiques saturaient, le modèle analytique surestimait l'induction et donc à termes les contraintes magnétiques puis le bruit acoustique généré. Néanmoins, dans les limites classiques du courant (inférieure à 15 A/mm²), l'erreur relative pour B pour une *MCF-AP* 20/18 restait inférieure à 5%.

Enfin, nous nous sommes attachés à modéliser une machine réelle, c'est-à-dire une machine avec des dents et des aimants permanents droits et avec la présence d'isthmes au dessus des aimants permanents. Ainsi, nous avons corrigé la densité de courant à injecter dans la machine ainsi que l'aimantation des aimants permanents dont une partie est court-circuitée par la présence des isthmes.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous pencher sur le modèle analytique permettant la détermination des modes propres du stator afin de continuer la présentation du modèle analytique magnéto-acoustique.

Modèle Analytique permettant la détermination des Modes Propres d'un Stator

5.1 Introduction

Continuons la présentation de notre modèle analytique magnéto-acoustique prédisant les performances magnétiques et acoustiques des *MCF-AP* en nous penchant sur la deuxième partie du modèle, à savoir le calcul analytique des modes propres d'un stator de machine électrique. Avant de commencer, nous tenons à attirer l'attention du lecteur sur le fait que ce modèle, bien qu'il soit appliqué à un type particulier de convertisseur électromécanique, pourrait aussi être utilisé pour d'autres structures différentes. Pour donner quelques exemples rapides, le modèle présenté dans ce chapitre peut sans difficulté s'appliquer à des machines synchrones, à des machines asynchrones ainsi qu'à des machines à réluctance variable.

Dans le chapitre précédent, le modèle semi-analytique magnéto-statique nous a permis de connaître l'état magnétique complet de la machine et par voie de conséquence d'estimer les contraintes magnétiques agissant au sein de la structure, et plus particulièrement au sein de la structure statorique. Suite à une réflexion qui a été détaillée précédemment, nous avons été amené à ne considérer que les contraintes radiales à l'interface entre le stator et l'entrefer comme sources potentiellement génératrices de vibrations et donc de bruits acoustiques. Ces contraintes, de par leurs répartitions spatiales, ne sont en mesure d'exciter que les modes propres d'ovalisations 2D de la structure statorique. Il est donc nécessaire d'estimer ces modes propres avant de prédire le bruit acoustique rayonné par les machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents.

C'est l'objectif de ce chapitre dans lequel nous allons présenter un modèle analytique permettant une estimation de manière formelle des modes propres d'ovalisations 2D d'un stator de machine électrique à partir de la connaissance de deux éléments, à savoir la géométrie et les caractéristiques mécaniques des différents matériaux composant cette structure. Le modèle analytique présenté ici est basé sur une approche énergétique, appelé également principe d'Hamilton, et sur l'obtention puis la minimisation du quotient de Rayleigh. Un synoptique de ce modèle est présenté sur la Figure 5.1. Nous pouvons d'ores et déjà nous avancer sur la suite du chapitre en affirmant l'intérêt principal de cette méthode : s'affranchir de la résolution des équations aux dérivées partielles décrivant le comportement mécanique de la structure. En effet, dès lors que l'on souhaite obtenir un modèle très précis, ces équations aux dérivées partielles deviennent vite impossibles à résoudre analytiquement. Nous justifierons cela dans la partie consacrée à l'état de l'art.

Dans une première partie, nous commencerons donc par un état de l'art sur les principaux modèles analytiques utilisés pour l'obtention des modes propres d'un stator de machine électrique (Partie 5.2) puis nous présenterons la méthode dite du « quotient de Rayleigh », méthode utilisée ici pour construire notre modèle analytique (Partie 5.3). Une fois la présentation du modèle effectuée, ce dernier est utilisé pour obtenir de manière analytique les modes propres d'ovalisations 2D d'un anneau circulaire (Partie 5.4) puis nous préciserons les modifications nécessaires pour l'obtention des modes propres d'ovalisations 2D d'un stator de machine électrique (Partie 5.5). Enfin, puisque le stator d'une machine est généralement inséré dans une culasse, nous adapterons les calculs réalisés précédemment pour en déduire les fréquences propres d'un stator de machine avec sa culasse (Partie 5.6).

Avant de commencer à présenter le modèle, il nous a semblé intéressant de préciser que ce chapitre a d'ores et déjà fait l'objet d'un article publié dans la revue internationale *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 61, No. 6, June 2014 [Boisson et al., 2014].

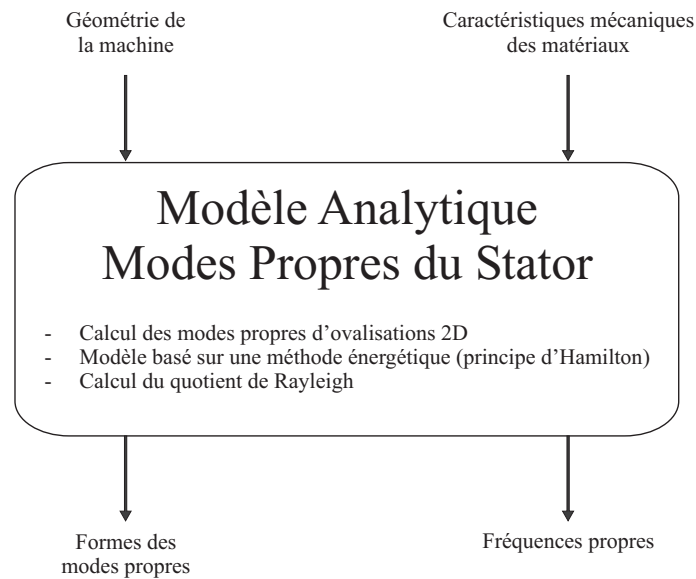


FIGURE 5.1 – Synoptique du modèle analytique permettant l’obtention de manière formelle des modes propres d’ovalisations 2D d’un stator de machine électrique

5.2 État de l’art

L’obtention des premières formulations entièrement analytiques visant à approximer les fréquences propres mécaniques de structures de machines électriques en vue d’une étude complète de leurs comportements vibratoires date des années 1950 et 1960 avec plusieurs ouvrages de référence en la matière, notamment ceux de H. JORDAN [Jordan, 1950], P. ALGER [Alger, 1965] et J. DEN HARTOG [Den Hartog, 1956]. Les méthodes s’appuient sur l’obtention et la résolution analytique des équations aux dérivées partielles régissant le comportement mécanique de stator des machines électriques à l’aide de deux grands principes : le principe de d’Alembert, qui a pour objectif l’obtention des équations aux dérivées partielles à partir du principe fondamental de la dynamique en traduisant l’équilibre des forces, ou le principe de Hamilton, qui est une approche énergétique pour laquelle l’obtention des équations est réalisée à partir du théorème de l’énergie cinétique. Dans ces deux cas de figures, le stator est considéré comme un anneau circulaire afin d’être en mesure d’appliquer analytiquement la théorie de la résistance des matériaux sur des poutres circulaires. A ces recherches, nous pouvons également ajouter celles de P. TILMAN [Timar, 1989]. La complexité des équations aux dérivées partielles, et par voie de conséquences la complexité de leurs résolutions, dépend des modèles de poutres circulaires et des hypothèses cinématiques utilisées comme par exemple les hypothèses cinématiques de Bernoulli qui consistent à négliger la déformation en cisaillement dans les poutres ou les hypothèses cinématiques de Timoshenko dont l’ouvrage [Timoshenko and Young, 1945] fait encore référence aujourd’hui.

Ces premières formulations analytiques sont certes basées sur des hypothèses fortes mais ont néanmoins le mérite d’être non seulement facilement exploitable mais également d’offrir la possibilité de considérer les dents statoriques ainsi que le bobinage dans le calcul des fréquences propres. Les exploitations qui résultent de ces modèles analytiques ont notamment été proposées chez B. CASSORET [Cassoret, 1996], A. HUBERT [Hubert, 2001], A. AIT-HAMMOUDA [Ait-Hammouda, 2005] et chez J. LE BESNERAIS [Le Besnerais, 2008a] avec pour objectif de proposer une réduction du bruit magnétique émis par les machines électriques. Pour parvenir aux formulations qui vont suivre, le stator est considéré comme une poutre circulaire d’épaisseur mince devant sa longueur. Cela permet d’utiliser les hypothèses cinématiques de Bernoulli pour l’obtention des équations aux dérivées partielles traduisant le comportement mécanique de cette poutre. L’une des hypothèses est que la section droite de la poutre reste orthogonale à la fibre neutre définie comment étant l’axe de la poutre qui ne subit pas de déformation. Cette hypothèse fortement contraignante permet d’approximer correctement les fréquences propres des stators qui ont une épaisseur de culasse relativement faible mais n’est plus du tout vérifiée lorsque cette épaisseur augmente trop. Nous invitons le lecteur à se référer à la Figure 5.2 pour les notations utilisées par la suite. Nous appellerons R le rayon moyen de la culasse statorique et h l’épaisseur de

cette dernière.

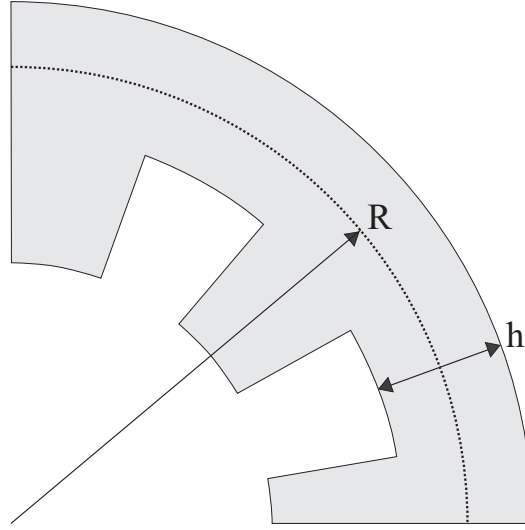


FIGURE 5.2 – Notations utilisées pour l'obtention des fréquences propres d'un stator

Pour obtenir les fréquences propres, le stator est considéré comme un anneau. Les dents et le bobinage sont pris en compte en modifiant la masse volumique de cet anneau. Les formulations analytiques généralement développées dans ces recherches sont les suivantes :

Pulsation associée au mode propre d'ovalisation d'ordre 0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho_m}} \quad (5.1)$$

Pulsation(s) associée(s) au(x) mode(s) propre(s) d'ovalisation(s) d'ordre(s) $n \geq 2$:

$$\omega_n = \frac{h}{2\sqrt{3}R} \cdot \frac{n \cdot (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + 1}} \cdot \omega_0 \quad (5.2)$$

avec :

$$\rho_m = \rho \cdot \frac{M_c + M_d + M_b}{M_c} \quad (5.3)$$

et :

- E : module de Young de la culasse statorique
- ρ_m : masse volumique corrigée de la culasse statorique
- ρ : masse volumique de la culasse statorique
- n : mode propre d'ovalisation considéré
- M_c : masse de la culasse
- M_d : masse des dents
- M_b : masse des bobines

Pour bien se rendre compte immédiatement des limites de ce modèle analytique, nous nous proposons de le confronter à la simulation par éléments finis. Pour cela, nous avons considéré un anneau circulaire modélisé sur le logiciel de simulation par éléments finis commercial ANSYS. Cet anneau possède un rayon moyen $R = 0.1 \text{ m}$, un module de Young $E = 200 \text{ MPa}$, une masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, un coefficient de Poisson $\mu = 0.3$ et nous avons fait varier l'épaisseur de l'anneau de manière à avoir le rapport h/R qui varie de 0.01 à 0.5. Nous avons ensuite comparé les fréquences propres obtenues par simulation avec celles obtenues à l'aide du modèle sus-cité. Les déformées associées aux premiers modes propres sont présentées sur la Figure 5.3 et la comparaison des fréquences correspondantes est, elle, présentée sur la Figure 5.4.

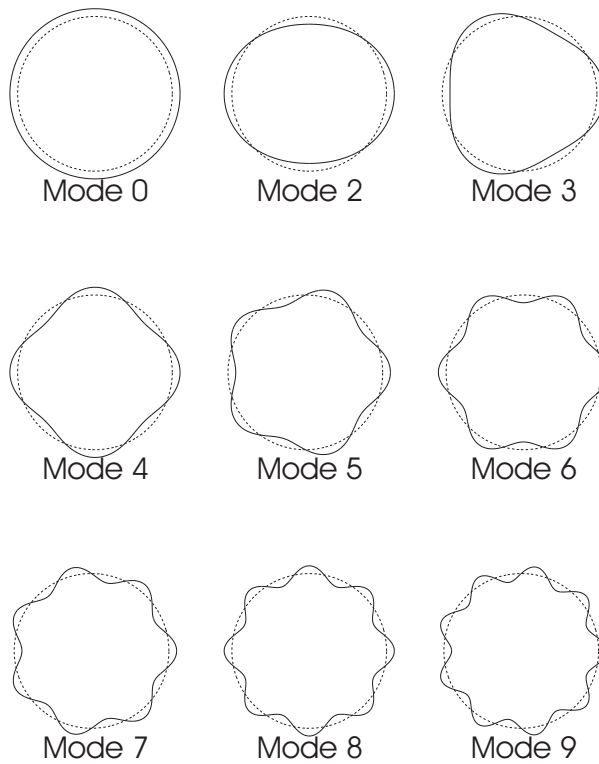


FIGURE 5.3 – Déformées associées aux premiers modes propres d'ovalisation : mode 0 et modes 2 à 9

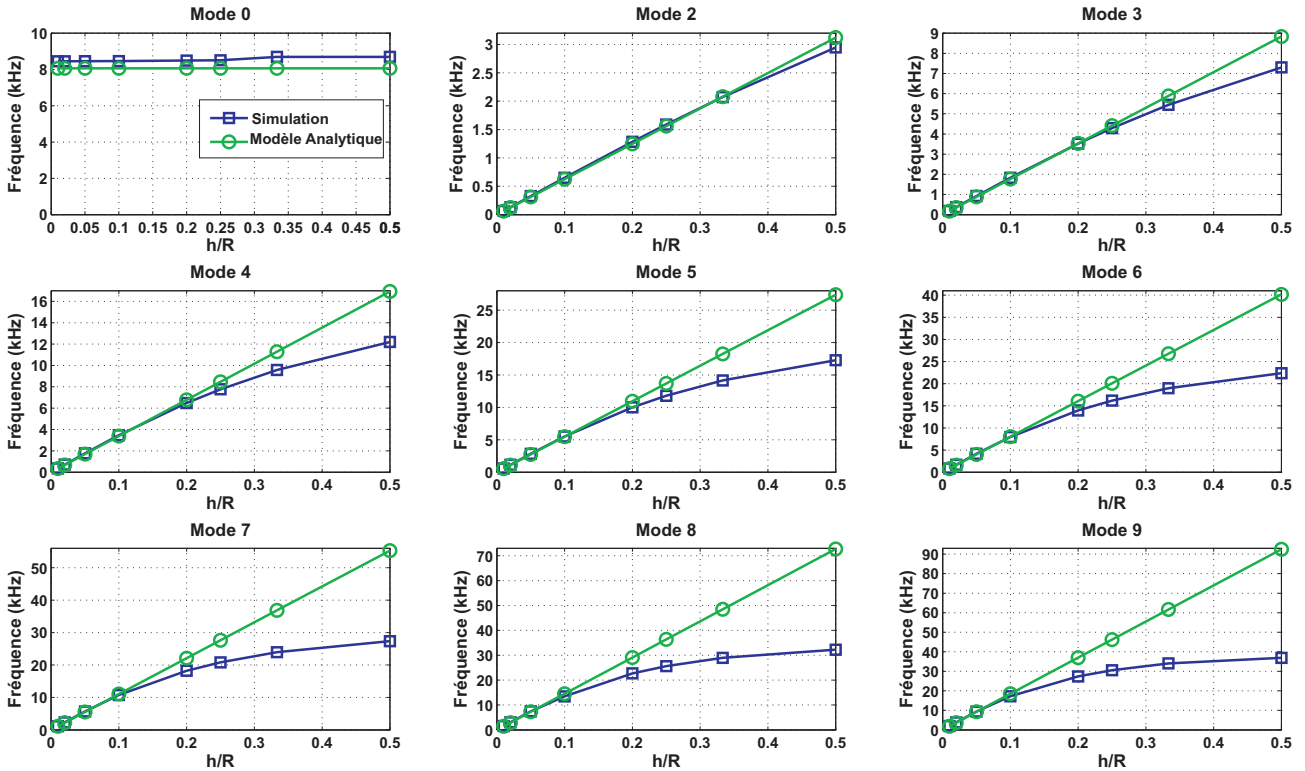


FIGURE 5.4 – Comparaison des fréquences propres obtenues pour un anneau circulaire entre la simulation par éléments finis et le modèle utilisé couramment dans la littérature

En observant cette dernière figure (Figure 5.4), nous pouvons rapidement conclure sur les limites de ce modèle, à savoir que les résultats obtenus sont d'autant plus éloignés de ceux obtenus avec les éléments finis que l'épaisseur de l'anneau devient importante. Une exception existe concernant l'estimation du mode propre d'ovalisation d'ordre 0 qui reste bien estimé quelle que soit l'épaisseur de l'anneau. En effet, ce mode d'ovalisation particulier, appelé aussi mode de gonflement, sollicite l'anneau en traction compression uniquement. Il est donc plus simple de prédire ses fréquences propres. Pour les autres modes, la divergence s'explique par le fait que l'hypothèse cinématique de Bernoulli n'est plus valable pour des anneaux possédant une épaisseur élevée. Ainsi, si la force de ce modèle réside dans la relative simplicité de son obtention, bien expliquée dans [Hubert, 2001], et dans la très grande simplicité de sa formule analytique (voir Équation 5.1 et Équation 5.2) la faiblesse principale provient des hypothèses de la cinématique de Bernoulli qui ne sont pas adaptées à des poutres épaisses.

Il semble donc important de proposer des modèles permettant de dépasser ces limitations. Cependant, cela entraîne généralement des équations aux dérivées partielles de plus en plus complexes et donc de plus en plus difficilement résolubles. C'est par exemple le cas dans [Hubert, 2001] qui propose un modèle plus complet en utilisant un modèle de poutre basé sur l'hypothèse cinématique de Timoshenko. Il obtient, à mesure qu'il prend en compte les différents phénomènes (déformation de cisaillement, inertie de rotation, effort tranchant, ...), des équations aux dérivées partielles de plus en plus complexes dont la résolution analytique est compromise.

C'est la raison pour laquelle les recherches, devant la complexité des équations aux dérivées partielles à mesure que l'on prenait en compte de plus en plus de paramètres, se sont penchés sur une modification de la formulation du modèle. C'est notamment le cas chez J. P. LECOINTE dans [Lecoite et al., 2004], P. WITCZAK dans [Witczak, 2011] et enfin chez Q. Li dans [Li, 2011].

5.3 Expression du quotient de Rayleigh dans le cas général

Avant de détailler notre modèle analytique permettant l'obtention de formulations approximant les modes ainsi que les fréquences propres des stators des machines électriques, nous allons présenter dans un premier temps toute la démarche qui nous a permis de parvenir à ces résultats. Nous devons tout d'abord expliciter la méthode du quotient de Rayleigh dans le cas général. Pour cela, considérons un système physique vibrant, que l'on appellera Σ (voir Figure 5.5). Ce système vibre sur un mode particulier à la fréquence f . Soit P un point de ce système. Le champ de déplacement associé à ce point est noté \vec{U} . Il dépend de l'espace et du temps. Nous allons exprimer ce champ de déplacement en utilisant la méthode de séparation des variables, ce qui revient à exprimer \vec{U} sous la forme suivante :

$$\vec{U}(P, t) = A \cdot \sin(2\pi ft + \varphi) \cdot \vec{u}(P) \quad (5.4)$$

avec A l'amplitude du déplacement (en m), f la fréquence propre de la vibration (Hz), φ sa phase (rad) et $\vec{u}(P)$ la déformée modale associée au mode propre considéré (sans unité).

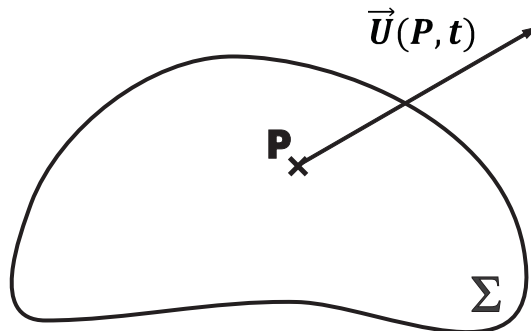


FIGURE 5.5 – Structure vibrante sur un mode particulier à la fréquence f et possédant un champ de déplacement \vec{U} au point P

Comme cela a été rapidement précisé précédemment, la méthode du quotient de Rayleigh est une méthode énergétique, présentée notamment dans [Thomson, 1996], dans [Meirovitch, 1967] et dans [Lanczos, 2012]. Pour la détailler, nous allons noter E_s l'énergie de déformation de la structure Σ et E_k l'énergie cinétique. Nous allons émettre l'hypothèse que la structure Σ est un système conservatif, c'est à dire un système pour lequel il y a un échange permanent d'énergies entre l'énergie de déformation et l'énergie cinétique. Soit $E_{s,max}$ et $E_{k,max}$ respectivement les valeurs maximales des énergies de déformation et cinétique. En traduisant l'hypothèse de conservation sous forme d'équation, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{E_{s,max}}{E_{k,max}} = 1 \quad (5.5)$$

Dans un système conservatif, l'énergie de déformation et l'énergie cinétique peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{cases} E_s(\vec{U}) &= A^2 \cdot \sin^2(2\pi ft + \varphi_s) \cdot \int_{\Sigma} e_s(\vec{u}) \cdot d\Sigma \\ E_k(\vec{U}) &= (2\pi f)^2 \cdot A^2 \cdot \sin^2(2\pi ft + \varphi_k) \cdot \int_{\Sigma} e_k(\vec{u}) \cdot d\Sigma \end{cases} \quad (5.6)$$

avec e_s l'énergie de déformation locale et e_k l'énergie cinétique locale de la structure. A partir des expressions précédentes, les maximums des fonctions représentant l'énergie de déformation et l'énergie cinétique s'écrivent :

$$\begin{cases} E_{s,max} &= A^2 \cdot \int_{\Sigma} e_s(\vec{u}) \cdot d\Sigma \\ E_{k,max} &= (2\pi f)^2 \cdot A^2 \cdot \int_{\Sigma} e_k(\vec{u}) \cdot d\Sigma \end{cases} \quad (5.7)$$

En utilisant la relation écrite à l'Équation 5.5 traduisant le fait que le système Σ est un système conservatif, nous obtenons :

$$\frac{\int_{\Sigma} e_s(\vec{u}) \cdot d\Sigma}{(2\pi f)^2 \cdot \int_{\Sigma} e_k(\vec{u}) \cdot d\Sigma} = 1 \quad (5.8)$$

Par conséquent, la fréquence de résonance f de la structure Σ vibrant suivant une déformée modale propre \vec{u} peut s'exprimer sous la forme :

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\int_{\Sigma} e_s(\vec{u}) \cdot d\Sigma}{\int_{\Sigma} e_k(\vec{u}) \cdot d\Sigma}} \quad (5.9)$$

Ainsi, appelons $\Re(\vec{u})$ le quotient de Rayleigh associé à la déformée modale propre \vec{u} . Ce quotient se met sous la forme :

$$\Re(\vec{u}) = \frac{\int_{\Sigma} e_s(\vec{u}) \cdot d\Sigma}{\int_{\Sigma} e_k(\vec{u}) \cdot d\Sigma} \quad (5.10)$$

Généralement, une structure vibre suivant différentes déformées modales associées à différentes fréquences propres. La fréquence propre f_n du mode n associée à la déformée modale propre \vec{u}_n peut s'exprimer sous la forme :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\Re(\vec{u}_n)} \quad (5.11)$$

Toute la difficulté de la méthode du quotient de Rayleigh réside ainsi dans la recherche de cette déformée modale \vec{u}_n . En effet, cela peut s'avérer être particulièrement délicat, voire impossible, d'obtenir une expression analytique exacte de cette dernière puisqu'il faut prendre en compte de nombreux phénomènes physiques, à savoir : la déformation de cisaillement, l'inertie de rotation, les efforts tranchant, ... On peut ainsi se retrouver avec la même problématique que lors de la recherche des solutions des équations aux dérivées partielles régissant le comportement mécanique de la structure et ne pas être en mesure d'obtenir la forme exacte de la déformée

modale. Par conséquent, pour contourner ces obstacles, la méthode du quotient de Rayleigh consiste à définir une autre déformée modale, que l'on va noter $v_n^{\vec{}}$, qui a pour propriété d'être « proche » de la déformée modale $u_n^{\vec{}}$. Le mot « proche » a été mis entre guillemets délibérément car toute la difficulté de cette méthode est de pouvoir justifier la forme de la déformée modale approchée. Néanmoins, si les conditions énoncées sont vérifiées, le quotient de Rayleigh associé à la déformée modale $v_n^{\vec{}}$ est légèrement supérieur au quotient de Rayleigh associée à la déformée modale $u_n^{\vec{}}$:

$$\Re(v_n^{\vec{}}) \gtrsim \Re(u_n^{\vec{}}) \quad (5.12)$$

On peut donc approximer la fréquence f_n associée au mode n de la déformée modale $u_n^{\vec{}}$ en utilisant le quotient de Rayleigh de la déformée modale $v_n^{\vec{}}$:

$$f_n \simeq \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\Re(v_n^{\vec{}})} \quad (5.13)$$

L'objectif de la partie suivante est d'appliquer cette méthode afin de proposer dans un premier temps un modèle analytique donnant les fréquences propres et les modes propres d'ovalisations d'un anneau circulaire, modélisé par une poutre circulaire.

5.4 Application au cas d'un anneau circulaire

Dans cette partie, nous allons présenter plusieurs modèles analytiques obtenus à partir de la méthode du quotient de Rayleigh pour obtenir les fréquences propres d'un anneau circulaire, en utilisant deux modèles cinématiques : l'un appelé modèle cinématique d'Euler-Bernoulli qui est bien adapté aux poutres minces et l'autre appelé modèle cinématique de Timoshenko qui lui est bien adapté aux poutres épaisses.

5.4.1 Notations

Considérons un anneau circulaire homogène de rayon moyen R , d'épaisseur h et de la longueur L (voir Figure 5.6). Cet anneau possède une section rectangulaire que l'on va noter $S = h \cdot L$. Considérons également deux systèmes de coordonnées : un système de coordonnées cartésien, noté $R_1(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un système de coordonnées cylindrique, noté $R_2(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Soit P un point localisé sur l'axe neutre (axe ne subissant pas de déformation, appelé aussi la ligne moyenne pour le cas d'un matériau mono-matériau) de l'anneau. Le vecteur \vec{OP} s'écrit :

$$\vec{OP}(\theta) = R \cdot \vec{e}_r \quad (5.14)$$

De plus, nous allons définir les grandeurs mécaniques caractéristiques de l'anneau circulaire :

Le module de Young (ou module d'élasticité) : noté E , c'est une constante qui relie la contrainte de traction/compression σ à la déformation ϵ pour un matériau élastique isotrope ($\sigma = E \cdot \epsilon$).

Le coefficient de Poisson : noté ν , c'est un coefficient permettant de caractériser la contraction de la matière perpendiculairement à la direction de l'effort appliqué.

Le module de cisaillement : noté G , il s'agit d'une constante caractéristique de la déformation due aux efforts de cisaillement.

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (5.15)$$

Le moment quadratique : noté I , il s'agit d'une grandeur caractéristique de la géométrie de la section droite par rapport à l'axe (P, \vec{e}_z) . Le moment quadratique I est définie par :

$$I = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r^2 \cdot dr \cdot dz \quad (5.16)$$

soit dans notre cas :

$$I = \frac{L \cdot h^3}{12} \quad (5.17)$$

La constante de section : noté k , il s'agit d'une constante qui apparaît dans le calcul de l'effort tranchant d'une poutre. Pour une section rectangulaire, $k = 5/6$.

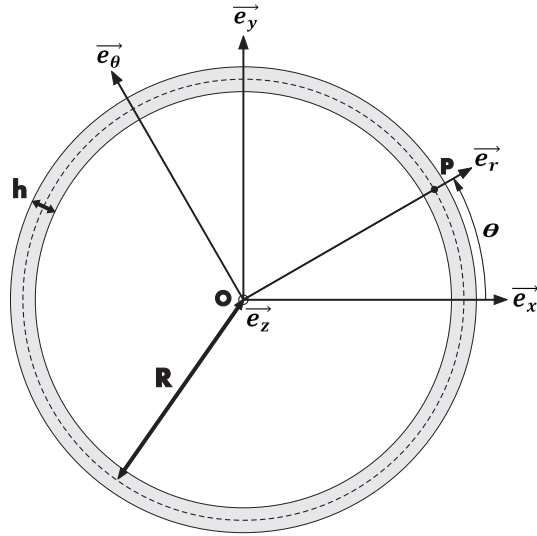


FIGURE 5.6 – Notations utilisées pour présenter le modèle analytique adapté à l’anneau circulaire

5.4.2 Application de la méthode de Rayleigh à l’anneau

Pour parvenir à l’obtention du quotient de Rayleigh et ainsi être en mesure de connaître les fréquences propres d’un anneau circulaire, nous devons dans un premier temps calculer l’énergie de déformation E_s et l’énergie cinétique E_k associées à ce dernier. Pour cela, nous allons considérer à nouveau un point P localisé au niveau de l’axe neutre de la poutre circulaire. Le déplacement de ce point est supposé uniquement plan (celui de la Figure 5.6) et est défini par un vecteur translation plan, noté par la suite $\vec{U}(P, t)$, et un vecteur rotation perpendiculairement au plan, noté par la suite $\vec{R}(P, t)$. Ces deux vecteurs peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{U}(P, t) = A \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_u) \cdot \vec{u}(\theta) \\ \vec{R}(P, t) = A \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_\omega) \cdot \vec{\omega}(\theta) \end{cases} \quad (5.18)$$

avec A l’amplitude du déplacement (unité m), f sa fréquence, φ_u et φ_ω deux déphasages associées respectivement à $\vec{u}(\theta)$ la déformée modale de translation (sans unité) et $\vec{\omega}(\theta)$ la déformée modale de rotation (d’unité m^{-1}). Les deux déformées modales peuvent se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = u_r(\theta) \cdot \vec{e}_r + u_\theta(\theta) \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{\omega}(\theta) = \omega(\theta) \cdot \vec{e}_z \end{cases} \quad (5.19)$$

A partir de la définition de ces déformées modales, nous allons introduire la notation de torseur cinématique des petits déplacement que nous allons appeler $\{\vartheta\}$, qui est appliqué au point P et qui caractérise le déplacement de la section droite. Il peut être défini par :

$$\{\vartheta\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}(\theta) \\ \vec{u}(\theta) \end{array} \right\}_{P(\theta)} = \left\{ \begin{array}{c} \omega(\theta) \vec{e}_z \\ u_r(\theta) \vec{e}_r + u_\theta(\theta) \vec{e}_\theta \end{array} \right\}_{P(\theta)} \quad (5.20)$$

Définissons également s comme étant l’abscisse curviligne le long de l’axe de la poutre \vec{e}_θ . Elle peut se mettre sous la forme :

$$s = R \cdot \theta \quad (5.21)$$

De plus, introduisons la notion de torseur des déformations généralisées, que l’on notera $\{\varepsilon\}$. Ce torseur des déformations généralisées est lié au torseur cinématique des petits déplacements par la relation suivante :

$$\{\varepsilon\} = \frac{d}{ds} \{\vartheta\} \quad (5.22)$$

Pour pouvoir calculer et obtenir ce torseur des déformations généralisées, nous devons dériver le torseur cinématique des petits déplacements par rapport à l’abscisse curviligne s . Pour ce faire, nous devons, dans

5.4. APPLICATION AU CAS D'UN ANNEAU CIRCULAIRE

un premier temps, écrire $\{\vartheta\}$ en un point fixe (le point O), puis le dériver par rapport à s et enfin le réécrire au point P . Le torseur cinématique des petits déplacement écrit au point O est :

$$\{\vartheta\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega(\theta) \cdot \vec{e}_z \\ u_r(\theta) \cdot \vec{e}_r + u_\theta(\theta) \cdot \vec{e}_\theta + \vec{OP}(\theta) \times (\omega(\theta) \cdot \vec{e}_z) \end{array} \right\}_O \quad (5.23)$$

$$\{\vartheta\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega(\theta) \cdot \vec{e}_z \\ u_r(\theta) \cdot \vec{e}_r + (u_\theta(\theta) - R \cdot \omega(\theta)) \cdot \vec{e}_\theta \end{array} \right\}_O \quad (5.24)$$

Nous devons à présent le dériver par rapport à s , l'abscisse curviligne. Nous obtenons :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + R \cdot \omega(\theta) \right) \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{R} \cdot \left(u_r(\theta) + \frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} - R \cdot \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} \right) \cdot \vec{e}_\theta \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} \cdot \vec{e}_z \end{array} \right\}_O \quad (5.25)$$

Finalement, en écrivant ce torseur de nouveau au point P , nous obtenons :

$$\boxed{\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\chi} \\ \vec{\epsilon} \end{array} \right\}_{P(\theta)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{R} \cdot \frac{d\omega(\theta)}{d\theta} \cdot \vec{e}_z \\ \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + R \cdot \omega(\theta) \right) \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{R} \cdot \left(u_r(\theta) + \frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} \right) \cdot \vec{e}_\theta \end{array} \right\}_{P(\theta)}} \quad (5.26)$$

Continuons la description du comportement mécanique de la poutre circulaire en introduisant, à présent, le torseur des forces intérieures $\{\tau\}$, appelé également le torseur des efforts de cohésion, qui est défini de la manière suivante :

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} T(\theta) \cdot \vec{e}_r + N(\theta) \cdot \vec{e}_\theta \\ M_f(\theta) \cdot \vec{e}_z \end{array} \right\}_{P(\theta)} \quad (5.27)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(\theta) = ES \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{e}_\theta : \text{Effort normal} \\ T(\theta) = GkS \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{e}_r : \text{Effort tranchant} \\ M_f(\theta) = EI \cdot \vec{\chi} \cdot \vec{e}_z : \text{Moment fléchissant} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Dorénavant, nous sommes en mesure d'écrire le quotient de Rayleigh à partir de la formulation des énergies locales de déformation et cinétique. Il peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Re = \frac{R \cdot \int_0^{2\pi} e_s(\theta) d\theta}{R \cdot \int_0^{2\pi} e_k(\theta) d\theta} \quad (5.29)$$

avec e_s l'énergie locale linéique de déformation et e_k l'énergie locale linéique cinétique qui peuvent s'exprimer sous les formes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_s(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \{\tau\} \otimes \{\varepsilon\} \\ e_k(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot \vec{u}(\theta)^2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \vec{\omega}(\theta)^2 \end{array} \right. \quad (5.30)$$

Nous allons décomposer l'expression des différentes énergies sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_s(\theta) = e_{s,N}(\theta) + e_{s,S}(\theta) + e_{s,B}(\theta) \\ e_k(\theta) = e_{k,T}(\theta) + e_{k,R}(\theta) \end{array} \right. \quad (5.31)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{s,N}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{R^2} \cdot \left(u_r(\theta) + \frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} \right)^2 \quad : \text{énergie liée à la force normale} \\ e_{s,T}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{GSk}{R^2} \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + R \cdot \omega(\theta) \right)^2 \quad : \text{énergie liée à l'effort tranchant} \\ e_{s,M_f}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{R^2} \cdot \left(\frac{d\omega(\theta)}{d\theta} \right)^2 \quad : \text{énergie liée au moment fléchissant} \\ e_{k,T}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \rho S \cdot (u_r(\theta)^2 + u_\theta(\theta)^2) \quad : \text{énergie liée à la translation} \\ e_{k,R}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \rho I \cdot \omega(\theta)^2 \quad : \text{énergie liée à la rotation} \end{array} \right. \quad (5.32)$$

Pour terminer complètement le calcul du quotient de Rayleigh, et ainsi parvenir à l'obtention des modes et des fréquences propres d'ovalisations 2D de l'anneau circulaire, il reste à définir les déformées modales u_r , u_θ et ω afin d'obtenir une approximation du quotient de Rayleigh. La définition de ces déformées se fera dans la partie suivante au travers de deux hypothèses cinématiques : l'hypothèse cinématique de Bernoulli (Partie 5.4.3) et l'hypothèse cinématique de Timoshenko (Partie 5.4.4).

5.4.3 Modes propres d'un anneau circulaire avec l'hypothèse cinématique d'Euler-Bernoulli

Pour parvenir à expliciter de manière analytique le quotient de Rayleigh en utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli, nous allons émettre comme hypothèse simplificatrice que la section droite de l'anneau reste constamment perpendiculaire à l'axe neutre lorsque la structure se déforme. Autrement dit, il existe une relation entre la déformée modale de rotation et la déformée modale de translation :

$$\vec{\omega}(\theta) = \vec{e}_\theta \wedge \frac{d\vec{u}(\theta)}{ds} \quad (5.33)$$

ce qui donne, tous calculs faits :

$$\vec{\omega}(\theta) = \frac{1}{R} \cdot \left(-\frac{du_r(\theta)}{d\theta} + u_\theta(\theta) \right) \cdot \vec{e}_z \quad (5.34)$$

Il nous reste à présent à postuler les déformées modales u_r et u_θ . Rappelons que ces déformées modales doivent avoir pour propriété d'être « proches » des déformées réelles, qui elles ne peuvent pas être calculées analytiquement, afin d'obtenir des fréquences propres d'ovalisation en adéquation avec les fréquences propres réelles. Bien entendu, la proximité entre les déformées postulées ici et les déformées réelles ne pourra se vérifier qu'*a posteriori* lors de la comparaison soit avec la simulation par éléments finis, soit avec les mesures expérimentales. Puisque nous recherchons des déformées modales d'ovalisation dans le plan, périodiques, avec une augmentation du nombre de périodes sur un tour, nous allons être amenés à postuler les déformées modales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r(\theta) = \cos(n\theta) \\ u_\theta(\theta) = \alpha_n \cdot \sin(n\theta) \\ \omega(\theta) = \frac{1}{R} \cdot (\alpha_n + n) \cdot \sin(n\theta) \end{array} \right. \quad (5.35)$$

avec n le mode d'ovalisation 2D considéré. α_n est quant à lui un paramètre apportant un degré de liberté supplémentaire qu'il faudra déterminer pour chacun des modes. Pour réaliser cette opération, nous allons calculer l'énergie de déformation et l'énergie cinétique avec ces déformées modales postulées puis en déduire le quotient de Rayleigh qui sera, pour chacun des modes n , une fonction dépendante du paramètre α_n . L'écriture de la stationnarité du quotient de Rayleigh permettra de déterminer ce paramètre. On cherche donc le paramètre α_n qui minimisera le quotient de Rayleigh dans le but d'obtenir la fréquence du mode propre n considéré. Autrement dit, nous pouvons nous ramener au problème d'optimisation suivant :

$$\hat{\mathfrak{R}} = \underset{\alpha_n}{\operatorname{argmin}} \left\{ \mathfrak{R}(\alpha_n) \right\} \quad (5.36)$$

avec $\widehat{\mathfrak{R}}$ le quotient de Rayleigh optimisé.

Le calcul du quotient de Rayleigh fait intervenir cinq termes. Ces cinq termes sont représentatifs des différentes énergies existantes au sein de l'anneau circulaire mais n'ont pas l'unité d'une énergie. Néanmoins, par commodité, nous utiliserons le terme d'énergie pour les désigner. Ces cinq termes (voir Équation 5.32) sont : trois énergies de déformations ($e_{s,N}$, $e_{s,T}$, e_{s,M_f}) et deux énergies cinétiques ($e_{k,T}$, $e_{k,R}$). Prendre en compte toutes les énergies peut compliquer fortement la recherche de la forme analytique de la solution, aussi nous allons adopter une démarche consistant à proposer plusieurs formulations prenant en compte un certain nombre d'énergie(s) et négligeant les autres. De plus, dans le cas particulier de l'hypothèse cinématique de Bernoulli, l'énergie due à l'effort tranchant est nulle ($e_{s,T} = 0$). Nous allons à présent calculer le quotient de Rayleigh. Avant tout, nous allons exprimer les différentes énergies de l'Équation 5.32 en intégrant les déformées modales considérées :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{s,N}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{R^2} \cdot (1 + \alpha_n n)^2 \cdot \cos^2(n\theta) \\ e_{s,T}(\theta) = 0 \\ e_{s,M_f}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{R^4} \cdot n^2 \cdot (\alpha_n + n)^2 \cdot \cos^2(n\theta) \\ e_{k,T}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \rho S \cdot (\cos^2(n\theta) + \alpha_n^2 \cdot \sin^2(n\theta)) \\ e_{k,R}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho I}{R^2} \cdot (\alpha_n + n)^2 \cdot \sin^2(n\theta) \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Cas particulier du mode de gonflement : cas $n = 0$

Dans le cas très particulier du mode d'ovalisation plan dit de gonflement, le numéro du mode n est égale à zéro. Si l'on reprend alors l'expression des déformées modales, expression donnée dans le cas général par l'Équation 5.35, nous pouvons en simplifier les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r(\theta) = 1 \\ u_\theta(\theta) = 0 \\ \omega(\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (5.38)$$

De plus, si nous reprenons les expressions des différentes énergies (Équation 5.37) que nous combinons avec les expressions des déformées modales, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{s,N}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{R^2} \\ e_{s,T}(\theta) = 0 \\ e_{s,M_f}(\theta) = 0 \\ e_{k,T}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \rho S \\ e_{k,R}(\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (5.39)$$

On peut alors calculer le quotient de Rayleigh associé à ce mode particulier et on obtient :

$$\widehat{\mathfrak{R}} = \frac{E}{\rho R^2} \quad (5.40)$$

Finalement, la fréquence propre d'ovalisation f_0 du mode de gonflement d'ordre $n = 0$ est donc :

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho R^2}}} \quad (5.41)$$

ce qui correspond à l'expression utilisée classiquement (Equation 5.1).

Nous venons à l'instant de donner la fréquence propre d'un mode d'ovalisation particulier, le mode d'ovalisation plan d'ordre 0 appelé également le mode de gonflement. Il nous faut désormais nous attaquer à l'expression analytique d'un mode n d'ovalisation quelconque.

Premier modèle de Bernoulli, noté $M_{B,1}$: énergie de déformation de traction $e_{s,N}$ et énergie cinétique de rotation $e_{k,R}$ négligées

Dans ce tout premier modèle, qui est le modèle le plus simple que nous sommes amenés à proposer, nous allons négliger deux énergies dans l'optique de proposer une formulation analytique simple à utiliser. Nous supposons donc que l'énergie de déformation de traction ($e_{s,N} \simeq 0$) et l'énergie cinétique de rotation ($e_{k,R} \simeq 0$) sont nulles. Le quotient de Rayleigh, après calcul, peut se mettre dans ce cas sous la forme :

$$\mathfrak{R} = \frac{EI}{\rho SR^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (\alpha_n + n)^2}{(1 + \alpha_n^2)} \quad (5.42)$$

Reste à présent à trouver le paramètre α_n qui minimise le quotient de Rayleigh. Pour cela, nous avons choisi d'adopter la démarche suivante pour répondre à ce problème d'optimisation :

- Dérivation du quotient de Rayleigh \mathfrak{R} par rapport au paramètre α_n
- Recherche du paramètre α_n , solution de l'équation $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_n} = 0$, afin de trouver les extremums du quotient de Rayleigh
- Recherche du minimum du quotient de Rayleigh parmi les solutions trouvées précédemment

La dérivée du quotient de Rayleigh par rapport au paramètre α_n est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_n} = -2 \cdot \frac{EI}{\rho SR^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (\alpha_n + n) \cdot (-1 + \alpha_n \cdot n)}{(1 + \alpha_n^2)^2} \quad (5.43)$$

Cette dérivée s'annule pour deux valeurs particulières de α_n :

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_n} = 0 \iff \begin{cases} \alpha_n = -n \\ \alpha_n = \frac{1}{n} \end{cases} \quad (5.44)$$

Pour parvenir à trouver le minimum du quotient de Rayleigh, nous sommes amenés à le calculer pour ces deux valeurs particulières de α_n . Le quotient de Rayleigh, pour $\alpha_n = -n$, entraîne un quotient de Rayleigh nul, ce qui correspond à un mode de corps rigide qui ne nous intéresse pas ici. On rejette donc cette solution. Il nous reste alors l'autre solution. Par conséquent, la valeur de α_n qui minimise le quotient de Rayleigh est :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad (5.45)$$

Le quotient de Rayleigh pour cette valeur particulière de α_n est donc :

$$\mathfrak{R} = \frac{EI}{\rho SR^4} \cdot n^2 \cdot (n^2 + 1) \quad (5.46)$$

Finalement, la fréquence propre f_n associée au mode d'ovalisation d'ordre n pour le modèle de Bernoulli $M_{B,1}$ est donc :

$$\boxed{f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho SR^4}} \cdot n \cdot \sqrt{n^2 + 1}} \quad (5.47)$$

Deuxième modèle de Bernoulli, noté $M_{B,2}$: énergie de déformation de traction $e_{s,N}$ négligée

La démarche employée, aussi bien pour présenter la formulation analytique de ce second modèle utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli que pour les autres modèles, est semblable à celle présentée précédemment pour le premier modèle utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli. Par conséquent, nous ne présenterons pas les autres modèles de manière aussi détaillée. Nous nous concentrerons uniquement sur les étapes clés permettant l'obtention du modèle. Pour ce second modèle, nous allons proposer une formulation analytique un

peu plus complexe que précédemment. Pour cela, nous allons négliger une seule énergie, à savoir l'énergie de déformation de traction ($e_{s,N} \simeq 0$). Le quotient de Rayleigh, dans ce cas particulier, peut se mettre, en fonction du paramètre α_n sous la forme suivante :

$$\Re = \frac{EI}{\rho R^2} \cdot \frac{n^2 \cdot (\alpha_n + n)^2}{I \cdot (\alpha_n + n)^2 + SR^2 \cdot (1 + \alpha_n^2)} \quad (5.48)$$

La valeur de α_n qui minimise ce quotient de Rayleigh est encore une fois :

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad (5.49)$$

Le quotient de Rayleigh est donc dans ce cas :

$$\Re = \frac{EI}{\rho R^2} \cdot \frac{n^2 \cdot (1 + n^2)}{I \cdot (1 + n^2) + SR^2} \quad (5.50)$$

La fréquence propre f_n associée au mode d'ovalisation d'ordre n peut alors se mettre sous la forme :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho R^2}} \cdot \sqrt{\frac{n^2 \cdot (1 + n^2)}{I \cdot (1 + n^2) + SR^2}} \quad (5.51)$$

Troisième modèle de Bernoulli, noté $M_{B,3}$: énergie cinétique de rotation $e_{k,R}$ négligée

Cette fois-ci, nous allons proposer une formulation analytique en négligeant seulement l'énergie cinétique de rotation ($e_{k,R} \simeq 0$). Le quotient de Rayleigh, dans ce cas particulier, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Re = \frac{E}{\rho SR^4} \cdot \frac{I \cdot n^2 \cdot (\alpha_n + n)^2 + SR^2 \cdot (1 + \alpha_n n)^2}{1 + \alpha_n^2} \quad (5.52)$$

La valeur de α_n qui minimise ce quotient de Rayleigh est :

$$\alpha_n = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{(n^2 - 1) \cdot (In^2 - SR^2) + \sqrt{(n^2 - 1)^2 \cdot (In^2 - SR^2)^2 + 4n^2 \cdot (In^2 + SR^2)^2}}{In^2 + SR^2} \quad (5.53)$$

Le quotient de Rayleigh est donc :

$$\Re = \frac{E}{2\rho SR^4} \cdot \left((1 + n^2) \cdot (In^2 + SR^2) - \sqrt{(n^2 - 1)^2 \cdot (In^2 - SR^2)^2 + 4n^2 \cdot (In^2 + SR^2)^2} \right) \quad (5.54)$$

La fréquence propre f_n associée au mode d'ovalisation d'ordre n peut se mettre sous la forme :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{2\rho SR^4}} \cdot \sqrt{(1 + n^2) \cdot (In^2 + SR^2) - \sqrt{(n^2 - 1)^2 \cdot (In^2 - SR^2)^2 + 4n^2 \cdot (In^2 + SR^2)^2}} \quad (5.55)$$

Quatrième modèle de Bernoulli, noté $M_{B,4}$: prise en compte de toutes les énergies

Il s'agit ici du modèle le plus complet de Bernoulli puisque cette fois-ci nous ne négligeons aucune énergie. Le quotient de Rayleigh, dans ce cas particulier, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Re = \frac{E}{\rho R^2} \cdot \frac{In^2 \cdot (\alpha_n + n)^2 + SR^2 \cdot (1 + \alpha_n \cdot n)^2}{I \cdot (\alpha_n + n)^2 + SR^2 \cdot (1 + \alpha_n^2)} \quad (5.56)$$

La valeur de α_n qui minimise ce quotient de Rayleigh est :

$$\alpha_n = \frac{(-1 + n^2) \cdot (I + SR^2) - \sqrt{(I + SR^2) \cdot (I \cdot (3n^2 - 1)^2 + SR^2 \cdot (1 + n^2)^2)}}{2n \cdot (I + SR^2)} \quad (5.57)$$

Le quotient de Rayleigh est donc :

$$\mathfrak{R} = \frac{E}{2\rho R^2} \cdot \frac{I \cdot (1 - n^2 + 2n^4) + SR^2 \cdot (1 + n^2) - \sqrt{(I + SR^2) \cdot (I \cdot (1 - 3n^2)^2 + SR^2 \cdot (1 + n^2)^2)}}{I \cdot (1 + n^2) + SR^2} \quad (5.58)$$

La fréquence propre f_n associée au mode d'ovalisation d'ordre n peut se mettre sous la forme :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{2\rho R^2}} \cdot \sqrt{\frac{I \cdot (1 - n^2 + 2n^4) + SR^2 \cdot (1 + n^2) - \sqrt{(I + SR^2) \cdot (I \cdot (1 - 3n^2)^2 + SR^2 \cdot (1 + n^2)^2)}}{I \cdot (1 + n^2) + SR^2}} \quad (5.59)$$

Les résultats correspondant à ces différentes formulations seront discutés par la suite.

5.4.4 Modes propres d'un anneau circulaire avec l'hypothèse cinématique de Timoshenko

Dans la section précédente, nous avons explicité les fréquences propres d'ovalisations d'un anneau circulaire en émettant l'hypothèse cinématique de Bernoulli. Cette hypothèse simplificatrice permet d'avoir de très bonnes estimations des fréquences dans le cas d'anneaux minces mais ne peut pas être utilisée dans le cas d'anneau épais, comme nous le verrons lors de la validation de nos modèles et comme cela a déjà été observé sur la Figure 5.3. Nous allons cette fois-ci supposer que la section de l'anneau n'est plus nécessairement perpendiculaire à l'axe neutre lorsque la poutre se déforme. Cela nous permettra de rajouter un degré supplémentaire dans le calcul du quotient de Rayleigh. Encore une fois, il nous faut postuler les déformées modales de translations, u_r et u_θ mais cette fois-ci, nous allons devoir postuler également la déformée modale de rotation. Nous allons être amenés à postuler les déformées modales suivantes :

$$\begin{cases} u_r(\theta) &= \cos(n\theta) \\ u_\theta(\theta) &= \alpha_n \cdot \sin(n\theta) \\ \omega(\theta) &= \beta_n \cdot \sin(n\theta) \end{cases} \quad (5.60)$$

Cette fois-ci, nous allons avoir deux paramètres, α_n et β_n qui vont nous apporter deux degrés de libertés. Nous allons donc chercher la valeur de ces deux paramètres en écrivant à nouveau la stationnarité du quotient de Rayleigh. Néanmoins, la méthode utilisée reste la même que précédemment lorsque nous avons utilisé l'hypothèse cinématique de Bernoulli. A nouveau, nous allons calculer l'énergie de déformation et l'énergie cinétique avec les déformées modales postulées pour en déduire le quotient de Rayleigh qui sera, cette fois-ci, une fonction dépendante des deux paramètres α_n et β_n . Ces deux paramètres seront à nouveau trouvés en minimisant le quotient de Rayleigh par la même méthode que précédemment. Le problème d'optimisation sera cette fois-ci le suivant :

$$\widehat{\mathfrak{R}} = \underset{(\alpha_n, \beta_n)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \mathfrak{R}(\alpha_n, \beta_n) \right\} \quad (5.61)$$

avec $\widehat{\mathfrak{R}}$ le quotient de Rayleigh optimisé.

Nous allons calculer à nouveau les cinq énergies qui interviennent dans l'expression du quotient de Rayleigh (voir à nouveau l'Équation 5.32). Cette fois-ci, aucune des énergies n'est nulle, en particulier $e_{s,T}$ qui l'était

précédemment. L'expression de ces cinq énergies est :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{s,N}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{R^2} \cdot (1 + \alpha_n n)^2 \cdot \cos^2(n\theta) \\ e_{s,T}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{GkS}{R^2} \cdot (\alpha_n + n - R\beta_n)^2 \cdot \sin^2(n\theta) \\ e_{s,M_f}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{R^2} \cdot \beta_n^2 n^2 \cdot \cos^2(n\theta) \\ e_{k,T}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \rho S \cdot (\cos^2(n\theta) + \alpha_n^2 \cdot \sin^2(n\theta)) \\ e_{k,R}(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \rho I \cdot \beta_n^2 \cdot \sin^2(n\theta) \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Cas particulier du mode de gonflement : cas $n = 0$

Ce cas particulier du mode de gonflement en utilisant l'hypothèse cinématique de Timoshenko va donner les mêmes déformées modales quand dans le cas de l'hypothèse cinématique de Bernoulli (voir Équation 5.38). En effet, la structure n'est sollicitée qu'en traction-compression. Il n'y a donc pas de cisaillement. De plus, nous pouvons montrer que cela va amener également au même quotient de Rayleigh et donc à la même fréquence propre (voir Équation 5.41).

Premier modèle de Timoshenko, noté $M_{T,1}$: énergie de déformation de traction $e_{s,N}$ et énergie cinétique de rotation $e_{k,R}$ négligées

La démarche adoptée est toujours la même que précédemment et l'apparition d'un degré de liberté supplémentaire, le paramètre β_n , ne fait finalement que compliquer les calculs sans modifier la méthode. Dans un premier temps, on néglige l'énergie de déformation de traction ($e_{k,R} \simeq 0$) et l'énergie cinétique de rotation ($e_{k,R} \simeq 0$). Le quotient de Rayleigh peut se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\rho S R^2} \cdot \frac{EI \cdot \beta_n^2 n^2 + GkS \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n)^2}{1 + \alpha_n^2} \quad (5.63)$$

Les valeurs de α_n et β_n qui minimisent le quotient de Rayleigh sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = \frac{1}{n} \\ \beta_n = \frac{GkSR \cdot (1 + n^2)}{n \cdot (EI \cdot n^2 + GkSR^2)} \end{array} \right. \quad (5.64)$$

Le quotient de Rayleigh minimisé est donc :

$$\mathfrak{R} = \frac{EIGk}{\rho R^2} \cdot \frac{n^2 \cdot (1 + n^2)}{EI \cdot n^2 + GkSR^2} \quad (5.65)$$

La fréquence propre f_n associée au mode d'ovalisation d'ordre n peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{f_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{EIGk}{\rho R^2} \cdot \frac{n^2 \cdot (1 + n^2)}{EI \cdot n^2 + GkSR^2}}} \quad (5.66)$$

Deuxième modèle de Timoshenko, noté $M_{T,2}$: énergie de déformation de traction $e_{s,N}$ négligée

Dans ce second modèle, nous négligeons l'énergie de déformation de traction $e_{s,N}$ uniquement. Le quotient de Rayleigh peut se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\rho R^2} \cdot \frac{EI \beta_n^2 n^2 + GkS \cdot (\alpha_n + n - R\beta_n)^2}{I \beta_n^2 + S \cdot (1 + \alpha_n^2)} \quad (5.67)$$

Les valeur de α_n et β_n qui minimisent le quotient de Rayleigh sont :

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{n} \\ \beta_n = \frac{1}{2GIknR} \cdot \left(In^2 \cdot (-E + Gk) + Gk \cdot (I - R^2S) + \sqrt{4G^2Ik^2SR^2 \cdot (1 + n^2) + (EIn^2 - Gk \cdot (I \cdot (1 + n^2) - SR^2))^2} \right) \end{cases} \quad (5.68)$$

Le quotient de Rayleigh minimisé est donc :

$$\mathfrak{R} = \frac{In^2 \cdot (E + Gk) + Gk \cdot (I + R^2S) - \sqrt{4G^2Ik^2SR^2 \cdot (1 + n^2) + (EIn^2 - Gk \cdot (I \cdot (1 + n^2) - R^2S))^2}}{2I\rho R^2} \quad (5.69)$$

La fréquence propres f_n associée au mode d'ovalisation d'ordre n peut ainsi être déduit.

Troisième modèle de Timoshenko, noté $M_{T,3}$: énergie cinétique de rotation $e_{k,R}$ négligée

Cette fois-ci, toujours en utilisant l'hypothèse cinématique de Timoshenko, la seule énergie que nous négligeons est l'énergie cinétique de rotation ($e_{k,R} \simeq 0$). Le quotient de Rayleigh peut se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\rho SR^2} \cdot \frac{EI \cdot \beta_n^2 n^2 + S \cdot \left(E \cdot (1 + \alpha_n n)^2 + Gk \cdot (\alpha_n + n - R\beta_n)^2 \right)}{1 + \alpha_n^2} \quad (5.70)$$

Les valeur de α_n et β_n qui minimisent le quotient de Rayleigh sont :

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{2n \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + GkSR^2)} \cdot \left((n^2 - 1) \cdot (In^2 \cdot (E - Gk) + GkSR^2) - \sqrt{(n^2 - 1)^2 \cdot (In^2 \cdot (E - Gk) + GkSR^2)^2 + 4n^2 \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + GkSR^2)^2} \right) \\ \beta_n = \frac{GkSR}{2n \cdot (EIn^2 + GkSR^2) \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + GkSR^2)} \times \left((3n^2 - 1) \cdot (EIn^2 + GkSR^2) + GkIn^2 \cdot (1 + n^2) - \sqrt{(n^2 - 1)^2 \cdot (In^2 \cdot (E - Gk) + GkSR^2)^2 + 4n^2 \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + GkSR^2)^2} \right) \end{cases} \quad (5.71)$$

Le quotient de Rayleigh minimisé est donc :

$$\mathfrak{R} = \frac{E}{2\rho R^2 \cdot (EIn^2 + GkSR^2)} \cdot \left((1 + n^2) \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + GkSR^2) - \sqrt{(n^2 - 1)^2 \cdot (In^2 \cdot (E - Gk) + GkSR^2)^2 + 4n^2 \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + GkSR^2)^2} \right) \quad (5.72)$$

La fréquence propres f_n associée au mode d'ovalisation d'ordre n peut ainsi être déduit.

Quatrième modèle de Timoshenko, noté $M_{T,4}$: prise en compte de toutes les énergies

Dans cette partie, nous allons présenter le modèle le plus complet que nous avons développé puisque nous allons prendre en compte, cette fois-ci, toutes les énergies avec le modèle cinématique de Timoshenko. Nous verrons

également que ce modèle complique fortement la recherche de la forme de la solution analytique. Le quotient de Rayleigh, écrit en fonction des paramètres α_n et β_n , peut se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{\rho R^2} \cdot \frac{EI\beta_n^2 n^2 + ES \cdot (1 + \alpha_n n)^2 + GkS \cdot (\alpha_n + n - R\beta_n)^2}{I\beta_n^2 + S \cdot (1 + \alpha_n^2)} \quad (5.73)$$

Les deux dérivées du quotient de Rayleigh, par rapport aux deux paramètres α_n et β_n , sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_n} = \frac{2S}{\rho R^2 \cdot (I \cdot \beta_n^2 + S \cdot (1 + \alpha_n^2))^2} \times \\ \left[(En \cdot (1 + \alpha_n n) + Gk \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n)) \cdot (I \cdot \beta_n^2 + S \cdot (1 + \alpha_n^2)) - \right. \\ \left. \alpha_n \cdot \left(EI \cdot \beta_n^2 n^2 + S \cdot \left(E \cdot (1 + \alpha_n n)^2 + Gk \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n)^2 \right) \right) \right] \\ \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \beta_n} = \frac{2S}{\rho R^2 \cdot (I \cdot \beta_n^2 + S \cdot (1 + \alpha_n^2))^2} \times \\ \left[I \cdot \beta_n \cdot \left(E \cdot (n^2 - 1 - 2 \cdot \alpha_n n) - Gk \cdot (\alpha_n + n) \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n) \right) - \right. \\ \left. GS k R \cdot (1 + \alpha_n^2) \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n) \right] \end{array} \right. \quad (5.74)$$

La recherche de la solution nous amène à la résolution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(En \cdot (1 + \alpha_n n) + Gk \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n) \right) \cdot (I \cdot \beta_n^2 + S \cdot (1 + \alpha_n^2)) - \\ \alpha_n \cdot \left(EI \cdot \beta_n^2 n^2 + S \cdot \left(E \cdot (1 + \alpha_n n)^2 + Gk \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n)^2 \right) \right) = 0 \\ \\ I \cdot \beta_n \cdot \left(E \cdot (n^2 - 1 - 2 \cdot \alpha_n n) - Gk \cdot (\alpha_n + n) \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n) \right) - \\ GS k R \cdot (1 + \alpha_n^2) \cdot (\alpha_n + n - R \cdot \beta_n) = 0 \end{array} \right. \quad (5.75)$$

La recherche d'une solution purement analytique du système d'équations précédent apparaît être impossible devant la grande complexité des calculs. Par conséquent, nous nous trouvons dans l'incapacité de proposer une formulation purement analytique pour ce modèle cinématique de Timoshenko prenant en compte toutes les énergies. Pour contourner cela, nous allons supposer que les paramètres α_n et β_n solutions du système sont les mêmes que lors de la recherche des solutions pour le modèle de Timoshenko noté $M_{T,3}$. On peut ainsi calculer le quotient de Rayleigh et donc en déduire les fréquences propres. Bien entendu, si nous prenons le parti de résoudre numériquement le système, nous aurons une solution au système d'équations mais alors le modèle ne serait plus analytique.

5.4.5 Validation par comparaison avec la simulation par éléments finis pour un anneau circulaire

Dans la section précédente, nous avons été amenés à présenter en tout huit modèles permettant d'obtenir des formulations analytiques des fréquences propres d'ovalisation d'un anneau circulaire. Ces différents modèles ont été construits à partir de deux modèles cinématiques différents, le modèle cinématique de Bernoulli et le modèle cinématique de Timoshenko. A présent, il nous faut répondre à plusieurs questions, à savoir :

1. Des huit modèles, quels sont les modèles valides, ou, le cas échéant, quels sont leurs domaines de validité ?
2. Est-ce que ces différents modèles apportent une amélioration par rapport au modèle « classique » existant dans la littérature, modèle que nous appelons « Modèle de Référence » et que nous notons M_R ?
3. Quel est le « meilleur » modèle à utiliser pour notre application.

Ici, la validation s'effectuera par comparaison avec la simulation par éléments finis à l'aide du logiciel commercial ANSYS. L'anneau circulaire qui nous a servi pour réaliser cette validation est un anneau défini par des caractéristiques mécaniques (E , ν et ρ) et géométriques (R et L) fixes (s'appuyer également à nouveau sur la

Figure 5.6 pour les notations). En revanche, pour permettre de différencier les différents modèles, nous faisons varier l'épaisseur h de l'anneau de tel sorte que le rapport h/R soit variable entre 0.01 (correspondant à un anneau très fin) et 0.5 (correspondant cette fois-ci à un anneau très épais). Nous pouvons résumer les caractéristiques de cet anneau ainsi :

Caractéristiques géométriques	Caractéristiques mécaniques
$\left\{ \begin{array}{l} R = 100 \text{ mm} \\ L = 40 \text{ mm} \\ h \quad \text{variable} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} E = 200 \text{ GPa} \\ \nu = 0.3 \\ \rho = 7800 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$

A l'aide du logiciel ANSYS, nous avons modélisé les anneaux de différentes épaisseurs, nous avons relevé les différentes fréquences propres associées aux modes propres d'ovalisations et nous les avons comparées aux neuf modèles présentés ici. Pour illustration, nous présentons sur la Figure 5.7 les premiers modes d'ovalisation d'un anneau dont le rapport h/R est de 0.1.

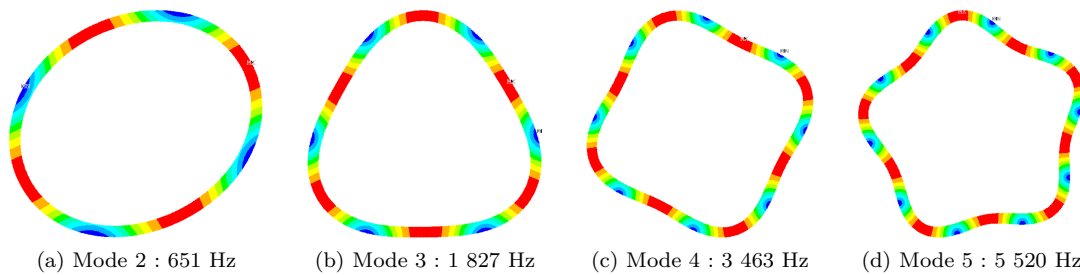
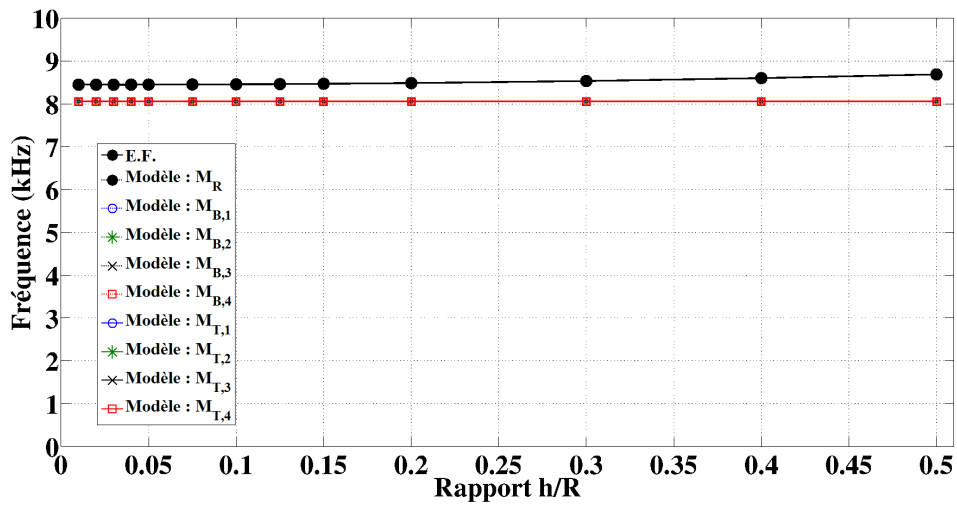


FIGURE 5.7 – Résultat de la simulation par éléments finis : relevé des premiers modes propres d'ovalisation d'un anneau circulaire

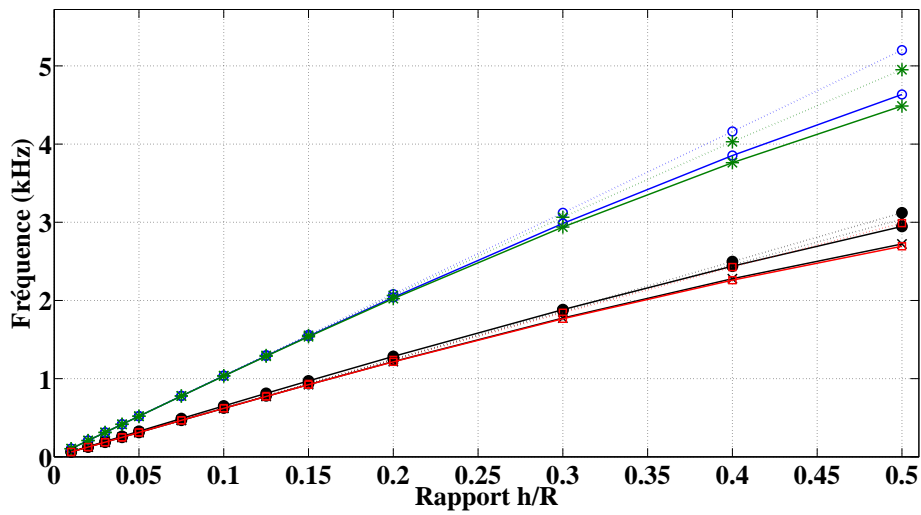
Nous avons ensuite réalisé pour les différents anneaux la comparaison entre les fréquences propres obtenues par les modèles et les fréquences propres données par la simulation par éléments finis et ce, pour chacun des modes propres. Les résultats de ces comparaisons sont présentés dans les figures suivantes.

- Les Figures 5.8 et 5.9 présentent respectivement les fréquences des différents modèles et de la simulation éléments finis et les erreurs commises par les différents modèles.
- Enfin, pour bien faire ressortir quel est le meilleur modèle, un calcul des erreurs moyennes pour chaque modèle est proposé sur le Tableau 5.1.
- Le Tableau C.1 présente les fréquences propres obtenues par la simulation par éléments finis pour les premiers modes (le mode de gonflement 0 et les modes d'ovalisation 2 à 10) pour des anneaux de différentes épaisseurs. Ce tableau est présenté en Annexe (Annexe C, Section C.1).
- Les fréquences obtenues par les différents modèles pour les mêmes modes des mêmes anneaux sont présentées dans les Tableaux C.2 à C.11. Ces tableaux présentent également les erreurs commises sur les fréquences obtenues par les différents modèles par rapport aux fréquences obtenues par la simulation par éléments finis. Ces tableaux sont présentés en Annexe (Annexe C, Section C.1).

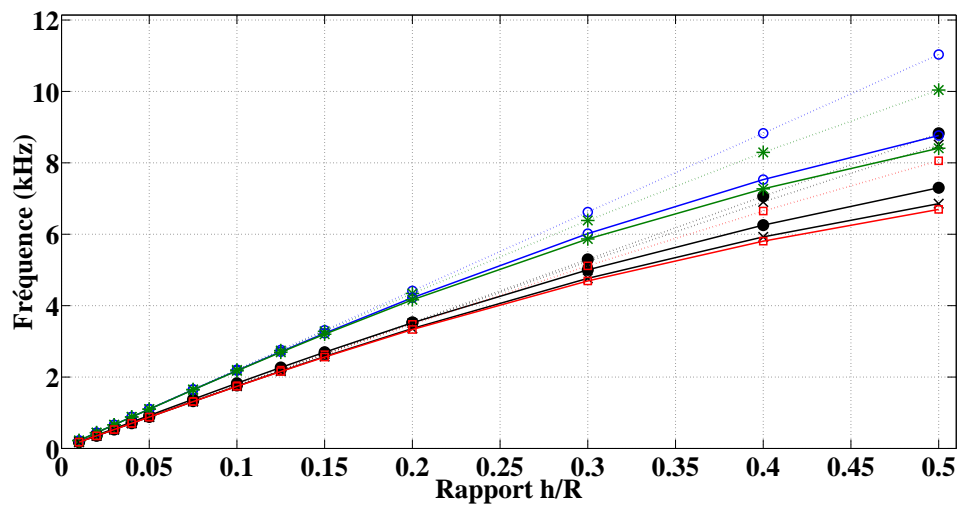
De plus, sur les tableaux présentant les fréquences et les erreurs par rapport à la simulation éléments finis, les modèles proposant des résultats avec une erreur inférieure à 5% sont surlignés en vert, les modèles proposant des résultats avec une erreur comprise entre 5% et 10% sont surlignés en jaune et le meilleur modèle est écrit en bleu.



