



HAL
open science

**Etude de relaxations en traitement d'images.
Application à la segmentation et autres problèmes
multi-étiquettes.**

Romain Yildizoglu

► **To cite this version:**

Romain Yildizoglu. Etude de relaxations en traitement d'images. Application à la segmentation et autres problèmes multi-étiquettes.. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0129 . tel-01155058

HAL Id: tel-01155058

<https://theses.hal.science/tel-01155058>

Submitted on 26 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ECOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET CALCUL SCIENTIFIQUE

Par Romain, YILDIZOGLU

**ETUDES DE RELAXATIONS EN TRAITEMENT D'IMAGES.
APPLICATION A LA SEGMENTATION ET AUTRES
PROBLEMES MULTI-ETIQUETTES**

Sous la direction de : Jean-François, AUJOL
co-directeur : Charles, DOSSAL
co-directeur : Nicolas, PAPADAKIS

Soutenue le 8 juillet 2014.

Membres du jury :

M. ALMANSA, Andrés, Chargé de Recherche, CNRS LTCI, Télécom ParisTech	Rapporteur
M. MASNOU, Simon, Professeur, Institut Camille Jordan, Université Lyon 1	Rapporteur
M. BERTHIER, Michel, Professeur, Laboratoire MIA, Université de La Rochelle	Examineur
M. AUJOL, Jean-François, Professeur, Institut de Mathématiques de Bordeaux	Directeur
M. DOSSAL, Charles, Maître de Conférence, Institut de Mathématiques de Bordeaux	Directeur
M. PAPADAKIS, Nicolas, Chargé de Recherche, Institut de Mathématiques de Bordeaux	Directeur

Résumé

Cette thèse étudie différentes relaxations pour minimiser des fonctionnelles non convexes qui apparaissent en traitement d'images. Des problèmes comme la segmentation d'image peuvent en effet s'écrire comme un problème de minimisation d'une certaine fonctionnelle, le minimiseur représentant la segmentation recherchée. Différentes méthodes ont été proposées pour trouver des minima locaux ou globaux de la fonctionnelle non convexe du modèle de Mumford-Shah constant par morceaux à deux phases. Certaines approches utilisent une relaxation convexe qui permet d'obtenir des minima globaux de la fonctionnelle non convexe. On rappelle et compare certaines de ces méthodes et on propose un nouveau modèle par bande étroite, qui permet d'obtenir des minima locaux tout en utilisant des algorithmes robustes qui proviennent de l'optimisation convexe. Ensuite, on construit une relaxation convexe d'un modèle de segmentation à deux phases qui repose sur la comparaison entre deux histogrammes donnés et les histogrammes estimés globalement sur les deux régions de la segmentation. Des relaxations pour des problèmes multi-étiquettes à plusieurs dimensions comme le flot optique sont également étudiées. On propose une relaxation convexe avec un algorithme itératif qui ne comprend que des projections qui se calculent exactement, ainsi qu'un nouvel algorithme pour une relaxation convexe sur chaque variable mais non convexe globalement. On étudie la manière d'estimer une solution du problème non convexe original à partir d'une solution d'un problème relaxé en comparant des méthodes existantes avec des nouvelles.

Mots clés

Traitement d'images, segmentation, flot optique, convexification, relaxation, problèmes multi-étiquettes, histogrammes

Abstract

In this thesis we study different relaxations of non-convex functionals that can be found in image processing. Some problems, such as image segmentation, can indeed be written as the minimization of a functional. The minimizer of the functional represents the segmentation. Different methods have been proposed in order to find local or global minima of the non-convex functional of the two-phase piecewise constant Mumford-Shah model. With a convex relaxation of this model we can find a global minimum of the non-convex functional. We present and compare some of these methods and we propose a new model with a narrow band. This model finds local minima while using robust convex optimization algorithms. Then a convex relaxation of a two-phase segmentation model is built that compares two given histograms with those of the two segmented regions. We also study some relaxations of high-dimension multi-label problems such as optical flow computation. A convex relaxation with a new algorithm is proposed. The algorithm is iterative with exact projections. A new algorithm is given for a relaxation that is convex in each variable but that is not convex globally. We study the problem of constructing a solution of the original non-convex problem with a solution of the relaxed problem. We compare existing methods with new ones.

Key words

Image processing, segmentation, optical flow, convexification, relaxation, multilabel problems, histograms

Remerciements.

Je remercie mes directeurs, Jean-François Aujol, Charles Dossal et Nicolas Papadakis pour leur aide et leur soutien durant cette thèse, ainsi que pour leur motivation quand moi j'en manquais. Je remercie les membres de mon jury, Andrés Almansa, Michel Berthier et Simon Masnou qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux. Les services administratifs et informatiques de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux ont toujours été présents et ont beaucoup facilité l'élaboration de cette thèse.

La vie dans le bureau 155 était agréable grâce à la bonne humeur de Camille et Marc, qui ont dû me supporter pendant tout ce temps. Les discussions et les repas entre membres de l'équipe image ont été un plaisir et ont alimenté une bonne ambiance entre collègues. Les sorties entre doctorants ont bien rythmé l'année et qu'ils ne s'inquiètent pas, je reviendrai !

Table des matières

1	Préliminaires sur des algorithmes de type primal-dual.	35
1.1	Descente de gradient à pas fixe.	35
1.2	Opérateur proximal.	36
1.3	Les algorithmes Forward-Backward et Douglas-Rachford.	37
1.4	D'un problème de minimisation à un problème de point selle.	38
1.5	Des algorithmes de type primal dual.	39
1.6	Un algorithme primal dual préconditionné.	42
I	Relaxations pour la segmentation binaire.	43
2	Le modèle de Mumford-Shah constant par morceaux à deux phases.	45
2.1	Introduction.	45
2.2	La formulation par lignes de niveaux de Chan et Vese.	47
2.3	La formulation convexe de Chan, Esedoglu et Nikolova.	48
2.4	Une formulation duale du problème convexe.	49
2.4.1	Minimisation et convergence.	50
2.4.2	Implémentation numérique.	51
2.4.3	La bande étroite : minima locaux et réduction de la dimension.	52
2.4.4	Expériences et comparaisons.	54
2.5	Conclusion.	55
3	Une formulation convexe reposant sur la comparaison d'histogrammes globaux pour la segmentation binaire.	59
3.1	Introduction.	59
3.2	Une formulation variationnelle convexe.	61

3.2.1	Notations.	61
3.2.2	Convexification.	62
3.2.3	Le terme de données l^1	64
3.2.4	Optimisation numérique.	65
3.3	Applications.	66
3.3.1	Images en niveaux de gris.	67
3.3.2	Images en couleurs.	68
3.3.3	Tenseur de structure.	69
3.3.4	Local Binary Patterns.	71
3.4	Comparaison avec d'autres approches.	72
3.4.1	Comparaison avec les approches locales.	72
3.4.2	Comparaisons avec l'approche par gradients de forme de (Peyré et al., 2012).	75
3.4.3	Conclusion.	76

II Modèles convexes et non convexes pour les problèmes multi-étiquettes. 79

4 Introduction. 81

5 Convexification du problème multi-étiquettes 1D. 85

5.1	Convexification du problème multi-label 1D avec des surlignes de niveau.	86
5.1.1	Optimisation numérique.	89
5.2	Une nouvelle convexification reposant sur un point de vue pro- babiliste.	90
5.2.1	Optimisation numérique.	92
5.2.2	Équivalence avec le problème original (5.19).	93
5.3	Connections avec l'approche de (Chambolle et al., 2011).	94

6 Convexification du problème multi-étiquettes 2D. 97

6.1	Relaxation indépendante.	98
6.1.1	Terme de données non convexe.	98
6.1.2	Convexification du terme de données.	104
6.2	Une autre convexification.	109
6.2.1	Convexification avec les surlignes de niveaux.	110
6.2.2	Le point de vue probabiliste 2D.	111

7	Du problème relaxé au problème original.	115
7.1	Les fonctions boîtes.	115
7.2	Fonctions escalier.	116
7.3	Comment choisir une fonction boîte pour approximer une solution du problème original.	118
7.4	Comparaison avec les autres approches.	121
8	Applications.	129
8.1	Le cas 1D.	129
8.1.1	Segmentation par la couleur.	129
8.1.2	Disparité.	129
8.2	Flot optique 2D.	131
8.3	Expériences avec $N = 3$	132
8.3.1	Flot optique avec un masque d'occultation.	132
8.3.2	Le modèle de Chan et Vese.	132
8.4	Conclusion.	133
9	Conclusion.	137
10	Annexe : segmentation de la ceinture graisseuse sur des images obtenues par IRM.	139
	Bibliographie	145

Introduction.

Dans cette thèse, le problème de la segmentation sera le fil conducteur. La segmentation consiste à découper une image en plusieurs régions. Ces régions peuvent être les objets qui nous intéressent, ou une étape intermédiaire dont les éléments seront utilisés pour trouver les objets particuliers contenus dans l'image.

Une première étape peut consister à partitionner l'image en régions sur lesquelles elle est régulière. Un modèle variationnel de ce problème donné par (Mumford and Shah, 1989) sera décrit plus loin.

On peut trouver dans les images des parties que l'on appelle texturées, comme un nuage, du sable, une forêt. À une certaine échelle, ces régions peuvent être irrégulières, si l'on considère les variations de l'image en couleurs ou en niveaux de gris. Elles possèdent néanmoins une certaine uniformité dans leurs irrégularités. Ainsi il est parfois possible de se ramener au cas précédent en découpant l'image en régions à l'intérieur desquelles un certain critère numérique de la texture varie peu.

D'autres moyens peuvent être utilisés en conjonction ou à la place de ces types de découpage, comme de la reconnaissance de formes ou l'usage de méthodes d'apprentissage. Un grand éventail de ces techniques en interaction est décrit dans (Farabet et al., 2013).

Dans un premier temps, on se concentre sur des modèles variationnels inspirés de (Mumford and Shah, 1989) qui ne considèrent que l'image elle-même et éventuellement la donnée d'une valeur moyenne ou d'un histogramme attendu pour une région. Sont abordées ensuite des extensions de certaines méthodes développées pour ces modèles à d'autres problèmes comme le calcul de disparité entre deux images et le flot optique.

Dans (Mumford and Shah, 1989) une segmentation est cherchée comme minimiseur de la fonctionnelle

$$E(f, \Gamma) = \mu^2 \int \int_{\Omega} (f - g)^2 dx dy + \int \int_{\Omega - \Gamma} \|\nabla f\|^2 dx dy + \nu |\Gamma|$$

avec Ω le domaine de l'image, g l'image, f l'approximation recherchée, Γ une union d'arcs qui représente les discontinuités de f , f étant supposée dérivable sur $\Omega - \Gamma$, et $|\Gamma|$ la longueur de Γ . Un f qui minimise la fonctionnelle est alors une approximation dérivable par morceaux de l'image initiale. Une segmentation est donnée par les composantes connexes de $\Omega - \Gamma$. La version constante par morceaux s'obtient en considérant la fonctionnelle

$$E(f, \Gamma) = \sum_i \int \int_{R_i} (a_i - g)^2 dx dy + \nu |\Gamma|$$

où f est une fonction constante par morceaux, les R_i représentant les régions sur lesquelles f est constante et vaut a_i , Γ est l'union des frontières des R_i . La partie I traite du problème avec deux régions. Le problème avec un nombre de régions fixé sera vu dans un deuxième temps comme un cas particulier des problèmes multi-étiquettes abordés dans la partie II.

Le plan est le suivant. La partie I aborde le cas binaire, c'est à dire la segmentation simple où il n'existe que deux étiquettes possibles. Le chapitre 2 passe en revue différentes méthodes déjà proposées pour résoudre le problème. Elles sont comparées entre elles en mettant en avant les méthodes récentes d'optimisation de type primal-dual. Ensuite un nouveau modèle avec bande étroite entre analyse convexe et approche par contours actifs est proposé. Son intérêt est de ne faire des calculs que sur une sous-partie de l'image et d'obtenir des résultats locaux comme les approches par contours actifs. Une telle approche permet plus de souplesse grâce au choix de la taille de la bande, tout en profitant de la convexité pour l'optimisation.

Puis au chapitre 3, je propose un nouveau modèle de segmentation convexe. Il prend comme données des histogrammes et non plus des valeurs moyennes et compare les histogrammes estimés globalement sur les deux régions avec des histogrammes donnés, tout en étant convexe. Des applications avec des histogrammes de différents types illustrent son intérêt : niveaux de gris, couleur, tenseur de structure... Ce nouveau modèle peut être transposé à d'autres problèmes avec un terme de données qui compare des histogrammes.

Dans la partie II j'étudie des problèmes multi-étiquettes. On s'intéresse aux éventuelles relaxations convexes ainsi qu'à la manière d'obtenir une solution au problème non convexe à partir d'une solution d'une relaxation du problème.

Dans le chapitre 5 je présente le cas en une dimension, c'est à dire le cas où les étiquettes sont dans un sous-ensemble fini de \mathbb{R} , donc ordonnées. Celui-ci est bien maîtrisé et permet de présenter le cas où le problème est résolu. L'état de l'art est décrit et je propose une nouvelle approche. Cette approche se révèle équivalente à une ancienne, mais conduit à un algorithme plus simple et de plus suggère d'autres moyens pour obtenir une solution à partir du problème relâché en dimensions plus grandes.

Au chapitre 6 le cas de la dimension deux est discuté. C'est le cas où l'ensemble des étiquettes est $\Gamma_u \times \Gamma_v \subset \mathbb{R}^2$ avec Γ_u et Γ_v finis. Il n'y a alors plus de relation d'ordre entre les étiquettes. On revoit différentes approches existantes puis je présente deux nouveaux algorithmes. L'un est une relaxation convexe dont l'idée de départ est probabiliste. Il se ramène à d'autres

approches mais l'écriture suggère un nouvel algorithme sans boucles internes. En effet les algorithmes que l'on considère (voir le chapitre 1) sont tous itératifs. Ils comportent des projections orthogonales à chaque itération, or dans le nouvel algorithme on obtient une contrainte sur laquelle une projection exacte est connue, ce qui n'est pas le cas dans les algorithmes proposés précédemment. Il n'y a donc pas d'algorithme itératif pour cette projection, donc pas de boucle interne à l'itération. L'autre nouvel algorithme est mis en place pour minimiser une relaxation qui n'est pas convexe mais qui donne de bons résultats.

Ensuite au chapitre 7 je discute le problème d'obtenir des solutions du problème initial à partir de solutions d'un problème relaxé. En effet les fonctionnelles des problèmes relaxés ont un domaine plus large que les fonctionnelles du problème initial. Si la solution du problème relaxé appartient au domaine de la fonctionnelle originale, alors c'est une solution du problème original, sinon il faut décider d'un moyen d'obtenir une fonction dans le domaine original. Je propose et compare différentes méthodes et montre que les méthodes utilisées dans la littérature ne sont pas toujours optimales. Ainsi une relaxation non convexe qui obtient de bons minima locaux, et pour laquelle revenir proprement au domaine de la fonctionnelle d'origine se fait sans modifier la valeur de la fonctionnelle, peut être compétitive avec des relaxations convexes pour lesquelles la valeur de la fonctionnelle augmente en revenant au domaine original.

On donne dans le chapitre 8 différentes expériences numériques pour des problèmes dont les ensembles d'étiquettes sont du type $\prod_{i=1}^N \Gamma_i$, avec $\Gamma_i \subset \mathbb{R}$ fini, $1 \leq N \leq 3$ dans les problèmes considérés, avant de conclure.

En annexe, dans le chapitre 10, je présente un algorithme pour segmenter la ceinture graisseuse sur des images obtenues par IRM. Cet algorithme que j'ai conçu a été utilisé dans le cadre d'une collaboration avec les coauteurs de (Antoine et al., 2014) entre l'Institut de Mathématiques de Bordeaux et les départements de radiothérapie et de chirurgie de l'Institut Bergonié, centre régional de lutte contre le cancer de Bordeaux et du Sud-Ouest.

Résumé étendu.

Je présente différentes relaxations pour des problèmes de segmentation et d'autres problèmes multi-étiquettes. Dans la partie I je m'intéresse au problème de la segmentation binaire, donc de la segmentation avec deux étiquettes. Tout d'abord, dans le chapitre 2, des méthodes qui reposent sur le niveau de gris moyen sont comparées. Je propose ensuite une nouvelle approche par bande étroite pour ce problème. Puis dans le chapitre 2 je développe un modèle de segmentation convexe qui prend en compte les histogrammes globaux des deux régions.

Dans la partie I, le cadre est élargi à des problèmes multi-étiquettes. Je reviens sur le cas monodimensionnel dans le chapitre 5. Une convexification permet de résoudre ce problème, comme c'est le cas pour la segmentation binaire présentée au chapitre I. Je propose un nouveau modèle et un nouvel algorithme sans boucle interne pour ce problème. En effet les algorithmes que l'on considère (voir le chapitre 1) sont tous itératifs. Ils comportent des projections orthogonales à chaque itération, or dans le nouvel algorithme on obtient une contrainte sur laquelle une projection exacte est connue, ce qui n'est pas le cas dans les algorithmes proposés quand les étiquettes ne sont plus dans \mathbb{R} mais dans \mathbb{R}^k avec $k \geq 2$. Ensuite, dans le chapitre 6, j'étudie le cas à deux dimensions, c'est à dire celui où les étiquettes sont dans \mathbb{R}^2 . Je présente l'état de l'art et propose un nouvel algorithme pour un modèle non convexe, ainsi qu'un nouveau modèle convexe avec un algorithme sans boucle interne. J'étudie au chapitre 7 comment revenir au problème initial à partir des problèmes relaxés. En effet le domaine du problème relaxé est plus large que celui du problème original, donc l'estimation d'une solution du problème relaxé n'est pas toujours suffisante pour résoudre le problème initial. Je propose de nouvelles méthodes et les compare à celles proposées dans la littérature. Ces méthodes permettent d'améliorer les résultats et on constate que des modèles non convexes peuvent faire aussi bien que des mo-

dèles convexes quand le problème du retour au modèle initial est pris en considération.

Relaxations pour la segmentation binaire.

J'étudie différents modèles pour la segmentation binaire, c'est à dire avec seulement deux classes. Des approches inspirées du modèle de Mumford-Shah constant par morceaux à deux phases qui utilisent le niveau de gris moyen des deux régions sont passées en revue au chapitre 2. Je propose un nouveau modèle avec bande étroite qui a fait l'objet de la publication (Yildizoglu et al., 2012).

Ensuite un histogramme plutôt qu'une valeur moyenne est considéré pour caractériser les régions. Un nouveau modèle convexe qui segmente en comparant des histogrammes donnés aux histogrammes estimés globalement sur chaque région est présenté au chapitre 3. Cet algorithme a été présenté dans (Yildizoglu et al., 2013).

Le modèle de Mumford-Shah constant par morceaux à deux phases.

J'ai exposé cette étude et la présentation du modèle avec bande étroite dans (Yildizoglu et al., 2012). Dans la première partie, j'étudie le modèle de segmentation binaire donné par la minimisation de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx. \quad (1)$$

Ici u est une fonction binaire qui représente la segmentation, Ω le domaine de l'image, I l'image observée en niveaux de gris, c_1 et c_2 des niveaux de gris qui sont les niveaux de gris moyens des deux régions, et $\int_{\Omega} |Du|$ est la variation totale de u . Elle représente la longueur de la frontière entre les deux régions qui est supposée finie, voir la définition 3 de la section 2.1 pour plus de détails.

Ce modèle dérivé du problème posé dans (Mumford and Shah, 1989) a été abordé de différentes manières. Deux principales difficultés doivent être prises en compte. Premièrement cette fonctionnelle n'est pas convexe car son domaine de définition ne l'est pas. En effet si u_0 et u_1 sont deux fonctions à valeurs dans $\{0, 1\}$ et si $t \in]0, 1[$, alors $tu_0 + (1 - t)u_1$ est à valeurs dans

$\{0, 1\}$ si et seulement si $u_0 = u_1$. Deuxièmement le terme de régularisation n'est pas dérivable partout. Différentes approches sont présentées de manière chronologique.

Tout d'abord dans la section 2.2 la méthode des contours actifs par lignes de niveaux de (Chan and Vese, 2001) est revue. Celle-ci représente les deux régions comme les parties positives et négatives d'une fonction lisse ϕ . La fonctionnelle devient

$$J(\phi) = \int_{\Omega} |\nabla H_{\epsilon}(\phi(x))| dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 H_{\epsilon}(\phi(x)) dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - H_{\epsilon}(\phi(x))) dx. \quad (2)$$

avec H_{ϵ} une approximation lisse de la fonction de Heaviside. Cette approximation donne de l'épaisseur au contour et permet de faire des calculs. Un minimum local de cette fonctionnelle peut être obtenu en utilisant une descente de gradient. L'algorithme dépend fortement du contour initial, demande de faire attention au pas utilisé dans la descente et la fonction ϕ doit être régulièrement réinitialisée en une fonction distance signée au contour.

Dans la section 2.3 on présente la convexification de (Chan et al., 2006). Elle permet d'obtenir un minimum global de la fonctionnelle (1) en prenant u à valeurs dans tout l'intervalle $[0, 1]$. La fonctionnelle (1) devient alors convexe et, en lissant le terme de régularisation comme précédemment, un algorithme de gradient projeté permet d'estimer un minimum global. Il est alors possible d'obtenir un minimum global du problème original en seillant la solution du problème convexifié.

Enfin l'application d'algorithmes de type primal-dual de (Chambolle and Pock, 2011) au problème convexifié comme précédemment permet de trouver un minimum global de la fonctionnelle originale sans lisser le terme de régularisation. Ceux-ci utilisent la relation

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}} \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx \quad (3)$$

où la variable duale \mathbf{z} est un vecteur défini sur le cercle unité avec $\mathcal{B} = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2), |\mathbf{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \leq 1\}$. Le problème de minimisation peut alors s'écrire comme un problème de point selle

$$(u^*, \mathbf{z}^*) = \operatorname{argmin}_{0 \leq u \leq 1} \operatorname{argmax}_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}} J(u, \mathbf{z}),$$

où la fonctionnelle J est définie par :

$$\begin{aligned}
J(u, \mathbf{z}) = & \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx \\
& + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

Ces dernières méthodes ne dépendent pas de l'initialisation, ce qui peut être un bienfait mais parfois n'est pas ce qui est cherché. Une nouvelle méthode par bande étroite inspirée de (Baeza et al., 2010) est alors proposée. Elle permet d'obtenir des résultats locaux comme les modèles par contours actifs, mais sans lisser le terme de données et avec moins de paramètres internes à régler. Comme les contours actifs, cette méthode permet de diminuer la taille mémoire en ne mettant à jour la segmentation que sur une sous-partie de l'image à chaque itération.

La méthode par bande étroite consiste à n'optimiser la fonctionnelle que sur une bande autour de la frontière courante. Quand un minimum est atteint une nouvelle bande est définie autour de la nouvelle frontière. L'algorithme consiste à répéter cette étape et s'arrête quand la frontière n'est plus modifiée. La fonctionnelle minimisée à chaque étape est :

$$\begin{aligned}
J(u, \mathbf{z}) = & \int_{B_l} u \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx + \lambda \int_{B_l} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx \\
& + \lambda \int_{B_l} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx + \frac{\gamma}{2} \int_{B_l} \|u - \mathbf{u}_l\|^2 dx,
\end{aligned} \tag{5}$$

avec $u(x) = \mathbf{u}_l(x)$, pour $x \in \Omega \setminus B_l$, B_l est la bande courante et $\gamma > 0$. Les trois derniers termes de la fonctionnelle qui correspondent aux données forment désormais un opérateur uniformément convexe en la variable u , avec comme paramètre de convexité γ . La version accélérée de l'algorithme de (Chambolle and Pock, 2011) peut alors être utilisée.

La taille de la bande permet plus de souplesse dans le concept de minimum local. En effet pour passer d'un objet à l'autre il faut que le rayon de la bande soit plus grand que la distance qui les sépare. Si par exemple l'objectif est de segmenter des groupements d'objets (des cellules, des bâtiments...), il est possible de choisir une taille de bande qui permette de segmenter un groupement sans passer d'un groupement à l'autre. Une illustration est donnée Figure 1.

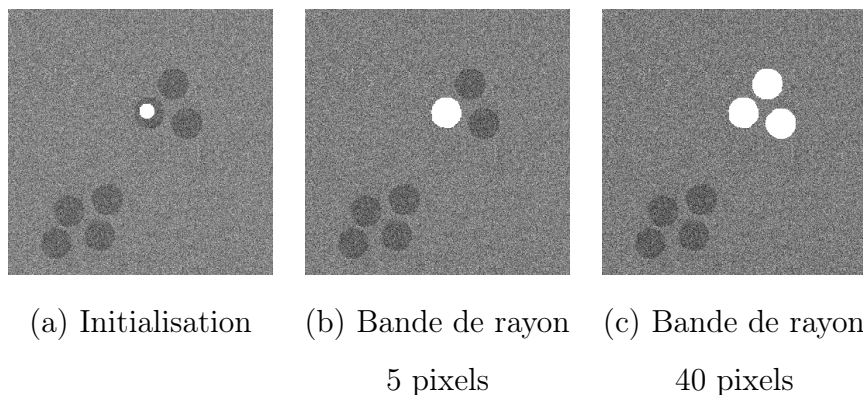


FIGURE 1 – La taille de la bande étroite permet un réglage plus fin de la segmentation. Si comme ici l’image est composée de deux amas de petits objets, en initialisant comme dans l’image (a) le modèle convexe va segmenter tous les objets. Par contre une bande suffisamment petite permet de n’en segmenter qu’un, c’est ce qui est obtenu dans l’image (b), et un rayon intermédiaire permet de segmenter un amas mais pas l’autre comme dans l’image (c).

Une formulation convexe reposant sur la comparaison d’histogrammes globaux pour la segmentation binaire.

Il peut être avantageux de donner plus d’informations dans le modèle qu’une valeur moyenne. Je propose d’utiliser un histogramme en attache aux données, et de développer un nouveau modèle de segmentation qui compare globalement des histogrammes fixés avec ceux estimés sur les deux régions, tout en étant convexe. J’ai présenté ce travail dans (Yildizoglu et al., 2013). La prise en compte d’un histogramme donne plus de possibilités mais est aussi une source de non convexité. Les histogrammes sont supposés fournis par l’utilisateur, ils sont par exemple estimés sur une région donnée de l’image.

Le modèle de départ est semblable à celui de (Chan and Vese, 2001) étudié au chapitre 2, mais avec des histogrammes dans le terme de données. Il consiste à trouver un minimiseur de la fonctionnelle :

$$J(u) = TV(u) + \|(h_u - h^1)_{\lambda \in \Lambda}\| + \|(h_{1-u} - h^0)_{\lambda \in \Lambda}\| \quad (6)$$

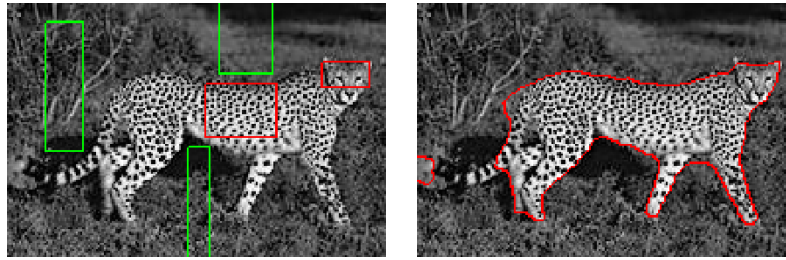
avec u la segmentation, $TV(u)$ la longueur de la frontière entre les deux régions, h^1 et h^0 les deux histogrammes donnés, h_u et h_{1-u} les histogrammes correspondants aux deux régions caractérisées respectivement par $u = 1$ et

$u = 0$, et $\| \cdot \|$ une norme. Ce modèle n'est pas convexe car son domaine ne l'est pas, comme pour la segmentation constante par morceaux. Cet obstacle est surmonté de la même manière qu'au chapitre 2 en prenant u à valeurs dans un intervalle. Ce modèle est également non convexe à cause du terme de données. Pour rendre la fonctionnelle convexe, la différence entre les histogrammes non normalisés est prise au lieu des histogrammes normalisés. Un poids est introduit pour pouvoir éventuellement compenser la différence d'aire entre les deux régions. Le modèle convexe final s'écrit :

$$\begin{aligned}
J(u) = & TV(u) + \frac{1}{\beta} \left\| \left(\langle u, g_\lambda^1 \rangle_\Omega \right)_{\lambda \in \Lambda} \right\| \\
& + \frac{1}{1 - \beta} \left\| \left(\langle 1 - u, g_\lambda^0 \rangle_\Omega \right)_{\lambda \in \Lambda} \right\|.
\end{aligned} \tag{7}$$

avec u à valeurs dans $[0, 1]$, $g_\lambda^1(x) := \mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - h^1(\lambda)$ et $g_\lambda^0(x) := \mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - h^0(\lambda)$, I l'image et $\mathbb{1}_{I=\lambda}(x)$ la fonction qui vaut 1 sur la ligne de niveau λ de l'image et 0 sinon. Le cas particulier de la norme l^1 pour comparer les histogrammes est étudié.

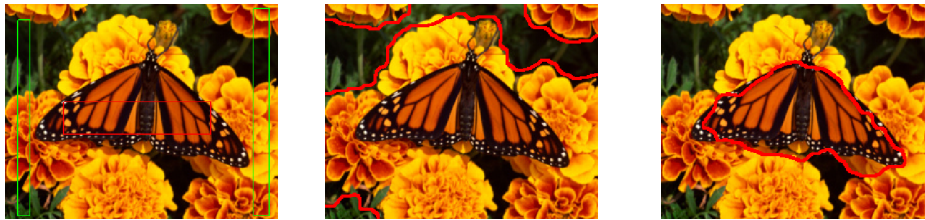
Le caractère global de la comparaison des histogrammes est illustré. Des cas pour lesquels il est utile de l'utiliser sont donnés, comme dans la Figure 3, sachant que le coût en calcul est plus grand et le retour au problème original non assuré. Une variante utilisant les histogrammes cumulés est proposée, un exemple de segmentation avec ce modèle est montré dans la Figure 2. Elle permet de prendre en compte une distance entre les différentes classes de l'histogramme et peut ainsi rendre la comparaison plus robuste. L'indépendance à l'initialisation est également illustrée. Des exemples sont présentés qui utilisent les histogrammes de niveaux de gris, de couleurs, ou des attributs de texture comme pour les images de la Figure 4. Pour ces dernières, c'est le tenseur de structure qui caractérise la texture, c'est à dire la matrice $(I_{x_i} I_{x_j})_{1 \leq i, j \leq 2}$ avec I_{x_1} et I_{x_2} les dérivées dans les directions horizontales et verticales de l'image I , voir (Bigun et al., 1991) pour plus de détails.



(a) Image initiale

(b) Segmentation

FIGURE 2 – Segmentation avec les histogrammes cumulés en niveaux de gris.



(a) Image initiale

(b) Segmentation avec
le modèle local

(c) Segmentation avec
le modèle global

FIGURE 3 – Segmentation d’une image où les histogrammes locaux sont différents des histogrammes globaux. La segmentation échoue pour le premier modèle car il classe les voisinages orangés d’un côté et les voisinages sombres de l’autre. Les histogrammes estimés à partir de la segmentation sont moins proches que ceux obtenus par la méthode globale.

J’ai ainsi proposé deux nouveaux modèles pour la segmentation binaire. Le premier est une méthode par bande étroite pour la segmentation binaire constante par morceaux définie par la fonctionnelle (1). Cette méthode permet de trouver des minima locaux de la fonctionnelle (1) sans faire d’approximations, et d’avoir une certaine maîtrise de la localité du résultat en modifiant la taille de la bande. Le deuxième modèle proposé permet de segmenter une image en deux en caractérisant les régions non plus par leurs moyennes mais par leurs histogrammes. Ce modèle est convexe, et donc robuste à l’initialisation, et les histogrammes sont estimés sur l’ensemble de la

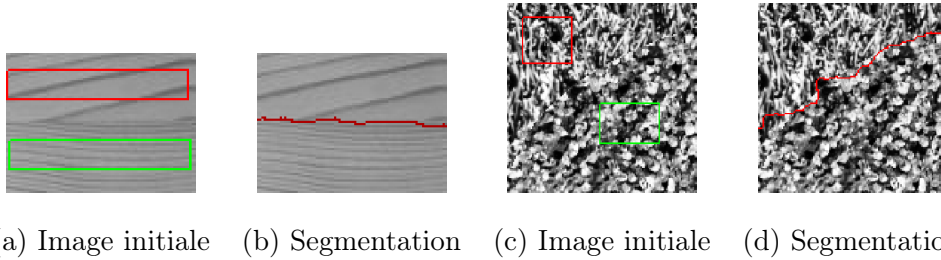


FIGURE 4 – Segmentation d’une image de bois et d’une image composée de deux textures en utilisant le tenseur de structure.

segmentation, et pas seulement sur des voisinages. J’aborde ensuite dans la partie II le cas où le problème a plus de deux étiquettes, et j’étudie, comme dans la partie I, les possibilités de résoudre ce problème en passant par des relaxations de la fonctionnelle.

Modèles convexes et non convexes pour les problèmes multi-étiquettes.

