



**HAL**  
open science

# Propagation du Son et Diffusion de la Lumière dans les mousses

Frederic Wintzenrieth

► **To cite this version:**

Frederic Wintzenrieth. Propagation du Son et Diffusion de la Lumière dans les mousses. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066067 . tel-01154296

**HAL Id: tel-01154296**

**<https://theses.hal.science/tel-01154296>**

Submitted on 21 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

---

**Propagation du son et diffusion de la  
lumière dans les mousses**

---

*Rapporteurs :*

Prof. Frank SCHEFFOLD  
Prof. Jean RAJCHENBACH

*Auteur :*

Frédéric WINTZENRIETH

*Examineurs :*

Prof. Luca CIPELLETTI  
Prof. Xiaoping JIA  
Dr. Wiebke DRENKHAN

*Directeurs de thèse :*

Prof. Reinhard HÖHLER  
Prof. Sylvie COHEN-ADDAD

*Une thèse présentée pour obtenir  
le grade de Docteur en Physique*

*au sein de*

L'Équipe Mécanique Multiéchelle des Solides Faibles  
Institut des Nanosciences de Paris

18 février 2015

*“Vulnerable, like all men, to the temptations of arrogance, of which intellectual pride is the worst, he [the scientist] must nevertheless remain sincere and modest, if only because his studies constantly bring home to him that, compared with the gigantic aims of science, his own contribution, no matter how important, is only a drop in the ocean of truth.”*

Louis de Broglie

UPMC

## *Résumé*

Faculté de Physique  
Institut des Nanosciences de Paris

Docteur en Physique

### **Propagation du son et diffusion de la lumière dans les mousses**

par Frédéric WINTZENRIETH

L'objectif de cette thèse est de caractériser et comprendre la propagation d'ondes acoustiques dans les mousses solides ordonnées. Nous avons mis au point une nouvelle sonde acoustique fondée sur la diffusion multiple de la lumière cohérente. Cette sonde appelée *Laser Speckle Visibility Acoustic Spectroscopy* résout en temps et en espace le champ de déplacement induit par le passage de l'onde acoustique ce qui permet d'en mesurer la relation de dispersion et la longueur d'atténuation. Nous avons validé la technique LSVAS en étudiant ces propriétés pour une mousse aqueuse dont les propriétés viscoélastiques sont par ailleurs connues. Nous avons ensuite élaboré des mousses solides de structure ordonnée en gélifiant des mousses liquides monodisperses produites à l'aide d'un générateur microfluidique. En excitant des ondes acoustiques dans un guide d'onde rempli d'une telle mousse gélifiée, nous avons étudié leur propagation dans une gamme de fréquence jusqu'à 10 *kHz*. Les célérités longitudinales et transverses ainsi que la longueur d'atténuation mesurées simultanément à basse fréquence montrent que, l'onde acoustique se propage dans la mousse solide comme dans un milieu continu effectif viscoélastique. Les variations des célérités longitudinale et transverse de ce mode lent avec la fraction volumique des bulles sont bien décrites par la loi de Wood et elles sont en accord avec la loi semi-empirique proposée par Ashby & Gibson. Aux fréquences supérieures à quelques centaines de hertz, la longueur d'onde transverse se rapproche de la taille des bulles et le mode lent n'est plus observé. Par contre, un mode beaucoup plus rapide, avec une vitesse comparable à celle du son dans l'air, apparaît. Nous montrons comment on peut décrire ce régime et le fort couplage entre le mouvement des films et du gaz dans le cadre de la théorie acoustique de Biot.

UPMC

# *Résumé*

Faculté de Physique  
Institut des Nanosciences de Paris

Docteur en Physique

## **Propagation du son et diffusion de la lumière dans les mousses**

par Frédéric WINTZENRIETH

This thesis aims at characterizing and understanding acoustic wave propagation in ordered solid foams. We developed a new acoustic probe based on coherent light multiple scattering. This probe called *Laser Speckle Visibility Acoustic Spectroscopy* is sensitive to the displacement field induced by the acoustic wave in time and space, so that the wave dispersion relation and attenuation can be measured. We validated LSVAS measuring the aforementioned properties in aqueous foams which viscoelastic properties were already known. We then elaborated solid foams with ordered structures by gelling monodisperse liquid foams produced with a microfluidic generator. Generating acoustic waves in a wave guide filled with such a gelled foam, we studied their propagation in a frequency range up to 10 *kHz*. Longitudinal and transverse wave velocities but also attenuation lengths simultaneously measured at low frequency show that the acoustic wave propagates in solid foam like in an effective viscoelastic continuous medium. Longitudinal and transverse wave velocity variations of this slow mode with gas volume fraction are well described by Wood's law and agree with the semi-empirical law suggested by Ashby & Gibson. At frequencies higher than a few hundred hertz, the transverse wavelength approaches the bubble size and this slow mode is not observed any more. Meanwhile, a much faster mode, which velocity compares to the sound wave velocity in air, appears. We show how this regime and the strong coupling between film and gas displacement in the framework of Biot's acoustic theory.

# *Remerciements*

...

# Table des matières

Résumé	ii
Remerciements	iv
Table des Matières	v
Liste des Figures	viii
Liste des Tableaux	xii
Abbréviations	xiii
Constantes Physiques	xiv
Symboles	xv
Introduction	1
<b>1 Généralités sur les mousses</b>	<b>4</b>
1.1 Structure et vieillissement d'une mousse . . . . .	4
1.1.1 Structure . . . . .	4
1.1.2 Vieillissement . . . . .	8
1.2 Propriétés viscoélastiques des mousses . . . . .	10
1.2.1 Éléments de mécanique . . . . .	10
1.2.2 Mousses liquides . . . . .	12
1.2.3 Mousses solides . . . . .	15
1.3 Propagation acoustique dans les mousses . . . . .	17
1.3.1 Équation d'onde pour un milieu continu homogène . . . . .	18
1.3.2 Liquide bulleux : modèle de Wood . . . . .	21
1.3.3 Milieux poreux : théorie de Biot . . . . .	23
1.3.4 Vibration d'un film unique . . . . .	33
1.4 Propagation de la lumière dans les mousses . . . . .	36
1.4.1 Spectroscopie de la lumière diffuse . . . . .	37
1.4.2 Spectroscopie de visibilité speckle . . . . .	41
<b>2 Élaboration &amp; structure des mousses gélifiées</b>	<b>44</b>

2.1	Gels de gélatine . . . . .	44
2.1.1	Cahier des charges . . . . .	44
2.1.2	Physico-chimie des gels de gélatine . . . . .	47
2.1.3	Propriétés viscoélastiques des gels de gélatine . . . . .	51
2.2	Génération de mousses . . . . .	56
2.2.1	Générateurs de mousse . . . . .	56
2.2.2	Production d'une mousse gélifiée . . . . .	59
2.3	Caractérisation des mousses de gélatine . . . . .	61
2.3.1	Ordre macroscopique et microstructure . . . . .	61
2.3.2	Mûrissement des mousses gélifiées . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Diffusion multiple de la lumière comme sonde de la dynamique des mousses</b>	<b>68</b>
3.1	Spectroscopie acoustique de visibilité speckle . . . . .	68
3.2	Cartes de visibilité speckle . . . . .	69
3.2.1	Définition et méthode . . . . .	69
3.2.2	Cas d'une onde stationnaire . . . . .	71
3.2.3	Cas d'un train d'onde . . . . .	72
3.3	Spectroscopies de visibilité speckles impulsionnelle et stationnaire . . . . .	74
3.3.1	Détection d'un train d'onde acoustique . . . . .	74
3.3.2	Mesure du profil d'un mode stationnaire . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Propagation du son dans les mousses solides</b>	<b>83</b>
4.1	État de l'art . . . . .	83
4.1.1	Métamatériaux acoustiques . . . . .	84
4.1.2	Mousses liquides . . . . .	93
4.1.3	Mousses solides . . . . .	100
4.2	Dispositif expérimental de spectroscopie acoustique . . . . .	107
4.2.1	Géométrie de mesure . . . . .	107
4.2.2	Excitation acoustique . . . . .	110
4.3	Propagation dans un guide d'onde cylindrique . . . . .	114
4.3.1	Relation de dispersion pour un milieu continu homogène . . . . .	115
4.3.2	Relation de dispersion pour un matériau mou . . . . .	119
4.4	Résultats expérimentaux . . . . .	122
4.4.1	Spectre fréquentiel de la visibilité . . . . .	122
4.4.2	Visibilité en fonction de la distance de propagation . . . . .	123
4.4.3	Relations de dispersion . . . . .	128
4.5	Discussion du régime basse fréquence . . . . .	135
4.5.1	Relations de dispersion dans le régime basse fréquence . . . . .	135
4.5.2	Propriétés mécaniques effectives . . . . .	139
4.5.3	Effet de la dissipation mécanique . . . . .	145
4.5.4	Conclusion partielle sur le régime basse fréquence . . . . .	150
4.6	Discussion du régime haute fréquence . . . . .	152
4.6.1	Profils de visibilité . . . . .	152
4.6.2	Impact de la dynamique des films . . . . .	155
4.6.3	Interprétation dans le cadre de la théorie de Biot . . . . .	160



---

<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
<b>A Équation de Helmholtz</b>	<b>170</b>
<b>B Modèles masses-ressorts</b>	<b>176</b>
<b>C Calcul du couplage dû aux films</b>	<b>183</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>190</b>

# Table des figures

1.1	Les multiples échelles de longueur dans la mousse . . . . .	5
1.2	Éléments de structure d'une mousse humide . . . . .	6
1.3	Empilements hexagonal compact et cubique à faces centrées . . . . .	6
1.4	Exemples de mousses liquides et solides . . . . .	7
1.5	Schémas équivalent du fluide de Maxwell et du solide de Kelvin-Voigt. . .	12
1.6	Contrainte seuil en fonction de la fraction volumique de gaz. . . . .	13
1.7	Spectre dynamique du module de cisaillement d'une mousse liquide. . . .	14
1.8	Modèle de la cellule cubique de poutres de section carrée. . . . .	15
1.9	Célérité de l'onde longitudinale dans un liquide bulleux. . . . .	22
1.10	Masse volumique et élasticité effective du gaz dans un milieu poreux indéformable. . . . .	26
1.11	Relation de dispersion pour un milieu poreux de matrice molle. . . . .	32
1.12	Fonction de transfert de la membrane en déplacement en fonction de la fréquence réduite. . . . .	37
1.13	Rapport du libre parcours moyen de transport sur le diamètre des bulles en fonction de la fraction volumique de liquide. . . . .	38
1.14	Schéma de principe de la spectroscopie de la lumière diffusée multispeckle.	41
1.15	Diagramme spatio-temporel de niveaux de gris et fonction d'autocorrélation de l'intensité normalisée $F$ d'une mousse au cours du temps. . . . .	42
1.16	Niveaux de gris, rapport des visibilitées et largeur lorentzienne d'une mousse au cours de son mûrissement. . . . .	43
2.1	Formule développée d'un acide aminé . . . . .	47
2.2	Formules semi-développées de quelques acides aminés de la gélatine. . . .	48
2.3	Formule semi-développée du tensioactif Triton X-100 . . . . .	50
2.4	Évolution du module élastique au cours du temps . . . . .	54
2.5	Spectre dynamique des modules de conservation et de perte de la gélatine	55
2.6	Deux géométries de générateurs de bulles monodisperses . . . . .	57
2.7	Représentation schématique du dispositif de production des mousses gélifiées.	60
2.8	Photographie de mousses gélifiées cristallines . . . . .	62
2.9	Photographie d'un monocristal de mousse : détail . . . . .	62
2.10	Coupe et projection issues de la reconstruction de la tomographie rayons X d'un échantillon de mousse . . . . .	63
2.11	Reconstruction 3D de la tomographie rayons X d'un échantillon de mousse	64
2.12	Position des bulles dans l'échantillon de mousse . . . . .	64
2.13	Évolution de la fraction de gaz des échantillons . . . . .	65
2.14	Mûrissement des mousses solides de gélatine . . . . .	66

3.1	Acquisitions pour différentes positions du disque diffuseur. . . . .	70
3.2	Exemple de cartes et profils de visibilité pour trois amplitudes d'excitation différentes. . . . .	71
3.3	Procédure de norme de la visibilité par celle des images qui précèdent le début du tir. . . . .	73
3.4	Cartes de visibilité pour différents décalages temporels avec l'émission du signal incident. . . . .	74
3.5	Comparaison d'un diagramme spatio-temporel brut et lissé. . . . .	77
3.6	Diagrammes spatio-temporels obtenus suite à l'application d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-bande. . . . .	78
3.7	Profils de visibilité normée, filtrée par un passe-bas, un passe-bande et les variations de visibilité équivalente reconstruites à partir des visibilités filtrées. . . . .	78
3.8	Diagramme spatio-temporel des variations de visibilité équivalentes. . . . .	79
3.9	Exemple d'ajustements des évolutions de la phase spatiale par régression linéaire. . . . .	79
3.10	Exemple de cartes et profils de visibilité dans un cas d'onde évanescence. . . . .	81
3.11	Exemple de cartes et profils de visibilité pour trois amplitudes d'excitation différentes. . . . .	82
4.1	Comparaison de la répulsion de mode et de l'hybridation avec une résonance locale dans un métamatériau. . . . .	86
4.2	Modes de résonances monopolaire et dipolaire d'un diffuseur. . . . .	89
4.3	Exemple de matériau résonant localement . . . . .	90
4.4	Métamatériaux unidimensionnels constitués de membranes et de tubes. . . . .	92
4.5	Comparaison de lois de dépendance de la célérité avec la fraction volumique de gaz. . . . .	94
4.6	Mesures expérimentales de la relation de dispersion des ondes longitudinales dans une mousse aqueuse. . . . .	99
4.7	Diagramme de bande et densité d'état d'une mousse d'empilement cubique à faces centrées. . . . .	104
4.8	Montage expérimental . . . . .	108
4.9	Vue d'ensemble du montage expérimental. . . . .	109
4.10	Schéma optique du montage expérimental. . . . .	109
4.11	Allure typique du signal d'excitation et du signal de déclenchement de la caméra. . . . .	112
4.12	Comparaison des densités spectrales d'amplitude de différents signaux d'excitation. . . . .	113
4.13	Spectre fréquentiel de visibilité dans un tube vide et en l'absence de contact direct . . . . .	114
4.14	Torsion . . . . .	116
4.15	Relation de dispersion des ondes de compression . . . . .	118
4.16	Relation de dispersion adimensionnée des ondes de compression adimensionnalisées . . . . .	120
4.17	Masse volumique effective pour une onde longitudinale se propageant dans un cylindre. . . . .	121
4.18	Spectre fréquentiel de visibilité moyenne normée . . . . .	123

4.19	Cartes et profils de visibilité normée pour une mousse confinée dans un tube. . . . .	124
4.20	Cartes et profils de visibilité normée pour une mousse confinée dans un tube. . . . .	124
4.21	Cartes et profils de visibilité normée pour une mousse confinée dans un tube. . . . .	125
4.22	Cartes et profils de visibilité normée pour une mousse confinée dans un tube. . . . .	126
4.23	Diagrammes spatio-temporels du suivi d'une excitation impulsionnelle. . .	128
4.24	Diagrammes spatio-temporel du suivi d'une excitation impulsionnelle. . .	129
4.25	Relation de dispersion d'une mousse de bulles de diamètre 0.6 mm dans des tubes de diamètre 4 mm. . . . .	130
4.26	Relation de dispersion d'une mousse de bulles de diamètre 0.6 mm dans des tubes de diamètre 10 mm. . . . .	131
4.27	Relation de dispersion d'un échantillon de mousse gélifiée de bulles de diamètre 1.8 mm dans des tubes de diamètre 10 mm. . . . .	132
4.28	Relation de dispersion haute fréquence d'un échantillon de mousse gélifiée de bulles de diamètre 0.6 mm dans un tube de diamètre 4 mm. . . . .	133
4.29	Relation de dispersion haute fréquence d'un échantillon de mousse gélifiée de bulles de diamètre 0.6 mm dans un tube de diamètre 10 mm. . . . .	134
4.30	Relation de dispersion haute fréquence d'un échantillon de mousse gélifiée de bulles de diamètre 1.8 mm dans un tube de diamètre 10 mm. . . . .	135
4.31	Relation de dispersion adimensionnée . . . . .	136
4.32	Célérité longitudinale dans la mousse en fonction de la fraction volumique de gaz. . . . .	138
4.33	Rapport des modules d'élasticité isostatique de la mousse et du gaz. . . .	140
4.34	Partie réelle et imaginaire de l'indice de polytropie dynamique pour des bulles de diamètre $d = 0.6$ mm et $d = 1.8$ mm. . . . .	141
4.35	Rapport du module de cisaillement effectif de la mousse et du module de conservation du gel . . . . .	143
4.36	Coefficient de Poisson effectif de la mousse. . . . .	145
4.37	Relation de dispersion adimensionnée comparée à des prédictions prenant en compte la dissipation thermique dans le gaz. . . . .	147
4.38	Relation de dispersion adimensionnée comparée à des prédictions prenant en compte la dissipation visqueuse dans le gel. . . . .	149
4.39	Système de coordonnées cylindriques. . . . .	152
4.40	Cartes et profils de visibilité comparés aux prédictions théoriques. . . . .	155
4.41	Cartes et profils de visibilité comparés aux prédictions théoriques. . . . .	156
4.42	Repère cylindrique associé à la membrane et son excursion transverse. . .	157
4.43	Fonction de transfert de la membrane en déplacement en fonction de la fréquence. . . . .	159
4.44	Relation de dispersion pour une mousse solide à cellules fermées de matrice molle. . . . .	164
A.1	Système de coordonnées cylindrique. . . . .	172
B.1	Schéma masse-ressort du réseau cristallin monoatomique . . . . .	176
B.2	Relation de dispersion du réseau cristallin monoatomique . . . . .	177

---

B.3	Schéma masse-ressort du réseau cristallin diatomique . . . . .	177
B.4	Relation de dispersion du réseau cristallin diatomique . . . . .	179
B.5	Schéma masse-ressort du réseau cristallin monoatomique lié rigidement . .	179
B.6	Relation de dispersion du réseau cristallin monoatomique lié rigidement .	180
B.7	Schéma masse-ressort du réseau cristallin monoatomique avec résonateurs locaux . . . . .	180
B.8	Relation de dispersion du réseau cristallin monoatomique avec résonateurs locaux . . . . .	181
B.9	Schéma masse-ressort de deux réseaux cristallins monoatomiques couplés .	182
B.10	Relation de dispersion de deux réseaux cristallins monoatomiques couplés	182

# Liste des tableaux

2.1	Paramètres ajustés au modèle 2.4 aux variations fréquentielles des modules $G'$ et $G''$ (cf. figure 2.5). . . . .	56
2.2	Paramètres de production pour les générateurs jonction T (cf. figure 2.6.a). $Q_l$ est le débit de liquide. $Q_g$ est le débit de gaz. . . . .	59
4.1	Gamme de paramètres des échantillons de mousse gélifiée de la relation de dispersion adimensionnée (cf. figure 4.31). . . . .	137
4.2	Gamme de paramètres des échantillons de mousse gélifiée de la relation de dispersion adimensionnée (cf. figure 4.31). $N_M$ et $N_{XP}$ désignent le numéro d'échantillon et le numéro d'expérience, respectivement. . . . .	137

# Abbréviations

<b>DWS</b>	Spectroscopie de l'Onde <b>D</b> iffuse
<b>LSVAS</b>	Spectroscopie <b>A</b> coustique de <b>V</b> isibilité <b>S</b> peckle
<b>SDS</b>	<b>D</b> odécylsulfate de <b>S</b> odium
<b>SVS</b>	Spectroscopie de <b>V</b> isibilité <b>S</b> peckle

# Constantes Physiques

Célérité de la lumière  $c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$  (exact)



# Symboles

$X$	grandeur physique	S.I.
$X_0$	grandeur physique constante	S.I.
$X_*$	grandeur physique effective (quasi-statique)	S.I.
$X^*$	grandeur physique complexe (dynamique)	S.I.
$X_*^*$	grandeur physique effective complexe (dynamique)	S.I.
$a$	taille de la maille	m
$c_p$	chaleur spécifique isobare	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$c_v$	chaleur spécifique isochore	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
$c_L$	célérité des ondes longitudinales	$\text{m.s}^{-1}$
$c_{L_g}$	célérité longitudinale dans la phase gazeuse	$\text{m.s}^{-1}$
$c_{L_c}$	célérité longitudinale dans la phase continue	$\text{m.s}^{-1}$
$c_{L_*}$	célérité longitudinale effective	$\text{m.s}^{-1}$
$c_T$	célérité des ondes transverses	$\text{m.s}^{-1}$
$d$	diamètre des bulles ou taille des cellules	m
$d_f$	diamètre des films entre bulles ou cellules	m
$e$	épaisseur du film de savon ou de gel	m
$e_{PET}$	épaisseur du film polymère (polyéthylène)	m
$f$	fréquence sinusoïdale ou de l'onde	Hz
$f_c$	fréquence caractéristique	Hz
$f_M$	fréquence de Minnaert	Hz
$h$	profondeur du canal	m
$i$	nombre imaginaire égal à la racine de $-1$	1
$j_n$	fonction de Bessel (sphérique) de 1 <sup>o</sup> espèce d'ordre $n$	1
$k$	nombre d'onde (composante longitudinale)	$\text{m}^{-1}$

$k_0$	nombre d'onde (résultante)	$\text{m}^{-1}$
$\vec{k}$	vecteur d'onde (résultante)	$\text{m}^{-1}$
$n$	nombre d'oscillations entières du signal impulsionnel	1
$n^*$	indice de réfraction effectif (dynamique)	1
$p$	surpression ou pression acoustique	Pa
$q$	nombre d'onde (composante transverse)	$\text{m}^{-1}$
$q_\eta$	nombre d'onde transverse visqueux	$\text{m}^{-1}$
$q_\theta$	nombre d'onde transverse thermique	$\text{m}^{-1}$
$q_\phi$	nombre d'onde transverse de compression	$\text{m}^{-1}$
$q_\psi$	nombre d'onde transverse de cisaillement	$\text{m}^{-1}$
$t$	épaisseur des poutres (bords de Plateau)	m
$\vec{u}$	champ de déplacement	m
$v$	vitesse du fluide	$\text{m.s}^{-1}$
$v_\mu$	vitesse microscopique dans le fluide	$\text{m.s}^{-1}$
$\vec{v}$	champ de vitesse	$\text{m.s}^{-1}$
$\vec{v}_g$	champ de vitesse dans la phase gazeuse	$\text{m.s}^{-1}$
$\vec{v}_s$	champ de vitesse dans la phase solide	$\text{m.s}^{-1}$
$w$	largeur du canal	m
$B$	module de compressibilité volumique	Pa
$B_*$	module de compressibilité effective (de la matrice solide)	Pa
$B_v$	module de viscosité volumique	Pa.s
$B_g$	module de compressibilité de la phase gazeuse	Pa
$B_s$	module de compressibilité de la phase solide	Pa
$B_f$	module de flexion	Pa
$C$	concentration massique en gel	$\text{g.g}^{-1}$
$C_s$	solubilité du gaz dans la solution	$\text{mol.L}^{-1}$
$D$	diamètre des tubes	m
$E$	module de Young	Pa
$E_s$	module de Young de la phase solide	Pa
$F$	force (de mise en flexion)	N
$F_N$	force normale	N
$G$	module de cisaillement	Pa

$G_0$	module de cisaillement quasi-statique	Pa
$G_s$	module de cisaillement de la phase solide	Pa
$G_*$	module de cisaillement effectif (de la matrice solide)	Pa
$G^*$	module complexe de cisaillement	Pa
$G'$	module de conservation	Pa
$G''$	module de perte	Pa
$J$	fonction de fluage	$\text{Pa}^{-1}$
$J^*$	fonction de fluage complexe	$\text{Pa}^{-1}$
$J_n$	fonction de Bessel (cylindrique) de 1 <sup>o</sup> espèce d'ordre $n$	1
$L$	module de l'onde de compression	Pa
$L_s$	module d'onde de compression dans la phase solide	Pa
$L_z$	longueur de la fenêtre de lissage selon l'axe ( $0z$ )	pxls
$N$	nombre de positions du disque diffuseur	1
$N_f$	nombre de faces d'une bulle	1
$N_t$	nombre d'images selon l'axe ( $0t$ )	1
$N_z$	nombre de pixels selon l'axe ( $0z$ )	1
$N_{Pl}$	nombre de Prandtl	1
$P$	pression totale	Pa
$P_0$	pression statique du gaz	Pa
$Q$	module de compressibilité de couplage	Pa
$R$	rayon intérieur du tube ou du guide d'onde cylindrique	m
$R_b$	rayon de la bulle ou de la goutte	m
$R_p$	rayon des pores cylindriques de révolution	m
$R_i$	rayons de courbure principaux	m
$R_{BP}$	rayon de courbure des bords de Plateau	m
$T$	période de l'onde acoustique	s
$T_0$	température statique	$^{\circ}\text{K}$
$T_e$	temps d'exposition de la caméra	s
$W$	travail des forces	J
$\alpha$	atténuation de l'onde	$\text{m}^{-1}$
$\alpha_{\infty}$	coefficient de tortuosité classique	1
$\alpha^*$	coefficient de tortuosité dynamique	1

$\beta$	coefficient de proportionnalité	1
$\delta$	déflexion de la poutre	m
$\delta_\eta$	épaisseur de peau visqueuse	m
$\delta_\theta$	épaisseur de peau thermique	m
$\gamma$	tension de surface	N.m <sup>-1</sup>
$\gamma_a$	coefficient adiabatique	1
$\gamma_p$	coefficient polytropique	1
$\eta$	viscosité du fluide	Pa.s
$\eta_\infty$	viscosité asymptotique du fluide	Pa.s
$\eta_d$	viscosité interfaciale dilatationnelle	N.m <sup>-1</sup> .s
$\eta^*$	coefficient de couplage visqueux dynamique	Pa.s.m <sup>-2</sup>
$\epsilon$	tenseur des déformations	1
$\kappa$	conductivité thermique	W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
$\lambda$	premier coefficient de Lamé	Pa
$\lambda_v$	premier coefficient de Lamé visqueux	Pa.s
$\mu$	second coefficient de Lamé	Pa
$\mu_v$	second coefficient de Lamé visqueux	Pa.s
$\mu^*$	coefficient de couplage élastique dynamique	Pa.m <sup>-2</sup>
$\nu$	coefficient de Poisson	1
$\nu_*$	coefficient de Poisson effectif (de la matrice solide)	1
$\sigma$	contrainte	Pa
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des contraintes	Pa
$\boldsymbol{\sigma}_g$	tenseur des contraintes dans la phase gazeuse	Pa
$\boldsymbol{\sigma}_s$	tenseur des contraintes dans la phase solide	Pa
$\boldsymbol{\sigma}_v$	tenseur des contraintes visqueux	Pa
$\sigma_{ys}$	contrainte seuil de la mousse	1
$\rho$	masse volumique	kg.m <sup>-3</sup>
$\rho_c$	masse volumique de la phase continue	kg.m <sup>-3</sup>
$\rho_g$	masse volumique de la phase gazeuse	kg.m <sup>-3</sup>
$\rho_s$	masse volumique de la phase solide	kg.m <sup>-3</sup>
$\rho_{sg*}$	masse volumique effective de couplage entre phases	kg.m <sup>-3</sup>
$\rho_*$	masse volumique effective	kg.m <sup>-3</sup>
$\tau$	surtempérature ou température acoustique	°K

---

$\tau_m$	temps de relaxation de Maxwell	s
$\tau_v$	temps de relaxation de Kelvin-Voigt	s
$\varphi$	potentiel scalaire de la décomposition de Helmholtz	m <sup>2</sup>
$\phi_g$	fraction volumique de gaz ou porosité	1
$\phi_c$	fraction volumique de gaz critique	1
$\phi_f$	fraction de solide contenu dans les films	1
$\chi$	compressibilité volumique	Pa <sup>-1</sup>
$\chi_g$	compressibilité volumique de la phase gazeuse	Pa <sup>-1</sup>
$\chi_c$	compressibilité volumique de la phase continue	Pa <sup>-1</sup>
$\chi_*$	compressibilité volumique effective	Pa <sup>-1</sup>
$\vec{\psi}$	potentiel vecteur de la décomposition de Helmholtz	m <sup>2</sup>
$\omega$	pulsation sinusoïdale ou de l'onde	rad.s <sup>-1</sup>
$\omega_c$	pulsation caractéristique	rad.s <sup>-1</sup>
$\omega_M$	pulsation de Minnaert	rad.s <sup>-1</sup>

*À la mémoire de mon grand-père Pierre*

# Introduction

Une mousse liquide est une dispersion concentrée de bulles de gaz dans une solution de tensioactifs. La structure des cellules à l'équilibre, gouvernée par la tension de surface, minimise l'aire interfaciale à volume de gaz donné. En solidifiant la phase liquide, on crée une mousse solide qui conserve la structure de son précurseur liquide, tout en étant beaucoup plus rigide et stable au cours du temps. Lors de la solidification, les films peuvent se rompre, et la mousse forme alors un milieu poreux constitué de cellules ouvertes à travers lesquelles le gaz peut circuler librement. Dans le cas contraire, une mousse solide à cellules fermées, à l'intérieur desquelles le gaz est emprisonné, est obtenue.

On trouve des mousses solides dans la nature. Les mousses volcaniques solides, comme la pierre ponce, peuvent emprisonner tant de gaz que leur densité est inférieure à celle de l'eau. Le liège, constitué de cellules contenant de l'air, séparées les unes des autres par des fines membranes en biopolymère en est un autre exemple. Les propriétés mécaniques et thermiques ainsi que la faible densité des mousses solides sont exploitées dans une grande diversité d'applications industrielles, comme les matériaux de construction aérés (plâtre moussé, béton moussé) ou comme l'absorbant phonique pour réduire la réverbération acoustique. Ce contexte soulève la question de savoir comment les propriétés acoustiques d'une mousse dépendent d'une part des propriétés des phases solide et fluide qu'elle contient et d'autre part de la microstructure. Dans les matériaux naturels, l'empilement des cellules est souvent désordonné, mais les techniques telles que la micro-fluidique, l'impression 3D ou la lithographie permettent maintenant d'élaborer des matériaux de microstructure contrôlée. On peut ainsi créer des matériaux dont les propriétés macroscopiques se distinguent qualitativement de celles des matériaux naturels. De tels métamatériaux peuvent par exemple présenter un indice de réfraction optique négatif, ou encore un coefficient de Poisson négatif. Ces comportements résultent bien souvent de résonances locales de la microstructure.

En amont de la conception d'un métamatériau phononique, une bonne compréhension de la relation entre la microstructure et le comportement acoustique est nécessaire. Dans

le domaine de l'acoustique des milieux poreux, les travaux pionniers de Biot en 1962 ont conduit à un modèle qui prédit deux modes de propagation de célérités très différentes, correspondant à des ondes qui se propagent principalement dans la matrice solide ou dans la phase fluide. Des développements ultérieurs de ce modèle ont permis de prendre en compte plus finement l'interaction entre fluide et solide. La microstructure, souvent très complexe, est décrite par des paramètres phénoménologiques. Cette approche permet aussi de décrire le comportement acoustique des mousses à cellules ouvertes. Pour autant, les effets dus à la vibration des films (les parois des cellules entre deux voisines) dans les mousses solides à cellules fermées n'ont pas été considérées. Or, des expériences très récentes avec des mousses liquides désordonnées ont mis en évidence que ces vibrations locales des films ont un impact majeur sur les propriétés acoustiques.

Comme le désordre, l'instabilité et la forte atténuation acoustique caractéristiques des mousses liquides rendent difficile leur étude et leur modélisation quantitative, nous avons choisi de nous intéresser aux mousses solides, et nous nous sommes posés les questions suivantes : Comment peut-on créer des mousses solides à cellules fermées, d'une microstructure ordonnée, stables dans le temps ? Comment le son se propage-t-il dans un tel matériau ? Comment l'élasticité d'un tel matériau dépend-elle de la porosité et de la microstructure ? Pour répondre à ces questions, nous avons produit, par une méthode microfluidique, des mousses monodisperses à cellules fermées, en utilisant une mousse liquide précurseur constituée d'une solution de gélatine qui se solidifie à température ambiante. Leur microstructure a été caractérisée par tomographie X, et l'élasticité du gel par rhéométrie. L'objectif est de déterminer la relation de dispersion des ondes longitudinale et transverse pour un échantillon donné. Ceci nous a amenés à développer une nouvelle technique, appelée *Laser Speckle Visibility Acoustic Spectroscopy* (LSVAS), résolue en temps et en espace, où la diffusion multiple de la lumière cohérente permet de suivre in situ l'amplitude et la phase d'une onde acoustique qui se propage dans un guide d'onde rempli de mousse gélifiée. Cette technique donne ainsi accès à la longueur d'onde et la longueur d'atténuation dans ces matériaux dans la gamme jusqu'à 10 *kHz*.

Le manuscrit est organisé comme suit. Au chapitre 1, nous rappelons quelques propriétés et concepts des mousses qui seront utiles par la suite, concernant leur structure, leurs propriétés viscoélastiques, acoustiques et optiques. Nous décrivons dans le chapitre 2 l'élaboration et la structure des mousses gélifiées solides. Le chapitre 3 décrit le principe de la méthode expérimentale optoacoustique LSVAS que nous avons mise au point, ainsi que sa validation à l'aide d'une mousse liquide de propriétés viscoélastiques mesurées de manière indépendante. Le chapitre 4 commence par un rappel de l'état de l'art concernant la propagation du son dans les métamatériaux. Puis nous décrivons le



dispositif expérimental utilisé pour mesurer les propriétés acoustiques des mousses solides à l'aide de la méthode LSVAS. Puis, nous développons une analyse, basée sur la mécanique des milieux continus, du mode de propagation confiné dans un guide d'onde. Les résultats présentés ensuite mettent en évidence les différents régimes de propagation des ondes acoustiques transverses et longitudinales. Ils sont discutés dans le cadre des modèles de Gibson et Ashby, de Wood et de Biot.

# Chapitre 1

## Généralités sur les mousses

Cette partie présente les concepts nécessaires à la compréhension de ce manuscrit. Elle s'appuie sur un certain nombre d'ouvrages de référence. La première section traite de la structure des mousses et de leur évolution temporelle [1]. La deuxième section expose le concept de viscoélasticité et l'illustre dans les cas des mousses liquides et des mousses solides [2, 3, 1]. La troisième section introduit les équations d'onde dans les solides et les fluides puis présente le cas des liquides bulleux et celui des matériaux poreux [4, 5]. On s'intéresse également à la dynamique de vibration des films sous tension [6]. Enfin, dans dernière section, on introduit la spectroscopie de diffusion multiple de la lumière [7].

### 1.1 Structure et vieillissement d'une mousse

#### 1.1.1 Structure

##### Mousses liquides

Une mousse liquide est une dispersion de gaz dans un liquide savonneux. Thermodynamiquement instable, elle est stabilisée cinétiquement par des tensioactifs. À l'échelle macroscopique, les paramètres qui caractérisent la structure d'une mousse sont le diamètre des bulles  $d$  et la fraction volumique de gaz  $\phi_g$  i.e. le rapport du volume de gaz sur le volume total. La passage d'un liquide bulleux à une mousse se fait lorsque  $\phi_g$  dépasse un seuil  $\phi_c$  de transition de blocage (*jamming*) proche de 2/3 [8]. Une mousse présente le comportement mécanique d'un solide ou d'un liquide selon la contrainte appliquée. Les bulles d'une mousse sont en contact les unes avec les autres. Cet empilement de bulles peut résister à une contrainte tangentielle appliquée inférieure à la contrainte

seuil  $\sigma_{ys}$ . Par contre, lorsque la contrainte appliquée est supérieure à  $\sigma_{ys}$ , les bulles sont entraînées loin les unes des autres et la mousse s'écoule comme un liquide visqueux [1].

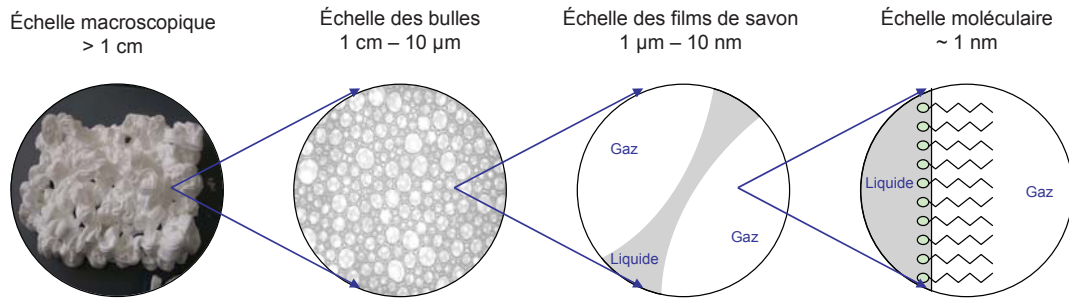


FIGURE 1.1 – Différentes échelles d'observation d'une mousse aqueuse [9].

La structure de la mousse est multiéchelle (cf. figure 1.1). Les éléments qui la composent ont des tailles caractéristiques qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeur. À l'échelle macroscopique, une mousse apparaît comme un milieu turbide uniforme. À l'échelle inférieure ( $1\text{ cm}-10\ \mu\text{m}$ ), les bulles se distinguent les unes des autres. Les films qui les séparent s'irisent lorsqu'ils sont éclairés par une lumière blanche. Ce phénomène est révélateur de leur épaisseur sub-micrométrique. À l'échelle moléculaire, des molécules de tensioactifs sont adsorbés aux interfaces liquide-gaz de tension de surface  $\gamma$ .

### Lois d'équilibre

Soit deux phases immiscibles dont l'une est dispersée dans l'autre. Considérons une goutte sphérique de rayon  $R_b$  de la première phase dans la seconde. L'énergie de surface associée à la goutte vaut donc  $4\pi R_b^2\gamma$ . La variation d'énergie liée à une variation  $dR$  du rayon vaut  $8\pi R_b dR\gamma$ . Celle-ci correspond au travail d'une force normale  $F_N$  distribuée sur l'interface ( $\delta W = F_N dR$ ). Cette force due à la tension s'équilibre avec une différence de pression  $\Delta p = 2\gamma/R_b$  entre l'intérieur et l'extérieur de la goutte. Cette expression de la différence de pression  $\Delta p$  généralisée à une interfaces possédants deux rayons de courbure principaux distincts  $R_1$  et  $R_2$  conduit à la loi de Laplace [10] :

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.1)$$

La forme des bulles tend vers des polygones facettés dans la limite sèche ( $\phi_g \rightarrow 1$ ). C'est dans cette limite qu'ont été formulées par J. Plateau les lois d'équilibre de la structure, démontrées plus tard par Almgren et Taylor [11]. Les lois de Plateau se résument par [1] :

- les films de savon sont de courbure moyenne constante, fixée par la loi de Laplace (cf. équation 1.1).

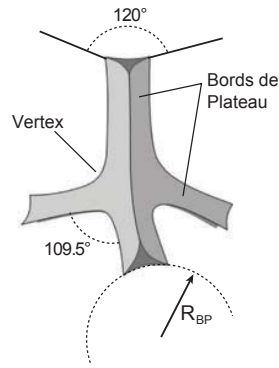


FIGURE 1.2 – Éléments de structure d'une mousse humide [1].

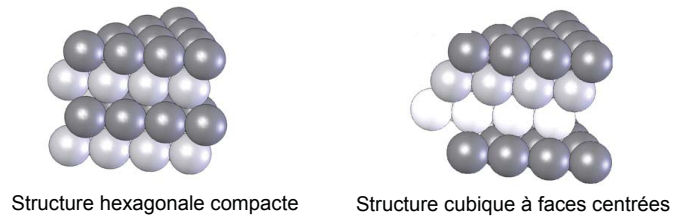


FIGURE 1.3 – Différence entre les empilements hexagonal compact et cubique à faces centrées (d'après [9]).

- les films se rencontrent trois par trois aux arêtes appelés bords de Plateau (cf. figure 1.2), en formant des angles de  $120^\circ$ .
- les arêtes se rencontrent quatre par quatre aux vertex (centres de tétraèdres réguliers) en formant des angles de  $\sim 109.5^\circ$ .

### Mousses humides

Dans le cas des mousses légèrement humides ( $\phi_g \sim 1\%$ ), les éléments (vertex, bords de Plateau) de la structure sont les mêmes que dans les mousses sèches. Cependant, leur forme prend du volume afin de contenir le liquide. Les arêtes deviennent des canaux avec un rayon de courbure  $R_{BP}$  fini (cf. figure 1.2). A l'approche de la transition de jamming, la distinction entre vertex et bordures de Plateau n'est plus bien définie, dans cette limite, la structure se décrit comme un empilement de bulles sphériques.

### Mousses ordonnées

Les mousses monodisperses s'ordonnent spontanément sur des échelles de longueur de l'ordre de la dizaine de bulles. Au sein des domaines cristallins, des arguments indiquent une meilleure stabilité de l'empilement cubique à faces centrées pour les mousses liquides, ce qui le rend sous certaines conditions plus fréquente par rapport à l'empilement hexagonal compact [12].



FIGURE 1.4 – Exemples de mousses solides à cellules fermées (a) et à cellules ouvertes (b) et liquides (c) (d’après [1, 3]).

## Mousses solides

Différents procédés conduisent à l’élaboration d’une mousse solide. En général, elle est obtenue par solidification d’une mousse liquide. Dans le cas des mousses polymères, la phase continue peut être une solution de monomères ou un fondu de polymères, solidifiés respectivement par polymérisation (ramifiée) ou par refroidissement [3, Chap. 1]. À la suite de la solidification ou sous l’effet d’un procédé ultérieur (e.g. réticulation<sup>1</sup> des mousses polyuréthanes), la structure peut être différente de celle de la mousse liquide dans la mesure où les films peuvent éclater ou les bords de Plateau se rompre. À la différence des mousses liquides, les mousses solides peuvent avoir des cellules ouvertes.<sup>2</sup> La phase gazeuse percole alors à travers le solide. Ainsi, le terme porosité est préféré au terme fraction volumique de gaz, encore définie comme le rapport entre le volume de gaz et le volume total de la mousse. Afin de préciser, la terminologie distingue les mousses à cellules ouvertes des mousses à cellules fermées (cf. figure 1.4).

---

1. La réticulation est un procédé qui vise la rupture des films en anglais *reticulation* à ne pas confondre avec la réticulation au sens de formation d’un réseau tridimensionnel de polymères en anglais *cross-linking*

2. Pour cette raison, le terme cellule est préféré au terme bulle.

Si les mousses à cellules ouvertes sont les plus grands représentants des mousses solides, elles sont aussi les plus grands représentants de la famille des matériaux poreux. Ces matériaux très utilisés dans l'industrie, que ce soit dans les domaines de l'habitat ou de l'aéronautique, sont très bien caractérisés du point de vue acoustique. La pierre angulaire de la modélisation acoustique de ces matériaux est la théorie de Biot, dont les principes seront exposés section 1.3.3.

### 1.1.2 Vieillessement

#### Mousses liquides

Le vieillissement d'une mousse liquide correspond à l'ensemble des phénomènes liés à l'évolution temporelle de la mousse. Il s'agit du mûrissement, du drainage et de la coalescence.

Le mûrissement est un effet d'évolution de la taille des bulles lié à des transferts de gaz entre bulles de différentes tailles. Le drainage est un effet gravitationnel d'écoulement de la phase liquide à travers la structure de la mousse. La coalescence correspond à la rupture d'un film de savon et à la mise en commun du gaz provenant de deux bulles.

#### Mûrissement

Le mûrissement est dû aux transferts de gaz entre bulles voisines dû aux différences de pression de Laplace. Cette différence de pression de Laplace est due en premier lieu à une différence de diamètre  $d$  entre bulles voisines. Pour les mousses humides où la forme des bulles est quasiment sphérique, le lien entre diamètre des bulles et courbure des interfaces est immédiat. Il ne l'est pas pour des mousses sèches. Von Neumann a montré que l'évolution de la taille d'une bulle dans une mousse sèche 2D est gouvernée par son nombre de voisins [1]. Ce résultat a récemment été généralisé au cas 3D [13]. À un niveau plus macroscopique, la distribution initiale de taille des bulles dans la mousse influe sur la cinétique du mûrissement. En particulier, pour une mousse initialement quasi-monodisperse, où les différences de pression de Laplace sont moindres, la cinétique de mûrissement est plus lente. Outre la taille des bulles et la topologie de leur empilement, la cinétique de ce mécanisme dépend de la solubilité  $C_s$  du gaz dans les films, de l'épaisseur des films (i.e. de la fraction volumique  $\phi_g$ ) et du coefficient de diffusion du gaz dans le liquide [1].

## Drainage

Le drainage correspond à l'écoulement de la solution moussante sous l'action de la gravité et de la capillarité au travers du réseau de canaux et de nœuds formé par les bords de Plateau et les vertex [1]. L'écoulement à travers ce réseau est comparable à un écoulement au travers d'un milieu poreux déformable. Au fur et à mesure de l'assèchement de la mousse, la section des canaux diminue. Un gradient de fraction liquide et donc un gradient de pression capillaire apparaît et s'oppose aux forces de gravité jusqu'à ce qu'un profil vertical de fraction volumique de gaz à l'équilibre ne s'installe [1]. Outre la fraction de liquide initiale et la taille des bulles, la cinétique du drainage est contrôlée par les grandeurs physiques qui régissent l'écoulement au travers de la mousse. En particulier, le profil de l'écoulement est régi par la viscosité de la solution, tandis que les conditions aux limites découlent de la viscosité interfaciale, due à la présence de molécules de tensioactifs adsorbés à l'interface [1].

Dans le cadre du drainage, la gravité joue un rôle moteur et la capillarité un rôle de frein. Mais la capillarité peut également jouer un rôle moteur dans le cadre de la réimbibition en l'absence de gravité (e.g. dans le plan horizontal). Il s'agit du phénomène qui se manifeste lors de la mise en contact d'un bloc de mousse humide et d'un bloc de mousse sèche. La différence de pression osmotique va provoquer l'aspiration du liquide de la mousse humide par la mousse sèche.

## Coalescence

La coalescence correspond à la fusion de deux bulles suite à la rupture du film les séparant. Ce phénomène est souvent consécutif au drainage. Les films sont d'autant plus fragiles qu'ils sont fins. Les films d'équilibre ont une épaisseur typique de 20 – 50 nm fixée par l'équilibre des forces capillaires et forces de disjonction (i.e. répulsions électrostatiques et stériques). À cette échelle, les films sont fragiles face aux perturbations thermiques qui peuvent générer des ondes capillaires au niveau de l'interface. Ces ondes provoquent une déformation de l'interface à laquelle résiste la tension de surface. Néanmoins, à cette échelle des forces attractives de type Van der Waals peuvent dominer et par un phénomène d'instabilité provoquer la rupture du film [1].

## 1.2 Propriétés viscoélastiques des mousses

### 1.2.1 Éléments de mécanique

#### Mécanique linéaire d'un milieu élastique isotrope

Soit un champ de déplacement  $\vec{u}$  dans un milieu élastique homogène isotrope, le tenseur des déformations  $\epsilon$  est égal à la partie symétrique du gradient du champ de déplacement [14] :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^\dagger \right) \quad (1.2)$$

où  $\nabla \vec{u}^\dagger$  est le transconjugué de  $\nabla \vec{u}$ . Si le matériau est hookéen, le tenseur des contraintes  $\sigma$  est lié linéairement au tenseur des déformations  $\epsilon$  :

$$\sigma = \lambda \text{Tr}(\epsilon) \mathbb{I} + \mu \epsilon \quad (1.3)$$

$$= \lambda \nabla \cdot \vec{u} \mathbb{I} + \mu \left( \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^\dagger \right) \quad (1.4)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé et  $\mathbb{I}$  la matrice identité.  $\lambda$  correspond à un terme d'élasticité purement isotrope et  $\mu$  correspond à l'élasticité purement déviatorique. En terme des modules de cisaillement  $G$ , d'onde de compression  $L$  et de compressibilité volumique  $B$ , on a les relation suivantes :

$$G = \mu, \quad L = \lambda + 2\mu, \quad B = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (1.5)$$

Le cas d'élasticité de cisaillement nulle  $\mu = 0$  correspond au cas du fluide<sup>3</sup> (non visqueux). Fluides comme solides ont un coefficient  $\lambda$  non nul. Les caractéristiques mécaniques d'un solide sont dues à un module élastique de cisaillement  $\mu = G$  non nul.

#### Mécanique d'un fluide visqueux homogène isotrope

Soit un champ de vitesses  $\vec{v}$  dans un fluide visqueux homogène isotrope, le tenseur des taux de déformations  $\dot{\epsilon}$  est égal à la partie symétrique du gradient du champ de vitesse [14] :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^\dagger \right) \quad (1.6)$$

---

3. Dans ce cas, module d'onde de compression et module d'élasticité isostatique sont égaux  $L = B$ .



où  $\nabla\vec{v}^\dagger$  est le transconjugué de  $\nabla\vec{v}$ . Si le fluide est newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses  $\sigma_\eta$  est lié linéairement au tenseur de taux de déformations  $\dot{\epsilon}$  :

$$\sigma_v = \lambda_v \text{Tr}(\dot{\epsilon}) \mathbf{I} + \mu_v \dot{\epsilon} \quad (1.7)$$

$$= \lambda_v \nabla \cdot \vec{v} \mathbf{I} + \mu_v (\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^\dagger) \quad (1.8)$$

où  $\lambda_v$  et  $\mu_v$  sont les coefficients de viscosité de Lamé.  $\lambda_v$  correspond à un terme de viscosité purement isotrope et  $\mu$  correspond à la viscosité de cisaillement. En terme des coefficients de viscosité dynamique  $\eta$  et du module de viscosité volumique  $B_v$ , on a les relation suivantes :

$$\eta = \mu_v, \quad B_v = \lambda_v + \frac{2}{3}\mu_v \quad (1.9)$$

Le coefficient de viscosité volumique  $B_v$  est lié à des degrés de liberté vibrationnels internes des molécules. Dans le cas des gaz monoatomiques, l'absence de ces degrés de liberté internes assure  $B_v = 0$ . Les coefficients de Lamé visqueux vérifient alors la relation de Stokes ( $3\lambda_v + 2\mu_v = 0$ ). Cette relation encore appelée hypothèse de Stokes est vérifiée pour un certain nombre de fluides newtoniens dont l'eau et l'air. Pour ces fluides, la viscosité engendre des contraintes déviatoriques. La seule contrainte isochore vient des efforts de pression qui interviennent dans l'expression du tenseur des contraintes total :

$$\sigma = -p \mathbf{I} + \sigma_v \quad (1.10)$$

Pour un fluide compressible de compressibilité  $\chi$ , la pression est reliée à la divergence du champ de déplacement de la même manière que la partie isotrope du tenseur des contraintes dans un solide élastique. En terme de coefficients de Lamé élastiques, le fluide compressible correspond au cas  $\mu = 0$  et  $L = B = \lambda = \chi^{-1}$ .

Il est remarquable de constater au travers de ces équations les parallèles entre le fluide newtonien et le solide hookéen. De nombreux matériaux n'ont ni l'un ni l'autre de ces deux comportements mécaniques, mais ils constituent deux archétypes qui permettent de situer les comportements plus complexes en comparaison.

### Viscoélasticité linéaire

Le comportement mécanique d'un matériau viscoélastique dépend du temps caractéristique de la sollicitation mécanique. Par rapport à un solide purement élastique, où la réponse mécanique est instantanée, cela signifie que la réponse se fait avec un temps de retard. Ce retard est lié à une distribution de temps de relaxation intrinsèque au matériau. Le comportement viscoélastique en réponse à un cisaillement oscillatoire  $\epsilon_{xy}$  est décrit par le module complexe de cisaillement  $G^*(\omega)$  défini tel que :

$$\epsilon_{xy}^*(\omega) = \epsilon_0 e^{i\omega t} \quad (1.11)$$

$$\sigma_{xy}^*(\omega) = G^*(\omega) \epsilon_{xy}^*(\omega) = (G' + i G'') \epsilon_{xy}^*(\omega) \quad (1.12)$$

où  $G^*(\omega)$  est le module de cisaillement complexe, dont la partie réelle  $G'$  est appelée module de conservation (ou module élastique) et la partie imaginaire  $G''$  module de perte. Ces équation traduites en réponse temporelle donnent :

$$\epsilon_{xy}(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t) \quad (1.13)$$

$$\sigma_{xy}(t) = (G' \cos(\omega t) - G'' \sin(\omega t)) \epsilon_0 \quad (1.14)$$

Il existe une grande variété de comportements viscoélastiques et de modèles correspondants. Parmi tous ces modèles, deux d'entre eux peuvent être considérés comme les briques élémentaires de la viscoélasticité. Il s'agit respectivement du fluide de Maxwell ( $G_m, \eta_m$ ) et du solide de Kelvin-Voigt ( $G_v, \eta_v$ ) (cf. figure 1.5).

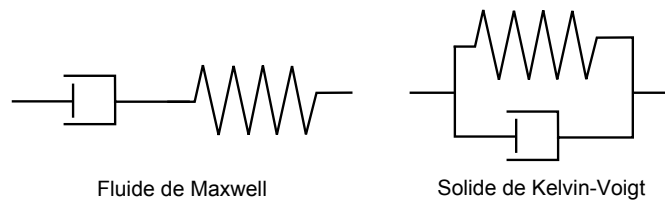


FIGURE 1.5 – Schémas équivalents du fluide de Maxwell et du solide de Kelvin-Voigt.

Le premier est élastique aux temps courts et visqueux aux temps longs comparés à son temps de relaxation  $\tau_m = G_m/\eta_m$ . Le second est visqueux aux temps courts et élastique aux temps longs comparés à son temps de relaxation  $\tau_v = G_v/\eta_v$ . Les fonctions de distribution des temps de relaxation des éléments de Maxwell et des éléments de Kelvin-Voigt d'un matériau permettent de caractériser complètement le comportement viscoélastique linéaire d'un matériau [15].

## 1.2.2 Mousses liquides

### Rhéologie des mousses

Une mousse est un fluide complexe, un solide faible et un matériau mou. Ces matériaux peuvent exhiber trois types de comportement : élastique, plastique et visqueux [1].

L'élasticité est la propriété la plus étonnante au premier abord lorsque l'on considère qu'une mousse correspond à un mélange de deux phases fluides. La tension de surface est à l'origine de l'élasticité des mousses. La longueur caractéristique qui intervient dans l'élasticité est la taille des bulles de sorte qu'en loi d'échelle  $G \sim \gamma/d$ . Expérimentalement, les variations du module dans la limite quasi-statique avec la fraction volumique de gaz  $\phi_g$  sont bien décrites par la relation phénoménologique suivante [8] :

$$G = 2.8 \phi_g (\phi_g - \phi_c) \frac{\gamma}{d} \quad (1.15)$$

où  $\phi_c$  est une fraction volumique de gaz critique. La plasticité intervient aux grandes déformations et correspond à leur irréversibilité. La mousse garde alors la forme imposée par ces déformations. On observe ce comportement de la mousse si l'on cherche à la faire s'écouler. L'écoulement apparaît si la contrainte appliquée est supérieure à une contrainte seuil  $\sigma_{ys}$  qui, dans le cas de mousses sèches, vérifie la loi d'échelle  $\sigma_{ys} \sim \gamma/d$ . Pour une fraction volumique de gaz quelconque, la contrainte seuil dans les mousses désordonnées suit l'évolution donnée par l'équation 1.16 [8] représentée figure 1.6.

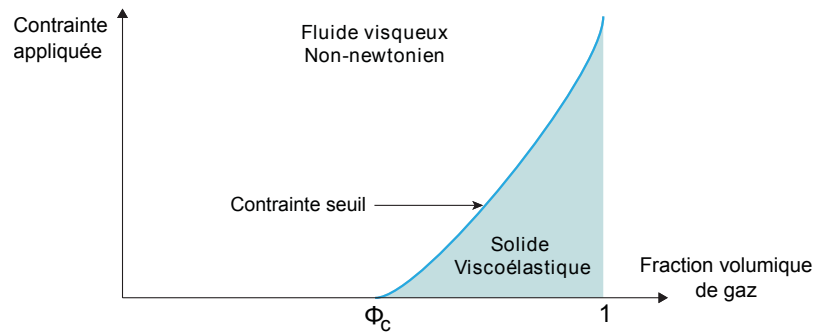


FIGURE 1.6 – Contrainte seuil en fonction de la fraction volumiques de gaz (d'après [16]).

$$\sigma_{ys} \cong 3 \frac{\gamma}{d} (\phi_g - \phi_c)^2 \quad (1.16)$$

### Viscoélasticité linéaire

La figure 1.7 illustre le comportement viscoélastique linéaire dans une mousse. Le module complexe de cisaillement  $G^*(\omega)$  est représenté en fonction de la fréquence. On y distingue deux régimes fréquentiels où les comportements rhéologiques de la mousse sont qualitativement différents.

Le régime des basses fréquences  $f < 0.1 \text{ Hz}$  est mis en évidence par des expériences de fluage. Ces expériences consistent en la mesure de la réponse temporelle de la fonction de fluage  $J(t)$  du système soumis à un échelon de contrainte. Une transformée de Laplace

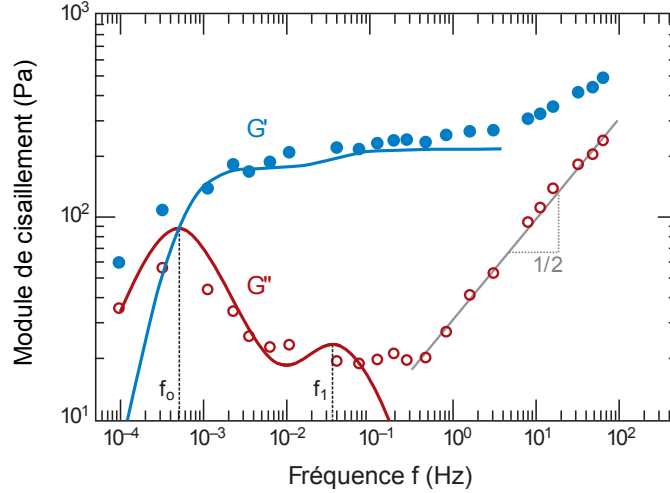


FIGURE 1.7 – Spectre dynamique du module de cisaillement d'une mousses liquide. L'échantillon est une mousse à raser après 100 min de mûrissement et de fraction volumique de gaz  $\phi_g = 0.92$  (d'après [8]). Les courbes continues sont déduites par transformée de Laplace de la fonction de fluage  $J(t)$ .

permet ensuite de revenir au module viscoélastique  $G^*(\omega) = 1/J^*(\omega)$  [2]. Les courbes continues de la figure 1.7 correspondent à ces mesures. Le modèle que l'on déduit de la réponse temporelle correspond à la mise en série d'un fluide de Maxwell et d'un solide de Kelvin-Voigt. Le fluide de Maxwell a un temps de relaxation  $\tau_0 = 1/f_0$  déterminé par l'intervalle de temps entre les réarrangement de bulles successifs induits par le mûrissement. Ce temps caractéristique a également été observé par la spectroscopie de la lumière diffuse (DWS) présentée section 1.4. Pour les fréquences correspondantes et inférieures  $f < f_0$ , le module élastique disparaît. Une mousse qui mûrit ne présente donc pas de comportement élastique statique, aux temps longs elle s'écoule comme un liquide très visqueux. Une deuxième contribution à la réponse lente, décrite par un modèle Kelvin-Voigt, résulte quant à elle d'un couplage entre la dynamique des bulles et la rhéologie interfaciale. Le temps de relaxation résulte du rapport entre la tension de surface et la viscosité interfaciale dilatationnelle  $\tau_1 = 1/f_1 = \eta_d/\gamma$  [8].

Le régime des hautes fréquences  $f > 0.1 \text{ Hz}$  est sondé par une technique oscillatoire, si bien que le module de cisaillement complexe  $G^*(\omega)$  est obtenu directement de la mesure de la contrainte en réponse à une déformation sinusoïdale. Les variations en fréquence du module élastique commencent au niveau du plateau du régime quasi-statique. Le module élastique  $G'$  croît ensuite en racine carrée de la fréquence de même que le module de perte  $G''$ . Le module de cisaillement complexe peut être décrit dans ce régime par la loi suivante [1] :

$$G^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sqrt{i \frac{\omega}{\omega_c}} \right) + i \eta_\infty \omega \quad (1.17)$$

où  $\omega_c$  est une pulsation caractéristique,  $G_0$  est le module d'élasticité quasi-statique et  $\eta_\infty$  est une viscosité newtonienne asymptotique. Cette loi de viscoélasticité combine le régime d'élasticité quasi-statique, une dissipation liée aux modes mous de relaxation d'un empilement aléatoire de bulles [17, 18] et une viscosité newtonienne de fluide qui finit par intervenir dans la limite des hautes fréquences. Des travaux récents ont montré que l'élasticité dilatationnelle des interfaces a un impact sur le module  $G^*$  à hautes fréquences [19]. Elle fait apparaître une fréquence de coupure dans le spectre de temps de relaxation d'autant plus petite que la rigidité de l'interface liquide-gaz est grande.

### 1.2.3 Mousses solides

L'élasticité d'une mousse solide dépend de l'élasticité de sa phase continue solide. Une fois ses propriétés connues, il reste à les relier à celles de la mousse. Les relations qui les relient aux propriétés mécaniques macroscopiques ne nécessitent pas toujours une modélisation précise de la microstructure. En effet, des approches d'homogénéisation ou parfois des raisonnements en lois d'échelles permettent d'obtenir des relations de passage satisfaisantes [20].

#### Cellules ouvertes

La structure des mousses réelles est trop complexe pour qu'on puisse modéliser leur mécanique macroscopique analytiquement. Pour comprendre qualitativement le lien entre ce comportement et la microstructure, Gibson & Ashby proposent un modèle de cellule cubique de maille de taille  $d$  fait de poutres de section carrée de côté  $t$  (cf. figure 1.8) [3]. Une section du cube parallèle à une des faces possède une fraction surfacique de solide de l'ordre de  $t^2/d^2$ . Afin de passer de la section au cube, il faut imaginer un procédé d'extrusion selon deux directions orthogonales, de sorte que la fraction volumique de solide ( $1 - \phi_g$ ) est également de l'ordre de  $t^2/d^2$ .

FIGURE 1.8 – Modèle de la cellule cubique de poutres de section carrée non-déformée (A) et déformée par une contrainte uniaxiale dans la direction verticale (B) (d'après [3]).

Ces poutres sont principalement sollicitées en flexion par une contrainte uniaxiale transverse. La force  $F$  de point d'application le milieu d'une poutre, dont les deux extrémités sont en appui, cause une déflexion  $\delta$  au milieu de la poutre [21, 14] :

$$\delta = \frac{1}{4} \frac{F}{E_s} \frac{d^3}{t^4} \quad (1.18)$$

où  $E_s$  est le module de Young du solide. Pour en déduire un module de Young effectif de la mousse à cellules ouvertes  $E_*$ , il faut substituer la contrainte  $\sigma$  par la force  $F \propto \sigma d^2$ . En l'exprimant comme le rapport de la déformation  $\epsilon \propto \delta/d$  sur la contrainte, on obtient<sup>4</sup> :

$$E_* = \frac{\sigma}{\epsilon} \propto E_s \frac{d^4}{t^4} \propto E_s (1 - \phi_g)^2 \quad (1.19)$$

La constante de proportionnalité dépend de la géométrie considérée. Empiriquement, on trouve qu'elle vaut à peu près 1 pour une majorité de matériaux cellulaires [3].

Un cisaillement entraîne également la flexion des poutres. En effet, le point d'application de la force se trouve cette fois-ci au niveau de l'extrémité des poutres. Ainsi la déflexion  $\delta$  est liée par une formule équivalente à l'équation 1.18 au module de Young du solide  $E_s$  avec un différent préfacteur. Un raisonnement aux dimensions conduit de manière équivalente à une proportionnalité entre le module de cisaillement effectif de la mousse à cellules ouvertes  $G_*$  et le module de Young du solide  $E_s$ . Afin d'en déduire la relation de passage avec le module de cisaillement du solide  $G_s$ , il faut utiliser la relation pour les solides homogènes élastiques [14] :

$$E_s = \frac{9 B_s G_s}{3 B_s + G_s} \quad (1.20)$$

où  $B_s$  est le module d'élasticité isostatique du solide. Or pour les matériaux mous, le contraste entre modules d'élasticité isostatique et de cisaillement est très grand (e.g. gel de gélatine  $B_s \sim 10^9 Pa \gg G_s \sim 10^4 Pa$ ), le coefficient de Poisson  $\nu$  est très proche de sa valeur incompressible, de sorte que le module de Young est essentiellement égal au module de cisaillement à un coefficient de proportionnalité près ( $E_s \approx 3 G_s \Leftrightarrow \nu \approx 1/2$ ). En utilisant ce résultat et en croisant avec le coefficient semi-empirique (3/8) obtenu par Gibson & Ashby [3], on obtient :

$$G_* \approx \frac{9}{8} (1 - \phi_g)^2 G_s \quad (1.21)$$

Il est remarquable de constater que le module de cisaillement des mousses solides  $G_*$  évalué dans la limite quasi-statique, ne dépend pas de la taille des cellules. Ce résultat diffère fondamentalement du cas des mousses liquides, où le module quasi-statique  $G_0$  est inversement proportionnel à la taille des bulles (cf. équation 1.15).

4. L'indice inférieur \* désigne les grandeurs du matériau 'homogénéisé' équivalent à la mousse. Ne pas confondre avec l'exposant \* qui désigne les grandeurs complexes.

## Cellules fermées

Dans le cas des cellules fermées deux effets s'ajoutent : l'élasticité des films et la compressibilité du gaz dans les cellules. Pour une déformation causée par une contrainte uniaxiale, le module pertinent est celui de Young [3] :

$$E_* \approx E_s [(1 - \phi_f)^2 (1 - \phi_g)^2 + \phi_f (1 - \phi_g)] + \frac{1 - 2\nu_*}{\phi_g} P_0 \quad (1.22)$$

où  $\nu_*$  est le coefficient de Poisson effectif,  $P_0$  est la pression du gaz dans la cellule,  $\phi_f$  fraction volumique de solide contenu dans les films et sa contribution au module est calculée dans le cas isotherme. Pour des déformations isochores qui sollicitent la mousse en cisaillement, seule l'élasticité des films doit être prise en compte. Cet effet est censé être mineur pour la plupart des mousses qui possèdent des films très fragiles, qui se rompent facilement [3]. Néanmoins, il y a des exceptions pour lesquelles une fraction volumique non négligeable  $\phi_f$  du solide est contenue dans les films. Semi-empiriquement, la correction est alors la suivante [3] :

$$G_* \approx \frac{3}{8} E_s [(1 - \phi_f)^2 (1 - \phi_g)^2 + \phi_f (1 - \phi_g)] \quad (1.23)$$

où dans le cas des matériaux moux,  $E_s$  peut être remplacé par  $3 G_s$ . L'élasticité de cisaillement des mousses à cellules fermées exhibe donc une première contribution analogue à celle des cellules ouvertes qui vient de la 'charpente' de la structure et une seconde contribution qui vient de l'étirement des films. Notons que dans les équations 1.22 et 1.23 ont été omis tout effet de tension au niveau des films qui viendrait s'ajouter aux forces de rappel élastiques.

## 1.3 Propagation acoustique dans les mousses

La propagation acoustique dans les mousses à cellules fermées (liquides ou solides) sont l'objet de travaux de recherche récents ou en cours [22, 23]. Au niveau de l'état de l'art, deux cas adjacents sont néanmoins déjà bien décrits : il s'agit d'une part des liquides bulleux et d'autre part des solides poreux. Après une introduction où l'on retrouve l'équation d'onde dans un solide, nous envisagerons ces deux cas limites. Nous verrons également les résonances mécaniques d'un objet de la microstructure des mousses : le film de savon modélisé comme une membrane sous tension.

### 1.3.1 Équation d'onde pour un milieu continu homogène

#### Équation d'onde dans un solide homogène

Pour un solide élastique, il est d'usage d'utiliser la décomposition de Helmholtz, qui décompose le déplacement  $\vec{u}$  en un potentiel scalaire  $\varphi$  et un potentiel vecteur  $\vec{\psi}$  de telle sorte que le déplacement s'écrit comme la somme d'une partie isotrope et une partie isochore [24]. Le potentiel scalaire  $\varphi$  correspond à une déformation de dilatation et le potentiel vecteur  $\vec{\psi}$  à une déformation de cisaillement :

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \quad (1.24)$$

Cette décomposition introduit un degré de liberté supplémentaire qui doit être contraint par une condition de jauge qui porte sur la divergence de  $\vec{\psi}$ . Afin d'obtenir les équations d'onde, il faut écrire l'équation de la dynamique sur un volume infinitésimal de solide en l'absence de forces volumiques [5] :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma \quad (1.25)$$

En substituant le tenseur des contraintes par son expression (cf. équation 1.4) et en utilisant les relations sur les opérateurs<sup>5</sup>, on obtient l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (1.26)$$

où  $\nabla^2$  est l'opérateur laplacien. En introduisant le module d'onde de compression  $L$  et le module de cisaillement  $G$  (cf. équation 1.5), en substituant le déplacement par sa décomposition de Helmholtz (1.24) et en utilisant les relations de commutation du laplacien<sup>6</sup>, on obtient [5] :

$$\nabla \left[ L \nabla^2 \varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[ G \nabla^2 \vec{\psi} - \rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (1.27)$$

Cette équation indique qu'à une condition de jauge près, le terme contenu dans le gradient en  $\varphi$  et celui dans le rotationnel en  $\vec{\psi}$  doivent s'annuler tous deux. On en déduit,

5.  $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u} \mathbb{I}) = \nabla \nabla \cdot \vec{u}$ ,  $\nabla \cdot (\nabla \vec{u}^\dagger) = \nabla \nabla \cdot \vec{u}$   
 6.  $\nabla^2 \nabla = \nabla \nabla^2$ ,  $\nabla^2 \times \nabla = \nabla \times \nabla^2$



les équations d'onde sur les parties isotropes et isochores du déplacement :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.28)$$

$$\text{avec } c_L = \sqrt{\frac{L}{\rho}} \quad (1.29)$$

$$\nabla^2 \vec{\psi} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad (1.30)$$

$$\text{avec } c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.31)$$

$c_L$  et  $c_T$  sont les célérités longitudinale (onde de compression) et transverse (onde de cisaillement).

### Équation d'onde pour un fluide homogène

L'équation de la dynamique sur un volume infinitésimal de fluide diffère de l'équation de la dynamique du solide (1.25) par une dérivée particulaire qui remplace la dérivée partielle afin de rendre compte de la convection lors d'un écoulement :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.32)$$

Cette contribution est non-linéaire, d'ordre 2 en vitesse. Si la vitesse est faible (comme c'est souvent le cas pour les ondes acoustiques [25]), cette dérivée revient à une dérivée partielle. Par ailleurs, la possibilité de transport de matière rend possible des fluctuations de la masse volumique qui elles aussi sont sources de contributions non-linéaires. Les différentes grandeurs mécaniques telle la vitesse  $\vec{v}$ , la pression  $p$ , la masse volumique  $\rho$  et la température  $\tau$  peuvent être développées en séries de contributions d'ordres entiers croissants en vitesse. Les quantités d'ordre 0 (statiques) sont notées en majuscule (e.g. pression  $P_0$ , température  $T_0$ ) à l'exception de la masse volumique  $\rho$ . Les termes d'ordre 1, aussi appelés grandeurs acoustiques, sont notés avec des minuscules (e.g. surpression  $p$ , température acoustique  $\tau$ ). Les termes d'ordres supérieurs non-linéaires seront négligés dans la suite, nous ne discuterons que le régime de réponse linéaire.

De l'équation de la dynamique 1.32 et de l'expression du tenseur des contraintes (cf. équations 1.8 et 1.10), on déduit l'équation de Navier-Stokes linéarisée pour un fluide vérifiant l'hypothèse de Stokes (cf. section 1.2.1) :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \chi^{-1} \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \eta \left( \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \vec{v} \right) \quad (1.33)$$

Il existe deux cas limites. Le premier est celui d'un fluide de viscosité  $\eta$  négligeable de sorte qu'en dérivant en temps l'équation 1.33, on obtient l'équation du mouvement d'un fluide parfait compressible :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{c_L^2} \nabla \nabla \cdot \vec{v} \quad (1.34)$$

$$\text{avec } c_L = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}} \quad (1.35)$$

$c_L$  est la célérité de l'onde longitudinale. Le développement de l'opérateur gradient de divergence<sup>7</sup> ( $\nabla \nabla \cdot$ ) permet de voir que l'équation s'écrit avec un laplacien dont la particularité est d'annuler la partie déviatorique  $\vec{\psi}$  du champ de déplacement<sup>8</sup> dans le cadre de la décomposition de Helmholtz. Ainsi, pour un écoulement irrotationnel, on retrouve l'équation d'onde ou équation d'Alembert. Par ailleurs, la propagation dans une géométrie quelconque requiert une détermination du coefficient de compressibilité  $\chi = B^{-1}$  dans le cas général polytropique déterminé par la prise en compte des échanges de chaleur. Dans ce cas, l'équation de la chaleur doit venir compléter l'équation de propagation.

Dans le cas particulier d'un gaz parfait, la compressibilité  $\chi$  peut-être exprimée en fonction de la pression statique dans le gaz  $P_0$  et le coefficient polytropique  $\gamma_p$  tel que  $\chi^{-1} = \gamma_p P_0$ .  $\gamma_p$  vaut entre 1 dans le cas où la compression due au passage de l'onde peut être considérée comme isotherme, et vaut  $\gamma_a = c_p/c_v$  dans le cas adiabatique, où  $c_p$  et  $c_v$  sont respectivement les chaleurs spécifiques isobare et isochore. La valeur de  $\gamma_a$  dépend du nombre de degrés de liberté vibrationnels internes du gaz. Pour un mélange de gaz diatomiques (e.g. l'air), ce rapport vaut  $7/5 = 1.4$ .

Le second cas limite de l'équation 1.33 est celui du fluide incompressible. Tous les termes faisant intervenir la divergence du champ de déplacement ou de vitesse s'annulent. L'équation du mouvement en l'absence de forces extérieures s'écrit alors :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (1.36)$$

Cette fois-ci, la partie dilatationnelle du champ de déplacement dans la décomposition de Helmholtz s'annule  $\varphi = 0$ . Cette équation n'est pas une équation d'onde *stricto sensu* parce qu'elle n'admet pas de solution propagative. Néanmoins comme elle fait intervenir le laplacien, ses solutions correspondent à des ondes évanescentes de longueur d'atténuation proportionnelle à l'épaisseur de peau visqueuse  $\delta_\eta$ .

---

7.  $\nabla \nabla \cdot \vec{u} = \nabla^2 \vec{u} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}$

8.  $\nabla \nabla \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = 0$

### 1.3.2 Liquide bulleux : modèle de Wood

Les liquides bulleux constituent historiquement le premier système étudié qui ressemble aux mousses à cellules fermées. Leur étude fut notamment motivée par les développements de la technologie sonar [26]. De même que la mousse à cellules fermées, les liquides bulleux renferment des bulles de gaz respectivement de compressibilité bien supérieure et de masse volumique bien inférieure à celles de la matrice.