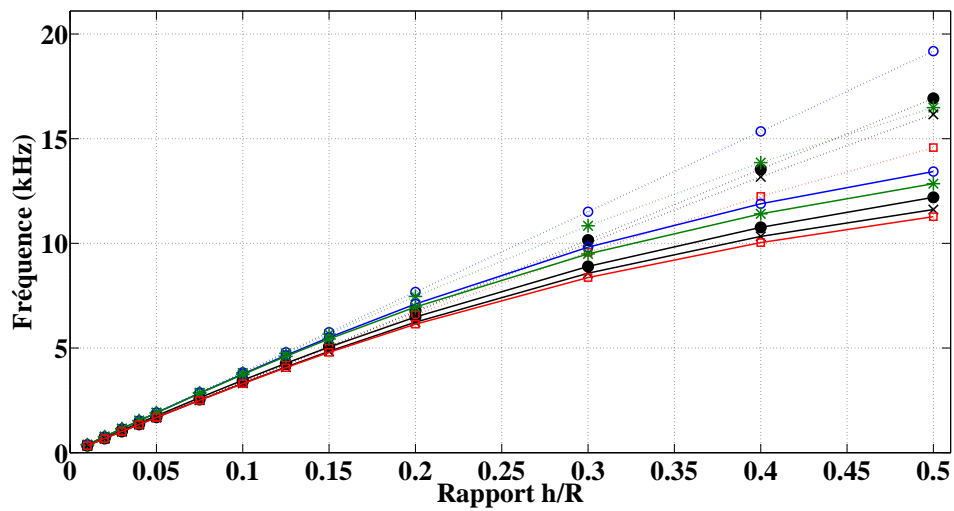
(a) Mode 0



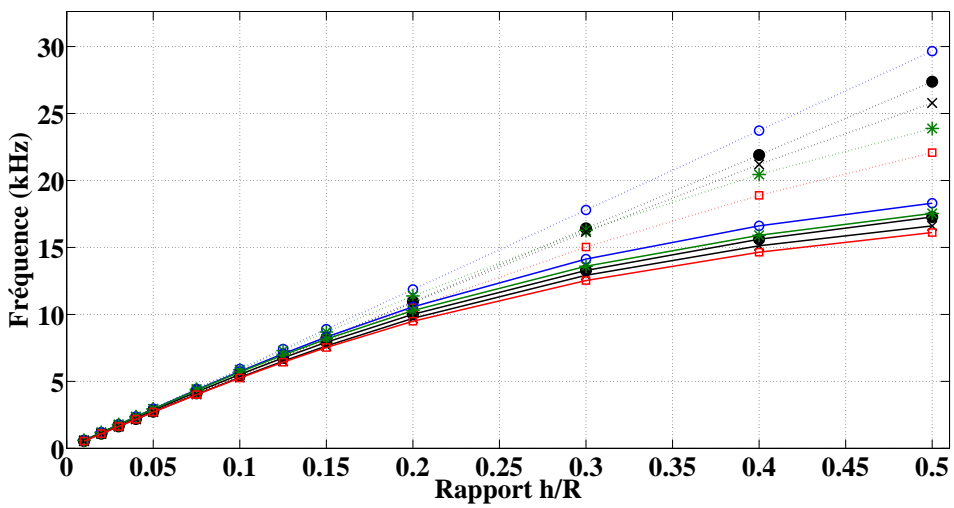
(b) Mode 2



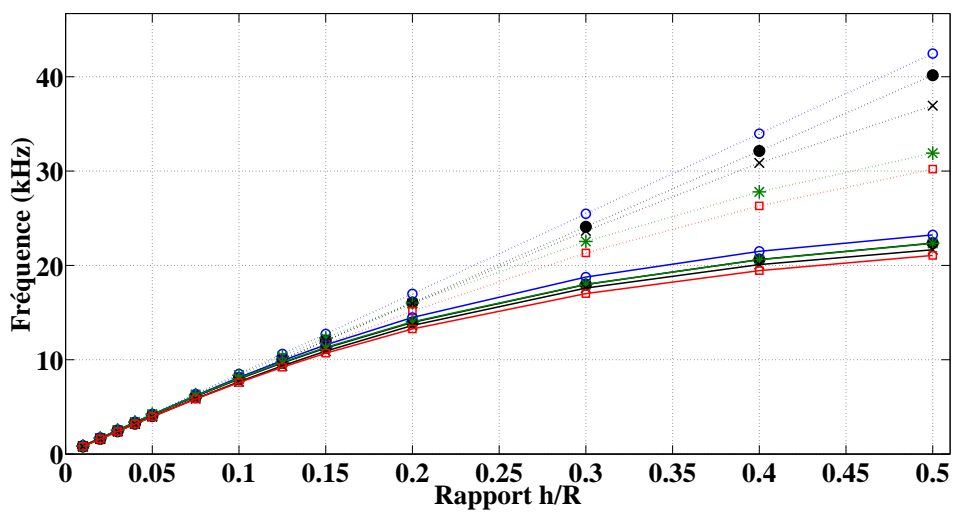
(c) Mode 3



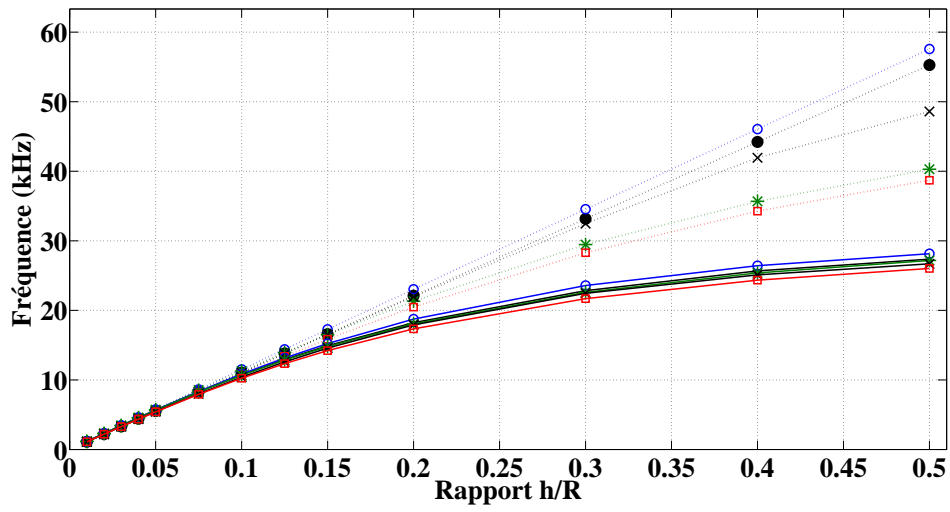
(d) Mode 4



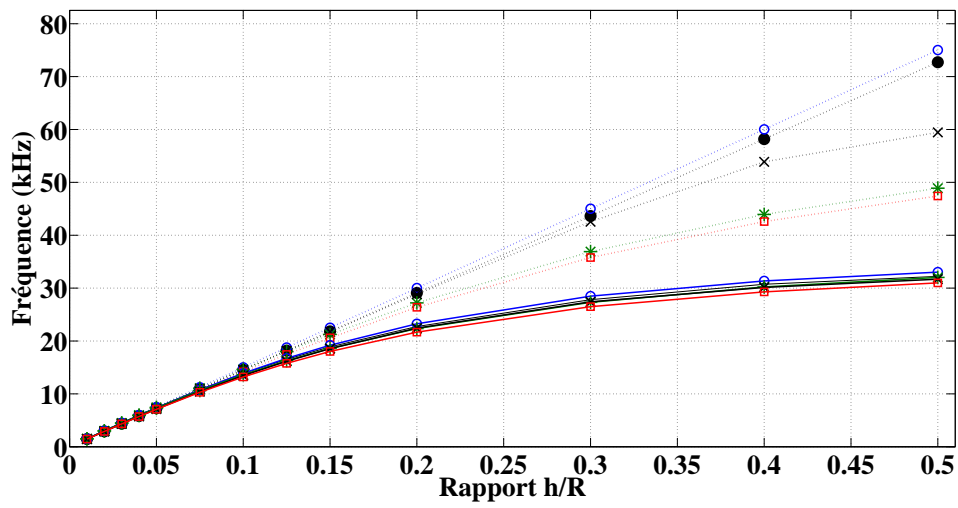
(e) Mode 5



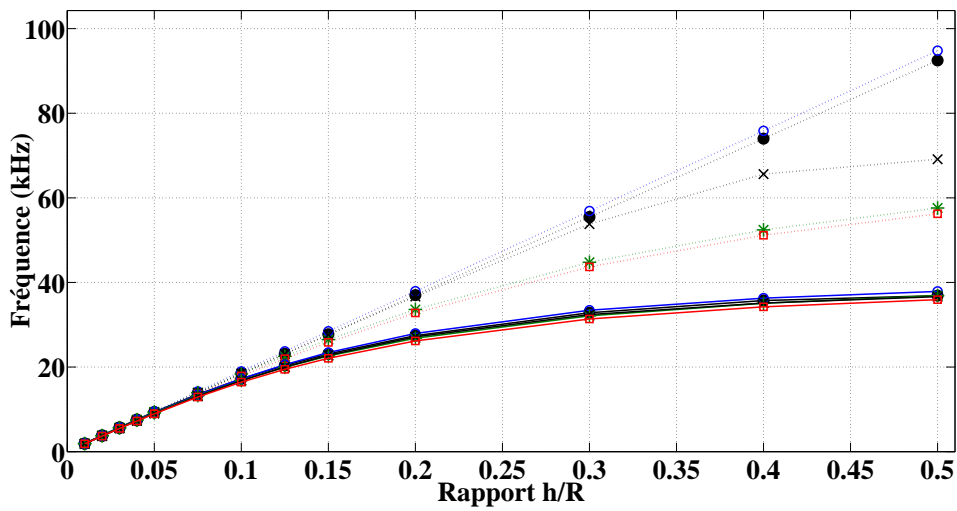
(f) Mode 6



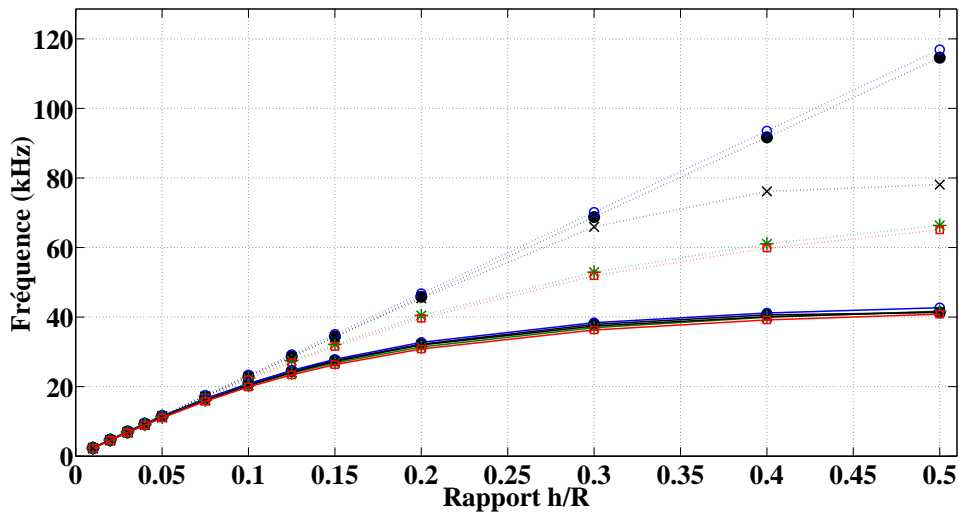
(g) Mode 7



(h) Mode 8

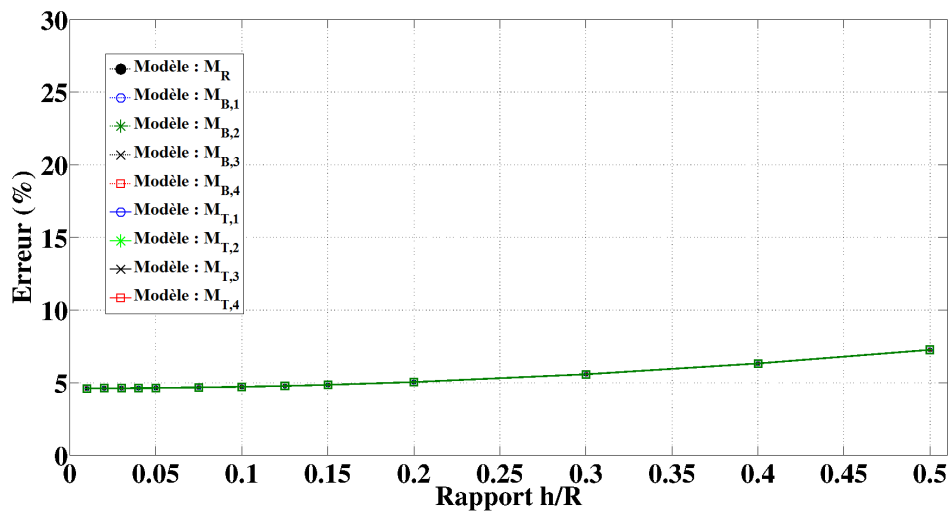


(i) Mode 9

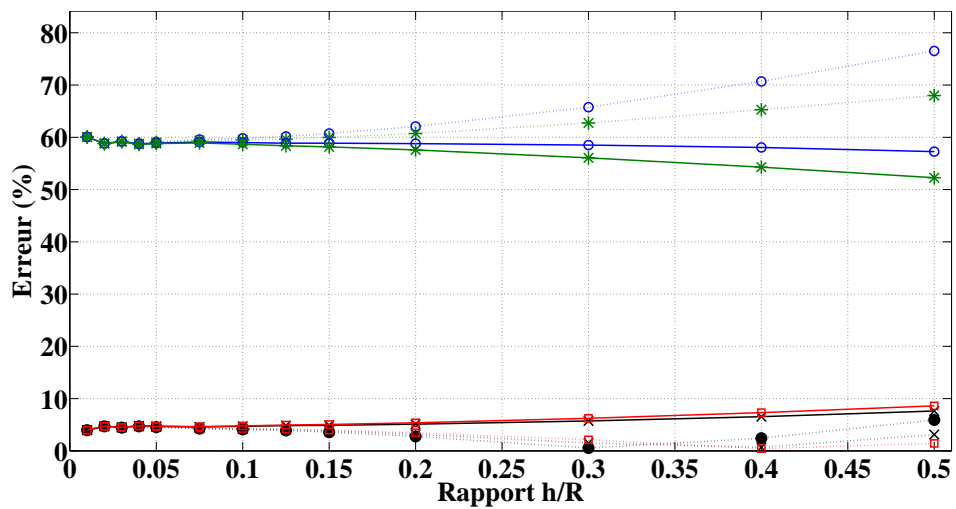


(j) Mode 10

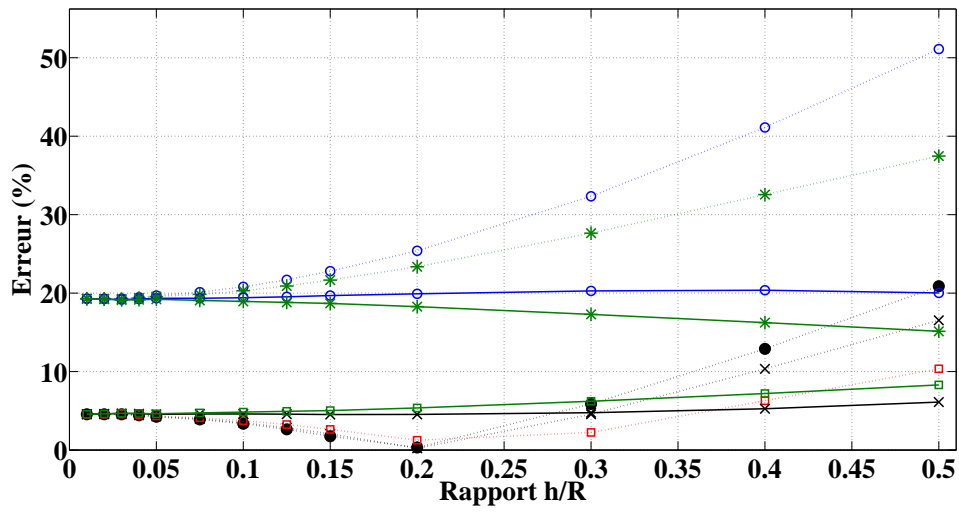
FIGURE 5.8 – fréquences - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire



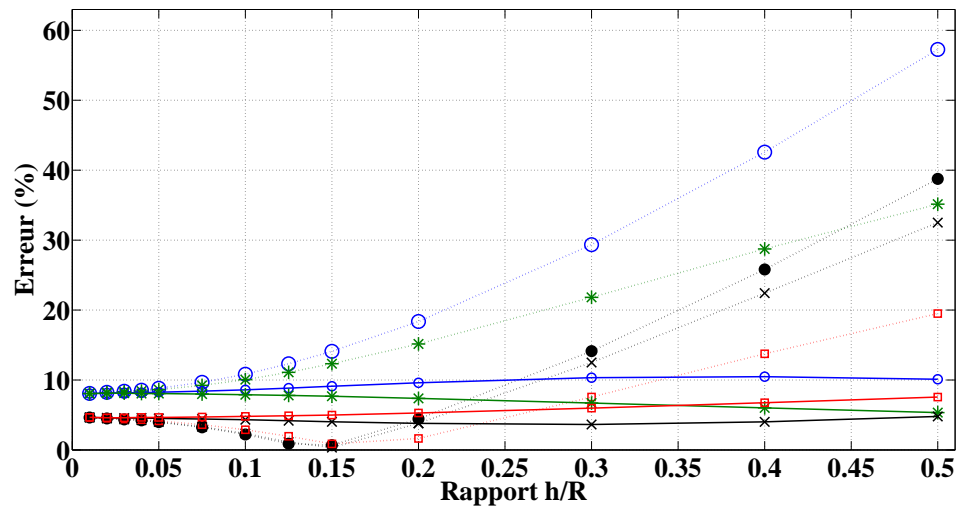
(a) Mode 0



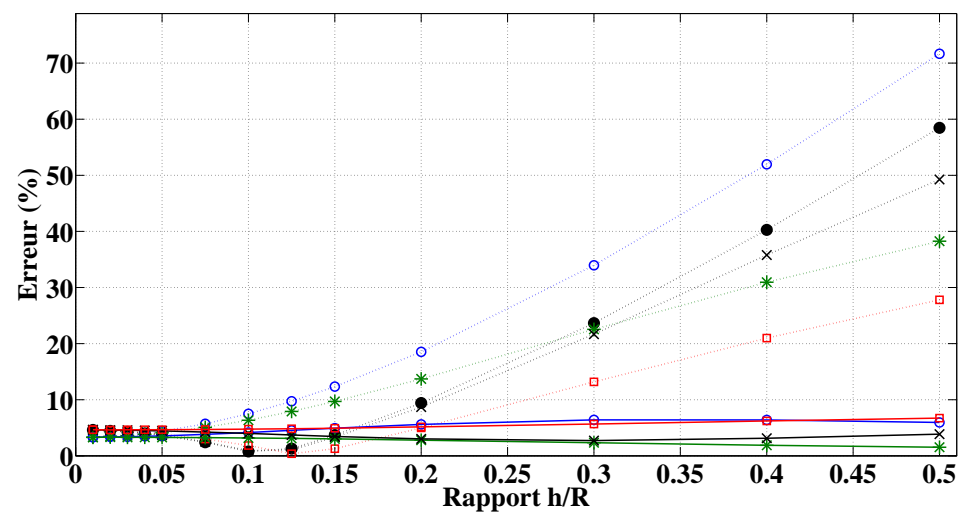
(b) Mode 2



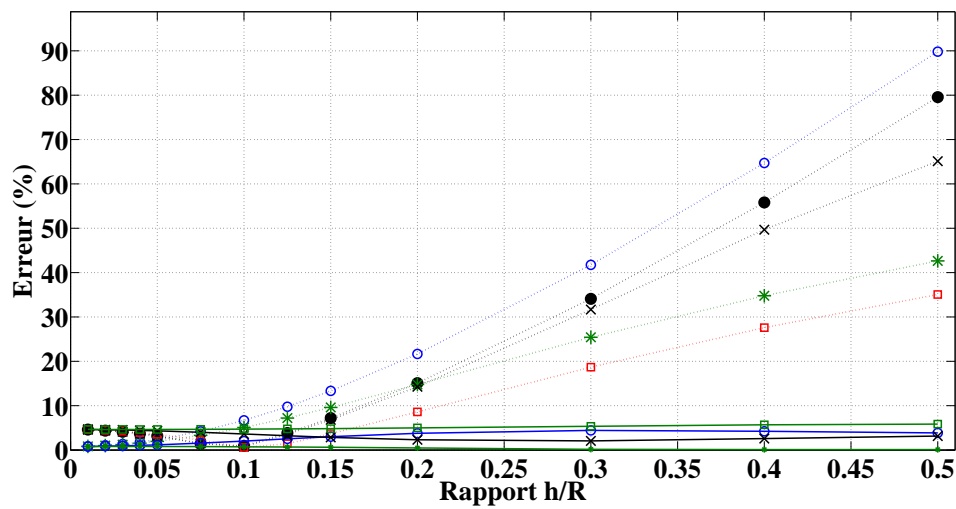
(c) Mode 3



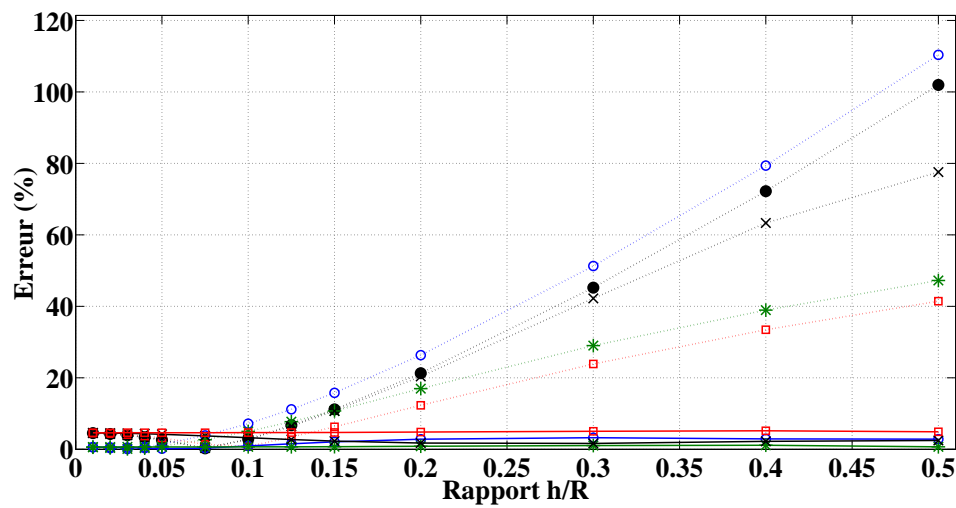
(d) Mode 4



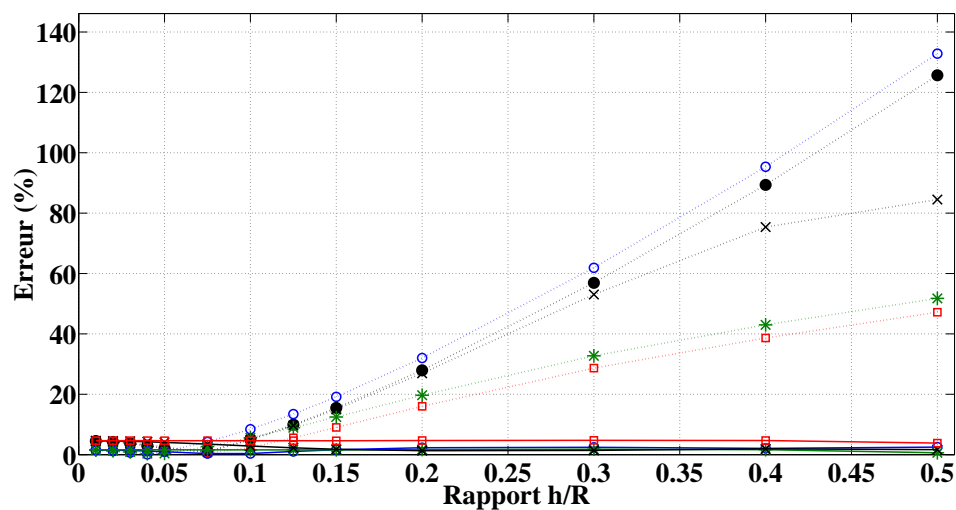
(e) Mode 5



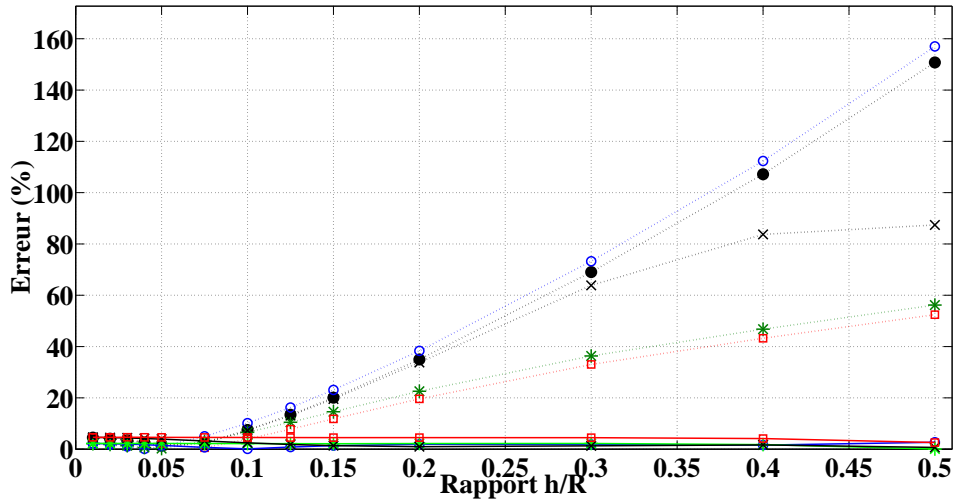
(f) Mode 6



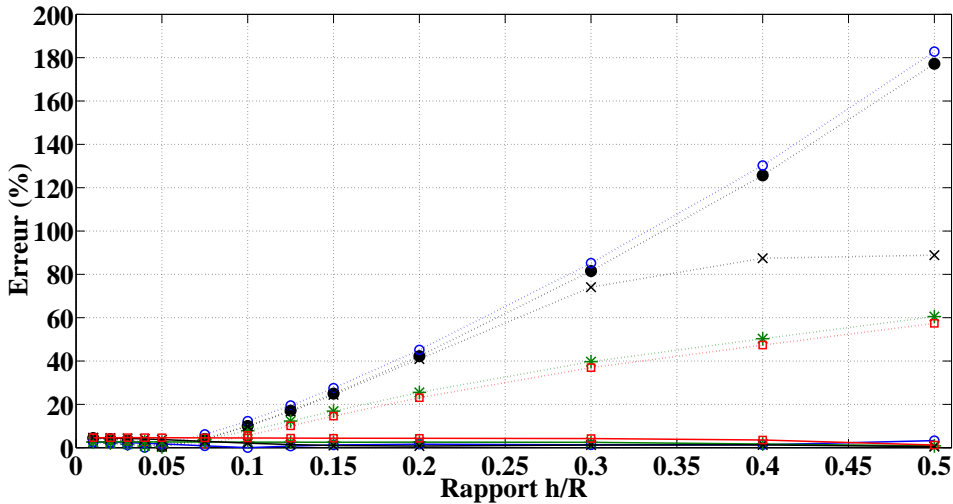
(g) Mode 7



(h) Mode 8



(i) Mode 9



(j) Mode 10

FIGURE 5.9 – erreurs - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

	M_R	$M_{B,1}$	$M_{B,2}$	$M_{B,3}$	$M_{B,4}$	$M_{T,1}$	$M_{T,2}$	$M_{T,3}$	$M_{T,4}$
Erreur (%) :	18.48	29.98	20.07	15.13	9.43	11.15	10.41	4.60	4.88

TABLE 5.1 – Erreur moyenne commise par chacun des modèles pour les fréquences propres d'un anneau circulaire

A partir de l'observation et de l'analyse de tous ces résultats, plusieurs remarques et conclusions sur les performances des différents modèles analytiques peuvent être présentés :

1. Tout d'abord, faisons quelques remarques rapides sur le mode d'ovalisation d'ordre 0 :
 - Tous les modèles présentés, que ce soit le modèle utilisé couramment dans la littérature ou les huit modèles proposés ici, conduisent à la même formulation analytique. Les conclusions que nous allons être amenés à émettre s'appliquent donc à tous les modèles.
 - La formulation analytique dépend de considérations mécaniques (le module de Young E et la masse volumique ρ) et d'une seule considération géométrique (le rayon moyen). Puisque, pour faire varier l'épaisseur de l'anneau nous agissons uniquement sur h , les fréquences propres proposées lorsque l'épaisseur de l'anneau augmente restent inchangées.
 - L'erreur sur l'estimation des fréquences propres commise par ces modèles, en comparaison des fréquences propres obtenues par la simulation par éléments finis, passe de 4.60% pour un anneau dont le rapport h/R est de 0.01 à une erreur de 7.26% pour un anneau dont le rapport h/R est de 0.5. L'erreur

- augmente légèrement car les fréquences propres obtenues par la simulation par éléments finis augmentent graduellement lorsque l'épaisseur de l'anneau augmente.
- En conclusion, nous pouvons affirmer que le mode d'ovalisation d'ordre 0 reste bien estimé quel que soit l'épaisseur de l'anneau considérée. De plus, puisque les formulations analytiques de tous les modèles sont identiques, nos modèles proposés ici n'apportent pas d'amélioration sur l'estimation des fréquences.
2. Analysons ensuite les résultats fournis par le modèle utilisé dans la littérature :
- Puisque ce modèle a été construit à partir de l'hypothèse cinématique de Bernoulli, qui suppose que l'épaisseur de la poutre est faible devant sa longueur, nous pouvons voir qu'il estime correctement les modes propres pour des anneaux très fins.
 - A contrario, lorsque l'épaisseur de l'anneau augmente, l'erreur d'estimation des fréquences commise par ce modèle augmente très fortement jusqu'à devenir rédhibitoire, ce qui est en accord avec l'hypothèse de départ précitée.
 - Les premiers modes, en particulier le mode 2, restent toutefois correctement estimés quel que soit l'épaisseur de l'anneau puisque l'erreur reste, pour ce mode, inférieure à 5.91% . Les modes 3 et le mode 4, quant à eux, estiment correctement les fréquences tant que l'épaisseur de l'anneau reste inférieure à une valeur correspondant à un rapport h/R de 0.3 puisqu'au delà, l'erreur est supérieure à 10%.
 - En revanche, pour les autres modes, ce modèle ne peut plus s'appliquer puisqu'il estime les fréquences avec une erreur trop importante.
 - Terminons l'étude en soulignant l'erreur moyenne commise par ce modèle sur l'ensemble des anneaux testés et sur l'ensemble des modes testés qui est de 18.58%, ce qui est une erreur importante justifiant l'intérêt de chercher d'autres modèles plus complets.
3. A présent, penchons-nous sur les modèles que nous avons développés dans ce mémoire et réalisons une analyse de chaque modèle en présentant les résultats et les conclusions dans le même ordre que lors de leurs présentations. Commençons donc par le modèle le plus simple que nous avons présenté et qui utilise l'hypothèse cinématique de Bernoulli, à savoir le modèle noté $M_{B,1}$:
- Pour commencer, rappelons que ce modèle a été construit en négligeant l'énergie de déformation de traction et l'énergie cinétique de rotation. Le principal avantage de ce modèle réside dans la simplicité de sa formulation analytique en regard du modèle de la littérature, le modèle M_R .
 - Pour l'estimation des premiers modes, les fréquences propres proposées par ce modèle sont plus éloignées des fréquences propres obtenues par la simulation par éléments finis en comparaison des fréquences propres proposées par le modèle M_R .
 - En revanche, pour des anneaux fins, et pour des modes élevés (notamment à partir du mode 5), nous pouvons observer que ce modèle est légèrement plus performant que le modèle de la littérature.
 - L'erreur moyenne totale commise par ce modèle est d'environ 30% ce qui en fait le modèle le moins performant de manière générale.
4. Analysons maintenant les résultats proposés par le deuxième modèle que nous avons développé, modèle noté $M_{B,2}$ et qui utilise également l'hypothèse cinématique de Bernoulli :
- Ce modèle a été construit en négligeant uniquement l'énergie de déformation de traction.
 - Nous pouvons voir, comme pour le modèle précédemment analysé ($M_{B,1}$), que pour des modes d'ovalisation faibles (par là on entend principalement les modes numérotés 2, 3 et 4), ce modèle induit des erreurs plus importantes que le modèle de la littérature et équivalentes au modèle $M_{B,1}$.
 - En revanche, pour des modes d'ordres supérieurs, il apparaît qu'il est plus performant que les deux modèles précités et cela, quelle que soit l'épaisseur de l'anneau circulaire.
 - L'erreur moyenne totale commise par ce modèle est de 20.07% ce qui en fait un modèle dont la précision est équivalente à celle du modèle M_R .
5. Passons à présent sur le troisième modèle utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli, modèle noté $M_{B,3}$ pour voir si ce dernier propose des améliorations dans l'estimation des fréquences propres d'ovalisations d'un anneau circulaire :
- Cette fois-ci, ce modèle a été construit en négligeant uniquement l'énergie cinétique de rotation.
 - Ce modèle proposé donne des résultats équivalents en manière d'estimations des fréquences propres d'ovalisation des anneaux circulaires, voir même légèrement meilleurs pour les premiers modes que le modèle de la littérature et très nettement meilleures que les deux autres modèles déjà analysés. En effet, pour donner des exemples, l'erreur moyenne engendrée pour le mode 2 est de 3.64%, l'erreur moyenne

- engendrée pour le mode 3 est de 5.11% et l'erreur moyenne engendrée par le mode 4 est de 7.7% contre, pour le modèle M_R , respectivement de 3.83%, 5.69% et 8.61%.
- Pour les autres modes, bien que l'erreur commence à devenir conséquente pour les anneaux épais, ceci étant lié à l'hypothèse cinématique de Bernoulli, ce modèle est déjà une amélioration par rapport au modèle M_R .
 - Finalement, l'erreur moyenne totale est de 15.13% ce qui est toutefois trop important pour se contenter de ce modèle.
6. Pour terminer l'étude sur les modèles utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli, réalisons des conclusions sur le modèle le plus complet utilisant cette hypothèse, le modèle noté $M_{B,4}$:
- Ce modèle est le modèle le plus complet des modèles utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli puisqu'il prend en compte toutes les énergies.
 - Il est le meilleur modèle parmi tous ceux proposés pour les deux premiers modes (le mode 2 et le mode 3) avec des erreurs sur ces modes très faibles : 3.59% pour le mode 2 et 4.34% pour le mode 3.
 - Ce modèle propose une nette amélioration de l'estimation des fréquences propres d'ovalisations par rapport au modèle de référence. De plus, il est même plus performant que tous les autres modèles déjà analysés.
 - Néanmoins, pour des anneaux d'épaisseurs importantes et pour des modes élevés, il reste toutefois assez éloigné des fréquences obtenues par la simulation par éléments finis.
 - L'erreur moyenne totale commise est de 9.43%.
7. Par la suite, nous devons nous pencher sur les modèles développés qui utilisent l'hypothèse cinématique de Timoshenko. Comme précédemment, nous allons les analyser dans l'ordre et nous allons commencer par le modèle le plus simplifié, le modèle noté $M_{T,1}$:
- Ce modèle est le modèle le plus simple que nous avons construit en utilisant l'hypothèse cinématique de Timoshenko puisque l'énergie de déformation de traction et l'énergie cinétique de rotation ont été négligées.
 - Les fréquences proposées pour les premiers modes, en particulier les modes 2 et 3, sont trop éloignées des fréquences proposées par la simulation par éléments finis. En effet, l'erreur pour le mode 2 est de 58.78% et si elle diminue fortement pour le mode 3 avec une erreur de 19.60%, elle reste toutefois conséquente.
 - En revanche, lorsqu'il s'agit d'estimer les fréquences propres de modes plus élevés (à partir du mode 4), ce modèle devient intéressant puisqu'il est de plus en plus performant. Pour le mode 4 l'erreur commise n'est plus que de 8.95% pour finir à une valeur inférieure à 1.7% pour les derniers modes quelle que soit d'ailleurs l'épaisseur de l'anneau.
 - Finalement, l'erreur moyenne totale est de 11.15% ce qui en fait un modèle bien plus performant que le modèle M_R mais toutefois pas satisfaisant car les fréquences propres de certains anneaux ne sont pas bien estimées.
8. Regardons à présent le deuxième modèle, le modèle noté $M_{T,2}$, pour savoir s'il apporte des améliorations :
- Dans ce modèle, seule l'énergie de déformation de traction est négligée.
 - Cela induit, comme nous l'avons analysé dans le modèle précédent, une mauvaise estimation des premiers modes d'ovalisations avec une erreur de 57.68% pour le mode 2 et une erreur de 18.34% pour le mode 3.
 - Pour les autres modes, il estime les fréquences propres avec une meilleure précision que le modèle précédent avec, par exemple, des erreurs pour les trois derniers modes respectivement de 2.89%, 0.59% et 0.75%, ce qui en fait même le meilleur des modèles pour ces trois modes là.
 - L'erreur moyenne totale commise est de 10.41%.
9. Analysons le troisième modèle, le modèle noté $M_{T,3}$, qui est le modèle entièrement déterminé analytiquement le plus complet :
- Cette fois-ci, seule l'énergie cinétique de rotation est négligée.
 - Il estime les fréquences propres avec une erreur toujours inférieure à 7.62%, erreur la plus importante observée pour le mode 2 pour un anneau dont le rapport h/R est de 0.5, et ce quels que soit les modes et quelle que soit l'épaisseur de l'anneau.
 - De plus, ce modèle est performant aussi bien pour les premiers modes que pour les derniers modes et pour des anneaux de très fins à très épais.

- L'erreur moyenne totale commise par ce modèle est de 3.68% ce qui en fait, de manière générale, le meilleur modèle parmi tous ceux proposés.
- 10. Enfin, pour terminer totalement l'analyse de tous ces modèles, parlons du dernier modèle utilisant l'hypothèse cinématique de Timoshenko, le modèle noté $M_{T,4}$:
 - Il a été construit en ne négligeant aucune énergie mais, en revanche, en utilisant les valeurs des paramètres α_n et β_n obtenues au modèle précédent car sinon, le problème analytique était trop complexe pour être résolu.
 - Il améliore, comme le modèle précédent, grandement le modèle de la littérature M_R puisque l'erreur est constamment inférieure à 8.62%, erreur maximale trouvée pour le mode 2 d'un anneau dont le rapport h/R est de 0.5.
 - Néanmoins, ce modèle reste dans toutes les configurations moins performant que le modèle $M_{T,3}$.
 - L'erreur moyenne totale commise est de 4.88% ce qui en fait, de manière générale.

Pour conclure sur tous les modèles proposés et présentés ici :

- Le meilleur modèle, de manière globale, pour obtenir une estimation des fréquences propres d'ovalisations d'anneaux d'épaisseurs très diverses, est le modèle $M_{T,3}$.
- Si l'on rentre plus en détail, on peut conclure, comme on s'y attendait, que les modèles utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli ont une meilleure précision pour des anneaux fins alors que les modèles utilisant l'hypothèse cinématique de Timoshenko s'avèrent efficaces pour tous les anneaux et particulièrement pour des anneaux épais.
- Le mode 2 et le mode 3 sont les mieux estimés avec le modèle $M_{B,4}$.
- Le mode 4 est le mieux estimé par le modèle $M_{T,3}$
- Les modes 5, 6 et 7 sont les mieux estimés par le modèle $M_{T,2}$.
- Les modes 8, 9 et 10 le sont par le modèle $M_{T,1}$.

5.4.6 Validation par comparaison avec des mesures expérimentales pour un anneau circulaire

Dans la partie précédente, lors de la validation des différents modèles analytiques par comparaison avec la simulation par éléments finis, nous avons mis en lumière les différents modèles qui estimaient correctement les fréquences des modes propres d'ovalisations d'un anneau circulaire. Un modèle sortait du lot : le modèle que nous avons noté $M_{T,3}$. Nous avons également montré les limites du modèle utilisé couramment dans la littérature, le modèle que nous avons noté M_R . Nous les avons dans cette partie comparés avec des résultats issus de mesures expérimentales. Pour cela, nous avons utilisé un anneau. Ce dernier est présenté sur la Figure 5.10 et ses caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentés sur le Tableau 5.2.

$E = 217 \text{ MPa}$
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
$\nu = 0.3$
$R = 65 \text{ mm}$
$h = 25 \text{ mm}$

TABLE 5.2 – Caractéristiques géométriques et mécaniques de l'anneau

Cet anneau circulaire est un anneau que nous pouvons considérer comme épais. En effet, si nous calculons le rapport h/R dans ce cas particulier là, nous obtenons environ 0.38. Pour réaliser les mesures, nous avons suspendu cet anneau avec des élastiques pour réaliser une liaison libre/libre avec son environnement comme c'est le cas dans nos modèles. Nous avons ensuite placé un accéléromètre piézoélectrique à la surface extérieure de l'anneau. Puis, à l'aide d'un marteau d'impact, nous avons asséné plusieurs chocs impulsionsnels à différents endroits de la surface extérieure de la machine et nous avons à chaque fois relevé les accélérations obtenues à l'aide du capteur. Ainsi, nous avons obtenu les premiers modes qui sont présentés sur la Figure 5.11.

Nous avons ensuite utilisé nos modèles pour obtenir les fréquences propres de cet anneau et nous les avons comparés avec les mesures expérimentales. La comparaison entre les modèles et les mesures est présentée sur le Tableau 5.3 et la Figure 5.12 avec les fréquences sur la Figure 5.12a et les erreurs sur la Figure 5.12b.

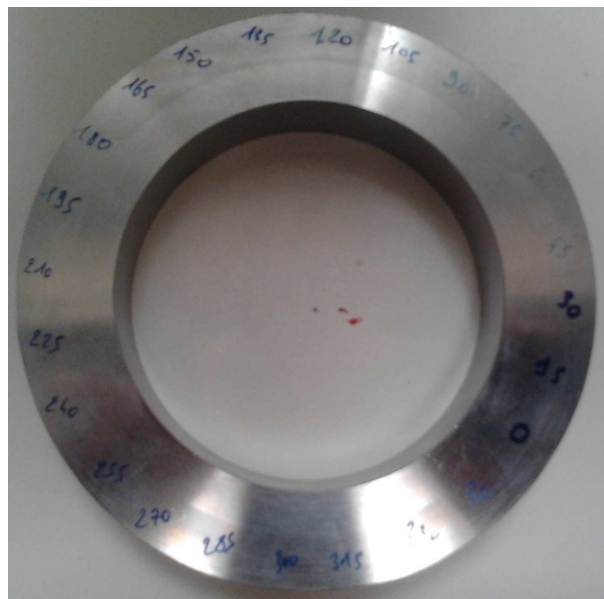


FIGURE 5.10 – Anneau circulaire utilisé pour la validation expérimentale des différents modèles analytiques

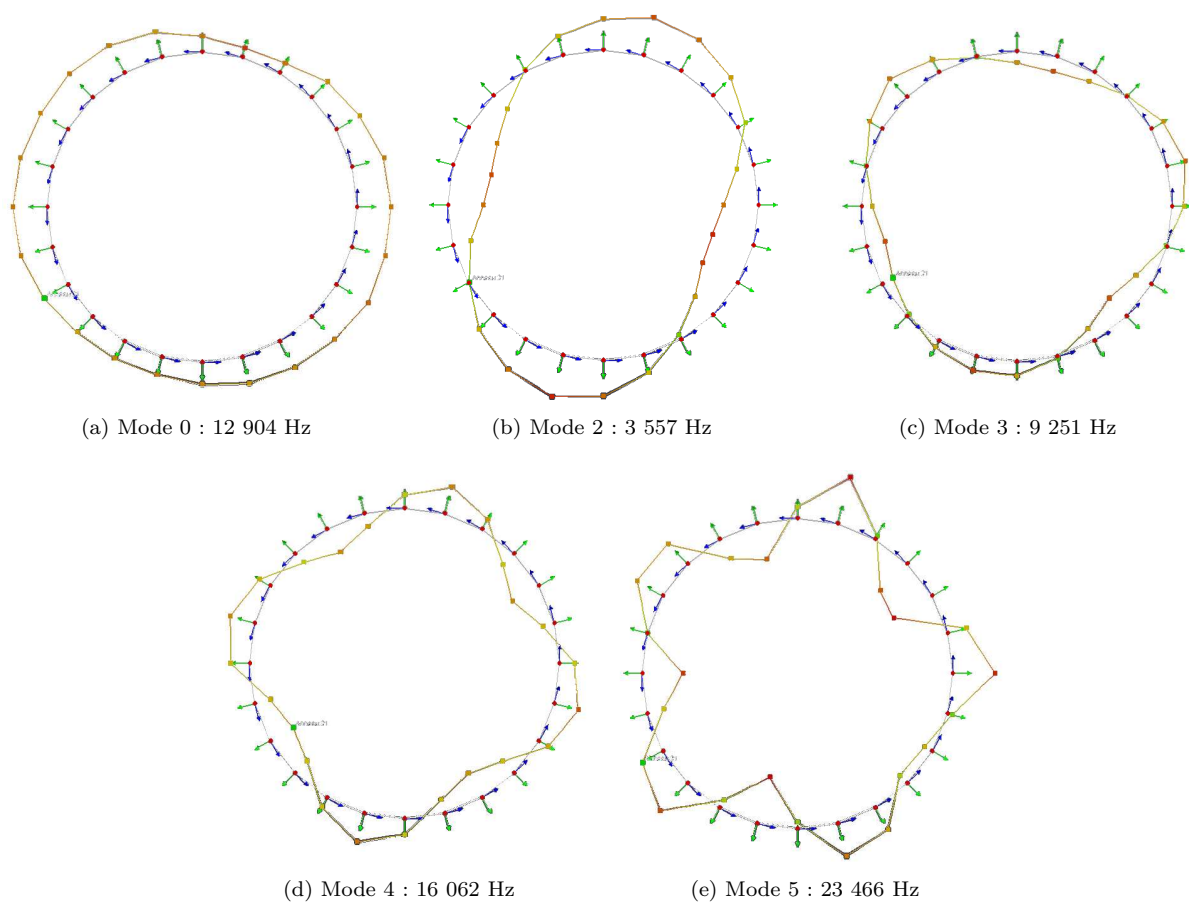


FIGURE 5.11 – Premiers modes propres d'un anneau circulaire obtenus par mesures expérimentales

Les conclusions que nous sommes amenées à faire sur la validation des modèles analytiques par comparaison avec des mesures expérimentales sont les mêmes que lorsque nous avons fait la comparaison avec la simulation par éléments finis. A nouveau, il y a clairement un modèle qui semble sortir du lot, le modèle $M_{T,3}$. De plus, nous voyons encore une fois que le modèle M_R estimait mal les fréquences en particulier pour les modes avec $n \geq 4$. Par la comparaison avec les mesures expérimentales, nous avons conforté les conclusions que nous avons formulées précédemment.

Mode	Mesures			M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0	12 904	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09	12 915	0,09
2	3 557	3 848	8,18	6 413	80,29	6 224	74,98	3 787	6,47	3 748	5,37	5 970	67,84	5 835	64,04	3 533	0,67	3 506	1,43		
3	9 251	10 883	17,64	13 603	47,04	12 835	38,74	10 657	15,20	10 290	11,23	11 725	26,74	11 337	22,55	9 236	0,16	9 053	2,14		
4	16 062	20 867	29,92	23 649	47,24	21 503	33,87	20 353	26,72	18 998	18,28	18 607	15,84	17 870	11,26	16 179	0,73	15 723	2,11		
5	23 466	33 746	43,81	36 558	55,79	31 813	35,57	32 768	39,64	29 392	25,25	26 103	11,24	25 003	6,55	23 779	1,33	23 020	1,90		
		moy : 19,93		moy : 46,09		moy : 36,65		moy : 17,62		moy : 12,04		moy : 24,35		moy : 20,90		moy : 0,69		moy : 1,53			

TABLE 5.3 – Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour un anneau circulaire

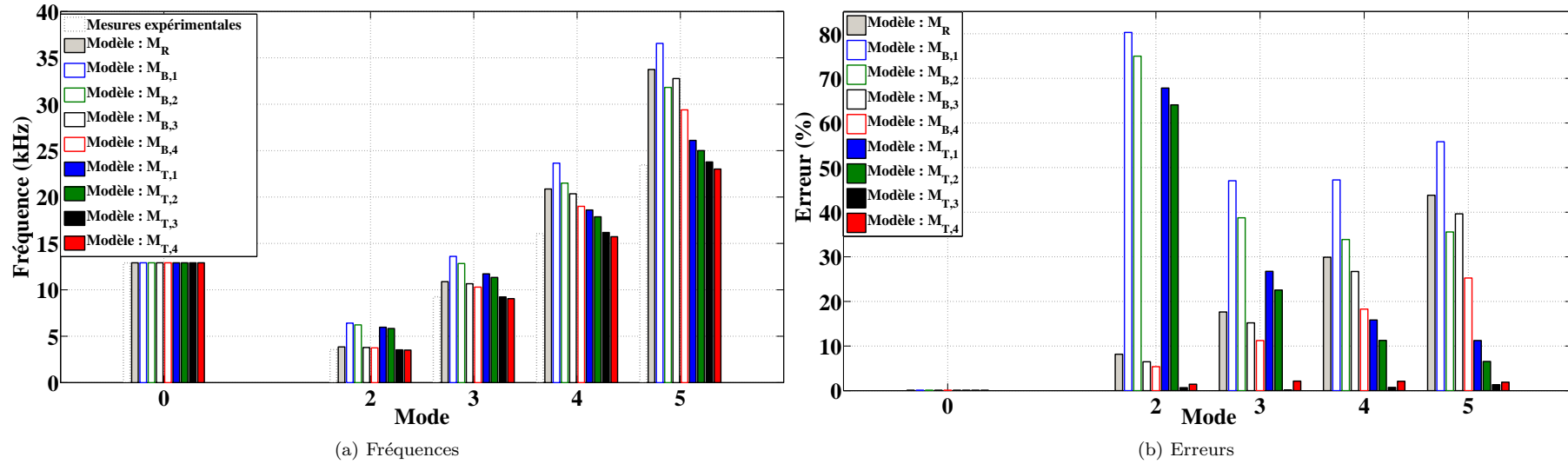


FIGURE 5.12 – Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour un anneau circulaire

5.5 Application au stator de machine électrique

Dans cette partie, nous allons nous inspirer de ce que nous venons de présenter précédemment pour construire des modèles permettant d'obtenir des formulations analytiques des fréquences et des modes propres d'ovalisations 2D des stators de machines électriques, en prenant en compte aussi bien les dents statoriques que les différents bobinages. En effet, pour ces derniers, il a été montré, notamment dans [Cai et al., 2002], leurs très fortes influences sur les fréquences de résonances. Dans un souci de clarté et afin de ne pas rendre inaudibles nos propos, nous allons présenter moins de modèles en rejetant ceux qui, soit engendrent trop d'erreurs, soit ne sont pas complets. Par conséquent, en plus du modèle utilisé dans la littérature que nous allons conserver pour le comparer aux nôtres, nous allons conserver le modèle que nous avons noté $M_{B,4}$, qui est le modèle le plus complet que nous avons construit utilisant la cinématique de Bernoulli, et le modèle que nous avons noté $M_{T,3}$, qui est lui le modèle le plus complet que nous avons construit utilisant la cinématique de Timoshenko. En s'inspirant de ces modèles, nous allons présenter deux démarches très différentes afin d'obtenir les fréquences propres d'un stator.

Après avoir introduit dans un premier temps les différentes notations que nous allons être amenées à utiliser pour la mise en place de ces modèles (voir Section 5.5.1), nous allons les présenter en commençant tout d'abord par les modèles consistant à réaliser une modification de la masse volumique d'un anneau circulaire pour obtenir les fréquences propres d'un stator avec les bobinages et les dents statoriques (voir Section 5.5.2) puis en continuant sur les modèles consistant à ajouter des masses ponctuelles pour modéliser les bobinages et les dents statoriques (voir Section 5.5.3).

5.5.1 Notations utilisées

Les différentes notations utilisées afin de présenter les différents modèles permettant l'obtention des fréquences propres d'un stator de machine électrique sont introduites sur la Figure 5.13. Considérons un stator de machine électrique et émettons les hypothèses suivantes :

- Ce stator est construit à partir de l'anneau circulaire présenté précédemment qui représente sa culasse. Il s'agit d'un matériau homogène dont les caractéristiques mécaniques (E , G , ρ , ...) sont les mêmes que précédemment.
- Le stator possède de plus N_S dents et bobinages
- La hauteur de la dent est H_D et la largeur est L_D .
- Nous allons supposer que le bobinage n'est pas imprégné. Cela a pour conséquence de ne pas rendre les bobinages solidaires des différentes phases et ajoute ainsi de la rigidité.

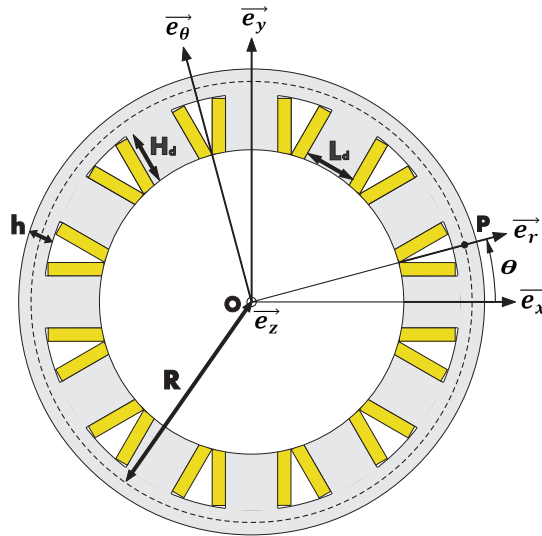


FIGURE 5.13 – Notations utilisées pour l'obtention des fréquences propres d'un stator de machine électrique

5.5.2 Fréquences propres d'un stator par modification de la masse volumique

Les premiers modèles que nous allons être amenés à présenter ont été directement inspirés par les méthodes couramment utilisés dans la littérature et qui sont présentés notamment dans [Anwar et al., 2001] et [He et al., 2011]. La démarche présente derrière ces modèles est introduite sur la Figure 5.14 et est la suivante :

- Le stator de la machine est modélisé en un anneau circulaire dont l'épaisseur h et le rayon moyen R sont les mêmes que la culasse du stator considéré.
- Pour prendre en compte les dents statoriques et le bobinage, la masse volumique de l'anneau circulaire est modifiée de tel sorte que la masse de l'anneau soit la même que la masse du stator considéré.

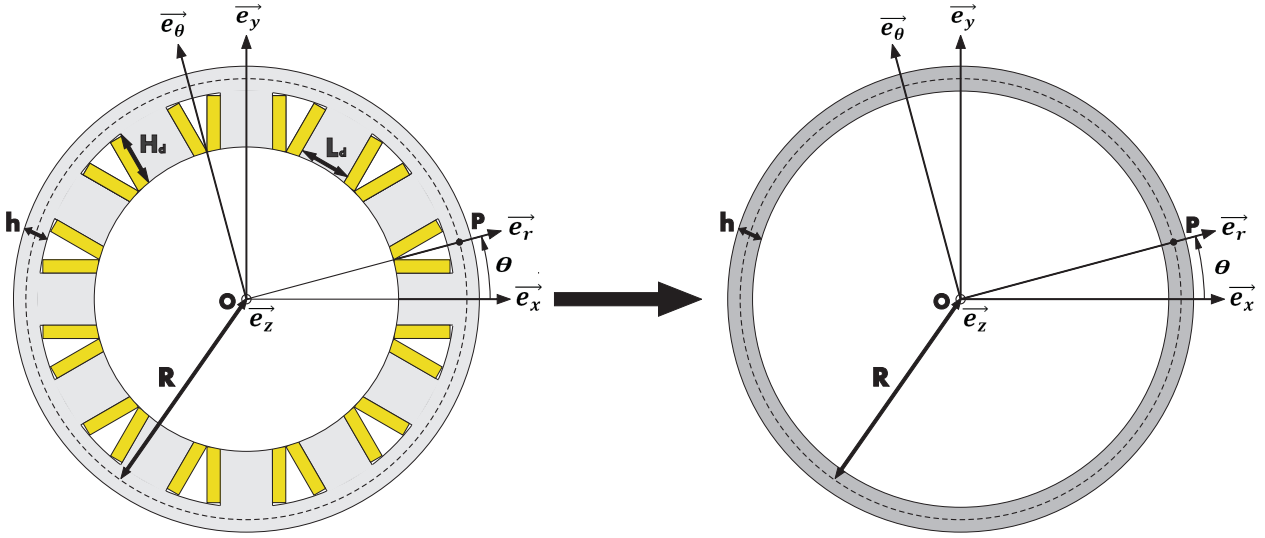


FIGURE 5.14 – Première modélisation pour l'obtention des fréquences propres des stators de machines électriques : modification de la densité de l'anneau

Appelons par la suite M_D la masse d'une dent statorique ($M_D = \rho L_d H_d b$) et M_B la masse total du bobinage. La masse volumique modifiée (ρ_m) est donc :

$$\rho_m = \frac{\rho b \cdot (N_S L_d H_d + 2\pi R h) + M_B}{2\pi R h b} \quad (5.76)$$

Nous allons présenter ici trois modèles, à savoir le modèle utilisé dans la littérature et deux modèles développés ici :

- Le modèle S_R : il s'agit du modèle utilisé dans la littérature. Pour l'utiliser, se reporter à nouveau à l'Équation 5.2 avec la masse volumique ρ modifiée en ρ_m .
- Le modèle $S_{B,\rho}$: il s'agit du modèle complet utilisant l'hypothèse cinématique de Bernoulli (noté $M_{B,4}$). Pour l'utiliser, se reporter à l'Équation 5.59 avec la masse volumique ρ modifiée en ρ_m .
- Le modèle $S_{T,\rho}$: il s'agit du modèle le plus complet utilisant l'hypothèse cinématique de Timoshenko (noté $M_{T,3}$). Pour l'utiliser, se reporter à l'Équation 5.72 avec la masse volumique ρ modifiée en ρ_m .

5.5.3 Fréquences propres d'un stator par ajout de masses ponctuelles

Une autre possibilité pour obtenir une formulation analytique des fréquences propres des stators de machines électriques est présentée sur la Figure 5.15 et est basée sur la démarche suivante :

- Le stator est modélisé comme un anneau circulaire d'épaisseur h et de rayon moyen R et de masse volumique ρ identique au stator.
- Les dents statoriques et le bobinages sont considérés comme des masses ponctuelles positionnées le long de l'axe neutre de masse $M = M_D + M_B/N_S$.

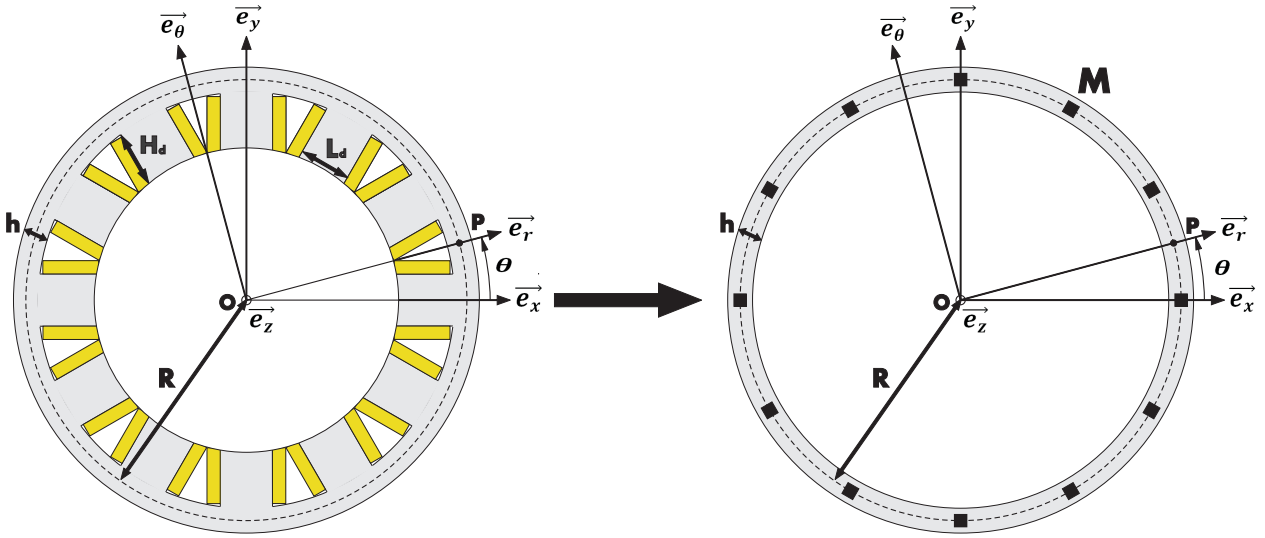


FIGURE 5.15 – Première modélisation pour l'obtention des fréquences propres des stators de machines électriques : ajout de masses ponctuelles

Dans ce cas particulier, le quotient de Rayleigh prend en compte comme précédemment l'énergie de déformation et l'énergie cinétique de l'anneau. Mais cette fois-ci, il faut prendre en compte également l'énergie cinétique des masses ponctuelles que nous avons ajoutées. Nous allons appeler W l'énergie totale des masses ponctuelles. Ce quotient peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathfrak{R} = \frac{R \cdot \int_0^{2\pi} e_s(\theta) \cdot d\theta}{R \cdot \int_0^{2\pi} e_k(\theta) \cdot d\theta + W} \quad (5.77)$$

avec : e_s l'énergie de déformation de l'anneau, e_k l'énergie cinétique de l'anneau et W l'énergie cinétique des masses ponctuelles. Appelons W_k l'énergie cinétique d'une dent entourée d'un bobinage positionnée à la position angulaire θ_k . La relation entre W et W_k est :

$$W = \sum_{k=1}^{N_s} W_k(\theta_k) \quad (5.78)$$

L'énergie cinétique d'une dent entourée d'un bobinage, de masse M , positionnée à la position angulaire θ_k peut s'exprimer sous la forme :

$$W_k(\theta_k) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(u_r(\theta_k)^2 + u_\theta(\theta_k)^2 \right) \quad (5.79)$$

En remplaçant u_r et u_θ par leurs valeurs, finalement, l'énergie cinétique W est :

$$W = \frac{M \cdot N_s}{4} \cdot (1 + \alpha_n^2) \quad (5.80)$$

Concrètement, nous avons la propriété $\alpha_n \ll 1$. Par conséquent, pour alléger l'écriture, nous allons mettre W sous la forme :

$$W \simeq \frac{M \cdot N_s}{4} \quad (5.81)$$

La méthode utilisée afin d'obtenir les fréquences propres est ensuite la même que dans le cas d'un anneau circulaire, c'est à dire la minimisation du quotient de Rayleigh. Nous allons construire deux modèles, à partir de ceux utilisés précédemment (le modèle $M_{B,4}$ et le modèle $M_{T,3}$).

Cas particulier du mode de gonflement : cas $n = 0$

Nous pouvons montrer, exactement comme nous l'avons fait dans le cas des fréquences propres d'ovalisations d'un anneau circulaire, que le calcul des fréquences propres dans le cas particulier où $n = 0$ est le même aussi bien dans le cas du modèle cinématique de Bernoulli que dans le cas du modèle cinématique de Timoshenko. Le quotient de Rayleigh, pour $n = 0$ est :

$$\Re = \frac{ES\pi}{R \cdot (\pi\rho SR + W)} \quad (5.82)$$

La fréquence propre du mode de gonflement est donc :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{ES\pi}{R \cdot (\pi\rho SR + W)}} \quad (5.83)$$

Comparons la solution trouvée avec les résultats obtenus dans le cas d'une masse volumique modifiée (le cas présenté juste avant). Le mode de gonflement dans ce cas particulier est notamment présenté à l'Equation 5.41 avec ρ modifiée en ρ_m . Dans le cas où $n = 0$, W vaut :

$$W = \frac{1}{2} \cdot (\rho N_S L_d H_d b + M_B) \quad (5.84)$$

On peut donc voir tout de suite que le mode de gonflement est le même quel que soit le modèle adopté.

Modèle $S_{B,M}$: Modes propres d'un stator de machine électrique construit à partir du modèle cinématique de Bernoulli le plus complet $M_{B,4}$ par ajout de masses ponctuelles

Dans ce cas particulier, le quotient de Rayleigh est :

$$\Re = \frac{E\pi}{R^2} \cdot \frac{In^2 \cdot (\alpha_n + n)^2 + SR^2 \cdot (1 + \alpha_n n)^2}{\rho\pi \cdot \left(I \cdot (\alpha_n + n)^2 + SR^2 \cdot (1 + \alpha_n^2) \right) + 2RW} \quad (5.85)$$

Le paramètre α_n qui minimise le quotient de Rayleigh est :

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi n \rho SR \cdot (I + SR^2)} \times \left((I + SR^2) \cdot (\pi\rho SR \cdot (n^2 - 1) + 2n^2 W) - \sqrt{(I + SR^2) \cdot \left(SR^2 \cdot (\pi\rho SR \cdot (1 + n^2) + 2n^2 W)^2 + I \cdot (\pi\rho SR \cdot (3n^2 - 1) + 2n^2 W)^2 \right)} \right) \quad (5.86)$$

Modèle $S_{T,M}$: Modes propres d'un stator de machine électrique construit à partir du modèle cinématique de Timoshenko le plus complet $M_{T,3}$ par ajout de masses ponctuelles

Dans ce cas particulier, le quotient de Rayleigh est :

$$\Re = \frac{\pi}{R} \cdot \frac{EI n^2 \beta_n^2 + ES \cdot (1 + \alpha_n n)^2 + GkS \cdot (\alpha_n + n - R\beta_n)^2}{\pi\rho SR \cdot (1 + \alpha_n^2) + 2W} \quad (5.87)$$

Les paramètres α_n et β_n qui minimisent le quotient de Rayleigh sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n = \frac{1}{2n\pi R\rho S \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + SR^2Gk)} \times \\ \left(\pi\rho SR \cdot (n^2 - 1) \cdot (In^2 \cdot (E - Gk) + GkSR^2) + 2Wn^2 \cdot (EIn^2 + Gk \cdot (I + SR^2)) \right) - \\ \sqrt{4\pi R\rho S \cdot (In^3 \cdot (E + Gk) + GknR^2S)^2 \cdot (\pi R\rho S + 2W) +} \\ (\pi R\rho S \cdot (n^2 - 1) \cdot (In^2 \cdot (E - Gk) + GkR^2S) + 2Wn^2 \cdot (EIn^2 + Gk(I + SR^2)))^2 \\ \beta_n = \frac{Gk}{2n\pi\rho \cdot (EIn^2 + GkSR^2) \cdot (In^2 \cdot (E + Gk) + GkSR^2)} \times \\ \left(\pi R\rho S \cdot (In^2 \cdot (Gk \cdot (1 + n^2) + E \cdot (3n^2 - 1)) + GkSR^2 \cdot (3n^2 - 1)) + \right. \\ \left. 2Wn^2 \cdot (EIn^2 + Gk \cdot (I + SR^2)) \right) - \\ \sqrt{4\pi R\rho S \cdot (In^3 \cdot (E + Gk) + GknR^2S)^2 \cdot (\pi R\rho S + 2W) +} \\ (\pi R\rho S \cdot (n^2 - 1) \cdot (In^2 \cdot (E - Gk) + GkR^2S) + 2Wn^2 \cdot (EIn^2 + Gk(I + SR^2)))^2 \end{array} \right. \quad (5.88)$$

5.5.4 Validation par comparaison avec la simulation par éléments finis pour un stator

L'objectif à présent est, comme cela a été le cas pour les modèles analytiques visant à obtenir les fréquences propres d'ovalisations des anneaux circulaires, de valider nos différents modèles mais aussi de comparer leurs performances par rapport au modèle utilisé couramment dans la littérature. Pour ce faire, nous allons adopter la même démarche que précédemment, c'est à dire que nous allons d'abord dans un premier temps valider nos modèles par comparaison avec la simulation par éléments finis puis ensuite par comparaison avec des mesures expérimentales.

Afin de réaliser au mieux cette validation par simulation par éléments finis, nous allons considérer trois stators de machines électriques très différents dans le but de tester la robustesse de nos modèles. Les trois stators en question sont présentés sur la Figure 5.16 où nous pouvons apercevoir leur géométrie et le Tableau 5.4 résume plus précisément leurs dimensions.

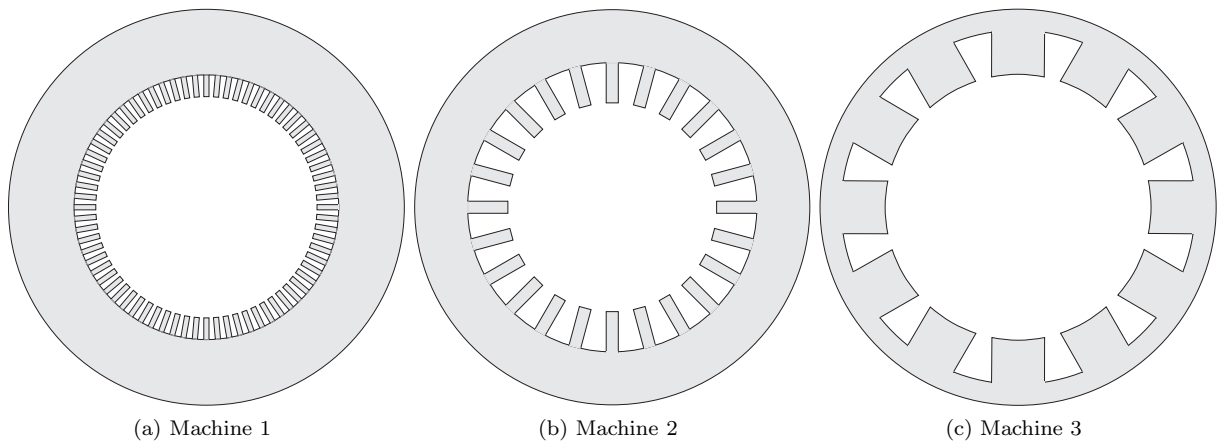


FIGURE 5.16 – Géométrie de trois stators de machines électriques

Les deux premiers stators, présentés sur la Figure 5.16a et la Figure 5.16b, sont des stators de machines à réticences variables fonctionnant à haute vitesse que nous avons extraits de la littérature, dans [Hofmann and Sanders, 2000] et dans [Lamghari-Jamal et al., 2006]. Le troisième stator, présenté sur la Figure 5.16c, est, quant à lui, le stator d'une machine à commutation de flux où il a été supposé que, d'un point de vue comportement mécanique, les aimants permanents et le fer du stator étaient identiques (E et μ sont très

Dimension	Machine 1	Machine 2	Machine 3
R	63.4 mm	73.6 mm	71 mm
h	25.2 mm	22.8 mm	8 mm
L_d	2 mm	5.2 mm	20 mm
H_d	8.33 mm	17.3 mm	17 mm
N_S	72	24	12

TABLE 5.4 – Dimensions de trois stators de machines électriques

proches). Nous avons simulé ces trois stators, sans leurs bobinages, à l'aide du logiciel ANSYS pour obtenir les fréquences des premiers modes propres d'ovalisations, en particulier le mode d'ovalisation d'ordre 0 et les modes de 2 à 6. Nous avons ensuite comparé ces fréquences avec celles obtenues à l'aide des cinq modèles dont nous rappelons les noms :

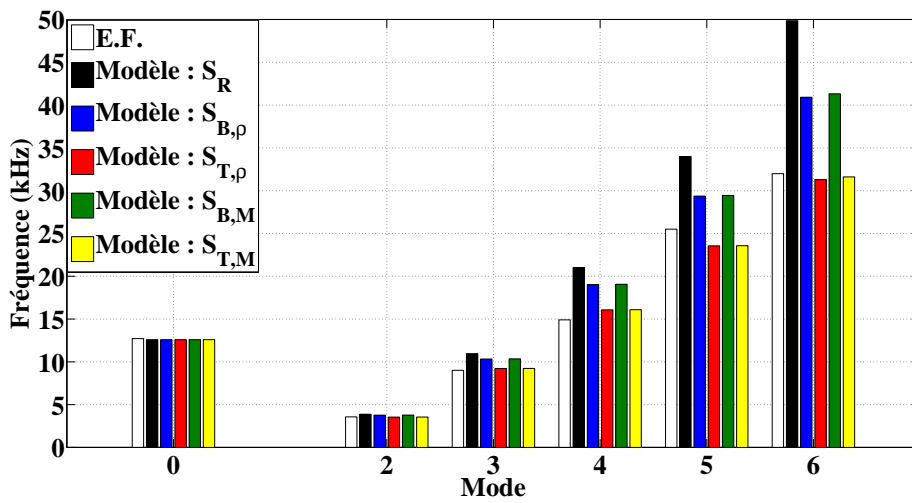
- S_R : modèle de référence, utilisé dans la littérature
- $S_{B,\rho}$: modèle obtenu par modification de la masse volumique à l'aide de la cinématique de Bernoulli
- $S_{T,\rho}$: modèle obtenu par modification de la masse volumique à l'aide de la cinématique de Timoshenko
- $S_{B,M}$: modèle obtenu par ajout de masses ponctuelles à l'aide de la cinématique de Bernoulli
- $S_{T,M}$: modèle obtenu par ajout de masses ponctuelles à l'aide de la cinématique de Timoshenko

Les différents résultats permettant de tester la validité de chacun des modèles sont présentés sur les figures et sur les tableaux suivants :

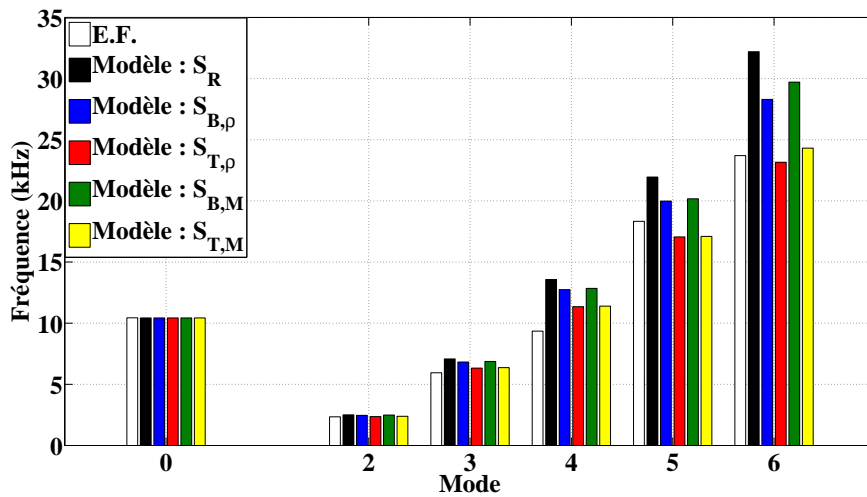
- Les fréquences propres obtenues par la simulation par éléments finis et par les différents modèles analytiques sont présentées sur la Figure 5.17.
- Les erreurs de chacun des modèles analytiques par rapport à la simulation par éléments finis sont présentées sur la Figure 5.18.
- Un résumé de ces comparaisons est présenté pour chaque stator sur les Tableaux C.12, C.13 et C.14 qui sont présentées en annexe (Annexe C, Section C.2).
- L'erreur moyenne commise par les différents modèles pour les trois stators est présentée sur le Tableau 5.5.