Après avoir considéré le modèle binaire, j’aborde le modèle multi-étiquettes dans la partie II. J’ai exposé ce travail dans (Papadakis et al., 2013). Plus précisément je considère les problèmes du type

$$J_N(u) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |Du_i(x)| + \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) dx, \quad (8)$$

avec $u = [u_1, \dots, u_N]$. Les $u_i : \Omega \mapsto \Gamma_i$ (avec $1 \leq i \leq N$) prennent leurs valeurs dans un ensemble discret prédéfini contenant M_i éléments ordonnés $\Gamma_i = \{u_0^i < \dots < u_{M_i-1}^i\}$. La fonction positive des données $\rho(x, u(x))$ représente le coût d’assigner la valeur $u(x)$ au pixel x . Cette partie traite des relaxations de ce type de problèmes, et plus particulièrement de la manière de trouver une solution du problème original à partir d’une solution d’une relaxation du problème. En effet, lorsque la dimension N du problème est supérieure ou égale à deux, le retour au problème original n’est pas immédiat.

Je présente l’état de l’art ainsi qu’un nouvel algorithme sans boucles internes. Différentes méthodes pour passer du domaine de la fonctionnelle relaxée à celui de la fonctionnelle originale sont comparées. Il est montré que les

méthodes utilisées dans la littérature ne sont pas optimales. Il peut même être avantageux de considérer des relaxations non convexes mais pour lesquelles on sait revenir au problème original. Pour l'illustrer un nouveau schéma numérique est proposé pour un modèle non convexe, mais convexe en chaque variable, qui donne d'aussi bons résultats que les modèles convexes. Les trois principales contributions de ce chapitre sont :

- La mise au point d'un modèle convexe avec un algorithme sans boucle interne
- L'écriture pour un modèle non convexe d'un nouvel algorithme qui donne de meilleurs résultats
- La comparaison d'anciennes et de nouvelles méthodes pour obtenir un bon résultat pour le problème initial à partir d'une solution d'une relaxation, cette comparaison met à jour des améliorations possibles.

Convexification du problème multi-étiquettes 1D.

On considère d'abord le cas de la dimension un. Ici la théorie est connue et la convexification permet de trouver un minimiseur global du problème original. Dans la section 5.1 la méthode de (Pock et al., 2008, 2010a) pour convexifier le problème est présentée. L'idée est d'écrire les non-linéarités de la fonctionnelle $J_1(u)$, définie par l'équation (8), d'une manière convexe, en introduisant une variable auxiliaire $\phi : \Omega \times \Gamma \mapsto \{0, 1\}$ qui représente les différentes valeurs discrètes possibles de u . Soit

$$\phi(x, s) = H(u(x) - s), \quad (9)$$

avec H la fonction de Heaviside ($H(s) = 1$ si $s \geq 0$ et 0 sinon). En fait la fonction u a été remplacée par les fonctions indicatrices de ses surlignes de niveaux. L'inconnue u peut être retrouvée à partir de ϕ par la formule

$$u(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \phi(x, u_i). \quad (10)$$

La fonctionnelle en une dimension peut alors s'écrire comme une fonction de ϕ au lieu de u .

$$\begin{aligned}
J_1(u) &= \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \int_{\Omega} |D_x \phi(x, u_i)| dx \\
&\quad + \sum_{i=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i) (\phi(x, u_i) - \phi(x, u_{i+1})) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}) \phi(x, u_{M-1}) dx \\
&= J(\phi),
\end{aligned} \tag{11}$$

et le problème de minimisation s'écrit :

$$\min_{\phi \in \mathcal{A}_0} J(\phi), \tag{12}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \{ \phi \in BV(\Omega \times \Gamma, \{0, 1\}) \text{ tels que} \\
&\quad \phi(x, u_0) = 1, \phi(x, u_i) \geq \phi(x, u_{i+1}) \}.
\end{aligned} \tag{13}$$

avec $BV(\Omega \times \Gamma, \{0, 1\})$ l'ensemble des fonctions à variation bornée définies sur $\Omega \times \Gamma$ et à valeurs dans $\{0, 1\}$, voir la définition 3 dans la section 2.1.

Pour obtenir la convexité, la fonction ϕ prend désormais ses valeurs dans $[0, 1]$. Un ensemble convexe de fonctions admissibles est alors introduit

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{ \phi \in BV(\Omega \times \Gamma, [0, 1]) \text{ tels que} \\
&\quad \phi(x, u_0) = 1, \phi(x, u_i) \geq \phi(x, u_{i+1}) \},
\end{aligned} \tag{14}$$

et le problème

$$\min_{\phi \in \mathcal{A}_1} J(\phi). \tag{15}$$

est maintenant convexe. Une solution du problème original est obtenue par reconstruction après avoir seuillé la fonction ϕ .

Dans la section 5.2 un nouveau point de vue est proposé. Celui-ci, plus probabiliste, amène à des schémas numériques plus simples et est équivalent à l'approche de (Chambolle et al., 2011) comme on le remarque section 5.3. L'idée est de modéliser les valeurs possibles de la fonction de données ρ avec

$$\min_{u \in \Gamma} \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) dx = \min_{w \in \mathcal{D}_1} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \rho(x, u_i) w(x, u_i) dx,$$

où $w(x, u_i)$ représente la probabilité d'assigner l'étiquette u_i au pixel x . L'équivalence avec le problème original est obtenue en considérant un certain espace pour w qui correspond à une assignation unique pour chaque pixel $x \in \Omega$: il existe un unique $\tilde{s} \in \Gamma$ avec $w(x, \tilde{s}) = 1$ et $w(x, s) = 0$ pour $s \neq \tilde{s}$. Puisque des probabilités avec des valeurs binaires sont impliquées, le problème de l'assignation n'est pas convexe. La nouvelle variable w est alors relâchée dans le simplexe

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ w : \Omega \times \Gamma \mapsto [0, 1], \text{ tels que } \sum_i w(x, u_i) = 1, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (16)$$

La fonctionnelle est alors

$$\begin{aligned} J_w(w) = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w(x, u_j) \right) \right| dx \\ & + \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \rho(x, u_i) w(x, u_i) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Le retour au problème original utilise le formalisme précédent en posant $\phi(x, u_i) = \sum_{j \geq i} w(x, u_j)$ et en observant que $w(x, u_i) = \phi(x, u_i) - \phi(x, u_{i+1})$. La fonction ϕ est construite à partir du minimiseur w , puis elle est seuillée et permet de reconstruire une solution du problème original. L'avantage de cette formulation est que, dans l'algorithme primal-dual pour estimer une solution, la projection sur le domaine est une projection sur le simplexe qui peut être effectuée de manière exacte.

Convexification du problème multi-étiquettes $2D$.

Dans la sous-section 6.1.1 le cas de la dimension deux est abordé, où il n'y a plus de théorie sur la manière de revenir au problème initial. La relaxation de (Papadakis et al., 2010) est présentée. Elle est convexe sur chaque dimension, mais n'est pas globalement convexe. En suivant la formulation probabiliste de la section 5.2, il y a maintenant deux fonctions w_u et w_v qui appartiennent à l'ensemble convexe des fonctions admissibles \mathcal{D}_1 :

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ w : \Omega \times \Gamma \mapsto [0, 1], \text{ s.t. } \sum_i w(x, u_i) = 1, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (18)$$

La relaxation suivante est alors considérée

$$\min_{(w_u, w_v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1} J(w_u, w_v), \quad (19)$$

avec

$$\begin{aligned} J(w_u, w_v) &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_j) w_u(x, u_i) w_v(x, v_j) \\ &\quad + \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_u(x, u_j) \right) \right| dx \\ &\quad + \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_v(x, v_j) \right) \right| dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Ce modèle a des propriétés intéressantes héritées du cas en une dimension pour ce qui est de revenir au problème original. Il est en effet possible de revenir au domaine original par seuillage sans augmenter la valeur de la fonctionnelle et d'obtenir un minimum local de la fonctionnelle originale. Le schéma de minimisation alternée de (Papadakis et al., 2010) est rappelé. Un nouveau schéma numérique plus couteux est proposé qui permet d'obtenir des valeurs de la fonctionnelle plus basses.

Dans la sous-section 6.1.2 est présentée la convexification de (Stekalovskiy et al., 2011) qui prend la biconjuguée du terme de données pour convexifier le problème. En modifiant légèrement l'approche de (Stekalovskiy et al., 2011), pour w_u et w_v définis comme précédemment, le terme de données convexifié est :

$$\max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\Omega} (w_u(x, u_i) q_u(x, u_i) + w_v(x, v_i) q_v(x, v_i)) \quad (21)$$

où les deux variables auxiliaires $q_u(x, u_i)$ et $q_v(x, v_j)$ sont définies dans l'ensemble convexe :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \{q_u : \Omega \times \Gamma_u \mapsto \mathbb{R}, q_v : \Omega \times \Gamma_v \mapsto \mathbb{R}, \\ &\quad \text{t.q. } q_u(x, u_i) + q_v(x, v_j) \leq \rho(x, u_i, v_j) \forall x \in \Omega, 0 \leq i, j \leq M-1\}. \end{aligned}$$

L'algorithme proposé nécessite des boucles internes pour approximer la projection sur \mathcal{Q} qui est itérative et l'obtention d'une solution du problème

original n'est plus immédiate. Ici les auteurs proposent de choisir pixel par pixel l'étiquette qui a le plus grand poids $w_u + w_v$.

Le modèle proposé dans (Brown et al., 2012) est considéré dans la section 6.2. Il étend la méthode des surlignes de niveau présentée section 5.1. La fonction $\phi(x, u_i, v_j) = H(u(x) - u_i)H(v(x) - v_j)$ est utilisée pour convexifier le problème.

La méthode d'optimisation utilise une projection itérative avec l'algorithme de Dijkstra qui n'est pas exacte pour chaque pixel à chaque itération. Le retour au problème original proposé est fait par seuillage mais ne garantit pas l'obtention d'une solution du problème original.

Ensuite l'adaptation en deux dimensions du nouveau modèle probabiliste présenté section 5.2 est détaillée. La variable $w(x, u_i, v_j)$ qui mesure la probabilité d'assigner la paire d'étiquettes $(u_i, v_j) \in \Gamma^u \times \Gamma^v$ au pixel $x \in \Omega$ est introduite. La fonctionnelle à minimiser est alors :

$$\begin{aligned}
J_w(w) = & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w(x, u_i, v_j) dx \\
& + \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k \geq i} w(x, u_k, v_j) \right| dx \\
& + \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{i=j}^{M-1} \left| D_x \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k \geq j} w(x, u_i, v_k) \right| dx.
\end{aligned} \tag{22}$$

sur le domaine convexe

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ w : \Sigma \mapsto [0, 1], \text{ s.t. } \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} w(x, u_i, v_j) = 1, \forall x \in \Omega \right\}. \tag{23}$$

Ce point de vue se révèle équivalent à la convexification précédente, mais le nouvel algorithme proposé utilise une projection exacte sur le simplexe et donne un algorithme sans itérations internes à gérer.

Comment revenir au problème original ?

On étudie dans le chapitre 7 le problème d'obtenir une solution du problème original à partir des solutions des problèmes relaxés présentés au chapitre 6. Ce thème est souvent laissé de côté dans la littérature. Ici différentes stratégies sont comparées pour chacune des méthodes.

On souligne tout d’abord ce qui rend le retour au problème initial plus délicat dans le cas à plusieurs dimensions. En effet la relation d’ordre est perdue et le seuillage ne définit plus un élément du domaine original.

De même que dans (Brown et al., 2012), les fonctions boîtes sont définies comme le cas où le seuillage fonctionne. Cependant lors des expériences numériques on constate qu’on peut obtenir des solutions qui ne sont pas des fonctions boîtes et pour lesquelles l’obtention d’une solution du problème initial n’est pas évidente. D’autres cas sont étudiés ainsi que différentes méthodes de seuillage pour passer du domaine relâché au domaine original.

Le terme de données et le terme de régularisation sont considérés séparément pour étudier le comportement des différentes méthodes. En effet les méthodes proposées pour revenir au domaine original favorisent systématiquement un terme par rapport à l’autre. On compare ensuite différentes méthodes de seuillage ainsi que la prise du meilleur poids en chaque pixel.

Le choix du seuil apparaît alors important pour les méthodes convexes. Ainsi choisir 1 comme seuil comme il est préconisé dans (Brown et al., 2012) n’est pas la meilleure solution. D’autre part les meilleurs résultats sont obtenus avec le meilleur seuil dans la méthode de (Stekalovskiy et al., 2011) et pas en prenant la meilleure étiquette pour chaque pixel.

Le modèle non convexe n’atteint pas forcément des valeurs aussi basses de la fonctionnelle relâchée mais perd peu lorsqu’il s’agit de revenir au problème initial. Il est de plus robuste au choix de la méthode utilisée pour revenir au problème initial, et avec le nouveau schéma de minimisation on obtient d’aussi bon résultats, voire de meilleurs, avec le modèle non convexe qu’avec le modèle convexe.

Applications.

Les applications sont présentées dans le chapitre 8. Tout d’abord des exemples sont donnés en une dimension avec la segmentation multi-étiquettes en niveaux de gris et l’estimation de disparité. L’algorithme proposé donne bien des résultats équivalents aux autres méthodes présentées. En dimension deux des exemples d’estimation de flot optique sont donnés. L’effet du choix du seuil selon les différentes méthodes est illustré dans la Figure 6, les données initiales étant données à la Figure 5.

En dimension trois un flot optique avec un masque d’occultation est présenté ainsi que le modèle de Chan et Vese pour lequel l’optimisation porte également sur les valeurs moyennes des régions. Les algorithmes décrits en

deux dimensions s'étendent ainsi en 3 dimensions et donnent des résultats corrects.

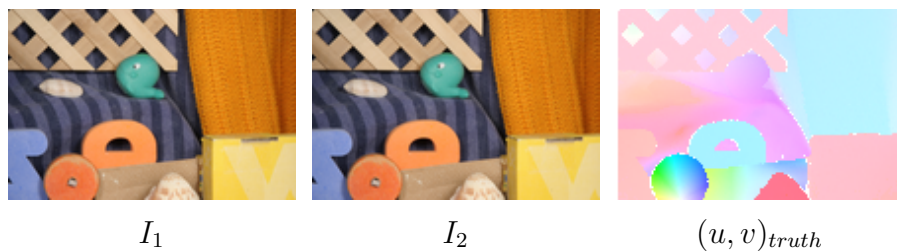


FIGURE 5 – Les images I_1 et I_2 sont tirées de la séquence RubberWhale de la base de données Middlebury. La vérité terrain du flot optique est présentée, les couleurs représentent la direction du flot, alors que l'intensité est liée à la norme du vecteur.

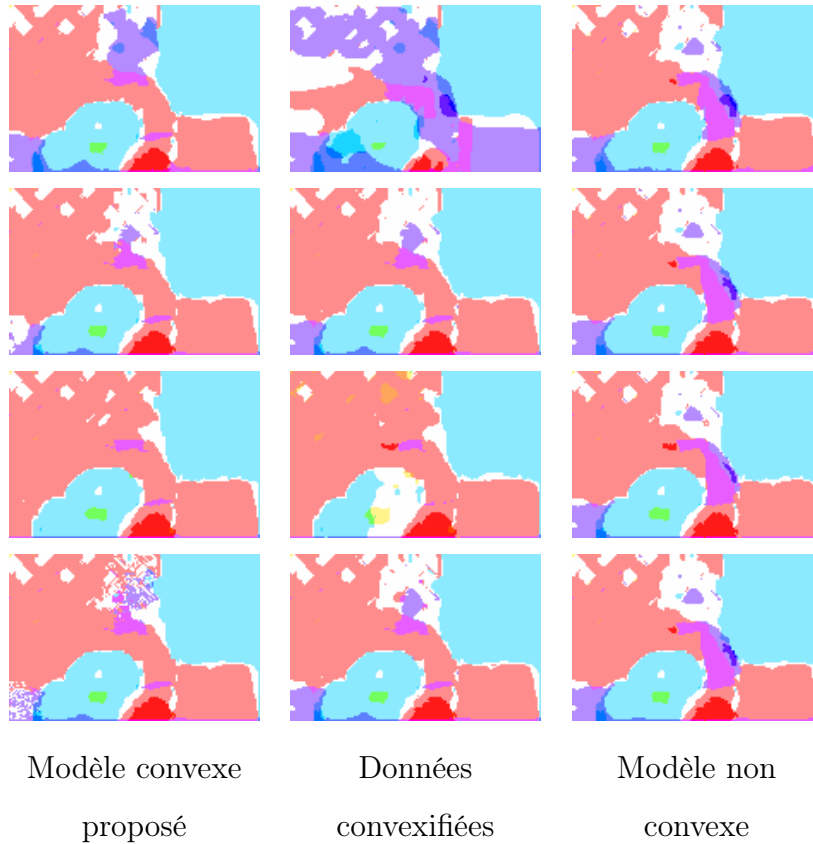


FIGURE 6 – Comparaison des flots optiques entre les images I_1 et I_2 présentées Figure 5. Ces flots sont estimés avec le modèle convexe proposé, le modèle convexe de (Stekalovskiy et al., 2011) et l’approche non convexe de (Papadakis et al., 2010) pour différents seuils.

Après avoir décrit les méthodes de l’état de l’art, j’ai donc proposé un nouveau modèle convexe avec un algorithme sans boucle interne, contrairement aux précédents, ainsi qu’un nouvel algorithme qui obtient de meilleurs résultats pour un modèle non convexe. Une autre contribution est l’étude des méthodes proposées dans l’état de l’art pour obtenir une solution du problème original à partir d’une solution d’un problème relâché. J’ai proposé de nouvelles méthodes pour ce retour au problème original, qui permettent d’obtenir de meilleurs résultats et qui soulignent l’importance de ce facteur dans le choix du modèle. En effet, à cause de ce problème, un modèle non

convexe peut se révéler dans certains cas plus performant que des modèles convexes.

Chapitre 1

Préliminaires sur des algorithmes de type primal-dual.

On utilisera régulièrement au cours des chapitres qui suivent des algorithmes de type primal-dual pour résoudre des problèmes de point selle. La définition d'un opérateur proximal est ici rappelée ainsi que les algorithmes de (Chambolle and Pock, 2011) et (Pock and Chambolle, 2011).

1.1 Descente de gradient à pas fixe.

La descente de gradient à pas fixe permet de minimiser des fonctions différentiables fortement convexe. La définition de la forte convexité est rappelée :

Définition 1. Une fonction F définie sur un convexe C de l'espace euclidien \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} est dite fortement convexe de paramètre m s'il existe $m > 0$ tel que :

$$\forall (u, v) \in C, \forall t \in]0, 1[, F(tu + (1-t)v) \leq tF(u) + (1-t)F(v) - \frac{1}{2}mt(1-t) \|u - v\|^2 \quad (1.1)$$

Théorème 1. Soit F définie sur \mathbb{R}^n , dérivable et fortement convexe de paramètre m , ∇F Lipschitzienne de paramètre L . Alors pour $0 < \rho < \frac{2m}{L^2}$ la suite définie par

$$u_{n+1} = \psi(u_n) = u_n - \rho \nabla F(u_n)$$

converge vers l'unique minimiseur de F .

L'unique minimiseur de F est un point fixe de la fonction ψ . Pour une fonction F qui vérifie les mêmes propriétés mais définie sur un convexe fermé, l'algorithme du gradient projeté est le même que celui à pas fixe en rajoutant une projection orthogonale sur le domaine de F :

Théorème 2. *Soit F définie sur un convexe fermé non vide C d'un espace euclidien U , dérivable et fortement convexe de paramètre m , ∇F Lipschitzienne de paramètre L . Alors pour $0 < \rho < \frac{2m}{L^2}$ la suite définie par*

$$u_{n+1} = P_C(u_n - \rho \nabla F(u_n))$$

converge vers l'unique minimiseur de F , avec P_C la projection orthogonale sur C .

Si F n'est pas dérivable sur son domaine ou n'est pas fortement convexe, ces itérations peuvent être remplacées sous certaines conditions par l'application de l'opérateur proximal, dont un point fixe sera un minimiseur.

1.2 Opérateur proximal.

Si F est une fonction propre (c'est à dire dont le domaine de définition n'est pas vide) convexe semi-continue inférieurement définie sur un espace euclidien U , l'opérateur proximal est défini par (voir (Moreau, 1965) pour les calculs et détails) :

$$w = (I + \tau \partial F)^{-1}(u) = \text{prox}_{\tau F}(u) = \underset{v \in U}{\text{argmin}} \left\{ \frac{\|v - u\|^2}{2\tau} + F(v) \right\}. \quad (1.2)$$

Des exemples de calculs d'opérateur proximal sont présentés dans (Combettes and Wajs, 2005). Le calcul de l'opérateur proximal est en soi un problème de minimisation. Ce calcul revient à calculer une projection quand F est la fonction indicatrice d'un ensemble fermé convexe non vide. On a la propriété suivante.

Proposition 1. *Soit F une fonction convexe propre définie sur un espace euclidien U . Alors l'ensemble des minimiseurs de F est l'ensemble des points fixes de $\text{prox}_{\tau F}$.*

Dans nos problèmes les fonctionnelles s'écrivent cependant comme la somme de termes convexes. On discute par la suite des possibilités offertes dans ce cas.

1.3 Les algorithmes Forward-Backward et Douglas-Rachford.

Si la fonctionnelle est la somme d'une fonction convexe dont l'opérateur proximal est simple à calculer et d'une autre qui est lisse et dont on sait calculer le gradient, il est possible de recourir à l'algorithme dit Forward-Backward décrit ci-dessous.

Théorème 3. *Soit $J = F + G$ une fonction somme de deux fonctions convexes, semi continues inférieurement, coercives et bornées inférieurement. On suppose que G est différentiable et à gradient L -Lipschitz. Soit $\gamma < \frac{1}{L}$, soit $u_0 \in U$ et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$u_{n+1} = \text{prox}_{\gamma F}(Id - \gamma \nabla G)(u_n) \quad (1.3)$$

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un minimiseur de J .

C'est encore une fois un algorithme qui converge vers un point fixe, tout point fixe étant un minimiseur de J . Si F est la fonction indicatrice d'un convexe fermé, c'est à dire la fonction qui vaut 0 sur le convexe et $+\infty$ sinon, alors cet algorithme est un algorithme de gradient projeté à pas fixe.

Considérons maintenant qu'aucun des termes ne soit dérivable. Sous certaines conditions l'algorithme de Douglas-Rachford peut être utilisé. On suppose que les fonctions F et G sont convexes, propres, semi continues inférieurement, coercives et que J est bornée inférieurement. De plus on suppose que les opérateurs proximaux de F et de G sont simples à calculer. Une première chose à noter est qu'il existe un minimiseur de J sous ces hypothèses. L'algorithme de Douglas-Rachford s'appuie sur le théorème qui suit.

Théorème 4. *Soient F et G deux fonctions convexes, semi continues inférieurement, propres, coercives et bornées inférieurement. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, 2]$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(2 - \mu_n) = +\infty$, soit $\gamma > 0$, soit $u_0 \in U$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} v_n = \text{prox}_{\gamma F}(u_n), \\ w_n = \text{prox}_{\gamma G}(2v_n - u_n), \\ u_{n+1} = u_n + \mu_n(w_n - v_n) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Alors il existe $u \in U$ minimiseur de $(F + G)$ tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u .

Pour plus de détails sur ces algorithmes on renvoie à (Bauschke and Combettes, 2011).

Si l'opérateur proximal de la fonction F n'est pas simple à calculer, mais si F peut s'écrire comme la composée d'une fonction convexe dont l'opérateur proximal est simple à calculer et d'un opérateur linéaire, une solution est de transformer le problème de minimisation en un problème de point selle.

1.4 D'un problème de minimisation à un problème de point selle.

Pour passer à un problème de point selle, on utilise la notion de conjuguée d'une fonction convexe. En effet à toute fonction convexe F définie de U dans $\bar{\mathbb{R}}$ on peut associer une fonction conjuguée F^* par la relation suivante :

Définition 2. Soit F une fonction définie de U dans $\bar{\mathbb{R}}$, la conjuguée de Fenchel de F est la fonction définie de U dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup +\infty$ par

$$F^*(z) = \sup_{u \in U} (\langle u, z \rangle - F(u)). \quad (1.5)$$

La conjuguée de Fenchel vérifie la propriété suivante :

Proposition 2. Soit F une fonction propre définie de U dans $\bar{\mathbb{R}}$ et minorée par une fonction affine. Alors sa conjuguée de Fenchel est convexe et semi-continue inférieurement.

Une des propriétés essentielles de cette transformée pour les fonctions convexes propres et semi continues inférieurement est la suivante :

Théorème 5. Si F est une fonction définie sur U et à valeur dans $[-\infty, +\infty]$ convexe, propre et semi continue inférieurement, alors $F^{**} = F$.

Ainsi toute fonction convexe, propre et semi continue inférieurement est égale à sa biconjuguée.

Nous nous intéressons maintenant à la minimisation de fonctionnelles convexes particulières : celles que l'on peut écrire sous la forme de la somme de deux fonctions propres convexes et semi continues inférieurement dont l'une est composée par un opérateur linéaire K défini sur un espace euclidien

U et à valeurs dans un espace Z , où F est définie sur Z et à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ et où G est définie de U dans $[-\infty, +\infty]$:

$$\min_{u \in U} J(u) \text{ avec } J(u) = F(Ku) + G(u) \quad (1.6)$$

On suppose que l'on sait calculer les opérateurs proximaux de F et G et on souhaite un moyen simple de minimiser J . La formulation dite *primale duale* est un moyen d'y arriver. En effet si F est convexe, propre et semi continue inférieurement on peut utiliser le fait que

$$\forall z \in F, F(z) = \sup_{u \in U} (\langle u, z \rangle - F^*(u)) \quad (1.7)$$

et ainsi

$$\forall u \in U, F(Ku) = \sup_{z \in Z} (\langle z, Ku \rangle - F^*(z)) = \sup_{z \in Z} (\langle K^*z, u \rangle - F^*(z)) \quad (1.8)$$

où K^* désigne l'opérateur adjoint de K défini de Z dans U . En remplaçant cette expression de $F(Kx)$ dans le problème initial le problème de minimisation a été transformé en un problème où une des deux fonctions a été dualisée :

$$\min_{u \in U} \sup_{z \in Z} \langle K^*z, u \rangle - F^*(z) + G(u). \quad (1.9)$$

On fait l'hypothèse que le supremum ci dessus est un maximum. Nous renvoyons à (Rockafellar, 1997) pour plus de détails. Cette hypothèse étant faite on se ramène donc au problème suivant :

$$\min_{u \in U} \max_{z \in Z} \langle K^*z, u \rangle - F^*(z) + G(u). \quad (1.10)$$

Comme nous n'avons fait que remplacer $F(Ku)$ par une autre expression qui lui est égale, les deux problèmes (1.6) et (1.10) sont équivalents au sens où si u est une solution de (1.6) alors il existe z tel que le couple (u, z) est solution de (1.10), et si (u, z) est une solution de (1.10) alors u est une solution de (1.6). Le problème (1.10) est un problème de recherche de point selle. On discute maintenant d'algorithmes pour résoudre ce type de problèmes.

1.5 Des algorithmes de type primal dual.

On rappelle l'algorithme de (Chambolle and Pock, 2011). U et Z sont des espaces euclidiens, le produit scalaire usuel est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $K : U \rightarrow Z$

un opérateur linéaire, et $G : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $F : Z \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sont deux fonctions convexes. On veut résoudre le problème de recherche de point selle suivant :

$$\min_{u \in U} \max_{z \in Z} \langle Ku, z \rangle + G(u) - F(z).$$

Théorème 6. Soient F et G deux fonctions convexes, propres et semi continues inférieurement, F définie de Z dans $[-\infty, +\infty]$, G définie de U dans $[-\infty, +\infty]$, U et Z des espaces euclidiens et K un opérateur linéaire de U dans Z . Le problème

$$\min_{u \in U} \max_{z \in Z} \langle Ku, z \rangle + G(u) - F(z).$$

est supposé admettre une solution (\hat{x}, \hat{y}) . On note $L = \|K\|$, on choisit σ et τ tels que $\tau\sigma L^2 < 1$, on prend $(u_0, z_0) \in U \times Z$ et on pose $\bar{u}_0 = u_0$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies par

$$\begin{cases} z_{n+1} &= (I + \tau\partial F)^{-1}(z_n + \sigma K\bar{u}_n) \\ u_{n+1} &= (I + \tau\partial G)^{-1}(u_n - \tau K^* z_{n+1}) \\ \bar{u}_{n+1} &= 2u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad (1.11)$$

Alors :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\|z_n - \hat{z}\|^2}{2\sigma} + \frac{\|u_n - \hat{u}\|^2}{2\tau} \leq (1 - \tau\sigma L^2)^{-1} \left(\frac{\|z_0 - \hat{z}\|^2}{2\sigma} + \frac{\|u_0 - \hat{u}\|^2}{2\tau} \right) \quad (1.12)$$

2. Si on pose $u^N = (\sum_{n=1}^N u_n)/N$ et $z^N = (\sum_{n=1}^N z_n)/N$, alors pour tout ensemble borné $(B_1 \times B_2) \subset U \times Z$, le partial primal-dual gap défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{B_1 \times B_2}(u, z) &= \max_{z' \in B_2} \langle z', Ku \rangle - F(z') + G(u) \\ &\quad - \min_{u' \in B_1} \langle z, Ku' \rangle + G(u') - F(z). \end{aligned} \quad (1.13)$$

vérifie

$$\mathcal{G}_{B_1 \times B_2}(u^N, z^N) \leq \frac{D(B_1, B_2)}{N}$$

où

$$D(B_1, B_2) = \sup_{(u, z) \in B_1 \times B_2} \frac{\|u - u_0\|^2}{2\tau} + \frac{\|z - z_0\|^2}{2\sigma}.$$

3. La suite $(u_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution (u^*, z^*) du problème de point selle.

L'algorithme 1

Algorithme 1. *Algorithme primal-dual (Chambolle and Pock, 2011)*

$$\begin{cases} u^{k+1} &= (I + \tau \partial G)^{-1}(u^k - \tau K^* z^k) \\ z^{k+1} &= (I + \sigma \partial F)^{-1}(z^k + \sigma K(2u^{k+1} - u^k)) \end{cases}$$

avec $\tau \sigma \|K\|^2 < 1$ converge donc vers un point selle s'il en existe un. Si G est uniformément convexe, on peut utiliser l'algorithme 2 :

Algorithme 2. *Algorithme primal-dual accéléré (Chambolle and Pock, 2011)*

$$\begin{cases} u^{k+1} &= (I + \tau \partial G)^{-1}(u^k - \tau_u^k K^* z^k) \\ z^{k+1} &= (I + \sigma \partial F)^{-1}(z^k + \tau_z^k K(2u^{k+1} - u^k)) \\ \theta^k &= 1/\sqrt{1 + 2\gamma\tau_u^k} \\ \tau_u^{k+1} &= \theta^k \tau_u^k \\ \tau_z^{k+1} &= \tau_z^k / \theta^k \end{cases}$$

Le *partial primal-dual gap* défini au théorème 6 décroît alors en $\frac{1}{k^2}$ avec k le nombre d'itérations.

Dans des conditions similaires l'algorithme de Arrow-Hurwicz (Arrow et al., 1958) permet d'obtenir un point selle.

Théorème 7. *Dans les conditions du théorème 6 et en supposant en plus le domaine de de F borné et $\tau = \frac{1}{\sqrt{k}}$ à l'itération k , les itérés de l'algorithme*

$$\begin{cases} z^{k+1} &= (I + \sigma \partial F)^{-1}(z^k + \sigma K u^k) \\ u^{k+1} &= (I + \tau \partial G)^{-1}(u^k - \tau K^* z^{k+1}) \end{cases}$$

convergent vers une solution du problème de point selle.

On peut trouver une démonstration dans (Chambolle and Pock, 2011).

1.6 Un algorithme primal dual préconditionné.

On reprend les notations de la section précédente. Si l'opérateur K augmente la norme de certains vecteurs bien plus que d'autres, les pas choisis à la section précédentes seront prévus pour le pire cas et peuvent conduire à une convergence inutilement lente. Dans ce cas un préconditionnement peut être envisagé pour obtenir des pas qui s'adaptent mieux à la géométrie de l'opérateur. L'algorithme préconditionné proposé dans (Pock and Chambolle, 2011) est alors :

Algorithme 3. *Algorithme primal-dual préconditionné (Pock and Chambolle, 2011).*

$$\begin{cases} u^{k+1} &= (I + T\partial G)^{-1} (u^k - TK^t z^k) \\ z^{k+1} &= (I + \Sigma\partial F)^{-1} (z^k - \Sigma K(2u^{k+1} - u^k)) \end{cases}$$

avec T et Σ des matrices définies positives telles que $\|\Sigma^{\frac{1}{2}}KT^{\frac{1}{2}}\|^2 < 1$ et $(I + T\partial G)^{-1}(\hat{u}) := \arg \min_{u \in U} G(u) + \frac{1}{2\tau} \langle T^{-1}(u - \hat{u}), u - \hat{u} \rangle$.

Théorème 8. *Dans les conditions données ci-dessus les itérés de l'algorithme 3 convergent faiblement vers une solution du problème de point selle. Un choix possible pour T et Σ est $T = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ et $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ avec $\tau_j < \frac{1}{\sum_{i=1}^m |K_{i,j}|}$ et $\sigma_i < \frac{1}{\sum_{j=1}^n |K_{i,j}|}$.*

Première partie

Relaxations pour la segmentation binaire.

Chapitre 2

Le modèle de Mumford-Shah constant par morceaux à deux phases.