#### Liquide bulleux

Un liquide bulleux est constitué d'une phase liquide de masse volumique  $\rho_c$  et de compressibilité  $\chi_c$ , dans laquelle sont dispersées des bulles de gaz de masse volumique  $\rho_g$  et de compressibilité  $\chi_g$ . On note  $\phi_g$  la fraction volumique de gaz. Les célérités longitudinales dans chacune des deux phases, notées  $c_{L_c}$  et  $c_{L_g}$ , se déduisent de l'équation 1.35 et vérifient donc les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_{L_c}^2} = \rho_c \chi_c \\ \frac{1}{c_{L_g}^2} = \rho_g \chi_g \end{array} \right. \quad (1.37a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_{L_c}^2} = \rho_c \chi_c \\ \frac{1}{c_{L_g}^2} = \rho_g \chi_g \end{array} \right. \quad (1.37b)$$

Le modèle de Wood décrit la propagation d'une onde acoustique dans un tel mélange comme la propagation dans un milieu effectif homogène de masse volumique  $\rho_*$  et de compressibilité  $\chi_*$  [4] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_* = (1 - \phi_g) \rho_c + \phi_g \rho_g \\ \chi_* = (1 - \phi_g) \chi_c + \phi_g \chi_g \end{array} \right. \quad (1.38a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_* = (1 - \phi_g) \rho_c + \phi_g \rho_g \\ \chi_* = (1 - \phi_g) \chi_c + \phi_g \chi_g \end{array} \right. \quad (1.38b)$$

La célérité de l'onde longitudinale  $c_{L_*}$  déduite de (1.35) est donnée par la formule de Wood :

$$\frac{1}{c_{L_*}^2} = ((1 - \phi_g) \rho_c + \phi_g \rho_g)((1 - \phi_g) \chi_c + \phi_g \chi_g) \quad (1.39)$$

Le contraste de densité  $((1 - \phi_g) \rho_c \gg \phi_g \rho_g)$  et celui de compressibilité  $((1 - \phi_g) \chi_c \ll \phi_g \chi_g)$  entre les deux milieux sont tels que l'on peut faire l'approximation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_* \approx (1 - \phi_g) \rho_c \\ \chi_* \approx \phi_g \chi_g \\ \frac{1}{c_{L_*}^2} \approx (1 - \phi_g) \phi_g \rho_c \chi_g \end{array} \right. \quad (1.40a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_* \approx (1 - \phi_g) \rho_c \\ \chi_* \approx \phi_g \chi_g \\ \frac{1}{c_{L_*}^2} \approx (1 - \phi_g) \phi_g \rho_c \chi_g \end{array} \right. \quad (1.40b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_* \approx (1 - \phi_g) \rho_c \\ \chi_* \approx \phi_g \chi_g \\ \frac{1}{c_{L_*}^2} \approx (1 - \phi_g) \phi_g \rho_c \chi_g \end{array} \right. \quad (1.40c)$$

Dans le cas d'un gaz parfait, la compressibilité du gaz vaut l'inverse du produit de la pression ambiante  $P_0$  et du coefficient polytropique  $\gamma_p$ , de sorte que la célérité des ondes

s'écrive :

$$c_{L*} = \sqrt{\frac{\gamma_p P_0}{\phi_g(1 - \phi_g)\rho_c}} \quad (1.41)$$

Cette expression traduit le fait que dans le liquide bulleux, l'onde acoustique est sensible à la masse volumique du liquide combinée à la compressibilité du gaz. De ce fait, l'onde est plus lente qu'elle ne l'est dans chacun des deux milieux. La figure 1.9 montre l'effet spectaculaire du ralentissement des ondes de compression dont la célérité est un ordre de grandeur inférieure à la célérité dans l'air et deux ordres de grandeur inférieure à la célérité dans l'eau. On remarque que l'approximation (1.41) est excellente pour toute la gamme de fraction volumique de gaz. Seul le voisinage des limites montre un écart du fait que la formule approximative tend vers l'infini pour les fractions volumiques extrémales ( $\phi_g = 0$  ou  $\phi_g = 1$ ).

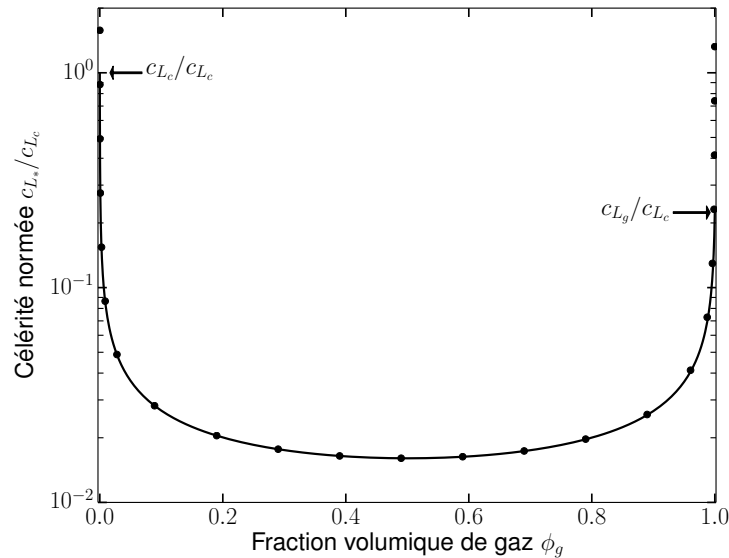


FIGURE 1.9 – Célérité de l'onde longitudinale qui se propage dans un liquide bulleux normée par la célérité dans l'eau  $c_{L_c}$  en fonction de la fraction volumique de gaz  $\phi_g$ . Les paramètres utilisés sont les masses volumiques et les compressibilités adiabatiques de l'air et de l'eau à  $20^\circ\text{C}$ . La ligne continue correspond à la formule exacte (1.39) et les points à la formule approchée (1.41).

Wood précise néanmoins que cette relation (1.39) n'est vraie que si les bulles ont un comportement non-résonant [4]. Cette formule a été démontrée ultérieurement dans le cadre de différents schémas d'homogénéisation dont l'approximation des potentiels cohérents [27]. Elle est valable dans la limite des grandes longueurs d'onde comparées à la taille des bulles, à des fréquences trop faibles pour exciter les bulles en résonance.

## Résonance de Minnaert

L'approximation de milieu effectif supposée par le modèle de Wood n'est pas valable lorsque la fréquence est suffisamment élevée pour que la résonance des bulles soit excitée. Minnaert s'était étonné du caractère audible du son émis à la formation de bulles d'air au bout d'une paille. Il a découvert que c'est l'élasticité de la bulle combinée avec la masse de la couche de liquide déplacée qui résonne selon un mode de respiration de la bulle. Les parois de la bulle ne peuvent donc pas être considérées comme rigides dans le calcul de la résonance fondamentale d'une bulle. Le calcul sous hypothèse de parois rigides prédit néanmoins les harmoniques résonantes de la bulle avec une bonne précision [28]. Dans le domaine fréquentiel, l'inertie est pondérée par la fréquence au carré, ce qui fait que plus on monte en fréquence plus une bulle se comporte de manière analogue à une cavité sphérique rigide. La formule pour la fréquence du mode de résonance fondamental a été obtenue par Minnaert en 1933 [29] :

$$\omega_M = 2\pi f_M = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{3\gamma_p P_0}{\rho_c}} \quad (1.42)$$

où  $\gamma_p$  est l'indice de polytropie, encore appelé coefficient polytropique. Pour une bulle de diamètre  $d = 2 \text{ mm}$  dans de l'eau, la fréquence de Minnaert vaut  $f_M = 3.6 \text{ kHz}$  à pression atmosphérique  $P_0$ , si la compression du gaz est adiabatique.

L'analyse de cette résonance est effectuée dans la limite d'une bulle isolée dans une matrice de liquide infinie. Cette approximation, raisonnable pour un liquide bulleux dilué, ne l'est certainement pas dans le cas des mousses où les bulles sont en contact.

### 1.3.3 Milieux poreux : théorie de Biot

La modélisation acoustique des milieux poreux (e.g. les mousses à cellules ouvertes) est très avancée. Elle a été notamment motivée par la prospection pétrolière par voie sismique<sup>9</sup>. Les modèles sont aussi largement appliqués aux matériaux poreux saturés en air pour des applications d'isolation acoustique [30].

Dans la suite, nous présentons la propriété des ondes acoustiques dans un milieu poreux, décrit comme un milieu effectif. Le poreux est constitué d'une matrice solide indéformable, et les pores sont remplis de gaz. Ensuite, la déformabilité du solide est prise en compte par un modèle couplé des deux milieux. Une description plus fine des différents niveaux de couplage est obtenue dans le cadre de la théorie de Biot. Finalement,

9. Biot était d'ailleurs consultant pour Shell lorsqu'il développa sa théorie.

nous établissons le lien entre les différents paramètres et la relation de dispersion dans le cas d'une matrice constituée d'un matériau mou.

### Phase gazeuse modélisée comme un milieu effectif

La description de la propagation acoustique à travers un milieu poreux repose sur une homogénéisation des profils d'écoulements et de température microscopiques [5].

Le milieu est modélisé comme une phase gazeuse de masse volumique  $\rho_g$  percolante à travers un solide poreux de porosité  $\phi_g$ , de pores cylindriques identiques de section circulaire de rayon  $R_p$ , parallèles les uns aux autres. On suppose qu'une onde plane se propage dans le milieu dans la direction des pores. La matrice solide est considérée comme immobile et infiniment rigide. L'analyse montre que dans ces conditions, la phase gazeuse peut être décrite comme un milieu effectif, de module d'élasticité isostatique complexe  $B_g^*$  et de masse volumique complexe  $\rho_g^*$ .

Pour des pores de taille typique  $R_p$  ( $100 \mu m < R_p < 10 cm$ ), les effets visqueux et thermiques pour des ondes acoustiques dans le domaine audible peuvent être traités séparément, ce qui évite la complexité de la théorie de Kirchhoff [31, 5]. On note comme au paragraphe 1.3.1 la pression acoustique  $p$ , la température acoustique  $\tau$ , la vitesse du fluide  $\vec{v}$ . Les équations de départ sont l'équation de la chaleur et l'équation de la dynamique d'un écoulement incompressible (1.36) avec un gradient de pression extérieure [5] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_g \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \\ \rho_g c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \kappa \nabla^2 \tau \end{array} \right. \quad (1.43a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_g \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \\ \rho_g c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \kappa \nabla^2 \tau \end{array} \right. \quad (1.43b)$$

$\eta$  est la viscosité du gaz,  $\kappa$  sa conductivité thermique et  $c_p$  sa chaleur spécifique massique isobare. Ces deux équations découplées incluent respectivement les effets de dissipation visqueuse (1.43a) et de dissipation thermique (1.43b). Le traitement séparé de ces deux effets de dissipation correspond au traitement séparé des contributions à l'écoulement qui dérivent de  $\varphi$  et de  $\vec{\psi}$  dans le cadre de la décomposition de Helmholtz (cf. équation 1.24). L'équation 1.43a est écrite pour un écoulement incompressible qui dérive du potentiel vecteur ( $\vec{\psi}$ ). Ces écoulements sont cisailant, ce qui induit de la dissipation visqueuse. Bien que l'équation 1.43b porte sur la température acoustique  $\tau$ , elle rend compte de la déformation compressible qui dérive du potentiel scalaire ( $\varphi$ ). Le lien entre la température acoustique  $\tau$  et la déformation compressible est assuré par l'équation d'état du gaz. Lors du passage de l'onde, la déformation compressible du gaz prend la forme de cycles de compression-décompression. Ce sont ces cycles de

compression-décompression, du fait de l'échange de chaleur avec la matrice solide de grande conductivité thermique, qui causent la dissipation thermique.

Dans la suite, le gaz est considéré comme parfait et la conductivité thermique du solide comme infinie. La dynamique est décrite en terme de champ de vitesse moyen dans le gaz  $\vec{v}_g^*$ . Ainsi, la solution aux équations 1.43a et 1.43b permet de décrire la dynamique en terme de milieu effectif. Une équation d'onde dans un fluide (cf. équation 1.34) capture alors toute la dynamique du système (pour plus de détails cf. référence [5]) :

$$\rho_g^* \frac{\partial^2 \vec{v}_g^*}{\partial t^2} = B_g^* \nabla \nabla \cdot \vec{v}_g^* \quad (1.44)$$

$$\rho_g^*(\omega) \omega^2 = B_g^*(\omega) k^2 \quad (1.45)$$

où  $B_g^*$  est le module d'élasticité isostatique complexe et  $\rho_g^*$  la masse volumique complexe. Le champ de vitesse  $\vec{v}_g^*$  est le champ de vitesse dans le gaz moyenné sur la section des pores. Le calcul est effectué en considérant des conditions aux limites fixes : Les grandeurs acoustiques  $\vec{v}$  et  $\tau$  s'annulent à la paroi. Le calcul du profil de l'écoulement incompressible permet d'en déduire la masse volumique complexe  $\rho_g^*$ , tandis que le profil de température permet de déduire un module d'élasticité isostatique complexe  $B_g^*$  [5] :

$$\rho_g^*(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{2}{R_p q_\eta} \frac{J_1(R_p q_\eta)}{J_0(R_p q_\eta)}} \rho_g \quad (1.46)$$

$$\text{avec } q_\eta = \left( -i \frac{\rho_g \omega}{\eta} \right)^{1/2} \quad (1.47)$$

$$B_g^*(\omega) = \frac{\gamma_a P_0}{\gamma_a - (1 - \gamma_a) \frac{J_2(R_p q_\theta)}{J_0(R_p q_\theta)}} \quad (1.48)$$

$$\text{avec } q_\theta = \left( -i \frac{\rho_g c_p \omega}{\kappa} \right)^{1/2} \quad (1.49)$$

$\gamma_a$  est le rapport des chaleurs spécifiques,  $N_{Pl}$  est le nombre de Prandtl. Les fonctions  $J_n$  sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $n$  (cf. annexe A). Les grandeurs  $q_\eta$  et  $q_\theta = \sqrt{N_{Pl}} q_\eta$  sont l'équivalent de nombres d'onde transverses dans le pore, liés respectivement à l'épaisseur de peau visqueuse  $\delta_\eta$  et l'épaisseur de peau thermique  $\delta_\theta$ .  $B_g^*$  et  $\rho_g^*$  sont représentés pour des valeurs typiques de  $\gamma_a$  et  $N_{Pl}$  sur la figure 1.10.

Sur la figure 1.10.a, la partie réelle du module d'élasticité isostatique effectif  $B_{g^*}^*$  varie continument entre sa valeur isotherme  $P_0$  et adiabatique  $\gamma_a P_0$ , rendant ainsi compte du caractère polytropique de la transformation thermodynamique subie par le gaz lors du passage de l'onde. À basses fréquences, les échanges thermiques entre le gaz et le solide poreux ont le temps de se faire sur une période de l'onde acoustique, tandis qu'à hautes

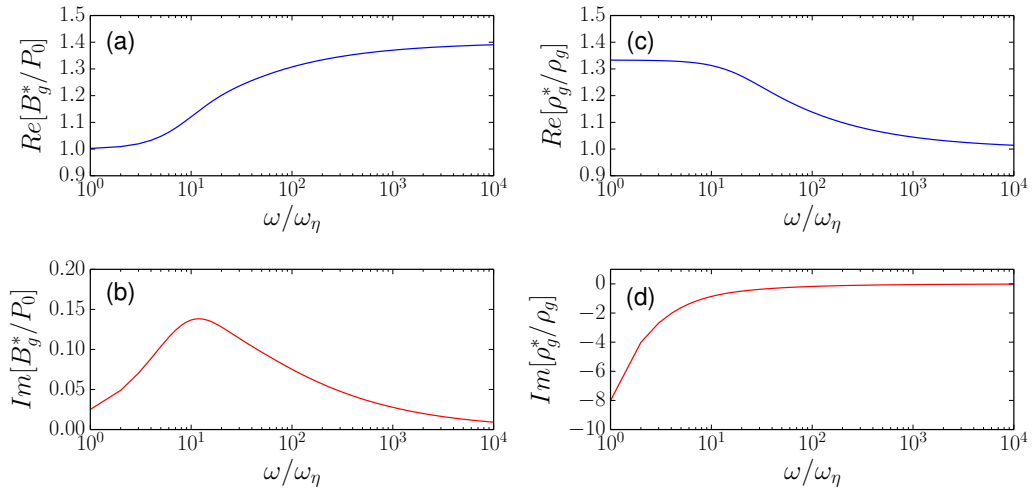


FIGURE 1.10 – Masse volumique et élasticité effective du gaz dans un milieu poreux indéformable calculées pour la propagation d’une onde acoustique de compression (cf. équations 1.46 et 1.48). Rayons de pores  $R_p = 10^{-3} m$ , masse volumique de gaz  $\rho_g = 1.29 kg.m^{-3}$  et viscosité du gaz  $\eta = 18 \mu Pa.s$ , rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma_a = 1.4$ , nombre de Prandtl  $N_{Pl} = 0.71$ . Dans ces conditions, la pulsation  $\omega_\eta = \eta/R_p^2\rho_g = 14 rad.s^{-1}$ .

fréquences, la transformation est trop rapide pour que les échanges thermiques puissent se faire. La partie réelle de la masse volumique effective  $\rho_{g*}^*$  est représentée sur la figure 1.10.c. Elle montre une surcharge inertielle à basses fréquences, où l’épaisseur de peau est grande, qui s’estompe à hautes fréquences. Les parties imaginaires de  $\rho_{g*}^*$  et  $B_{g*}^*$  rendent compte des effets de dissipations visqueuse et thermique. Ce sont des effets dissipatifs respectivement isochores et isotropes. Par conséquent, il est naturel que les premiers apparaissent dans la masse volumique effective et les seconds dans le module élastique effectif. En effet, les premiers s’opposent à un effort isochore de cisaillement tandis que les seconds s’opposent à un effort isotrope de dilatation.

### Tortuosité classique et dynamique

La propagation de l’onde dans des pores de géométries plus diverses est décrite en introduisant des facteurs de forme et en utilisant le rayon hydraulique des pores [5]. Si les pores ne sont pas orientés selon la direction du vecteur d’onde ou si le rayon hydraulique varie, la sinuosité du parcours du fluide dans la matrice de solide est prise en compte par la tortuosité  $\alpha_\infty$ . Elle agit comme un facteur multiplicatif sur la masse volumique de sorte que [32, 5] :

$$\rho_{g**} = \alpha_\infty \phi_g \rho_g \quad (1.50)$$

Soit un fluide parfait, dont les écoulements microscopiques sont décrits par  $\vec{v}_\mu$ , la vitesse microscopique en un point. Soit  $V$  un volume élémentaire autour de ce point, de taille



suffisante pour être représentatif du milieu poreux à une échelle mésoscopique, alors la tortuosité est définie par [32, 5] :

$$\alpha_\infty = \langle v_\mu^2 \rangle_V / \langle v_\mu \rangle_V^2 \quad (1.51)$$

où les crochets indiquent une moyenne sur le volume  $V$ . L'équation 1.51 définit la tortuosité comme le carré du rapport de la vitesse microscopique quadratique moyenne sur la vitesse microscopique moyenne. Elle est donc toujours supérieure ou égale à l'unité. Elle rend compte de la quantité de mouvement perdue par le gaz à une échelle microscopique au profit de la matrice solide. Dans le cas de pores parallèles tous inclinés d'un même angle  $\theta$  par rapport au vecteur d'onde  $\vec{k}$ , la tortuosité vaut  $1/\cos(\theta)$ . Ce facteur résulte de la projection de la vitesse microscopique selon la direction macroscopique de l'onde plane. Ce phénomène peut également s'exprimer en terme de diffraction de l'onde acoustique par des pores de section et d'orientation variable. La diffraction induit un transfert de quantité de mouvement. Ainsi, la tortuosité rend compte de la part de la quantité de mouvement que le fluide perd au profit de la matrice solide.

Afin de prendre en compte la sinuosité des pores dans le cadre du modèle milieu effectif, il est d'usage d'introduire la tortuosité dynamique  $\alpha^*(\omega)$ . Outre la sinuosité, elle inclut la dissipation visqueuse de sorte que la masse volumique effective (cf. équation 1.46) s'écrive :

$$\rho_{g_*}^*(\omega) = \alpha^*(\omega) \phi_g \rho_g \quad (1.52)$$

$$\alpha^*(\omega) = \alpha_\infty \frac{1}{1 - \frac{2}{R_p q_\eta} \frac{J_1(R_p q_\eta)}{J_0(R_p q_\eta)}} \quad (1.53)$$

où  $R_p$  est le rayon moyen des pores et  $q_\eta$  est le nombre d'onde visqueux défini par la relation 1.47. L'équation 1.53 donne les bonnes limites asymptotiques en fréquence du comportement dans le cas général et constitue une bonne approximation dans le cas intermédiaire si les pores sont cylindriques [5]. Des modèles plus généraux ont été proposés mais ils ne seront pas détaillés ici [32].

### Systemes acoustiques couplés

Dans la suite, la matrice solide se déplace et se déforme également lors du passage de l'onde. Un élément fondamental de la modélisation acoustique des milieux poreux consiste à considérer les deux phases qui s'interpénètrent comme deux systèmes acoustiques couplés. Soit la masse volumique effective  $\rho_{s_*} = (1 - \phi_g)\rho_s$  et le module d'onde de compression effectif  $L_{s_*}$  du solide, soit la masse volumique effective  $\rho_{g_*} = \phi_g \rho_g$  et

le module d'onde de compression  $B_{g^*}$  du gaz, les ondes de compression dans le milieu composite sont décrites par le système d'équation [25] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{g^*} \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t} = -B_{g^*} \nabla p_g - \eta^* (\vec{v}_g - \vec{v}_s) \quad \text{où} \quad \frac{\partial p_g}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{v}_g \\ \rho_{s^*} \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = -L_{s^*} \nabla p_s - \eta^* (\vec{v}_s - \vec{v}_g) \quad \text{où} \quad \frac{\partial p_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{v}_s \end{array} \right. \quad (1.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{g^*} \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t} = -B_{g^*} \nabla p_g - \eta^* (\vec{v}_g - \vec{v}_s) \quad \text{où} \quad \frac{\partial p_g}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{v}_g \\ \rho_{s^*} \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = -L_{s^*} \nabla p_s - \eta^* (\vec{v}_s - \vec{v}_g) \quad \text{où} \quad \frac{\partial p_s}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{v}_s \end{array} \right. \quad (1.55)$$

$\vec{v}_g$  et  $\vec{v}_s$  sont les champs de vitesse respectivement dans le gaz et le solide,  $\eta^*$  est le paramètre de couplage effectif entre les deux milieux. Une valeur réelle de ce paramètre correspond à un couplage purement visqueux dû à l'écoulement de la phase fluide dans la phase solide. Si l'on dérive le système une fois par rapport au temps, que l'on substitue les pressions par leurs expressions et que l'on pose  $\kappa^* = i\omega\eta^*$ , alors les équations 1.54 et 1.55 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{g^*} \frac{\partial^2 \vec{v}_g}{\partial t^2} = B_{g^*} \nabla \nabla \cdot \vec{v}_g - \kappa^* (\vec{v}_g - \vec{v}_s) \\ \rho_{s^*} \frac{\partial^2 \vec{v}_s}{\partial t^2} = L_{s^*} \nabla \nabla \cdot \vec{v}_s - \kappa^* (\vec{v}_s - \vec{v}_g) \end{array} \right. \quad (1.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{g^*} \frac{\partial^2 \vec{v}_g}{\partial t^2} = B_{g^*} \nabla \nabla \cdot \vec{v}_g - \kappa^* (\vec{v}_g - \vec{v}_s) \\ \rho_{s^*} \frac{\partial^2 \vec{v}_s}{\partial t^2} = L_{s^*} \nabla \nabla \cdot \vec{v}_s - \kappa^* (\vec{v}_s - \vec{v}_g) \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Si on introduit une solution d'onde plane dans ce système d'équations, on trouve la relation de dispersion de deux réseaux d'oscillateurs couplés dans la limite continue (cf. annexe B) :

$$(\rho_{g^*} \omega^2 - B_{g^*} k^2 - \kappa^*)(\rho_{s^*} \omega^2 - L_{s^*} k^2 - \kappa^*) = \kappa^{*2} \quad (1.58)$$

L'équation 1.58 est une équation polynomiale biquadratique en  $k$ . Il y a donc deux solutions soit deux branches dans la relation de dispersion, qui correspondent à deux modes de propagation longitudinaux distincts. Dans le cadre d'utilisation classique de la théorie de Biot (i.e. appliquée à des roches poreuses saturées en hydrocarbure), en cas de couplage important des deux phases, la nomenclature distingue l'onde rapide et l'onde lente. Néanmoins pour des matériaux poreux ordinaires saturés en gaz (e.g. air), où un découplage partiel est courant, on préfère distinguer l'onde portée par l'air et l'onde portée par la matrice solide [5].

### **Théorie de Biot : les différents niveaux de couplage**

La force de la théorie de Biot tient aux différents niveaux de couplage envisagés entre le solide et le fluide. En plus du couplage visqueux, la théorie prévoit un couplage en compressibilité et un couplage inertiel. La relation entre la contrainte et la déformation dérive d'une énergie potentielle dans le cadre d'un modèle lagrangien [5]. Lors du passage d'une onde, le gaz et la matrice se déforment de manière couplée. Par rapport au tenseur

de déformation d'un solide homogène (cf. équation 1.4), une élasticité de couplage  $Q$  est introduite. Elle dérive du terme d'énergie potentielle croisé entre fluide et solide. Elle intervient également par symétrie dans le tenseur de déformation du fluide. Cette élasticité de couplage traduit le fait que lorsque l'une des deux phases se dilate, elle modifie le volume accessible par la seconde et sollicite donc sa compressibilité [5].

Dans la continuité de ce qui précède, le système considéré est un matériau poreux fait d'une matrice solide déformable de module d'élasticité de cisaillement  $G_*$  et de module d'onde de compression  $L_{s*}$ . Les pores sont identiques et remplis d'un gaz de module d'élasticité isostatique volumique effectif  $B_{s*}$ . On note  $\boldsymbol{\sigma}_s$  et  $\boldsymbol{\sigma}_g$  les tenseurs de contraintes,  $\vec{u}_s$  et  $\vec{u}_g$  les champs de déplacement dans le solide et dans le gaz respectivement. Les relations entre les contraintes et les déformations sont telles que [5] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_s = (L_s^* - 2G_*) \nabla \cdot \vec{u}_s \mathbb{I} + Q \nabla \cdot \vec{u}_g \mathbb{I} + G_* (\nabla \vec{u}_s + \nabla \vec{u}_s^\dagger) & (1.59a) \\ \boldsymbol{\sigma}_g = B_g^* \nabla \cdot \vec{u}_g \mathbb{I} + Q \nabla \cdot \vec{u}_s \mathbb{I} & (1.59b) \end{cases}$$

En l'absence de couplage en compressibilité entre les deux phases ( $Q = 0$ ), l'équation 1.59a se réduit à la loi de Hooke tensorielle (cf. section 1.2.1). L'équation 1.59b décrit dans ce cas un milieu fluide, donc sans résistance au cisaillement, qui répond d'une manière élastique à un changement de volume. De l'énergie cinétique du système couplé, Biot dérive un couplage inertiel entre les deux phases. Ce couplage prend la forme d'une masse volumique croisée  $\rho_{sg*}$  et est lié au concept de tortuosité. C'est le problème du tuyau coudé en mécanique des fluides. L'écoulement dans une telle géométrie conduit à un transfert d'une partie de la quantité de mouvement du fluide au solide. Les valeurs des masses volumiques effectives, en négligeant la viscosité dans un premier temps, se déduisent en considérant le déplacement en phase du fluide et du solide. Il faut ensuite comparer l'expression de l'énergie cinétique totale à l'énergie cinétique du modèle lagrangien pour en déduire les expressions des masses volumiques effectives  $\rho_{g*}$ ,  $\rho_{s*}$  et  $\rho_{sg*}$  [5] :

$$\rho_{g*} = \phi_g \rho_g \quad (1.60)$$

$$\rho_{s*} = (1 - \phi_g) \rho_s \quad (1.61)$$

$$\rho_{sg*} = -(\alpha_\infty - 1) \phi_g \rho_g \quad (1.62)$$

Les équations dynamiques du système couplé peuvent s'écrire [33, 5] :

$$\begin{aligned} \rho_{s^*} \partial_t^2 \vec{u}_s &= (L_{s^*}^* - G_*) \nabla \nabla \cdot \vec{u}_s + Q \nabla \nabla \cdot \vec{u}_g + G_* \nabla^2 \vec{u}_s \\ &+ \rho_{sg^*} \partial_t^2 (\vec{u}_s - \vec{u}_g) - \eta^* \partial_t (\vec{u}_s - \vec{u}_g) \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \rho_{g^*} \partial_t^2 \vec{u}_g &= B_{g^*}^* \nabla \nabla \cdot \vec{u}_g + Q \nabla \nabla \cdot \vec{u}_s \\ &+ \rho_{sg^*} \partial_t^2 (\vec{u}_g - \vec{u}_s) - \eta^* \partial_t (\vec{u}_g - \vec{u}_s) \end{aligned} \quad (1.64)$$

où on a introduit également le couplage visqueux, qui correspond au paramètre  $\eta^*$  des équations 1.56 et 1.57.  $\eta^*$  se calcule en résolvant l'équation 1.43a de l'écoulement incompressible du gaz dans la matrice solide, en prenant en compte sa déformabilité.

$$\kappa^*(\omega) = i\omega\eta^*(\omega) = (\alpha^*(\omega) - \alpha_\infty) \phi_g \rho_g \omega^2 \quad (1.65)$$

$$= \alpha_\infty \frac{2}{R_p q_\eta} \frac{J_1(R_p q_\eta)}{J_2(R_p q_\eta)} \phi_g \rho_g \omega^2 \quad (1.66)$$

La tortuosité classique  $\alpha_\infty$  intervient dans l'expression du couplage visqueux  $\eta^*$  car il rend compte de la sinuosité du parcours du gaz. La résolution du système d'équations 1.63 et 1.64 se fait en utilisant la décomposition de Helmholtz (cf. équation 1.24). On en déduit l'existence d'une onde de cisaillement et de deux ondes de compression. La relation de dispersion pour les ondes de compression est la suivante :

$$((\rho_{g^*} - \rho_{sg^*}) \omega^2 - B_{g^*}^* k^2 - \kappa^*) ((\rho_{s^*} - \rho_{sg^*}) \omega^2 - L_{s^*}^* k^2 - \kappa^*) = (\rho_{sg^*} \omega^2 - Q k^2 + \kappa^*)^2 \quad (1.67)$$

De même que l'équation 1.58, l'équation 1.67 est une équation polynomiale d'ordre 2 en  $k^2$ . De la même manière, il y a donc deux solutions qui correspondent à deux ondes longitudinales distinctes. En particulier, en cas de couplage élastique nul ( $Q = 0$ ), on retrouve l'équation 1.58. Les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde déduit permettent de prédire la vitesse de phase et l'atténuation de l'onde.

Outre le formalisme qui introduit la constante de couplage  $\kappa^*$ , il est possible de mettre l'accent sur la tortuosité et de réunir couplage visqueux et inertiels dans des masses volumiques effectives dynamiques. Dans l'équation 1.53, le couplage visqueux est compris dans le terme de tortuosité dynamique  $\alpha^*(\omega)$ . Il s'adapte au cas d'une matrice solide déformable de la manière suivante :

$$\rho_{g^*}^* = \alpha^*(\omega) \phi_g \rho_g \quad (1.68)$$

$$\rho_{s^*}^* = (1 - \phi_g) \rho_s + (\alpha^*(\omega) - 1) \phi_g \rho_g \quad (1.69)$$

$$\rho_{sg^*}^* = -(\alpha^*(\omega) - 1) \phi_g \rho_g \quad (1.70)$$

où la tortuosité dynamique  $\alpha^*(\omega)$ , définie par l'équation 1.53, permet d'exprimer de

manière plus compacte les paramètres effectifs qui résultent du couplage inertiel et visqueux. Dans ce cas, la relation de dispersion pour les ondes longitudinales devient :

$$(\rho_{g_*}^* \omega^2 - B_{g_*}^* k^2)(\rho_{s_*}^* \omega^2 - L_{s_*}^* k^2) = (\rho_{sg_*}^* \omega^2 - Q k^2)^2 \quad (1.71)$$

### Théorie de Biot : expériences de pensée

Afin de déterminer les relations entre les modules élastiques et de compressibilité du modèle, Biot & Willis ont imaginé trois expériences de pensée [34, 5]. La première est une expérience de cisaillement simple qui met en évidence le module de cisaillement de la matrice  $G_*$ . La deuxième expérience imagine une compression isotrope de la matrice solide entourée d'une enveloppe avec un conduit vers l'extérieur qui permet au fluide de rester à pression ambiante. Elle permet de définir le module d'élasticité isostatique de la matrice solide à pression de fluide constante  $B_*$ . La troisième expérience considère le matériau saturé en fluide soumis à une augmentation globale de la pression. Dans le cas d'un matériau solide de compressibilité volumique  $B_s$  infinie, les relations obtenues suite aux deux dernières expériences de pensée se simplifient de la manière suivante (pour plus de détails cf. référence [5]) :

$$B_{g_*} = \phi_g B_g \quad (1.72)$$

$$Q = (1 - \phi_g) B_g \quad (1.73)$$

$$L_{s_*} = \frac{4}{3} G_* + B_* + \frac{(1 - \phi_g)^2}{\phi_g} B_g \quad (1.74)$$

Par analogie avec la tortuosité dynamique (cf. équation 1.53), on introduit un indice de polytropie dynamique  $\gamma_p^*$  qui regroupe le comportement effectif des modules élastiques et/ou de compressibilité en une seule fonction de la fréquence de sorte que :

$$B_{g_*}^* = \phi_g \gamma_p^*(\omega) P_0 \quad (1.75)$$

$$Q^* = (1 - \phi_g) \gamma_p^*(\omega) P_0 \quad (1.76)$$

$$L_{s_*}^* = \frac{4}{3} G_* + B_* + \frac{(1 - \phi_g)^2}{\phi_g} \gamma_p^*(\omega) P_0 \quad (1.77)$$

$$\gamma_p^*(\omega) = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - (1 - \gamma_a) \frac{J_2(R_p q \theta)}{J_0(R_p q \theta)}} \quad (1.78)$$

À l'aide de ces relations, nous obtenons l'allure de la relation de dispersion pour un tel milieu poreux. La figure 1.11 représente la relation de dispersion prédite par l'équation 1.67 pour un milieu poreux dont la matrice est un solide mou.

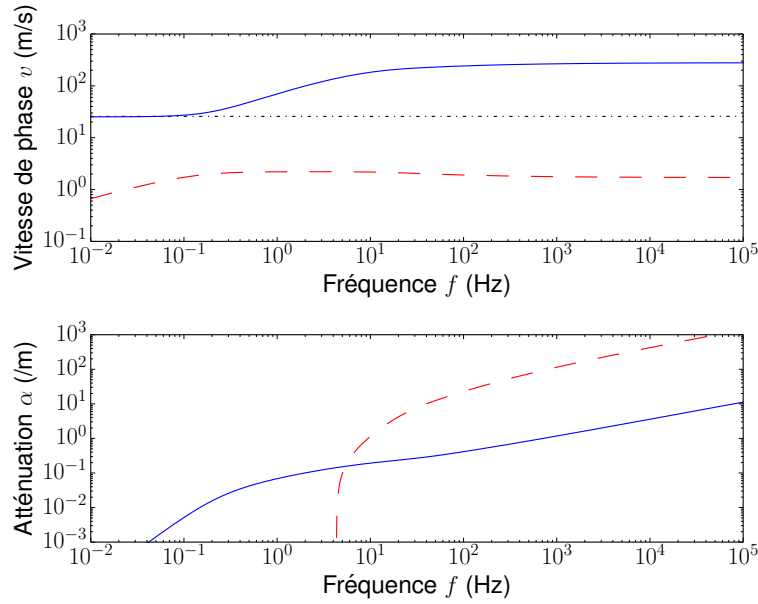


FIGURE 1.11 – Relation de dispersion (cf. équation 1.67) pour un milieu poreux de matrice constituée d'un matériau mou. Le module de cisaillement de la matrice vaut  $G_* = 500 \text{ Pa}$  (pour une mousse à cellules ouvertes, cela correspond à  $G_s = 11 \text{ kPa}$  d'après l'équation 1.21) et de coefficient de Poisson  $\nu_* = 1/3$ . La pression du gaz vaut  $P_0 = 1 \text{ atm}$  et la viscosité  $\eta = 18.6 \mu\text{Pa.s}$ . Les masses volumiques valent  $\rho_g = 1.29 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_s = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . Les pores sont de rayon  $R_p = 1 \text{ mm}$ , de tortuosité  $\alpha_\infty = \sqrt{2}$ , ce qui correspond à une orientation des pores à  $45^\circ$  par rapport au vecteur d'onde. La fraction volumique de gaz vaut  $\phi_g = 0.8$ , la constante adiabatique  $\gamma_a = 1.4$  et le nombre de Prandtl  $N_{Pl} = 0.71$ . La vitesse de phase et l'atténuation sont définies respectivement par  $v = \omega/Re(k)$  et  $\alpha = Im(k)$ . L'onde longitudinale portée par l'air est représentée en bleu par la ligne continue, l'onde longitudinale portée par la matrice est représentée en rouge en tirets. La courbe en pointillés noir représente la vitesse de Wood (cf. équation 1.39) dans la limite isotherme.

Sur l'ensemble du spectre, l'onde lente a une vitesse de phase de l'ordre de quelques mètres par seconde, ce qui correspond à une célérité d'onde de cisaillement dans un matériau mou. L'onde rapide gagne un ordre de grandeur entre sa limite basse fréquence et haute fréquence. À basse fréquence, la célérité tend vers la vitesse de Wood. L'épaisseur de peau importante comparée à la taille des pores conduit à des déplacements en phase du solide et du gaz. À haute fréquence, l'épaisseur de peau devient négligeable et la célérité de l'onde rapide tend vers la célérité du gaz. La phase gazeuse est en mouvement par rapport à la matrice presque immobile. Cette transition d'un régime à l'autre s'accompagne logiquement d'une augmentation de l'atténuation liée à la dissipation visqueuse. Dans le cas représenté d'une matrice molle, les rôles sont inversés par rapport au cas de matériaux poreux de matrice rigide, où l'onde portée par l'air est la plus lente. Johnson & Plona ont décrit ce phénomène d'inversion entre l'onde lente et rapide lorsque l'on fait varier continument l'élasticité de la matrice [33]. L'onde lente est également caractérisée par une forte atténuation à partir de  $\sim 10 \text{ Hz}$ . Il est donc peu probable de réussir à l'observer pour de tels échantillons.

### 1.3.4 Vibration d'un film unique

Le film de savon, qui délimite une bulle, est un élément de la microstructure d'une mousse liquide. Il vibre comme une membrane sous tension. Dans une mousse liquide à l'équilibre, le film mesure typiquement quelques dizaines de nanomètres, tellement mince que l'on peut négliger l'énergie élastique induite par une flexion. La membrane se distingue d'une plaque, dont la déformation est dominée par la flexion, et non la tension.

#### Oscillations libres d'un film sous tension

Nous modélisons le film qui sépare deux bulles comme une membrane d'épaisseur  $e$  négligeable en termes de flexion, de contour circulaire de rayon  $R_f$  fixé à un objet massif immobile dans un repère galiléen. La loi de Laplace donne la pression de rappel  $\delta p_\gamma$  du film en fonction de sa courbure (cf. équation 1.1). Pour modéliser la dynamique du film, on utilise l'équivalent local et linéarisé de la somme des courbures, qui correspond à une écriture de l'opérateur laplacien  $\nabla^2$  du profil de l'interface. Soit une membrane sous tension, de déplacement transverse de faible amplitude  $\zeta$ , la pression de rappel  $\delta p_\gamma$  s'écrit :

$$\delta p_\gamma = 2\gamma\nabla^2\zeta \quad (1.79)$$

où  $\gamma$  est la tension de surface et le facteur 2 vient du fait qu'il y a deux interfaces entre la membrane et le gaz. Si on néglige les forces extérieures dues au gaz qui entoure le film, l'équation homogène de la dynamique s'écrit :

$$\rho e \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 2\gamma\nabla^2\zeta \quad (1.80)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la membrane de sorte que le produit  $\rho e$  est sa masse surfacique. Dans un film liquide,  $\rho e$  peut évoluer sous l'effet de la vibration [35], mais nous négligeons cet effet ici. L'équation 1.80 est une équation d'onde. La dynamique de la membrane est intrinsèquement oscillatoire. À une fréquence donnée, l'équation 1.80 devient une de Helmholtz dont les solutions sont les harmoniques cylindriques (cf. annexe A). Seule la fonction de Bessel de première espèce  $J_n$ , ne diverge pas en  $r = 0$ . Et dans le cadre de cette étude, les longueurs d'onde des ondes incidentes dans le milieu environnant les films seront toujours grandes devant la taille des films, de sorte que seule la symétrie de révolution ( $n = 0$ ) sera envisagée. La fonction  $J_0$  est une fonction paire de son argument qui tend vers 0 dans la limite statique, de sorte que le profil statique de la surface est parabolique. Il est également possible d'arriver à la même conclusion en considérant l'équation d'équilibre statique de la membrane soumise à une pression uniforme qui s'équilibre avec la tension  $\delta p = -\delta p_\gamma$ . Le profil obtenu est solution de

l'équation [14, Chap. II] :

$$\zeta(r) = \frac{\delta p}{8\gamma} (R_f^2 - r^2) \quad (1.81)$$

### Oscillations libres d'une plaque

Un film épais et de tension négligeable vibre comme une plaque dont l'équation du mouvement s'écrit [6, Chap. V] :

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = B_f e^2 \nabla^4 \zeta \quad (1.82)$$

$$\text{où } B_f = \frac{E}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.83)$$

$B_f$  est le module de flexion et  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Pour un matériau mou  $\nu \approx 1/2$ , ce qui est équivalent à écrire  $E \approx 3G$ , et donc  $B_f \approx G/3$ . Les solutions homogènes dans le domaine fréquentiel sont également les harmoniques cylindriques (cf. annexe A). La différence avec la membrane vient de solutions pour le nombre d'onde imaginaire pur.

### Oscillations forcées d'une membrane sous tension

La dynamique de la réponse d'une membrane soumise à des oscillations forcées permet de connaître sa fonction de transfert, son impédance équivalente et aussi l'impact de l'impédance du milieu environnant sur son comportement.

Il y a deux cas limites dans la prise en compte du milieu environnant [6]. Le premier est celui où la célérité dans le milieu est très faible devant celle de la membrane. Dans ce cas, le milieu réagit très lentement et est essentiellement entraîné par la membrane, de sorte qu'il peut être pris en compte en modifiant la masse de la membrane et en ajoutant un terme résistif. L'autre cas limite est celui où au contraire, la célérité dans le milieu environnant est bien supérieure à celle dans la membrane. Dans ce cas, le milieu agit comme une charge uniforme sur la membrane et n'est sensible qu'à ses excursions moyennées sur la section  $\langle \zeta \rangle$ . Pour une tension de surface de  $\gamma = 30 \text{ mN/m}$  et une épaisseur de  $e = 1 \text{ }\mu\text{m}$ , la célérité des ondes dans la membrane est d'environ  $c \approx 8 \text{ m.s}^{-1}$ , ce qui est près de deux ordres de grandeurs inférieur à la célérité des ondes dans l'air à température ambiante  $c_g = 330 \text{ m.s}^{-1}$ . C'est ce dernier cas qui nous intéresse.

$$\langle \zeta \rangle = \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \zeta(r) r d\theta dr \quad (1.84)$$



Pour obtenir la réponse de la membrane, nous allons reprendre l'équation 4.53 sans le terme de flexion mais avec un terme de forçage harmonique  $\delta p = \delta \hat{p} e^{i \omega t}$  et un terme de couplage au milieu environnant d'impédance acoustique  $z_e$ .

$$\rho e \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 2 \gamma \nabla^2 \zeta + \delta p - z_e \langle \dot{\zeta} \rangle \quad (1.85)$$

La résolution mathématique est très similaire à celle effectuée pour obtenir l'écoulement dans les pores cylindriques (cf. section 1.3.3). Réécrite dans le domaine fréquentiel, l'équation 1.85 donne :

$$\rho e \omega^2 \hat{\zeta} = 2 \gamma \Delta \hat{\zeta} + \delta \hat{p} - z_e i \omega \langle \hat{\zeta} \rangle \quad (1.86)$$

Les contributions dues au forçage et à l'environnement extérieur sont des termes sources d'une équation aux valeurs propres associée à l'opérateur Laplacien. Ainsi les solutions homogènes sont les harmoniques cylindriques (cf. annexe A). La seule qui soit excitée pour des termes sources uniformes sur la section est la fonction de Bessel de premier espèce d'ordre  $n = 0$ . La solution particulière associée au forçage est une constante (dans le domaine fréquentiel i.e. une fonction harmonique du temps). En choisissant par ailleurs des conditions aux limites fixes ( $\zeta(R_f) = 0$ ), on obtient :

$$\hat{\zeta} = A \left( 1 - \frac{J_0(rq)}{J_0(R_f q)} \right) \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{\frac{\rho e}{2 \gamma}} \omega \quad (1.87)$$

où  $r$  est la coordonnée radiale,  $R_f$  est le rayon du film et  $A$  une constante de proportionnalité qui s'obtient en injectant cette solution dans l'équation 1.86. Pour ce faire, il faut d'abord calculer la moyenne du déplacement sur la section qui correspond à la forme 1.87 :

$$\langle \hat{\zeta} \rangle = A \left( 1 - \frac{2}{R_f q} \frac{J_1(R_f q)}{J_0(R_f q)} \right) \quad (1.88)$$

En injectant la solution dans l'équation 1.86, tous les termes de solution homogène disparaissent et seuls les termes constants restent. Après simplification<sup>10</sup>, on peut obtenir la relation suivante entre la pression de forçage et la vitesse  $v = \dot{\zeta}$  :

$$\delta \hat{p} = \left[ z_e - i \rho e \omega \frac{J_0(R_f q)}{J_2(R_f q)} \right] \langle v \rangle \quad (1.89)$$

Pour une impédance de l'environnement extérieur  $z_e$  nulle, un développement limité des fonctions de Bessel dans la limite statique permet d'obtenir une expression de la force

10.  $\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)$

de rappel dans la limite statique :

$$F = \pi R_f^2 \delta p_0 = -8\pi\gamma \langle \zeta_0 \rangle \quad (1.90)$$

Si l'impédance de l'environnement extérieur  $z_e$  est nulle, cette expression donne l'impédance acoustique de la membrane. Ainsi, l'impédance de l'ensemble constitué du système membrane et de l'environnement extérieur est en première approximation la somme des impédances des deux systèmes. On remarque que l'impédance de la membrane seule est imaginaire pure. En d'autres termes, cette membrane est l'analogue d'un ressort ou bien d'une masse et non d'un amortisseur. Le facteur  $i\rho e\omega$  correspond à une impédance de type masse. Le rapport des Bessel lui ajoute des modulations résonantes mais le comportement asymptotique est celui d'une masse. En terme d'analogie électroacoustique, cette impédance correspond à une inductance. Nous verrons plus loin que ce type de résonateur dans la microstructure peut ainsi donner lieu à des comportements métamatériaux de type masse effective négative.

De l'inverse de l'impédance, on déduit une fonction de transfert adimensionnée de la membrane  $H(\omega) = 2\gamma\langle\zeta_f\rangle/R_f^2\delta\hat{p}$ . Son amplitude est représentée figure 1.12 pour trois impédances  $z_e$  distinctes. On remarque que la membrane présente des résonances harmoniques au-delà du fondamental. La charge visqueuse atténue la résonance mais ne la déplace pas dans le spectre. La charge de type masse fait descendre en fréquence le fondamental mais très peu les harmoniques. Les fréquences d'annulation de la fonction de transfert (et de l'excursion  $\langle\zeta\rangle = 0$ ), lorsque la phase repart de  $0^\circ$ , correspondent à des antirésonances. Il s'agit de fréquences auxquelles les oscillations de la membrane ne se couplent ni à leur support ni à l'air, ainsi leur fréquence ne dépend pas de la charge de l'environnement  $z_e$ . Elles séparent systématiquement deux résonances successives et leur fréquence est proche de la seconde. Ces antirésonances correspondent à des pics de la densité d'état, bien plus forts que les résonances [36].

## 1.4 Propagation de la lumière dans les mousses

Une mousse est un milieu turbide. En se propageant dans une mousse, les photons suivent des trajectoires de type marche aléatoire. À moins que la phase continue ne soit colorée (i.e. absorbante pour la lumière), toute la lumière qui pénètre dans la mousse finit par en ressortir. Elle est transmise ou rétrodiffusée pour une faible épaisseur de mousse. Elle sera totalement rétrodiffusée pour une épaisseur suffisamment grande. Cependant lors de sa propagation, elle perd les informations spatiales de son point d'origine et de son incidence initiale. La diffusion multiple des rayons lumineux au sein de la mousse lui donne sa couleur blanche à la lumière du jour. Si elle est moins dense et que l'information

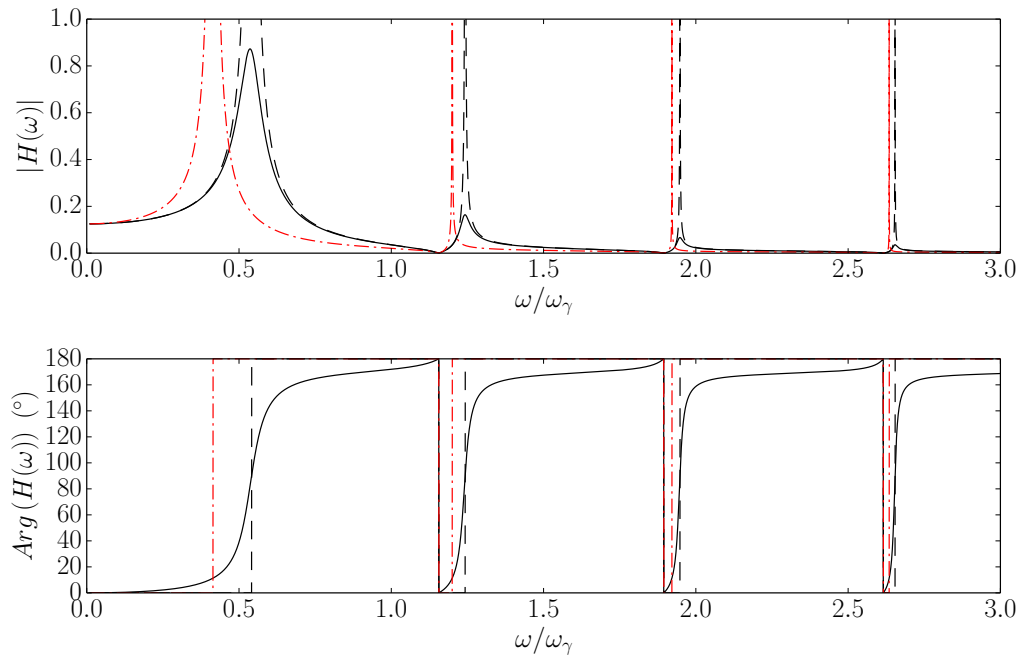


FIGURE 1.12 – Fonction de transfert de la membrane en déplacement en fonction de la fréquence réduite  $\omega/\omega_\gamma$  avec  $\omega_\gamma = 1/R_f \sqrt{2\gamma/\rho e}$  pour différentes impédances du milieu  $z_e$  calculée avec l'équation 1.89. (---) Impédance nulle  $z_e = 0$ ; (-.-.-) Pure réactance  $z_e = i\rho e\omega$ ; (—) Pure résistance  $z_e = \rho e\omega/5$

spatiale subsiste, elle sera partiellement transparente. Éclairée par une lumière cohérente, elle fait apparaître des motifs d'interférences aléatoires appelés speckles.

### 1.4.1 Spectroscopie de la lumière diffuse

La diffusion de la lumière est à première vue un handicap pour sonder les propriétés de la mousse. Elle empêche une observation directe de la mousse dans le volume. Pour autant la diffusion de la lumière cohérente se révèle être une sonde particulièrement sensible de la dynamique de la mousse. En effet, les interférences lumineuses permettent de sonder la dynamique des mousses à l'échelle d'une fraction de longueur d'onde. Des déplacements de cet ordre de grandeur des diffuseurs situés sur les trajectoires de la lumière modifient l'intensité des tâches dans les figures d'interférence formées par la lumière rétrodiffusée ou transmise, appelées speckles. Le défi consiste à déduire des fluctuations temporelles des speckles une information sur la dynamique des diffuseurs. Ceci est la base de la spectroscopie de la lumière diffuse ("Diffusing Wave Spectroscopy") (DWS). Après avoir spécifié la nature du régime diffusif, nous présenterons les outils statistiques utilisés pour l'analyse d'une expérience DWS ainsi que quelques exemples d'application dans le cas des mousses.

## Libre parcours moyen

Le cas de la diffusion multiple le plus simple est celui d'une dispersion concentrée de diffuseurs ponctuels isotropes dispersés dans une matrice transparente. Le libre parcours moyen de diffusion de la lumière  $\ell$  est la distance moyenne parcourue par la lumière entre deux diffusions successives. La propagation de la lumière peut alors être décrite par les lois de Fick, comme un phénomène de propagation diffusive de photons. Si leur déviation par les diffuseurs individuels est anisotrope, on introduit le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$ . Il est défini par la relation :

$$\ell^* = \frac{\ell}{\langle 1 - \cos(\theta) \rangle} \quad (1.91)$$

où  $\theta$  est l'angle de diffusion et où les crochets  $\langle \rangle$  représentent une moyenne sur l'ensemble des interactions possibles entre les photons et les diffuseurs. La propagation de la lumière se décrit toujours par les lois de Fick si on remplace  $\ell$  par  $\ell^*$ .

Dans une mousse, les bulles ont typiquement des tailles ( $10\mu m < d < 1cm$ ) d'ordre de grandeur bien supérieur à la longueur d'onde de la lumière cohérente  $\lambda \sim 600 nm$ . Les interfaces sont planes à l'échelle de la longueur d'onde de sorte que la trajectoire des photons peut être décrite par les lois de l'optique géométrique, sauf dans les mousses extrêmement sèches où les bordures de Plateau peuvent être d'une dimension micrométrique. La lumière est alors réfractée et réfléchi à chaque passage d'interface entre phase continue et phase dispersée d'indices différents. Du fait de la présence de nombreuses interfaces et de leur courbure, les événements de réflexion et réfraction accumulés finissent par produire des trajectoires aléatoires qu'on caractérise par le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$ . De la sorte, la propagation de la lumière à travers une mousse est également décrite par le formalisme de la diffusion.

Dans une mousse, le libre parcours moyen de transport varie, à fraction volumique de gaz  $\phi_g$  donnée, proportionnellement à un diamètre  $d$  des bulles [37]. Le coefficient de proportionnalité entre les deux est représenté sur la figure 1.13 en fonction de la fraction de liquide.

FIGURE 1.13 – Rapport du libre parcours moyen de transport  $\ell^*$  sur le diamètre des bulles  $d$  en fonction de la fraction volumique de liquide  $\epsilon = 1 - \phi_g$  (d'après [37]). La loi  $\ell^* \sim d\sqrt{1/\epsilon}$  est prédite lorsque la diffusion est dominée par les bords de Plateau (i.e. B.P. signifie bords de Plateau). Les mousses AOS sont des mousses de  $\alpha$ -olefinesulfate.

Dans la suite de cette thèse, on considèrera que la lumière est diffusée multiplement avant d'être transmise ou rétrodiffusée.

## Fonctions de corrélation

Au niveau du système de détection, le champ électrique total diffusé  $E(t)$  est égal à la somme des contributions de toutes les trajectoires possibles qui ressortent de l'échantillon [7] :

$$E(t) = \sum_p E_p e^{i\phi^p(t)} \quad (1.92)$$

où  $E_p$  et  $\phi_p(t)$  sont respectivement l'amplitude et la phase du champ électrique associé au rayon lumineux numéro  $p$ . Les fluctuations temporelles du champ électrique sont caractérisées par la fonction d'autocorrélation  $g_1(t, \tau)$  :

$$g_1(t, \tau) = \frac{\langle E(t + \tau)E^*(t) \rangle}{\langle |E(t)|^2 \rangle} \quad (1.93)$$

où  $E^*$  est le complexe conjugué du champ électrique  $E$ . Les crochets symbolisent une moyenne sur les réalisations des chemins de la lumière à travers l'échantillon, qui sous réserve d'une dynamique ergodique des diffuseurs peut être implémentée comme une moyenne temporelle. Expérimentalement, la grandeur mesurée par les dispositifs de photodétection est l'intensité lumineuse  $I(t)$ , dont la fonction d'autocorrélation est définie par :

$$g_2(t, \tau) = \frac{\langle I(t + \tau)I(t) \rangle}{\langle I \rangle^2} \quad (1.94)$$

Pour une statistique gaussienne du champ électrique, les deux fonctions de corrélation sont reliées par la relation de Siegert [38] :

$$g_2(t, \tau) = 1 + \beta |g_1(t, \tau)|^2 \quad (1.95)$$

où  $\beta$  est un paramètre qui dépend du dispositif optique de détection et de la polarisation de la lumière. Il vaut 1 pour une détection polarisée qui mesure l'intensité d'un unique speckle par capteur.

Soit  $\Delta\phi^p(t, \tau) = \phi^p(t + \tau) - \phi^p(t)$  le déphasage induit sur une trajectoire  $p$  de la lumière induit par la dynamique des diffuseurs entre les instants  $t$  et  $t + \tau$ . Il peut être décomposé en une somme de déphasages entre deux évènements de diffusion successifs  $\Delta\phi_j^p(t, \tau)$ . La fonction d'autocorrélation du champ électrique (1.93) peut alors s'écrire :

$$g_1(t, \tau) = \sum_p \frac{\langle I_p \rangle}{\langle I \rangle} \langle e^{-i \Delta\phi^p(t, \tau)} \rangle = \sum_p \frac{\langle I_p \rangle}{\langle I \rangle} \langle e^{-i \sum_j \Delta\phi_j^p(t, \tau)} \rangle \quad (1.96)$$

où  $\langle I_p \rangle$  est l'intensité moyenne de la lumière qui a voyagé selon le trajet  $p$ . Les contributions individuelles à la phase  $\Delta\phi_j^p(t, \tau)$  peuvent être décrites comme des variables aléatoires gaussiennes dans la limite d'un grand nombre d'événements de diffusion. En regroupant les trajets de la lumière par longueurs curvilignes  $s$ , il est possible d'écrire la fonction de corrélation à l'aide de la fonction de distribution de longueurs de trajets  $P(s)$  :

$$g_1(t, \tau) = \int_{s=0}^{\infty} P(s) e^{-\langle \Delta\phi(t, \tau)^2 \rangle s / (2\ell^*)} ds \quad (1.97)$$

La distribution des longueurs de chemin dépend des conditions aux limites optiques et de la géométrie de diffusion. Pour une plaque d'épaisseur infinie, éclairée uniformément à sa surface, la fonction de corrélation de champ de la lumière rétrodiffusée s'écrit [7] :

$$g_1(t, \tau) = e^{-\gamma_o \sqrt{3\langle \Delta\phi(t, \tau)^2 \rangle / 2}} \quad (1.98)$$

où  $\gamma_o$  est une constante de valeur typique comprise entre 1 et 3 et qui dépend de la polarisation de la lumière, de l'anisotropie des diffuseurs et des conditions aux limites optiques.

L'utilisation du formalisme de la DWS repose sur le lien entre le déphasage quadratique moyen  $\langle \Delta\phi(t, \tau)^2 \rangle$  et la dynamique interne des échantillons que l'on souhaite sonder. Si la dynamique est de type diffusive de constante de diffusion  $D$ , alors le déphasage est proportionnel au déplacement quadratique moyen  $\langle \Delta r^2 \rangle \propto D\tau$ . Il est ainsi possible de sonder la dynamique brownienne des émulsions diluées.

### Applications aux mousses

Dans le cas des mousses, il est possible de sonder la dynamique de mûrissement. Bien que la dynamique associée ne soit pas statistiquement homogène, l'ordre de grandeur des déplacements de diffuseurs est tellement grand comparé à longueur d'onde de la lumière, que la différence de phase des photons (modulo  $2\pi$ ) est rendue aléatoire pour les réarrangements de bulle. En d'autres termes, l'évolution des chemins optiques qui traversent la mousse due au mûrissement permet d'implémenter la moyenne sur les chemins nécessaire à la DWS comme une moyenne temporelle. La décorrélation du signal  $g_1$  ou  $g_2$  a pour temps caractéristique le temps moyen entre deux réarrangements induits par le mûrissement [39].

Il est également possible de sonder des dynamiques non ergodiques des diffuseurs si elle se superpose à une dynamique ergodique et que les échelles de temps d'évolution des dynamiques respectives sont bien séparées. Ainsi la décorrélation induite par un cisaillement sinusoïdal de très faible amplitude dans une mousse liquide (i.e. réponse

linéaire) a été étudiée expérimentalement. Celle-ci se comporte comme si la mousse était une dispersion de diffuseurs ponctuels, répartis de manière isotrope dans une matrice élastique soumis à un cisaillement [40].

Pour une présentation plus exhaustive des applications de la DWS aux mousses voir l'article de revue qui correspond à la référence [41].

### 1.4.2 Spectroscopie de visibilité speckle

La spectroscopie de visibilité speckle est une variante multispeckle de la spectroscopie de la lumière diffusée. Au lieu d'avoir recours à un photomultiplicateur unique, on se sert d'un réseau de photomultiplicateurs ou d'une caméra (cf. figure 1.14).

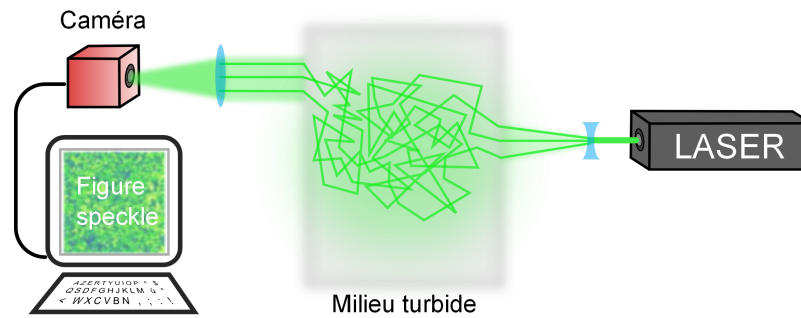


FIGURE 1.14 – Schéma de principe de la spectroscopie de la lumière diffusée multispeckle.

### Variantes multispeckle de la DWS

Les variantes multispeckle de la spectroscopie de diffusion de la lumière présentent la particularité de construire les grandeurs statistiques à l'aide non pas d'une moyenne temporelle sur les fluctuations d'un unique speckle au cours du temps mais en moyennant sur différents speckles (e.g. acquis à un même instant en parallèle les uns des autres) [41]. Cette approche est nécessaire si l'échantillon ne présente pas une dynamique ergodique. Elle présente de nombreux avantages dont celui de pouvoir effectuer des mesures résolues en temps et elle permet donc entre autres d'étudier des phénomènes transitoires. La spectroscopie de corrélation résolue en temps (TRC) est l'une de ces variantes résolue en temps. La figure 1.15 montre un exemple d'utilisation de la TRC afin de suivre la durée des réarrangements dans une mousse. Dans cet exemple, une fonction d'autocorrélation normalisée  $F(t, \tau)$  est utilisée, définie par :

$$F(t, \tau) = \frac{\langle I(t + \tau)I(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2}{\langle I^2(t) \rangle - \langle I(t) \rangle^2} \quad (1.99)$$

La façon d'évaluer précisément la fonction  $F(t, \tau)$  a été optimisée afin de minimiser l'influence du bruit sur la mesure (cf. références [42, 43]).

FIGURE 1.15 – (a) Diagramme spatio-temporel de la figure speckle, obtenue par la juxtaposition de 1024 pixels (axe vertical) mesurés aux instants  $t$ . (b) Fonction d'autocorrélation normalisée  $F(t, \tau)$  de l'intensité (cf. équation 1.99) en fonction du temps et pour différents temps de retard  $\tau$  et (en insert) quantité  $(1 - F)/\tau$  en fonction du temps et pour différents temps de retard  $\tau$ . La flèche indique la largeur à mi-hauteur du pique (d'après [42]).

Une autre possibilité ingénieuse qui a été proposée dans le cadre de l'imagerie speckle laser consiste en l'utilisation d'un disque diffuseur placé au niveau du faisceau incident avant d'illuminer le milieu [44]. Ce diffuseur change légèrement les conditions initiales de phase et d'incidence des photons incidents, de sorte que la figure speckle obtenue en transmission ou en rétrodiffusion est considérablement altérée. Pour une rotation pas à pas ou une rotation suffisamment lente, les figures speckles obtenues seront statistiquement indépendantes et vont enrichir le réservoir statistique, ce qui permet respectivement l'obtention d'un meilleur ratio signal sur bruit.

## Spectroscopie de visibilité speckle

Il est également possible d'extraire des informations sur la dynamique des diffuseurs d'une expérience multispeckle en mesurant la visibilité de la figure speckle  $V(T_e, t)$  en fonction du temps d'exposition  $T_e$ . Elle est définie comme la variance relative de l'intensité lumineuse et mesure le contraste d'intensité des speckles. Lorsque  $T_e$  augmente, la visibilité diminue du fait d'un lavement temporel des fluctuations (*speckle wash*). La visibilité est définie comme la variance normalisée de l'intensité speckle  $I_T$  [38] :

$$V(T_e, t) \equiv \frac{1}{\beta} \left( \frac{\langle I_T^2 \rangle}{\langle I_T \rangle^2} - 1 \right) \quad (1.100)$$

où les crochets  $\langle \rangle$  symbolisent la moyenne sur les speckles acquis à un instant  $t$ . Cette variante multi-speckle de spectroscopie de lumière diffuse s'appelle spectroscopie de visibilité speckle ("Speckle Visibility Spectroscopy") (SVS). La relation fondamentale de la spectroscopie de visibilité speckle relie la visibilité  $V(T_e, t)$  et la fonction de corrélation de champ  $g_1(t, \tau)$  [38] :

$$V(T_e, t) = \int_0^{T_e} 2(1 - \tau/T_e) |g_1(t, \tau)|^2 d\tau/T_e \quad (1.101)$$

La SVS constitue une méthode alternative comparable à la TRC. Les phénomènes transitoires peuvent être suivis à l'aide de l'une ou l'autre des méthodes. La figure 1.16 montre une acquisition très comparable à celle de la figure 1.15 mais dont le signal a



été interprété en terme de visibilité plutôt qu'en terme de fonction d'autocorrélation normée.

FIGURE 1.16 – Niveaux de gris, rapport de la visibilité de temps d'expositions  $m T$  sur la visibilité de temps d'expositions  $T$  pour  $T = 10 ms$  et largeur lorentzienne en fonction de l'âge d'une mousse au cours de son mûrissement. La largeur lorentzienne  $\Gamma$  est définie pour un spectre lorentzien de la fonction d'autocorrélation soit  $g_1(\tau) = exp(-\Gamma\tau)$ .  $\Gamma$  est déduite en inversant l'expression du rapport des visibilités (cf. référence [38]). Le décalage temporel sur l'axe du temps est  $t_0 = 6 h$ . La perte transitoire de visibilité correspond à un réarrangement des bulles qui est induit par le mûrissement (d'après [38]).

## Chapitre 2

# Élaboration & structure des mousses gélifiées

Ce chapitre décrit l'élaboration et la caractérisation des échantillons de mousses gélifiées dont nous étudions les propriétés acoustiques. Une première section présente les gels de gélatine. La méthode de production des mousses monodisperses est décrite dans la deuxième section. La structure et le vieillissement des mousses gélifiées sont présentés dans une troisième section.

### 2.1 Gels de gélatine

La gélatine désigne à la fois l'hydrogel et ses constituants, qui mélangés dans l'eau, gélifient à température ambiante. Ces derniers sont un mélange de protéines d'origine animale issues du collagène.

#### 2.1.1 Cahier des charges

##### Critères

Le choix de la gélatine correspond à un cahier des charges qui regroupe un ensemble de critères. Il doit être possible de produire des échantillons de mousse monodisperse à partir de la solution précurseur. Une fois gélifiée, cette mousse ne doit pas présenter une forte dissipation mécanique. La phase continue doit être transparente, car cela permet de suivre la progression d'une onde acoustique à l'aide de la méthode basée sur la diffusion multiple de la lumière présentée dans la section [3.1](#).

Une mousse gélifiée est à la fois mousse et gel. Par conséquent, les *précurseurs* sont soit des agents moussants, soit des agents gélifiants en solution. Les deux sont présents en solution. Il faut donc s'assurer de la compatibilité des *précurseurs* nécessaires. Comme la génération des mousses monodisperses repose sur des mécanismes d'instabilité dans des écoulements (e.g. *flow focusing*), la génération de la mousse devra précéder la gélification. Les précurseurs du gel doivent naturellement être solubles dans l'eau et compatibles avec la présence de surfactants en solution. Ce critère vaut aussi réciproquement pour le surfactant, qui devra être compatible et de préférence interagir peu avec la molécule gélifiante. Une fois la mousse formée, il faut pouvoir déclencher la gélification sans avoir à ajouter d'ingrédient tiers, car il n'est alors plus possible de mélanger la phase aqueuse continue. Le mécanisme pour l'initiation et le contrôle de la cinétique de la gélification doit pouvoir être retardé par rapport à l'instant du mélange des constituants et de préférence simple et adaptable aux conditions de production. Il faut pouvoir arrêter la gélification où à défaut éviter le phénomène synérèse (i.e. d'expulsion d'eau hors de la matrice du gel). Et enfin d'un point de vue pratique, il est intéressant de pouvoir dégeler le gel pour l'entretien des dispositifs milli/microfluidiques.

D'un point de vue de spectroscopie acoustique par suivi de la visibilité speckle (cf. section 3.1), le gel doit en premier lieu être non-absorbant ou peu absorbant pour la lumière, de manière à avoir la plus grande intensité possible en rétrodiffusion pour permettre une acquisition d'images de speckles aux temps d'ouverture de la caméra très courts que nécessitent les mesures de spectroscopie à des fréquences supérieures au kilohertz. Il faut que l'échantillon évolue peu sur les durées d'acquisition typiques qui peuvent atteindre la dizaine d'heures (pour un balayage du spectre fréquentiel complet de 10  $Hz$  à 10  $kHz$  et un nombre de réalisations statistiques indépendantes de l'ordre de la centaine). Pour stabiliser la mousse gélifiée, il faut entre autres caractéristiques des modules élastiques suffisamment importants afin de résister au mécanisme de mûrissement (cf. section 2.3.2). Afin de mettre en évidence des vibrations résonantes de la microstructure, on souhaite que la dissipation mécanique du gel soit aussi faible que possible. D'un point de vue technique pratique, il faut que l'absorption acoustique soit suffisamment grande afin de pouvoir travailler en stroboscopie sans avoir à attendre des durées trop longues, liées aux temps de dissipation dans la cavité acoustique que constituent les échantillons (cf. section 3.3.1).

## **Alginate**

L'alginate est un polymère extrait d'algues brunes, capable de former des gels par liaisons ioniques en présence de cations bivalents (e.g.  $Ca^{2+}$ ). La force des liaisons ioniques est intermédiaire entre les liaisons covalentes et les liaisons hydrogène. Comme la

gélification est instantanée en présence de ces ions, on a recours à un agent chélateur de l'ion. Il s'agit d'une molécule susceptible de former un complexe avec l'ion et ainsi de le neutraliser. Son changement de conformation suite à un abaissement progressif du pH permet de relarguer les ions et contrôler la cinétique de gélification afin de produire des gels plus homogènes.

Ainsi, la gélification de l'alginate fait intervenir un nombre important de constituants et un vaste espace de paramètres à optimiser. Elle ne satisfait pas les critères de contrôle et simplicité du mécanisme de gélification. Mais par rapport à la gélatine, elle présente l'avantage de pouvoir produire des échantillons à température ambiante.

Après quelques essais avec des échantillons de mousse d'alginate à une concentration  $C = 2 \text{ \% } g/g$ , dont nous n'avons pas su assurer la stabilité dans le temps, nous nous sommes tournés vers la gélatine de type A. Les raisons de sa mauvaise stabilité résident principalement dans le mauvais choix des paramètres lors de ces premiers essais. Pour autant, l'alginate n'aurait pas pu assurer la stabilité à long terme des échantillons parce qu'elle est encline à la synérèse.

## **Gélatine**

La gélatine peut donner accès à des modules élastiques plus élevés et des rapports  $G''/G'$  plus faibles que l'alginate du fait de la possibilité de la réticuler chimiquement par des liaisons covalentes. Mais ce mode de gélification montre une forte propension à exhiber des effets de synérèse néfastes pour la stabilité de la mousse. Il peut être évité en arrêtant le processus de gélification suffisamment tôt. Cependant, l'arrêt de la gélification de type enzymatique utilisée requiert la chauffe des échantillons à des températures de l'ordre de  $70^\circ C$  [45], ce que des échantillons de mousse à grande teneur en gaz ne supportent pas.

La gélatine peut également être réticulée physiquement par liaisons H, juste par un abaissement de la température. Ce mode de gélification physique est très intéressant du fait de l'absence de recours à un agent gélifiant. L'élaboration des échantillons s'en trouve grandement simplifiée. Pour des teneurs en gélatine suffisamment élevées  $C \geq 5 \text{ \% } g/g$ , elle atteint à  $20^\circ C$  des modules élastiques à  $1 \text{ Hz}$  de l'ordre de  $1 \text{ kPa}$  en moins d'un jour [45]. La gélatine donne un gel transparent, très légèrement coloré. Sa réticulation physique ne donne pas lieu à des effets de synérèse. Il y a presque deux ordres de grandeur de différence entre le module élastique  $G'$  et le module visqueux  $G''$  de la gélatine, ce qui constitue un bon compromis entre les différentes exigences sur le rapport  $G'/G''$  afin de caractériser son comportement acoustique.

La possibilité de gélifier la gélatine chimiquement ou physiquement voire les deux en font un bon système de référence. Les propriétés du matériaux pourront ainsi être optimisées à un stade ultérieur, qu'il s'agisse de son comportement acoustique en absorption, réflexion ou transmission. L'exhaustive caractérisation rhéologique de la gélatine publiée dans la littérature constitue un autre de ses avantages, qui s'explique par son utilisation pour les films photographiques. À un niveau plus local, j'ai bénéficié de l'expertise présente dans l'équipe au sein de laquelle j'ai travaillé (T. Baumberger, O. Ronsin, C. Caroli) sur le thème de la gélification par création de liens chimiques ou physiques. La gélification chimique par voie enzymatique ainsi que les gels mixtes constitue le sujet d'une thèse récente effectuée dans le groupe (H. Souguir).

## 2.1.2 Physico-chimie des gels de gélatine

### Généralités sur la gélatine

La gélatine est une protéine. Le composant élémentaire d'une protéine est l'acide aminé (cf. figure 2.1). Au cœur d'un acide aminé se trouve l'atome de carbone qui est lié d'une part à un groupe amine  $NH_2$  et d'autre part un groupe carboxyle  $COOH$  qui fait de l'acide aminé un acide carboxylique. Les acides aminés se distinguent les uns des autres par leur groupement latéral  $-R$ .

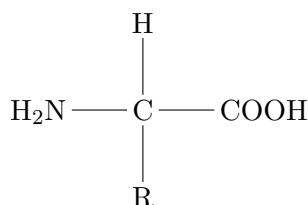


FIGURE 2.1 – Formule développée d'un acide aminé.

Une protéine est un polymère issu de réactions de condensation de paires d'acides aminés au cours de laquelle le groupe carboxyle de l'une réagit avec le groupe amine de l'autre pour former une liaison peptidique et éliminer une molécule d'eau.

### Extraction et composition de la gélatine

La gélatine est obtenue par dénaturation d'une protéine appelée collagène, que l'on trouve sous forme de fibres dans la matrice extracellulaire des tissus conjonctifs des animaux. La dénaturation d'une protéine correspond à un procédé par lequel une protéine perd sa conformation spatiale. Dans le cas du collagène, la conformation est hautement hiérarchisée selon trois niveaux successifs : la triple-hélice, la fibrille puis la fibre.

La dénaturation du collagène est obtenue par modification du pH. Dans la pratique, la gélatine peut être extraite soit du porc par un procédé de dénaturation acide (gélatine de type A), soit du bœuf par un procédé de dénaturation basique (gélatine de type B). De façon marginale, elle peut également être extraite du poisson. Dans toute la suite, la gélatine considérée sera implicitement de type A, à moins que ce ne soit précisé.

La gélatine est constituée de différents acides aminés. Sa composition dépend de la source et du procédé d'extraction. Statistiquement, les acides aminés les plus courants sont la glycine (34 %), la proline (12 %), l'hydroxyproline (10 %), l'alanine (10 %), la glutamine (8.4 %), l'arginine (4.5 %) et la lysine (2.6 %) [46]. La proline et l'hydroxyproline sont les groupements qui interviennent dans le processus de nucléation du gel physique de gélatine, tandis que la glutamine et la lysine sont les groupements liés de manière covalente lors du processus de réticulation du gel chimique formé par voie enzymatique. Comme on peut le constater (cf. figure 2.2f & 2.2c), l'hydroxyproline est donneuse de liaisons hydrogène avec son groupe  $-OH$  sur le radical tandis que la proline est receveuse de liaisons hydrogène au niveau de l'atome d'oxygène doublement lié du groupe  $-COOH$ .