	S_R	$S_{B,\rho}$	$S_{T,\rho}$	$S_{B,M}$	$S_{T,M}$
Erreur (%) :	20.05	13.93	7.61	13.21	5.88

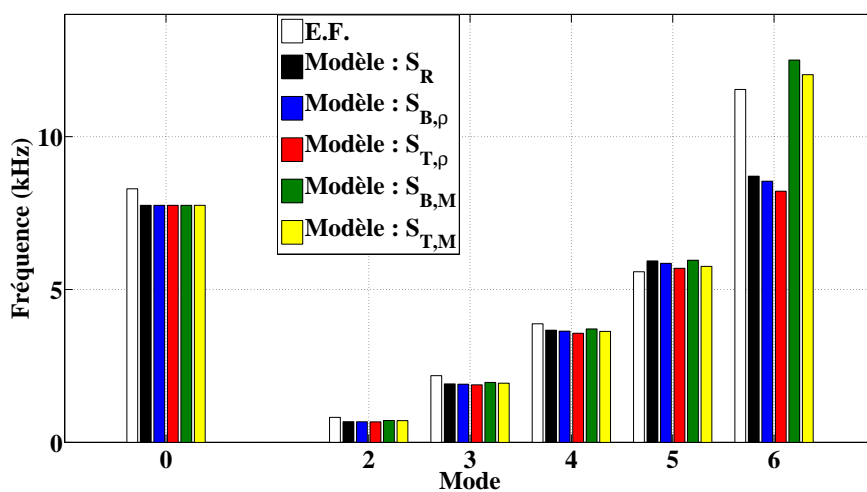
TABLE 5.5 – Erreur moyenne des modèles pour les fréquences propres d'un stator de machine électrique



(a) Machine 1

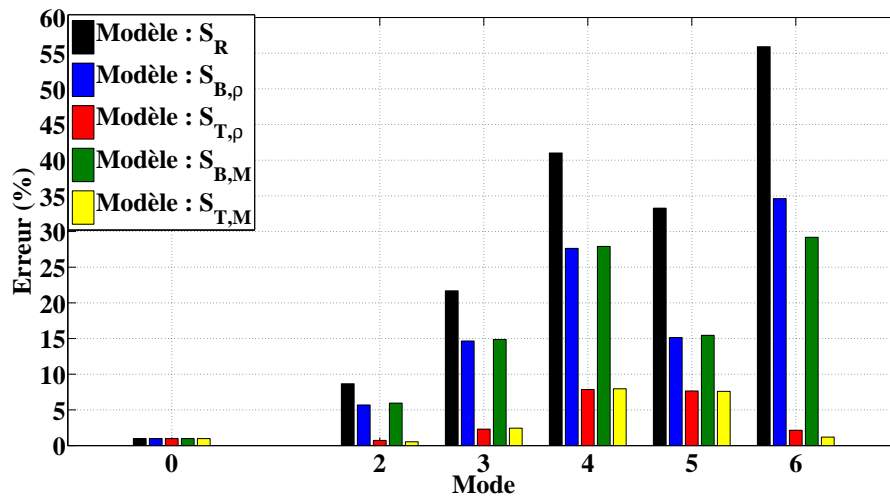


(b) Machine 2

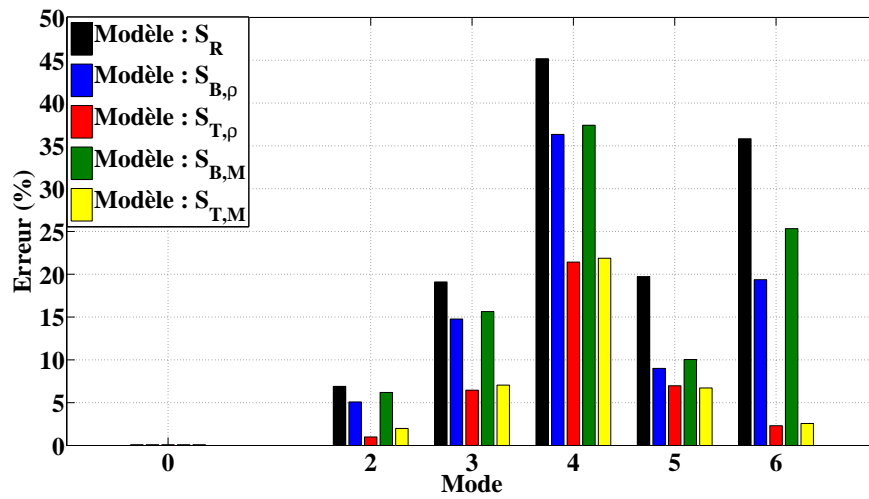


(c) Machine 3

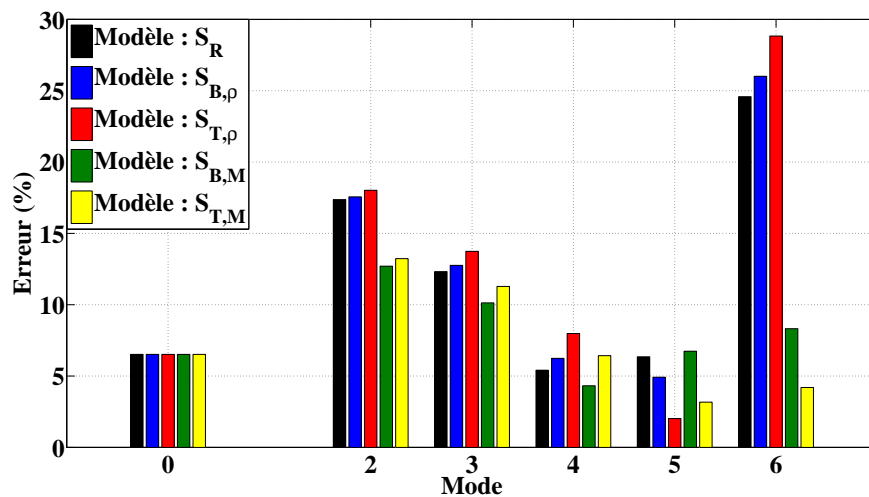
FIGURE 5.17 – Fréquences - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques



(a) Machine 1



(b) Machine 2



(c) Machine 3

FIGURE 5.18 – Erreurs - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques

A présent, à partir de l'analyse de tous les résultats présentés précédemment, nous allons formuler différentes conclusions sur la validité et sur les performances des différentes formulations analytiques pour l'application aux stators de machines électriques :

1. Nous allons commencer, comme nous l'avons fait dans le cas d'un anneau, par faire quelques remarques rapides sur le mode d'ovalisation d'ordre 0 :
 - Tous les modèles présentés, que ce soit le modèle utilisé dans la littérature ou les modèles que nous avons développés ici, sont les mêmes.
 - Pour les trois machines, les erreurs commises par les différents modèles sont respectivement de 0.98%, 0.09% et 6.52%.
 - L'erreur commise sur les deux machines possédant une culasse épaisse, c'est à dire les deux machines à réluctance variable à haute vitesse, est très faible 0.98%, et 0.09%.
 - Nous pouvons conclure, sur ce mode particulier d'ovalisation, qu'il est bien estimé par les différents modèles puisque pour ces trois machines qui nous ont servies de références, l'erreur moyenne totale est de 2.53%.
2. Ensuite, nous allons analyser un à un tous les autres modèles. Commençons par le modèle utilisé dans la littérature S_R :
 - L'erreur moyenne sur les trois machines testées est de 26.92% et 21.14% pour les deux machines à réluctance variable et de 12.09% pour la machine à commutation de flux. De plus l'erreur moyenne totale est de 20.05%.
 - L'erreur est importante pour les machines à réluctance variable car, comme le modèle a été construit à partir de l'hypothèse cinématique de Bernoulli, il estime mal les modes propres des stators possédant une culasse épaisse. De plus, pour la machine à commutation de flux, machine qui possède un stator avec une épaisseur de culasse moins importantes, certains modes sont bien estimés et d'autres très mal.
 - Si nous comparons ce modèle dans sa globalité par rapport aux autres modèles, nous pouvons affirmer qu'il s'agit du modèle qui estime le moins bien les fréquences propres. De plus, si nous observons plus en détail les résultats de ce modèle, nous constatons que pour chaque mode de chaque machine, les fréquences sont moins bien estimées que pour les autres modèles à une exception près : pour le modèle $S_{B,\rho}$ de la machine 3, qui est la machine à commutation de flux. Pour cette machine, les résultats proposés sont équivalents.
 - En conclusion, nous pouvons dire que le modèle couramment utilisé dans la littérature se retrouve vite limité puisque les erreurs d'estimations des fréquences devient très vite rédhibitoire.
3. Passons à présent sur les modèles que nous avons développés ici et commençons par le modèle utilisant la modification de la masse volumique et la cinématique de Bernoulli $S_{B,\rho}$:
 - L'erreur moyenne sur les trois machines testées est de 15.34% et 14.11% pour les deux machines à réluctance variable et de 12.34% pour la machine à commutation de flux. De plus, l'erreur moyenne totale est de 12.34%.
 - Pour des machines possédant une culasse épaisse, l'erreur est plus faible que pour le modèle utilisé dans la littérature car, même si les deux modèles utilisent la cinématique de Bernoulli, le modèle $S_{B,\rho}$ est plus complet. En revanche, pour la machine à commutation de flux, ce modèle n'apporte pas d'amélioration.
4. Analysons ensuite le modèle utilisant la modification de la masse volumique d'un anneau et la cinématique de Timoshenko, noté T,ρ :
 - L'erreur moyenne sur les trois machines testées est de 3.62% et 6.37% pour les deux machines à réluctance variable et de 12.85% pour la machine à commutation de flux. De plus, l'erreur moyenne totale est de 7.61%.
 - L'erreur relativement importante pour la machine à commutation de flux s'explique par le faible nombre de dents. En effet, dans ce cas-là, les modèles utilisant la modification de la masse volumique s'applique mal.
 - Puisque ce modèle utilise la cinématique de Timoshenko, nous pouvons voir qu'il est performant pour les machines possédant une épaisseur de culasse importante.
 - Il apporte néanmoins une nette amélioration par rapport aux deux modèles précédemment présentés et se trouve être le meilleur des modèles pour la machine 2 (très proche du modèle $S_{T,M}$).
5. Continuons l'analyse des résultats en commentant le modèle utilisant, cette fois-ci, l'ajout de masses ponctuelles et la cinématique de Bernoulli, noté $S_{B,M}$:

- L’erreur moyenne sur les trois machines testées est de 15.73% et 15.78% pour les deux machines à réluctance variable et de 8.12% pour la machine à commutation de flux. De plus, l’erreur moyenne totale est de 13.21%.
 - Ce modèle est basé sur la cinématique de Bernoulli, comme les modèles S_M et $S_{B,\rho}$. Par conséquent, il commet des erreurs d’estimations importantes pour les machines à réluctance variable à haute vitesse.
 - Néanmoins, ce modèle est plus efficace que les autres modèles utilisant également la cinématique de Bernoulli.
6. Finalement, terminons notre analyse en nous penchant sur le modèle utilisant l’ajout de masses ponctuelles et la cinématique de Timoshenko, noté $S_{T,M}$:
- L’erreur moyenne sur les trois machines testées est de 3.45% et 6.72% pour les deux machines à réluctance variable et de 7.47% pour la machine à commutation de flux. De plus, l’erreur moyenne totale est de 5.88%.
 - De tous les modèles présentés, il est le seul dont l’erreur est inférieure à 10%.
 - De plus, il est le meilleur modèle pour la machine 1 et 3 et est très proche du meilleur modèle pour la machine 2. Cela s’explique par deux phénomènes : le modèle de Timoshenko qui estime bien les modes propres des machines épaisses (machines à réluctance variable) et le modèle avec ajout de masses ponctuelles pour les machines avec faible nombre de dents (machine à commutation de flux présentée ici).
 - En conclusion, ce modèle est, de tous les modèles présentés, celui approximant le mieux les fréquences propres des stators des machines électriques.

5.5.5 Comparaison avec des mesures expérimentales

Toujours dans l’optique de valider les modèles présentés précédemment, nous allons cette fois-ci le faire en comparant les résultats obtenus avec des mesures expérimentales. Pour ce faire, nous disposons d’un stator de machine synchrone, avec son bobinage, représenté sur la Figure 5.19 et dont les principales dimensions sont proposées sur le Tableau 5.6. Pour obtenir expérimentalement les fréquences propres d’ovalisations de ce stator, nous l’avons, dans un premier temps, suspendu par des élastiques pour rendre les mesures indépendantes de l’environnement. Nous avons ensuite placé un capteur accéléromètre piézoélectrique sur sa surface extérieure. Puis, avec un marteau d’impact (voir Figure 5.20), nous avons relevé les différents modes propres. Ces derniers sont présentés sur la Figure 5.21.



FIGURE 5.19 – Stator de la machine synchrone utilisé pour la validation expérimentale du modèle analytique

Pour tenir compte des remarques que nous avons été amenées à formuler lors de la validation des différents modèles par la comparaison avec la simulation éléments finis, nous avons comparé les mesures expérimentales avec deux modèles uniquement : le modèle de référence S_R et le modèle $S_{T,M}$ que nous avons développé. Les résultats sont présentés dans le Tableau 5.7, sur la Figure 5.22 pour les fréquences et sur la Figure 5.23 pour les erreurs.

Dimension	Machine Synchrone
R	57 mm
h	10.5 mm
L_d	6 mm
H_d	12 mm
N	24

TABLE 5.6 – Principales dimensions de la machine synchrone utilisé pour la validation expérimentale du modèle analytique

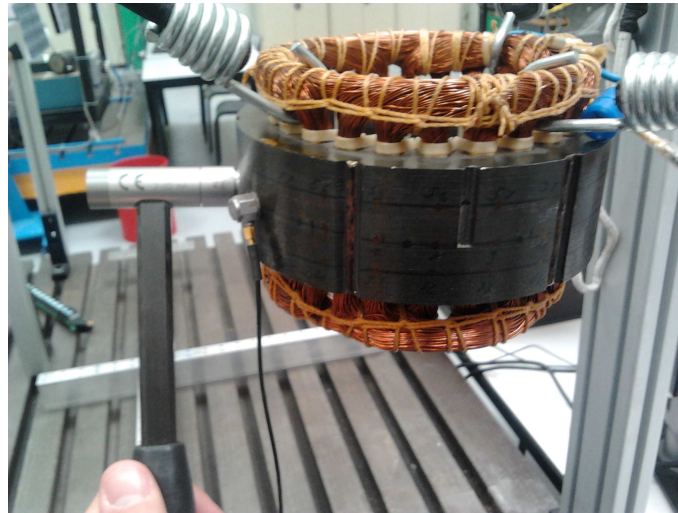


FIGURE 5.20 – Mesures des modes propres avec un marteau d'impact

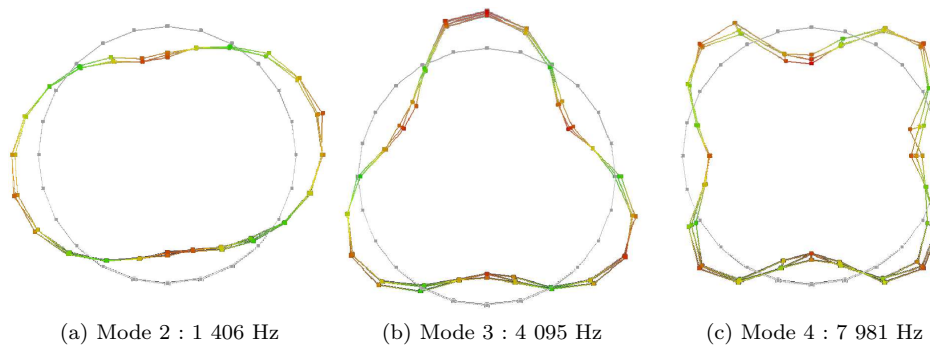


FIGURE 5.21 – Modes propres de la machine synchrone obtenus expérimentalement

A nouveau, nous apercevons que le modèle que nous avons présenté ($S_{T,M}$) propose une amélioration assez nette dans la prédiction des fréquences propres d'ovalisations d'un stator de machines. Pour les trois modes, le modèle les estime avec une erreur moyenne de 4.8% contre une erreur moyenne de 9.4% pour le modèle utilisé couramment dans la littérature. L'erreur du modèle utilisé dans la littérature reste mesurée car le stator que nous avons testé est assez fin.

Mode	Mesures	S_R	$S_{T,M}$
2	1 406 Hz	1 577 Hz	1 545 Hz
3	4 095 Hz	4 461 Hz	4 275 Hz
4	7 981 Hz	8 553 Hz	7 970 Hz
Erreur moyenne :		9.4 %	4.8 %

TABLE 5.7 – Fréquences propres de la machine synchrone : comparaison entre les modèles et les mesures expérimentales

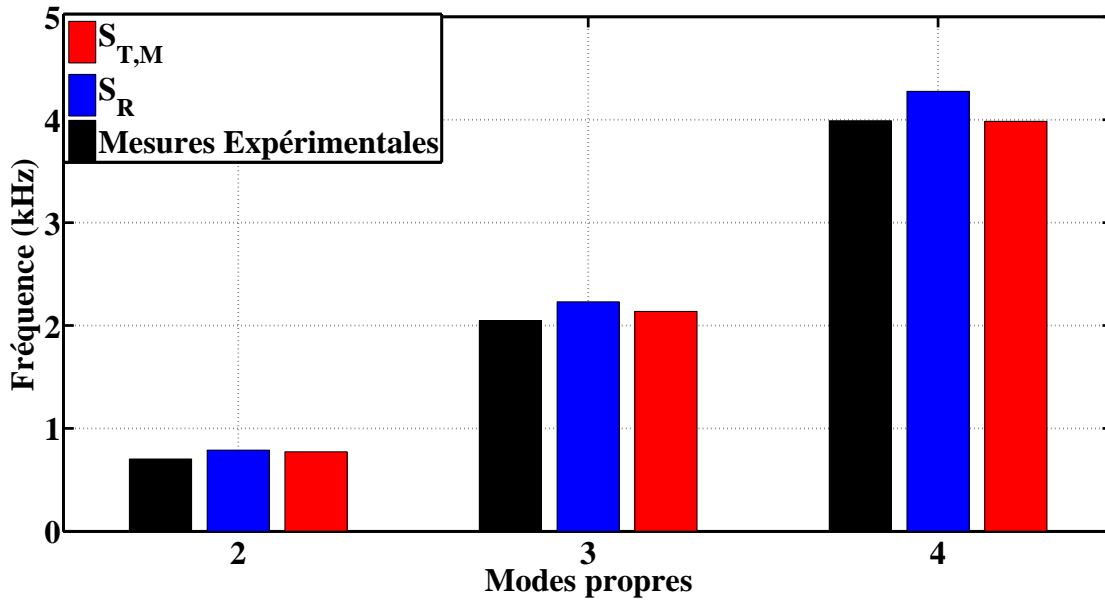


FIGURE 5.22 – Fréquences - comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine synchrone

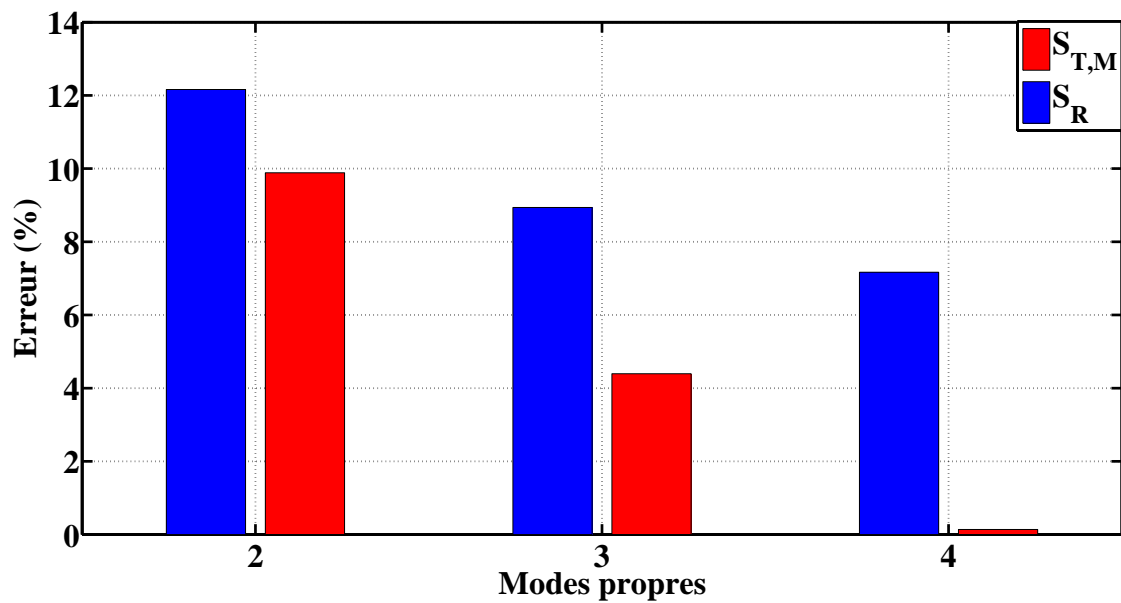


FIGURE 5.23 – Erreurs - comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine synchrone

5.5.6 Influence des différents paramètres sur les fréquences propres

Nous venons de proposer plusieurs formulations analytiques, certaines complexes, permettant de connaître les fréquences des modes propres d'ovalisations d'un stator de machine avec prise en compte, à la fois, des dents statoriques et des bobinages. Regardons à présent l'influence de chacun des paramètres géométriques sur les fréquences propres pour le modèle $S_{T,M}$. Pour cela, partons des dimensions de la machine présentée sur la Figure 5.16a et faisons varier à chaque fois une seule grandeur :

- variation de l'épaisseur h à R constant sur la Figure 5.24.
- variation de la taille des dents statoriques (L_d) sur la Figure 5.25.
- variation du nombre de dents statoriques (N_s) sur la Figure 5.26.

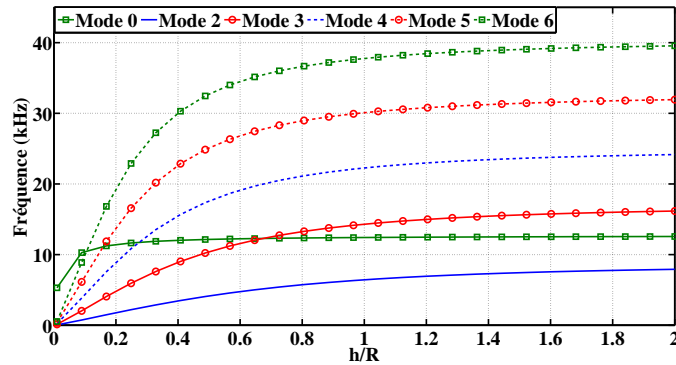


FIGURE 5.24 – Influence du rapport h/R sur les fréquences

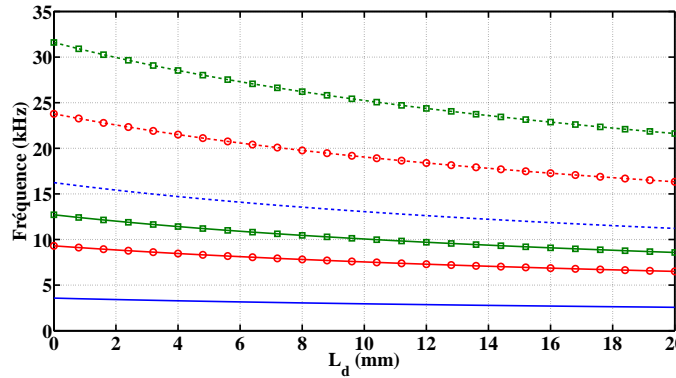


FIGURE 5.25 – Influence de L_d sur les fréquences

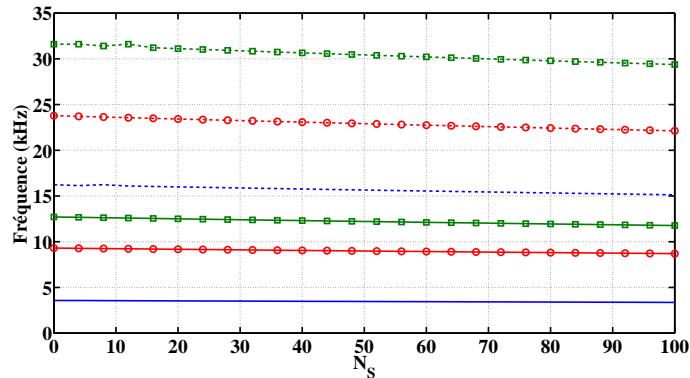


FIGURE 5.26 – Influence de N_s sur les fréquences

D'une manière générale, augmenter l'épaisseur du stator de la machine, à rayon moyen constant, a pour conséquence une augmentation des fréquences propres. De plus, augmenter la taille ou le nombre de dents du stator a pour conséquence une augmentation de masse sans augmentation de rigidité donc une diminution des fréquences propres.

5.6 Application au stator avec culasse externe

Le modèle permettant l'obtention de manière formelle des fréquences des modes propres d'ovalisations en deux dimensions d'un stator de machine électrique étant présenté et validé, passons à une autre problématique. On veut cette fois-ci prendre en compte le cas où le stator est inséré dans une culasse externe, la plupart du temps en aluminium. Cette culasse extérieure a une forte influence sur les fréquences des modes propres [Li et al., 2009] [Sun et al., 2007] [Li and Cho, 2009] puisqu'elle ajoute non seulement de la rigidité mais aussi de la masse. Il est donc indispensable d'en tenir compte dans le modèle. C'est l'objectif de cette partie.

5.6.1 Notations et méthode utilisées

Considérons un stator de machine électrique entouré d'une culasse extérieure cylindrique (voir la Figure 5.27 pour les différentes notations utilisées). Le stator est défini géométriquement par son rayon moyen R_2 , son épaisseur h_2 et les N_s dents statoriques + bobinages de masse M chacune. Il est également défini mécaniquement par son module de Young E_2 , son coefficient de Poisson ν_2 , son module de cisaillement G_2 , son moment quadratique I_2 et sa masse volumique ρ_2 . La culasse extérieure, elle, est définie géométriquement par son rayon moyen R_1 et son épaisseur h_1 . De plus, elle est définie mécaniquement par son module de Young E_1 , son coefficient de Poisson ν_1 , son module de cisaillement G_1 , son moment quadratique I_1 et sa masse volumique ρ_1 .

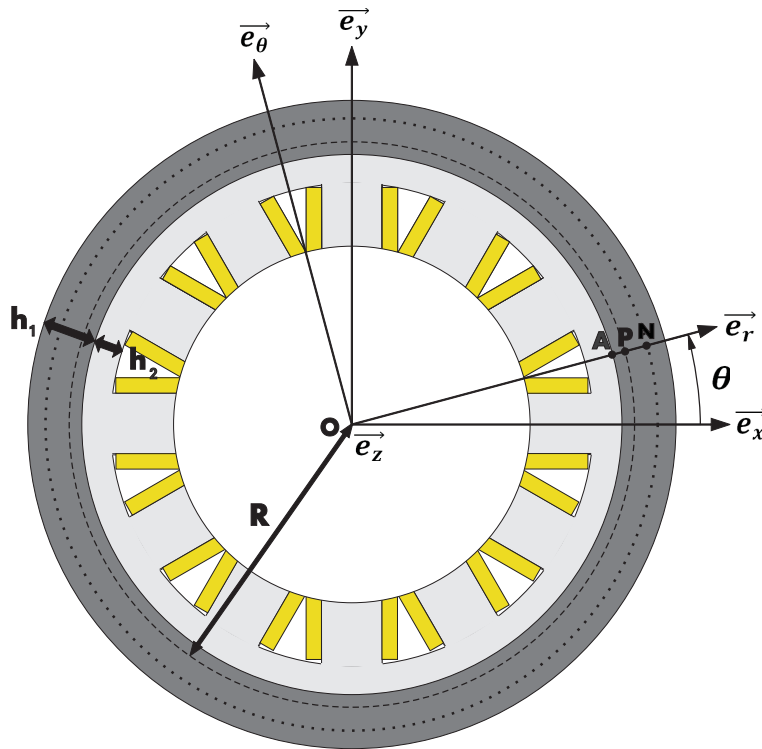


FIGURE 5.27 – Stator de machine électrique avec culasse extérieure

A ces définitions, ajoutons R le rayon moyen des deux anneaux et h l'épaisseur totale des deux anneaux $h = h_1 + h_2$. Soit A un point positionné à l'interface entre les deux anneaux, P un point positionné sur le rayon moyen et N un point positionné sur l'axe de la fibre neutre. Ces trois points peuvent être repérés en coordonnées

cylindriques par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{OA} &= \left(R_2 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \vec{e}_r \\ \vec{OP} &= R \cdot \vec{e}_r \\ \vec{ON} &= (R + \eta \cdot h) \cdot \vec{e}_r \end{cases} \quad (5.89)$$

avec η un réel à déterminer pour repérer correctement la position de la fibre neutre. De plus, nous pouvons définir le vecteur \vec{PA} par :

$$\vec{PA} = \gamma \cdot h \cdot \vec{e}_r \quad (5.90)$$

avec γ un paramètre définissant la position de l'interface entre les deux matériaux, à savoir :

$$\gamma = \frac{h_2 - h_1}{2 \cdot (h_1 + h_2)} \quad (5.91)$$

La méthode que nous allons employer ici afin de déterminer les fréquences propres d'un stator de machine électrique avec sa culasse extérieure cylindrique consiste à garder les mêmes formulations analytiques que dans le cas d'un stator sans culasse mais en les adaptant. Pour ce faire, nous allons modifier l'écriture des différents paramètres intervenant dans les équations. Nous avons déjà les paramètres géométriques :

$$\begin{cases} R &= \frac{2 \cdot (R_1 + R_2) + (h_1 - h_2)}{4} \\ h &= h_1 + h_2 \end{cases} \quad (5.92)$$

5.6.2 Calculs des paramètres équivalents

Contrairement au cas précédent, les paramètres mécaniques changent dans cette configuration en fonction de la position radiale (le long de l'axe \vec{e}_r).

Position de la fibre neutre : calcul du paramètre η

Nous sommes donc amenés à modifier les relations que nous avons écrites précédemment. La densité d'énergie de déformation liée à la contrainte normale σ et à la déformation ϵ se met sous la forme suivante :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot \int_S \sigma \cdot \epsilon \cdot dS \quad (5.93)$$

avec σ qui est reliée à ϵ selon la loi de Hooke :

$$\sigma = E(r) \cdot \epsilon \quad (5.94)$$

En utilisant l'équation 5.26, nous pouvons déduire la déformation en un point quelconque de l'axe \vec{e}_r à la position radiale r :

$$\epsilon = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + (R - r) \cdot \omega(\theta) \right) \quad (5.95)$$

L'énergie de déformation est :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \int_S E(r) \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + (R - r) \cdot \omega(\theta) \right)^2 \cdot dS \quad (5.96)$$

avec :

$$dS = b \cdot dr \quad (5.97)$$

soit :

$$e_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{R} \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} E(r) \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + (R - r) \cdot \omega(\theta) \right)^2 \cdot dr \quad (5.98)$$

On peut décomposer cette énergie en trois termes :

$$\begin{aligned}
 e_d &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{R} \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} E(r) \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + R \cdot \omega(\theta) \right)^2 \cdot dr \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{R} \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} E(r) \cdot (r \cdot \omega(\theta))^2 \cdot dr \\
 &- \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{R} \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} E(r) \cdot 2 \cdot r \cdot \omega(\theta) \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + R \cdot \omega(\theta) \right) \cdot dr
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

On cherche le paramètre η (paramètre qui localise la fibre neutre) de tel sorte que le terme de couplage soit nul :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{R} \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} E(r) \cdot 2 \cdot r \cdot \omega(\theta) \cdot \left(\frac{du_r(\theta)}{d\theta} - u_\theta(\theta) + R \cdot \omega(\theta) \right) \cdot dr = 0 \tag{5.100}$$

soit :

$$\int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} E(r) \cdot r \cdot dr = 0 \tag{5.101}$$

On obtient ainsi :

$$\eta = \frac{1}{4} \cdot \frac{(E_1 - E_2) \cdot (4\gamma^2 - 1)}{-(E_1 + E_2) + 2\gamma \cdot (E_1 - E_2)} \tag{5.102}$$

Calcul du module de Young équivalent : E

L'énergie de déformation de traction-compression fait appel au calcul suivant :

$$E \cdot S = b \cdot \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} E(r) \cdot dr \tag{5.103}$$

soit :

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2} + \gamma \cdot (E_2 - E_1) \tag{5.104}$$

Calcul du module de cisaillement équivalent : G

L'énergie de déformation de cisaillement fait appel au calcul suivant :

$$G \cdot S = b \cdot \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} G(r) \cdot dr \tag{5.105}$$

soit :

$$G = \frac{G_1 + G_2}{2} + \gamma \cdot (G_2 - G_1) \tag{5.106}$$

Calcul du moment quadratique équivalent : I

L'énergie de déformation de flexion fait intervenir le terme :

$$EI = b \cdot \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} r^2 \cdot E(r) \cdot dr \tag{5.107}$$

soit :

$$I = \frac{bh^3}{24 \cdot E} \cdot [(E_1 + E_2) \cdot (1 + 12 \cdot \eta^2) + 2 \cdot (E_2 - E_1) \cdot (4 \cdot \gamma^3 - 3 \cdot \eta \cdot (4 \cdot \gamma^2 - 1) + 12 \cdot \gamma \cdot \eta^2)] \tag{5.108}$$

Calcul de la masse volumique équivalente : ρ

L'énergie cinétique liée au déplacement des sections fait intervenir le terme :

$$\rho S = b \cdot \int_{-\eta h - \frac{h}{2}}^{-\eta h + \frac{h}{2}} \rho(r) \cdot dr \tag{5.109}$$

soit :

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \gamma \cdot (\rho_2 - \rho_1) \tag{5.110}$$

Ainsi, nous pouvons utiliser les mêmes formulations que dans le cas sans culasse en remplaçant les grandeurs mécaniques et géométriques par les nouvelles grandeurs ainsi définies.

5.6.3 Validations des modèles analytiques par simulation éléments finis sur trois machines possédant des culasses externes

Nous allons valider les différents modèles que nous avons construits précédemment en comparant, à nouveau, les fréquences des modes propres obtenues à l'aide des formulations analytiques aux fréquences des modes propres obtenues à l'aide de la simulation éléments finis. Nous allons réaliser ces comparaisons sur trois machines différentes dont les allures sont présentées sur la Figure 5.28, les dimensions dans le Tableau 5.8 et les caractéristiques mécaniques dans le Tableau 5.9.

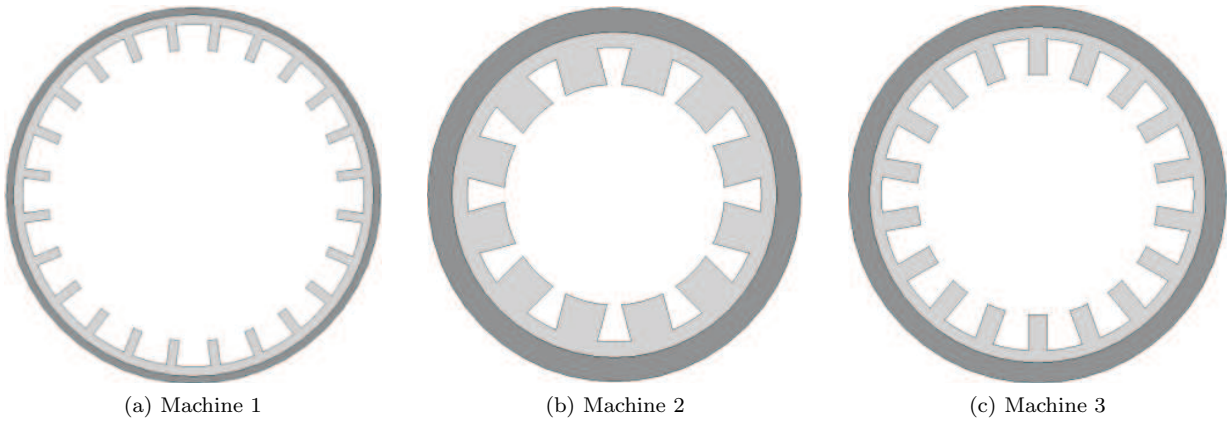


FIGURE 5.28 – Présentation des géométries (stator + culasse) considérées

Dimension	Machine 1	Machine 2	Machine 3
R_1	152.7 mm	80.3 mm	52.7 mm
R_2	145.7 mm	71.2 mm	48.0 mm
h_1	5.0 mm	10.0 mm	5.0 mm
h_2	9.0 mm	8.1 mm	4.5 mm
L_d	7.9 mm	19.6 mm	5.5 mm
H_d	21.0 mm	16.9 mm	10.5 mm
N_s	24	12	18

TABLE 5.8 – Dimensions des machines

Nous allons comparer les quatre modèles que nous avons développés, à savoir :

- $S_{B,\rho}$: modèle obtenu par modification de la masse volumique à l'aide de la cinématique de Bernoulli
- $S_{T,\rho}$: modèle obtenu par modification de la masse volumique à l'aide de la cinématique de Timoshenko
- $S_{B,M}$: modèle obtenu par ajout de masses ponctuelles à l'aide de la cinématique de Bernoulli
- $S_{T,M}$: modèle obtenu par ajout de masses ponctuelles à l'aide de la cinématique de Timoshenko

5.6. APPLICATION AU STATOR AVEC CULASSE EXTERNE

Paramètre	Stator	Culasse
E	200 GPa	100 GPa
ρ	7800 kg/m ³	4000 kg/m ³
ν	0.266	0.3

TABLE 5.9 – Paramètres mécaniques

Les différents résultats permettant de tester la validité de chacun des modèles sont présentés sur les figures et sur les tableaux suivants :

- Les fréquences propres obtenues par la simulation par éléments finis et par les différents modèles analytiques sont présentées sur la Figure 5.29.
- Les erreurs de chacun des modèles analytiques par rapport à la simulation par éléments finis sont présentées sur la Figure 5.30.
- Un résumé de ces comparaisons est présenté pour chaque stator sur les Tableaux 5.10, 5.11 et 5.12.
- L'erreur moyenne commise par les différents modèles pour les trois stators est présentée dans le Tableau 5.13

Mode	E.F.	$S_{B,\rho}$			$S_{T,\rho}$		$S_{B,M}$		$S_{T,M}$	
	Fréq (Hz)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	
0	4817	4625	3,99	4625	3,99	4636	3,76	4636	3,76	
2	330	314	4,85	313	5,15	323	2,12	322	2,42	
3	913	886	2,96	880	3,61	901	1,31	894	2,08	
4	1710	1695	0,88	1676	1,99	1714	0,23	1694	0,94	
5	2686	2733	1,75	2687	0,04	2759	2,72	2708	0,82	
		moy :	2,88	moy :	2,96	moy :	2,03	moy :	2,06	

TABLE 5.10 – Comparaison entre les mesures expérimentales et les modèles analytiques pour le stator avec culasse de la machine 1

Mode	E.F.	$S_{B,\rho}$			$S_{T,\rho}$		$S_{B,M}$		$S_{T,M}$	
	Fréq (Hz)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	
0	8758	8147	6,98	8147	6,98	8256	5,73	8256	5,73	
2	1587	1448	8,76	1415	10,84	1531	3,53	1495	5,80	
3	4103	4048	1,34	3875	5,56	4213	2,68	4013	2,19	
4	7039	7646	8,62	7130	1,29	7937	12,76	7325	4,06	
5	9799	12138	23,87	10989	12,14	12636	28,95	11246	14,77	
		moy :	9,91	moy :	7,36	moy :	10,73	moy :	6,51	

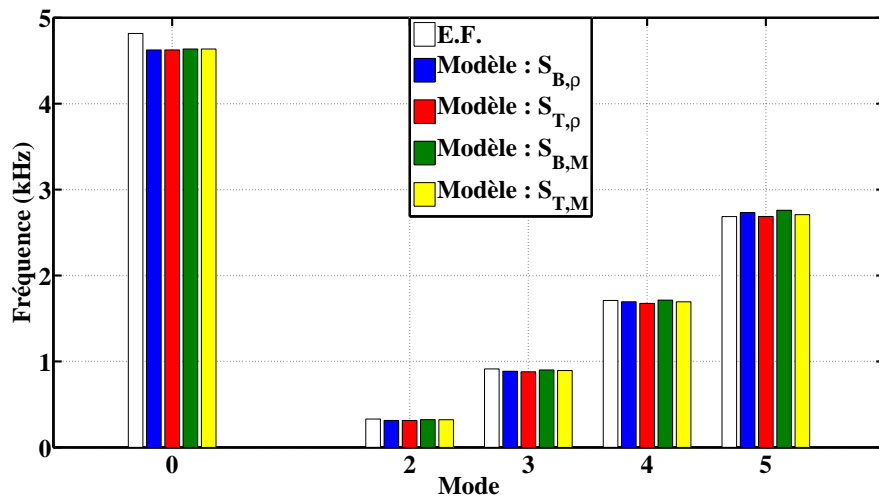
TABLE 5.11 – Comparaison entre les mesures expérimentales et les modèles analytiques pour le stator avec culasse de la machine 2

Mode	E.F.	$S_{B,\rho}$			$S_{T,\rho}$		$S_{B,M}$		$S_{T,M}$	
	Fréq (Hz)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	
0	13657	13023	4,64	13023	4,64	13130	3,86	13130	3,86	
2	1927	1823	5,40	1797	6,75	1902	1,30	1874	2,75	
3	5111	5119	0,16	4979	2,58	5265	3,01	5107	0,08	
4	9034	9723	7,63	9293	2,87	9962	10,27	9470	4,83	
5	13128	15540	18,37	14550	10,83	15927	21,32	14779	12,58	
		moy :	7,24	moy :	5,53	moy :	7,95	moy :	6,44	

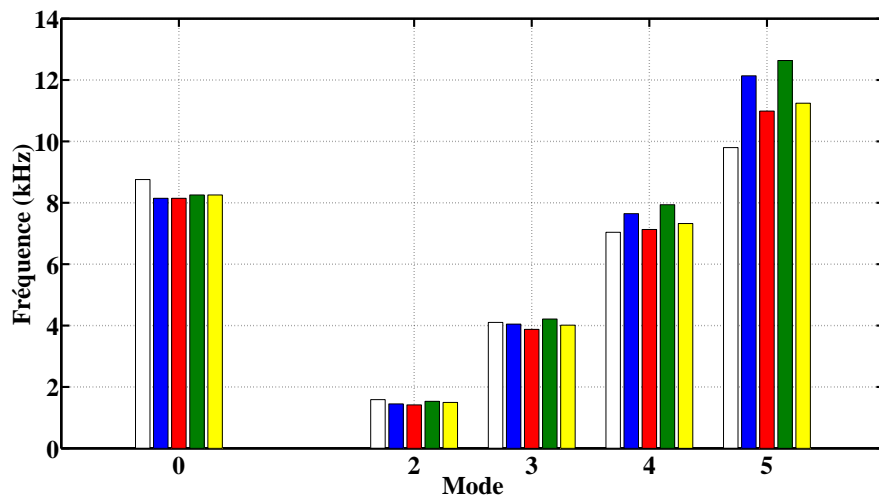
TABLE 5.12 – Comparaison entre les mesures expérimentales et les modèles analytiques pour le stator avec culasse de la machine 3

	$S_{B,\rho}$	$S_{T,\rho}$	$S_{B,M}$	$S_{T,M}$
Erreur (%) :	6.68	5.28	6.90	4.44

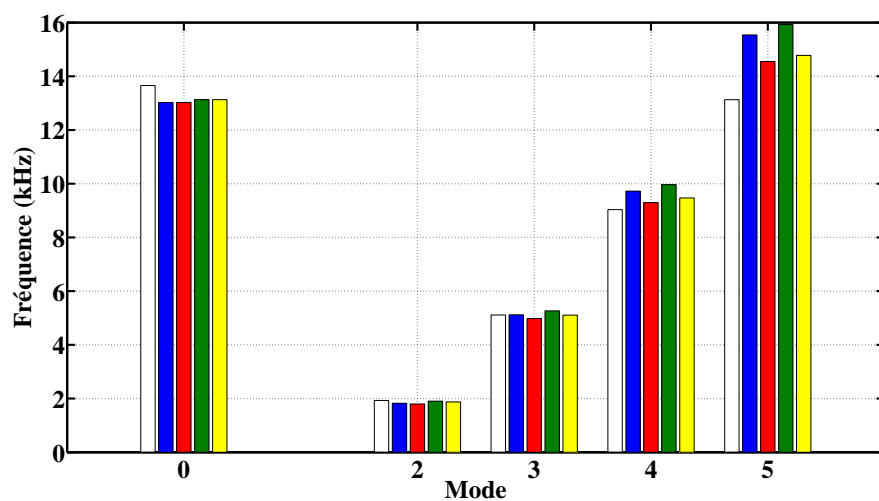
TABLE 5.13 – Erreur moyenne de chacun des modèles pour les fréquences propres d'un stator de machine électrique



(a) Machine 1

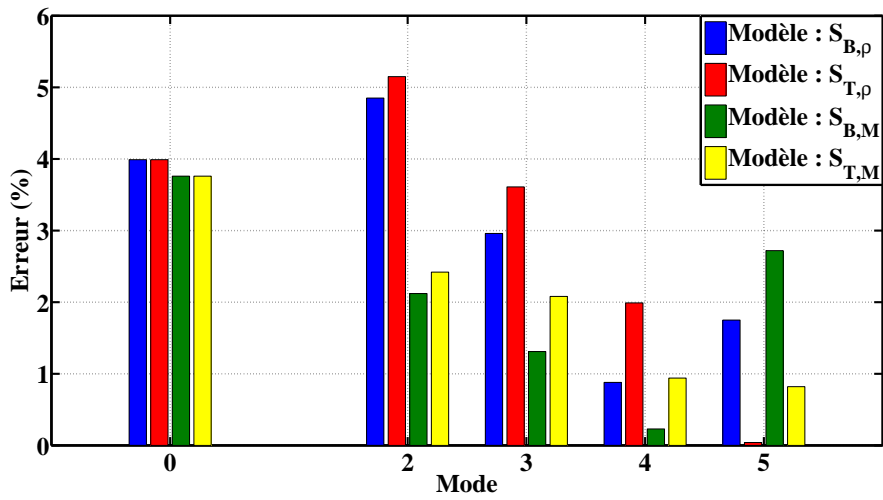


(b) Machine 2

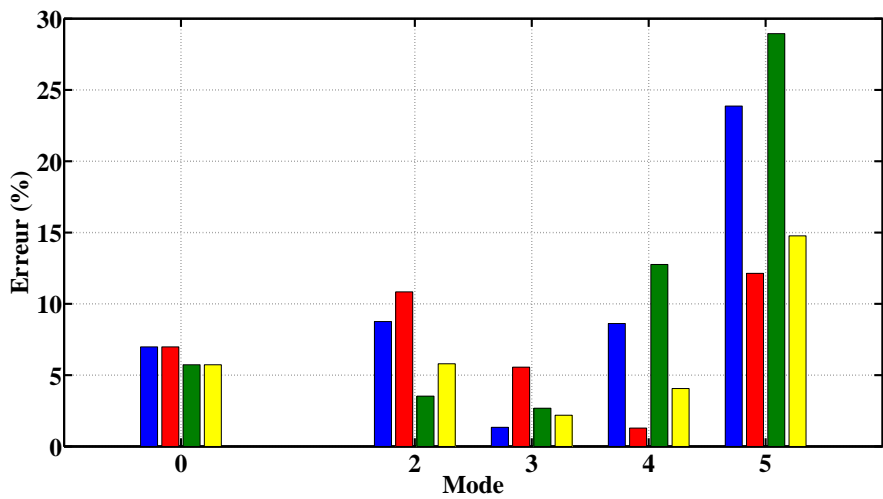


(c) Machine 3

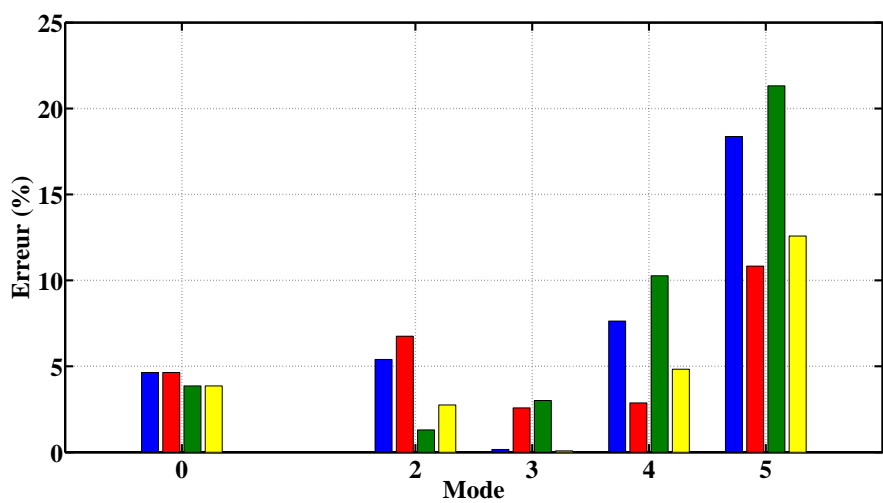
FIGURE 5.29 – Fréquences - comparaison entre la simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques avec culasse externe



(a) Machine 1



(b) Machine 2



(c) Machine 3

FIGURE 5.30 – Erreurs - comparaison entre la simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques avec culasse externe

Les modèles proposés dans ce mémoire de thèse visant à obtenir les fréquences des modes propres d'ovalisations en deux dimensions des stators de machines électriques avec présence d'une culasse externe ont été validés par comparaison avec la simulation éléments finis. Les quatre modèles proposés ici ont une erreur moyenne sur l'ensemble des trois machines tests inférieure à 10%. De plus, le modèle estimant les fréquences avec le pourcentage d'erreur le plus faible est le modèle noté $S_{T,M}$. Ce modèle estime les fréquences avec une erreur inférieure à 5%. Cela n'a rien d'étonnant puisqu'il s'agit du modèle créé à partir de la cinématique de Timoshenko, cinématique adaptée, on le rappelle, aux géométries de poutres épaisses, ce qui correspond au cas des stators avec culasse externe.

5.7 Temps de calculs : comparaison entre le modèle analytique et le modèle éléments finis

Avant de conclure sur ce chapitre, une dernière étude se doit d'être conduite pour achever complètement l'étude de ces modèles analytiques. Il s'agit de comparer le temps de calcul pour l'exécution du modèle entre nos modèles analytiques et un modèle numérique éléments finis. Pour réaliser une analyse modale des stators, le logiciel commercial ANSYS a été utilisé. Bien que le temps soit fortement lié au maillage pour les simulations E.F., nous pouvons ici obtenir un ordre de grandeur : nos modèles nécessitent un temps de calculs de l'ordre de 18 ms pour s'exécuter, à comparer devant les 15 s nécessaires pour le modèle numérique, ce qui représente un gain de temps non négligeable en particulier pour l'intégration dans un processus d'optimisation.

5.8 Conclusion

Pour terminer ce chapitre, nous allons, en guise de conclusion, reprendre les étapes qui nous paraissent les plus importantes pour en faire une synthèse. Nous avons réalisé ici un modèle permettant d'obtenir les fréquences propres d'ovalisation en deux dimensions des stators de machines électriques.

Pour ce faire, nous avons utilisé une méthode énergétique, appelée méthode du quotient de Rayleigh. Cette méthode consiste à calculer et à minimiser le quotient de Rayleigh. Pour ce faire, il a fallu calculer les différentes énergies existantes au sein de la structure : énergie de déformation et énergie cinétique. De plus, notre modèle a été développé à partir de deux hypothèses cinématiques différentes : l'hypothèse de Bernoulli adaptée aux poutres minces, et l'hypothèse de Timoshenko adaptée aux poutres épaisses.

Une fois la méthode présentée de manière générale, nous avons commencé par l'appliquer pour obtenir différentes formulations analytiques des fréquences de résonances d'anneaux circulaires. Ces formulations prenaient en compte de plus en plus de phénomènes physiques (énergie de traction, de cisaillement, de rotation, ...) et étaient de plus en plus complexes. Nous les avons ensuite comparées avec celles déjà existantes dans la littérature et nous avons montré qu'elles apportaient une amélioration très nette. Par exemple, nous avons montré que le meilleur de notre modèle (noté $M_{T,3}$) estimait les fréquences propres avec une erreur inférieure à 5% quand le modèle développé par la littérature estimait les fréquences propres avec une erreur proche de 20%.

Ensuite, à partir de ces modèles, nous en avons déduit les fréquences de résonances des stators de machines en prenant en compte aussi bien le bobinage que les dents statoriques. Deux méthodes ont été utilisées pour prendre en compte ces dernières : la première en modifiant la masse volumique de l'anneau et la deuxième en ajoutant des masses ponctuelles. A nouveau, nous avons montré que les modèles proposées ici étaient plus performants que ceux déjà existants. A titre d'exemple, nous avons montré que pour trois stators différents, l'erreur sur l'estimation des fréquences étaient de 6% environ pour le meilleur de nos modèles ($S_{T,M}$) et de 20% pour le modèle déjà existant.

Enfin, nous avons terminé ce chapitre en proposant des formulations analytiques pour estimer les fréquences de résonances lorsque le stator de la machine possédait une culasse externe encastrée. Dans ce cas là, nous avons montré que nos modèles estimaient les fréquences avec une erreur inférieure à 3%.

Dans le chapitre suivant, nous allons nous pencher sur le dernier modèle afin de terminer la présentation du modèle analytique magnéto-acoustique : le modèle analytique vibratoire - acoustique.

Modèle Analytique Vibratoire - Acoustique

6.1 Introduction

Terminons la présentation du modèle analytique magnéto-acoustique des MCF-AP en nous attaquant, à présent, à la dernière partie de la modélisation, à savoir l'estimation formelle de l'état vibratoire et acoustique de ces structures. Après l'obtention des contraintes magnétiques agissant au sein de la machine et après connaissance de la forme et de la fréquence des modes propres d'ovalisations du stator, nous sommes maintenant en mesure de construire ce modèle. Avant de commencer, précisons, comme nous l'avons fait au chapitre précédent, que ce qui va être développé ici n'est pas l'apanage du convertisseur électromagnétique objet de ce mémoire de thèse, mais au contraire peut être tout aussi bien transposer à d'autres types de structures de machines.

Ce modèle a pour ambition première de proposer des formulations analytiques pour prédire la déformation statorique, c'est à dire le déplacement temporel du stator, puis d'en déduire la puissance acoustique rayonnée par la structure. La Figure 6.1 présente de manière synthétiques le modèle qui, pour être développé a besoin, en entrée, de la connaissance : des différentes forces appliquées sur la structure, des modes de résonances du stator et enfin de la vitesse de rotation de la machine. Dans l'application qui sera notre, les forces représenteront les forces ayant pour origines des phénomènes magnétiques et plus précisément les forces magnétiques radiales à l'interface entre les dents statoriques et l'entrefer qui ont été obtenues Chapitre 4. Toutefois, ce modèle pourra s'appliquer également à d'autres types de contraintes, provenant par exemple de phénomènes d'origines mécaniques ou aérodynamiques. Les modes de résonances seront les modes propres d'ovalisations en deux dimensions du stator qui ont été obtenus Chapitre 5. Enfin, la vitesse de rotation de la machine nous donnera une information sur les fréquences de l'excitatrice.

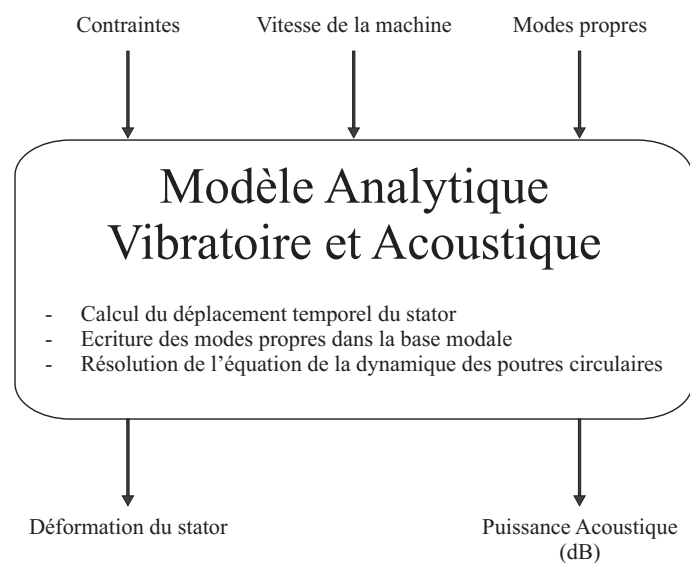


FIGURE 6.1 – Synoptique du modèle analytique permettant l'obtention de manière formelle des vibrations et de la puissance acoustique rayonnée par la machine

Dans une première partie, nous allons commencer à réaliser un état de l'art sur les modèles analytiques

permettant l'estimation de la puissance acoustique rayonnée par une machine électrique (Partie 6.2). Puis, dans un second temps, nous présenterons le modèle que nous avons développé pour obtenir la réponse mécanique temporelle du stator face à une excitation donnée en y introduisant préalablement les différentes notations utilisées (Partie 6.3). Une fois le modèle présenté, nous l'utiliserons pour l'appliquer à la MCF-AP, tout d'abord dans le cas où la vitesse de rotation de la machine est constante (Partie 6.4) puis variable (Partie 6.5). Nous présenterons ensuite un modèle simple d'acoustique linéaire permettant d'obtenir la puissance acoustique rayonnée au niveau de la surface extérieure statorique (Partie 6.6). Une fois le modèle terminé, nous le validerons en comparant les résultats à ceux obtenus par le biais, soit de simulations éléments finis, soit de mesures expérimentales (Partie 6.7). Enfin, après avoir comparé les temps de calculs pour l'exécution du modèle entre le modèle analytique et un modèle numérique (Partie 6.8), nous concluons sur ce chapitre (Partie 6.9).

6.2 État de l'art sur les modèles analytiques permettant l'estimation de la puissance acoustique rayonnée par une machine électrique

Les toutes premières études ayant pour finalités la recherche de formulations purement analytiques pour la prédiction du comportement vibratoire et acoustique des machines électriques remontent aux années cinquante. JORDAN dans [Jordan, 1950], ALGER dans [Alger and Erdelyi, 1956] et [Alger, 1965] puis YANG [Yang, 1981] et TIMAR [Timar, 1989] sont les premiers à s'y être attelés. De ces travaux, il en est ressorti plusieurs expressions analytiques de l'amplitude des vibrations, développées à partir des équations de la déformation d'une poutre appliquées à un stator de machine électrique. Les résultats proposés par ces études sont donnés ci-après (s'appuyer également sur la Figure 6.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mode } 0 \quad : \quad Y_0 = \frac{R_{si} \cdot R}{E \cdot h} \cdot F \\ \text{mode } \geq 2 \quad : \quad Y_m = \frac{4}{3} \cdot \frac{R_{si} \cdot R^2}{E \cdot h^3} \cdot \frac{F}{(m^2 - 1)^2} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

avec :

- Y_0 : Amplitude de la déformation associée au mode 0
- Y_m : Amplitude de la déformation associée au mode $m \geq 2$
- R_{si} : Rayon intérieur du stator
- R : Rayon moyen de la culasse du stator
- h : Epaisseur de la culasse du stator
- E : Module de Young
- m : mode
- F : Amplitude de la force surfacique (N/m^2)

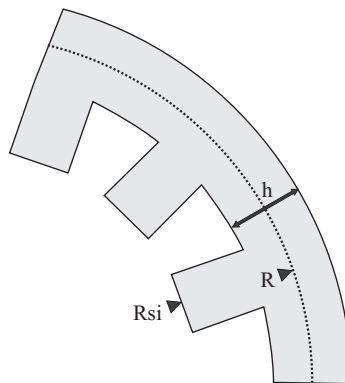


FIGURE 6.2 – État de l'art sur les modèles analytiques acoustiques

Ces formulations analytiques ont, par la suite, été incluses dans des modélisations multi-physiques pour la prédiction et la réduction du bruit généré par des machines électriques. En France, par exemple, de nombreux travaux en la matière existent : CASSORET dans [Cassoret, 1996] et [Cassoret et al., 2003], CORTON dans [Corton, 2000], AIT-HAMMOUDA dans [Ait-Hammouda, 2005] et enfin LE BESNERAIS dans [Le Besnerais, 2008b] ont étudié le bruit généré par des machines asynchrones. Pour parvenir aux mêmes résultats, TIMOSHENKO, dans [Timoshenko, 1968] et [Timoshenko, 2011], propose d'utiliser la méthode des travaux virtuels.

Enfin, une dernière méthode, proche de celle employé par la suite ici, consiste à projeter les équations de la dynamique du stator dans la base des vecteurs propres composant la base modale [Gieras et al., 2005] [Lesueur, 1988]. C'est notamment le parti pris par HUBERT dans [Hubert, 2001] qui utilise la méthode de séparation des variables pour écrire le déplacement $u(\theta, t)$ de la surface extérieure du stator dans la base modale $U_i(\theta)$:

$$u(\theta, t) = \sum_i \Phi_i(t) \cdot U_i(\theta) \quad (6.2)$$

6.3 Notations utilisées et présentation du modèle

6.3.1 Notations et hypothèses de travail

Pour présenter le modèle analytique vibratoire - acoustique, nous allons reprendre les mêmes notations que lors de la présentation du modèle analytique modes propres du chapitre précédent. Le stator de la machine est modélisé comme un anneau circulaire et est défini par ses paramètres géométriques (rayon moyen R , épaisseur h , section droite S et moment quadratique I) et ses paramètres mécaniques (module de Young E , module de cisaillement G , coefficient de Poisson μ et masse volumique ρ). Pour rappel, la masse volumique correspond ici au cas où il y a prise en compte des dents statoriques et du bobinage et, par conséquent, il s'agit de la masse volumique modifiée (Équation 5.76). La Figure 6.3 précise les notations utilisées par la suite. Soit P un point localisé sur l'axe neutre (rayon moyen) de l'anneau. Ce point est repéré en coordonnées cylindriques (r, θ) . Nous allons émettre l'hypothèse que ce point se déplace dans le plan et ne s'intéresser exclusivement qu'à la composante radiale de ce déplacement (donc suivant l'axe \vec{e}_r). Nous allons noter le déplacement de ce point par rapport à sa position d'équilibre $u_r(\theta, t)$. Toujours en ce point, nous allons définir la fonction $f(\theta, t)$, fonction représentative de la force appliquée en P . Nous allons supposons également que cette force est radiale. Sous ces différents hypothèses, le vecteur \vec{OP} peut être défini par :

$$\vec{OP}(\theta, t) = (R + u_r(\theta, t)) \cdot \vec{e}_r \quad (6.3)$$

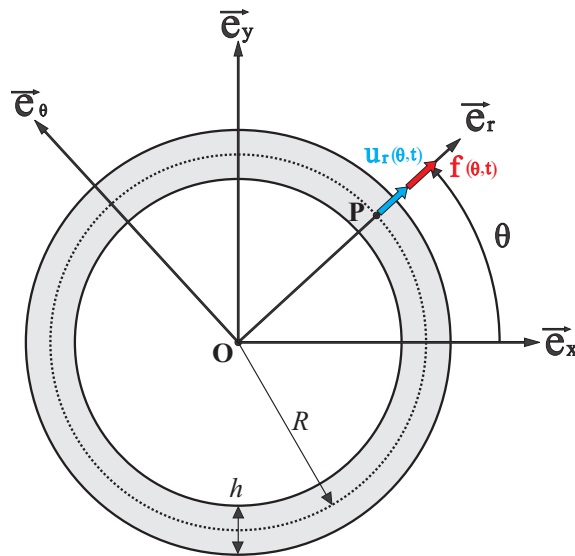


FIGURE 6.3 – Notations utilisées pour le modèle analytique vibratoire - acoustique

6.3.2 Équation de l'équilibre dynamique de l'anneau

Pour parvenir à obtenir l'équation de l'équilibre dynamique d'un anneau (poutre) circulaire au point P , nous allons considérer un petit tronçon de cet anneau, que nous centrons en P , de longueur angulaire $d\theta$ (voir Figure 6.4). Cette anneau est chargée par des efforts normaux (N), tranchants (T), par des moments fléchissants (M_f) et par la force $f(\theta, t)$.

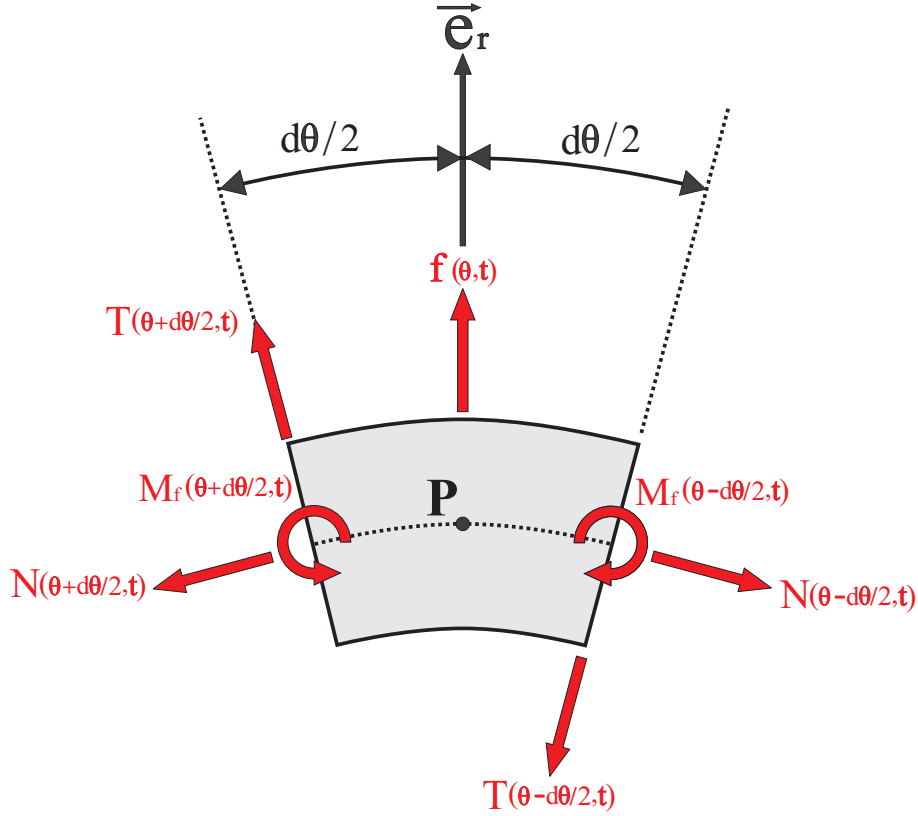


FIGURE 6.4 – Équilibre d'une portion de poutre de longueur angulaire $d\theta$

L'équation de la dynamique écrite le long de l'axe \vec{e}_r au point P peut se mettre sous forme :

$$\begin{aligned} \rho SR \cdot d\theta \cdot \frac{d^2 u_r}{dt^2}(\theta, t) = & \left[T\left(\theta + \frac{d\theta}{2}, t\right) - T\left(\theta - \frac{d\theta}{2}, t\right) \right] \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \\ & \left[N\left(\theta + \frac{d\theta}{2}, t\right) + N\left(\theta - \frac{d\theta}{2}, t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + f(\theta, t) \cdot d\theta \end{aligned} \quad (6.4)$$

avec $d\theta \ll 1$. Nous pouvons réécrire l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{dT(\theta, t)}{d\theta} - N(\theta, t) + f(\theta, t) = \rho SR \cdot \frac{d^2 u_r}{dt^2}(\theta, t) \quad (6.5)$$

Les expressions des efforts normaux et tranchants ainsi que les expressions des moments fléchissants ont déjà été explicités au Chapitre 5. En utilisant notamment l'Équation 5.28 qui précise l'expression analytique de ces différentes forces, nous obtenons :

$$\frac{GkS}{R} \cdot \left(\frac{du_r}{d\theta}(\theta, t) - u_\theta(\theta, t) + R \cdot \omega(\theta, t) \right) - \frac{ES}{R} \cdot \left(u_r(\theta, t) + \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta, t) \right) + f(\theta, t) = \rho SR \cdot \frac{d^2 u_r}{dt^2}(\theta, t) \quad (6.6)$$

6.3.3 Écriture des champs de déplacements dans la base modale et obtention du système différentielle à résoudre

Nous allons écrire les champs de déplacements, c'est à dire les deux champs de translations u_r et u_θ et le champ de rotation ω , dans la base modale que nous avons présenté dans le chapitre précédent. Ainsi, en utilisant la méthode de séparation de variables pour l'écriture des champs de déplacements dans la base de vecteurs propres représentant la base modale [Gieras et al., 2005] [Lesueur, 1988], nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} u_r(\theta, t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) \cdot u_{r,k}(\theta) \\ u_\theta(\theta, t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) \cdot u_{\theta,k}(\theta) \\ \omega(\theta, t) = \sum_{k=1}^K q_k(t) \cdot \omega_k(\theta) \end{cases} \quad (6.7)$$

avec :

- $q_k(t)$: Le déplacement temporel (unité m) associé au mode k
- $u_{r,k}(\theta)$: La base modale de u_r associé au mode k (sans unité)
- $u_{\theta,k}(\theta)$: La base modale de u_θ associé au mode k (sans unité)
- $\omega_k(\theta)$: La base modale de ω associé au mode k (unité m^{-1})
- K : Le nombre de mode considéré dans la base

L'Équation 6.6 peut désormais se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho SR \cdot \sum_{k=1}^K q_k''(t) \cdot u_{r,k}(\theta) = \\ \sum_{k=1}^K q_k(t) \cdot \left[\frac{GkS}{R} \cdot (u'_{r,k}(\theta) - u_{\theta,k}(\theta) + R \cdot \omega_k(\theta)) - \frac{ES}{R} \cdot (u_{r,k}(\theta) + u'_{\theta,k}(\theta)) \right] + f(\theta, t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Les bases modales doivent vérifier la propriété fondamentale d'être des bases modales orthogonales [Lesueur, 1988] [Lalanne et al., 1986]. Soit k un entier relatif différent de n . La propriété sus-cité peut se traduire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,k}(\theta) \cdot d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} u_{\theta,n}(\theta) \cdot u_{\theta,k}(\theta) \cdot d\theta = 0 \\ \int_0^{2\pi} \omega_n(\theta) \cdot \omega_k(\theta) \cdot d\theta = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

On peut donc simplifier l'Équation 6.8 en multipliant par $u_{r,n}(\theta)$ et en intégrant pour utiliser la propriété sur l'orthogonalité des bases modales. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho SR \cdot q_n''(t) \cdot \int_0^{2\pi} u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot d\theta + \\ q_n(t) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{GkS}{R} \cdot (u_{r,n}(\theta) \cdot u'_{r,n}(\theta) - u_{r,n}(\theta) \cdot u_{\theta,n}(\theta) + R \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot \omega_n(\theta)) \right. \\ \left. - \frac{ES}{R} \cdot (u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,n}(\theta) + u_{r,n}(\theta) \cdot u'_{\theta,n}(\theta)) \right] \cdot d\theta \end{aligned} \quad (6.10)$$

Continuons la simplification de l'expression précédente. Pour cela, nous allons, dans un premier temps, appeler M la masse de l'anneau ($M = 2\pi\rho SR$) puis la réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot d\theta}{M \cdot \int_0^{2\pi} u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot d\theta} &= q_n''(t) + \frac{2\pi \cdot q_n(t)}{M \cdot \int_0^{2\pi} u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot d\theta} \times \\ &\int_0^{2\pi} \left[-\frac{GkS}{R} \cdot (u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,n}'(\theta) - u_{r,n}(\theta) \cdot u_{\theta,n}(\theta) + R \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot \omega_n(\theta)) + \right. \\ &\left. \frac{ES}{R} \cdot (u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,n}(\theta) + u_{r,n}(\theta) \cdot u_{\theta,n}'(\theta)) \right] \cdot d\theta \end{aligned} \quad (6.11)$$

Le terme en $q_n(t)$ représente la pulsation de résonance associée au mode n . Nous allons appeler ce terme ω_n :

$$q_n''(t) + \omega_n \cdot q_n(t) = \frac{2\pi}{M} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot d\theta}{\int_0^{2\pi} u_{r,n}(\theta) \cdot u_{r,n}(\theta) \cdot d\theta} \quad (6.12)$$

Précédemment, nous avons montré que pour chaque résonance associé au mode $n \neq 0$ à la pulsation ω_n , il y avait deux modes doubles d'ovalisations déphasés entre eux d'un angle de $\pi/2$. Ainsi, la base modale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} n = 0 : & u_{r,0}(\theta) = 1 \\ n \geq 2 : & \begin{cases} u_{r,n,1}(\theta) = \cos(n\theta) \\ u_{r,n,2}(\theta) = \sin(n\theta) \end{cases} \end{cases} \quad (6.13)$$

On obtient donc le système d'équations différentielles à résoudre suivant :

$$\begin{cases} n = 0 : & q_0''(t) + \omega_0 \cdot q_0(t) = \frac{1}{M} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot d\theta \\ n \geq 2 : & \begin{cases} q_{n,1}''(t) + \omega_n \cdot q_{n,1}(t) = \frac{2}{M} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta \\ q_{n,2}''(t) + \omega_n \cdot q_{n,2}(t) = \frac{2}{M} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot \sin(n\theta) \cdot d\theta \end{cases} \end{cases} \quad (6.14)$$

Une fois les équations différentielles résolues, le déplacement temporelle et spatiale du stator se mets sous la forme suivante :

$$u_r(\theta, t) = q_0(t) + \sum_{n=2}^N [q_{n,1}(t) \cdot \cos(n\theta) + q_{n,2}(t) \cdot \sin(n\theta)] \quad (6.15)$$

6.3.4 Amortissement des modes propres de résonances

Pour construire le système d'équations différentielles permettant d'obtenir l'expression analytique du déplacement temporelle et spatiale de la surface extérieure du stator d'une machine électrique lorsque cette dernière est chargée par des contraintes radiales, nous avons émis l'hypothèse que le stator était un système conservatif, c'est à dire un système où il n'y a pas de pertes d'énergies. Cela s'est traduit dans les équations différentielles par l'absence de termes dissipatifs (les termes en q_n') pour prendre en compte l'amortissement des modes

propres. Pour remédier à cela, nous allons introduire ce terme dans les équations précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \quad q_0''(t) + 2 \cdot \xi_0 \cdot \omega_0 \cdot q_0'(t) + \omega_0 \cdot q_0(t) = \frac{1}{M} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot d\theta \\ n \geq 2 : \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{n,1}''(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot q_{n,1}'(t) + \omega_n \cdot q_{n,1}(t) = \frac{2}{M} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta \\ q_{n,2}''(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot q_{n,2}'(t) + \omega_n \cdot q_{n,2}(t) = \frac{2}{M} \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta, t) \cdot \sin(n\theta) \cdot d\theta \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

L'estimation de l'amortissement des modes propres d'un stator de machine électrique a fait l'objet de différentes études pour arriver à plusieurs formulations. Nous pouvons citer notamment des méthodes expérimentales comme dans [Clénet et al., 1994] et [Camus et al., 1997] ou des méthodes empiriques, méthodes que nous allons utiliser ici, comme dans [Lesueur, 1988], [Gieras et al., 2005] et [Yang, 1981] qui proposent l'expression suivante pour les amortissements :

$$\xi_n = \frac{1}{2\pi} \cdot (2.76 \times 10^{-5} \cdot f_n + 0.062) \quad (6.17)$$

avec f_n la fréquence de résonance du mode n associé.

6.4 Application au cas où la vitesse de rotation est constante

A présent, nous allons appliquer le modèle, plus précisément nous allons résoudre le système d'équations différentielles, dans le cas où la fonction force $f(\theta, t)$ représente les contraintes magnétiques radiales à l'interface entre le stator et l'entrefer de la machine lorsque le rotor tourne à une vitesse Ω constante. Pour présenter un peu plus cette fonction force, voir la Figure 6.5. Nous allons supposer que cette force s'applique en K point(s) de la machine, chaque point représentant une dent statorique correspondant à la moyenne de la force sous cette dernière. En tout, il y a donc $2N_s$ points où la force s'applique ($K = 2N_s$).

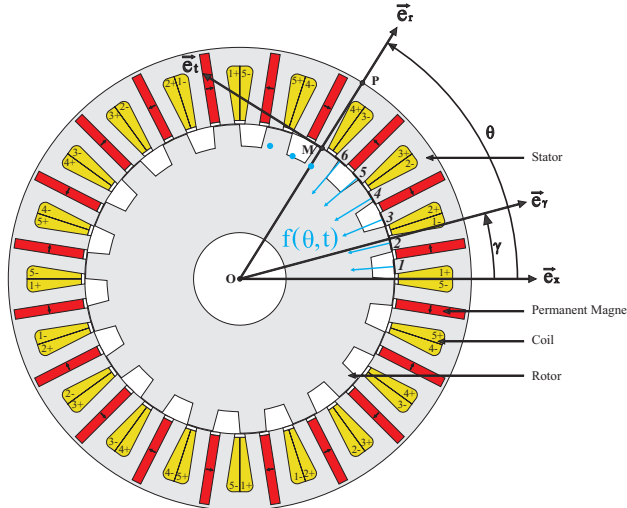


FIGURE 6.5 – Répartition des efforts magnétique dans une machines pentaphasée

Dans ce cas particulier, spatialement, cette fonction $f(\theta, t)$ est une somme de diracs. De plus, temporellement, c'est une fonction périodique avec ω_e la pulsation du fondamental de la contrainte magnétique. Pour rappel, dans le cas des MCF-AP, cette pulsation vaut :

$$\omega_e = \frac{2\pi}{60} \cdot N_r \cdot \Omega \quad (6.18)$$

avec Ω en tr/min et N_r le nombre de dent rotorique.