Dans ce chapitre nous allons comparer différents modèles pour segmenter une image en deux morceaux, avant d'en présenter un nouveau. Tous sont inspirés du modèle de (Mumford and Shah, 1989). Leur présentation chronologique montre comment différents problèmes inhérents à ce modèle non convexe et non lisse ont été résolus. La contribution est un nouveau modèle qui utilise les algorithmes de l'analyse convexe, tout en obtenant des résultats locaux, mais avec une notion de localité mieux maîtrisée que par les modèles précédents. Ce travail est présenté dans (Yıldızoğlu et al., 2012)

2.1 Introduction.

La segmentation d'images est le sujet de recherches actives depuis plus de 20 ans (voir (Aubert and Kornprobst, 2002; Cremers et al., 2007) et les références incluses). Par exemple, nous pouvons nous ramener au travail fondateur de Mumford et Shah (Mumford and Shah, 1989). Ce travail fournit un algorithme très flexible pour segmenter une image en deux parties homogènes, chacune caractérisée par sa valeur en niveau de gris moyenne. Une classe très populaire d'approches est liée à ce modèle et repose sur les descriptions par contours actifs que ce soit avec des serpents (Kass et al., 1988; Caselles et al., 1997), des lignes de niveaux (Osher and Sethian, 1988; Chan

and Vese, 2001) ou encore des coupes dans des graphes (Boykov and Jolly, 2001; Bae et al., 2011).

Notre sujet ici est de résumer les différentes approches variationnelles qui ont été proposées dans le cadre des modèles par contours actifs. Plus précisément, nous nous concentrerons sur le problème simple de la segmentation binaire, connu sous le nom du problème de Mumford-Shah constant par morceaux à deux phases, défini comme suit. Notons $I : x \in \Omega \mapsto [0; 1]$ une image en niveaux de gris définie sur un domaine Ω qui est un ouvert borné non vide à bord Lipschitz de \mathbb{R}^2 . Le problème de la segmentation binaire consiste à estimer un masque binaire $u : x \in \Omega \mapsto \{0; 1\}$ qui sépare I en deux régions distinctes dont les niveaux de gris moyens sont c_1 et c_2 . Le problème peut être formulé comme un problème de minimisation :

$$(u^*, c_1^*, c_2^*) = \underset{u \in \{0;1\}^{|\Omega|}, c_1 \in [0;1], c_2 \in [0;1]}{\operatorname{argmin}} J(u, c_1, c_2),$$

où la fonctionnelle J est définie par :

$$\begin{aligned} J(u, c_1, c_2) = & \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx, \end{aligned} \tag{2.1}$$

et $\lambda \geq 0$ est le poids de l'influence du terme de données vis-à-vis de la pénalisation du périmètre de la région segmentée $S_u = \{x, u(x) = 1\}$. Comme u est binaire, la longueur du contour $|\partial S_u|$ est donnée par la variation totale de u , $\int_{\Omega} |Du|$, dont une définition est donnée ci-dessous.

Définition 3. *La variation totale d'une fonction $u \in L^1(\Omega)$ est définie comme $\int_{\Omega} |Du| := \sup\{\int_{\Omega} u \operatorname{div} z, z \in C_c^1(\Omega)^n, \|z\|_{\infty} \leq 1\}$, avec $C_c^1(\Omega)$ l'espace des fonctions C^1 sur Ω (voir (Ambrosio et al., 2000)). Si u est lisse, alors $\int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |\nabla u| dx$. On note $BV(\Omega, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur Ω dont la variation totale est finie.*

Les deux derniers termes de la fonctionnelle représentent le carré de la norme l^2 entre l'image I et une fonction qui vaut c_1 sur une région et c_2 sur l'autre. Quand c_1 et c_2 sont fixées, une application directe du calcul des variations montre qu'il existe un minimiseur de la fonctionnelle (2.1) (Chan et al., 2006).

Si les variables sont considérées séparément, la fonctionnelle est convexe en u et en (c_1, c_2) . Elle n'est cependant pas convexe en (u, c_1, c_2) . Ainsi un schéma de minimisation alternée peut être considéré. Quand u est fixé, une écriture explicite des valeurs optimales de c_1 et c_2 peut être donnée, ce sont les valeurs moyennes des deux régions définies par u .

Minimiser cette fonctionnelle en fonction de u dans un cadre variationnel pose deux problèmes techniques. D'une part la fonction inconnue binaire u n'est pas continue, à moins qu'elle ne soit constante et qu'il n'y ait qu'une seule région. D'autre part même si on suppose que u est dérivable, que sa dérivée est intégrable et non nulle sur Ω et parallèle au bord de Ω (condition de Neumann), alors la dérivation formelle du terme de régularisation donne

$$D \left(\int_{\Omega} |\nabla u| \right) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

La courbure $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ n'est pas définie pour $\nabla u = 0$ et implique des approximations numériques aux points x tels que $|\nabla u(x)| = 0$.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler dans l'ordre chronologique certaines des approches principales pour calculer u dans un cadre variationnel, et nous proposerons un nouvel algorithme. c_1 et c_2 seront supposés fixés. Il est intéressant de voir de quelle manière les obstacles précédemment décrits ont été résolus. Les algorithmes sont devenus à chaque fois non seulement plus précis mais également plus rapides, plus stables et plus simples à paramétrer.

2.2 La formulation par lignes de niveaux de Chan et Vese.

Dans leur papier fondateur (Chan and Vese, 2001), Chan et Vese proposent de résoudre ce problème en utilisant une formulation par contours actifs par lignes de niveaux. Celle-ci consiste à introduire une surface ϕ dont la ligne de niveau 0 représente le contour. On définit alors la fonction binaire $u(x) = H(\phi(x))$, où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside qui vaut 1 si l'argument est positif et 0 sinon. Si on reformule la fonctionnelle (2.1) en terme de ϕ , qui maintenant est une fonction continue, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
J(\phi) = & \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x))| dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 H(\phi(x)) dx \\
& + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - H(\phi(x))) dx.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

pour ϕ dérivable sur Ω et telle que $\int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x))| dx$ est fini. La pénalisation de la longueur du contour peut alors être réécrite formellement comme

$$\int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x))| dx = \int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi(x)| dx,$$

où $\delta(y)$ (la dérivée de la fonction de Heaviside) est la distribution de Dirac. Étant donné $\epsilon > 0$, le modèle final considère des approximations C^2 $H_{\epsilon}(y)$ et $\delta_{\epsilon}(y)$ pour pouvoir calculer une descente de gradient.

Pour résoudre la difficulté due à la non-différentiabilité de la variation totale en 0, une régularisation du terme de régularisation est définie par $|\nabla \phi|_{\eta} = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \eta^2}$ pour $0 < \eta \ll 1$.

Avec toutes ces approximations un algorithme de gradient à pas fixe peut être introduit après discrétisation. Un pas de descente τ est introduit et étant donné une initialisation $\phi^0(x)$, l'approche par descente de gradient est donnée pour $k \geq 0$ par : $\phi^{k+1} = \phi^k - \tau \partial_{\phi^k} J(\phi^k)$. Nous avons alors :

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \tau \delta_{\epsilon}(\phi^k) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi^k}{|\nabla \phi^k|_{\eta}} \right) - \lambda (I - c_1)^2 + \lambda (I - c_2)^2 \right]. \tag{2.3}$$

Notons que la fonction dont la ligne de niveau est considérée doit être mise à jour en une fonction de distance signée pour que les schémas numériques soient précis. Lorsque la ligne de niveau évolue dans un voisinage de sa ligne de niveau 0, cette méthode estime un minimum local de la fonctionnelle qui dépend de l'initialisation ϕ^0 .

2.3 La formulation convexe de Chan, Esedoglu et Nikolova.

Plus récemment, il a été proposé dans (Chan et al., 2006) de relâcher le problème binaire, c'est à dire d'étendre le domaine de la fonctionnelle

(2.1). Pour cela on laisse $u(x)$ prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. La fonctionnelle relâchée est alors

$$J(u, c_1, c_2) = \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx, \quad (2.4)$$

définie pour $u \in \mathcal{A} := \{u \in BV(\Omega, [0; 1])\}$. La fonctionnelle (2.4) est convexe et un minimiseur global u^* peut être calculé après discrétisation en utilisant encore une fois un schéma de descente de gradient :

$$u^{k+1} = P_{[0,1]} \left(u^k + \tau \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_{\eta}} \right) - \lambda(I - c_1)^2 + \lambda(I - c_2)^2 \right) \right), \quad (2.5)$$

la solution étant projetée pixel par pixel sur les fonctions à valeurs dans $[0, 1]$ par la formule $\min(\max(u, 0), 1)$.

Pour obtenir une carte binaire u à partir d'un minimiseur global u^* de la fonctionnelle relâchée, on utilise le théorème de (Chan et al., 2006; Pock et al., 2008) :

Théorème 9. *Soit u^* un minimiseur de la fonctionnelle (2.4). Alors pour presque tout seuil $\mu \in (0; 1)$, la fonction caractéristique $u_{\mu} = H(u^* - \mu)$ est un minimiseur global de la fonctionnelle (2.1) et de la fonctionnelle (2.4).*

Ce résultat remarquable a conduit à de nombreuses applications en vision par ordinateur (voir par exemple (Pock et al., 2010b)). Dans la partie II on étudie l'extension de ce théorème à des problèmes multi-étiquettes, une démonstration dans un cadre étendu est donné pour le théorème 10.

Remarquons que le problème a été reformulé dans (Brown et al., 2012) pour être convexe en fonction de u , c_1 et c_2 . En utilisant la stratégie de (Pock et al., 2008), la complexité du problème est augmentée par l'addition de deux nouvelles dimensions qui correspondent aux valeurs discrètes possibles de c_1 et c_2 . Cette approche sera abordée section 8.3.2.

2.4 Une formulation duale du problème convexe.

La formulation précédente contient encore une régularisation de la variation totale $|\nabla u|_{\eta}$, définie pour des fonctions u prenant leurs valeurs dans

l'intervalle $[0, 1]$. En prenant des conditions au bord périodiques ou de Dirichlet sur $\partial\Omega$, une idée est alors de considérer la formulation duale de la variation totale donnée par :

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}} \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx \quad (2.6)$$

où $u \in BV(\Omega)$ et la variable duale \mathbf{z} est définie sur le cercle unité avec $\mathcal{B} = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in (C^\infty(\Omega))^2, |\mathbf{z}(\mathbf{x})| = \sqrt{z_1(x)^2 + z_2(x)^2} \leq 1 \forall x \in \Omega\}$. Si u est régulier, alors nous avons $\int_{\Omega} |Du| = \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{z} dx$. Cette formulation duale permet de représenter avec \mathbf{z} le vecteur unitaire de direction ∇u . Ce sera le point clé pour gérer la non différentiabilité qui apparaît quand $|\nabla u| = 0$. Nous obtenons le problème de minimisation suivant à partir de la fonctionnelle 2.4 :

$$(u^*, \mathbf{z}^*) = \underset{u \in \mathcal{A}}{\operatorname{argmin}} \underset{\mathbf{z} \in \mathcal{B}}{\operatorname{argmax}} J(u, z),$$

où la fonctionnelle J est définie par :

$$\begin{aligned} J(u, \mathbf{z}) &= \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour $(u, \mathbf{z}) \in BV(\Omega, [0, 1]) \times (C^\infty(\Omega))^2$. Ce passage d'un problème de minimisation à un problème de point selle est un cas particulier de celui présenté dans la section 1.4.

2.4.1 Minimisation et convergence.

En suivant les travaux de Pock et al. (Pock et al., 2010b; Chambolle and Pock, 2011), la fonctionnelle (2.7) une fois discrétisée peut être minimisée par l'algorithme parallélisable de Arrow-Hurwicz (Arrow et al., 1958), aussi connu sous le nom de méthode de point proximal du premier ordre (Chan et al., 1999; Rockafellar, 1976; Zhu and Chan, 2008), qui consiste à alterner les maximisations sur $\mathbf{z} \in \mathcal{B}$ et les minimisations sur $u \in \mathcal{A}$. Cet algorithme est décrit au théorème 7 de la section 1.5. Introduisons deux pas $\tau_u^k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\tau_{\mathbf{z}} < \frac{\tau_u^k}{L^2}$ avec L la norme de l'opérateur gradient qui dépend de la discrétisation de

l'opérateur. En partant d'une initialisation (u^0, z^0) , l'algorithme s'écrit, pour $k \geq 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{k+1} &= P_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}^k + \tau_{\mathbf{z}} \nabla u^k) \\ u^{k+1} &= P_{\mathcal{A}}(u^k + \tau_u (\operatorname{div}(\mathbf{z}^{k+1}) \lambda (I - c_1)^2 + \lambda (I - c_2)^2)), \end{cases} \quad (2.8)$$

où la projection sur l'ensemble convexe \mathcal{B} est effectuée pour chaque pixel x par :

$$P_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) = \begin{cases} \mathbf{z}(\mathbf{x}) & \text{si } |\mathbf{z}(\mathbf{x})| \leq 1 \\ \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x})}{|\mathbf{z}(\mathbf{x})|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Cet algorithme primal-dual converge vers une solution optimale u^* .

On peut également utiliser l'algorithme 1 présenté à la section 1.5 :

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{k+1} &= P_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}^k + \tau_{\mathbf{z}} \nabla u^k) \\ \tilde{u}^{k+1} &= P_{\mathcal{A}}(\tilde{u}^k + \tau_u (\operatorname{div}(\mathbf{z}^{k+1}) - \lambda (I - c_1)^2 + \lambda (I - c_2)^2)) \\ u^{k+1} &= \tilde{u}^{k+1} + \theta (\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k), \end{cases} \quad (2.10)$$

avec l'initialisation $\tilde{u}^0 = u^0$ et $\tau_u \tau_{\mathbf{z}} < \frac{1}{L^2}$, L la norme de l'opérateur gradient.

2.4.2 Implémentation numérique.

Pour implémenter les algorithmes mentionnés auparavant, les opérateurs gradient et divergence doivent être discrétisés. Le choix de (Chambolle, 2004b) est adopté. Pour que l'équation (2.6) reste vraie, la discrétisation du produit scalaire doit vérifier

$$\langle u, \operatorname{div}(\mathbf{z}) \rangle = - \langle \nabla u, \mathbf{z} \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{A}, \mathbf{z} \in \mathcal{B}.$$

Le domaine Ω est maintenant remplacé par la grille discrète régulière (i, j) , avec $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq M$. En considérant l'opérateur de gradient discret comme un vecteur de matrices $\nabla = [D_x; D_y]^T$, les discrétisations choisies doivent vérifier :

$$\langle D_x u, z_1 \rangle + \langle D_y u, z_2 \rangle = \langle u, D_x^T z_1 + D_y^T z_2 \rangle.$$

Pour cela, des différences finies sont considérées et le gradient choisi est $\nabla u(i, j) = [u_x^+(i, j), u_y^+(i, j)]^T$ où le gradient en fonction de la première dimension s'écrit :

$$u_x^+(i, j) = \begin{cases} u(i+1, j) - u(i, j) & \text{si } 1 \leq i < M, \\ 0 & \text{si } i = M. \end{cases}$$

L'opérateur divergence correspondant est donné par $div(\mathbf{z}) = (z_1)_x^- + (z_2)_y^-$, le gradient sur la première dimension étant :

$$z_x^-(i, j) = \begin{cases} z(i, j) & \text{si } i = 1, \\ z(i, j) - z(i-1, j) & \text{si } 1 < i < M, \\ -z(i-1, j) & \text{si } i = M. \end{cases}$$

et on a $L^2 = 8$ avec L la norme de l'opérateur gradient.

2.4.3 La bande étroite : minima locaux et réduction de la dimension.

Lorsque l'on travaille sur de grandes images ou même sur des images à trois dimensions, comme celles obtenues par IRM (Imagerie par Résonance Magnétique), la convergence locale peut permettre d'obtenir des segmentations en temps réel. Avec une initialisation adéquate, la méthode locale de Chan et Vese peut segmenter un objet spécifique même s'il existe d'autres régions dans l'image avec des couleurs proches. Les formulations convexes, elles, permettent de calculer une solution globale mais ne peuvent segmenter un seul objet dans certaines configurations. Dans le cas convexe, l'algorithme après un certain nombre d'opérations modifie principalement la frontière d'un u presque binaire.

La méthode de la bande étroite pour l'algorithme de Chan et Vese consiste à ne faire les calculs que sur une bande étroite autour de la frontière à chaque itération, c'est à dire pour les points à une distance inférieure à un certain rayon $r > 0$ du contour. La bande se déplace au fur et à mesure des itérations avec le contour actif.

Il est proposé dans (Baeza et al., 2010) de définir une méthode par bande étroite pour accélérer le calcul dans le cadre de problèmes en grandes dimensions. Cependant, une telle approche ne permet plus d'assurer la convergence

vers un minimum global. L'intuition derrière cet algorithme est telle que suit. Soit \mathbf{u}_0 une initialisation binaire de la segmentation, une bande étroite $B_0 \subset \Omega$ est définie dans le domaine spatial autour du bord $\partial S_{\mathbf{u}_0}$ de la région correspondante $S_{\mathbf{u}_0}$. La taille de la bande étroite est paramétrée par $\beta > 0$ comme suit :

$$B_0 = \{x \in \Omega, \min_{y \in S_{\mathbf{u}_0}} |x - y| < \beta\}.$$

L'algorithme récursif consiste alors à calculer une première solution u^* qui évolue seulement dans B_0 et dont les valeurs sont fixées dans $\Omega \setminus B_0$. La solution obtenue est binarisée pour obtenir \mathbf{u}_1 qui est utilisée pour définir une nouvelle bande B_1 et ainsi de suite... Un terme additionnel dans la fonctionnelle est nécessaire pour converger vers une solution binaire et pour éviter des cycles dans la suite des bandes étroites. Lors de l'itération l , donc dans la bande B_l définie par la solution précédente \mathbf{u}_l , un terme $\gamma > 0$ est introduit et la fonctionnelle minimisée lors d'une étape $l \geq 0$ est alors :

$$\begin{aligned} J(u, \mathbf{z}) = & \int_{B_l} u \operatorname{div}(\mathbf{z}) dx + \lambda \int_{B_l} |I(x) - c_2|^2 (1 - u(x)) dx \\ & + \lambda \int_{B_l} |I(x) - c_1|^2 u(x) dx + \frac{\gamma}{2} \int_{B_l} \|u - \mathbf{u}_l\|^2 dx, \end{aligned} \quad (2.11)$$

pour $(u, \mathbf{z}) \in BV(\Omega, [0, 1]) \times (C^\infty(\Omega))^2$ avec $u(x) = \mathbf{u}_l(x)$ pour $x \in \Omega \setminus B_l$. Les trois derniers termes de la fonctionnelle qui correspondent aux données forment désormais un opérateur uniformément convexe en la variable u , avec comme paramètre de convexité γ . L'algorithme accéléré 2 défini à la section 1.5 est alors utilisé pour la minimisation à l'intérieur de la bande étroite. En prenant $\tau_u^0 \tau_z^0 < 1/8$ et $u^0 = \tilde{u}^0 = \mathbf{u}_l$, le nouvel algorithme pour trouver une solution optimale à l'intérieur de la bande B_l s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z}^{k+1} = P_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}^k + \tau_{\mathbf{z}}^k \nabla u^k) \\ \tilde{u}^{k+1} = P_{\mathcal{A}} \left(\frac{\tilde{u}^k + \tau_u^k (\operatorname{div}(\mathbf{z}^{k+1}) - \lambda(I - c_1)^2 + \lambda(I - c_2)^2 + \gamma \mathbf{u}_l)}{1 + \tau_u^k \gamma} \right) \\ \theta^k = 1 / \sqrt{1 + 2\gamma \tau_u^k}, \tau_u^{k+1} = \theta^k \tau_u^k, \tau_{\mathbf{z}}^{k+1} = \tau_{\mathbf{z}}^k / \theta^k \\ u^{k+1} = \tilde{u}^{k+1} + \theta^k (\tilde{u}^{k+1} - \tilde{u}^k). \end{array} \right. \quad (2.12)$$

La solution obtenue u^* est seuillée avec un seuil μ pour obtenir la nouvelle estimation \mathbf{u}_{l+1} . Pour assurer la convergence de cet algorithme, les auteurs de (Baeza et al., 2010) montrent aussi que la binarisation doit être faite avec

soin. Plus précisément, il faut prendre une constante $\nu \ll 1$ et choisir le seuil μ parmi les deux valeurs $\mu = \nu$ et $\mu = 1 - \nu$ qui correspond à la plus petite valeur de la fonctionnelle (2.11). Remarquons qu'en pratique, prendre un seuil fixe ne perturbe pas la convergence.

2.4.4 Expériences et comparaisons.

Nous allons maintenant comparer les algorithmes pour montrer que les algorithmes convexes obtiennent de meilleur résultat que le modèle par contour actifs. En comparant les convergences numériquement on constate que les approches avec les algorithmes de type primal-dual sont plus rapides. Après on donne des exemples d'utilisation du nouveau modèle avec bande étroite, on montre qu'il permet d'obtenir des segmentations localisées et que la taille de la bande permet une plus grande souplesse pour contrôler cette localité.

Nous comparons les algorithmes suivants avec c_1 et c_2 fixés : CV représente l'approche de Chan et Vese (équation (2.3)) ; CEN représente l'approche de Nikolova, Esedoglu et Chan (équation (2.5)) ; AH représente l'algorithme primal-dual de Arrow et Hurwicz (2.8) ; CP représente l'algorithme de Chambolle et Pock (2.10).

La Figure 2.1 présente un premier résultat de segmentation sur une image synthétique. Les deux régions sont obtenues par deux bruits blancs gaussiens de moyennes respectives $c_1 = 50$ et $c_2 = 100$ et d'écart-type $\sigma = 35$. Le modèle non convexe CV est limité par son initialisation et ne segmente pas entièrement les objets, l'évolution de la ligne de niveau pouvant être stoppée localement par du bruit. Par ailleurs l'initialisation peut avoir de grandes conséquences sur le temps de convergence. On présente un tableau dans la Figure 2.2 des vitesses de convergence pour l'image de la Figure 2.1. Les algorithmes de type primal-dual sont plus rapides.

Bien sûr, c_1 et c_2 peuvent être mis à jour dans les itérations comme dans (Chan and Vese, 2001), mais le problème n'est pas convexe en u , c_1 et c_2 . Néanmoins, cela ne pose pas forcément un problème numériquement. La Figure 2.5 en montre un exemple.

Les Figures 2.3 et 2.4 illustrent la localité de la bande. La première montre que pour ce modèle la segmentation convexe ne segmente pas uniquement la tumeur tandis que la bande étroite bien initialisée ne segmente que la tumeur. La Figure 2.4 elle montre que le choix de la taille de la bande permet de la souplesse entre segmenter tous les objets ou que ceux qui sont touchés par l'initialisation. La taille de la bande permet de signifier ce qu'on entend par

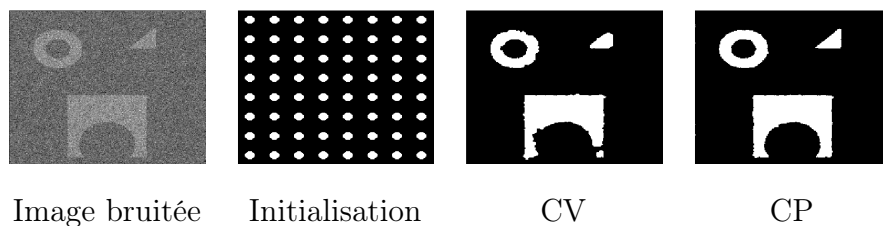


FIGURE 2.1 – Exemples de segmentations 2D obtenues avec CV et l’approche convexe (ici CP) sur un exemple synthétique.

size /method	CV	CEN	AH	CP
128×128	0.5	0.12	0.07	0.03
256×256	3.8	0.24	0.1	0.09
512×512	12.3	1.53	0.82	0.76
1024×1024	63	8.42	3.6	3.23
2048×2048	278	35.72	14.11	13.64

FIGURE 2.2 – Ce tableau présente les vitesses de convergence en secondes des différents algorithmes pour l’image de la Figure 2.1 de différentes tailles. Les algorithmes de type primal-dual sont plus rapides.

voisin.

La Figure 2.6 montre le résultat de la segmentation sur des données 3D acquises (seules deux couches sont montrées ici). La bande étroite est utile pour traiter des données en grandes dimensions. De plus, quand on utilise un terme de régularisation trop grand le résultat est trop lissé. Au contraire quand le terme de régularisation est trop faible des objets non souhaités sont segmentés. Grâce à l’utilisation de la méthode par bande étroite, ces deux problèmes peuvent être évités.

2.5 Conclusion.

J’ai présenté et comparé différents modèles pour la segmentation binaire à partir du modèle de Mumford Shah constant par morceaux. Utiliser une re-

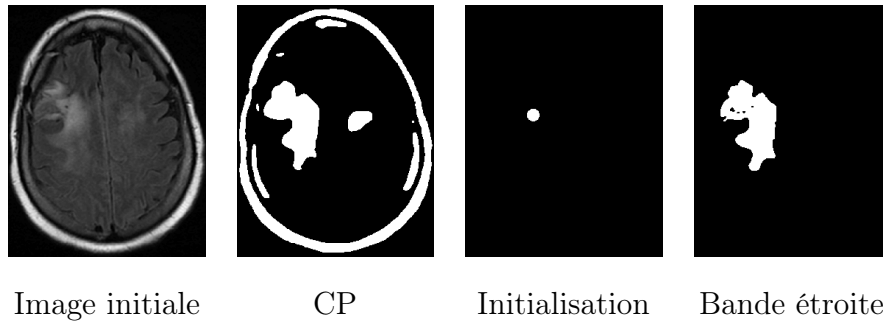


FIGURE 2.3 – La bande étroite permet de ne segmenter que la tumeur en initialisant sur la tumeur alors que le modèle convexe segmente également les os du crâne.

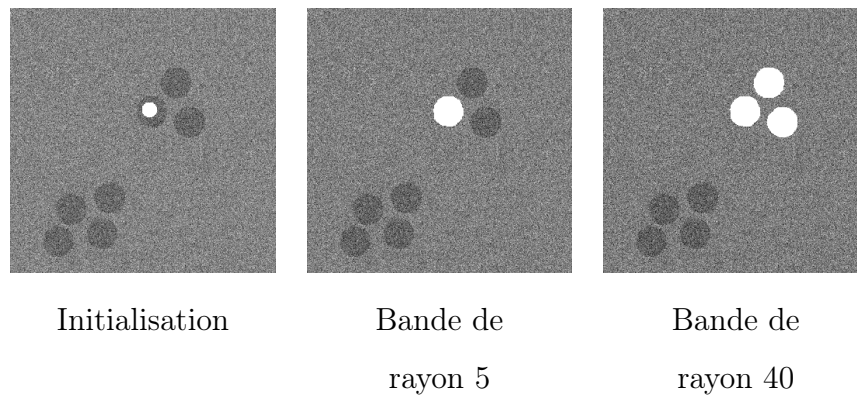


FIGURE 2.4 – La taille de la bande étroite permet un réglage plus fin. Si l'image est composée comme ici deux amas de petits objets, le modèle convexe va donner tous les objets, une bande suffisamment petite permet de n'en segmenter qu'un, et un rayon intermédiaire permet de segmenter un amas mais pas l'autre.

laxation convexe et un algorithme primal-dual permet d'obtenir un minimum global de la fonctionnelle sans faire d'approximations et sans paramètres internes à gérer. On verra dans la partie II d'autres cas où c'est possible.

J'ai proposé une nouvelle méthode par bande étroite pour obtenir une solution locale et économiser de la mémoire. Elle a la robustesse de l'analyse convexe dans ses boucles internes et permet de localiser le problème de

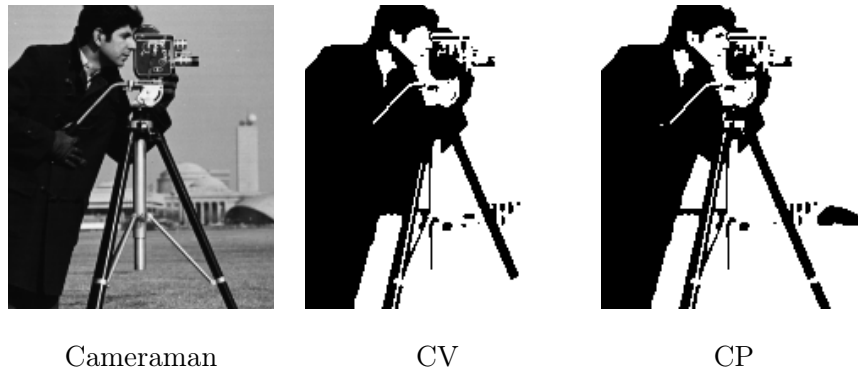


FIGURE 2.5 – Exemples de segmentation 2D obtenues avec CV et l’approche convexe (CP) sur l’image du cameraman. Des détails comme l’œil sont trouvés grâce à l’approche convexe.

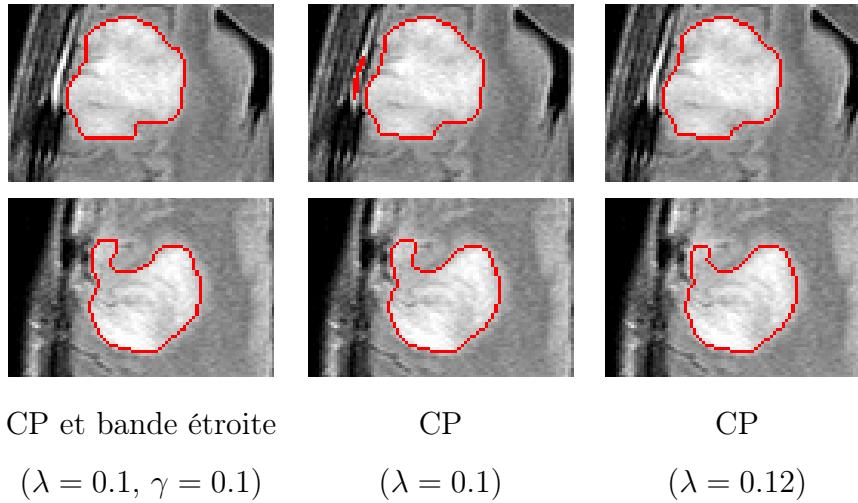


FIGURE 2.6 – Comparaison des segmentations 3D obtenues avec l’algorithme CP avec ou sans bande étroite. La segmentation est trop régularisée sur la dernière image de la deuxième rangée et un artefact est gardé dans la segmentation de la seconde image du premier rang. La bande étroite évite ces deux défauts.

manière souple en modifiant la taille de la bande.

Toutes les images ne sont pas adaptées à ce modèle. Je propose dans le

chapitre suivant un nouveau modèle convexe pour la segmentation binaire qui prend en compte des histogrammes à la place des niveaux de gris moyen. Cela permet d'obtenir des segmentations dans des cas plus complexes comme par exemple pour certaines images texturées.

Chapitre 3

Une formulation convexe reposant sur la comparaison d’histogrammes globaux pour la segmentation binaire.

3.1 Introduction.

Pour les images texturées, de nombreuses extensions du modèle de (Chan and Vese, 2001) présenté au chapitre 2 ont été proposées pour améliorer le modèle de segmentation à partir de la valeur moyenne. Par exemple, des filtres de Gabor sont utilisés dans (Vese and Chan, 2002) et (Paragios and Deriche, 1999), des paquets d’ondelettes dans (Aujol et al., 2003) et les textures sont caractérisées par le tenseur de structure dans (Brox et al., 2003; Rousson et al., 2003). Quand les histogrammes globaux des régions à segmenter sont considérés, il existe également une littérature (Aubert et al., 2002; Brox and Weickert, 2006; Herbulot et al., 2006) qui repose sur (Chan and Vese, 2001). Des travaux récents utilisent la distance de Bhattacharyya (Yuan et al., 2012) ou encore la distance de Wasserstein (Ni et al., 2009; Peyré et al., 2012) pour comparer les histogrammes entre eux. Il est important de remarquer que ces classes d’approches demandent des calculs de gradient de forme complexes pour l’évolution de la ligne de niveau (Delfour and Zolésio, 2001). De plus ces méthodes reposent toutes sur l’évolution d’une ligne de niveau (Osher and Sethian, 1988) et sont donc sensibles au choix de l’initialisation et on ne

peut garantir qu'un minimiseur local de la fonctionnelle considérée.

Récemment, comme on l'a vu au chapitre 2, des méthodes de convexification ont été proposées pour résoudre ce problème, par exemple dans (Chan et al., 2006; Pock et al., 2010b; Chambolle and Pock, 2011; Brown et al., 2012). Le modèle de Chan et Vese original (Chan and Vese, 2001) peut en effet être convexifié, et une solution globale peut être calculée de manière efficace, par exemple avec un algorithme primal-dual. Un simple seuillage de la solution globale donne alors un minimiseur global du problème non convexe original.

Nous allons introduire un nouveau modèle convexe pour segmenter une image en deux parties, chaque région étant caractérisée par son histogramme. Ce modèle convexe sera minimisé en utilisant un algorithme d'optimisation convexe non lisse (Chambolle and Pock, 2011). Le modèle est d'abord développé dans le cadre des images en niveaux de gris, puis étendu au tenseur de structure et aux images en couleurs.

Par rapport aux méthodes mentionnées précédemment qui utilisent des histogrammes globaux et reposent sur l'évolution d'une ligne de niveau, notre approche est plus simple. D'une part l'algorithme proposé est plus rapide que ceux utilisant la distance de Wasserstein (Ni et al., 2009; Peyré et al., 2012), et d'autre part, malgré la simplicité de l'approche, les segmentations obtenues sont satisfaisantes tout en étant indépendantes de l'initialisation. Parallèlement au travail présenté, (Swoboda and Schnörr, 2013b) et (Swoboda and Schnörr, 2013a) développent un modèle convexe similaire qui utilise la distance de Wasserstein pour comparer les histogrammes. La convexité est également atteinte en supprimant la normalisation dans la comparaison entre histogrammes. Ils présentent des applications entre autres à la segmentation et à la cosegmentation.