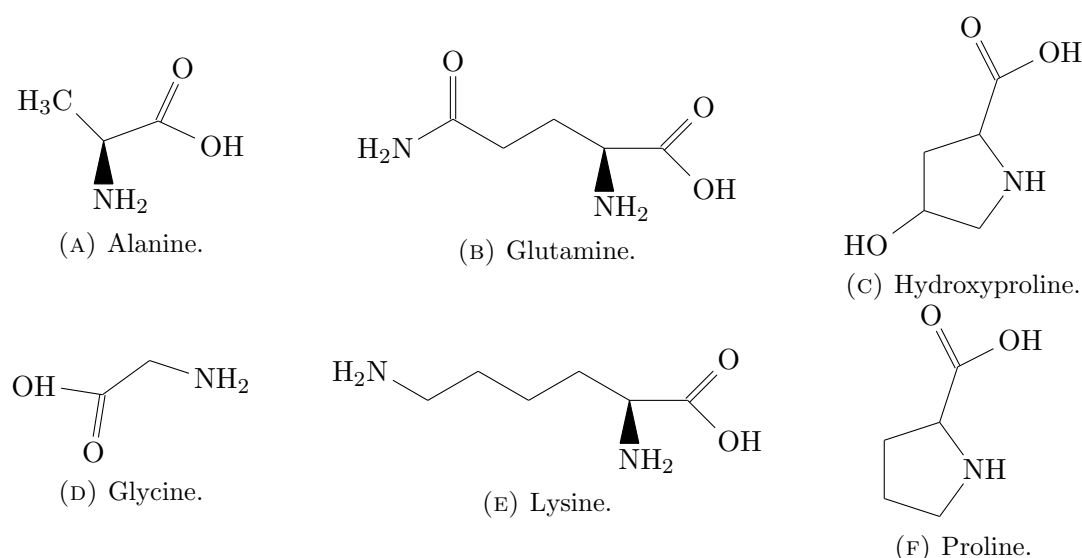


FIGURE 2.2 – Formules semi-développées des acides aminés les plus fréquents de la protéine de gélatine.

### Gélification de la gélatine

À une température inférieure à  $40^{\circ}C$ , la gélatine gonfle dans l'eau mais ne s'y dissout pas. À une température supérieure à  $40^{\circ}C$ , la gélatine est soluble dans l'eau. Le paramètre de Flory  $\chi$  caractérise la qualité du solvant en solution diluée [47]. Pour un bon solvant,  $\chi < 0.5$  et pour un mauvais  $\chi > 0.5$ . À  $50^{\circ}C$ , la gélatine dans l'eau a un paramètre de Flory  $0.48 < \chi < 0.49$ . L'eau est donc un bon solvant.

Une solution semi-diluée de gélatine, i.e. où les chaînes de polymère s'interpénètrent ( $C > C^* \approx 0.5 \text{ \% } g/g$  [48]), gélifie spontanément lorsque l'on abaisse la température sous la température de gélification  $T_g \approx 29^\circ C$  (gélatine de type A). Cette gélification correspond à un mécanisme de renaturation (i.e. de retour à la conformation tridimensionnelle naturelle) de la triple hélice. Il s'agit d'un auto-assemblage des chaînes qui suit un mécanisme de type nucléation-croissance. Les séquences riches en proline et hydroxyproline sont à l'origine de la nucléation. Ensuite, les chaînes se replient en triple hélices. La conformation est stabilisée par des liaisons hydrogènes principalement localisées au niveau des acides aminés proline et hydroxyproline mais aussi avec les groupes  $-C-H$  proches ou encore par l'intermédiaire de molécules d'eau.

Une solution semi-diluée de gélatine peut être gélifiée à l'aide d'un agent chimique de réticulation. Le plus utilisé est le glutaraldéhyde. Il est consommé lors de la réaction de gélification et forme alors un pont covalent entre les chaînes de polymère. De manière alternative, lors de nos essais de gélification chimique, nous avons eu recours à l'activité enzymatique catalytique de la transglutaminase. Elle est biocompatible et non consommée lors de la réaction et donc n'ajoute pas d'éléments étrangers au réseau réticulé du gel. Suite à son action, une liaison covalente est formée entre des acides aminés de type lysine et glutamine. À la fin de la catalyse, il se partagent un seul et même groupe fonctionnel amine et en ont éliminé un [49].

### **Point isoélectrique et tensioactif non-ionique**

Le point isoélectrique (pI) correspond à la valeur de pH pour laquelle la charge totale de la molécule est nulle i.e. il y a autant de groupes ioniques chargés positivement et négativement. Du fait de la différence de traitement entre la gélatine de type A et la gélatine de type B, les points isoélectriques sont distincts ( $pI_B \sim 5$ ;  $pI_A \sim 9$ ). Ainsi en solution aqueuse à pH neutre, la gélatine de type A sera chargée positivement.

Le tensioactif utilisé afin de stabiliser les mousses de gélatine en phase liquide est le Triton X100. Nous avons choisi un tensioactif non-ionique afin qu'il interagisse le moins possible avec les molécules de gélatine. Les molécules polypeptidiques interagissent avec certains tensioactifs non-ioniques par le biais de liaisons hydrogène mais ce n'est pas le cas avec le Triton X100 [50]. Il a déjà été utilisé afin de stabiliser des mousses gélifiées d'alginate magnéto-stimulables [51], également en raison de son caractère non-ionique. Sa concentration micellaire critique est de  $0.22-0.24 \text{ mM}$  [52]. Sachant que la masse molaire moléculaire est d'environ  $625 \text{ g.mol}^{-1}$ , la concentration massique micellaire critique (CMC) est donc de  $0.14 - 0.15 \text{ g.L}^{-1}$ . La concentration de Triton X100 utilisée est de  $6 \text{ g.L}^{-1}$ , soit une concentration de l'ordre de 40 CMC. À partir de la CMC, la tension

FIGURE 2.3 – Formule semi-développée du tensioactif Triton X-100 ( $n \cong 9 - 10$ ).

de surface statique en solution aqueuse stagne à une valeur légèrement supérieure à  $30 \text{ mN/m}$  [10].

Pitt et al. ont effectué une étude comparée de la tension de surface de solutions aqueuses à  $25^\circ\text{C}$  et de solutions de gélatine de type B  $7\% \text{ g/g}$  pour différents tensioactifs en fonction de la concentration [53]. Tandis que dans le cas des tensioactifs anioniques, l'interaction avec la gélatine initie le comportement d'aggrégation des tensioactifs avant la CMC, dans le cas des tensioactifs non-ioniques, le comportement change peu et le même plateau en tension de surface qu'en l'absence de gélatine est atteint au delà de la CMC. Bien que cette publication concerne un type de gélatine différent et une concentration légèrement différente de celles retenues dans le cadre de la présente étude, les résultats sont probablement transposables, en particulier dans le cas non ionique où la différence de point isoélectrique qui distingue les deux types de gélatine ne jouera aucun rôle. Ainsi pour une concentration en tensioactif très supérieure à la CMC, on peut penser que la tension de surface de la solution moussante de gélatine est proche de celle d'une solution de même concentration en Triton sans gélatine.

### Préparation de la solution moussante de gélatine

Les solutions moussantes de gélatine de concentration  $C$  gélifiées physiquement sont composées d'un agent gélifiant de gélatine ( $C = 5\% \text{ g/g}$  ou  $C = 10\% \text{ g/g}$ ) en poudre de type A ( $M_w \in [50000 - 100000]$ , G2500, Sigma-Aldrich), d'un agent antibactérien  $\sim 400 \text{ ppm}$  de sodium azide (S2200, Sigma-Aldrich), d'un tensioactif  $6 \text{ g/L}$  ( $\sim 40\text{CMC}$ ) de Triton X100 (X100, Sigma-Aldrich), et d'eau ultrapure (milliQ).

Par exemple, pour préparer  $250 \text{ g}$  de solution de gélatine moussante à  $10\%$ , il faut :

- $197 \text{ g}$  d'eau ultrapure (milliQ)
- $25 \text{ g}$  de gélatine de type A
- $25 \text{ g}$  de solution mère de Triton X100 ( $60 \text{ g/L}$ )
- $3 \text{ g}$  de solution mère de sodium-azide ( $3\% \text{ g/g}$ )

Afin de préparer la solution, l'eau ultrapure est chauffée à  $60^\circ\text{C}$  dans un flacon de  $250 \text{ mL}$ . La gélatine est alors versée dans l'eau chaude et mise sous agitation magnétique. On ajoute alors  $25 \text{ mL}$  de solution mère de Triton X100 à l'aide d'une pipette graduée.



3 mL de solution de sodium-azide sont ajoutées. La solution est laissée sous agitation magnétique (soutenue) et chauffée à  $60 - 65^{\circ}\text{C}$  pendant 1h à 2h jusqu'à ce que la solution soit homogène. La solution de gélatine est ensuite conservée au réfrigérateur à une température de  $5^{\circ}\text{C}$  sur des durées inférieures à 15 jours.

Notons que la gélatine est ajoutée à l'eau chaude et non le contraire. Cette façon de faire évite que la gélatine n'adhère aux bords du flacon lorsqu'on lui ajoute de l'eau (même chaude). Si la gélatine adhère aux bords du flacon, un chauffage plus long et plus intense est nécessaire. Les durées nécessaires à la solubilisation sont alors moins reproductibles et parfois beaucoup plus longues et par conséquent les molécules de gélatine ont plus de chances d'être dégradées.

Pour la préparation de solutions moussantes de gélatine gélifiées chimiquement, les proportions sont les mêmes au niveau du mélange final à ceci près que l'on ajoute un ingrédient en plus : l'agent réticulant 1 – 2 U (% g/g) de transglutaminase (Activa WM, Ajinomoto Foods Europe SAS). Le module élastique de cisaillement atteint après gélification dépend fortement de la concentration en enzyme. Comme la prise est en général trop rapide pour faire le mélange en amont de la production de mousse, la solution est initialement séparée en deux sous-solutions. L'une ne contient que l'enzyme et l'autre contient le tensioactif et la gélatine. La sous-solution contenant la gélatine passe par les dispositifs de génération de mousse avant d'être mélangée à la sous-solution contenant l'enzyme. Du fait de la solubilité limitée de la transglutaminase, la répartition du solvant est de 20 – 40 % pour la solution enzymatique et 80 – 60 % (respectivement) pour la solution de gélatine.

De ce fait pour un gel de concentration en gélatine 2U, la solution n'a initialement que 60 % de son solvant lors du passage du générateur, ce qui correspond à une concentration renforcée en gélatine qui perturbe la génération de mousse. Ainsi un compromis doit être trouvé entre la concentration en enzyme et la concentration en gélatine. Nous avons fait le choix ici de nous limiter à 5 % g/g dans le cas des gels chimiques.

### 2.1.3 Propriétés viscoélastiques des gels de gélatine

#### Origine de l'élasticité des gels

L'élasticité des gels de polymères est d'origine entropique [47]. Elle correspond à la même élasticité entropique présente au niveau de la chaîne unique de polymère en solution. Cependant, elle intervient au sein d'un réseau, de sorte qu'elle ne se manifeste dans le cas statique macroscopiquement que si le réseau est percolant. Ainsi, lors d'une sollicitation en cisaillement d'un cube de gel en formation, il faut que le réseau des

chaînes de gélatine relie continument les deux faces du cube mises en mouvement pour qu'une force de rappel élastique puisse exister. S'il n'y a pas de réseau pour relier les faces, cela signifie que le gel peut encore s'écouler. La transition entre un fluide visqueux et un solide élastique est appelée gélification ou transition sol/gel. La densité des liens est reliée au module élastique de cisaillement  $G_0$  du fait de la densité de chaînes polymères mises en jeu lors d'une sollicitation, qui seront comme autant de ressorts entropiques :

$$G_0 = f \nu \frac{k_B T}{2} \quad (2.1)$$

où  $f$  est la fonctionnalité du réseau,  $\nu$  la densité de liens (nombre de lien/unité de volume),  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. En particulier, le gel chimique de gélatine est tétra-fonctionnel ( $f = 4$ ), tandis que le gel physique est hexa-fonctionnel ( $f = 6$ ).

Nous avons caractérisé les évolutions temporelle et fréquentielle du module complexe de cisaillement  $G^*$  des gels physiques utilisés dans les mesures acoustiques.

### Mesures du module de cisaillement des gels physiques

La solution de gélatine à 10 %  $g/g$  (section 2.1.2) est chauffée au bain marie à  $50^\circ C$  puis elle est déposée dans le rhéomètre où la température est maintenue constante à  $21.5^\circ C$ . La durée écoulée depuis cet instant est l'âge du gel. Ce protocole de gélification est similaire à celui utilisé lors de l'élaboration des mousses gélifiées, de façon à évaluer le module du gel contenu dans les échantillons des mesures acoustiques.

Nous avons utilisé deux rhéomètres avec des géométries cône-plan (diamètre de plan 40 mm, angle de cône  $4^\circ$ , Bohlin CVOR150) et (diamètre de plan 50 mm, angle de cône  $5^\circ$ , MES 530 Paar Physica). Dans les deux configurations, une huile de paraffine (1.07160.2500, Merck) remplit une rigole qui entoure l'échantillon et empêche l'évaporation de l'eau du gel.

Le module complexe de cisaillement est mesuré au cours du vieillissement sur une durée comparable à la durée sur laquelle la majorité des mesures acoustiques sont faites, soit 7 jours.

### Évolution du module au cours du vieillissement

Nous avons mesuré le module complexe de cisaillement  $G^* = G' + iG''$  d'une solution moussante de gélatine à 10 % ( $g/g$ ) au cours de sa gélification à une température

de  $21.5^{\circ}C$ . La figure 2.4 montre l'évolution de  $G'$  et  $G''$ , moyennée sur 6 mesures indépendantes à une fréquence de  $10\text{ Hz}$ , au cours du vieillissement. La cinétique de gélification peut être décrite en 4 phases [54]. Lors d'une première phase, le module élastique  $G'$  est faible, inférieur au module visqueux  $G''$ . La solution est encore essentiellement liquide, le seuil de percolation n'est pas encore franchi. Lors de la deuxième phase, le module élastique évolue très rapidement. De nouveaux liens se créent dans le réseau qui vient de franchir le seuil de percolation. Leur contribution à l'élasticité est importante. Ces deux premières phases sont de courte durée. Dans une troisième phase, l'évolution temporelle du module complexe  $G^*$  est décrite par une loi logarithmique [55]. L'augmentation de l'élasticité correspond principalement à un renforcement des liens mis en place lors de la phase 2. Empiriquement, une loi logarithmique ajuste correctement les données représentées figure 2.4. Plus précisément, la loi logarithmique décrit bien la phase 3 de la prise du gel pour des âges compris entre 1h et environ 10 jours [54].

$$\begin{cases} G'(t) = G'_{10} \log\left(\frac{t}{\tau_{G'}}\right) \\ G''(t) = G''_{10} \log\left(\frac{t}{\tau_{G''}}\right) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\tau_{G'}$  et  $\tau_{G''}$  sont les temps caractéristique de l'évolution logarithmiques des modules.  $G'_{10}$  et  $G''_{10}$  sont les modules de conservation et de perte mesurés à la fréquence  $f = 10\text{ Hz}$  aux temps respectifs  $t = \tau_{G'}$  et  $t = \tau_{G''}$ . En ajustant les paramètres de cette relation à nos données, nous obtenons  $G'_{10} = 1.2\text{ kPa}$  et  $\tau_{G'} = 110\text{ s}$  pour le module élastique, ainsi que  $G''_{10} = 52\text{ Pa}$  et  $\tau_{G''} = 250\text{ s}$  pour le module visqueux.

Une quatrième et dernière phase correspond à une accélération de l'augmentation du module par rapport à la loi logarithmique. Pour les âges supérieurs à environ 7 jours, on observe une accélération de l'évolution du module. Il augmente plus rapidement que ce que prédit la loi logarithmique. Cela concorde avec des résultats reportés par Normand [54], bien qu'il dise que cela pourrait s'expliquer par une légère évaporation du solvant (i.e. de l'eau) non contrôlée qui se manifeste sur les temps de mesure longs, et ce malgré les précautions prises. Dans le cadre présent, nous pouvons conclure que la loi logarithmique permet un ajustement satisfaisant de l'évolution du module du gel sur la gamme de temps considérée en l'absence d'effets d'évaporation du solvant.

Cependant, comme les échantillons de mousse seront sujet à des effets d'évaporation du solvant, nous allons profiter de cette occasion pour les commenter. Si le solvant s'évapore, la concentration en gélatine augmente et la densité de liens aussi. Il a été montré que le module de cisaillement varie comme le carré de la concentration en gélatine

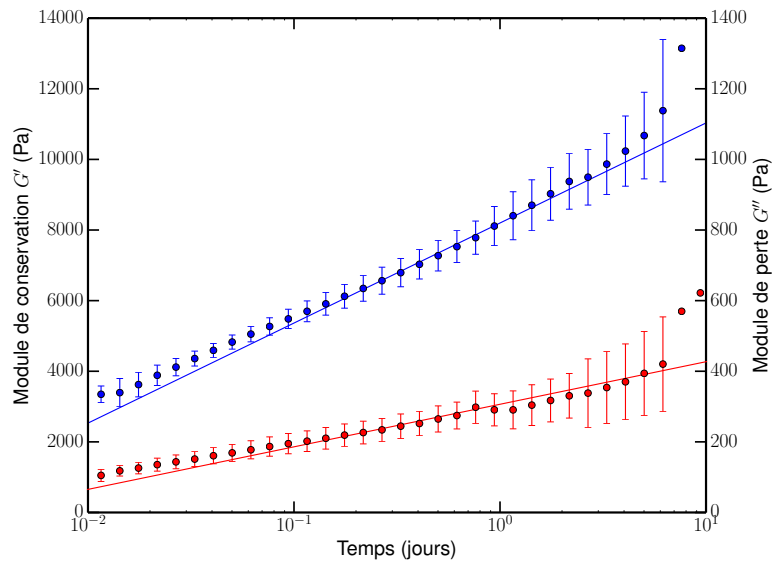


FIGURE 2.4 – Évolution des modules viscoélastiques de conservation  $G'$  (en bleu) et de perte  $G''$  (en rouge) d'un gel de gélatine (10% g/g) à une fréquence  $f = 10 \text{ Hz}$  pour une amplitude de cisaillement  $\gamma = 1 \%$  trempé de  $50^\circ\text{C}$  à  $21.5^\circ\text{C}$  à un âge  $t = 0$ . Les lignes continues correspondent à des ajustements logarithmiques.

pour des concentrations en gélatine  $C \sim 10 \%$  g/g et inférieures [56, 54] de sorte que l'on puisse écrire l'équation 2.3.

$$G_0(t) = G_0 \left( \frac{C(t)}{C_0} \right)^2 \quad (2.3)$$

où  $C(t)$  et  $C_0$  sont respectivement les concentration en gélatine de l'échantillon à un instant  $t$  quelconque et à l'instant initial  $t = 0$ ,  $G_0(t)$  et  $G_0$  sont respectivement les modules élastiques quasi-statiques ( $f \sim 1 \text{ Hz}$ ) à un instant  $t$  quelconque et à l'instant initial antérieur aux effets d'évaporation  $t = 0$ .

Cette loi logarithmique incluant la correction due à l'évaporation sera utilisée dans la suite pour l'interprétation des résultats, afin de prendre en compte l'évolution du module avec l'âge des échantillons. La loi sur le spectre de la viscoélasticité (cf. équation 2.4) permettra d'estimer la répercussion sur  $G''$  de l'influence de l'évaporation sur  $G'$ .

### Réponse en fréquence

La figure 2.5 montre la dépendance fréquentielle des modules de conservation  $G'$  et modules de perte  $G''$ . Les deux séries de points respectivement pour les modules  $G'$  et

$G''$  correspondent à deux âges différents. Une première mesure correspond à un âge de 1 jour, une seconde correspond à un âge de 2 jours.

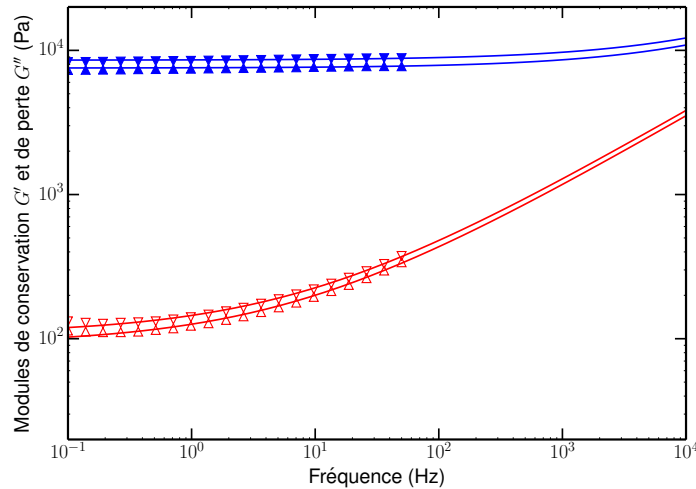


FIGURE 2.5 – Dépendance fréquentielle mesurée des modules de conservation et de perte d'une solution moussante de gélatine à 10%  $g/g$  et leur extrapolation jusqu'à 10  $kHz$ . Gels respectivement âgés d'un jour ( $\blacktriangledown \triangledown$ ) et de deux jours ( $\blacktriangle \triangle$ ).

Dans la gamme de fréquences mesurées, le module de conservation est presque constant. Quant au module de perte, il est constant à basses fréquences puis croît comme la racine carrée de la fréquence. À l'exception du comportement basses fréquences du module de perte, ces limites asymptotiques de la dépendance fréquentielle sont prédites pour les réseaux réticulés de façon permanente [15]. Le plateau de  $G'$  correspond à l'élasticité statique du gel 2.1. Le plateau à basses fréquences du module de perte  $G''$  vient quant à lui du caractère non permanent des liens physiques qui peuvent se faire et se défaire. Ce mécanisme correspond à une distribution d'éléments de Maxwell dont le temps de relaxation est inversement proportionnel à la probabilité de rupture du lien [57, 15]. Il fait passer le module de perte  $G''$  par un maximum local à basses fréquences, qui du fait de la dissipation anormale qui suit a l'allure d'un point d'inflexion ou d'un plateau. À hautes fréquences, le comportement du gel se rapproche de plus en plus de celui d'un réseau d'enchevêtrements, pour lesquels le modèle de Rouse prédit une évolution asymptotique du module complexe qui croît comme la racine de la fréquence. Cette dépendance fréquentielle traduit la forme de la fonction de distribution des temps de relaxation  $H \propto 1/\sqrt{\tau}$  dans les réseaux de polymères enchevêtrés en solution [15, Ch. 10, p. 226]. Finalement, nos données sont bien décrites par la loi phénoménologique :

$$G^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sqrt{i \frac{f}{f_c}} \right) + i G_1 \quad (2.4)$$

où  $G_0$  et  $G_1$  correspondent aux plateaux de  $G'$  et  $G''$  et  $f_c$  est une fréquence caractéristique. En ajustant, les paramètres  $G_0$ ,  $G_1$  et  $f_c$  à nos données, nous obtenons les paramètres reportés dans le tableau récapitulatif 2.1.

TABLE 2.1 – Paramètres ajustés au modèle 2.4 aux variations fréquentielles des modules  $G'$  et  $G''$  (cf. figure 2.5).

Âge t	$f_c$ (kHz)	$G_0$ (kPa)	$G_1$ (Pa)
1 jour	25	7.5	92
2 jours	27	8.6	108

## 2.2 Génération de mousses

Il existe de nombreux procédés de génération de mousses ou émulsions [58]. Le principe consiste à mélanger liquide et gaz de façon à créer des interfaces.

### 2.2.1 Générateurs de mousse

La génération milli et microfluidique utilise les écoulements laminaires dans des canaux de dimension millimétrique ou micrométrique [58]. La figure 2.6 représente les deux géométries que nous avons utilisées. Le choix de la géométrie ainsi que l'ajustement des débits de gaz  $Q_g$  et de liquide  $Q_l$  permettent un contrôle de la taille des bulles et du débit de production.

La géométrie à écoulements focalisés (*flow focusing*) figure 2.6 a été utilisée pour la production de bulles de diamètre  $d \sim 0.2mm$ . Le générateur a été réalisé en résine par une imprimante 3D et s'inspire du dispositif mis au point par Castro-Hernández et al. qui permet une production à haut-débit ( $10^5 Hz$ ) [59]. Nous avons vérifié son bon fonctionnement avec des solutions moussantes non gélatineuses. Cependant, dans le cas de solutions de polymères non-newtoniennes et plus visqueuses que l'eau, le comportement des générateurs de mousse change considérablement. Cela a déjà pu être vérifié dans le cas de productions de mousses gélifiées de chitosane [60], et l'effet est d'autant plus fort que le taux de cisaillement dans l'écoulement est important. Ainsi, la plage de débits où une production de bulles monodisperses est possible dans cette géométrie spécifique est fortement réduite. Dans ces conditions, on ne peut pas bénéficier des hauts débits de production.

La seconde géométrie, celle pour laquelle nous avons finalement opté, se révèle très stable même dans le cas de solutions de polymères. Il s'agit de la jonction T (*cross flow*) figure 2.6.a. Cette géométrie permet de produire des bulles de grands diamètres ( $d \geq$

0.3 mm). En fonction du diamètre souhaité, nous disposons de deux générateurs jonction T de dimensions différentes (largeur du canal  $w$  et profondeur  $h$ ) i.e. ( $d = 1.8$  mm,  $w = 1.6$  mm,  $h = 0.8$  mm ;  $d = 0.6$  mm,  $w = 0.8$  mm,  $h = 0.4$  mm). Les canaux ont été fraisés à l'aide d'une micro-fraiseuse dans du plexiglas. Pour les deux géométries, une plaque en plexiglas serrée au contact de l'élément sculpté assure l'étanchéité.

Par rapport à l'écoulement focalisé, la jonction T permet des régimes de production avec un rapport  $Q_l/Q_g$  plus faible, ce qui est un avantage puisque le but est de produire une mousse et non un liquide bulleux. La concentration de bulles obtenue est généralement néanmoins trop faible. Par conséquent, une étape de ségrégation est ajoutée à la suite de l'étape de production.

La nature légèrement élastique de la solution et sa viscosité renforcée sont les causes probables d'une mauvaise stabilité de la configuration du générateur de bulles à écoulements focalisés. Le mécanisme à l'œuvre dans la jonction T est plus simple, lié directement à la géométrie de l'écoulement, d'où sa plus grande stabilité. Nous avons constaté empiriquement une stabilité encore accrue, lorsque l'on incline le plan du générateur à  $45^\circ$  selon l'axe de l'écoulement (sortie en position basse cf. figure 2.7).

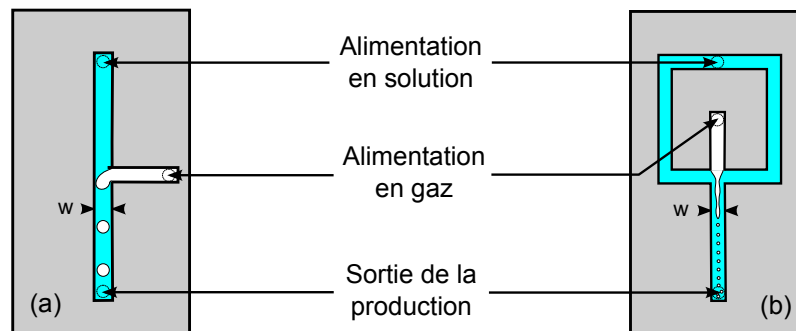


FIGURE 2.6 – Schémas des deux géométries de générateurs de bulles monodisperses utilisées. (a) Écoulements croisés (jonction T) - *cross flow* ( $w = 0.8$  mm ou  $w = 1.6$  mm). (b) Écoulements focalisés - *flow focusing* ( $w = 0.8$  mm).

### Alimentation en gaz

Afin de stabiliser les mousses contre le mûrissement, un mélange de gaz est utilisé : 10 % en pression partielle d'un gaz fluoré  $C_6F_{14}$  et 90 % de diazote  $N_2$ . La solubilité dans l'eau  $C_s$  du gaz fluoré  $C_6F_{14}$  est très faible ( $C_s = 1.5 \cdot 10^{-5}$  mol.L<sup>-1</sup>) [61]. La stabilisation est due à un effet osmotique [62]. Si sous l'effet de la pression de Laplace, l'azote diffuse d'une bulle plus petite vers une bulle plus grande, la concentration du  $C_6F_{14}$  dans la petite bulle augmente et celle dans la grosse diminue. Ceci crée une différence de pressions osmotiques qui s'oppose à la diffusion. Ainsi ce mécanisme explique le fort ralentissement du mûrissement de la mousse. Afin de préparer ce mélange de gaz, on

utilise une colonne de gaz dans laquelle on a fait préalablement le vide ( $\sim 0.5 \text{ mbar}$ ). On y injecte au travers d'un septum  $2 \text{ mL}$  de  $C_6F_{14}$  liquide à température et pression ambiante mais vaporisé du fait de sa faible pression de vapeur saturante ( $23.6 \text{ kPa}$  à  $20^\circ\text{C}$ ) [61]. La pression alors atteinte dans la colonne est  $p_{C_6F_{14}} = 0.2 \text{ bar}$ . On complète avec du diazote  $N_2$  jusqu'à atteindre une pression totale  $p = 2.0 \text{ bar}$ . La connaissance des pressions partielles permet d'évaluer la masse volumique du mélange de gaz :

$$\rho RT = \sum_i p_i M_i = p_{C_6F_{14}} M_{C_6F_{14}} + p_{N_2} M_{N_2} \Rightarrow \rho = 2.4 \text{ kg.m}^{-3} \quad (2.5)$$

$$\text{avec } M_{N_2} = 28 \text{ g.mol}^{-1} \quad \text{et} \quad M_{C_6F_{14}} = 338 \text{ g.mol}^{-1} \quad (2.6)$$

Un contrôleur de débit de masse (F-200CV, Bronkhorst) est utilisé pour réguler le débit massique de gaz. La calibration de l'appareil indique que pour du diazote  $N_2$ , dans les conditions d'utilisation ( $p = 2 \text{ bar}$ ,  $\theta = 20^\circ\text{C}$ ), le débit volumique maximal est de  $5 \text{ mL/min}$ . Néanmoins, s'agissant d'un contrôleur de débit de masse, sa sensibilité à la masse molaire du mélange de gaz est grande. Ainsi, d'après les données de calibration, le débit maximal pour du dioxyde de carbone dans les mêmes conditions est de  $3 \text{ mL/min}$ . Le rapport des débits correspond approximativement au rapport des masses molaires moléculaires. On peut donc estimer le débit volumique pour le mélange avec le gaz fluoré. La masse molaire augmente de  $28 \text{ g/mol}$  pour le  $N_2$  à  $59 \text{ g/mol}$  pour le mélange ( $N_2$ ,  $C_6F_{14}$ ). On estime ainsi le débit volumique maximal à  $2.4 \text{ mL/min}$  dans le cas du mélange.

Pour produire des mousses de bulles de grand diamètre  $d = 1800 \mu\text{m}$ , le débit maximal (100%) de gaz est utilisé, soit  $2.4 \text{ mL/min}$ , tandis que pour des bulles de petit diamètre  $d = 600 \mu\text{m}$ , le débit utilisé est de 30% du débit maximal, soit un débit de  $0.7 \text{ mL/min}$ .

### **Alimentation en solution de gélatine**

La gélatine gélifie spontanément à température ambiante. Or l'utilisation des techniques de génération milli- et microfluidiques requiert un écoulement fluide. La prise du gel peut déstabiliser le régime de production monodisperse voire obstruer complètement le générateur. Afin d'assurer la possibilité d'une génération de bulles monodisperse, le générateur est placé dans une enceinte calorifuge thermostatée (cf. figure 2.7). Une buse chauffante (Diode PID, FTM Technologies) souffle de l'air chaud dans l'enceinte. Elle est fixée à l'arrière, dirigée sur la seringue d'alimentation en solution de gélatine et alimentée par le circuit d'air comprimé du laboratoire (cf. figure 2.7). L'air sort par l'avant de l'enceinte à une température contrôlée, fermée par une fenêtre d'accès ajustable non-représenté.



L'alimentation en solution moussante est effectuée à l'aide d'un pousse-seringue réglable en vitesse. La vitesse typique d'utilisation est de  $50 \mu\text{m/s}$ . Les seringues utilisées sont des seringues de capacité  $50 \text{ mL}$  et de section de diamètre  $29 \text{ mm}$ , de sorte que le débit de liquide typique est de  $2.0 \text{ mL/min}$ . Pour la production des bulles de  $d = 1.8 \text{ mm}$  et  $d = 0.6 \text{ mm}$ , le débit de liquide  $Q_l$  utilisé est de  $2.0 \text{ mL/min}$ . Il est également possible de produire des bulles de diamètre  $d = 0.3 \text{ mm}$  dans la géométrie prévue pour les bulles de  $0.6 \text{ mm}$  en augmentant fortement le débit de liquide et en réduisant légèrement le débit de gaz. Toutes les informations sont résumées dans le tableau 2.2.

TABLE 2.2 – Paramètres de production pour les générateurs jonction T (cf. figure 2.6.a).  $Q_l$  est le débit de liquide.  $Q_g$  est le débit de gaz.

Diamètre des bulles	Dimensions ( $w_{\text{canal}}, h_{\text{canal}}$ )	Débit $Q_l$	Débit $Q_g$
$1.8 \text{ mm}$	$w = 1.6 \text{ mm}, h = 0.8 \text{ mm}$	$2.0 \text{ mL/min}$	$2.40 \text{ mL/min}$ (100%)
$0.6 \text{ mm}$	$w = 0.8 \text{ mm}, h = 0.4 \text{ mm}$	$2.0 \text{ mL/min}$	$0.72 \text{ mL/min}$ (30%)
$0.3 \text{ mm}$	$w = 0.8 \text{ mm}, h = 0.4 \text{ mm}$	$6.0 \text{ mL/min}$	$0.48 \text{ mL/min}$ (20%)

## 2.2.2 Production d'une mousse gélifiée

### Dispositif et protocole de production

La solution de gélatine sortie du réfrigérateur est mise à chauffer dans un bain marie sous agitation magnétique (lente puis rapide) à une température de  $50^\circ\text{C}$  pendant environ 30 min, jusqu'à ce qu'elle se soit complètement liquéfiée. La solution est ensuite gardée à l'étuve à  $50^\circ\text{C}$ . En parallèle, la soufflerie d'air chaud de l'enceinte thermostatée est mise en route avec une température de consigne de  $60^\circ\text{C}$  et une alimentation par le biais d'un détendeur réglé sur  $2 \text{ bar}$ . Le débit d'air étant supérieur aux débits prévus pour les utilisations classiques de la buse, la température en sortie est inférieure à celle de consigne ( $\sim 50^\circ\text{C}$ ). Le réglage est choisi de manière à obtenir rapidement une température au niveau du générateur milli/microfluidique légèrement supérieure à  $46^\circ\text{C}$ . La stabilisation de la température dans l'enceinte requiert environ  $60 \text{ min}$ . Une seringue de  $50 \text{ mL}$  est alors remplie de solution moussante de gélatine puis placée dans l'enceinte thermostatée.

La figure 2.7 représente la configuration du dispositif. Un pousse-seringue entraîne une seringue de  $50 \text{ mL}$ . Comme discuté précédemment, le débit de gaz dépend de la taille des bulles visée. Mais il est bien du même ordre de grandeur que le débit de liquide, ce qui rentre dans le cadre du régime d'étranglement (*squeezing regime*) décrit par Garstecki et al. [63, 58]. Ainsi, les deux flux se rejoignent et se rencontrent au niveau du générateur de bulles.

À la sortie du générateur, un liquide bulleux monodisperse est injecté dans un tube rigide qui contiendra l'échantillon à l'aide d'une première sortie d'un raccord en T. Un tube souple est connecté à la deuxième sortie du raccord, qui se trouve en aval de la première. Sous l'effet de la gravité et des forces d'Archimède, les bulles ont tendance à monter dans le tube rigide tandis que le liquide a tendance à s'écouler vers le bas et est évacué par le tube souple (cf. figure 2.7). On pince plus ou moins le tube d'évacuation en fonction de la fraction liquide visée.

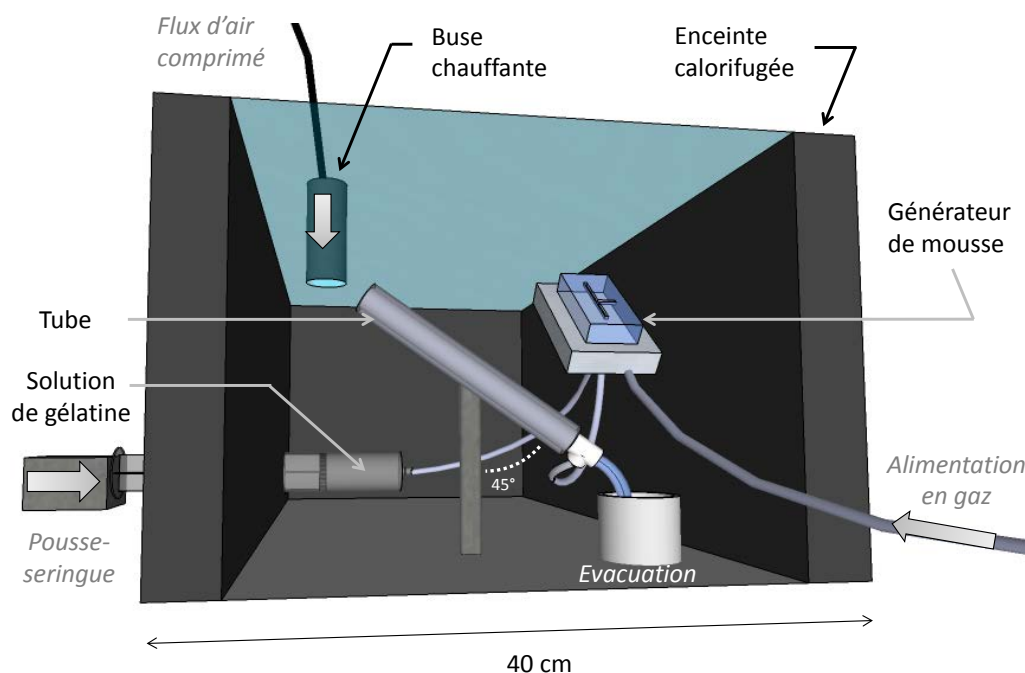


FIGURE 2.7 – Représentation schématique de l'enceinte thermostatée à  $48^\circ \pm 2^\circ\text{C}$  et le dispositif de génération de mousses. La face avant n'est pas représentée.

Lorsque le tube rigide est rempli d'une mousse sans défaut majeur, que la cristallinité est jugée suffisamment bonne, et tout cela dans l'intervalle de temps de 15 *min* fournit par une seringue, alors des films polymères, maintenus tendus par des anneaux en téflon glissés autour du tube, sont placés sur la face supérieure puis la face inférieure. L'échantillon est alors placé à température ambiante pendant au minimum 1h sur un clinostat (*"tourne-broche"*) qui le met en rotation horizontalement autour de son axe à  $1/2 \text{ tour/s}$ . Cela permet une réimbibition de la mousse qui homogénéise la fraction liquide de la mousse dans le tube. L'instant auquel l'échantillon est mis à température ambiante sur le clinostat définit l'âge  $t = 0$  de l'échantillon.

Spontanément, les mousses monodisperses s'organisent en polycristaux dont la taille

des domaines cristallins est de l'ordre de la dizaine de bulles [64]. Nous avons observé qu'une orientation à  $45^\circ$  des tubes lors du remplissage favorise la cristallinité de l'échantillon. Une telle orientation rend l'écoulement plus cisailant. De précédentes études dans les suspensions colloïdales ont mis en évidence le rôle bénéfique du cisaillement pour l'apparition d'un ordre cristallin [65]. Une fraction de liquide initialement importante est bénéfique de ce point de vue afin de permettre aux bulles de glisser les unes sur les autres et de trouver leur position optimale [60]. Ce mécanisme d'ordre à plus longue portée favorisé par le cisaillement a été notamment mis en évidence dans les mousses multicouches à l'occasion de la thèse de S. Costa [9].

Dans le cas de mousses gélifiées chimiquement, afin d'initier la réticulation au dernier moment, un pousse-seringue avec la solution enzymatique est coinjectée en sortie de production entre le générateur et le ségrégateur au niveau d'un T en téflon.

### **Tube-échantillons de mousse gélifiée**

Comme indiqué précédemment, les échantillons de mousse sont conservés dans des tubes en matériaux plastiques transparents afin de les protéger de l'évaporation et du contact avec d'autres surfaces. Deux géométries différentes de tubes ont été utilisées. La longueur des tubes pour les deux géométries de tube est de 20 *cm*. Les tubes les plus larges sont faits de polycarbonate, leur diamètre intérieur est de  $D = 10$  *mm*, diamètre extérieur  $D_e = 13$  *mm* et leur module élastique de cisaillement  $G = 2.3$  *GPa*. Les tubes les plus étroits sont fait de superstyrène, leur diamètre intérieur est de  $D = 4$  *mm*, diamètre extérieur  $D_e = 5$  *mm* et leur module élastique de cisaillement  $G = 0.8$  *GPa*. Les matériaux composant les tubes sont rigides et cassants et différent en cela de tubes en tygon qui ont été utilisés lors d'essais préliminaires.

## **2.3 Caractérisation des mousses de gélatine**

### **2.3.1 Ordre macroscopique et microstructure**

#### **Aspect extérieur**

Les échantillons présentent une bonne cristallinité (cf. figure 2.8a). Les défauts rencontrés sont les défauts topologiques typiques des cristaux dont le joint de grain (cf. figure 2.8b). Avec cette configuration nous obtenons des domaines cristallins d'environ 100 bulles. La figure 2.9 montre un détail de l'échantillon de la figure 2.8a.

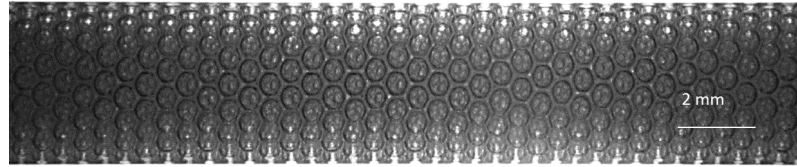
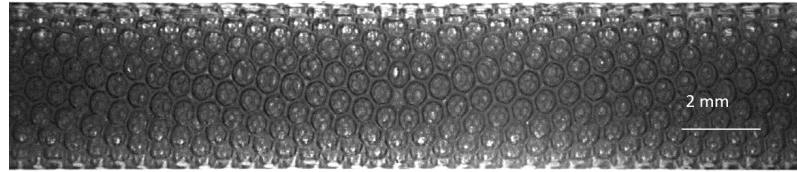
(A)  $D = 4 \text{ mm}$ . Âge de 4h.  $d = 0.6 \text{ mm}$ .(B)  $D = 4 \text{ mm}$ . Âge de 4h.  $d = 0.6 \text{ mm}$ .

FIGURE 2.8 – Photographie en vidéo-microscopie de mousses gélifiées cristallines.

La cristallinité présente plusieurs avantages. Comme discuté section 2.3.2, c'est un atout pour assurer une meilleure stabilité de la mousse gélifiée dans le temps. D'un point de vue acoustique, cela simplifie la modélisation numérique et théorique d'une part, et peut donner naissance à des effets de résonance intéressants du type de la diffraction de Bragg. C'est d'ailleurs pour Bragg, que C.S. Smith a réalisé un travail pionnier dans la génération monodisperse de bulles [58]. Enfin, si les films entre bulles se comportent comme des tambours et forment une assemblée de résonateurs locaux, la monodispersité est nécessaire pour les accorder en fréquence.

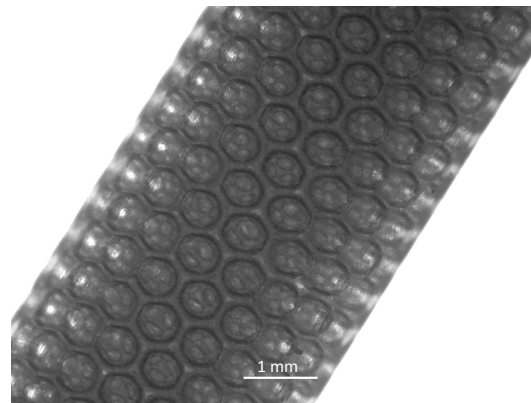


FIGURE 2.9 – Photographie en vidéo-microscopie d'un monocristal de mousse : détail.

### Tomographie des rayons X

En collaboration avec G. Ovarlez et N. Lenoir du laboratoire Navier à Marne-la-Vallée, une tomographie rayons X d'un de nos échantillons a été réalisée. La gel est un gel de gélatine de concentration 10 %  $g/g$ . L'échantillon contenu dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  présente un diamètre moyen des bulles de  $d = 710 \mu\text{m} \pm 30\mu\text{m}$ , la fraction de gaz était de  $\phi_g = 0.79$ . Les débits de gaz et de solution gélifiante utilisés

correspondent aux paramètres du tableau 2.2. La configuration de production est celle des mousses réticulées chimiquement avec une co-injection de 20 % de la quantité finale de solvant après la génération des bulles, d'où une taille de bulles qui diffère des  $d \approx 600 \mu m$  habituels pour ces paramètres de production. La mesure a duré 10h et l'âge de l'échantillon pendant la mesure a varié de 10h à 20h. La figure 2.10a montre une coupe de la section scannée de l'échantillon.

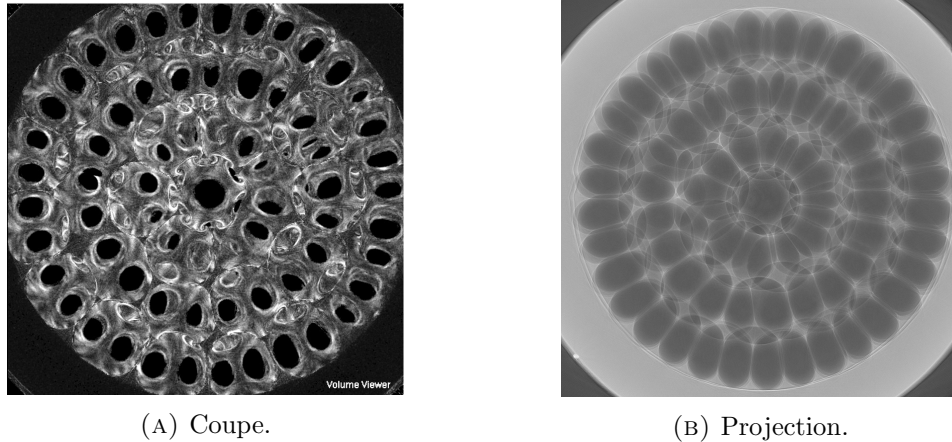


FIGURE 2.10 – Coupe et projection issues de la reconstruction de la tomographie rayons X d'un échantillon de mousse. Le diamètre interne du tube de 4 mm de diamètre renseigne sur l'échelle.

Afin d'exploiter les données issues de la tomographie, nous avons fait appel à K. Mader de l'Institut Paul Scherrer qui est l'auteur d'un algorithme d'analyse de la structure d'une mousse à partir de données de tomographie. Le principe de l'algorithme consiste en semer des graines dans la structure et à les faire gonfler jusqu'à ce qu'elles rencontrent de la matière. Un aperçu des bulles reconstruites est illustré par la figure 2.11. Cette reconstruction rend bien compte de l'alignement hélicoïdal de la couche externe des bulles.

L'algorithme d'analyse permet d'extraire la position des centres de bulles dans le tube (cf. figure 2.12). On observe que les bulles sont toutes situées sur des cercles concentriques, ce qui rend compte du caractère ordonné de la structure. Les positions azimutales sont distribuées sans motif remarquable, ce qui peut s'expliquer par une évolution continue de la position azimutale d'une couche à l'autre selon l'axe du tube, comme ce serait le cas pour un alignement hélicoïdal des bulles.

### Épaisseur des films

Lors de la production des échantillons et ensuite après gélification, on peut observer assez nettement dans le cas des bulles les plus grandes ( $d = 1.8 \text{ mm}$ ) des irisations (sous éclairage en lumière blanche). Cela signifie que l'épaisseur des films est de l'ordre

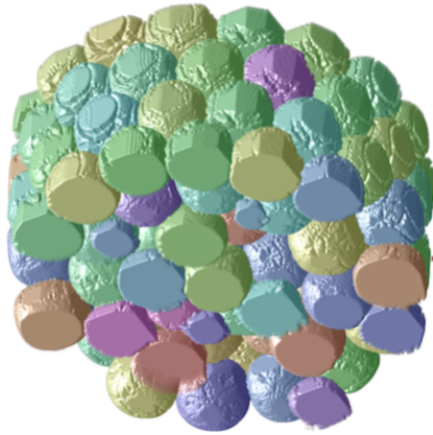


FIGURE 2.11 – Reconstruction 3D de la tomographie rayons X d'un échantillon de mousse. Le diamètre interne du tube est de 4 mm.

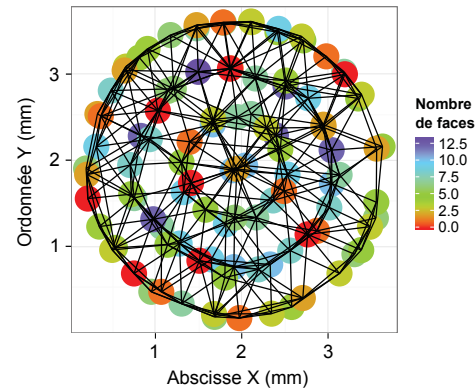


FIGURE 2.12 – Position des bulles dans l'échantillon de mousse.

du micromètre. Cette épaisseur est très supérieure à l'épaisseur d'équilibre des films de savon, qui est typiquement de l'ordre de 10 – 50 nanomètres [1]. Les films de savons sont connus pour s'équilibrer à des épaisseurs plus épaisses en présence de polymères en solution et adsorbés aux interfaces [1]. La répulsion stérique est renforcée et de plus longue portée en présence de polymères. De plus, dans le cas d'un polyélectrolyte (i.e. polymère chargé) comme c'est le cas pour la gélatine, les charges des molécules viennent ajouter une force de répulsion électrostatique. Ces effets sont cependant insuffisants pour établir une épaisseur d'équilibre micrométrique. Celle-ci peut s'expliquer par un arrêt du drainage des films par la gélification, avant que l'épaisseur d'équilibre soit atteinte.

Les tailles de bulles et la géométrie de production ne nous ont pas permis de mesurer les épaisseurs des films *in situ*. Néanmoins, afin d'obtenir un ordre de grandeur de l'épaisseur de ces films, nous avons produit des films individuels à partir de la solution moussante de gélatine (10 % *g/g*). Ces essais ont été effectués à l'aide d'un spectromètre optique (Ocean Optics, HL-2000-FHSA). En relevant la période des variations d'intensité de type Fabry-Pérot en fonction de la longueur d'onde lumineuse (e.g. par analyse Fourier), il est possible de remonter à l'épaisseur du film. Ces films sont obtenus au niveau d'une constriction dans un tube en verre de section de diamètre 5 mm et de longueur  $\sim 5$  cm avec une découpe bizotée au niveau de l'une de ses extrémités. Ce tube est trempé dans de la solution moussante puis retourné afin de laisser s'écouler la solution jusqu'à la constriction où elle vient former un film. Les films produits dans ces conditions présentent des épaisseurs typiques de quelques micromètres, ce qui constitue une borne supérieure pour l'épaisseur des films dans nos mousses. En effet, la prise rapide des films dans ces conditions, malgré la fermeture de l'enceinte par un embout en téflon et une lame de verre protectrice, conduit à la formations de films épais et inhomogènes.

### Évolution de la fraction de liquide

Les tubes fermés par les films polymères ne sont pas parfaitement hermétiques. Les échantillons s'assèchent légèrement au cours du temps comme on peut le constater sur la figure 2.13. Cet assèchement est suivi par pesée de la masse  $m$  des échantillons. Chaque échantillon est représenté par un symbole de couleur différente et il y a à chaque fois un point initial et un point final. Pour chaque échantillon, les mesures acoustiques ont lieu entre ces deux points.

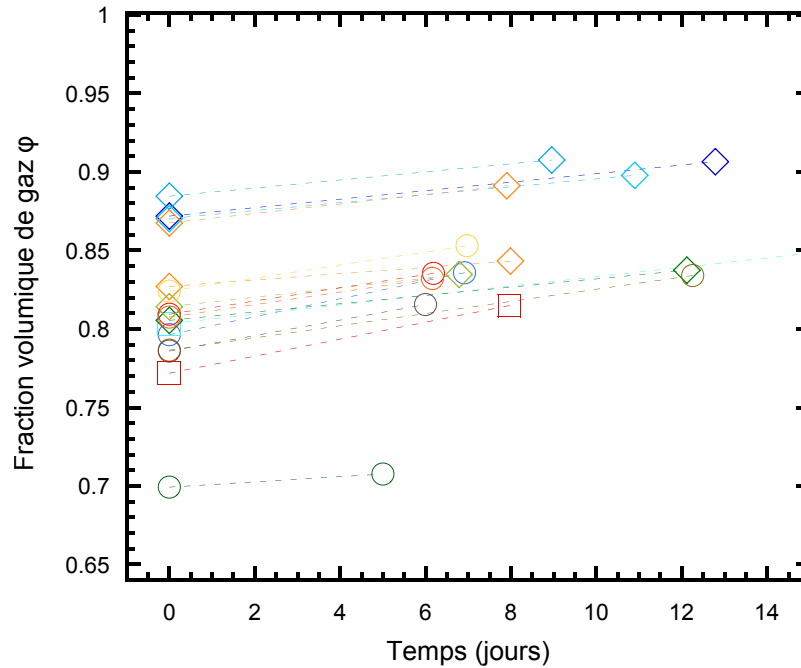


FIGURE 2.13 – Évolution de la fraction de gaz des échantillons au cours du temps. ( $\square$ )  $D = 10 \text{ mm}$ ,  $d = 0.6 \text{ mm}$ ; ( $\diamond$ )  $D = 10 \text{ mm}$ ,  $d = 1.8 \text{ mm}$ ; ( $\circ$ )  $D = 4 \text{ mm}$ ,  $d = 0.6 \text{ mm}$ ;

Les variations absolues de la fraction de gaz  $\phi_g$  n'excède pas 5 % sur une durée de 7 jours. Néanmoins, les faibles fluctuations de  $\phi_g$  observées correspondent à des variations relatives de la masse des échantillons de jusqu'à près de 30 % :

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta(1 - \phi_g)}{1 - \phi_g} \quad (2.7)$$

L'effet est d'autant plus important à prendre en compte qu'il affecte la célérité des ondes acoustiques (cf. section 4.5.2).

### 2.3.2 Mûrissement des mousses gélifiées

#### Critère de stabilité

Avant de retenir la concentration en gélatine (10%) et les tailles de bulles utilisées dans les mesures acoustiques ( $d = 0.6 \text{ mm}$  et  $d = 1.8 \text{ mm}$ ), d'autres paramètres ont été explorés. En particulier, des mousses de gélatine moins concentrées (5%), combinées à des tailles de bulles inférieures ( $d = 0.2 \text{ mm}$ ). Comme on peut le voir sur les images (cf. figure 2.14), au bout d'environ une journée, l'échantillon *A* moins concentrés de tailles de bulles inférieures est complètement dégradé. En revanche, l'échantillon *B* de même concentration avec une taille de bulle supérieure se conserve très bien ( $d = 0.6 \text{ mm}$ ).

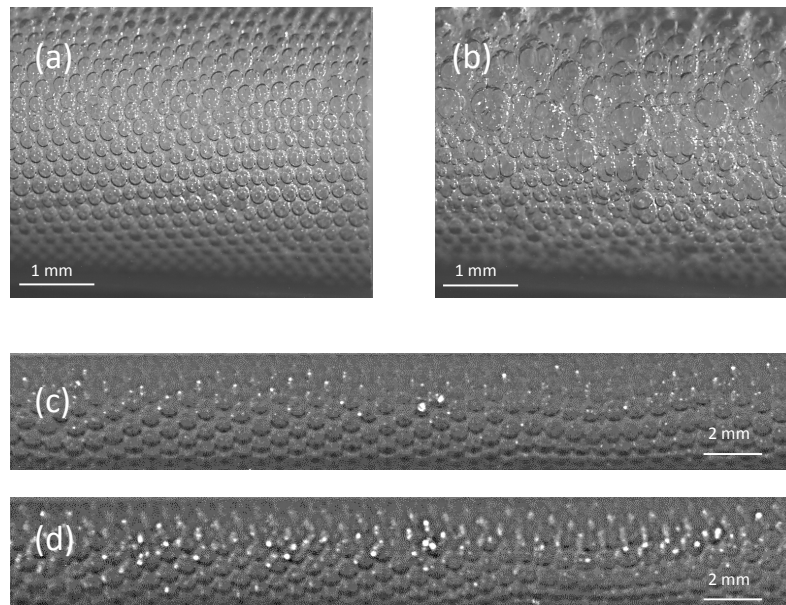


FIGURE 2.14 – Mûrissement des mousses solides de gélatine. (a) Échantillon A à un âge  $t_0 = 2h$  ( $d = 0.2 \text{ mm}$ ,  $C = 5 \text{ \% g/g}$ ). (b) Échantillon A à  $t_0 + 20h$ . (c) Échantillon B à un âge  $t_0 = 2h$  ( $d = 0.6 \text{ mm}$ ,  $C = 5 \text{ \% g/g}$ ). (d) Échantillon B à  $t_0 + 20h$ .

Il y a deux mécanismes à envisager dans l'évolution temporelle de ces gels : le mûrissement et la prise élastique du gel. Considérons deux bulles de même volume initial  $V$  contenant chacune  $N$  moles de gaz. Afin de simplifier le problème, on considère que ces deux bulles sont éloignées l'une de l'autre et isolées dans la matrice de gel.

Du point de vue du mûrissement, le système des deux bulles correspond à un point d'équilibre instable. Si l'on s'écarte de ce point d'équilibre (l'une devient plus grande que l'autre), une différence de pression de Laplace  $\delta P_\gamma = \gamma/R_b$  apparaît qui tend à activer les échanges de gaz d'une bulle vers l'autre. Ceci est équivalent au fait de dire qu'il y a gain d'énergie de surface  $\delta E_S$  associé au transfert de matière  $\delta N$  du fait de la diminution



de la surface totale du système. À ce mécanisme, s'oppose la force de rappel élastique du gel de module élastique  $G$ . La compétition des deux énergies élastiques fait apparaître le nombre sans dimension  $R_b G / \gamma$ , qui détermine la stabilité thermodynamique du système.

L'aspect cinétique est en fait un élément clé. Plus le gel se déforme, plus l'énergie élastique augmente à moins que le gel n'en soit encore à un stade de sa gélification où il se comporte plus comme un liquide que comme un solide. La prise du gel se fait progressivement (cf. figure 2.4). La dispersion de taille de bulle a le temps d'augmenter par le mécanisme de mûrissement lors des premières phases de la gélification. Lorsque le module atteint la fin de la phase 2 de la gélification, la mousse est déjà hors équilibre du fait de la dispersion de tailles de bulles. La question est donc finalement de savoir si le module se développe de manière à renforcer la force de rappel plus rapidement que le mûrissement.

Ainsi, augmenter la taille des bulles réduit la différence de pression de Laplace qui est le moteur du mûrissement, et ainsi de retarder le mûrissement. Augmenter la concentration en gélatine  $C$  accélère la cinétique de gélification et permet d'atteindre des modules élastiques plus élevés. Ces deux paramètres de production jouent de concert, de manière à pouvoir obtenir des échantillons stables sur plusieurs semaines.

Pour aller au-delà du raisonnement à deux bulles, nous avons observé que les défauts dans la structure cristalline sont les lieux de "nucléation" du mûrissement. Cela peut s'expliquer par une asymétrie des sollicitations. En effet, la diffusion au sein d'un réseau ordonné, voit ses effets amoindris par la symétrie et la périodicité du réseau.

## Chapitre 3

# Diffusion multiple de la lumière comme sonde de la dynamique des mousses

Dans le cadre de la théorie de la spectroscopie de la lumière diffuse (DWS) et plus particulièrement de la spectroscopie de visibilité speckle (SVS), ce chapitre présente une nouvelle technique de spectroscopie de la propagation acoustique adaptée au suivi des ondes dans un milieu turbide. Dans une première section, qui reproduit un article publié [66], les principes de la méthode sont exposés puis validés par le suivi d'ondes de cisaillement dans une mousse liquide (cf. section 3.1). Des ondes progressives sont excitées en continu et le milieu est suffisamment atténuant pour que des ondes stationnaires ne puissent s'installer dans la géométrie de l'échantillon. La méthode est ensuite étendue au suivi d'excitations impulsionnelles dans une matrice élastique de diffuseurs statiques (cf. section 3.3.1). Finalement, une configuration qui permet de résoudre le profil de déformation d'une onde stationnaire est également exposée (cf. section 3.3.2).

### 3.1 Spectroscopie acoustique de visibilité speckle

(Inclusion de l'article Wintzenrieth et al. PRE 2014 [66] retirée pour respecter la propriété intellectuelle.)

Deux nouveaux modes d'excitation et de suivi des ondes acoustiques par spectroscopie acoustique de visibilité speckle (LSVAS) s'ajoutent au mode d'excitation et suivi d'ondes harmoniques décrit dans l'article [66]. Le premier correspond à un mode d'excitation impulsionnelle sous forme d'un train d'onde d'une durée de quelques périodes.

Le second correspond à une excitation harmonique continue dans des échantillons de taille finie faiblement atténuants de sorte qu'une onde stationnaire mette en vibration l'échantillon. Avant de nous intéresser aux spécificités de chacun des modes d'excitation, nous introduisons le concept de carte de visibilité.

## 3.2 Cartes de visibilité speckle

La notion de carte de visibilité introduite dans cette section est nouvelle. Elle constitue une extension de certains des principes déjà exposés dans l'article, notamment ceux qui permettent l'obtention du diagramme spatio-temporel de visibilité [66] (cf. section 3.1). Ce concept constitue le socle commun aux trois techniques d'analyse des données obtenues dans le cadre des deux méthodes d'acquisition exposées dans la section 3.3.

### 3.2.1 Définition et méthode

#### Définition

Dans ce manuscrit, une carte de visibilité correspond à une représentation de la visibilité pour des acquisitions résolues spatialement. La représentation en niveaux de gris ou d'après une palette de couleurs de la visibilité résolue spatialement selon deux dimensions spatiales ( $0x$ ) et ( $0z$ ) est appelée carte de visibilité ( $V(x, z)$ ). La convention utilisée dans le présent contexte de propagation acoustique est telle que la direction ( $0z$ ) corresponde à la direction de propagation, tandis que la direction ( $0x$ ) correspond à une direction transverse. Cependant, la visibilité est une grandeur statistique qui requiert différentes réalisations du désordre pour être construite.

Dans le cas présent, les réalisations du désordre nécessaires à l'établissement d'une carte de visibilité sont obtenues grâce à l'utilisation d'un disque diffuseur. Ce disque est traité par un léger dépoli isotrope. Suite au traitement, les inhomogénéités à la surface du verre diffusent la lumière et lui donnent un aspect turbide. Le caractère diffusif provoque un élargissement et un déphasage du faisceau incident qui le traverse. En outre, comme la distribution des inhomogénéités à la surface du verre est aléatoire, une légère rotation du disque induit un changement aléatoire des conditions initiales en phase.

$$V(x, z) = \frac{\sum_{i=1}^N I_i^2(x, z) - \left(\sum_{i=1}^N I_i(x, z)\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N I_i(x, z)\right)^2} \quad (3.1)$$

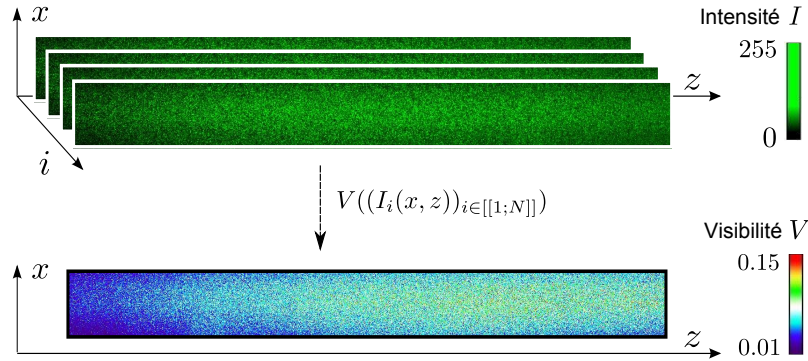


FIGURE 3.1 – Acquisitions pour différentes positions angulaires  $i \in [[1; N]]$  du disque diffuseur.  $I$  est l'intensité d'un pixel mesuré par la caméra.  $V$  est la visibilité déterminée à partir des intensités  $I_i$  à l'aide de la formule 3.1. La faible défocalisation de la lentille permet de supprimer des variations d'intensité dues aux bulles visibles en surface et de conserver néanmoins l'information sur l'origine spatiale  $(x, z)$  des speckles. La direction  $(0z)$  est la direction de propagation de l'onde. La direction  $(0x)$  correspond à une direction de confinement transverse à la direction de propagation.

où  $I_i(x, z)$  correspond à l'intensité du pixel situé en  $(x, z)$  sur une image de la figure d'interférence speckle rétrodiffusée pour une position du disque d'indice  $i$  telle que  $i \in [[1; N]]$  avec  $N$  le nombre total de positions du disque diffuseur.

## Méthode

Une caméra munie d'un objectif enregistre en rétrodiffusion la figure speckle. L'objectif est légèrement défocalisé de manière à supprimer des variations d'intensité dues aux bulles visibles en surface et de conserver néanmoins la résolution spatiale. La figure 3.1 illustre comment, à partir d'images acquises pour différentes positions du disque, les cartes de visibilité sont construites.

Du fait de la nature du faisceau incident et de la géométrie de cylindres de révolution des échantillons, l'éclairage et l'intensité de la lumière rétrodiffusée ne sont pas parfaitement homogènes. Ces hétérogénéités induisent une modification de la distribution des intensités rétrodiffusées, que la norme par l'intensité moyenne au carré ne compense pas. Elles ont donc un impact sur la visibilité, qui ne rend pas compte de la dynamique de l'échantillon. Afin de pallier ces effets, les cartes de visibilité sont normées par une carte de visibilité de l'échantillon au repos ( $V_R(x, z)$ ) selon la formule suivante :

$$\bar{V}(x, y) = V(x, z)/V_R(x, z) \quad (3.2)$$

Ce procédé est analogue à celui utilisé pour normer les profils de visibilité obtenus dans la mousse liquide (cf. section 3.1).

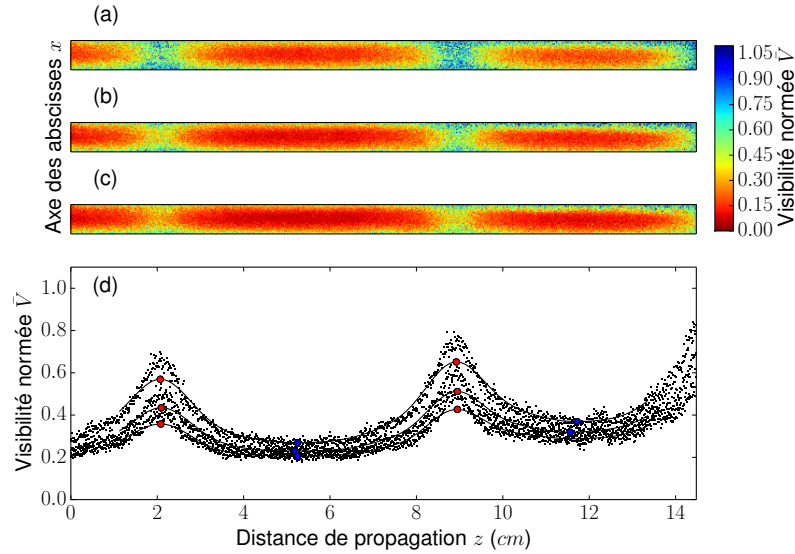


FIGURE 3.2 – Exemple de cartes (a-c) et profils de visibilité  $\bar{V}$  normée par la visibilité au repos  $V_R$  (d) selon la formule 3.2 obtenus avec un temps d'exposition  $T_e = 200 \text{ ms}$  pour une mousse gélifiée de diamètre de bulles  $0.6 \text{ mm}$  et dans des tubes de diamètre  $4 \text{ mm}$ . Les trois cartes et trois profils correspondent à des amplitudes d'excitation croissantes séparées par un facteur  $\sqrt{2}$  dans une gamme entre  $5 \mu\text{m}$  et  $10 \mu\text{m}$  crête-crête environ à une fréquence de  $f = 2.2 \text{ kHz}$ . Les cartes de visibilité de haut-en-bas (a), (b), (c) correspondent aux trois profils de visibilité représentés en (d) du haut vers le bas. Les indications de distance de propagation en abscisse du graphique (d) renseignent également sur la distance à laquelle se situent les speckles représentés au niveau des cartes de visibilité. Par ailleurs, l'échelle de distance selon l'axe ( $0x$ ) est identique à celle selon l'axe ( $0z$ ). Les courbes continues sont le résultat d'un lissage par convolution avec une fenêtre de Hann de longueur 15 % de la longueur totale. Les points rouges et bleus sur les courbes indiquent les extrema des profils de visibilité lissés.

### 3.2.2 Cas d'une onde stationnaire

#### Profil de visibilité

Dans le cas du suivi d'une onde stationnaire, la dynamique est directement visible sur les cartes de visibilité normées présentées ci-dessus. La figure 3.2 donne un exemple de cartes de visibilité normées pour une excitation stationnaire à  $2 \text{ kHz}$ .

Dans la configuration de mesure considérée, seule l'évolution de la visibilité avec la distance de propagation  $z$  est utile. Des profils de visibilité sont par conséquent établis en effectuant une moyenne sur la dimension transverse  $x$  :

$$\bar{V}(z) = \langle \bar{V}(x, z) \rangle_x \quad (3.3)$$

Bien que cela n'apparaisse pas au niveau des profils de visibilité de la figure 3.2, au niveau des cartes de visibilité, certaines valeurs de la visibilité normée  $\bar{V}$  dépassent la valeur de référence au repos  $\bar{V} = 1$ . Le bruit expérimental lié au bruit électronique de

la caméra conjugué au sous-échantillonnage en terme de réalisation du désordre est à l'origine de valeurs qui peuvent dépasser 1. Pour un échantillon au repos, la valeur de référence  $\bar{V} = 1$  est en réalité un mode sur lequel la distribution des visibilité est centrée mais dont la largeur à mi-hauteur est non-nulle.

### Modulations stationnaires

Nous avons vu dans l'article (cf. section 3.1) que pour une onde fortement atténuée dans la limite des temps d'exposition  $T_e$  de la caméra longs devant la dynamique de l'onde excitée  $1/f$ , la visibilité n'est plus modulée par les oscillations liées à la phase de l'onde mais seulement par son enveloppe exponentiellement atténuée. De même, pour une onde stationnaire, dans la limite des longs temps d'exposition  $T_e$ , la visibilité n'est plus sensible aux battements temporels de la phase mais seulement à l'enveloppe spatiale de l'onde.

Dans le cas des oscillations de la visibilité normée présentées sur la figure 3.2, l'exposition dure plus de 400 périodes temporelles de l'onde. Les nœuds et ventres du gradient de déformations correspondent aux maxima et minima de visibilité et sont représentés par des points rouges et bleus respectivement.

### 3.2.3 Cas d'un train d'onde

#### Cartes de visibilité normées

Des images aux instants successifs ( $t_j$ ) sont acquises ( $1 \leq j \leq N_t$ ) où  $N_t$  désigne le nombre d'instant sondés. L'acquisition est ensuite répétée pour chacune des  $N$  positions du disque diffuseur ( $30 \leq N \leq 100$ ). Des cartes de visibilité pour chaque instant  $t_j$  sont construites à partir des  $N$  positions du disque au fur et à mesure de l'acquisition (grâce à un algorithme de traitement d'image écrit en langage C).

Le traitement d'image commence dès l'acquisition des images. Deux tableaux d'images de longueur égale au nombre d'instant  $N_t$  sont créés. Les sommes partielles du premier moment et du second moment de l'intensité  $I$  sont conservées respectivement dans ces deux tableaux et mis à jour pour chaque position du disque. Une fois que les acquisitions ont été effectuées pour les  $N$  positions du disque, les cartes de visibilité correspondant à chaque instant  $t_j$  sont construites (cf. figure 3.1).

Dans le cas envisagé ici d'une excitation impulsionnelle, une carte de visibilité de référence moyennée sur le temps  $\langle V_R \rangle_t$  est construite à partir des premiers instants de

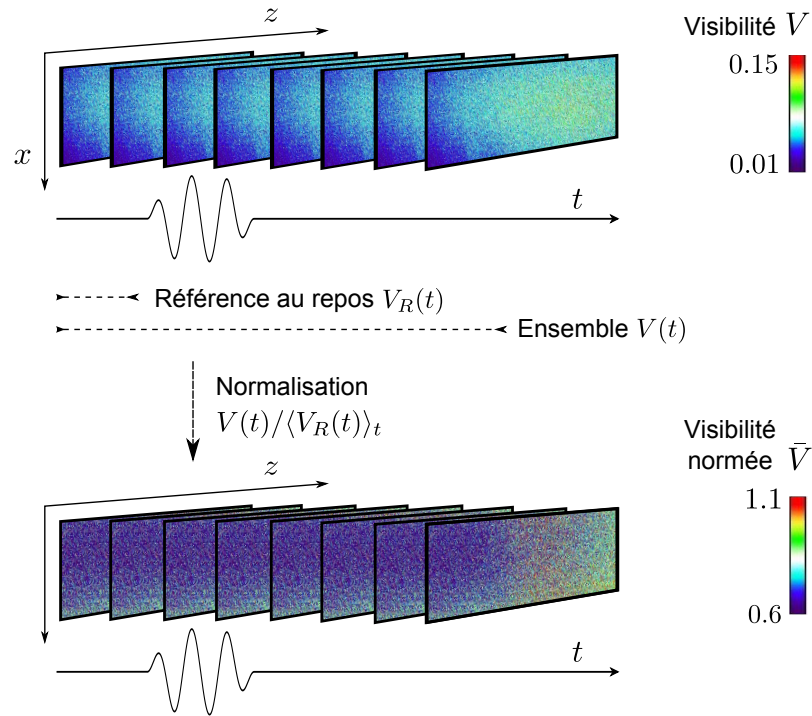


FIGURE 3.3 – Procédure de normalisation de la visibilité par celle des images qui précèdent le début du tir conformément à l'équation 3.4.

l'acquisition qui précèdent le tir (cf. figure 3.3). Finalement, le calcul de la visibilité normée défini par l'équation 3.2 est substitué par le calcul suivant :

$$\bar{V}(x, y) = V(x, z) / \langle V_R \rangle_t \quad (3.4)$$

### Diagramme spatio-temporel

Comme pour le cas d'une onde stationnaire, on commence par calculer les profils de visibilité à partir des cartes de visibilité en prenant la moyenne sur la dimension transverse (cf. équation 3.3). Mais, à la différence du cas stationnaire, les profils de visibilité en régime pulsé dépendent de la phase temporelle. Les profils correspondant aux différents instants  $t_j$  de la propagation sont ensuite assemblés sous forme de diagramme spatio-temporel. Les lignes de pixels codant les profils de visibilité aux instants successifs sont alignés selon un axe temporel. Le diagramme spatio-temporel obtenu représente la visibilité en fonction du temps et de la direction de propagation (cf. figure 3.4).