$f(\theta, t)$ peut donc se mettre sous la forme d'une série de Fourier sous la forme suivante :

$$f(\theta, t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h}) \cdot \delta(\theta - \theta_k) \quad (6.19)$$

avec H le nombre d'harmonique(s) considéré(s) pour l'écriture de cette fonction, $F_{k,h}$ et $\varphi_{k,h}$ respectivement l'amplitude et la phase de l'harmonique h , θ_k la position angulaire où la force est appliquée et δ la fonction de Kronecker. Sous ces hypothèses, le système d'équations différentielles à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \quad q_0''(t) + 2 \cdot \xi_0 \cdot \omega_0 \cdot q_0'(t) + \omega_0 \cdot q_0(t) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h}) \\ \\ n \geq 2 : \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{n,1}''(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot q_{n,1}'(t) + \omega_n \cdot q_{n,1}(t) = \\ \quad \frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h}) \cdot \cos(n\theta_k) \\ \\ q_{n,2}''(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot q_{n,2}'(t) + \omega_n \cdot q_{n,2}(t) = \\ \quad \frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h}) \cdot \sin(n\theta_k) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.20)$$

Pour résoudre ces équations différentielles, nous allons supposer des conditions initiales nulles :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0(0) = 0 \\ q_0'(0) = 0 \end{array} \right. \\ \\ n \geq 2 : \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{n,1}(0) = 0 \\ q_{n,1}'(0) = 0 \\ q_{n,2}(0) = 0 \\ q_{n,2}'(0) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.21)$$

Les solutions du système d'équations différentielles sont :

$$\begin{aligned}
n = 0 : \quad & \left\{ \begin{aligned}
q_0(t) &= e^{-m \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[A_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot t) + B_0 \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot t) \right] + \\
& \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \frac{(\omega_0^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \cos((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_0 \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_0 \cdot \sin((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_0^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot (2 \cdot \xi_0^2 - 1) \cdot \omega_0^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_0^4} \\
A_0 &= -\frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \frac{(\omega_0^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \cos(\varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_0 \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_0 \cdot \sin(\varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_0^4} \\
B_0 &= \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \xi_0^2}} \cdot A_{n,2} - \\
& \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2}} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \frac{- (\omega_0^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \sin(\varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_n \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_0 \cdot \cos(\varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_0^4}
\end{aligned} \right. \\
n \geq 2 : \quad & \left\{ \begin{aligned}
q_{n,1}(t) &= e^{-m \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[A_{n,1} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) + B_{n,1} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) \right] + \\
& \frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \frac{(\omega_n^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \cos((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_n \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_n \cdot \sin((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot (2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \omega_n^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_n^4} \cdot \cos(n \cdot \theta_k) \\
A_{n,1} &= -\frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \frac{(\omega_n^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \cos(\varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_n \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_n \cdot \sin(\varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_n^4} \cdot \cos(n \cdot \theta_k) \\
B_{n,1} &= \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot A_{n,1} - \\
& \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \frac{- (\omega_n^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \sin(\varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_n \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_n \cdot \cos(\varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_n^4} \cdot \cos(n \cdot \theta_k) \\
q_{n,2}(t) &= e^{-m \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[A_{n,2} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) + B_{n,2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) \right] + \\
& \frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \frac{(\omega_n^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \cos((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_n \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_n \cdot \sin((h-1) \cdot \omega_e \cdot t + \varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot (2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \omega_n^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_n^4} \cdot \sin(n \cdot \theta_k) \\
A_{n,2} &= -\frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \frac{(\omega_n^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \cos(\varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_n \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_n \cdot \sin(\varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_n^4} \cdot \sin(n \cdot \theta_k) \\
B_{n,2} &= \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot A_{n,2} - \\
& \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \frac{- (\omega_n^2 - (h-1)^2 \cdot \omega_e^2) \cdot \sin(\varphi_{k,h}) + 2 \cdot \xi_n \cdot (h-1) \cdot \omega_e \cdot \omega_n \cdot \cos(\varphi_{k,h})}{(h-1)^4 \cdot \omega_e^4 + 2 \cdot (h-1)^2 \cdot \omega_n^2 \cdot \omega_e^2 + \omega_n^4} \cdot \sin(n \cdot \theta_k)
\end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

6.5 Application au cas où la vitesse de rotation est variable

Nous allons maintenant étudier un deuxième cas particulier : celui où le rotor est entraîné en rotation à une vitesse variable. Pour donner quelques exemples d'utilisation de ce mode de fonctionnement, nous pouvons citer le cas où le rotor est en phase d'accélération avant d'atteindre sa vitesse de croisière ou bien le cas où sa charge est fluctuante. Dans ce mode fonctionnement là, malgré le fait que le rotor ait une vitesse variable quelconque, les contraintes magnétiques peuvent toujours s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier. En effet, ces efforts restent périodiques par rapport à la position angulaire du rotor γ . Nous pouvons donc les exprimer sous la forme suivante :

$$f(\theta, t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos(N_r \cdot \gamma(t) + \varphi_{k,h}) \cdot \delta(\theta - \theta_k) \quad (6.23)$$

avec $\gamma(t)$ la position du rotor à l'instant t qui est, de manière générale, quelconque. Le système d'équations différentielles à résoudre devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \quad q_0''(t) + 2 \cdot \xi_0 \cdot \omega_0 \cdot q_0'(t) + \omega_0 \cdot q_0(t) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos(N_r \cdot \gamma(t) + \varphi_{k,h}) \\ \\ n \geq 2 : \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{n,1}'(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot q_{n,1}'(t) + \omega_n \cdot q_{n,1}(t) = \\ \frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos(N_r \cdot \gamma(t) + \varphi_{k,h}) \cdot \cos(n\theta_k) \\ \\ q_{n,2}'(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot q_{n,2}'(t) + \omega_n \cdot q_{n,2}(t) = \\ \frac{2}{M} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos(N_r \cdot \gamma(t) + \varphi_{k,h}) \cdot \sin(n\theta_k) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.24)$$

Sauf cas très particulier, ce système d'équations différentielles ne peut être résolu analytiquement dans le cas où $\gamma(t)$ est quelconque. La méthode que nous allons utiliser pour contourner ce problème et ainsi obtenir, tout de même, une expression formelle du déplacement temporel et spatial, consiste à approximer la fonction force par des fonctions linéaires par morceaux puis à résoudre le système d'équations différentielles sur chacun des différents segments. Nous allons appeler :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \quad f_0(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos(N_r \cdot \gamma(t) + \varphi_{k,h}) \\ \\ n \geq 2 : \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{n,1}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos(N_r \cdot \gamma(t) + \varphi_{k,h}) \cdot \cos(n\theta_k) \\ \\ f_{n,2}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H F_{k,h} \cdot \cos(N_r \cdot \gamma(t) + \varphi_{k,h}) \cdot \sin(n\theta_k) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Soit u la fonction Heaviside et T la période découpage du segment que l'on suppose très petite devant les périodes de variations de la fonction contrainte. Les trois fonctions précédentes peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \quad f_0(t) \simeq \sum_{m=1}^M [A_{0,m} \cdot (t - (m-1) \cdot T) + B_{0,m}] \cdot (u(t - (m-1) \cdot T) - u(t - m \cdot T)) \\ \\ n \geq 2 : \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{n,1}(t) \simeq \sum_{m=1}^M [A_{n,1,m} \cdot (t - (m-1) \cdot T) + B_{n,1,m}] \cdot (u(t - (m-1) \cdot T) - u(t - m \cdot T)) \\ \\ f_{n,2}(t) \simeq \sum_{m=1}^M [A_{n,2,m} \cdot (t - (m-1) \cdot T) + B_{n,2,m}] \cdot (u(t - (m-1) \cdot T) - u(t - m \cdot T)) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.26)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \\ n \geq 2 : \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} A_{0,m} = \frac{f_0(m \cdot T) - f_0((m-1) \cdot T)}{T} \\ B_{0,m} = f_0((m-1) \cdot T) \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{n,1,m} = \frac{f_{n,1}(m \cdot T) - f_{n,1}((m-1) \cdot T)}{T} \\ B_{n,1,m} = f_{n,1}((m-1) \cdot T) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{n,2,m} = \frac{f_{n,2}(m \cdot T) - f_{n,2}((m-1) \cdot T)}{T} \\ B_{n,2,m} = f_{n,2}((m-1) \cdot T) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.27)$$

En considérant à nouveau des conditions initiales nulles comme précédemment, les solutions du système d'équations différentielles sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \\ n \geq 2 : \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q_0(t) = \sum_{m=1}^M q_{0,m}(t) \cdot (u(t - (m-1) \cdot T) - u(t - m \cdot T)) \\ q_{n,1}(t) = \sum_{m=1}^M q_{n,1,m}(t) \cdot (u(t - (m-1) \cdot T) - u(t - m \cdot T)) \\ q_{n,2}(t) = \sum_{m=1}^M q_{n,2,m}(t) \cdot (u(t - (m-1) \cdot T) - u(t - m \cdot T)) \end{array} \right. \quad (6.28)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \\ n \geq 2 : \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q_{0,m}(t) = e^{-\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \left[A_{0,m} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot t) + B_{0,m} \cdot \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot t) \right] + \\ \frac{1}{M \cdot T \cdot \omega_0^3} \cdot [-2 \cdot \xi_0 \cdot f_0(m \cdot T) + f_0(m \cdot T) \cdot (t + T - m \cdot T) \cdot \omega_0 + f_0((m-1) \cdot T) \cdot (2 \cdot \xi_0 - \omega_0 \cdot t + m \cdot \omega_0 \cdot T)] \\ q_{n,1,m}(t) = e^{-\xi_n \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[A_{n,1,m} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) + B_{n,1,m} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) \right] + \\ \frac{2}{M \cdot T \cdot \omega_n^3} \cdot [-2 \cdot \xi_n \cdot f_{n,1}(m \cdot T) + f_{n,1}(m \cdot T) \cdot (t + T - m \cdot T) \cdot \omega_n + f_{n,1}((m-1) \cdot T) \cdot (2 \cdot \xi_n - \omega_n \cdot t + m \cdot \omega_n \cdot T)] \\ q_{n,2,m}(t) = e^{-\xi_n \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \left[A_{n,2,m} \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) + B_{n,2,m} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot t) \right] + \\ \frac{2}{M \cdot T \cdot \omega_n^3} \cdot [-2 \cdot \xi_n \cdot f_{n,2}(m \cdot T) + f_{n,2}(m \cdot T) \cdot (t + T - m \cdot T) \cdot \omega_n + f_{n,2}((m-1) \cdot T) \cdot (2 \cdot \xi_n - \omega_n \cdot t + m \cdot \omega_n \cdot T)] \end{array} \right. \quad (6.29)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 : \\ n \neq 0 : \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} m = 0 : \left\{ \begin{array}{l} A_{0,1} = -\frac{1}{M \cdot T \cdot \omega_0^3} \cdot [-2 \cdot \xi_0 \cdot f_0(T) + (2 \cdot \xi_0 + \omega_0 \cdot T) \cdot f_0(0)] \\ B_{0,1} = \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \xi_0^2}} \cdot A_{0,1} - \frac{1}{M \cdot T \cdot \omega_0^3 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2}} \cdot [f_0(T) - f_0(0)] \end{array} \right. \\ m \neq 0 : \left\{ \begin{array}{l} A_{0,m+1} = A_{0,m} + (f_0((m-1) \cdot T) - 2 \cdot f_0(m \cdot T) + f_0((m+1) \cdot T)) \times \\ \frac{e^{-\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_0^2 - 1) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot m \cdot T) \right)}{\sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot M \cdot T \cdot \omega_0^3} \\ B_{0,m+1} = B_{0,m} + (f_0((m-1) \cdot T) - 2 \cdot f_0(m \cdot T) + f_0((m+1) \cdot T)) \times \\ \frac{e^{-\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_0^2 - 1) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot m \cdot T) \right)}{\sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot M \cdot T \cdot \omega_0^3} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}
& n \geq 2 : \left\{ \begin{array}{l} m = 0 : \\ m \neq 0 : \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A_{0,1,1} = -\frac{2}{M \cdot T \cdot \omega_n^3} \cdot [-2 \cdot \xi_n \cdot f_{n,1}(T) + (2 \cdot \xi_n + \omega_n \cdot T) \cdot f_{n,1}(0)] \\ B_{0,1,1} = \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot A_{0,1,1} - \frac{2}{M \cdot T \cdot \omega_n^3 \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot [f_{n,1}(T) - f_{n,1}(0)] \\ A_{0,2,1} = -\frac{2}{M \cdot T \cdot \omega_n^3} \cdot [-2 \cdot \xi_n \cdot f_{n,2}(T) + (2 \cdot \xi_n + \omega_n \cdot T) \cdot f_{n,2}(0)] \\ B_{0,2,1} = \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot A_{0,2,1} - \frac{2}{M \cdot T \cdot \omega_n^3 \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2}} \cdot [f_{n,2}(T) - f_{n,2}(0)] \\ A_{0,1,m+1} = A_{0,1,m} + (f_{n,1}((m-1) \cdot T) - 2 \cdot f_{n,1}(m \cdot T) + f_{n,1}((m+1) \cdot T)) \times \\ e^{-\xi_n \cdot \omega_n \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) \right) \\ \frac{\sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot M \cdot T \cdot \omega_0^3}{e^{-\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) \right)} \\ B_{0,1,m+1} = B_{0,1,m} + (f_{n,1}((m-1) \cdot T) - 2 \cdot f_{n,1}(m \cdot T) + f_{n,1}((m+1) \cdot T)) \times \\ e^{-\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) \right) \\ \frac{\sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot M \cdot T \cdot \omega_0^3}{e^{-\xi_n \cdot \omega_n \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) \right)} \\ A_{0,2,m+1} = A_{0,2,m} + (f_{n,2}((m-1) \cdot T) - 2 \cdot f_{n,2}(m \cdot T) + f_{n,2}((m+1) \cdot T)) \times \\ e^{-\xi_n \cdot \omega_n \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) \right) \\ \frac{\sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot M \cdot T \cdot \omega_0^3}{e^{-\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) \right)} \\ B_{0,2,m+1} = B_{0,2,m} + (f_{n,2}((m-1) \cdot T) - 2 \cdot f_{n,2}(m \cdot T) + f_{n,2}((m+1) \cdot T)) \times \\ e^{-\xi_0 \cdot \omega_0 \cdot m \cdot T} \cdot \left((2 \cdot \xi_n^2 - 1) \cdot \cos(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) + 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \cdot m \cdot T) \right) \\ \frac{\sqrt{1 - \xi_0^2} \cdot M \cdot T \cdot \omega_0^3} \end{array} \right. \quad (6.31)
\end{aligned}$$

6.6 Puissance acoustique rayonnée par la structure statorique

Dans cette partie, l'objectif avoué n'est pas de proposer un modèle d'acoustique complexe pour obtenir la puissance acoustique rayonnée par une machine à commutation de flux à aimants permanents mais, au contraire, de pouvoir chiffrer rapidement le bruit généré par une structure pour pouvoir la comparer facilement à une autre. Nous allons donc utiliser les résultats portant attrait à l'acoustique linéaire et invitons le lecteur à se reporter sur [Lesueur, 1988], [Cassoret, 1996], [Ait-Hammouda, 2005], [Hubert, 2001], [Royer and Dieulesaint, 2000] et [Royer and Dieulesaint, 2001] pour de plus amples explications. Nous allons faire deux hypothèses :

1. les particules d'air génèrent une pression acoustique instantanée p directement proportionnelle à leur vitesse de déplacement instantanée v . Ce coefficient de proportionnalité est appelé l'impédance acoustique et est noté Z :

$$p(\theta, t) = Z \cdot v(\theta, t) \quad (6.32)$$

2. la vitesse des particules d'air se trouvant sur la surface extérieure du stator se déplacent à la même vitesse que la vitesse radiale de ce stator :

$$v(\theta, t) = \frac{\partial u_r}{\partial t}(\theta, t) \quad (6.33)$$

L'impédance acoustique peut se mettre sous la forme :

$$Z = \rho \cdot c \quad (6.34)$$

avec ρ la masse volumique de l'air et c sa célérité. On peut montrer qu'à $20^\circ C$, l'impédance acoustique vaut environ $Z = 408 \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$. La pression efficace en fonction de la position s'écrit alors :

$$p_{rms}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(\theta, t) \cdot dt} \quad (6.35)$$

La pression totale est alors :

$$P = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} p_{rms}(\theta) \cdot d\theta \quad (6.36)$$

Finalement le niveau de bruit se met sous la forme :

$$L_p = 20 \cdot \log\left(\frac{P}{P_S}\right) \quad (6.37)$$

avec : $P_S = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$.

6.7 Validation du modèle par comparaison avec la simulation par éléments finis et avec des mesures expérimentales

Comme cela a déjà été fait précédemment pour les deux autres modèles, nous allons valider notre modèle vibratoire - acoustique dans cette partie. Cette validation se fera en deux temps : tout d'abord en comparant les résultats obtenus avec des simulations éléments finis puis avec des mesures expérimentales.

6.7.1 Validation du modèle par comparaison avec la simulation éléments finis

Dans un premier temps, nous allons valider notre modèle en comparant les résultats obtenus avec ceux issus de la simulation éléments finis du logiciel ANSYS. Pour ce faire, nous avons modélisé une machine pentaphasée 20/18 dont l'allure est représentée sur la Figure 6.6. Pour pouvoir comparer correctement les deux modèles, plusieurs précautions doivent être prises en compte pour mener à bien cette validation :

1. Nous avons modélisé la même machine pour l'utiliser avec notre modèle analytique et avec le modèle numérique.
2. Le modèle vibratoire - acoustique est dépendant des résultats des autres modèles. Par conséquent, nous devons utiliser les mêmes entrées pour le modèle analytique comme pour le modèle éléments finis.

6.7. VALIDATION DU MODÈLE PAR COMPARAISON AVEC LA SIMULATION PAR ÉLÉMENTS FINIS ET AVEC DES MESURES EXPÉRIMENTALES

3. Les contraintes magnétiques utilisées pour ce modèle sont issues de notre modèle analytique magnéto-statique.
4. Les modes propres utilisés pour ce modèle sont issus de la simulation éléments finis du logiciel ANSYS.
5. Nous avons fixé un amortissement des modes constant égale à 1%.

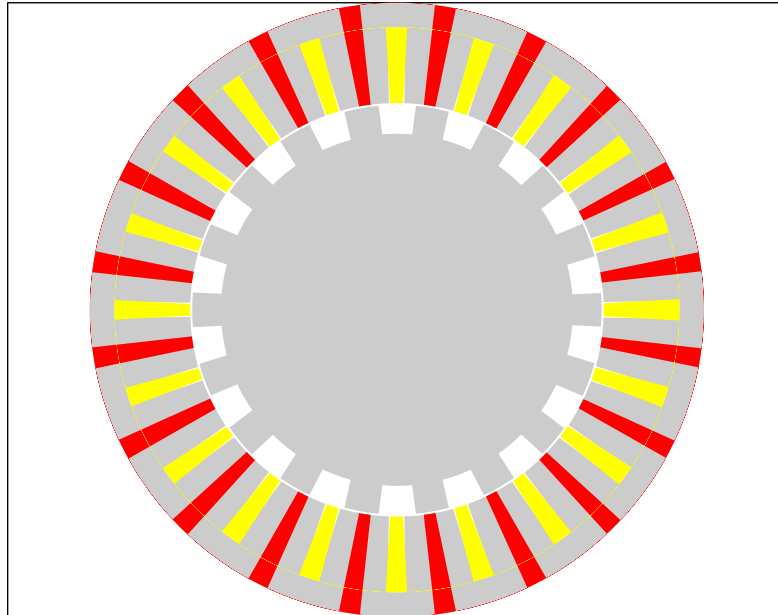


FIGURE 6.6 – Machine utilisée pour valider le modèle analytique vibratoire - acoustique par comparaison avec la simulation éléments finis

Nous avons validé les résultats pour différentes vitesses de rotation : $\Omega = 500, 1\ 000, 1\ 500$ et $2\ 000\ tr/min$. Ces vitesses correspondent à des excitations dont les fréquences du fondamental sont respectivement : $150, 300, 450$ et $600\ Hz$. De plus, le mode 2 a une fréquence de $559\ Hz$ et le mode 4 une fréquence de $2\ 232\ Hz$. La comparaison de notre modèle avec la simulation éléments finis est présentée sur la Figure 6.7 où nous avons tracé :

- La vitesse du déplacement temporel d'un point de la surface extérieure du stator prédite par notre modèle et prédite par la simulation éléments finis.
- La FFT de cette vitesse de déplacement, encore une fois prédite par notre modèle analytique et prédite par la simulation éléments finis.

En comparant les résultats obtenus à l'aide des deux modèles, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Il y a une bonne concordance entre le modèle analytique et la simulation éléments finis.
- Particulièrement, l'excitation est correctement estimé.
- De plus, lorsque la vitesse de rotation est de $\Omega = 2\ 000\ tr/min$, l'excitation est proche de la fréquence de résonance du mode 2. On voit bien la résonance qui apparaît.

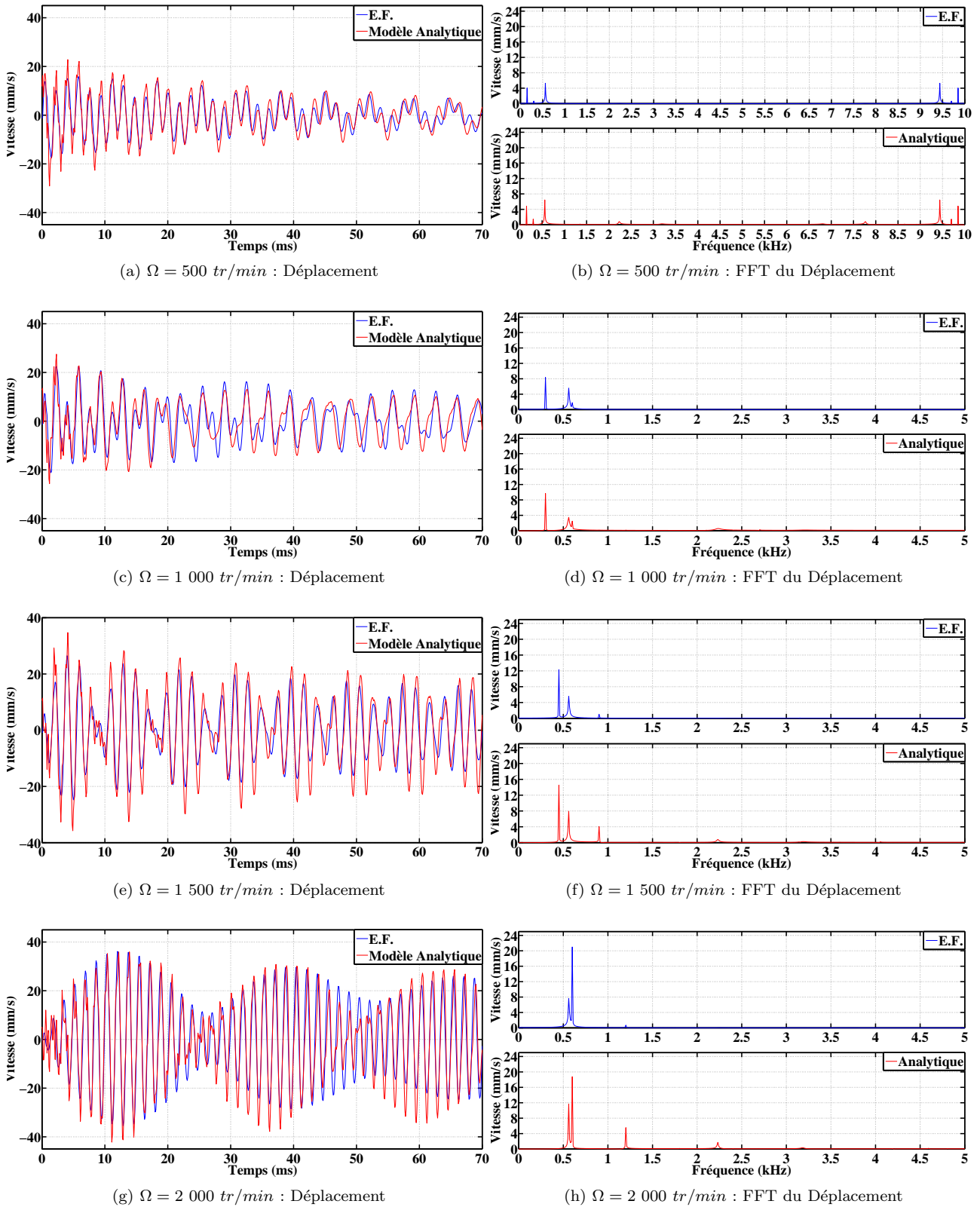


FIGURE 6.7 – Validation modèle analytique vibratoire - acoustique : comparaison avec la simulation éléments finis

6.7.2 Validation du modèle par comparaison avec des mesures expérimentales

A présent, passons à la validation de notre modèle par comparaison des résultats avec des mesures expérimentales. Pour cela, nous avons utilisé la MCF-AP pentaphasée 20/18 mise à notre disposition et qui a déjà été présentée précédemment (s'appuyer à nouveau sur la Figure 2.10). Nous avons placé un capteur piézoélectrique mesurant les accélérations d'un point placé sur la surface extérieure de son stator, au dessus d'une dent statorique. La machine a été couplé à une machine à courant continu reliée à une charge résistive. De plus, nous avons réalisé une commande en couple pour asservir les courants pour qu'ils restent en phase avec les F.E.M. à l'aide de contrôleurs par hystérésis (voir le schéma du montage sur la Figure 6.8)

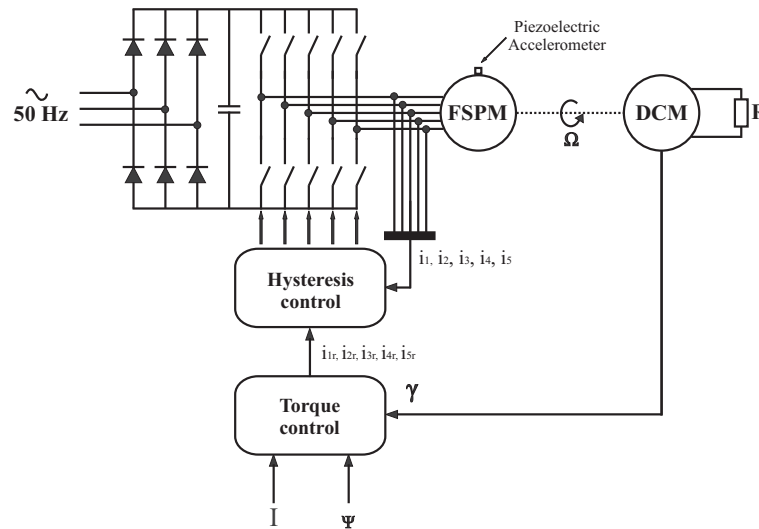


FIGURE 6.8 – Banc expérimental pour la mesure des vibrations de la machine à commutation de flux

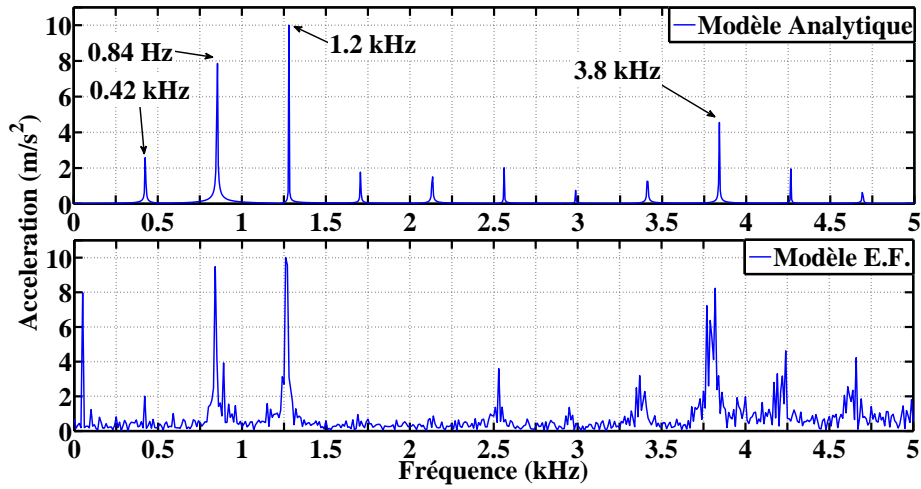
Les contraintes magnétiques ont été estimées à l'aide de notre modèle analytique magnéto-statique. Les modes propres ont été mesurés pour cette machine (se référer à nouveau au Chapitre 2). Nous utilisons ces deux résultats comme entrées pour notre modèle vibratoire - acoustique. Pour rappel, les fréquences des modes de la machine sont :

Mode 2	: 1.28 kHz
Mode 3-1	: 2.05 kHz
Mode 3-2	: 2.61 kHz
Mode 4	: 3.98 kHz

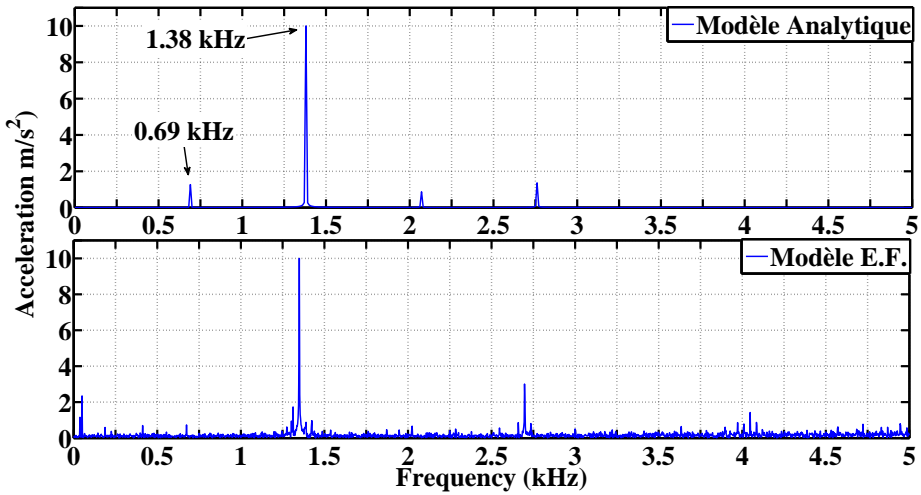
Nous allons procéder à la comparaison de la FFT de l'accélération d'un point de la surface extérieure du stator obtenues à l'aide de notre modèle analytique et à l'aide des mesures expérimentales dans trois cas différents que nous présentons sur la Figure 6.9 et qui sont :

- à $\Omega = 1\ 400\ tr/min$ en fonctionnement normal sur la Figure 6.9a.
- à $\Omega = 2\ 300\ tr/min$ en fonctionnement normal sur la Figure 6.9b.
- à $\Omega = 2\ 300\ tr/min$ en fonctionnement avec défaut sur la Figure 6.9c.

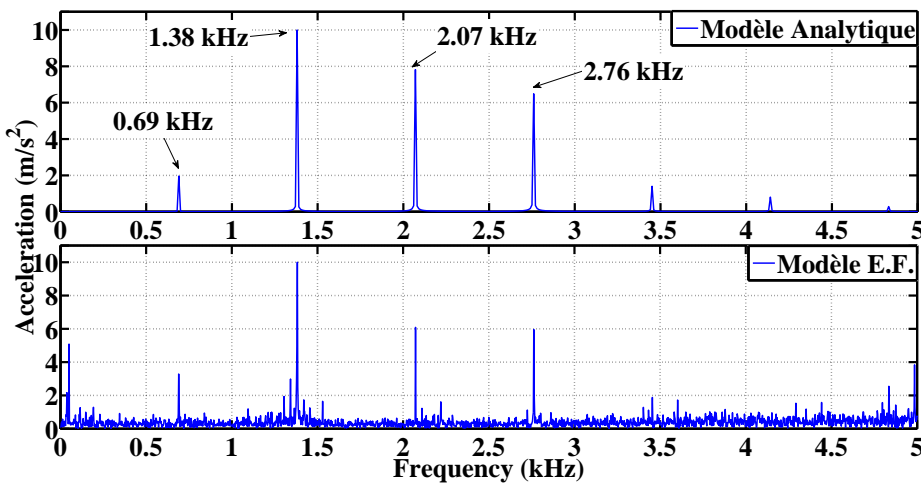
Concernant le troisième cas, le cas à $\Omega = 2\ 300\ tr/min$ en fonctionnement avec défaut, il s'agit de tester la robustesse de notre modèle en incorporant un défaut dans une bobine d'une des cinq phases. En effet, dans cette machine, nous rappelons que chaque phase est constituée de quatre bobines et nous avons décidé de choisir un des phases et d'alimenter que trois bobines sur quatre. Cela entraîne un déséquilibre des forces radiales qui se traduira, comme le verrons par la suite, par l'excitation des modes impairs également.



(a) $\Omega = 1400 \text{ tr/min}$ en fonctionnement normal



(b) $\Omega = 2300 \text{ tr/min}$ en fonctionnement normal



(c) $\Omega = 2300 \text{ tr/min}$ en fonctionnement avec défaut

FIGURE 6.9 – Validation modèle analytique vibratoire - acoustique : comparaison avec des mesures expérimentales

Nous allons procéder à la comparaison entre le modèle analytique et les mesures expérimentales et conclure sur la validation de notre modèle :

1. Concernant le cas à $\Omega = 1\,400\text{ tr/min}$ en fonctionnement normal :
 - Nous pouvons apercevoir que le spectre de l'accélération est constitué de raies multiples de la fréquence de l'excitation (420 Hz).
 - En particulier, les harmoniques à 420 Hz , 840 Hz , $1\,280\text{ Hz}$ et $3\,800\text{ Hz}$ sont correctement estimés.
 - Pour cette vitesse là, nous pouvons voir que les modes 2 et 4 possèdent des fréquences proches des harmoniques de l'excitation. Ces modes propres sont donc excités comme nous pouvons le voir sur les résultats des mesures et sur notre modèle.
 - Seuls les modes pairs sont excités puisque les contraintes magnétiques sont équilibrées.
2. Concernant le cas à $\Omega = 2\,300\text{ tr/min}$ en fonctionnement normal :
 - Cette fois-ci, le spectre de l'accélération est constitué de raies multiples de fréquences de l'excitation de 690 Hz .
 - Encore une fois, les contraintes magnétiques sont équilibrées donc seuls les modes paires peuvent être excités.
 - Le mode 2 est excité car sa fréquence est proche de la fréquence d'une des harmoniques de l'excitation.
 - Les accélérations de ce point du stator sont donc bien estimées.
3. Concernant le cas à $\Omega = 2\,300\text{ tr/min}$ en fonctionnement avec défaut :
 - Comme précédemment, le spectre de l'accélération est constitué de raies multiples de fréquences de l'excitation de 690 Hz .
 - En revanche, cette fois-ci, les contraintes magnétiques sont déséquilibrées. Les modes impairs peuvent donc être excités.
 - On peut voir que, en plus du mode 2, les deux modes doubles $3-1$ et $3-2$ sont également excités. Le modèle le prédit bien.
4. De plus, un raie à la fréquence de 50 Hz apparaît. Cette raie est due à un couplage de la machine avec son environnement.
5. De manière générale, en comparant les trois figures, on peut conclure :
 - Les harmoniques de l'excitation sont bien estimées.
 - Les contributions de chaque harmonique sur le comportement vibratoire sont également bien estimés.
 - Tout comme l'apparition des résonances du stator, que ce soit les modes paires lorsque les contraintes magnétiques sont équilibrées ou, en plus, les modes impaires lorsqu'il y a déséquilibres des forces.

6.8 Temps de calculs : comparaison entre le modèle analytique et le modèle éléments finis

Avant de conclure, et comme nous l'avons fait pour les deux autres modèles, nous allons effectuer une comparaison du temps de calculs pour l'exécution de notre modèle analytique et d'un modèle numérique réalisé à l'aide du logiciel ANSYS. La comparaison est présentée sur le Tableau 6.1.

Modèle	Analytique	E.F.
Temps de calcul	8.5 s	1h

TABLE 6.1 – Temps de calculs : comparaison entre le modèle analytique et le modèle éléments finis

Notre modèle nécessite un temps de calcul de 8.5s pour s'exécuter à comparer devant le modèle numérique qui mets, lui, 1h environ à s'exécuter. Il y a donc bien un gain important pour le temps de calcul.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle analytique permettant l'estimation des vibrations, mais également de la puissance acoustique rayonnée, des machines électriques en général et des MCF-AP en particulier. Pour parvenir à la construction de ce modèle, et ainsi obtenir le déplacement temporel et spatial de la surface extérieure du stator, nous avons écrit, puis résolu, les équations dynamiques de la mécanique du stator en les projetant dans une base modale formée par les modes propres d'ovalisations en deux dimensions de ce dernier. Cela a été fait dans deux cas de figures différents : dans le cas où la machine fonctionnait à vitesse constante et dans le cas où la machine fonctionnait à vitesse variable. De plus, en amont, il nous a fallu également connaître les différentes contraintes magnétiques agissant au sein de la structure ainsi que les différentes résonances du stator. Une fois ce modèle entièrement construit, il a été validé deux manières : tout d'abord en comparant les résultats avec ceux obtenus à l'aide de simulations éléments finis puis avec ceux obtenus par mesures expérimentales sur un prototype existant (une machine pentaphasée 20/18). De plus, nous avons justifié, comme cela a été fait précédemment, l'intérêt d'utiliser des formulations analytiques grâce à la comparaison du temps de calcul mis par le modèle analytique puis par le modèle numérique pour s'exécuter.

Ce chapitre vient clôturer la partie consacrée à la présentation du modèle analytique magnéto-acoustique permettant l'estimation de l'état magnétique, mécanique et acoustique des MCF-AP.

Troisième partie

**Optimisation Géométrique des
Machines Synchrones à Commutation
de Flux à Aimants Permanents basée
sur le Modèle Analytique
Magnéto-Acoustique**

Optimisation Géométrique des *MCF-AP*

Dans la partie précédente, nous nous sommes attachés à présenter un modèle multi-physique entièrement analytique permettant l'estimation des grandeurs magnétiques, mécaniques et acoustiques des *MCF-AP*. En particulier, à partir de la connaissance de la géométrie de la machine, des paramètres magnétiques et mécaniques des matériaux ainsi que de son mode de fonctionnement (alimentation et vitesse), le modèle est capable de calculer le couple électromagnétique moyen ainsi que la puissance acoustique rayonnée provenant de phénomènes magnétiques. Désormais, nous allons exploiter ce modèle afin de l'inclure dans une boucle d'optimisation peu coûteuse du point de vue de temps de calculs. C'est l'objectif affiché de cette partie. Nous allons concevoir une géométrie de la machine optimisée d'un point de vue magnéto-acoustique, c'est à dire une structure « silencieuse » possédant de bonnes performances électromagnétiques compatibles avec un cahier des charges. Pour rappel, le synoptique du modèle magnéto-acoustique a été introduit sur la Figure 3.1.

Dans un premier temps (Chapitre 8), nous commencerons par présenter l'algorithme d'optimisation que nous utiliserons par la suite. Il s'agira d'un algorithme d'optimisation stochastique itératif par essais particuliers. Les différentes notations utilisées dans tout le chapitre seront tout d'abord introduites, puis l'algorithme sera présenté.

Dans un deuxième temps (Chapitre 9), nous justifierons l'intérêt des optimisations multi-physiques en montrant les limites des optimisations purement magnétique sur le bruit acoustique générée par ces structures. Puis, nous analyserons l'influence des différents paramètres géométriques sur notre modèle analytique.

Enfin, dans une troisième partie (Chapitre 10), nous présenterons les résultats d'une optimisation géométrique des *MCF-AP* qui utilise le modèle développé dans ce mémoire de thèse.

Présentation de l'Optimisation Géométrique des *MCF-AP*

8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'algorithme d'optimisation que nous allons utiliser par la suite. Cet algorithme utilisera le modèle que nous avons présenté précédemment, que nous considérerons donc comme une boîte noire (Figure 8.1) avec un vecteur paramètres d'entrée E , un vecteur paramètres de sortie S , un vecteur paramètres internes de réglage P nécessaire à la bonne exécution du modèle et un vecteur paramètres de contrainte C .

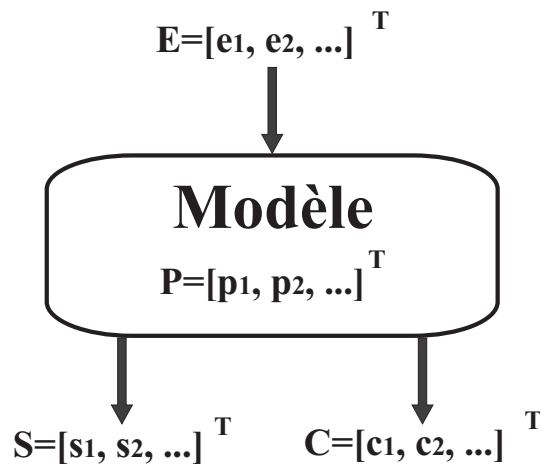


FIGURE 8.1 – Présentation générale du modèle sous forme « boîte noire »

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir les différents paramètres de ce modèle qui seront utilisés par la suite (Section 8.2). Puis nous présenterons de manière générale l'optimisation et notamment l'algorithme utilisé (Section 8.3).

8.2 Définition des différents paramètres

8.2.1 Vecteur paramètre d'entrée E

Puisque nous allons effectuer une optimisation géométrique pour différentes structures de *MCF-AP*, les paramètres d'entrée du modèle sont des dimensions géométriques de la machine. Nous gardons les mêmes notations que celles introduites au Chapitre 4 présentant le modèle magnéto-statique et notamment la Figure 4.7 et l'Annexe B, Section B.3.

Nous n'allons pas agir sur toute la géométrie de la machine. Pour se fixer un cahier des charges, le volume de la machine restera constant. Certaines dimensions vont donc rester fixes et sont par conséquent rangées dans

le vecteur paramètre de réglage P . Notamment :

- l'entrefer : $e = 0.5 \text{ mm}$
- le rayon extérieure : $R_{se} = 75 \text{ mm}$
- la longueur active de la machine : $L = 40 \text{ mm}$

L'optimisation sera également effectuée sur des structures différentes de *MCF-AP*. Par conséquent, d'autres paramètres seront fixes pour une optimisation donnée et seront modifiées manuellement pour les différentes optimisations. Notamment :

- Le nombre de phases : Q
- le nombre de dents statoriques : N_s
- le nombre de dents rotorique : N_r

Le vecteur paramètres d'entrée E , représentatif de la géométrie de la machine, est :

$$E = [\epsilon_1 \quad P_{hdr} \quad P_r \quad \epsilon_3 \quad \epsilon_4 \quad P_b]^T \quad (8.1)$$

avec :

- ϵ_1 l'ouverture angulaire de la zone $(1)_i$. Pour rappel ce paramètre définit l'ouverture angulaire de la dent rotorique ($= 1 - \epsilon_1$).
- P_{hdr} un paramètre qui est défini comme étant le rapport entre la longueur de la dent rotorique et sa hauteur.
- P_r un paramètre qui est défini comme étant le rapport entre le diamètre rotorique et le diamètre statorique.
- ϵ_3 l'ouverture angulaire de l'aimant permanent.
- ϵ_4 l'ouverture angulaire de l'emplacement des bobines.
- P_b un paramètre qui est défini comme étant le rapport entre la hauteur de l'emplacement des bobines et la largeur du stator.

et :

$$\begin{cases} P_{hdr} = \frac{2\pi}{N_r} \cdot (1 - \epsilon_1) \cdot \frac{R_{re}}{R_{re} - R_{ri}} \\ P_r = \frac{R_{re}}{R_{se}} \\ P_b = \frac{R_b - R_{si}}{R_{se} - R_{si}} \end{cases} \quad (8.2)$$

8.2.2 Vecteur paramètres de sortie S

L'optimisation que nous allons effectuer est une optimisation bi-objectifs magnéto-acoustique. Les deux grandeurs que nous voudrions optimiser seront les deux grandeurs du vecteur paramètres de sortie S , à savoir le couple électromagnétique moyen sur une période électrique C_{moy} et la puissance acoustique rayonnée provenant de phénomènes magnétiques L_p . Le vecteur paramètres de sortie S s'écrit alors :

$$S = [L_p \quad C_{moy}]^T \quad (8.3)$$

Pour rappel, le couple électromagnétique est obtenu par la démarche développée au Chapitre 4, Section 4.8.2. La puissance acoustique rayonnée est elle obtenue par l'approche proposée au Chapitre 6, Section 6.6.

8.2.3 Vecteur paramètres de réglage P

Lors de la présentation des trois sous-modèles (magnéto-statique, modes propres et vibro-acoustique), de nombreux paramètres de réglages ont été mis en évidence. Nous nous proposons ici d'en faire une synthèse. Le vecteur paramètres de réglage se met sous la forme :

$$P = [[p_1]^T \quad [p_2]^T \quad [p_3]^T]^T \quad (8.4)$$

avec p_1 le vecteur paramètres du modèle magnéto-statique, p_2 le vecteur paramètres du modèle modes propres du stator et p_3 le vecteur paramètres du modèle vibro-acoustique. A noter que certains sont communs à plusieurs modèles. Par exemple, les dimensions fixes de la machine interviennent aussi bien dans le modèle magnéto-statique que pour le modèle modes propres du stator.

Modèle magnéto-statique

Le vecteur p_1 contient tous les paramètres de réglages du modèle magnéto-statique. Ces paramètres sont :

- Les paramètres géométrique fixes qui ont déjà été présentés précédemment.
- Les paramètres d'alimentation de la machine, à savoir :
 - La densité de courant injecté dans les différentes bobines
 - Le déphasage entre les F.E.M. et le courant
- Les paramètres magnétiques des différents matériaux, à savoir :
 - $\mu_3 = 1$, la perméabilité des aimants permanents.
 - $\mu_4 = 1$, la perméabilité des bobinages.
- Le nombre d'harmoniques dans l'écriture de la série de Fourier pour les différentes zones de la machine, à savoir :
 - $N = 100$, le nombre d'harmoniques dans l'entrefer de la machine.
 - $K = 20$, le nombre d'harmoniques dans chacune des autres zones de la machine.
- Les différents paramètres de position du rotor pour avoir un fonctionnement complet sur une période électrique, à savoir :
 - $\gamma = 0$, la position initiale du rotor.
 - $\gamma = 2\pi/N_r$, la position finale du rotor.
 - Le pas de rotation du rotor (0.5°).

Modèle modes propres du stator

Le vecteur p_2 contient tous les paramètres de réglages du modèle modes propres du stator. Ces paramètres sont :

- Les mêmes dimensions géométriques fixes que dans le modèle magnéto-statique.
- Les caractéristiques mécaniques des matériaux du stator.
 - Le stator ne contient pas de culasse extérieure en aluminium.
 - Les caractéristiques mécaniques du fer et des aimants permanents sont les mêmes. A savoir, le module de Young est de 200 GPa , le coefficient de Poisson est de 0.3 et la masse volumique est de $7\,800\text{ kg/m}^3$.
 - Le bobinage est pris en considération.
- Le modèle utilisé est le modèle utilisant la cinématique de Timoshenko. Le bobinage et les dents statoriques sont modélisés comme des masses ponctuelles. Le modèle utilisé a été noté $S_{T,M}$ dans le Chapitre 5 (voir Section 5.5.3)
- Le nombre de modes propres à déterminer. Nous allons estimer tous les modes dont les fréquences sont inférieures à 20 kHz .

Modèle vibro-acoustique

Le vecteur p_3 contient tous les paramètres de réglages du modèle vibro-acoustique. Ces paramètres sont :

- La vitesse de rotation de la machine. Suivant que la vitesse soit constante ou non, le modèle utilisé est différent. Pour rappel, ces deux modèles ont été présentés au Chapitre 6, avec vitesse constante en Section 6.4 et vitesse variable en Section 6.5.
- Pour l'écriture des contraintes magnétiques, nous avons choisi de retenir les dix premiers harmoniques.
- Les caractéristiques acoustiques de l'air sont :
 - $c = 340\text{ m/s}$, la célérité du son dans l'air.
 - $\rho = 1.2\text{ kg/m}^3$, la masse volumique de l'air.

8.2.4 Vecteur paramètre de contrainte C

Le calcul de l'état magnéto-acoustique des *MCF-AP*, et notamment le calcul de l'état magnétique, doit être réalisé avec la plus grande précaution pour ne pas se retrouver avec des résultats complètement aberrant. En effet, le modèle a été construit pour des matériaux magnétiques linéaires et non saturables. Par conséquent, si le niveau d'induction est trop élevé, nous pouvons nous retrouver avec des machines saturées. Il faut donc le prévoir dans notre modèle afin de pouvoir rejeter ces machines là. Les différentes contraintes vont ainsi être écrites de telle sorte que lorsqu'elles sont positives, la machine sera rejetée.

Contraintes sur le niveau d'induction

Nous allons observer le niveau d'induction dans les machines à deux endroits différents qui semblent propices à présenter une saturation magnétique : au niveau de l'entrefer et au niveau de la culasse externe (voir Figure 8.2). Les machines dont l'induction à l'un de ces deux endroits dépassent $B_{max} = 1.8 T$ seront rejetées

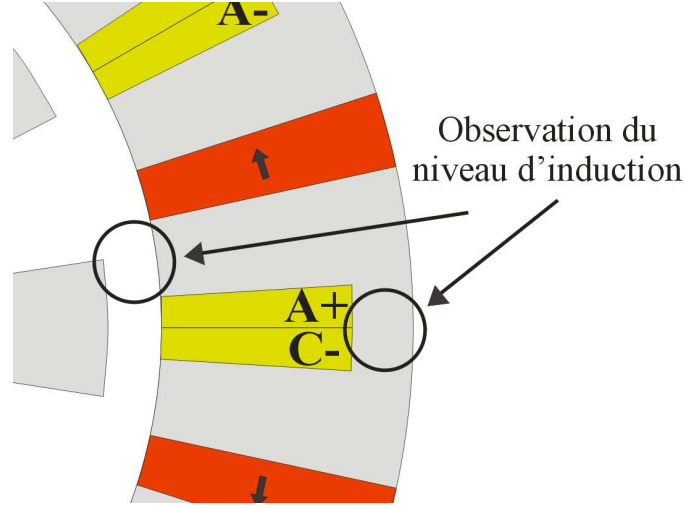


FIGURE 8.2 – Observation du niveau d'induction

Contraintes sur le niveau d'induction au niveau de l'entrefer de la machine

Dans le modèle magnéto-statique, la zone correspondante est notée (2). Cette contrainte, que l'on va noter c_1 s'exprime sous la forme suivante :

$$c_1 = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left[B_r^{(2)} \left(r = \frac{R_{re} + R_{si}}{2}, \theta \right) \right] - B_{max} \quad (8.5)$$

Ainsi, lorsque c_1 est positif, le niveau d'induction a dépassé B_{max} et la machine devra être rejetée.

Contraintes sur le niveau d'induction au niveau de la culasse de la machine

Nous ne connaissons pas, à priori, le niveau d'induction dans cette zone car le matériau magnétique est le fer statorique. Néanmoins, nous pouvons en avoir une estimation. Effet, nous connaissons le potentiel vecteur au niveau des bobinages ainsi qu'à l'extérieur de la machine (que nous avons supposé nulle). Par conséquent, nous pouvons écrire l'induction orthoradiale moyenne dans la culasse du fer statorique en supposant une variation linéaire du potentiel vecteur A pour les N_s zones :

$$A_{fer,m} \left(r, \theta = \frac{2\pi}{N_s} \cdot (m-1) \right) = \frac{A_{\theta,m}^{(4)} \left(r = R_b, \theta = \frac{2\pi}{N_s} \cdot (m-1) \right)}{R_{se} - R_b} \cdot (R_{se} - r) \quad (8.6)$$

$$B_{moy,culasse,m} = \frac{1}{R_{se} - R_b} \cdot A_{\theta,m}^{(4)} \left(r = R_b, \theta = \frac{2\pi}{N_s} \cdot (m-1) \right) \quad (8.7)$$

La contrainte c_2 s'exprime alors :

$$c_2 = \frac{1}{R_{se} - R_b} \cdot \max_{m \in [1, \dots, N_s]} \left[A_{\theta,m}^{(4)} \left(r = R_b, \theta = \frac{2\pi}{N_s} \cdot (m-1) \right) \right] - B_{max} \quad (8.8)$$

Contraintes sur le couple

Nous allons ajouter deux contraintes sur le couple :

- Les machines dont le couple moyen C_{moy} est trop faible (inférieur à 0.25 N.m) seront rejetées.
- Les machines dont l'ondulation de couple ΔC est supérieure à 100% doivent être rejetées.

Cela s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{cases} c_3 &= -C_{moy} + C_{min} \\ c_4 &= \Delta C - 100 \end{cases} \quad (8.9)$$

Finalement, le vecteur contrainte C se mets sous la forme :

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T \quad (8.10)$$

8.3 Présentation de l'algorithme d'optimisation

Le modèle magnéto-acoustique qui a été défini précédemment est inclus dans un algorithme d'optimisation. L'objectif est de trouver la meilleure géométrie possible pour une structure *MCF-AP* afin de :

- Minimiser la puissance acoustique rayonnée par la structure statorique.
- Maximiser le couple électromagnétique moyen.

De plus, les machines testées lors de l'optimisation doivent respecter les différentes contraintes C que nous avons présentées. Nous allons donc réaliser une optimisation bi-objectifs sous contraintes.

8.3.1 Définition du problème d'optimisation

Afin de répondre au problème d'optimisation que nous avons défini, c'est à dire une minimisation de la puissance acoustique rayonnée par la structure statorique et une maximisation du couple électromagnétique moyen, nous allons minimiser la fonction objectif F suivante :

$$F = [L_p \quad ; \quad -C_{moy}]^T \quad (8.11)$$

Appelons \hat{E} l'optimum des paramètres d'entrées minimisant la fonction objectif F . Le problème d'optimisation bi-objectif sous contraintes sera donc défini par :

$$\boxed{\hat{E} = \arg \min_{E \in U / C \leq 0} F(E)} \quad (8.12)$$

avec U un ouvert de \mathbb{R}^n ($U \in \mathbb{R}^n$). Ici, $n = 6$. U définit donc le domaine de recherche des solutions pour les entrées E .

8.3.2 Optimisation par la méthode des essais particuliers

Devant la complexité du modèle magnéto-acoustique et donc du problème d'optimisation à résoudre, nous avons opté pour une métaheuristique d'optimisation à l'aide d'un algorithme stochastique itératif appelé « Optimisation par Essais Particulaires ». Cet algorithme a été mis en place par J. KENNEDY et R. EBERHART en 1995 [Kennedy and Eberhart, 1995] et s'inspire du monde du vivant en traduisant le comportement social d'individus (des particules) dans un groupe (essaim) en encourageant la collaboration entre particules dans la recherche d'un minimum.

Initialement, à l'itération $k = 0$, N_p particules se placent aléatoirement dans le domaine U de recherche des solutions pour les entrées E . Nous avons donc initialement N_p tirage aléatoire de E . La position à l'itération $k + 1$ est défini par :

$$\begin{cases} v_{k+1} &= \omega \cdot v_k + b_1 \cdot (E_{best,k} - E_k) + b_2 \cdot (E_{leader,k} - E_k) \\ E_{k+1} &= E_k + v_{k+1} \end{cases} \quad (8.13)$$

avec :

- E_k : vecteur d'entrées à l'itération k .
- E_{k+1} : vecteur d'entrées à l'itération $k + 1$.
- v_k : vecteur « vitesse » à l'itération k .
- v_{k+1} : vecteur « vitesse » à l'itération $k + 1$.
- ω : terme d'inertie. La particule a tendance à suivre sa trajectoire précédente.
- $E_{best,k}$: meilleure position enregistrée par la particule à l'itération k .
- b_1 : terme de rappel 1. La particule a tendance à revenir vers la meilleure position qu'elle a enregistrée. b_1 est tiré aléatoirement sur l'intervalle $[0, 1]$.
- $E_{leader,k}$: meilleure position de l'ensemble des particules.
- b_2 : terme de rappel 2. La particule a tendance à se diriger vers la meilleure position de l'ensemble des particules. b_2 est tiré aléatoirement sur l'intervalle $[0, 1]$.

L'algorithme d'optimisation utilisée dans ce mémoire de thèse pour résoudre notre problème d'optimisation a été codée à l'aide du logiciel MATLAB par J. AUBRY [Aubry, 2011].

8.3.3 Présentation de l'optimisation géométrique

Le synoptique de la procédure d'optimisation géométrique des *MCF-AP* basée sur des critères magnéto-acoustiques à l'aide de la méthode des essais particulaires est introduit sur la Figure 8.3

L'algorithme d'optimisation géométrique des structures *MCF-AP* par la méthode des essais particulaires sur des critères magnéto-acoustiques et basée sur un modèle entièrement analytique se déroule de la manière suivante :

- Initialement, l'algorithme tire aléatoirement N_p particules. Une particule correspond à un vecteur paramètre d'entrées E qui définit géométriquement la structure *MCF-AP*. Il y aura donc en tout N_p vecteurs E à l'itération $k = 0$ correspond à N_p géométries différentes de machines.
- Le modèle analytique magnéto-acoustique va ensuite estimer les caractéristiques magnéto-acoustiques de ces N_p machines en calculant à chaque fois le vecteur paramètre de sortie S et le vecteur paramètre de contrainte C . Pour rappel, le vecteur S comprend la puissance acoustique rayonnée par la structure statorique et le couple électromagnétique moyen. Le vecteur C , lui, comprend des contraintes sur le couple et sur le niveau d'induction dans la machine. Il y aura donc à l'itération $k = 0$, N_p vecteurs paramètres de sortie S et N_p vecteurs paramètres de contraintes C .
- A partir de la connaissance des N_p vecteurs S , l'algorithme estime les N_p vecteurs fonction coût F correspondants. Il s'agit de minimiser ces fonctions. Pour rappel, le vecteur F comprend la puissance acoustique rayonnée par la structure statorique et l'opposé du couple électromagnétique moyen.
- Les N_p vecteurs F et les N_p vecteurs C sont ensuite injectés dans l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire bi- objectif sous contraintes.
- Les machines calculées qui respectent les contraintes sont gardées. En revanche, les machines calculées qui ne respectent pas les contraintes sont rejetées.
- L'algorithme en déduit la nouvelle position des N_p particules à l'itération $k + 1$. Par conséquent, N_p nouveaux vecteurs d'entrées E sont générés à l'aide des équations traduisant la méthode des essais particulaires (Equation 8.13). Ces nouveaux vecteurs d'entrées sont injectés à nouveau dans le modèle analytique magnéto-acoustique qui présentera les « meilleures » machines possible pour un couple moyen désiré.
- les résultats obtenus à l'itération k sont enregistrés. Puisque les deux objectifs de la fonction coût F sont contradictoires, les solutions du problème d'optimisation se présenteront sous la forme d'un optimum au sens de Pareto. Il y aura donc un front de Pareto dans le plan Couple / Puissance acoustique.
- L'optimisation est basée sur un algorithme itératif et est exécuté N_i fois. Il tend vers un optimum global.

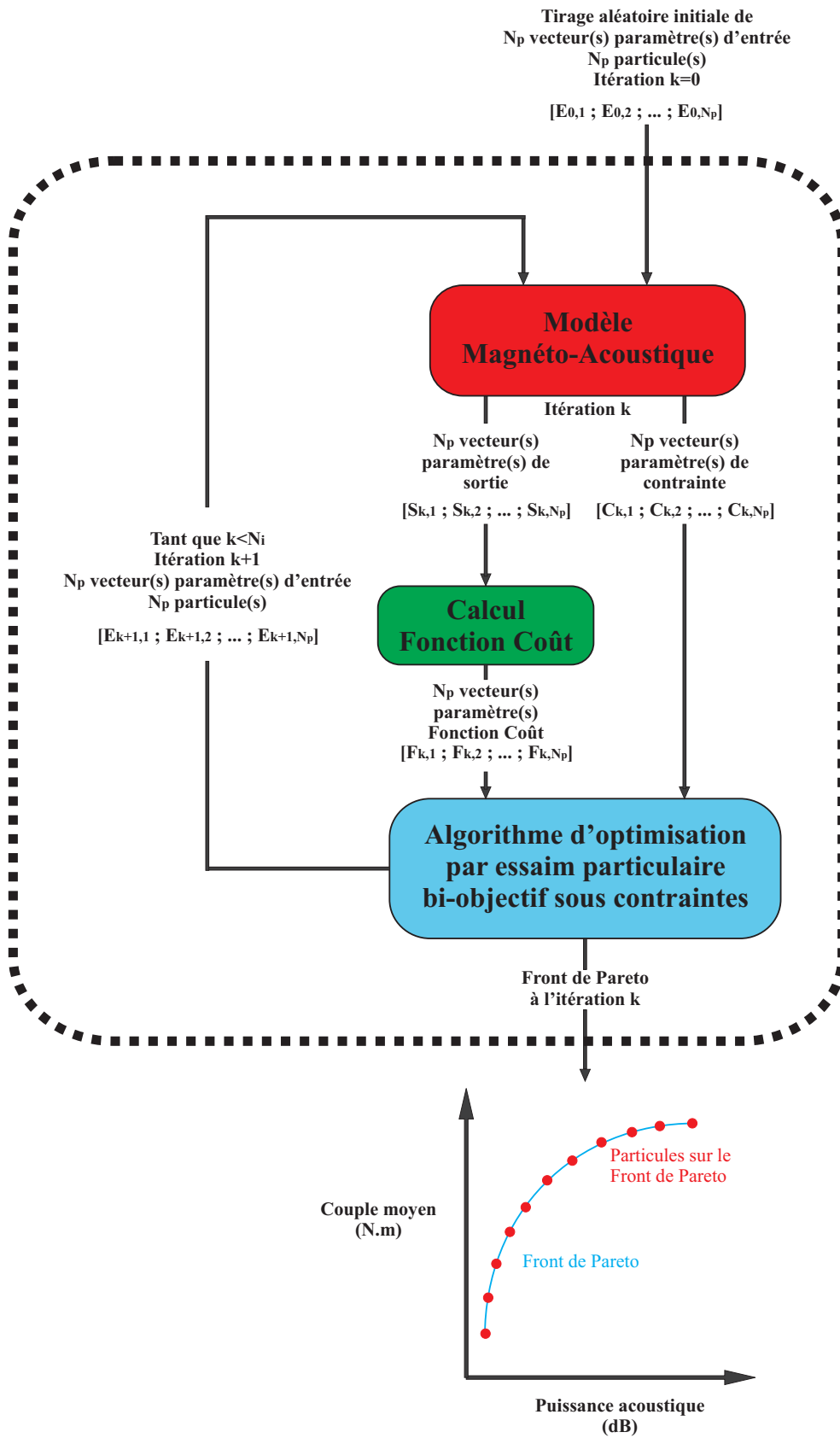


FIGURE 8.3 – Procédure d'optimisation géométrique basée sur des critères magnéto-acoustiques

Études Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de deux analyses que nous avons effectuées. La première consiste à montrer les limites des optimisations basées sur des critères exclusivement magnétiques pour la diminution du bruit acoustique et ainsi montrer l'intérêt d'une optimisation multi-physique (Section 9.1). La deuxième consiste, elle, à étudier l'influence des différents paramètres géométriques de la machine sur ses performances magnéto-acoustique (Section 9.2).

9.1 Limites des optimisations basées sur des critères exclusivement magnétiques

Avant de passer à la présentation des résultats issus d'optimisations géométriques multi-physiques basées sur notre modèle analytique magnéto-acoustique, nous allons dans un premier temps justifier, ici, leurs intérêts au regard des optimisations exclusivement magnétiques. En effet, l'un des critères pour dimensionner et obtenir des structures de machines électriques à aimants permanents silencieuses est de minimiser l'ondulation du couple. Nous allons montrer qu'il s'agit bien d'un critère de dimensionnement mais ce critère seul n'est pas suffisant.

Pour cela, nous réalisons une première optimisation suivant le même principe que l'algorithme présenté au chapitre précédent mais, cette fois-ci, nous ne considérons que le modèle magnéto-statique afin de ne prendre en compte que des critères magnétiques (voir Figure 9.1).

L'objectif est de trouver la meilleure géométrie de la machine afin de :

- Maximiser le couple électromagnétique moyen
- Minimiser l'ondulation de couple.

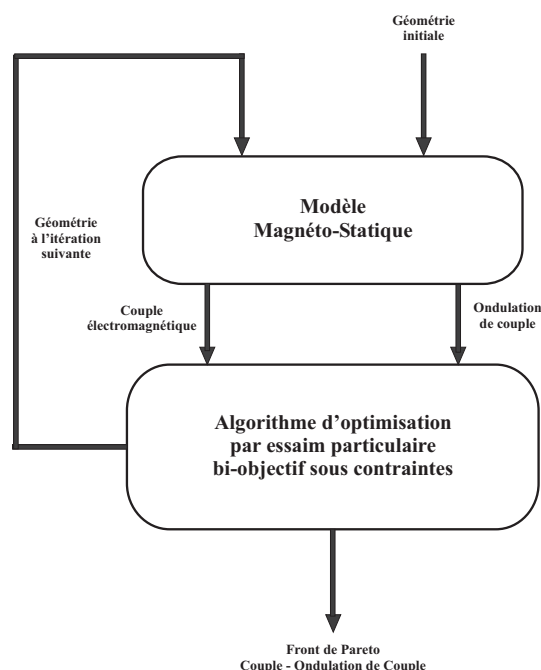


FIGURE 9.1 – Optimisation basée sur des critères magnétiques

La structure considérée est une *MCF-AP* triphasée 12/10. Pour pouvoir comparer les différentes machines, l'optimisation est réalisée à pertes Joule constantes. Les différents réglages fixes du modèle sont :

- L'entrefer de la machine qui est constant ($e = 0.5 \text{ mm}$).
- Le rayon extérieure de la machine qui est également constant ($R_{se} = 75 \text{ mm}$).
- La structure de la machine qui est une machine triphasée 12/10 ($N_r = 10, N_s = 12, Q = 3, P = 4$).
- La commande de la machine (les FEM et les courants sont toujours en phase).
- L'induction rémanente des aimants qui est de 0.36 T .
- Les pertes par effet Joule qui sont constantes et égales à 22 W .

Les paramètres de réglages de l'optimisation sont :

- Le nombre de particules qui est de 100 ($N_p = 100$).
- Le nombre d'itérations qui est de 250 ($N_i = 250$).

Les résultats de cette optimisation sont présentés sur la Figure 9.2. Le front de Pareto obtenu a été tracé dans le plan objectif, c'est à dire dans le plan Couple moyen / Ondulation de couple. Chaque machine obtenue sur cette courbe est bien un optimum au sens de Pareto. En effet, si on choisit deux machines sur ce front de Pareto, celle possédant une ondulation de couple plus importante aura nécessairement un couple moyen plus important également. Pour ces structures triphasées et pour une optimisation à pertes joules constantes, définissant ainsi le niveau de courant dans les bobinages, la machine avec le couple moyen maximal (pratiquement 4 N.m) possède une ondulation de couple d'environ 12.5% .

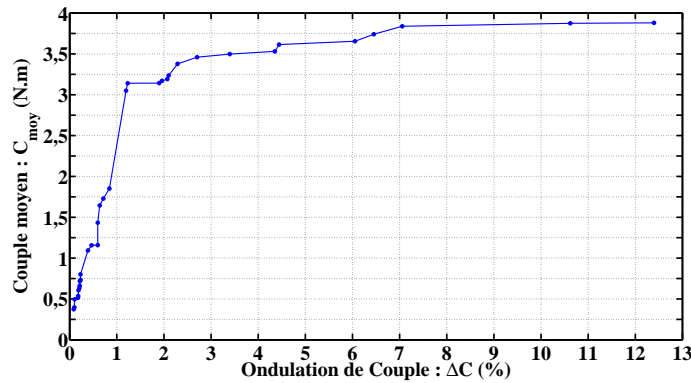


FIGURE 9.2 – Résultat d'une optimisation magnétique : Front de Pareto Couple moyen - Ondulation de couple

Analysons à présent ce qui se passe lorsque les machines obtenues à l'aide de cette optimisation exclusivement magnétiques sont injectées dans notre modèle magnéto-acoustique pour une vitesse fixe ($\Omega = 1\ 000 \text{ tr/min}$). Les résultats sont présentés sur la Figure 9.3 avec les mêmes machines représentées cette fois-ci dans le plan Couple moyen / Puissance acoustique rayonnée.

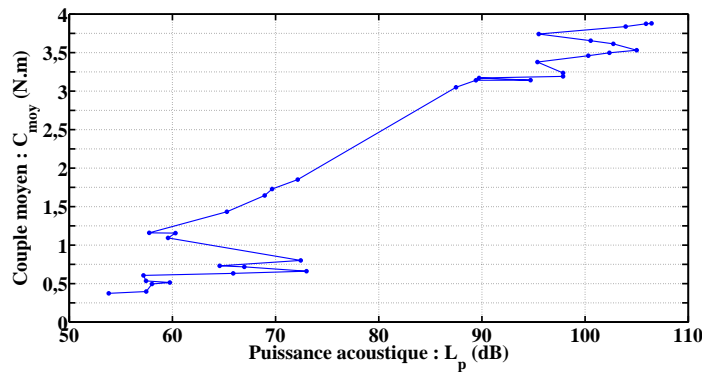


FIGURE 9.3 – Résultat d'une optimisation magnétique : Présentation des résultats dans le plan Couple - Puissance acoustique rayonnée

En analysant cette courbe, nous allons pouvoir proposer quelques conclusions sur l'intérêt des optimisations géométriques basées sur des critères magnéto-acoustiques :

- L'ondulation de couple est bien un critère à étudier pour obtenir des géométries de machines électriques silencieuses. En effet, sur la Figure 9.3, lorsque le couple électromagnétique moyen augmente, la puissance acoustique a « tendance » à augmenter également.
- Toutefois, nous remarquons que l'ondulation de couple n'est pas le seul critère. En effet, nous apercevons que, par moment, lorsque le couple électromagnétique moyen augmente, la puissance acoustique rayonnée diminue avant d'augmenter à nouveau. Par conséquent, réaliser une optimisation strictement magnétique pour diminuer le bruit générée par les *MCF-AP* n'est pas suffisante.
- L'autre critère pour diminuer le bruit est l'étude des modes de résonance de la structure, étude rendue possible par notre modèle magnéto-acoustique.

9.2 Influence de la géométrie sur les performances magnéto-acoustiques des *MCF-AP*

A présent, regardons l'influence de la géométrie d'une structure triphasée 12/10 de *MCF-AP* sur ses performances magnéto-acoustiques. Pour cela, nous allons partir d'une machine de base qui est représentée sur la Figure 9.4 et dont les dimensions sont données sur le Tableau 9.1. Nous allons modifier un à un les paramètres géométrique de cette machine. La vitesse de la machine sera fixée à $\Omega = 1\ 000$ tr/min.

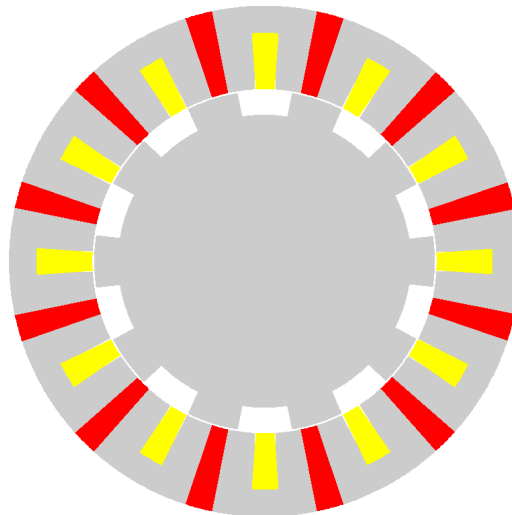


FIGURE 9.4 – Machine triphasée 12/10 de base

Grandeurs	Valeurs
N_r	10
Q	3
P	4
N_s	12
e	0.5 mm
R_{sc}	75 mm
R_{ri}	43 mm
R_{re}	50 mm
ϵ_1	0.5
R_{st}	50.5 mm
ϵ_3	0.195
ϵ_4	0.215
R_b	67 mm
L	40 mm
J_{eff}	5 A/mm ²
B_{rem}	0.36 T

TABLE 9.1 – Dimension de la machine triphasée 12/10 de base

9.2.1 Influence de l'ouverture angulaire de la dent rotorique

Commençons par analyser l'influence de l'ouverture angulaire de la dent rotorique sur les performances magnéto-acoustiques de la machine. Par là, nous entendons le couple électromagnétique moyen et la puissance acoustique rayonnée par la structure statorique. Les résultats sont présentés sur la Figure 9.5. Sur cette figure sont représentées en rouge les performances magnéto-acoustiques de la machine de base (celle de la Figure 9.4).

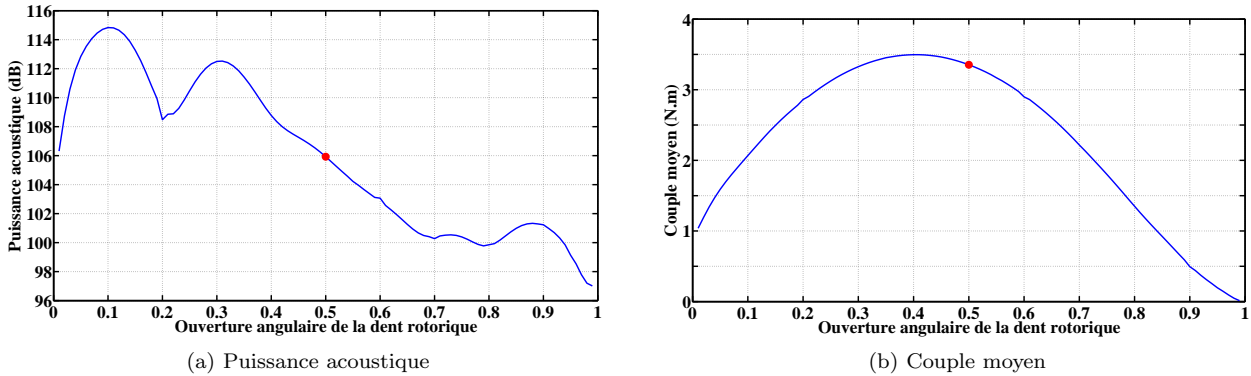


FIGURE 9.5 – Variations des grandeurs magnéto-acoustique en fonction de l'ouverture angulaire rotorique

L'analyse de ces deux figures nous amène à formuler les conclusions suivantes :

- L'ouverture angulaire de la dent rotorique a une très forte influence sur les paramètres magnéto-acoustiques des *MCF-AP* puisque lorsque cette dernière varie, la puissance acoustique rayonnée et le couple électromagnétique varient également. L'ouverture angulaire est donc un paramètre majeur pour le dimensionnement de machines « performantes » et « silencieuses ».
- Lorsque l'ouverture angulaire de la dent rotorique augmente, la puissance acoustique rayonnée possède de multiples variations mais a une « tendance » à la décroissance, le minimum de cette puissance étant même atteint pour une ouverture angulaire proche de 1. Cette tendance s'explique par le fait que, lorsque la taille de la dent rotorique augmente, la répartition des forces magnétiques statoriques se fait sur une surface plus importante, conduisant ainsi à des contraintes surfaciques moins importantes. Néanmoins, nous remarquons que, malgré cette tendance à la décroissance, la puissance acoustique peut augmenter localement.
- Lorsque l'ouverture angulaire de la dent rotorique augmente, le couple moyen augmente tout d'abord avant de diminuer pour pratiquement s'annuler suivant une courbe en « cloche ». Le maximum du couple est atteint pour une ouverture angulaire de 0.4.

9.2.2 Influence de la hauteur de la dent rotorique

Continuons notre analyse en étudiant à présent l'influence de la hauteur de la dent rotorique en faisant varier uniquement R_{ri} . Les résultats sont présentés sur la Figure 9.6.