Le plan est le suivant. Le nouveau modèle pour la segmentation binaire à partir d'histogrammes globaux est introduit. La fonctionnelle repose sur une norme l^1 entre histogrammes pour le terme de données. L'optimisation utilise l'algorithme 3 présenté dans la section 1.6. Des exemples numériques illustrent la force de la méthode, ainsi que ses limites. Ensuite l'intérêt de la globalité de l'histogramme pour obtenir une segmentation est discuté et cette approche est comparée avec celle de (Peyré et al., 2012), puis on conclut.

3.2 Une formulation variationnelle convexe.

On souhaite segmenter une image en deux parties connaissant deux histogrammes. L'approche proposée ici est motivée par deux points. Le premier est l'indépendance à l'initialisation, le deuxième est la globalité de l'estimation de l'histogramme.

3.2.1 Notations.

Soit Ω le domaine sur lequel est défini l'image, c'est la grille discrète régulière (i, j) , avec $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq M$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$, c'est à dire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{x \in \Omega} u(x)v(x).$$

L'opérateur gradient et la divergence définis pour la variation totale sont ceux de la sous-section 2.4.2. Soit $I : \Omega \mapsto \Lambda \subset \mathbb{R}^k$ l'image, $k \in \mathbb{N}$, Λ est alors fini. h^0 et h^1 sont deux histogrammes normalisés de référence $\Lambda \rightarrow [0, 1]$, ils vérifient donc $\sum_{\lambda \in \Lambda} h^i(\lambda) = 1$, $i = 0, 1$. La segmentation binaire est représentée par

$$u : \Omega \rightarrow \{0, 1\},$$

l'histogramme calculé sur la région

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega, u(x) = 0\}$$

est comparé à h^0 et l'histogramme calculé sur la région $\Omega_1 := \{x \in \Omega, u(x) = 1\}$ est comparé à h^1 . On a bien $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$.

L'histogramme de la région Ω_1 est alors donné par :

$$h_u(\lambda) = \frac{1}{\sum_{x \in \Omega} u(x)} \sum_{x \in \Omega} u(x) \mathbb{1}_{I=\lambda}(x) \quad (3.1)$$

et celui de la région Ω_0 est alors donné par :

$$h_{1-u}(\lambda) = \frac{1}{\sum_{x \in \Omega} (1 - u(x))} \sum_{x \in \Omega} (1 - u(x)) \mathbb{1}_{I=\lambda}(x). \quad (3.2)$$

Pour obtenir la segmentation, on choisit une métrique entre les histogrammes en prenant une norme $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{R}^{|\Lambda|}$, $|\Lambda|$ étant le nombre d'éléments

de Λ . Une régularisation pénalise le périmètre de la segmentation en rajoutant un terme de variation totale. La segmentation peut ainsi être obtenue comme minimiseur de la fonctionnelle non convexe suivante :

$$J(u) = TV(u) + \|(h_u - h^1)_{\lambda \in \Lambda}\| + \|(h_{1-u} - h^0)_{\lambda \in \Lambda}\| \quad (3.3)$$

avec $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$.

3.2.2 Convexification.

Pour obtenir un modèle convexe le terme de données qui compare les histogrammes est reformulé. On réécrit le terme de données :

$$\begin{aligned} \|h_u - h^1\| &= \left\| \left(\frac{1}{\sum_{\Omega} u(x)} \sum_{\Omega} u(x) \mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - h^1(\lambda) \right)_{\lambda \in \Lambda} \right\| \\ &= \frac{1}{\sum_{\Omega} u(x)} \left\| \left(\sum_{\Omega} u(x) \mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - \left(\sum_{\Omega} u(x) \right) h^1(\lambda) \right)_{\lambda \in \Lambda} \right\| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si l'aire de Ω_1 définie par $|\Omega_1| = \sum_{\Omega} u(x)$ est connue, il suffit de garder la distance

$$\left\| \left(\sum_{\Omega} u(x) (\mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - h^1(\lambda)) \right)_{\lambda \in \Lambda} \right\| \quad (3.5)$$

qui est convexe en u . Cette reformulation peut être faite pour le second terme avec $1 - u$ et l'histogramme h^0 , enlevant ainsi un facteur $\frac{1}{\sum_{\Omega} (1-u(x))} = \frac{1}{|\Omega_0|}$. La distance est alors

$$\left\| \left(\sum_{\Omega} (1-u(x)) (\mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - h^0(\lambda)) \right)_{\lambda \in \Lambda} \right\|. \quad (3.6)$$

Avec ces normalisations, les termes de données (3.6) et (3.5) des deux régions ne sont plus équilibrés. Néanmoins, un poids $\beta \in [0, 1]$ peut être introduit. Ce facteur représente le ratio

$$\beta = \frac{\sum_{\Omega} u(x)}{|\Omega|} = \frac{|\Omega_1|}{|\Omega|}$$

avec $|\Omega|$ l'aire de Ω . Comme $|\Omega| = |\Omega_0| + |\Omega_1|$, on a

$$\frac{\sum_{\Omega}(1 - u(x))}{|\Omega|} = \frac{|\Omega_0|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |\Omega_1|}{|\Omega|} = 1 - \beta$$

qui donne le facteur de normalisation du second terme.

On définit $g_{\lambda}^1(x) := \mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - h^1(\lambda)$, $g_{\lambda}^0(x) := \mathbb{1}_{I=\lambda}(x) - h^0(\lambda)$, et le modèle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} J(u) = & TV(u) + \frac{1}{\beta} \left\| (\langle u, g_{\lambda}^1 \rangle_{\Omega})_{\lambda \in \Lambda} \right\| \\ & + \frac{1}{1 - \beta} \left\| (\langle 1 - u, g_{\lambda}^0 \rangle_{\Omega})_{\lambda \in \Lambda} \right\|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

pour $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$. β est ici une constante qui ne dépend pas de u , c'est un paramètre supplémentaire.

Ce modèle n'est toujours pas convexe. La cause est la même qu'au chapitre 2, l'ensemble des fonctions binaires $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ n'est pas convexe. On opte pour la même stratégie qu'au chapitre 2 et on définit la fonctionnelle pour les fonctions $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$, :

$$\begin{aligned} J(u) = & TV(u) + \frac{1}{\beta} \left\| (\langle u, g_{\lambda}^1 \rangle_{\Omega})_{\lambda \in \Lambda} \right\| \\ & + \frac{1}{1 - \beta} \left\| (\langle 1 - u, g_{\lambda}^0 \rangle_{\Omega})_{\lambda \in \Lambda} \right\|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

pour $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$.

Obtenir une segmentation s'effectue en seuillant un minimiseur de la fonctionnelle 3.8. C'est à dire qu'à une solution u^* du problème convexe on associe la segmentation représentée par

$$\tilde{u} = \begin{cases} 1 & \text{si } u^* > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un seuil $s \in]0, 1[$. On choisit pour seuil $s = 0.5$ dans ce qui suit. Cette segmentation n'est pas a priori un minimiseur de la fonctionnelle 3.7, contrairement à la convexification présentée au chapitre 2, pour laquelle le seuillage permet d'obtenir un minimum global de la fonctionnelle non convexe. Il reste à choisir la distance pour comparer les histogrammes.

3.2.3 Le terme de données l^1 .

Jusqu'à maintenant, le modèle général a été écrit pour une norme quelconque. Dans cette section le modèle pour la norme l^1 : $\|h\|_{l^1} = \sum_{\lambda \in \Lambda} |h(\lambda)|$ est explicité. J'ai également écrit le modèle pour la norme l^2 , mais l'algorithme obtenu a une boucle interne et les résultats sont moins bons qu'avec la norme l^1 . La fonctionnelle avec la norme l^1 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 J(u) &= TV(u) + \mu \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle u, g_\lambda^1 \rangle_\Omega| + \mu \frac{1}{1-\beta} \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle 1-u, g_\lambda^0 \rangle_\Omega| \\
 &= TV(u) + \mu \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| \sum_{x \in \Omega} u(x) g_\lambda^1(x) \right| \\
 &\quad + \mu \frac{1}{1-\beta} \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| \sum_{x \in \Omega} (1-u(x)) g_\lambda^0(x) \right|.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$.

Le terme de données global dépend de toutes les valeurs $u(x)$, $x \in \Omega$, pour chaque $\lambda \in \Lambda$. On souhaite minimiser $J(u)$ sur l'ensemble des fonctions $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Contrairement à la convexification présentée au chapitre 2, il n'existe aucune garantie d'obtenir des minimiseurs du problème original. Néanmoins, même si des images pathologiques peuvent être construites, lorsque le modèle original est adapté à l'image le modèle relâché semble donner des résultats satisfaisants.

Puisque notre fonctionnelle peut être écrite comme la somme de termes convexes, certains d'entre eux s'écrivant comme la composition d'une norme l^1 et d'un opérateur linéaire, nous allons écrire ce problème avec des variables duales. On note A et B les opérateurs linéaires

$$\begin{cases} A : u \mapsto (\langle u, g_\lambda^1 \rangle_\Omega)_{\lambda \in \Lambda} \\ B : u \mapsto (\langle u, g_\lambda^0 \rangle_\Omega)_{\lambda \in \Lambda} \end{cases}$$

Le problème peut se formuler comme un problème de point selle

$$\max_{(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^{2|\Omega|} \times \mathbb{R}^{|\Lambda|} \times \mathbb{R}^{|\Lambda|}} \min_{u \in \mathbb{R}^{|\Omega|}} E(q_1, q_2, q_3, u) \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned}
E(q_1, q_2, q_3, u) &= \langle q_1, \nabla u \rangle_{\Omega} + \langle q_2, Au \rangle_{\Lambda} + \langle q_3, B(1-u) \rangle_{\Lambda} \\
&\quad - \chi_{B(0,1)}(q_1) - \chi_{[-\mu\frac{1}{\beta}, \mu\frac{1}{\beta}]}(q_2) \\
&\quad - \chi_{[-\mu\frac{1}{1-\beta}, \mu\frac{1}{1-\beta}]}(q_3) + \chi_{[0,1]}(u) \\
&= \langle q, Ku \rangle_{\Omega \times \Lambda^2} - F^*(q) + G(u)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

avec $q = (q_1, q_2, q_3)$, $B(0, 1)$ la boule euclidienne de centre 0 et de rayon 1,

$$\left\{ \begin{array}{l} K \quad : \quad u \mapsto (\nabla u, Au, -Bu) \\ G(u) \quad = \quad \chi_{[0,1]}(u) \\ F^*(q) \quad = \quad \chi_{B(0,1)}(q_1) + \chi_{[-\mu\frac{1}{\beta}, \mu\frac{1}{\beta}]}(q_2) + \chi_{[-\mu\frac{1}{1-\beta}, \mu\frac{1}{1-\beta}]}(q_3) - \langle q_3, B1 \rangle \end{array} \right.$$

et $\chi_C(x) = 0$ si $x \in C$, $\chi_C(x) = \infty$ si $x \notin C$.

Un algorithme pour minimiser notre fonctionnelle est décrit juste après, cet algorithme est l'application de celui présenté section 1.6.

3.2.4 Optimisation numérique.

Les notations suivantes sont introduites pour écrire l'algorithme de manière plus compacte :

$$\left\{ \begin{array}{l} Tu(x) = \tau_x u(x), \tau_x < \frac{1}{2 + \sum_{\lambda \in \Lambda} (|g_{\lambda}^1(x)| + |g_{\lambda}^0(x)|)}, \\ A^t q_2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} q_2(\lambda) g_{\lambda}^1, \\ B^t q_3 = \sum_{\lambda \in \Lambda} q_3(\lambda) g_{\lambda}^0, \\ \sigma_1 < \frac{1}{4}, \\ \Sigma_2 q_2(\lambda) = \sigma_{2,\lambda} q_2(\lambda), \sigma_{2,\lambda} < \frac{1}{\sum_{x \in \Omega} g_{\lambda}^1(x)}, \\ \Sigma_3 q_3(\lambda) = \sigma_{3,\lambda} q_3(\lambda), \sigma_{3,\lambda} < \frac{1}{\sum_{x \in \Omega} g_{\lambda}^0(x)}, \\ b = B1, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

L'algorithme 3 de la section 1.6 permet de résoudre le problème de point selle (4), en notant P_C la projection orthogonale sur le convexe C :

Algorithme 4. *Algorithme primal dual préconditionné pour minimiser la fonctionnelle (3.9).*

$$\begin{cases} u^{k+1} &= P_{[0,1]} (u_k - T (A^t q_2^k - B^t q_3^k - \operatorname{div}(q_1^k))) \\ q_1^{k+1} &= P_{B(0,1)} (q_1^k + \sigma_1 \nabla(2u^{k+1} - u^k)) \\ q_2^{k+1} &= P_{[-\mu\frac{1}{\beta}, \mu\frac{1}{\beta}]} (q_2^k + \Sigma_2 A(2u^{k+1} - u^k)) \\ q_3^{k+1} &= P_{[-\mu\frac{1}{1-\beta}, \mu\frac{1}{1-\beta}]} (q_3^k - \Sigma_3 (B(2u^{k+1} - u^k) - b)) \end{cases}$$

3.3 Applications.

Dans les applications pratiques, les images peuvent être corrompues par du bruit. Pour obtenir un algorithme plus robuste, on propose de travailler avec les histogrammes cumulés plutôt qu’avec les histogrammes. Par exemple si un pixel a une valeur qui n’est pas dans la distribution de référence, alors la pénalisation est la même quelle que soit cette valeur. Ou encore supposons les deux régions de l’image constantes. Si on rajoute un bruit gaussien et que la quantification est fine, on peut n’avoir aucune valeur de l’image initiale dans l’image bruitée. Alors g_λ^1 et g_λ^0 ne dépendent plus de $x \in \Omega$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et le modèle segmente l’image en une seule région. En effet si $\beta = 0.5$ la fonctionnelle est alors égale à $TV(u) + 2\mu (|\Lambda| - 1) |\Omega|$. Un exemple d’une telle situation est donné Figure 3.2.

Les histogrammes cumulés sont une manière de résoudre ce problème car ils prennent en compte la relation d’ordre. Si les éléments de Λ sont de plus espacés régulièrement le terme de données des niveaux de gris correspond même à la distance de Wasserstein l^1 et dépend ainsi de la métrique l^1 sur l’espace des valeurs. Pour deux probabilités p_1 et p_2 définies sur \mathcal{R} avec un moment d’ordre 1 fini, la distance de Wasserstein l^1 est $\int_0^1 |F_1^{-1}(t) - F_2^{-1}(t)| dt$, avec F_1^{-1} et F_2^{-1} les fonctions inverses des fonctions de répartition de p_1 et p_2 . Cette métrique et d’autres distances de Wasserstein sont utilisées en traitement d’images comme par exemple dans (Rabin et al., 2012; Peyré et al., 2012).

Tout ce que l’on a dit pour les histogrammes peut être transposé aux histogrammes cumulés. On obtient la fonctionnelle suivante :

$$J(u) = TV(u) + \mu \sum_{\Lambda} \left(\frac{1}{\beta} |\langle u, g_{C,\lambda}^1 \rangle_{\Omega}| + \frac{1}{1-\beta} |\langle 1-u, g_{C,\lambda}^0 \rangle_{\Omega}| \right) \quad (3.13)$$

avec $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$, $g_{C,\lambda}^0 = \sum_{\gamma \leq \lambda} g_\lambda^0 = \mathbb{1}_{I \leq \lambda} - h_C^0(\lambda)$, h_C^0 l'histogramme cumulé provenant de h^0 et $g_{C,\lambda}^1 = \sum_{\gamma \leq \lambda} g_\lambda^1 = \mathbb{1}_{I \leq \lambda} - h_C^1(\lambda)$, h_C^1 l'histogramme cumulé provenant de h^1 . Les schémas numériques sont similaires.

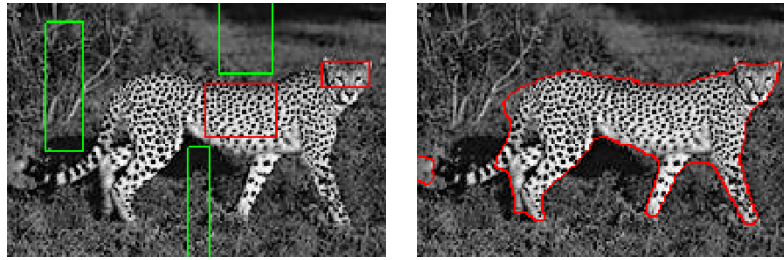
Des expériences sur des images synthétiques et naturelles sont maintenant montrées. Les histogrammes des deux régions à segmenter sont supposés connus. Ils sont en fait ici estimés sur une sélection choisie par l'utilisateur. Les sélections sont signalées sur les images par des rectangles rouges pour la première région et verts pour la deuxième.

Comme la fonctionnelle est convexe, l'initialisation avec $u = 0.5$ est utilisée pour toutes les expériences, ce qui est la principale différence avec d'autres approches existantes (Ni et al., 2009; Peyré et al., 2012; Yuan et al., 2012). La solution finale est obtenue en seuillant la solution estimée u^* du problème convexe en prenant pour seuil 0.5, un autre seuil pouvant donner des résultats différents. On présente des exemples en niveaux de gris, en couleurs ou encore avec le tenseur de structure.

3.3.1 Images en niveaux de gris.

Dans cette section la version avec les histogrammes cumulés est utilisée, puisqu'elle est mieux adaptée aux images en niveau de gris et plus robuste au bruit. Le terme de données l^1 entre les histogrammes cumulés correspond alors à la distance de Wasserstein l^1 . Cette équivalence est vraie car on utilise la norme l^1 et car on est en niveaux de gris et donc sur la droite réelle. Une première segmentation d'une image naturelle est présentée dans la Figure 3.1. L'animal est trouvé, même s'il y a un problème au niveau de la queue.

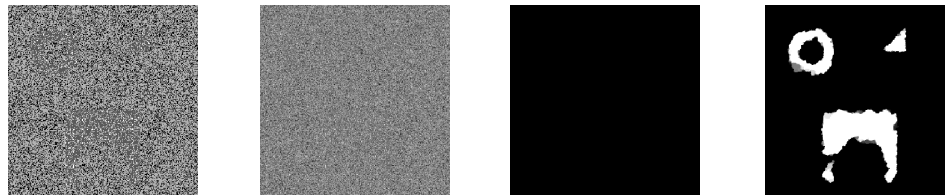
Pour montrer la robustesse au bruit, la segmentation d'une image synthétique est effectuée. L'image a deux régions qui ont la même moyenne mais différents histogrammes avec deux classes qui ont des valeurs non nulles, et un bruit gaussien a été rajouté à l'image. Les histogrammes sont estimés sur l'image non bruitée pour voir s'il est possible de retrouver un objet dans une image bruitée connaissant son histogramme sans bruit. Les résultats des deux algorithmes sont montrés dans la Figure 3.2. Ici le modèle marche bien avec les histogrammes cumulés mais échoue avec les histogrammes quand ce sont les statistiques de l'image sans bruit qui sont connues.



(a) Image initiale

(b) Segmentation

FIGURE 3.1 – Segmentation d’une image naturelle, avec $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.15$ et 10 classes. L’animal est relativement bien segmenté.



(a) Image initiale
avec les
histogrammes
connus

(b) Image initiale
avec un bruit
gaussien
ajouté

(c) Segmentation
avec les
histogrammes

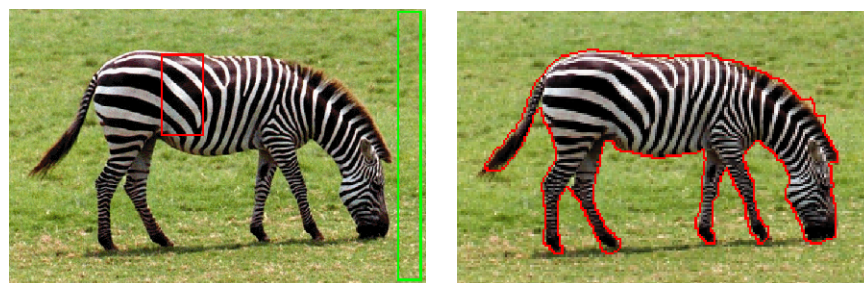
(d) Segmentation
avec les
histogrammes
cumulés

FIGURE 3.2 – Segmentation d’une image bruitée avec deux régions qui ont la même moyenne mais différents histogrammes, avec $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.04$ et 100 classes. Les histogrammes cumulés fonctionnent alors que les histogrammes échouent, ici ce sont les histogrammes des images sans bruit qui sont connus. Les résultats présentés ne sont pas seuillés pour montrer que l’échec du modèle avec histogrammes n’est pas dû au choix du seuil.

3.3.2 Images en couleurs.

Les résultats sur un zèbre en utilisant les histogrammes couleurs sont montrés dans la Figure 3.3. Ici encore les résultats sont bons. Dans la Figure 3.4 les résultats sur une photo de bateau sont exposés. Le choix de β change le résultat, ici le bateau est petit par rapport au reste de l’image, augmenter β

peut permettre d'obtenir de meilleurs résultats. En effet si les histogrammes estimés et les histogrammes donnés sont égaux, le terme de données est nul et les deux régions sont traitées de la même manière. Cependant comme la normalisation a été enlevée lors de la convexification dans la section 3.2.2, pour une erreur qualitativement équivalente, c'est à dire égale pour les histogrammes normalisés, le terme d'erreur de la plus petite région sera plus faible que celui de la région plus grande. Ainsi on peut modifier β pour compenser une différence d'aire ou pour favoriser le respect d'un histogramme par rapport à l'autre. Si un histogramme est connu avec plus de certitude que l'autre, il est possible de favoriser le respect de celui-ci.



(a) Image initiale

(b) Segmentation

FIGURE 3.3 – Segmentation d'une image naturelle, avec $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.2$ et 7^3 classes. L'animal est assez bien segmenté.

3.3.3 Tenseur de structure.

Le modèle proposé peut aussi être utilisé pour des images texturées, en utilisant par exemple le tenseur de structure (Brox et al., 2003) défini comme suit. Si I est une image en niveaux de gris, le tenseur de structure est la matrice symétrique $(\nabla I)(\nabla I)^t$. Puisque le tenseur est symétrique, il a seulement 3 dimensions indépendantes. Un histogramme 3D est alors suffisant pour représenter les valeurs prises par le tenseur de structure.

On peut alors appliquer les algorithmes sur les trois canaux du tenseur de structure ou enrichir le modèle en rajoutant les valeurs en niveaux de gris. Ici des exemples impliquant juste les composantes du tenseur de structure sont présentés. Les canaux sont normalisés entre 0 et 1 avant de prendre les histogrammes. Un exemple d'une image synthétique est donné, avec deux régions

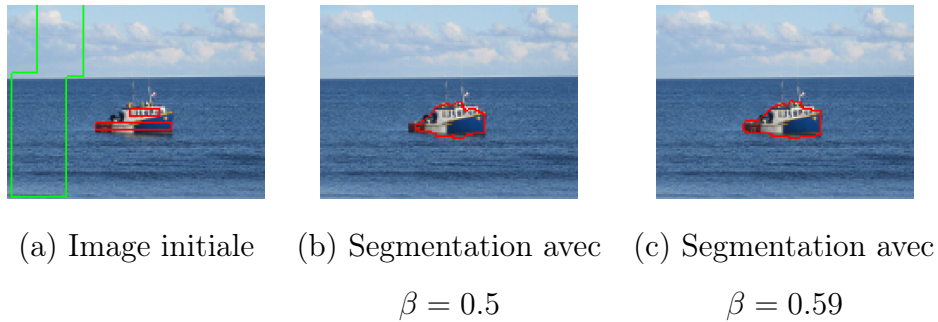


FIGURE 3.4 – Segmentation d’un bateau, avec $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.13$ et 5^3 classes. Le bateau est trouvé, mais choisir $\beta = 0.59$ donne un meilleur résultat dans l’image (c) que $\beta = 0.5$ dans l’image (b). En effet comme les deux régions ne sont pas de même taille, le modèle favorise l’exactitude de l’histogramme évalué sur la grande région. Augmenter β compense cet effet et permet d’obtenir une meilleure segmentation.

qui ont le même histogramme de niveaux de gris et la même orientation. Le résultat est donné Figure 3.5. Le modèle ici encore marche bien, même si l’anneau est segmenté comme un disque. Les segmentations de deux images avec deux textures sont présentées Figure 3.6 où le modèle fonctionne.

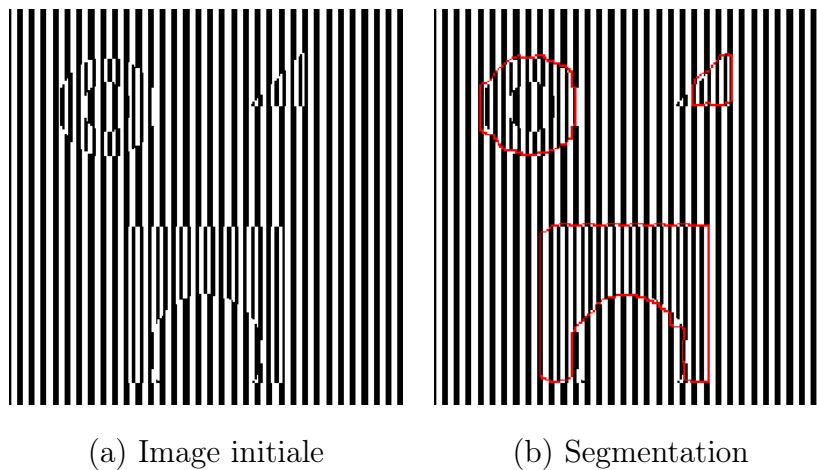


FIGURE 3.5 – Segmentation d’une image synthétique, avec $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.025$ et 3^3 classes.

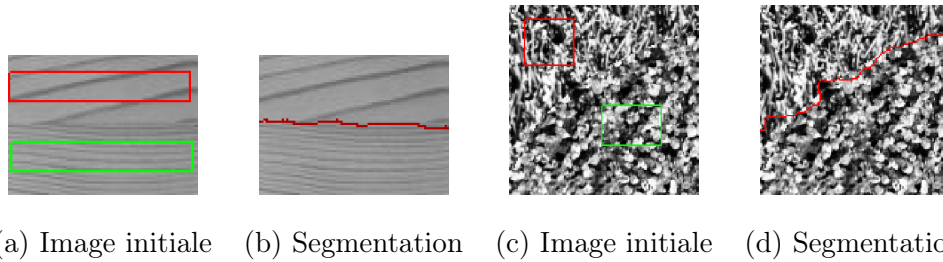


FIGURE 3.6 – Segmentation d’une image de bois, avec $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.075$ et 7^3 classes, et la segmentation d’une image composée de deux textures, avec $\beta = 0.5$, $\lambda = 0.1$ et 7^3 classes.

3.3.4 Local Binary Patterns.

L’algorithme peut bien sûr se décliner avec d’autres descripteurs, de plus certains descripteurs s’écrivent directement comme des histogrammes sans que des problèmes de quantification se posent. Une segmentation obtenue en utilisant les structures binaires locales (Mäenpää, 2003) est présentée à titre d’exemple Figure 3.7. La méthode des local binary patterns (LBP) (voir par exemple (Mäenpää, 2003)) code le signe de la différence d’intensité entre un pixel et ses voisins. Si les 8 plus proches sont gardés et si un ordre est défini, un nombre de 8 bits est obtenu.

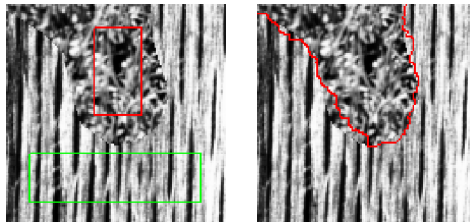


FIGURE 3.7 – Résultat de l’algorithme pour une image texturée avec l’histogramme des LBP.

3.4 Comparaison avec d'autres approches.

Les avantages de la comparaison globale d'histogrammes et d'un algorithme qui ne dépend pas de l'initialisation sont ici discutés. D'abord pour illustrer l'importance de la comparaison globale d'histogrammes, un algorithme de segmentation local avec des histogrammes est proposé. Une estimation ponctuelle de la probabilité d'un pixel d'appartenir à une classe peut être formulée par exemple avec la fonctionnelle :

$$J_p(u) = TV(u) + \langle u(x), h_0(I(x)) - h_1(I(x)) \rangle_{\Omega} \quad (3.14)$$

pour $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$. De la même manière, une estimation locale de la probabilité d'un pixel d'appartenir à une classe peut être formulée avec la fonctionnelle :

$$J_l(u) = TV(u) + \langle u(x), \| h_0 - h_{V(x)} \|_{l^1} - \| h_1 - h_{V(x)} \|_{l^1} \rangle_{\Omega}, \quad (3.15)$$

avec $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ et $h_{V(x)}$ l'histogramme estimé sur un voisinage $V(x)$ de $x \in \Omega$. Remarquons que dans ces deux fonctionnelles, le terme de données peut être calculé point par point. Pour le cas du modèle local cela demande juste de calculer une fois la carte des distances avec les histogrammes locaux. C'est la principale différence avec notre terme de données qui dépend de tout u .

3.4.1 Comparaison avec les approches locales.

On illustre l'intérêt d'utiliser des comparaisons globales d'histogrammes plutôt que des comparaisons locales avec deux exemples donnés Figures 3.8 et 3.9.

Pour illustrer la différence entre un modèle point par point, un modèle local et un modèle global, on construit une image telle que ces trois comportements donnent des résultats différents. Cette image est binaire et composée de trois régions dont on connaît les distributions.

Les distributions sont choisies de telle manière que le noir soit toujours majoritaire, donc le modèle point par point segmente l'image en une seule région, du moins si les deux histogrammes de référence ne sont pas égaux entre eux.

On fait également en sorte qu'en prenant l'histogramme de la réunion des deux premières régions, l'histogramme d'une de ces deux régions, par

exemple la première, est plus proche de celui de la troisième. Les deux histogrammes de référence choisis sont celui de la troisième région et celui des deux premières régions réunies. Alors le modèle local segmente la première région avec la troisième, et les histogrammes estimés à partir de la segmentation ne correspondent pas aux histogrammes de référence.

Le modèle global segmente en deux régions avec les histogrammes estimés sur les deux régions qui correspondent aux histogrammes de référence. Les comportements diffèrent donc bien selon les modèles. Seul le modèle global obtient des histogrammes estimés à partir de la segmentation qui correspondent aux histogrammes donnés. On expose maintenant un exemple synthétique concret.

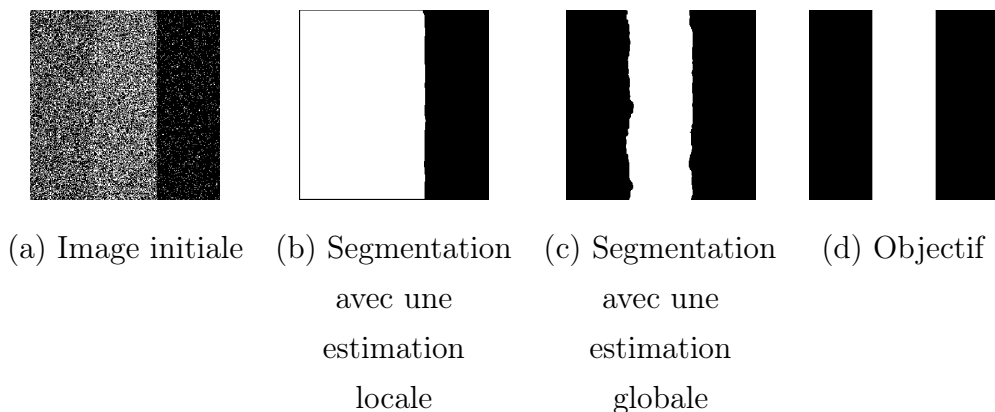


FIGURE 3.8 – Segmentation d’une image binaire avec trois régions. Les probabilités respectives de 0 sont 0.65, 0.5 et 0.95. Deux histogrammes $h_0 = [0.8, 0.2]$ et $h_1 = [0.55, 0.45]$ sont fixés. L’estimation locale sur des voisinages de taille 9×9 avec $\lambda = 0.5$ donne une classification pour laquelle les histogrammes estimés à partir de la segmentation de l’image (b) ne sont pas aussi proches que ceux donnés par notre modèle dans l’image (c) avec pour paramètres $\beta = 0.5$ et $\lambda = 0.5$.

La Figure 3.8 est composée de trois différentes régions et ne prend que les valeurs 0 et 1. Chaque région est composée de réalisations indépendantes d’une distribution binomiale avec la probabilité de 0 qui dépend de la région. Cette probabilité est égale à 0.65 pour la région de gauche, 0.55 pour la région du milieu et 0.95 pour la région de droite.

Deux histogrammes sont posés, $h_0 = [0.8, 0.2]$, la fréquence de 0 est donc

0.8 et celle de 1 est 0.2, et $h_1 = [0.55, 0.45]$. Le premier histogramme (h_0) correspond à l'union de la région de gauche et de la région de droite, alors que le second (h_1) correspond à la région du milieu.

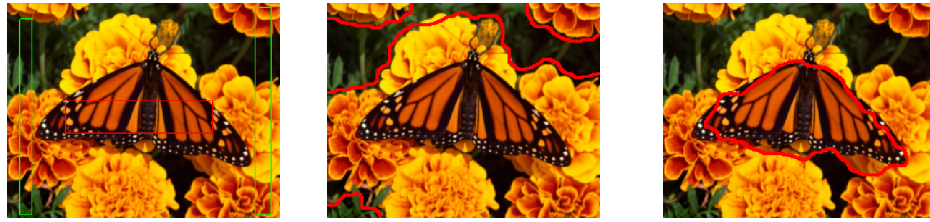
La valeur 0 est alors plus probable dans le modèle h_0 . Sans régularisation et point par point les pixels noirs seront ainsi classés avec h_0 , et les pixels blancs avec h_1 .