Comme pour une excitation continue se propageant en milieu fortement atténuant (cf. section 3.1), la vitesse de phase correspond à la pente des lignes isophasse dans le diagramme spatio-temporel. En outre, la pente de l'enveloppe qui module les oscillations de la phase renseigne sur la vitesse de groupe. Les pentes associées respectivement à la

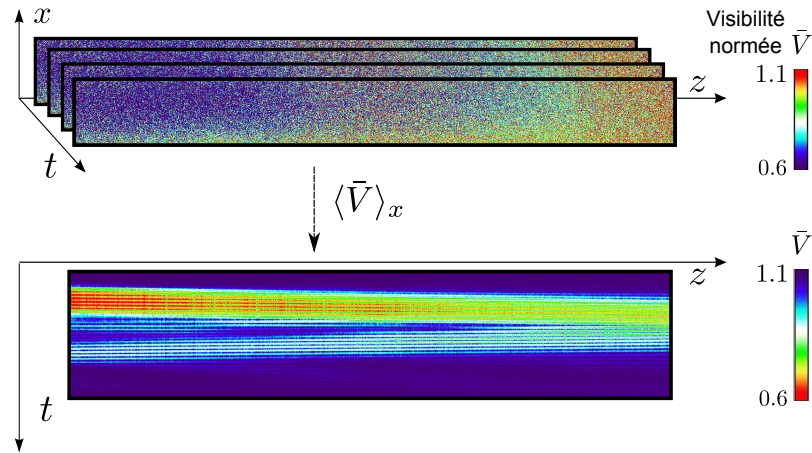


FIGURE 3.4 – Cartes de visibilité pour différents instants de la propagation  $t_j$  définis par rapport à l’instant d’émission du signal impulsionnel. La direction  $(0z)$  est la direction de propagation de l’onde. La direction  $(0x)$  correspond à une direction de confinement transverse à la direction de propagation. La visibilité  $\bar{V}(x, z, t = t_j)$  représentée sur les cartes de visibilité est définie par l’équation 3.4, tandis que la visibilité normée  $\bar{V}(z, t)$  représentée sur le diagramme spatio-temporel correspond aux profils de visibilité associés aux cartes de visibilité, qui sont calculés à l’aide de la relation 3.3.

vitesse de phase et de groupe de l’impulsion ne correspondent pas (cf. figure 3.4). Ce fait rend compte du caractère dispersif des ondes guidées selon la direction  $(0z)$ .

### 3.3 Spectroscopies de visibilité speckles impulsionnelle et stationnaire

#### 3.3.1 Détection d’un train d’onde acoustique

##### Avantages et inconvénients du mode impulsionnel

Une excitation de forme impulsionnelle excite un grand nombre de fréquences à la fois et présente ainsi l’avantage d’une mesure des vitesses de phases et/ou de groupe de tout un domaine fréquentiel en un seul tir. Une excitation de forme impulsionnelle évite d’avoir à prendre en compte certains des effets de bords de la propagation de l’onde dans l’objet dont on veut caractériser les propriétés acoustiques. En ce qui concerne les ondes de cisaillement dans les mousses liquides, la forte atténuation du milieu évite d’avoir à considérer les effets de bord, même dans un cas d’excitation continue dans un échantillon de taille décimétrique (cf. section 3.1). Ce n’est cependant pas le cas pour des ondes longitudinales dans la plupart des matériaux de cette dimension, pour lesquels les réflexions et la géométrie particulière doivent être pris en considération. En régime d’excitation continue, les ondes réfléchies interfèrent avec les ondes émises et à moins d’un nombre important de longueurs d’onde dans le système, il est difficile d’en déduire une



vitesse de phase. Pour une impulsion suffisamment brève et un milieu suffisamment peu dispersif, l'excitation impulsionnelle évite ces effets d'interférence avec l'onde réfléchie et permet de bien résoudre des ondes lentes. Pour une onde traversant un échantillon de taille décimétrique, suivie sur une durée de quelques dizaines de millisecondes, cela limite à une vitesse de groupe de l'ordre de la dizaine de mètres par seconde.

Dans le cadre de la LSVAS, l'approche impulsionnelle souffre d'une limitation due à la non-linéarité de la dépendance de la visibilité en la déformation (cf. section 3.1, équations 5 et 15). En effet, dans le cadre de mesures impulsionnelles, on cherche en général à obtenir une excitation la plus courte et la plus intense possible afin de bien exciter tout le domaine spectral. La limite mathématique est celle de la distribution de Dirac  $\delta(t)$  dont la transformée de Fourier est d'amplitude constante sur tout le domaine spectral. Lors de mesures de spectroscopie de visibilité, la non-linéarité fait apparaître des harmoniques des fréquences détectées dans le spectre. Afin d'isoler ces artefacts, il faut s'assurer de la correspondance bijective entre le spectre de la réponse et le spectre de l'excitation<sup>1</sup>. Ces effets seront à nouveau discutés lors de la présentation du dispositif d'excitation acoustiques (cf. section 4.2.2). Dans la pratique, il faut éviter une excitation trop large bande qui rendrait impossible la distinction entre le signal exploitable et les artefacts. Afin de compenser cette limitation (i.e. sonder un spectre plus large bande), cette procédure est répétée pour des impulsions de fréquences centrales différentes.

### Traitement des données

Avant d'analyser les diagrammes spatio-temporels en visibilité, un lissage du diagramme sous forme de moyenne glissante selon la coordonnée d'espace  $z$  est appliqué. Une moyenne glissante correspond au résultat d'un produit de convolution entre les données et une fenêtre (e.g. rectangulaire) normée (i.e. d'intégrale sur son domaine de définition égale à 1). Si la visibilité était mesurée sur un intervalle continu, ce produit de convolution s'écrirait :

$$\langle \bar{V}(z) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W_{L_z}(z_j - z) \times \bar{V}(z_j) dz_j \quad (3.5)$$

où  $L_z$  est la longueur de lissage et  $W_{L_z}$  est la fonction de fenêtre. Dans le cadre de cette étude,  $W_{L_z}$  est toujours d'une fonction paire, nulle partout sauf sur un intervalle de longueur  $L_z$  centré sur 0. En particulier, s'il s'agit d'une fenêtre rectangulaire, l'expression

1. Notons que le fondamental du spectre de la réponse est situé à une fréquence double de celui de l'excitation du fait de la sensibilité à la valeur absolue d'un invariant de la déformation (cf. section 3.1).

exacte de  $W_{L_z}$  est la suivante :

$$W_{L_z}(z) = \frac{1}{L_z} \times \begin{cases} 1 & \text{si } 2|z| \leq L_z \\ 0 & \text{si } L_z < 2|z| \end{cases} \quad (3.6)$$

Cependant la visibilité est mesurée sur une grille de valeurs discrètes. Le produit de convolution se réécrit alors comme la somme :

$$\langle \bar{V}(z) \rangle = \sum_{j=1}^{N_z} W_{L_z}(z_j - z) \times \bar{V}(z_j) \quad (3.7)$$

où  $N_z$  est le nombre de pixels selon l'axe  $(0z)$ . La distance des pixels selon l'axe de propagation est donnée par la suite  $z_j$  avec  $j \in [[1; N_z]]$ . Cette opération de convolution correspond à un produit dans l'espace Fourier. Or le spectre d'une fenêtre rectangulaire n'optimise pas l'amplitude du signal contenue dans le lobe principal du spectre, ce qui peut être source de bruit. Il est par conséquent préférable d'utiliser une fenêtre apodisée (i.e. une fenêtre qui s'annule progressivement). La fenêtre utilisée dans la cadre de cette thèse pour les opérations de lissage est de type Hann<sup>2</sup> :

$$W_{L_z}(z) = \frac{1}{2W_0} \times \begin{cases} \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{z}{L_z}\right)\right) & \text{si } 2|z| \leq L_z \\ 0 & \text{si } L_z < 2|z| \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $W_0$  est un facteur de norme tel que la somme des valeurs prises par  $W_{L_z}$  soit égale à 1. La longueur typique d'échantillonnage est  $L_z = 50$  pixels à comparer aux 1280 pixels de longueur, ce qui correspond à un lissage à 4 %. La figure 3.5 présente l'effet d'un tel lissage sur un diagramme spatio-temporel typique.

Les étapes suivantes dans l'analyse des données consistent en des opérations sur le spectre de la visibilité lissée  $\langle \bar{V} \rangle$  (cf. équation 3.7), notée simplement  $\bar{V}$  dans la suite. Ces opérations utilisent l'implémentation numérique FFT (*Fast Fourier Transform*) de la transformée de Fourier discrète. Cette implémentation, adaptée à l'échantillonnage discret des quantités mesurées, est disponible dans la plupart des bibliothèques de calcul numérique. Par conséquent, son implémentation ne sera pas détaillée ici. Le signal de visibilité est ensuite filtré dans le domaine fréquentiel afin d'extraire les informations qui reflètent l'amplitude et la phase de l'onde de déformation. On repasse ensuite dans le domaine temporel par transformée inverse. La figure 3.6 représente les résultats de l'application d'un filtre passe-bas  $\tilde{V}$  et d'un filtre passe-bande  $\Delta\bar{V}$  sur le spectre de la visibilité, renseignant respectivement sur la modulation en amplitude de l'enveloppe  $\tilde{V}$

2. La fenêtre de Hann est parfois incorrectement appelée Hanning par assimilation à la fenêtre de Hamming.

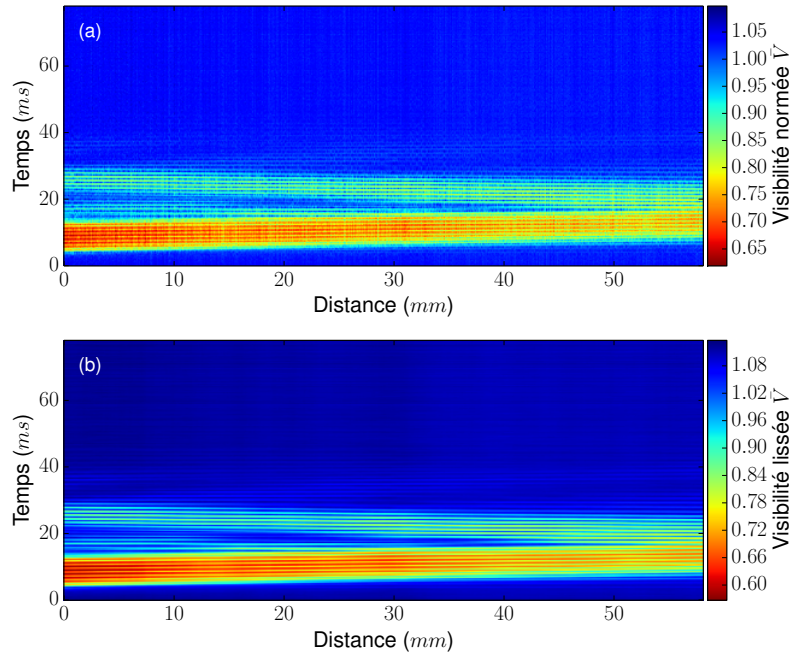


FIGURE 3.5 – Comparaison d’un diagramme spatio-temporel (a) pour une impulsion centrée sur la fréquence  $f = 400 \text{ Hz}$  et lissé par une moyenne glissante à 4 % (b). L’échantillon correspondant consiste en un tube rigide et transparent de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  rempli d’une mousse de diamètre de bulles moyen  $d = 0.6 \text{ mm}$ , de fraction volumique  $\phi = 0.85$  et âgée de 7.1 jours.

et les oscillations dues à l’évolution de la phase du paquet d’onde  $\Delta\bar{V}$ . Dans le spectre, seules les basses fréquences et les fréquences contenues dans le spectre d’excitation sont intéressantes. Les signaux de plus haute fréquence sont produits par des effets non-linéaires liés au système de détection. Nous reviendrons sur ces artefacts dans la section 4.2.2.

Afin de se rendre compte du résultat de ces opérations, l’évolution temporelle de la visibilité normée lissée et des visibilités filtrées au centre de l’échantillon sont représentées sur la figure 3.7 (a-c). La visibilité  $\bar{V}$  (cf. figure 3.7.a) présente un niveau moyen, dont les écarts à 1 reflètent l’amplitude de la déformation. Sur ce niveau moyen de visibilité, s’inscrivent les oscillations dues à la phase de l’onde. Ainsi, la visibilité additionne les composantes spectrales de basse fréquence  $\tilde{V}$  associées à l’enveloppe et les composantes spectrales centrées sur la fréquence des oscillations  $\Delta\bar{V}$ . Dans le profil de déformation original, ces composantes spectrales sont en facteur l’une de l’autre.

Afin de construire une quantité qui reflète plus fidèlement l’onde de déformation, on introduit la variation de visibilité équivalente  $\Delta\tilde{V} = \Delta\bar{V} \times (1 - \tilde{V})$ . Son évolution temporelle au centre de l’échantillon est représentée sur la figure 3.7.d. Le diagramme spatio-temporel qui lui correspond est représenté sur la figure 3.8. L’utilisation de cette quantité corrige l’écrtage des maxima de visibilité qui cause des variations de visibilité

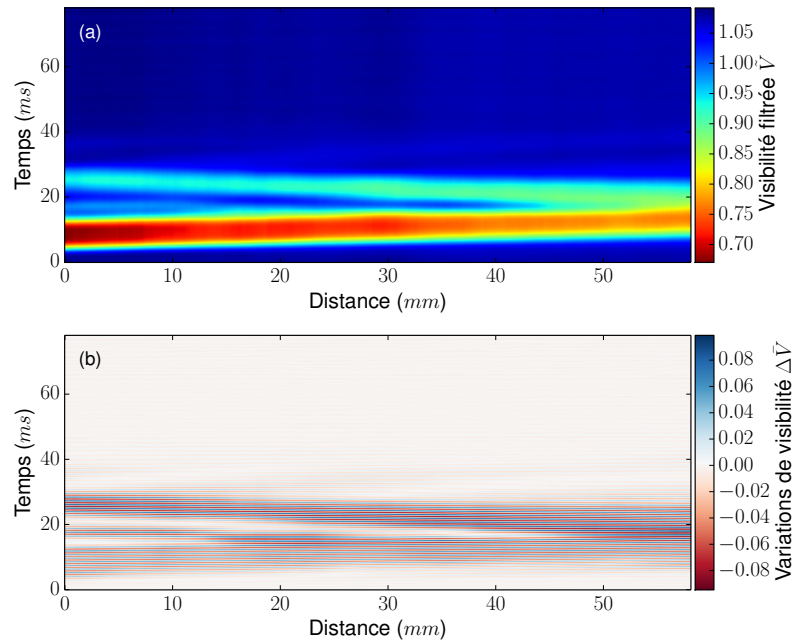


FIGURE 3.6 – Diagrammes spatio-temporels de la visibilité  $\tilde{V}$  obtenue suite à l'application d'un filtre passe-bas (a) et des variations de visibilité  $\Delta\tilde{V}$  obtenues suite à l'application d'un filtre passe-bande (b) centré sur la fréquence moyenne du signal d'excitation et de demi-largeur 40 %. La fréquence d'excitation vaut ici  $f = 400 \text{ Hz}$ . Le premier (a) fait ressortir l'amplitude de l'enveloppe tandis que le second (b) fait ressortir les oscillations de phase. Le premier (a) fait ressortir la vitesse de groupe et le second (b) la vitesse de phase.

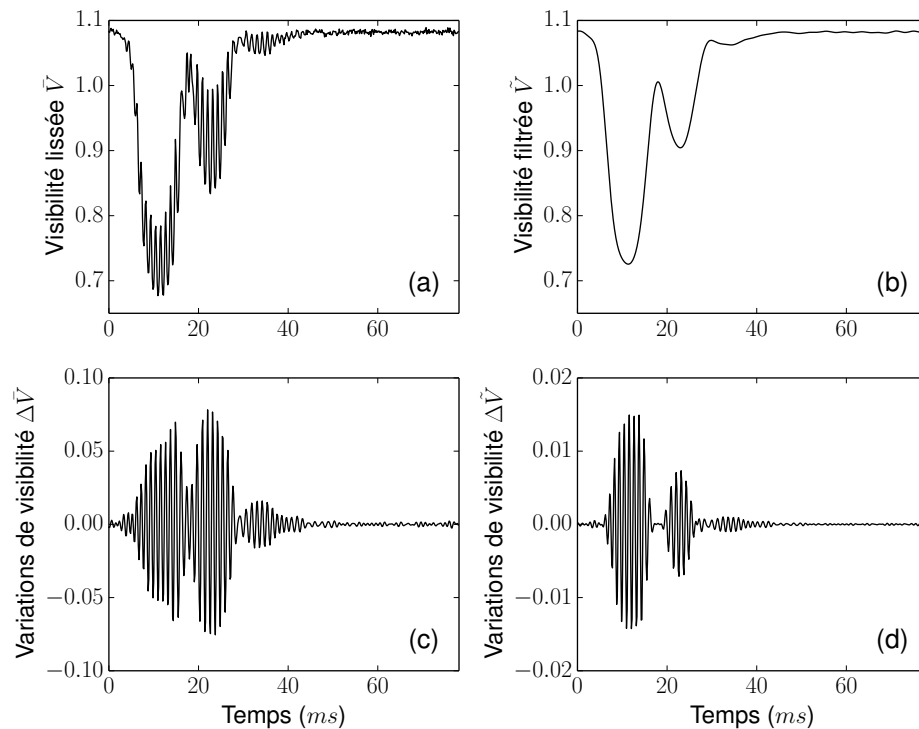


FIGURE 3.7 – Profils de visibilité normée  $\tilde{V}$  (a), filtrée par un passe-bas  $\tilde{V}$  (b), un passe-bande  $\Delta\tilde{V}$  (c) et les variations de visibilité équivalente  $\Delta\tilde{V}$  (d) reconstruite à partir des visibilités filtrées.

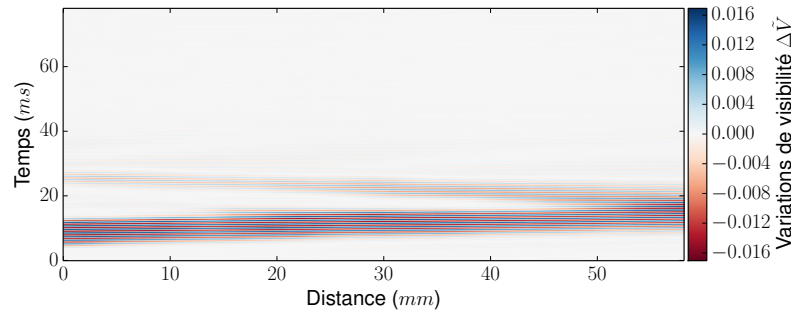


FIGURE 3.8 – Diagramme spatio-temporel des variations de visibilité équivalentes  $\Delta\tilde{V}$  obtenues à partir des diagrammes spatio-temporels des modulations de visibilité basse fréquence  $\tilde{V}$  et des variations de visibilité  $\Delta\tilde{V}$ .

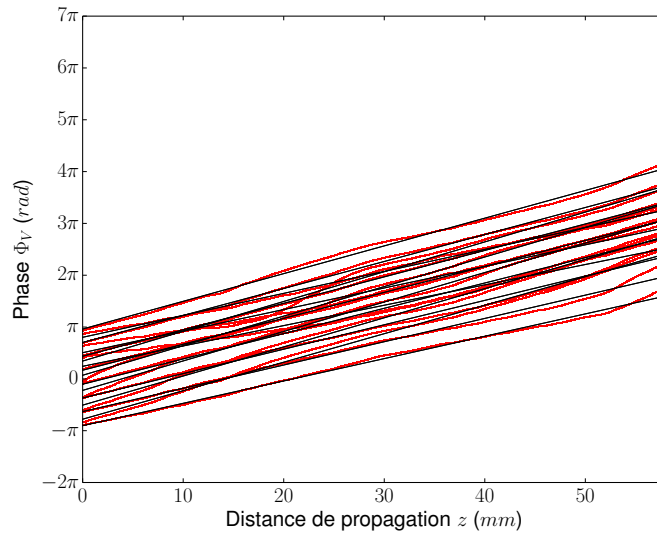


FIGURE 3.9 – Exemple d’ajustements des évolutions de la phase  $\Phi_V = 2kz - \Phi_0$  en espace par régression linéaire. Les évolutions de la phase sont extraites du diagramme spatio-temporel représenté sur la figure 3.6 dont l’excitation est centrée sur la fréquence  $f = 400 \text{ Hz}$ . Le diagramme a été préalablement tronqué à  $18 \text{ ms}$  afin de relever la phase du paquet d’onde incident sans être affecté par le signal réfléchi.

$\Delta\tilde{V}$  de l’onde incidente d’amplitude plus faible que l’onde réfléchi (cf. figure 3.7.c).

Finalement, on effectue une transformée de Fourier discrète (FFT) de  $\Delta\tilde{V}(z, t)$  selon la dimension temporelle. Les composantes spectrales dans un domaine restreint qui correspond à l’excitation sont passées en revue. On s’intéresse à leur phase si la densité spectrale d’amplitude qui leur correspond est au moins 10 fois supérieures au niveau moyen du bruit. L’interpolation linéaire de l’évolution de la phase selon la dimension d’espace de composantes extraites du diagramme 3.8 est représentée sur la figure 3.9. Cette procédure est tout à fait analogue à celle utilisée lors des mesures sur les mousses liquides (cf. section 3.1, figure 5). Si l’erreur relative sur la détermination de la pente de l’interpolation est inférieure à 2 %, la mesure est conservée et la vitesse de phase est déduite.

### 3.3.2 Mesure du profil d'un mode stationnaire

#### Avantages et inconvénients du mode stationnaire

Si la non-linéarité du système de suivi des ondes a des désavantages, elle a aussi un net avantage. En effet, la non-linéarité de la sensibilité de la visibilité fait que sa moyenne sur plusieurs périodes temporelles ne s'annule pas. Ainsi, si une onde stationnaire résonne à hautes-fréquences dans la cavité, même les acquisitions utilisant des temps d'obturation très longs devant la période seront sensibles à la phase de l'onde. En particulier, ce mode d'acquisition est un bon complément à l'acquisition pulsée lorsque les vitesses de phase et de groupe dépassent la gamme de sensibilité.

Le fait de pouvoir sonder des fréquences bien supérieures à  $1/T_e$  où  $T_e$  est le temps d'exposition de la caméra constitue le principal avantage du suivi des ondes en régime stationnaire. La condition sur le temps d'exposition est telle que  $T_e \geq T = f^{-1}$  où  $f$  et  $T$  sont respectivement la fréquence d'excitation et la période temporelle de l'onde acoustique. Cette particularité permet de lever les limitations liées à un manque de luminosité, à une cadence d'acquisition trop lente ou encore une rapidité insuffisante de l'obturation. Par ailleurs, le nombre d'images nécessaires à l'acquisition d'une fréquence est égal au nombre de positions du disque diffuseur utilisé pour la moyenne sur les réalisations des speckles. Contrairement au cas de l'excitation impulsionnelle, il n'est pas nécessaire de suivre l'évolution temporelle.

#### Analyse des données

L'analyse des profils d'onde stationnaire est effectuée en repérant les écarts entre maxima et minima locaux de visibilité qui renseignent sur la longueur d'onde acoustique (cf. figure 3.2). Cette détection de maxima et minima locaux est automatisée. L'algorithme de traitement s'appuie sur les profils de visibilité lissés. Il commence par repérer tous les extrema locaux selon la coordonnée d'espace  $z$ , en vérifiant que le point est de visibilité supérieure (respectivement inférieure) à celle de ses deux voisins. Afin de déterminer si l'extremum n'est pas dû à un effet de bruit local, on vérifie que, s'il s'agit d'un maximum, sa visibilité est supérieure à la moyenne plus une fraction de l'écart-type et réciproquement, s'il s'agit d'un minimum, que sa visibilité est inférieure à la moyenne moins une fraction de l'écart-type. Ensuite, la séquence en espace des extrema est considérée, afin de vérifier que conformément à un profil d'oscillation minima et maxima se succèdent alternativement.

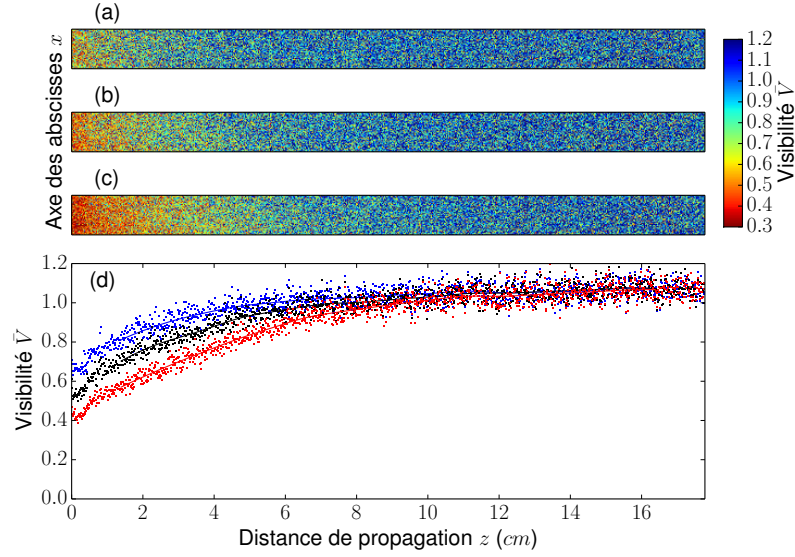


FIGURE 3.10 – Exemple de cartes (a-c) et profils de visibilité  $\bar{V}$  normée par la visibilité au repos  $V_R$  (d) selon la formule 3.2 obtenue avec un temps d'exposition  $T_e = 200 \text{ ms}$  pour une mousse gélifiée de diamètre de bulles  $0.6 \text{ mm}$  et dans des tubes de diamètre  $10 \text{ mm}$ . Les trois cartes et trois profils correspondent à des amplitudes d'excitation croissantes séparées par un facteur  $\sqrt{2}$  dans une gamme entre  $5 \mu\text{m}$  et  $10 \mu\text{m}$  crête-crête environ à une fréquence de  $f = 100 \text{ Hz}$ . Les cartes de visibilité de haut-en-bas (a), (b), (c) correspondent aux trois profils de visibilité représentés en (d) du haut vers le bas. Les indications de distance de propagation en abscisse du graphique (d) renseignent également sur la distance à laquelle se situent les speckles représentés au niveau des cartes de visibilité. L'échelle de distance selon l'axe ( $0x$ ) est identique à celle selon l'axe ( $0z$ ). Les courbes continues sont le résultat d'un lissage par convolution avec une fenêtre de Hann de longueur 15 % de la longueur totale.

Dans les cas de profils très atténués voire évanescents tels ceux représentés sur la figure 3.10, l'atténuation est déduite par la technique présentée dans l'article (cf. section 3.1, paragraphe IV.C). Cette technique peut également faire l'objet d'une automatisation en mesurant la distance en visibilité entre deux profils de visibilité atténuée  $\bar{V}_1$  et  $\bar{V}_2$  :

$$\|\bar{V}_2 - \bar{V}_1\|^2 = \sum_{j=1}^{N_z - n_z} \frac{1}{(N_z - n_z)^2} (\bar{V}_2(z_j + n_z \delta z) - \bar{V}_1(z_j))^2 \quad (3.9)$$

La minimisation du carré de cette distance en fonction du décalage  $n_z \delta z$  introduit entre les profils permet d'évaluer le décalage qui conduit au meilleur recouvrement des profils tel celui obtenu sur la figure 3.11.

En complément, nous calculons le profil de visibilité attendu pour un mode stationnaire, avec une longueur d'onde et une longueur d'atténuation donnée à l'aide de l'équation 4.52 (cf. section 4.6). Si en ajustant ces deux longueurs, un bon accord avec les données expérimentales de visibilité est obtenu pour 3 amplitudes de déformation différentes, nous considérons les valeurs obtenues comme fiables. Nous avons validé la méthode plus simple décrite ci-dessus en comparant les résultats avec ceux obtenus à

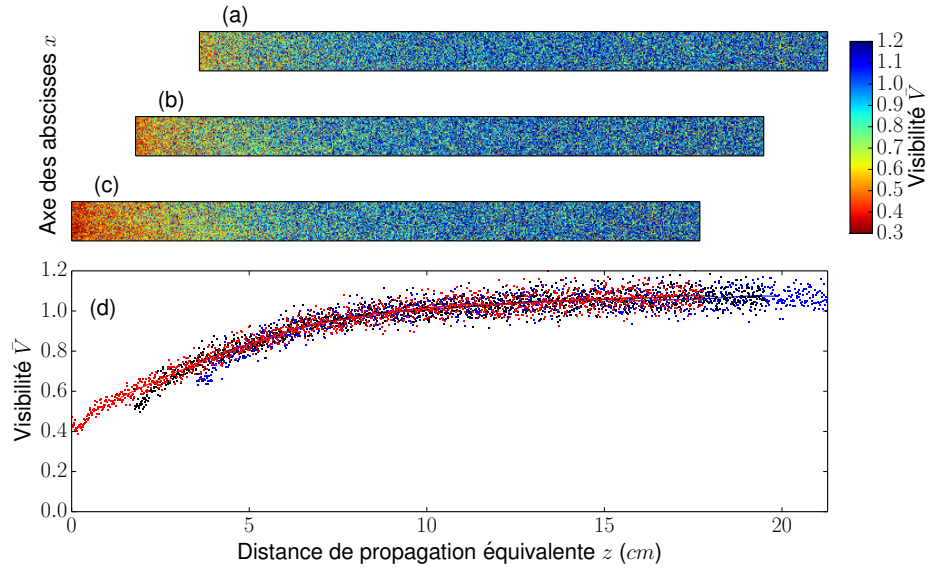


FIGURE 3.11 – Exemple de cartes (a-c) et profils de visibilité  $\bar{V}$  normée par la visibilité au repos  $V_R$  (d) selon la formule 3.2 obtenus avec un temps d'exposition  $T_e = 200$  ms pour une mousse gélifiée de diamètre de bulles  $0.6$  mm et dans des tubes de diamètre  $10$  mm. Les trois cartes et trois profils correspondent à des amplitudes d'excitation croissantes séparées par un facteur  $\sqrt{2}$  dans une gamme entre  $5$   $\mu\text{m}$  et  $10$   $\mu\text{m}$  crête-crête environ à une fréquence de  $f = 100$  Hz. Les cartes de visibilité de haut-en-bas (a), (b), (c) correspondent aux trois profils de visibilité représentés en (d) du haut vers le bas. Les indications de distance équivalente de propagation en abscisse du graphique (d) correspondent à la distance en prenant en compte le décalage qui permet le meilleur recouvrement. Elles renseignent également sur la distance équivalente à laquelle se situent les speckles représentés au niveau des cartes de visibilité. L'échelle de distance selon l'axe ( $0x$ ) est identique à celle selon l'axe ( $0z$ ). Les courbes continues sont le résultat d'un lissage par convolution avec une fenêtre de Hann de longueur 15 % de la longueur totale.

l'aide de l'équation 4.52.



## Chapitre 4

# Propagation du son dans les mousses solides

Ce chapitre présente une synthèse de l'état de l'art de l'acoustique des matériaux composites et en particulier cellulaires (cf. section 4.1). Nous envisagerons également l'acoustique des mousses liquides, car les mécanismes mis en jeu sont similaires à ceux qui régissent l'acoustique des mousses solides. Ensuite, notre dispositif expérimental acoustique est décrit (cf. section 4.2). Puis une discussion des modes guidés qui se propagent dans un matériau mou confiné dans un cylindre rigide de section circulaire est proposée (cf. section 4.3) afin de préparer la présentation et la discussion des résultats que nous avons obtenus sur les mousses gélifiées (cf. sections 4.4, 4.5 et 4.6).

### 4.1 État de l'art

Les mousses solides ou liquides sont des matériaux composites, dont les éléments de la microstructure peuvent vibrer les uns par rapport aux autres. En cela, les mousses se rapprochent des métamatériaux, qui tirent partie de leur microstructure résonante pour obtenir des propriétés propagatives originales.

Dans cette partie, le concept de métamatériau acoustique est d'abord explicité puis des exemples de métamatériaux, qui exploitent la dynamique de vibration d'une membrane sont donnés [67, 68]. Une section est consacrée à l'acoustique dans les mousses liquides. Nous y discutons de récents résultats concluant que la présence des films est source d'un comportement métamatériau des mousses [23]. Une dernière section présente les dernières avancées en acoustique des mousses solides.

### 4.1.1 Métamatériaux acoustiques

#### Définition et présentation

Le terme métamatériau est un néologisme utilisé dans différents contextes. De façon générale, il s'agit d'un matériau artificiel dont les propriétés sont peu communes dans la nature. Le terme a été introduit en électromagnétisme dans le cadre d'une prédiction théorique stipulant que la réalisation d'un matériau de perméabilité magnétique et de permittivité diélectrique simultanément négatives conduit à un indice de réfraction négatif [69]. Cette prédiction a été confirmée expérimentalement environ 30 ans plus tard [70, 71].

L'emploi du terme a été transposé à la mécanique en définissant les métamatériaux acoustiques par analogie avec les métamatériaux électromagnétiques. En mécanique, le terme peut être utilisé dans un contexte plus général<sup>1</sup>. Dans un métamatériau acoustique, la masse et l'élasticité jouent les rôles de la permittivité et la perméabilité dans un métamatériau électromagnétique. Il s'agit d'un matériau composite constitué de résonateurs mécaniques locaux, qui modifient la relation de dispersion des ondes acoustiques de la matrice dans laquelle ils sont insérés par leur comportement résonant.

Soulignons que les propriétés des métamatériaux considérées sont celles d'un milieu effectif observées à une échelle largement supérieure à celle de la microstructure. L'approche de type milieu effectif permet de résumer la dynamique du système par une équation sous la relation de dispersion suivante :

$$\rho^*(\omega) \omega^2 = L^*(\omega) k^2 \quad (4.1)$$

où  $\rho^*(\omega)$  est la masse volumique effective et  $L^*(\omega)$  le module d'élasticité effectif. La modélisation du comportement du gaz dans un milieu poreux (cf. section 1.3.3) est un exemple de ce type de démarche. Comme tout le spectre de la réponse mécanique est contenu dans l'équation 4.1, les contributions des résonances internes vont ressortir soit dans la densité soit dans l'élasticité. Ainsi les résonances internes pourront être sources de comportements dits de masse négative ou bien de comportements dits d'élasticité négative. Ces comportements 'exotiques' seront limités à une gamme de fréquences restreinte (à proximité des fréquences de résonances internes).

L'équation 4.1 permet également de se rendre compte que si l'une des deux grandeurs effectives  $\rho^*$  ou  $L^*$  est négative, le nombre d'onde est alors imaginaire pur et l'onde est évanescence. Dans ce cas, le métamatériau acoustique est dit simple négatif. Dans le

---

1. Un métamatériau mécanique peut notamment désigner les matériaux auxétiques : ce qui signifie de coefficient de Poisson négatifs [72].

cas, où les deux sont négatifs, l'onde acoustique peut se propager. La vitesse de groupe et donc le flux d'énergie sont dirigés dans la direction incidente, alors que la vitesse de phase est dirigée dans le sens opposé, ce qui donne un effet de réfraction négative (i.e. indice  $n^*$  négatif avec  $n^{*2} = \rho^*/L^*$ ) [73, 74, 75]. Dans ce cas, le métamatériau acoustique est dit double négatif.

### Résonateurs locaux

Un métamatériau acoustique contient des résonateurs mécaniques locaux qui sont couplés à une onde propagative, à l'instar des fonctions d'onde confinées autour des atomes individuels couplées aux fonctions d'ondes électroniques délocalisées dans un métal [36]. Dans le cas des métamatériaux simples négatifs, l'effet des résonateurs sur la relation de dispersion peut être vu comme un cas limite d'un effet qui dans le contexte des ondes guidées est parfois appelé répulsion de mode [76]. Ce dernier résulte d'un couplage de deux modes de polarisations différentes [77] ou de natures différentes (e.g. une onde optique avec une onde mécanique dans le cas des polaritons [78]). Il s'agit d'un phénomène analogue à la levée de dégénérescence en mécanique quantique. Tous ces phénomènes sont analogues au mécanisme qui régit la dynamique de deux oscillateurs linéaires (e.g. deux masses-ressorts) couplés (par un ressort).

Soit deux oscillateurs harmoniques individuels avec chacun sa fréquence de résonance respective. Quand un couplage est introduit, ces modes propres se décalent en fréquence. Et en particulier, si les deux oscillateurs oscillent à la même fréquence propre, le couplage élastique lève la dégénérescence et crée deux nouvelles fréquences propres du système, situées de part et d'autre de la fréquence propre initiale. Les deux nouveaux modes propres correspondent aux combinaisons symétriques et antisymétriques des modes propres découplés des résonateurs [25]. Un effet similaire donne naissance aux branches de phonons acoustiques et optiques dans un réseau diatomique cristallin (cf. annexe B). Bien que dans ce cas, la périodicité du réseau joue également un rôle en assurant le repliement de la branche optique [78].

Pour mettre en évidence la pertinence du concept de répulsion de mode dans les métamatériaux, examinons à nouveau la relation de dispersion de deux systèmes couplés 1.58. Cette relation générale représente deux modes propagatifs couplés. Sous une forme plus générique, pour un mode de déformation 1 qui met en mouvement un milieu de masse et d'élasticité équivalentes  $\rho_1$  et  $K_1$  couplé à un mode de déformation 2 qui met en mouvement un milieu de masse et d'élasticité équivalentes  $\rho_2$  et  $K_2$  :

$$(\rho_1 \omega^2 - K_1 k^2 - \kappa^*)(\rho_2 \omega^2 - K_2 k^2 - \kappa^*) = \kappa^{*2} \quad (4.2)$$

où  $\kappa^*$  est la constante de couplage du système. Si l'on fixe le nombre d'onde  $k$ , l'équation 4.2 est de la même forme que l'équation des oscillateurs couplés qui permet de déterminer les deux nouvelles fréquences propres résultantes du couplage [25]. Dans le cas de la répulsion de mode, cet effet se produit à nombre d'onde fixée et pour chaque nombre d'onde de la relation de dispersion. Considérons le cas où le mode 2 est non-propagatif ( $K_2 = 0$ ). Cela peut être le cas si par exemple le mode de vibration correspondant est celui d'un résonateur mécanique local. La relation de dispersion peut être réécrite de manière à faire apparaître un milieu effectif avec un mode propagatif équivalent :

$$\rho_1 \omega^2 - K_1 k^2 - \kappa^* = \frac{\kappa^{*2}}{\rho_2 \omega^2 - \kappa^*} \quad (4.3)$$

$$\rho_1^*(\omega) \omega^2 - K_1 k^2 = 0 \quad \text{où} \quad \rho_1^*(\omega) = \rho_1 - \frac{\kappa^* \rho_2}{\rho_2 \omega^2 - \kappa^*} \quad (4.4)$$

où  $\rho_1^*(\omega)$  est la masse effective du système couplé 1 – 2. A proximité de la résonance, elle tendra vers des infinités positives puis négatives. Un gap dit d'hybridation s'ouvre dans la relation de dispersion. Les effets respectifs de la répulsion de mode et de l'hybridation sont illustrés sur la figure 4.1. Elle permet de se rendre compte du fait que le gap d'hybridation est un cas limite de la répulsion de mode.

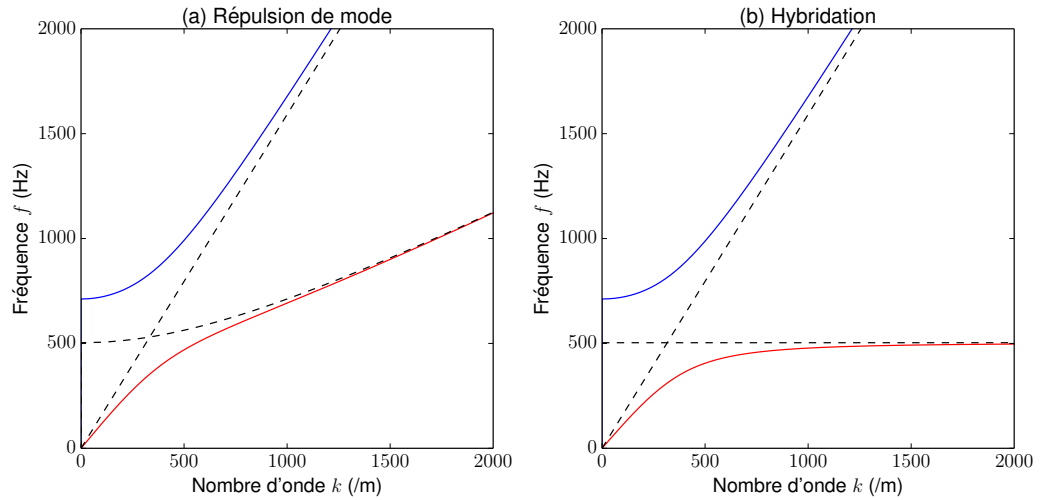


FIGURE 4.1 – Comparaison de la répulsion de mode (a) et de l'hybridation avec une résonance locale dans un métamatériau (b). La relation de dispersion (a) illustrant la répulsion de mode est obtenue avec l'équation 4.2 pour  $\rho_1 = \rho_2 = 10^3 \text{ kg.m}^{-1}$ ,  $K_1 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $K_2 = 10^4 \text{ Pa}$  et  $\kappa^* = 10^{10} \text{ Pa.m}^{-2}$ . Les courbes pointillées droite et courbe correspondent respectivement aux équations  $\rho_1 \omega^2 = K_1 k^2$  et  $\rho_2 \omega^2 = K_2 k^2 + \kappa^*$ . La relation de dispersion (b) illustrant l'hybridation est obtenue avec l'équation 4.4 pour  $\rho_1 = \rho_2 = 10^3 \text{ kg.m}^{-1}$ ,  $K_1 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $K_2 = 0 \text{ Pa}$  et  $\kappa^* = 10^{10} \text{ Pa.m}^{-2}$ . Les courbes pointillées droite et courbe correspondent respectivement aux équations  $\rho_1 \omega^2 = K_1 k^2$  et  $\rho_2 \omega^2 = \kappa^*$ . La relation de dispersion correspondant au phénomène d'hybridation (b) ainsi que les asymptotes sont en réalité strictement équivalentes à celles de la répulsion de mode (a) en prenant  $K_2 = 0$

Outre le couplage entre un mode localisé et un mode propagatif, une autre condition est nécessaire afin de justifier l'homogénéisation du système en un milieu effectif. Il faut que l'onde ne soit pas sensible à la microstructure du système mais à ses propriétés moyennes. S'il s'agit d'une condition nécessaire, il s'agit aussi d'une caractéristique qui fait tout l'intérêt des métamatériaux en comparaison avec les cristaux phononiques. Tous deux reposent sur des effets d'oscillateurs couplés pour ouvrir des gaps dans la relation de dispersion. Et tous deux visent des applications de contrôle d'onde (e.g. focalisation, guidage, absorption, etc...). Mais tandis que les cristaux phononiques sont résonants lorsque la longueur d'onde devient comparable à la taille de la maille (i.e. diffraction de type Bragg), les métamatériaux ne reposent pas sur la structure du cristal et peuvent être désordonnés [75]. Ainsi, les métamatériaux ouvrent la possibilité d'effectuer du contrôle d'onde à l'aide d'objets de taille inférieure à la longueur d'onde.

### Origine de la densité et de l'élasticité effective

L'élasticité d'onde de compression effective du milieu  $L^*$  est intrinsèquement liée au mode de diffusion monopolaire tandis que la densité effective  $\rho^*$  est intrinsèquement liée au mode dipolaire. Afin d'en comprendre la raison, considérons la diffusion par une inclusion gazeuse sphérique de masse volumique  $\rho_g$ , de compressibilité  $\chi_g$ , de rayon  $R_b$  dans une phase continue de module de cisaillement négligeable, de masse volumique  $\rho_c$  et de compressibilité  $\chi_c$  mis en vibration par une onde plane incidente. Le champ de déplacement total est la somme de l'onde plane incidente et du champ diffracté par l'inclusion qui se développe en terme de potentiel scalaire  $\phi$  sur les harmoniques sphériques divergentes [79, 27] :

$$\phi = \phi_0 e^{-ik_0z} + \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) D_n h_n(k_0r) P_n(\cos\theta) \quad (4.5)$$

où  $h_n$  est la fonction de Hankel sphérique divergente d'ordre  $n$  et  $P_n$  le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ . L'indice  $n$  donne l'ordre de la symétrie sphérique dans le développement multipolaire de l'onde réémise par le diffuseur. Il est possible de montrer que dans la limite des grandes longueurs d'onde par rapport à la taille du diffuseur, les deux premiers termes du développement dominant le potentiel scalaire, à savoir le terme monopolaire et le terme dipolaire [80, 81]. Les coefficients  $D_n$  qui donnent l'amplitude respective des termes dipolaire  $D_1$  et monopolaire  $D_0$  dans le cas des grandes longueurs d'onde

$(k_0 R_b \ll 1)$  s'écrivent [81] :

$$D_0 = \frac{i(k_0 R_b)^3}{3} \left[ \frac{\chi_g}{\chi_c} - 1 \right] \quad (4.6)$$

$$D_1 = \frac{i(k_0 R_b)^3}{3} \left[ \frac{\rho_g}{\rho_c} - 1 \right] \quad (4.7)$$

Ainsi dans cette limite, le coefficient  $D_0$  en facteur du rayonnement monopolaire dépend uniquement des coefficients de compressibilité  $(\chi_c, \chi_g)$ , tandis que le coefficient  $D_1$  dépend uniquement de la densité  $(\rho_c, \rho_g)$  des deux milieux.

Les théories de diffusion multiple des ondes permettent de relier la diffusion vers l'avant par un diffuseur unique à la propagation dans un milieu constitué d'une assemblée de ces diffuseurs [82, 81, 27]. Sous réserve de faibles corrélations spatiales entre diffuseurs, une représentation du milieu par un milieu effectif homogène se déduit de ce calcul de diffusion. Cette procédure d'homogénéisation 'renormalise' les propriétés du milieu en faisant entrer les termes de résonance monopolaire dans l'élasticité effective du milieu et les termes de résonance dipolaire dans la masse effective du milieu [75, 83]. Dans le cadre du calcul présenté (cf. équations 4.6 et 4.7), on peut retrouver le modèle de Wood (cf. section 1.3.2). Il est également possible d'obtenir la relation de dispersion dans un régime de fréquences intermédiaires qui comprend la fréquence de Minnaert [84].

Le caractère monopolaire ou dipolaire du résonateur se comprend qualitativement de la façon suivante. De même que l'oscillateur harmonique, la réponse des résonateurs se fait en phase à basse fréquence, en quadrature à résonance et en opposition de phase après résonance. Si le mode résonant dominant est de type monopolaire, le résonateur répond à un effort isotrope de compression successivement en phase, en quadrature et en opposition de phase. Dans ce dernier régime, il se dilate quand l'onde mécanique exerce une contrainte de compression (cf. figure 4.2 (a)). Ainsi, ce mode de résonance se manifeste dans les propriétés d'élasticité effective du milieu par une contribution successivement positive, nulle et négative. En revanche, si le mode résonant du résonateur local est de type dipolaire, cela signifie que dans un certain régime fréquentiel, le résonateur est en opposition de phase avec l'onde incidente qui exerce une contrainte uniaxiale (cf. figure 4.2 (b)). Ainsi, ce mode de résonance se manifeste dans les propriétés de masse effective du milieu.

De façon générale, un mouvement qui peut être représenté par un champ de déplacement dipolaire, est un mouvement incompressible ou isochore, lié à une impédance de type masse. Une résonance dipolaire peut donc donner lieu à des effets de masse effective négative. Un mouvement qui peut être représenté par un champ de déplacement monopolaire, est un mouvement dilatationnel et isotrope, lié à une impédance de type

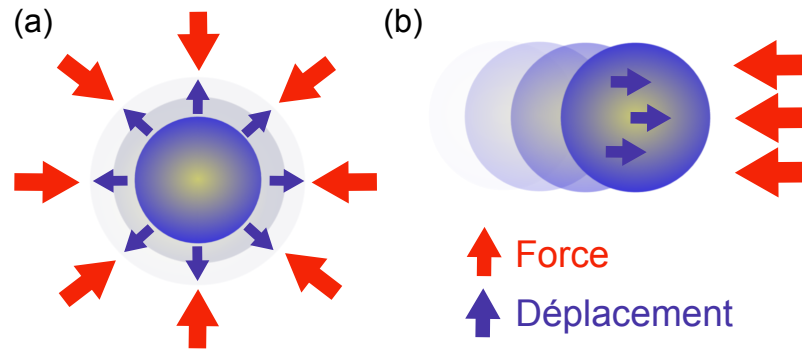


FIGURE 4.2 – Modes de résonances monopolaire (a) et dipolaire (b) d'un diffuseur sphérique respectivement représentés en opposition de phase avec une contrainte isotrope (a) et uniaxiale (b).

élastique. Une résonance monopolaire peut donc donner lieu à des effets d'élasticité effective négative.

### Exemples de métamatériaux

Certains systèmes mécaniques dont le comportement résonant est connu depuis longtemps sont des métamatériaux acoustiques. Les liquides bulleux, dont le comportement résonant est bien décrit par la théorie de la diffusion multiple [81, 28], en sont un exemple [85]. Les dispersions diluées de façon générale constituent de bons candidats de métamatériaux [86]. Le caractère dilué des diffuseurs favorise le caractère 'localisé' de leur radiation acoustique dans la matrice solide ou liquide. Pour obtenir le même effet dans un arrangement dense de diffuseurs, il faut que la matrice soit capable de confiner leur vibration. La première réalisation expérimentale d'un métamatériau acoustique tridimensionnel exploite justement cette idée (cf. figure 4.3).

Des billes de plomb (cf. figure 4.3 A) entourées d'une couche silicone associent un objet lourd à un revêtement très compressible. Ce système est propice à une résonance basses fréquences à condition de lui imposer des conditions aux limites rigides. Celles-ci sont réalisées par une matrice très rigide en résine époxy (cf. figure 4.3 B). La radiation du mode résonant dipolaire de va-et-vient du cœur en plomb dans sa coque molle de silicone ne se transmet pas directement d'une bille à sa voisine au travers de la matrice rigide. Ce mode de vibration reste localisé et ne se couple pas suffisamment aux autres modes de même nature des billes voisines pour former un mode délocalisé propagatif.

L'exemple par excellence du résonateur de type élasticité négative (monopolaire) est le résonateur de Helmholtz. Il s'agit d'une cavité de gaz résonante liée au milieu extérieur par une constriction. Le résonateur est donc local, car l'onde résonante reste principalement confinée dans la cavité. Mais la constriction lui permet de se coupler à l'onde



FIGURE 4.3 – Premier métamatériau tridimensionnel [87] : (A) Coupe d’une bille de plomb couverte d’une couche de silicone et assemblée dans la macrostructure (B) au sein d’une résine époxy, (C) mesures et prédictions de la transmission affiché en correspondance à la structure de bande calculée (D) numériquement. On remarque les régimes de propagation interdite et les branches très plates caractéristiques du phénomène d’antirésonance (d’après [36]).

propagative du fluide dans le milieu extérieur. En termes d’analogie électroacoustique, la cavité est un condensateur de capacité  $C$  et la constriction est une bobine d’impédance  $L$ . Cela peut se comprendre en pensant au courant comme l’équivalent du flux volumique. La cavité emmagasine le flux et le convertit en pression, tandis que la constriction limite le flux. Le résonateur de Helmholtz est donc l’analogie du circuit résonant LC. Un assemblage itératif de plusieurs de ces circuits selon un modèle discret de ligne de transmission donne lieu à un comportement coupe-bande analogue à celui des métamatériaux. Ainsi, en couplant une assemblée de ces résonateurs au sein d’un milieu continu, on obtient un comportement métamatériau. Un exemple de réalisation d’un tel métamatériau consiste en un alignement de canettes de soda à l’air libre [88].

La plupart des métamatériaux de type masse négative (dipolaires) font intervenir une dimension transverse du diffuseur afin de jouer sur un effet de projection du nombre d’onde. En effet, pour une assemblée périodique de diffuseurs, une résonance dans la limite des grandes longueurs d’onde (devant la taille de la maille) peut être obtenue en faisant faire un parcours additionnel aux ondes dans une dimension transverse. Le nombre d’onde se répartit entre les différentes dimensions. En modulant les dimensions transverses, on module la projection selon la direction de propagation du nombre d’onde. Pour les ondes de Lamb dans les plaques ou les ondes de Rayleigh à la surface des solides,



des piliers peuvent servir à cette fin [89]. Pour les ondes de gravité à la surface de l'eau, un motif au fond de la cuve module la dimension transverse [90]. Dans ce contexte, la membrane constitue un objet particulièrement intéressant comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

### **Métamatériaux et membranes**

De nombreux métamatériaux exploitent les propriétés particulières des membranes ou des plaques minces mises en vibration par une onde acoustique incidente portée par l'air. Nous avons vu dans notre discussion de la réponse forcée des membranes (cf. section 1.3.4) la présence de résonances et d'antirésonances. Leur couplage à un mode acoustique propagatif au sein d'un matériau composite peut induire des propriétés acoustiques originales.

Un premier système, qui exploite la réponse de la membrane, consiste en un tube et des membranes sous tension accordées en fréquence [91]. Le système envisagé consiste en une suite de pièces tubulaires emboîtées les unes dans les autres au sein desquelles, de fines membranes sont mises sous tension (cf. figure 4.4 (a)). Ainsi, à intervalles réguliers dans le guide d'onde cylindrique, une membrane obstrue la section. La forme de l'excursion de la membrane est approchée par une parabolòide. Ainsi, seule la première résonance de membrane est décrite par le modèle mais c'est également la seule observée dans la gamme de fréquence explorée expérimentalement ( $0\text{ Hz} - 1.5\text{ kHz}$ ). La résonance vient d'une combinaison de l'élasticité de la membrane avec la masse de la colonne d'air et de la membrane. Conformément à ce que nous avons vu de la réponse de la membrane chargée (cf. section 1.3.4), la résonance fondamentale est très sensible à la partie réelle de l'impédance extérieure (i.e. réactance due à la masse de la colonne d'air). La propagation se fait par l'intermédiaire de l'air. Les cavités d'air successives sont l'équivalent d'un réseau unidimensionnel de masses-ressorts. Cependant, la membrane impose une liaison élastique au support. Ce dernier est de masse très grande devant celle de la membrane et celle de l'air mis en mouvement, ce qui impose un régime évanescent qui s'étend depuis la limite statique jusqu'à la résonance de la membrane associée à la masse de la colonne d'air et de la membrane. L'ensemble rappelle le système masses-ressorts avec des ressorts en parallèle liés au bâti (cf. annexe B). L'existence d'une fréquence de coupure en-dessous de laquelle la propagation est interdite peut être décrite en introduisant une masse effective négative.

Les mêmes auteurs ont eu l'idée d'ouvrir ensuite des orifices dans chacune des sections du tube, entre deux membranes, afin de réaliser des résonateurs de Helmholtz (cf. figure 4.4 (c)), qui modifient la compressibilité effective de l'air entre deux membranes

successives [92]. En combinant élasticité et masse négatives, ils ont mis en évidence des vitesses de phases négatives caractéristiques de ce dispositif. Ce premier métamatériau membranaire exploite la résonance fondamentale des membranes et prouve la faisabilité de métamatériaux simple et double négatifs dans une géométrie unidimensionnelle guidée.

FIGURE 4.4 – Métamatériaux unidimensionnels faits de membranes et de tubes (a), de tubes et d’orifices (b) et de membranes, tubes et orifices (c). La disposition de l’émetteur et d’un récepteur acoustique utilisés pour l’étude expérimentale est également représentée (d) (d’après [92]).

Un second métamatériau membranaire exploite quant à lui le phénomène d’anti-résonance [67]. Ce matériau consiste en une plaque sur laquelle sont juxtaposés des membranes circulaires élastiques au sein d’une grille relativement rigide. Des disques massifs ainsi que de la pâte-à-fixe sont fixés aux centres des membranes circulaires pour abaisser en fréquence le spectre de la réponse mécanique du système. La réponse mécanique de la plaque à une onde d’incidence normale portée par l’air est caractérisée dans une configuration de tube à impédance. Comme pour la membrane couplée à son environnement (cf. section 1.3.4), la faible célérité des ondes dans la membrane comparée à celle des ondes dans l’air permet d’approcher la réponse de l’air comme étant proportionnelle à l’amplitude moyenne des excursions de la membrane (cf. équation 1.88) [6]. Cet argument peut être développé plus en détail par un raisonnement sur les nombres d’onde, afin de mettre en évidence le fait que le rayonnement dans le champ lointain est proportionnel aux excursions moyennes de la membrane  $\langle \zeta \rangle$ . À fréquence d’anti-résonance, l’excursion moyenne s’annule, les oscillations résiduelles de la membrane  $\delta \zeta$  ne se couplent plus qu’au champ proche et excitent des ondes évanescentes [67, 36]. L’existence de cette fréquence particulière où les excursions moyenne s’annulent est en réalité une conséquence de l’existence de deux modes résonants situés de part et d’autre dans le spectre. Les résonances constituent les modes propres du système. La réponse mécanique se décompose sur ceux-ci. En particulier, entre deux résonances, la réponse du système est faite d’une contribution hors-phase de la résonance inférieure en fréquence et d’une contribution en-phase de la résonance supérieure en fréquence. Si l’on balaye le spectre depuis la résonance inférieure à la résonance supérieure, à mesure que l’on monte en fréquence, la réponse hors-phase devient de plus en plus faible et la réponse en-phase de plus en plus forte. Il existe nécessairement une fréquence intermédiaire où l’excursion moyenne s’annule. À cette fréquence, il y a réflexion totale de l’onde incidente [67, 36]. Une fine membrane peut ainsi interdire la propagation du son.

En conclusion, la géométrie et la dynamique de vibration de la membrane sont sources de comportements de type métamatériaux et peuvent donner lieu à des effets de réflexion ou absorption exacerbés [67, 68]. Les mousses liquides et solides à cellules fermées sont

des objets constitués de membranes. Les membranes ont-elles un impact similaire dans les mousses ?

### 4.1.2 Mousses liquides

Trois caractéristiques de la propagation acoustique dans les mousses liquides ont été mises en évidence récemment. Dans le régime des grandes longueurs d'onde devant la taille des bulles et basse fréquence devant une fréquence caractéristique, la propagation acoustique est globalement bien décrite par le modèle de Wood (cf. section 1.3.2) [93]. Pourtant des célérités bien supérieures, proches de celle du son dans l'air, ont aussi été mesurées toujours dans un régime de grandes longueurs d'onde mais à plus haute fréquence [23]. En outre, une mousse liquide exhibe une réponse résonante à certaines fréquences intermédiaires de sollicitation acoustique [94, 23].

### Applicabilité du modèle de Wood

Bien qu'initialement pensé pour les liquides bulleux, le modèle de Wood est utilisé pour décrire la propagation du son dans les mousses. Wood prédit que sa validité s'étende aux caoutchoucs mous [4]. Il commente que pour un solide de module élastique suffisamment faible, la compression uniaxiale sera convertie en dilatation latérale au niveau des cavités de bulles (déformation associée au module de Young du solide), sollicitant ainsi principalement le module d'élasticité isostatique du gaz dans les bulles bien supérieur au module de Young de la matrice de solide faible.

Le modèle de Wood correspond à une loi de mélange qui vient naturellement dès que l'on considère la vibration en phase à l'unisson du liquide et du gaz. Cette loi se généralise notamment aux mélanges liquides multiphasiques [95]. Elle peut également être obtenue dans le cadre de théories de diffusion multiple des ondes (e.g. l'approximation des potentiels cohérents (CPA)) [27]. Par exemple, le calcul de diffusion présenté dans le paragraphe précédent, qui aboutit sur les expressions de coefficients de diffusion  $D_0$  et  $D_1$  (cf. équations 4.6 et 4.7), permet lui aussi d'en déduire la formule de Wood sur la célérité (cf. équation 1.39). Ce calcul considère initialement une matrice élastique dont on fait tendre le module de cisaillement vers 0 [81]. Un autre calcul adapté aux géométries de type dispersion (e.g. liquide bulleux, suspension colloïdale) conduit à une loi de mélange dite de Berryman [96, 27]. Dans le cas fluide-fluide, la loi de Berryman

peut tendre vers l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_* = \frac{(2 + \phi_g) \rho_g + (1 - \phi_g) \rho_c}{2(2 + \phi_g) \rho_g + (1 + 2\phi_g) \rho_c} \rho_c \end{array} \right. \quad (4.8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_* = (1 - \phi_g) \chi_c + \phi_g \chi_g \end{array} \right. \quad (4.8b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_{P_*}^2} = \rho_* \chi_* \end{array} \right. \quad (4.8c)$$

où les notations sont les mêmes que pour l'équation 1.39. La formule de Wood sur la compressibilité (cf. équation 4.8b et 1.38b) est très générale et reste vraie dans la loi de Berryman 4.8. L'expression de la masse volumique 4.8a en revanche est ici très différente de celle du modèle de Wood (cf. équation 1.38a). La loi de mélange de Berryman est utilisée avec succès dans des suspensions colloïdales diluées [97, 36]. Certains auteurs préconisent l'utilisation de la loi de Berryman pour les liquides bulleux et de réserver Wood pour une matrice solide d'élasticité de cisaillement non nulle [27]. Une comparaison des deux lois de mélange est présentée sur la figure 4.5. Des simulations numériques sur des suspensions colloïdales plus concentrées indiquent néanmoins qu'à l'approche de l'empilement compact, la loi de Berryman doit être corrigée et tend vers Wood dans la limite de l'empilement compact [98]. Or les mousses peuvent être vues comme des liquides bulleux dans la limite de l'empilement compact. De plus, la matrice liquide de la mousse possède une élasticité non nulle. En conséquence, la loi de mélange de Wood est probablement la plus judicieuse.

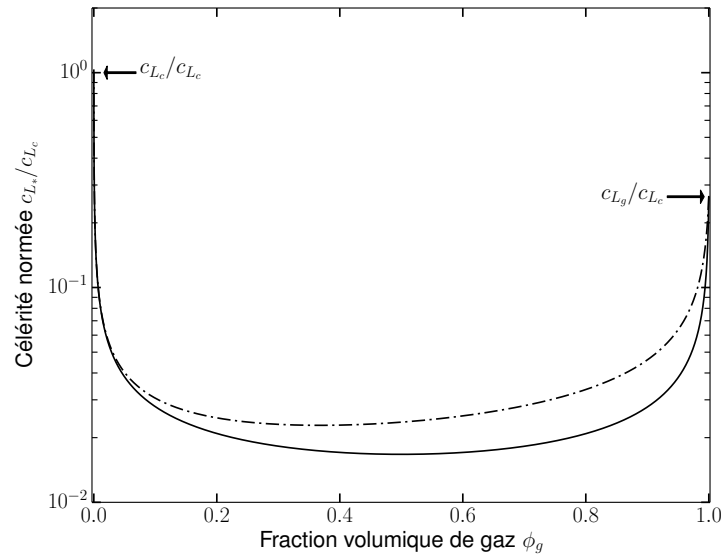


FIGURE 4.5 – Comparaison de lois de dépendance de la célérité avec la fraction volumique de gaz  $\phi_g$ . Les paramètres utilisés sont les valeurs de masse volumique et de compressibilité (adiabatique) de l'air et de l'eau à 20°C. Formule de Wood (—) (cf. équation 1.39) et formule de Berryman (-.-.-) (cf. équation 4.8c).

## Premières études expérimentales

L'étude expérimentale de la propagation acoustique dans les mousses liquides est rendue difficile principalement du fait de trois phénomènes. Premièrement, l'atténuation du son  $y$  est importante, de sorte qu'il est difficile d'obtenir un signal en transmission. Deuxièmement, les mousses vieillissent au cours du temps, leur structure et donc les temps caractéristiques de relaxation et de vibration locale évoluent. Troisièmement, la dissipation et l'élasticité des interfaces dépendent de la nature des tensioactifs, d'une manière qui n'est pas encore bien comprise. Beaucoup d'études pionnières ont été réalisées avec des mousses de structure et de constitution mal contrôlées ce qui peut expliquer au moins partiellement le manque de cohérence entre les résultats.

De nombreux auteurs ont étudié la célérité des ondes longitudinales dans une mousse liquide en fonction de la fraction volumique de gaz dans la limite sèche ( $0.95 < \phi_g < 0.99$ ) et non en fonction de la taille des bulles [99, 100, 101]. Par ailleurs, un nombre important d'études n'explorent qu'une gamme très restreinte de fréquences d'excitation voire réduite à une fréquence (e.g.  $f = 5 \text{ kHz}$ ,  $f = 40 \pm 2 \text{ kHz}$ ) [99, 102, 94]. Une des premières études ayant exploré une gamme de fréquences plus étendue (e.g.  $80 \text{ Hz} < f < 800 \text{ Hz}$ ) rend compte du caractère faiblement dispersif des ondes sonores dans le domaine audible [100]. Kann propose que le modèle de Wood conduit à une sous-estimation de la vitesse [101]. Cet écart aux prédictions est plus important pour les mousses très sèches. Afin de l'expliquer, un modèle simple basé sur des considérations d'impédance a été proposé [101]. Ce modèle prend en compte les films comme des perturbations par rapport au milieu libre gazeux et prédit une célérité longitudinale dans la mousse  $c_{L*}$  intermédiaire entre la célérité de Wood et la célérité dans le gaz  $c_{L_g}$  [103, 104] :

$$c_{L*} = \frac{c_{L_g}}{1 + \frac{\rho_c e}{\rho_g d_f}} \quad (4.9)$$

où  $\rho_g$  et  $\rho_c$  correspondent aux masses volumiques respectivement du gaz et de la solution,  $e$  et  $d_f$  représentent l'épaisseur et le diamètre des films. Le modèle de Kann explique avec succès certains des écarts aux prédictions de Wood reportés dans la plupart des études pionnières, mais il ne permet pas d'interpréter des valeurs de célérités longitudinales bien supérieures à celle de Wood ( $\sim 200 \text{ m.s}^{-1}$ ) reportées dans la référence [99]. Ces résultats a priori incompatibles n'ont pu être réconciliés que récemment par des études expérimentales qui mettent en évidence un comportement résonant et fortement dispersif des mousses dans le domaine ultrasonore [94, 23]. Pour des tailles de bulles particulièrement grandes ( $d \cong 200 \mu\text{m}$ ), ce comportement dispersif peut néanmoins être abaissé en fréquence ( $f \cong 14 \text{ kHz}$ ) et entrer dans le domaine acoustique audible [105].

En résumé, les études expérimentales où le modèle de Wood s'applique quantitativement avec succès sont rares [106]. Mais l'étude la plus récente et la plus fournie dans le domaine basse fréquence ( $0.5 \text{ kHz} < f < 6 \text{ kHz}$ ) met en évidence pour des mousses de physico-chimie bien contrôlée (tensioactif : dodécylsulfate de sodium) un très bon accord quantitatif avec le modèle de Wood [93]. Il s'agit néanmoins d'un modèle de Wood modifié (cf. équation 4.10). Dans cette même étude, la célérité dans de la mousse à raser commerciale (Gillette) fait exception et sa valeur est supérieure à celle attendue dans le cadre du modèle de Wood. Une étude antérieure qui avait fait le même constat a proposé une correction en prenant en compte une élasticité interfaciale Marangoni et en l'incluant en s'appuyant sur l'expression de l'élasticité dominante pour le mode longitudinal lent du modèle de Biot [102].

Ces différentes études mettent en évidence une forte dispersion dans les résultats expérimentaux, qui traduisent le fort impact de la microstructure et de la physico-chimie sur les propriétés acoustiques des mousses liquides. Trouver le lien quantitatif entre les deux constitue un domaine de recherche encore ouvert.

### Corrections dispersives à la loi de mélange

Certains des auteurs intéressés par une modélisation de la spectaculaire atténuation dans les mousses aqueuses ont proposé des variantes dispersives du modèle de Wood [107, 100]. Ils ont incorporé des corrections inspirées de calculs de diffusion effectués pour les liquides bulleux. Dès les débuts du développement de la théorie de la diffusion multiple initié par Foldy, les auteurs ont cherché à appliquer leurs développements théoriques aux liquides bulleux [82, 81]. Au-delà de la limite quasi-statique, ces approches permettent également d'obtenir la relation de dispersion du milieu effectif dans un régime de fréquences intermédiaires dispersif mais encore situé dans la limite des grandes longueurs d'onde comparées à la taille des diffuseurs [27]. La relation de dispersion obtenue dans le cadre de ce modèle est [93] :

$$\frac{1}{c_{L*}^2} = \frac{\phi_g(1 - \phi_g)\rho_c}{\gamma_p^*(\omega)P_0 + \frac{2\gamma}{R_b} \left( \gamma_p^*(\omega) - \frac{1}{3} \right) - \frac{R_b^2\omega^2\rho_c}{3} - \frac{4i\eta_*\omega}{3}} \quad (4.10)$$

$$\text{où } \eta_* = \eta \left( 1 + \frac{\phi_g R_b^2}{4\Pi} \right) \quad (4.11)$$

où  $R_b$  est le rayon des bulles,  $\gamma$  est la tension de surface et  $\gamma_p^*(\omega)$  est l'indice de polytropie dynamique sphérique sur lequel nous reviendrons dans la section 4.5.2 (cf. équation 4.38). Enfin  $\Pi$  est la perméabilité du réseau de canaux constitué par les vertex et les bords de Plateau [100, 93]. Ainsi cette relation de dispersion prend en compte les corrections dues

aux échanges thermiques avec le fluide, la tension de surface, un terme de résonance dû au mode de respiration des bulles et enfin une viscosité effective  $\eta_*$ . La viscosité effective est liée à une modélisation des écoulements induits par la déformation de la bulle au passage dans le réseau poreux de canaux formés par les bords de Plateau proposé par Goldfarb et al. [107, 100]. En comparaison avec les données expérimentales, ce modèle de l'écoulement surestime la dissipation visqueuse. Mais si on ne prend pas en compte cette correction, alors l'atténuation est sous-estimée. Le terme de résonance correspond au développement limité de la résonance monopolaire de Minnaert, qui fait intervenir la densité du liquide  $\rho_c$ . L'introduction de ce terme est discutable car le calcul de Minnaert est effectué pour des milieux bulleux où il est possible de considérer que la matrice de liquide est de dimensions infinies [29]. Néanmoins l'idée à retenir, traduite par l'introduction de ce terme, est celle d'un comportement résonant de la mousse.

Plusieurs études suggèrent un comportement acoustique résonant des mousses [105, 94, 23]. Cette résonance a d'abord été détectée consécutivement à l'éclatement de bulles à la surface d'une mousse. L'éclatement de bulles consécutif au vieillissement de la mousse a une signature sous la forme d'un pic dans le spectre d'émission acoustique. Pour des distributions de tailles de bulles de variance suffisamment faible, un second pic apparaît dans le spectre d'émission. Tandis que le premier pic est produit par les événements de rupture, le second pic traduit un bon couplage à un mode de vibration de la mousse centré en fréquence [105]. La distribution en fréquence du second pic se corrèle bien avec les prédictions de la formule de Minnaert liées à la distribution en tailles de bulles (cf. équation 1.42). Le comportement résonant est corroboré par une étude ultérieure mettant en évidence une transition de la vitesse de propagation à fréquence constante  $f = 40 \text{ kHz}$  au cours du mûrissement de la mousse pour une taille de bulle critique  $d = 50 \text{ }\mu\text{m}$  [94]. Ainsi, les résultats expérimentaux indiquent une corrélation qui lie la fréquence caractéristique d'un comportement résonant de la mousse à la taille des bulles. Cette corrélation ne peut néanmoins pas partager la même origine physique que la résonance de Minnaert, dont le calcul correspond à l'oscillation d'une bulle sphérique dans une matrice de liquide infinie [28].

### Résonances locales dans les mousses liquides

De récents résultats expérimentaux dans le domaine ultrasonore (60 – 600 kHz) donnent une vue d'ensemble du comportement acoustique des mousses, sous des conditions expérimentales bien contrôlées [23]. Les mousses sondées sont polydisperses de taille de bulle moyenne typique  $d_0 = 80 \text{ }\mu\text{m}$  et stabilisées par du dodécylsulfate de sodium (SDS). La célérité des ondes longitudinales est déduite de la mesure du coefficient de transmission au travers d'une couche de mousse de moins d'un millimètre d'épaisseur.

Deux transducteurs sont situés de part et d'autre au contact de minces films polymères qui confinent l'échantillon. Le premier transducteur sert d'émetteur et le second de récepteur qui génèrent et enregistrent respectivement des efforts oscillatoires de pression [108].

La synthèse des résultats est présentée sur la figure 4.6. Cette figure réunit des mesures pour différentes tailles de bulle sur une courbe maîtresse dont le facteur de dimensionnement est le diamètre des bulles  $d$  à la puissance  $3/2$ . Ces résultats montrent qu'un effet résonant de type métamatériau intervient dans le comportement acoustique à la transition entre deux régimes de propagation non dispersifs [23]. Dans le premier régime, à basses fréquences ( $f < 50 \text{ kHz}$ ), des ondes longitudinales relativement lentes se propagent. Leur vitesse est proche des prédictions du modèle de Wood (cf. section 1.3.2). Dans le second régime, à hautes fréquences ( $f > 500 \text{ kHz}$ ), des ondes longitudinales rapides se propagent. Leur célérité se rapproche de celle du gaz, de sorte qu'elles rappellent les ondes de compression rapides prédites dans la théorie de Biot dans la limite d'un faible couplage entre le gaz et la phase continue. L'ensemble de la dynamique ainsi que la transition rappelle l'évolution de la vitesse de phase de l'onde rapide de Biot présentée sur la figure 1.11. En effet, les cas limites non-dispersifs (de célérité de Wood d'une part et de célérité inférieure mais de l'ordre de celle du gaz d'autre part) sont qualitativement les mêmes. Cependant dans le cas du milieu poreux, la transition s'explique en comparant l'épaisseur de peau visqueuse à la taille des pores. Une épaisseur de peau visqueuse supérieure à la taille des pores oblige le mouvement à l'unisson de la matrice élastique et du gaz. Dans le cas d'une mousse liquide, le mouvement à l'unisson de la matrice élastique et du gaz est en revanche liée à l'obstruction des pores par les membranes.

Les auteurs proposent un modèle afin d'expliquer la transition résonante du régime de Wood au régime de propagation portée par le gaz [23]. Ce modèle considère les films comme des membranes sous tension régulièrement espacées attachées à de lourds anneaux qui modélisent les bords de Plateau. Contrairement aux bords de Plateau dans une mousse réelle, les anneaux considérés dans le modèle ne sont pas reliés entre eux. Les conditions aux limites de la membrane ne sont pas fixes mais gouvernées par l'inertie des anneaux. La membrane assure le couplage entre le gaz, par le biais duquel l'onde acoustique se propage, et les anneaux [23]. Ce modèle n'admet pas de propagation passant par la matrice. La coexistence de deux ondes de compression envisagée dans la théorie de Biot n'est donc pas possible dans le cadre de ce modèle. Les données expérimentales de la figure 4.6 sont cohérentes avec l'observation d'une seule onde longitudinale.

Comme on s'y attend pour une membrane sous tension (cf. section 1.3.4), une série d'harmoniques devrait suivre après le fondamental et perturber la relation de dispersion



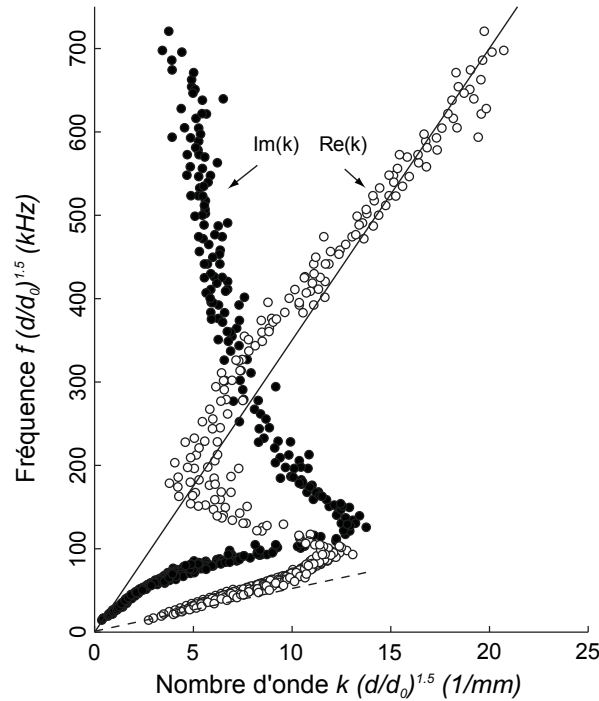


FIGURE 4.6 – Mesures expérimentales de la relation de dispersion des ondes longitudinales dans une mousse aqueuse de dodécylsulfate de sodium. Les tailles de bulles sont contenues dans l'intervalle ( $30 \mu\text{m} \leq d \leq 100 \mu\text{m}$ ), tandis que les fractions volumiques de gaz se situent dans l'intervalle ( $0.78 \leq \phi_g \leq 0.97$ ). La taille de bulle de référence est  $d_0 = 80 \mu\text{m}$  (d'après [23]).