L'analyse de ces deux figures nous amène à formuler les conclusions suivantes :

- La hauteur de la dent rotorique n'a pratiquement aucune influence jusqu'à ce que le rapport entre R_{ri} et R_{re} atteigne 0.85. Au delà, il a une très forte influence.
- La puissance acoustique rayonnée est quasiment constante jusqu'à cette valeur puis va chuter. Cela s'explique par le fait qu'avant cette valeur, les contraintes magnétiques, localisées au niveau des dents statoriques, vont se concentrer lorsque ces dernières sont en vis à vis avec les dents rotorique. Puis, après cette valeur, comme le rotor devient de plus en plus lisse, les contraintes magnétiques vont avoir tendance à se répartir sur une plus grande surface et donc la puissance acoustique va diminuer.
- Le couple électromagnétique est lui aussi quasiment constant jusqu'à cette valeur puis va également chuter. Cela s'explique par le fait qu'avant cette valeur, les lignes de flux ne changent pas et passent pratiquement toutes par les dents rotoriques. Après cette valeur, le rotor a tendance à être très lisse et donc les lignes de flux vont de moins en moins passer par les dents. Le couple va donc se mettre à diminuer.

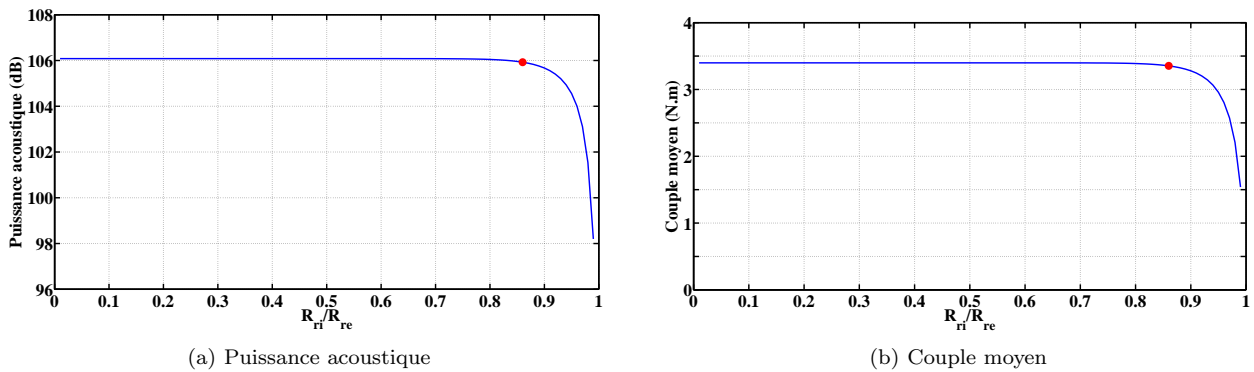


FIGURE 9.6 – Variations des grandeurs magnéto-acoustique en fonction de la hauteur de la dent rotorique

9.2.3 Influence de l'ouverture angulaire de la dent statorique

A ouverture angulaire des aimants permanents constante

Cette fois-ci, nous allons faire varier l'ouverture angulaire de la dent statorique en gardant constante l'ouverture angulaire des aimants permanents. Ainsi, c'est l'ouverture angulaire des bobinages qui va varier. Les résultats sont présentés sur la Figure 9.7. Sur cette figure ont été rajoutées en vert les machines qui saturent.

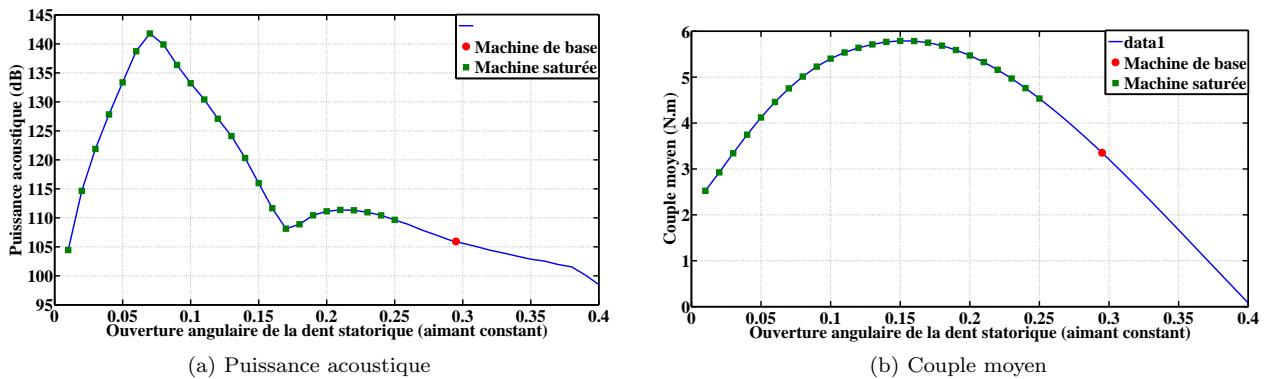


FIGURE 9.7 – Variations des grandeurs magnéto-acoustiques en fonction de l'ouverture angulaire de la dent statorique à ouverture angulaire des aimants permanents constante

L'analyse de ces deux figures nous amène à formuler les conclusions suivantes :

- Pour une ouverture angulaire de la dent statorique trop petite, il y a saturation magnétique. A partir d'une ouverture angulaire de 0.25, il n'y a plus saturation. Lors des optimisations, ces machines là seront rejetées car les résultats ne sont pas dignes de confiance.
- La puissance acoustique varie fortement jusqu'à une ouverture de 0.25 puis diminue au delà. Cette diminution s'explique par le fait que la taille de la dent augmente et donc la répartition des contraintes magnétiques se fait sur une surface plus grande. Il y a un maximum à 0.07 qui s'explique par la présence d'une résonance.
- Le couple électromagnétique augmente jusqu'à 0.15 puis diminue jusqu'à s'annuler pour une ouverture de 0.4 qui correspond à une disparition de la surface des bobinages.

A ouverture angulaire des bobinages constante

Faisons varier encore une fois l'ouverture angulaire de la dent statorique. En revanche, cette fois-ci, gardons constante l'ouverture angulaire des bobinages. Ainsi, c'est l'ouverture angulaire des aimants permanents qui va varier. Les résultats sont présentés sur la Figure 9.8.

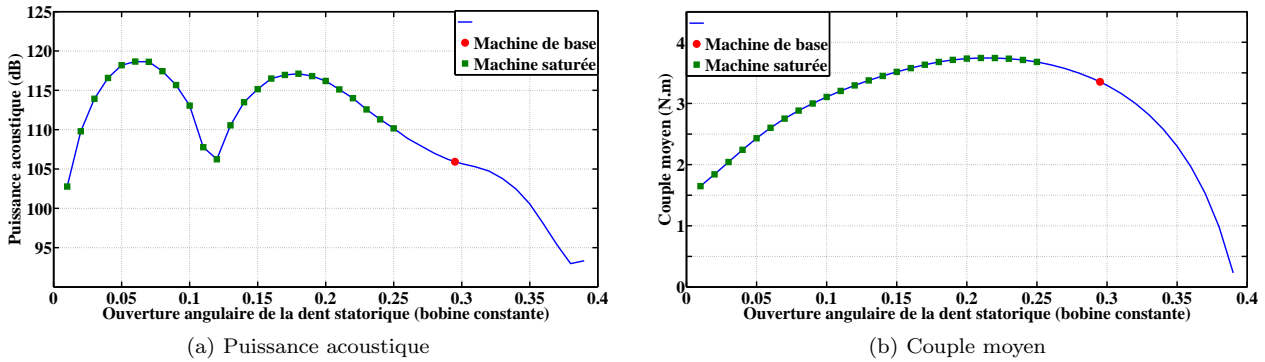


FIGURE 9.8 – Variations des grandeurs magnéto-acoustiques en fonction de l'ouverture angulaire de la dent statorique à ouverture angulaire des bobinages constante

L'analyse de ces deux figures nous amène à formuler les conclusions suivantes :

- A nouveau, certaines machines vont saturer.
- La puissance acoustique varie fortement au début avec deux résonances qui apparaissent : pour une ouverture angulaire de 0.07 et de 0.17. Après 0.17, la puissance acoustique diminue. L'explication est la même que précédemment.
- Le couple électromagnétique augmente jusqu'à 0.2 puis diminue pour pratiquement s'annuler vers 0.4.

9.2.4 Influence du rapport entre la taille du rotor et la taille du stator

Terminons notre étude en faisant varier cette fois-ci le rapport entre la taille du rotor et la taille du stator pour R_{se} constant. Les résultats sont proposés sur la Figure 9.9.

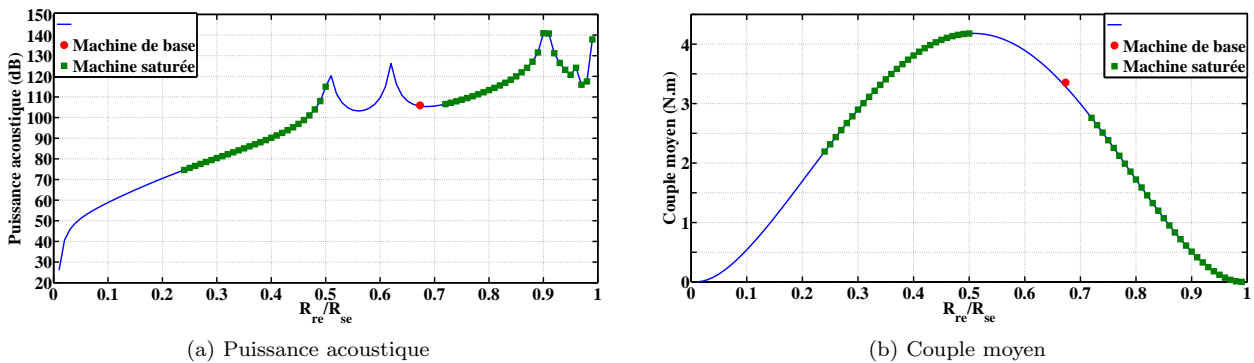


FIGURE 9.9 – Variations des grandeurs magnéto-acoustiques en fonction du rapport entre la taille du rotor et la taille du stator

L'analyse de ces deux figures nous amène à formuler les conclusions suivantes :

- A nouveau, certaines machines vont saturer.
- La puissance acoustique rayonnée a tendance à augmenter lorsque le rotor augmente. Il y a toutefois des résonances qui vont apparaître ceci étant lié à l'excitation des modes propres.
- Le couple électromagnétique augmente jusqu'à ce que le rapport entre R_{re} et R_{se} atteigne 0.5 puis va diminuer.

9.2.5 Conclusion sur l'influence des paramètres géométriques

Cette étude sur l'influence des paramètres géométriques sur les performances magnéto-acoustiques des *MCF-AP* montre que ces paramètres agissent la plupart du temps de manière contradictoire sur les objectifs de notre prochaine optimisation.

L'ouverture angulaire de la dent rotorique est un paramètre important dans l'optimisation géométrique des MCF-AP basée sur un modèle magnéto-acoustique puisque les deux fonctions objectifs varient fortement lorsque ce paramètre change.

- Pour une ouverture inférieure à 0.4, il est difficile de conclure. Lorsque l'ouverture angulaire de la dent rotorique augmente, la puissance acoustique peut augmenter ou diminuer. En revanche, le couple électromagnétique augmente.
- Pour une ouverture supérieure à 0.4, la puissance acoustique et le couple diminuent. Ce paramètre est donc, dans cette plage de variation, un paramètre qui rend les deux fonctions objectifs contradictoires.

La hauteur de la dent rotorique n'est un paramètre important à qu'à partir de $\frac{R_{ri}}{R_{re}} = 0.85$).

- Lorsque ce rapport est inférieur à 0.85, les deux fonctions objectifs sont constantes.
- Lorsque ce rapport est supérieur à 0.85 et augmente, la puissance acoustique et le couple diminuent. A nouveau, nous avons affaire à deux fonctions objectifs contradictoires.

L'ouverture angulaire de la dent statorique est un paramètre important également.

- Lorsque cette ouverture est inférieure à 0.25, il est difficile de conclure. La puissance acoustique varie fortement alors que le couple augmente puis diminue.
- Lorsque cette ouverture est supérieure à 0.25 et augmente, la puissance acoustique ainsi que le couple diminuent donc les fonctions objectifs sont contradictoires.

Enfin, le rapport entre la taille du rotor et la taille du stator, à rayon extérieur constant est également un paramètre important.

- Lorsque $\frac{R_{re}}{R_{se}}$ augmente mais reste inférieur à 0.5, la puissance acoustique et le couple augmentent. Nous avons donc deux objectifs contradictoires.
- Lorsque $\frac{R_{re}}{R_{se}}$ augmente encore, la puissance acoustique a tendance à augmenter et le couple a tendance à diminuer. Ici, nous avons deux objectifs analogues puisque pour avoir une puissance acoustique faible et un couple électromagnétique important il faut que $\frac{R_{re}}{R_{se}}$ soit proche de 0.5. A noter que nous avons parlé de tendance car lorsque nous faisons varier les dimensions du stator, des résonances peuvent apparaître, c'est le cas ici, et rendre plus complexe l'optimisation.

Nous avons montré que la plupart des paramètres géométriques de la machine agissaient de manières opposées sur les deux fonctions objectifs de notre optimisation. Nous pouvons donc déjà pressentir l'apparition d'un front de Pareto dans l'optimisation géométrique qui est présentée dans le chapitre suivant.

Résultats d'Optimisations Géométriques des *MCF-AP*

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté l'algorithme de l'optimisation géométrique des structures *MCF-AP* qui est basée sur le modèle analytique magnéto-acoustique que nous avons développé. Nous avons notamment introduit les différents paramètres géométriques d'entrées ainsi que les deux fonctions objectifs. Puis, nous avons justifié l'intérêt d'effectuer une telle optimisation en étudiant tout d'abord les limites des optimisations qui sont basées sur des critères exclusivement magnétiques puis en mettant en avant la complexité du modèle pour parvenir à des structures qui sont à la fois silencieuses et performantes. Désormais, il nous reste à présenter les résultats des différentes optimisations géométriques que nous avons effectuées.

L'optimisation géométrique est réalisée sur trois structures différentes de *MCF-AP* : une machine triphasée 12/10, une machine tétraphasée 16/12 et une machine pentaphasée 20/18. Dans un premier temps, nous allons détailler les différents paramètres utilisés durant les différentes optimisations que nous allons être amenées à présenter (Section 10.1). Puis, dans un deuxième temps, nous présenterons les résultats que nous avons obtenus pour des optimisations géométriques réalisées lors de fonctionnement à trois vitesses constantes différentes, à savoir à 1 000 tr/min, 2 000 tr/min et 3 000 tr/min (Section 10.2). Enfin, dans une troisième et dernière partie, nous présenterons les résultats que nous avons obtenus pour des optimisations qui ont été réalisées, cette fois-ci, lors d'un fonctionnement à vitesse variable (Section 10.3).

10.1 Réglages des différents paramètres d'optimisation

Nous présentons ici les différents paramètres de réglages que nous allons utiliser pour réaliser l'optimisation géométrique des structures *MCF-AP*. La plupart d'entre-eux ont déjà été introduits au chapitre précédent sur la présentation de l'algorithme d'optimisation par essais particuliers. Nous commençons par présenter le domaine de variation des variables d'entrées, définissant la géométrie de la machine, puis nous continuons en introduisant divers paramètres qui vont rester constants durant toutes les optimisations que nous allons être amenées à présenter.

10.1.1 Domaine de variation des variables d'entrées

Nous rappelons ici les paramètres d'entrées de l'algorithme d'optimisation. Ils ont déjà été plus amplement présentés précédemment au Chapitre 8, Section 8.2. Ces paramètres sont :

$$E = [\epsilon_1 \quad P_{hdr} \quad P_r \quad \epsilon_3 \quad \epsilon_4 \quad P_b]^T \quad (10.1)$$

Pour obtenir des machines géométriquement constructibles, nous avons opté pour faire varier ces paramètres suivant les intervalles suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = [0.1 \quad ; \quad 0.9] \\ P_{hdr} = [0.5 \quad ; \quad 2.5] \\ P_r = [0.1 \quad ; \quad 0.9] \\ \epsilon_3 = [0.05 \quad ; \quad 0.4] \\ \epsilon_4 = [0.05 \quad ; \quad 0.4] \\ P_b = [0.1 \quad ; \quad 0.9] \end{array} \right. \quad (10.2)$$

Ce choix de domaines de variations des paramètres d'entrées permet de balayer une très large gamme de machines, toutes différentes les unes des autres. Néanmoins, pour être en mesure pour pouvoir comparer correctement les performances des différentes machines proposées par l'algorithme, nous allons devoir imposer quelques paramètres constants.

10.1.2 Paramètres constants durant les différentes optimisations

La plupart des paramètres qui vont rester constants durant toutes les différentes optimisations ont déjà été présentés au chapitre précédent. Nous allons, ici, introduire les autres paramètres fixes, à savoir certaines paramètres géométriques, le mode d'alimentation des structures, l'aimantation des aimants permanents ainsi que les paramètres de l'optimisation.

Paramètres géométriques

Les optimisations géométriques qui seront réalisées se feront à volume constant, c'est à dire que nous allons fixer plusieurs paramètres, à savoir :

$$\begin{aligned} R_{se} &= 75 \text{ mm} & : & \text{ Rayon extérieur du stator} \\ L &= 40 \text{ mm} & : & \text{ Longueur active de la machine} \\ e &= 0.5 \text{ mm} & : & \text{ Taille de l'entrefer} \end{aligned}$$

Alimentation et induction rémanente des aimants

Toutes les machines seront alimentées par des courants sinusoïdaux en phase avec les différentes FEM correspondantes de telle sorte que la commande soit effectuée à couple maximal. De plus, les optimisations s'effectueront à pertes joules constantes $P_J = 22 \text{ W}$. La densité de courant efficace injectée dans une phase de la machine sera donc :

$$J_{eff} = \sqrt{\frac{P_J}{2N_s L K_b \rho S_{CU}}} \quad (10.3)$$

avec ρ la résistivité du cuivre, K_b le coefficient de bobinage et S_{CU} la surface de cuivre. Cette dernière grandeur se met sous la forme :

$$S_{CU} = \frac{\pi \cdot \epsilon_A}{N_s} \cdot \frac{R_b^2 - R_{si}^2}{2} \quad (10.4)$$

Le choix d'imposer ce niveau de pertes par effet Joules correspond aux pertes qu'il existe dans la machine pentaphasée étudiée au Chapitre 1 lorsque nous injectons une densité surfacique de courant de 5 A/mm^2 .

Nous allons fixer également l'induction rémanente des aimants permanents de toutes les machines qui seront étudiées : $B_{rem} = 0.36 \text{ T}$ (aimants en ferrites).

Paramètres de l'optimisation

Enfin, nous allons imposer les paramètres de l'optimisation comme le nombre de particules N_p par itération : $N_p = 100$. Ce veut dire qu'à chaque itération, nous allons tester les performances magnéto-acoustiques de 100 géométries différentes de *MCF-AP*.

10.2 Résultats des optimisations géométriques à vitesse fixe à $\Omega = 1\,000 \text{ tr/min}$

Entrons maintenant dans le vif du sujet. Dans cette partie, nous présentons les résultats de nos optimisations géométriques réalisées pour les trois structures *MCF-AP* ainsi que pour les trois vitesses constantes énoncées plus haut. Pour cela, les différentes optimisations ont été réalisées sur 100 itérations. Ainsi, à chaque fois, nous

avons testé les performances magnéto-acoustiques de 10 000 géométries de machines différentes.

Dans ce qui va suivre, nous allons :

- Présenter les résultats obtenus sur les trois structures pour les trois vitesses différentes.
- Comparer ces structures entre elles d'un point de vue magnéto-acoustique.
- Analyser l'influence des paramètres géométriques sur les fonctions objectifs.
- Présenter enfin des structures se trouvant sur les différents fronts de Pareto.

10.2.1 Présentation des résultats

Nous allons commencer par présenter les trois fronts de Pareto que nous avons obtenus pour cette première optimisation sur la Figure 10.1 pour les structures triphasées 12/10 (courbe tracée en bleu), tétraphasées 16/12 (courbe tracée en noire) et pentaphasées 20/18 (courbe tracée en rouge). A titre d'information, l'algorithme d'optimisation géométrique a trouvé 132 machines pour la structure triphasée, 95 machines pour la structure tétraphasée et 202 machines pour la structure pentaphasée.

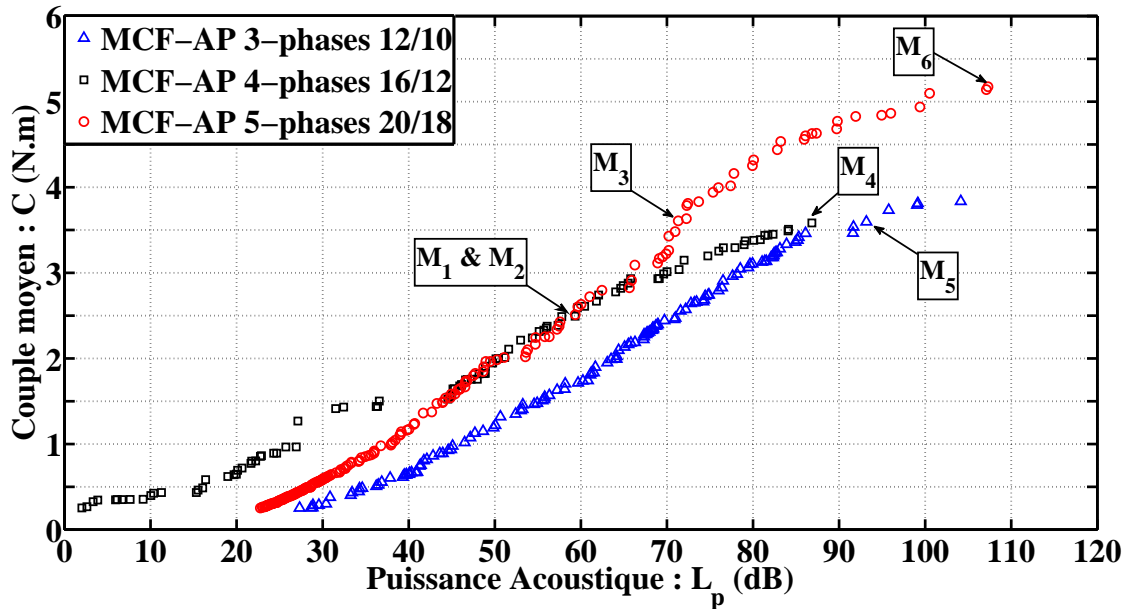


FIGURE 10.1 – Fronts de Pareto obtenus pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min pour les trois structures

Nous avons bien affaire à trois fronts de Pareto. Pour s'en convaincre, choisissons une structure et sélectionnons une machine (que l'on va noter 1) sur ce front de Pareto. Cette machine possède un couple électromagnétique moyen C_1 et rayonne une puissance acoustique $L_{p,1}$. Choisissons ensuite une autre machine toujours sur ce front (que l'on va noter cette fois-ci 2). Cette machine possède un couple électromagnétique moyen C_2 et rayonne une puissance acoustique $L_{p,2}$. La proposition suivante est alors nécessairement vraie :

$$C_1 > C_2 \iff L_{p,1} > L_{p,2} \quad (10.5)$$

Ces différentes structures, avec le niveau d'alimentation choisi défini par la puissance perdue par effet Joule admissible, ainsi que le niveau des inductions rémanentes des aimants permanents, peuvent développer un couple électromagnétique moyen jusqu'à pratiquement 5.5 N.m. Avant d'entrer dans l'analyse plus détaillée des résultats, nous pouvons déjà faire quelques remarques à ce stade là :

- La structure *MCF-AP* triphasée 12/10 n'est pas la structure la plus adaptée pour un fonctionnement avec ce niveau de pertes par effet Joules et pour un fonctionnement à cette vitesse (1 000 tr/min). En effet, quelle que soit la machine sélectionnée sur son front de Pareto, nous pouvons toujours trouver une autre machine, d'une autre structure (c'est à dire une tétraphasée 16/12 ou une pentaphasée 20/18) qui possède un couple électromagnétique moyen plus important pour une puissance acoustique rayonnée inférieure ou

égale. Par conséquent, ce n'est donc pas le type de structure à privilégier dans le cas de dimensionnement géométrique basée sur des critères magnéto-acoustiques.

- Pour obtenir des machines silencieuses, c'est à dire optimisées d'un point de vue acoustique (puissance acoustique inférieure à 40 dB), les structures à privilégier sont les structures tétraphasées 16/12. Néanmoins, le couple électromagnétique moyen restera inférieur à 1.5 N.m. En effet, dans le plan Couple / Puissance acoustique, le front de Pareto de ces structures se trouvent au dessus des deux autres fronts.
- Pour des machines dont la puissance acoustique est comprise entre 40 et 65 dB, les structures tétraphasées ou pentaphasées sont les plus adaptées. Aucune de ces deux structures ne sort réellement du lot. Le couple électromagnétique est compris entre 1.5 et 3 N.m.
- Enfin, pour des machines dont la puissance acoustique est supérieure à 65 dB et où le couple moyen est supérieur à 3 N.m, la structure la mieux adaptée est la machine pentaphasée 20/18.

Pour mieux se rendre compte du choix de la structure suivant soit le niveau de puissance acoustique soit le niveau du couple électromagnétique souhaités, nous pouvons nous pencher sur la Figure 10.2. Nous avons combiné sur cette figure les trois fronts de Pareto pour bien mettre en évidence les structures à privilégier suivant le cahier des charges imposé.

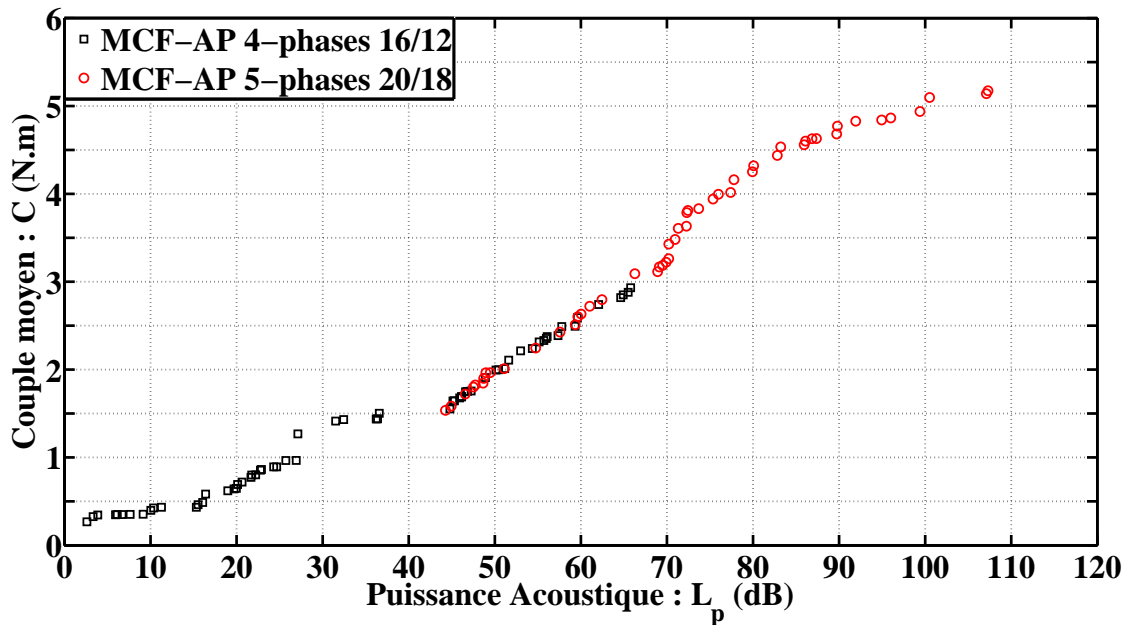


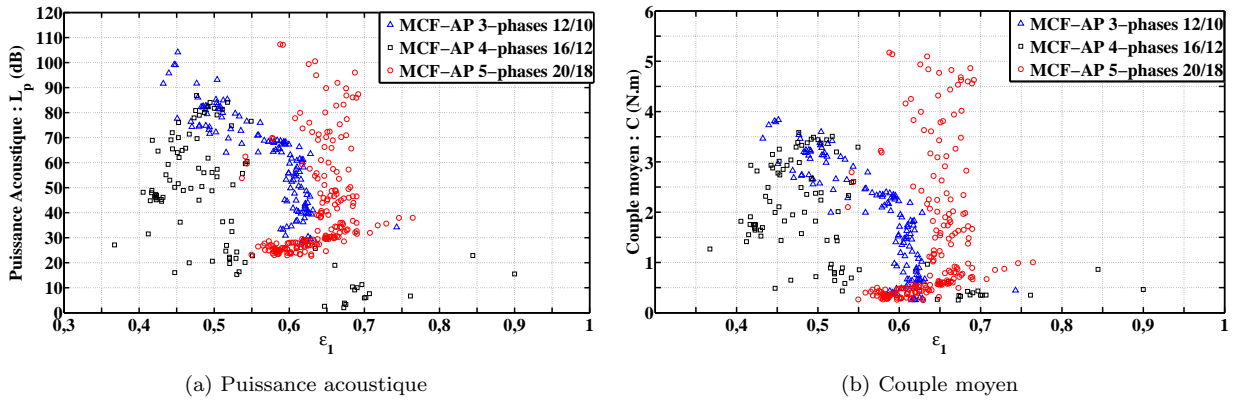
FIGURE 10.2 – Front de Pareto total obtenu pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

Nous voyons bien apparaître au début de la courbe que les structures tétraphasées sont à privilégier, puis une zone d'indécision entre les structures tétraphasées et pentaphasées et enfin la prédominance des structures pentaphasées.

10.2.2 Influence des paramètres géométriques d'entrées des optimisations

Influence de ϵ_1 sur les performances magnéto-acoustiques

Pour analyser l'influence des différents paramètres géométriques d'entrées sur les performances électromagnétiques des structures optimisées (c'est à dire se trouvant sur les fronts de Pareto), nous allons présenter les variations des deux fonctions objectifs en fonction de chacun de ces paramètres. Nous commençons par l'ouverture angulaire de l'air se trouvant entre deux dents rotoriques ϵ_1 . La Figure 10.3 présente les variations de ces deux fonctions.


 FIGURE 10.3 – Influence de ϵ_1 pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

En plus de ces deux figures, nous pouvons ajouter un outil mathématique, le coefficient de corrélation, pour tenter de quantifier une éventuelle relation linéaire entre les fonctions objectifs et les différents paramètres. Ainsi, nous allons calculer le coefficient de corrélation entre :

- La puissance acoustique rayonnée et le coefficient ϵ_1 .
- Le couple électromagnétique moyen et le coefficient ϵ_1 .

Il est sans doute utile de rappeler sa formule. Soit x un vecteur de N dimensions dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est notée x_i . Soit \bar{x} la valeur moyenne de ce vecteur. Soit y un vecteur de N dimensions dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne est notée y_i . Soit \bar{y} la valeur moyenne de ce vecteur. Le coefficient de corrélation entre x et y est noté r et peut se calculer de la manière suivante :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (10.6)$$

Les coefficients de corrélation entre le paramètre ϵ_1 d'un coté et les deux fonctions objectifs L_p et C de l'autre sont présentés sur le Tableau 10.1.

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
ϵ_1	-0.89	-0.91	-0.46	-0.41	-0.33	-0.33

 TABLE 10.1 – Coefficients de corrélation entre ϵ_1 et les fonctions objectifs

Au vu des résultats présentés sur la Figure 10.3 ainsi que sur le Tableau 10.1, nous pouvons faire quelques remarques quant à l'influence de ϵ_1 sur les deux fonctions objectifs :

- Bien que le paramètre ϵ_1 ait un domaine de variation allant de 0.1 à 0.9, les machines se trouvant sur le front de Pareto, donc les machines optimisées d'un point de vue magnéto-acoustique, voient ce paramètre varier sur un intervalle plus petit. Pour les structures 3-phases il varie de 0.45 à 0.65, pour les structures 4-phases il varie de 0.4 à 0.55 et enfin pour les structures 5-phases, il varie de 0.55 à 0.75.
- Analysons plus spécifiquement la structure 3-phases. Lorsque ϵ_1 augmente, la puissance acoustique rayonnée ainsi que le couple électromagnétique moyen ont tendance à diminuer. Ce paramètre agit donc, comme cela a déjà été précisé au chapitre précédent, de manière contradictoire sur les deux fonctions objectifs. De plus, le coefficient de corrélation entre ce paramètre et la puissance acoustique rayonnée est de -0.89 et le coefficient de corrélation entre ce paramètre et le couple moyen est de -0.91 ce qui montre une relation quasi linéaire et décroissante entre les deux fonctions objectifs et le paramètre.

- Passons à présent sur la structure 4-phases et 5-phases. Il y a une plus grande dispersion des résultats aussi bien dans le L_p / ϵ_1 que dans le plan C / ϵ_1 . Il n'y a donc pas de réelle relation entre ce paramètre et les fonctions objectifs pour les machines se trouvant sur le front de Pareto. Des coefficients de corrélation autour de -0.4 indiquent bien toutefois une légère tendance à la décroissance.

Influence de P_{hdr} sur les performances magnéto-acoustiques

Passons maintenant à l'influence du paramètre P_{hdr} sur les performances magnéto-acoustiques. Les résultats sont présentés sur la Figure 10.4 et sur le Tableau 10.2.

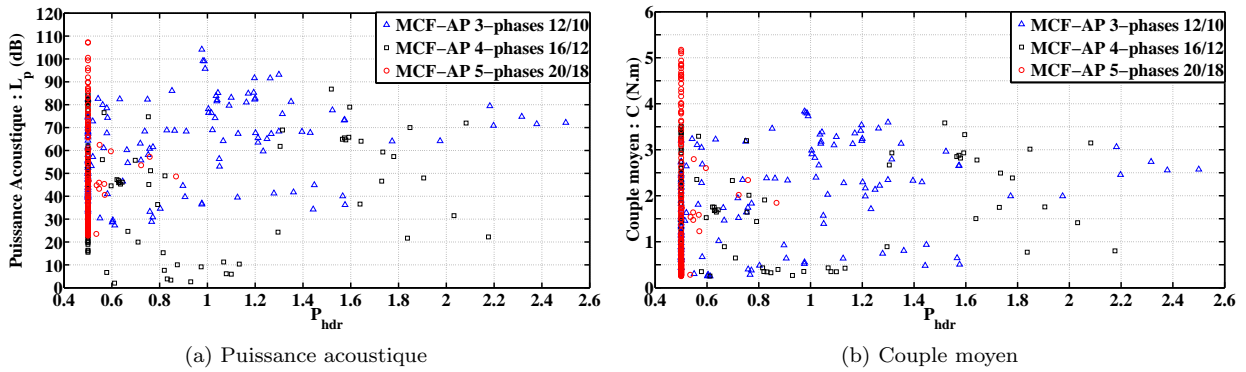


FIGURE 10.4 – Influence de P_{hdr} pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
P_{hdr}	0.31	0.32	0.03	0.06	0.07	0.06

TABLE 10.2 – Coefficients de corrélation entre P_{hdr} et les fonctions objectifs

Réalisons à nouveau quelques remarques et conclusions sur ces résultats et sur l'influence de P_{hdr} sur les deux fonctions objectifs :

- Pour les structures 3-phases et 4-phases, il y a une grande dispersion des paramètres puisque tout le domaine de variation de P_{hdr} est présent sur le front de Pareto.
- En revanche, pour la structure 5-phases, le paramètre P_{hdr} semble être en butée sur la partie inférieure du domaine de variation.
- Néanmoins, et c'est confirmé par l'étude des coefficients de corrélation ainsi que par l'étude du chapitre précédent, ce paramètre n'a quasiment pas d'influence sur les variations des fonctions objectifs dans le domaine choisi.

Influence de P_r sur les performances magnéto-acoustiques

Continuons notre analyse en nous penchant à présent sur l'influence du paramètre P_r sur les performances magnéto-acoustiques. Les résultats sont présentés sur la Figure 10.5 ainsi que sur le Tableau 10.3.

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
P_r	0.98	0.98	0.94	0.94	0.97	0.97

TABLE 10.3 – Coefficients de corrélation entre P_r et les fonctions objectifs

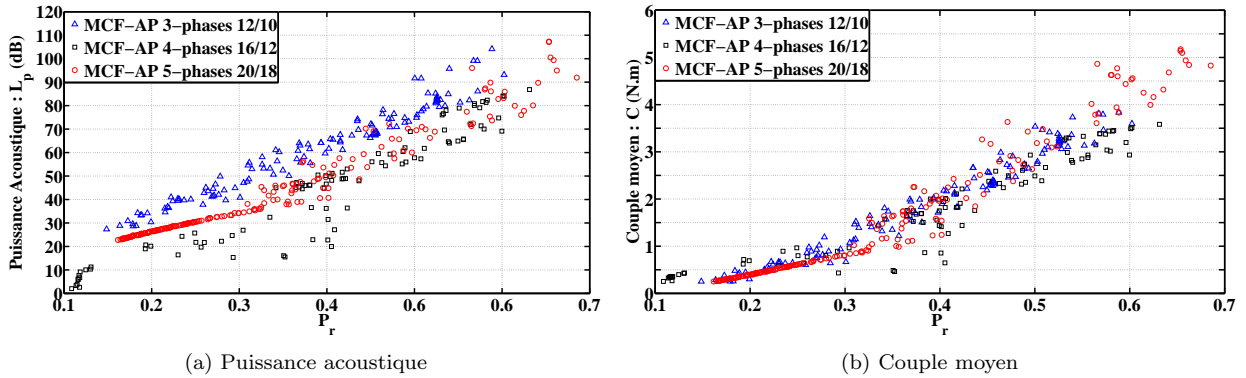


FIGURE 10.5 – Influence de P_r pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

Cette fois-ci, nous pouvons faire les remarques suivantes à partir de l'étude de ces derniers résultats :

- Pour les trois structures, les conclusions seront identiques. Nous remarquons que ce paramètre a une forte influence sur les deux fonctions objectifs. En effet, lorsque le paramètre P_r augmente (paramètre défini, rappelons-le comme le rapport entre le rayon du rotor et le rayon du stator), la puissance acoustique rayonnée L_p ainsi que le couple électromagnétique moyen C ont tendance à augmenter.
- Cette « tendance » à l'augmentation se quantifie bien en observant les coefficients de corrélation qui montrent une relation linéaire croissante entre les fonctions objectifs et le paramètre.
- Les valeurs de ce paramètre pour les machines se trouvant sur le front de Pareto balayent bien tout le domaine de variation choisit comme entrée de l'optimisation.
- Ce paramètre agit fortement de manière contradictoire entre les deux fonctions objectifs.

Influence de ϵ_3 sur les performances magnéto-acoustiques

Passons désormais à l'influence de ϵ_3 . A nouveau, nous présentons les résultats à la fois sur la Figure 10.6 et sur le Tableau 10.4.

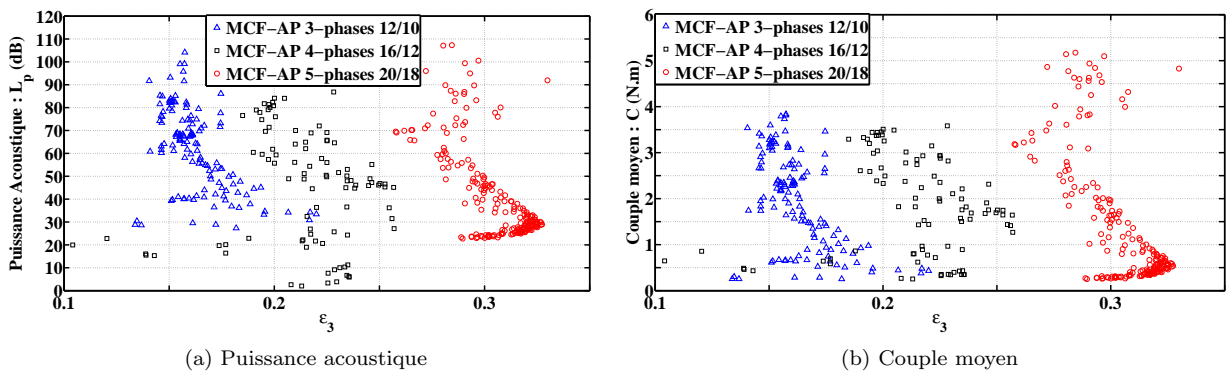


FIGURE 10.6 – Influence de ϵ_3 pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
ϵ_3	-0.52	-0.52	-0.02	-0.02	-0.68	-0.68

TABLE 10.4 – Coefficients de corrélation entre ϵ_3 et les fonctions objectifs

Encore une fois, nous allons proposer quelques remarques :

- Les paramètres ϵ_3 obtenus pour des machines optimisées ne balayent pas l'ensemble du domaine choisi au départ. En effet, pour la structure 3-phases ils varient de 0.13 à 0.22, pour la structure 4-phases ils varient de 0.18 à 0.26 et enfin, pour la structure 5-phases, ils varient de 0.26 à 0.33. Cela s'explique par le fait que lorsque l'on augmente le nombre de phases, les machines ont tendance à être moins saturées et donc par conséquent, la taille des aimants peut être augmentée.
- Pour les structures 3-phases et 5-phases, lorsque le paramètre ϵ_3 augmente, les fonctions L_p et C ont une « légère » tendance à diminuer. Cela est quantifiée par les coefficients de corrélations donnée dans le tableau.
- En revanche, pour la structure 4-phases, il n'y a pas de tendance générale. Cela est également quantifiée par les coefficients de corrélations.

Influence de ϵ_4 sur les performances magnéto-acoustiques

L'avant dernier paramètre dont on étudie ici l'influence est le paramètre ϵ_4 . Les résultats sont présentés sur la Figure 10.7 et sur le Tableau 10.5.

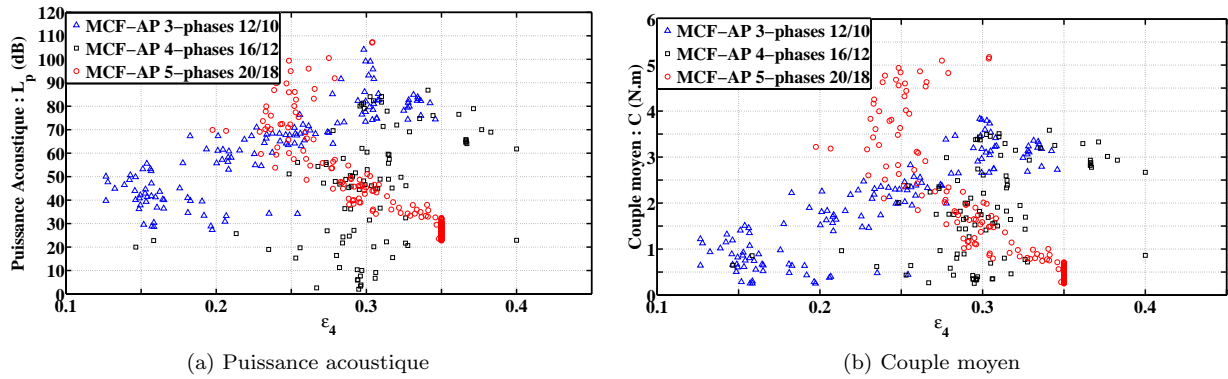


FIGURE 10.7 – Influence de ϵ_4 pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
ϵ_4	0.85	0.87	0.39	0.42	-0.87	-0.87

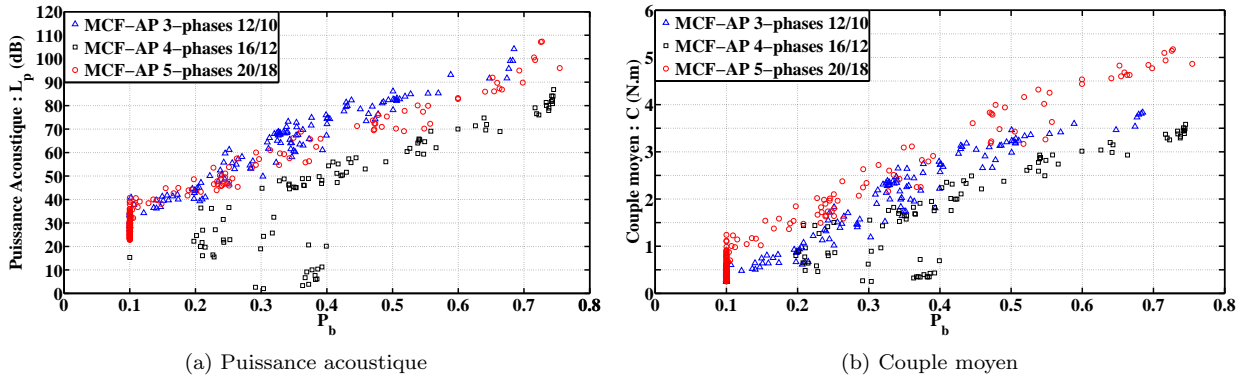
TABLE 10.5 – Coefficients de corrélation entre ϵ_4 et les fonctions objectifs

Cette fois-ci, les remarques que nous sommes amenées à faire sont les suivantes :

- L'ensemble du domaine de variation du paramètre ϵ_4 est exploré.
- En ce qui concerne la structure 3-phases, lorsque le paramètre ϵ_4 augmente, la puissance acoustique L_p et le couple électromagnétique C ont tendance à augmenter comme nous pouvons le voir en analysant les coefficients de corrélations.
- Pour la structure 4-phases, cette fois-ci, lorsque le paramètre ϵ_4 augmente, les deux fonctions objectifs varient également sans relation particulière avec le paramètre. A nouveau les coefficients de corrélations quantifient bien ce phénomène.
- Enfin, pour la structure 5-phases, lorsque le paramètre ϵ_4 augmente, les deux fonctions objectifs ont tendance à diminuer comme nous pouvons également le voir sur le Tableau 10.5.

Influence de P_b sur les performances magnéto-acoustiques

Enfin, passons à la dernière analyse, à savoir l'influence du paramètre P_b sur les performances magnéto-acoustiques. Les résultats sont présentés sur la Figure 10.8 et sur le Tableau 10.6.


 FIGURE 10.8 – Influence de P_b pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
P_b	0.97	0.96	0.83	0.87	0.98	0.98

 TABLE 10.6 – Coefficients de corrélation entre P_b et les fonctions objectifs

Nous allons faire les remarques suivantes :

- Les trois structures ont le même comportement magnéto-acoustique vis à vis de ce paramètre. Par conséquent, nous ne ferons qu'un seul et même raisonnement. Lorsque le paramètre P_b augmente, les deux fonctions objectifs augmentent également. Rappelons que $P_b = \frac{R_b - R_{si}}{R_{se} - R_{si}}$.
- Les coefficients de corrélations appuient bien cette observation puisqu'il y a une relation linéaire croissante forte entre le paramètre et les deux fonctions objectifs.
- Enfin, nous pouvons conclure que ce paramètre est très influent. De plus, il agit donc de manière contradictoire sur les fonctions objectifs.

10.2.3 Présentation détaillée de six machines issues des fronts de Pareto

En plus de l'analyse générale, détaillée précédemment, des optimisations géométriques, nous allons maintenant présenter plus particulièrement six machines « optimisées », c'est à dire six machines se trouvant sur les différents fronts de Pareto. Elles sont numérotées de M_1 à M_6 et sont repérables sur la Figure 10.1. Il s'agit d'une machine 3-phases, de deux machines 4-phases et enfin de trois machines 5-phases.

- M_1 et M_2 sont respectivement une machine 4-phases et une machine 5-phases qui ont la particularité de présenter les mêmes caractéristiques magnéto-acoustiques, c'est à dire même couple électromagnétique moyen (2.5 N.m) et même puissance acoustique rayonnée (60 dB).
- M_3 , M_4 et M_5 sont respectivement une machine 5-phases, une machine 4-phases et une machine 3-phases qui, elles, possèdent le même couple électromagnétique moyen (3.5 N.m) mais rayonne une puissance acoustique différente.
- Enfin, M_6 est une machine 5-phases. Cette machine est celle qui produit, dans ces trois optimisations, le couple électromagnétique moyen maximal (5.2 N.m). Par conséquent, nécessairement, elle va rayonner également la puissance acoustique la plus élevée (108 dB) parmi toutes les structures 5-phases.

Ces six machines sont représentées ci-après sur la Figure 10.9. Nous rappelons le code couleur : en gris le stator ou le rotor, en rouge les aimants permanents et en jaune les bobinages. En plus de la géométrie de ces machines, nous allons présenter :

- Les contraintes magnétiques le long de l'entrefer (c'est à dire en fonction de l'angle θ) pour la position particulière du rotor $\gamma = 0^\circ$ sur la Figure 10.10.
- Les déplacements radiaux d'un point du stator pendant un fonctionnement normal en fonction du temps, sur la Figure 10.11

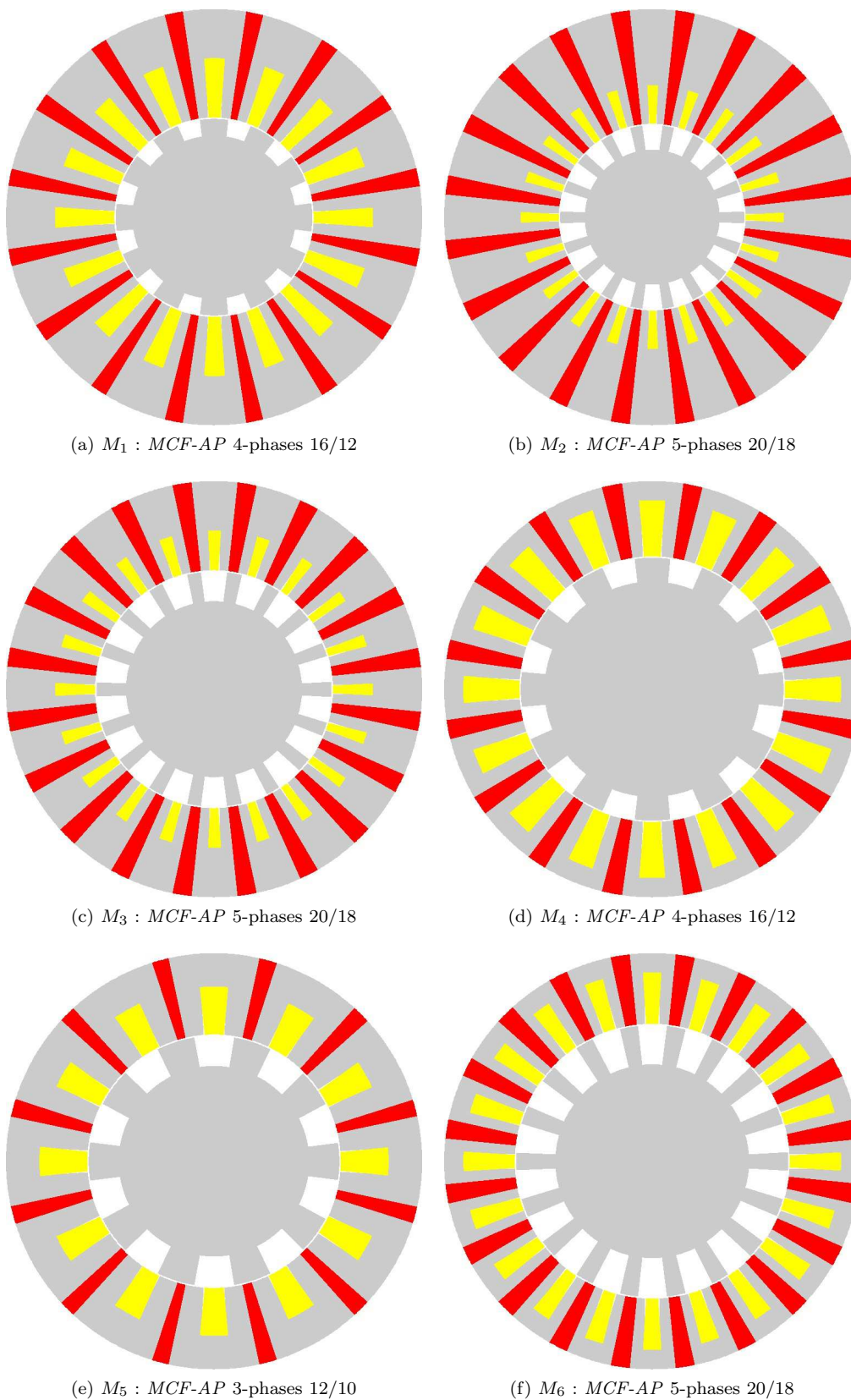


FIGURE 10.9 – Présentation de six machines issues des fronts de Pareto pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

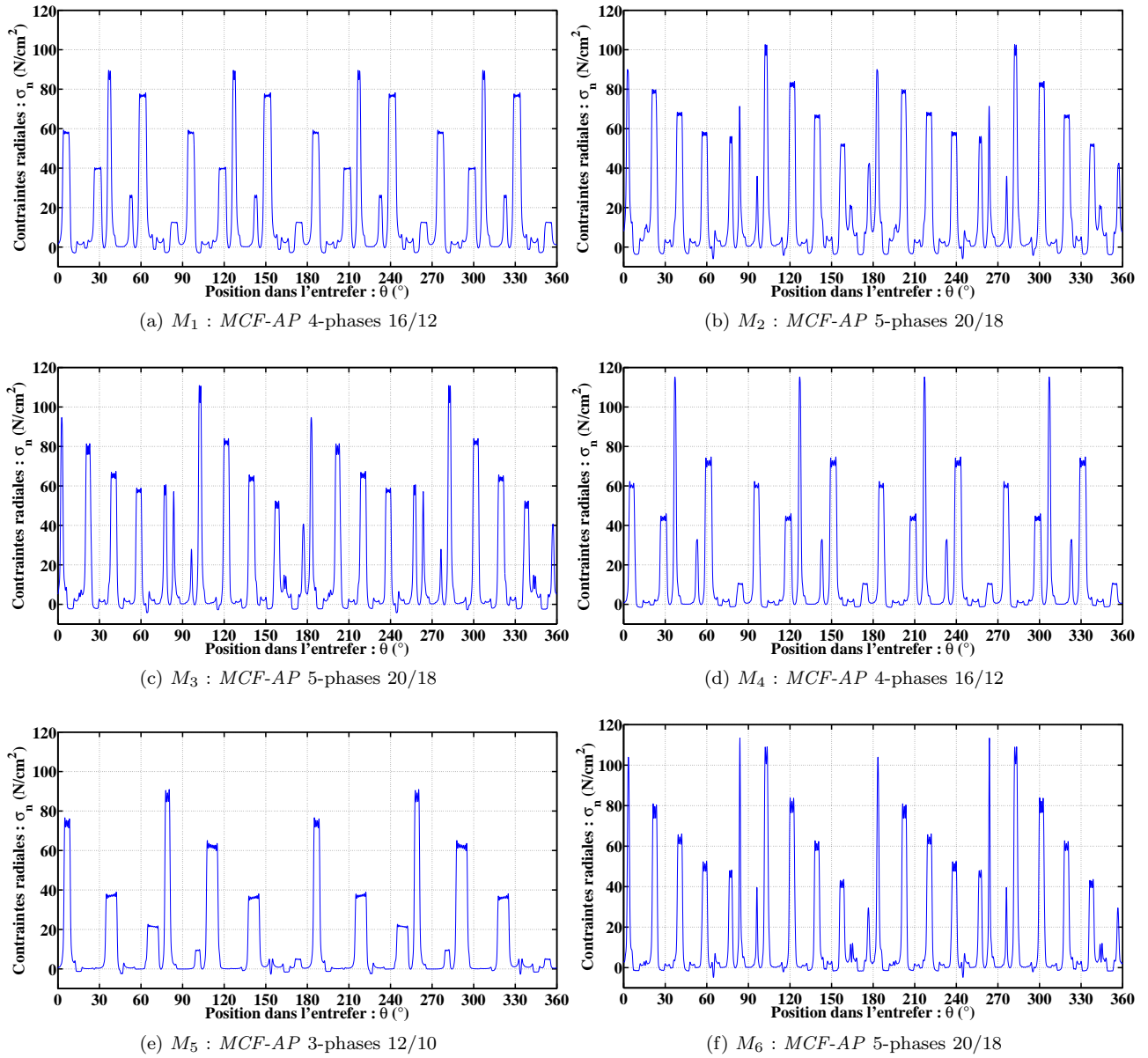


FIGURE 10.10 – Contraintes magnétiques pour les six machines issues des fronts de Pareto pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

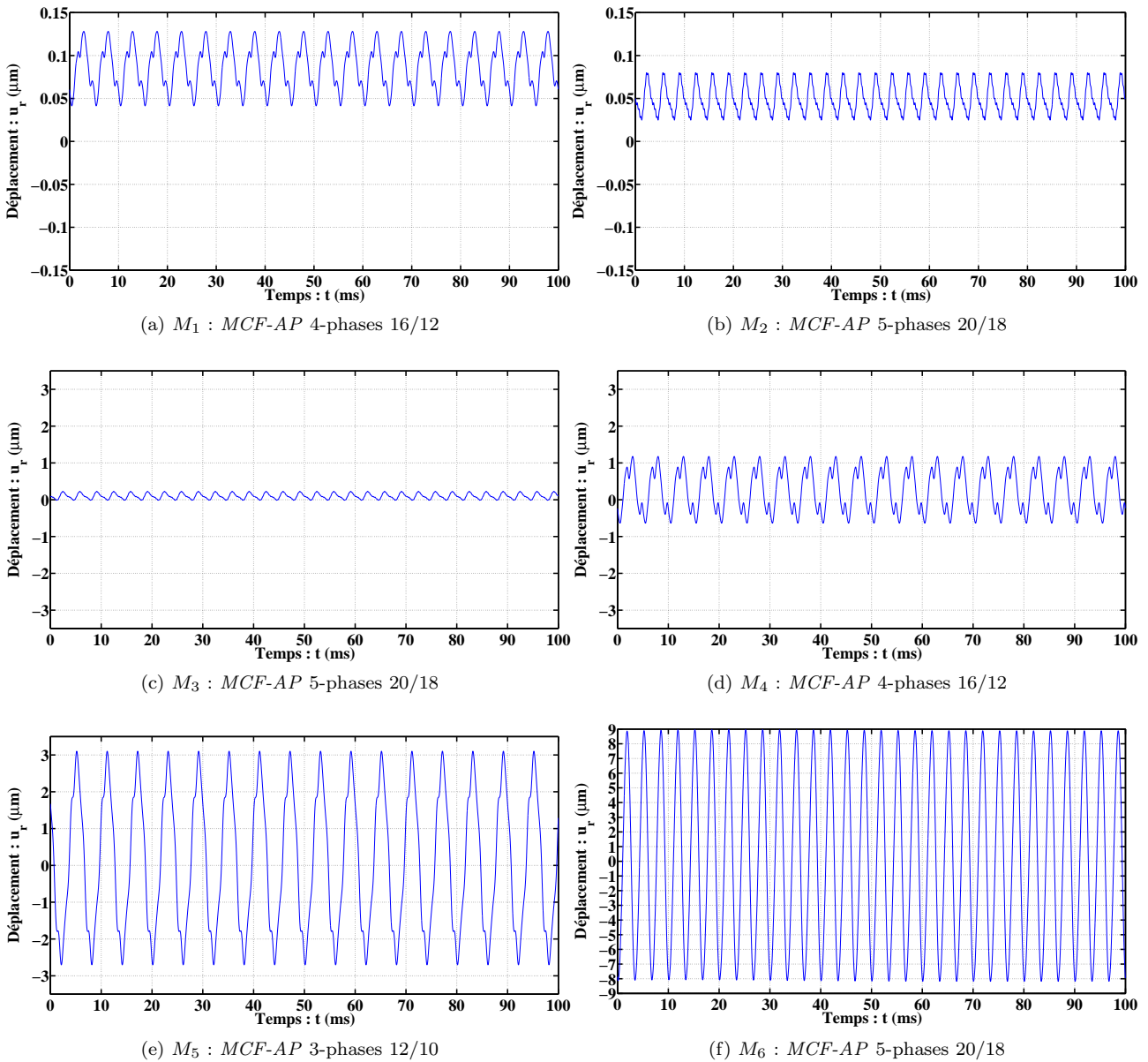


FIGURE 10.11 – Déplacement temporel pour les six machines issues des fronts de Pareto pour $\Omega = 1\,000$ tr/min

10.2. RÉSULTATS DES OPTIMISATIONS GÉOMÉTRIQUES À VITESSE FIXE À $\Omega = 1\ 000$ TR/MIN

En plus de ces résultats, nous allons également présenter dans des tableaux :

- Les paramètres géométriques de ces six machines sur le Tableau 10.7.
- Les fréquences propres d'ovalisations inférieures à 20 kHz des structures statoriques de ces six machines estimées à l'aide de notre modèle sur le Tableau 10.8.
- Les fréquences des harmoniques des forces magnétiques sur le Tableau 10.9.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
	4-phases	5-phases	5-phases	4-phases	3-phases	5-phases
ϵ_1	0.44	0.62	0.64	0.48	0.50	0.63
P_{hdr}	1.73	0.50	0.50	1.52	1.30	0.50
P_r	0.47	0.44	0.57	0.63	0.60	0.65
ϵ_3	0.20	0.28	0.28	0.23	0.15	0.28
ϵ_4	0.32	0.24	0.23	0.34	0.30	0.30
P_b	0.55	0.33	0.45	0.75	0.59	0.73

TABLE 10.7 – Paramètres géométriques des machines

Mode	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
0	10 119 Hz	11 960 Hz	10 305 Hz	7 447 Hz	9 065 Hz	7 543 Hz
2	2 077 Hz	3 788 Hz	2 122 Hz	589 Hz	1 258 Hz	592 Hz
3	5 540 Hz	9 621 Hz	5 665 Hz	1 606 Hz	3 417 Hz	1 614 Hz
4	10 011 Hz	16 472 Hz	10 237 Hz	3 017 Hz	6 333 Hz	3 031 Hz
5	15 195 Hz	X	15 533 Hz	4 800 Hz	9 891 Hz	4 822 Hz
6	X	X	X	6 931 Hz	17 893 Hz	6 963 Hz
7	X	X	X	9 386 Hz	18 483 Hz	9 428 Hz
8	X	X	X	18 267 Hz	X	12 189 Hz
9	X	X	X	15 153 Hz	X	15 218 Hz
10	X	X	X	18 409 Hz	X	X

TABLE 10.8 – Fréquences propres d'ovalisations des six machines issues des fronts de Pareto à $\Omega = 1\ 000$ tr/min

Harmonique	3-phases	4-phases	5-phases
1	167 Hz	200 Hz	300 Hz
2	333 Hz	400 Hz	600 Hz
3	500 Hz	600 Hz	900 Hz
4	667 Hz	800 Hz	1 200 Hz
5	833 Hz	1 000 Hz	1 500 Hz
6	1 000 Hz	1 200 Hz	1 800 Hz
7	1 167 Hz	1 400 Hz	2 100 Hz
8	1 333 Hz	1 600 Hz	2 400 Hz
9	1 500 Hz	1 800 Hz	2 700 Hz
10	1 667 Hz	2 000 Hz	3 000 Hz

TABLE 10.9 – Fréquences des harmoniques des forces pour les trois structures

Observons les différentes grandeurs magnéto-acoustiques de ces six machines et réalisons les remarques et les conclusions suivantes :

Analyse des machines M_1 et M_2

- Ce sont deux structures différentes puisqu'il s'agit respectivement d'une 4-phases et d'une 5-phases. Pourtant, malgré cela, elles vont fournir le même couple électromagnétique moyen (soit 2.5 N.m environ) et vont rayonner la même puissance acoustique (60 dB environ).
- Si nous observons la géométrie de ces deux structures, nous nous rendons compte que M_1 possède une culasse plus fine que M_2 . Par conséquent, les fréquences propres d'ovalisation de la structure statorique de M_2 sont plus élevées que celles de M_1 comme nous pouvons le voir sur le Tableau 10.8.
- Le maximum des contraintes magnétiques de M_2 pour la position rotorique $\gamma = 0^\circ$ est plus important que le maximum des contraintes magnétiques de M_1 pour la même position du rotor. De plus, puisque la machine M_2 est une 5-phases et la machine M_1 une 4-phases, les fréquences des harmoniques des contraintes de M_2 sont plus importantes que celles de M_1 comme nous pouvons le voir sur le Tableau 10.9.
- Pour ce qui est des déplacement radiaux, ceux de M_1 pour une position particulière de θ sont plus important que ceux de M_2 .

Analyse des machines M_3 , M_4 et M_5

- Il s'agit respectivement de structures 5-phases, 4-phases et 3-phases. Ces trois machines produisent le même couple électromagnétique moyen (soit 3.5 N.m environ). En revanche, la puissance acoustique rayonnée est très différente. Elle est de 71 dB pour M_3 , 88 dB pour M_4 et 93 dB pour M_5 .
- Au niveau des géométries, si nous comparons l'épaisseur des culasses, nous nous rendons compte que M_3 est la machine possédant la culasse la plus épaisse et M_4 celle possédant la culasse la plus fine. Par conséquent, les fréquences propres d'ovalisation de la structure statorique de M_3 sont les plus élevées, suivies par celles de M_5 et enfin suivies par celles de M_4 .
- Le maximum des contraintes magnétiques de M_4 est le plus élevé des trois machines suivi par celui de M_3 et enfin par celui de M_5 . Au niveau des fréquences des harmoniques des contraintes, du fait de la nature de leurs structures, M_3 est la machine qui possèdent les fréquences les plus élevées suivies par M_4 et enfin par M_5 .
- Au niveau des déplacements radiaux, nous nous rendons bien compte, en comparant leurs amplitudes, que la machine rayonnant la puissance acoustique la plus élevée est M_5 suivie par M_4 et enfin par M_3 .

Analyse de la machine M_6

- Il s'agit d'une structure 5-phases et de la machine fournissant le couple électromagnétique moyen le plus élevé de toutes les optimisations (environ 5.2 N.m) donc nécessairement la machine qui rayonne la puissance acoustique la plus élevée de cette structure.
- Au niveau géométrie, les dents statoriques semblent avoir la taille minimale avant qu'une saturation magnétique apparaisse. De plus, la surface des aimants permanents ainsi que des bobinages sont maximisées. Enfin, les dents rotoriques ainsi que la taille du rotor sont bien dimensionnées d'un point de vue magnétique. La machine va donc fournir un couple électromagnétique moyen important.
- En revanche, le mode d'ovalisation d'ordre 2 est à une fréquence de 592 Hz. De plus, puisque l'harmonique 2 des contraintes magnétiques est à une fréquence de 600 Hz, le stator va légèrement résonner. Nous nous en rendons bien compte en observant la Figure 10.11. Par conséquent, la machine va rayonner un bruit très important à cette vitesse.

Nous venons de présenter les résultats de nos optimisations géométriques des structures *MCF-AP* basées sur un modèle analytique magnéto-acoustique pour un fonctionnement à $\Omega = 1\ 000$ tr/min. Nous avons également réalisé des optimisations pour un fonctionnement à deux autres vitesses : $\Omega = 2\ 000$ tr/min et $\Omega = 3\ 000$ tr/min. Les résultats sont présentés en Annexe D.

10.3 Résultats des optimisations géométriques à vitesse variable

Passons maintenant à la présentation des résultats des optimisations géométriques des structures *MCF-AP* dans le cas où, cette fois-ci, le fonctionnement de la machine se fait pour un profil de vitesse variable allant de

0 à 10 000 tr/min. En réalisant ces optimisations là avec cette variation de vitesse, les différents modes propres d'ovalisation de la structure statorique dont les fréquences se trouvent dans cette gamme de fréquence vont se mettre à résonner et donc à générer une onde acoustique. Ainsi, les optimisations géométriques utilisant ce critère vont permettre d'obtenir des structures avec les mêmes performances magnétiques que précédemment mais qui seront en plus silencieuses pour une plage de variation de vitesse.

Nous allons nous placer dans les mêmes conditions que précédemment, à savoir que 100 itérations de 100 machines seront réalisées. Nous allons également présenter les mêmes résultats que précédemment, à savoir :

- La présentation des fronts de Pareto dans le plan Couple / Bruit pour les trois structures de *MCF-AP* (3, 4 et 5 phases) sur la Figure 10.12 et la combinaison de ces trois fronts de Pareto sur la Figure 10.13.
- L'influence des différents paramètres géométriques d'entrées sur les Figures 10.14 à 10.19.
- Les coefficients de corrélations entre les fonctions objectifs et les paramètres sur le Tableau 10.10.
- La présentation de six machines numérotées de M_1 à M_6 sur la Figure 10.20.