Comme dans chaque modèle la probabilité de 0 est plus grande que celle de 1 et comme les réalisations sont indépendantes, localement les valeurs 0 sont majoritaires. Si on augmente le poids de la régularisation, le vote majoritaire local l'emporte et toute l'image est classée avec le modèle pour lequel 0 est le plus probable. Ce type de classification est obtenu avec la fonctionnelle (3.14). Avec ou sans régularisation les histogrammes estimés à partir des régions segmentées ne seront pas proches des histogrammes donnés.

Les histogrammes locaux améliorent le résultat. Pour une bonne taille de voisinage, l'estimation locale de l'histogramme sera assez bonne et la région centrale sera classée avec h_1 . Mais si la métrique utilisée est l^1 , alors localement les histogrammes de la première région seront plus proches de h_1 et seront donc classés avec lui. La minimisation de la fonctionnelle (3.15) permet ce genre de comportements.

Les histogrammes estimés à partir de la segmentation locale ne seront pas proches de ceux donnés. Or l'objectif est justement que les histogrammes estimés globalement à partir de la segmentation calculée soient proches des histogrammes donnés. Dans la Figure 3.8 cet exemple est montré, avec les histogrammes locaux et notre modèle. Le résultat du modèle point par point n'est pas affiché car il assigne toute l'image à une seule classe.

Une autre image est donnée dans la Figure 3.9 dont les histogrammes locaux diffèrent des histogrammes globaux. Les histogrammes initiaux sont estimés à partir des régions sélectionnées dans la Figure de gauche. Ici les couleurs orangées sont plus probables dans la région donnée par le papillon. Alors localement les fleurs sont classées avec le papillon, et les régions sombres avec le fond. Cet exemple illustre encore une fois l'importance de la globalité de la comparaison dans certains cas pour obtenir la segmentation, puisque l'approche locale n'arrive pas à segmenter le papillon correctement.



(a) Image initiale (b) Segmentation avec le modèle local (c) Segmentation avec le modèle global

FIGURE 3.9 – Segmentation d’une image où les histogrammes locaux sont différents des histogrammes globaux. La segmentation échoue pour le premier modèle (avec $\lambda = 10$) car il classe les voisinages orangés d’un côté et les voisinages sombres de l’autre. Les histogrammes estimés à partir de la segmentation sont moins proches que ceux obtenus par la méthode globale avec $\beta = 0.5$ et $\lambda = 0.22$. Les histogrammes ont ici 4^3 classes.

3.4.2 Comparaisons avec l’approche par gradients de forme de (Peyré et al., 2012).

Maintenant on illustre les avantages d’un modèle qui ne dépend pas de l’initialisation. Nos résultats sont comparés avec ceux obtenus avec une version de l’algorithme de (Peyré et al., 2012)¹. Le code a été modifié pour avoir deux histogrammes fixés. La formulation utilise des gradients de forme (Delfour and Zolésio, 2001). Dans la Figure 3.10 on expérimente sur l’exemple synthétique construit dans la Figure 3.8 et sur une image naturelle. Même si ce modèle par gradients de forme peut donner des segmentations proches de celles obtenues par notre modèle, voir les images (f) et (h) de la Figure 3.10, l’initialisation est critique. En effet dans la Figure 3.10, les initialisations présentées dans les images (g) et (i) ne semblent pas très éloignées et pourtant donnent des résultats qualitativement différents dans les images (h) et (j) respectivement.

¹. Je remercie les auteurs de (Peyré et al., 2012), Gabriel Peyré, Jalal Fadili et Julien Rabin, pour leur code.

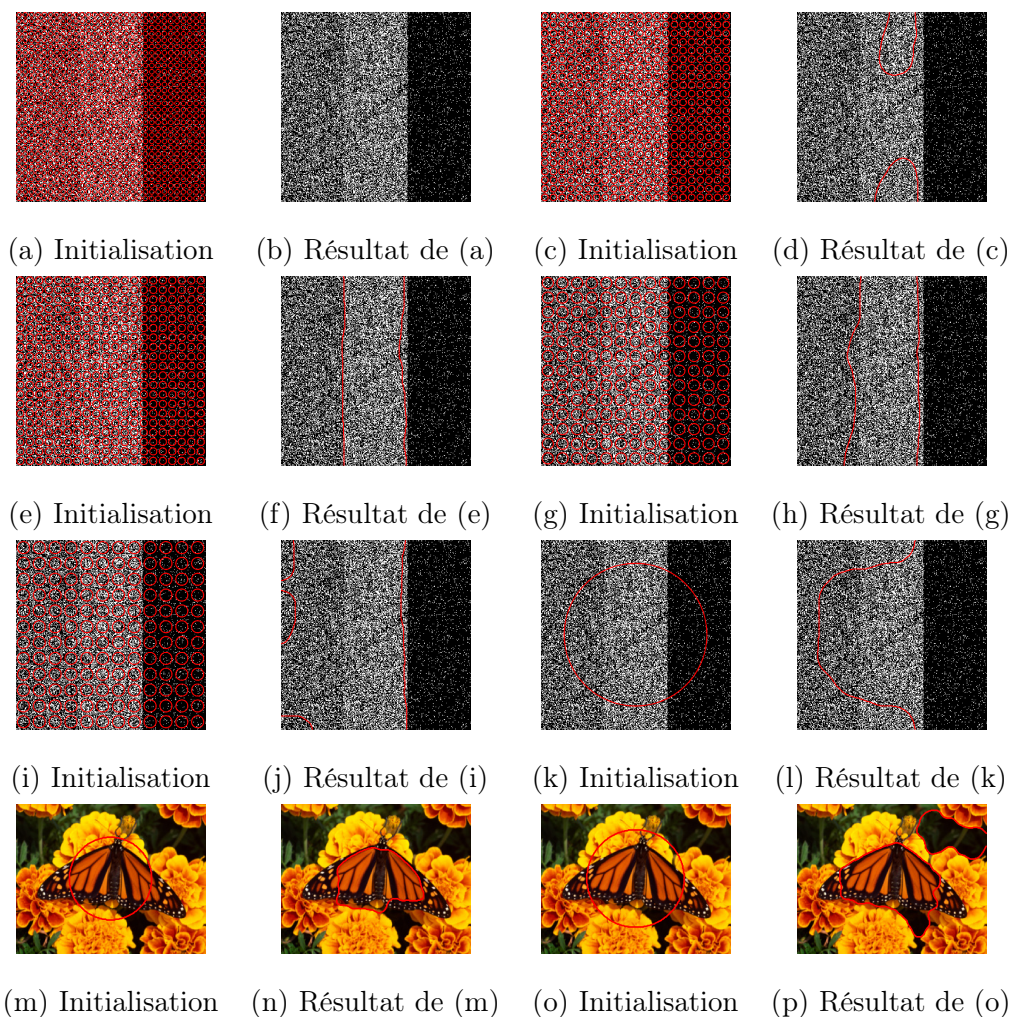


FIGURE 3.10 – Les problèmes qui peuvent se poser quand on utilise un algorithme qui dépend de l’initialisation sont illustrés. Les résultats (e) et (n) ne sont pas très différents de ceux obtenus respectivement dans l’image (c) de la Figure 3.8 et dans l’image (c) de la Figure 3.9, mais l’initialisation doit être choisie avec précaution.

3.4.3 Conclusion.

J’ai présenté un nouveau modèle convexe pour la segmentation à partir d’histogrammes et j’ai étudié sa version avec la norme l^1 en détail. Ce modèle

permet d'obtenir une segmentation ne dépendant pas de l'initialisation et compare globalement les histogrammes.

Des exemples ont été donnés pour lesquels le caractère global est nécessaire dans un modèle avec histogrammes. Bien sûr cette globalité implique un nombre d'opérations plus important.

De plus, l'obtention d'une solution du problème initial à partir d'une solution du problème relâché n'est pas automatique. Cependant lors de nos expériences, quand le cadre des histogrammes a un sens pour l'image donnée, le résultat de la relaxation seuillé donne une segmentation satisfaisante.

La relaxation choisie enlève la normalisation et introduit un biais quand les deux régions ont des tailles très différentes. Dans le cas où les histogrammes sont parfaitement connus cela ne change rien. Sinon l'exactitude de la correspondance des histogrammes est favorisée pour la région la plus grande. Lors de nos tests cela n'a pas paru crucial, même si un poids différent peut améliorer la qualité de la segmentation dans certains cas.

Le cadre choisi ici est le cadre de la segmentation, mais cette méthode de convexification peut s'étendre à d'autres applications, si une comparaison d'histogrammes est utilisée. C'est le cas par exemple de la cosegmentation ou des problèmes de régularisation avec un histogramme.

Dans cette partie j'ai étudié la segmentation binaire continue par morceaux au chapitre 2 dont la convexification permet d'obtenir un minimum global. J'ai proposé un nouveau modèle par bande étroite qui permet de calculer sur une sous-partie de l'image et d'obtenir un résultat localisé spatialement si souhaité, tout en profitant d'algorithmes convexes sans approximation. Ensuite j'ai défini et étudié un modèle convexe qui prend en compte des histogrammes à la place des valeurs moyennes. Cela permet plus de souplesse mais demande plus de calcul, et on n'obtient pas un minimum global à coup sûr. Je vais maintenant discuter de la relaxation de problèmes à plusieurs étiquettes, et des liens des minimiseurs des relaxations avec les minimiseurs du problème original.

Deuxième partie

Modèles convexes et non convexes
pour les problèmes
multi-étiquettes.

Chapitre 4

Introduction.

Cette partie aborde de manière plus générale des problèmes en traitement d'images dont les solutions sont calculées comme minimiseurs d'une certaine fonctionnelle (voir par exemple (Aubert et al., 2002)). Les fonctionnelles considérées ont un terme de données qui dépend de l'application considérée, et un terme de régularisation. Cette non convexité est parfois due à la physique du problème comme pour le débruitage de bruit speckle (Aubert and Aujol, 2008). La non localité de la fonctionnelle (Aujol et al., 2010) est une autre cause de non convexité. Elle peut également être inhérente au problème lui-même comme pour la segmentation d'images (Mumford and Shah, 1989; Chan and Vese, 2001; Bae et al., 2011; Brown et al., 2012; Maurel et al., 2011), le flot optique (Horn and Schunck, 1981; Black and Anandan, 1993; Aubert et al., 2002; Mémin and Pérez, 2002; Brox et al., 2004; Bruhn et al., 2005; Zach et al., 2007; Werlberger et al., 2009; Papadakis et al., 2010; Ballester et al., 2012), etc.

La non convexité de la fonctionnelle à minimiser peut engendrer différents problèmes. D'une part la solution au problème peut ne pas exister ou ne pas être unique. D'autre part, les algorithmes numériques mis en œuvre pour calculer une solution peuvent rester bloqués autour d'un minimum local, et ainsi la solution numérique peut dépendre fortement du choix de l'initialisation (pour les algorithmes itératifs).

Pour toutes ces raisons, réécrire sous forme convexe un problème non convexe peut être une amélioration majeure. De nombreux travaux dans cette direction ont été écrits ces dernières années (Chambolle, 2004a; Chan et al., 2006; Aubert and Aujol, 2005; Pock et al., 2008, 2010a; Papadakis et al., 2010; Chambolle et al., 2011; Strekalovskiy et al., 2011; Brown et al., 2012;

Goldstein et al., 2012) dans la communauté mathématique du traitement de l'image. La convexification a d'abord été utilisée pour la segmentation d'images dans (Chan et al., 2006) comme on l'a vu au chapitre 2, mais elle est maintenant utilisée pour d'autres problèmes comme le calcul de disparités (Pock et al., 2008), ou des problèmes de dimension supérieure comme l'estimation du flot optique (Papadakis et al., 2010). L'idée principale derrière toutes ces approches est d'introduire une nouvelle variable définie sur un espace de plus grande dimension qui permet d'écrire une relaxation convexe du problème original. Si la fonctionnelle originale a certaines propriétés, par exemple si elle vérifie la formule de la coaire, alors un seuillage du minimiseur du problème relâché est un minimiseur du problème original (voir (Chambolle, 2004a; Chan et al., 2006) pour des travaux fondateurs dans ce domaine). Dans les approches floues pour la segmentation (Li et al., 2010; Shafei and Steidl, 2012), les étiquettes floues sont à valeurs dans un intervalle comme les étiquettes des problèmes relâchés, et le problème qui consiste à définir une étiquette unique à partir d'une étiquette floue est similaire à celui qui consiste à trouver une solution du problème original à partir d'une solution du problème relâché. Bien sûr, une augmentation en place mémoire et en calcul résultent de l'augmentation de la dimension de ces convexifications quand le nombre d'étiquettes augmente. C'est une des raisons pour laquelle les méthodes de convexification deviennent plus compliquées à mettre en œuvre quand la dimension des variables est plus grande que un. Le problème du flot optique (comparé au problème de la segmentation (Chan et al., 2006)) en est un exemple, et c'est la raison pour laquelle on va se concentrer particulièrement sur ce problème.

En s'inspirant des travaux mentionnés précédemment, je propose des nouveaux choix de convexification, basés sur un modèle probabiliste et conduisant à de nouveaux algorithmes. On illustre notre approche en l'appliquant au flot optique. Les expériences numériques permettent de justifier l'intérêt de l'approche.

Dans tous les modèles que nous allons étudier ici, le terme de régularisation repose sur la variation totale. Cela permet de bénéficier de la formule de la coaire, cette propriété joue un rôle clé quand il s'agit de trouver une solution du problème original à partir d'un minimiseur de la fonctionnelle relâchée, comme nous allons le détailler après. Notons que des approches comme (Pock et al., 2010a; Strekalovskiy et al., 2011) proposent d'utiliser une version tronquée de la variation totale, qui se montre utile pour la restauration d'image (voir (Aubert et al., 2002)). Cette non convexité du terme de régularisation

peut permettre une meilleure préservation des discontinuités. Cependant, le problème qui nous intéresse est celui du lien entre les solutions du problème original et celles obtenues après relaxation, et on considère la variation totale comme au chapitre 2.

Précisons le problème et ses notations. Soit Ω le domaine de l'image, Ω est un ouvert non vide de \mathbb{R}^n avec un bord Lipschitz. Le but est d'estimer un ensemble de N fonctions $u_i \in BV(\Omega, \Gamma_i)$, avec $1 \leq i \leq N$, qui prennent leurs valeurs dans un ensemble discret prédéfini contenant M_i éléments ordonnés $\Gamma_i = \{u_0^i < \dots < u_{M_i-1}^i\}$. Le problème est la minimisation en fonction de $u = [u_1, \dots, u_N]$ d'une fonctionnelle appartenant à la classe suivante

$$J_N(u) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |Du_i(x)| + \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) dx, \quad (4.1)$$

où ρ est une fonction des données positives et $\rho(x, u(x))$ représente le coût d'assigner la valeur $u(x)$ au pixel x . ρ est une fonction bornée qui peut être non linéaire en fonction de u . Dans ce qui suit, on parlera de cas 1D lorsque $N = 1$.

La structure de cette partie est la suivante. Dans un souci de clarté, je traite d'abord le cas de la dimension 1 dans le chapitre 5. Le modèle introduit dans (Pock et al., 2008) est rappelé, puis j'introduis un nouveau modèle qui repose sur un modèle probabiliste. Il est équivalent au modèle de (Chambolle et al., 2011), mais l'algorithme proposé utilise des projections exactes et sans boucle interne, même quand on l'étend aux problèmes de plus grandes dimensions. Dans toutes ces approches, le retour au problème original se fait par un simple seuillage comme dans la partie I.

Le cas de la dimension 2 dans est traité dans le chapitre 6. L'approche de (Papadakis et al., 2010) est rappelée. Le problème y est relâché de manière indépendante pour chaque variable. Je propose un nouvel algorithme qui permet d'obtenir de meilleurs résultats. L'approche de (Stekalovskiy et al., 2011) est également présentée. Elle propose un moyen de convexifier le terme de données de la fonctionnelle. Cependant la relation avec le problème original n'est pas toujours claire, comme nous allons le montrer dans la partie numérique. Ensuite on rappelle le cadre de (Brown et al., 2012). Il donne une méthode générale de convexification (qui paraît lourde en pratique pour le cas du flot optique à cause de l'algorithme de Dijkstra pour calculer des projections). J'introduis ensuite le nouveau cadre probabiliste pour la dimension deux et son algorithme avec une projection exacte.

Contrairement au cadre 1D, il n'y a pas de stratégie de seuillage simple pour obtenir une solution du problème original à partir d'une solution du problème relâché. C'est la raison pour laquelle dans le chapitre 7 je m'intéresse à la manière d'obtenir une bonne solution du problème original à partir d'une solution du problème relâché. Dans le chapitre 8 je présente des exemples numériques pour des problèmes de dimension un à trois.

Mes contributions dans cette partie sont :

- Un modèle de convexification de la fonctionnelle (4.1) pour lequel je donne un algorithme sans boucle interne avec des projections exactes.
- Un nouvel algorithme pour le modèle de (Papadakis et al., 2010) qui permet d'obtenir des résultats numériques aussi bon que les modèles convexes.
- La possibilité d'obtenir des minima locaux de la fonctionnelle (4.1) à partir de ceux de la relaxation de (Papadakis et al., 2010).
- Une étude détaillée de la manière d'obtenir une solution du problème original à partir d'une solution du problème relâché. Je propose différentes méthodes et je les compare pour les différentes relaxations abordées. Je mets en évidence que certaines méthodes proposées dans la littérature ne sont pas optimales. Ainsi une relaxation non convexe comme celle de (Papadakis et al., 2010) avec notre nouvel algorithme permet d'obtenir d'aussi bonnes valeurs de la fonctionnelle originale (4.1) que les relaxations convexes, même si les valeurs atteintes par les fonctionnelles convexes sont plus faibles.

Les résultats obtenus dans cette partie ont été publiés dans Papadakis et al. (2013).

Chapitre 5

Convexification du problème multi-étiquettes 1D.

Cette section est dédiée au cas 1D, où une seule variable est estimée pour chaque pixel d'une image. Concrètement, la fonctionnelle à minimiser est

$$J_1(u) = \int_{\Omega} |Du(x)| + \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) dx. \quad (5.1)$$

avec $u \in BV(\Omega, \Gamma)$, $\Gamma = \{u_0 < \dots < u_{M-1}\}$.

Pour la segmentation d'une image en niveaux de gris $I : x \in \Omega \mapsto I(x) \in [0, 1]$ avec M étiquettes de niveaux de gris dans $\Gamma = \{0, 1/(M-1), \dots, 1\}$, la fonction ρ s'écrit $\rho(x, u(x)) = (I(x) - u(x))^2$. La fonction u représente alors une approximation constante par morceaux de l'image I . Dans le cas de l'estimation de disparité entre deux images I_1 et I_2 , avec des valeurs de disparité dans $\Gamma = \{0, 1, \dots, M-1\}$, le coût est $\rho((x, y), u(x, y)) = (I_1(x, y) - I_2(x + u(x, y), y))^2$. La fonction u représente un déplacement horizontal.

Dans la section 5.1 la formulation par surligne de niveau de (Pock et al., 2008, 2010a) est présentée. Puis la nouvelle approche pour la convexification sera détaillée et la relation avec la méthode de (Chambolle et al., 2011) sera expliquée dans la section 5.3.

5.1 Convexification du problème multi-label 1D avec des surlignes de niveau.

Rappelons brièvement la technique de convexification de (Pock et al., 2008, 2010a) est brièvement rappelée. L'idée est d'écrire les non-linéarités de la fonctionnelle $J_1(u)$ d'une manière convexe, en introduisant une variable auxiliaire $\phi : \Omega \times \Gamma \mapsto \{0, 1\}$ qui représente les différentes valeurs de u . Soit

$$\phi(x, s) = H(u(x) - s), \quad (5.2)$$

avec H la fonction de Heaviside ($H(s) = 1$ si $s \geq 0$ et 0 sinon). L'inconnue u peut être retrouvée à partir de ϕ par la formule

$$u(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1})\phi(x, u_i), \quad (5.3)$$

$\Gamma = \{u_0 < \dots < u_{M-1}\}$ étant l'ensemble des valeurs possibles de u . En fait $\phi(\cdot, s)$ est la fonction indicatrice d'une surligne de niveau de u , la reconstruction consiste juste à écrire u en fonction de ses surlignes de niveau.

La variation totale de u s'écrit à partir des fonctions indicatrices des surlignes de niveau grâce à la formule de la coaire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du(x)| &= \int_s \int_{\Omega} |D\mathbf{1}_{u \geq s}(x)| dx ds = \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \int_{\Omega} |D\mathbf{1}_{u \geq u_i}(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \int_{\Omega} |D_x \phi(x, u_i)| dx \end{aligned} \quad (5.4)$$

Comme u ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut partitionner le domaine en un nombre fini de régions à l'intérieur desquelles u est constante. Dans ces régions ρ ne dépend plus de u et on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \rho(x, u_i) \mathbf{1}_{u=u_i}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i) (\phi(x, u_i) - \phi(x, u_{i+1})) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}) \phi(x, u_{M-1}) dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La fonctionnelle (5.1) peut ainsi être réécrite comme une fonction de ϕ au lieu de u .

$$\begin{aligned}
J_1(u) &= \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \int_{\Omega} |D_x \phi(x, u_i)| dx \\
&\quad + \sum_{i=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i) (\phi(x, u_i) - \phi(x, u_{i+1})) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}) \phi(x, u_{M-1}) dx \\
&= J(\phi),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

et on considère le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\phi \in \mathcal{A}_0} J(\phi), \tag{5.7}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \{ \phi \in BV(\Omega \times \Gamma, \{0, 1\}) \text{ tels que} \\
&\quad \phi(x, u_0) = 1, \phi(x, u_i) \geq \phi(x, u_{i+1}) \}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

D'après (Pock et al., 2008) on a :

Théorème 10. *La formule (5.3) définit une bijection f entre \mathcal{A}_0 et $BV(\Omega, \{0, 1\})$ telle que $J_1(f(\phi)) = J(\phi)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que f est une bijection, l'égalité fonctionnelle étant donnée par (5.6). Soit $\phi \in \mathcal{A}_0$, $x \in \Omega$, il existe j telle que $\phi(x, u_i) = 1$ pour $i \leq j$ et $\phi(x, u_i) = 0$ pour $i > j$. Alors $\phi(x, \cdot)$ est uniquement déterminé par ce j donné. On a $f(\phi)(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \phi(x, u_i) = u_j \in \Gamma$, et $f(\phi)$ est à variation bornée par (5.6), donc f est bien définie. Son inverse est $f^{(-1)}(u)(x, s) = H(u(x) - s)$. En d'autres termes, une fonction est identifiée avec la fonction caractéristique de son sous-graphe. \square

La fonctionnelle (5.6) est convexe en ϕ . Pour trouver un minimum global de (5.1), on peut trouver un ϕ qui minimise (5.6), puis trouver u à partir de ϕ . Il faut faire en sorte de pouvoir trouver u à partir de ϕ . En particulier ϕ doit être binaire et décroissante en fonction de s . Malheureusement,

l'ensemble des fonctions qui vérifient ces deux propriétés n'est pas convexe. Autoriser la fonction ϕ à prendre ses valeurs dans $[0, 1]$ permet de se ramener à un problème convexe. On introduit ainsi un ensemble convexe de fonctions admissibles :

$$\mathcal{A}_1 = \{\phi \in BV(\Omega \times \Gamma, [0, 1]) \text{ tels que} \quad (5.9)$$

$$\phi(x, u_0) = 1, \phi(x, u_i) \geq \phi(x, u_{i+1})\},$$

ainsi que le problème convexe

$$\min_{\phi \in \mathcal{A}_1} J(\phi). \quad (5.10)$$

En suivant (Pock et al., 2008), on a le théorème suivant :

Théorème 11. *Soit ϕ^* une solution de (5.10), alors pour presque tout seuil μ , $H(\phi^* - \mu)$ est une solution de (5.10) et de (5.7).*

Démonstration. Considérons une solution ϕ^* du problème relaxé (5.10). Par la formule de la coaire on obtient :

$$\int_{\Omega} |D\phi^*| = \int_0^1 \left(\int_{\Omega} |DH(\phi^* - \mu)| \right) d\mu. \quad (5.11)$$

De plus

$$\int_{\Omega} \rho(x, u_i) \phi^*(x, u_i) = \int_{\Omega} \rho(x, u_i) \int_0^1 H(\phi^*(x, u_i) - \mu) d\mu \quad (5.12)$$

$$= \int_0^1 d\mu \int_{\Omega} \rho(x, u_i) H(\phi^*(x, u_i) - \mu).$$

En utilisant (5.6) $J(\phi^*) = \int_0^1 J(H(\phi^* - \mu)) d\mu$. Par définition de ϕ^* , $J(\phi^*) \leq J(H(\phi^* - \mu))$ donc $J(\phi^*) \leq \int_0^1 J(H(\phi^* - \mu)) d\mu$ et puisqu'on a égalité, $B := \{\mu \in [0, 1] : J(H(\phi^* - \mu)) > J(\phi^*)\}$ est de mesure 0, et le résultat est prouvé. \square

Ainsi un minimum global de (5.1) peut être calculé par un seuillage de ϕ . Pour presque tout seuil $\mu \in [0, 1]$, on définit $\phi_{\mu} = \mathbf{1}_{\phi^* \geq \mu}$, et alors

$$u(x) = u_0 + \sum_{i=1}^{M-1} \phi_{\mu}(x, u_i)(u_i - u_{i-1}) \quad (5.13)$$

est un minimum global de (5.1).

5.1.1 Optimisation numérique.

Le problème de minimisation précédent (5.10) peut s'écrire sous la forme d'un problème primal-dual (voir chapitre 1) :

$$\begin{aligned} \min_{\phi \in \mathcal{A}_1} \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}, z_3 \in \mathcal{C}} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} D_x \phi(x, u_i) \cdot \mathbf{z}(x, u_i) dx \\ & + \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} D_u \phi(x, u_i) z_3(x, u_i) dx, \end{aligned} \quad (5.14)$$

où l'opérateur D_u et son adjoint D_u^* sont définis par :

$$D_u \phi(x, u_i) = \begin{cases} \phi(x, u_{i+1}) - \phi(x, u_i) & \text{si } i < M - 1, \\ -\phi(x, u_{M-1}) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.15)$$

$$D_u^* z(x, u_i) = \begin{cases} z(x, u_i) & \text{si } i = 0, \\ z(x, u_i) - z(x, u_{i-1}) & \text{si } 0 < i \leq M - 1. \end{cases} \quad (5.16)$$

La projection orthogonale sur \mathcal{B} notée $P_{\mathcal{B}}$ est rappelée équation (5.17).

$$P_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}(x, u_i)) = \frac{(u_i - u_{i-1})\mathbf{z}(x, u_i)}{\max(u_i - u_{i-1}, \|\mathbf{z}(x, u_i)\|)}, \quad (5.17)$$

avec $\|\mathbf{z}(x, u_i)\|^2 = z_1^2(x, u_i) + z_2^2(x, u_i)$. La dernière variable duale $z_3 \in \Omega \times \Gamma$ est définie sur l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{z_3, \text{ tels que } |z_3(x, u_i)| \leq \rho(x, u_i), \forall (x, u_i) \in \Omega \times \Gamma\}. \quad (5.18)$$

L'opérateur de projection sur \mathcal{C} est défini par

$$P_{\mathcal{C}}(z_3(x, u_i)) = \begin{cases} \frac{z_3(x, u_i)}{|z_3(x, u_i)|} \rho(x, u_i) & \text{si } |z_3(x, u_i)| > \rho(x, u_i) \\ z_3(x, u_i) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La discrétisation du domaine Ω et de la dérivation sur Ω est celle décrite dans la sous-section 2.4.2. L'algorithme primal dual 5 adapté de l'algorithme 2.8 présenté dans la section 1.5 permet de minimiser la fonctionnelle (5.6) :

Algorithme 5. *Minimiser la fonctionnelle 1D (5.6)*

On initialise avec $\phi^0(\cdot, u_i) = \bar{\phi}^0(\cdot, u_i) = \frac{u_{M-1} - u_i}{u_{M-1} - u_0}$, $z_i = 0$, on choisit $\sigma, \tau > 0$ tels que $\sigma\tau < \frac{1}{8}$
Tant que $\|\phi^k - \phi^{k-1}\| > \epsilon$, on itère :

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{k+1} &= P_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}^k + \sigma D_x \bar{\phi}^k) \\ z_3^{k+1} &= P_{\mathcal{C}}(z_3^k + \sigma D_u \bar{\phi}^k) \\ \phi^{k+1} &= P_{\mathcal{A}_1}(\phi^k - \tau (D_x^* \mathbf{z}^{k+1} + D_u^* z_3^{k+1})), \\ \bar{\phi}^{k+1} &= 2\phi^{k+1} - \phi^k \end{cases}$$

L'ensemble convexe \mathcal{A}_1 défini équation (5.9) implique que les quantités $\phi(x, u_{i+1}) - \phi(x, u_i)$ sont négatives. Dans le papier original (Pock et al., 2008), cette propriété n'était pas considérée et l'ensemble des fonctions admissibles était

$$\{\phi : \Omega \times \Gamma \rightarrow [0, 1], \phi(x, u_0) = 1, \phi(x, u_M - 1) = 0\}$$

Ce problème a été réglé dans (Chambolle et al., 2011), où un algorithme itératif inspiré de celui de Dijkstra a été introduit pour définir $P_{\mathcal{A}_1}$ et imposer la contrainte point par point, pour chaque $x \in \Omega$.

Cela semble à première vue être le principal inconvénient de cette convexification, car le procédé implique des projections itératives qui prennent du temps et ne sont pas a priori exactes en un nombre d'itérations finies. Pour des problèmes 1D, il a été néanmoins montré dans (Pock et al., 2010a) que ces projections sur des contraintes de décroissance peuvent être évitées, mais la preuve ne s'étend pas en plus grande dimension.

Une légère modification de l'approche précédente est présentée dans la section suivante. Elle amène à des projections simples pour tout $N \geq 1$. Il se trouve que l'approche proposée est lié à une approche récente dans (Chambolle et al., 2011), celle proposée ici repose sur une projection duale exacte et simple.

5.2 Une nouvelle convexification reposant sur un point de vue probabiliste.

On souhaite minimiser la fonctionnelle :

$$J_1(u) = \int_{\Omega} |Du(x)| + \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) dx \quad (5.19)$$

avec $u \in BV(\Omega, \Gamma)$. Comme on le verra dans le chapitre 6, la généralisation de l'approche de la section 5.1 à plusieurs dimensions nécessite une projection pour laquelle on ne connaît pas d'algorithme exact. Je propose une autre formulation qui n'a pas ce problème, je la présente d'abord dans le cas à une dimension. L'idée est de modéliser les valeurs possibles de la fonction de données ρ avec

$$\min_{u \in BV(\Omega, \Gamma)} \int_{\Omega} \rho(x, u(x)) dx = \min_{w \in \mathcal{D}_0} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \rho(x, u_i) w(x, u_i) dx,$$

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ w \in BV(\Omega \times \Gamma, \{0, 1\}), \text{ t.q. } \sum_i w(x, u_i) = 1, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (5.20)$$

Les deux problèmes sont équivalents, en effet l'équation $w(x, u_i) = \mathbf{1}_{u=u_i}$ permet de passer d'un domaine à l'autre. Au lieu d'écrire le problème en fonction des surlignes de niveau comme dans la section 5.1, on l'écrit en fonction des lignes de niveau. Il est possible de revenir à la formulation par surlignes de niveau par l'équation $H(u(x) - u_i) = \sum_{j \geq i} \mathbf{1}_{u=u_j}(x)$. La variation totale de u peut être réécrite en fonction de $\mathbf{1}_{u=u_i}$ comme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du| &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) |D_x H(u(x) - u_i)| ds \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} \mathbf{1}_{u=u_j}(x) \right) \right| dx, \end{aligned}$$

de telle manière que la fonctionnelle est finalement

$$\begin{aligned} J_w(w) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w(x, u_j) \right) \right| dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \rho(x, u_i) w(x, u_i) dx. \end{aligned} \quad (5.21)$$

avec $w \in \mathcal{D}_0$.

Pour rendre le problème convexe on considère désormais que les $w(x, u_i)$ représentent la probabilité du pixel $x \in \Omega$ d'appartenir à l'étiquette u_i . La

nouvelle variable w est ainsi relâchée dans l'ensemble convexe

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ w : \Omega \times \Gamma \mapsto [0, 1], \text{ s.t. } \sum_i w(x, u_i) = 1, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (5.22)$$

et on s'intéresse au problème convexe

$$\min_{w \in \mathcal{D}_1} J_w(w) \quad (5.23)$$

Le problème de minimisation (5.23) est convexe et un minimum global peut être estimé en écrivant le problème comme une recherche de point selle (voir la section 1.4).

5.2.1 Optimisation numérique.

La réécriture du problème de minimisation (5.23) sous la forme d'un problème primal-dual consiste à réécrire le terme de régularisation comme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w(x, u_j) \right) \right| dx \\ = \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{B}} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left(\sum_{j \geq i} w(x, u_j) \right) D_x^* \mathbf{z}(x, u_i) dx, \end{aligned} \quad (5.24)$$

où la variable $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, avec $z_k \in \Omega \times \Gamma$, est définie après discrétisation sur l'ensemble convexe

$$\mathcal{B} = \{ \mathbf{z}, \text{ s.t. } z_1^2(x, u_i) + z_2^2(x, u_i) \leq (u_i - u_{i-1})^2, \forall (x, u_i) \in \Omega \times \Gamma \}, \quad (5.25)$$

avec la convention $\mathbf{z}(\cdot, u_0) = 0$, puisque la ligne de niveau u_0 n'est pas comptée dans le terme TV de w car $\sum_{j \geq 0} w(x, u_j) = 1, \forall x \in \Omega$.