(cf. appendice de la référence [23]). Ce n'est pourtant pas ce que l'on observe sur la figure 4.6. L'importante atténuation dans le système lisse toutes les résonances du système. Plusieurs pistes sont envisagées pour expliquer l'origine de cette atténuation mais ni la viscosité du liquide dans les films, ni la viscosité de l'air ne suffisent à expliquer l'intensité des mécanismes dissipatifs [23].

Finalement, les résultats expérimentaux de la référence [23] (cf. figure 4.6) explorent une large gamme de fréquences ( $60 - 600 \text{ kHz}$ ) et une gamme importante de tailles de bulles moyennes ( $d = 30 - 100 \mu\text{m}$ ) et de fraction volumique ( $\phi_g = 0.78 - 0.97$ ). Les résultats de la figure 4.6 correspondent à une courbe maîtresse. Le modèle proposé dans la référence [23] a le mérite d'introduire la nouveauté conceptuelle des métamatériaux à la description acoustique des mousses. La résonance des films est à l'origine d'un comportement fortement dispersif des mousses, de la même manière que la résonance de Minnaert pour les liquides bulleux. La question est de savoir si ces résultats sont transposables aux mousses solides. Les membranes jouent-elles le même rôle dans les mousses de matrice de solide faible que dans les mousses liquides ?

### 4.1.3 Mousses solides

La description de l'acoustique dans les milieux poreux, marquée par la théorie de Biot dont les résultats sont rappelés dans la section 1.3.3, bénéficie d'une maturité avancée. Elle a d'abord été confirmée expérimentalement par l'observation de l'onde lente dans des suspensions de sphères de verre frittées [109] puis également dans les mousses plastiques à cellules ouvertes [110]. Cette onde lente est néanmoins généralement difficile à observer directement du fait de sa forte atténuation dans les domaines fréquentiels sonores et ultra-sonores [111]. Les développements ultérieurs se sont concentrés sur la description du fluide effectif, sa généralisation à d'autres géométries des pores voire à des distributions de géométries de pores. De nombreuses adaptations semi-phénoménologiques ont été proposées sur la base du modèle de Biot présenté dans la section 1.3.3. Après une brève présentation de l'un de ces modèles, nous décrirons les résultats récents sur des mousses solides contenant une fraction de pores fermés [22]. Cela nous permettra de faire un pas de plus en direction de notre système avant de nous intéresser au travail de simulation numérique de notre collaborateur A. Spadoni à l'EPFL [112].

#### Modèles semi-phénoménologiques

L'utilisation intensive de milieux poreux dans les domaines de l'habitat et dans d'autres contextes industriels où l'on cherche à maximiser l'atténuation du son, expliquent deux tendances dans l'adaptation des modèles théoriques. Une première tendance consiste à relier les quantités du modèle acoustique à des paramètres dits non-acoustiques mesurables indépendamment et macroscopiquement accessibles (e.g. la porosité  $\phi_g$ ). Une seconde tendance, qui se conjugue à la première, consiste en un effort de généralisation de la modélisation du fluide effectif à des géométries plus diverses que celle de pores cylindriques de section circulaire. Bien qu'un premier pas puisse être fait en remplaçant le rayon des pores par le rayon hydraulique et en introduisant un facteur de forme et la tortuosité (cf. section 1.3.3, 2<sup>o</sup> paragraphe) [113, 5], des formulations plus générales encore pour des pores non cylindriques sont obtenues dans le cadre de modèles semi-phénoménologiques tel celui de Johnson-Champoux-Allard (JCA) [32, 114, 5].

Parmi les paramètres non-acoustiques introduits figurent la longueur caractéristique visqueuse  $\Lambda$  et la longueur caractéristique thermique  $\Lambda'$ . Ces longueurs sont définies de telle manière qu'à hautes fréquences, au premier ordre en  $1/\sqrt{\omega}$ , les masse volumique et

module d'élasticité isostatique volumique effectifs s'écrivent [32, 5] :

$$\rho_g^*(\omega) = \alpha_\infty \rho_g \left[ 1 + (1 - i) \frac{\delta_\eta(\omega)}{\Lambda} \right] \quad (4.12)$$

$$K_g^*(\omega) = \frac{\gamma_a P_0}{\gamma_a - (\gamma_a - 1) \left[ 1 - (1 - i) \frac{\delta_\theta(\omega)}{\Lambda'} \right]} \quad (4.13)$$

où  $\delta_\eta(\omega)$  est l'épaisseur de peau visqueuse et  $\delta_\theta(\omega) = \delta_\eta(\omega)/\sqrt{N_{Pl}}$  est l'épaisseur de peau thermique avec  $N_{Pl}$  le nombre de Prandtl. La tortuosité  $\alpha_\infty$  est définie par l'équation 1.51 et  $\gamma_a$  est le rapport des chaleurs spécifiques. Dans le cas de pores cylindriques de révolution, les équations 4.12 et 4.13 correspondent au développement asymptotique des équations 1.46 et 1.48. Cette forme asymptotique permet la détermination expérimentale des paramètres dits non-acoustiques  $\alpha_\infty$ ,  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  à l'aide de mesure de vitesses de phase dans le domaine ultrasonore en saturant le milieu poreux avec de l'air puis avec de l'hélium [5]. La résistivité du flux  $\sigma_r$  est un autre paramètre non acoustique introduit dans ce modèle JCA. Elle est définie comme le rapport entre la différence de pression appliquée à une couche d'air d'épaisseur  $h$  sur le produit  $Vh$ , où  $V$  est le flux d'air par unité de surface. Remarquons que pour un matériau cellulaire qui ne permet pas la percolation du fluide, la résistivité du flux tend vers l'infini.

Le modèle JCA donne des expressions pour la masse volumique et le module d'élasticité isostatique effectifs qui vérifient bien les deux limites asymptotiques (i.e. fréquence nulle et infinie) et permettent une meilleure description de la propagation acoustique dans le régime intermédiaire grâce à la mesure indépendante des paramètres dits non-acoustiques. Dans ce contexte, des simulations numériques sont employées [115].

### Mousses comportant une fraction de cellules fermées

Comme indiqué dans la section 1.1.1, les mousses solides utilisées dans l'industrie, et en particulier à des fins d'absorption du son, sont traitées pour obtenir des cellules ouvertes (cf. section 1.1.1). Certaines mousses à cellules fermées sont également très appréciées pour leur rigidité mais elles sont peu caractérisées acoustiquement car en comparaison avec les mousses à cellules ouvertes elles absorbent faiblement le son [116]. Dans le cas intermédiaire, une étude récente sur les mousses de polyuréthane montre qu'une proportion non nulle de cellules fermées améliore l'absorption à basses fréquences [22].

Les mousses de polyuréthane sont souvent utilisées à des fins d'absorption acoustique [30]. Bien que les cellules de celles-ci soient généralement toutes ouvertes, quelques travaux récents ont envisagé le cas de mousses de polyuréthane comportant jusqu'à 70% de

cellules fermées [30, 22]. Le modèle semi-phénoménologique utilisé est dit de Johnson-Champoux-Allard (JCA) lorsque la matrice élastique de polyuréthane est considérée rigide et immobile. Il est dit de Biot-Johnson-Champoux-Allard (BJCA), lorsque les vibrations de la matrice sont également envisagées [117, 30]. La présence de membranes rend nécessaires des corrections aux lois d'échelle habituelles sur les paramètres non-acoustiques [22]. Ces corrections sont d'autant plus grandes que la proportion de membranes fermées est grande [22] et que la matrice solide est molle [30]. Le modèle BJCA exhibe un meilleur accord avec les données expérimentales [30]. Les corrections proposées rendent compte de l'augmentation de la longueur caractéristique visqueuse ainsi que de la tortuosité avec la fraction de cellules fermées [22].

Ainsi, le comportement acoustique de mousses avec une proportion importante de cellules fermées est décrit par les modèles existants (e.g. JCA ou BJCA) avec un niveau de précision satisfaisant. Néanmoins, ces modèles supposent une détermination empirique des paramètres non-acoustiques et parfois la prise en compte de corrections supplémentaires au modèle elles-aussi empiriques. De plus, la différence entre un système, avec une fraction non-nulle de cellules fermées, mais permettant malgré tout la percolation de la phase fluide et un système, où le fluide ne peut pas s'écouler au travers de la matrice solide, est qualitativement importante. En particulier, la compréhension des mécanismes physiques qui se cachent derrière l'évolution des paramètres semi-phénoménologiques (e.g. une augmentation de la tortuosité) nécessitent une modélisation plus fine des modes de vibration de certains éléments de la microstructure. Celle-ci est permise notamment dans le cadre de simulations numériques.

### **Mousses ordonnées à cellules fermées**

Des expériences de simulation numérique de la propagation acoustique dans des mousses ordonnées à cellules fermées ont été réalisées par notre collaborateur A. Spadoni et son étudiant V. Dorodnitsyn à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) [112]. Ces simulations utilisent les principes de la modélisation en élément finis (FEM) et prennent en compte le couplage entre une phase solide élastique et une phase gazeuse. Un maillage discret de la maille élémentaire d'un réseau ordonné de bulles, soit de structure cubique centrée (structure de Kelvin), soit de structure cubique à faces centrées (cf. section 1.1.1), ou encore de structure de Weaire-Phelan, est réalisé. Le maillage est réalisé dans la limite sèche ( $\phi_g > 0.9$ ) où l'approximation est faite d'une mousse uniquement composée de ses films. Il s'agit donc de mousses où toutes les cellules sont fermées. La modélisation de la réponse élastique des films prend en compte le module de flexion des films et néglige la tension de surface. Les bords de Plateau à la jonction entre les films ne sont pas représentés. Les modes de propagation acoustique sont ensuite obtenus sous

l'hypothèse de conditions aux limites périodiques des déformations mécaniques sur la maille élémentaire<sup>2</sup> [112] dans un repère cartésien  $Oxyz$ . Les mécanismes de dissipation mécanique (en dehors de la diffusion) ne sont pas considérés.

Les résultats de simulation numériques ont été obtenus pour des paramètres physiques dimensionnés. La matrice solide de masse volumique  $\rho_s = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  est de faible module de Young  $E = 1 \text{ kPa}$  quasi-incompressible ( $\nu_s = 0.46$ ). La compression adiabatique de l'air de masse volumique  $\rho_g = 1.2 \text{ kg.m}^{-3}$  est considérée, de sorte que le module d'élasticité isostatique vaille  $B_g = 142 \text{ kPa}$ . La taille de la maille est  $a = 100 \text{ }\mu\text{m}$  et les films sont considérés d'épaisseur uniforme  $e = 1 \text{ }\mu\text{m}$ . La propagation acoustique est simulée dans une gamme fréquentielle qui s'étend de  $0 \text{ Hz}$  à  $2 \text{ kHz}$ . Dans cette gamme de fréquence, des régimes de comportement de type solide effectif, résonant et fluide effectif se succèdent. En d'autres termes, il existe des régimes fréquentiels où sont prédites respectivement des ondes propagatives de compression et de cisaillement, des ondes de faible vitesse de groupe et l'absence d'ondes de cisaillement [112]. Le premier régime de comportement de type solide effectif, qui s'étend depuis la limite statique, est non-dispersif (i.e. la pente dans le diagramme de bande est constante) à une bonne approximation. Il est possible de montrer que cela correspond à une densité d'états décrite par le modèle de Debye [78, Chap. V]. Par conséquent, les auteurs appellent ce domaine fréquentiel le régime de Debye [112].

Parmi les trois structures de mousse envisagées, l'empilement cubique à faces centrées (cfc) se rapproche le plus de la structure des échantillons de mousse gélifiée que nous fabriquons (cf. section 2.3.1). La dispersion des ondes acoustiques longitudinales et de cisaillement simulée pour une mousse cfc est représentée sur la figure 4.7. Du fait de la structure ordonnée de l'empilement de bulles, le milieu est anisotrope. Il existe des directions privilégiées qui correspondent aux points de haute symétrie dans l'espace réciproque représentés au niveau de l'insert de la figure 4.7.b. La relation de dispersion des ondes mécaniques dans un tel milieu dépend donc de la direction de propagation des ondes. Il est classique de représenter la relation de dispersion en la développant selon ses points de haute symétrie sous la forme d'un diagramme de bande [78]. En particulier le point  $\Gamma$  correspond au centre de la zone de Brillouin. Ainsi la partie du diagramme de bande entre  $\Gamma$  et un autre point de haute symétrie (e.g. le point K) représente la dispersion pour un vecteur d'onde de norme croissante de direction ( $\Gamma K$ ).

La première gamme de fréquences repérée par un fond jaune jusqu'à la ligne bleue pointillée mixte correspond au régime de Debye. Il s'étend de  $0 \text{ Hz}$  à  $670 \text{ Hz}$ . En partant du point  $\Gamma$  dans la zone ( $L\Gamma K$ ) du diagramme de bande (cf. figure 4.7.a), on constate

2. Les solutions obtenues sont par conséquent de type Floquet-Bloch [78].

FIGURE 4.7 – (a) Diagramme de bande et (b) densité d'état  $D(\omega)$  d'une mousse d'empilement cubique à faces centrées caractérisés par des régimes fréquentiels de comportements de type solide effectif (fond jaunes), résonant (fond blanc) et fluide effectif (fond bleu). Les modes de compression  $\phi_P$  et de cisaillement  $\phi_S$  de type milieu homogène effectif sont tracés en pointillés dans (a). L'insert en (b) montre la première zone de Brillouin et les points de haute symétrie dans l'espace réciproque  $\Gamma = (0, 0, 0)$ ,  $X = (\pi, 0, \pi)/a$ ,  $W = (\pi, \pi/2, 3\pi/2)/a$ ,  $L = (\pi, \pi, \pi)/a$ ,  $K = (3\pi/4, 3\pi/4, 3\pi/2)/a$ ,  $U = (5\pi/4, \pi/2, 5\pi/4)/a$ . (c) Mode rapide de compression  $\omega/(2\pi) = 221.6 \text{ Hz}$  pour  $k_x = k_y = 24.6$ ,  $k_z = 0 \text{ rad/m}$ ; (d) mode de cisaillement  $\omega/(2\pi) = 434.5 \text{ Hz}$  pour  $k_x = k_y = 5122$ ,  $k_z = 0 \text{ rad/m}$ ; (e) mode de cisaillement ballistique  $\omega/(2\pi) = 1233.3 \text{ Hz}$  pour  $k_x = k_y = 9220$ ,  $k_z = 0 \text{ rad/m}$ ; (f) mode de cisaillement résonant  $\omega/(2\pi) = 1630.9 \text{ Hz}$  pour  $k_x = k_y = 15366$ ,  $k_z = 0 \text{ rad/m}$ . Dans les figures (c)-(f), les flèches rouges indiquent le vecteur d'onde et les flèches noires indiquent la polarisation. L'échelle de couleur indique la norme  $L_2$  (i.e. euclidienne) des degrés de liberté en déplacement (solide et gaz) aux nœuds adjacents du maillage. Les lignes bleues pointillées mixtes dans le diagramme de bande (a) indiquent, de bas en haut, les fréquences de résonance de films rhombiques avec des côtés de longueur  $\sqrt{3}a/4$  : fondamentale en appui simple, fondamentale fixée et première harmonique en appui simple (d'après [112]).

le départ de deux branches. L'une, en noir, correspond aux modes de cisaillement, tandis que l'autre, en rouge, correspond à un mode de compression rapide. Les modes de cisaillement paraissent dégénérés du fait de la quasi-égalité de leurs vitesses de phase. Le mode de compression est tellement rapide comparé aux autres modes de déformation que les branches qui le représentent se confondent en une ligne verticale. Ces modes sont les seuls possibles dans ce régime et sont non-dispersifs à une bonne approximation. De 670 Hz à 730 Hz, l'influence des résonances commence à se faire sentir et les modes du régime de Debye deviennent légèrement plus dispersifs.

Dans la gamme fréquentielle indiquée par un fond blanc, qui s'étend de 730 Hz à 975 Hz, le comportement est résonant. Des modes résonants hybrides entre déformations de compression et de cisaillement traversent tout le diagramme de bande selon l'axe des nombres d'onde. Les modes de cisaillement présents dans le régime de Debye voient leur branche de dispersion s'aplatir et se dédoubler sensiblement. Le dédoublement indique un plus fort effet de levée de dégénérescence. L'aplatissement correspond à un comportement anti-résonant où la vitesse de groupe  $d\omega/dk$  prend des valeurs qui fluctuent autour de zéro. Ainsi elle devient négative et s'annule<sup>3</sup> notamment dans les directions  $(\Gamma K)$ ,  $(\Gamma L)$  et  $(\Gamma X)$ .

Le régime qui suit en fréquence de 975 Hz à 1168 Hz signalé par un fond bleu est marqué par l'absence des modes de cisaillement et la présence d'un unique mode de

3. Les annulations de la vitesse de groupe sont généralement accompagnées de singularités de Van Hove, qui désignent les extrema non-dérivables de la densité d'état. Spadoni et al. font remarquer que pour un matériau tridimensionnel ce n'est néanmoins pas le cas, si l'annulation de la vitesse de groupe a lieu pour un vecteur d'onde nul (i.e. à la verticale de  $\Gamma$  dans le diagramme de bande) [112, 78]. Ainsi, les départs de nouvelles branches dans la relation de dispersion ne sont pas associés à des singularités de la densité d'état.

compression. Pour ces raisons, le comportement dans ce régime est qualifié de fluide effectif. Le mode de compression dans ce régime est considérablement plus lent que celui dans le régime de Debye. Une transition dispersive continue du mode de compression rapide à ce mode de compression lent s'est faite dans le régime résonant qui précède dans le spectre. Dans la présente gamme fréquentielle, le mode est peu dispersif. Ce mode se prolonge à plus haute fréquence (ligne noire), tandis qu'un nouveau mode de compression rapide fait son apparition (ligne rouge).

Entre 1168  $Hz$  et 1348  $Hz$ , les modes de cisaillement font leur retour et on entre à nouveau dans un régime de solide effectif. Au niveau des nombres d'onde où l'aplatissement des modes de cisaillement a eu lieu, on observe l'absence de branche repliée qui prendrait son départ au niveau des bords de la première zone de Brillouin (i.e. au niveau d'un point de haute symétrie autre que  $\Gamma$ ). Le retour des modes de cisaillement se fait depuis le centre de la première zone de Brillouin  $\Gamma$ . Or le retour à un régime propagatif suite à un régime résonant de type diffraction de Bragg se serait fait depuis les bords de la première zone de Brillouin, sous forme de branche repliée par périodicité de la relation de dispersion (cf. annexe B). Cette caractéristique permet de confirmer le fait que le bandgap des modes de cisaillement n'est pas dû à un effet de diffraction de Bragg mais à la présence de résonateurs mécaniques locaux.

Par ailleurs, deux modes de compression (i.e. longitudinaux) coexistent dans ce régime. L'un est d'au moins un ordre de grandeur plus rapide que l'autre. Les auteurs font remarquer que cela contraste avec le régime de Debye, où seule une onde longitudinale est présente, contrairement aux prédictions de la théorie de Biot dans sa formulation usuelle. Mais ils commentent que cela est compréhensible du fait que, dans la configuration de cellules fermées, la tortuosité est infinie dans la limite statique [112]. Rappelons que la tortuosité mesure la part de quantité de mouvement transmise du fluide au solide (cf. section 1.3.3). En particulier, la tortuosité dynamique  $\alpha^*(\omega)$  englobe les couplages visqueux et inertiels entre le fluide et le solide ainsi que leur dépendance fréquentielle. Nous verrons ultérieurement (cf. section 4.6) que ce qui se cache cette fois-ci derrière une valeur infinie de la tortuosité, ce sont les forces de rappel élastiques des films qui ne sont pas représentées dans les formulations usuelles de la théorie de Biot.

Les vignettes (c)-(f) représentent différents modes de déformation. Les fréquences et nombres d'onde auxquels ils correspondent sont indiqués. Ainsi, il est possible d'évaluer quantitativement les vitesses de phase des modes obtenus. De manière remarquable, l'onde de compression rapide est représentée sur la vignette (c) à une fréquence  $f = 221.6 Hz$  et un nombre d'onde  $k = 34.8 m^{-1}$ , de sorte que sa vitesse de phase vaut  $v = 63.7 m.s^{-1}$ . Cette vitesse est donc un ordre de grandeur plus faible que la célérité des ondes dans le gaz et correspond à la vitesse de Wood (cf. équation 1.41) adiabatique

( $B_g = \gamma_p P_0 = \gamma_a P_0 = 142 \text{ kPa}$ ) pour une fraction volumique de gaz  $\phi_g = 0.96$ . Une formule approximative pour la célérité  $c_L^2 \approx B_g / (1 - \phi_g) \rho_s$  est donnée pour le mode de compression rapide à la fin du paragraphe V.B de l'article [112]. Cette formule correspond à une simplification supplémentaire de la formule de Wood simplifiée (cf. équation 1.41) dans le cas  $\phi_g \approx 1$ .

L'onde de compression lente dans le cas de la structure d'empilement cubique à faces centrées a une vitesse de phase de  $1.58 \text{ m.s}^{-1}$  à  $1 \text{ kHz}$ . La vitesse de phase diminue ensuite légèrement pour tendre vers la valeur de l'asymptote  $\phi_P$  de l'ordre de  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . L'ordre de grandeur correspond bien à l'ordre de grandeur des prédictions pour l'onde lente portée par la matrice solide, que nous avons obtenu dans le cadre de la théorie de Biot pour des mousses de matrice molle à cellules ouvertes (cf. figure 1.11). Ici également, l'onde lente est principalement portée par la structure solide. En effet, les asymptotes pour cette onde et celle de cisaillement, signalées par des courbes pointillées sur la figure 4.7.a anotées par  $\phi_P$  et  $\phi_S$ , sont obtenus pour la structure solide en l'absence de fluide. Puisque la matrice est de faible module élastique et quasi-incompressible, si le fluide n'est pas sollicité, on s'attend à des déformations longitudinales isochores, qui ne sollicitent pas la compressibilité de la matrice. Dans ce cas, on s'attend à une célérité longitudinale  $c_L^2 = L_*/\rho_* \approx E_*/(1 - \phi_g)\rho_s$  et une célérité transverse  $c_T^2 \approx G_*/(1 - \phi_g)\rho_s$ . Les auteurs indiquent que les formules proposées par Ashby & Gibson dans la référence [3] (cf. équations 1.22 et 1.23) permettent de bien apprécier l'ordre de grandeur des élasticités effectives en prenant une fraction volumique de solide contenu dans les films  $\phi_f = 1$ . En l'absence de fluide, on a par ailleurs  $P_0 = 0$ , de sorte que le module de Young est relié au module de cisaillement par  $E_* \approx 8/3 G_*$ . On en déduit un rapport des célérités correspondant à  $\phi_P$  et  $\phi_S$  de l'ordre de  $\sqrt{8/3} \approx 1.6$ . En présence de fluide, le contraste d'élasticité  $P_0 \gg E$  conduit à une relative incompressibilité de la mousse et donc un coefficient de Poisson  $\nu_* \approx 0.5$ . Dans un cadre de milieu continu, cela conduit à  $E_* \approx 3G_*$ , soit un rapport de célérité  $\sqrt{3} \approx 1.7$ . Les indications de l'article permettent de déduire un rapport de 1.7 dans le cas des mousses cfc, ce qui ne contredit pas cette explication.



## 4.2 Dispositif expérimental de spectroscopie acoustique

### 4.2.1 Géométrie de mesure

#### Montage expérimental

Les échantillons de mousse gélifiée sont contenus dans des tubes transparents de diamètre 4 *mm* ou 10 *mm* et de longueur 20 *cm*. Ils sont encastrés dans des supports adaptés aux géométries rigidement liés à une table optique en marbre sur toute leur longueur (cf. figures 4.8 et 4.9). Ils sont fermés aux extrémités par des films polymères (polyéthylène), d'épaisseur  $e_{PET} \approx 7 \mu m$ , maintenus en tension par des anneaux de téflon. Un actuateur piézoélectrique (PPA20M avec jauge de déformation, Cédrat Tech.) est mis en contact à l'une des deux extrémités par l'intermédiaire d'un embout vissé. Cet embout consiste en une vis en laiton usinée à son extrémité. Un premier embout de diamètre 2.3 *mm* est utilisé pour l'excitation des échantillons confinés dans des tubes de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ . Un second embout d'extrémité de diamètre 1 *mm* est utilisé à la place du premier pour les tubes de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$ . Ce choix permet d'exciter des modes guidés dans la mousse dont les déplacements ont tendance à être concentrés près de l'axe du tube, comme nous le montrerons dans la section (cf. section 4.5). Le contact est rendu adhésif par la prise d'une goutte de gélatine liquide déposée avant la première d'une série d'acquisitions. L'actuateur est commandé par une carte génératrice de signaux arbitraires (NI 5411, National Instruments) installée sur l'unité centrale qui pilote les acquisitions. Cette carte transmet un signal de référence à une détection synchrone (72 20 DSP Lock-in amplifier, EG&G Instruments) qui démodule également le signal du capteur de la jauge de déformation de l'actuateur. C'est également cette carte qui envoie les signaux de déclenchement de la caméra, qui détecte la lumière diffusée, comme nous le discuterons ci-dessous. L'ensemble de ces signaux est visualisé sur un oscilloscope (TDS 2002B, Tektronix). Par ailleurs, une sonde de température de type PT100 est installée à proximité de l'échantillon et est reliée à un multimètre qui communique également avec l'unité centrale.

L'échantillon est éclairé par une nappe laser de longueur d'onde 532 *nm* émise par un laser de puissance maximale 2 *W* (Verdi 2 *W*, Coherent). Le laser est réglable en puissance. Dans la pratique, la puissance est ajustée entre 30 *mW* et 2 *W* en fonction des besoins en luminosité. Le faisceau passe ensuite par un montage optique (cf. figures 4.9 et 4.10), qui comporte un jeu de miroirs ainsi qu'un disque de verre dépoli qui joue le rôle de diffuseur. Ce disque est monté sur un moteur pas à pas qui permet par sa rotation de changer le point de passage du faisceau. Ainsi des phases initiales aléatoires sont introduites lorsque les rayons lumineux cohérents le traversent. Cela a pour effet

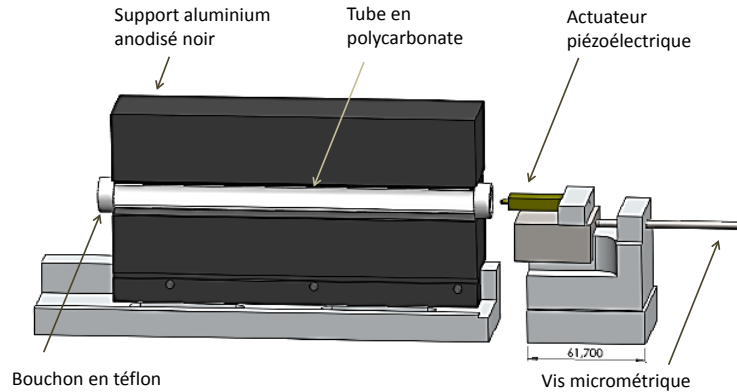


FIGURE 4.8 – Montage expérimental : ensemble support, échantillon et actuateur piézoélectrique. Barre d'échelle en millimètres. (Dessin 3D et réalisation des pièces, C. Blanchard)

d'enrichir la statistique des figures speckle obtenues en rétrodiffusion (cf. section 1.4.2 et référence [44]). Il sert également à élargir le faisceau avant un système optique qui permet la formation de la nappe laser. Le système optique associe une lentille convergente et une lentille cylindrique. En outre, un second jeu de deux miroirs est placé à la sortie du jeu de lentilles (cf. figure 4.10). Il permet de donner une incidence oblique au faisceau qui éclaire l'échantillon. Sans cela, une tâche de réflexion spéculaire vient éblouir la caméra (cf. figure 4.10), même avec une inclinaison zénithale de celle-ci (cf. figure 4.9) du fait de la géométrie cylindrique du tube. L'intensité des speckles rétrodiffusés est enregistrée avec une caméra (Marlin F131B, AVT) de résolution maximale  $1024 \times 1280$  pixels de sensibilité 8 bits (0 – 255) sur laquelle est monté un objectif réglé de manière à être légèrement défocalisé. Deux modèles d'objectifs différents ont été utilisés. Le premier a servi au cours des acquisitions de suivi d'une impulsion sur une faible portion de l'échantillon de l'ordre de 5 cm (Nikon AF Micro Nikkor), tandis que le second a servi pour les acquisition au cours desquelles l'onde est suivie sur une portion plus grande de l'échantillon et en particulier pour les acquisitions de suivi d'une onde stationnaire (COSMICAR TV ZOOM 12.5 – 75 mm 1 : 18).

### Conditions d'acquisition

Les acquisitions sont faites à température ambiante de la salle  $21.5^{\circ}\text{C}$ . Avant les acquisitions, les échantillons ont passé au moins une heure au clinostat à cette température (cf. section 2.2.2). Des acquisitions ont été faites sur des échantillons âgés de 2 heures à

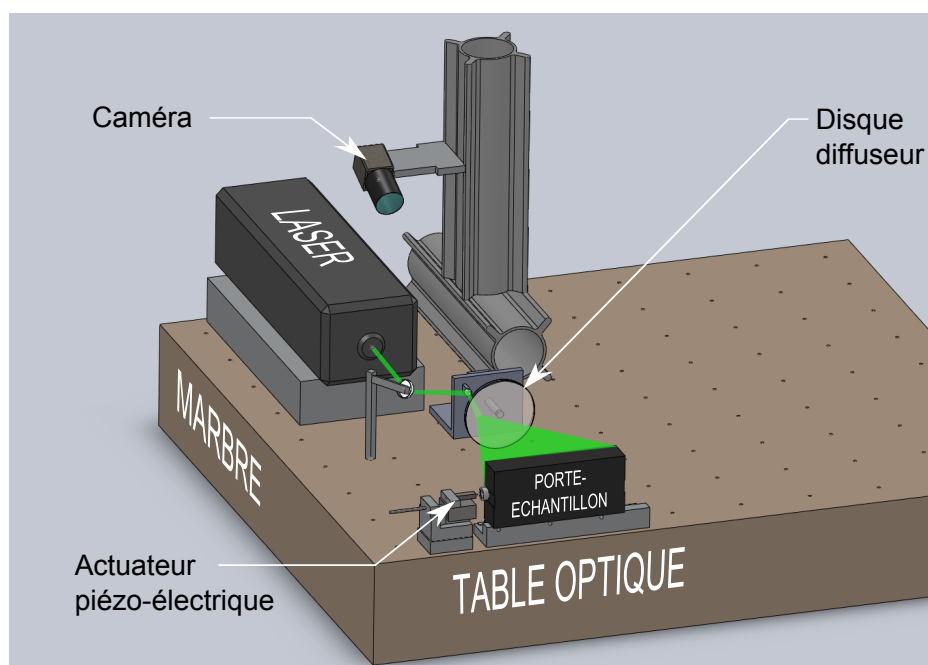


FIGURE 4.9 – Vue d’ensemble du montage expérimental. Le support porte-échantillon et le support de l’actuateur piézo-électrique sont fixés séparément sur une table optique en marbre. Le laser émet un faisceau qui est redirigé par un premier jeu de deux miroirs puis diffusé par un disque diffuseur. Le système optique situé entre le disque diffuseur et l’échantillon est représenté sur la figure 4.10. (Dessin 3D, C. Blanchard)

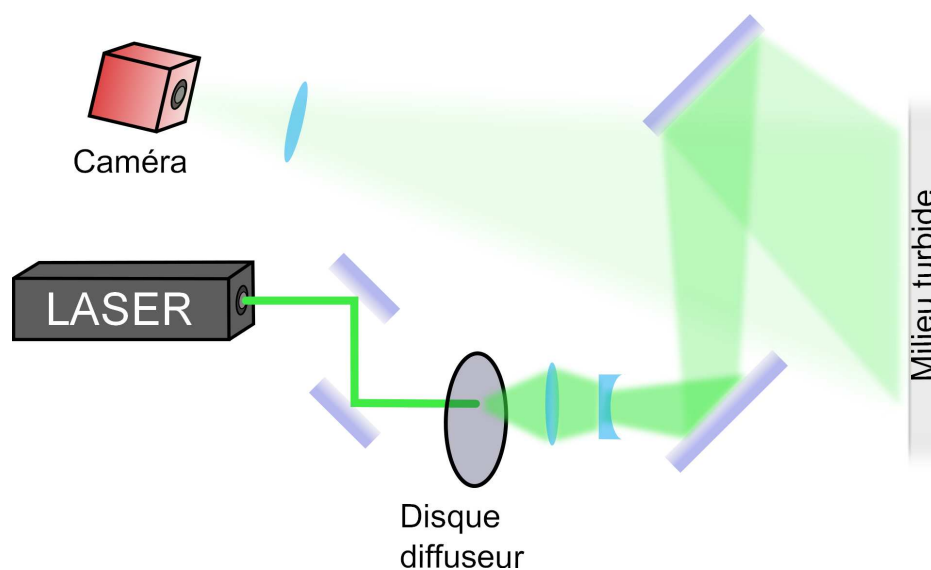


FIGURE 4.10 – Schéma optique du montage expérimental. Le laser émet un faisceau qui est redirigé par un premier jeu de deux miroirs puis par le disque diffuseur. Il est ensuite concentré et redéployé en nappe par la combinaison d’une lentille convergente et d’une lentille cylindrique. Le montage comprend également un jeu de miroirs supplémentaires afin d’éclairer l’échantillon avec une incidence oblique.

2 semaines. Les acquisitions consistent en des balayages en fréquence soit avec excitation pulsée entre 100  $Hz$  et 1  $kHz$  par pas de 100  $Hz$ , soit avec excitation continue entre 20  $Hz$  et 5  $kHz$  par pas de 20  $Hz$ . Un balayage complet dure en général une dizaine d'heures. Ces longs temps d'acquisition s'expliquent pour moitié du fait de la nécessité de répéter l'acquisition pour  $N$  positions successives du disque diffuseur ( $30 \leq N \leq 100$ ), et pour l'autre moitié du fait des temps de calcul nécessaires à un prétraitement des images qui permet de parer aux larges volumes de données mis en jeux. D'une part, le nombre de positions du disque  $N$  est choisi en faisant un compromis entre la qualité des profils de visibilité, qui dépend directement du nombre de réalisations du désordre, et la durée des acquisitions. D'autre part, le prétraitement des images est nécessaire, car sans celui-ci, un balayage impulsif représente plusieurs dizaines de gigaoctets de données, à comparer aux 100  $Go$  d'espace disponible sur l'unité centrale utilisée. Lors d'un balayage, les taux d'acquisitions de la caméra varient de 10  $Hz$  pour le suivi des excitations de plus basses fréquences à 150  $Hz$  pour les plus hautes. La taille de la fenêtre d'acquisition varie entre 40  $\times$  1280  $pixels$  et 100  $\times$  1280  $pixels$ . Le choix particulier de la taille de la fenêtre pour une acquisition correspond directement à la taille de la surface éclairée de l'échantillon sondé, dans le champ de vue de la caméra.

## 4.2.2 Excitation acoustique

### Génération du signal pulsé

Un train d'onde typique émis par l'actuateur est constitué de  $N = 3 - 4$  longueurs d'onde d'oscillations sinusoïdales de fréquence située entre 100  $Hz$  et 1  $kHz$ . Ces oscillations sont modulées par une enveloppe dont la forme s'inspire de la fenêtre de Hann, mais dont l'expression exacte a été adaptée pour des raisons techniques. Finalement, le signal résultant  $s_{n,T}(t)$  de durée  $n$  oscillations à la période  $T$  est défini par (cf. figure 4.11) :

$$s_{n,T}(t) = s_0 \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \times \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq T \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{T} - 1\right)\right) & \text{si } T \leq t \leq 2T \\ 1 & \text{si } 2T \leq t \leq nT \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\left((n+1) - \frac{t}{T}\right)\right) & \text{si } nT \leq t \leq (n+1)T \\ 0 & \text{si } T \leq t \end{cases} \quad (4.14)$$

En comparaison avec une fenêtre rectangulaire, la fenêtre choisie permet de réduire légèrement la proportion spectrale des lobes latéraux du spectre  $\hat{s}_{n,T}(\omega)$  du signal. Le

cylindre de mousse se comporte comme un guide d'onde et cette impulsion se propage selon l'axe du cylindre d'une extrémité à l'autre en se réfléchissant sur chacune. La dispersion du matériau dans la configuration guide d'onde élargit le train d'onde en temps et en espace. L'atténuation physique du matériau finit par le dissiper totalement.

Afin d'acquérir les figures d'interférence speckle à des instants consécutifs  $t_j$  avec ( $1 \leq j \leq N_t$ ), on a recours à la stroboscopie comme dans les expériences avec les mousses liquides décrites dans la section 3.1. Néanmoins, comme le signal émis n'est ici pas stationnaire, cette stroboscopie est d'une nature différente. Contrairement au cas de nos expériences avec la mousse liquide (cf. section 3.1, paragraphe IV.B), les ondes émises peuvent subir plusieurs réflexions aux extrémités de l'échantillon avant d'être totalement dissipées. Les impulsions mécaniques sont donc envoyées à des intervalles de temps réguliers suffisamment espacés pour qu'une seule impulsion à la fois ne soit présente dans la cavité du guide d'onde. À chaque répétition du motif, l'origine des temps utilisé dans le système électronique qui génère les impulsions se situe par définition une période  $T$  avant le début de la génération du train d'onde (cf. équation 4.14). Un signal de déclenchement est envoyé à la caméra de manière synchronisée à un instant  $t_j$  du signal d'excitation (cf. figure 4.11). Une image est alors acquise à cet instant précis repéré à partir de l'origine des temps. Les images aux instants successifs ( $t_j$ ) sont acquises en répétant le signal. L'indice  $j$  distingue les acquisitions réalisées à une même fréquence, et les temps  $t_j$  sont incrémentés d'un interval de temps  $\delta t$  à chaque répétition de l'acquisition. Le signal envoyé au transducteur est tel que chaque période corresponde à 256 valeurs discrètes de tension. Les marqueurs de déclenchement peuvent être placés tous les 8 points d'échantillonnage, de sorte qu'il existe 32 choix possibles pour placer un marqueur sur une période ( $256/8 = 32$ ). Typiquement, l'échantillonnage est fait de manière à placer un marqueur tous les 16 points d'échantillonnage, de manière à acquérir 16 cartes de visibilité par période (i.e.  $\delta t = T/16$ ).

### Nombre d'oscillations

Afin de déterminer un critère sur la taille spectrale limite de l'excitation, on envisage un signal  $e_{n,T}(t)$  comprenant  $n$  oscillations entières de période  $T$  modulées par une fenêtre rectangulaire :

$$e_{n,T}(t) = e_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \times \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq T \\ 1 & \text{si } 2T \leq t \leq (n+1)T \\ 0 & \text{si } T \leq t \end{cases} \quad (4.15)$$

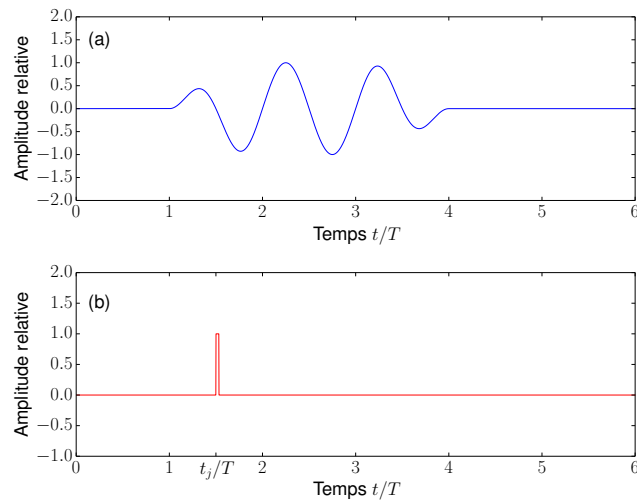


FIGURE 4.11 – Allure typique du signal d’excitation (a) et du signal de déclenchement de la caméra (b) en fonction du temps.  $T$  représente la période d’une oscillation du paquet d’onde. Le signal de déclenchement de la caméra est représenté pour  $t_j = 3T/2$ .

La transformée de Fourier d’un tel signal  $\hat{e}_{n,T}(\omega)$  est un sinus cardinal dont les premiers lobes latéraux commencent en  $f = f_0(1 - 1/n)$  et  $f = f_0(1 + 1/n)$ . La non-linéarité de notre système de détection transforme le spectre en ajoutant des combinaisons des fréquences initialement présentes dans le spectre. À cette première fenêtre correspondront donc des duplicata centrés sur des multiples entiers de la fréquence. Si les duplicata ainsi obtenus se chevauchent d’une manière significative en fréquence, il serait difficile d’extraire des signaux mesurés l’amplitude et la phase des impulsions acoustiques. En écrivant l’inégalité de non-chevauchement des lobes principaux du spectre dans le cas d’une fenêtre rectangulaire, on obtient un nombre d’oscillations minimal de  $n = 3$ . Ce nombre minimal d’oscillations combiné à une fenêtre qui minimise l’importance des lobes latéraux du spectre (cf. figure 4.12), permettent de travailler en régime impulsionnel malgré la non-linéarité. Les graphiques 4.12.a et 4.12.b comparent le spectre obtenu pour les signaux  $s_{n,T}$  et  $s_{n,T/2}$  pour  $n = 3$  et  $n = 4$  oscillations.  $s_{n,T/2}$  correspond au signal  $s_{n,T}$  à une fréquence double. La comparaison permet de se rendre compte du chevauchement entre le spectre du signal émis et d’un artefact de fréquence double. On remarque que les lobes principaux se chevauchent encore légèrement pour  $n = 3$  mais plus du tout pour  $n = 4$ . Les graphiques 4.12.c et 4.12.d comparent le spectre obtenu pour le signal  $s_{n,T}$  et pour un signal  $e_{n,T}$  d’enveloppe rectangulaire pour  $n = 3$  et  $n = 4$  oscillations. L’amélioration due au fenêtrage de  $s_{n,T}$  est modeste par rapport à la fenêtre rectangulaire de  $e_{n,T}$  mais néanmoins suffisante pour éviter le repliement du spectre qui explique l’asymétrie de  $|\hat{e}_{n,T}|$ .

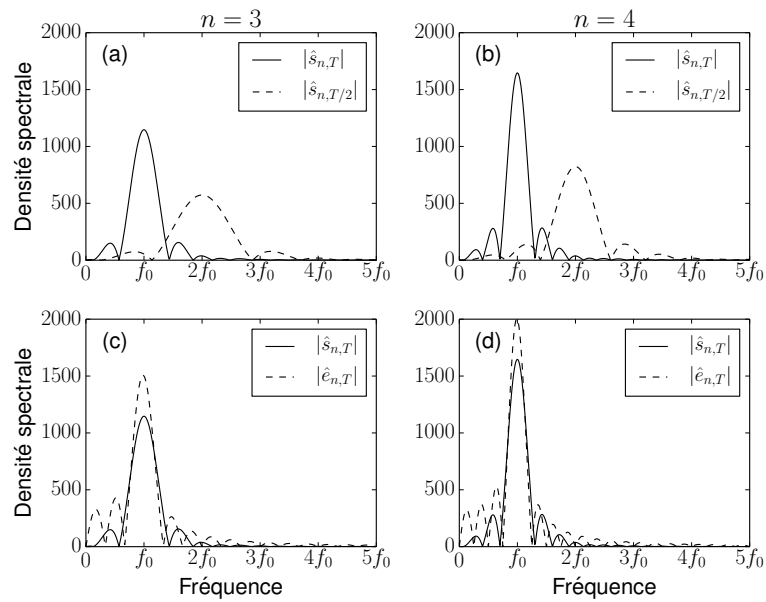


FIGURE 4.12 – Comparaison des densités spectrales d’amplitude de signaux d’excitation de  $n$  périodes d’oscillations de durée  $T$  telle que la fréquence vaille  $f_0 = 1/T$ . L’amplitude spectrale du signal  $s_{n,T}$  est comparée au spectre d’un signal centré sur une fréquence deux fois supérieure  $2f_0 = 2/T$  pour  $n = 3$  (a) et  $n = 4$  (b). Elle est également comparée au spectre d’un signal de même fréquence mais d’enveloppe rectangulaire  $e_{n,T}$  pour  $n = 3$  (c) et  $n = 4$  (d). Les densités spectrales sont tracées pour des signaux adimensionnés tels que  $s_0 = e_0 = 1$ . Le recouvrement entre un signal à  $f_0$  et un signal à  $2f_0$  est plus important pour une impulsion de durée  $n = 3$  oscillations (a) par rapport à  $n = 4$  oscillations. L’amplitude spectrale du signal  $s_{n,T}$  est symétrique tandis que celle de  $e_{n,T}$  est asymétrique (i.e. affectée par le repliement spectral).

### Test de mise en vibration

Dans une première version du montage expérimental, les supports respectifs de l’actuateur et de l’échantillon représentés sur la figure 4.8 étaient solidaires. Or dans cette configuration, les vibrations de l’actuateur se transmettent non seulement par l’embout présenté dans la section 4.2.1, mais aussi par la biais du support. Les deux pièces ont été désolidarisées. Cette précaution ne suffit néanmoins pas à arrêter la transmission des vibrations de l’un à l’autre par le biais de la table optique en marbre. La configuration finalement retenue intercale du ruban adhésif double-face et des plots en caoutchouc de  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$  sur  $2\text{ mm}$  d’épaisseur aux quatre coins du support piézo-électrique. Les résultats du test de vérification de ce support sont présentés sur la figure 4.13. Ils permettent de comparer le niveau de bruit dans le spectre de la visibilité moyenne sur un échantillon typique en l’absence de contact direct avec l’actuateur et le niveau de bruit résiduel qui subsiste pour un porte-échantillon vide. La figure 4.13 rend compte du faible niveau moyen du bruit. L’écart type sur la visibilité normée vaut dans les deux cas  $\delta\bar{V} = \pm 0.016$ . Son ordre de grandeur est bien inférieur aux variations de visibilité normée  $\bar{V}$  constatées par ailleurs au niveau des profils de visibilité (cf. figure 3.2) ou

bien au niveau des diagrammes spatio-temporels (cf. figure 3.5) présentés dans les sections 3.2 et 3.3 respectivement. Un examen attentif des deux spectres permet néanmoins de repérer une légère différence qualitative entre les deux. En effet, le graphique 3.2.b présente une faible modulation déterministe de pas fréquentiel de l'ordre de  $100\text{ Hz}$  par rapport à son homologue 3.2.a. Il y aurait donc encore une part de la vibration qui serait transmise par le biais de la table optique et à laquelle la mousse serait sensible. L'ordre de grandeur des variations de visibilité que cette transmission cause étant néanmoins comparable ou inférieur à celui du bruit sur les acquisitions pour un échantillon à vide, on peut raisonnablement affirmer qu'elle n'affectera pas les mesures.

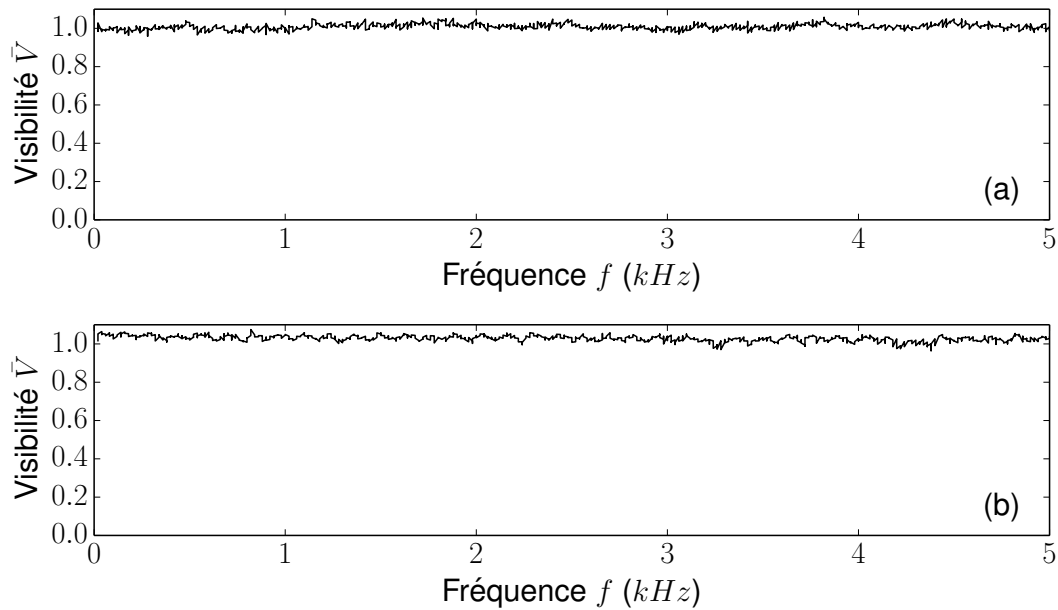


FIGURE 4.13 – Spectre fréquentiel de visibilité à vide d'un tube rendu diffusant par un ruban adhésif (a) et d'un tube rempli d'une mousse de diamètre de bulles  $d = 0.6\text{ mm}$  et de diamètre de tube  $D = 4\text{ mm}$  en l'absence de contact direct (b). La grandeur représentée correspond à la visibilité moyenne calculée sur tous les pixels provenant de l'échantillon pour  $N = 5$  positions du disque diffuseur. L'excitation continue de l'actuateur piézoélectrique d'amplitude  $10\text{ }\mu\text{m}$  crête-crête évolue dans une gamme de fréquences  $f = 20\text{ Hz} - 5\text{ kHz}$ .

### 4.3 Propagation dans un guide d'onde cylindrique

Comme indiqué au chapitre 2, nos échantillons sont constitués d'une mousse gélifiée placée dans un tube cylindrique droit, rigide de section circulaire. La symétrie de cette géométrie simplifie grandement les conditions aux limites mécaniques comme nous le verrons dans cette section. En partant des rappels de mécanique des milieux continus (cf. sections 1.2.1 et 1.3.1), nous décrivons la propagation dans un guide d'onde cylindrique. La propagation d'une onde dans une tige pleine solide cylindrique ou dans un fluide confiné dans un tube a été discutée en détails dans la littérature [77, 24]. Cependant, le



cas de notre expérience où l'onde se propage dans un solide mou confiné dans un tube rigide n'a à notre connaissance pas été considéré, et nous présentons dans cette section l'analyse qui conduit à la relation de dispersion.

### 4.3.1 Relation de dispersion pour un milieu continu homogène

Un guide d'onde est un milieu dont au moins une dimension peut être considérée comme infinie, tandis qu'au moins une des autres dimensions est finie. Cette géométrie induit un confinement des ondes qui se propagent dans le guide. Il en résulte une modulation stationnaire du champ de déformation selon la direction transverse à la direction de propagation. Dans la suite, nous considérons un guide d'onde cylindrique et les modes de symétrie de révolution tels que nous les excitons dans nos expériences.

#### Résolution dans la géométrie cylindrique

On considère un tube rigide, droit, de section circulaire de rayon  $R$ , infiniment long, rempli d'un matériau élastique isotrope. On note  $c_T$  et  $c_L$  les vitesses de propagation acoustique transverse et longitudinale respectivement. Pour décrire la propagation acoustique dans ce tube, nous utilisons la décomposition de Helmholtz (cf. section 1.3.1), en notant  $\varphi$  le potentiel scalaire et  $\vec{\psi}$  le potentiel vecteur dont dérive le champ de déplacement  $\vec{u}$  (cf. équation 1.24).

Nous introduisons les coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  et considérons successivement le cas d'une onde de torsion puis d'une onde de compression. Les conditions aux limites sont telles que le matériau est immobile sur la paroi :

$$u_r(r = R) = u_\theta(r = R) = u_z(r = R) = 0 \quad (4.16)$$

#### Onde de torsion

Dans ce cas, seule la composante  $u_\theta$  du déplacement est non nulle [77]. D'après les équations A.22, cette solution correspond à un potentiel  $\vec{\psi}$  qui n'a qu'une composante, selon  $z$ , et qui ne dépend pas de  $\theta$ . L'expression générale de  $\psi_z$  est donnée par la relation (A.20b) avec  $n = 0$ . En reportant dans l'équation d'onde (A.3), on obtient la relation de dispersion (A.21b) :

$$k^2 + q_\psi^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} \quad (4.17)$$

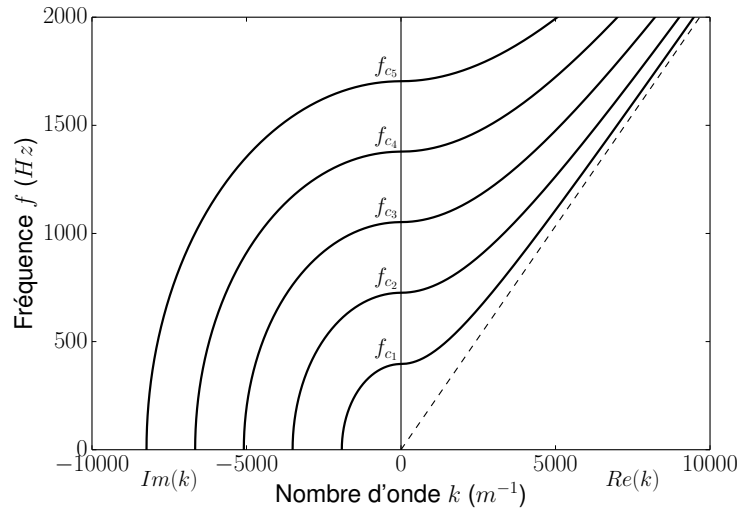


FIGURE 4.14 – Relation de dispersion pour les 5 premières branches des ondes de torsion dans un tube rigide de cylindrique de rayon  $R = 2 \text{ mm}$ , et rempli d'un matériau élastique isotrope de célérité transverse de  $1.3 \text{ m/s}$ . Les courbes sont calculées avec la relation (4.17) avec  $Rq_{\psi_1} \approx 3.8$ ,  $Rq_{\psi_2} \approx 7.0$ ,  $Rq_{\psi_3} \approx 10.2$ ,  $Rq_{\psi_4} \approx 13.3$  et  $Rq_{\psi_5} \approx 16.5$ . Les fréquences de coupure  $f_{c_1} \approx 396 \text{ Hz}$ ,  $f_{c_2} \approx 726 \text{ Hz}$ ,  $f_{c_3} \approx 1052 \text{ Hz}$ ,  $f_{c_4} \approx 1378 \text{ Hz}$  et  $f_{c_5} \approx 1703 \text{ Hz}$  sont données par l'équation 4.20. La droite pointillée représente la relation de dispersion  $\omega = kc_T$  du mode de cisaillement dans un milieu infini de même célérité transverse  $c_T$ .

où  $k$  est la projection du vecteur d'onde dans la direction longitudinale et  $q_\psi$  est un nombre d'onde transverse. Le déplacement  $u_\theta(r, z)$  se déduit de (A.22b) :

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi_z}{\partial r} \quad (4.18)$$

c'est-à-dire :

$$u_\theta = -q_\psi B J_1(rq_\psi) e^{i(\omega t - kz)} \quad (4.19)$$

$B$  est une amplitude déterminée par l'excitation imposée au système.

La condition aux limites (4.16) impose  $J_1(Rq_\psi) = 0$ . On note  $q_{\psi_l}$  les nombres d'onde transverses qui satisfont cette condition. La relation de dispersion est obtenue en reportant les valeurs de  $q_{\psi_l}$  dans l'équation 4.17, comme illustré sur la figure 4.14. À chaque branche correspond un nombre d'onde  $k$  complexe. Pour chaque branche (valeur de  $l$ ), on distingue deux régimes : pour une fréquence  $f$  inférieure à une fréquence de coupure  $f_{c_l}$  telle que :

$$2\pi f_{c_l} = q_{\psi_l} c_T \quad (l \in \mathbb{N}^*) \quad (4.20)$$

la propagation est évanescence, et le nombre d'onde  $k$  purement imaginaire. Pour  $f > f_{c_l}$ , l'onde se propage avec une vitesse qui tend vers  $c_T$  quand  $k$  tend vers l'infini.

L'onde de torsion correspond à un cisaillement simple du matériau, sans compression.

Par conséquent, la mesure de  $c_T$  renseigne sur le module de cisaillement  $G$  du matériau (cf. équation 1.31). Malheureusement, ce mode est difficile à exciter en pratique. Les propriétés élastiques sont plus souvent sondées pour des excitations qui associent onde de cisaillement et onde longitudinale.

### Ondes de compression

Dans le cas d'une onde longitudinale, la composante  $u_\theta$  du déplacement est nulle, tandis que les composantes  $u_r$  et  $u_z$  sont non nulles et couplées entre elles [24]. Ces déplacements associent des déformations de cisaillement et de compression du matériau. D'après les équations A.22, cette solution correspond à un potentiel  $\varphi$  non nul et une composante  $\psi_\theta$  non nulle. L'expression générale de  $u_r$  et  $u_z$  se déduit des relations A.20a et A.20d (avec  $n = 0$ ) :

$$u_r = -\{Aq_\varphi J_1(rq_\varphi) + i Bk J_1(rq_\psi)\} e^{i(\omega t - kz)} \quad (4.21)$$

$$u_z = -\{i Ak J_0(rq_\varphi) + Bq_\psi J_0(rq_\psi)\} e^{i(\omega t - kz)} \quad (4.22)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions aux limites et l'excitation. En explicitant les conditions aux limites fixes en  $r = R$  (cf. équation 4.16), on obtient :

$$\begin{cases} Aq_\varphi J_1(Rq_\varphi) + i Bk J_1(Rq_\psi) = 0 \\ i Ak J_0(Rq_\varphi) + Bq_\psi J_0(Rq_\psi) = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Ce système admet une solution autre que  $A = B = 0$ , si le déterminant de la matrice des coefficients du système s'annule, c'est-à-dire si les nombres d'onde  $q_\varphi$  (A.21a) et  $q_\psi$  (A.21b) sont solutions de l'équation caractéristique :

$$q_\varphi q_\psi J_1(Rq_\varphi) J_0(Rq_\psi) + k^2 J_0(Rq_\varphi) J_1(Rq_\psi) = 0 \quad (4.24)$$

Cette relation de dispersion donne les différentes branches  $\omega(k)$  illustrées sur la figure 4.15.

En  $k = 0$ , la relation de dispersion (4.24) devient :

$$J_1(Rq_\varphi) J_0(Rq_\psi) = 0 \quad (4.25)$$

soit encore avec les vitesses de propagation du son  $c_T$  et  $c_L$  :

$$J_1\left(\frac{R\omega}{c_L}\right) J_0\left(\frac{R\omega}{c_T}\right) = 0 \quad (4.26)$$

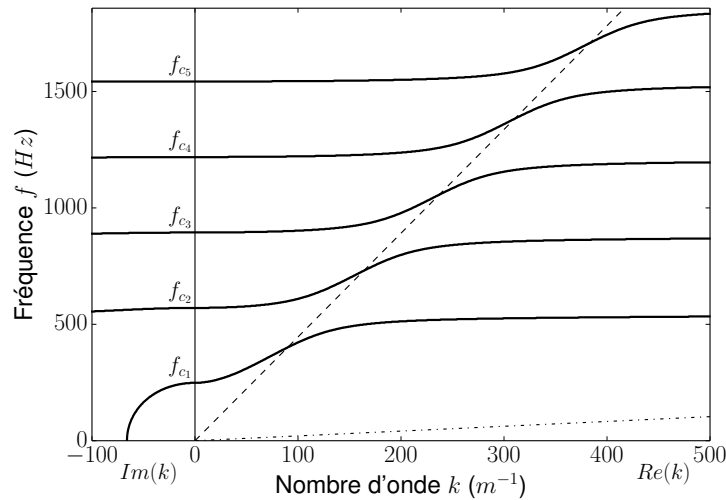


FIGURE 4.15 – Relation de dispersion pour les 5 premières branches d'une onde longitudinale se propageant dans un tube rigide cylindrique de rayon  $R = 2 \text{ mm}$  et rempli d'un matériau élastique isotrope, de célérité longitudinale  $c_L = 28 \text{ m/s}$  et transverse  $c_T = 1.3 \text{ m/s}$ . Les courbes sont obtenues en résolvant numériquement l'équation caractéristique 4.24. Les fréquences de coupure  $f_{c_1}$ ,  $f_{c_2}$ ,  $f_{c_3}$ ,  $f_{c_4}$  et  $f_{c_5}$  sont données par les relations 4.27. Les droites pointillées représentent respectivement les relations de dispersions  $\omega = kc_L$  du mode de compression (---) et  $\omega = kc_T$  du mode de cisaillement (.....) dans un milieu infini de mêmes célérités  $c_L$  et  $c_T$ .

Les zéros de  $J_1$  et  $J_0$  définissent les fréquences de coupure. Le premier zéro non nul de  $J_1$  est en  $\omega_1 \approx 3.83c_L/R$ . Les zéros de  $J_0$  génèrent la série de fréquences de coupure quasi-arithmétique :

$$\begin{aligned} \omega_{c_1} &\approx 2.41 \frac{c_T}{R}, & \omega_{c_2} &\approx 5.52 \frac{c_T}{R}, & \omega_{c_3} &\approx 8.65 \frac{c_T}{R}, \\ \omega_{c_4} &\approx 11.8 \frac{c_T}{R}, & \omega_{c_5} &\approx 18.1 \frac{c_T}{R}, & \dots & \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si  $c_L \ll c_T$ , comme ce sera le cas avec nos échantillons de mousse gélifiée, les fréquences  $\omega_{c_l} < \omega_1$  pour  $l < 20$ . Au voisinage de chaque fréquence de coupure  $\omega_{c_l}$ , on constate un régime évanescent ( $Re(k) = 0$ ) pour les fréquences légèrement inférieures à  $\omega_{c_l}$  et pour les fréquences supérieures un régime propagatif ( $Im(k) = 0$ ), comme illustré sur la figure 4.15. On voit ainsi qu'on peut déduire de la propagation de ces modes guidés la vitesse de son transverse  $c_T$  des fréquences de coupure.

### 4.3.2 Relation de dispersion pour un matériau mou

#### Relation de dispersion adimensionnée

Considérons un matériau mou quasi-incompressible, comme nos échantillons de mousse gélifiée. Dans ce cas, le module élastique de cisaillement  $G = \mu$  est négligeable devant le module d'onde de compression  $L = \lambda + 2\mu$  (cf. équations 1.5). La célérité de l'onde de cisaillement est alors négligeable devant la célérité de l'onde de compression  $c_T \ll c_L$  (cf. équations 1.29 et 1.31).

Revenons sur la propagation d'une onde longitudinale dans un tube rigide infiniment long, de rayon  $R$ , rempli de ce matériau, et introduisons une pulsation et un nombre d'onde longitudinal adimensionnés  $\Omega$  et  $K$  tels que :

$$\Omega = \frac{R}{c_T} \omega \quad (4.28)$$

$$K = R \frac{c_L}{c_T} k \quad (4.29)$$

Exprimons  $q_\varphi$  et  $q_\psi$  en fonction de ces nombres adimensionnés :

$$q_\varphi = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2} = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2 (\Omega^2 - K^2)} \quad (4.30)$$

$$q_\psi = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2} = \frac{1}{R} \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2 K^2} \quad (4.31)$$

Après substitution dans la relation de dispersion (4.24) et développement limité au premier ordre en  $c_T/c_L$ , on obtient :

$$K^2 2J_1(\Omega) + \Omega (\Omega^2 - K^2) J_0(\Omega) = 0 \quad (4.32)$$

Cette relation de dispersion adimensionnée est illustrée sur la figure 4.16. Les branches successives de la relation transitent du régime évanescent au régime propagatif en passant par  $K=0$  pour les fréquences de coupure  $\Omega_l$  telles que  $J_0(\Omega_l) = 0$  (cf. équation 4.32). Ces fréquences  $\Omega_l$  permettent de déterminer à l'aide de la relation 4.28 la vitesse de propagation transverse dans l'échantillon  $c_T$ .

La figure 4.16 illustre de même que la figure 4.15 la coïncidence du mode de compression dans un milieu infini et des branches de la relation de dispersion du mode guidé en leur point d'inflexion. Cette coïncidence se produit pour les fréquences  $\Omega'_l$  telles que  $J_1(\Omega'_l) = 0$ . Il est donc également possible de déterminer la célérité longitudinale  $c_L$  à

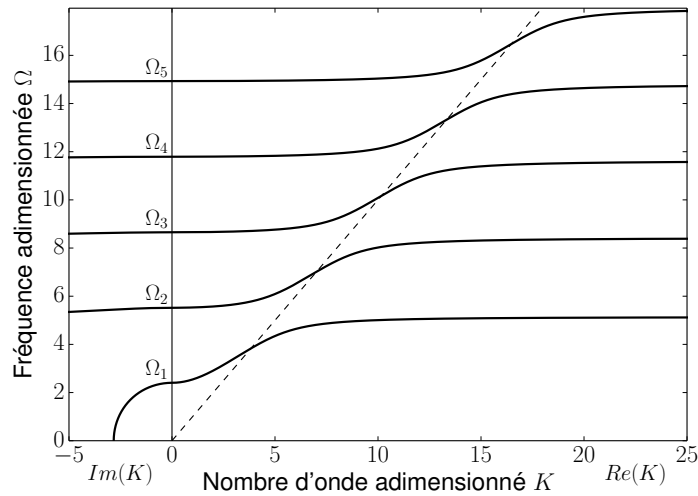


FIGURE 4.16 – Relation de dispersion adimensionnée pour les 5 premières branches d'une onde longitudinale obtenue en résolvant analytiquement l'équation 4.32.  $\Omega$  et  $K$  sont définis par les relations 4.28 et 4.29. La droite pointillée a pour équation  $\Omega = K$ .  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  et  $\Omega_5$  sont les fréquences de coupure.

partir des données expérimentales. Cette forme adimensionnée de la relation de dispersion doit permettre de construire une courbe maîtresse qui compare des échantillons de différents rayons  $R$  et de différentes célérités transverses  $c_T$  et longitudinales  $c_L$ .

### Masse volumique effective

Nous montrons maintenant que la propagation du mode guidé longitudinal peut se décrire comme la propagation d'une onde longitudinale dans un milieu infini dont la masse volumique dépend de la fréquence comme dans le langage des métamatériaux (cf. section 4.1.1). Partons de la relation de dispersion adimensionnée (4.32) et remplaçons  $K$  et  $\Omega$  par leurs expressions (4.28 et 4.29) :

$$\rho_*(\omega) \omega^2 = L k^2 \quad (4.33)$$

où  $\rho_*(\omega)$  est la masse volumique effective du matériau :

$$\rho_*(\omega) = \frac{1}{1 - H\left(\frac{R\omega}{c_T}\right)} \rho \quad (4.34)$$

$$\text{avec } H(x) = \frac{2J_1(x)}{x J_0(x)} \quad (4.35)$$

$L$  est le module d'onde de compression du matériau.

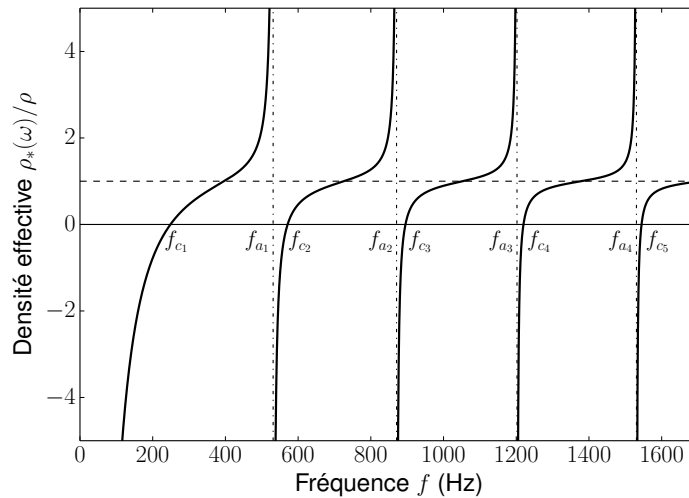


FIGURE 4.17 – Masse volumique effective pour une onde longitudinale se propageant dans un cylindre de rayon  $R = 2 \text{ mm}$  et de célérité transverse de  $c_T = 1.3 \text{ m/s}$ . Les fréquences de coupure  $f_{c_1}$ ,  $f_{c_2}$ ,  $f_{c_3}$ ,  $f_{c_4}$  et  $f_{c_5}$  sont données par les relations 4.27. Les fréquences  $f_{a_1}$ ,  $f_{a_2}$ ,  $f_{a_3}$  et  $f_{a_4}$  sont les fréquences d’antirésonance et se déduisent des zéros du dénominateur de  $\rho_*(\omega)$  (cf. équation 4.34).

La figure 4.17 montre que le guide d’onde cylindrique se comporte comme un métamatériau unidimensionnel. Il présente des régimes fréquentiels où la masse volumique effective est négative. D’une manière générale, lorsque la masse volumique effective d’un métamatériau est négative (et son élasticité positive), le nombre d’onde est imaginaire pur ce qui correspond à un régime d’onde évanescente. Ainsi, on déduit de la figure 4.17 que le domaine basses fréquences à partir de la limite statique correspond à un régime évanescent jusqu’à une première fréquence de coupure  $f_{c_1}$  qui correspond à l’annulation de la masse volumique effective ( $\rho_*(\omega_{c_1}) = 0$ ).  $\rho_*(\omega)$  prend des valeurs négatives à intervalles réguliers par la suite au niveau des résonances, qui correspondent aux départs de branches des modes propagatifs. Entre deux résonances, il y a systématiquement une fréquence  $f_{a_l}$  où la masse volumique tend vers l’infini, appelée antirésonance. Ces fréquences correspondent aux asymptotes horizontales de la relation de dispersion (cf. figure 4.16) qui précèdent le départ d’une nouvelle branche.<sup>4</sup>

4. De même que pour la membrane (cf. section 1.3.4), l’antirésonance est liée à une absence de conversion de mode entre la polarisation transverse et la polarisation longitudinale. Dans le cas de la membrane, une moyenne sur la section de la composante axiale  $u_z$  du déplacement non nulle induit un rayonnement longitudinal. L’annulation de  $\langle u_z \rangle$  à antirésonance annule ce rayonnement. Dans le cas du guide d’onde cylindrique, la réflexion aux parois du cylindre induit une conversion de mode pour les incidences de l’onde hors antirésonances. Le dénominateur de  $\rho_*(\omega)$  s’annule pour  $H(x) = 1$ , ce qui correspond à  $J_2(x) = 0$  pour  $x = R\omega_{a_l}/c_T$ .

## 4.4 Résultats expérimentaux

Les résultats des mesures expérimentales effectuées sur des mousses gélifiées confinées dans des tubes de section circulaire sont présentés dans cette partie. Les deux techniques de spectroscopie acoustique présentées comportent un certain nombre d'étapes intermédiaires (cf. sections 3.2 et 3.3). Des informations pertinentes pour la compréhension des phénomènes sont extraites des données obtenues à chacune de ces étapes. La présentation des résultats suivra ces étapes en partant des informations extraites des données brutes pour finir avec les relations de dispersion.

### 4.4.1 Spectre fréquentiel de la visibilité

En spectroscopie de visibilité speckle (SVS), la grandeur physique mesurée est la visibilité (cf. équation 1.100). Comme expliqué dans la section 3.2.1, les réalisations statistiques correspondant aux différentes positions du disque diffuseur permettent d'établir une carte de visibilité. Ainsi lorsque l'échantillon est soumis à une excitation continue, une unique carte de visibilité permet de rendre compte du mode de vibration de la mousse. On s'intéresse aux grandeurs statistiques associées à cette carte de visibilité normée  $\bar{V}(x, z)$  (cf. équation 3.1) et en particulier la visibilité normée moyenne sur toute une zone de la carte de visibilité  $\langle \bar{V} \rangle_{x,z}$ . Pour une amplitude d'excitation donnée, la mousse est plus ou moins réceptive à l'excitation de l'actuateur selon la fréquence. Cela donne des informations sur la qualité du couplage entre l'onde harmonique excitatrice et la cavité formée par l'échantillon de mousse. La figure 4.18 représente la visibilité moyenne  $\langle \bar{V} \rangle_{x,z}$  sur la moitié la plus éloignée de l'excitation de l'échantillon pour une excitation harmonique continue. Ne considérer que la moitié la plus éloignée permet d'être moins sensible aux fluctuations de visibilité dans la zone proche de l'excitation (où les effets de champ proche sont plus forts). En d'autres termes, cela permet de faire en sorte que la visibilité normée soit proche de 1 pour des ondes évanescentes.

L'allure du spectre de visibilité représenté sur la figure 4.18 est accidentée. Deux échelles fréquentielles se distinguent dans la séquence des extrema de la visibilité (cf. figure 4.18.a). La visibilité est minimale dans une première gamme de fréquences qui s'étend jusqu'à 1 kHz. Dans cette gamme de visibilité minimale, on observe des maxima locaux très piqués de largeur de l'ordre de quelques dizaines de hertz à des fréquences séparées par seulement quelques centaines de hertz (cf. figure 4.18.b). Cette suite de maxima s'estompe progressivement jusqu'à ce que la visibilité redevienne proche de 1. Au-delà de cette première gamme de fréquence, deux pics et deux creux d'une largeur spectrale de l'ordre du kilohertz se succèdent. Le profil accidenté du spectre suggère un comportement résonant. La dynamique sous-jacente du comportement résonant semble



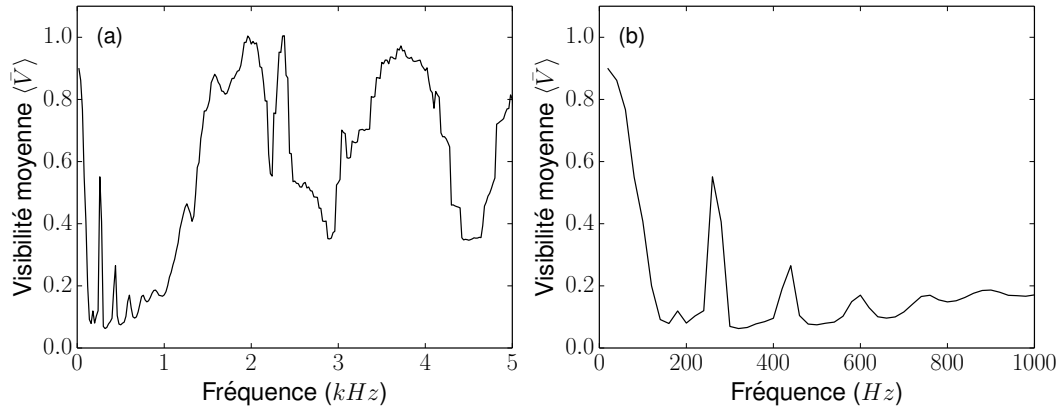


FIGURE 4.18 – Spectre fréquentiel de visibilité moyenne normée  $\langle \bar{V} \rangle_{x,z}$  pour une mousse de diamètre de bulles  $d = 0.6 \text{ mm}$  et de diamètre de tube  $D = 10 \text{ mm}$ . L'âge de la mousse est de 3 jours et sa fraction volumique de gaz vaut  $\phi_g = 0.82$ . La grandeur représentée correspond à la visibilité normée moyennée sur la moitié de la fenêtre d'acquisition la plus éloignée de l'excitation. Cela correspond à la partie de l'échantillon située dans un intervalle de distances à l'excitation entre  $10 \text{ cm}$  et  $17 \text{ cm}$ , à comparer aux  $20 \text{ cm}$  de longueur de l'échantillon. L'excitation est continue. Le spectre dans une gamme de fréquences  $f = 20 \text{ Hz} - 5 \text{ kHz}$  est représenté en (a) et le détail pour des fréquences  $f = 20 \text{ Hz} - 1 \text{ kHz}$  en (b). La durée d'exposition de la caméra est de  $T_e = 200 \text{ ms}$ .

très différente selon la gamme de fréquences considérée. Il semble en particulier y avoir une fréquence caractéristique qui sépare les deux régimes. Les spectres de visibilités obtenus pour d'autres tailles de bulles et de tubes peuvent être quantitativement très différent de l'exemple présenté. Qualitativement cependant, ils permettent également pour la plupart d'identifier deux régimes fréquentiels. Dans la suite, nous nous référerons au premier régime comme étant le régime basse fréquence et le second comme le régime haute fréquence.