10.3.1 Présentation des résultats

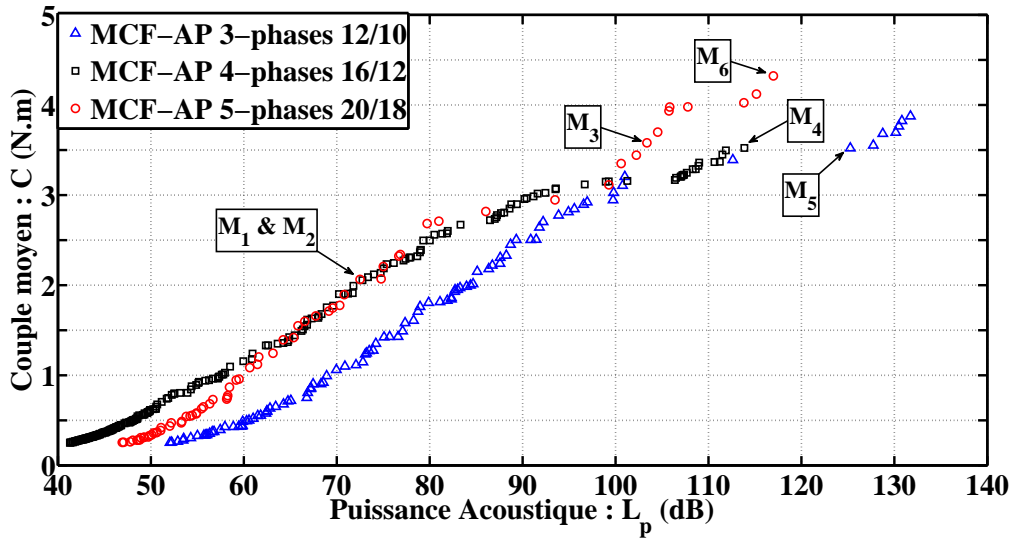


FIGURE 10.12 – Fronts de Pareto obtenus pour un fonctionnement à vitesse variable

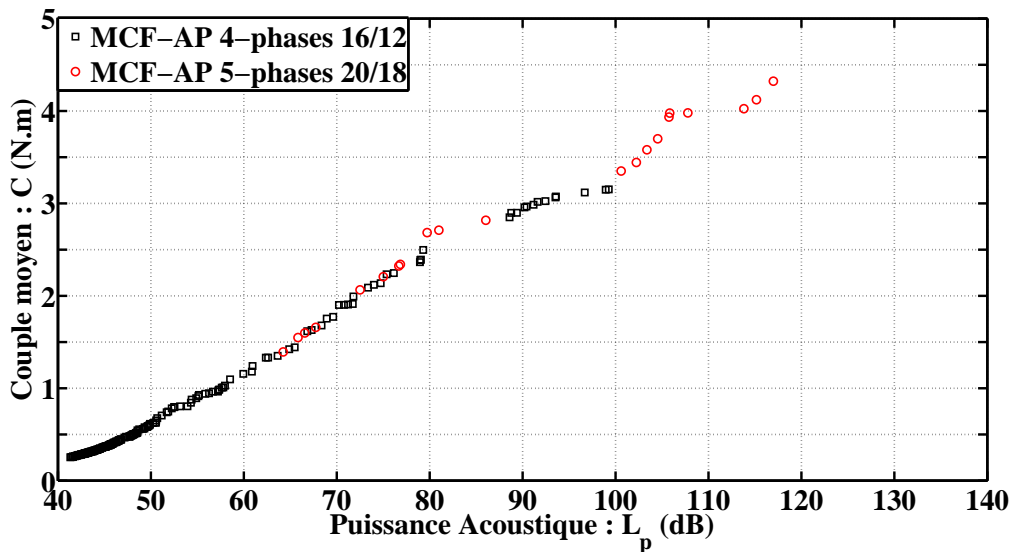


FIGURE 10.13 – Front de Pareto total obtenu pour un fonctionnement à vitesse variable

10.3.2 Influence des paramètres géométriques d'entrées des optimisations

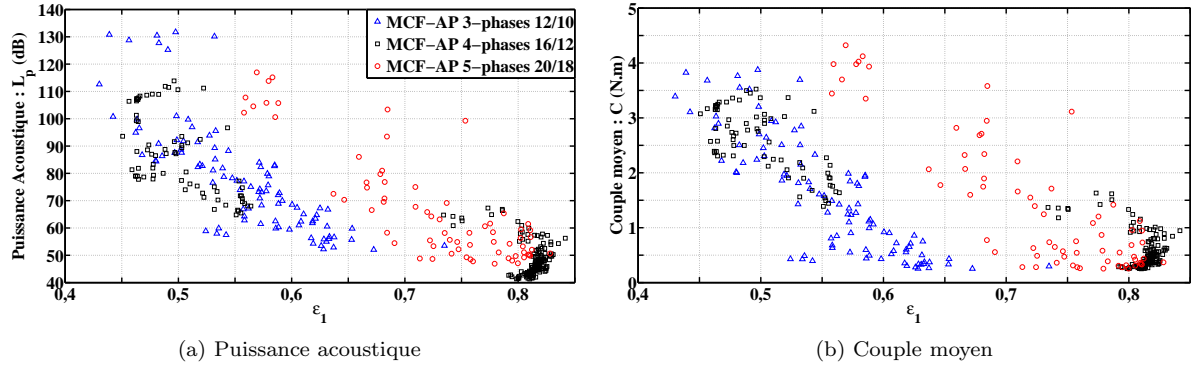


FIGURE 10.14 – Influence de ϵ_1 pour un fonctionnement à vitesse variable

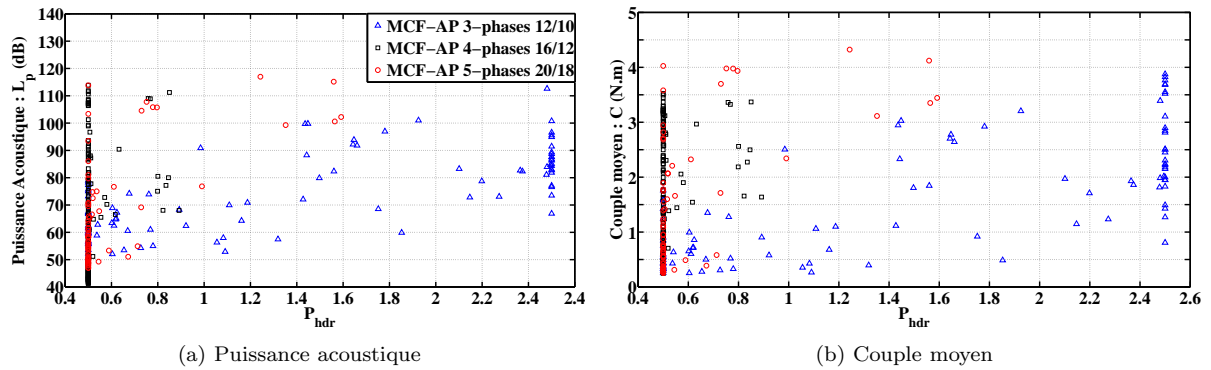


FIGURE 10.15 – Influence de P_{hdr} pour un fonctionnement à vitesse variable

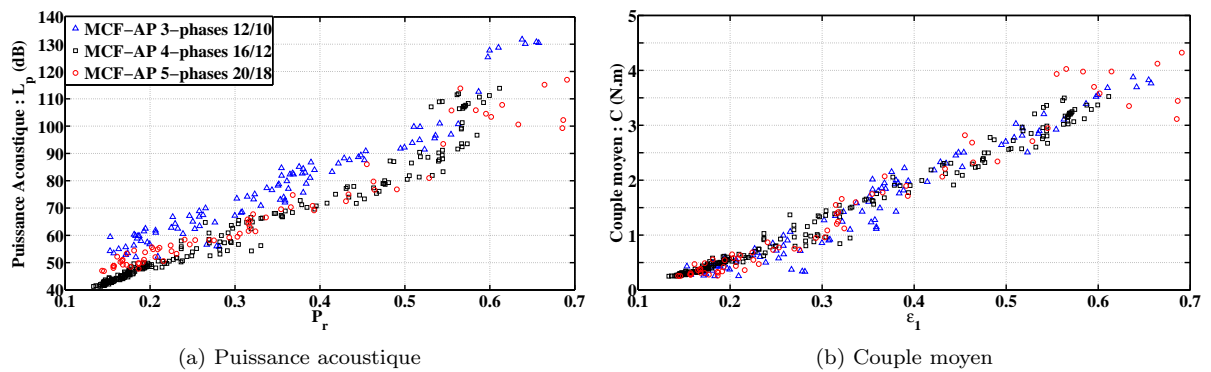
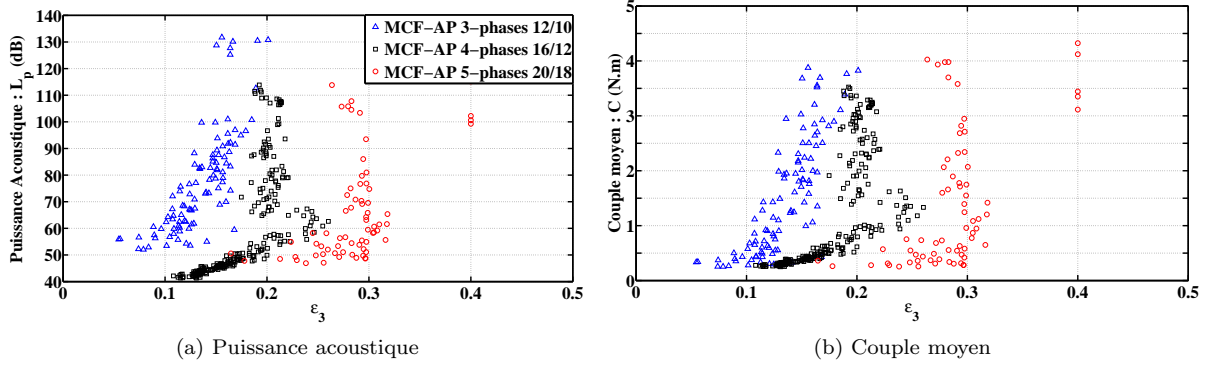
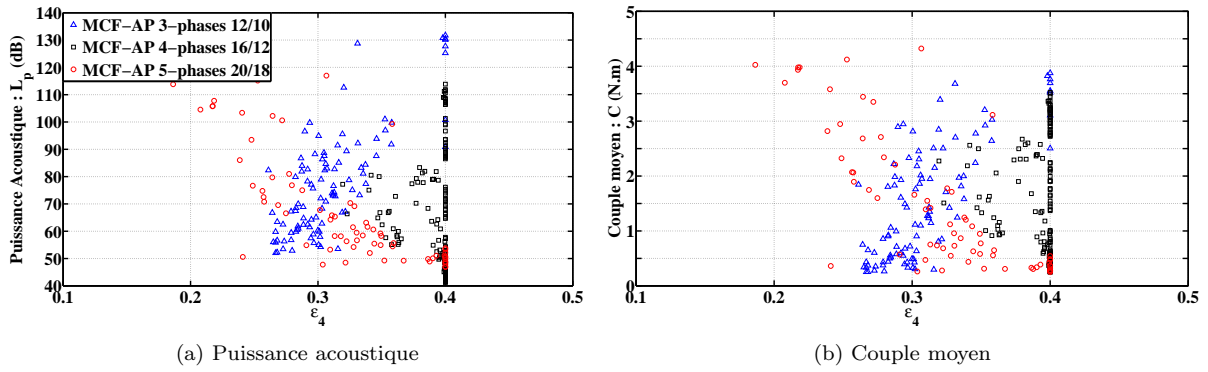
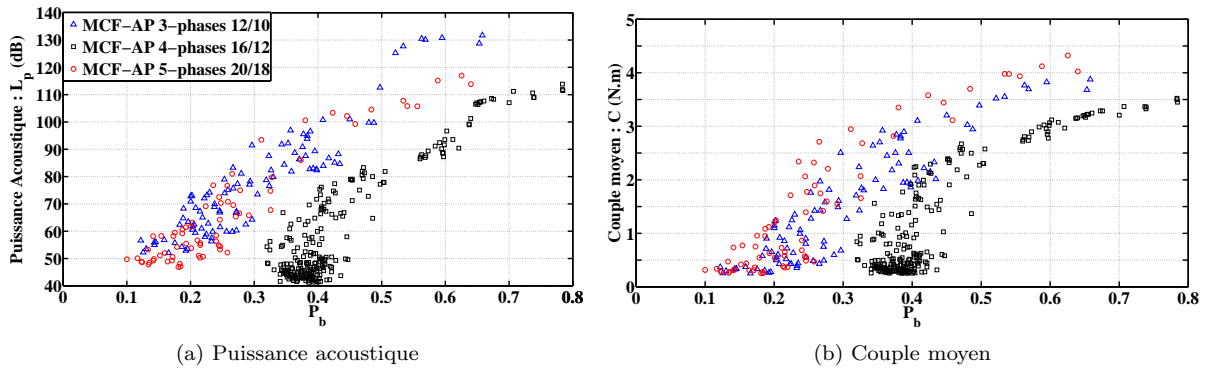


FIGURE 10.16 – Influence de P_r pour un fonctionnement à vitesse variable


 FIGURE 10.17 – Influence de ϵ_3 pour un fonctionnement à vitesse variable

 FIGURE 10.18 – Influence de ϵ_4 pour un fonctionnement à vitesse variable

 FIGURE 10.19 – Influence de P_b pour un fonctionnement à vitesse variable

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
ϵ_1	-0.74	-0.76	-0.68	-0.58	-0.21	-0.17
P_{hdr}	0.59	0.60	0.06	0.03	-0.25	-0.29
P_r	0.98	0.98	0.98	0.98	0.95	0.96
ϵ_3	-0.70	-0.68	-0.46	-0.56	-0.26	-0.21
ϵ_4	0.86	0.88	-0.29	-0.15	-0.54	-0.54
P_b	0.96	0.96	0.82	0.88	0.98	0.98

TABLE 10.10 – Coefficients de corrélation entre les paramètres et les fonctions objectifs pour un fonctionnement à vitesse variable

10.3.3 Présentation de six machines issues des fronts de Pareto

Les six machines sélectionnées sur les différents fronts de Pareto possèdent les caractéristiques suivantes :

- M_1 : *MCF-AP* 4-phases 16/12 fournissant un couple électromagnétique moyen de 2.6 N.m et rayonnant une puissance acoustique de 72 dB (caractéristiques identiques à M_2).
- M_2 : *MCF-AP* 5-phases 20/18 fournissant un couple électromagnétique moyen de 2.6 N.m et rayonnant une puissance acoustique de 72 dB (caractéristiques identiques à M_1).
- M_3 : *MCF-AP* 5-phases 20/18 fournissant un couple électromagnétique moyen de 3.6 N.m et rayonnant une puissance acoustique de 104 dB (couple électromagnétique identique à M_4 et M_5).
- M_4 : *MCF-AP* 4-phases 20/18 fournissant un couple électromagnétique moyen de 3.6 N.m et rayonnant une puissance acoustique de 113 dB (couple électromagnétique identique à M_3 et M_5).
- M_5 : *MCF-AP* 3-phases 20/18 fournissant un couple électromagnétique moyen de 3.6 N.m et rayonnant une puissance acoustique de 125 dB (couple électromagnétique identique à M_3 et M_4).
- M_6 : *MCF-AP* 5-phases 20/18 fournissant un couple électromagnétique moyen de 4.3 N.m et rayonnant une puissance acoustique de 117 dB (machine à couple maximal).

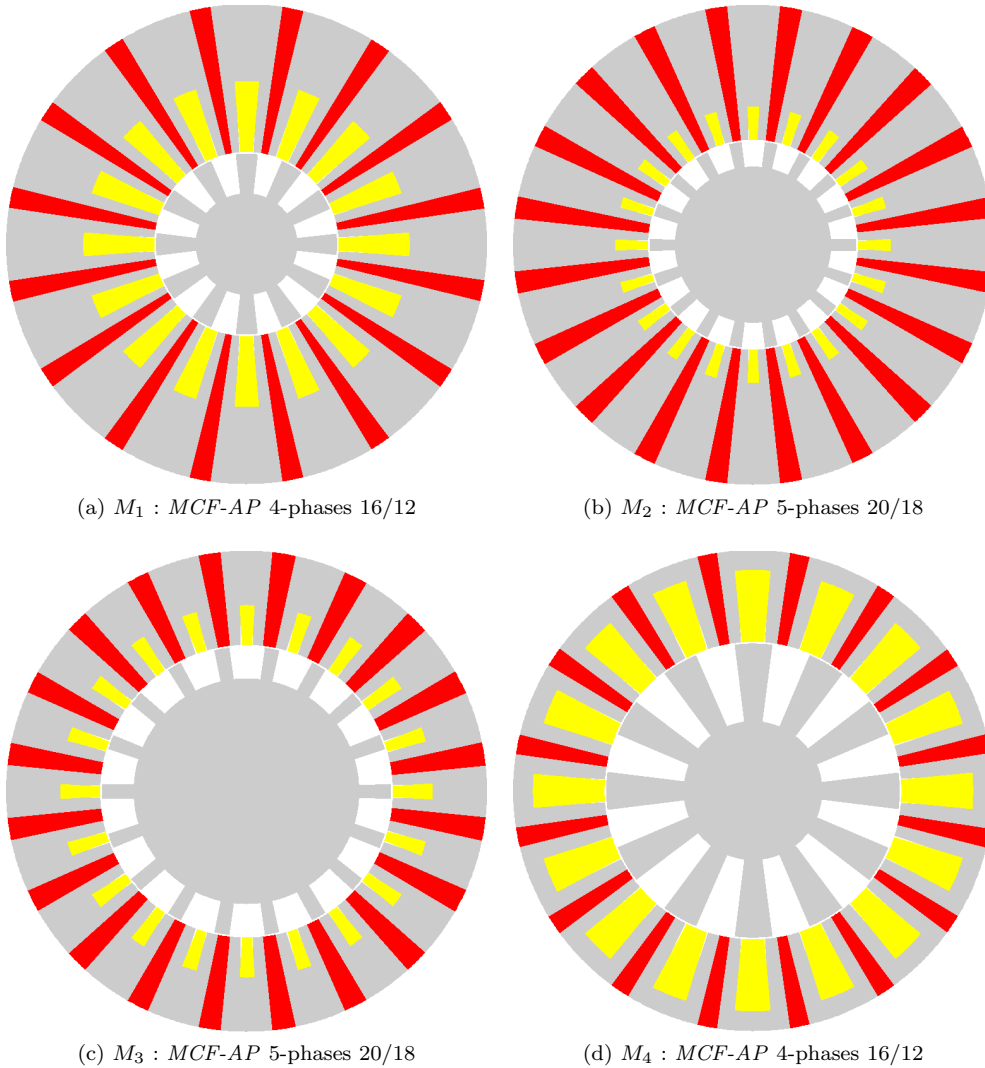


FIGURE 10.20

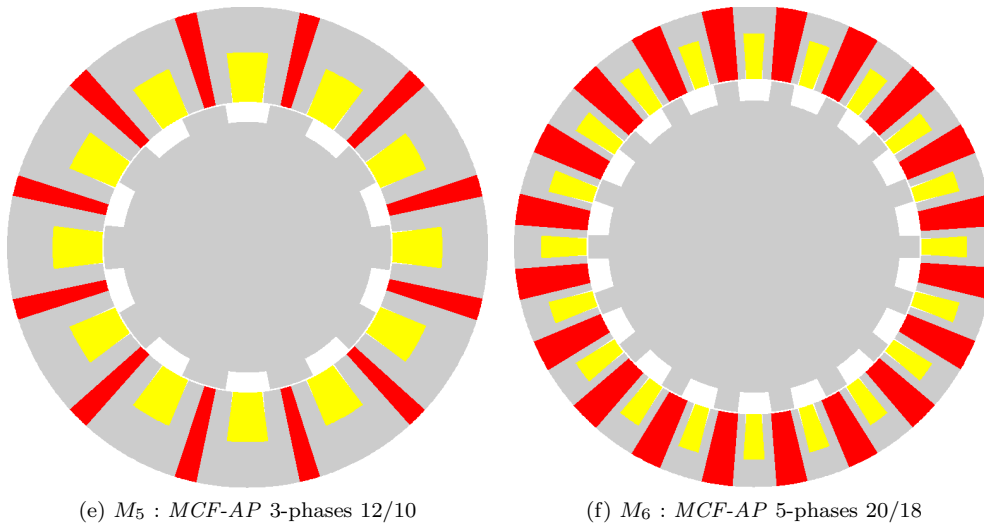


FIGURE 10.20 – Présentation de six machines issues des fronts de Pareto pour un fonctionnement à vitesse variable

L’observation des résultats des optimisations que nous avons présentés pour un fonctionnement à vitesse variable va nous amener aux mêmes conclusions que lors de l’analyse des résultats des optimisations pour un fonctionnement à vitesse constante. La Figure 10.12 et la Figure 10.13 nous renseignent sur le choix des machines. Encore une fois, la décision se fera entre la machine 4-phases et la machine 5-phases suivant le type de performances magnéto-acoustiques que l’on souhaite. L’étude de l’influence des paramètres d’entrées (de la Figure 10.14 à la Figure 10.19 ainsi que le Tableau 10.10) nous amène également aux mêmes conclusions avec une forte influence de certains paramètres dans leurs domaines de variations. A noter également que les fronts de Pareto obtenus sont en dessous des fronts de Pareto obtenues lors d’un fonctionnement à vitesse fixe.

10.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats issus de différentes optimisations géométriques des structures *MCF-AP*. Ces optimisations sont basées sur notre modèle analytique magnéto-acoustique afin de trouver des machines possédant de bonnes performances électromagnétiques (couple électromagnétique moyen important) et de bonnes performances acoustiques (puissance acoustique rayonnée par la structure statorique faible). Ces optimisations ont été réalisées pour trois structures différentes : une machine triphasée 12/10, une machine machine tétraphasée 16/12 et une machine pentaphasée 20/18. De plus, trois modes de fonctionnement différents ont été envisagés : un fonctionnement à $\Omega = 1\ 000$ tr/min, $\Omega = 2\ 000$ tr/min et $\Omega = 3\ 000$ tr/min et enfin un fonctionnement à vitesse variable pour Ω allant de 0 à 10 000 tr/min.

Dans un premier temps, nous avons introduit les différents paramètres d’optimisation que nous avons utilisés dans tout ce chapitre. Nous avons choisi un domaine de variation très large des variables d’entrées afin de permettre à l’algorithme d’optimisation de balayer un très grande nombre de géométries différentes. De plus, afin d’être en mesure de pouvoir comparer les différentes machines que nous allons obtenir, nous avons fixé certains paramètres comme le volume de la machine, la taille de l’entrefer, le niveau de pertes par effet Joules admissibles ainsi que l’induction rémanente des aimants permanents.

Ensuite, nous avons présenté les différents résultats obtenus. Pour chacun des quatre types de fonctionnement différents, nous avons commencé par introduire les trois fronts de Pareto que nous avons obtenus à l’aide de nos optimisations. Nous avons présenté ces trois fronts de Pareto dans le plan Couple / Bruit. Puis, nous en avons déduit, à partir de l’analyse de ces courbes, des généralités quant aux performances magnéto-acoustiques des différentes structures *MCF-AP*. Pour obtenir des machines peu bruyantes mais peu performantes d’un point de vue électromagnétique, les structure tétraphasées 16/12 sont à privilégier. Au contraire, pour obtenir des machines très performantes d’un point de vue électromagnétique mais, par conséquence, plus bruyantes, les structures pentaphasées 20/18 sont à privilégier. Par ailleurs, la zone de séparation pour le choix de la structure

entre la 4-phases et la 5-phases n'est pas bien marquée puisqu'il existe une « zone d'indétermination » où tantôt l'une, tantôt l'autre sont à choisir. Enfin, il est également intéressant de remarquer qu'à aucun moment les structures triphasées sortent du lot. En effet, nous trouverons toujours une structure tétraphasée ou pentaphasée plus performantes d'un point de vue magnéto-acoustique (c'est à dire avec un couple plus important et rayonnant un bruit moins important).

Puis, nous avons étudié plus en détail l'influence des paramètres géométriques d'entrées sur les performances magnéto-acoustiques des machines. Nous avons observé le domaine de variation de ces variables et leurs degrés de corrélation avec les deux fonctions objectifs des optimisations. Nous avons ainsi montré que certains paramètres influait très fortement.

Enfin, nous avons présenté plus en détails les géométries de six machines issus des fronts de Pareto des optimisations de chaque mode de fonctionnement afin de voir quelques solutions proposées par l'algorithme d'optimisation.

Conclusion Générale

Ce mémoire de thèse avait pour principal sujet la modélisation analytique multi-physique magnéto-acoustique ainsi que l'optimisation géométrique des machines synchrones à commutation de flux à aimants permanents. En guise de conclusion générale, nous allons commencer par faire la synthèse de tout ce qui a été accompli. Puis, nous proposerons un certain nombre de perspectives envisageable pour poursuivre ces travaux.

Synthèse des travaux effectués

La première partie de ce travail s'est articulée autour du fonctionnement général de la machine synchrone à commutation de flux à aimants permanents d'un point de vue magnétique, mécanique et acoustique.

Tout d'abord, nous avons commencé par le Chapitre 1 où nous avons présenté un état de l'art sur ces machines en nous penchant sur le principe de fonctionnement puis sur les caractéristiques électromagnétiques de ces structures en étudiant plus particulièrement une machine pentaphasée 20/18.

Puis, au Chapitre 2, nous nous sommes intéressés à l'origine du bruit dans les *MCF-AP*. Nous avons analysé les aspects magnétiques, mécaniques et acoustiques de ces structures en réalisant, soit des mesures expérimentales sur un prototype existant, soit des simulations éléments finis. Les contraintes magnétiques à l'origine des différentes déformations ont été obtenues et plus particulièrement les contraintes magnétiques radiales à l'interface entre la structure statorique et l'entrefer. Puis, une analyse modale du stator a été réalisée afin de comprendre comment la structure se déforme et à quelles fréquences. Enfin, la réponse vibratoire de la structure statorique a été obtenue. Une fois cette analyse réalisée, nous avons conclu ce chapitre en précisant les faiblesses des modèles numériques pour réaliser des optimisations géométriques basées sur des critères magnéto-acoustiques et nous avons introduit la nécessité d'utiliser des approches analytiques.

Ensuite, nous sommes passés à la deuxième partie de ce travail, à savoir la présentation de modèles analytiques permettant l'estimation complète de l'état magnétique, mécanique et acoustique des *MCF-AP*.

Le Chapitre 3 s'est voulu être une présentation générale du modèle analytique. Le synoptique complet de ce modèle a été présenté. Puis, nous avons indiqué l'avoir divisé en trois sous-modèles faiblement couplés, à savoir : un modèle semi-analytique magnéto-statique, un modèle analytique modal et un modèle analytique vibro-acoustique. Par ailleurs, nous avons également indiqué les différentes hypothèses que nous avons formulées.

Puis, la présentation à proprement parler du modèle a commencé. Le Chapitre 4 a alors présenté un modèle semi-analytique magnéto-statique en deux dimensions des *MCF-AP*. L'objectif était de construire un modèle permettant d'estimer l'état magnétique et plus particulièrement le couple électromagnétique ainsi que les contraintes magnétiques radiales à l'interface entre le stator et l'entrefer de la machine. Le modèle est basé sur la résolution formelle des équations de Maxwell de la magnéto-statique par développement en série de Fourier jusqu'à un certain rang d'harmonique. La machine a été divisée en différentes zones, chaque zone représentant un matériau magnétique quelconque, et le potentiel vecteur magnétique a été calculé. A partir de la connaissance de cette grandeur, toutes les autres en ont été déduites. Le modèle a été validé par simulations éléments finis.

Le Chapitre 5 s'est attaqué à présenter un modèle analytique permettant la détermination des modes propres d'ovalisation en deux dimensions d'un stator de machine électrique. Ce modèle est basé sur une approche énergétique, appelé principe d'Hamilton et sur l'obtention et la minimisation du quotient de Rayleigh.

Ce dernier a été obtenu en calculant les énergies de déformations et cinétiques du stator par les hypothèses cinématique de Bernoulli puis de Timoshenko. Les dents statoriques et les bobinages ont été pris en compte ainsi que la culasse externe. Les différents modèles présentés ont été validés, soit par simulations éléments finis, soit par mesures expérimentales. Le meilleur modèle s'est révélé être le modèle utilisant la cinématique de Timoshenko en prenant en compte les énergies de déformations liées à la force normale, l'effort tranchant et le moment fléchissant ainsi que l'énergie cinétique liée à la translation. Ce modèle a pris en compte les dents statoriques et le bobinage en les considérant comme des masses ponctuelles réparties et a été noté $M_{T,3}$. Il apporte une grande amélioration aux modèles déjà existant car, contrairement aux autres, la solution obtenue ne passe pas par la résolution des équations différentielles de la mécanique des structures qui devient trop complexe dès lors que l'on prend en compte un grand nombre d'énergie.

Enfin, le Chapitre 6 avait pour objectif de construire un modèle analytique vibro-acoustique permettant d'estimer les vibrations radiales de la surface extérieure du stator de la machine et d'en déduire la puissance acoustique rayonnée par cette dernière. Ce modèle est basé sur la résolution formelle des équations mécaniques de l'équilibre dynamique d'un stator de machine en écrivant ces dernières dans la base modale définie par les modes propres estimés au chapitre précédent. Ce modèle a été validé par simulations éléments finis ainsi que par mesures expérimentales.

Une fois le modèle entièrement présenté et validé, nous l'avons utilisé dans la troisième et dernière partie de ce mémoire de thèse pour présenter des résultats d'optimisations géométriques. Ces optimisations ont été réalisées sur trois structures différentes de *MCF-AP* : une machine triphasée 12/10, une machine tétraphasée 16/12 et enfin une machine pentaphasée 20/18. De plus, elles ont également été effectuées pour quatre fonctionnements différents : trois fonctionnements à vitesse fixes (1 000 tr/min, 2 000 tr/min, 3 000 tr/min) et un fonctionnement à vitesse variable (de 0 à 10 000 tr/min).

Le Chapitre 7 est une introduction générale à l'optimisation géométrique des *MCF-AP* qui présente ce que nous avons fait par la suite.

Nous avons ensuite présenté en détail l'optimisation géométrique au Chapitre 8. Nous avons introduit les différents paramètres comme les paramètres d'entrées, de sorties, de réglages et enfin de contraintes. Puis, nous avons détaillé l'algorithme d'optimisation par la méthode des essais particuliers.

Dans le Chapitre 9, nous avons, dans un premier temps, justifié l'intérêt d'utiliser des optimisations géométriques basées sur des critères magnéto-acoustiques en présentant les limites des optimisations basées sur des critères exclusivement magnétiques. Nous avons montré que minimiser l'ondulation de couple était certes important pour minimiser le bruit généré par la structure mais que ce critère n'était pas le seul. Ensuite, nous avons étudié en détail l'influence de la géométrie de la machine sur les performances magnéto-acoustiques des *MCF-AP*.

Enfin, dans le Chapitre 10, nous avons présenté les résultats de nos différentes optimisations. Nous avons ainsi montré les avantages et inconvénients des trois structures étudiées. En particulier, nous avons montré que pour obtenir des machines rayonnant une puissance acoustique faible pour des performances électromagnétiques moindres, les structures tétraphasées 16/12 étaient à privilégier. Au contraire, pour obtenir des machines avec des performances électromagnétiques importantes et donc avec une puissance acoustique rayonnée importante, les structures pentaphasées 20/18 étaient à privilégier.

Perspectives

Enfin, pour conclure sur ce mémoire de thèse, nous pouvons signaler quelques perspectives qui nous semblent intéressantes et qui pourraient être réalisées à court ou moyen terme. Nous allons en proposer quatre ici.

La première des perspectives serait de réaliser un prototype de *MCF-AP* « performant » et « silencieux ». Ce prototype serait choisi parmi les machines issues de nos différentes optimisations géométriques, c'est-à-dire parmi les machines issues des différents fronts de Pareto.

La deuxième des perspectives qui nous vient à l'esprit est de prendre en compte la saturation magnétique du fer. Cette problématique, qui n'est pas nouvelle, reste néanmoins fondamentale puisqu'elle est une des principales limitations du modèle proposé.

La troisième des perspectives est assez simple à mettre en œuvre et serait de réaliser une autre optimisation en prenant cette fois-ci quelques zones du plan Couple / Vitesse répondant à un cahier des charges de type véhicule électrique.

Enfin, dans une dernière perspective, nous pouvons citer la possibilité de prendre en compte d'autres sources de bruit dans *MCF-AP* comme par exemple le bruit d'origine aérodynamique. Nous pouvons ajouter ce bruit à celui provenant de phénomènes magnétiques et recommencer les optimisations. L'étude du bruit aérodynamique fait actuellement l'objet d'un sujet de thèse au laboratoire SATIE.

Annexes

Compléments au Chapitre 2 : Calcul des forces électromagnétiques

Il existe de nombreuses méthodes proposant des approches très différentes les unes des autres permettant la détermination d'un même phénomène : les contraintes magnétiques existantes au sein d'un matériau magnétique. L'objectif de cette annexe n'est pas de toutes les présenter car, non seulement cela prendrait trop de temps mais également, cela n'est pas le but de cette thèse. A contrario, nous allons présenter ici l'une d'entre elles : le calcul des forces magnétiques par la méthode dit du "tenseur de Maxwell". Avant de dérouler les différentes étapes de calcul, nous pouvons tout de même donner le nom des autres méthodes qui ont fait l'objet de nombreuses études et notamment dans [Barre, 2003]. Les différentes méthodes sont :

- La méthode des "courants équivalents" est une méthode consistant à calculer les forces magnétiques existantes au sein d'un matériau magnétique en remplaçant ce dernier par un matériau amagnétique parcouru par des courants volumiques et surfaciques équivalents et à calculer les forces correspondantes.
- La méthode des "masses magnétiques équivalentes" est une méthode proche de la méthode précédente sauf que dans ce cas-là, on remplace les courants surfaciques par des masses magnétiques équivalentes.
- La méthode de "la dérivée de l'énergie magnétique" est une méthode consistant à calculer l'énergie magnétique se trouvant au sein d'un matériau magnétique et à obtenir la force magnétique en dérivant cette dernière.
- Enfin, la méthode dit du "tenseur de Maxwell" qui est la méthode présentée ici.

A.1 Construction du tenseur de Maxwell

Une possibilité pour l'obtention des forces magnétiques à partir de l'expression du tenseur de Maxwell consiste tout d'abord à construire le tenseur de Maxwell à partir de l'équation de Laplace. Considérons un matériau magnétique où règne une induction magnétique \vec{B} (T) et un courant surfacique \vec{J} (A.m⁻²). La force volumique existante au sein du matériau magnétique \vec{f}_V (N.m⁻³) peut s'exprimer sous la forme :

$$\vec{f}_V = \vec{J} \times \vec{B} \quad (\text{A.1})$$

En utilisant les équations de Maxwell de la magnéto-statique, nous pouvons exprimer la force volumique uniquement en fonction du champ \vec{H} (A.m⁻¹) et de l'induction magnétique \vec{B} :

$$\vec{f}_V = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B} \quad (\text{A.2})$$

Pour construire le tenseur de Maxwell, il nous faut faire l'hypothèse d'un matériau magnétique linéaire dont la loi de comportement peut se mettre sous la forme $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ avec μ la perméabilité du matériau magnétique considéré. Par conséquent, nous pouvons écrire la force volumique uniquement en fonction de \vec{H} :

$$\vec{f}_V = \mu \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{H} \quad (\text{A.3})$$

En utilisant une propriété des opérateurs vectorielles (voir Équation, nous pouvons réécrire la force volumique sous la forme suivante :

$$\vec{f}_V = \mu \cdot \left[(\vec{H} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} - \frac{1}{2} \cdot \vec{\nabla} (\vec{H}^2) \right] \quad (\text{A.4})$$

Avant de continuer la construction du tenseur de Maxwell, nous allons projeter tous les vecteurs dans un repère cartésien ($\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$). La force volumique et le champ magnétique s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{f}_V &= f_1 \cdot \vec{x}_1 + f_2 \cdot \vec{x}_2 + f_3 \cdot \vec{x}_3 \\ \vec{H} &= H_1 \cdot \vec{x}_1 + H_2 \cdot \vec{x}_2 + H_3 \cdot \vec{x}_3 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

La force volumique peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{f}_V = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} H_1 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + H_2 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + H_3 \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial x_1} \\ H_1 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + H_2 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + H_3 \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial x_2} \\ H_1 \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + H_2 \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + H_3 \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x_3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

soit de manière condensée :

$$\vec{f}_V = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 H_i \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial x_1} \\ \sum_{i=1}^3 H_i \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial x_2} \\ \sum_{i=1}^3 H_i \cdot \frac{\partial H_3}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial |\vec{H}|^2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Nous allons utiliser le symbole du Dirac pour modifier quelque peu l'écriture de la force volumique :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Ce qui nous donne pour la force volumique :

$$\vec{f}_V = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \left(H_i \cdot H_1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{i,j} \cdot |\vec{H}|^2 - H_1 \cdot \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \right) \right] \\ \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \left(H_i \cdot H_2 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{i,j} \cdot |\vec{H}|^2 - H_2 \cdot \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \right) \right] \\ \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \left(H_i \cdot H_3 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{i,j} \cdot |\vec{H}|^2 - H_3 \cdot \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Puisque nous avons la propriété suivante :

$$\begin{cases} \mu \cdot \sum_{i=1}^3 \left[H_1 \cdot \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \right] = H_1 \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0 \\ \mu \cdot \sum_{i=1}^3 \left[H_2 \cdot \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \right] = H_2 \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0 \\ \mu \cdot \sum_{i=1}^3 \left[H_3 \cdot \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \right] = H_3 \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

nous pouvons écrire :

$$\vec{f}_V = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \mu \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(H_i \cdot H_1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{i,1} \cdot |\vec{H}|^2 \right) \right] \\ \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \left(H_i \cdot H_2 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{i,2} \cdot |\vec{H}|^2 \right) \right] \\ \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \left(H_i \cdot H_3 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{i,3} \cdot |\vec{H}|^2 \right) \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Finalement, nous pouvons introduire le tenseur de Maxwell $\vec{\vec{T}}$ par la définition suivante :

$$\vec{f}_V = \vec{\nabla} \cdot \vec{\vec{T}} \quad (\text{A.12})$$

soit :

$$\overline{\overline{T}} = \mu \cdot \begin{bmatrix} H_1^2 - \frac{1}{2} \cdot |\vec{H}|^2 & H_1 \cdot H_2 & H_1 \cdot H_3 \\ H_1 \cdot H_2 & H_2^2 - \frac{1}{2} \cdot |\vec{H}|^2 & H_2 \cdot H_3 \\ H_1 \cdot H_3 & H_2 \cdot H_3 & H_3^2 - \frac{1}{2} \cdot |\vec{H}|^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

A.2 Expression de la force électromagnétique

Afin d'être en mesure d'obtenir une expression analytique de la force électromagnétique, nous devons commencer par traduire le théorème de Green-Ostrograski pour le tenseur de Maxwell. Soit un matériau magnétique de volume V . La force totale F (en N) peut s'écrire :

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{f}_V \cdot dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \cdot dV \quad (\text{A.14})$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrograski, nous allons pouvoir introduire la force surfacique (f_S en N/m^{-2}) :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{T}} \cdot dV = \oiint_S \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{A.15})$$

soit :

$$\vec{f}_S = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \quad (\text{A.16})$$

avec S la surface extérieure du matériau et \vec{n} un vecteur normal dirigé vers l'extérieur du matériau.

Pour exprimer la force surfacique, nous allons utiliser un autre repère que le repère cartésien ($\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$). Soit \vec{n} un vecteur normal à la surface et \vec{t} un vecteur tangent à la surface et faisons coïncider le vecteur \vec{n} avec le vecteur \vec{x}_3 (voir Figure A.1).

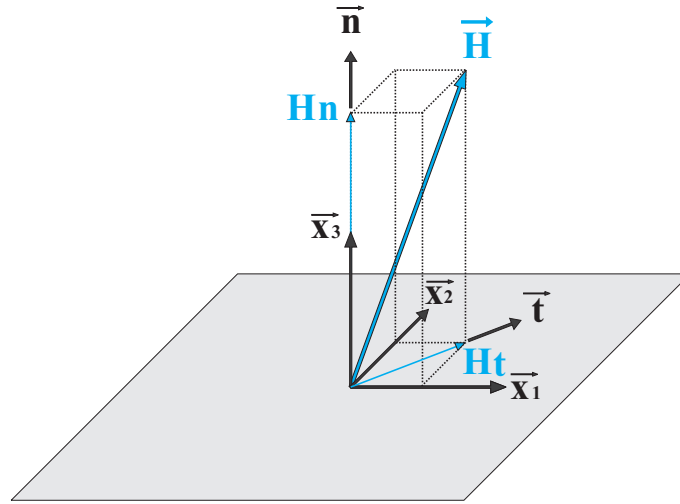


FIGURE A.1 – Champ magnétique à la surface de séparation de deux matériaux magnétiques

Le vecteur champ magnétique \vec{H} s'exprime dans les deux repères :

$$\vec{H} = H_1 \cdot \vec{x}_1 + H_2 \cdot \vec{x}_2 + H_3 \cdot \vec{x}_3 = H_n \cdot \vec{n} + H_t \cdot \vec{t} \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{n} = \vec{x}_3 \\ \vec{t} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ H_n = H_3 \\ H_t \cdot \vec{t} = H_1 \cdot \vec{x}_1 + H_2 \cdot \vec{x}_2 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

On peut donc exprimer la force surfacique \vec{f}_S dans les deux systèmes de coordonnées :

$$\begin{cases} \vec{f}_S &= \mu \cdot \left[H_3 \cdot (H_1 \cdot \vec{x}_1 + H_2 \cdot \vec{x}_2) + \frac{1}{2} \cdot (H_3^2 - H_1^2 - H_2^2) \cdot \vec{x}_3 \right] \\ \vec{f}_S &= \mu \cdot \left[H_n \cdot H_t \cdot \vec{t} + \frac{1}{2} \cdot (H_n^2 - H_t^2) \cdot \vec{n} \right] \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Pour un matériau magnétique linéaire ($\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$), nous obtenons finalement :

$$\vec{f}_S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{B_n^2}{\mu} - \mu \cdot H_t^2 \right) \cdot \vec{n} + B_n \cdot H_t \cdot \vec{t} \quad (\text{A.20})$$

Compléments au Chapitre 4 : Modèle Magnéto-Statique

B.1 Les opérateur vectoriels

B.1.1 Définitions des opérateurs vectoriels

Outils indispensable pour l'écriture des équations de Maxwell de la magnéto-statique, les opérateurs vectoriels qui vont nous servir dans tout le rapport de thèse sont présentés sur le Tableau B.1. Les différents opérateurs (gradient, divergence, rotationnel, ...) sont présentés dans deux systèmes de coordonnées : les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques. Ces dernières coordonnées sont privilégiées pour la modélisation des machines électriques tournantes.

Noms	Symboles	Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques
Changement de repères			$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$
Gradient	$\vec{\nabla} f$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} e_z$
Divergence	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \{ r \cdot F_r \} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Rotationnel	$\vec{\nabla} \times \vec{F}$	$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$	$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \{ r \cdot F_\theta \} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \end{cases}$
Laplacien scalaire	Δf	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Laplacien vectoriel	$\Delta \vec{F}$	$\Delta \vec{F} = \begin{cases} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{cases}$	$\Delta \vec{F} = \begin{cases} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} - \frac{F_r}{r^2} \\ \frac{\partial^2 F_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{F_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_z}{\partial r} \end{cases}$

TABLE B.1 – Définition des opérateurs vectoriel en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques

B.1.2 Quelques propriétés des opérateurs vectoriels

A la définition de ces opérateurs, nous pouvons ajouter deux propriétés importantes :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \quad (\text{B.1})$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \times \vec{F} = (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - \frac{1}{2} \cdot \vec{\nabla} (F^2) \quad (\text{B.2})$$

B.1.3 Théorème de Green-Ostrogradski

Soit :

- V un volume
 - S la frontière de ce volume
 - \vec{n} un vecteur normal à cette surface dirigé vers l'extérieur
 - \vec{F} un vecteur (éventuellement un tenseur) continument dérivable en tout point de V
- (B.3)

Le théorème de Green-Ostrogradski se formule de la manière suivante :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \cdot dV = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{B.4})$$

B.1.4 Théorème de Stokes

Soit :

$$\begin{aligned} C & \text{ une circulation fermée} \\ S & \text{ une surface définie par cette circulation} \\ \vec{n} & \text{ un vecteur normal à cette surface dirigé vers l'extérieur} \\ \vec{dl} & \text{ un vecteur dirigé le long de la circulation } C \\ \vec{B} & \text{ le vecteur induction magnétique} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Le théorème de Stokes se formule de la manière suivante :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{B.6})$$

B.2 Description du problème de magnéto-statique

Lois de comportement des matériaux magnétiques

Afin de décrire le problème de magnéto-statique pour arriver à l'obtention de l'équation de la magnéto-statique, ils nous faut connaître la loi de comportement reliant les différentes grandeurs magnétiques. Pour cela, considérons un matériaux magnétique quelconque autre que le fer (c'est dire considérons soit de l'air, soit un bobinage ou soit un aimant permanent). La loi reliant les différentes grandeurs est :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{B.7})$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{B} & : \text{ Induction magnétique} & (T) \\ \vec{H} & : \text{ Champ magnétique} & (A/m) \\ \vec{B}_r & : \text{ Induction magnétique rémanente} & (T) \\ \mu_0 & : \text{ Perméabilité du vide} & (4\pi \cdot 10^{-7} H/m) \\ \mu_r & : \text{ Perméabilité relative du matériau} \end{aligned}$$

C'est la loi classique de comportement d'un matériau magnétique linéaire.

Obtention de l'équation de la magnéto-statique

Soit \vec{J} le courant surfacique total traversant le matériaux magnétique. Les deux équations de Maxwell de la magnéto-statique sont les suivantes :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Nous avons un système de deux équations à résoudre. Pour obtenir une seule équation de la magnéto-statique, nous allons introduire le potentiel vecteur magnétique \vec{A} . Puisque l'induction magnétique \vec{B} vérifie la propriété $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ nous pouvons définir le potentiel vecteur par :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{B.9})$$

La définition précédente ne rendant pas unique le potentiel vecteur - ce dernier est défini à un gradient près ($\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ donnera le même champ \vec{B}), nous allons utiliser la jauge de Coulomb pour obtenir un potentiel vecteur unique, à savoir :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{B.10})$$

Nous avons à présent tous les outils en mains pour pouvoir parvenir l'équation de la magnéto-statique vérifiée par le potentiel vecteur. En combinant le système d'équation (Équation B.8) à la définition du potentiel vecteur (Équation B.9) et aux lois de comportement des matériaux magnétiques (Équation B.7), nous obtenons l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{B}_r \quad (\text{B.11})$$

L'équation précédente (Équation B.11) est modifiée en utilisant une des propriétés des opérateurs vectoriels (voir Annexe B, Équation B.1) :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{B}_r \quad (\text{B.12})$$

De plus, en utilisant la définition de la jauge de Coulomb (Équation B.10), nous parvenons à l'équation de la magnéto-statique :

$$\Delta \vec{A} = - \left(\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{B}_r \right) \quad (\text{B.13})$$

C'est cette dernière équation que nous devons résoudre.

Condition de passage entre deux matériaux magnétiques

Considérons deux matériaux magnétiques quelconques notés 1 et 2. Soit \vec{n}_{12} un vecteur normal à l'interface de séparation entre ces deux matériaux. Ce vecteur est dirigé du matériau 1 vers le matériau 2. Supposons de plus qu'il n'existe pas de densité superficielle de courant libre à l'interface entre ces deux matériaux magnétiques. Les conditions de passages sont les suivantes :

$$\begin{cases} \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Relations entre \vec{A} et \vec{B}

Supposons que le potentiel vecteur magnétique \vec{A} peut s'écrire en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sous la forme :

$$\vec{A} = A(r, \theta) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{B.15})$$

L'induction magnétique \vec{B} peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B} = B_r(r, \theta) \cdot \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta) \cdot \vec{e}_\theta \quad (\text{B.16})$$

avec :

$$\begin{cases} B_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial \theta}(r, \theta) \\ B_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial A}{\partial r}(r, \theta) \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

B.3 Notations utilisées pour la résolution dans les différentes zones de la machine

$\theta_i^{(1)}$: Début de la position angulaire de la zone $(1)_i$
$\theta_m^{(3)}$: Début de la position angulaire de la zone $(3)_m$
$\theta_m^{(4)}$: Début de la position angulaire de la zone $(4)_m$
ϵ_1	: Ouverture angulaire de la zone $(1)_i$
ϵ_3	: Ouverture angulaire de la zone $(3)_m$
ϵ_4	: Ouverture angulaire de la zone $(4)_m$
β_1	: Longueur angulaire de la zone $(1)_i$; $\beta_1 = 2\pi/N_r \cdot \epsilon_1$
β_3	: Longueur angulaire de la zone $(3)_m$; $\beta_3 = 2\pi/N_s \cdot \epsilon_3$
β_4	: Longueur angulaire de la zone $(4)_m$; $\beta_4 = 2\pi/N_s \cdot \epsilon_4$
μ_3	: Perméabilité relative de la zone $(3)_m$
μ_4	: Perméabilité relative de la zone $(4)_m$
R_{ri}	: Rayon intérieur du rotor
R_{re}	: Rayon extérieur du rotor
R_{si}	: Rayon intérieur du stator
R_b	: Rayon de la bobinage
R_{se}	: Rayon extérieur du stator
γ	: Position angulaire du rotor

avec :

$$\begin{cases} \theta_i^{(1)} = \frac{\pi \cdot (2i - 1)}{N_r} - \frac{\beta_1}{2} + \gamma & , \quad i \in [1, \dots, N_r] \\ \theta_m^{(3)} = \frac{\pi \cdot (2m - 1)}{N_s} - \frac{\beta_3}{2} & , \quad m \in [1, \dots, N_s] \\ \theta_m^{(4)} = \frac{2\pi \cdot (m - 1)}{N_s} - \frac{\beta_4}{2} & , \quad m \in [1, \dots, N_s] \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Les potentiels vecteurs, les inductions et les champs seront notés :

$A_i^{(1)}(r, \theta)$: Potentiel vecteur dans la zone $(1)_i$
$A^{(2)}(r, \theta)$: Potentiel vecteur dans la zone (2)
$A_m^{(3)}(r, \theta)$: Potentiel vecteur dans la zone $(3)_m$
$A_m^{(4)}(r, \theta)$: Potentiel vecteur dans la zone $(4)_m$
$B_{r,i}^{(1)}(r, \theta)$: Induction magnétique radiale dans la zone $(1)_i$
$B_r^{(2)}(r, \theta)$: Induction magnétique radiale dans la zone (2)
$B_{r,m}^{(3)}(r, \theta)$: Induction magnétique radiale dans la zone $(3)_m$
$B_{r,m}^{(4)}(r, \theta)$: Induction magnétique radiale dans la zone $(4)_m$
$B_{\theta,i}^{(1)}(r, \theta)$: Induction magnétique angulaire dans la zone $(1)_i$
$B_{\theta}^{(2)}(r, \theta)$: Induction magnétique angulaire dans la zone (2)
$B_{\theta,m}^{(3)}(r, \theta)$: Induction magnétique angulaire dans la zone $(3)_m$
$B_{\theta,m}^{(4)}(r, \theta)$: Induction magnétique angulaire dans la zone $(4)_m$
$H_{r,i}^{(1)}(r, \theta)$: Champ magnétique radiale dans la zone $(1)_i$
$H_r^{(2)}(r, \theta)$: Champ magnétique radiale dans la zone (2)
$H_{r,m}^{(3)}(r, \theta)$: Champ magnétique radiale dans la zone $(3)_m$
$H_{r,m}^{(4)}(r, \theta)$: Champ magnétique radiale dans la zone $(4)_m$
$H_{\theta,i}^{(1)}(r, \theta)$: Champ magnétique angulaire dans la zone $(1)_i$
$H_{\theta}^{(2)}(r, \theta)$: Champ magnétique angulaire dans la zone (2)
$H_{\theta,m}^{(3)}(r, \theta)$: Champ magnétique angulaire dans la zone $(3)_m$
$H_{\theta,m}^{(4)}(r, \theta)$: Champ magnétique angulaire dans la zone $(4)_m$

B.4 Ecriture des différentes grandeurs magnétiques

B.4.1 Potentiels vecteurs magnétiques A

$$\begin{aligned}
 A_i^{(1)}(r, \theta) &= A_{0,i}^{(1)} + \sum_{k=1}^K a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} + \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} \cdot \left(\frac{r}{R_{ri}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_1}} \right) \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)}) \right) \\
 A^{(2)}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^N \left[\left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \cos(n \cdot \theta) + \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sin(n \cdot \theta) \right] \\
 A_m^{(3)}(r, \theta) &= (-1)^m \cdot B_{rem} \cdot (R_{se} - r) + B_{0,m}^{(3)} \cdot \ln \left(\frac{r}{R_{se}} \right) + \\
 &\quad \sum_{k=1}^K b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(- \left(\frac{R_{se}}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \cdot \left(\frac{r}{R_{se}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_3}} + \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \right) \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_3} \cdot (\theta - \theta_m^{(3)}) \right) \\
 A_m^{(4)}(r, \theta) &= A_{0,m}^{(4)} + \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot \left(R_b^2 \cdot \ln \left(\frac{r}{R_b} \right) - \frac{r^2}{2} \right) + \sum_{k=1}^K \left[b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(\left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} \cdot \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} + \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \mu_0 \cdot \mu_4 \frac{J_{k,m}}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \cdot \left(\frac{\beta_4}{k\pi} \cdot 2 \cdot R_b^2 \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} - r^2 \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)}) \right)
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

B.4.2 Inductions magnétiques B

$$\left\{ \begin{aligned}
 B_{r,i}^{(1)}(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{k\pi}{\beta_1} \cdot a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(\left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} + \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} \cdot \left(\frac{r}{R_{ri}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_1}} \right) \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)}) \right) \\
 B_{\theta,i}^{(1)}(r, \theta) &= \sum_{k=1}^K \frac{k\pi}{\beta_1} \cdot a_{k,i}^{(1)} \cdot \left(-\frac{1}{R_{re}} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}-1} + \frac{1}{R_{ri}} \cdot \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_1}} \cdot \left(\frac{r}{R_{ri}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_1}-1} \right) \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_1} \cdot (\theta - \theta_i^{(1)}) \right) \\
 B_r^{(2)}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=1}^N n \cdot \left[- \left(a_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + b_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \sin(n \cdot \theta) + \left(c_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^n + d_n^{(2)} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n} \right) \cdot \cos(n \cdot \theta) \right] \\
 B_\theta^{(2)}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^N n \cdot \left[\left(-a_n^{(2)} \cdot \frac{1}{R_{si}} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{n-1} + b_n^{(2)} \cdot \frac{1}{R_{re}} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n-1} \right) \cdot \cos(n \cdot \theta) + \right. \\
 &\quad \left. \left(-c_n^{(2)} \cdot \frac{1}{R_{si}} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{n-1} + d_n^{(2)} \cdot \frac{1}{R_{re}} \cdot \left(\frac{r}{R_{re}} \right)^{-n-1} \right) \cdot \sin(n \cdot \theta) \right] \\
 B_{r,m}^{(3)}(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{k\pi}{\beta_3} \cdot b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(- \left(\frac{R_{se}}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \cdot \left(\frac{r}{R_{se}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_3}} + \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \right) \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{\beta_3} \cdot (\theta - \theta_m^{(3)}) \right) \\
 B_{\theta,m}^{(3)}(r, \theta) &= (-1)^m \cdot B_{rem} - \frac{B_{0,m}^{(3)}}{r} + \\
 &\quad \sum_{k=1}^K \frac{k\pi}{\beta_3} \cdot b_{k,m}^{(3)} \cdot \left(\frac{1}{R_{se}} \cdot \left(\frac{R_{se}}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}} \cdot \left(\frac{r}{R_{se}} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_3}-1} + \frac{1}{R_{si}} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_3}-1} \right) \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_3} \cdot (\theta - \theta_m^{(3)}) \right) \\
 B_{r,m}^{(4)}(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^K \frac{k\pi}{\beta_4} \cdot \left[b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(\left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} \cdot \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} + \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \mu_0 \cdot \mu_4 \frac{J_{k,m}}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \cdot \left(\frac{\beta_4}{k\pi} \cdot 2 \cdot R_b^2 \cdot \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}} - r^2 \right) \right] \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)}) \right) \\
 B_{\theta,m}^{(4)}(r, \theta) &= \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{J_{0,m}}{2} \cdot \left(r - \frac{R_b^2}{r} \right) + \sum_{k=1}^K \left[\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot b_{k,m}^{(4)} \cdot \left(-\frac{1}{R_b} \cdot \left(\frac{R_b}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}} \cdot \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}-1} + \frac{1}{R_{si}} \cdot \left(\frac{r}{R_{si}} \right)^{-\frac{k\pi}{\beta_4}-1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \mu_0 \cdot \mu_4 \frac{2 \cdot J_{k,m}}{4 - \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \right)^2} \cdot \left(r - R_b \cdot \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{k\pi}{\beta_4}-1} \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{k\pi}{\beta_4} \cdot (\theta - \theta_m^{(4)}) \right)
 \end{aligned} \right. \tag{B.20}$$

B.4.3 Champs magnétiques H

$$\begin{cases}
 H_{r,i}^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{\mu_0} \cdot B_{r,i}^{(1)}(r, \theta) \\
 H_{\theta,i}^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{\mu_0} \cdot B_{\theta,i}^{(1)}(r, \theta) \\
 H_r^{(2)}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{1} \cdot B_r^{(2)}(r, \theta) \\
 H_{\theta}^{(2)}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{1} \cdot B_{\theta}^{(2)}(r, \theta) \\
 H_{r,i}^{(3)}(r, \theta) = \frac{1}{\mu_0 \mu_3} \cdot B_{r,m}^{(3)}(r, \theta) \\
 H_{\theta,i}^{(3)}(r, \theta) = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_3} \cdot [B_{\theta,m}^{(3)}(r, \theta) - (-1)^m \cdot B_{rem}] \\
 H_r^{(4)}(r, \theta) = \frac{\mu_0 \cdot \mu_4}{1} \cdot B_r^{(4)}(r, \theta) \\
 H_{\theta}^{(4)}(r, \theta) = \frac{\mu_0 \cdot \mu_4}{1} \cdot B_{\theta}^{(4)}(r, \theta)
 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

B.5 Notations utilisées pour l'écriture des conditions aux limites

Pour écrire les conditions aux limites entre les différentes zones de la machine, nous allons utiliser les notations suivantes :

$$\begin{cases}
 \sigma_{i,j}^{(ss)}(n, k) = \int_{\theta_i^{(j)}}^{\theta_i^{(j)} + \beta_j} \sin(n\theta) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\beta_j} \cdot (\theta - \theta_i^{(j)})\right) \cdot d\theta \\
 \sigma_{i,j}^{(cs)}(n, k) = \int_{\theta_i^{(j)}}^{\theta_i^{(j)} + \beta_j} \cos(n\theta) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\beta_j} \cdot (\theta - \theta_i^{(j)})\right) \cdot d\theta \\
 \sigma_{i,j}^{(cc)}(n, k) = \int_{\theta_i^{(j)}}^{\theta_i^{(j)} + \beta_j} \cos(n\theta) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_j} \cdot (\theta - \theta_i^{(j)})\right) \cdot d\theta \\
 \sigma_{i,j}^{(sc)}(n, k) = \int_{\theta_i^{(j)}}^{\theta_i^{(j)} + \beta_j} \sin(n\theta) \cdot \cos\left(\frac{k\pi}{\beta_j} \cdot (\theta - \theta_i^{(j)})\right) \cdot d\theta \\
 \sigma_{i,j}^{(c)}(n) = \int_{\theta_i^{(j)}}^{\theta_i^{(j)} + \beta_j} \cos(n\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{n} \cdot [-\sin(n\theta_i^{(j)}) + \sin(n \cdot (\beta_j + \theta_i^{(j)}))] \\
 \sigma_{i,j}^{(s)}(n) = \int_{\theta_i^{(j)}}^{\theta_i^{(j)} + \beta_j} \sin(n\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{n} \cdot [\cos(n\theta_i^{(j)}) - \cos(n \cdot (\beta_j + \theta_i^{(j)}))]
 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

Si $\beta_j \cdot n = k\pi$

$$\begin{cases}
 \sigma_{i,j}^{(ss)}(n, k) = \frac{1}{4n} \cdot [2\beta_j n \cdot \cos(n\theta_i^{(j)}) + \sin(n\theta_i^{(j)}) - \sin(n \cdot (2\beta_j + \theta_i^{(j)}))] \\
 \sigma_{i,j}^{(cs)}(n, k) = \frac{1}{4n} \cdot [-2\beta_j n \cdot \sin(n\theta_i^{(j)}) + \cos(n\theta_i^{(j)}) - \cos(n \cdot (2\beta_j + \theta_i^{(j)}))] \\
 \sigma_{i,j}^{(cc)}(n, k) = \frac{1}{4n} \cdot [2\beta_j n \cdot \cos(n\theta_i^{(j)}) - \sin(n\theta_i^{(j)}) + \sin(n \cdot (2\beta_j + \theta_i^{(j)}))] \\
 \sigma_{i,j}^{(sc)}(n, k) = \frac{1}{4n} \cdot [2\beta_j n \cdot \sin(n\theta_i^{(j)}) + \cos(n\theta_i^{(j)}) - \cos(n \cdot (2\beta_j + \theta_i^{(j)}))]
 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

Si $\beta_j \cdot n \neq k\pi$

$$\begin{cases}
 \sigma_{i,j}^{(ss)}(n, k) = \frac{\beta_j k\pi}{(\beta_j n - k\pi) \cdot (\beta_j n + k\pi)} \cdot [-\sin(n\theta_i^{(j)}) + (-1)^k \cdot \sin(n \cdot (\beta_j + \theta_i^{(j)}))] \\
 \sigma_{i,j}^{(cs)}(n, k) = \frac{\beta_j k\pi}{(\beta_j n - k\pi) \cdot (\beta_j n + k\pi)} \cdot [-\cos(n\theta_i^{(j)}) + (-1)^k \cdot \cos(n \cdot (\beta_j + \theta_i^{(j)}))] \\
 \sigma_{i,j}^{(cc)}(n, k) = \frac{\beta_j^2 n}{(\beta_j n - k\pi) \cdot (\beta_j n + k\pi)} \cdot [-\sin(n\theta_i^{(j)}) + (-1)^k \cdot \sin(n \cdot (\beta_j + \theta_i^{(j)}))] \\
 \sigma_{i,j}^{(sc)}(n, k) = \frac{\beta_j^2 n}{(\beta_j n - k\pi) \cdot (\beta_j n + k\pi)} \cdot [\cos(n\theta_i^{(j)}) - (-1)^k \cdot \cos(n \cdot (\beta_j + \theta_i^{(j)}))]
 \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

B.6 Implantation numérique

B.6.1 Notations

$$L = \begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & L_{1,3} & L_{1,4} & L_{1,5} & L_{1,6} & L_{1,7} & L_{1,8} & L_{1,9} & L_{1,10} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & L_{2,3} & L_{2,4} & L_{2,5} & L_{2,6} & L_{2,7} & L_{2,8} & L_{2,9} & L_{2,10} \\ L_{3,1} & L_{3,2} & L_{3,3} & L_{3,4} & L_{3,5} & L_{3,6} & L_{3,7} & L_{3,8} & L_{3,9} & L_{3,10} \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & L_{4,4} & L_{4,5} & L_{4,6} & L_{4,7} & L_{4,8} & L_{4,9} & L_{4,10} \\ L_{5,1} & L_{5,2} & L_{5,3} & L_{5,4} & L_{5,5} & L_{5,6} & L_{5,7} & L_{5,8} & L_{5,9} & L_{5,10} \\ L_{6,1} & L_{6,2} & L_{6,3} & L_{6,4} & L_{6,5} & L_{6,6} & L_{6,7} & L_{6,8} & L_{6,9} & L_{6,10} \\ L_{7,1} & L_{7,2} & L_{7,3} & L_{7,4} & L_{7,5} & L_{7,6} & L_{7,7} & L_{7,8} & L_{7,9} & L_{7,10} \\ L_{8,1} & L_{8,2} & L_{8,3} & L_{8,4} & L_{8,5} & L_{8,6} & L_{8,7} & L_{8,8} & L_{8,9} & L_{8,10} \\ L_{9,1} & L_{9,2} & L_{9,3} & L_{9,4} & L_{9,5} & L_{9,6} & L_{9,7} & L_{9,8} & L_{9,9} & L_{9,10} \\ L_{10,1} & L_{10,2} & L_{10,3} & L_{10,4} & L_{10,5} & L_{10,6} & L_{10,7} & L_{10,8} & L_{10,9} & L_{10,10} \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

$$I_N : \text{Matrice identité de taille } (N, N) \quad (\text{B.26})$$

$$(0)_{N,M} : \text{Matrice nulle de taille } (N, M) \quad (\text{B.27})$$

$$D_K = \left. \begin{pmatrix} \overbrace{1 & 0 & \cdots & 0}^K \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K \end{pmatrix} \right\} K \quad (\text{B.28})$$

$$D_{K,N_r} = \left. \begin{pmatrix} \overbrace{D_K & 0 & \cdots & 0}^{K \cdot N_r} \\ 0 & D_K & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_K \end{pmatrix} \right\} K \cdot N_r \quad (\text{B.29})$$

$$D_{K,N_s} = \left. \begin{pmatrix} \overbrace{D_K & 0 & \cdots & 0}^{K \cdot N_r} \\ 0 & D_K & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_K \end{pmatrix} \right\} K \cdot N_s \quad (\text{B.30})$$

$$M_{1,K} = \left. \begin{pmatrix} \overbrace{\left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{\beta_1}} & 0 & \cdots & 0}^K \\ 0 & \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{\beta_1}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{R_{ri}}{R_{re}} \right)^{\frac{2 \cdot K \cdot \pi}{\beta_1}} \end{pmatrix} \right\} K \quad (\text{B.31})$$

$$M_{1,K,N_r} = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{M_{1,K} & 0 & \cdots & 0}^{K \cdot N_r} \\ 0 & M_{1,K} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{1,K} \end{array} \right) \Bigg\}^{K \cdot N_r} \quad (\text{B.32})$$

$$M_{3,K} = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\left(\frac{R_{si}}{R_{se}} \right)^{\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{\beta_3}} & 0 & \cdots & 0}^K \\ 0 & \left(\frac{R_{si}}{R_{se}} \right)^{\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{\beta_3}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{R_{si}}{R_{se}} \right)^{\frac{2 \cdot K \cdot \pi}{\beta_3}} \end{array} \right) \Bigg\}^K \quad (\text{B.33})$$

$$M_{3,K,N_s} = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{M_{3,K} & 0 & \cdots & 0}^{K \cdot N_s} \\ 0 & M_{3,K} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{3,K} \end{array} \right) \Bigg\}^{K \cdot N_s} \quad (\text{B.34})$$

$$M_{4,K} = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{\beta_4}} & 0 & \cdots & 0}^K \\ 0 & \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{\beta_4}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right)^{\frac{2 \cdot K \cdot \pi}{\beta_4}} \end{array} \right) \Bigg\}^K \quad (\text{B.35})$$

$$M_{4,K,N_s} = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{M_{4,K} & 0 & \cdots & 0}^{K \cdot N_s} \\ 0 & M_{4,K} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_{4,K} \end{array} \right) \Bigg\}^{K \cdot N_s} \quad (\text{B.36})$$

$$D_N = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 0 & \cdots & 0}^N \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N \end{array} \right) \Bigg\}^N \quad (\text{B.37})$$

$$M_N = \left. \left(\overbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{R_{re}}{R_{si}}\right)^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{R_{re}}{R_{si}}\right)^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{R_{re}}{R_{si}}\right)^N \end{pmatrix}}^N \right) \right\}_N \quad (\text{B.38})$$

$$S_{i,1}^{(ab)} = \left. \left(\overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{i,1}^{(ab)}(1,1) & \sigma_{i,1}^{(ab)}(1,2) & \cdots & \sigma_{i,1}^{(ab)}(1,K) \\ \sigma_{i,1}^{(ab)}(2,1) & \sigma_{i,1}^{(ab)}(2,2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_{i,1}^{(ab)}(N-1,K) \\ \sigma_{i,1}^{(ab)}(N,1) & \cdots & \sigma_{i,1}^{(ab)}(N,K-1) & \sigma_{i,1}^{(ab)}(N,K) \end{pmatrix}}^K \right) \right\}_N \quad (\text{B.39})$$

$$S_1^{(ab)} = \left. \left(\overbrace{\begin{pmatrix} S_{1,1}^{(ab)} \\ S_{2,1}^{(ab)} \\ \vdots \\ S_{N_r,1}^{(ab)} \end{pmatrix}}^N \right) \right\}_{K \cdot N_r} \quad (\text{B.40})$$

$$S_{m,p}^{(ab)} = \left. \left(\overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{m,1}^{(ab)}(1,1) & \sigma_{m,1}^{(ab)}(1,2) & \cdots & \sigma_{m,1}^{(ab)}(1,K) \\ \sigma_{m,1}^{(ab)}(2,1) & \sigma_{m,1}^{(ab)}(2,2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_{m,1}^{(ab)}(N-1,K) \\ \sigma_{m,1}^{(ab)}(N,1) & \cdots & \sigma_{m,1}^{(ab)}(N,K-1) & \sigma_{m,1}^{(ab)}(N,K) \end{pmatrix}}^K \right) \right\}_N \quad (\text{B.41})$$

$$S_p^{(ab)} = \left. \left(\overbrace{\begin{pmatrix} S_{1,p}^{(ab)} \\ S_{2,p}^{(ab)} \\ \vdots \\ S_{N_s,p}^{(ab)} \end{pmatrix}}^N \right) \right\}_{K \cdot N_s} \quad (\text{B.42})$$

$$S_{i,1}^{(a)} = \left. \left(\overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{i,1}^{(a)}(1) \\ \sigma_{i,1}^{(a)}(2) \\ \vdots \\ \sigma_{i,1}^{(a)}(N) \end{pmatrix}}^1 \right) \right\}_N \quad (\text{B.43})$$

$$S_1^{(a)} = \left. \left(\overbrace{\begin{pmatrix} S_{1,1}^{(a)} & S_{2,1}^{(a)} & \cdots & S_{N_r,1}^{(a)} \end{pmatrix}}^{N_r} \right) \right\}_N \quad (\text{B.44})$$

$$S_{m,p}^{(a)} = \left. \begin{array}{c} \overbrace{\left(\begin{array}{c} \sigma_{m,p}^{(a)}(1) \\ \sigma_{m,p}^{(a)}(2) \\ \vdots \\ \sigma_{m,p}^{(a)}(N) \end{array} \right)}^1 \end{array} \right\}_N \quad (\text{B.45})$$

$$S_p^{(a)} = \left(\overbrace{S_{1,p}^{(a)} \quad S_{2,p}^{(a)} \quad \dots \quad S_{N_r,p}^{(a)}}^{N_s} \right) \}_N \quad (\text{B.46})$$

$$I_V = \left. \begin{array}{c} \overbrace{\left(\begin{array}{c} (-1)^1 \\ (-1)^2 \\ \vdots \\ (-1)^{N_s} \end{array} \right)}^1 \end{array} \right\}_{N_s} \quad (\text{B.47})$$

B.6.2 Mise en forme des équations

Continuité de l'induction normale entre les zones $(1)_i$ et (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{1,1} = (0)_{K \cdot N_r, N_r} \\ L_{1,2} = \frac{\pi}{2} \cdot D_{K, N_r} \cdot (I_{K \cdot N_r} + M_{1, K, N_r}) \\ L_{1,3} = -S_1^{(ss)} \cdot (D_N \cdot M_N) \\ L_{1,4} = -S_1^{(ss)} \cdot D_N \\ L_{1,5} = S_1^{(cs)} \cdot (D_N \cdot M_N) \\ L_{1,6} = S_1^{(cs)} \cdot D_N \\ L_{1,7} = (0)_{K \cdot N_r, N_s} \\ L_{1,8} = (0)_{K \cdot N_r, K \cdot N_s} \\ L_{1,9} = (0)_{K \cdot N_r, N_s} \\ L_{1,10} = (0)_{K \cdot N_r, K \cdot N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.48})$$

$$U_1 = (0)_{K \cdot N_r, 1} \quad (\text{B.49})$$

Continuité du champ magnétique tangentielle entre les zones $(1)_i$ et (2) : Condition 1

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{2,1} = (0)_{N, N_r} \\ L_{2,2} = -\frac{1}{\beta_1} \cdot (S_1^{(cc)})^T \cdot \left(I_{K \cdot N_r} - \frac{R_{ri}}{R_{re}} \cdot M_{1, K, N_r} \right) \cdot D_{K, N_r} \\ L_{2,3} = D_N \cdot M_N \\ L_{2,4} = -D_N \\ L_{2,5} = (0)_{N, N} \\ L_{2,6} = (0)_{N, N} \\ L_{2,7} = (0)_{N, N_s} \\ L_{2,8} = (0)_{N, K \cdot N_s} \\ L_{2,9} = (0)_{N, N_s} \\ L_{2,10} = (0)_{N, K \cdot N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.50})$$

$$U_2 = (0)_{N, 1} \quad (\text{B.51})$$

Continuité du champ magnétique tangentielle entre les zones (1)_i et (2) : Condition 2

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{3,1} = (0)_{N,N_r} \\ L_{3,2} = -\frac{1}{\beta_1} \cdot (S_1^{(sc)})^T \cdot \left(I_{K \cdot N_r} - \frac{R_{ri}}{R_{re}} \cdot M_{1,K,N_r} \right) \cdot D_{K,N_r} \\ L_{3,3} = (0)_{N,N} \\ L_{3,4} = (0)_{N,N} \\ L_{3,5} = D_N \cdot M_N \\ L_{3,6} = -D_N \\ L_{3,7} = (0)_{N,N_s} \\ L_{3,8} = (0)_{N,K \cdot N_s} \\ L_{3,9} = (0)_{N,N_s} \\ L_{3,10} = (0)_{N,K \cdot N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.52})$$

$$U_3 = (0)_{N,1} \quad (\text{B.53})$$

Continuité de l'induction normale entre les zones (2) et (3)_m

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{4,1} = (0)_{K \cdot N_s, N_r} \\ L_{4,2} = (0)_{K \cdot N_s, K \cdot N_r} \\ L_{4,3} = -S_3^{(ss)} \cdot D_N \\ L_{4,4} = -S_3^{(ss)} \cdot D_N \cdot M_N \\ L_{4,5} = S_3^{(cs)} \cdot D_N \\ L_{4,6} = S_3^{(cs)} \cdot D_N \cdot M_N \\ L_{4,7} = (0)_{K \cdot N_s, N_s} \\ L_{4,8} = \frac{\pi}{2} \cdot D_{K,N_s} \cdot (I_{K \cdot N_s} - M_{3,K,N_s}) \\ L_{4,9} = (0)_{K \cdot N_s, N_s} \\ L_{4,10} = (0)_{K \cdot N_s, K \cdot N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.54})$$

$$U_4 = (0)_{K \cdot N_s, 1} \quad (\text{B.55})$$

Continuité de l'induction normale entre les zone (2) et (4)_m

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{5,1} = (0)_{K \cdot N_s, N_r} \\ L_{5,2} = (0)_{K \cdot N_s, K \cdot N_r} \\ L_{5,3} = -S_4^{(ss)} \cdot D_N \\ L_{5,4} = -S_4^{(ss)} \cdot D_N \cdot M_N \\ L_{5,5} = S_4^{(cs)} \cdot D_N \\ L_{5,6} = S_4^{(cs)} \cdot D_N \cdot M_N \\ L_{5,7} = (0)_{K \cdot N_s, N_s} \\ L_{5,8} = (0)_{K \cdot N_s, K \cdot N_s} \\ L_{5,9} = (0)_{K \cdot N_s, N_s} \\ L_{5,10} = \frac{\pi}{2} \cdot D_{K,N_s} \cdot (I_{K \cdot N_s} + M_{4,K,N_s}) \end{array} \right. \quad (\text{B.56})$$

$$U_5 = -\frac{\pi}{2} \cdot \left(2 \cdot R_b^2 \cdot \frac{\beta_4}{\pi} \cdot (D_{K,N_s})^{-1} \cdot (M_{4,K,N_s})^{\frac{1}{2}} - R_{si}^2 \cdot I_{K \cdot N_s} \right) \times \left(D_{K,N_s} \cdot \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot J_{km} \cdot \left(4 \cdot I_{K \cdot N_s} - \left(\frac{D_{K,N_s} \cdot \pi}{\beta_4} \right)^2 \right)^{-1} \right)^T \quad (\text{B.57})$$

Continuité du champ magnétique tangentielle entre les zones (2) et (3)_m – (4)_m : Condition 1

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{6,1} = (0)_{N,N_r} \\ L_{6,2} = (0)_{N,K \cdot N_r} \\ L_{6,3} = \pi \cdot D_N \\ L_{6,4} = -\pi \cdot D_N \cdot M_N \\ L_{6,5} = (0)_{N,N} \\ L_{6,6} = (0)_{N,N} \\ L_{6,7} = -\frac{1}{\mu_3} \cdot S_3^{(c)} \\ L_{6,8} = \frac{1}{\mu_3} \cdot \frac{\pi}{\beta_3} \cdot \left(S_3^{(cc)}\right)^T \cdot (I_{K \cdot N_s} + M_{3,K,N_s}) \cdot D_{K,N_s} \\ L_{6,9} = (0)_{N,N_s} \\ L_{6,10} = \frac{1}{\mu_4} \cdot \frac{\pi}{\beta_4} \cdot \left(S_4^{(cc)}\right)^T \cdot (I_{K \cdot N_s} - M_{4,K,N_s}) \cdot D_{K,N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.58})$$

$$U_6 = \frac{\mu_0}{2} \cdot (R_b^2 - R_{si}^2) \cdot S_4^{(c)} \cdot (J_{0m})^T + 2 \cdot \mu_0 \cdot R_{si} \cdot \left(S_4^{(cc)}\right)^T \times \left[\left(R_{si} \cdot I_{K \cdot N_s} - R_b \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_b} \cdot M_{4,K,N_s} \right)^{-1} \right) \cdot J_{km} \cdot \left(4 \cdot I_{K \cdot N_s} - \left(\frac{D_{K,N_s} \cdot \pi}{\beta_4} \right)^2 \right)^{-1} \right]^T \quad (\text{B.59})$$

Continuité du champ magnétique tangentielle entre les zones (2) et (3)_m – (4)_m : Condition 2

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{7,1} = (0)_{N,N_r} \\ L_{7,2} = (0)_{N,K \cdot N_r} \\ L_{7,3} = (0)_{N,N} \\ L_{7,4} = (0)_{N,N} \\ L_{7,5} = \pi \cdot D_N \\ L_{7,6} = -\pi \cdot D_N \cdot M_N \\ L_{7,7} = -\frac{1}{\mu_3} \cdot S_3^{(s)} \\ L_{7,8} = \frac{1}{\mu_3} \cdot \frac{\pi}{\beta_3} \cdot \left(S_3^{(sc)}\right)^T \cdot (I_{K \cdot N_s} + M_{3,K,N_r}) \cdot D_{K,N_s} \\ L_{7,9} = (0)_{N,N_s} \\ L_{7,10} = \frac{1}{\mu_4} \cdot \frac{\pi}{\beta_4} \cdot \left(S_4^{(sc)}\right)^T \cdot (I_{K \cdot N_s} - M_{4,K,N_s}) \cdot D_{K,N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.60})$$

$$U_7 = \frac{\mu_0}{2} \cdot (R_b^2 - R_{si}^2) \cdot S_4^{(s)} \cdot (J_{0m})^T + 2 \cdot \mu_0 \cdot R_{si} \cdot \left(S_4^{(sc)}\right)^T \times \left[\left(R_{si} \cdot I_{K \cdot N_s} - R_b \cdot \left(\frac{R_{si}}{R_b} \cdot M_{4,K,N_s} \right)^{-1} \right) \cdot J_{km} \cdot \left(4 \cdot I_{K \cdot N_s} - \left(\frac{D_{K,N_s} \cdot \pi}{\beta_4} \right)^2 \right)^{-1} \right]^T \quad (\text{B.61})$$

Continuité des potentiels vecteurs entre les zones $(1)_i$ et (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{8,1} = -I_{N_r} \\ L_{8,2} = (0)_{N_r, K \cdot N_r} \\ L_{8,3} = \frac{1}{\beta_1} \cdot M_N \cdot S_1^{(c)} \\ L_{8,4} = \frac{1}{\beta_1} \cdot I_N \cdot S_1^{(c)} \\ L_{8,5} = \frac{1}{\beta_1} \cdot M_N \cdot S_1^{(s)} \\ L_{8,6} = \frac{1}{\beta_1} \cdot I_N \cdot S_1^{(s)} \\ L_{8,7} = (0)_{N_r, N_s} \\ L_{8,8} = (0)_{N_r, K \cdot N_s} \\ L_{8,9} = (0)_{N_r, N_s} \\ L_{8,10} = (0)_{N_r, K \cdot N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.62})$$

$$U_8 = (0)_{N_r, 1} \quad (\text{B.63})$$

Continuité des potentiels vecteurs entre les zones $(3)_m$ et (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{9,1} = (0)_{N_s, N_r} \\ L_{9,2} = (0)_{N_s, K \cdot N_r} \\ L_{9,3} = \frac{1}{\beta_3} \cdot (S_3^{(c)})^T \cdot I_N \\ L_{9,4} = \frac{1}{\beta_3} \cdot (S_3^{(c)})^T \cdot M_N \\ L_{9,5} = \frac{1}{\beta_3} \cdot (S_3^{(s)})^T \cdot I_N \\ L_{9,6} = \frac{1}{\beta_3} \cdot (S_3^{(s)})^T \cdot M_N \\ L_{9,7} = -\ln \left(\frac{R_{si}}{R_{se}} \right) \cdot I_{N_s} \\ L_{9,8} = (0)_{N_s, K \cdot N_s} \\ L_{9,9} = (0)_{N_s, N_s} \\ L_{9,10} = (0)_{N_s, K \cdot N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.64})$$

$$U_9 = I_V \cdot B_{rem} \cdot (R_{se} - R_{si}) \quad (\text{B.65})$$

Continuité des potentiels vecteurs entre les zones $(4)_m$ et (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{10,1} = (0)_{N_s, N_r} \\ L_{10,2} = (0)_{N_s, K \cdot N_r}^T \\ L_{10,3} = \frac{1}{\beta_4} \cdot (S_4^{(c)})^T \cdot I_N \\ L_{10,4} = \frac{1}{\beta_4} \cdot (S_4^{(c)})^T \cdot M_N \\ L_{10,5} = \frac{1}{\beta_4} \cdot (S_4^{(s)})^T \cdot I_N \\ L_{10,6} = \frac{1}{\beta_4} \cdot (S_4^{(s)})^T \cdot M_N \\ L_{10,7} = (0)_{N_s, N_s} \\ L_{10,8} = (0)_{N_s, K \cdot N_s} \\ L_{10,9} = -I_{N_s} \\ L_{10,10} = (0)_{N_s, K \cdot N_s} \end{array} \right. \quad (\text{B.66})$$

$$U_{10} = \mu_0 \cdot \mu_4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(R_b^2 \cdot \ln \left(\frac{R_{si}}{R_b} \right) - \frac{R_{si}^2}{2} \right) \cdot (J_{0m})^T \quad (\text{B.67})$$

B.7 Comparaison à géométrie et hypothèses identiques

Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 2

Caractéristiques à vide présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.1.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.2.
- Flux magnétiques à vide dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.3a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.3b.