L'opérateur de projection $P_{\mathcal{B}}$ est donné dans l'équation (5.17). La projection de w sur l'ensemble convexe \mathcal{D}_1 (défini dans l'équation (5.22)) peut finalement être effectuée point par point pour chaque pixel w par la projection de $w(x, \cdot)$ sur le simplexe de dimension M à travers l'opérateur $P_{\mathcal{D}_1} : \mathbb{R}^{|\Omega| M} \rightarrow \mathcal{D}_1$ (voir (Chen and Ye, 2011) pour une implémentation rapide).

L'algorithme pour estimer w^* par l'approche de type primal-dual de (Chambolle and Pock, 2011) est donné ci-après.

Algorithme 6. *Minimiser la fonctionnelle 1D (5.23)*

On initialise avec $w^0 = \bar{w}^0 = \frac{1}{M}$, $\mathbf{z}^0 = 0$, on choisit $\sigma, \tau > 0$ tels que $\sigma\tau < \frac{1}{8M}$
Tant que $\|w^k - w^{k-1}\| > \epsilon$, on itère

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{k+1}(\cdot, u_i) &= P_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}^k(\cdot, u_i) + \sigma D_x(\sum_{l \geq i} \bar{w}^k(\cdot, u_l))), & \forall u_i \in \Gamma \\ \tilde{w}(\cdot, u_i) &= w^k(\cdot, u_i) - \tau(\rho(\cdot, u_i) + \sum_{l \leq i} D_x^* \mathbf{z}^{k+1}(\cdot, u_l)), & \forall u_i \in \Gamma \\ w^{k+1} &= P_{\mathcal{D}_1}(\tilde{w}), & \forall x \in \Omega \\ \bar{w}^{k+1} &= 2w^{k+1} - w^k \end{cases}$$

Par rapport à la section précédente et l'estimation de $\phi \in \mathcal{A}_1$ (défini dans l'équation (5.9)), la complexité du calcul est augmentée avec le terme $\sum_{l \geq i} w(x, u_l)$. Cependant, la projection de la variable w est ici exacte (Chen and Ye, 2011) et non pas itérative comme dans la formulation précédente. Il est aussi intéressant de souligner que les techniques de préconditionnement de (Pock and Chambolle, 2011) peuvent être utilisées pour accélérer le processus.

5.2.2 Équivalence avec le problème original (5.19).

Montrons qu'une solution du problème original (c'est à dire l'assignation d'étiquettes) peut être calculée à partir de w^* . Pour cela on aborde le lien avec l'approche de la section 5, où la convexification est faite avec $\phi = H(u(x) - s)$, et la fonctionnelle à minimiser pour $\phi \in \mathcal{A}_1$ est :

$$\begin{aligned} J(\phi) &= \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \int_{\Omega} |D_x \phi(x, u_i)| dx \\ &+ \sum_{i=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i) (\phi(x, u_i) - \phi(x, u_{i+1})) dx \\ &+ \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}) (\phi(x, u_{M-1})) dx \end{aligned} \quad (5.26)$$

avec $\mathcal{A}_1 = \{\phi \in BV(\Omega \times \Gamma, [0, 1]) \text{ tels que } \phi(x, u_0) = 1, \phi(x, u_i) \geq \phi(x, u_{i+1})\}$.

Proposition 3. *Il existe une bijection f entre les ensembles convexes \mathcal{A}_1 et \mathcal{D}_1 , avec $f(\phi)(x, u_i) = \phi(x, u_i) - \phi(x, u_{i+1})$ et $f^{-1}(w)(x, u_i) = \sum_{j \geq i} w(x, u_j)$.*

Ainsi, en posant $\phi(x, u_i) = \sum_{j \geq i} w(x, u_j)$ et en observant que $w(x, u_i) = \phi(x, u_i) - \phi(x, u_{i+1})$, il vient

$$\min_{\phi \in \mathcal{A}_1} J(\phi) = \min_{w \in \mathcal{D}_1} J(f^{-1}(w)) = \min_{w \in \mathcal{D}_1} J_w(w). \quad (5.27)$$

Donc, si w^* est un minimiseur global de la fonctionnelle (5.23), alors $\phi^* = f^{-1}(w^*)$ est un minimiseur global de la fonctionnelle (5.26).

Par la section 5.1 le problème en ϕ est convexe et pour presque tout seuil μ $H(\phi^* - \mu)$ est aussi une solution globale. ϕ^* est alors construit en seuillant w^* et on obtient ainsi une solution du problème original.

5.3 Connexions avec l'approche de (Chambolle et al., 2011).

Dans (Chambolle et al., 2011), les auteurs traitent d'un problème proche qui consiste à calculer des partitions minimales. Chaque étiquette est représentée par s_i et un coût σ_{ij} est donné à la distance entre les étiquettes i et j . Dans notre cas $\sigma_{ij} = |s_i - s_j|$. Le problème est alors de minimiser par rapport à une carte d'étiquettes $\lambda : x \in \Omega \mapsto \lambda(x) = i \in [1, N]$ la fonctionnelle :

$$J(\lambda) = \int_{\Omega} \rho(x, \lambda(x)) + \sum_i \sum_j \sigma_{ij} |\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j|,$$

où la partition de Ω en N régions est définie par $\Omega_i = \{x \in \Omega \text{ s.t. } \lambda(x) = i\}$. Le problème est relaxé en minimisant à la place

$$\min_{w \in \mathcal{D}_1} \Psi(D_x w) + \int_{\Omega} \rho(x, u_i) w(x, u_i) dx, \quad (5.28)$$

avec $\Psi(D_x w) := \sup_{(q) \in K} \int_{\Omega} q_i \cdot D_x w(x, u_i)$, $K = \{(q_i), |q_i - q_j| \leq |u_i - u_j|\}$. Ceci est équivalent à notre formulation. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \int_{\Omega} |D_x \sum_{j \geq i} w_j| &= \sup_{|q_i| \leq u_i - u_{i-1}} \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\Omega} q_i D_x \sum_{j \geq i} w_j \\ &= \sup_{|q_j| \leq u_i - u_{i-1}} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N D_x w_j \left(\sum_{i \leq j} q_i \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

En posant $q'_j = \sum_{i \leq j} q_i$, on a $q_j = q'_{j+1} - q'_j$ et

$$\sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) \int_{\Omega} |D_x \sum_{j \geq i} w_j| = \sup_{|q'_{j+1} - q'_j| \leq u_i - u_{i-1}} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{\Omega} q'_j D_x w_j, \quad (5.30)$$

qui donne exactement l'ensemble $K = \{|q'_{j+1} - q'_j| \leq u_i - u_{i-1}\}$, ce qui donne la meilleure relaxation pour le problème de partition minimale avec ces poids. Ainsi notre approche est similaire à (Chambolle et al., 2011), mais avec un point de vue probabiliste différent.

Après avoir revu des méthodes pour minimiser la fonctionnelle (5.1) et proposé un nouveau modèle avec un nouvel algorithme dont les projections sont exactes, j'étudie la minimisation de la fonctionnelle (4.1) pour la dimension 2.

Chapitre 6

Convexification du problème multi-étiquettes 2D.

La classe de fonctionnelles suivante est considérée dans ce chapitre :

$$J_2(u, v) = \int_{\Omega} |Du(x)| + \int_{\Omega} |Dv(x)| + \int_{\Omega} \rho(x, u(x), v(x)) dx, \quad (6.1)$$

définis pour les variables u et v prenant leurs valeurs dans des ensembles discrets $\Gamma^u = \{u_0 < \dots < u_{M-1}\}$ et $\Gamma^v = \{v_0 < \dots < v_{M-1}\}$. Pour être plus clair, le pas de discrétisation de Γ^u et Γ^v est uniforme, de telle sorte que $u_i - u_{i-1} = \Delta_u$, et $v_i - v_{i-1} = \Delta_v$ pour $i = 1 \dots M - 1$.

Donnons un exemple de terme de données ρ pour le problème de l'estimation d'un flot optique entre deux images. On cherche alors un vecteur 2D qui correspond au flot $w(x) = (u(x), v(x))$ d'une image I_1 à une image I_2 . Le champ $w(x) = (u(x), v(x))$ représente le champ de déplacement des pixels x d'une image I_1 . La fonction de coût ρ peut être définie par

$$\rho(x, u(x), v(x)) = \min(\kappa, |I_1(x) - I_2(x + w(x))|), \quad (6.2)$$

où $\kappa > 0$ est utilisé comme seuil pour le terme de données et permet de gérer des artefacts locaux. On pose $\rho(x, \dots) = \kappa$ quand $x + w(x)$ est hors de Ω .

La relaxation d'un tel problème peut être faite de différentes manières. L'approche de (Papadakis et al., 2010) est d'abord présentée. Elle repose sur un terme de données non convexe. Puis la méthode d'optimisation numérique est discutée dans la section 6.1. La convexification du terme de données proposée dans (Goldluecke and Cremers, 2010; Strekalovskiy et al., 2011) est

rappelée section 6.1.2. Finalement dans la section 6.2 je propose une nouvelle convexification. Ses relations avec l'approche par surlignes de niveaux de (Brown et al., 2012) sont ensuite détaillées.

6.1 Relaxation indépendante.

Dans cette partie, on présente l'extension naturelle de la section précédente qui consiste à introduire une variable auxiliaire pour chaque variable. On réécrit le terme de régularisation avec les lignes de niveau :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du| &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} (u_i - u_{i-1}) |D_x H(u(x) - u_i)| ds \\ &= \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} \mathbf{1}_{u=u_j}(x) \right) \right| dx, \\ \int_{\Omega} |Dv| &= \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} \mathbf{1}_{v=v_j}(x) \right) \right| dx. \end{aligned} \quad (6.3)$$

En suivant la formulation probabiliste de la section 5.2, on écrit le terme de régularisation en fonction de $(w_u, w_v) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0$, avec la correspondance $w_u(x, u_i) = \mathbf{1}_{u=u_i}(x)$ et $w_v(x, v_i) = \mathbf{1}_{v=v_i}(x)$:

$$\Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_u(x, u_j) \right) \right| dx + \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_v(x, v_j) \right) \right| dx$$

La relaxation choisie ici consiste à prendre $(w_u, w_v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1$. On détaille maintenant la manière de traiter le terme de données.

6.1.1 Terme de données non convexe.

En utilisant les notations introduites précédemment, le terme de données s'écrit

$$\int_{\Omega} \rho(x, u(x), v(x)) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) \mathbf{1}_{u=u_i}(x) \mathbf{1}_{v=v_j}(x) dx \quad (6.4)$$

On peut alors écrire le terme de données en fonction de $(w_u, w_v) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0$:

$$\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_j) w_u(x, u_i) w_v(x, v_j). \quad (6.5)$$

En choisissant la relaxation $(w_u, w_v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1$ on obtient le problème suivant qui est convexe séparément en w_u et en w_v :

$$\min_{(w_u, w_v) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1} J(w_u, w_v), \quad (6.6)$$

avec

$$\begin{aligned} J(w_u, w_v) &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_j) w_u(x, u_i) w_v(x, v_j) \\ &+ \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_u(x, u_j) \right) \right| dx \\ &+ \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_v(x, v_j) \right) \right| dx. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Le terme de données de la fonctionnelle n'est pas convexe conjointement en les deux variables w_u et w_v , on n'est donc pas assuré d'obtenir un minimum global du problème (6.6). Néanmoins, les minima locaux de la fonctionnelle non convexe présentent des propriétés intéressantes. En effet en utilisant la formulation par surligne de niveaux et en étendant la proposition (3) de la sous-section 5.2.2 au cas 2D, la fonctionnelle peut être reformulée de manière

équivalente par :

$$\begin{aligned}
J(\phi_u, \phi_v) &= \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\Omega} |D_x \phi_u(x, u_i)| dx + \sum_{j=1}^{M-1} \int_{\Omega} |D_x \phi_v(x, v_j)| dx \\
&+ \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_j) (\phi_u(x, u_i) - \phi_u(x, u_{i+1})) \\
&\quad (\phi_v(x, v_i) - \phi_v(x, v_{j+1})) dx \\
&+ \sum_{j=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}, v_j) \phi_u(x, u_{M-1}) (\phi_v(x, v_i) - \phi_v(x, v_{j+1})) dx \\
&+ \sum_{i=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_{M-1}) (\phi_u(x, u_i) - \phi_u(x, u_{i+1})) \phi_v(x, v_{M-1}) dx \\
&+ \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}, v_{M-1}) \phi_u(x, u_{M-1}) \phi_v(x, v_{M-1}) dx
\end{aligned} \tag{6.8}$$

avec $\phi_u \in \mathcal{A}_u$ et $\phi_v \in \mathcal{A}_v$ définis dans

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_u &= \{ \phi_u \in BV(\Omega \times \Gamma^u, [0, 1]) \text{ tels que} \\
&\quad \phi_u(x, u_0) = 1, \phi_u(x, u_i) \geq \phi_u(x, u_{i+1}) \}, \\
\mathcal{A}_v &= \{ \phi_v \in BV(\Omega \times \Gamma^v, [0, 1]) \text{ tels que} \\
&\quad \phi_v(x, v_0) = 1, \phi_v(x, v_j) \geq \phi_v(x, v_{j+1}) \}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

La fonctionnelle J est convexe en ϕ_u et en ϕ_v mais pas en (ϕ_u, ϕ_v) . Un minimum local de J a néanmoins les propriétés suivantes.

Proposition 4. *Soit $(\phi_u^*, \phi_v^*) \in \mathcal{A}_u \times \mathcal{A}_v$ un minimum local de J , alors, pour presque tout $\mu \in [0, 1]$, $J(H(\phi_u^* - \mu), \phi_v^*) = J(\phi_u^*, H(\phi_v^* - \mu)) = J(\phi_u^*, \phi_v^*)$.*

Démonstration. Par la formule de la coaire $J(\phi_u, \phi_v) = \int_0^1 J(H(\phi_u - \mu), \phi_v) d\mu$. Puisque (ϕ_u^*, ϕ_v^*) est un minimum local, et $J(\cdot, \phi_v^*)$ est convexe, ϕ_u^* est un minimum global de $J(\cdot, \phi_v^*)$ et $J(H(\phi_u^* - \mu), \phi_v^*) = J(\phi_u^*, \phi_v^*)$ pour presque tout $\mu \in [0, 1]$ par les mêmes arguments que dans le théorème (11) dans la section 5.1. L'autre égalité est donnée par le même argument avec $J(\phi_u^*, \cdot)$. \square

Proposition 5. *Soit $(\phi_u^*, \phi_v^*) \in \mathcal{A}_u \times \mathcal{A}_v$ un minimum local de J , alors pour presque tout $(\mu, \nu) \in [0, 1]^2$, $J(H(\phi_u^* - \mu), H(\phi_v^* - \nu)) = J(\phi_u^*, \phi_v^*)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe μ, ν tels que $J(H(\phi_u^* - \mu), H(\phi_v^* - \nu)) < J(\phi_u^*, \phi_v^*)$. Par la proposition précédente nous savons que $J(H(\phi_u^* - \mu), \phi_v^*) = J(\phi_u^*, \phi_v^*)$. La convexité de J en sa seconde variable ϕ_v implique, pour tout ϵ dans $(0, 1)$:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{J(H(\phi_u^* - \mu), (1 - \epsilon)\phi_v^* + \epsilon H(\phi_v^* - \nu))}_A \\
& \leq (1 - \epsilon) \underbrace{J(H(\phi_u^* - \mu), \phi_v^*)}_{=J(\phi_u^*, \phi_v^*)} + \epsilon \underbrace{J(H(\phi_u^* - \mu), H(\phi_v^* - \nu))}_{<J(\phi_u^*, \phi_v^*)} \\
& < J(\phi_u^*, \phi_v^*).
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Puisque $J(\phi_u^*, \cdot)$ est convexe et par la proposition (4), ϕ_v^* et $H(\phi_v^* - \mu)$ sont deux minima globaux pour presque tout $\mu \in [0, 1]$, $J(\phi_u^*, (1 - \epsilon)\phi_v^* + \epsilon H(\phi_v^* - \nu)) = J(\phi_u^*, \phi_v^*)$. La convexité de J en sa première variable implique :

$$\begin{aligned}
& J((1 - \epsilon)\phi_u^* + \epsilon H(\phi_u^* - \mu), (1 - \epsilon)\phi_v^* + \epsilon H(\phi_v^* - \nu)) \\
& \leq (1 - \epsilon) \underbrace{J(\phi_u^*, (1 - \epsilon)\phi_v^* + \epsilon H(\phi_v^* - \nu))}_{=J(\phi_u^*, \phi_v^*)} \\
& \quad + \epsilon \underbrace{J(H(\phi_u^* - \mu), (1 - \epsilon)\phi_v^* + \epsilon H(\phi_v^* - \nu))}_{=A < J(\phi_u^*, \phi_v^*)} \\
& < J(\phi_u^*, \phi_v^*).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Cependant, si $\epsilon \rightarrow 0^+$ alors $(1 - \epsilon)\phi_u^* + \epsilon H(\phi_u^* - \mu), (1 - \epsilon)\phi_v^* + \epsilon H(\phi_v^* - \nu)$ appartiennent au voisinage du minimum local (ϕ_u^*, ϕ_v^*) , et nécessairement :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J((1 - \epsilon)\phi_u^* + \epsilon H(\phi_u^* - \mu), (1 - \epsilon)\phi_v^* + \epsilon H(\phi_v^* - \nu)) \geq J(\phi_u^*, \phi_v^*),$$

ce qui amène une contradiction. \square

Ainsi presque tout seuillage d'un minimum local donne une solution du problème original avec la même valeur de la fonctionnelle. Pour obtenir un minimum local, je rappelle l'approche de (Papadakis et al., 2010) puis propose un nouvel algorithme.

Minimisation alternée. Si w_v (resp. w_u) est connu, La fonctionnelle peut être minimisée alternativement par rapport à w_u (resp. w_v) jusqu'à convergence (Papadakis et al., 2010). Dans les deux cas, la linéarisation en fonction

des variables à optimiser permet de retomber sur le problème original 1D. Par exemple, quand on optimise en fonction de ϕ , on a le problème

$$\min_{w_u} \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_u(x, u_j) \right) \right| dx + \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\Omega} \rho_u(x, u_i) w_u(x, u_i), \quad (6.12)$$

où le terme ρ_u est obtenu par intégration sur la dimension associée à v :

$$\rho_u(x, u_i) = \sum_{j=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w_v(x, v_j). \quad (6.13)$$

Les outils d'optimisations de la section 5.1.1 peuvent être utilisés pour minimiser (6.12). Une fois la convergence atteinte, le minimum local obtenu (w_u^*, w_v^*) peut être utilisé pour construire $\phi_u = f^{-1}(w_u^*)$ et $\phi_v = f^{-1}(w_v^*)$, avec la fonction f définie proposition 3.

On obtient en seillant des fonctions dans le domaine du problème non convexe original : $u^*(x) = u_0 + \Delta_u \sum_{i=1}^{M-1} \phi_u(x, u_i)$ et $v^*(x) = v_0 + \Delta_v \sum_{i=1}^{M-1} \phi_v(x, v_i)$.

Algorithme 7. *Minimisation alternée de l'énergie non convexe 2D (6.7).*

On initialise avec $w_u^0 = \bar{w}_u^0 = \frac{1}{M}$, $w_v^0 = \bar{w}_v^0 = \frac{1}{M}$, $\mathbf{z}_u^0 = \mathbf{z}_v^0 = 0$, $\sigma, \tau > 0$ de telle façon que $\sigma\tau < \frac{1}{8M}$.

Tant que $\|w_u^l - w_u^{l-1}\| + \|w_v^l - w_v^{l-1}\| > \epsilon$

Calculer $\rho_u(x, u_i) = \sum_{j=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w_v^l(x, v_j)$

Poser $w_u^{k=0} = w_u^{l-1}$

Tant que $\|w_u^k - w_u^{k-1}\| > \epsilon$ itérer

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_i) &= P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_u^k(\cdot, u_i) + \sigma D_x \left(\sum_{l \geq i} \bar{w}_u^k(\cdot, u_l) \right) \right), & \forall u_i \in \Gamma^u \\ \tilde{w}_u(\cdot, u_i) &= w_u^k(\cdot, u_i) - \tau \left(\rho_u(\cdot, u_i) + \sum_{l \leq i} D_x^* \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_l) \right), & \forall u_i \in \Gamma^u \\ w_u^{k+1} &= P_{\mathcal{D}_1}(\tilde{w}_u), & \forall x \in \Omega \\ \bar{w}_u^{k+1} &= 2w_u^{k+1} - w_u^k \end{array} \right.$$

Poser $w_u^{l+1} = w_u^{k+1}$

Calculer $\rho_v(x, v_j) = \sum_{i=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w_u^{l+1}(x, u_i)$

Poser $w_v^{k=0} = w_v^{l-1}$

Tant que $\|w_v^k - w_v^{k-1}\| > \epsilon$ itérer

$$\begin{cases} \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_j) &= P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_v^k(\cdot, v_j) + \sigma D_x \left(\sum_{l \geq j} \bar{w}_v^k(\cdot, v_l) \right) \right), & \forall v_j \in \Gamma^v \\ \tilde{w}_v(\cdot, v_j) &= w_v^k(\cdot, v_j) - \tau \left(\rho_v(\cdot, v_j) + \sum_{l \leq j} D_x^* \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_l) \right), & \forall v_l \in \Gamma^v \\ w_v^{k+1} &= P_{\mathcal{D}_1}(\tilde{w}_v), & \forall x \in \Omega \\ \bar{w}_v^{k+1} &= 2w_v^{k+1} - w_v^k, \end{cases}$$

Prendre $w_v^{l+1} = w_v^{k+1}$

Minimisation jointe. Pour minimiser proprement la fonctionnelle non convexe (6.7), une direction de descente jointe peut être considérée pour le couple (w_u, w_v) . Les relations optimales données par les dérivées partielles de la fonctionnelle (6.7) en fonction de (w_u, w_v) sont :

$$\begin{aligned} w_u^{k+1}(\cdot, u_i) &= w_u^k(\cdot, u_i) - \tau \left(\sum_{l \leq i} D_x^* \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_l) + \sum_{j=0}^{M-1} \rho(\cdot, u_i, v_j) w_v^{k+1}(\cdot, v_j) \right) \\ w_v^{k+1}(\cdot, v_j) &= w_v^k(\cdot, v_j) - \tau \left(\sum_{l \leq j} D_x^* \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_l) + \sum_{i=0}^{M-1} \rho(\cdot, u_i, v_j) w_u^{k+1}(\cdot, u_i) \right). \end{aligned}$$

La solution (w_u^{k+1}, w_v^{k+1}) est calculée en résolvant pour chaque point $x \in \Omega$:

$$\begin{bmatrix} w_u^{k+1}(x, u_1) \\ \vdots \\ w_u^{k+1}(x, u_M) \\ w_v^{k+1}(x, v_1) \\ \vdots \\ w_v^{k+1}(x, v_M) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Id & \tau \rho(x, \cdot, \cdot) \\ \tau \rho^T(x, \cdot, \cdot) & Id \end{bmatrix}}_R^{-1} \begin{bmatrix} w_u^k(x, u_1) - \tau \sum_{l \leq 1} D_x^* \mathbf{z}_u^{k+1}(x, u_l) \\ \vdots \\ w_u^k(x, u_M) - \tau \sum_{l \leq M} D_x^* \mathbf{z}_u^{k+1}(x, u_l) \\ w_v^k(x, v_1) - \tau \sum_{l \leq 1} D_x^* \mathbf{z}_v^{k+1}(x, v_l) \\ \vdots \\ w_v^k(x, v_M) - \tau \sum_{l \leq M} D_x^* \mathbf{z}_v^{k+1}(x, v_l) \end{bmatrix},$$

où la matrice R de taille $4M^2$ est constante et peut être inversée qu'une seule fois si on garde le résultat en mémoire. Cette approche demande donc beaucoup de mémoire, mais les résultats expérimentaux montreront qu'elle peut produire des résultats de même qualité (voire parfois meilleurs) que les relaxations convexes. Le schéma de minimisation est donné par l'algorithme 8.

Algorithme 8. *Minimiser la fonctionnelle non-convexe 2D (6.7)*

Initialiser avec $w_u^0 = \bar{w}_u^0 = \frac{1}{M}$, $w_v^0 = \bar{w}_v^0 = \frac{1}{M}$, $\mathbf{z}_u^0 = \mathbf{z}_v^0 = 0$, choisir $\sigma, \tau > 0$ tels que $\sigma\tau < \frac{1}{8M}$

Tant que $\|w_u^k - w_u^{k-1}\| + \|w_v^k - w_v^{k-1}\| > \epsilon$ calculer

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_i) &= P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_u^k(\cdot, u_i) + \sigma D_x \left(\sum_{l \geq i} \bar{w}_u^k(\cdot, u_l) \right) \right), \quad \forall u_i \in \Gamma^u \\ \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_j) &= P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_v^k(\cdot, v_j) + \sigma D_x \left(\sum_{l \geq j} \bar{w}_v^k(\cdot, v_l) \right) \right), \quad \forall v_j \in \Gamma^v \\ b_u(\cdot, u_i) &= w_u^k(\cdot, u_i) - \tau \sum_{l \leq i} D_x^* \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_l), \quad \forall u_i \in \Gamma^u \\ b_v(\cdot, v_j) &= w_v^k(\cdot, v_j) - \tau \sum_{l \leq j} D_x^* \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_l), \quad \forall v_j \in \Gamma^v \\ \begin{bmatrix} \tilde{w}_u(x, \cdot) \\ \tilde{w}_v(x, \cdot) \end{bmatrix} &= R \begin{bmatrix} b_u(x, \cdot) \\ b_v(x, \cdot) \end{bmatrix}, \quad \forall x \in \Omega \\ w_u^{k+1} &= P_{\mathcal{D}_1}(\tilde{w}_u), \quad \forall x \in \Omega \\ \bar{w}_u^{k+1} &= 2w_u^{k+1} - w_u^k \\ w_v^{k+1} &= P_{\mathcal{D}_1}(\tilde{w}_v), \quad \forall x \in \Omega \\ \bar{w}_v^{k+1} &= 2w_v^{k+1} - w_v^k \end{array} \right.$$

6.1.2 Convexification du terme de données.

Pour considérer la fonctionnelle dans son entier, certaines relaxations du terme de données ont été proposées dans (Goldluecke and Cremers, 2010; Strekalovskiy et al., 2011). L'idée de (Strekalovskiy et al., 2011) est de calculer la biconjuguée du terme de données par la transformée de Legendre-Fenchel (voir section 1.4) pour obtenir une relaxation proche de la fonctionnelle originale. La biconjuguée est la plus grande fonction convexe semi-continue inférieurement qui minore la fonction si la fonction est propre. Cela amène

à reformuler le terme de données pour les variables binaires (w_u^b, w_v^b) de la manière convexe suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_j) w_u^b(x, u_i) w_v^b(x, v_j) dx \\ &= \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\Omega} (w_u^b(x, u_i) q_u(x, u_i) + w_v^b(x, v_i) q_v(x, v_i)) dx, \end{aligned} \quad (6.14)$$

où les deux autres variables auxiliaires $q_u(x, u_i)$ et $q_v(x, v_j)$ ont été introduites. Elles sont définies dans l'ensemble convexe :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = \{ & q_u : \Omega \times \Gamma_u \mapsto \mathbb{R}, q_v : \Omega \times \Gamma_v \mapsto \mathbb{R}, \\ & \text{t.q. } q_u(x, u_i) + q_v(x, v_j) \leq \rho(x, u_i, v_j) \forall x \in \Omega, 0 \leq i, j \leq M-1 \}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

En effet dans le cas binaire, pour x fixé, il existe un unique i_x tel que $w_u^b(x, u_{i_x}) \neq 0$, et alors $w_u^b(x, u_{i_x}) = 1$. De même on définit j_x tel que $w_v^b(x, v_{j_x}) = 1$, et alors :

$$\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w_u^b(x, u_i) w_v^b(x, v_j) = \rho(x, u_{i_x}, v_{j_x}) \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} & \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-1} (w_u^b(x, u_i) q_u(x, u_i) + w_v^b(x, v_i) q_v(x, v_i)) \\ &= \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} q_u(x, u_{i_x}) + q_v(x, v_{j_x}) = \rho(x, u_{i_x}, v_{j_x}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

On remarque que pour les variables non binaires (w_u, w_v) , on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_j) w_u(x, u_i) w_v(x, v_j) \geq \\ & \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\Omega} (w_u(x, u_i) q_u(x, u_i) + w_v(x, v_i) q_v(x, v_i)). \end{aligned} \quad (6.18)$$

En effet pour x fixé :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w_u(x, u_i) w_v(x, v_j) \\
& \geq \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \left(\max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} q_u(x, u_i) + q_v(x, v_j) \right) w_u(x, u_i) w_v(x, v_j) \\
& = \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \left(w_u(x, u_i) q_u(x, u_i) \sum_{j=0}^{M-1} w_v(x, v_j) + w_v(x, v_j) q_v(x, v_j) \sum_{i=0}^{M-1} w_u(x, u_i) \right) \\
& = \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-1} (w_u(x, u_i) q_u(x, u_i) + w_v(x, v_i) q_v(x, v_i)).
\end{aligned} \tag{6.19}$$

En modifiant légèrement l'approche de (Stekalovskiy et al., 2011), on considère la fonctionnelle suivante à minimiser en fonction de w_u et w_v :

$$\begin{aligned}
J_C(w_u, w_v) &= \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\Omega} (w_u(x, u_i) q_u(x, u_i) + w_v(x, v_i) q_v(x, v_i)) \\
& \quad + \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_u(x, u_j) \right) \right| dx \\
& \quad + \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \left(\sum_{j \geq i} w_v(x, v_j) \right) \right| dx.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Comme il n'y a pas de projection orthogonale sur \mathcal{Q} qui s'écrive de manière explicite, l'opérateur proximal correspondant utilisé par l'algorithme primal-dual de (Chambolle and Pock, 2011) (voir section 1.5) ne peut pas être formulé directement pour les nouvelles variables (q_u, q_v) . Une solution est alors de faire des boucles internes pour approximer la projection sur \mathcal{Q} . Les auteurs de (Stekalovskiy et al., 2011) considèrent alors un multiplicateur de Lagrange en introduisant une nouvelle variable $\lambda(x, u_i, v_j) \in \Omega \times \Gamma^u \times \Gamma^v$ pour que la contrainte $q_u(x, u_i) + q_v(x, v_j) \leq \rho(x, u_i, v_j)$ soit vérifiée. La projection

sur \mathcal{Q} est alors calculée en résolvant

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{Q}}(\tilde{q}_u, \tilde{q}_v) &= \min_{(q_u, q_v)} \max_{\lambda \geq 0} \|q_u - \tilde{q}_u\|^2 + \|q_v - \tilde{q}_v\|^2 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\Omega} (q_u(x, u_i) + q_v(x, v_j) - \rho(x, u_i, v_j)) \lambda(x, u_i, v_j)
\end{aligned} \tag{6.21}$$

avec un algorithme d'Uzawa. Une telle projection requiert des paramètres additionnels pour gérer les boucles internes. Pour nos expériences, un nombre fixe 50 d'itérations a été choisi pour approximer la projection sur \mathcal{Q} , ce qui s'est avéré être un bon compromis entre le coût en calculs et la qualité des résultats. Le processus converge avec cette paramétrisation mais la complexité de la projection itérative des $\lambda \in \mathbb{R}^{|\Omega|M^2}$ est non négligeable. Le processus final est donné par l'algorithme 9.

Avec cette nouvelle convexification du terme de données et contrairement à l'approche convexe précédente, l'équivalence avec la formulation par lignes de niveau est perdue, et la formule de reconstruction ne peut plus être utilisée. Pour être plus précis, le nouveau terme de données est réécrit avec la formulation par surlignes de niveaux :

$$\begin{aligned}
D(w_u, w_v) &= \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{\Omega} (w_u(x, u_i) q_u(x, u_i) + w_v(x, v_i) q_v(x, v_i)) dx \\
&= \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \sum_{i=0}^{M-2} \int_{\Omega} (\phi_u(x, u_i) - \phi_u(x, u_{i+1}) q_u(x, u_i) \\
&\quad + (\phi_v(x, v_i) - \phi_v(x, v_{i+1}) q_v(x, v_i)) \\
&\quad + \int_{\Omega} \phi_u(x, u_{M-1}) q_u(x, u_{M-1}) + \int_{\Omega} \phi_v(x, v_{M-1}) q_v(x, v_{M-1}) \\
&= \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \tilde{D}(\phi_u, \phi_v, q_u, q_v) \\
&= \tilde{D}(\phi_u, \phi_v, q_u^*, q_v^*) \\
&= D(\phi_u, \phi_v)
\end{aligned} \tag{6.22}$$

où le couple $(q_u^*, q_v^*) \in \mathcal{Q}$ maximise la relation précédente pour (ϕ_u, ϕ_v) donné.