#### 4.4.2 Visibilité en fonction de la distance de propagation

##### Profils de visibilité

Les cartes de visibilité établies selon la méthode exposée dans la section 3.2.1 permettent de déduire des profils de visibilité résolus selon la dimension spatiale  $z$  de la longueur du tube. Les figures 4.19 et 4.20 représentent les cartes de visibilité normée  $\bar{V}(x, z)$  et les profils  $\bar{V}(z)$  pour deux fréquences distinctes avec un premier échantillon, tandis que les figures 4.21 et 4.22 correspondent à un second échantillon qui diffère par un diamètre de tube plus grand. Les minima et maxima de l'onde stationnaire s'identifient aisément à la fois au niveau des cartes de visibilité et sur les profils de visibilité.

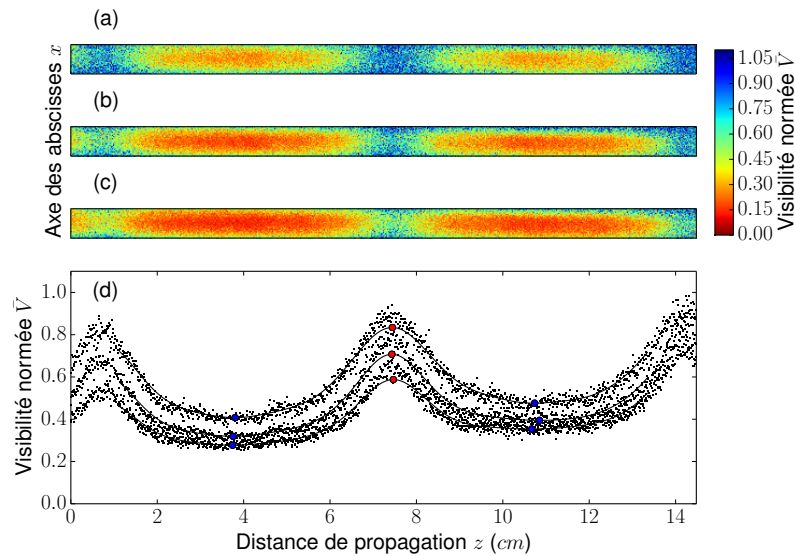


FIGURE 4.19 – Cartes (a-c) et profils de visibilité normée  $\bar{V}$  (d) obtenus pour une mousse gélifiée de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$ , confinée dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$ , âgée de 8h et de fraction volumique de gaz  $\phi_g = 0.80$ . Les amplitudes d’excitation valent  $5.0 \pm 0.1 \mu\text{m}$  (a),  $7.5 \pm 0.1 \mu\text{m}$  (b) et  $10 \pm 1 \mu\text{m}$  (c) crête-crête ( $f = 1.8 \text{ kHz}$ ). Les courbes continues correspondent à un lissage à  $L_z/N_z = 15 \%$  (cf. équation 3.7). Les points rouges et bleus indiquent les extrema détectés sur le profil. Les indications de longueur sur l’axe des abscisses (d) renseignent également sur l’échelle des cartes de visibilité.

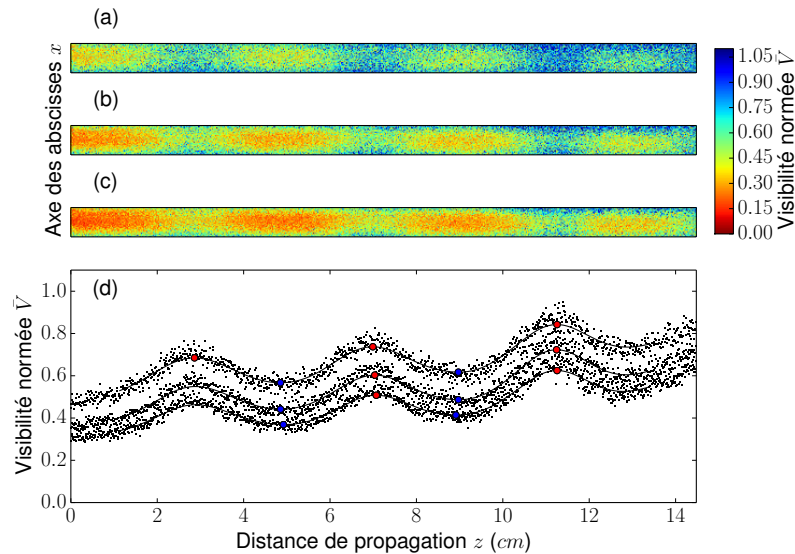


FIGURE 4.20 – Cartes (a-c) et profils de visibilité normée  $\bar{V}$  (d) obtenus pour une mousse gélifiée de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$ , confinée dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$ , âgée de 8h et de fraction volumique de gaz  $\phi_g = 0.80$ . Les amplitudes d’excitation valent  $4.8 \pm 0.1 \mu\text{m}$  (a),  $7.3 \pm 0.1 \mu\text{m}$  (b) et  $9 \pm 1 \mu\text{m}$  (c) crête-crête ( $f = 4.4 \text{ kHz}$ ). Les courbes continues correspondent à un lissage à  $L_z/N_z = 15 \%$  (cf. équation 3.7). Les points rouges et bleus indiquent les extrema détectés sur le profil. Les indications de longueur sur l’axe des abscisses (d) renseignent également sur l’échelle des cartes de visibilité.

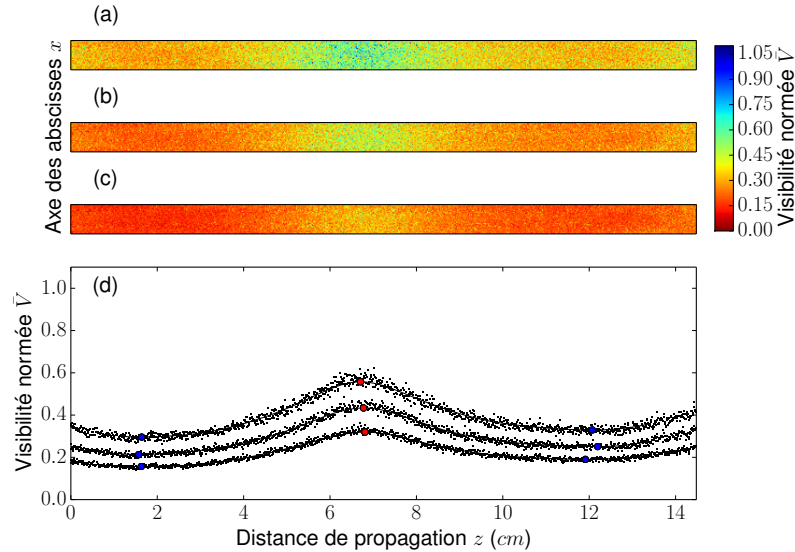


FIGURE 4.21 – Cartes (a-c) et profils de visibilité normée  $\bar{V}$  (d) obtenus pour une mousse gélifiée de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$ , confinée dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ , âgée de 1.4 jours et de fraction volumique de gaz  $\phi_g = 0.82$ . Les amplitudes d’excitation valent  $4.8 \pm 0.2 \text{ }\mu\text{m}$  (a),  $7.1 \pm 0.1 \text{ }\mu\text{m}$  (b) et  $11 \pm 1 \text{ }\mu\text{m}$  (c) crête-crête ( $f = 150 \text{ Hz}$ ). Les courbes continues correspondent à un lissage à  $L_z/N_z = 15 \%$  (cf. équation 3.7). Les points rouges et bleus indiquent les extrema détectés sur le profil. Les indications de longueur sur l’axe des abscisses (d) renseignent également sur l’échelle des cartes de visibilité.

Dans le cas du premier échantillon, les modulations de la visibilité des figures 4.19 et 4.20 correspondent à des excitations de fréquences respectives  $f = 1.8 \text{ kHz}$  et  $f = 4.4 \text{ kHz}$ . La longueur d’onde la plus petite correspond à la fréquence la plus élevée comme attendu (cf. équation 4.1) pour une propagation non-dispersive (i.e.  $\rho^*$  et  $L^*$  indépendants de  $\omega$ ). Dans le cas du second échantillon, les modulations de la visibilité des figures 4.21 et 4.22 correspondent à des excitations de fréquences respectives  $f = 150 \text{ Hz}$  et  $f = 2.5 \text{ kHz}$ . Les longueurs d’onde sont cette fois-ci comparables malgré l’écart en fréquence. Cette observation n’est pas compatible avec une relation de dispersion qui rende compte d’une propagation non-dispersive. Par conséquent, ce constat révèle un régime de propagation dispersif, qui sépare les deux fréquences.

Le niveau des minima de visibilité des profils présentés n’évolue pas ou peu avec la distance de propagation à l’exception de ceux de la figure 4.20. Ces derniers présentent une augmentation progressive du niveau des minima de la visibilité à mesure que l’on s’éloigne de l’excitation. Cela signifie que l’onde est atténuée dans son parcours.

Les cartes de visibilité dans la configuration de tube de plus grand diamètre (cf. figures 4.21 et 4.22) sont plus uniformes selon la dimension transverse que ceux de petit diamètre (cf. figures 4.19 et 4.20). Cette différence est liée à la taille de la zone d’observation d’environ  $6 \text{ mm}$  dans les deux cas comparée au diamètre du tube qui vaut respectivement  $D = 4 \text{ mm}$  et  $D = 10 \text{ mm}$  pour le premier et le second échantillon.

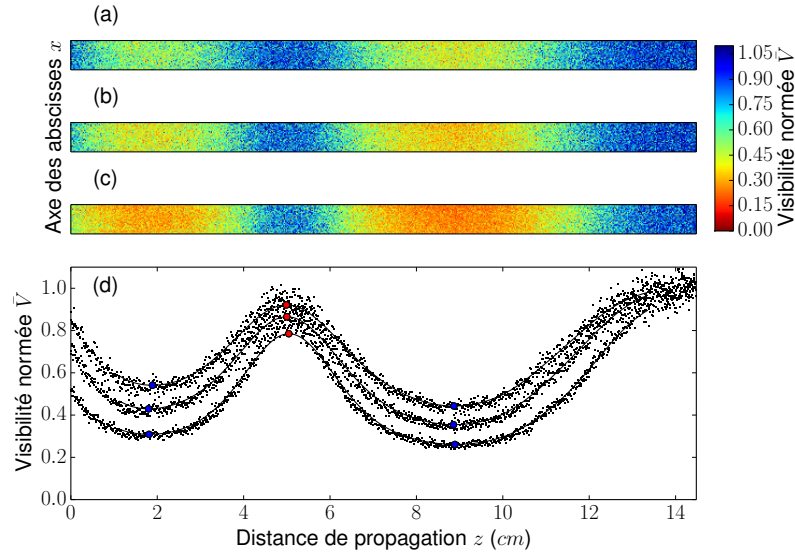


FIGURE 4.22 – Cartes (a-c) et profils de visibilité normée  $\bar{V}$  (d) obtenus pour une mousse gélifiée confinée dans un tube ( $d = 0.6 \text{ mm}$ ;  $D = 10 \text{ mm}$ ). Les amplitudes d’excitation valent  $4.8 \pm 0.2 \text{ }\mu\text{m}$  (a),  $7.4 \pm 0.1 \text{ }\mu\text{m}$  (b) et  $11 \pm 1 \text{ }\mu\text{m}$  (c) crête-crête ( $f = 2.5 \text{ kHz}$ ). Les courbes continues correspondent à un lissage à  $L_z/N_z = 15 \%$  (cf. équation 3.7). Les points rouges et bleus indiquent les extrema détectés sur le profil. Les indications de longueur sur l’axe des abscisses (d) renseignent également sur l’échelle des cartes de visibilité.

### Diagrammes spatio-temporels

Dans le cas du suivi d’une excitation impulsionnelle, les cartes de visibilité sont moyennées selon la dimension transverse  $x$  du tube pour déterminer  $\langle \bar{V} \rangle_x$  et assemblées de manière à obtenir des diagrammes spatio-temporels (cf. section 3.2.3). Ces diagrammes sont semblables à ceux obtenus dans le cas du suivi d’une onde progressive atténuée (cf. section 3.1, figure 4), à la différence près que les oscillations de la phase ne remplissent pas tout le diagramme spatio-temporel. Elles sont contenues dans une enveloppe. Cette enveloppe a sa propre inclinaison dans le diagramme, qui correspond à une vitesse. La vitesse de cette enveloppe renseigne sur la vitesse de groupe [118]. Si elle diffère de la vitesse de phase, cela signifie que le milieu est dispersif.

Les figures 4.23 et 4.24 représentent des diagrammes spatio-temporels de la visibilité normée  $\bar{V}$ . Comme indiqué dans la section 4.2.2, l’axe du temps correspond à l’instant de la propagation  $t_j$  reconstruit par stroboscopie. Le passage de l’impulsion cause une diminution globale de la visibilité à laquelle s’ajoutent des oscillations de visibilité liées à la phase de l’onde. Le temps est en ordonnée et la distance en abscisse de sorte que plus l’onde est rapide, plus son parcours visualisé sur le diagramme est horizontal.

La figure 4.23 représente une première série de trois diagrammes spatio-temporels de visibilité pour trois fréquences centrales de l’impulsion d’excitation distinctes. Pour

une fréquence de  $300\text{ Hz}$ , des flèches respectivement pleine et creuse représentent la progression du paquet d'onde et d'une ligne isophasé, ce qui permet de vérifier que les vitesses de groupe et de phase ne sont pas égales. Le milieu est donc bien dispersif pour la propagation des ondes. Toutes les fréquences ne se propagent pas à la même vitesse. L'étalement en temps et en espace d'un paquet d'onde est la conséquence du caractère dispersif du milieu.

Sur le diagramme 4.23.a, un premier paquet d'onde progresse vers les  $z$  croissants entre  $5\text{ ms}$  et  $25\text{ ms}$  environ, tandis qu'un second progresse vers les  $z$  décroissants entre  $25\text{ ms}$  et  $40\text{ ms}$  environ. Ce second paquet d'onde correspond à la réflexion du premier paquet sur l'extrémité de l'échantillon. En d'autres termes, du fait du contraste d'impédance avec l'air ambiant, le paquet d'onde rebondit sur les extrémités de l'échantillon. À mesure que la fréquence d'excitation augmente, l'onde réfléchie se distingue de moins en moins bien et le train d'onde s'atténue de plus en plus rapidement. Une telle atténuation peut être liée à la diffusion de l'onde (e.g. par des résonateurs locaux) mais elle peut aussi venir de mécanismes physiques de dissipation. L'augmentation de la dissipation avec la fréquence est attendue pour la plupart des mécanismes de dissipation dont la dissipation visqueuse.

La figure 4.24 représente une seconde série de trois diagrammes spatio-temporels pour une mousse dans un tube dont le diamètre est plus grand que celui utilisé dans l'expérience illustrée sur la figure 4.23. La gamme de fréquences représentée ( $200\text{ Hz} - 800\text{ Hz}$ ) est plus étendue que celle correspondant à la figure 4.23. L'allure du diagramme de plus basse fréquence 4.24.a est comparable au diagramme 4.23.a avec un niveau de bruit supérieur.

Les enregistrements figures 4.24.b et 4.24.c de fréquences centrales de l'impulsion de  $500\text{ Hz}$  et  $800\text{ Hz}$  ont des allures, qui se comparent plus difficilement. Dans les deux cas, une onde de vitesse de groupe suffisamment faible pour être distinguée pénètre dans l'échantillon. Dans un premier cas, pour une excitation centrée sur  $500\text{ Hz}$ , le paquet d'onde est très vite atténué. Pourtant, un faible signal perceptible au centre de l'échantillon persiste dans le temps. Il présente des lignes isophasés horizontales dont les modulations de visibilité sont plus marquées au centre de la fenêtre d'acquisition, autour d'une distance de propagation de  $90\text{ mm}$ . Ces modulations de visibilité ne s'atténuent que très lentement dans le temps. Dans un second cas, pour une excitation centrée sur  $800\text{ Hz}$ , le paquet d'onde de faible vitesse de groupe devient rapidement difficile à distinguer. Ce premier paquet d'onde laisse place à des modulations de visibilité selon des lignes isophasés horizontales plus marquées que dans le cas précédent. Ces lignes horizontales ainsi que leur modulation spatiale sont caractéristiques d'une oscillation stationnaire, qui semble s'être installée dans la cavité. Cette oscillation stationnaire est

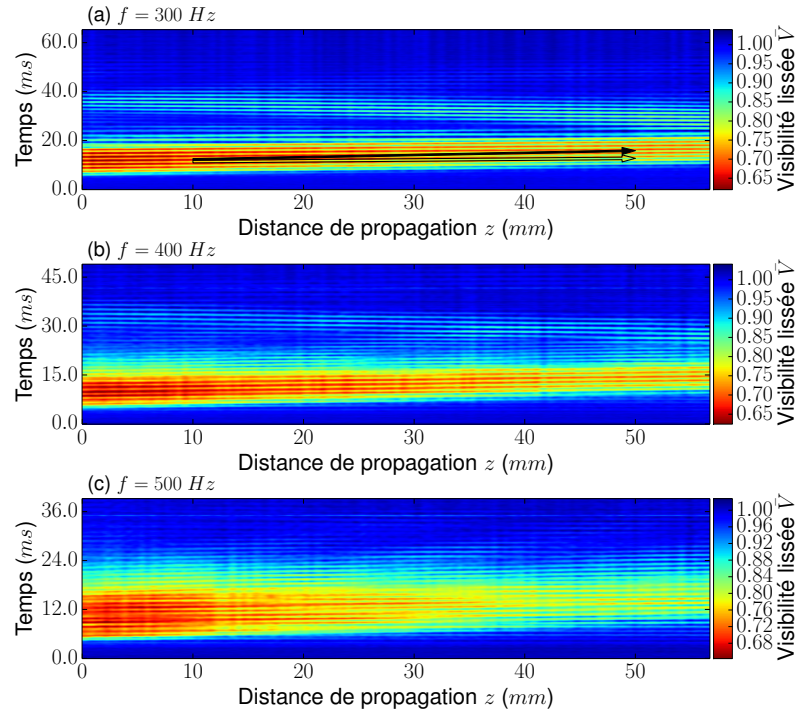


FIGURE 4.23 – Diagrammes spatio-temporels du suivi d’une excitation impulsionnelle centrée sur les fréquences 300  $Hz$  (a), 400  $Hz$  (b) et 500  $Hz$  (c). Le signal généré  $s_{n,T}(t)$  correspond à la formule 4.14 avec un nombre d’oscillations  $n = 3$  (a),  $n = 4$  (b) et  $n = 5$  (c). L’impulsion commence une période  $T$  après le début de l’enregistrement soit après 3.33  $ms$  (a), 2.50  $ms$  (b) et 2.00  $ms$  (c). Elle dure  $n = 3$  (a),  $n = 4$  (b) et  $n = 5$  (c) périodes soit 10.00  $ms$  (a-c) dans les trois cas. Le temps d’exposition de la caméra est fixé à un quart de période  $T_e = T/4$  soit 0.83  $ms$  (a), 0.62  $ms$  (b) et 0.50  $ms$  (c). Les enregistrements ont été effectués dans des tubes de diamètre  $D = 4$   $mm$ . L’âge moyen de la mousse gélifiée est d’environ 10h et sa fraction volumique de gaz vaut  $\phi_g = 0.81$ . Le diamètre des bulles vaut  $d = 0.6$   $mm$ . Le diagramme est lissé selon la dimension spatiale à 4 % (cf. section 3.3.1). Les flèches creuses et pleines représentent respectivement la vitesse de phase et de groupe.

déjà installée alors que le paquet d’onde semble à peine avoir pénétré l’échantillon. Cela suggère l’existence d’un second mode de déformation, de célérité bien supérieure au premier.

### 4.4.3 Relations de dispersion

#### Résultats en mode d’excitation impulsionnelle

Une fois les diagrammes spatio-temporels de suivi de l’onde impulsionnelle obtenus, ils font l’objet d’une analyse Fourier selon la méthode exposée dans la section 3.3.1. Cette analyse permet d’extraire la relation de dispersion. Les figures 4.25, 4.26 et 4.27 représentent trois exemples de ces relations de dispersion pour les trois configurations de tailles de bulles et de diamètres de tube explorées. En complément, l’atténuation

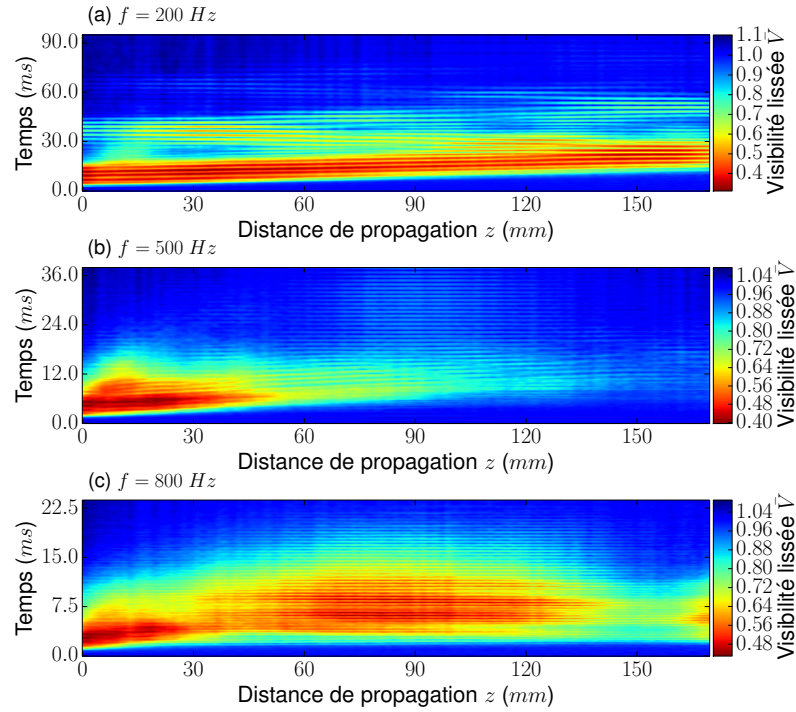


FIGURE 4.24 – Diagrammes spatio-temporel du suivi d’une excitation impulsionnelle centrée sur les fréquences 200  $\text{Hz}$  (a), 500  $\text{Hz}$  (b) et 800  $\text{Hz}$  (c). Le signal généré  $s_{n,T}(t)$  correspond à la formule 4.14 avec un nombre d’oscillations  $n = 3$  dans les trois cas. L’impulsion commence une période  $T$  après le début de l’enregistrement soit après 5.00  $\text{ms}$  (a), 2.00  $\text{ms}$  (b) et 1.25  $\text{ms}$  (c). Elle dure  $n = 3$  périodes soit 15.00  $\text{ms}$  (a), 6.00  $\text{ms}$  (b) et 3.75  $\text{ms}$  (c). Le temps d’exposition de la caméra est fixé à un quart de période  $T_e = T/4$  soit 1.25  $\text{ms}$  (a), 0.50  $\text{ms}$  (b) et 0.31  $\text{ms}$  (c). Les enregistrements ont été effectués dans des tubes de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ . L’âge moyen de la mousse gélifiée est de 6.7 jours et sa fraction volumique de gaz vaut  $\phi_g = 0.81$ . Le diamètre des bulles vaut  $d = 0.6 \text{ mm}$ . Le diagramme est lissé selon la dimension spatiale à 2 % (cf. section 3.3.1).

représentée est déduite des profils de visibilité pour une excitation continue dans les régimes fréquentiels évanescents ou bien de forte atténuation dissipative. Les parties réelles et imaginaires du nombre d’onde sont comparées à la relation de dispersion prédite dans le cas limite mou (cf. équation 4.33).

La figure 4.25 représente la relation de dispersion obtenue pour un échantillon de bulles de diamètre 0.6  $\text{mm}$  dans des tubes de diamètre 4  $\text{mm}$ . En ce qui concerne la partie réelle du nombre d’onde, les points expérimentaux se situent dans une gamme de fréquences situées entre 350  $\text{Hz}$  et 950  $\text{Hz}$ . Quant à la partie imaginaire du nombre d’onde, les points expérimentaux sont situés dans trois gammes fréquentielles. La première gamme fréquentielle qui s’étend de la limite quasi-statique à une fréquence de 350  $\text{Hz}$  correspond à un régime évanescent. Les deux autres situées respectivement autour de 700  $\text{Hz}$  et 1.2  $\text{kHz}$  sont des régimes de forte atténuation. Les célérités transverse  $c_T$  et longitudinale  $c_L$  sont choisies de manière à ajuster le mieux possible les prédictions

théoriques aux données expérimentales. Un bon accord est trouvé pour des valeurs  $c_L = 28 \pm 1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $c_T = 1.7 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ .

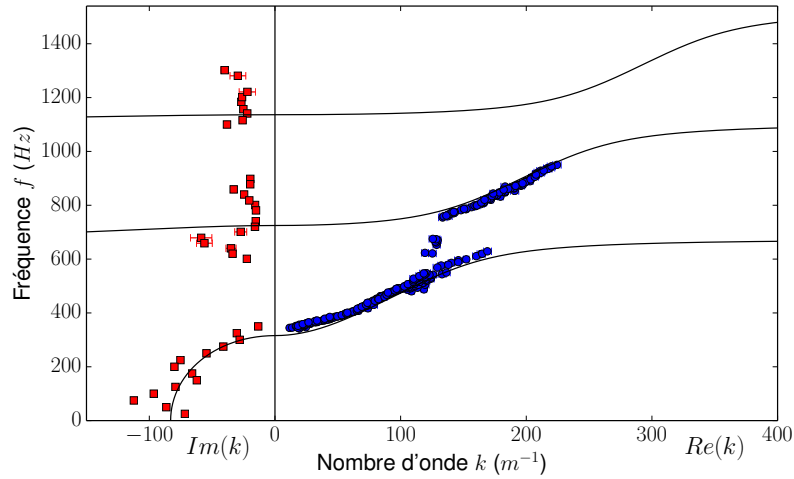


FIGURE 4.25 – Relation de dispersion d'un échantillon de mousse gélifiée ( $d = 0.6 \text{ mm}$ ,  $\phi_g = 0.83$ ,  $D = 4 \text{ mm}$ ). Lors des mesures de la partie réelle et négative du nombre d'onde, l'échantillon était âgé de 5.6 jours et 6.1 jours respectivement. Les parties réelles du nombre d'onde ( $\circ$ ) représentées sont extraites de diagrammes spatio-temporels lissés à 4 % selon la dimension spatiale  $z$ . La demi-largeur de la fenêtre spectrale est de 40 % de la fréquence centrale d'excitation. Les points représentés sont d'erreur relative inférieure à 1 % et absolue inférieure à  $0.7 \text{ m}^{-1}$ . Les parties imaginaires du nombre d'onde ( $\square$ ) représentées sont extraites de profils de visibilité lissés à 12 %. La distance en visibilité maximale vaut  $10^{-5}$  (cf. équation 3.9). Les lignes continues représentent la relation de dispersion 4.33 avec une célérité longitudinale  $c_L = 28 \pm 1 \text{ m.s}^{-1}$  et une célérité transverse  $c_T = 1.7 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ .

La figure 4.26 représente la relation de dispersion obtenue pour un échantillon de bulles de diamètre  $0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $10 \text{ mm}$ . En ce qui concerne la partie réelle du nombre d'onde, les points expérimentaux se situent dans une gamme de fréquences situées entre  $150 \text{ Hz}$  et  $450 \text{ Hz}$ . Quant à la partie imaginaire du nombre d'onde, les points expérimentaux sont situés dans toute la gamme fréquentielle représentée entre  $0 \text{ Hz}$  et  $650 \text{ Hz}$ , à l'exception des fréquences entre  $150 \text{ Hz}$  et  $250 \text{ Hz}$ . Les célérités transverse  $c_T$  et longitudinale  $c_L$  sont choisies de manière à ajuster le mieux possible les prédictions théoriques aux données expérimentales. Un accord correct est trouvé pour des valeurs  $c_L = 27 \pm 1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $c_T = 1.7 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ .

La figure 4.27 représente la relation de dispersion obtenue pour un échantillon de bulles de diamètre  $1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $10 \text{ mm}$ . En ce qui concerne la partie réelle du nombre d'onde, les points expérimentaux se situent dans une gamme de fréquences situées entre  $100 \text{ Hz}$  et  $400 \text{ Hz}$ . Quant à la partie imaginaire du nombre d'onde, les points expérimentaux sont situés dans trois gammes fréquentielles. La première gamme fréquentielle qui s'étend de la limite quasi-statique à une fréquence de  $100 \text{ Hz}$  correspond à un régime évanescent. Les deux autres situées respectivement autour de  $200 \text{ Hz}$  et  $450 \text{ Hz}$  sont des régimes de forte atténuation. Les célérités transverse  $c_T$  et



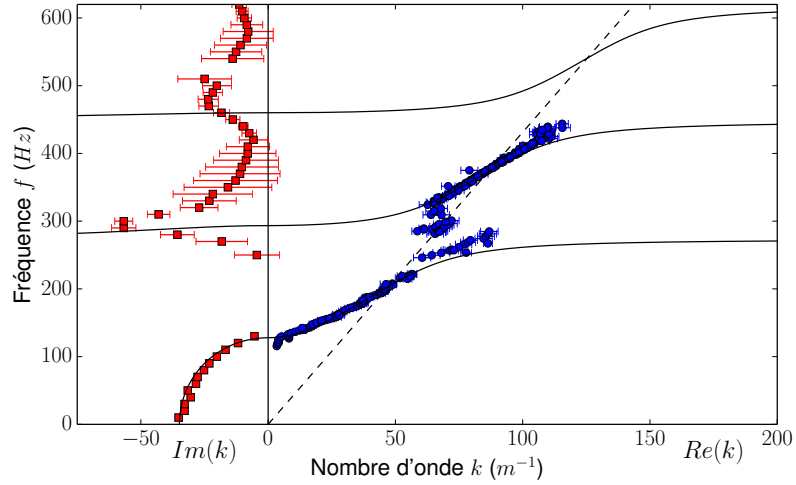


FIGURE 4.26 – Relation de dispersion d'un échantillon de mousse gélifiée ( $d = 0.6 \text{ mm}$ ,  $\phi_g = 0.80$ ,  $D = 10 \text{ mm}$ ). Lors des mesures de la partie réelle et négative du nombre d'onde, l'échantillon était âgé de 4.1 et 4.9 jours respectivement. Les parties réelles du nombre d'onde ( $\circ$ ) représentées sont extraites de diagrammes spatio-temporels lissés à 4 % selon la dimension spatiale. La demi-largeur de la fenêtre spectrale est de 40 % de la fréquence centrale d'excitation. Les points représentés sont d'erreur relative inférieure à 1.1 % et absolue inférieure à  $0.4 \text{ m}^{-1}$ . Les parties imaginaires du nombre d'onde ( $\square$ ) représentées sont extraites de profils de visibilité lissés à 12 %. La distance en visibilité maximale vaut  $2 \times 10^{-5}$  (cf. équation 3.9). Les lignes continues représentent la relation de dispersion 4.33 avec une célérité longitudinale  $c_L = 27 \pm 1 \text{ m.s}^{-1}$  et une célérité transverse  $c_T = 1.7 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ .

longitudinale  $c_L$  sont choisies de manière à ajuster le mieux possible les prédictions théoriques aux données expérimentales. Un bon accord est trouvé pour des valeurs  $c_L = 33 \pm 1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $c_T = 1.3 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ . D'importants écarts aux prédictions de la relation de dispersion de l'onde guidée dans un solide non-dispersif sont à noter au-delà d'une fréquence de  $300 \text{ Hz}$ .

La célérité transverse des ondes dans ce dernier échantillon est faible ( $c_T = 1.3 \text{ m.s}^{-1}$ ) comparée aux deux premiers ( $c_T = 1.7 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ). En outre, des écarts notables aux prédictions apparaissent autour de  $350 \text{ Hz}$ , au niveau de la partie plus haute fréquence de la deuxième branche. Retenons que cet échantillon correspond à la taille de bulles la plus grande et au diamètre de tube le plus grand. Notons également que sa fraction volumique de gaz est élevée ( $\phi_g = 0.87$ ) comparée à celles des deux autres échantillons présentés ici ( $\phi_g = 0.80$  et  $\phi_g = 0.83$ ).

### Résultats en mode d'excitation continue

Comme indiqué dans la section 3.3.2, des limitations techniques liées à la puissance lumineuse disponible et à la célérité des ondes excitées rend la méthode de suivi d'une excitation impulsionnelle inadaptée à la mesure de la relation de dispersion haute fréquence

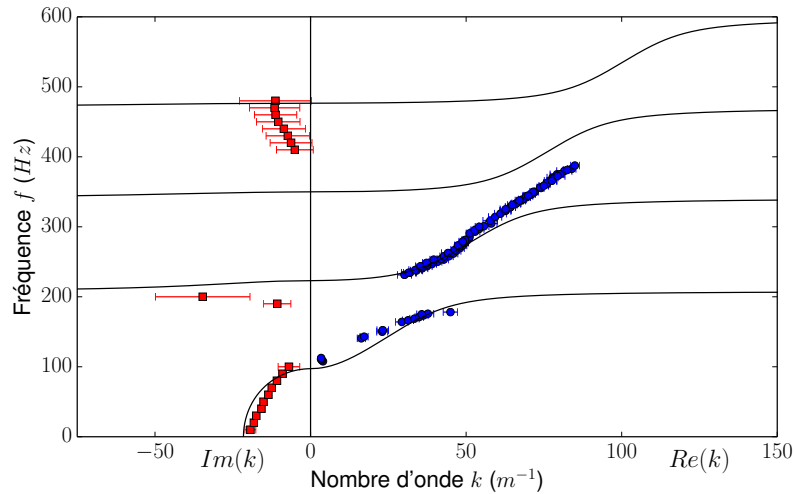


FIGURE 4.27 – Relation de dispersion d'un échantillon de mousse gélifiée ( $d = 1.8 \text{ mm}$ ,  $\phi_g = 0.87$ ,  $D = 10 \text{ mm}$ ). Lors des mesures de la partie réelle et négative du nombre d'onde, l'échantillon était âgé de 6.0 et 5.0 jours respectivement. Les parties réelles du nombre d'onde (○) représentées sont extraites de diagrammes spatio-temporels lissés à 4 % selon la dimension spatiale. La demi-largeur de la fenêtre spectrale est de 40 % de la fréquence centrale d'excitation. Les points représentés sont d'erreur relative inférieure à 0.8 % et absolue inférieure à  $0.5 \text{ m}^{-1}$  sont représentés. Les parties imaginaires du nombre d'onde (□) représentées sont extraites de profils de visibilité lissés à 12 %. La distance en visibilité maximale vaut  $3 \times 10^{-5}$  (cf. équation 3.9). Les lignes continues représentent la relation de dispersion 4.33 avec une célérité longitudinale  $c_L = 33 \pm 1 \text{ m.s}^{-1}$  et une célérité transverse  $c_T = 1.3 \pm 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ .

(typiquement  $f > 1 \text{ kHz}$ ). Dans cette gamme fréquentielle, la longueur d'onde est extraite de profils de visibilité obtenus pour des excitations harmoniques continues selon la méthode présentée dans la section 3.2.2. Les figures 4.28, 4.29 et 4.30 représentent les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde  $k$  obtenues respectivement par l'algorithme de détection d'extrema locaux dans le cas de profils d'ondes stationnaires et l'algorithme de moindres carrés dans le cas de profils d'ondes évanescentes selon les méthodes exposées dans la section 3.3.2.

La figure 4.28 montre la relation de dispersion obtenue avec des bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$ . Les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde sont obtenues pour des fréquences respectivement supérieures et inférieures à  $1 \text{ kHz}$ . Les parties réelles se situent entre environ  $30 \text{ m}^{-1}$  et  $100 \text{ m}^{-1}$ . Les points correspondants rendent compte du caractère dispersif de la propagation. Pour autant, ils suivent asymptotiquement à plus haute fréquence une tendance non-dispersive de célérité  $350 \text{ m.s}^{-1}$ . De manière remarquable, à une fréquence légèrement supérieure à  $3 \text{ kHz}$ , on observe un anti-croisement dans la relation de dispersion. Cet anti-croisement peut être caractéristique d'un phénomène de type répulsion de mode (cf. section 4.1). Il témoignerait d'un effet d'oscillateurs couplés au niveau soit de la microstructure, soit de la macrostructure (i.e. guide d'onde).

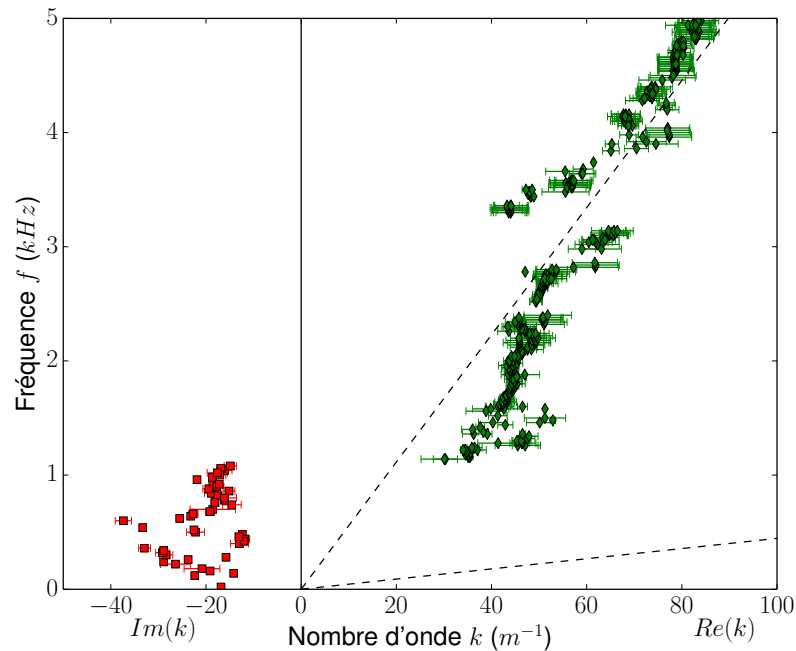


FIGURE 4.28 – Relation de dispersion d'un échantillon de mousse gélifiée ( $d = 0.6 \text{ mm}$ ,  $\phi_g = 0.80$ ,  $D = 4 \text{ mm}$ ), d'âge moyen 8h. Les résultats sont extraits de profils de visibilité lissés à 15 %, obtenus pour une excitation continue ( $20 \text{ Hz} \leq f \leq 5 \text{ kHz}$ ,  $\delta f = 20 \text{ Hz}$ ) avec un temps d'exposition  $T_e = 200 \text{ ms}$ . Les résultats sur  $Re(k)$  d'erreur absolue de moins de  $10 \text{ m}^{-1}$  sont représentés. La distance en visibilité maximale est de  $0.5 \times 10^{-5}$  (cf. équation 3.9). Les lignes pointillées sont telles que  $c = 28 \text{ m.s}^{-1}$  et  $c = 350 \text{ m.s}^{-1}$ .

La figure 4.29 représente la relation de dispersion obtenue avec des bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de plus grand diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ . Quelques points bien résolus sont obtenus dans le domaine basse fréquence pour la partie réelle du nombre d'onde. Ils s'alignent sur une droite de vitesse de phase  $28 \text{ m.s}^{-1}$ . Cet ordre de grandeur est compatible avec les vitesses de phase expérimentales obtenues pour le mode d'excitation impulsionnel. La plupart des résultats sur la partie réelle du nombre d'onde se situent ensuite dans un domaine de fréquences supérieures à  $2 \text{ kHz}$ . La pente de la relation de dispersion correspond à une vitesse de groupe proche de  $600 \text{ m.s}^{-1}$ . Leur vitesse de phase est plus faible. En effet, les points se situent à proximité de la droite en pointillés de vitesse de phase  $350 \text{ m.s}^{-1}$ .

La figure 4.30 montre la relation de dispersion pour un diamètre de bulle  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ . Les mesures sont affectées par des vibrations parasites dues à un mauvais maintien de l'échantillon. Afin de compenser, un critère de filtrage plus sévère que précédemment est utilisé. Les points obtenus se situent autour d'une fréquence de  $2.5 \text{ kHz}$ . Autour d'une fréquence de  $1.5 \text{ kHz}$ , des profils de visibilité fortement atténués en distance sont enregistrés. Ils correspondent au pic d'atténuation représenté dans la relation de dispersion. Ce pic précède en fréquence la majorité des résultats sur la partie réelle du nombre d'onde dans la relation de dispersion.

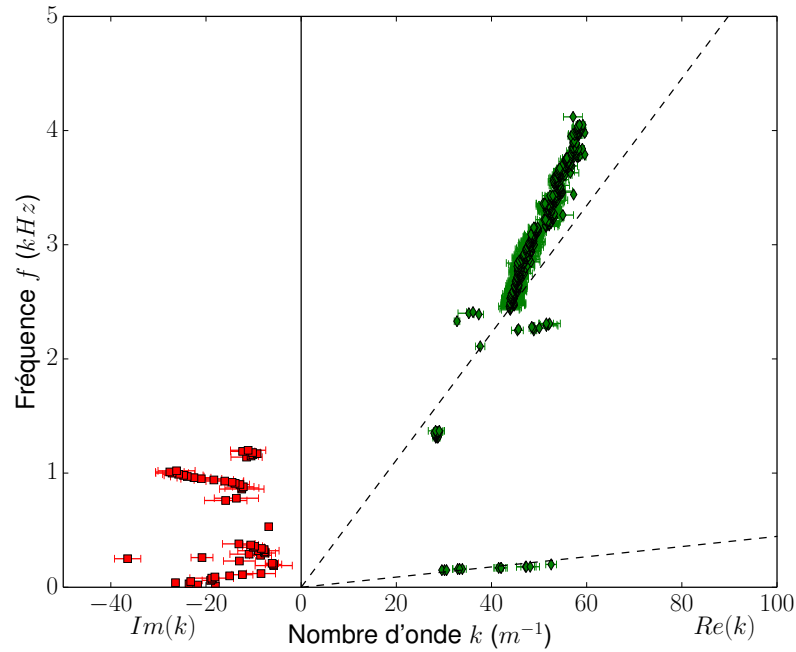


FIGURE 4.29 – Relation de dispersion d’un échantillon de mousse gélifiée ( $d = 0.6$  mm,  $\phi_g = 0.82$ ,  $D = 10$  mm), d’âge moyen 1.4 jour. Les résultats sont extraits de profils de visibilité lissés à 15 %, obtenus pour une excitation continue ( $20$  Hz  $\leq f \leq 5$  kHz,  $\delta f = 20$  Hz) avec un temps d’exposition  $T_e = 200$  ms. Les résultats sur  $Re(k)$  d’erreur absolue de moins de  $5$   $m^{-1}$  sont représentés. La distance en visibilité maximale est de  $0.5 \times 10^{-5}$  (cf. équation 3.9). Les lignes pointillées sont telles que  $c = 28$  m.s<sup>-1</sup> et  $c = 350$  m.s<sup>-1</sup>.

Ainsi, les mesures des figures 4.28, 4.29 et 4.30 résolvent difficilement la propagation pour des fréquences inférieures à 1 kHz. Cela s’explique du fait de l’importante atténuation dans le régime de basse fréquence, qui rend plus difficile l’identification d’extrema de visibilité. L’exception de la figure 4.29 montre la compatibilité avec les résultats du mode impulsionnel. En revanche, le mode d’excitation continue permet de résoudre un régime de propagation qualitativement différent à des fréquences non accessibles en mode impulsionnel. Les méthodes de suivi en excitation impulsionnelle et continue sont donc complémentaires.

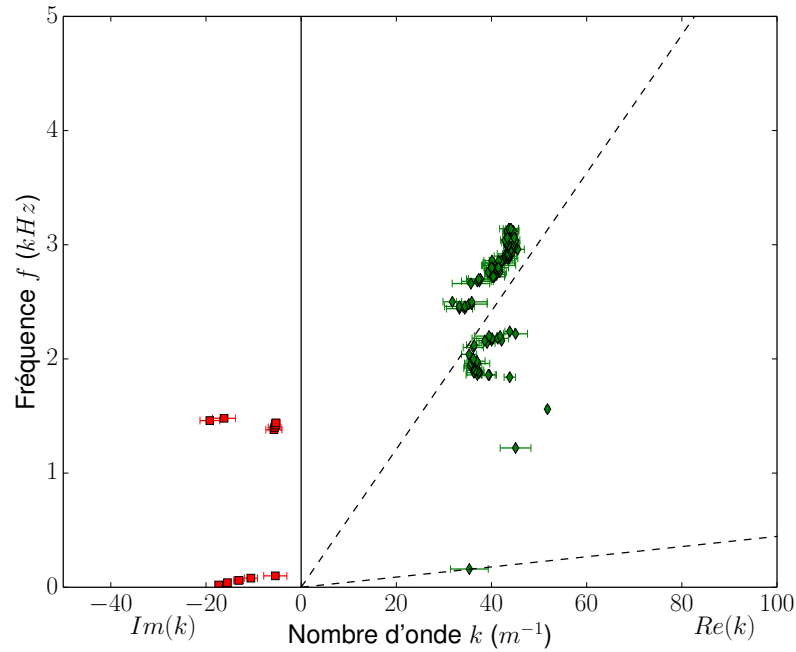


FIGURE 4.30 – Relation de dispersion d'un échantillon de mousse gélifiée ( $d = 1.8 \text{ mm}$ ,  $\phi_g = 0.89$ ,  $D = 10 \text{ mm}$ ), d'âge moyen 6.4 jours. Les résultats sont extraits de profils de visibilité lissés à 15 %, obtenus pour une excitation continue ( $10 \text{ Hz} \leq f \leq 5 \text{ kHz}$ ,  $\delta f = 10 \text{ Hz}$ ) avec un temps d'exposition  $T_e = 150 \text{ ms}$ . Les résultats sur  $Re(k)$  d'erreur absolue de moins de  $4 \text{ m}^{-1}$  sont représentés. La distance en visibilité maximale est de  $0.5 \times 10^{-5}$  (cf. équation 3.9). Les lignes pointillées sont telles que  $c = 28 \text{ m.s}^{-1}$  et  $c = 350 \text{ m.s}^{-1}$ .

## 4.5 Discussion du régime basse fréquence

### 4.5.1 Relations de dispersion dans le régime basse fréquence

#### Relation de dispersion adimensionnée

Lors de la résolution théorique de la propagation dans un guide d'onde cylindrique de révolution (cf. section 4.3.2), nous avons obtenu pour un milieu mou ( $c_T \ll c_L$ ), homogène et non-dispersif une relation de dispersion adimensionnée (cf. équation 4.32). Cet adimensionnement traduit la possibilité de construire une courbe maîtresse à partir des relations de dispersion mesurées pour des échantillons avec différents diamètres de tube, tailles de bulles et élasticités de gel. Pour vérifier les hypothèses d'un comportement non-dispersif et indépendant de la taille des bulles, les mesures sont réunies sur la figure 4.31. Afin de réaliser cette courbe maîtresse, les célérités longitudinales et transverses sont déterminées de manière à optimiser l'accord entre le modèle et les résultats expérimentaux. En théorie (cf. section 4.3), la célérité transverse est déterminée par les fréquences de départ de branches propagatives, tandis que la célérité longitudinale est déterminée par les fréquences d'inflexion. En pratique, il est difficile de mesurer la

relation de dispersion au voisinage des fréquences de coupure et la détermination des célérités transverses et longitudinales est plus précise lorsqu'on effectue l'ajustement en prenant également en compte la partie imaginaire du nombre d'onde dans le régime évanescant. Pour cela, il faut disposer d'une acquisition en mode d'excitation continue pour le même échantillon à un âge suffisamment proche ( $\Delta t \leq 24h$ ).

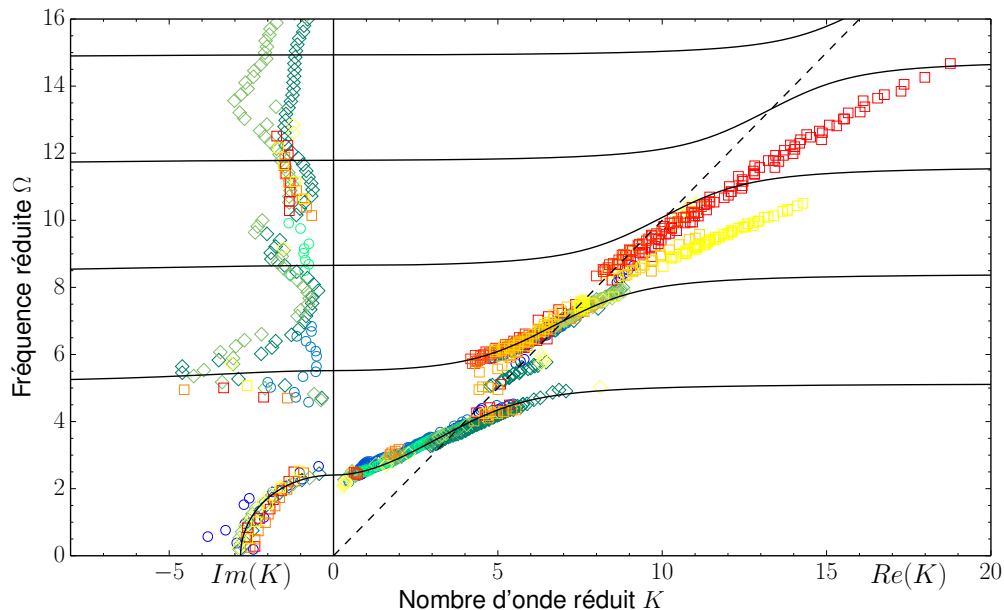


FIGURE 4.31 – Relation de dispersion adimensionnée. Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  ( $\circ$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\diamond$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\square$ ). Les gammes d'âge et de fractions volumique de gaz des échantillons sont récapitulées dans le tableau 4.1, tandis que les gammes de célérités ayant servi à l'adimensionnement sont récapitulées dans le tableau 4.2. Les lignes continues correspondent aux prédictions théoriques calculées à l'aide de l'équation 4.33.  $\Omega = R\omega/c_T$  et  $K = Rkc_L/c_T$  conformément aux relations 4.28 et 4.29. La ligne pointillée correspond à l'équation  $\Omega = K$ .

La figure 4.31 montre que par la méthode de mesure LSVAS en régime d'excitation impulsionnelle, les deux premières branches de la relation de dispersion sont résolues. Elles rendent compte d'un bon accord avec les prédictions théoriques pour un milieu homogène non-dispersif au niveau de la première branche. Au niveau de la deuxième branche, l'accord est également très bon pour les fréquences telles que  $\Omega < 7$ . Au-delà, on note un désaccord avec les prédictions théoriques. La mousse peut donc être considérée comme un milieu mou homogène non-dispersif dans la limite basse fréquence  $\Omega < 7$ . Des points expérimentaux se situent entre les deux premières branches, autour d'une fréquence  $\Omega \approx 5$ , à l'écart des courbes prédites par le modèle. Dans ce régime de fréquences, la dissipation a un impact particulièrement grand. Nous verrons dans la suite que sa prise en compte dans le modèle améliore l'accord entre les expériences et les prédictions. Au-delà de  $\Omega < 7$ , des résultats expérimentaux qui dévient des prédictions

sont obtenus pour certains des échantillons de mousses de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  confinées dans des tubes de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ . Pour ces résultats, la vitesse de phase est plus faible que ce qui est attendu pour un milieu non-dispersif.

TABLE 4.1 – Gamme de paramètres des échantillons de mousse gélifiée de la relation de dispersion adimensionnée (cf. figure 4.31).

Diamètre des bulles $d \text{ (mm)}$	Diamètre du tube $D \text{ (mm)}$	Âge des échantillons $t$	Fraction volumique de gaz $\phi_g$	Module de conservation du gel $G' \text{ (kPa)}$
0.6	4	$4.4\text{h} \leq t \leq 6.4 \text{ jours}$	$0.70 \leq \phi_g \leq 0.84$	$5.7 \leq G' \leq 14.3$
0.6	10	$19\text{h} \leq t \leq 6.7 \text{ jours}$	$0.78 \leq \phi_g \leq 0.81$	$6.6 \leq G' \leq 14.7$
1.8	10	$10\text{h} \leq t \leq 8.3 \text{ jours}$	$0.81 \leq \phi_g \leq 0.89$	$5.9 \leq G' \leq 15.1$

TABLE 4.2 – Gamme de paramètres des échantillons de mousse gélifiée de la relation de dispersion adimensionnée (cf. figure 4.31).  $N_m$  et  $N_{xp}$  désignent le numéro d'échantillon et le numéro d'expérience, respectivement.

$N_m$	$N_{xp}$	Diamètre des bulles $d$	Diamètre du tube $D$	Célérité longitudinale $c_L$	Célérité transverse $c_T$
1	1	0.6 mm	4 mm	28.1 m.s <sup>-1</sup>	1.65 m.s <sup>-1</sup>
2	1	0.6 mm	4 mm	23.9 m.s <sup>-1</sup>	1.19 m.s <sup>-1</sup>
2	2	0.6 mm	4 mm	21.8 m.s <sup>-1</sup>	1.79 m.s <sup>-1</sup>
3	1	0.6 mm	4 mm	24.4 m.s <sup>-1</sup>	1.32 m.s <sup>-1</sup>
3	2	0.6 mm	4 mm	25.7 m.s <sup>-1</sup>	1.82 m.s <sup>-1</sup>
4	1	0.6 mm	4 mm	27.0 m.s <sup>-1</sup>	1.84 m.s <sup>-1</sup>
4	2	0.6 mm	4 mm	27.3 m.s <sup>-1</sup>	2.00 m.s <sup>-1</sup>
5	1	0.6 mm	4 mm	24.0 m.s <sup>-1</sup>	1.60 m.s <sup>-1</sup>
5	2	0.6 mm	4 mm	24.3 m.s <sup>-1</sup>	1.62 m.s <sup>-1</sup>
5	3	0.6 mm	4 mm	26.9 m.s <sup>-1</sup>	1.84 m.s <sup>-1</sup>
6	1	0.6 mm	10 mm	27.3 m.s <sup>-1</sup>	1.37 m.s <sup>-1</sup>
7	1	0.6 mm	10 mm	26.9 m.s <sup>-1</sup>	1.52 m.s <sup>-1</sup>
7	2	0.6 mm	10 mm	27.1 m.s <sup>-1</sup>	1.67 m.s <sup>-1</sup>
7	3	0.6 mm	10 mm	28.3 m.s <sup>-1</sup>	1.70 m.s <sup>-1</sup>
8	1	1.8 mm	10 mm	28.8 m.s <sup>-1</sup>	1.13 m.s <sup>-1</sup>
9	1	1.8 mm	10 mm	29.7 m.s <sup>-1</sup>	1.44 m.s <sup>-1</sup>
10	1	1.8 mm	10 mm	24.5 m.s <sup>-1</sup>	0.95 m.s <sup>-1</sup>
10	2	1.8 mm	10 mm	24.8 m.s <sup>-1</sup>	1.38 m.s <sup>-1</sup>
10	3	1.8 mm	10 mm	25.8 m.s <sup>-1</sup>	1.50 m.s <sup>-1</sup>
11	1	1.8 mm	10 mm	31.8 m.s <sup>-1</sup>	1.13 m.s <sup>-1</sup>
11	2	1.8 mm	10 mm	33.3 m.s <sup>-1</sup>	1.27 m.s <sup>-1</sup>
11	3	1.8 mm	10 mm	37.4 m.s <sup>-1</sup>	1.24 m.s <sup>-1</sup>

### Modèle de Wood et densité effective

À basse fréquence, la mousse gélifiée contenue dans le guide d'onde se comporte comme un milieu non-dispersif pour les ondes mécaniques. Les célérités longitudinales et transverses peuvent être comparées à différentes lois proposées pour prédire les propriétés effectives d'un tel milieu. La figure 4.32 compare les résultats expérimentaux sur la célérité longitudinale au modèle de Wood (cf. équation 1.41).

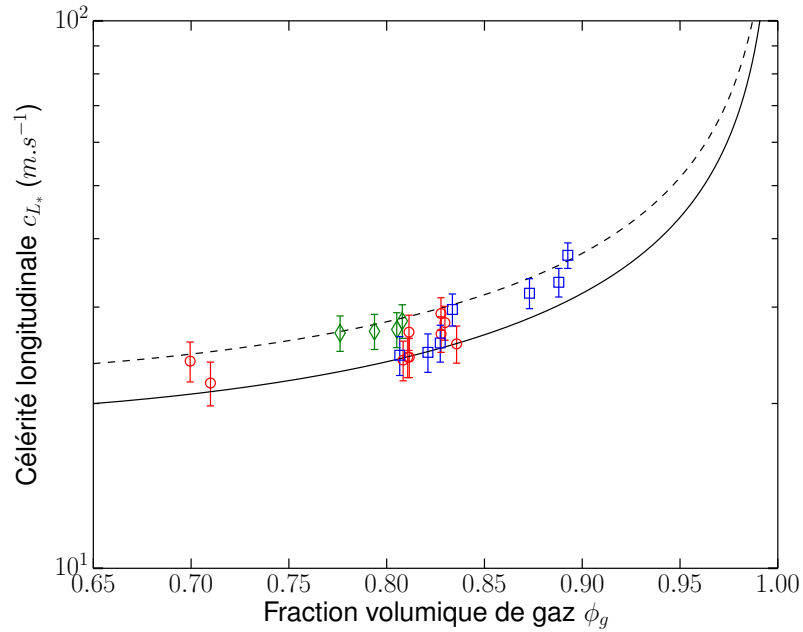


FIGURE 4.32 – Célérité longitudinale dans la mousse  $c_{L^*}$  en fonction de la fraction volumique de gaz  $\phi_g$ . Les lignes continues et en pointillés correspondent respectivement à la célérité de Wood dans les cas isotherme ( $\gamma_p = 1.0$ ) et adiabatique ( $\gamma_p = \gamma_a = 1.4$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  ( $\circ$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\diamond$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\square$ ). Les gammes d'âge et de fractions volumique de gaz des échantillons sont récapitulées dans le tableau 4.1.

Les résultats expérimentaux (cf. figure 4.32) se comparent avec succès avec une célérité prédite par le modèle de Wood (cf. équation 1.41) dans un cas polytropique intermédiaire entre les limites isothermes et adiabatiques ( $1.0 \leq \gamma_p \leq 1.4$ ). Ainsi, conformément aux prédictions théoriques mentionnées dans la section 4.1, la matrice élastique et le gaz dans les bulles vibrent en phase en bloque à basse fréquence. Cette prédiction est non seulement celle de Wood mais aussi celle de Biot, pour les solides poreux dans la limite de suffisamment basses fréquences pour que l'épaisseur de peau visqueuse soit supérieure à la taille des pores ( $f < f_\eta \approx 1 \text{ Hz}$  cf. figure 1.11). Dans cette limite, la matrice élastique convecte les inclusions gazeuses, assurant ainsi le mouvement solide (en bloque) de l'ensemble du matériau. Le champs de déplacement moyen (à une échelle mésoscopique intermédiaire entre la taille des bulles et celle des échantillons)



est uniforme dans tout le matériau, de sorte que la masse volumique effective  $\rho_*$  est la moyenne des masses volumiques (cf. équation 1.38a). Dans la limite  $\rho_s \gg \rho_g$ , l'expression de la masse volumique effective  $\rho_*$  vaut approximativement :

$$\rho_* \approx (1 - \phi_g)\rho_s \quad (4.36)$$

En partant de cette approximation, nous allons nous intéresser à ce que les mesures de célérités transverses et longitudinales permettent de déduire des modules d'onde de compression  $B_*$ , de cisaillement  $G_*$  et coefficient de Poisson  $\nu_*$  du matériau effectif.

## 4.5.2 Propriétés mécaniques effectives

### Module d'onde de compression

Les résultats de l'analyse des mesures sur la célérité longitudinale sont représentés ici (cf. figure 4.33) en terme de module d'onde de compression effectif  $L_*$  construit à partir de l'équation 1.29 en considérant la masse volumique effective  $\rho_*$ . Cette dernière sera évaluée en utilisant l'approximation 4.36. Les résultats expérimentaux sont comparés à l'expression du module d'élasticité isostatique effectif  $B_* = \chi_*^{-1}$  prédit dans le cadre du modèle de Wood (cf. section 1.3.2). En règle générale, le module d'onde de compression et le module d'élasticité isostatique sont distincts. Néanmoins, rappelons que le module de cisaillement de la matrice de la mousse gélifiée  $G_*$  est inférieur ou de l'ordre de  $1 \text{ kPa}$ , tandis que le module d'élasticité isostatique du gaz  $B_g$  est de l'ordre de  $100 \text{ kPa}$ , lui-même plusieurs ordres de grandeur inférieur au module d'élasticité isostatique de la phase gel. Or le module d'onde de compression et le module d'élasticité isostatique ne se distinguent que par la contribution du module de cisaillement (cf. équations 1.5). Ainsi, si ce dernier est négligeable, il est raisonnable d'assimiler le module d'onde de compression au module d'élasticité isostatique soit  $L_* \approx B_* \approx \chi_*^{-1}$ .

Le module d'élasticité isostatique du gaz est négligeable en comparaison au module d'élasticité isostatique du gel. Inversement, la compressibilité du gaz domine celle du gel de la matrice solide de la mousse. Le coefficient de compressibilité effectif de la mousse prédite par la loi de Wood (cf. équation 1.38b) peut finalement s'écrire :

$$\chi_* \approx \phi_g \chi_g \quad (4.37)$$

Le coefficient de compressibilité du gaz  $\chi_g$  fait intervenir le coefficient polytropique  $\gamma_p$  (i.e.  $\chi_g^{-1} = \gamma_p P_0$ ). Il correspond à la partie réelle de l'indice de polytropie dynamique  $\gamma_p^*(\omega)$ . Cet indice a été introduit dans la section 1.3.3. Son expression en géométrie cylindrique est donnée par l'équation 1.78. En géométrie sphérique, son utilisation appliquée

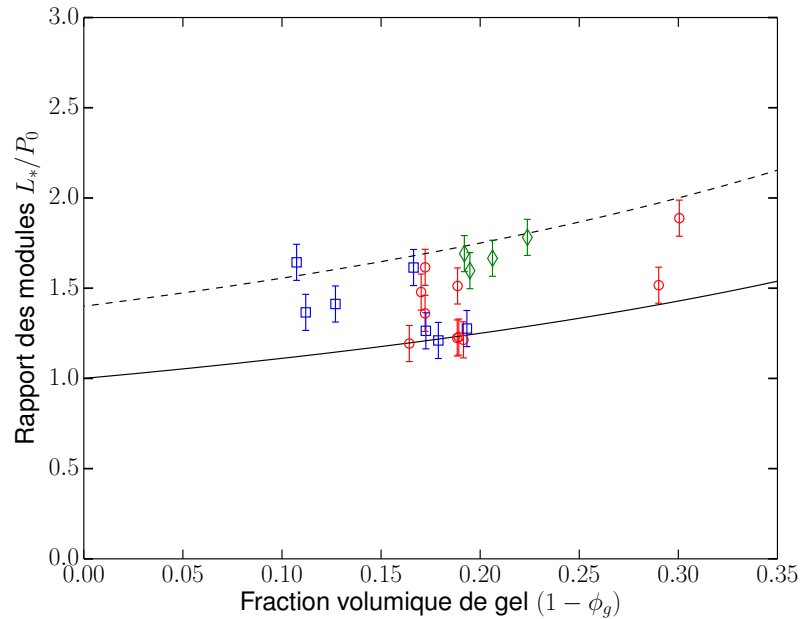


FIGURE 4.33 – Rapport des modules d'élasticité isostatique  $B_*$  de la mousse et du gaz  $P_0$  en fonction de la fraction volumique de gel  $(1 - \phi_g)$ . Les lignes continues et en pointillés correspondent respectivement aux modules d'élasticité isostatique de Wood dans les cas isotherme et adiabatique. Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  ( $\square$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\circ$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\diamond$ ). Les gammes d'âge des échantillons sont récapitulées dans le tableau 4.1.

aux liquides bulleux et aux mousses a été mentionné dans la section 4.1.2. Son expression s'obtient par un calcul analogue à celui réalisé pour des pores de géométrie cylindriques :

$$\gamma_p^*(\omega) = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - (1 - \gamma_a) \frac{j_2(R_b q_\theta)}{j_0(R_b q_\theta)}} \quad (4.38)$$

où  $\gamma_a = 1.4$  est le rapport des chaleurs spécifiques et  $q_\theta$  est le pseudo-nombre d'onde transverse associé à l'épaisseur de peau thermique  $\delta_\theta$ . Les hypothèses de calcul considèrent un gaz contenu dans une cavité sphérique entourée d'une matrice solide de conductivité thermique infinie dans un milieu ambiant thermostaté. Les conditions aux limites sphériques font que l'expression 4.38 se distingue de 1.78 par l'intervention de fonctions de Bessel sphériques ( $j_0, j_2$ ) au lieu des fonctions de Bessel cylindriques ( $J_0, J_2$ ). Le rayon des bulles  $R_b$  remplace celui des pores  $R_p$ . Le détail du calcul<sup>5</sup> peut être trouvé chez Prosperetti et al. [119]. L'allure de la partie réelle et imaginaire de l'indice de polytropie dynamique est représentée sur la figure 4.34.

5. Notons que dans la référence mentionnée, l'expression est exprimée en termes de fonctions trigonométriques hyperboliques au lieu de fonctions de Bessel sphériques. Le caractère hyperbolique s'explique du fait de l'utilisation d'une convention différente dans l'utilisation des nombres complexes. L'équivalence de l'expression se vérifie en utilisant les identités qui lient ( $j_0, j_2$ ) aux fonctions trigonométriques.

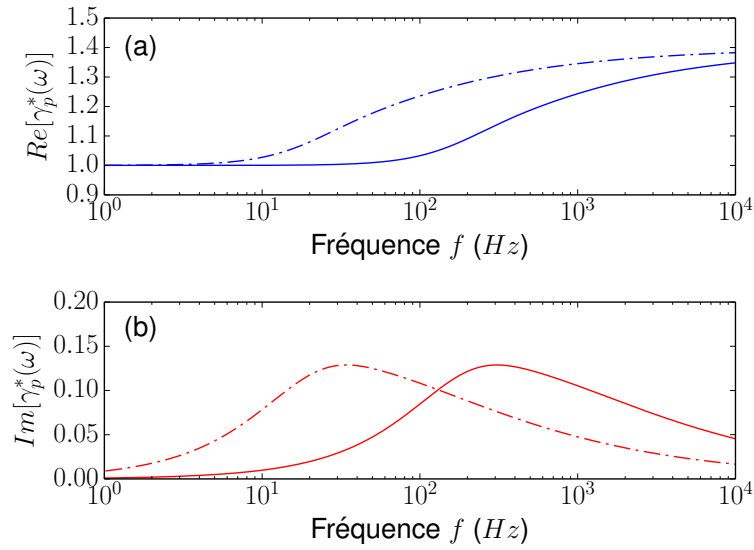


FIGURE 4.34 – Partie réelle (a) et imaginaire (b) de l'indice de polytropie dynamique pour des bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  (—) et  $d = 1.8 \text{ mm}$  (-·-·-). L'indice est évalué en utilisant l'équation 4.38 avec le rayon des bulles  $R_b = d/2$  et la quantité  $q_\theta = \sqrt{N_{Pl}} q_\eta$ . Les expressions de  $q_\theta$  et  $q_\eta$  correspondent aux équations 1.49 et 1.47.  $q_\theta$  a été évalué en utilisant le nombre de Prandtl  $N_{Pl} = 0.71$ , la masse volumique et la viscosité du gaz  $\rho_g = 2.4 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\eta = 18 \text{ } \mu\text{Pa.s}$ .

Les prédictions théoriques (cf. figure 4.34) mettent en évidence le fait que la gamme de fréquences explorée avec les excitations impulsionnelles ( $100 \text{ Hz} \leq f \leq 1 \text{ kHz}$ ) correspond à un régime de transition du coefficient polytropique de sa valeur limite isotherme à sa limite adiabatique. Les mousses comportant des bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  commencent cette transition à plus basse fréquence ( $f \approx 10 \text{ Hz}$ ), de sorte que leur indice polytropique se rapproche plus de la limite adiabatique dans la gamme fréquentielle des mesures ( $1.2 \leq \gamma_p \leq 1.3$ ). Au contraire, les mousses comportant des bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  commencent cette transition à plus haute fréquence ( $f \approx 100 \text{ Hz}$ ), de sorte que leur indice polytropique se rapproche plus de la limite isotherme ( $1.0 \leq \gamma_p \leq 1.2$ ). La dispersion des points représentés sur la figure 4.33 se situe dans l'intervalle des valeurs possibles de l'indice de polytropie du gaz. Néanmoins, il n'est pas possible d'en déduire pour autant une corrélation significative entre l'indice de polytropie et la taille des bulles dans la mousse.

### Module de cisaillement

Les résultats de l'analyse des mesures sur la célérité transverse sont représentés ici (cf. figure 4.35) en terme de module de cisaillement effectif  $G_*$  construit à partir de l'équation 1.31 en considérant la masse volumique effective  $\rho_*$ . Cette dernière sera évaluée en utilisant l'approximation 4.36. Les résultats expérimentaux sont comparés à l'expression du

module de cisaillement effectif  $G_*$  prédit dans le cadre de la loi empirique proposée par Ashby & Gibson (cf. équation 1.21) en fonction du module de cisaillement de la phase solide  $G_s$ .

Afin de permettre cette comparaison, le module de cisaillement effectif est normé par une estimation du module de conservation  $G'$  de la phase gel, qui correspond au module de cisaillement  $G_s$  de la phase solide de la mousse. Cette estimation utilise l'évolution du module de conservation  $G'$  d'un gel de gélatine au cours du temps décrite par l'équation 2.2. En outre, l'évaporation de l'eau du gel modifie la concentration en gélatine et fait par conséquent évoluer le module de cisaillement comme indiqué section 2.1.3. Celui-ci varie comme le carré de la concentration en gélatine (cf. équation 2.3). Afin de prédire le module de cisaillement du gel, il est nécessaire de prendre en compte cette évolution de la masse. En combinant ces deux effets, on obtient finalement une estimation du module de conservation de la phase solide  $G'$ .

Dans le cas de mousses à cellules fermées, la formule semi-empirique proposée par Ashby & Gibson comprend une correction liée à la contribution des films au module de cisaillement effectif (cf. équation 1.23). Afin d'évaluer l'importance de cette correction, il faut estimer la fraction volumique de solide contenue dans les films  $\phi_f$ . En considérant des films d'épaisseur  $e = 1 \mu m$ , de rayon  $R_f = 2/3 R_b$  ainsi qu'un nombre de faces  $N_f = 6$ , le volume occupé par les films d'une bulle vaut  $V_f = 6\pi R_f^2 e/2$ . Le volume occupé par la phase solide est nécessairement tel que  $V_s \geq 4/3 \pi R_b^3 (1 - \phi_g)$ . Cette inégalité conduit à une majoration de  $\phi_f$  telle que  $\phi_f \leq 3 \%$ . La fraction de solide contenue dans les films est donc négligeable et l'expression 1.23 est approximativement égale à l'expression 1.21 du module de cisaillement effectif pour les mousses à cellules ouvertes :

$$G_* = \beta (1 - \phi_g)^2 G' \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{9}{8} \quad (4.39)$$

L'expression 1.23 ne tient pas compte des contributions dues à la tension de surface. Celles-ci s'ajoutent à la contribution des films que nous venons d'écartier. Afin d'évaluer son ordre de grandeur, on suppose que la tension de surface du gel solide est comparable à celui de son précurseur liquide, soit  $\gamma = 30 \text{ mN.m}^{-1}$  (cf. section 2.1.2). Dans les mousses liquides, le modèle de Derjaguin montre que, si la déformation d'une mousse est affine, le module de cisaillement dû à la tension de surface est de l'ordre de  $\gamma/R_b$ . Dans un cas ordonné (mousse liquide ou émulsion concentrée), la variation du module de cisaillement en fonction de la fraction volumique du gaz  $\phi_g$  est faible [120]. La contribution vaut alors environ  $30 \text{ Pa}$  pour  $d = 1.8 \text{ mm}$  et  $100 \text{ Pa}$  pour  $d = 0.6 \text{ mm}$ . Les données présentées dans la figure 4.35 ne prennent pas en compte cette contribution. En revanche, l'insert représente le duplicata des données de la figure 4.35 ainsi que le même jeu de données auquel on a soustrait la contribution de la tension de surface.

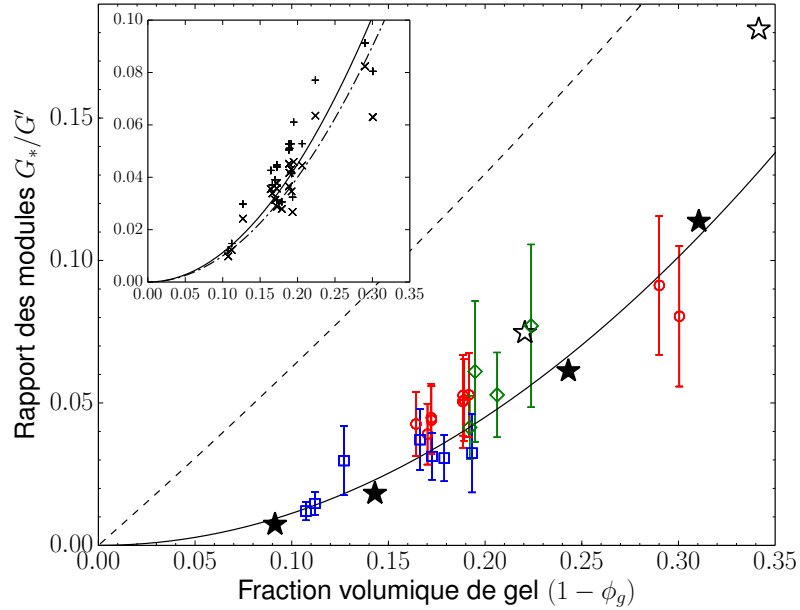


FIGURE 4.35 – Rapport du module de cisaillement effectif  $G_*$  de la mousse et du module de conservation  $G'$  du gel en fonction de la fraction volumique de la phase solide  $(1 - \phi_g)$ .  $G'$  est estimé en fonction de l'âge de l'échantillon à l'aide de la relation 2.2 avec les paramètres  $G'_{10} = 1.2 \text{ kPa}$ ,  $\tau_{G'} = 110 \text{ s}$  et de la concentration réelle à l'aide de la relation 2.3 avec  $C_0 = 10 \text{ \% g/g}$ . Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  ( $\circ$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\diamond$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\square$ ). Les points représentés par des étoiles correspondent aux résultats numériques de la référence [121] en plein et en creux respectivement pour des mousses de structure cubique centrée et cubique à faces centrées. L'insert représente le rapport avec ( $\times$ ) et sans ( $+$ ) prise en compte de la tension de surface. Les lignes correspondent à l'équation 4.39 avec  $\beta = 9/8$  (—) et  $\beta = 1$  (- - -). La ligne (- - -) correspond à la limite de Hashin-Shtrickman (cf. équation 4.40).

La figure 4.35 illustre la compatibilité des résultats expérimentaux avec la loi semi-empirique (cf. équation 4.39) proposée par Ashby & Gibson. Si l'on prend en compte la tension de surface, les résultats sont décalés vers des valeurs plus faibles du rapport des modules. Si l'on ajuste l'ensemble des points par une loi de la forme donnée par l'équation 4.39 en laissant le coefficient  $\beta$  indéterminé, le meilleur ajustement est obtenu pour un coefficient  $\beta = 1.0$  lorsque l'on soustrait la contribution due à la tension de surface, tandis que l'on obtient  $\beta = 1.2$  sinon, à comparer à  $9/8 \approx 1.1$ . Dans tous les cas de figure, le rapport des modules reste inférieur à la limite de Hashin-Shtrickman [122]. Dans la limite d'un matériau mou ( $B \gg G$ ), cette limite s'écrit :

$$G_{HS}^+ = \left(1 - \frac{15\phi_g}{9 + 6\phi_g}\right) G' \quad (4.40)$$

Les limites de Hashin-Shtrickman correspondent à des limites théoriques sur les modules

élastiques dont les modules de Young et de cisaillement de matériaux composites isotropes constitués d'une matrice élastique et d'inclusions (e.g. des particules aléatoirement placées) [123].