B.7. COMPARAISON À GÉOMÉTRIE ET HYPOTHÈSES IDENTIQUES

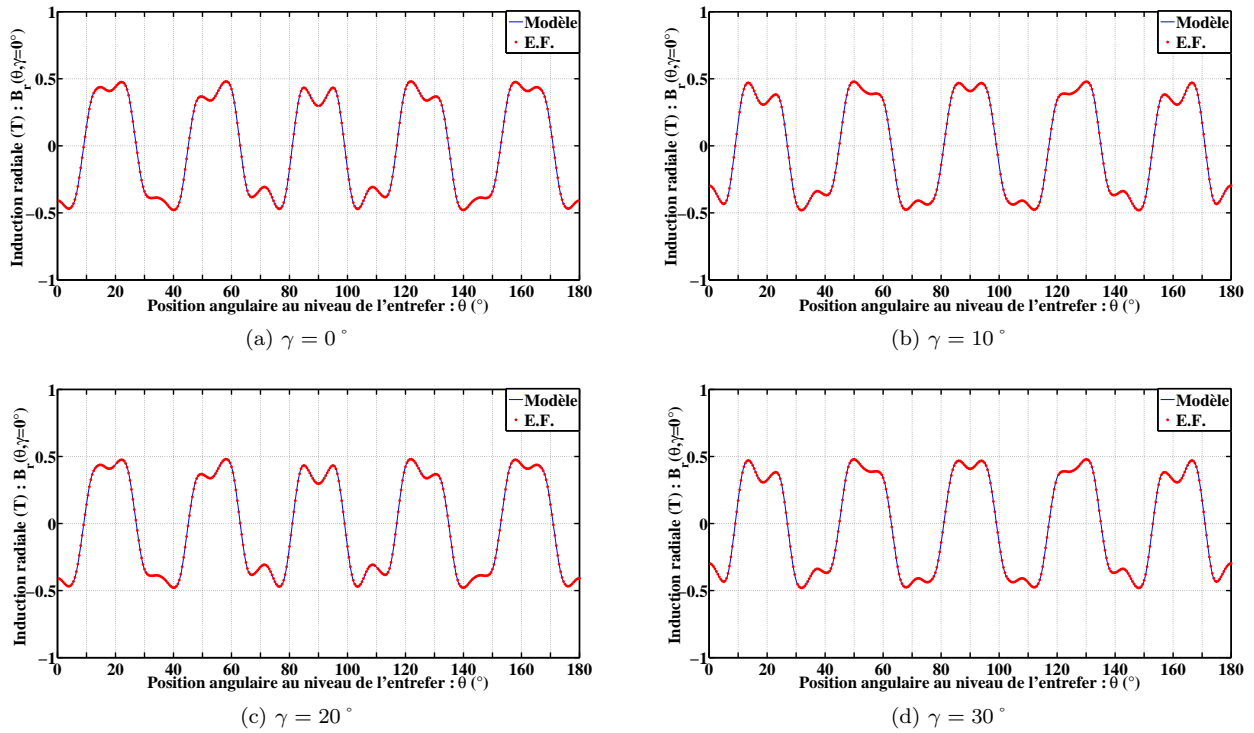


FIGURE B.1 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 2 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer

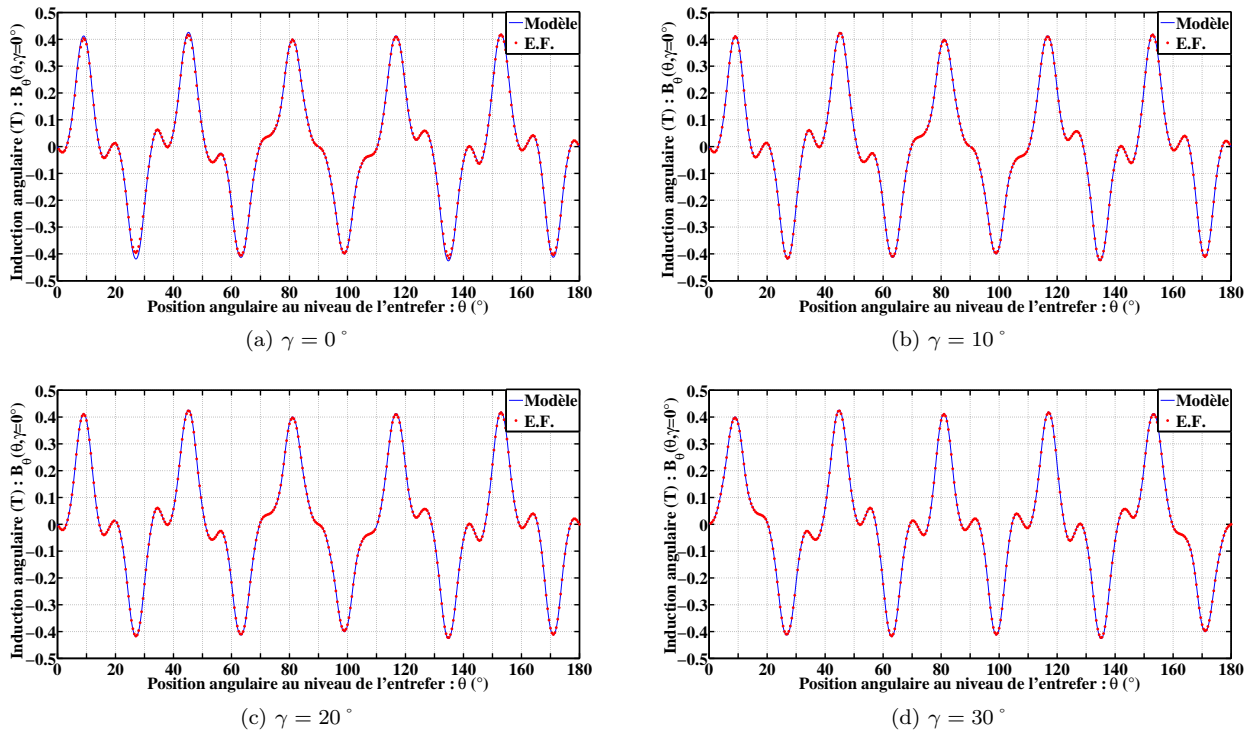


FIGURE B.2 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 2 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer

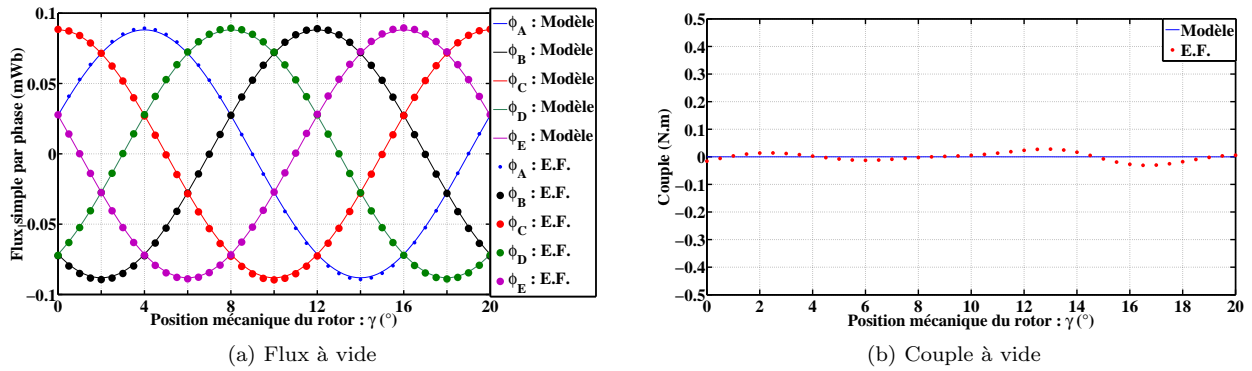


FIGURE B.3 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 2 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Caractéristiques en charge présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.4.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.5.
- Flux magnétiques en charge dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.6a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.6b.

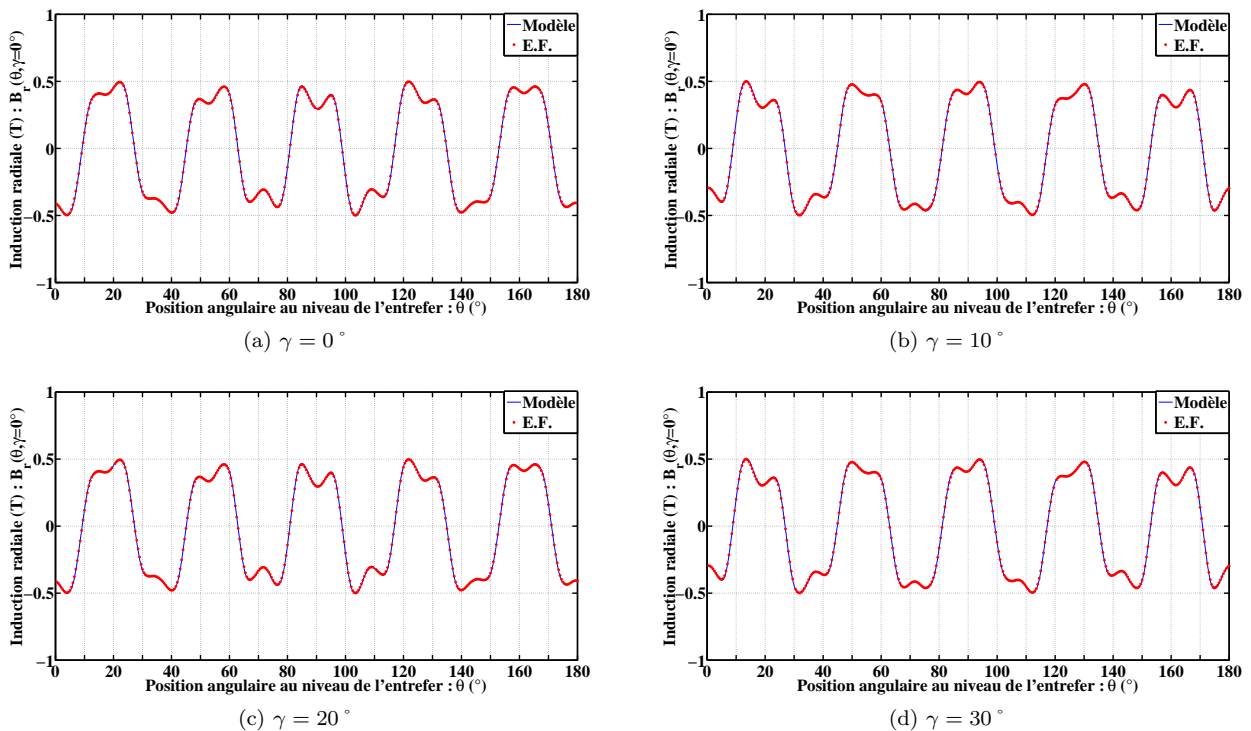


FIGURE B.4 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer

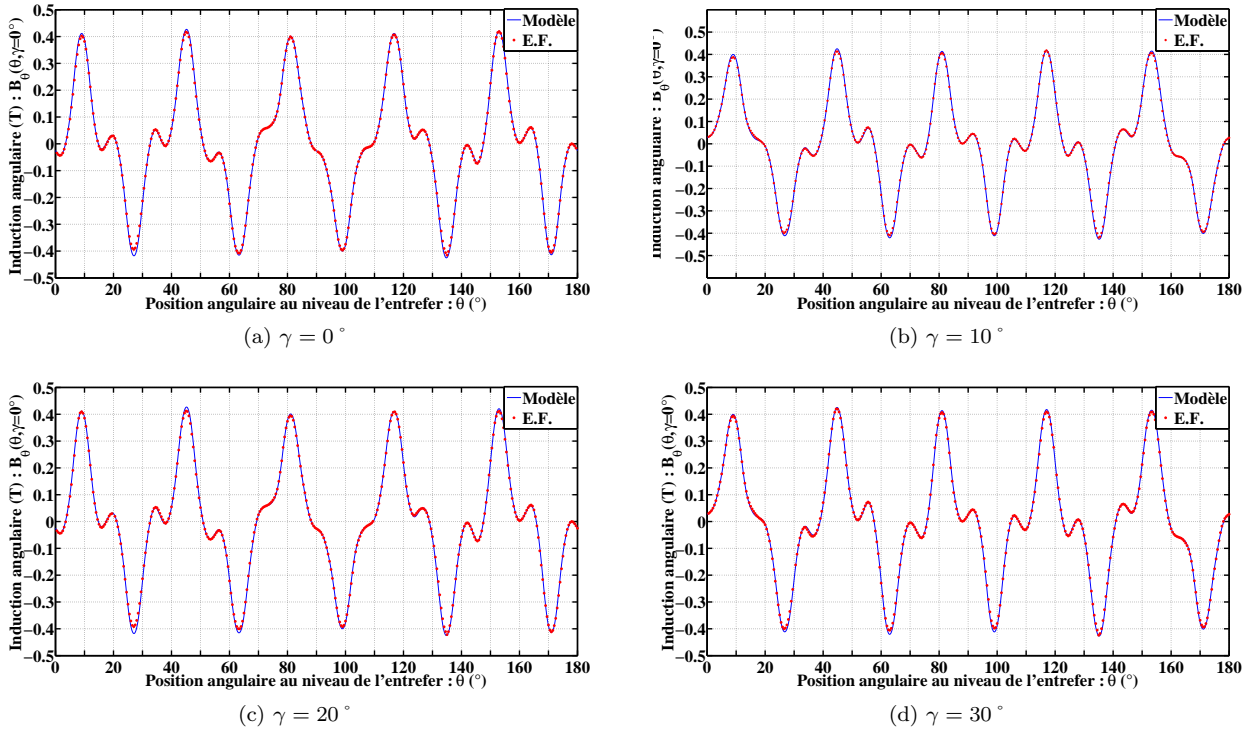


FIGURE B.5 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer

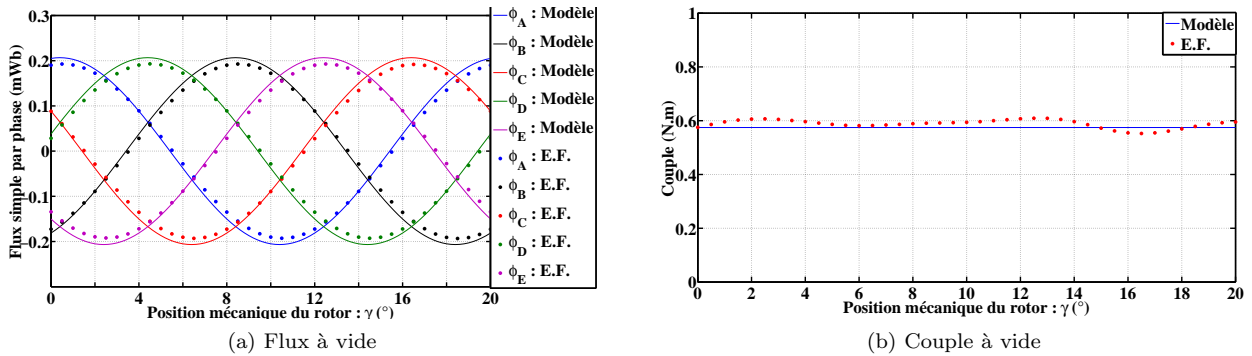


FIGURE B.6 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3

Caractéristiques à vide présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.7.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.8.
- Flux magnétiques à vide dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.9a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.9b.

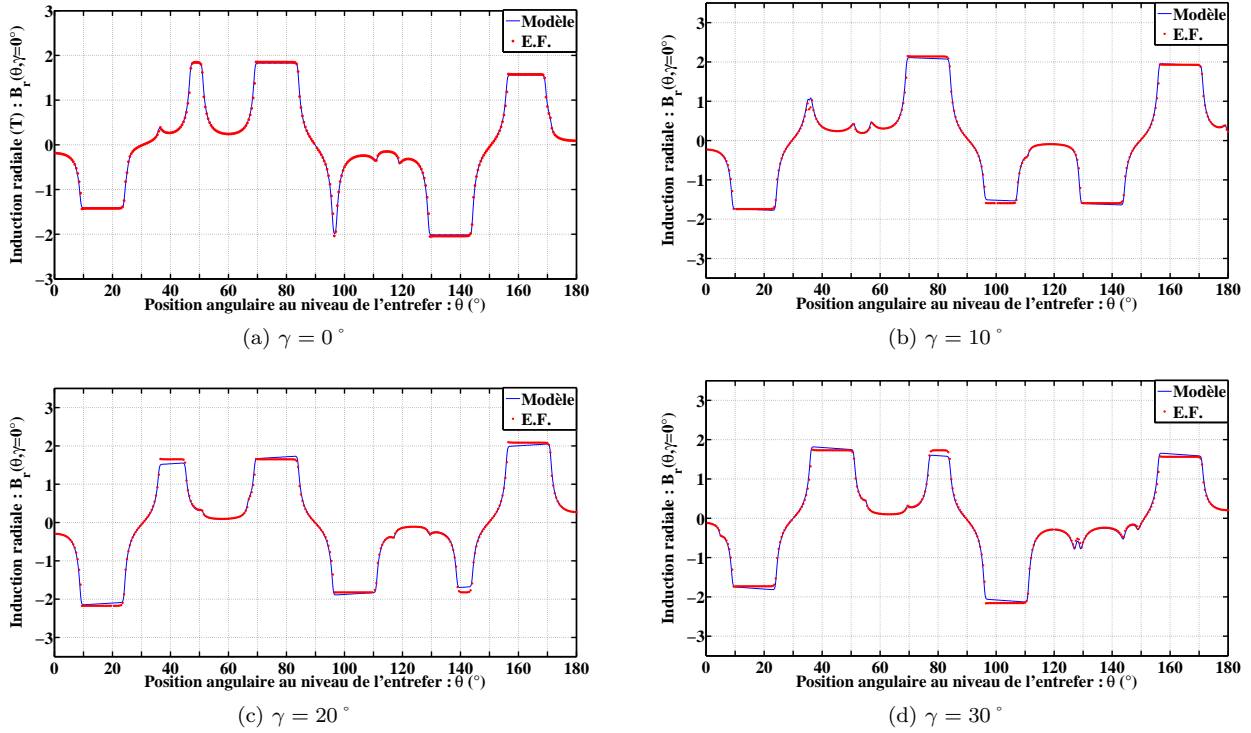


FIGURE B.7 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer

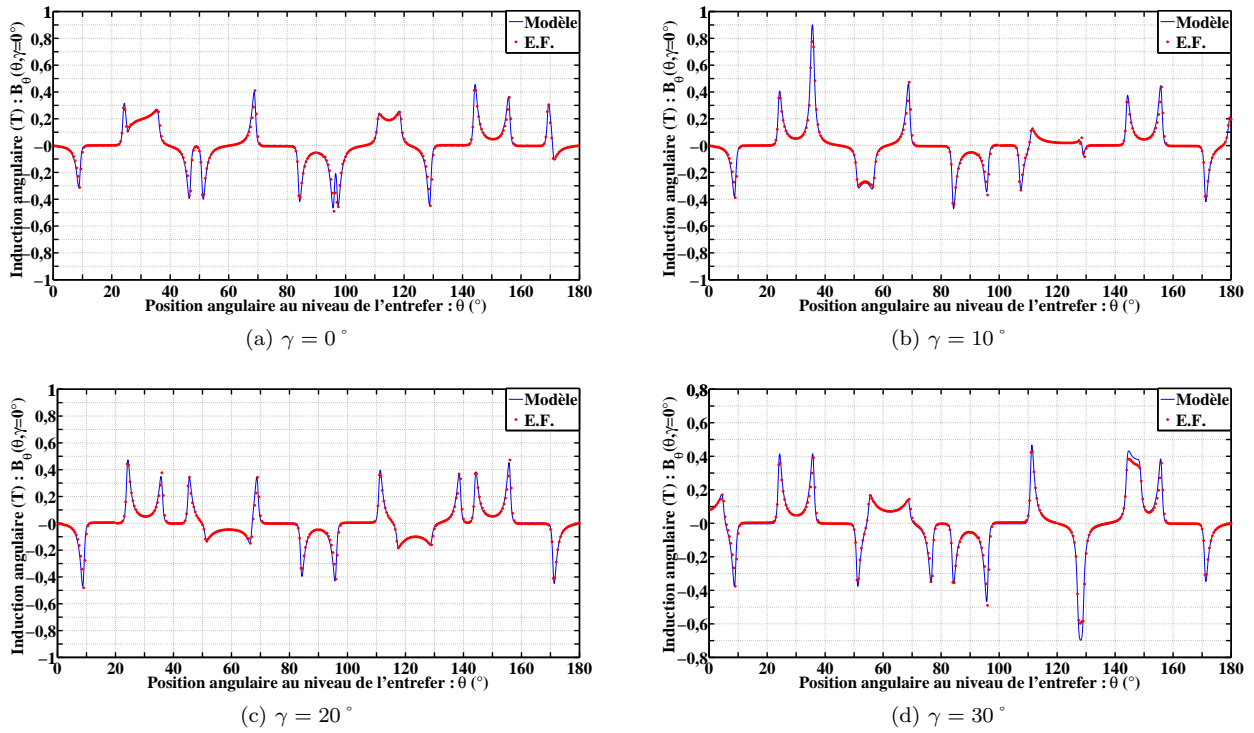


FIGURE B.8 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer

B.7. COMPARAISON À GÉOMÉTRIE ET HYPOTHÈSES IDENTIQUES

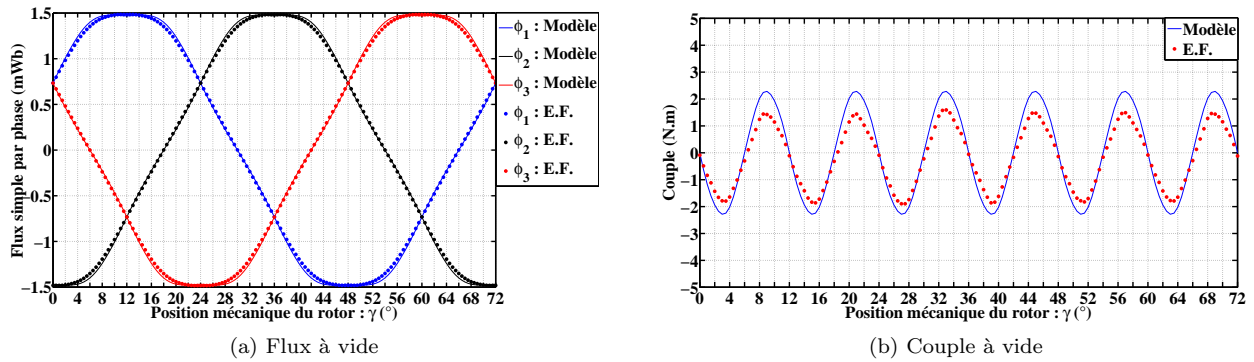


FIGURE B.9 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Caractéristiques en charge présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.10.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.11.
- Flux magnétiques en charge dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.12a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.12b.

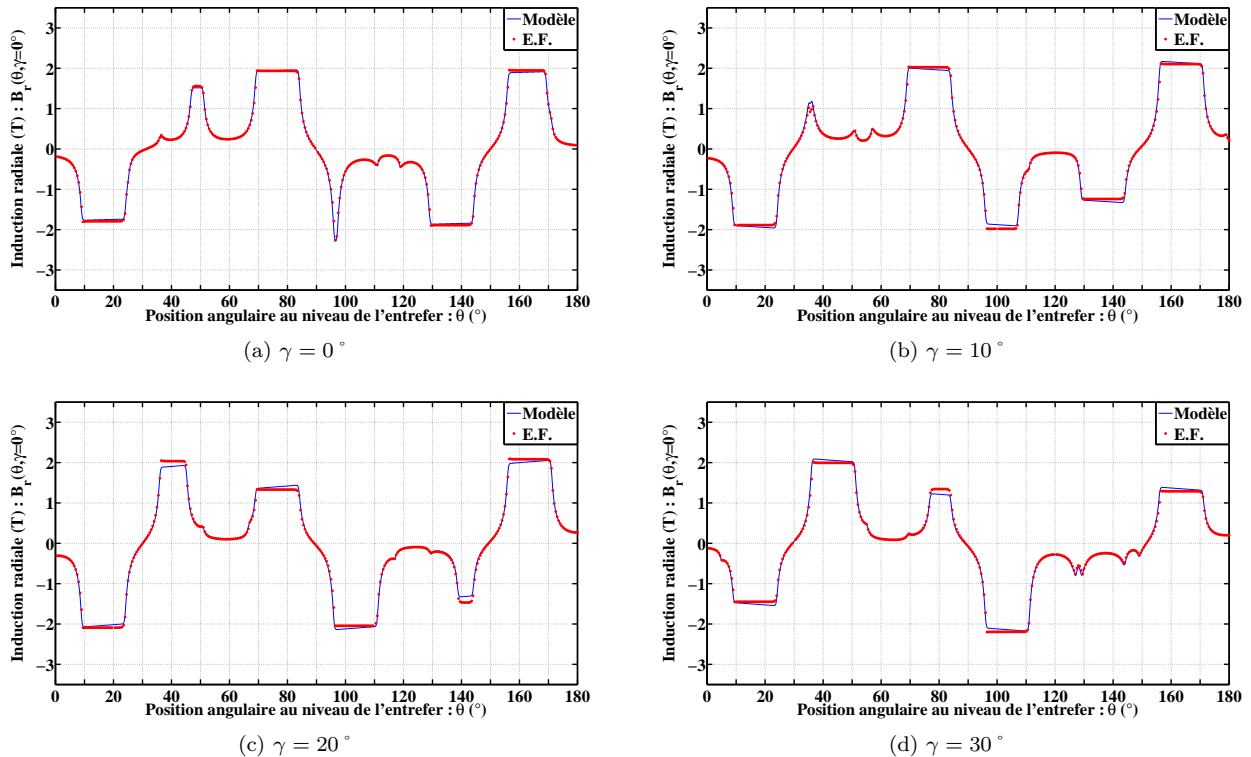


FIGURE B.10 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer

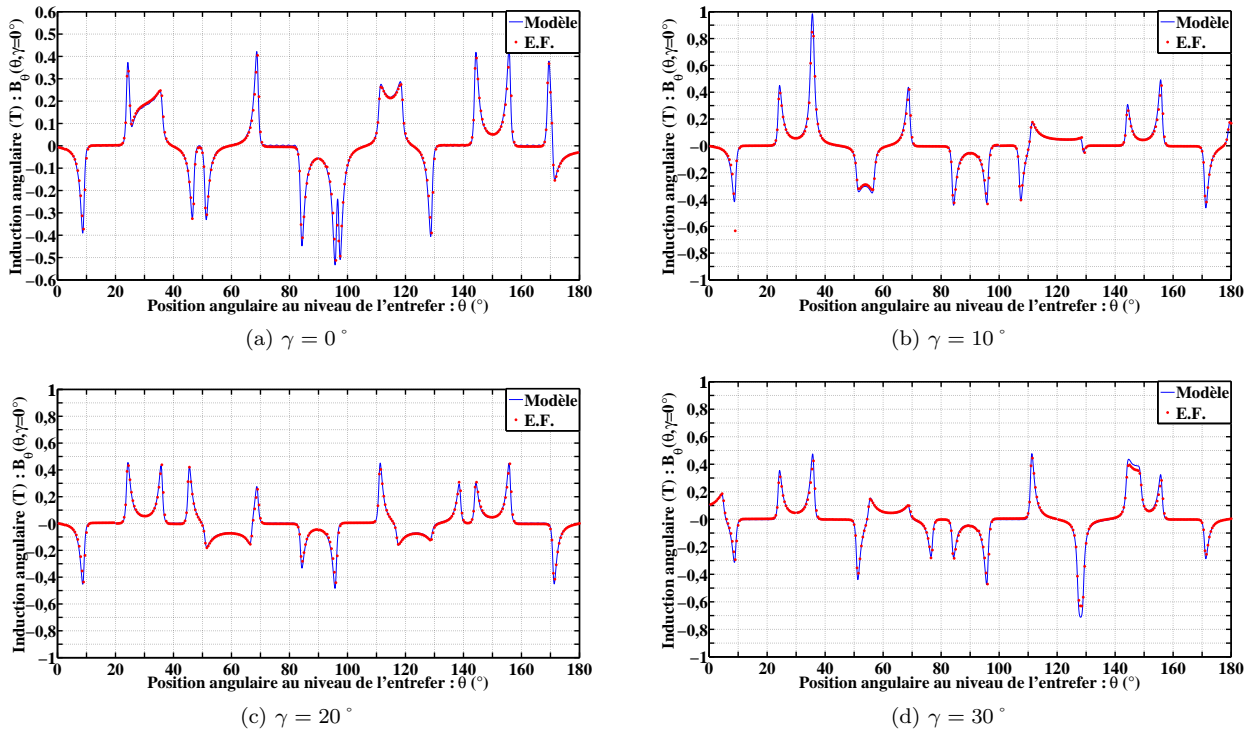


FIGURE B.11 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer

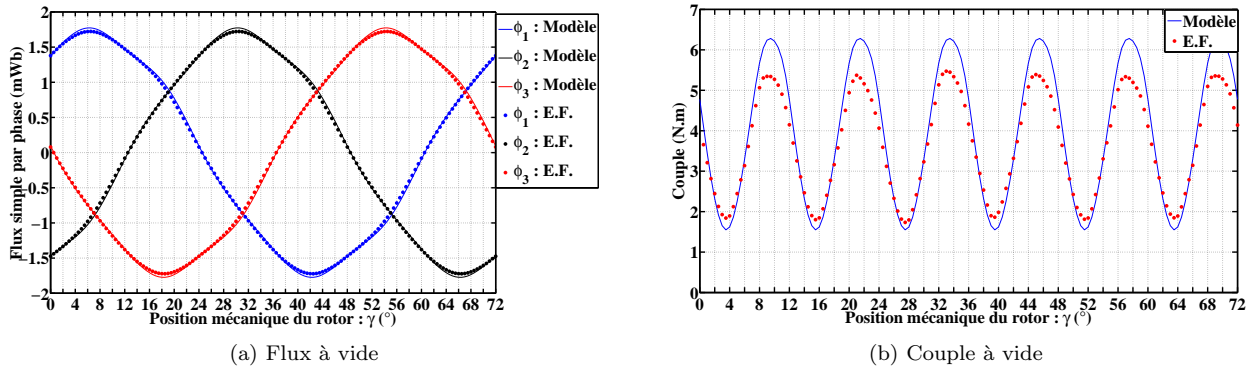


FIGURE B.12 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4

Caractéristiques à vide présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.13.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.14.
- Flux magnétiques à vide dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.15a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.15b.

B.7. COMPARAISON À GÉOMÉTRIE ET HYPOTHÈSES IDENTIQUES

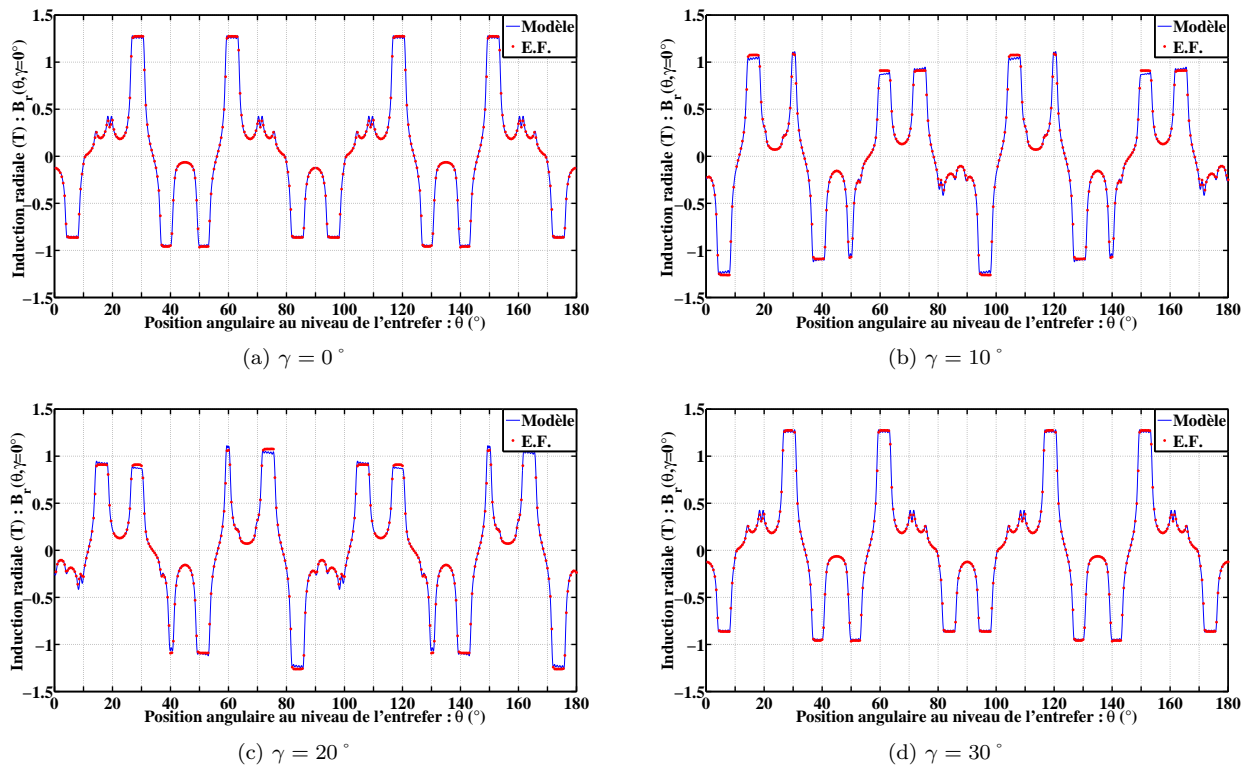


FIGURE B.13 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer

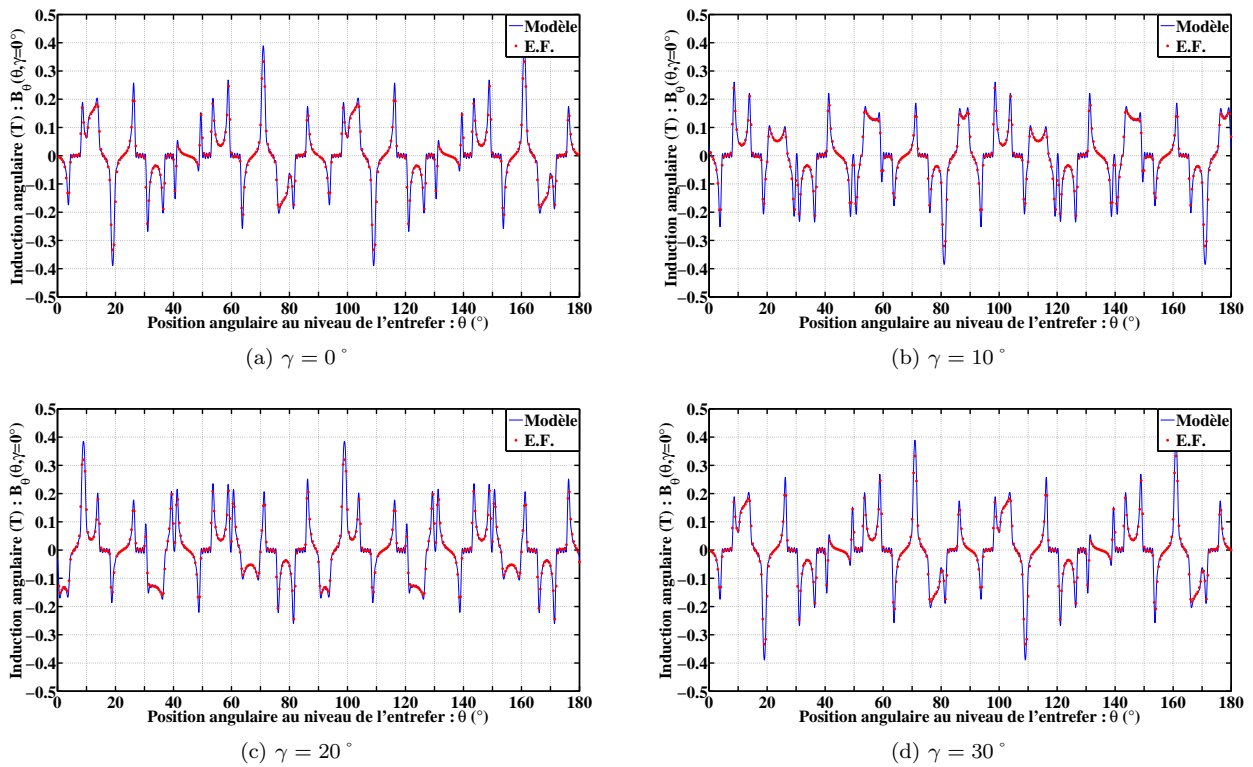


FIGURE B.14 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer

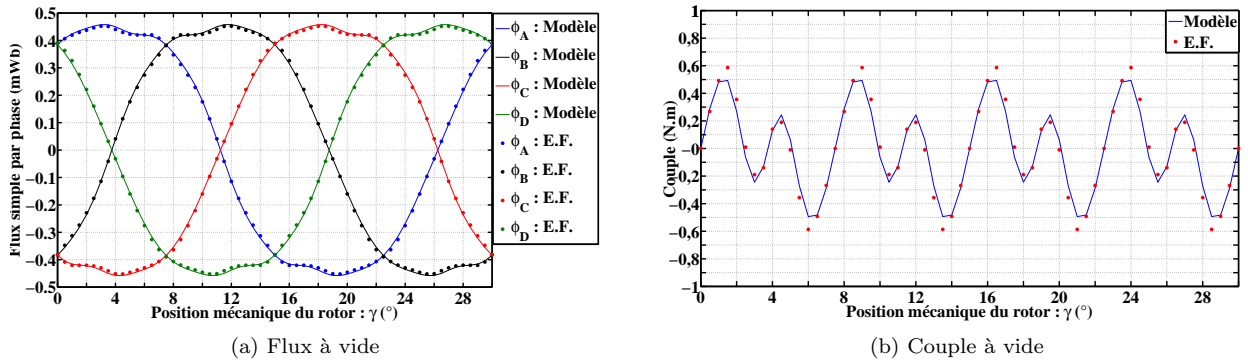


FIGURE B.15 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Caractéristiques en charge présentées pour la comparaison :

- Composante radiale de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.16.
- Composante angulaire de l'induction au niveau de l'entrefer de la machine pour différentes positions du rotor : $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\gamma = 20^\circ$ et $\gamma = 30^\circ$ sur la Figure B.17.
- Flux magnétiques en charge dans les différentes phases de la machine lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.18a.
- Couple électromagnétique lorsque le rotor est entraîné en rotation sur la Figure B.18b.

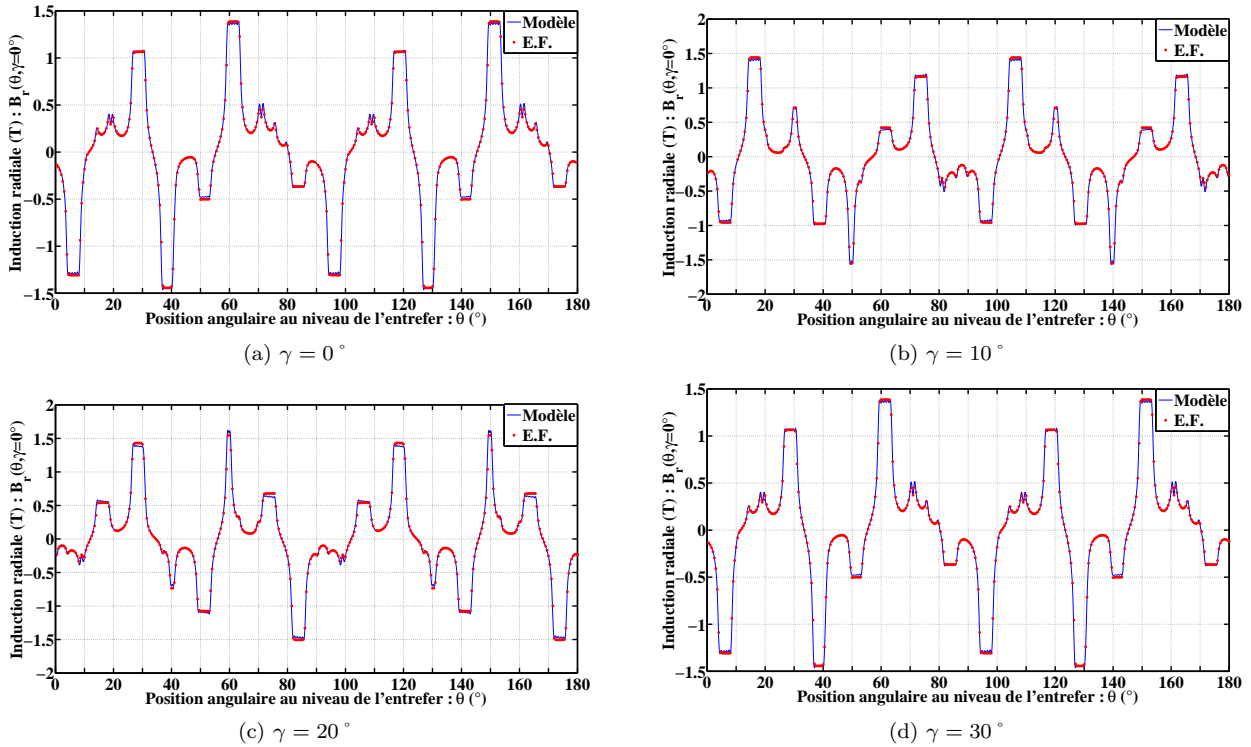


FIGURE B.16 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer

B.7. COMPARAISON À GÉOMÉTRIE ET HYPOTHÈSES IDENTIQUES

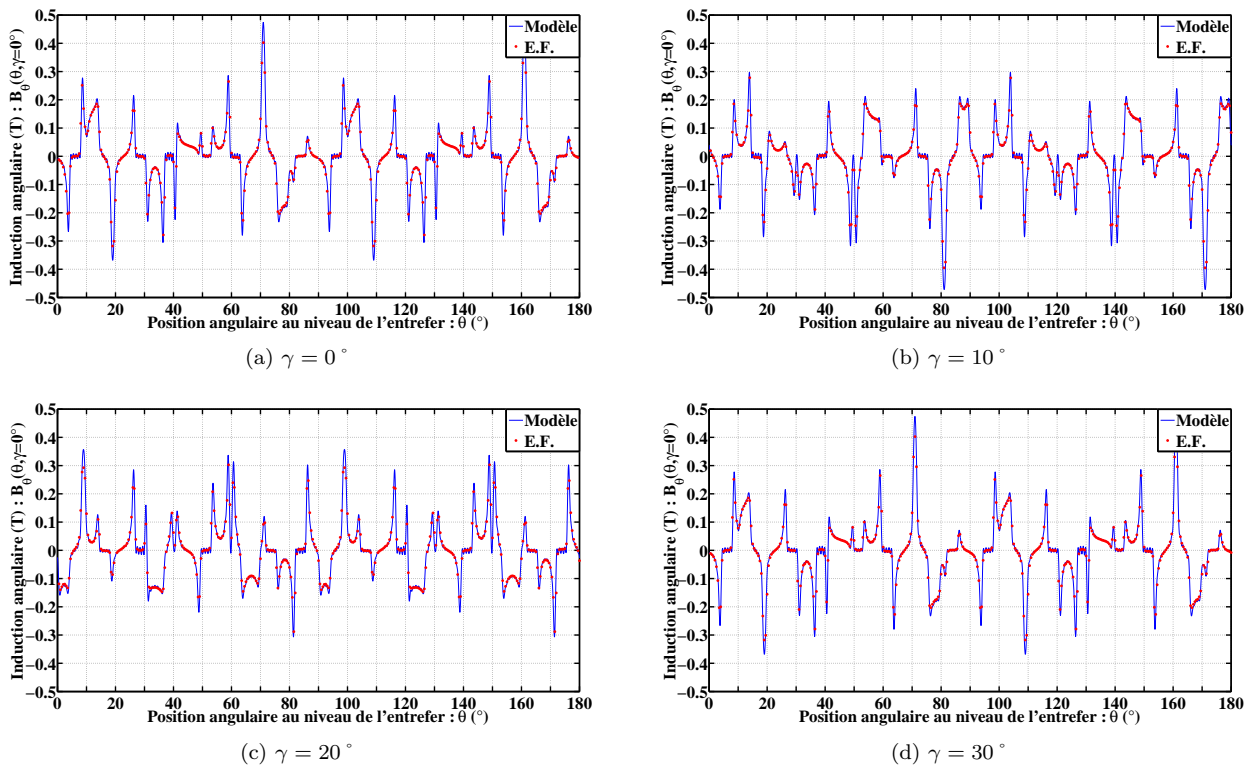


FIGURE B.17 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer

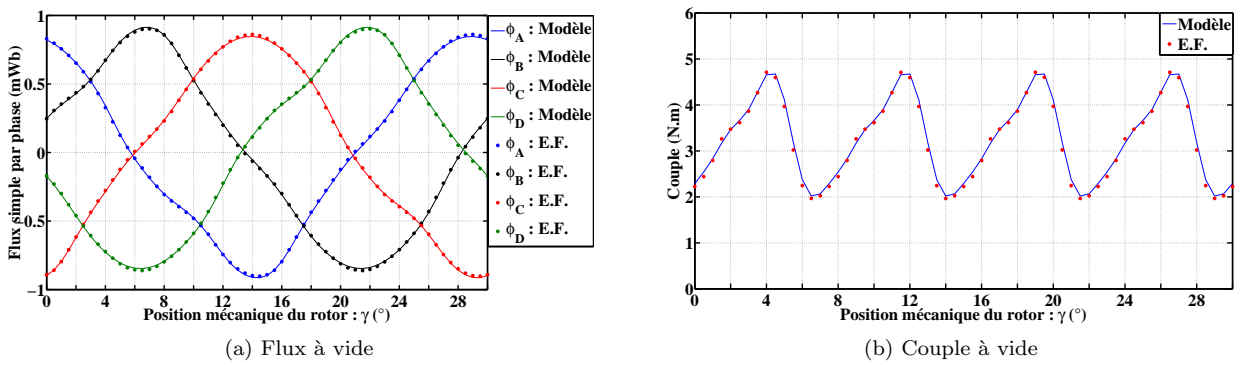


FIGURE B.18 – Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique

Compléments au Chapitre 5 : Modèle Modes Propres

C.1 Validation par comparaison avec la simulation par éléments finis pour un anneau circulaire

$\frac{h}{R}$	Mode 0	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6	Mode 7	Mode 8	Mode 9	Mode 10
0.010	8 448	65	185	355	574	842	1 158	1 523	1 937	2 399
0.020	8 449	131	370	709	1 146	1 680	2 310	3 036	3 857	4 772
0.030	8 449	196	555	1 062	1 716	2 513	3 452	4 531	5 748	7 101
0.040	8 450	262	739	1 414	2 281	3 336	4 576	5 996	7 592	9 359
0.050	8 451	327	922	1 763	2 841	4 148	5 678	7 424	9 378	11 532
0.075	8 454	489	1 378	2 624	4 208	6 111	8 314	10 798	13 540	16 522
0.100	8 458	651	1 827	3 462	5 518	7 958	10 745	13 842	17 213	20 826
0.125	8 463	812	2 267	4 270	6 757	9 669	12 946	16 536	20 390	24 464
0.150	8 470	971	2 696	5 044	7 920	11 237	14 917	18 893	23 107	27 512
0.200	8 487	1 284	3 520	6 483	10 008	13 958	18 229	22 734	27 413	32 217
0.300	8 535	1 883	5 003	8 899	13 283	17 969	22 836	27 808	32 832	37 875
0.400	8 603	2 438	6 256	10 764	15 613	20 619	25 677	30 723	35 714	40 618
0.500	8 690	2 947	7 303	12 199	17 276	22 365	27 369	32 223	36 885	41 338

TABLE C.1 – Fréquences propres d'un anneau circulaire - résultats de la simulation par éléments finis

h/R	Fréquence (Hz)	Erreur (%)
0.010	8 059	4.60
0.020	8 059	4.61
0.030	8 059	4.61
0.040	8 059	4.63
0.050	8 059	4.64
0.075	8 059	4.67
0.100	8 059	4.72
0.125	8 059	4.77
0.150	8 059	4.85
0.200	8 059	5.04
0.300	8 059	5.58
0.400	8 059	6.32
0.500	8 059	7.26
Erreur moyenne :		5.10

TABLE C.2 – Mode 0 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	62	3,96	104	60,07	104	60,06	62	3,96	62	3,96	104	60,06	104	60,05	62	3,97	62	3,97
0,020	125	4,69	208	58,84	208	58,83	125	4,70	125	4,70	208	58,81	208	58,80	125	4,72	125	4,72
0,030	187	4,45	312	59,25	312	59,22	187	4,46	187	4,47	312	59,17	312	59,14	187	4,50	187	4,51
0,040	250	4,69	416	58,84	416	58,79	250	4,71	250	4,72	416	58,71	416	58,66	249	4,79	249	4,80
0,050	312	4,55	520	59,09	520	59,00	312	4,57	312	4,59	520	58,88	519	58,80	312	4,70	312	4,71
0,075	468	4,26	780	59,57	779	59,39	468	4,31	468	4,35	778	59,11	777	58,93	467	4,59	466	4,63
0,100	624	4,11	1 040	59,82	1 038	59,49	624	4,21	623	4,28	1 035	59,00	1 033	58,67	620	4,70	620	4,77
0,125	780	3,90	1 301	60,16	1 296	59,65	779	4,06	778	4,17	1 290	58,88	1 286	58,38	773	4,83	772	4,94
0,150	936	3,56	1 561	60,73	1 553	59,98	934	3,80	933	3,96	1 543	58,88	1 536	58,17	923	4,90	922	5,05
0,200	1 249	2,76	2 081	62,06	2 064	60,73	1 243	3,18	1 240	3,46	2 039	58,79	2 023	57,58	1 218	5,11	1 215	5,37
0,300	1 873	0,54	3 121	65,76	3 064	62,74	1 855	1,49	1 843	2,13	2 985	58,51	2 939	56,07	1 775	5,73	1 766	6,24
0,400	2 497	2,42	4 162	70,70	4 030	65,28	2 455	0,69	2 428	0,42	3 853	58,06	3 762	54,29	2 278	6,55	2 260	7,31
0,500	3 121	5,91	5 202	76,52	4 951	67,99	3 039	3,12	2 989	1,43	4 634	57,26	4 487	52,26	2 722	7,62	2 693	8,61
Err moy :	3,83		62,42		60,86		3,64		3,50		58,78		57,68		5,13		5,36	

TABLE C.3 – Mode 2 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	177	4,56	221	19,30	221	19,30	177	4,56	177	4,56	221	19,29	221	19,28	177	4,57	177	4,57
0,020	353	4,56	441	19,30	441	19,28	353	4,57	353	4,57	441	19,25	441	19,23	353	4,61	353	4,62
0,030	530	4,56	662	19,30	662	19,26	530	4,57	530	4,59	661	19,18	661	19,13	529	4,67	529	4,69
0,040	706	4,43	883	19,46	882	19,38	706	4,45	706	4,49	881	19,24	881	19,16	705	4,63	704	4,67
0,050	883	4,25	1 104	19,69	1 102	19,57	883	4,28	882	4,34	1 100	19,34	1 099	19,22	880	4,56	879	4,62
0,075	1 324	3,90	1 655	20,12	1 651	19,84	1 323	3,97	1 321	4,12	1 645	19,34	1 641	19,07	1 315	4,60	1 313	4,74
0,100	1 766	3,36	2 207	20,80	2 198	20,30	1 763	3,49	1 759	3,74	2 182	19,41	2 173	18,94	1 743	4,59	1 739	4,84
0,125	2 207	2,64	2 759	21,70	2 741	20,91	2 202	2,85	2 193	3,25	2 710	19,53	2 693	18,81	2 163	4,57	2 155	4,94
0,150	2 648	1,76	3 311	22,80	3 280	21,66	2 640	2,06	2 625	2,64	3 227	19,69	3 200	18,69	2 574	4,53	2 560	5,04
0,200	3 531	0,32	4 414	25,40	4 342	23,36	3 512	0,23	3 476	1,25	4 221	19,92	4 163	18,27	3 360	4,55	3 331	5,37
0,300	5 297	5,88	6 621	32,35	6 386	27,65	5 231	4,56	5 116	2,25	6 018	20,28	5 868	17,29	4 765	4,76	4 692	6,22
0,400	7 063	12,89	8 828	41,12	8 293	32,56	6 904	10,35	6 649	6,29	7 530	20,37	7 272	16,24	5 927	5,26	5 805	7,20
0,500	8 828	20,89	11 035	51,11	10 039	37,47	8 511	16,54	8 059	10,35	8 765	20,03	8 408	15,13	6 857	6,11	6 697	8,30
Err moy :	5,69		25,57		23,12		5,11		5,05		19,60		18,34		4,77		5,37	

TABLE C.4 – Mode 3 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	339	4,63	384	8,08	384	8,07	339	4,63	339	4,64	384	8,06	384	8,05	338	4,65	338	4,66
0,020	677	4,50	767	8,23	767	8,20	677	4,50	677	4,53	767	8,14	767	8,11	676	4,58	676	4,60
0,030	1 016	4,36	1 151	8,39	1 150	8,32	1 016	4,38	1 015	4,42	1 149	8,18	1 148	8,12	1 014	4,56	1 013	4,60
0,040	1 354	4,23	1 535	8,54	1 533	8,42	1 354	4,25	1 353	4,34	1 530	8,18	1 528	8,06	1 349	4,57	1 348	4,65
0,050	1 693	3,98	1 918	8,82	1 915	8,63	1 692	4,02	1 690	4,15	1 909	8,26	1 905	8,07	1 683	4,51	1 681	4,64
0,075	2 539	3,23	2 878	9,67	2 866	9,23	2 537	3,32	2 529	3,61	2 845	8,41	2 834	8,00	2 508	4,42	2 501	4,71
0,100	3 386	2,21	3 837	10,83	3 810	10,05	3 380	2,35	3 362	2,89	3 760	8,59	3 735	7,89	3 312	4,32	3 296	4,80
0,125	4 232	0,89	4 796	12,32	4 744	11,10	4 222	1,12	4 186	1,96	4 647	8,84	4 603	7,79	4 092	4,18	4 061	4,89
0,150	5 078	0,68	5 755	14,10	5 666	12,33	5 061	0,34	5 000	0,87	5 504	9,11	5 431	7,68	4 841	4,02	4 792	4,99
0,200	6 771	4,44	7 674	18,37	7 465	15,15	6 730	3,81	6 589	1,64	7 105	9,60	6 961	7,37	6 237	3,80	6 140	5,29
0,300	10 157	14,13	11 511	29,35	10 840	21,82	10 011	12,50	9 573	7,57	9 819	10,33	9 496	6,71	8 575	3,64	8 367	5,98
0,400	13 542	25,81	15 348	42,58	13 857	28,74	13 178	22,42	12 244	13,75	11 892	10,48	11 411	6,01	10 332	4,01	10 037	6,75
0,500	16 928	38,76	19 185	57,26	16 486	35,14	16 164	32,50	14 577	19,50	13 432	10,11	12 850	5,34	11 615	4,79	11 277	7,56
Err moy :	8,61		18,20		14,25		7,70		5,68		8,95		7,48		4,11		5,24	

TABLE C.5 – Mode 4 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	548	4,62	593	3,33	593	3,32	548	4,62	547	4,63	593	3,30	593	3,29	547	4,65	547	4,66
0,020	1 095	4,45	1 186	3,51	1 186	3,47	1 095	4,45	1 095	4,49	1 185	3,38	1 184	3,34	1 094	4,58	1 093	4,61
0,030	1 643	4,28	1 778	3,70	1 778	3,59	1 642	4,29	1 641	4,37	1 774	3,39	1 773	3,29	1 638	4,57	1 636	4,65
0,040	2 190	3,99	2 373	4,01	2 368	3,83	2 189	4,01	2 186	4,15	2 360	3,48	2 356	3,30	2 178	4,51	2 175	4,64
0,050	2 738	3,64	2 966	4,39	2 958	4,11	2 736	3,68	2 730	3,90	2 942	3,55	2 934	3,28	2 715	4,45	2 709	4,66
0,075	4 106	2,42	4 449	5,72	4 422	5,08	4 103	2,50	4 082	3,00	4 369	3,83	4 345	3,25	4 030	4,23	4 011	4,69
0,100	5 475	0,78	5 931	7,49	5 868	6,35	5 467	0,93	5 417	1,83	5 748	4,16	5 693	3,18	5 298	3,99	5 255	4,76
0,125	6 844	1,29	7 414	9,73	7 292	7,91	6 827	1,04	6 732	0,38	7 064	4,55	6 967	3,11	6 506	3,71	6 431	4,83
0,150	8 213	3,70	8 897	12,34	8 688	9,69	8 183	3,32	8 021	1,27	8 310	4,93	8 159	3,02	7 647	3,45	7 530	4,92
0,200	10 950	9,41	11 863	18,53	11 380	13,71	10 878	8,70	10 507	4,99	10 568	5,60	10 287	2,79	9 705	3,03	9 491	5,16
0,300	16 425	23,66	17 794	33,96	16 278	22,54	16 162	21,68	15 034	13,18	14 134	6,41	13 594	2,34	12 922	2,72	12 530	5,67
0,400	21 900	40,27	23 725	51,96	20 445	30,95	21 200	35,78	18 890	20,99	16 611	6,39	15 907	1,88	15 123	3,14	14 642	6,22
0,500	27 375	58,46	29 657	71,66	23 885	38,26	25 786	49,26	22 079	27,80	18 305	5,95	17 540	1,53	16 608	3,87	16 115	6,72
Err moy :	12,38		17,72		11,75		11,10		7,31		4,53		2,87		3,92		5,09	

TABLE C.6 – Mode 5 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	803	4,61	849	0,84	849	0,83	803	4,61	803	4,62	849	0,79	849	0,78	803	4,66	803	4,67
0,020	1 606	4,38	1 698	1,08	1 697	1,02	1 606	4,39	1 605	4,44	1 695	0,89	1 694	0,83	1 603	4,57	1 602	4,62
0,030	2 410	4,12	2 547	1,36	2 544	1,22	2 409	4,13	2 406	4,25	2 537	0,94	2 533	0,80	2 399	4,53	2 396	4,65
0,040	3 213	3,69	3 396	1,81	3 388	1,56	3 212	3,72	3 205	3,93	3 371	1,05	3 363	0,81	3 188	4,43	3 181	4,64
0,050	4 016	3,18	4 245	2,35	4 229	1,96	4 014	3,22	4 001	3,55	4 197	1,17	4 181	0,80	3 968	4,33	3 955	4,65
0,075	6 024	1,43	6 368	4,21	6 314	3,32	6 018	1,51	5 972	2,27	6 207	1,57	6 159	0,78	5 866	4,00	5 826	4,67
0,100	8 032	0,93	8 491	6,70	8 363	5,09	8 019	0,76	7 911	0,59	8 119	2,03	8 016	0,73	7 669	3,63	7 583	4,72
0,125	10 040	3,84	10 614	9,77	10 367	7,22	10 014	3,57	9 807	1,43	9 913	2,53	9 736	0,69	9 357	3,23	9 208	4,77
0,150	12 048	7,22	12 736	13,34	12 316	9,60	12 003	6,81	11 652	3,69	11 576	3,01	11 308	0,64	10 916	2,86	10 695	4,83
0,200	16 064	15,09	16 982	21,66	16 022	14,79	15 952	14,28	15 159	8,60	14 485	3,78	14 024	0,47	13 634	2,32	13 260	5,00
0,300	24 096	34,10	25 472	41,76	22 537	25,42	23 661	31,68	21 327	18,69	18 766	4,44	17 997	0,16	17 597	2,07	17 008	5,35
0,400	32 127	55,81	33 963	64,72	27 793	34,79	30 863	49,68	26 308	27,59	21 491	4,23	20 596	0,11	20 086	2,58	19 444	5,70
0,500	40 159	79,56	42 454	89,82	31 903	42,65	36 932	65,13	30 209	35,07	23 230	3,87	22 340	0,11	21 659	3,16	21 057	5,85
Err moy :	16,77		19,96		11,50		14,89		9,13		2,33		0,58		3,57		4,93	

TABLE C.7 – Mode 6 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	1 105	4,54	1 152	0,56	1 151	0,58	1 105	4,54	1 105	4,56	1 151	0,62	1 151	0,64	1 105	4,60	1 105	4,62
0,020	2 211	4,29	2 303	0,30	2 301	0,38	2 211	4,29	2 209	4,37	2 297	0,55	2 295	0,63	2 205	4,54	2 204	4,61
0,030	3 316	3,93	3 455	0,08	3 448	0,11	3 316	3,94	3 310	4,11	3 435	0,49	3 429	0,67	3 297	4,49	3 292	4,65
0,040	4 422	3,37	4 606	0,66	4 591	0,33	4 421	3,39	4 407	3,69	4 560	0,35	4 545	0,67	4 376	4,36	4 364	4,64
0,050	5 527	2,65	5 758	1,40	5 728	0,88	5 525	2,69	5 499	3,15	5 668	0,17	5 641	0,66	5 439	4,20	5 415	4,63
0,075	8 291	0,28	8 637	3,88	8 537	2,68	8 283	0,37	8 196	1,42	8 343	0,35	8 259	0,66	8 002	3,75	7 928	4,64
0,100	11 055	2,88	11 515	7,17	11 283	5,00	11 036	2,71	10 832	0,81	10 845	0,93	10 671	0,69	10 396	3,25	10 244	4,67
0,125	13 819	6,74	14 394	11,19	13 947	7,74	13 782	6,46	13 390	3,43	13 145	1,54	12 855	0,70	12 592	2,74	12 339	4,69
0,150	16 582	11,16	17 273	15,80	16 516	10,72	16 517	10,73	15 857	6,30	15 228	2,08	14 808	0,73	14 575	2,29	14 213	4,72
0,200	22 110	21,29	23 031	26,34	21 322	16,97	21 945	20,39	20 472	12,31	18 745	2,83	18 073	0,86	17 911	1,75	17 347	4,84
0,300	33 164	45,23	34 546	51,28	29 461	29,01	32 479	42,23	28 291	23,89	23 579	3,25	22 595	1,06	22 458	1,65	21 686	5,04
0,400	44 219	72,21	46 062	79,39	35 679	38,95	41 938	63,33	34 269	33,46	26 425	2,91	25 386	1,13	25 107	2,22	24 345	5,19
0,500	55 274	101,96	57 577	110,37	40 296	47,23	48 600	77,57	38 713	41,45	28 145	2,84	27 180	0,69	26 694	2,47	26 028	4,90
Err moy :	21,58		23,72		12,35		18,66		10,99		1,46		0,75		3,25		4,76	

TABLE C.8 – Mode 7 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	1 454	4,51	1 501	1,48	1 500	1,50	1 454	4,51	1 454	4,53	1 499	1,56	1 499	1,58	1 453	4,59	1 453	4,61
0,020	2 909	4,19	3 001	1,15	2 998	1,26	2 909	4,20	2 906	4,30	2 991	1,48	2 988	1,58	2 899	4,52	2 896	4,61
0,030	4 363	3,71	4 502	0,65	4 491	0,89	4 362	3,72	4 352	3,94	4 468	1,38	4 458	1,62	4 330	4,43	4 321	4,64
0,040	5 817	2,98	6 002	0,10	5 976	0,33	5 816	3,00	5 792	3,40	5 924	1,20	5 900	1,61	5 740	4,27	5 718	4,64
0,050	7 272	2,05	7 503	1,06	7 452	0,38	7 269	2,09	7 223	2,71	7 351	0,98	7 306	1,59	7 122	4,06	7 081	4,62
0,075	10 908	1,02	11 254	4,22	11 086	2,67	10 897	0,92	10 745	0,49	10 762	0,34	10 627	1,59	10 422	3,49	10 299	4,62
0,100	14 544	5,07	15 005	8,40	14 615	5,58	14 519	4,89	14 165	2,34	13 894	0,37	13 624	1,58	13 447	2,85	13 204	4,61
0,125	18 179	9,94	18 757	13,43	18 010	8,91	18 130	9,64	17 456	5,57	16 710	1,05	16 276	1,57	16 161	2,27	15 774	4,61
0,150	21 815	15,47	22 508	19,13	21 250	12,48	21 727	15,00	20 598	9,02	19 199	1,62	18 595	1,58	18 555	1,79	18 023	4,60
0,200	29 087	27,95	30 011	32,01	27 207	19,68	28 856	26,93	26 373	16,01	23 254	2,29	22 355	1,67	22 439	1,30	21 673	4,67
0,300	43 631	56,90	45 016	61,88	36 909	32,73	42 560	53,05	35 782	28,67	28 484	2,43	27 313	1,78	27 414	1,42	26 488	4,75
0,400	58 174	89,35	60 021	95,36	43 931	42,99	53 884	75,39	42 595	38,64	31 363	2,08	30 223	1,63	30 129	1,94	29 287	4,67
0,500	72 718	125,67	75 026	132,83	48 898	51,75	59 450	84,50	47 421	47,17	33 029	2,50	32 027	0,61	31 688	1,66	30 990	3,83
Err moy :	26,83		Err moy :	28,59	Err moy :	13,93	Err moy :	22,14	Err moy :	12,83	Err moy :	1,45	Err moy :	1,54	Err moy :	2,97	Err moy :	4,58

TABLE C.9 – Mode 8 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	1 850	4,50	1 896	2,11	1 895	2,15	1 850	4,50	1 849	4,53	1 894	2,22	1 893	2,25	1 848	4,60	1 847	4,64
0,020	3 700	4,08	3 792	1,68	3 787	1,82	3 699	4,09	3 695	4,21	3 776	2,09	3 771	2,23	3 684	4,49	3 679	4,61
0,030	5 549	3,46	5 688	1,04	5 671	1,34	5 549	3,47	5 532	3,75	5 635	1,97	5 618	2,26	5 497	4,37	5 481	4,64
0,040	7 399	2,54	7 584	0,10	7 543	0,65	7 397	2,57	7 359	3,07	7 460	1,75	7 422	2,24	7 276	4,17	7 241	4,63
0,050	9 249	1,38	9 480	1,09	9 400	0,24	9 245	1,42	9 171	2,21	9 240	1,47	9 170	2,22	9 011	3,91	8 946	4,61
0,075	13 873	2,46	14 220	5,02	13 955	3,06	13 860	2,37	13 614	0,55	13 446	0,69	13 243	2,19	13 107	3,20	12 920	4,58
0,100	18 498	7,46	18 960	10,15	18 344	6,57	18 466	7,28	17 897	3,97	17 232	0,11	16 841	2,16	16 788	2,47	16 430	4,55
0,125	23 122	13,40	23 700	16,24	22 528	10,49	23 057	13,08	21 979	7,80	20 558	0,82	19 953	2,14	20 015	1,84	19 468	4,52
0,150	27 747	20,08	28 441	23,08	26 478	14,59	27 629	19,57	25 833	11,80	23 427	1,38	22 615	2,13	22 793	1,36	22 070	4,49
0,200	36 996	34,96	37 921	38,33	33 605	22,59	36 678	33,80	32 788	19,61	27 937	1,91	26 810	2,20	27 145	0,98	26 177	4,51
0,300	55 494	69,02	56 881	73,25	44 759	36,33	53 796	63,85	43 675	33,03	33 428	1,82	32 105	2,22	32 409	1,29	31 362	4,48
0,400	73 992	107,18	75 841	112,36	52 419	46,77	65 616	83,73	51 156	43,24	36 282	1,59	35 077	1,78	35 125	1,65	34 236	4,14
0,500	92 490	150,75	94 802	157,02	57 606	56,18	69 123	87,40	56 226	52,44	37 875	2,68	36 864	0,06	36 635	0,68	35 927	2,60
Err moy :	32,41		Err moy :	33,96	Err moy :	15,60	Err moy :	25,16	Err moy :	14,63	Err moy :	1,35	Err moy :	2,01	Err moy :	2,69	Err moy :	4,38

TABLE C.10 – Mode 9 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

h/R	M_R		$M_{B,1}$		$M_{B,2}$		$M_{B,3}$		$M_{B,4}$		$M_{T,1}$		$M_{T,2}$		$M_{T,3}$		$M_{T,4}$	
	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)	Fréq (Hz)	Err (%)
0,010	2 292	4,47	2 338	2,54	2 337	2,58	2 292	4,47	2 291	4,51	2 335	2,67	2 334	2,71	2 289	4,60	2 288	4,63
0,020	4 584	3,95	4 676	2,01	4 668	2,17	4 583	3,96	4 576	4,11	4 652	2,51	4 644	2,67	4 560	4,45	4 552	4,60
0,030	6 875	3,18	7 014	1,22	6 988	1,59	6 874	3,19	6 849	3,54	6 934	2,36	6 909	2,71	6 795	4,31	6 772	4,64
0,040	9 167	2,05	9 352	0,07	9 290	0,74	9 165	2,08	9 106	2,70	9 164	2,09	9 107	2,69	8 980	4,05	8 927	4,62
0,050	11 459	0,63	11 690	1,37	11 569	0,32	11 454	0,68	11 340	1,66	11 328	1,77	11 224	2,67	11 099	3,75	11 002	4,60
0,075	17 188	4,03	17 536	6,13	17 135	3,71	17 172	3,93	16 795	1,66	16 379	0,87	16 090	2,62	16 041	2,91	15 771	4,54
0,100	22 918	10,04	23 381	12,27	22 455	7,82	22 877	9,85	22 011	5,69	20 829	0,02	20 291	2,57	20 389	2,10	19 891	4,49
0,125	28 647	17,10	29 226	19,46	27 475	12,31	28 564	16,76	26 932	10,09	24 645	0,74	23 845	2,53	24 109	1,45	23 380	4,43
0,150	34 377	24,95	35 071	27,48	32 158	16,89	34 224	24,40	31 522	14,58	27 857	1,25	26 823	2,50	27 234	1,01	26 308	4,37
0,200	45 835	42,27	46 761	45,15	40 446	25,54	45 405	40,93	39 648	23,06	32 740	1,62	31 392	2,56	31 970	0,77	30 814	4,36
0,300	68 753	81,53	70 142	85,19	52 909	39,69	65 938	74,09	51 869	36,95	38 380	1,33	36 938	2,47	37 411	1,22	36 275	4,22
0,400	91 671	125,69	93 523	130,25	61 051	50,31	76 139	87,45	59 857	47,36	41 171	1,36	39 931	1,69	40 088	1,31	39 176	3,55
0,500	114 589	177,20	116 904	182,80	66 352	60,51	78 074	88,87	65 062	57,39	42 687	3,26	41 684	0,84	41 536	0,48	40 833	1,22
Err moy :	38,24		Err moy :	39,69	Err moy :	17,25	Err moy :	27,74	Err moy :	16,41	Err moy :	1,55	Err moy :	2,40	Err moy :	2,49	Err moy :	4,18

TABLE C.11 – Mode 10 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire

C.2 Validation par comparaison avec la simulation par éléments finis pour un stator

Mode	E.F.	S_R			$S_{B,\rho}$		$S_{T,\rho}$		$S_{B,M}$		$S_{T,M}$	
	Fréq	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	
	(Hz)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	
0	12 712	12 587	0,98	12 587	0,98	12 587	0,98	12 587	0,98	12 587	0,98	
2	3 566	3 875	8,67	3 769	5,69	3 540	0,73	3 778	5,95	3 547	0,53	
3	9 007	10 961	21,69	10 327	14,66	9 215	2,31	10 347	14,88	9 227	2,44	
4	14 905	21 017	41,01	19 024	27,64	16 077	7,86	19 066	27,92	16 091	7,96	
5	25 501	33 988	33,28	29 363	15,14	23 549	7,65	29 444	15,46	23 564	7,60	
6	31 983	49 860	55,90	40 913	27,92	31 294	2,15	41 319	29,19	31 604	1,19	
		moy :	26,92	moy :	15,34	moy :	3,62	moy :	15,73	moy :	4,40	

TABLE C.12 – Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine 1

Mode	E.F.	S_R			$S_{B,\rho}$		$S_{T,\rho}$		$S_{B,M}$		$S_{T,M}$	
	Fréq	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	
	(Hz)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	
0	10 438	10 429	0,09	10 429	0,09	10 429	0,09	10 429	0,09	10 429	0,09	
2	2 341	2 503	6,90	2 460	5,09	2 364	0,99	2 486	6,19	2 388	1,99	
3	5 943	7 078	19,10	6 821	14,77	6 327	6,46	6 872	15,64	6 362	7,05	
4	9 348	13 572	45,18	12 745	36,34	11 351	21,42	12 845	37,41	11 392	21,87	
5	18 331	21 948	19,73	19 982	9,00	17 052	6,98	20 171	10,04	17 098	6,72	
6	23 704	32 198	35,83	28 296	19,37	23 158	2,31	29 709	25,33	24 314	2,57	
		moy :	21,14	moy :	14,11	moy :	6,37	moy :	15,78	moy :	6,72	