Alors :

$$\begin{aligned}
D(\phi_u, \phi_v) &= \int_0^1 \tilde{D}(H(\phi_u - \mu), H(\phi_v - \mu), q_u^*, q_v^*) d\mu \\
&\leq \int_0^1 \max_{(q_u, q_v) \in \mathcal{Q}} \tilde{D}(H(\phi_u - \mu), H(\phi_v - \mu), q_u, q_v) d\mu \quad (6.23) \\
&\leq \int_0^1 D(H(\phi_u - \mu), H(\phi_v - \mu)) d\mu.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité (6.18), il vient $J_C(w_u, w_v) \leq J(w_u, w_v)$, où J_C et J sont définies respectivement par les expressions (6.7) et (6.20). Les deux fonctionnelles sont équivalentes si leur entrée est binaire. Ainsi, si le minimum global de J calculé n'est pas binaire, le seuillage d'un minimiseur n'est pas toujours un minimum (local ou global), que ce soit pour le problème relaxé (6.7) ou pour le problème original (6.1). C'est la raison pour laquelle les auteurs de (Stekalovskiy et al., 2011) proposent de construire une fonction admissible du problème original en gardant pour chaque pixel x le couple d'étiquettes (u_i, v_j) qui maximise $w_u^*(x, u_i) + w_v^*(x, v_j)$.

Algorithme 9. *Minimisation de l'énergie convexe 2D (6.20)*

Initialiser avec $w_u^0 = \bar{w}_u^0 = \frac{1}{M}$, $w_v^0 = \bar{w}_v^0 = \frac{1}{M}$, $\mathbf{z}_u^0 = \mathbf{z}_v^0 = q_u^0 = q_v^0 = 0$, choisir $\sigma, \tau > 0$ tels que $\sigma\tau < \frac{1}{8M^2}$

Tant que $\|w_u^k - w_u^{k-1}\| + \|w_v^k - w_v^{k-1}\| > \epsilon$, calculer

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_i) & = P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_u^k(\cdot, u_i) + \sigma D_x \left(\sum_{l \geq i} \bar{w}_u^k(\cdot, u_l) \right) \right), & \forall u_i \in \Gamma^u \\
\mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_j) & = P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_v^k(\cdot, v_j) + \sigma D_x \left(\sum_{l \geq j} \bar{w}_v^k(\cdot, v_l) \right) \right), & \forall v_j \in \Gamma^v \\
\tilde{q}_u(\cdot, u_i) & = q_u^k(\cdot, u_i) + \sigma (\bar{w}_u^k(\cdot, u_i) + \sum_{j=1}^M \lambda(\cdot, u_i, v_j)), & \forall u_i \in \Gamma^u \\
\tilde{q}_v(\cdot, v_j) & = q_v^k(\cdot, v_j) + \sigma (\bar{w}_v^k(\cdot, v_j) + \sum_{i=1}^M \lambda(\cdot, u_i, v_j)), & \forall v_j \in \Gamma^v \\
(q_u^{k+1}, q_v^{k+1}) & = P_{\mathcal{Q}}((\tilde{q}_u, \tilde{q}_v)), & \forall x \in \Omega \\
\tilde{w}_u(\cdot, u_i) & = w_u^k(\cdot, u_i) - \tau \left(q_u^{k+1}(\cdot, u_i) + \sum_{l \leq i} D_x^* \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_l) \right), & \forall u_i \in \Gamma^u \\
w_u^{k+1} & = P_{\mathcal{D}}(\tilde{w}_u), & \forall x \in \Omega \\
\bar{w}_u^{k+1} & = 2w_u^{k+1} - \bar{w}_u^k \\
\tilde{w}_v(\cdot, v_j) & = w_v^k(\cdot, v_j) - \tau \left(q_v^{k+1}(\cdot, v_j) + \sum_{l \leq j} D_x^* \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_l) \right), & \forall v_j \in \Gamma^v \\
w_v^{k+1} & = P_{\mathcal{D}}(\tilde{w}_v), & \forall x \in \Omega \\
\bar{w}_v^{k+1} & = 2w_v^{k+1} - \bar{w}_v^k
\end{array} \right.$$

Le processus contient des relations entre toute les paires d'étiquettes à travers les couples $(q_u(x, u_i), q_v(x, v_j))$, de sorte que cela amène à conserver des variables additionnelles λ de taille $|\Omega|M^2$ pendant la projection sur \mathcal{Q} . Cette mise en mémoire peut être évitée car la projection est faite point par point et un calcul en parallèle peut diminuer la taille mémoire comme cela est mentionné dans (Stekalovskiy et al., 2011; Goldluecke et al., 2013). Cependant, pour éviter de garder en mémoire des données de cette dimension, ρ , qui est aussi de dimension $|\Omega|M^2$, doit être recalculé à chaque itération, ce qui demande beaucoup de calculs.

6.2 Une autre convexification.

On décrit maintenant une autre convexification qui augmente la dimension mais qui permet de regrouper les inconnues dans une seule variable auxiliaire.

6.2.1 Convexification avec les surlignes de niveaux.

Comme dans (Brown et al., 2012), la stratégie de la section 5.1 est étendue et la fonction $\phi(x, u_i, v_j) = H(u(x) - u_i)H(v(x) - v_j)$ est utilisée pour convexifier le problème (6.1). Puisque $H(u(x) - u_0) = H(v(x) - v_0) = 1$ on a $\phi(x, u_0, v_j) = H(v(x) - v_j)$ et $\phi(x, u_i, v_0) = H(u(x) - u_i)$. On observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du(x)| &= \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\Omega} (u_i - u_{i-1}) |D_x H(u(x) - u_i)| dx \\ &= \Delta_u \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\Omega} |D_x \phi(x, u_i, v_0)| dx, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\int_{\Omega} |Dv(x)| = \Delta_v \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\Omega} |D_x \phi(x, u_0, v_i)| dx \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \rho(x, u(x), v(x)) dx = \\ &\sum_{i,j=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_j) (\phi(x, u_i, v_j) - \phi(x, u_i, v_{j+1}) \\ &\quad - \phi(x, u_{i+1}, v_j) + \phi(x, u_{i+1}, v_{j+1})) \\ &+ \sum_{i=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_i, v_{M-1}) (\phi(x, u_i, v_{M-1}) - \phi(x, u_{i+1}, v_{M-1})) \\ &+ \sum_{j=0}^{M-2} \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}, v_j) (\phi(x, u_{M-1}, v_j) - \phi(x, u_{M-1}, v_{j+1})) \\ &+ \int_{\Omega} \rho(x, u_{M-1}, v_{M-1}) \phi(x, u_{M-1}, v_{M-1}) \end{aligned} \quad (6.26)$$

La fonctionnelle $J(\phi)$ définie comme la somme des trois termes (6.24), (6.25) et (6.26) est alors considérée ainsi que le problème convexe

$$\min_{\phi \in \mathcal{A}_2} J(\phi), \quad (6.27)$$

défini sur l'ensemble convexe de fonctions admissibles :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}_2 = \{ & \phi : (x, s, t) \in BV(\Sigma, [0, 1]), \phi(x, u_0, v_0) = 1, \\ & \phi(x, u_i, v_j) - \phi(x, u_i, v_{j+1}) - \phi(x, u_{i+1}, v_j) + \phi(x, u_{i+1}, v_{j+1}) \geq 0 \\ & \phi(x, u_i, u_j) \geq \phi(x, u_{i+1}, v_j), \phi(x, u_i, u_j) \geq \phi(x, u_i, v_{j+1}) \forall i, j\},\end{aligned}$$

où $\Sigma = \Omega \times \Gamma^u \times \Gamma^v$.

Si la fonction ϕ^* est un minimiseur binaire de J , alors le couple (u^*, v^*) défini par

$$\begin{aligned}u^*(x) &= u_0 + \Delta_u \sum_{i=1}^{M-1} \phi(x, u_i, v_0) \\ v^*(x) &= v_0 + \Delta_v \sum_{i=1}^{M-1} \phi(x, u_0, v_i)\end{aligned}\tag{6.28}$$

est un minimiseur global de la fonctionnelle (6.1). Cependant si ϕ^* n'est pas binaire, les relations (6.28) ne sont pas utilisables pour construire une solution du problème original non convexe. Cela est dû au fait que dans le cas 2D, les fonctions caractéristiques des lignes de niveaux de ϕ peuvent ne pas appartenir à l'ensemble des fonctions admissibles \mathcal{A}_2 , défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 = \{ & \phi : (x, s, t) \in BV(\Sigma, [0, 1]), \phi(x, u_0, v_0) = 1, \\ & \phi(x, u_i, v_j) - \phi(x, u_i, v_{j+1}) - \phi(x, u_{i+1}, v_j) + \phi(x, u_{i+1}, v_{j+1}) \in \{0, 1\} \\ & \phi(x, u_i, u_j) \geq \phi(x, u_{i+1}, v_j), \phi(x, u_i, u_j) \geq \phi(x, u_i, v_{j+1})\}.\end{aligned}$$

Ce problème important sera discuté dans la section 7. La projection sur les contraintes représentées par l'ensemble \mathcal{A}_2 sont lentes à calculer avec l'algorithme de Dijkstra qui doit être mis en œuvre pour chaque pixel $x \in \Omega$. Pour les problèmes multi-étiquettes avec $D > 1$, il n'y a pas de relation d'ordre entre les étiquettes. Ainsi les résultats de (Pock et al., 2010a) ne peuvent plus être utilisés et la projection est nécessaire. La formulation probabiliste équivalente avec des projections exactes va maintenant être détaillée.

6.2.2 Le point de vue probabiliste 2D.

Je propose maintenant une formulation probabiliste de la convexification pour le problème 2D. Comme dans la section 5.2, la variable $w(x, u_i, v_j)$

mesure la probabilité d'assigner la paire d'étiquettes $(u_i, v_j) \in \Gamma^u \times \Gamma^v$ au pixel $x \in \Omega$. Le terme de données s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& \min_{u \in BV(\Omega, \Gamma^u), v \in BV(\Omega, \Gamma^v)} \int_{\Omega} \rho(x, u(x), v(x)) dx \\
&= \min_{u \in BV(\Omega, \Gamma^u), v \in BV(\Omega, \Gamma^v)} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) \mathbb{1}_{u=u_i, v=v_i}(x) dx \quad (6.29) \\
&= \min_{w \in \tilde{\mathcal{D}}_0} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w(x, u_i, v_j) dx,
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{D}}_0 = \left\{ w : \Sigma \mapsto \{0, 1\}, \text{ t.q. } \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} w(x, u_i, v_j) = 1, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (6.30)$$

Encore une fois, la variation totale de u et v peut être réécrite en fonction de $w = \mathbb{1}_{u=u_i, v=v_i}(x)$ comme :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |Du| &= \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k \geq i} w(x, u_k, v_j) \right| dx, \\
\int_{\Omega} |Dv| &= \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{M-1} \left| D_x \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k \geq j} w(x, u_i, v_k) \right| dx.
\end{aligned}$$

Comme dans la section 5.2, puisque $\tilde{\mathcal{D}}_0$ n'est pas convexe, l'ensemble des fonctions admissibles est relaxé et devient :

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ w : \Sigma \mapsto [0, 1], \text{ t.q. } \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} w(x, u_i, v_j) = 1, \forall x \in \Omega \right\}. \quad (6.31)$$

La fonctionnelle à minimiser est alors :

$$\begin{aligned}
J_w(w) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \rho(x, u_i, v_j) w(x, u_i, v_j) dx \\
&+ \Delta_u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \left| D_x \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k \geq i} w(x, u_k, v_j) \right| dx \quad (6.32) \\
&+ \Delta_v \int_{\Omega} \sum_{i=j}^{M-1} \left| D_x \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{k \geq j} w(x, u_i, v_k) \right| dx.
\end{aligned}$$

pour $w \in \mathcal{D}_2$.

Le problème de la minimisation de (6.32) en fonction de $w \in \mathcal{D}_2$ est convexe et un minimum global peut être obtenu grâce à un schéma d'optimisation primal-dual. Le processus est résumé par l'algorithme 10 adapté de l'algorithme primal dual 1 de la section 1.5. La projection sur \mathcal{D}_2 peut aussi être faite point par point en projetant pour chaque pixel x le vecteur de coordonnées $w(x, \cdot, \cdot)$ sur le simplexe de dimension M^2 , ce qui rend la projection exacte, contrairement à la formulation par lignes de niveaux. Contrairement aux convexifications précédentes du terme de données, il n'y a pas de boucles internes dans ce nouvel algorithme.

Algorithme 10. *Minimisation de la fonctionnelle convexe 2D (6.32)*

Initialiser avec $w^0 = \bar{w}^0 = \frac{1}{M^2}$, $\mathbf{z}_u^0 = \mathbf{z}_v^0 = 0$, choisir $\sigma, \tau > 0$ tels que $\sigma\tau < \frac{1}{8M^3}$

Tant que $\|w^k - w^{k-1}\| > \epsilon$, calculer

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_i) = P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_u^k(\cdot, u_i) + \sigma D_x \left(\sum_{j'=0}^{M-1} \sum_{i' \geq i} \bar{w}^k(\cdot, u_{i'}, v_{j'}) \right) \right), \forall u_i \in \Gamma^u \\ \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_j) = P_{\mathcal{B}} \left(\mathbf{z}_v^k(\cdot, v_j) + \sigma D_x \left(\sum_{i'=0}^{M-1} \sum_{j' \geq j} \bar{w}^k(\cdot, u_{i'}, v_{j'}) \right) \right), \forall v_j \in \Gamma^v \\ \tilde{w}(\cdot, u_i, v_j) = w_u^k(\cdot, u_i) + \tau \left(\sum_{i' \leq i} D_x^* \mathbf{z}_u^{k+1}(\cdot, u_{i'}) \right. \\ \quad \left. + \sum_{j' \leq j} D_x^* \mathbf{z}_v^{k+1}(\cdot, v_{j'}) - \rho(\cdot, u_i, v_j) \right), \forall u_i, v_j \in \Gamma^u \times \Gamma^v \\ w^{k+1} = P_{\mathcal{D}}(\tilde{w}) \forall x \in \Omega \\ \bar{w}^{k+1} = 2w^{k+1} - w^k \end{array} \right.$$

Équivalence entre les problèmes relâchés. Les formulations probabilistes et par surlignes de niveaux sont équivalentes, comme en 1D. En effet, en prenant $\phi(x, s, t) = H(u(x) - s)H(v(x) - t)$ et en considérant le problème $\min_{\phi \in \mathcal{A}_2} J(\phi)$, des relations similaires à celles de la section 5.2 existent :

Proposition 6. *Il existe une bijection f entre les ensembles convexes \mathcal{A}_2 et \mathcal{D}_2 , avec $f(\phi)(x, u_i, v_j) = \phi(x, u_i, v_j) - \phi(x, u_i, v_{j+1}) - \phi(x, u_{i+1}, v_j) + \phi(x, u_{i+1}, v_{j+1})$ et $f^{-1}(w)(x, u_i, v_j) = \sum_{k \geq i} \sum_{l \geq j} w(x, u_k, v_l)$ et on a $J(\phi) = J_w(f(\phi))$.*

Un exemple d'une telle relation entre les valeurs locales de $w(x, \cdot, \cdot)$ et $\phi(x, \cdot, \cdot)$ est donné dans la Figure 6.1. On remarque que l'approche par surlignes de niveau des problèmes 2D a aussi été récemment proposée dans

(Goldstein et al., 2012). Les contraintes associées à \mathcal{A}_2 y sont traitées avec une variable auxiliaire supplémentaire, au lieu d'utiliser l'algorithme de Dijkstra comme dans (Baeza et al., 2010) pour les problèmes 1D.

0	0	0	0	0	0	\Leftrightarrow	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.4	0		0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0
0	0	0.2	0.2	0	0		0.8	0.8	0.8	0.6	0.4	0
0	0	0	0	0	0		0.8	0.8	0.8	0.6	0.4	0
0.2	0	0	0	0	0		1	0.8	0.8	0.6	0.4	0
$w^*(x, \cdot, \cdot)$						$\phi^*(x, \cdot, \cdot)$						

FIGURE 6.1 – A gauche : exemple de valeurs $w^*(x, \cdot, \cdot)$. A droite : les valeurs $\phi^*(x, \cdot, \cdot)$ correspondantes.

La proposition suivante est une conséquence directe des remarques précédents.

Proposition 7. *Si w^* est un minimiseur global de la fonctionnelle J_w définie en (6.32) en fonction de $w \in \mathcal{D}_2$, alors $\phi^* = f^{-1}(w^*)$ est un minimiseur global du problème (6.27).*

La méthode que j'ai proposé peut facilement être étendue au cas à N dimensions en suivant l'approche précédente et en définissant l'ensemble convexe correspondant \mathcal{D}_N . Cependant la dimension explose par rapport au modèle non convexe de la sous-section 6.1.1 car $|\Omega|M^N > MN|\Omega|$ pour les problèmes où $M \gg 1$. De plus, on obtient un minimiseur de la fonctionnelle relaxée et pas de la fonctionnelle originale pour une dimension $N > 1$. C'est un vrai problème, comme cela est expliqué dans (Chambolle et al., 2011), puisqu'il n'y a pas de connection entre les deux minimiseurs. Cette impossibilité du retour à une solution du problème original non convexe n'est pas abordée dans (Stekalovskiy et al., 2011), et la solution proposée dans (Brown et al., 2012) n'est pas satisfaisante comme cela est expliqué dans la section suivante.

Chapitre 7

Du problème relaxé au problème original.

Dans le cas 1D, on connaît une méthode pour obtenir une solution du problème original à partir du problème relâché, comme on l'a vu dans la section 5. En 2D, l'approche avec les surlignes de niveaux ne donne pas toujours une solution puisque les minimiseurs seuillés ne sont pas nécessairement dans le domaine de la fonctionnelle originale. Cette discussion est poursuivie plus en avant et j propose des stratégies pour revenir au domaine du problème original sont. Je compare les valeurs de la fonctionnelle du problème original à celles obtenues par ces stratégies avec d'autres méthodes proposées dans la littérature.

7.1 Les fonctions boîtes.

Pour toute dimension N , la formule de reconstruction par les lignes de niveaux est valide pour la fonctionnelle J de telle sorte que

$$J(\phi^*) = \int_0^1 J(H(\phi^* - \mu))d\mu.$$

Cependant cette équation ne permet pas forcément d'obtenir une solution du problème original. En dimension $N = 1$, les fonctions caractéristiques des lignes de niveaux de ϕ appartiennent à l'ensemble des solutions acceptables \mathcal{A}_1 . Cela signifie, comme avec le théorème 11, que pour presque tout seuillage $\mu \in [0, 1]$, $H(\phi^* - \mu)$ est un minimiseur global de la fonction convexe et de la

fonction non convexe. En 2D la formule de reconstruction est toujours vérifiée si la fonctionnelle est étendue à $BV(\Omega \times \Gamma^u \times \Gamma^v, [0, 1])$, mais $H(\phi^* - \mu)$ n'est pas nécessairement dans \mathcal{A}_2 et en général il n'est pas possible de conclure.

Comme dans (Brown et al., 2012), on définit l'ensemble des fonctions boîtes B_f comme l'ensemble des fonctions telles que, pour presque tout seuil μ , il existe $u_{k_x, \mu}, v_{l_x, \mu} \in \Lambda$ tels que $H(\phi(x, u_i, v_j) - \mu) = H(u_i - u_{k_x, \mu})H(v_j - v_{l_x, \mu})$. Cette définition est motivée par le fait qu'il est alors possible de revenir dans le domaine de la fonctionnelle initiale par seuillage en choisissant $(u(x), v(x)) = (u_{k_x, \mu}, v_{l_x, \mu})$. On obtient alors un minimum global de la fonctionnelle originale. Ceci est illustré Figure 7.1.

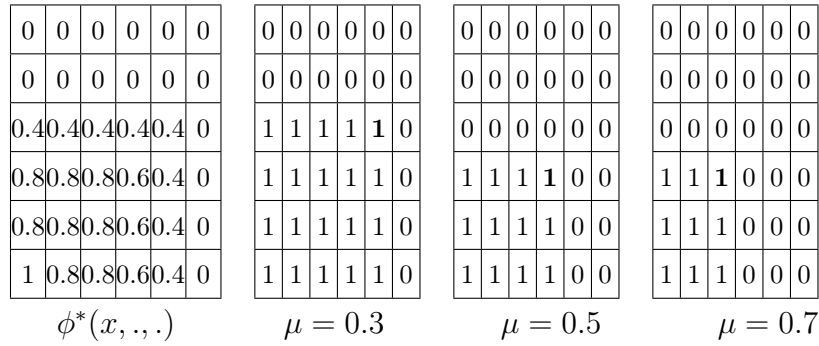


FIGURE 7.1 – Quand $\phi^*(x, \dots)$ est une fonction boîte (à gauche), alors toute ligne de niveau $\mathbf{1}_{\phi^*(x, \dots) > \mu}$ est aussi une fonction boîte (les exemples sont donnés pour les seuils $\mu \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$).

Malheureusement en général ϕ^* n'est pas une fonction boîte, de sorte que trouver un couple (u, v) nécessite un choix. Un exemple est donné dans la Figure 7.2. De plus, comme l'ensemble des fonctions boîtes n'est pas convexe, il est difficile d'imposer cette contrainte en pratique. Néanmoins, on montre dans la Figure 7.3 le pourcentage de pixels qui ne donnent pas de fonctions boîtes après seuillage d'une estimation d'une solution du problème du flot optique convexifié. Cela contredit l'analyse de (Goldstein et al., 2012), où les auteurs observent des fonctions boîtes partout dans leurs résultats.

7.2 Fonctions escalier.

Dans le cas des fonctions boîtes il est possible de conclure, mais ce cas n'est pas assez général. En dimension 2, si on seuille $\phi_\mu = \mathbf{1}_{\phi^* \geq \mu}$, alors $\phi_\mu(x, s, t) \in$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.4	0.4	0.4	0.4	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.8	0.4	0.4	0.4	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0.8	0.8	0.4	0.4	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0.8	0.8	0.6	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
$\phi^*(x, \cdot, \cdot)$							$\mu = 0.3$						$\mu = 0.5$						$\mu = 0.7$					

FIGURE 7.2 – Quand $\phi^*(x, \cdot, \cdot)$ n'est pas une fonction boîte (à gauche), alors ses lignes de niveaux $\mathbf{1}_{\phi^*(x, \cdot, \cdot) > \mu}$ n'ont pas de raison d'être des fonctions boîtes. Les exemples sont donnés pour les seuils $\mu \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$. On obtient une fonction boîte pour $\mu = 0.3$, mais avec d'autres seuils ce sont des fonctions escalier. Celles-ci ne peuvent pas provenir de la représentation d'une fonction du domaine original dans le domaine de la fonctionnelle relaxée.

$\{0, 1\}$, mais $\phi_\mu(x, u_i, v_j) - \phi_\mu(x, u_i, v_{j+1}) - \phi_\mu(x, u_{i+1}, v_j) + \phi_\mu(x, u_{i+1}, v_{j+1}) \in \{-1, 0, 1\}$. Par rapport à $w_\mu = \partial_{st}\phi_\mu$, on a $\sum_s \sum_t w_\mu(x, s, t) = 1$, mais $w_\mu(x, s, t) \in \{-1, 0, 1\}$, ce qui n'est pas acceptable pour une distribution.

Supposons maintenant qu'en un point x , $H(\phi^* - \mu)$ n'est pas une fonction boîte, alors $H(\phi^* - \mu)$ est nécessairement une "fonction escalier" binaire définie comme étant un élément de l'ensemble S_f :

$$S_f = \{\phi(s, t) : \phi(x, y) \geq \phi(s, t) \forall x < s, y < t\}.$$

Un exemple de fonction escalier binaire est donné Figure 7.2. Le problème est que les fonctions escalier ne sont pas nécessairement des fonctions boîtes, de telle sorte que les fonctions caractéristiques des lignes de niveaux de ϕ^* peuvent ne pas appartenir à l'ensemble des solutions acceptables \mathcal{A}_2 .

Les auteurs de (Brown et al., 2012) recommandent le seuil $\mu = 1$ qui donne toujours une fonction boîte binaire. Le problème est qu'un tel seuillage n'est pas le meilleur choix comme nous allons le voir. Une autre solution pour obtenir une fonction boîte est de choisir une (si elle n'est pas unique) des plus grandes valeurs de $w^*(x, \cdot, \cdot)$ pour chaque $x \in \Omega$, mais nous allons voir que cette stratégie n'est pas optimale en pratique.

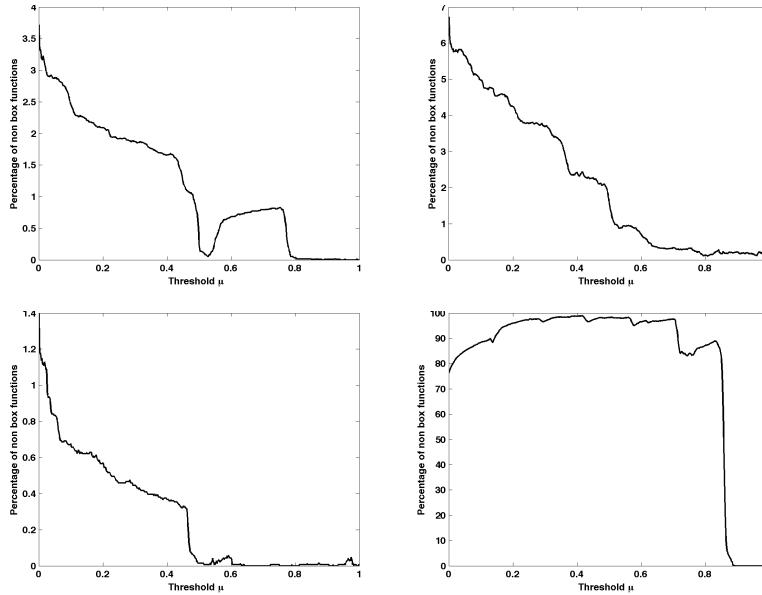


FIGURE 7.3 – Pour tout seuil $\mu \in]0, 1[$, le pourcentage de pixels où la fonction $H(\phi^* - \mu)$ n'est pas une fonction boîte est affiché. Ces estimations ont été faites pour 4 configurations différentes. Les trois premières proviennent de problèmes réalistes ou peu de minima globaux sont attendus et la dernière provient de données aléatoires.

7.3 Comment choisir une fonction boîte pour approximer une solution du problème original.

D'après la discussion ci-dessus, une solution pour estimer u et v est de considérer différents seuillages de ϕ^* qui conduisent à des fonctions boîtes. On considère la fonction boîte $\phi_{\mu,\nu}^b = H(\phi^*(x, s, v_0) - \mu)H(\phi^*(x, u_0, t) - \nu)$.

Le cas du terme de régularisation. On a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_u |D_x \phi_{\mu,\nu}^b(x, u_i, v_0)| \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_u |D_x H(\phi^*(x, u_i, v_0) - \mu) H(\phi^*(x, u_0, v_0) - \nu)| \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_u |D_x H(\phi^*(x, u_i, v_0) - \mu)|, \\
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_v |D_x \phi_{\mu,\nu}^b(x, u_0, v_i)| = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_v |D_x H(\phi^*(x, u_0, v_i) - \nu)|.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

En notant J_{TV} le terme de variation totale de la fonctionnelle J , et grâce à la formule de la coaire il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 J_{TV}(\phi_{\mu,\nu}^b) d\nu d\mu &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_u |D_x \phi_{\mu,\nu}^b(x, u_i, v_0)| \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_v |D_x \phi_{\mu,\nu}^b(x, u_0, v_i)| \right) d\nu d\mu \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_u |D_x H(\phi^*(x, u_i, v_0) - \mu)| \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_v |D_x H(\phi^*(x, u_0, v_i) - \nu)| \right) d\nu d\mu \tag{7.2} \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_u |D_x \phi^*(x, u_i, v_0)| \\
&\quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{M-1} \Delta_v |D_x \phi^*(x, u_0, v_i)| \\
&= J_{TV}(\phi^*).
\end{aligned}$$

Le cas du terme de données. Pour le terme de données J_{Data} , l'égalité $\int_0^1 \int_0^1 \phi_{\mu,\nu}^b d\nu d\mu = \phi^*$ est souhaitée, mais

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \phi_{\mu,\nu}^b d\nu d\mu &= \int_0^1 \int_0^1 H(\phi^*(x, s, v_0) - \mu) H(\phi^*(x, u_0, t) - \nu) d\nu d\mu \\ &= \phi^*(x, s, v_0) \phi^*(x, u_0, t),\end{aligned}$$

Donc, si $\phi^*(x, s, v_0)\phi^*(x, u_0, t) = \phi^*(x, s, t)$ ou, en fonction de w , si u et v sont indépendants, alors une solution globale du problème original peut être trouvée pour presque tout seuil (μ, ν) . Si ce n'est pas le cas, en revenant aux surlignes de niveau $\phi_\mu^* = H(\phi^* - \mu)$, les points (s, t) tels que $\phi_\mu^*(x, u_i, v_j) - \phi_\mu^*(x, u_i, v_{j+1}) - \phi_\mu^*(x, u_{i+1}, v_j) + \phi_\mu^*(x, u_{i+1}, v_{j+1}) = 1$ devraient correspondre aux grandes probabilités $w(x, s, t)$. Choisir un de ces couples pour construire une fonction boîte devrait donner un meilleur terme de données J_{Data} de la fonctionnelle. On note (s^i, t^i) ces $n_x \geq 1$ points. Pour chaque point x et chaque point extrémal (s^i, t^i) , une fonction boîte $\phi_i^b(x, s, t) = H(s^i - s)H(t^i - t)$ est définie. Les deux fonctions boîtes associées aux points extrémaux particuliers (s^1, t^1) et (s^{n_x}, t^{n_x}) sont respectivement notées ϕ_1^b et ϕ_n^b .

Avec ces notations, la fonction boîte $\phi_{\mu,\mu}^b$ est la plus petite qui contienne une fonction escalier binaire $H(\phi^* - \mu)$. Les coordonnées de cette fonction boîte sont représentées par le couple de points (s^*, t^*) . Une illustration est donnée dans la Figure 7.4 pour expliciter tous ces cas.

Ainsi, en posant $J_{TV} = J_u + J_v$, les différents seuillages de la solution globale estimée ϕ^* ont les propriétés suivantes :

- $J_{TV}(\phi_{\mu,\mu}^b) = J_{TV}(\phi_\mu^*) \approx J_{TV}(\phi^*)$ et il n'y a pas de contrôle sur $J_{Data}(\phi_{\mu,\mu}^b)$
- $J_u(\phi_1^b) = J_u(\phi_\mu^*) \approx J_u(\phi^*)$, $J_{Data}(\phi_1^b) \approx J_{Data}(\phi^*)$ et il n'y a pas de contrôle sur $J_v(\phi_1^b)$
- $J_v(\phi_n^b) = J_v(\phi_\mu^*) \approx J_v(\phi^*)$, $J_{Data}(\phi_n^b) \approx J_{Data}(\phi^*)$ et il n'y a pas de contrôle sur $J_u(\phi_n^b)$

Les valeurs de la fonctionnelle pour les trois fonctions boîtes dérivées $H(\phi^* - \mu)$ préalablement mentionnées sont illustrées Figure 7.5. Ces résultats montrent numériquement ce qui a été détaillé avant. On remarque que le terme de données augmente pour des grands $\mu > 0.5$. Cela est dû au fait que dans l'expérience présente, les $w(x, \cdot, \cdot)$ estimés se trouvent être unimodaux ou bimodaux pour presque tout $x \in \Omega$.

Le premier choix de seuillage (où le terme de régularisation est contrôlé en choisissant une fonction boîte avec les paires (s^*, t^*)) semble conduire à de

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
$\binom{s^4, t^4}{\mathbf{1}}$	0	0	0	$\binom{s^*, t^*}{\mathbf{0}}$	0	0
1	$\binom{s^3, t^3}{\mathbf{1}}$	0	0	0	0	0
1	1	1	$\binom{s^2, t^2}{\mathbf{1}}$	0	0	0
1	1	1	1	$\binom{s^1, t^1}{\mathbf{1}}$	0	0
1	1	1	1	1	0	0

FIGURE 7.4 – La solution seuillée $H(\phi^* - \mu)$ est donnée, et les différentes fonctions boîtes binaires possibles sont montrées (définies par les paires d’étiquettes (s, t)). Ici $n_x = 4$.

bons résultats à chaque fois. On garde cette manière de seuiller pour la suite. Le meilleur seuil est autour de $\mu = 0.5$ et on prend cette valeur pour la suite. Cette expérience montre aussi que la stratégie de (Brown et al., 2012) n’est pas optimale, car $\mu = 1$ amène à une valeur de la fonctionnelle plus grande.

Remarque L’équivalence entre w et ϕ est décrite dans la Figure 6.1, il est intéressant de voir que les fonctions boîtes seront trouvées à chaque fois que l’on peut définir pour tout $x \in \Omega$ un chemin croissant (s^k, t^k) avec $s^{k+1} \geq s^k$ et $t^{k+1} \geq t^k$ qui passe par tous les poids non nuls $w(x, s, t)$. Naturellement, si pour tout $x \in \Omega$ on pouvait définir un chemin (s^k, t^k) avec $s^{k+1} \leq s^k$ et $t^{k+1} \geq t^k$, alors on aurait des fonctions boîtes en prenant les surlignes de niveaux de u et les sous-lignes de niveau de v . Obtenir une telle configuration de poids pour tous les pixels n’a néanmoins pas de raison d’être en général.