Jauffrès et al. ont obtenu numériquement les rapports des modules de Young et de cisaillement de matériaux cellulaires. Une modélisation par éléments finis de différentes structure de mousses à cellules ouvertes ont permis d'évaluer leurs propriétés mécaniques respectives. Sur la figure 4.35, nous avons représenté les résultats pour une structure cubique centrée et cubique à faces centrées (courtoisie de Jauffrès et al. [121]). Les résultats numériques pour les deux structures cristallines envisagées encadrent les résultats expérimentaux que nous avons obtenu dans nos échantillons de mousse gélifiée. La structure cubique centrée dessine une limite inférieure tandis que la structure cubique à faces centrées dessine une limite supérieure. Bien que la structure en spirale de nos échantillons ne s'approche a priori plus de la configuration cfc, les défauts systématiques de la structure par rapport à un ordre cfc (notamment liés au raccordement aux bords dans la symétrie de révolution du cylindre) ainsi que les défauts ponctuels ont un impact conséquent sur la rigidité mécanique. Il semble que ces différences par rapport à la structure cfc idéale tende à diminuer la rigidité de la mousse en cisaillement.

### Coefficient de Poisson

La figure 4.36 représente le coefficient de Poisson  $\nu_*$  du milieu homogène effectif équivalent à la mousse gélifiée. Nous déduisons  $\nu_*$  du module d'élasticité isostatique effectif  $B_* \approx L_*$  et du module de cisaillement effectif  $G_*$ , déduits des mesures de célérité longitudinale et transverse, à l'aide de la relation (cf. référence [14]) :

$$\nu_* = \frac{3B_* - 2G_*}{2(3B_* + G_*)} \quad (4.41)$$

Cette relation est valable sous l'hypothèse d'un milieu continu homogène non-dispersif et isotrope. Le fait de pouvoir décrire la mousse gélifiée comme un milieu effectif homogène non-dispersif a déjà fait l'objet de commentaires (cf. section 4.5.1). Le caractère faiblement anisotrope d'une mousse solide de structure cfc est prédit par des simulations numériques, dont celles de la propagation acoustique par Spadoni et al. [112] présentées dans la section 4.1.3, mais également celles de la déformation mécanique de mousses métalliques dans le cadre de la thèse de S. Heitkam [124]. La structure polycristalline des échantillons de mousse gélifiée correspond vraisemblablement à une configuration cfc adaptée aux conditions aux limites du tube de section circulaire. Comme par ailleurs, les échantillons comportent des défauts cristallins, la faible anisotropie se transpose très vraisemblablement à la structure en spirale de nos échantillons.

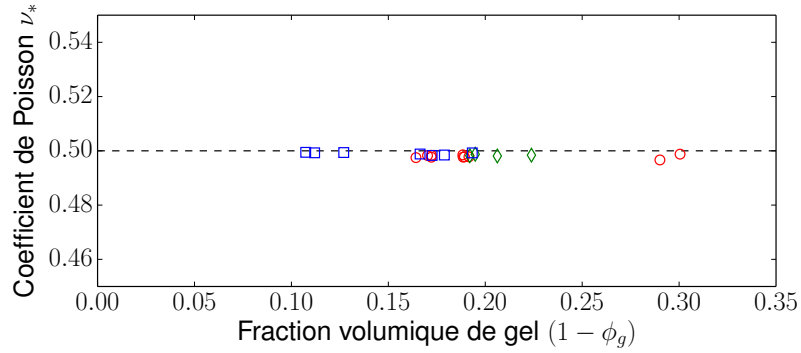


FIGURE 4.36 – Coefficient de Poisson effectif  $\nu_*$  d’une mousse gélifiée en fonction de la fraction volumique de gel ( $1 - \phi_g$ ). (○) Mousse gélifiée ( $d = 0.6 \text{ mm}$ ,  $D = 4 \text{ mm}$ ,  $4.4 \text{ h} \leq t \leq 14 \text{ jours}$ ,  $0.70 \leq \phi_g \leq 0.84$ ,  $23.9 \text{ m.s}^{-1} \leq c_L \leq 28.1$ ). (◇) Mousse gélifiée de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$ . Mousse gélifiée de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  (□). Données des figures 4.33 et 4.35.

La variation de  $\nu_*$  en fonction de la fraction volumique de solide est représentée sur la figure 4.36 pour les données des figures 4.33 et 4.35. Nous constatons qu’il vaut en moyenne  $0.498 \pm 0.001$ . Cette valeur est très proche de la valeur  $1/2$  attendue dans le cas d’un milieu incompressible. Ce résultat justifie l’hypothèse d’un matériau mou incompressible, que nous avons fait pour prédire la relation de dispersion dans le guide d’onde (cf. équation 4.33). Ce caractère quasi-incompressible est une différence notable avec les mousses à cellules ouvertes dont le coefficient de Poisson effectif vaut typiquement  $1/3$  [3].

### 4.5.3 Effet de la dissipation mécanique

La dissipation mécanique du matériau modifie considérablement la relation de dispersion en présence de bandes de fréquences interdites dues à une résonance. En l’occurrence, il s’agit des résonances des ondes transverses dans la direction radiale du tube mais le principe reste valide pour la résonance des films que nous aborderont plus tard. Elle agit sur le facteur de qualité des résonances. Comme nous le verrons dans ce paragraphe, des mécanismes de dissipation suffisamment forts peuvent lisser voire effacer ces résonances.

### Dissipations thermiques et visqueuses du gaz

La prise en compte des dissipations thermiques et visqueuses dans le gaz nécessite, de même que dans le cadre de la théorie de Biot (cf. section 1.3.3), la résolution des équations 1.43b et 1.43a. Pour mémoire, ces équations correspondent respectivement à l’équation de la chaleur et à l’équation de l’écoulement, exprimées de manière découplée en première

approximation. La première permet de rendre compte de la dissipation thermique liée à des déformations dilatationnelles, tandis que la seconde permet de rendre compte de la dissipation visqueuse liée à des déformations cisailantes.

La résolution de l'équation de la chaleur donne l'expression du module d'élasticité isostatique complexe du gaz  $B_g^*(\omega) = \gamma_p^*(\omega)P_0$ , qui inclue les dissipations thermiques.  $\gamma_p^*(\omega)$  est l'indice de polytropie dynamique, dont l'expression est donnée par l'équation 1.78 en géométrie cylindrique et par l'équation 4.38 en géométrie sphérique. Comme indiqué dans la section précédente, le passage de la géométrie cylindrique à la géométrie sphérique revient à substituer les fonctions de Bessel sphériques aux fonctions de Bessel (cylindriques). De manière analogue, la résolution de l'équation de l'écoulement donne l'expression de la masse volumique complexe du gaz  $\rho^*(\omega) = \alpha^*(\omega)\rho_g$ , qui inclue les dissipations visqueuses.  $\alpha^*(\omega)$  est la tortuosité dynamique, dont l'expression est donnée par l'équation 1.53 en géométrie cylindrique. Contrairement au cas de l'équation de la chaleur, la résolution en géométrie sphérique du profil d'écoulement est a priori plus difficile qu'une simple substitution des harmoniques sphériques aux harmoniques cylindriques. Dans la suite, nous ferons malgré tout l'hypothèse que c'est le cas en première approximation.

Dans le régime de Wood prévaut, il n'y a pas de mouvement relatif entre la phase gazeuse et la matrice solide et par conséquent la dissipation visqueuse est négligeable. Le seul mécanisme de dissipation qu'il est pertinent de considérer dans ce régime est celui de dissipation thermique. Ainsi, en utilisant l'expression de l'indice de polytropie dynamique (cf. équation 4.38), il est possible de tester l'effet de la dissipation thermique dans le gaz sur la relation de dispersion. Pour cela, il faut introduire la célérité longitudinale complexe  $c_L^*$  :

$$c_L^* = \sqrt{\frac{L^*(\omega)}{\rho_*}} \quad (4.42)$$

$L^*(\omega) \approx B^*(\omega)$  est le module d'onde de compression complexe, assimilé au module d'élasticité isostatique complexe  $B^*(\omega)$ , dont l'expression se déduit du module d'élasticité isostatique effectif  $B_* = \chi_*^{-1}$  dans le cadre du modèle de Wood (cf. équation 1.40b) :

$$B^*(\omega) = \frac{\gamma_p^*(\omega)P_0}{\phi_g} \quad (4.43)$$

L'allure de la partie imaginaire de l'indice de polytropie dynamique est représenté sur la figure 4.34.b pour deux tailles de bulles ( $d = 0.6 \text{ mm}$  et  $d = 1.8 \text{ mm}$ ). On constate que la gamme de fréquence du régime basse fréquence ( $100 \text{ Hz} \leq f \leq 1 \text{ kHz}$ ) correspond justement à un maximum de dissipation pour des bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$ . Pour les bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$ , on a déjà passé la maximum mais le niveau



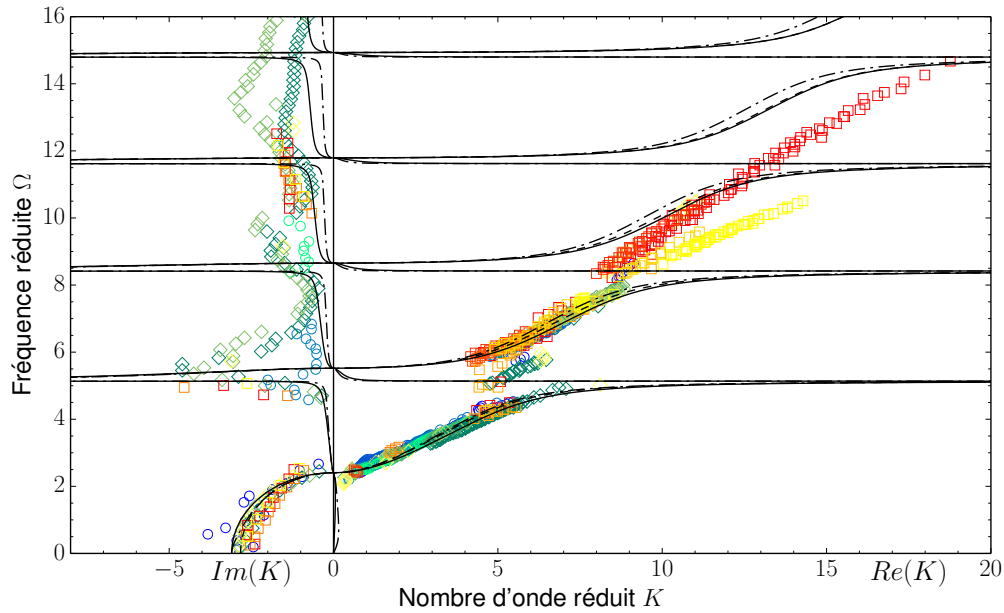


FIGURE 4.37 – Relation de dispersion adimensionnée comparée à des prédictions prenant en compte la dissipation thermique dans le gaz. Les points représentant  $Re(K)$  correspondent aux données de la figure 4.31. Les prédictions sont obtenues en résolvant analytiquement l'équation 4.33 avec une célérité longitudinale donnée par 4.42 pour des bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  (—) et  $d = 1.8 \text{ mm}$  (----). Elles sont adimensionnées par la relation de dispersion correspondante en l'absence de dissipation mécanique (- - -), en supposant qu'elle correspond à un coefficient polytropique médian  $\gamma_p = 1.2$ . Les paramètres du gaz sont : la viscosité  $\eta = 18.6 \mu\text{Pa}\cdot\text{s}$ , le nombre de Prandtl  $N_{Ptl} = 0.71$  et la masse volumique du gaz  $\rho_g = 2.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  (○). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  (◇). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  (□).

d'atténuation reste substantiel. Dans les deux cas, cela correspond à un module de viscosité volumique  $B_v \approx 10 \text{ kPa}$  (cf. section 1.2.1).

La figure 4.37 présente la relation de dispersion adimensionnée mesurée expérimentalement. Par rapport à la figure 4.31, les résultats sur la partie imaginaire du nombre d'onde sont également représentés. Ces résultats issus des mesures d'atténuation sont adimensionnés en même temps que leur contrepartie sur la partie réelle du nombre d'onde. La relation de dispersion est comparée aux prédictions théoriques prenant en compte les échanges thermiques entre la gaz et la matrice solide, donnant lieu à l'effet de polytropie, conformément à la discussion qui précède.

Au niveau de la partie réelle du nombre d'onde, on constate que la polytropie introduit un comportement légèrement dispersif qui s'écarte de la relation de dispersion adimensionnée pour un milieu continu homogène non-dispersif. Cette dernière sert de référence aux deux autres courbes de prédiction en supposant qu'elle correspond à l'indice  $\gamma_p = 1.2$ . Conformément au commentaire de la figure 4.34, le coefficient polytropique

vaut 1.2 au début de la gamme fréquentielle des mesures pour les bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  et à la fin de la gamme fréquentielle pour les bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$ . Ainsi, la partie réelle de la courbe de prédiction correspondant aux bulles de  $d = 1.8 \text{ mm}$  se confond avec la prédiction sans dissipation au niveau de la première branche, tandis que la courbe de prédiction correspondant aux bulles de  $d = 0.6 \text{ mm}$  se confond avec les prédictions à partir de la troisième branche. En revanche, la dissipation thermique ne semble pas suffisante pour expliquer les mesures de la partie imaginaire du nombre d'onde.

### Effet du module de perte de la matrice solide

La matrice solide est également le siège de phénomènes de dissipation. En particulier, une déformation cisailante de la matrice solide sollicite le module de perte  $G''$  du gel de gélatine dont elle est constituée. Afin de rendre compte de cette contribution dissipative, nous remplaçons le module de cisaillement  $G_s$  de la phase solide par un module de cisaillement complexe  $G^*(\omega)$  (cf. équation 2.4) dans l'expression du module de cisaillement effectif  $G_*$  (cf. équation 1.23) pour  $\phi_f \approx 0$ . On obtient ainsi le module de cisaillement complexe de la mousse gélifiée  $G_*^*$  :

$$G_*^*(\omega) \approx \frac{9}{8}(1 - \phi_g)^2 G^*(\omega) \quad (4.44)$$

où le module de cisaillement complexe  $G^*(\omega)$  est défini par l'équation 2.4 avec un paramètre  $G_0$  construit à partir de la célérité transverse ( $G_0 = \rho_* c_T^2$ ), un paramètre  $G_1$  choisi de manière à ajuster la relation de dispersion et une fréquence caractéristique fixée  $f_c = 25 \text{ kHz}$ . La prise en compte du module de cisaillement complexe de la mousse, nous amène à introduire la célérité transverse complexe (cf. équation 1.31) :

$$c_T^* = \sqrt{\frac{G_*^*(\omega)}{\rho_*}} \quad (4.45)$$

Des prédictions théoriques pour la relation de dispersion sont ensuite obtenues en injectant la célérité complexe  $c_T^*$  dans l'expression de la masse volumique effective (4.34).

La figure 4.38 représente la relation de dispersion mesurée expérimentalement et la compare aux prédictions obtenues en substituant la célérité transverse complexe  $c_T^*$  à la célérité transverse  $c_T$  dans l'équation 4.33. Du fait de l'utilisation des variables réduites, seul le rapport des modules est pertinent dans la loi de viscoélasticité utilisée. La figure 4.38 illustre un accord satisfaisant entre la partie imaginaire du nombre d'onde mesurée et prédite, lorsque les effets du module de perte du gel sont pris en compte.

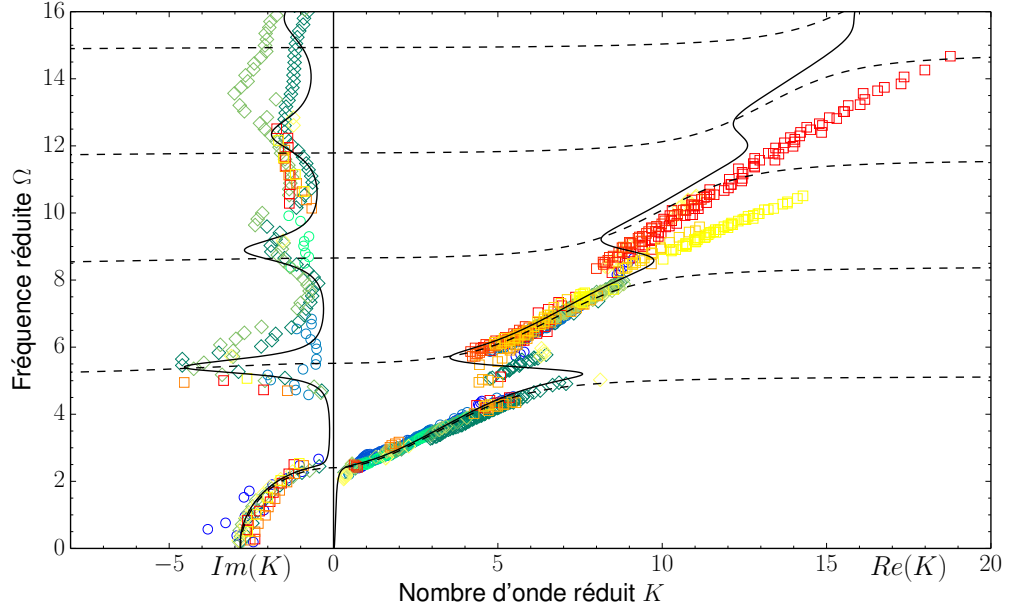


FIGURE 4.38 – Relation de dispersion adimensionnée comparée à des prédictions prenant en compte la dissipation visqueuse dans le gel. Les points représentant  $Re(K)$  correspondent aux données de la figure 4.31. Les prédictions sont obtenues en résolvant analytiquement l'équation 4.33 avec une célérité transverse donnée par 4.45 avec des paramètres typiques des mousses gélifiées que nous étudions ( $D = 10 \text{ mm}$ ,  $\phi_g = 0.8$ ,  $\rho_s = 1100 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\gamma_p = 1.2$ ).  $G^*(\omega)$  est donné par l'équation 2.4 avec  $f_c = 25 \text{ kHz}$  et  $G_0/B_g = 0.1$ . La courbe de prédiction correspond à un rapport  $G_1/G_0 = 0.01$  (—). La relation de dispersion en l'absence de dissipation mécanique est représentée en pointillés. Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  ( $\circ$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\diamond$ ). Mousses gélifiées de bulles de diamètre  $d = 1.8 \text{ mm}$  dans un tube de diamètre  $D = 10 \text{ mm}$  ( $\square$ ).

Bien que cela puisse paraître paradoxal, la dissipation visqueuse introduite par le module de perte  $G''$  diminue la partie imaginaire du vecteur d'onde, qui, en l'absence de mécanisme de dissipation, traduit un comportement évanescents à proximité des résonances. En réalité cela se comprend dans une logique de facteur de qualité des résonances. L'atténuation due au module de cisaillement du matériau diminue le facteur de qualité des résonances transverses. La figure 4.38 illustre le fait qu'à mesure de l'augmentation du module de perte avec la fréquence, l'effet des résonances et anti-résonances sont de moins en moins marquées et de plus en plus lissées.

Un autre effet surprenant qui a été discuté notamment par Brillouin [118] est celui de la pente négative de la projection dans le plan réel de la relation de dispersion ( $0\Omega Re(K)$ ). On observe cet effet sur la figure 4.38 pour des valeurs de fréquence réduite intermédiaires entre une anti-résonance et la résonance suivante, soit pour  $5.1 \leq \Omega \leq 5.5$ , pour  $8.4 \leq \Omega \leq 8.7$ , pour  $11.6 \leq \Omega \leq 11.8$  et pour  $14.8 \leq \Omega \leq 14.9$ . Il ne faut pas en déduire pour autant que la vitesse de groupe est négative. En effet, en présence d'atténuation du matériau, le nombre d'onde est complexe. Le taux de variation de la

pulsation en fonction de la partie réelle du vecteur d'onde ne peut plus s'interpréter en terme de vitesse de groupe.

Soulignons pour finir que la relation de dispersion de la figure 4.38 ne se lit plus comme le cas idéal en l'absence de mécanisme de dissipation. Il n'y a plus de transition nette entre un régime évanescent de nombre d'onde purement imaginaire et un régime propagatif de nombre d'onde purement réel. En présence de mécanismes dissipatifs, le nombre d'onde est toujours complexe. Par conséquent, il n'est plus possible de parler de régimes propagatifs et évanescents. En particulier, lors du passage d'une branche à la suivante, au niveau des résonances transverses, la partie réelle du nombre d'onde ne tombe plus à zéro. Elle se rapproche de sa valeur attendue en l'absence d'un confinement dans un guide d'onde. En d'autres termes, le module de perte affaiblit l'impact des résonances transverses liées à la condition aux limites fixe aux bords du tube. Son augmentation avec la fréquence donne lieu à un comportement d'avantage visqueux. La mousse peut s'écouler au niveau des parois les résonances transverses s'effacent et le mode longitudinal domine de plus en plus. Cependant, à proximité des premières résonances transverses, les fluctuations des parties réelles et imaginaires du nombre d'onde restent conséquentes.

#### 4.5.4 Conclusion partielle sur le régime basse fréquence

Dans une première gamme fréquentielle qui s'étend jusqu'à quelques centaines de hertz voire jusqu'au kilohertz, la mousse gélifiée peut être décrite comme un milieu homogène non-dispersif. La propagation acoustique y est bien décrite par la théorie des guides d'onde. En particulier, la relation de dispersion mesurée correspond aux modes guidés symétriques appelés ondes de compression (cf. section 4.3). Les écarts par rapport à la relation de dispersion idéale sont expliqués qualitativement par les mécanismes de dissipation dans le gel, liés au comportement viscoélastique de la gélatine. Dans ce régime, la dissipation dans le gaz est comparativement négligeable. L'ajustement de la relation de dispersion prédite aux résultats expérimentaux pour des échantillons à différents âges et de différentes fractions volumiques de gaz permet une mesure des célérités transverses et longitudinales dans les échantillons. Cette mesure permet de vérifier que la célérité longitudinale suit une dépendance en la fraction volumique prédite par le modèle de Wood, tandis que la célérité transverse rend compte du module de cisaillement effectif de la structure. La dépendance du rapport du module de cisaillement de la mousse gélifié sur celui de la phase gel en fonction de la fraction volumique est compatible avec la loi semi-empirique proposée par Ashby & Gibson. Le rapport est encadré par les résultats de simulation numériques pour des structures cubiques centrées et cubiques à faces centrées. Les modules d'élasticité isostatique et de cisaillement déduits

---

permettent de calculer le coefficient de Poisson. Sa valeur rend compte de la quasi-incompressibilité de la mousse, ou en d'autres termes de son caractère mou : le module de cisaillement est négligeable comparé au module d'élasticité isostatique.

## 4.6 Discussion du régime haute fréquence

Dans le cadre de cette thèse, le régime hautes fréquences désigne un régime fréquentiel où la longueur d'onde est grande comparée au diamètre des bulles  $d$  mais où le milieu ne peut plus être décrit comme un milieu effectif non-dispersif comme nous l'avons vu dans la section 4.5. En d'autres termes, il s'agit du régime fréquentiel, où la mousse gélifiée peut encore être décrite comme un milieu continu effectif mais dont les propriétés mécaniques effectives sont dispersives. L'existence d'un tel régime est la signature de résonateurs internes dont la résonance intervient dans un régime de grandes longueurs d'onde comparée à la maille du cristal<sup>6</sup>, de l'ordre de grandeur de la taille des bulles. Pour des ondes mixtes (i.e. cisaillement et compression), un autre effet doit être pris en compte. En effet, la célérité transverse étant beaucoup plus faible que la célérité longitudinale, les modes de cisaillement atteignent les limites de la première zone de Brillouin à bien plus basse fréquence que les modes de compression. Un effet de diffusion résonante de type diffraction de Bragg est donc également envisageable. D'après les résultats de la figure 4.31, le comportement dispersif commence pour  $\Omega \approx 7$ , soit  $900 \text{ Hz}$  pour les tubes de diamètre  $D = 4 \text{ mm}$  et  $360 \text{ Hz}$  pour les tubes de diamètre  $10 \text{ mm}$  (et une valeur typique de  $c_T = 1.6 \text{ m.s}^{-1}$ ).

### 4.6.1 Profils de visibilité

#### Prédiction théorique du profil de visibilité

Soit une onde mécanique de déformation excitée continument à une extrémité d'un échantillon placé dans un tube cylindrique de révolution de longueur  $L$  et de diamètre  $D$  (cf. figure 4.39). Elle est réfléchiée sur l'autre extrémité et se superpose avec l'onde incidente. Il en résulte une onde stationnaire dans la cavité formée par l'échantillon.



FIGURE 4.39 – Système de coordonnées cylindriques.

Le problème est analogue à celui de la corde de Melde ou du tube de Kundt. Soit un repère de coordonnées cylindriques (cf. figure 4.39) tel que l'axe du tube corresponde à l'axe  $(0z)$ . On s'intéresse au profil de déformation selon cet axe et à la manière dont il

6. Pour un milieu désordonné, il faut comparer la longueur d'onde à la taille des diffuseurs.

se relie au champ de déplacement  $\vec{u}$ . Pour une onde progressive guidée dans le cylindre, le tenseur des déformations provoquées par le passage de l'onde incidente se décompose de la manière suivante :

$$\epsilon_i = \hat{\epsilon}(r, \theta) e^{i(\omega t - k^* z)} \quad (4.46)$$

où  $\hat{\epsilon}$  est tenseur des amplitudes de déformations,  $k^*$  est le nombre d'onde complexe, dont les parties réelles et imaginaires sont non nulles dans tout le spectre de la relation de dispersion<sup>7</sup>, prenant en compte les mécanismes dissipatifs. La déformation induite par l'onde réfléchie à l'autre extrémité ( $z = L$ ) s'écrit :

$$\epsilon_r = r \hat{\epsilon} e^{i(\omega t + k^*(z-2L))} \quad (4.47)$$

où  $r$  est le coefficient de réflexion en amplitude de la déformation. Dans le but de simplifier la discussion, l'hypothèse est faite qu'un coefficient suffit à décrire les conditions aux limites à une bonne approximation près. En toute rigueur nous devrions considérer un tenseur de réflexion. Or la visibilité ne sera finalement sensible qu'à une grandeur scalaire (cf. section 3.1, équation 15) : un invariant du tenseur de déformation que l'on notera  $\tilde{\epsilon}$ .

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{[Tr(\Delta\epsilon)]^2 + 2 Tr(\Delta\epsilon^2)} \quad (4.48)$$

Cet invariant fait intervenir les différentes composantes du tenseur de déformation. Si l'on considère une infinité de réflexions dans cette cavité à la manière d'un interféromètre de Fabry-Pérot avec les mêmes conditions de réflexion aux deux extrémités de coefficient de réflexion  $r$ , il est possible de regrouper les termes en deux séries dont la convergence est assurée par l'atténuation de sorte que le tenseur de déformation dans la cavité s'écrive :

$$\epsilon = \hat{\epsilon} \frac{1}{1 - r^2 e^{-2ik^*L}} \left( e^{i(\omega t - k^*z)} + r e^{i(\omega t + k^*(z-2L))} \right) \quad (4.49)$$

La condition aux limites au niveau de l'excitation correspond à un déplacement sinusoïdal imposé en  $z = 0$ . La rupture d'impédance entre la mousse dans le tube et l'air ambiant sera probablement suffisamment importante pour faire l'approximation d'une réflexion totale au niveau de l'autre extrémité ( $|r| = 1$ ). La connaissance précise de  $r$  n'est pas d'une importance critique, car la déformation à l'intérieur du tube est toujours proportionnelle à  $\sin(k^*z + \phi_0)$ , où  $\phi_0$  dépend de  $r$ . En particulier,  $\phi_0 = 0$  pour  $r = -1$  et  $\phi_0 = \pi/2$  pour  $r = 1$ . Pour un mode stationnaire donné, l'invariant  $\tilde{\epsilon}$  (cf. équation 4.48) est par conséquent proportionnel à  $|\sin(k^*z + \phi_0)|$ . Même si  $\phi_0$  n'est pas connu, la période spatiale de cette oscillation permet de déduire la longueur d'onde. Dans le cas où atténuation est très forte, l'analyse est analogue à celle discutée dans le chapitre 3

7. Il se distingue du nombre d'onde  $k$  considéré dans le cas idéal, où les mécanismes de dissipation sont négligés, et dont les valeurs sont soit réelles, soit imaginaires pures.

(cf. section 3.1). Finalement, l'invariant de déformation prend la forme suivante :

$$\tilde{\epsilon}(z, t, \tau) = |\tilde{\epsilon}_0(z, t + \tau) - \tilde{\epsilon}_0(z, t)| \quad (4.50)$$

$$\tilde{\epsilon}_0(z, t) = \operatorname{Re} \left( u_0 k^* \frac{e^{i\omega t}}{\cos(k^* L)} \sin(k^*(z - L) + \phi_0) \right) \quad (4.51)$$

où le facteur  $u_0 k^*$  avec  $u_0$  l'amplitude de déplacement est homogène à une composante de la transformée de Fourier du tenseur de déformation  $\hat{\epsilon}$ . Pour un temps d'exposition  $T_e$  de la caméra, à une distance de propagation  $z$ , la visibilité se déduit du profil de déformation conformément aux équations 15, 20 et 21 de l'article (cf. section 3.1) :

$$V(T_e, t, z) = \int_0^{T_e} 2 \left( 1 - \frac{\tau}{T_e} \right) e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_o k_o \ell^* \tilde{\epsilon}(z, t, \tau)} \frac{d\tau}{T_e} \quad (4.52)$$

où  $\ell^*$  est le libre parcours moyen de transport,  $k_o$  est le nombre d'onde optique et  $\gamma_o$  est un facteur lié aux conditions aux limites optiques qui vaut typiquement 1 – 3 [7].

Une intégration numérique appliquée à l'équation 4.52 permet de prédire théoriquement les profils de visibilité.

### Comparaison aux profils expérimentaux

Les figures 4.40 et 4.41 représentent deux séries de profils de visibilité obtenus pour une excitation harmonique continue d'amplitude contrôlée à deux fréquences distinctes ( $f = 150 \text{ Hz}$  et  $f = 4.4 \text{ kHz}$ ). Les séries sont comparées aux prédictions de l'équation 4.52 sous l'hypothèse d'un profil de déformation correspondant à l'équation 4.51). Dans les deux cas, les profils de plus grande et plus petite amplitude d'excitation sont ajustés. Les parties réelles des nombre d'onde utilisés sont déduites de la position des extrema des profils. Puis la longueur d'atténuation et l'amplitude d'excitation  $u_0$  sont ajustées.  $k_o$  est connu, tandis que  $\gamma_o$  et  $\ell^*$  sont estimés. Bien que l'excitation ne concorde pas exactement avec les amplitudes imposées par l'actuateur piézoélectrique, l'ordre de grandeur est le bon. Par ailleurs, on constate qu'un facteur 2 sur l'amplitude ajustée  $u_0$  permet de passer du profil de plus faible excitation ( $\sim 5 \mu m$ ) à celui d'excitation la plus ample ( $\sim 10 \mu m$ ). Tout ceci permet de consolider l'analyse effectuée et les relations de dispersion extraites de ces profils de visibilité.

Les deux séries de profils n'ont pas pu être ajustées avec la même hypothèse de condition de réflexion. Il est possible que cela s'explique du fait d'une polarisation dominante de l'onde acoustique distincte entre les deux. Si tel est le cas, cela indiquerait une onde dans le premier échantillon à 150 Hz de nature différente de celle dans le second à 4.4 kHz.



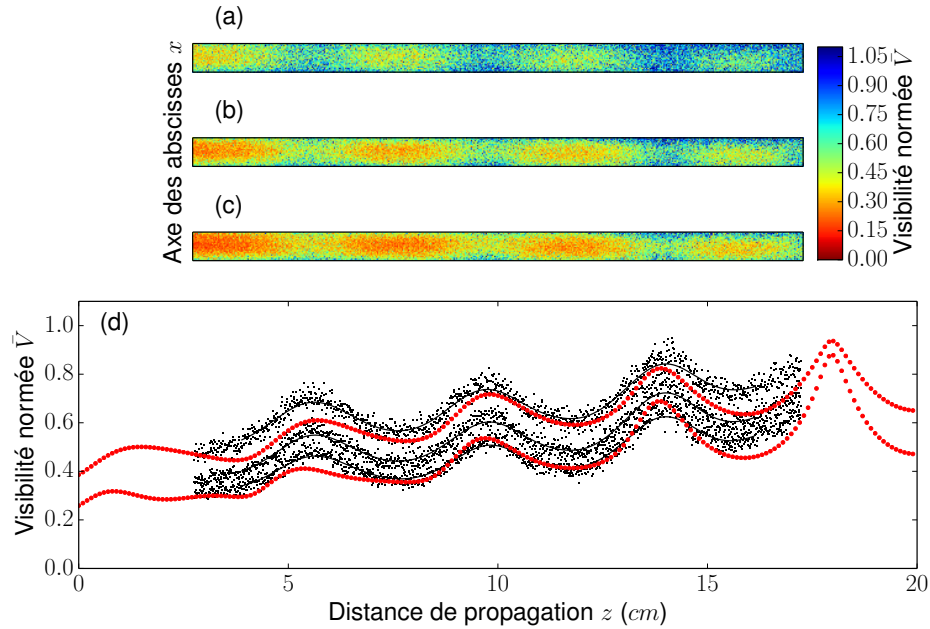


FIGURE 4.40 – Cartes (a-c) et profils de visibilité normée  $\bar{V}$  à  $f = 4.4 \text{ kHz}$  comparés aux prédictions ( $\bullet$ ) de l'équation 4.52 combinée avec l'équation 4.51 pour  $r = 1$  avec  $u_0 = 1.8 \mu\text{m}$  et  $u_0 = 0.9 \mu\text{m}$ . L'acquisition est effectuée avec un temps d'exposition  $T_e = 200 \text{ ms}$  ( $L = 20 \text{ cm}$ ,  $k_o = 2\pi/532 \text{ nm}^{-1}$ ,  $\gamma_o = 1.5$ ,  $\ell^* = 1 \text{ mm}$ ) pour une mousse gélifiée de bulles de diamètre  $0.6 \text{ mm}$  dans des tubes de diamètre  $4 \text{ mm}$ , âgée de 8h et de fraction volumique de gaz  $\phi_g = 0.80$ . Les amplitudes d'excitation valent environ  $5 \mu\text{m}$  (a),  $7 \mu\text{m}$  (b) et  $10 \mu\text{m}$  (c) crête-crête. Les courbes continues sont le résultat d'un lissage par convolution avec une fenêtre de Hann de longueur 15 % de la longueur totale. Les indications de longueur sur l'axe des abscisses (d) renseignent également sur l'échelle des cartes de visibilité.

#### 4.6.2 Impact de la dynamique des films

À hautes fréquences, la vitesse du son observée  $c = 350 \text{ m.s}^{-1}$  (e.g. pour un échantillon de mousse gélifiée avec  $d = 0.6 \text{ mm}$ ,  $\phi_g = 0.80$ ,  $D = 4 \text{ mm}$ , cf. figure 4.28) ne s'explique pas par le modèle de milieu homogène non-dispersif. L'ordre de grandeur est proche de la vitesse dans le gaz. Il s'agit du même comportement qualitatif que celui observé expérimentalement dans les mousses liquides (cf. section 4.1.2 et référence [23]). Dans la référence [23], la vitesse du son plus élevée à haute qu'à basse fréquence a été expliquée par un mode de propagation où les bordures de Plateau et les vertex sont quasiment au repos. Seuls les films ainsi que le gaz sont en mouvement. Dans ces conditions, où la déformation de la matrice solide est relativement faible, le confinement de la mousse dans un tube devrait avoir peu d'impact sur la vitesse de propagation. Le modèle de Pierre et al. prédit ce comportement au-delà d'une fréquence de vibration fondamentale du film. L'objectif du calcul suivant est de mieux comprendre la valeur de cette fréquence.

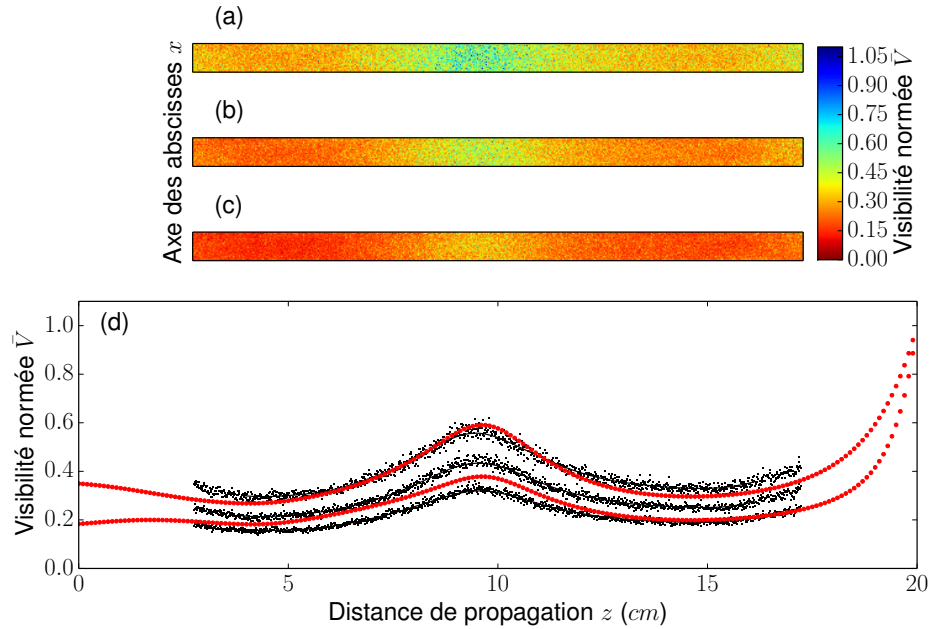


FIGURE 4.41 – Cartes (a-c) et profils de visibilité normée  $\bar{V}$  comparés aux prédictions (•) de l'équation 4.52 combinée avec l'équation 4.51 pour  $r = -1$  avec  $u_0 = 8.0 \mu\text{m}$  et  $u_0 = 4.0 \mu\text{m}$ . L'acquisition est effectuée avec un temps d'exposition  $T_e = 200 \text{ ms}$  ( $L = 20 \text{ cm}$ ,  $k_o = 2\pi/532 \text{ nm}^{-1}$ ,  $\gamma_o = 1.5$ ,  $\ell^* = 1 \text{ mm}$ ) pour une mousse gélifiée de bulles de diamètre  $1.8 \text{ mm}$  dans des tubes de diamètre  $10 \text{ mm}$ , âgée de 1.4 jour et de fraction volumique de gaz  $\phi_g = 0.82$ . Les amplitudes d'excitation valent environ  $5 \mu\text{m}$  (a),  $7 \mu\text{m}$  (b) et  $10 \mu\text{m}$  (c) crête-crête ( $f = 150 \text{ Hz}$ ). Les courbes continues sont le résultat d'un lissage par convolution avec une fenêtre de Hann de longueur 15 % de la longueur totale. Les indications de longueur sur l'axe des abscisses (d) renseignent également sur l'échelle des cartes de visibilité.

### Oscillations libres d'une plaque mince sous tension

Lorsqu'on considère la vibration de films d'épaisseur finie sous une tension donnée, la résistance à la flexion joue un rôle. Les deux cas limites traités dans les ouvrages de référence tel celui de Morse [6] sont ceux de la membrane (i.e plaque d'épaisseur nulle) sous tension et de la plaque mince en l'absence de tension. Mais le cas le plus général est celui de la plaque mince sous tension. Avant d'envisager le cas limite adapté, nous allons analyser le cas le plus général afin de voir sous quelles conditions l'épaisseur de la plaque est négligeable. Soit une plaque mince d'épaisseur  $e$ , de forme circulaire de rayon  $R_f$ , sous une tension  $2\gamma$  de module de flexion  $B_f$  (cf. équation 1.83) et de masse volumique  $\rho_s$ . Son équation du mouvement homogène, écrite en terme d'excursions  $\zeta_f$  selon l'axe ( $0z$ ) (cf. figure 4.42), est biharmonique et similaire à celle de la corde raide et peut être écrite en additionnant la force de rappel due à la tension et la force liée au module de flexion d'une plaque (cf. équations 1.80 et 1.82) :

$$\rho_s e \frac{\partial^2 \zeta_f}{\partial t^2} = 2\gamma \nabla^2 \zeta_f - B_f e^3 \nabla^4 \zeta_f \quad (4.53)$$

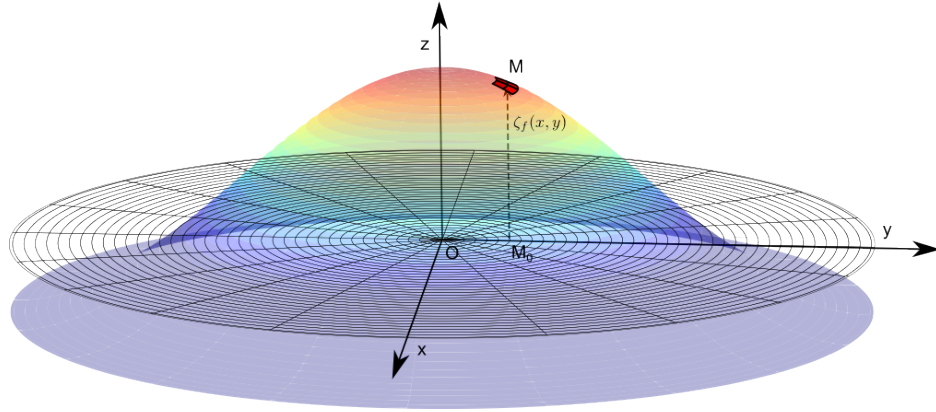


FIGURE 4.42 – Repère cylindrique associé à la membrane et son excursion transverse  $\zeta_f$  selon l'axe ( $0z$ ). L'excursion  $\zeta_f$  au niveau du point  $M$  de coordonnées  $(x, y, \zeta_f)$  situé sur la membrane en mouvement est définie par rapport à la position de référence repérée par le point  $M_0$  de coordonnées  $(x, y, 0)$  sur la surface de la membrane au repos.

Pour une vibration de pulsation  $\omega$ , l'amplitude du déplacement est notée  $\hat{\zeta}_f(r, \theta)$ . Ainsi, on peut réécrire l'équation 4.53 de la manière suivante :

$$\rho e \omega^2 \hat{\zeta} + 2 \gamma \nabla^2 \hat{\zeta} - B_f e^3 \nabla^4 \hat{\zeta} = 0 \quad (4.54)$$

Les solutions d'une équation biharmonique dans une géométrie cylindrique sont les harmoniques cylindriques (cf. annexe A). Les mêmes considérations que dans le cas de la membrane (cf. section 1.3.4) nous conduisent à ne retenir parmi les solutions que la fonction de Bessel de première espèce d'ordre le plus bas  $J_0$ . Ainsi, si on injecte dans l'équation 4.54  $J_0(qr)$  où  $q$  est le nombre d'onde radial (cf. annexe A), on obtient alors après simplification :

$$B_f e^3 q^4 + 2 \gamma q^2 - \rho_s e \omega^2 = 0 \quad (4.55)$$

En résolvant cette équation du second degré en  $q^2$ , on trouve les deux arguments possibles pour le nombre d'onde capillaire  $q$  (sachant que les deux autres solutions sont équivalentes du fait de la parité de  $J_0$ ).

$$\begin{cases} q_J = \sqrt{\frac{\gamma}{B_f e^3} \left[ \sqrt{1 + \frac{B_f}{\gamma^2} \rho_s e^4 \omega^2} - 1 \right]} \\ q_I = i \sqrt{\frac{\gamma}{B_f e^3} \left[ \sqrt{1 + \frac{B_f}{\gamma^2} \rho_s e^4 \omega^2} + 1 \right]} \end{cases} \quad (4.56)$$

L'une de ces deux solutions correspond à un nombre complexe imaginaire pur. En conséquence, il fait apparaître une fonction de Bessel hyperbolique. En faisant tendre le nombre sans dimension  $B_f \rho_s e^4 \omega^2 / \gamma^2$  vers l'infini, le facteur de tension se simplifie et on retrouve les nombres d'onde attendu pour une plaque mince en l'absence de tension (e.g. tension de surface) [6].

### Cas limites de la membrane et de la plaque mince

De l'expression des nombres d'onde 4.56, on déduit que le caractère dominant de la flexion ou de la tension dépend de la fréquence. En choisissant un domaine de fréquence, on peut en déduire à l'aide de paramètres typiques une épaisseur limite  $e_{max}$  au delà de laquelle la contrainte due à la flexion n'est plus négligeable. Les mesures acoustiques effectuées dans cette thèse correspondent à des fréquences d'excitation inférieures à  $f_{max} = \omega_{max}/2\pi = 10 \text{ kHz}$ . Le calcul à cette fréquence permet d'en déduire une borne inférieure de l'épaisseur  $e_{min}$  au-dessus de laquelle la raideur en flexion n'est plus négligeable comparée à la tension :

$$e_{min} = \sqrt[4]{\frac{\gamma^2}{\rho_s \omega_{max}^2 B_f}} \quad (4.57)$$

Avec une tension de surface  $\gamma = 30 \text{ mN.m}^{-1}$ , une masse volumique  $\rho_s = 1.1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et un module de flexion  $B_f = 3 \text{ kPa}$  (i.e.  $G \approx 9 \text{ kPa}$  cf. équation 1.83), on obtient une épaisseur  $e_{min} \approx 15 \text{ }\mu\text{m}$ , ce qui est supérieur à l'épaisseurs de quelques microns mesurée ex situ (cf. section 2.3.1). Nous en déduisons que l'effet dû à la flexion de la plaque est négligeable dans nos expériences.

Par conséquent, nous pouvons négliger le terme de flexion de l'équation 4.53 et l'équation biharmonique devient simplement harmonique de sorte qu'il n'y a plus qu'une solution indépendante qui correspond au nombre d'onde  $q = q_J$ . Un développement limité permet de trouver l'expression de  $q$  :

$$q = \sqrt{\frac{\rho e}{2 \gamma}} \omega \quad (4.58)$$

La résonance fondamentale en l'absence de charge (d'impédance  $z_e$ ) se déduit du premier zéro de  $J_0(R_f q)$ , ce qui donne une fréquence  $f \cong 14 \text{ kHz}$  pour une tension de surface  $\gamma = 30 \text{ mN/m}$ , une masse volumique  $\rho = 1.1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , une épaisseur  $e = 1 \text{ }\mu\text{m}$  et un rayon de film  $R_f = 0.2 \text{ mm}$  (soit 2/3 du rayon des bulles de diamètre  $d = 0.6 \text{ mm}$ ). Bien que cette fréquence soit en dehors du domaine fréquentiel sondé, même en l'absence de charge, elle n'en est pas loin. De plus, nous avons choisi le cas le plus défavorable de diamètre de bulle le plus petit. Par ailleurs, les films dans la mousse sont en réalité soumis à des charges. Leur impact est développé dans le paragraphe qui suit.

### Réponse fréquentielle de la membrane

Afin d'évaluer la réponse des films à l'aide des paramètres estimés, nous reprenons l'analyse de la section 1.3.4 qui traite la membrane en régime forcé. La figure 4.43

présente la réponse de la fonction de transfert des films modélisés comme des membranes  $H(\omega) = 2\gamma\langle\zeta\rangle/R_f^2\delta\hat{p}$  en fonction de la fréquence évalué en utilisant l'équation 1.89 avec  $z_e$  le paramètre d'impédance du milieu environnant. La figure 4.43 constitue une réplique dimensionnée de la figure 1.12, présentant trois cas d'impédance  $z_e$  distincts. Pour une épaisseur  $e = 1 \mu m$  et les paramètres considérés ci-dessus, la résonance en l'absence de charge se situe, comme indiqué précédemment, autour de  $14 kHz$ . Néanmoins, les données expérimentales suggèrent une fréquence de résonance plus basse que celle qui est obtenue par le modèle simplifié sans charge de l'équation 4.58. Une fréquence de résonance compatible avec ces résultats est obtenue si l'on fait correspondre  $z_e$  à une impédance de type masse (surfactive) égale à celle de la matrice solide. Les membranes vibrent comme si elles étaient chargées par une masse comparable à celle des vertex et bordures de Plateau. La résonance obtenue en considérant cette charge est située à une fréquence d'environ  $1.5 kHz$ .

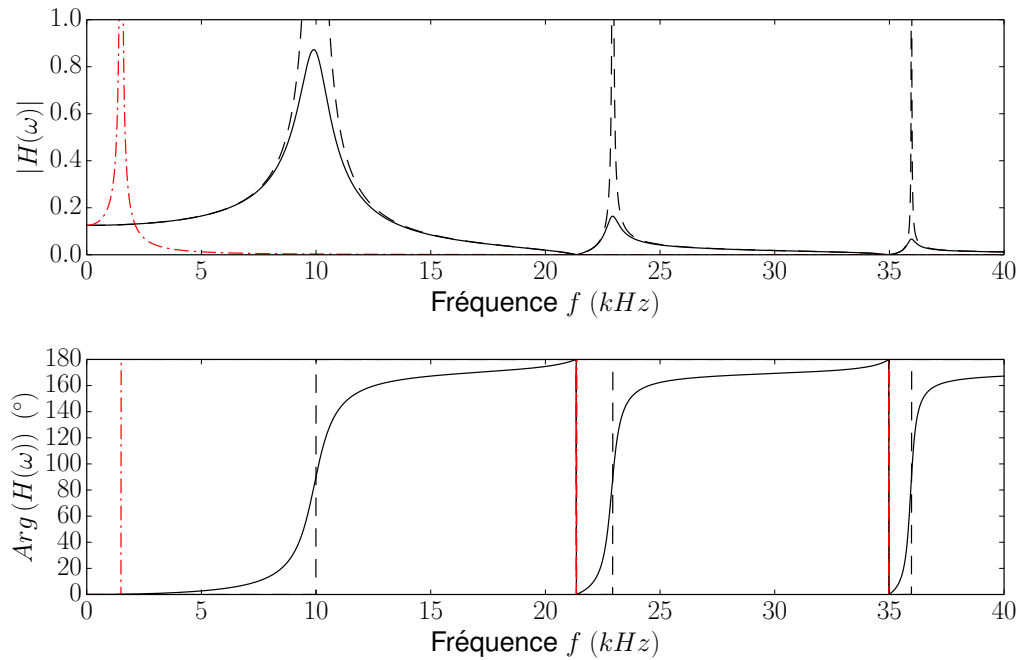


FIGURE 4.43 – Fonction de transfert du déplacement de la membrane en fonction de la fréquence pour différentes impédances du milieu  $z_e$  (cf. équation 1.89). (---) Impédance nulle  $z_e = 0$ ; (-·-·-) Réactance due à une masse égale à celle des bords de Plateau  $z_e = i(1 - \phi_g)\rho_s d\omega$ ; (—) Pure résistance  $z_e = \rho\omega/5$ . Le calcul est effectué en utilisant l'équation 1.89 en considérant une tension de surface  $\gamma = 30 mN/m$ , une masse volumique  $\rho = 1.1 \cdot 10^3 kg.m^{-3}$ , une fraction volumique  $\phi_g = 0.8$ , une épaisseur  $e = 1 \mu m$ , un diamètre de bulle  $d = 0.6 mm$  et un rayon de film  $R_f = 0.2 mm$ .

Ainsi, une charge importante telle que celle due à la masse des bords de Plateau abaisse la fréquence de résonance de manière considérable (cf. figure 4.43). Une étude de l'équation 1.89 (e.g. en prenant sa limite asymptotiques basse fréquence) permet de mettre en évidence la robustesse de la valeur de la fréquence de résonance à des

variations de l'épaisseur des films  $e$ . En effet, l'épaisseur influe principalement sur la masse des films, qui est négligeable comparée à la masse de la matrice solide. Par contre, la fréquence de résonance est très sensible aux dimensions des films : son rayon  $R_f$  détermine directement la longueur d'onde naturelle (i.e. de résonance) du film.

On constate sur la figure 4.43 que contrairement aux cas d'absence de charge et de faible charge résistive, l'amplitude des déplacements après la résonance fondamentale est proche de zéro. La phase notée  $Arg(H(\omega))$  permet de constater le passage à résonance d'une vibration en phase ( $0^\circ$ ) à une vibration en opposition de phase ( $180^\circ$ ). Ainsi si l'on envisage la réponse de films associés à la masse de la matrice solide de la mousse, cette étude illustre un premier régime d'oscillations en phase et un second d'oscillations en opposition de phase des films et de la matrice solide, séparés par la résonance fondamentale du système. Ainsi, considérant par ailleurs la continuité du déplacement entre les films et le gaz, cette étude prédit la validité du modèle de Wood jusqu'à une certaine fréquence de résonance, dont l'ordre de grandeur est compatible avec les résultats expérimentaux réunis sur la figure 4.31.

Ce modèle fictif (cf. figure 4.43) manque de réalisme car la masse des bordures de Plateau et des vertex n'est pas concentrée sur les films. Dans le paragraphe qui suit (cf. section 4.6.3), nous couplons les vibrations de la membrane à celles de l'air en nous plaçant dans le cadre du modèle de Biot.

### 4.6.3 Interprétation dans le cadre de la théorie de Biot

#### Considérations générales

La théorie de Biot décrit la propagation d'une onde de vibration dans un milieu poreux. Comme rappelé dans la section 1.3.3, un milieu poreux est un milieu diphasique où les deux phases s'interpénètrent et percolent au travers de l'échantillon. Bien que cela soit vrai des mousses solides à cellules ouvertes, ce n'est pas le cas des mousses solides à cellules fermées qui constituent nos échantillons de mousse gélifiée. En effet, la phase gazeuse est interrompue de minces films de savon gélifiés. Le gaz ne percole pas au travers de l'échantillon de mousse solide dont les cellules sont fermées par des films, contrairement au réseau de la phase gel. Le cadre d'étude de la théorie de Biot peut paraître inadapté aux mousses solides à cellules fermées.

Néanmoins, la question de savoir si le cas des cellules fermées peut se déduire comme un cas limite des cellules ouvertes reste pertinente. En effet, la théorie de Biot considère différents niveaux de couplage qui ont encore lieu d'être pour les mousses à cellules

fermées. Les travaux récents sur les mousses solides (cf. section 4.1.3) dans le cas intermédiaire des mousses avec une certaine proportion de cellules fermées ont été envisagées [30, 22]. La loi d'échelle obtenue pointe une tortuosité accrue. Cela se comprend si l'on considère le fait qu'il est de plus en plus difficile pour le gaz de trouver un chemin qui joigne les deux extrémités de l'échantillon. Dès lors qu'il n'existe plus un tel chemin, l'échantillon est infiniment tortueux. Dans le cas des milieux poreux, une tortuosité dynamique importante reflète le fort couplage visqueux dans la limite basse fréquence où l'épaisseur de peau dépasse la taille des pores. Dans le cas de mousses avec une fraction intermédiaire de cellules fermées, la plus grande sinuosité de l'écoulement du gaz augmente la valeur de la tortuosité classique. Dans le cas d'une mousse dont toutes les cellules sont fermées, il est délicat de parler de sinuosité de l'écoulement. Comment rendre compte du couplage à l'œuvre, qui se cache derrière les valeurs extrémales de tortuosité ?

Johnson et al. font remarquer que, dans cette limite d'infinie tortuosité, on retrouve la formule de Wood sur la célérité (cf. équation 1.39) [33]. Ceci est cohérent car Wood suppose un mouvement en bloque de l'ensemble du matériau, c'est-à-dire un très bon couplage inertiel entre le gaz et le solide, ce qui correspond formellement à une tortuosité infinie. Cette tortuosité est infinie dans la limite quasi-statique du fait de la présence des films tendus. Ils obligent le gaz à entraîner la matrice solide lors de sa mise en écoulement. Mais dès lors que la fréquence est suffisamment élevée pour que l'inertie mette en mouvement les films, la question se pose de savoir ce que devient la tortuosité dynamique et le couplage dont elle rend compte.

### Dynamique des films et relation de dispersion

Reprenons les équations 1.63 et 1.64 de la dynamique couplées du gaz et de la matrice solide dans le cas d'un milieu poreux. Une autre façon de rendre compte de la présence des membranes consiste à les modéliser explicitement dans la théorie de Biot en y introduisant des termes de force volumique  $\vec{f}_{f \rightarrow s}$  et  $\vec{f}_{f \rightarrow g}$ . Ils expriment les forces exercées par les films respectivement sur la matrice solide et sur le gaz :

$$(\rho_{s*} - \rho_{f*}) \partial_t^2 \vec{u}_s = (L_{s*}^* - G_*) \nabla \nabla \cdot \vec{u}_s + Q \nabla \nabla \cdot \vec{u}_g + G_* \nabla^2 \vec{u}_s + \rho_{sg*} \partial_t^2 (\vec{u}_s - \vec{u}_g) - \eta^* \partial_t (\vec{u}_s - \vec{u}_g) + \vec{f}_{f \rightarrow s} \quad (4.59)$$

$$\rho_{g*} \partial_t^2 \vec{u}_g = B_{g*}^* \nabla \nabla \cdot \vec{u}_g + Q \nabla \nabla \cdot \vec{u}_s + \rho_{sg*} \partial_t^2 (\vec{u}_g - \vec{u}_s) - \eta^* \partial_t (\vec{u}_g - \vec{u}_s) + \vec{f}_{f \rightarrow g} \quad (4.60)$$

où  $\rho_{f*}$  est la masse effective (i.e. prenant en compte la fraction volumique) par unité de volume des films. Elle est soustraite à la masse volumique effective du solide  $\rho_s$ , car les deux systèmes considérés représentés par ces deux équations sont respectivement le gaz et la matrice solide sans les films. En d'autres termes, les films sont considérés comme un système extérieur, ce qui permet de prendre en compte l'influence de leur dynamique exclusivement dans les termes de forces  $\vec{f}_{f \rightarrow s}$  et  $\vec{f}_{f \rightarrow g}$ . Afin d'évaluer les termes de forces entre les films et respectivement la matrice solide et le gaz, il faut résoudre la dynamique des films en considérant la traction exercée par la matrice solide et une force de pression exercé par le gaz. Sous l'hypothèse que le champ de déplacement moyen des films est égal au champ de déplacement moyen du gaz, on obtient après calcul (cf. annexe C) les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \vec{f}_{f \rightarrow s} = -\mu^*(\omega) (\vec{u}_s - \vec{u}_g) & (4.61a) \\ \vec{f}_{f \rightarrow g} = -\rho_{f*} \partial_t^2 \vec{u}_g - \mu^*(\omega) (\vec{u}_g - \vec{u}_s) & (4.61b) \end{cases}$$

où  $\mu^*$  correspond au couplage élastique dû à la force de rappel des films, tandis que  $\rho_{f*}$  correspond à la masse volumique effective des films. Leurs expressions respectives s'écrivent :

$$\mu^*(\omega) = \frac{2}{R_f q} \frac{J_1(R_f q)}{J_2(R_f q)} \rho_{f*} \omega^2 \quad (4.62)$$

$$\rho_{f*} = \alpha_\infty \frac{e\pi R_f^2}{a^3} \rho_s \quad (4.63)$$

En substituant l'expression des forces volumiques dus aux films dans les équations 4.59 et 4.60, on obtient un système d'équations de la dynamique couplée du gaz et de la matrice solide, enrichi d'un nouveau terme de couplage élastique  $\mu^*$  qui n'existe pas dans le cas d'un milieu poreux :

$$\begin{aligned} (\rho_{s*} - \rho_{f*}) \partial_t^2 \vec{u}_s &= (L_{s*}^* - G_{s*}) \nabla \nabla \cdot \vec{u}_s + Q \nabla \nabla \cdot \vec{u}_g + G_{s*} \nabla^2 \vec{u}_s \\ &+ \rho_{sg*} \partial_t^2 (\vec{u}_s - \vec{u}_g) - \eta^* \partial_t (\vec{u}_s - \vec{u}_g) - \mu^* (\vec{u}_s - \vec{u}_g) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} (\rho_{g*} + \rho_{f*}) \partial_t^2 \vec{u}_g &= B_{g*}^* \nabla \nabla \cdot \vec{u}_g + Q \nabla \nabla \cdot \vec{u}_s \\ &+ \rho_{sg*} \partial_t^2 (\vec{u}_g - \vec{u}_s) - \eta^* \partial_t (\vec{u}_g - \vec{u}_s) - \mu^* (\vec{u}_g - \vec{u}_s) \end{aligned} \quad (4.65)$$

où  $\rho_{sg*}$  a la dimension d'une masse volumique et représente le couplage inertiel,  $\eta^*$  a la dimension d'un coefficient d'amortissement par unité de volume et représente le couplage visqueux (cf. équation 1.65) et  $\mu^*$  a la dimension d'une raideur par unité de volume et représente le couplage élastique due aux films (cf. équation 4.62). Ce dernier terme distingue le système d'équations 4.64 et 4.65 de celui présenté dans la section 1.3.3, dans le cadre de la théorie de Biot (cf. équations 1.63 et 1.64). Cette écriture du



système des équations de la dynamique couplées met en évidence les différents niveaux de couplage. Les constantes de couplage visqueux  $\eta^*$  et élastique  $\mu^*$  varient avec la fréquence. Leur expression découle de la détermination du profil d'écoulement du gaz au travers de la matrice solide au passage de l'onde acoustique. Le terme élastique ajouté proportionnel à  $\mu^*$  correspond à la prise en compte de l'interaction de l'onde avec les films (cf. annexe C). En toute rigueur, la résolution du profil d'écoulement fait intervenir de manière combinée la viscosité, les transferts thermiques, la force de rappel élastique liée à la tension des films ainsi que le transfert de quantité de mouvement du gaz au solide exprimé ici par le paramètre  $\rho_{sg*}$ . En première approximation, ces effets ont été considérés indépendamment les uns des autres (cf. section 1.3.3). On cherche des solutions des équations 4.64 et 4.65 sous forme d'ondes planes de compression représentées par les potentiels scalaires  $\varphi_g$  et  $\varphi_s$ , tels que :

$$\begin{cases} \vec{u}_g = \nabla \varphi_g & \text{avec } \varphi_g = \hat{\varphi}_g e^{i(\omega t - kz)} \\ \vec{u}_s = \nabla \varphi_s & \text{avec } \varphi_s = \hat{\varphi}_s e^{i(\omega t - kz)} \end{cases} \quad (4.66a)$$

$$(4.66b)$$

En substituant les expressions des champs de vitesse en fonction de leur potentiel scalaire respectif dans le système d'équations couplées 4.64 et 4.65, on obtient, en utilisant les relations de commutation sur l'opérateur  $\nabla$  :

$$\nabla \{[(\rho_{s*} - \rho_{f*} - \rho_{sg*}) \omega^2 - L_{s*}^* k^2] \hat{\varphi}_s + [\rho_{sg*} \omega^2 - Q k^2] \hat{\varphi}_g - \kappa^* (\hat{\varphi}_s - \hat{\varphi}_g)\} = 0 \quad (4.67)$$

$$\nabla \{[(\rho_{g*} + \rho_{f*} - \rho_{sg*}) \omega^2 - B_{g*}^* k^2] \hat{\varphi}_g + [\rho_{sg*} \omega^2 - Q k^2] \hat{\varphi}_s - \kappa^* (\hat{\varphi}_g - \hat{\varphi}_s)\} = 0 \quad (4.68)$$

où on choisit de définir les potentiels scalaires de manière à annuler les expressions dans le gradient  $\nabla$ . Afin de condenser l'écriture, les couplages élastiques et visqueux sont pris en compte par une fonction  $\kappa^*(\omega)$  :

$$\kappa^*(\omega) = \mu^*(\omega) + i\omega \eta^*(\omega) \quad (4.69)$$

Finalement, la relation de dispersion peut s'écrire sous une forme qui est analogue à l'équation 1.67, qui décrit la relation de dispersion pour les milieux poreux :

$$\begin{aligned} & ((\rho_{s*} - \rho_{f*} - \rho_{sg*}) \omega^2 - L_{s*}^* k^2 - \kappa^*) ((\rho_{g*} + \rho_{f*} - \rho_{sg*}) \omega^2 - B_{g*}^* k^2 - \kappa^*) \\ &= (\rho_{sg*} \omega^2 - Q k^2 + \kappa^*)^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Une fois de plus, il s'agit d'une équation biquadratique en le nombre d'onde  $k$ . Par conséquent, on s'attend à deux solutions distinctes. La figure 4.44 représente la relation de dispersion qui correspond à l'équation 4.70 pour des paramètres proches de ceux de

nos expériences. Seule un diamètre de bulles ( $d = 1.8 \text{ mm}$ ) est représenté à des fins de lisibilité. Néanmoins, si on applique un facteur d'échelle sur la fréquence et le nombre d'onde, les résultats de prédictions obtenues pour d'autres tailles de bulles deviennent comparables. La superposition des relations de dispersion mises à l'échelle en appliquant le facteur  $d^{3/2}$  est rendue imparfaite par la prise en compte des mécanismes dissipatifs. De manière remarquable, il s'agit du facteur proposé dans la référence [23] appliqué à la relation de dispersion des ondes longitudinales dans les mousses liquides (cf. figure 4.6). La principale différence entre le présent modèle et celui proposé par Pierre et al. dans la référence [23] vient de la prise en compte de l'élasticité de la matrice solide/liquide et donc de la propagation par la matrice.

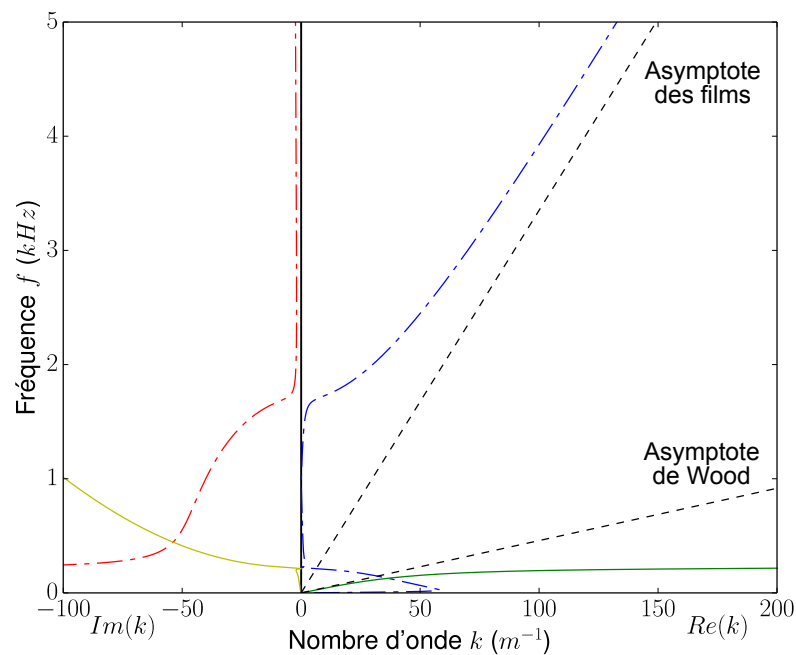


FIGURE 4.44 – Relation de dispersion (cf. équation 4.70) pour une mousse solide à cellules fermées de matrice constituée d'un matériau mou. Le module de cisaillement effectif de la matrice vaut  $G_* = 500 \text{ Pa}$  (pour une mousse à cellules fermées de faible fraction de solide contenue dans les films, cela correspond à  $G_s = 11 \text{ kPa}$  d'après l'équation 1.23) et de coefficient de Poisson effectif de la matrice  $\nu_* = 1/3$ . La pression du gaz vaut  $P_0 = 1 \text{ atm}$  et la viscosité  $\eta = 18.6 \mu\text{Pa.s}$ . Les masses volumiques valent  $\rho_g = 2.4 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_s = 1.1 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . Les films sont de rayon  $R_f = 2/3 R_b$  avec un rayon des bulles  $R_b = 0.9 \text{ mm}$ . L'effet de la tortuosité classique n'est pas considéré  $\alpha_\infty = 1$ . La fraction volumique de gaz vaut  $\phi_g = 0.8$ , le diamètre des bulles, la constante adiabatique  $\gamma_a = 1.4$  et le nombre de Prandtl  $N_{Pl} = 0.71$ .  $Re(k)$  et  $Im(k)$  pour l'onde longitudinale portée par l'air sont représentés respectivement en bleu et en rouge (dash-dot).  $Re(k)$  et  $Im(k)$  pour l'onde longitudinale portée par la matrice sont représentés respectivement en vert et en jaune (—). Les droites en pointillés noirs (---) représentent la vitesse de phase de Wood (cf. équation 1.39) dans la limite adiabatique et la vitesse de phase d'une onde associant compressibilité adiabatique du gaz avec la masse effective du gaz et des films (cf. équation 4.71).

Les deux branches de la solution correspondent à trois régimes distincts. Dans un premier régime fréquentiel ( $0 \text{ Hz} \leq f \leq 250 \text{ Hz}$ ), malgré une partie réelle du nombre

d'onde non nulle, l'onde portée par le gaz est quasi-évanescence (i.e. l'atténuation associée est très élevée). L'onde portée par la matrice est quant à elle faiblement atténuée et suit le modèle de Wood, jusqu'à une certaine fréquence caractéristique où les films résonnent en association avec la matrice solide. Au delà, la vitesse de phase du mode devient très faible et l'atténuation très importante. Ces caractéristiques rappellent celles de l'onde lente<sup>8</sup> dans la théorie de Biot classique, pour laquelle la matrice solide et le gaz vibrent en opposition de phase. Dans un deuxième régime ( $250 \text{ Hz} \leq f \leq 1.5 \text{ kHz}$ ), dans la gamme de nombres d'onde envisagée, il ne reste plus que l'onde portée par le gaz dont la partie réelle reste négligeable devant la partie imaginaire. Le régime serait évanescence en l'absence de mécanismes dissipatifs. Dans un troisième régime ( $1.5 \text{ kHz} \leq f \leq 5 \text{ kHz}$ ), l'atténuation diminue fortement, une branche propagative démarre au niveau d'une (pseudo) fréquence de résonance. La vitesse de phase est considérablement plus élevée que celle de Wood. Elle correspond asymptotiquement à une vitesse associant la masse du gaz et des films à la compressibilité adiabatique du gaz :

$$c_{L^*}^2 = \frac{\gamma_a \phi_g P_0}{\rho_{g^*} + \rho_{f^*}} \quad (4.71)$$

Bien que la matrice solide et le gaz vibrent en phase dans le régime haute fréquence de l'onde portée par le gaz, la masse de la matrice solide n'intervient pas dans l'équation 4.71 de l'asymptote. Plus la fréquence est élevée, moins la raideur des films ne résiste à l'inertie du gaz. Il est alors possible d'avoir une amplitude relative des déplacements des films et du gaz importante par rapport à celle des déplacements du reste de la matrice solide. La masse volumique effective diminue et la célérité atteinte dépasse celle du modèle de Wood prédite pour une amplitude de déplacements relatifs égale à 1. Dans la limite d'une mousse très sèche, toute la masse de la matrice solide est contenue dans les films. Avec un ratio du déplacement moyen des films sur celui du gaz proche de l'unité, comme l'imposent les cellules fermées, la célérité de Wood devient une limite supérieure. Dans ce cas, la célérité de l'onde rapide après résonance reste égale à la célérité de Wood, conformément aux prédictions de la référence [112].

Les deux régimes rendent compte qualitativement des deux régimes observés expérimentalement. D'un point de vue quantitatif, la résonance des films associée à la charge inertielle de la matrice solide donne une (pseudo) fréquence de coupure du régime de Wood (ou régime

8. Selon la terminologie de la théorie de Biot classique, la déformation des deux milieux est en phase pour l'onde rapide et en opposition de phase pour l'onde lente. L'ajout de résonances élastiques donne lieu à un chassé-croisé entre les ondes dites lentes et rapides. En effet, l'onde portée par la matrice déforme en phase les deux milieux dans le régime de Wood. En cohérence avec la terminologie classique, Spadoni et al. qualifient cette onde d'onde rapide [112]. Elle devient une onde lente après résonance, où la vibration déphase la déformation dans le solide de  $\pi$  par rapport à la vibration dans le gaz. L'onde portée par le gaz suit le schéma d'évolution opposé. À basse fréquence, gaz et solide vibrent en opposition de phase au passage de l'onde. Il s'ensuit un comportement d'onde lente ou quasi-évanescence. Au contraire de ce qui se produit pour l'onde portée par la matrice, la transition résonante de l'onde portée par le gaz met en phase les déformations du gaz et de la matrice. Il s'agit alors d'une onde rapide.

de Debye, cf. section 4.1.3 ou référence [112]) à 1  $kHz$ , ce qui est en accord avec les observations expérimentales. Par contre, l'asymptote à haute fréquence de la figure 4.44 correspond à une célérité de  $230 \text{ m.s}^{-1}$  à comparer aux asymptotes des figures 4.28, 4.29 et 4.30 correspondant à une célérité de l'ordre de  $350 \text{ m.s}^{-1}$ . La vitesse de phase observée expérimentalement pour l'onde rapide est ainsi environ 50 % plus rapide que celle prédite. Par ailleurs, l'onde rapide est observable bien avant la (pseudo) fréquence de coupure qui correspond à la résonance de la colonne de gaz entraînée par les films. La dissipation liée à la flexion des films, ainsi que la configuration de guide d'onde cylindrique constituent deux pistes à envisager afin de parvenir à une compréhension plus quantitative des phénomènes. En effet, une source de dissipation supplémentaire et le fait que les conditions aux limites du tube tendent à coupler déformations longitudinales et transverses pourraient expliquer à la fois l'observation du mode rapide à plus basse fréquences qu'attendu ainsi que la vitesse de phase plus élevée qu'attendu.

# Conclusion

L'objectif de cette thèse est de caractériser et comprendre la propagation d'ondes acoustiques dans les mousses solides. Les mousses à cellules ouvertes sont similaires aux milieux poreux ; elles ont été largement étudiées expérimentalement et modélisées par la théorie de Biot et ses développements récents. Dans les mousses à cellules fermées, les films qui séparent les bulles voisines introduisent un couplage entre le gaz et la matrice solide qui peut modifier fortement la relation de dispersion. Un tel effet a été mis en évidence dans les mousses liquides, mais leur désordre et leur instabilité rendent une modélisation quantitative difficile. Nous avons élaboré des mousses solides modèles, stables et d'une structure ordonnée bien caractérisée, en solidifiant des mousses de gélatine initialement liquides, obtenues par un dispositif microfluidique. Pour sonder les différents modes de propagation acoustique dans ces échantillons de petit volume, nous avons développé une nouvelle technique expérimentale, la spectroscopie acoustique de visibilité speckle (LSVAS). Elle consiste à éclairer un échantillon turbide par de la lumière cohérente, et à déduire des fluctuations temporelles de l'intensité rétrodiffusée la déformation locale produite par la propagation d'une onde acoustique à proximité de la surface. Cette technique donne une mesure directe de la phase et l'amplitude d'une onde acoustique qui se propage parallèlement à la surface en fonction de la position et du temps. Nous avons validé la technique en mesurant la célérité et la longueur d'atténuation de mousses liquides dont les propriétés viscoélastiques sont connues par ailleurs. La spectroscopie LSVAS peut être appliquée à d'autres milieux turbides qui n'absorbent pas ou peu la lumière pour détecter la propagation d'ondes acoustiques de polarisation quelconque, ou qui se propagent par diffusion multiple dans un milieu désordonné. Par exemple, des ondes de cisaillement peuvent être suivies par cette méthode, ce qui pourrait être utile pour réaliser des observations d'élastographie, une technique de diagnostic médical qui détecte des tissus cancéreux grâce à leurs élasticité anormale comparée à celles des tissus sains. Dans le contexte de la recherche fondamentale, la méthode LSVAS présente l'avantage de mesurer directement la relation de dispersion, plutôt qu'une vitesse de phase ou une vitesse de groupe. Nous avons appliqué la technique LSVAS aux mousses gélifiées, d'abord dans un régime de fréquences assez basses pour que la longueur

d'onde soit supérieure à la taille des bulles et en dessous de la fréquence de résonance attendue des films. En confinant les échantillons dans un tube rigide (nécessaire pour les protéger contre l'évaporation du liquide contenu dans le gel), nous avons observé un mode guidé qui associe un cisaillement et une compression longitudinale. Notre analyse de ce mode dans le cadre de la mécanique des milieux continus montre que la relation de dispersion est fortement non linéaire et qu'elle présente une évolution en fonction de la fréquence qui est en alternance déterminée par la vitesse longitudinale et par la vitesse transverse. Ceci nous a permis d'extraire d'une seule mesure ces deux vitesses pour une même mousse. Les vitesses longitudinales mesurées pour plusieurs tailles de bulle et fractions volumiques de gaz sont en accord avec les prédictions du modèle semi-empirique de Wood. Dans ce régime basse fréquence, la mousse se comporte comme un milieu dont la compressibilité est dominée par celle de l'air, et dont la densité est dominée par celle de la matrice solide. Par conséquent, le son se propage beaucoup plus lentement que dans l'air. Nous avons justifié le modèle de Wood dans le contexte des mousses gélifiées en le dérivant d'un modèle de Biot modifié, dans lequel nous avons explicitement pris en compte le couplage via les films entre l'air et la matrice solide. Dans la littérature, le cas des mousses avec cellules fermées a été représenté formellement par un paramètre empirique de tortuosité infinie. Les variations de la vitesse de cisaillement avec la fraction volumique de gaz que nous observons sont en accord quantitatif avec la loi empirique proposée par Ashby et Gibson, ainsi qu'avec des simulations numériques de mousses ordonnées récemment publiées dans la littérature. Le coefficient de Poisson des mousses gélifiées est très proche de 0.5. Il s'agit donc de milieux mous qui résistent beaucoup plus à une compression qu'à un cisaillement, et ceci les distingue par exemple des mousses métalliques.