TABLE C.13 – Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine 2

Mode	E.F.	S_R			$S_{B,\rho}$		$S_{T,\rho}$		$S_{B,M}$		$S_{T,M}$	
	Fréq	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	Fréq	Err	
	(Hz)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)	
0	8 294	7 753	6,52	7 753	6,52	7 753	6,52	7 753	6,52	7 753	6,52	
2	819	677	17,37	675	17,56	671	18,02	715	12,70	711	13,23	
3	2 183	1 914	12,32	1 904	12,76	1 883	13,74	1 962	10,13	1 937	11,28	
4	3 880	3 670	5,41	3 638	6,24	3 570	7,98	3 712	4,32	3 630	6,43	
5	5 581	5 935	6,35	5 856	4,92	5 694	2,02	5 957	6,74	5 758	3,17	
6	11 544	8 707	24,58	8 542	26,01	8 216	28,83	12 505	8,32	12 028	4,20	
		moy :	12,09	moy :	12,34	moy :	12,85	moy :	8,12	moy :	7,47	

TABLE C.14 – Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine 3

Compléments au Chapitre 10 : Optimisation Géométrique

D.1 Optimisations réalisées à $\Omega = 2\,000$ tr/min

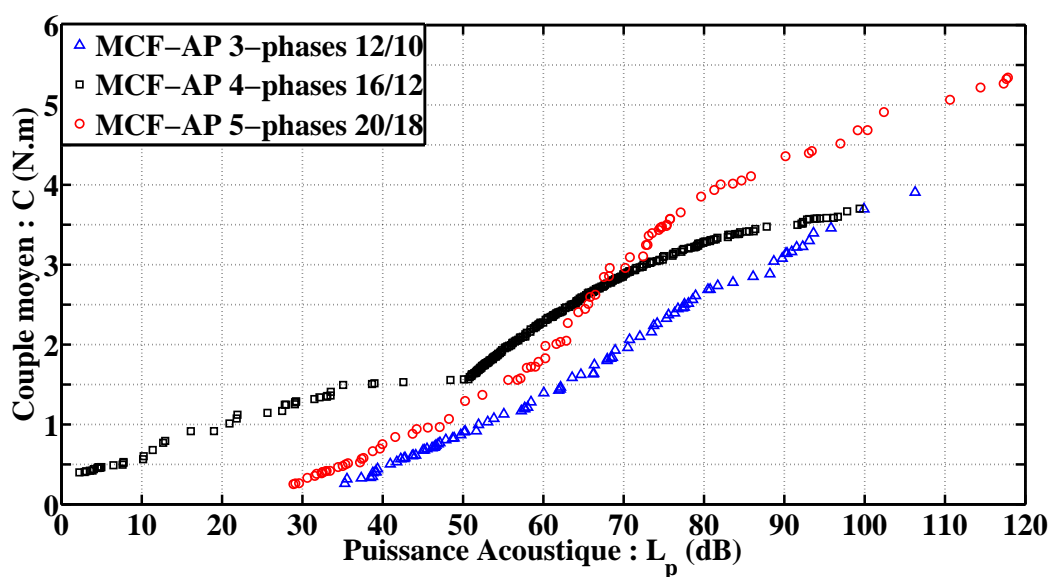


FIGURE D.1 – Fronts de Pareto obtenus pour $\Omega = 2\,000$ tr/min pour les trois structures

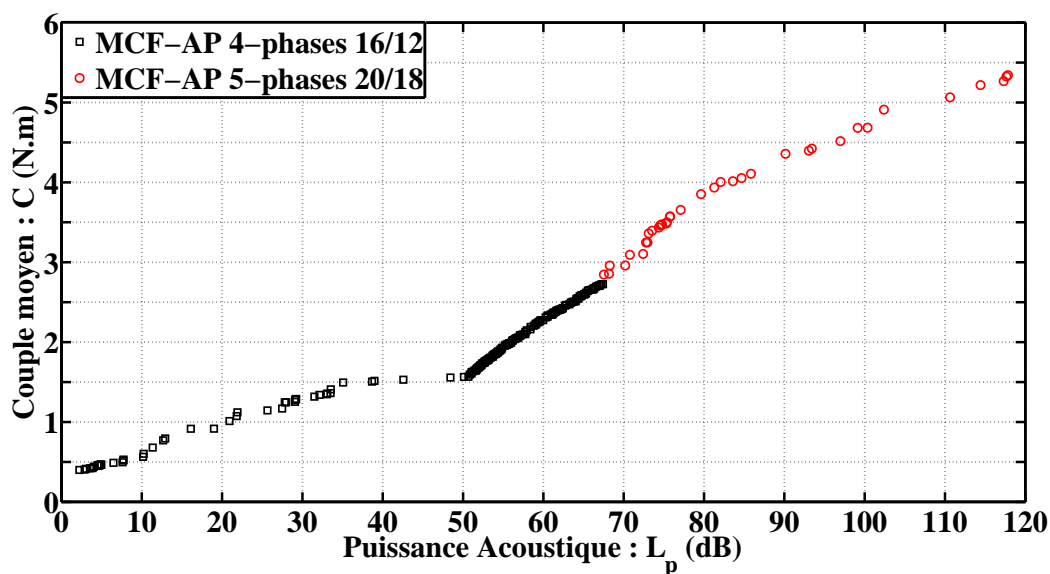


FIGURE D.2 – Front de Pareto total obtenu pour $\Omega = 2\,000$ tr/min

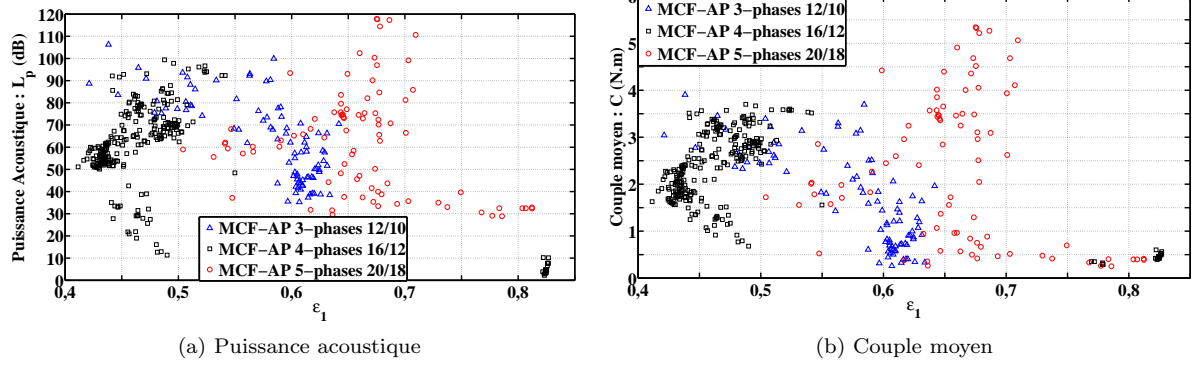


FIGURE D.3 – Influence de ϵ_1 pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min

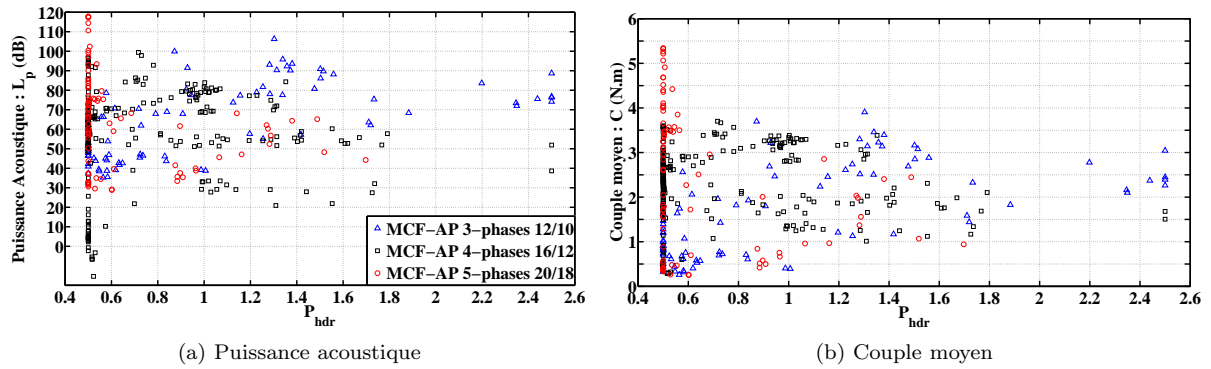


FIGURE D.4 – Influence de P_{hdr} pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min

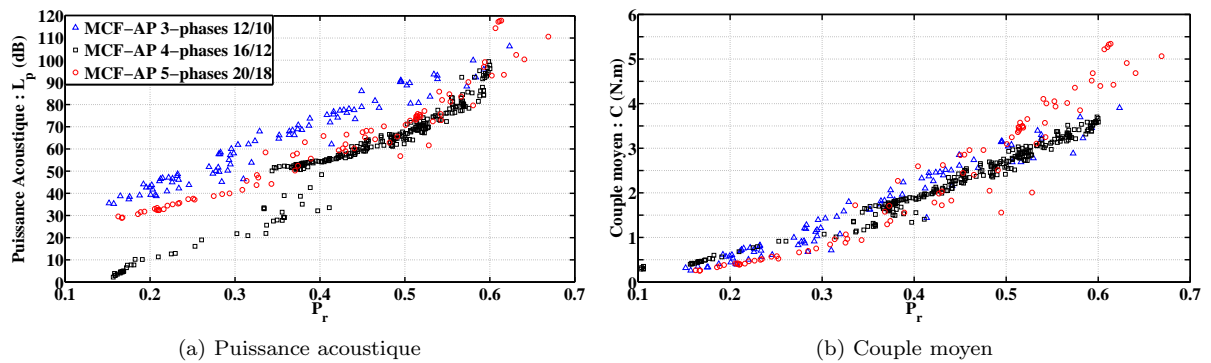


FIGURE D.5 – Influence de P_r pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min

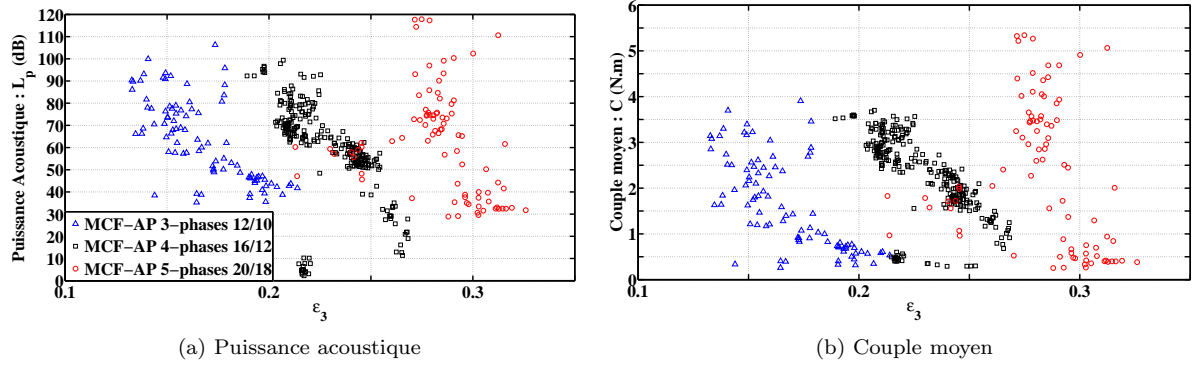


FIGURE D.6 – Influence de ϵ_3 pour $\Omega = 2\,000$ tr/min

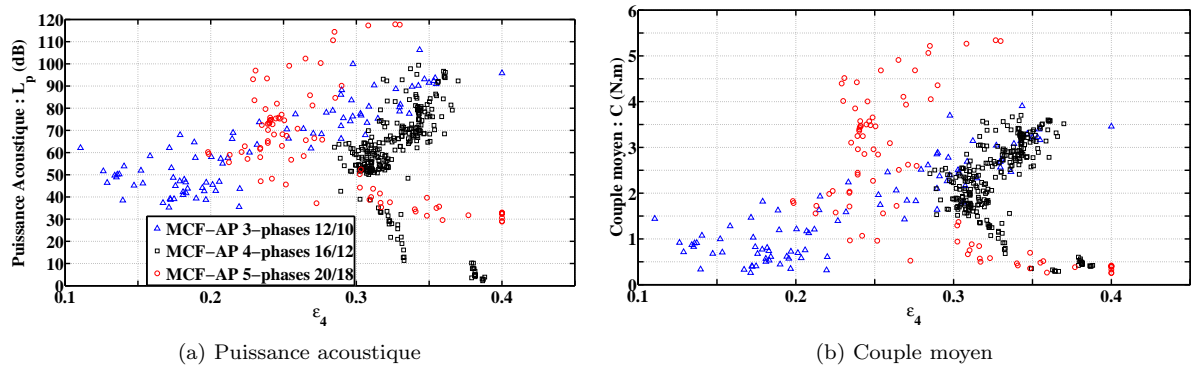


FIGURE D.7 – Influence de ϵ_4 pour $\Omega = 2\,000$ tr/min

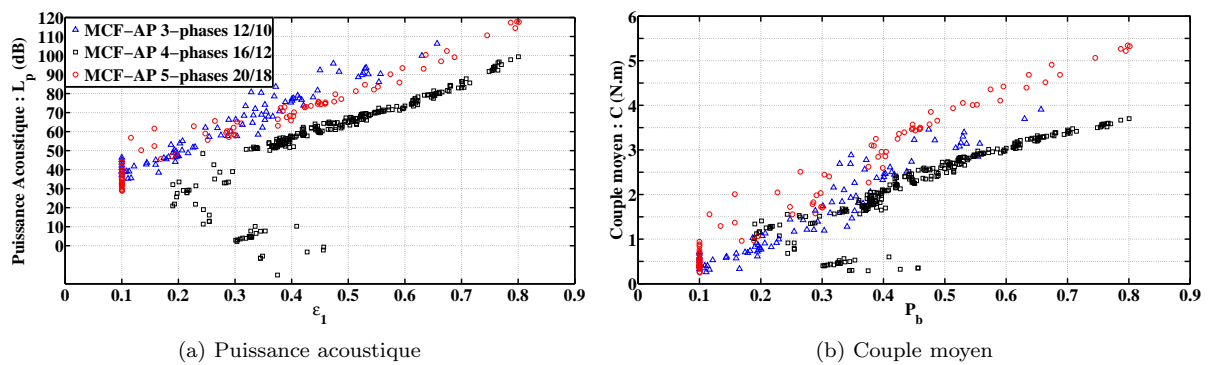


FIGURE D.8 – Influence de P_b pour $\Omega = 2\,000$ tr/min

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
ϵ_1	-0.74	-0.76	-0.68	-0.58	-0.21	-0.17
P_{hdr}	0.59	0.60	0.06	0.03	-0.25	-0.29
P_r	0.98	0.98	0.98	0.98	0.95	0.96
ϵ_3	-0.70	-0.68	-0.46	-0.56	-0.26	-0.21
ϵ_4	0.86	0.88	-0.29	-0.15	-0.54	-0.54
P_b	0.96	0.96	0.82	0.88	0.98	0.98

TABLE D.1 – Coefficient de corrélation entre les paramètres et les fonctions objectifs pour $\Omega = 2\,000$ tr/min

D.2 Optimisations réalisées à $\Omega = 3\,000$ tr/min

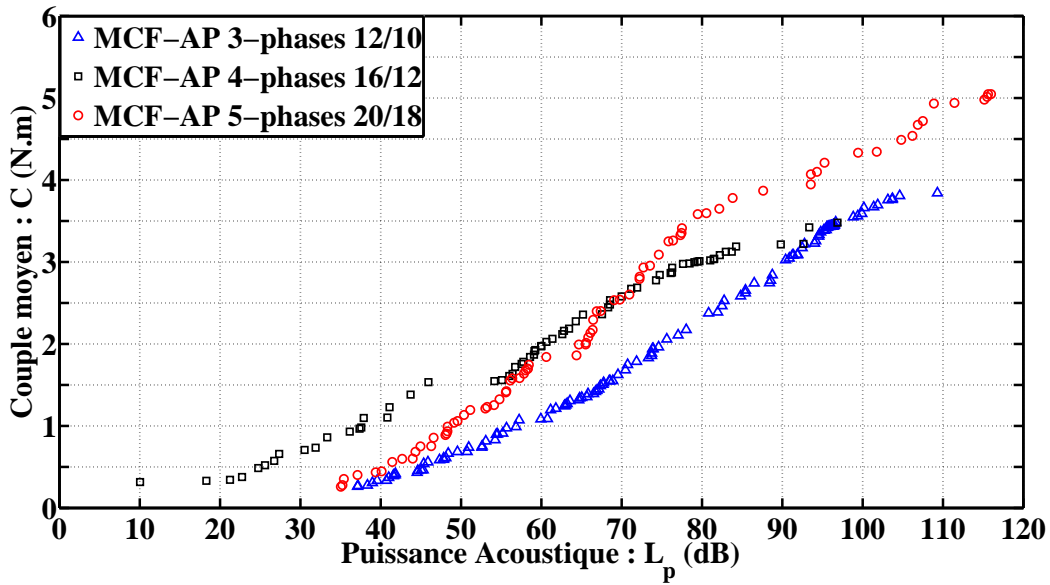


FIGURE D.9 – Fronts de Pareto obtenus pour $\Omega = 3\,000$ tr/min pour les trois structures

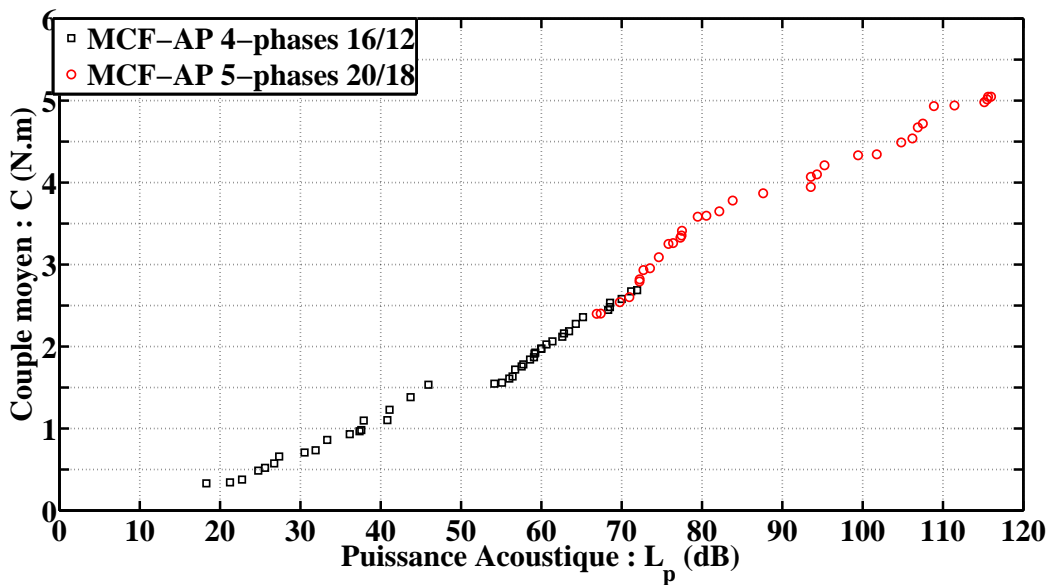


FIGURE D.10 – Front de Pareto total obtenu pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

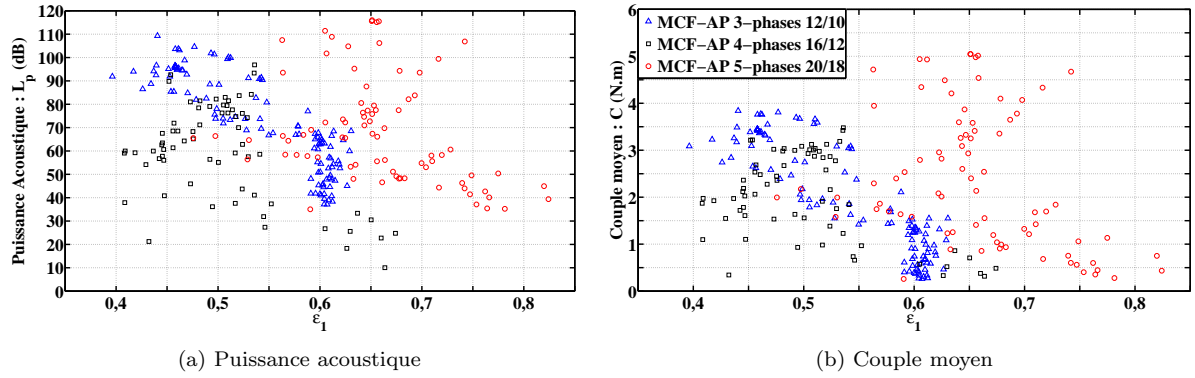


FIGURE D.11 – Influence de ϵ_1 pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

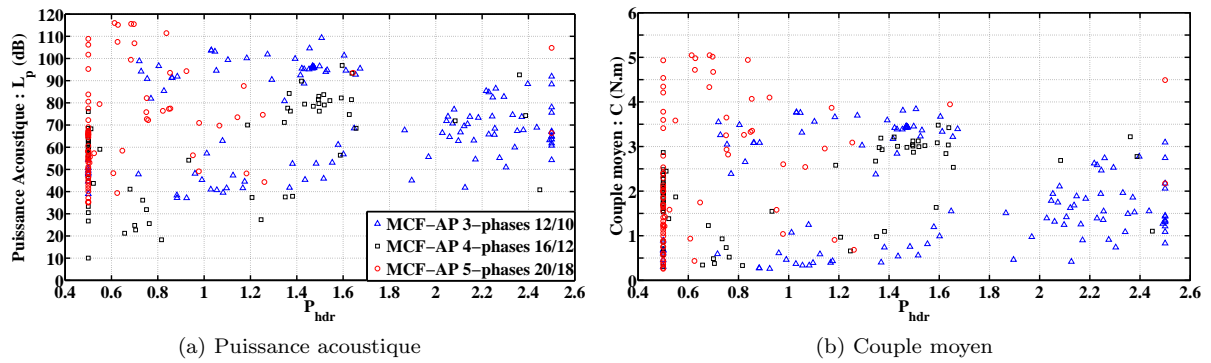


FIGURE D.12 – Influence de P_{hdr} pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

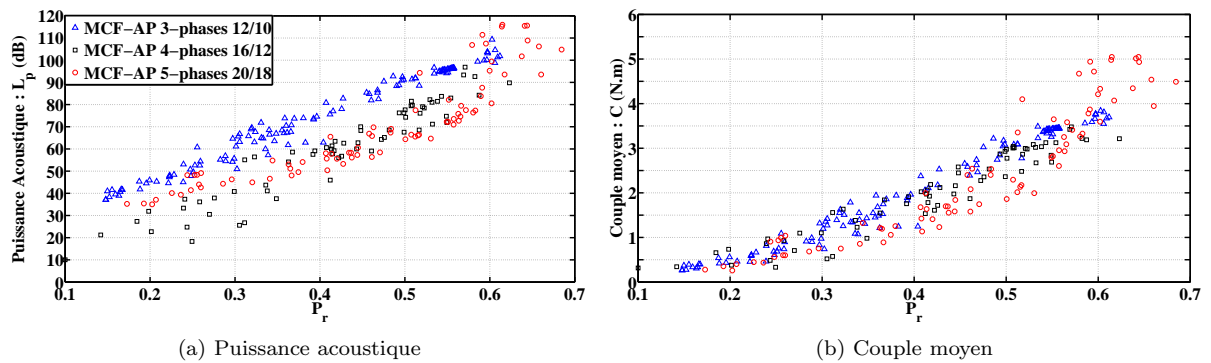


FIGURE D.13 – Influence de P_r pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

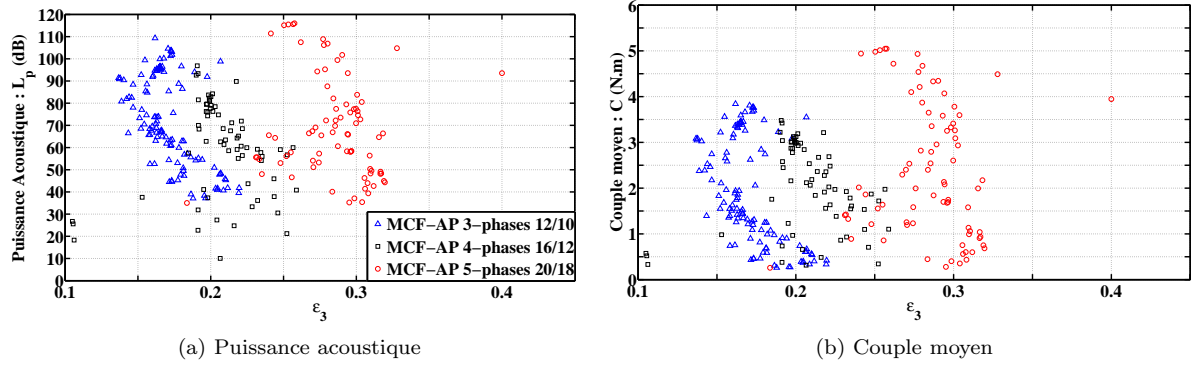


FIGURE D.14 – Influence de ϵ_3 pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

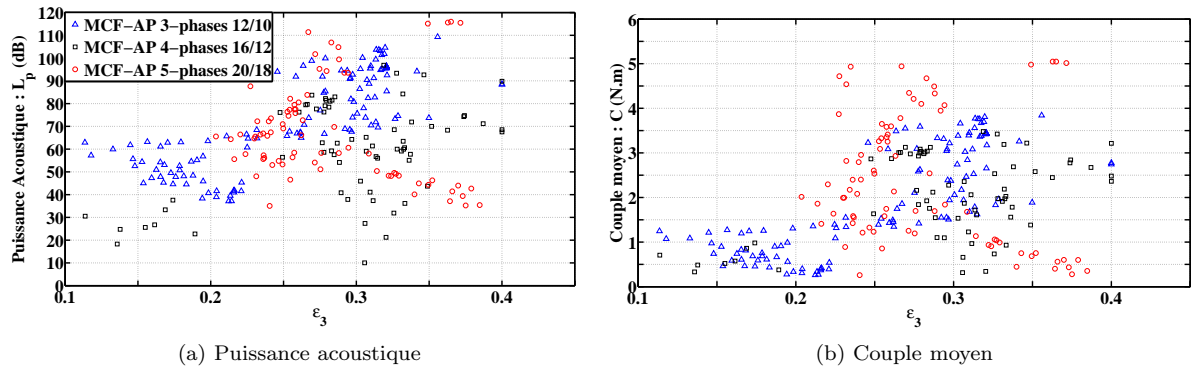


FIGURE D.15 – Influence de ϵ_4 pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

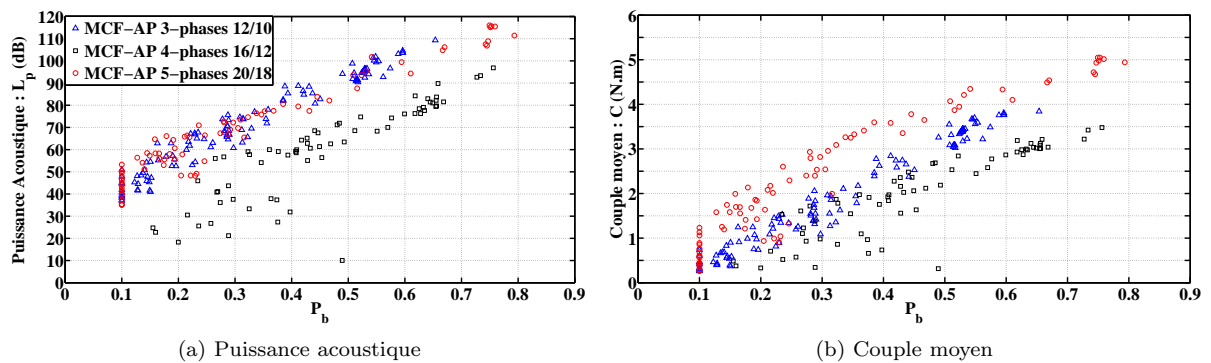


FIGURE D.16 – Influence de P_b pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

D.2. OPTIMISATIONS RÉALISÉES À $\Omega = 3\,000$ TR/MIN

Paramètre / Machine	3-phases 12/10		4-phases 16/12		5-phases 20/18	
	L_p	C	L_p	C	L_p	C
ϵ_1	-0.89	-0.91	-0.46	-0.41	-0.33	-0.33
P_{hdr}	0.01	-0.06	0.48	0.49	0.24	0.25
P_r	0.99	0.98	0.95	0.95	0.90	0.92
ϵ_3	-0.56	-0.51	0.06	0.03	-0.08	-0.05
ϵ_4	0.81	0.81	0.46	0.45	-0.18	-0.22
P_b	0.98	0.99	0.87	0.89	0.97	0.95

TABLE D.2 – Coefficient de corrélation entre les paramètres et les fonctions objectifs pour $\Omega = 3\,000$ tr/min

Table des figures

1.1	Principe de fonctionnement des <i>MCF-AP</i>	5
1.2	Principe de fonctionnement des <i>MCF-AP</i>	6
1.3	Évolution du flux généré par l'inducteur dans la bobine en fonction de la position du rotor	6
1.4	Principe de la commutation de flux présenté dans [Rauch and Johnson, 1955]	7
1.5	Machine monophasée 6/4 présentée dans [Rauch and Johnson, 1955]	7
1.6	Première <i>MCF-AP</i> triphasée [Hoang et al., 1997]	7
1.7	Nombre de publications sur les <i>MCF-AP</i>	8
1.8	Machine pentaphasée 20/18	9
1.9	Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : flux à vide	10
1.10	Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : lignes de champs à vide	10
1.11	Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : F.E.M. à $\Omega = 1\ 000\ tr/min$	11
1.12	Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : couple en charge	12
1.13	Étude des performances électromagnétiques par simulations éléments finis : lignes de champs en charge	13
2.1	Synoptique de l'étude magnéto-vibratoire des <i>MCF-AP</i>	16
2.2	Notation pour la présentation des contraintes magnétiques dans l'entrefer	17
2.3	FFT spatiale pour la <i>MCF-AP</i> 20/18	18
2.4	Contraintes magnétiques dans l'entrefer pour la <i>MCF-AP</i> 20/18	19
2.5	Contraintes magnétiques moyennes au niveau des dents pour la <i>MCF-AP</i> 20/18	20
2.6	Contraintes magnétiques au niveau de l'aimant pour la <i>MCF-AP</i> 20/18	21
2.7	Modes propres d'ovalisations de la structure statorique	22
2.8	Premiers modes propres du stator déterminés par simulation éléments finis (le gradient de couleur indique les amplitudes du déplacement : de rouge (élevée) à bleue (faible))	23
2.9	Résonances des dents statoriques par simulation éléments finis (le gradient de couleur indique les amplitudes du déplacement : d'amplitude élevée à faible - de rouge à bleue)	23
2.10	Montage expérimental pour les mesures des modes propres	24
2.11	Mesures des résonances du stator de la <i>MCF-AP</i>	24
2.12	Mesures expérimentales de l'accélération afin de déterminer les modes propres de la <i>MCF-AP</i>	25
2.13	Spectrogramme pour la <i>MCF-AP</i> 20/18	26
2.14	Accélération radiale d'un point de la surface extérieure du stator	27
2.15	Modes propres possiblement excités pour différentes structures de <i>MCF-AP</i>	28
2.16	Comparaison modèle analytique / éléments finis	29
2.17	Modèle Magnétique et Mécanique [Torregrossa et al., 2012a]	30
2.18	Modèle analytique magnéto-acoustique [Ait-Hammouda, 2005]	30
2.19	Optimisation géométrique utilisant un modèle analytique [Le Besnerais, 2008a]	31
3.1	Synoptique du modèle analytique magnéto-acoustique	35
4.1	Synoptique du modèle semi-analytique magnéto-statique 2D des <i>MCF-AP</i>	37
4.2	Machine à aimants permanents modélisée dans [Ittstein, 1992]	38
4.3	Machine à commutation de flux modélisée dans [Gaussens et al., 2013a]	39
4.4	Machine avec excentricité du rotor modélisée dans [Kim and Lieu, 2005]	39
4.5	Notations utilisées pour la résolution formelle des équations de Maxwell de la magnéto-statique	41
4.6	Modification de la géométrie de la <i>MCF-AP</i> pour la résolution des équations de Maxwell de la magnéto-statique en coordonnées cylindriques	42
4.7	Définitions des différentes zones de la machine pour la modélisation magnéto-statique	43
4.8	Résolution dans la zone $(1)_i$: Encoche du rotor (Air)	44

TABLE DES FIGURES

4.9	Résolution dans la zone (2) : Entrefer (Air)	47
4.10	Résolution dans la zone (3) _m : Aimant Permanent	48
4.11	Résolution dans la zone (4) _m : Bobines	50
4.12	Répartition de la densité de courant dans la zone (4) _m	50
4.13	Notations utilisées pour le calcul du flux magnétique à travers un bobinage	57
4.14	Présentation des <i>MCF-AP</i> utilisées pour la validation de notre modèle magnéto-statique	60
4.15	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer	61
4.16	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer	61
4.17	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique	62
4.18	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer	62
4.19	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer	63
4.20	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique	63
4.21	Influence du choix du nombre d'harmoniques sur le temps de calcul et la précision du modèle semi-analytique magnéto-statique	64
4.22	Courbe $B - H$ dans le fer	65
4.23	Influence de la saturation : induction radiale maximale et couple électromagnétique moyen en fonction de J_S	66
4.24	Influence de la saturation : Induction radiale pour plusieurs J_S	67
4.25	Comparaison des géométries de la machine réelle et de la machine modélisée	68
4.26	Induction radiale : modélisation de la machine réelle	69
5.1	Synoptique du modèle analytique permettant l'obtention de manière formelle des modes propres d'ovalisations 2D d'un stator de machine électrique	72
5.2	Notations utilisées pour l'obtention des fréquences propres d'un stator	73
5.3	Déformées associées aux premiers modes propres d'ovalisation : mode 0 et modes 2 à 9	74
5.4	Comparaison des fréquences propres obtenues pour un anneau circulaire entre la simulation par éléments finis et le modèle utilisé couramment dans la littérature	74
5.5	Structure vibrante sur un mode particulier à la fréquence f et possédant un champ de déplacement \vec{U} au point P	75
5.6	Notations utilisées pour présenter le modèle analytique adapté à l'anneau circulaire	78
5.7	Résultat de la simulation par éléments finis : relevé des premiers modes propres d'ovalisation d'un anneau circulaire	88
5.8	fréquences - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	92
5.9	erreurs - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire .	95
5.10	Anneau circulaire utilisé pour la validation expérimentale des différents modèles analytiques . . .	99
5.11	Premiers modes propres d'un anneau circulaire obtenus par mesures expérimentales	99
5.12	Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour un anneau circulaire	101
5.13	Notations utilisées pour l'obtention des fréquences propres d'un stator de machine électrique . . .	102
5.14	Première modélisation pour l'obtention des fréquences propres des stators de machines électriques : modification de la densité de l'anneau	103
5.15	Première modélisation pour l'obtention des fréquences propres des stators de machines électriques : ajout de masses ponctuelles	104
5.16	Géométrie de trois stators de machines électriques	106
5.17	Fréquences - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques	108
5.18	Erreurs - comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques	109
5.19	Stator de la machine synchrone utilisé pour la validation expérimentale du modèle analytique . .	111

TABLE DES FIGURES

5.20	Mesures des modes propres avec un marteau d'impact	112
5.21	Modes propres de la machine synchrone obtenus expérimentalement	112
5.22	Fréquences - comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine synchrone	113
5.23	Erreurs - comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine synchrone	113
5.24	Influence du rapport h/R sur les fréquences	114
5.25	Influence de L_d sur les fréquences	114
5.26	Influence de N_s sur les fréquences	114
5.27	Stator de machine électrique avec culasse extérieure	115
5.28	Présentation des géométries (stator + culasse) considérées	118
5.29	Fréquences - comparaison entre la simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques avec culasse externe	120
5.30	Erreurs - comparaison entre la simulation éléments finis / modèles analytiques pour des stators de machines électriques avec culasse externe	121
6.1	Synoptique du modèle analytique permettant l'obtention de manière formelle des vibrations et de la puissance acoustique rayonnée par la machine	123
6.2	État de l'art sur les modèles analytiques acoustiques	124
6.3	Notations utilisées pour le modèle analytique vibratoire - acoustique	125
6.4	Équilibre d'une portion de poutre de longueur angulaire $d\theta$	126
6.5	Répartition des efforts magnétique dans une machines pentaphasée	129
6.6	Machine utilisée pour valider le modèle analytique vibratoire - acoustique par comparaison avec la simulation éléments finis	137
6.7	Validation modèle analytique vibratoire - acoustique : comparaison avec la simulation éléments finis	138
6.8	Banc expérimental pour la mesure des vibrations de la machine à commutation de flux	139
6.9	Validation modèle analytique vibratoire - acoustique : comparaison avec des mesures expérimentales	140
8.1	Présentation générale du modèle sous forme « boîte noire »	147
8.2	Observation du niveau d'induction	150
8.3	Procédure d'optimisation géométrique basée sur des critères magnéto-acoustiques	153
9.1	Optimisation basée sur des critères magnétiques	155
9.2	Résultat d'une optimisation magnétique : Front de Pareto Couple moyen - Ondulation de couple	156
9.3	Résultat d'une optimisation magnétique : Présentation des résultats dans le plan Couple - Puissance acoustique rayonnée	156
9.4	Machine triphasée 12/10 de base	157
9.5	Variations des grandeurs magnéto-acoustique en fonction de l'ouverture angulaire rotorique . . .	158
9.6	Variations des grandeurs magnéto-acoustique en fonction de la hauteur de la dent rotorique . . .	159
9.7	Variations des grandeurs magnéto-acoustiques en fonction de l'ouverture angulaire de la dent statorique à ouverture angulaire des aimants permanents constante	159
9.8	Variations des grandeurs magnéto-acoustiques en fonction de l'ouverture angulaire de la dent statorique à ouverture angulaire des bobinages constante	160
9.9	Variations des grandeurs magnéto-acoustiques en fonction du rapport entre la taille du rotor et la taille du stator	160
10.1	Fronts de Pareto obtenus pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min pour les trois structures	165
10.2	Front de Pareto total obtenu pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	166
10.3	Influence de ϵ_1 pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	167
10.4	Influence de P_{hdr} pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	168
10.5	Influence de P_r pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	169
10.6	Influence de ϵ_3 pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	169
10.7	Influence de ϵ_4 pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	170

TABLE DES FIGURES

10.8	Influence de P_b pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	171
10.9	Présentation de six machines issues des fronts de Pareto pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	172
10.10	Contraintes magnétiques pour les six machines issues des fronts de Pareto pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min	173
10.11	Déplacement temporel pour les six machines issues des fronts de Pareto pour $\Omega = 1\ 000$ tr/min .	174
10.12	Fronts de Pareto obtenus pour un fonctionnement à vitesse variable	177
10.13	Front de Pareto total obtenu pour un fonctionnement à vitesse variable	177
10.14	Influence de ϵ_1 pour un fonctionnement à vitesse variable	178
10.15	Influence de P_{hdr} pour un fonctionnement à vitesse variable	178
10.16	Influence de P_r pour un fonctionnement à vitesse variable	178
10.17	Influence de ϵ_3 pour un fonctionnement à vitesse variable	179
10.18	Influence de ϵ_4 pour un fonctionnement à vitesse variable	179
10.19	Influence de P_b pour un fonctionnement à vitesse variable	179
10.20	180
10.20	Présentation de six machines issues des fronts de Pareto pour un fonctionnement à vitesse variable	181
A.1	Champ magnétique à la surface de séparation de deux matériaux magnétiques	191
B.1	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 2 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer	207
B.2	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 2 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer	207
B.3	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 2 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique	208
B.4	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer	208
B.5	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer	209
B.6	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 1 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique	209
B.7	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer	210
B.8	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer	210
B.9	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique	211
B.10	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer	211
B.11	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer	212
B.12	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 3 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique	212
B.13	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement à vide - induction radiale au niveau de l'entrefer	213
B.14	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement à vide - induction angulaire au niveau de l'entrefer	213
B.15	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement à vide - Flux simple par phase et couple électromagnétique	214
B.16	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement en charge - induction radiale au niveau de l'entrefer	214
B.17	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement en charge - induction angulaire au niveau de l'entrefer	215
B.18	Validation du modèle magnéto-statique pour la machine 4 : fonctionnement en charge - Flux simple par phase et couple électromagnétique	215

TABLE DES FIGURES

D.1 Fronts de Pareto obtenus pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min pour les trois structures 223

D.2 Front de Pareto total obtenu pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min 223

D.3 Influence de ϵ_1 pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min 224

D.4 Influence de P_{hdr} pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min 224

D.5 Influence de P_r pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min 224

D.6 Influence de ϵ_3 pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min 225

D.7 Influence de ϵ_4 pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min 225

D.8 Influence de P_b pour $\Omega = 2\ 000$ tr/min 225

D.9 Fronts de Pareto obtenus pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min pour les trois structures 226

D.10 Front de Pareto total obtenu pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min 226

D.11 Influence de ϵ_1 pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min 227

D.12 Influence de P_{hdr} pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min 227

D.13 Influence de P_r pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min 227

D.14 Influence de ϵ_3 pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min 228

D.15 Influence de ϵ_4 pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min 228

D.16 Influence de P_b pour $\Omega = 3\ 000$ tr/min 228

Liste des tableaux

1.1	Paramètres de la machine pentaphasée	9
4.1	Principaux paramètres des quatre <i>MCF-AP</i>	59
5.1	Erreur moyenne commise par chacun des modèles pour les fréquences propres d'un anneau circulaire	95
5.2	Caractéristiques géométriques et mécaniques de l'anneau	98
5.3	Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour un anneau circulaire	101
5.4	Dimensions de trois stators de machines électriques	107
5.5	Erreur moyenne des modèles pour les fréquences propres d'un stator de machine électrique	107
5.6	Principales dimensions de la machine synchrone utilisé pour la validation expérimentale du modèle analytique	112
5.7	Fréquences propres de la machine synchrone : comparaison entre les modèles et les mesures expérimentales	113
5.8	Dimensions des machines	118
5.9	Paramètres mécaniques	119
5.10	Comparaison entre les mesures expérimentales et les modèles analytiques pour le stator avec culasse de la machine 1	119
5.11	Comparaison entre les mesures expérimentales et les modèles analytiques pour le stator avec culasse de la machine 2	119
5.12	Comparaison entre les mesures expérimentales et les modèles analytiques pour le stator avec culasse de la machine 3	119
5.13	Erreur moyenne de chacun des modèles pour les fréquences propres d'un stator de machine électrique	119
6.1	Temps de calculs : comparaison entre le modèle analytique et le modèle éléments finis	141
9.1	Dimension de la machine triphasée 12/10 de base	157
10.1	Coefficients de corrélation entre ϵ_1 et les fonctions objectifs	167
10.2	Coefficients de corrélation entre $P_{h,dr}$ et les fonctions objectifs	168
10.3	Coefficients de corrélation entre P_r et les fonctions objectifs	168
10.4	Coefficients de corrélation entre ϵ_3 et les fonctions objectifs	169
10.5	Coefficients de corrélation entre ϵ_4 et les fonctions objectifs	170
10.6	Coefficients de corrélation entre P_b et les fonctions objectifs	171
10.7	Paramètres géométriques des machines	175
10.8	Fréquences propres d'ovalisations des six machines issues des fronts de Pareto à $\Omega = 1\ 000$ tr/min	175
10.9	Fréquences des harmoniques des forces pour les trois structures	175
10.10	Coefficients de corrélation entre les paramètres et les fonctions objectifs pour un fonctionnement à vitesse variable	179
B.1	Définition des opérateurs vectoriel en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques	193
C.1	Fréquences propres d'un anneau circulaire - résultats de la simulation par éléments finis	217
C.2	Mode 0 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	217
C.3	Mode 2 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	218
C.4	Mode 3 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	218
C.5	Mode 4 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	218
C.6	Mode 5 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	219
C.7	Mode 6 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	219
C.8	Mode 7 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	219
C.9	Mode 8 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	220

C.10 Mode 9 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	220
C.11 Mode 10 : comparaison simulation éléments finis / modèles analytiques pour un anneau circulaire	220
C.12 Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine 1	221
C.13 Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine 2	221
C.14 Comparaison mesures expérimentales / modèles analytiques pour le stator de la machine 3	221
D.1 Coefficient de corrélation entre les paramètres et les fonctions objectifs pour $\Omega = 2\,000$ tr/min	226
D.2 Coefficient de corrélation entre les paramètres et les fonctions objectifs pour $\Omega = 3\,000$ tr/min	229

Bibliographie

- [A. Ait-Hammouda, 2005] A. Ait-Hammouda, M. Hecquet, M. G. P. B. (2005). Developpement d'un outil de prediction du bruit d'une machine asynchrone couplé à un superviseur d'optimisation. *ELECTRIMACS*.
- [Ackermann and Sottek, 1995] Ackermann, B. and Sottek, R. (1995). Analytical modeling of the cogging torque in permanent magnet motors. *Electrical Engineering*, 78(2) :117–125.
- [Ahn et al., 2004] Ahn, J.-W., Park, S.-J., and Lee, D.-H. (2004). Hybrid excitation of srm for reduction of vibration and acoustic noise. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 51(2) :374–380.
- [Ait-Hammouda, 2005] Ait-Hammouda, A. (2005). *Pré-dimensionnement et étude de sensibilité vibro-acoustique de machines à courant alternatif et à vitesse variable*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.
- [Ait-Hammouda, 2003] Ait-Hammouda, M.Hecquet, M. P. (2003). Analytical approach to study noise and vibration of a synchronous permanent magnet machine. *KLUWER Academic Publisher*.
- [Alger, 1965] Alger, P. (1965). *The nature of induction machines*. Gordon and Breach.
- [Alger and Erdelyi, 1956] Alger, P. and Erdelyi, E. (1956). Magnetic Noise of Polyphase Induction Motors. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
- [Amara et al., 2009] Amara, Y., Vido, L., Gabsi, M., Hoang, E., Hamid Ben Ahmed, A., and Lecrivain, M. (2009). Hybrid excitation synchronous machines : Energy-efficient solution for vehicles propulsion. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 58(5) :2137–2149.
- [Anwar et al., 2001] Anwar, M. N., Husain, I., Mir, S., and Sebastian, T. (2001). Experimental evaluation of acoustic-noise and mode frequencies with design variations of switched reluctance machines. In *Industry Applications Conference, 2001. Thirty-Sixth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2001 IEEE*, volume 1, pages 3–10 vol.1.
- [Anwar et al., 2003] Anwar, M. N., Husain, I., Mir, S., and Sebastian, T. (2003). Evaluation of acoustic noise and mode frequencies with design variations of switched reluctance machines. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 39(3) :695–703.
- [Aubry, 2011] Aubry, J. (2011). *Optimisation du dimensionnement d'une chaîne de conversion électrique directe incluant un système de lissage de production par supercondensateurs : application au houlogénérateur SEAREV*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan.
- [Bali et al., 2010] Bali, H., Amara, Y., Barakat, G., Ibtouen, R., and Gabsi, M. (2010). Analytical modeling of open circuit magnetic field in wound field and series double excitation synchronous machines. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(10) :3802–3815.
- [Barre, 2003] Barre, O. (2003). *Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale*. PhD thesis, Ecole Central de Lille.
- [Bellara et al., 2009] Bellara, A., Amara, Y., Barakat, G., and Dakyo, B. (2009). Two-dimensional exact analytical solution of armature reaction field in slotted surface mounted pm radial flux synchronous machines. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 45(10) :4534–4538.
- [Bies and Hansen, 2009] Bies, D. A. and Hansen, C. H. (2009). *Engineering noise control : theory and practice*. CRC Press.
- [Boisson et al., 2012] Boisson, J., Louf, F., Ojeda, J., Mininger, X., and Gabsi, M. (2012). Magnetic forces and vibrational behavior analysis for flux switching permanent magnet machines. In *Electrical Machines (ICEM), 2012 XXth International Conference on*, pages 2988–2993.
- [Boisson et al., 2014] Boisson, J., Louf, F., Ojeda, J., Mininger, X., and Gabsi, M. (2014). Analytical approach for mechanical resonance frequencies of high-speed machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 61(6) :3081–3088.
- [Boughrara et al., 2012] Boughrara, K., Ibtouen, R., and Lubin, T. (2012). Analytical prediction of magnetic field in parallel double excitation and spoke-type permanent-magnet machines accounting for tooth-tips and shape of polar pieces. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(7) :2121–2137.

- [Cai et al., 2002] Cai, W., Pillay, P., and Tang, Z. (2002). Impact of stator windings and end-bells on resonant frequencies and mode shapes of switched reluctance motors. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 38(4) :1027–1036.
- [Camus, 1997] Camus, F. (1997). *Modélisation des phénomènes vibratoires des machines à reluctance variable à double saillance : influence de l'alimentation*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Multon, Bernard Electronique Cachan, Ecole normale supérieure 1997.
- [Camus et al., 1997] Camus, F., Gabsi, M., and Multon, B. (1997). Prédiction des vibrations du stator d'une machine à réluctance variable en fonction du courant absorbé. *Journal de Physique III*, 7 :387–404.
- [Cassoret, 1996] Cassoret, B. (1996). *Réduction active du bruit magnétique des machines asynchrones directement connectées au réseau*. PhD thesis, Université d'Artois.
- [Cassoret et al., 2003] Cassoret, B., Corton, R., Roger, D., and Brudny, J.-F. (2003). Magnetic noise reduction of induction machines. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 18(2) :570–579.
- [Chapman, 1922] Chapman, F. (1922). The production of noise and vibration by certain squirrel-cage induction motors. *Electrical Engineers, Journal of the Institution of*, 61(313) :39–48.
- [Chen and Zhu, 2010a] Chen, J. and Zhu, Z. (2010a). Comparison of all- and alternate-poles-wound flux-switching pm machines having different stator and rotor pole numbers. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 46(4) :1406–1415.
- [Chen and Zhu, 2010b] Chen, J. and Zhu, Z. (2010b). Influence of the rotor pole number on optimal parameters in flux-switching pm brushless ac machines by the lumped-parameter magnetic circuit model. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 46(4) :1381–1388.
- [Chen and Zhu, 2010c] Chen, J. and Zhu, Z. (2010c). Winding configurations and optimal stator and rotor pole combination of flux-switching pm brushless ac machines. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 25(2) :293–302.
- [Chen et al., 2008] Chen, J., Zhu, Z., and Howe, D. (2008). Stator and rotor pole combinations for multi-tooth flux-switching permanent-magnet brushless ac machines. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 44(12) :4659–4667.
- [Chen et al., 2011] Chen, J., Zhu, Z., Iwasaki, S., and Deodhar, R. (2011). Influence of slot opening on optimal stator and rotor pole combination and electromagnetic performance of switched-flux pm brushless ac machines. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 47(4) :1681–1691.
- [Clénet et al., 1994] Clénet, S., Astier, S., Lefèvre, Y., and Lajoie-Mazenc, M. (1994). Méthode de mesure des fréquences propres et des coefficients d'amortissement d'une machine synchrone a aimants permanents. *Journal de Physique III*, 4(8) :1431–1447.
- [Corton, 2000] Corton, R. (2000). *Bruit magnétique des machines asynchrones : procédures de réduction passive et active*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Brudny, Jean-François Génie électrique Artois 2000.
- [de la Barriere et al., 2013] de la Barriere, O., Ben Ahmed, H., Gabsi, M., and LoBue, M. (2013). Two-dimensional analytical airgap field model of an inset permanent magnet synchronous machine, taking into account the slotting effect. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49(4) :1423–1435.
- [de la Barriere et al., 2012] de la Barriere, O., Hlioui, S., Ben Ahmed, H., Gabsi, M., and LoBue, M. (2012). 3-d formal resolution of maxwell equations for the computation of the no-load flux in an axial flux permanent-magnet synchronous machine. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(1) :128–136.
- [De la Barrière, 2010] De la Barrière, O. (2010). *Modèles analytiques électromagnétiques bi et tri dimensionnels en vue de l'optimisation des actionneurs disques : étude théorique et expérimentale des pertes magnétiques dans les matériaux granulaires*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Gabsi, Mohamed Électronique Électrotechnique Automatique Cachan, Ecole normale supérieure 2010.
- [Den Hartog, 1956] Den Hartog, J. (1956). *Mechanical Vibrations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications.
- [Dong et al., 2010] Dong, G., Cheng, M., and Hua, W. (2010). Modeling of a novel hybrid-excited flux-switching machine drives for hybrid electrical vehicles. In *Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2010 International Conference on*, pages 839–843.

- [Fiedler et al., 2010] Fiedler, J., Kasper, K., and De Doncker, R. (2010). Calculation of the acoustic noise spectrum of srm using modal superposition. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 57(9) :2939–2945.
- [Fritz, 1921] Fritz, H. (1921). Noise in electrical machines. *Archiv für elektrotechnik*, 10.
- [Fu and Zhu, 2012] Fu, J. and Zhu, C. (2012). Subdomain model for predicting magnetic field in slotted surface mounted permanent-magnet machines with rotor eccentricity. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 48(5) :1906–1917.
- [Gaussens, 2013] Gaussens, B. (2013). *Machines synchrones à commutation de flux : de la modélisation numérique et analytique à l'exploration topologique*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Gabsi, Mohamed Électronique Electrotechnique Automatique Cachan, Ecole normale supérieure 2013.
- [Gaussens et al., 2013a] Gaussens, B., de la Barriere, O., Hoang, E., Saint-Michel, J., Manfe, P., Lecrivain, M., and Gabsi, M. (2013a). Magnetic field solution in doubly slotted airgap of conventional and alternate field-excited switched-flux topologies. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49(9) :5083–5096.
- [Gaussens et al., 2013b] Gaussens, B., Hoang, E., de la Barriere, O., Saint-Michel, J., Manfe, P., Lecrivain, M., and Gabsi, M. (2013b). Uni- and bidirectional flux variation loci method for analytical prediction of iron losses in doubly-salient field-excited switched-flux machines. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49(7) :4100–4103.
- [Gaussens et al., 2012] Gaussens, B., Hoang, E., Lecrivain, M., Manfe, P., and Gabsi, M. (2012). A new hybrid-excited flux-switching machine with excitation coils in stator slots. In *Electrical Machines and Systems (ICEMS), 2012 15th International Conference on*, pages 1–6.
- [Gaussens et al., 2014] Gaussens, B., Hoang, E., Lecrivain, M., Manfe, P., and Gabsi, M. (2014). A hybrid-excited flux-switching machine for high-speed dc-alternator applications. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 61(6) :2976–2989.
- [Gibbs, 1958] Gibbs, W. (1958). *Conformal transformations in electrical engineering*. Chapman & Hall.
- [Gieras et al., 2005] Gieras, J., Wang, C., and Lai, J. (2005). *Noise of Polyphase Electric Motors*. Electrical and Computer Engineering. Taylor & Francis.
- [Grigoriev, 1974] Grigoriev, N. V. (1974). *Vibration of Power Mechanics*. Machinostroenie.
- [Gysen et al., 2010a] Gysen, B. L. J., Ilhan, E., Meessen, K., Paulides, J. J. H., and Lomonova, E. (2010a). Modeling of flux switching permanent magnet machines with fourier analysis. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(6) :1499–1502.
- [Gysen et al., 2010b] Gysen, B. L. J., Meessen, K., Paulides, J. J. H., and Lomonova, E. (2010b). General formulation of the electromagnetic field distribution in machines and devices using fourier analysis. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(1) :39–52.
- [He et al., 2011] He, G., Huang, Z., and Chen, D. (2011). Two-dimensional field analysis on electromagnetic vibration-and-noise sources in permanent-magnet direct current commutator motors. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 47(4) :787–794.
- [Hoang et al., 1997] Hoang, E., Ben Ahmed, H., and Lucidarme, J. (1997). Switching flux permanent magnet polyphased synchronous machines. In *EPE 97, Trondheim, Norvège*.
- [Hoang et al., 2000] Hoang, E., Gabsi, M., Lecrivain, M., and Multon, B. (2000). Influence of magnetic losses on maximum power limits of synchronous permanent magnet drives in flux-weakening mode. In *Industry Applications Conference, 2000. Conference Record of the 2000 IEEE*, volume 1, pages 299–303 vol.1.
- [Hoang et al., 2007] Hoang, E., Lecrivain, M., and Gabsi, M. (2007). A new structure of a switching flux synchronous polyphased machine with hybrid excitation. In *Power Electronics and Applications, 2007 European Conference on*, pages 1–8.
- [Hoang et al., 2010] Hoang, E., Lecrivain, M., and Gabsi, M. (2010). 3-d thermal model of an hybrid excitation flux switching synchronous machine using a 2-d fe method software. In *Power Electronics Electrical Drives Automation and Motion (SPEEDAM), 2010 International Symposium on*, pages 101–104.
- [Hoang et al., 2011] Hoang, E., Lecrivain, M., Hlioui, S., and Gabsi, M. (2011). Hybrid excitation synchronous permanent magnets synchronous machines optimally designed for hybrid and full electrical vehicle. In *Power Electronics and ECCE Asia (ICPE ECCE), 2011 IEEE 8th International Conference on*, pages 153–160.
- [Hofmann and Sanders, 2000] Hofmann, H. and Sanders, S. (2000). High-speed synchronous reluctance machine with minimized rotor losses. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 36(2) :531–539.

- [Hua and Cheng, 2008] Hua, W. and Cheng, M. (2008). Cogging torque reduction of flux-switching permanent magnet machines without skewing. In *Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on*, pages 3020–3025.
- [Hua et al., 2006a] Hua, W., Cheng, M., Zhang, J., and Zhu, X. (2006a). Optimal design of flux-switching permanent magnet machine based on finite element analysis. In *Electromagnetic Field Computation, 2006 12th Biennial IEEE Conference on*, pages 333–333.
- [Hua et al., 2006b] Hua, W., Cheng, M., Zhu, X., and Zhang, J. (2006b). Investigation of end-effect in brushless machines having magnets in the stator with doubly salient structure. In *Magnetics Conference, 2006. INTERMAG 2006. IEEE International*, pages 197–197.
- [Hua et al., 2006c] Hua, W., Cheng, M., Zhu, Z., and Howe, D. (2006c). Design of flux-switching permanent magnet machine considering the limitation of inverter and flux-weakening capability. In *Industry Applications Conference, 2006. 41st IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2006 IEEE*, volume 5, pages 2403–2410.
- [Hua et al., 2007] Hua, W., Cheng, M., Zhu, Z., and Howe, D. (2007). Analysis and optimization of back-emf waveform of a novel flux-switching permanent magnet motor. In *Electric Machines Drives Conference, 2007. IEMDC '07. IEEE International*, volume 2, pages 1025–1030.
- [Hua and Ming, 2006] Hua, W. and Ming, C. (2006). Inductance characteristics of 3-phase flux-switching permanent magnet machine with doubly-salient structure. In *Power Electronics and Motion Control Conference, 2006. IPEMC 2006. CES/IEEE 5th International*, volume 3, pages 1–5.
- [Hubert, 2001] Hubert, A. (2001). *Contribution à l'étude des bruits acoustiques générés lors de l'association machines-électriques - convertisseurs statiques de puissance. Application à la machine asynchrone*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne.
- [Im et al., 1997] Im, D., Chang, J., Park, S., Kwon, B., Hong, J., and Kim, B.-T. (1997). Analysis of radial force as a source of vibration in an induction motor with skewed slots. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 33(2) :1650–1653.
- [Ittstein, 1991] Ittstein, H. (1991). *Analytische Bestimmung von Rast- und Anfahrmoment einer zweipoligen permanenterregten Gleichstrommaschine*.
- [Ittstein, 1992] Ittstein, H. (1992). Analytische berechnung der rastmomente eines zweipoligen dauererregten gleichstrommotors. *Archiv für Elektrotechnik*, 75(4) :283–292.
- [Iwasaki et al., 2009] Iwasaki, S., Deodhar, R., Liu, Y., Pride, A., Zhu, Z., and Bremner, J. (2009). Influence of pwm on the proximity loss in permanent-magnet brushless ac machines. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 45(4) :1359–1367.
- [Jia et al., 2010] Jia, H., Cheng, M., Hua, W., Zhao, W., and Li, W. (2010). Torque ripple suppression in flux-switching pm motor by harmonic current injection based on voltage space-vector modulation. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(6) :1527–1530.
- [Jordan, 1950] Jordan, H. (1950). *Geräuscharme Elektromotoren : Lärmbildung und Lärmbeseitigung bei Elektromotoren*. Girardet.
- [Kennedy and Eberhart, 1995] Kennedy, J. and Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. In *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, volume 4, pages 1942–1948 vol.4.
- [Kim and Lieu, 1998a] Kim, U. and Lieu, D. (1998a). Magnetic field calculation in permanent magnet motors with rotor eccentricity : with slotting effect considered. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 34(4) :2253–2266.
- [Kim and Lieu, 1998b] Kim, U. and Lieu, D. (1998b). Magnetic field calculation in permanent magnet motors with rotor eccentricity : without slotting effect. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 34(4) :2243–2252.
- [Kim and Lieu, 2005] Kim, U. and Lieu, D. (2005). Effects of magnetically induced vibration force in brushless permanent-magnet motors. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(6) :2164–2172.
- [Lalanne et al., 1986] Lalanne, M., Berthier, P., and Der Hagopian, J. (1986). *Mécanique des vibrations linéaires : avec exercices corrigés et programmes de calcul*. Enseignement de la physique. Masson.
- [Lamghari-Jamal et al., 2006] Lamghari-Jamal, M.-I., Fouladgar, J., Zaim, E.-H., and Trichet, D. (2006). A magneto-thermal study of a high-speed synchronous reluctance machine. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 42(4) :1271–1274.

- [Lanczos, 2012] Lanczos, C. (2012). *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications.
- [Le Besnerais, 2008a] Le Besnerais, J. (2008a). *Réduction du bruit audible d'origine magnétique dans les machines asynchrones alimentées par MLI - règles de conception silencieuse et optimisation multi-objectif*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.
- [Le Besnerais, 2008b] Le Besnerais, J. (2008b). *Reduction of magnetic noise in PWM-supplied induction machines : low-noise design rules and multi-objective optimisation*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Brochet, Pascal Génie électrique Ecole Centrale de Lille 2008.
- [Le Besnerais et al., 2010a] Le Besnerais, J., Fasquelle, A., Hecquet, M., Pelle, J., Lanfranchi, V., Harmand, S., Brochet, P., and Randria, A. (2010a). Multiphysics modeling : Electro-vibro-acoustics and heat transfer of pwm-fed induction machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 57(4) :1279–1287.
- [Le Besnerais et al., 2008] Le Besnerais, J., Lanfranchi, V., Hecquet, M., and Brochet, P. (2008). Multiobjective optimization of induction machines including mixed variables and noise minimization. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 44(6) :1102–1105.
- [Le Besnerais et al., 2010b] Le Besnerais, J., Lanfranchi, V., Hecquet, M., and Brochet, P. (2010b). Characterization and reduction of audible magnetic noise due to pwm supply in induction machines. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 57(4) :1288–1295.
- [Le Besnerais et al., 2010c] Le Besnerais, J., Lanfranchi, V., Hecquet, M., Brochet, P., and Friedrich, G. (2010c). Prediction of audible magnetic noise radiated by adjustable-speed drive induction machines. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 46(4) :1367–1373.
- [Lecointe et al., 2004] Lecointe, J.-P., Romary, R., Brudny, J.-F., and Czaplá, T. (2004). Five methods of stator natural frequency determination : case of induction and switched reluctance machines. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(5) :1133–1159.
- [Lesueur, 1988] Lesueur, C. (1988). *Rayonnement acoustique des structures : vibroacoustique, interactions fluide-structure*. Collection de la Direction des études et recherches d'Électricité de France. Eyrolles.
- [Li and Cho, 2009] Li, J. and Cho, Y. (2009). Investigation into reduction of vibration and acoustic noise in switched reluctance motors in radial force excitation and frame transfer function aspects. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 45(10) :4664–4667.
- [Li et al., 2009] Li, J., Song, X., Choi, D., and Cho, Y. (2009). Research on reduction of vibration and acoustic noise in switched reluctance motors. In *Advanced Electromechanical Motion Systems Electric Drives Joint Symposium, 2009. ELECTROMOTION 2009. 8th International Symposium on*, pages 1–6.
- [Li, 2011] Li, Q. (2011). A novel analytical method of calculating of stator natural frequency for axial flux permanent magnet machines. *2011 International Conference on Electrical Machines and Systems*, pages 1–3.
- [Liao, 1992] Liao, Y. (1992). *Design and Performance Evaluation of a New Class of Permanent Magnet Motors with Doubly Salient Structure*. University of Wisconsin–Madison.
- [Liao et al., 1992] Liao, Y., Liang, F., and Lipo, T. (1992). A novel permanent magnet motor with doubly salient structure. In *Industry Applications Society Annual Meeting, 1992., Conference Record of the 1992 IEEE*, pages 308–314 vol.1.
- [Lisner and Timar, 1999] Lisner, R. and Timar, P. (1999). A new approach to electric motor acoustic noise standards and test procedures. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 14(3) :692–697.
- [Lubin et al., 2010a] Lubin, T., Mezani, S., and Rezzoug, A. (2010a). Analytical computation of the magnetic field distribution in a magnetic gear. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(7) :2611–2621.
- [Lubin et al., 2010b] Lubin, T., Mezani, S., and Rezzoug, A. (2010b). Exact analytical method for magnetic field computation in the air gap of cylindrical electrical machines considering slotting effects. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(4) :1092–1099.
- [Meessen et al., 2013] Meessen, K. J., Paulides, J. J. H., and Lomonova, E. A. (2013). Force calculations in 3-d cylindrical structures using fourier analysis and the maxwell stress tensor. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49(1) :536–545.
- [Meirovitch, 1967] Meirovitch, L. (1967). *Analytical methods in vibrations*. Macmillan series in advanced mathematics and theoretical physics. Macmillan.

- [Mininger, 2005] Mininger, X. (2005). *Réduction des vibrations des machines à réluctance variable à l'aide d'actionneurs piézoélectriques*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Gabsi, Mohamed Khémis Électronique, électrotechnique et automatique Cachan, Ecole normale supérieure 2005.
- [Nau and Mello, 2000] Nau, S. and Mello, H. (2000). Acoustic noise in induction motors : causes and solutions. In *Petroleum and Chemical Industry Conference, 2000. Record of Conference Papers. Industry Applications Society 47th Annual*, pages 253–263.
- [Ojeda, 2009] Ojeda, J. M. (2009). *Dimensionnement et commande d'actionneurs piézoélectriques en vue du contrôle des vibrations des machines à réluctance variable rapides*. These, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Ojeda et al., 2007] Ojeda, X., Gabsi, M., Lecrivain, M., and Mininger, X. (2007). Noise reduction using piezoelectric active control on high speeds switched reluctance drives. In *Industry Applications Conference, 2007. 42nd IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2007 IEEE*, pages 2204–2209.
- [Ojeda et al., 2010] Ojeda, X., Li, G., and Gabsi, M. (2010). Fault diagnosis using vibration measurements of a flux-switching permanent magnet motor. In *Industrial Electronics (ISIE), 2010 IEEE International Symposium on*, pages 2091–2096.
- [Ojeda et al., 2009] Ojeda, X., Mininger, X., Gabsi, M., Kulcsar, C., Raynaud, H.-F., and Lecrivain, M. (2009). Design of controllers : Vibration damping of switched reluctance machine by piezoelectric actuators. In *Advanced Electromechanical Motion Systems Electric Drives Joint Symposium, 2009. ELECTROMOTION 2009. 8th International Symposium on*, pages 1–6.
- [Owen et al., 2009] Owen, R., Zhu, Z., and Jewell, G. (2009). Hybrid excited flux-switching permanent magnet machines. In *Power Electronics and Applications, 2009. EPE '09. 13th European Conference on*, pages 1–10.
- [Owen et al., 2010] Owen, R., Zhu, Z., Thomas, A., Jewell, G., and Howe, D. (2010). Alternate poles wound flux-switching permanent-magnet brushless ac machines. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, 46(2) :790–797.
- [Pang et al., 2006] Pang, Y., Zhu, Z., Howe, D., Iwasaki, S., Deodhar, R., and Pride, A. (2006). Eddy current loss in the frame of a flux-switching permanent magnet motor. In *Magnetics Conference, 2006. INTERMAG 2006. IEEE International*, pages 188–188.
- [Pang et al., 2008] Pang, Y., Zhu, Z., Howe, D., Iwasaki, S., Deodhar, R., and Pride, A. (2008). Investigation of iron loss in flux-switching pm machines. In *Power Electronics, Machines and Drives, 2008. PEMD 2008. 4th IET Conference on*, pages 460–464.
- [Raminosoa and Gerada, 2010a] Raminosoa, T. and Gerada, C. (2010a). A comparative study of permanent magnet - synchronous and permanent magnet - flux switching machines for fault tolerant drive systems. In *Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE), 2010 IEEE*, pages 2471–2478.
- [Raminosoa and Gerada, 2010b] Raminosoa, T. and Gerada, C. (2010b). Fault tolerant winding technology comparison for flux switching machine. In *Electrical Machines (ICEM), 2010 XIX International Conference on*, pages 1–6.
- [Raminosoa and Gerada, 2010c] Raminosoa, T. and Gerada, C. (2010c). Novel fault tolerant design of flux switching machines. In *Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2010), 5th IET International Conference on*, pages 1–6.
- [Raminosoa et al., 2011] Raminosoa, T., Gerada, C., and Galea, M. (2011). Design considerations for a fault-tolerant flux-switching permanent-magnet machine. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 58(7) :2818–2825.
- [Rauch and Johnson, 1955] Rauch, S. E. and Johnson, L. (1955). Design principles of flux-switch alternators. *Power Apparatus and Systems, Part III. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*.
- [Ren, 1994] Ren, Z. (1994). Comparison of different force calculation methods in 3d finite element modelling. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 30(5) :3471–3474.
- [Royer and Dieulesaint, 2000] Royer, D. and Dieulesaint, E. (2000). Acoustique equations générales.
- [Royer and Dieulesaint, 2001] Royer, D. and Dieulesaint, E. (2001). Acoustique - propagation dans un fluide.

- [Sarlioglu et al., 1994] Sarlioglu, B., Zhao, Y., and Lipo, T. (1994). A novel doubly salient single phase permanent magnet generator. In *Industry Applications Society Annual Meeting, 1994., Conference Record of the 1994 IEEE*, pages 9–15 vol.1.
- [Sun et al., 2007] Sun, J., Zhan, Q., Wang, S., and Ma, Z. (2007). A novel radiating rib structure in switched reluctance motors for low acoustic noise. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 43(9) :3630–3637.
- [Thomas et al., 2009] Thomas, A., Zhu, Z., and Jewell, G. (2009). Proximity loss study in high speed flux-switching permanent magnet machine. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 45(10) :4748–4751.
- [Thomas et al., 2008] Thomas, A., Zhu, Z. Q., Jewell, G., and Howe, D. (2008). Flux-switching pm brushless machines with alternative stator and rotor pole combinations. In *Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on*, pages 2986–2991.
- [Thomson, 1996] Thomson, W. (1996). *Theory of Vibration with Applications*. Taylor & Francis.
- [TI, 1984] TI (1984). *La machine électrique, source de bruit*, volume base documentaire : tiadb. Editions T.I.
- [Timar, 1989] Timar, P. (1989). *Noise and vibration of electrical machines*. Studies in electrical and electronic engineering. Elsevier.
- [Timoshenko, 1968] Timoshenko, S. (1968). *Resistance des matériaux : théorie élémentaire et problèmes*. Collection Dunod technique. Dunod.
- [Timoshenko, 2011] Timoshenko, S. (2011). *Vibration Problems in Engineering (Hb)*. Oxford City Press.
- [Timoshenko and Young, 1945] Timoshenko, S. and Young, D. (1945). *Theory of structures*. McGraw-Hill.
- [Torregrossa et al., 2012a] Torregrossa, D., Fahimi, B., Peyraut, F., and Miraoui, A. (2012a). Fast computation of electromagnetic vibrations in electrical machines via field reconstruction method and knowledge of mechanical impulse response. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 59(2) :839–847.
- [Torregrossa et al., 2012b] Torregrossa, D., Paire, D., Peyraut, F., Fahimi, B., and Miraoui, A. (2012b). Active mitigation of electromagnetic vibration radiated by pmsm in fractional-horsepower drives by optimal choice of the carrier frequency. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 59(3) :1346–1354.
- [Torregrossa et al., 2011] Torregrossa, D., Peyraut, F., Fahimi, B., M’Boua, J., and Miraoui, A. (2011). Multi-physics finite-element modeling for vibration and acoustic analysis of permanent magnet synchronous machine. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 26(2) :490–500.
- [Verez, 2014] Verez, G. (2014). Impact of pole and slot combination on noise and vibrations of flux-switching pm machines. *ICEM*.
- [Wang et al., 2010] Wang, Y., Jin, M., Fei, W., and Shen, J. (2010). Cogging torque reduction in permanent magnet flux-switching machines by rotor teeth axial pairing. *Electric Power Applications, IET*, 4(7) :500–506.
- [Witczak, 2011] Witczak, P. (2011). Analytical Methode for Calculation of Eigenfrequencies and Modes of Stator Cores in AC Machines. *Zeszyty Problemowe – Maszyny Elektryczne*, (92) :1–6.
- [Yacine et al., 2005] Yacine, A., Emmanuel, H., Mohamed, G., Michel, L., Sylvain, A., and Ahmed, M. (2005). Design and comparison of different flux-switch synchronous machines for an aircraft oil breather application. *European transactions on electrical power*, 15(6) :497–511. eng.
- [Yang, 1981] Yang, S. (1981). *Low-noise electrical motors*. Monographs in electrical and electronic engineering. Clarendon Press.
- [Zhu and Chen, 2010] Zhu, Z. and Chen, J. (2010). Advanced flux-switching permanent magnet brushless machines. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 46(6) :1447–1453.
- [Zhu et al., 2008a] Zhu, Z., Chen, J., Pang, Y., Howe, D., Iwasaki, S., and Deodhar, R. (2008a). Analysis of a novel multi-tooth flux-switching pm brushless ac machine for high torque direct-drive applications. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 44(11) :4313–4316.
- [Zhu and Howe, 1993] Zhu, Z. and Howe, D. (1993). Instantaneous magnetic field distribution in permanent magnet brushless dc motors. iv. magnetic field on load. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 29(1) :152–158.
- [Zhu et al., 2008b] Zhu, Z., Pang, Y., Chen, J., Owen, R., Howe, D., Iwasaki, S., Deodhar, R., and Pride, A. (2008b). Analysis and reduction of magnet eddy current loss in flux-switching permanent magnet machines. In *Power Electronics, Machines and Drives, 2008. PEMD 2008. 4th IET Conference on*, pages 120–124.

- [Zhu et al., 2008c] Zhu, Z., Pang, Y., Chen, J., Xia, Z., and Howe, D. (2008c). Influence of design parameters on output torque of flux-switching permanent magnet machines. In *Vehicle Power and Propulsion Conference, 2008. VPPC '08. IEEE*, pages 1–6.
- [Zhu et al., 2005] Zhu, Z., Pang, Y., Howe, D., Iwasaki, S., Deodhar, R., and Pride, A. (2005). Analysis of electromagnetic performance of flux-switching permanent-magnet machines by nonlinear adaptive lumped parameter magnetic circuit model. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 41(11) :4277–4287.
- [Zhu et al., 2009] Zhu, Z., Thomas, A., Chen, J., and Jewell, G. (2009). Cogging torque in flux-switching permanent magnet machines. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 45(10) :4708–4711.