Aux fréquences supérieures à quelques centaines de Hertz, le mode lent que nous venons de discuter n'est plus observé. A ces fréquences, la longueur d'onde transverse se rapproche de la taille des bulles ce qui peut expliquer une forte diffusion de l'onde acoustique. Par contre, nous observons un mode rapide, avec une vitesse comparable à celle du son dans l'air. Ce mode est attendu au-delà d'une fréquence caractéristique due à la résonance des films, si la matrice solide (c'est-à-dire les bordures de Plateau et les vertex) reste au repos, tandis que les films et le gaz sont en mouvement. Ce résultat est cohérent avec les observations précédentes sur les mousses liquides par Pierre et al. Nous montrons comment ce régime haute fréquence peut être décrit dans le cadre du modèle de Biot.

Notre étude de la propagation acoustique dans les mousses soulève des questions fondamentales : la transition entre les modes de propagation rapide et lent des ondes longitudinales devrait se produire au voisinage de la fréquence de résonance des films. Pour prédire cette fréquence, il faut comprendre (i) si un gel solide hérite de la tension

de surface de son précurseur liquide ou non, et (ii) si le confinement du gel dans le film a un impact sur ses propriétés viscoélastiques. L'origine de la dissipation du mode rapide, mal comprise dans le cas des mousses liquides, mériterait également d'être étudiée par de nouvelles expériences. Il se pose enfin la question si les mousses gélifiées peuvent servir de métamatériaux acoustiques. Une telle utilisation demanderait une meilleure maîtrise de l'épaisseur des films et de la structure de l'empilement des bulles, dont l'ordre est perturbé par des dislocations dans nos échantillons. Dans la perspective de fabriquer un métamatériau avec un indice de réfraction acoustique négatif, il serait souhaitable d'accorder les résonances des films avec celles du gaz dans les bulles. Ceci n'est pas envisageable avec des mousses de gel, une matrice solide beaucoup plus rigide et des épaisseurs de film plus grandes que dans nos échantillons actuels seraient nécessaires. L'élaboration de telles mousses ordonnées à partir d'un précurseur liquide est un défi qui demande de nouvelles approches expérimentales.

## Annexe A

# Équation de Helmholtz

L'équation de Helmholtz est le nom de l'équation d'onde écrite dans le domaine fréquentiel. Le domaine fréquentiel correspond à l'espace réciproque associé au domaine temporel par transformée de Fourier. Parler du domaine fréquentiel, par opposition au domaine temporel, est équivalent dans la pratique au fait de considérer un terme de forçage (i.e. une excitation) harmonique à une pulsation  $\omega$ . Cette équation et ses déclinaisons sont omniprésentes en acoustique [125, 77, 24]. Sa résolution dans la géométrie cylindrique pour des conditions aux limites fixes revient à de nombreuses reprises dans le présent manuscrit. Afin d'en alléger le contenu, la résolution est proposée ici.

### Généralités sur l'équation de Helmholtz

La décomposition de Helmholtz de l'équation du mouvement conduit à une équation de Helmholtz scalaire pour un champ scalaire  $\varphi$  et une équation de Helmholtz vectorielle pour un champ vectoriel  $\vec{\psi}$  [24] :

$$\nabla^2 \varphi + k_{\varphi_0}^2 \varphi = 0 \tag{A.1}$$

$$\text{avec } k_{\varphi_0} = \frac{\omega^2}{c_{\varphi}^2} \tag{A.2}$$

$$\nabla^2 \vec{\psi} + k_{\psi_0}^2 \vec{\psi} = 0 \tag{A.3}$$

$$\text{avec } k_{\psi_0} = \frac{\omega^2}{c_{\psi}^2} \tag{A.4}$$



où  $c_\varphi$  et  $c_\psi$  sont respectivement les célérités des ondes du champ scalaire  $\varphi$  et du champ vectoriel  $\vec{\psi}$ . L'équation de Helmholtz est une équation aux valeurs propres associée à l'opérateur hermitien qu'est le laplacien [125]. Ses solutions sont donc les fonctions propres de l'opérateur associées à la valeur propre imposée ( $-k_{\varphi_0}^2$  ou  $-k_{\psi_0}^2$ ). L'équation de Helmholtz est une équation linéaire. Il existe plusieurs familles de solutions harmoniques utilisées selon la symétrie des conditions aux limites du problème.

Dans un repère cartésien de coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , les fonctions harmoniques sont les fonctions sinus et cosinus des trois coordonnées. Dans un repère cylindrique de coordonnée radiale  $r$ , axiale  $z$  et azimutale  $\theta$ , les harmoniques cylindriques sont le produit de fonctions de Bessel de la variable  $r$ , de fonctions sinusoïdales de la variable  $z$  et de la variable  $\theta$ . Dans un repère de coordonnées sphériques de coordonnée radiale  $r$ , de coordonnée zénithale  $\theta$  et de coordonnée azimutale  $\varphi$ , les harmoniques sphériques sont les produits de fonctions de Bessel sphériques de la variable  $r$ , de polynômes de Legendre associés des fonctions sinusoïdales en  $\theta$  et de fonctions sinusoïdales de la variable  $\varphi$ . Dans la suite, nous ne mentionnerons que le cas cylindrique en commençant par une démonstration de la forme des solutions homogènes.

## Résolution scalaire en coordonnées cylindriques

Soit un repère cylindrique de coordonnée radiale  $r$ , axiale  $z$  et azimutale  $\theta$  tel celui de la figure A.1. Afin de résoudre l'équation de Helmholtz scalaire dans la géométrie cylindrique, nous commençons par faire l'hypothèse d'une forme de solution qui vérifie la séparation des variables, soit l'ansatz suivant [24] :

$$\varphi(r, \theta, z) = R(r) \Theta(\theta) Z(z) \quad (\text{A.5})$$

L'opérateur laplacien  $\Delta = \nabla^2$  d'un champ scalaire  $\varphi$  s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) \quad (\text{A.6})$$

L'étape suivante consiste à introduire l'ansatz (A.5) dans l'équation de Helmholtz. Une division de l'équation par la solution permet d'obtenir la forme factorisée suivante :

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + k_0^2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

En isolant le rapport  $Z''/Z$  d'un côté de l'égalité, l'indépendance du second membre de l'égalité en la variable  $z$  permet de déduire qu'il est égal à une constante notée  $-k^2$ . Ainsi, on vérifie que  $Z$  est une fonction sinusoïdale de la variable axiale  $z$ . En multipliant

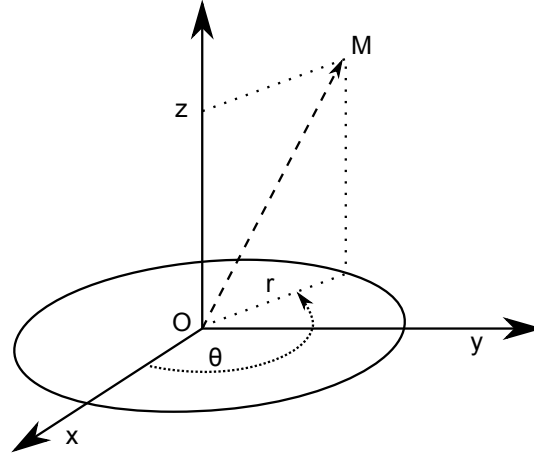


FIGURE A.1 – Système de coordonnées cylindrique.

l'équation A.7 par  $r^2$ , il est possible d'isoler à son tour le rapport  $\Theta''/\Theta$ . De même, le fait que le second membre ne dépend pas de la variable azimutale  $\theta$  permet de déduire que ce rapport est égal à une constante notée  $-n^2$ . L'unicité de la détermination de l'angle (modulo  $2\pi$ ) impose la condition  $n \in \mathbb{N}$ . Soit la notation<sup>1</sup>  $q^2 = k_0^2 - k^2$ , l'équation obtenue après substitution des fonctions  $\Theta$  et  $Z$  s'écrit :

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} + q^2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

En introduisant la notation  $R(r) = F_n(rq)$  où  $F_n$  est une fonction quelconque, cette équation peut être réécrite sous la forme suivante où  $w = rq$  :

$$w^2 \frac{\partial^2 F_n(w)}{\partial w^2} + w \frac{\partial F_n(w)}{\partial w} + (w^2 - n^2) F_n(w) = 0 \quad (\text{A.9})$$

L'équation A.9 est l'équation de Bessel d'ordre  $n$ . Ses solutions sont les fonctions de Bessel de première espèce  $F_n = J_n$  et celles de deuxième espèce  $F_n = Y_n$ . Pour un domaine qui comprend l'origine, seule les fonctions de Bessel de première espèce peuvent décrire des quantités physiques car celles de deuxième espèce divergent à l'origine. Au final, le champ scalaire  $\varphi$  s'écrit donc comme une superposition de fonctions de la forme :

$$\varphi(r, \theta, z) = \sum \varphi_{0_n} J_n(rq) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} \quad (\text{A.10})$$

où les coefficient  $\varphi_{0_n}$  dépendent des conditions initiales et des conditions aux limites. L'ordre circonférentiel  $n$  détermine la variation radiale de la déformation. Pour  $n = 0$ , les solutions sont invariantes en  $\theta$ . Pour  $n \geq 1$ , l'invariance azimuthale est périodique de périodicité  $2\pi/(n + 1)$ . Dans le cadre de cette étude, la symétrie de l'excitation est cylindrique (cf. section 4.3), ce qui nous amène à ne retenir que les solutions d'ordre

1. Afin d'alléger les notations, nous posons temporairement  $k_0 = k_{\varphi_0}$  et  $q_0 = q_{\varphi_0}$ .

circconférentiel le plus bas  $n = 0$  :

$$\varphi(r, z) = \varphi_0 J_0(qr) e^{\pm ikz} \quad (\text{A.11})$$

Lorsque l'on réinjecte cette forme de solution [A.10](#) dans l'équation de Helmholtz scalaire [A.1](#), on obtient la relation de dispersion suivante :

$$k^2 + q^2 = k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{A.12})$$

Cette relation permet d'interpréter  $k$  et  $q$  comme les composantes transverses et longitudinales du nombre d'onde  $k_0$ . Le jeu de composantes  $k$  et  $q$  à considérer dépend des conditions initiales ainsi que des conditions aux limites. Le piston vibrant en contact avec l'échantillon excite un spectre continu de nombres d'onde  $k_0$  qui se répartit entre les composantes  $k$  et  $q$  mais les conditions aux limites sélectionnent un nombre discret de modes propres. Cela se traduit par une discrétisation des nombres d'onde transverses  $q_n$  (et éventuellement longitudinaux  $k_n$ ) qui caractérisent l'onde qui se propage dans l'échantillon.

La vibration d'une membrane est décrite par des équations similaires à celles que nous venons de présenter. Dans ce cas, le nombre d'onde longitudinal se réduit à zéro  $k = 0$ , et les solutions homogènes correspondent à une superposition discrète de tous les nombres d'onde transverses  $q_n$  qui vérifient les conditions aux limites.

## Résolution vectorielle en coordonnées cylindriques

Soit un repère cylindrique de coordonnée radiale  $r$ , axiale  $z$  et azimutale  $\theta$  tel celui de la figure [A.1](#). L'équation de Helmholtz vectorielle dans la géométrie cylindrique conduit au système d'équations suivant <sup>2</sup> [77] :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_z + k_0^2 \psi_z = 0 & (\text{A.13}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + k_0^2 \psi_r = 0 & (\text{A.14}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + k_0^2 \psi_\theta = 0 & (\text{A.15}) \end{cases}$$

Dans ce système de coordonnées, l'équation de Helmholtz vectorielle fait apparaître une équation de Helmholtz scalaire en  $\psi_z$  ([A.13](#)), comme dans un système de coordonnées cartésiennes. Les solutions pour la composante  $\psi_z$  peuvent être obtenues indépendamment du reste des composantes et seront de la même forme que dans le cas scalaire  $\varphi$ . En revanche, les équations [A.14](#) et [A.15](#) sont couplées. Afin d'assurer

2. Afin d'alléger les notations, nous posons temporairement  $k_0 = k_{\psi_0}$  et  $q_0 = q_{\psi_0}$ .

la cohérence avec la composante  $\psi_z$ , il est naturel de penser que les solutions auront le même ordre circonférentiel  $n$  et le même nombre d'onde longitudinal  $k$  que la composante  $\psi_z$  de sorte que :

$$\psi_r = R_r(r) \begin{Bmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} \quad (\text{A.16})$$

$$\psi_\theta = R_\theta(r) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} \quad (\text{A.17})$$

où  $\psi_r$  et  $\psi_\theta$  doivent être de parité opposée en  $\theta$  afin de faire apparaître deux équations découplées. Sans perte de généralité, on peut commencer par considérer le premier cas de parité. Les équations s'obtiennent en posant  $R_+ = R_r + R_\theta$  et  $R_- = R_r - R_\theta$  et en écrivant les équations obtenues par somme et par différence des équations A.14 et A.15 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_+}{\partial r} \right) - \frac{R_+}{r^2} - \frac{2n}{r^2} R_+ + k_0^2 R_+ = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_-}{\partial r} \right) - \frac{R_-}{r^2} + \frac{2n}{r^2} R_- + k_0^2 R_- = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_+}{\partial r} \right) - \frac{R_+}{r^2} - \frac{2n}{r^2} R_+ + k_0^2 R_+ = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_-}{\partial r} \right) - \frac{R_-}{r^2} + \frac{2n}{r^2} R_- + k_0^2 R_- = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

En développant les deux équations et en les mettant au même dénominateur, on s'aperçoit que l'on a affaire à deux équations de Bessel d'ordres respectifs  $n - 1$  et  $n + 1$  de sorte que  $R_+$  et  $R_-$  sont respectivement les fonctions de Bessel de première espèce  $J_{n-1}$  et  $J_{n+1}$  dans le domaine intérieur du cylindre. L'utilisation de la condition de jauge permet d'éliminer l'une des deux solutions. Dans la suite, nous ferons le choix de  $R_+ = D J_{n-1} = 0$  de sorte que  $R_\theta = -R_r$ .

## Ondes guidées en géométrie cylindriques

Dans un guide d'onde cylindrique de section circulaire constitué d'un solide élastique homogène et isotrope, les solutions sont propagatives selon l'axe du cylindre. La résolution des cas scalaires et vectoriels de l'équation de Helmholtz nous permettent d'écrire les solutions générales propagatives dans le sens des  $z$  croissants dans le domaine temporel

[77] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = A J_n(rq_\varphi) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \end{array} \right. \quad (\text{A.20a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_z = B J_n(rq_\psi) \begin{Bmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \end{array} \right. \quad (\text{A.20b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_r = C J_{n+1}(rq_\psi) \begin{Bmatrix} \sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \end{array} \right. \quad (\text{A.20c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_\theta = -C J_{n+1}(rq_\psi) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \end{array} \right. \quad (\text{A.20d})$$

Les projections des nombres d'onde de polarisation respectivement transverse et longitudinale vérifient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 + q_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.21a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k^2 + q_\psi^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} \end{array} \right. \quad (\text{A.21b})$$

où  $k$  la projection longitudinale pour les deux polarisations doit être égale afin d'assurer une conversion de mode qui interfère constructivement. Le déplacement se déduit ensuite du développement composante par composante de la décomposition de Helmholtz (cf. équation 1.24) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{A.22a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \end{array} \right. \quad (\text{A.22b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad (\text{A.22c})$$

Les contraintes peuvent être déduites à leur tour de la loi de Hooke (cf. équation 1.4).

## Annexe B

# Modèles masses-ressorts

Afin de permettre au lecteur de se faire une intuition sur les métamatériaux et plus particulièrement sur le système mousse gélifiée cristalline, un certain nombre de modèles masses-ressorts seront exposés dans cette annexe. Ils permettent de modéliser la propagation d'une onde plane dans un solide cristallin, que la maille cristalline soit à l'échelle d'un atome ou d'une bulle. En partant de ces modèles, on peut ensuite soit passer à la limite continue, soit chercher les solutions périodiques de type ondes de Bloch. Afin de bien souligner la différence entre une diffraction due à une résonance de type métamatériau et une résonance phononique due à la périodicité du réseau (e.g. diffraction de Bragg), nous chercherons ici exceptionnellement les solutions périodiques.

### Réseau cristallin monoatomique

Le premier modèle est un grand classique de la physique des solides. Il s'agit du réseau cristallin monoatomique unidimensionnel [78]. On le modélise par une séquence de masses  $m_0$  et de ressorts de raideur  $k_0$  (Fig. B.1).

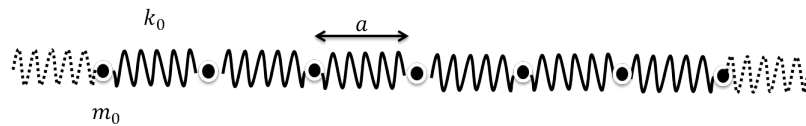


FIGURE B.1 – Schéma masse-ressort du réseau cristallin monoatomique.

$$m_0 \ddot{u}_n = -k_0 (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) \quad (\text{B.1})$$

Les solutions pour ce système sont des solutions qui possèdent la périodicité réciproque de celle du réseau et sont appelées ondes de Bloch. Lorsque la condition de résonance

du réseau, qui correspond à la condition de Bragg, est remplie, cette onde correspond à une onde stationnaire de vitesse de groupe nulle. Aucune énergie n'est transportée par le système. Au-delà de la fréquence de résonance, la propagation est interdite. Les ondes qui existent dans le système sont évanescentes. Une façon simple de l'expliquer consiste à dire qu'un ressort ne peut pas être étiré et comprimé à la fois, ce qui devrait être le cas pour une fréquence d'excitation plus rapide qui correspondrait à une longueur d'onde  $\lambda$  véritablement plus petite que la maille du réseau. Au lieu de cela, lorsque la demi-longueur d'onde de l'excitation est plus petite que la taille de la maille  $a$ , l'excitation se projette par périodicité réciproque de l'onde solution. La dispersion de cette onde peut être repliée dans la première zone de Brillouin.

$$m_0 \omega^2 - 4k_0 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

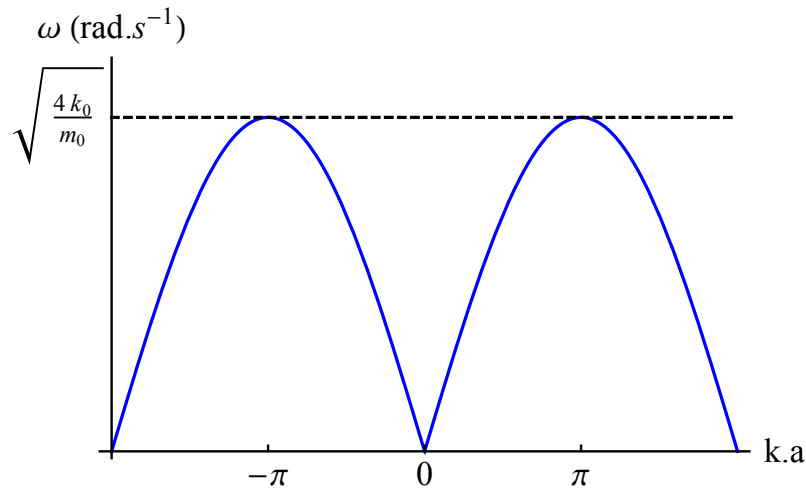


FIGURE B.2 – Relation de dispersion du réseau cristallin monoatomique.

## Réseau cristallin diatomique

Le deuxième modèle non moins classique est le réseau biatomique [78]. On le modélise par une séquence alternée de masses  $m_1$  et  $m_2$  avec des ressorts de raideur  $k_0$  intercalés (Fig. B.3).

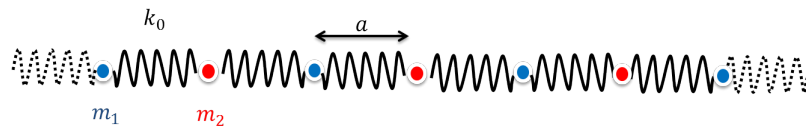


FIGURE B.3 – Schéma masse-ressort du réseau cristallin diatomique.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_{2n} &= -k_0 (2u_{2n} - v_{2n-1} - v_{2n+1}) \\ m_2 \ddot{v}_{2n+1} &= -k_0 (2v_{2n+1} - u_{2n} - u_{2n+2}) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Il présente deux modes de propagation l'un dit acoustique et le second dit optique. Cette appellation vient du fait que bien que les deux modes correspondent à des ondes de vibrations mécaniques, l'une pourra être excitée par une onde acoustique tandis que l'autre sera plutôt excitée par une excitation de nature optique. En effet, le second mode de vibration correspond à une vibration antisymétrique de la maille du réseau et pourra être excitée par une onde électromagnétique si les deux masses sont de charges opposées. Dans la limite où les masses des deux atomes tendent à être égales, on retombe sur le cas précédent. La maille que nous avons défini est par conséquent dégénérée. À mesure que les valeurs des masses se distinguent l'une de l'autre, un effet de levée de dégénérescence a lieu. La combinaison symétrique des modes de vibration correspond à la branche acoustique. La combinaison antisymétrique des modes de vibration correspond à la branche optique. Et comme pour un effet de levée de dégénérescence sur une fonction d'onde d'un système quantique, les niveaux d'énergie i.e. la fréquence des deux branches au point de levée de dégénérescence se sépare en deux valeurs qui s'écartent proportionnellement au couplage des deux niveaux. Ainsi, cette levée de dégénérescence correspond à l'ouverture d'un band gap. Ici, il s'agit encore d'une géométrie simple. Mais elle illustre que dans la limite où la maille élémentaire du réseau se complexifie et autorise des modes de vibrations plus complexes que la simple expansion-compression d'un ressort, des modes d'ordres supérieurs (correspondant à des repliements de bandes de modes de vibration de définition sub-taille de la maille) vont apparaître et ouvrir des gaps de périodicité dans la relation de dispersion.

$$m_1 m_2 \omega^4 - 2k_0 (m_1 + m_2) \omega^2 + 4k_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = 0 \quad (\text{B.4})$$

## Réseau cristallin monoatomique lié élastiquement

Le troisième modèle correspond au réseau monoatomique avec liaison élastique au bâti. La modélisation est la même que pour le réseau monoatomique à laquelle on rajoute un ressort de raideur  $\kappa$  lié au bâti.

$$m_0 \ddot{u}_n = -k_0 (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) - \kappa u_n \quad (\text{B.5})$$



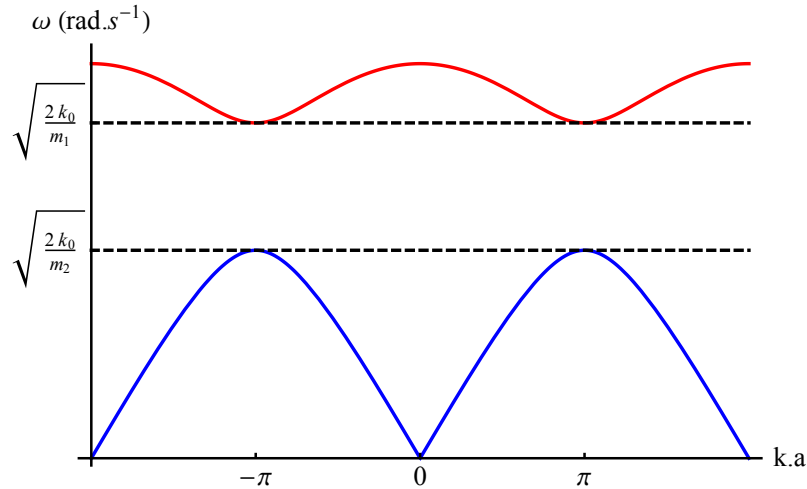


FIGURE B.4 – Relation de dispersion du réseau cristallin diatomique.

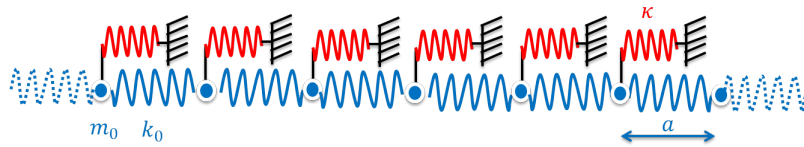


FIGURE B.5 – Schéma masse-ressort du réseau cristallin monoatomique lié à un support rigide.

Dans la limite basses fréquences, le terme d'inertie  $m_0 \omega^2$  tend à être très faible et la force de rappel devient forte en comparaison. Dans cette limite, sans la liaison au bâti, on obtient des ondes de très grandes longueurs d'onde où tout le réseau effectue des oscillations en blocs solides. Dans cette limite, avec la liaison au bâti, tout mouvement devient impossible. Il faut attendre de passer la résonance basses fréquences de la liaison au bâti au-delà de laquelle la force de rappel devient faible voir négligeable en comparaison avec l'inertie effective.

$$m_0 \omega^2 - 4k_0 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) - \kappa = 0 \quad (\text{B.6})$$

## Réseau cristallin monoatomique lié à un résonateur local

Le quatrième modèle correspond au cas du réseau monoatomique lié à des résonateur locaux. En d'autres termes, il s'agit du cas du métamatériau. Le modèle est le même que pour le réseau monoatomique élastiquement lié à un support rigide sauf que le bâti y est remplacé par une masse  $m_m$

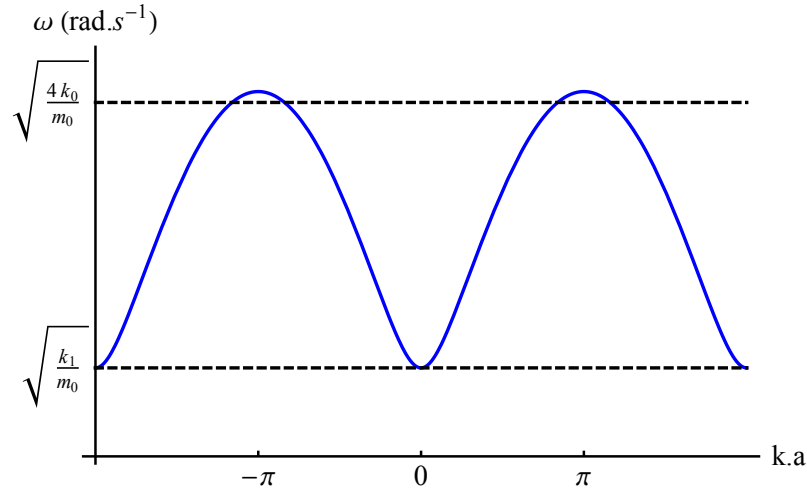


FIGURE B.6 – Relation de dispersion du réseau cristallin monoatomique lié à un support rigide.

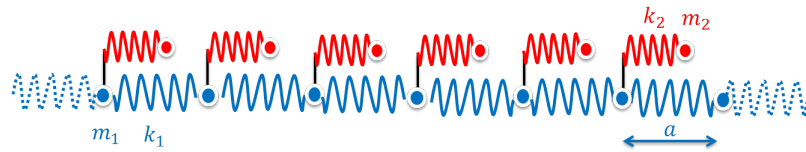


FIGURE B.7 – Schéma masse-ressort du réseau cristallin monoatomique couplé à des résonateurs locaux.

$$\begin{cases} m_0 \ddot{u}_n &= -k_0 (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) - \kappa (u_n - v_n) \\ m_m \ddot{v}_n &= -\kappa (v_n - u_n) \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Une façon d'interpréter la relation de dispersion de la Fig. (B.8) consiste à dire que la dispersion est celle du réseau monoatomique traversé par une branche plate. Cette branche plate représente les résonateurs locaux. Ils introduisent un mode de vibration non propagatif qui se couple au système. Un effet de répulsion de mode fait que le point de croisement des deux modes devient un point d'anticroisement et ouvre un gap dit d'hybridation. L'hybridation désigne à l'origine un phénomène de mélange des orbitales atomiques décrites par leurs fonctions d'onde. Une fois encore, il s'agit d'un phénomène de levé de dégénérescence analogue classique du phénomène quantique de combinaisons symétriques et antisymétriques d'états propres de chacun des systèmes découplés. Néanmoins, ce phénomène est avant tout un phénomène d'oscillateurs couplés. Deux oscillateurs ayant la même fréquence de résonance auxquels on permet d'échanger de l'énergie, ne vont plus pouvoir osciller à cette même fréquence. On peut trouver une discussion très intéressante à ce sujet dans l'ouvrage de Morse & Ingard [25]. Par conséquent, il est naturel de retrouver cet effet dès lors que l'on considère deux systèmes

oscillants couplés décrits par des fonctions d'onde.

$$(m_0 \omega^2 - 4k_0 \sin^2(\frac{ka}{2}) - \kappa)(m_m \omega^2 - \kappa) = \kappa^2 \quad (\text{B.8})$$

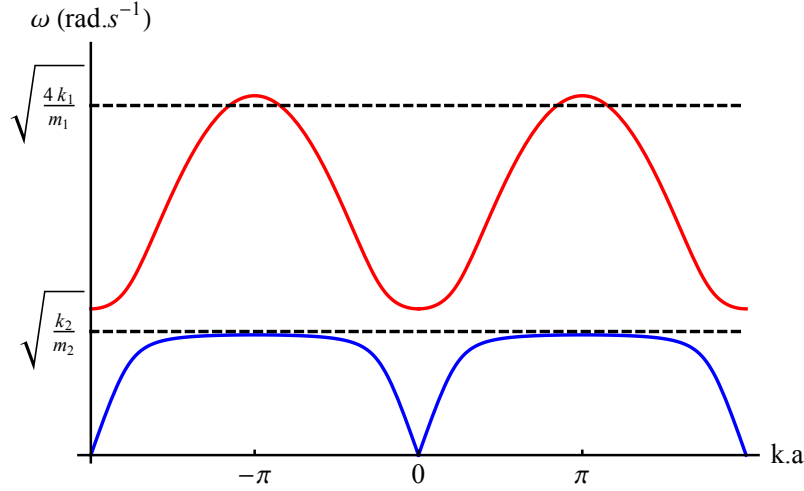


FIGURE B.8 – Relation de dispersion du réseau cristallin monoatomique couplé à des résonateurs locaux.

Remarquez que le cas précédent peut être interprété comme un cas limite du métamatériau lorsque celui-ci voit sa masse tendre vers l'infini. Notez également que dans le cadre du formalisme métamatériau, on a l'habitude de faire entrer le résonateur local dans le comportement effectif du réseau. Dans la relation de dispersion (B.8), cela revient à diviser les deux membres par la relation de dispersion du résonateur. On peut alors définir une masse effective dépendante de la fréquence telle que  $m^*(\omega) \omega^2 = 4k_0 \sin^2(\frac{ka}{2})$  soit dans la limite continue  $m^*(\omega) \omega^2 = k_0 a^2 k^2 = K_0 k^2$ . Cette masse prend alors des valeurs négatives à proximité de la résonance.

## Réseaux cristallins monoatomiques couplés

Le cinquième modèle est le cas des réseaux monoatomiques couplés. Il est d'une importance toute particulière dans ce cadre d'étude. Le modèle envisagé comporte deux réseaux de masses-ressorts de masses et raideurs  $k_1, m_1$  et  $k_2, m_2$ . Un couplage

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_n &= -k_0 (2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) - \kappa (u_n - v_n) \\ m_2 \ddot{v}_n &= -k_0 (2v_n - v_{n-1} - v_{n+1}) - \kappa (v_n - u_n) \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

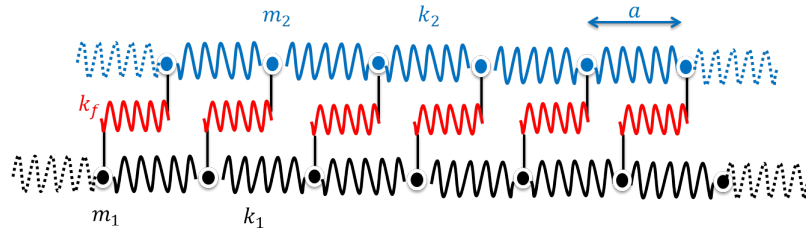


FIGURE B.9 – Schéma masse-ressort de deux réseaux cristallins monoatomiques couplés.

On suppose ici un couplage élastique, mais le couplage pourrait aussi bien être visqueux (symbolisé par un amortisseur) ou encore en toute généralité viscoélastique avec une raideur  $\kappa$  complexe pouvant dépendre de la fréquence.

$$(m_1 \omega^2 - 4k_1 \sin^2(\frac{ka}{2}) - \kappa)(m_2 \omega^2 - 4k_2 \sin^2(\frac{ka}{2}) - \kappa) = \kappa^2 \quad (\text{B.10})$$

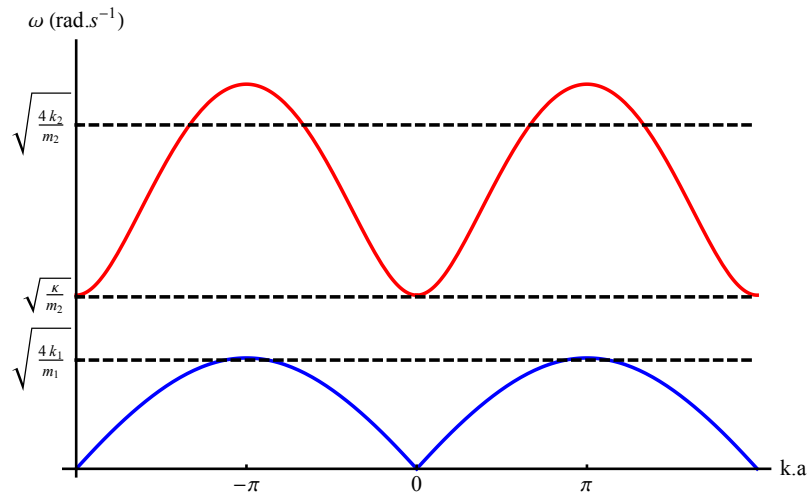


FIGURE B.10 – Relation de dispersion de deux réseaux cristallins monoatomiques couplés.

Remarquez qu'une fois encore, si l'on fait tendre la masse des maillons du réseau parallèle  $m_2$  vers l'infini, on retrouve le cas de la liaison rigide au bâti ou bien encore le cas du métamatériau dont la masse tendrait vers l'infini également. Notez également que la limite continue peut-être obtenue facilement dans toutes ces relations de dispersion en introduisant des grandeurs volumiques et en faisant tendre la taille de la maille  $a$  vers zéro.

## Annexe C

# Calcul du couplage dû aux films

Cette annexe vise à expliciter certaines étapes intermédiaires de calculs, non inclus dans le corps du texte afin d'alléger le manuscrit.

### Équations de la dynamique des films

Cette section de l'annexe vise à détailler la résolution de la dynamique des films dans les mousses solides, afin d'évaluer leur influence sur le couplage entre le gaz et la matrice solide. Cette analyse reprend en partie la section 1.3.4 mais présente les calculs de manière plus détaillée.

### Équation homogène

L'équation de la dynamique de l'excursion  $\zeta_f$  d'une membrane d'épaisseur  $e$ , de masse volumique  $\rho_s$ , soumise à une tension de surface  $\gamma$  s'écrit :

$$\partial_t^2 \zeta_f - c_F^2 \Delta_S \zeta_f = 0 \quad \text{avec} \quad c_F = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_s e}} \quad (\text{C.1})$$

où  $\Delta_S$  est l'opérateur laplacien surfacique,  $c_F$  est la célérité des ondes capillaires. Les solutions physiques à l'équation homogène (C.1) pour une géométrie circulaire sont les fonctions de Bessel de première espèce avec une modulation angulaire sinusoïdale  $J_n(rq) e^{in\theta}$  avec  $q = \omega/c_F$  le nombre d'onde capillaire. Ces solutions homogènes sont appelées harmoniques cylindriques (cf. annexe A).

## Équation inhomogène

Lorsque l'on ajoute un terme source de pression, l'équation C.1 devient :

$$\partial_t^2 \zeta_f - c_F^2 \Delta_S \zeta_f = -\frac{\delta p}{\rho_s e} \quad \text{avec} \quad c_F = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho_s e}} \quad (\text{C.2})$$

La dynamique interne du film en vibration est décrite par le membre de gauche de l'équation C.2, tandis que le membre de droite correspond aux efforts dus à l'interaction avec le gaz. En particulier,  $\delta p$  correspond au différentiel de pression exercé par le gaz de part et d'autre. L'effort de tension exercé par la matrice solide sur le contour du film n'apparaît pas au niveau de l'équation de la dynamique surfacique. Il est possible de le faire apparaître en utilisant le formalisme des distributions mais il est pris en compte de manière équivalente en considérant la condition aux limites en  $r = R_f$  à l'origine de cette tension [125].

## Profil d'excursion du film, excursion moyenne et dérivée

### Profil d'excursion du film

Pour une excitation harmonique ou en se plaçant dans le domaine fréquentiel, le terme source de pression ainsi que les excursions de la membrane oscillent à la même fréquence, tant que l'on reste dans un régime linéaire de faibles déformations. La solution particulière à une excitation uniforme sur la membrane est une fonction harmonique  $Ae^{i\omega t}$ .

$$-A\omega^2 = -\frac{\delta \hat{p}}{\rho e} \Leftrightarrow A = \frac{\delta \hat{p}}{\rho e \omega^2} \quad (\text{C.3})$$

La solution qui permettra de décrire les excursions de la membrane est une combinaison de cette solution particulière et d'une solution homogène. Afin de préciser la solution homogène, considérons la condition aux limites sur le contour du film. La périphérie du film est liée solidement aux bords de Plateau et aux vertex, qui constituent la matrice solide, de sorte que  $\zeta_f(R_f) = \zeta_s$ .

$$\zeta_f(R) = (A + BJ_0(R_f q))e^{i\omega t} = \hat{\zeta}_s e^{i\omega t} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_f(r) &= \frac{\delta \hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \frac{J_0(rq)}{J_0(R_f q)} \left( \frac{\delta \hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \\ \hat{\zeta}_f(r) &= \hat{\zeta}_s + \left( 1 - \frac{J_0(rq)}{J_0(R_f q)} \right) \left( \frac{\delta \hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

La solution particulière de l'excursion hors-plan  $\zeta_f$  se distingue de la forme 1.87 du fait de la condition aux limites :

$$\hat{\zeta}_f = \hat{\zeta}_s + \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \left( 1 - \frac{J_0(rq)}{J_0(R_f q)} \right) \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{\frac{\rho e}{2 \gamma}} \omega \quad (\text{C.6})$$

Comme on cherche à représenter la mousse solide comme un milieu effectif homogène, les champs de déplacement qui seront considérés suite à l'évaluation des efforts correspondra à un champs de déplacement moyenné sur la maille élémentaire (i.e. une cellule) de la mousse solide. Afin de passer du champs de déplacement microscopique à un champs de déplacement 'mésoscopique', il sera utile de connaître l'excursion moyenne du film  $\langle \zeta_f \rangle$ .

### Excursion moyenne

Afin d'obtenir l'excursion moyenne, il suffit d'effectuer l'intégrale du profil de déplacement sur la surface du film :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\zeta}_f \rangle &= \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_f} \hat{\zeta}_f(r) r d\theta dr \\ &= \frac{1}{\pi R_f^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_f} \left[ \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \frac{J_0(rq)}{J_0(R_f q)} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \right] r d\theta dr \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

L'intégrale de la fonction de Bessel peut être obtenue par une intégration par partie en servant des relations de récurrence sur les dérivées des fonctions de Bessel. Finalement, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\zeta}_f \rangle &= \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \frac{2J_1(R_f q)}{R_f q J_0(R_f q)} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \\ &= \hat{\zeta}_s + \left( 1 - \frac{2J_1(R_f q)}{R_f q J_0(R_f q)} \right) \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Afin d'alléger l'écriture, nous introduisons la fonction  $H(R_f q)$  :

$$H(R_f q) = \frac{2J_1(R_f q)}{R_f q J_0(R_f q)} \quad (\text{C.9})$$

L'expression de l'excursion moyenne de la membrane devient alors :

$$\langle \hat{\zeta}_f \rangle - \hat{\zeta}_s = (1 - H(R_f q)) \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \quad (\text{C.10})$$

## Dérivée de l'excursion

La dérivée du profil d'excursions du film sera utile afin d'évaluer les efforts de tension.

$$\hat{\zeta}_f(r) = \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \frac{J_0(rq)}{J_0(R_f q)} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \hat{\zeta}_f(r)}{\partial r} = +q \frac{J_1(rq)}{J_0(R_f q)} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \quad (\text{C.12})$$

## Interactions volumiques entre les films et le gaz

Afin de pouvoir calculer la force volumique équivalente qui correspond aux efforts entre les films et le gaz, nous allons considérer une mousse solide de structure cubique à faces centrées. Il s'agit ensuite de prendre en compte la résultante des contributions de tous les films pour une maille élémentaire du réseau.

### Différentiel de pression

En inversant l'équation C.10, il est possible d'exprimer le différentiel de pression en fonction du déplacement moyen :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} &= \hat{\zeta}_s + \frac{1}{1 - H(R_f q)} \left( \langle \hat{\zeta}_f \rangle - \hat{\zeta}_s \right) \\ &= \hat{\zeta}_s + \left( \frac{H(R_f q)}{1 - H(R_f q)} + 1 \right) \left( \langle \hat{\zeta}_f \rangle - \hat{\zeta}_s \right) \\ &= \langle \hat{\zeta}_f \rangle + \frac{H(R_f q)}{1 - H(R_f q)} \left( \langle \hat{\zeta}_f \rangle - \hat{\zeta}_s \right) \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

### Intégrale des efforts

Afin de pouvoir prendre en compte cette surpression supplémentaire due à la présence des films dans le bilan volumique infinitésimal, il faut intégrer cette différence de pression sur les films  $\mathcal{F}$  au bord de la cellule élémentaire  $\mathcal{V}$  considérée cubique de côté de longueur  $a$ . Du fait de la symétrie de la maille élémentaire, il est possible de regarder directement la projection des contributions selon un axe de propagation privilégié  $0z$  de vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  :

$$F_{g \rightarrow f} = \iint_{\mathcal{F} \in \delta\mathcal{V}} \delta\hat{p} \vec{n}_{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_z r d\theta dr \quad (\text{C.14})$$

$$= \pi R_f^2 \delta\hat{p} \sum_{\mathcal{F}} \vec{n}_{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{C.15})$$



où  $\vec{n}_{\mathcal{F}}$  est le vecteur unitaire orienté selon la normale au film  $\mathcal{F}$ .

## Efforts volumiques

L'intensité de la force sur une maille élémentaire donnée par l'équation C.14 est divisée par son volume  $a^3$ , tandis que le champs de déplacement moyen des films est identifié à celui du gaz  $\vec{u}_f = \vec{u}_g$ , de sorte que les efforts volumiques  $\vec{f}_{f \rightarrow g}$  s'écrivent :

$$\vec{f}_{f \rightarrow g} = -\rho_{f*} \partial_t^2 \vec{u}_g - \mu^*(\omega) (\vec{u}_g - \vec{u}_s) \quad (\text{C.16})$$

où  $\mu^*(\omega)$  est un module de couplage élastique effectif et  $\rho_{f*}$  une masse volumique effective des films dont les expressions se déduisent des équations C.14 et C.13 :

$$\begin{aligned} \mu^*(\omega) &= \frac{H(R_f q)}{H(R_f q) - 1} \rho_{f*} \omega^2 \\ &= \frac{2}{R_f q} \frac{J_1(R_f q)}{J_2(R_f q)} \rho_{f*} \omega^2 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\rho_{f*} = \alpha_\infty \frac{e\pi R_f^2}{a^3} \rho_s \quad (\text{C.18})$$

Ainsi, la force qui s'exerce sur le gaz correspond à l'inertie effective des films ainsi qu'une force de rappel élastique. Le terme  $\mu^*(\omega)$  tend vers  $16\pi\gamma\alpha_\infty/a^3$  dans la limite statique, ce qui correspond à une raideur volumique constante.

## Interactions volumiques entre les films et le solide

### Tension sur le bord des films

La tension  $\delta\tau$  exercée sur le contour d'un film selon la direction normale au film est égale à :

$$\delta\hat{\tau} = -2\gamma \frac{\partial \hat{\zeta}_f(r)}{\partial r} \Big|_{r=R_f} \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} &= -2\gamma q \frac{J_1(R_f q)}{J_0(R_f q)} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \\ &= -R_f q^2 \gamma \frac{2J_1(R_f q)}{R_f q J_0(R_f q)} \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \\ &= -\frac{\pi R_f^2}{2\pi R_f} \rho_s e \omega^2 H(R_f q) \left( \frac{\delta\hat{p}}{\rho_s e \omega^2} - \hat{\zeta}_s \right) \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

À l'aide de l'équation C.10, l'expression de la tension distribuée sur le contour C.20 peut être écrite explicitement en fonction de la différence de déplacement :

$$\delta\hat{\tau} = -\frac{\pi R_f^2}{2\pi R_f} \rho_s e \omega^2 \frac{H(R_f q)}{1 - H(R_f q)} \left( \langle \hat{\zeta}_f \rangle - \hat{\zeta}_s \right) \quad (\text{C.21})$$

### Intégrale des efforts

Afin de pouvoir prendre en compte cette tension sur la matrice solide due à la présence des films dans le bilan volumique infinitésimal, il faut intégrer la tension sur le contour  $\mathcal{C}$  des films  $\mathcal{F}$  au bord de la cellule élémentaire  $\mathcal{V}$  considérée cubique de côté de longueur  $a$ . Du fait de la symétrie de la maille élémentaire, il est possible de regarder directement la projection des contributions selon un axe de propagation privilégié  $0z$  de vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  :

$$F_{f \rightarrow s} = \int_{\mathcal{C} \in \delta\mathcal{F} / \mathcal{F} \in \delta\mathcal{V}} \delta\hat{\tau} \vec{n}_{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_z R_f d\theta \quad (\text{C.22})$$

$$= \oint_0^{2\pi} \delta\hat{\tau} R_f d\theta \sum_{\mathcal{F}} \vec{n}_{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{C.23})$$

$$= 2\pi R_f \delta\hat{\tau} \sum_{\mathcal{F}} \vec{n}_{\mathcal{F}} \cdot \vec{e}_z \quad (\text{C.24})$$

où  $\vec{n}_{\mathcal{F}}$  est le vecteur unitaire orienté selon la normale au film  $\mathcal{F}$ .

### Efforts volumiques

L'intensité de la force sur une maille élémentaire donnée par l'équation C.14 est divisée par son volume  $a^3$ , tandis que le champs de déplacement moyen des films est identifié à celui du gaz  $\vec{u}_f = \vec{u}_g$ , de sorte que les efforts volumiques  $\vec{f}_{f \rightarrow s}$  s'écrivent :

$$\vec{f}_{f \rightarrow s} = -\mu^*(\omega) (\vec{u}_s - \vec{u}_g) \quad (\text{C.25})$$

où  $\mu^*(\omega)$  est un module de couplage élastique effectif et  $\rho_{f^*}$  une masse volumique effective des films dont les expressions se déduisent des équations C.14 et C.13 :

$$\begin{aligned} \mu^*(\omega) &= \frac{H(R_f q)}{H(R_f q) - 1} \rho_{f^*} \omega^2 \\ &= \frac{2}{R_f q} \frac{J_1(R_f q)}{J_2(R_f q)} \rho_{f^*} \omega^2 \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$\rho_{f^*} = \alpha_\infty \frac{e\pi R_f^2}{a^3} \rho_s \quad (\text{C.27})$$

Ainsi, la force qui s'exerce sur le gaz correspond uniquement à la force de rappel élastique. Le terme  $\mu^*(\omega)$  tend vers  $16\pi\gamma\alpha_\infty/a^3$  dans la limite statique, ce qui correspond à une raideur volumique constante.

# Bibliographie

- [1] I. CANTAT, S. COHEN-ADDAD, F. ELIAS, F. GRANER, R. HÖHLER et O. PITOIS. *Foams : Structure and Dynamics*. en. Oxford University Press, 2013 (cf. p. [4–9](#), [12](#), [14](#), [64](#)).
- [2] P. OSWALD. *Rheophysics : The Deformation and Flow of Matter*. en. Cambridge University Press, 2009 (cf. p. [4](#), [14](#)).
- [3] L. J. GIBSON et M. F. ASHBY. *Cellular Solids : Structure and Properties*. en. Cambridge University Press, 1999 (cf. p. [4](#), [7](#), [15–17](#), [106](#), [145](#)).
- [4] A. B. A. B. WOOD. *A textbook of sound : being an account of the physics of vibrations with special reference to recent theoretical and technical developments*. eng. New York : Macmillan, 1930 (cf. p. [4](#), [21](#), [22](#), [93](#)).
- [5] J. ALLARD et N. ATALLA. *Propagation of Sound in Porous Media : Modelling Sound Absorbing Materials 2e*. John Wiley & Sons, 2009 (cf. p. [4](#), [18](#), [24–31](#), [100](#), [101](#)).
- [6] P. M. MORSE. *Vibration and Sound*. en. American Institute of Physics for the Acoustical Society of America, 1995 (cf. p. [4](#), [34](#), [92](#), [156](#), [157](#)).
- [7] D. WEITZ et D. PINE. *Dynamic light scattering : the method and some applications*. en. Sous la dir. de W. BROWN. Clarendon Press, 1993 (cf. p. [4](#), [39](#), [40](#), [154](#)).
- [8] S. COHEN-ADDAD, R. HÖHLER et O. PITOIS. « Flow in Foams and Flowing Foams ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 45.1 (2013), p. 241–267 (cf. p. [4](#), [13](#), [14](#)).
- [9] S. COSTA. « Rhéologie multiéchelle des mousses liquides ». Thèse de doct. Université Paris-Est, 2012 (cf. p. [5](#), [6](#), [61](#)).
- [10] P.-G. d. GENNES, F. BROCHARD-WYART et D. QUERE. *Capillarity and Wetting Phenomena : Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. en. Springer, 2004 (cf. p. [5](#), [50](#)).
- [11] F. J. ALMGREN et J. E. TAYLOR. « The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles ». In : *Scientific American* 235.1 (1976), p. 82–93 (cf. p. [5](#)).

- [12] S. HEITKAM, W. DRENCKHAN et J. FRÖHLICH. « Packing Spheres Tightly : Influence of Mechanical Stability on Close-Packed Sphere Structures ». In : *Physical Review Letters* 108.14 (2012), p. 148302 (cf. p. 6).
- [13] R. D. MACPHERSON et D. J. SROLOVITZ. « The von Neumann relation generalized to coarsening of three dimensional microstructures ». en. In : *Nature* 446.7139 (2007), p. 1053–1055 (cf. p. 8).
- [14] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ. *Theory of Elasticity*. en. Elsevier, 1986 (cf. p. 10, 15, 16, 34, 144).
- [15] J. D. FERRY. *Viscoelastic Properties of Polymers*. en. John Wiley & Sons, 1980 (cf. p. 12, 55).
- [16] R. HÖHLER et S. COHEN-ADDAD. « Rheology of liquid foam ». In : *Journal of Physics : Condensed Matter* 17.41 (2005), R1041–R1069 (cf. p. 13).
- [17] A. J. LIU, S. RAMASWAMY, T. G. MASON, H. GANG et D. A. WEITZ. « Anomalous Viscous Loss in Emulsions ». In : *Physical Review Letters* 76.16 (1996), p. 3017–3020 (cf. p. 15).
- [18] B. P. TIGHE. « Relaxations and Rheology near Jamming ». In : *Physical Review Letters* 107.15 (2011), p. 158303 (cf. p. 15).
- [19] S. COSTA, R. HÖHLER et S. COHEN-ADDAD. « The coupling between foam viscoelasticity and interfacial rheology ». In : *Soft Matter* 9.4 (2013), p. 1100 (cf. p. 15).
- [20] S. TORQUATO. *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*. en. Springer, 2002 (cf. p. 15).
- [21] S. TIMOSHENKO et J. N. GOODIER. *Theory of Elasticity, by S. Timoshenko and J. N. Goodier,... 2nd Edition*. en. McGraw-Hill book Company, 1951 (cf. p. 15).
- [22] O. DOUTRES, N. ATALLA et K. DONG. « Effect of the microstructure closed pore content on the acoustic behavior of polyurethane foams ». In : *Journal of Applied Physics* 110.6 (2011), p. 064901 (cf. p. 17, 100–102, 161).
- [23] J. PIERRE, B. DOLLET et V. LEROY. « Resonant Acoustic Propagation and Negative Density in Liquid Foams ». In : *Physical Review Letters* 112.14 (2014), p. 148307 (cf. p. 17, 83, 93, 95, 97–99, 155, 164).
- [24] K. F. GRAFF. *Wave Motion in Elastic Solids*. en. Courier Dover Publications, 2012 (cf. p. 18, 114, 117, 170, 171).
- [25] P. M. MORSE et K. U. INGARD. *Theoretical Acoustics*. en. McGraw-Hill, 1968 (cf. p. 19, 28, 85, 86, 180).
- [26] T. LEIGHTON. *The Acoustic Bubble*. en. Academic Press, 1994 (cf. p. 21).

- [27] P. SHENG. *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena : Localization and Mesoscopic Phenomena*. en. Springer, 2006 (cf. p. [22](#), [87](#), [88](#), [93](#), [94](#), [96](#)).
- [28] M. DEVAUD, T. HOCQUET, J.-C. BACRI et V. LEROY. « The Minnaert bubble : an acoustic approach ». en. In : *European Journal of Physics* 29.6 (2008), p. 1263 (cf. p. [23](#), [89](#), [97](#)).
- [29] M. MINNAERT. « XVI. On musical air-bubbles and the sounds of running water ». In : *Philosophical Magazine Series 7* 16.104 (1933), p. 235–248 (cf. p. [23](#), [97](#)).
- [30] N. KINO, G. NAKANO et Y. SUZUKI. « Non-acoustical and acoustical properties of reticulated and partially reticulated polyurethane foams ». In : *Applied Acoustics* 73.2 (2012), p. 95–108 (cf. p. [23](#), [101](#), [102](#), [161](#)).
- [31] M. R. STINSON. « The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross sectional shape ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 89.2 (1991), p. 550–558 (cf. p. [24](#)).
- [32] D. L. JOHNSON, J. KOPLIK et R. DASHEN. « Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 176 (1987), p. 379–402 (cf. p. [26](#), [27](#), [100](#), [101](#)).
- [33] D. L. JOHNSON et T. J. PLONA. « Acoustic slow waves and the consolidation transition ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 72.2 (1982), p. 556–565 (cf. p. [30](#), [32](#), [161](#)).
- [34] M. BIOT et D. WILLIS. « The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation ». In : *Journal of Applied Mechanics* 24 (1957), p. 594–601 (cf. p. [31](#)).
- [35] Y. COUDER, J. M. CHOMAZ et M. RABAUD. « On the hydrodynamics of soap films ». In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 37.1 (1989), 384–405 (cf. p. [33](#)).
- [36] J. MEI, G. MA, M. YANG, J. YANG et P. SHENG. « Dynamic Mass Density and Acoustic Metamaterials ». en. In : *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*. Sous la dir. de P. A. DEYMIER. Springer Series in Solid-State Sciences 173. Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 159–199 (cf. p. [36](#), [85](#), [90](#), [92](#), [94](#)).
- [37] M. U. VERA, A. SAINT-JALMES et D. J. DURIAN. « Scattering Optics of Foam ». In : *Applied Optics* 40.24 (2001), p. 4210–4214 (cf. p. [38](#)).
- [38] R. BANDYOPADHYAY, A. S. GITTINGS, S. S. SUH, P. K. DIXON et D. J. DURIAN. « Speckle-visibility spectroscopy : A tool to study time-varying dynamics ». In : *Review of Scientific Instruments* 76.9 (2005), p. 093110 (cf. p. [39](#), [42](#), [43](#)).

- [39] D. J. DURIAN, D. A. WEITZ et D. J. PINE. « Multiple Light-Scattering Probes of Foam Structure and Dynamics ». In : *Science* 252.5006 (1991), p. 686–688 (cf. p. 40).
- [40] R. HÖHLER, S. COHEN-ADDAD et H. HOBALLAH. « Periodic Nonlinear Bubble Motion in Aqueous Foam under Oscillating Shear Strain ». In : *Physical Review Letters* 79.6 (1997), p. 1154–1157 (cf. p. 41).
- [41] R. HÖHLER, S. COHEN-ADDAD et D. J. DURIAN. « Multiple light scattering as a probe of foams and emulsions ». In : *Current Opinion in Colloid & Interface Science* (2014) (cf. p. 41).
- [42] M. LE MERRER, S. COHEN-ADDAD et R. HÖHLER. « Bubble Rearrangement Duration in Foams near the Jamming Point ». In : *Physical Review Letters* 108.18 (2012), p. 188301 (cf. p. 42).
- [43] M. LE MERRER, S. COHEN-ADDAD et R. HÖHLER. « Duration of bubble rearrangements in a coarsening foam probed by time resolved diffusing wave spectroscopy : Impact of interfacial rigidity ». In : *Physical Review E* 88.2 (2013), p. 022303 (cf. p. 42).
- [44] A. VÖLKER, P. ZAKHAROV, B. WEBER, F. BUCK et F. SCHEFFOLD. « Laser speckle imaging with an active noise reduction scheme ». In : *Optics Express* 13.24 (2005), p. 9782–9787 (cf. p. 42, 108).
- [45] H. SOUGUIR, O. RONSIN, V. LARRETA-GARDE, T. NARITA, C. CAROLI et T. BAUMBERGER. « Chemo-osmotically driven inhomogeneity growth during the enzymatic gelation of gelatin ». In : *Soft Matter* 8.12 (2012), p. 3363 (cf. p. 46).
- [46] A. G. WARD. « The physical properties of gelatin solutions and gels ». en. In : *British Journal of Applied Physics* 5.3 (1954), p. 85 (cf. p. 48).
- [47] P.-G. d. GENNES. *Scaling Concepts in Polymer Physics*. en. Cornell University Press, 1979 (cf. p. 48, 51).
- [48] C. G. OVERBERGER et P. H. VANDEWYER. « Introduction a la Chimie Macromoléculaire. G. Champetier and L. Monnerie, Eds. Masson et Cie, Paris, 1969, 737 pp. » en. In : *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Letters* 8.4 (1970), p. 304–304 (cf. p. 49).
- [49] T. KASHIWAGI, K.-i. YOKOYAMA, K. ISHIKAWA, K. ONO, D. EJIMA, H. MATSUI et E.-i. SUZUKI. « Crystal Structure of Microbial Transglutaminase from *Streptovorticillum mobaraense* ». en. In : *Journal of Biological Chemistry* 277.46 (2002), p. 44252–44260 (cf. p. 49).

- [50] V. SOVILJ, J. MILANOVIĆ et L. PETROVIĆ. « Viscosimetric and tensiometric investigations of interactions between gelatin and surface active molecules of various structures ». In : *Food Hydrocolloids* 32.1 (2013), p. 20–27 (cf. p. 49).
- [51] Y. Y. C. SANG. « Vers des micromousses stimulables ». Thèse de doct. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2009 (cf. p. 49).
- [52] G. E. TILLER, T. J. MUELLER, M. E. DOCKTER et W. G. STRUVE. « Hydrogenation of Triton X-100 eliminates its fluorescence and ultraviolet light absorption while preserving its detergent properties ». In : *Analytical biochemistry* 141.1 (1984), 262–266 (cf. p. 49).
- [53] A. R. PITT, S. D. MORLEY, N. J. BURBIDGE et E. L. QUICKENDEN. « The relationship between surfactant structure and limiting values of surface tension, in aqueous gelatin solution, with particular regard to multilayer coating ». In : *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects* 114 (1996), p. 321–335 (cf. p. 50).
- [54] V. NORMAND, S. MULLER, J. C. RAVEY et A. PARKER. « Gelation Kinetics of Gelatin A Master Curve and Network Modeling ». In : *Macromolecules* 33.3 (2000), p. 1063–1071 (cf. p. 53, 54).
- [55] K. t. NIJENHUIS. « Investigation into the ageing process in gels of gelatin/water systems by the measurement of their dynamic moduli ». en. In : *Colloid and Polymer Science* 259.5 (1981), p. 522–535 (cf. p. 53).
- [56] K. t. NIJENHUIS. *Thermoreversible networks : viscoelastic properties and structure of gels*. en. Springer, 1997 (cf. p. 54).
- [57] M. YAMAMOTO. « The Visco-elastic Properties of Network Structure I. General Formalism ». In : *Journal of the Physical Society of Japan* 11.4 (1956), p. 413–421 (cf. p. 55).
- [58] W. DRENCKHAN et D. LANGEVIN. « Monodisperse foams in one to three dimensions ». In : *Current Opinion in Colloid & Interface Science* 15.5 (2010), p. 341–358 (cf. p. 56, 59, 62).
- [59] E. CASTRO-HERNÁNDEZ, W. v. HOEVE, D. LOHSE et J. M. GORDILLO. « Microbubble generation in a co-flow device operated in a new regime ». en. In : *Lab Chip* 11.12 (2011), p. 2023–2029 (cf. p. 56).
- [60] A. TESTOURI, C. HONOREZ, A. BARILLEC, D. LANGEVIN et W. DRENCKHAN. « Highly Structured Foams from Chitosan Gels ». In : *Macromolecules* 43.14 (2010), p. 6166–6173 (cf. p. 56, 61).



- [61] W.-T. TSAI. « Environmental hazards and health risk of common liquid perfluoro-n-alkanes, potent greenhouse gases ». In : *Environment International* 35.2 (2009), p. 418–424 (cf. p. 57, 58).
- [62] A. J. WEBSTER et M. E. CATES. « Osmotic Stabilization of Concentrated Emulsions and Foams ». In : *Langmuir* 17.3 (2001), p. 595–608 (cf. p. 57).
- [63] P. GARSTECKI, M. J. FUERSTMAN, H. A. STONE et G. M. WHITESIDES. « Formation of droplets and bubbles in a microfluidic T-junction—scaling and mechanism of break-up ». In : *Lab on a Chip* 6.3 (2006), 437–446 (cf. p. 59).
- [64] R. HÖHLER, Y. YIP CHEUNG SANG, E. LORENCEAU et S. COHEN-ADDAD. « Osmotic Pressure and Structures of Monodisperse Ordered Foam ». In : *Langmuir* 24.2 (2008), p. 418–425 (cf. p. 61).
- [65] B. J. ACKERSON et P. N. PUSEY. « Shear-Induced Order in Suspensions of Hard Spheres ». In : *Physical Review Letters* 61.8 (1988), p. 1033–1036 (cf. p. 61).
- [66] F. WINTZENRIETH, S. COHEN-ADDAD, M. LE MERRER et R. HÖHLER. « Laser-speckle-visibility acoustic spectroscopy in soft turbid media ». In : *Physical Review E* 89.1 (2014), p. 012308 (cf. p. 68, 69).
- [67] Z. YANG, J. MEI, M. YANG, N. H. CHAN et P. SHENG. « Membrane-Type Acoustic Metamaterial with Negative Dynamic Mass ». In : *Physical Review Letters* 101.20 (2008), p. 204301 (cf. p. 83, 92).
- [68] J. MEI, G. MA, M. YANG, Z. YANG, W. WEN et P. SHENG. « Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound ». en. In : *Nature Communications* 3 (2012), p. 756 (cf. p. 83, 92).
- [69] V. G. VESELAGO. « The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of permeability and permittivity ». In : *Soviet Physics Uspekhi* 10.4 (1968), p. 509–514 (cf. p. 84).
- [70] D. R. SMITH, W. J. PADILLA, D. C. VIER, S. C. NEMAT-NASSER et S. SCHULTZ. « Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity ». In : *Physical review letters* 84.18 (2000), p. 4184 (cf. p. 84).
- [71] D. R. SMITH et N. KROLL. « Negative refractive index in left-handed materials ». In : *Physical Review Letters* 85.14 (2000), p. 2933 (cf. p. 84).
- [72] T. BÜCKMANN, N. STENGER, M. KADIC, J. KASCHKE, A. FRÖLICH, T. KENNERKNECHT, C. EBERL, M. THIEL et M. WEGENER. « Tailored 3D Mechanical Metamaterials Made by Dip-in Direct-Laser-Writing Optical Lithography ». en. In : *Advanced Materials* 24.20 (2012), p. 2710–2714 (cf. p. 84).
- [73] J. LI et C. T. CHAN. « Double-negative acoustic metamaterial ». In : *Physical Review E* 70.5 (2004), p. 055602 (cf. p. 85).

- [74] M. YANG, G. MA, Z. YANG et P. SHENG. « Coupled Membranes with Doubly Negative Mass Density and Bulk Modulus ». In : *Physical Review Letters* 110.13 (2013), p. 134301 (cf. p. 85).
- [75] P. A. DEYMIER. *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*. en. Springer, 2013 (cf. p. 85, 87, 88).
- [76] C. PRADA, D. CLORENNEC et D. ROYER. « Local vibration of an elastic plate and zero-group velocity Lamb modes ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 124.1 (2008), p. 203–212 (cf. p. 85).
- [77] D. ROYER et E. DIEULESAINT. *Elastic Waves in Solids I : Free and Guided Propagation*. en. Springer, 2000 (cf. p. 85, 114, 115, 170, 173, 175).
- [78] C. KITTEL. *Introduction to Solid State Physics*. en. Wiley, 2005 (cf. p. 85, 103, 104, 176, 177).
- [79] D. BRILL et G. GAUNAURD. « Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 81.1 (1987), p. 1–21 (cf. p. 87).
- [80] J. W. S. B. RAYLEIGH. *The Theory of Sound*. en. Courier Dover Publications, 1945 (cf. p. 87).
- [81] P. C. WATERMAN et R. TRUPELL. « Multiple Scattering of Waves ». In : *Journal of Mathematical Physics* 2.4 (1961), p. 512–537 (cf. p. 87–89, 93, 96).
- [82] L. L. FOLDY. « The Multiple Scattering of Waves. I. General Theory of Isotropic Scattering by Randomly Distributed Scatterers ». In : *Physical Review* 67.3-4 (1945), p. 107–119 (cf. p. 88, 96).
- [83] M. YANG, G. MA, Y. WU, Z. YANG et P. SHENG. « Homogenization scheme for acoustic metamaterials ». In : *Physical Review B* 89.6 (2014), p. 064309 (cf. p. 88).
- [84] K. W. COMMANDER et A. PROSPERETTI. « Linear pressure waves in bubbly liquids : Comparison between theory and experiments ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 85.2 (1989), p. 732–746 (cf. p. 88).
- [85] V. LEROY, A. STRYBULEVYCH, M. G. SCANLON et J. H. PAGE. « Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles ». en. In : *The European Physical Journal E* 29.1 (2009), p. 123–130 (cf. p. 89).
- [86] T. BRUNET, J. LENG et O. MONDAIN-MONVAL. « Soft Acoustic Metamaterials ». en. In : *Science* 342.6156 (2013), p. 323–324 (cf. p. 89).
- [87] Z. LIU, X. ZHANG, Y. MAO, Y. Y. ZHU, Z. YANG, C. T. CHAN et P. SHENG. « Locally Resonant Sonic Materials ». en. In : *Science* 289.5485 (2000), p. 1734–1736 (cf. p. 90).

- [88] F. LEMOULT, M. FINK et G. LEROSEY. « Acoustic Resonators for Far-Field Control of Sound on a Subwavelength Scale ». In : *Physical Review Letters* 107.6 (2011) (cf. p. 90).
- [89] M. OUDICH, Y. LI, B. M. ASSOUAR et Z. HOU. « A sonic band gap based on the locally resonant phononic plates with stubs ». en. In : *New Journal of Physics* 12.8 (2010), p. 083049 (cf. p. 91).
- [90] C. P. BERRAQUERO, A. MAUREL, P. PETITJEANS et V. PAGNEUX. « Experimental realization of a water-wave metamaterial shifter ». In : *Physical Review E* 88.5 (2013), p. 051002 (cf. p. 91).
- [91] S. H. LEE, C. M. PARK, Y. M. SEO, Z. G. WANG et C. K. KIM. « Acoustic metamaterial with negative density ». In : *Physics Letters A* 373.48 (2009), p. 4464–4469 (cf. p. 91).
- [92] S. H. LEE, C. M. PARK, Y. M. SEO, Z. G. WANG et C. K. KIM. « Composite Acoustic Medium with Simultaneously Negative Density and Modulus ». In : *Physical Review Letters* 104.5 (2010), p. 054301 (cf. p. 92).
- [93] J. PIERRE, R.-M. GUILLERMIC, F. ELIAS, W. DRENCKHAN et V. LEROY. « Acoustic characterisation of liquid foams with an impedance tube ». en. In : *The European Physical Journal E* 36.10 (2013), p. 1–10 (cf. p. 93, 96).
- [94] I. B. SALEM, R.-M. GUILLERMIC, C. SAMPLE, V. LEROY, A. SAINT-JALMES et B. DOLLET. « Propagation of ultrasound in aqueous foams : bubble size dependence and resonance effects ». en. In : *Soft Matter* 9.4 (2012), p. 1194–1202 (cf. p. 93, 95, 97).
- [95] R. I. NIGMATULIN. *Dynamics Of Multiphase Media*. en. CRC Press, 1990 (cf. p. 93).
- [96] J. G. BERRYMAN. « Long wavelength propagation in composite elastic media I. Spherical inclusions ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 68.6 (1980), p. 1809–1819 (cf. p. 93).
- [97] F. CERVERA, L. SANCHIS, J. V. SÁNCHEZ-PÉREZ, R. MARTÍNEZ-SALA, C. RUBIO, F. MESEGUER, C. LÓPEZ, D. CABALLERO et J. SÁNCHEZ-DEHESA. « Refractive Acoustic Devices for Airborne Sound ». In : *Physical Review Letters* 88.2 (2001), p. 023902 (cf. p. 94).
- [98] J. MEI, Y. WU et Z. LIU. « Effective medium of periodic fluid-solid composites ». en. In : *EPL (Europhysics Letters)* 98.5 (2012), p. 54001 (cf. p. 94).
- [99] N. T. MOXON, A. C. TORRANCE et S. B. RICHARDSON. « The attenuation of acoustic signals by aqueous and particulate foams ». In : *Applied Acoustics* 24.3 (1988), p. 193–209 (cf. p. 95).

- [100] I. GOLDFARB, Z. ORENBACH, I. SHREIBER et F. VAFINA. « Sound and weak shock wave propagation in gas-liquid foams ». en. In : *Shock Waves* 7.2 (1997), p. 77–88 (cf. p. 95–97).
- [101] K. KANN. « Sound waves in foams ». In : *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects* 263.1–3 (2005), p. 315–319 (cf. p. 95).
- [102] N. MUJICA et S. FAUVE. « Sound velocity and absorption in a coarsening foam ». In : *Physical Review E* 66.2 (2002), p. 021404 (cf. p. 95, 96).
- [103] K. B. KANN et A. A. KISLITSYN. « A Film Model of Sound Propagation in Gas–Liquid Foams : 1. The Sound Velocity ». en. In : *Colloid Journal* 65.1 (2003), p. 26–30 (cf. p. 95).
- [104] K. B. KANN et A. A. KISLITSYN. « A Film Model of Sound Propagation in Gas–Liquid Foams : 2. The Sound Absorption ». In : *Colloid Journal* 65.1 (2003), p. 31–34 (cf. p. 95).
- [105] J. DING, F. TSAUR, A. LIPS et A. AKAY. « Acoustical observation of bubble oscillations induced by bubble popping ». In : *Physical Review E* 75.4 (2007) (cf. p. 95, 97).
- [106] B. S. GARDINER, B. Z. DLUGOGORSKI, G. J. JAMESON et R. P. CHHABRA. « Yield stress measurements of aqueous foams in the dry limit ». In : *Journal of Rheology (1978-present)* 42.6 (1998), p. 1437–1450 (cf. p. 96).
- [107] I. I. GOLDFARB, I. R. SCHREIBER et F. I. VAFINA. « Heat transfer effect on sound propagation in foam ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 92.5 (1992), p. 2756–2769 (cf. p. 96, 97).
- [108] J. PIERRE, F. ELIAS et V. LEROY. « A technique for measuring velocity and attenuation of ultrasound in liquid foams ». In : *Ultrasonics* 53.2 (2013), p. 622–629 (cf. p. 98).
- [109] T. J. PLONA. « Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies ». In : *Applied Physics Letters* 36.4 (1980), p. 259–261 (cf. p. 100).
- [110] J. F. ALLARD, C. DEPOLLIER et A. L’ESPERANCE. « Observation of the Biot slow wave in a plastic foam of high flow resistance at acoustical frequencies ». In : *Journal of Applied Physics* 59.10 (1986), p. 3367–3370 (cf. p. 100).
- [111] Y. BOUZIDI et D. R. SCHMITT. « Measurement of the speed and attenuation of the Biot slow wave using a large ultrasonic transmitter ». en. In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 114.B8 (2009), B08201 (cf. p. 100).

- [112] A. SPADONI, R. HÖHLER, S. COHEN-ADDAD et V. DORODNITSYN. « Closed-cell crystalline foams : Self-assembling, resonant metamaterials ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 135.4 (2014), p. 1692–1699 (cf. p. [100](#), [102–106](#), [144](#), [165](#), [166](#)).
- [113] A. CRAGGS et J. G. HILDEBRANDT. « Effective densities and resistivities for acoustic propagation in narrow tubes ». In : *Journal of Sound and Vibration* 92.3 (1984), p. 321–331 (cf. p. [100](#)).
- [114] Y. CHAMPOUX et J.-F. ALLARD. « Dynamic tortuosity and bulk modulus in air saturated porous media ». In : *Journal of Applied Physics* 70.4 (1991), p. 1975–1979 (cf. p. [100](#)).
- [115] M. T. HOANG et C. PERROT. « Identifying local characteristic lengths governing sound wave properties in solid foams ». In : *Journal of Applied Physics* 113.8 (2013), p. 084905 (cf. p. [101](#)).
- [116] F. CHEVILLOTTE, C. PERROT et R. PANNETON. « Microstructure based model for sound absorption predictions of perforated closed-cell metallic foams ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 128.4 (2010), p. 1766–1776 (cf. p. [101](#)).
- [117] O. DOUTRES, N. ATALLA et K. DONG. « A semi-phenomenological model to predict the acoustic behavior of fully and partially reticulated polyurethane foams ». In : *Journal of Applied Physics* 113.5 (2013), p. 054901 (cf. p. [102](#)).
- [118] L. BRILLOUIN. *Wave propagation and group velocity*. es. Academic Press, 1960 (cf. p. [126](#), [149](#)).
- [119] A. PROSPERETTI, L. A. CRUM et K. W. COMMANDER. « Nonlinear bubble dynamics ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 83.2 (1988), p. 502–514 (cf. p. [140](#)).
- [120] D. M. A. BUZZA et M. E. CATES. « Uniaxial Elastic Modulus of Concentrated Emulsions ». In : *Langmuir* 10.12 (1994), p. 4503–4508 (cf. p. [142](#)).
- [121] D. JAUFFRÈS, R. DENDIEVEL et M. VERDIER. « Architectural optimization of porous Ultra Low K dielectric material via Finite Element simulations. » In : *Thin Solid Films* 520.1 (2011), p. 430–436 (cf. p. [143](#), [144](#)).
- [122] W. PABST, E. GREGOROVÁ et G. TICHÁ. « Elasticity of porous ceramics : A critical study of modulusporosity relations ». In : *Journal of the European Ceramic Society* 26.7 (2006), p. 1085–1097 (cf. p. [143](#)).
- [123] Z. HASHIN et S. SHTRIKMAN. « Note on a variational approach to the theory of composite elastic materials ». In : *Journal of the Franklin Institute* 271.4 (1961), p. 336–341 (cf. p. [144](#)).

- 
- [124] S. HEITKAM. « Manipulation of liquid metal foam with electromagnetic fields : a numerical study ». Thèse de doct. 2014 (cf. p. [144](#)).
- [125] J. MATHEWS et R. L. WALKER. *Mathematical Methods of Physics*. en. W. A. Benjamin, 1970 (cf. p. [170](#), [171](#), [184](#)).