7.4 Comparaison avec les autres approches.

Par rapport à l’approche non convexe de (Papadakis et al., 2010) (qui est beaucoup plus rapide), les solutions obtenues avec l’approche convexe proposée ont toujours une valeur plus basse de la fonctionnelle. Ces valeurs sont du même ordre que celles obtenues avec la convexification du terme de données de (Stekalovskiy et al., 2011). Ceci est illustré table 7.1, où

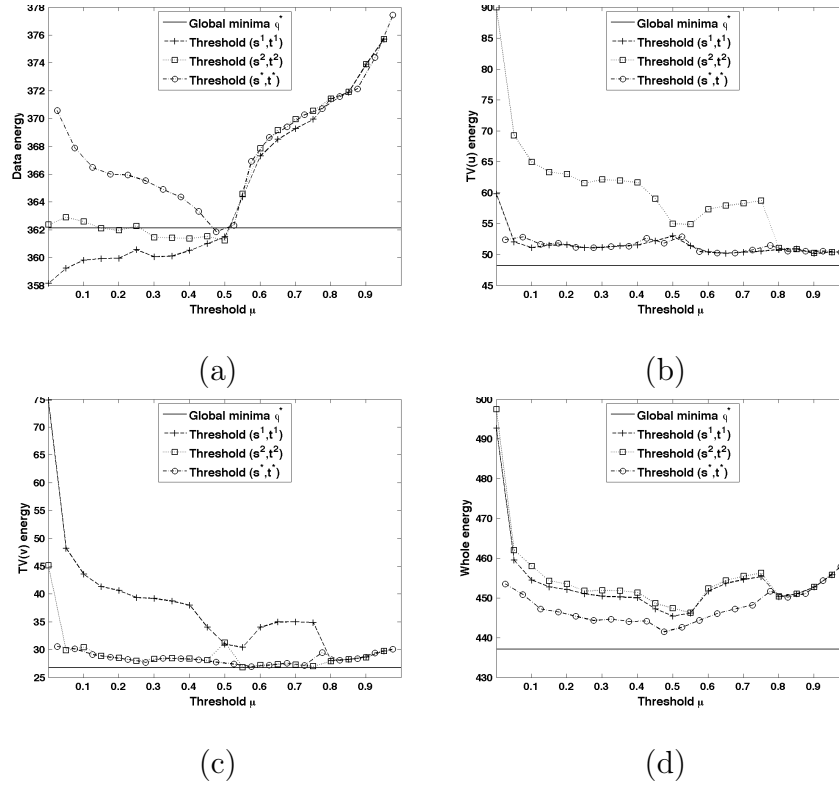


FIGURE 7.5 – La valeur de la fonctionnelle associée au minimum global ϕ^* est comparé aux valeurs obtenues pour les différentes méthodes de seuillage pour obtenir des fonctions boîtes. (a) terme de données. (b) $TV(u)$. (c) $TV(v)$. (d) valeurs de la fonctionnelle $((a)+(b)+(c))$.

les valeurs de la fonctionnelles estimées par les approches convexes et non convexes sont présentées pour les expériences de flot optique de la Figure 8.5. Les estimations données correspondent à un critère d'arrêt $\epsilon = 10^{-6}$ dans les algorithmes précédents. Comme attendu, les valeurs de la fonctionnelle obtenues avec les approches convexes sont indépendantes de l'initialisation.

Même s'il n'existe pas de relation entre les minima globaux non binaires des modèles convexes et les minimiseurs des problèmes originaux, la procédure de seuillage est capable de trouver des solutions de bonne qualité en terme de valeur de la fonctionnelle, que ce soit avec le modèle de (Strelakovsky et al., 2011) ou celui proposé. Il est important de remarquer que l'ap-

proche non convexe avec l’algorithme qui comporte une minimisation jointe donne de meilleures estimations du problème original. Comme suggéré dans (Stekalovskiy et al., 2011), les valeurs de la fonctionnelle obtenues en choisissant l’étiquette qui maximise $w(x, u_i, v_j)$ pour tout $x \in \Omega$ sont montrées, ce qui amène à de moins bonnes estimations. On peut noter que les valeurs de la fonctionnelle obtenues avec la valeur moyenne des poids sont supérieures aux autres approches, pour cette raison nous ne les avons pas incluses dans les comparaisons. On a également calculé la valeur de la fonctionnelle associée avec la valeur moyenne des poids, mais on ne les présente pas car les résultats ne sont pas bons.

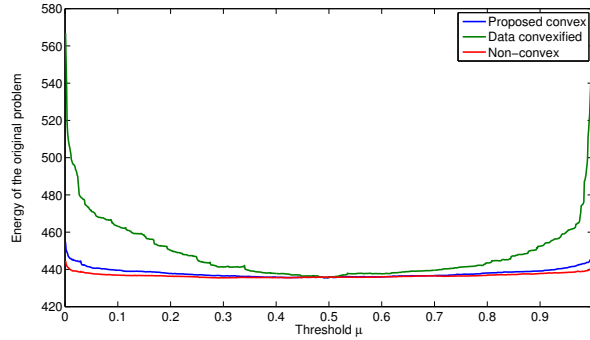
La Figure 7.6 montre que la méthode non convexe et la méthode convexe proposée donnent des estimations raisonnables (en termes de valeur de la fonctionnelle) pour tout seuil, alors que la méthode convexe de (Stekalovskiy et al., 2011) est plus sensible aux valeurs du seuil. Les estimations du flot optique correspondantes sont données dans la Figure 8.5 à la section suivante.

Ces exemples ont été obtenus en prenant $M_u = 8$ et $M_v = 7$ étiquettes. La mémoire requise pour chaque approche est de l’ordre de :

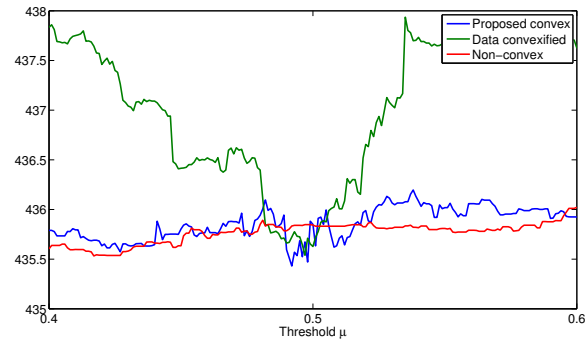
- Non convexe (Papadakis et al., 2010) : $3(M_u + M_v)|\Omega|$, car ρ_u , w_u , et \mathbf{z}_u sont de taille $M_u|\Omega|$, alors que ρ_v , w_v et \mathbf{z}_v sont de taille $M_v|\Omega|$
- Minimisation non convexe jointe : $((M_u + M_v)^2 + 2(M_u + M_v))|\Omega|$, car la matrice inverse précalculée est de taille $(M_u + M_v)^2$ en chaque point x , w_u et \mathbf{z}_u sont de taille $M_u|\Omega|$, alors que w_v et \mathbf{z}_v sont de taille $M_v|\Omega|$
- Modèle convexe de (Stekalovskiy et al., 2011) : $(3M_u + 3M_v + 2M_uM_v)|\Omega|$, car w_u , q_u et \mathbf{z}_u sont de taille $M_u|\Omega|$ et ρ et λ sont de taille $M_uM_v|\Omega|$.
- Notre approche convexe : $(M_u + M_v + 2M_uM_v)|\Omega|$, car \mathbf{z}_u est de taille $M_u|\Omega|$ et ρ et w de taille $M_uM_v|\Omega|$.

Dans tous les cas, la mémoire requise pourrait être réduite en calculant la fonction de coût ρ quand on en a besoin, mais cela augmenterait très fortement le coût de calcul. Une implémentation optimisée permet de réduire la demande en mémoire de (Stekalovskiy et al., 2011) mais augmente le nombre de calculs.

Quand on augmente le nombre d’étiquettes, l’approche non convexe originale de (Papadakis et al., 2010) est plus fréquemment bloquée dans des minima locaux peu intéressants. La nouvelle minimisation conjointe du modèle non convexe est néanmoins plus robuste et est capable de donner de très bonnes estimations dans le domaine du problème original dans tous les cas. Ceci est illustré dans la Table 7.2 qui présente le même type de résultats



(a)



(b)

FIGURE 7.6 – (a) Comparaison des solutions seuillées. L’approche convexe de (Stekalovskiy et al., 2011) (en vert) donnent de moins bonnes estimations pour des seuils éloignés de $\mu = 0.5$. (b) Un agrandissement du graphe est donné pour l’intervalle de seuil $[0.4, 0.6]$.

	Fonctionnelle relâchée : minimum estimé	Fonctionnelle originale : meilleur seuil	Fonctionnelle originale : plus grande probabilité
initialisation uniforme			
Non convexe	438.67	441.06	441.58
Non convexe joint	432.25	435.48	435.84
Données convexifiées	428.86	435.53	439.19
Modèle convexe proposé	428.87	435.19	465.23
Initialisation avec la meilleure étiquette			
Non convexe	461.92	464.89	466.32
Non convexe joint	431.57	434.03	434.35
Données convexifiées	428.86	435.51	439.35
Modèle convexe proposé	428.87	435.23	464.85
Initialisation aléatoire			
Non convexe	602.05	607.72	610.14
Non convexe joint	432.01	435.25	435.44
Données convexifiées	428.87	435.63	438.16
Modèle convexe proposé	428.87	435.18	466.18

TABLE 7.1 – Comparaison des méthodes dans le cadre de l'exemple de flot optique de la Figure 8.5. Le non convexe représente le modèle de (Papadakis et al., 2010) avec l'algorithme 7 et l'algorithme 8 pour le non convexe joint. Le modèle avec les données convexifiées est le modèle de (Stekalovskiy et al., 2011) avec l'algorithme 9. On trouve dans la première colonne les valeurs de la fonctionnelle en les minimiseurs des problèmes relâchés, obtenus avec les différentes méthodes et différentes initialisations (uniforme, avec la meilleure étiquette et de manière aléatoire). La valeur de la fonctionnelle originale est alors calculée pour les solutions construites en seuillant une sur-ligne de niveau (deuxième colonne) ou en gardant la plus grande probabilité (dernière colonne). Les approches convexes amènent à la même valeur de la fonctionnelle pour toutes les initialisations choisies. L'approche non convexe permet de retrouver des solutions du problème original dont les valeurs de la fonctionnelle sont proches de celles des minima locaux estimés pour le problème relâché. Le nouvel algorithme pour le modèle non convexe se montre performant.

pour un terme de données généré aléatoirement ρ . On observe aussi que les approches convexes permettent d'estimer de meilleurs minima de l'énergie relâchée. Cependant, comme les données sont totalement aléatoires, il existe un grand nombre de minima globaux. Ainsi il y a peu de chance d'obtenir des probabilités unimodales. Quand on seuille les solutions données par les approches convexes, on obtient de mauvaises estimations pour le problème non convexe original, alors que l'approche non convexe permet encore de trouver des solutions acceptables au problème original.

On peut donc conclure que :

- Les lignes de niveau de la solution ϕ^* obtenue avec l'approche non convexe donnent presque la même valeur de la fonctionnelle que ϕ^* , mais ce n'est pas le cas pour la solution obtenue avec les méthodes convexes.
- La méthode de seuillage proposée associée à notre méthode convexe semble satisfaisante pour les applications (puisque la valeur de la fonctionnelle n'augmente pas trop après avoir seuillé pour obtenir une fonction boîte).
- Des solutions équivalentes sont trouvées avec le modèle de (Stekalovskiy et al., 2011) seulement avec des seuils proches de 0.5 ou en gardant la plus grande probabilité.
- L'approche non convexe améliorée donne de bons minima locaux pour toute initialisation. Cela valide expérimentalement le travail de (Papadakis et al., 2010).

	Fonctionnelle relâchée : minimum estimé	Fonctionnelle originale : meilleur seuil	Fonctionnelle originale : plus grande : probabilité
Non convexe	6264	6267	6276
Non convexe conjoint	6155	6164	6164
Données convexifiées	5888	6735	7059
Modèle convexe proposé	5888	6725	7308

TABLE 7.2 – Le non convexe représente le modèle de (Papadakis et al., 2010) avec l’algorithme 7 et l’algorithme 8 pour le non convexe joint. Le modèle avec les données convexifiées est le modèle de (Stekalovskiy et al., 2011) avec l’algorithme 9. Les valeurs de la fonctionnelle en les minima des problèmes relâchés obtenues par les différentes méthodes pour un terme de données ρ aléatoire sont données dans la première colonne. La valeur de la fonctionnelle originale est alors calculée pour les solutions construites en seuillant les surlignes de niveau correspondantes (deuxième colonne) ou en gardant l’étiquette avec la plus grande probabilité (dernière colonne).

Chapitre 8

Applications.

Dans cette section je présente des résultats numériques obtenus pour des problèmes multi-étiquettes avec des dimensions allant jusqu'à $N = 3$.

8.1 Le cas 1D.

8.1.1 Segmentation par la couleur.

Étant donnée une image en niveaux de gris I , on considère le problème de segmentation

$$J_1(u) = \lambda \int_{\Omega} |Du(x)| + \int_{\Omega} |I(x) - u(x)| dx, \quad (8.1)$$

avec u à valeurs dans $\Gamma^u = \{0 < 1/(M - 1) \dots < 1\}$. Cela revient à prendre $\rho(x, u(x)) = |I(x) - u(x)|$ et on applique l'algorithme 6 de la sous-section 5.2.1. C'est un cas simple où le terme ρ est convexe en fonction de u . Le résultat obtenu pour $\lambda = 10$ et $M = 9$ est représenté dans la Figure 8.1 et comparé avec la méthode de (Pock et al., 2008) (algorithme 5 de la sous-section 5.1.1). Les segmentations obtenues sont équivalentes.

8.1.2 Disparité.

Étant données deux images I_1 et I_2 , représentées dans la Figure 8.2, on regarde le problème de l'estimation de la disparité entre les deux images :

$$J_1(u) = \lambda \int_{\Omega} |Du(x, y)| dx dy + \int_{\Omega} |I_1(x, y) - I_2(x + u(x, y), y)| dx dy, \quad (8.2)$$

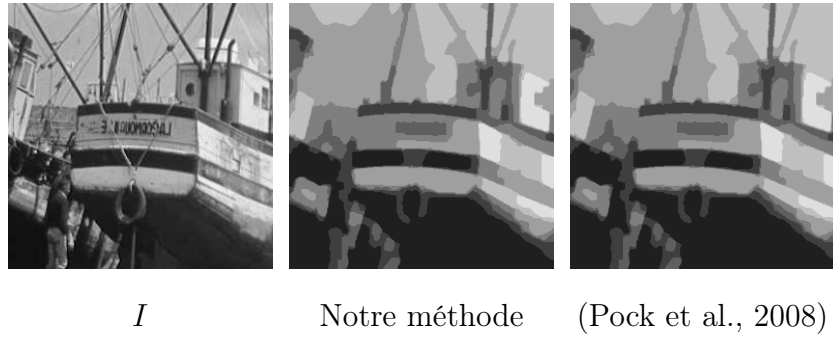


FIGURE 8.1 – Comparaison des résultats avec la méthode de (Pock et al., 2008) pour les mêmes paramètres $M = 9$ et $\lambda = 4$. Les deux méthodes sont équivalentes.

avec $\lambda = 7$ et u qui représente un déplacement horizontal entre les deux images et qui prend ses valeurs dans $\Gamma^u = \{4 = u_0 < \dots < u_{M-1} = 16\}$. Le terme de données n'est pas convexe, on pose $\rho(x, u(x)) = |I_1(x) - I_2(x + u(x))|$. Les résultats obtenus à l'aide de l'algorithme 6 de la sous-section 5.2.1 sont présentés dans la Figure 8.3 et comparés avec ceux de la méthode de (Pock et al., 2008) obtenus avec l'algorithme 5 de la sous-section 5.1.1. La Figure 8.3 montre que les deux méthodes donnent des résultats équivalents.

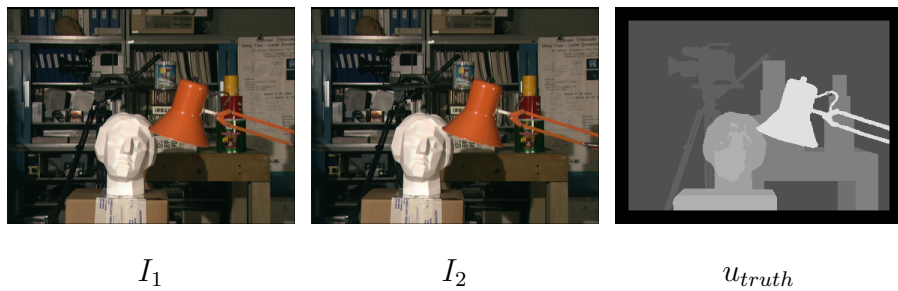
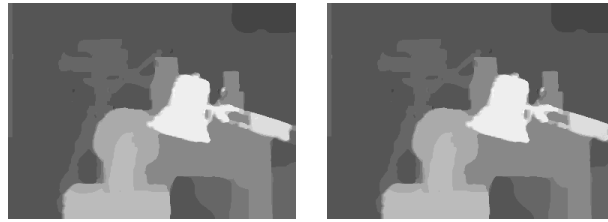


FIGURE 8.2 – Données stéréo et vraie disparité.



Notre méthode

(Pock et al., 2008)

FIGURE 8.3 – Comparaison avec la méthode de (Pock et al., 2008) pour les mêmes paramètres $M = 13$ et $\lambda = 7$. Les mêmes cartes de disparité sont estimées.

8.2 Flot optique 2D.

Le flot optique entre les images présentées dans la Figure 8.4 a été calculé par différentes approches : l’approche non convexe avec minimisation jointe (algorithme 8 de la sous-section 6.1.1), le terme de données convexifié de (Stekalovskiy et al., 2011) (algorithme 9) et l’approche convexe proposée (algorithme 10 de la sous-section 6.1.2). On présente les résultats dans la Figure 8.5. Ces résultats illustrent que l’approche non convexe amène à des estimations acceptables pour les différentes initialisations choisies, tout en étant plus robuste à l’étape de seuillage.



I_1

I_2

$(u, v)_{truth}$

FIGURE 8.4 – Les images I_1 et I_2 sont tirées de la séquence RubberWhale. On présente la vérité terrain du flot optique. Les couleurs représentent la direction du flot, alors que l’intensité est liée à la norme du vecteur.

Les approches convexes sont plus sensibles au seuillage, surtout celle de (Stekalovskiy et al., 2011). L’approche proposée permet d’obtenir une solu-

tion seuillée avec une valeur de la fonctionnelle plus basse, comme cela est illustré dans la Table 7.1.

8.3 Expériences avec $N = 3$.

On présente quelques expériences en dimension trois. Les résultats suivants sont obtenus en étendant l'algorithme 10 de la sous section 6.2.2 à la dimension 3.

8.3.1 Flot optique avec un masque d'occultation.

Pour améliorer la modélisation du flot optique, le flot et les occultations sont estimés simultanément. Cela revient à rajouter à la variable w une dimension supplémentaire pour représenter le masque d'occultation. Le terme de données est :

$$\rho(x, u(x), v(x), m(x)) = |I_1(x) - I_2(x + w(x))|(1 - m(x)) + \kappa m(x),$$

où $m(x) \in [0, 1]$ représente la carte des occultations et $\kappa \geq 0$ est le coût d'occultation. Les occultations sont supposées formées de régions régulières, la carte d'occultation est spatialement régularisée en minimisant :

$$\beta \int_{\Omega} |\nabla m|,$$

avec $\beta > 0$. Un exemple d'estimation avec $\kappa = 40/255$, $\beta = 0.005$ et $\lambda = 0.04$. Des comparaisons avec la méthode convexe proposée sans masque d'occultation ainsi qu'avec la méthode non convexe sont données Figure 8.6. Cela illustre que la méthode fonctionne en plus grande dimension et permet d'estimer simultanément des informations de nature différente (le flot et le masque) d'une manière convexe.

8.3.2 Le modèle de Chan et Vese.

On considère maintenant le modèle de Chan et Vese :

$$J(u, c_0, c_1) = \int_{\Omega} \|I - c_0\|^2 u dx + \int_{\Omega} \|I - c_1\|^2 (1 - u) dx + \lambda \int_{\Omega} |Du|.$$

En suivant (Brown et al., 2012), le problème est convexifié en considérant la fonction $w(x, r, s, t) = \delta(u(x) = r)\delta(c_0 = s)\delta(c_1 = t)$ qui donne la fonction de coût :

$$\rho(x, r, s, t) = \|I - s\|^2 r + \|I - t\|^2 (1 - r).$$

Avec cette formulation on ajoute les termes $\kappa \int_{\Omega} |Dc_0|$ et $\kappa \int_{\Omega} |Dc_1|$, avec $\kappa \rightarrow \infty$, pour obtenir deux constantes c_0 et c_1 . Un tel modèle n'est cependant pas satisfaisant. En effet si (u, c_0, c_1) est une solution, alors $(1 - u, c_1, c_0)$ l'est et donc $(1/2, (c_1 + c_0)/2, (c_1 + c_0)/2)$ est une solution par convexité. Une contrainte comme $c_0 < c_1$ doit être ajoutée. Cela peut être fait en ajoutant une pénalisation $\epsilon(\int_{\Omega} \|c_0\|^2 dx + \int_{\Omega} \|1 - c_1\|^2 dx)$, ou mieux en définissant un domaine de recherche avec $s \leq t$, ce qui amène à considérer moitié moins de possibilités.

Ce modèle est appliqué dans la Figure 8.7 avec un ensemble d'étiquettes possibles $[0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$. On obtient les estimations $c_0 = \frac{1}{4}$ et $c_1 = \frac{3}{4}$. En utilisant ces constantes c_0 et c_1 dans un modèle de segmentation TV classique, où c_0 et c_1 sont fixés comme au chapitre 2, on retrouve la même segmentation.

8.4 Conclusion.

J'ai abordé le calcul de minima globaux de problèmes multi-étiquettes non convexes pour le traitement d'images. J'ai étudié différentes relaxations convexes et non convexes du problème non-convexe et j'ai proposé un nouveau modèle convexe et un algorithme sans boucle interne pour une dimension quelconque. J'ai souligné le fait que calculer un minimum global de l'énergie relaxée n'est pas suffisant pour obtenir des minima globaux ou locaux du problème original et proposé des méthodes qui améliorent les résultats existants. Ainsi l'approche non convexe qui estime des minima locaux peut produire de meilleures estimations en pratique quand on utilise le nouvel algorithme proposé.

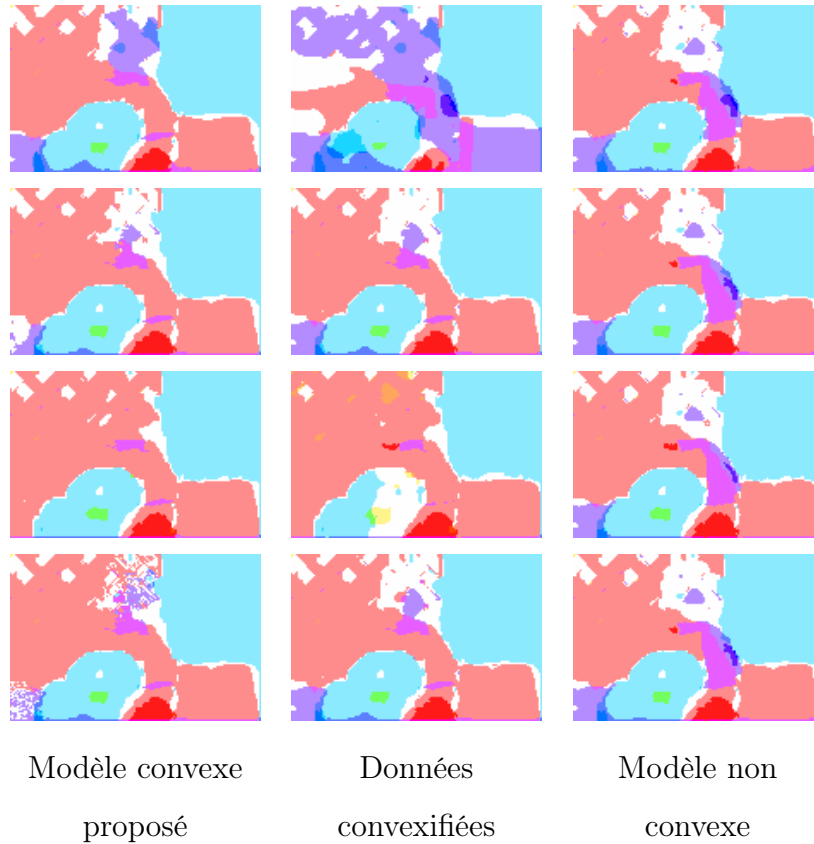


FIGURE 8.5 – Comparaison des flots optiques entre les images I_1 et I_2 présentées dans la Figure 8.4. Ces flots sont estimés avec le modèle convexe proposé, le modèle convexe de (Stekalovskiy et al., 2011) et l’approche non convexe de (Papadakis et al., 2010) pour différents seuils (a : $\mu = 0.1$, b : $\mu = 0.5$, c : $\mu = 0.9$) ou en choisissant l’étiquette de plus grande probabilité (d). Ces expérimentations simples sont réalisées sur des images de taille 146×97 , on a effectué un changement d’échelle à 25% de la taille originale pour que les méthodes convergent en temps raisonnable. On pose $\lambda = 0.04$ et on utilise seulement 8×7 étiquettes pour voir les différences entre les méthodes. Ces résultats correspondent aux valeurs la table 7.5. La valeur de la fonctionnelle relâchée par la méthode de (Stekalovskiy et al., 2011) est un minimum global, mais les solutions obtenues par leur méthode sont bruitées. La méthode convexe proposée permet d’obtenir de meilleures solutions au problème original. La méthode non convexe est quant à elle moins sensible au seuillage.

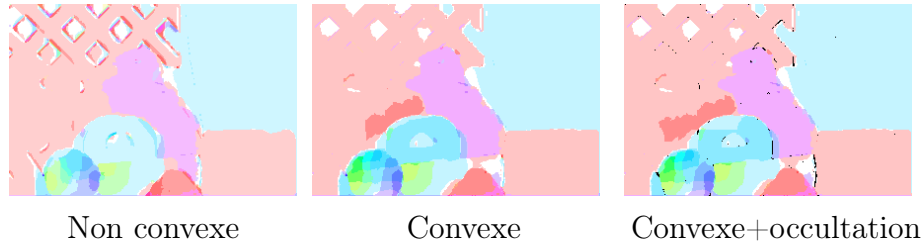


FIGURE 8.6 – Les solutions obtenues sur l’image RubberWhale de taille 292×196 (avec un changement d’échelle de 50% par rapport à sa taille originale) et avec 10×9 étiquettes. Les occultations sont représentées par des pixels noirs.

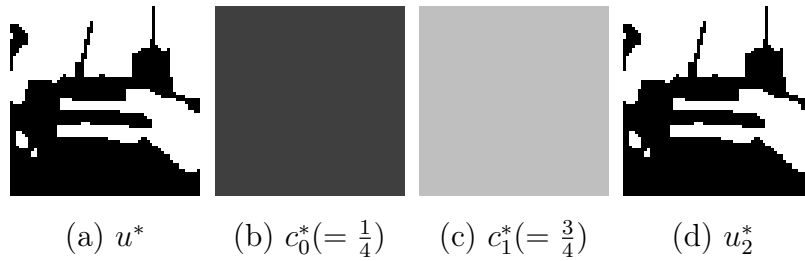


FIGURE 8.7 – (a-c) : Solution (u^*, c_0^*, c_1^*) obtenue avec le modèle convexe entier. (d) : L’image u_2^* montre la solution obtenue en fixant $c_0 = c_0^* = \frac{1}{4}$ et $c_1 = c_1^* = \frac{3}{4}$ et en utilisant un algorithme de segmentation classique présenté au chapitre 2. $u^* = u_2^*$, ce qui montre que l’algorithme a une certaine consistance.

Chapitre 9

Conclusion.

Dans cette thèse j'ai présenté différentes relaxations de modèles variationnels non convexes pour le traitement d'images. Dans le chapitre 2 on a observé pour la segmentation binaire constante par morceaux que la convexification permet d'utiliser des algorithmes rapides et simples à utiliser pour obtenir un minimum global. Cependant le minimum global n'est pas forcément celui recherché, c'est pourquoi j'ai proposé un modèle par bande étroite, assez flexible dans la mesure où le caractère local du minimum peut varier avec la taille de la bande.

Dans le chapitre 3 j'ai proposé une convexification d'un modèle de segmentation avec comparaison d'histogrammes. Ici le retour au problème initial n'est pas assuré, cependant on obtient des résultats numériques satisfaisants, la comparaison des histogrammes est globale et le modèle convexe.

Ensuite j'entreprends une étude de méthodes de relaxations pour des problèmes multi-étiquettes. Pour le cas monodimensionnel il est possible de résoudre le problème original. En dimension supérieure, trouver un minimum global du problème initial à partir du problème relaxé n'est pas un problème résolu. Je propose un nouveau schéma numérique pour une relaxation non convexe qui permet d'obtenir de meilleurs résultats numériquement, ainsi qu'une nouvelle relaxation avec un algorithme dont les projections sont exactes.

On constate que les méthodes proposées dans la littérature pour revenir au domaine initial à partir d'une solution du problème relâché ne sont pas forcément les meilleures. Je compare et propose différentes méthodes et constate que, dans certains cas, une relaxation non convexe dont les minima locaux sont liés à ceux du problème original permet d'obtenir d'aussi bons

résultats qu'une relaxation convexe.

Une fois ces outils généraux développés, le champ d'investigation est vaste. Des attributs de texture peuvent être exploités dans ces modèles variationnels pour traiter les images. Savoir pour quels types d'images et pour quelles représentations les modèles constants par morceaux ou les histogrammes sont efficaces est un travail de longue haleine.

Pour ce qui est de l'amélioration de ces outils, la relaxation convexe est intéressante mais, comme on l'a montré, n'est pas toujours la meilleure solution. Il peut être intéressant de réfléchir à des relaxations qui conservent un aspect local quand c'est voulu, et de penser à la manière de revenir au problème initial au moment de la conception d'une relaxation, quitte à ne pas être convexe si on y gagne.

Publications Les publications qui ont été faites dans le cadre de cette thèse sont (Yildizoglu et al., 2012) qui se rapporte au chapitre 2, (Yildizoglu et al., 2013) qui se rapporte au chapitre 3, et (Papadakis et al., 2013) pour la partie II. J'ai également participé à l'élaboration de (Antoine et al., 2014) en mettant au point un algorithme pour segmenter la ceinture graisseuse de patients sur des images IRM.

Chapitre 10

Annexe : segmentation de la ceinture grasseuse sur des images obtenues par IRM.

Dans le cadre d'une collaboration avec les coauteurs de (Antoine et al., 2014) entre l'Institut de Mathématiques de Bordeaux et les départements de radiothérapie et de chirurgie de l'Institut Bergonié, centre régional de lutte contre le cancer de Bordeaux et du Sud-Ouest, j'ai développé un algorithme pour segmenter la ceinture grasseuse de patients sur des images médicales. Le but est d'évaluer cette masse pour observer son évolution au cours d'un traitement par rayonnement. Cela permet d'étudier les effets du traitement et éventuellement de régler le dosage du traitement d'une séance à l'autre. Le problème ici n'est pas de faire mieux qu'un être humain et l'estimation cherchée est pour l'instant grossière, c'est à dire que l'objectif est d'avoir une idée de la masse grasseuse plutôt que sa répartition géométrique fine. D'autre part les images ne servent pas à guider le traitement, il n'y a pas de contraintes de temps réel, le but est de faire gagner du temps pour l'évaluation du volume. En effet la segmentation était auparavant dessinée à la main, sachant qu'il y a plus de 40 images pour un seul scan.

Le principe de la chaîne de traitement est décrit ci-après. Dans la Figure 10.1 quelques unes des images à traiter sont montrées pour illustrer le problème et certaines de ses difficultés, cela permettra de justifier certaines étapes du processus.

La ceinture grasseuse occupe le pourtour, d'où son nom. En bas se trouve la structure sur laquelle le patient s'adosse. Parfois le patient déborde de

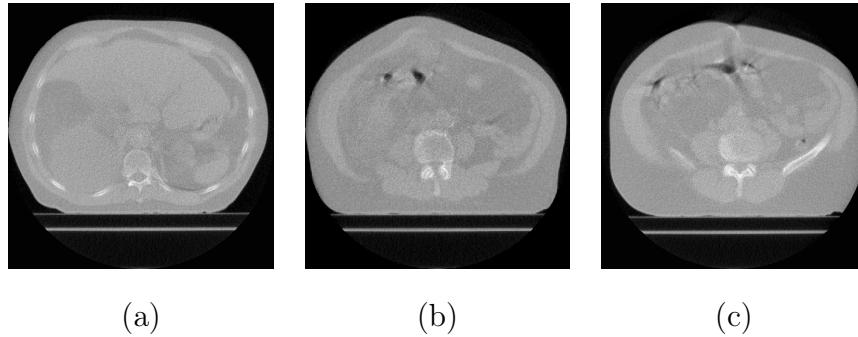


FIGURE 10.1 – Trois exemples d’images à segmenter.

la mesure, de sorte que la ceinture grasseuse n’est pas visible. La ceinture grasseuse est plus claire que la frontière interne. Cependant le niveau de gris diffère sur une même tranche dans la ceinture et d’autres régions de l’image ont des niveaux de gris similaires. De plus sur certaines images comme l’image (b) de la Figure 10.1, les frontières de la ceinture grasseuse sont diffuses. Ainsi une analyse ne reposant que sur le niveau de gris, même locale avec des contours actifs ou avec une bande étroite, risque de segmenter une région plus grande que celle attendue. De plus le niveau de gris de la peau est légèrement plus clair, et parfois des parties plus claires sont visibles dans la ceinture comme en haut de l’image (c) de la Figure 10.1.

La géométrie du problème va être exploitée pour développer l’algorithme. Son principe est de remarquer que, le bord excepté, la partie à segmenter est localement plus claire que l’extérieur, et moins claire que l’intérieur. L’objectif est de créer une image plus lisse, dont le niveau de gris croît globalement en allant vers le centre de l’image. Ainsi le problème de niveaux de gris similaires pour des pixels extérieurs à la zone grasseuse sera moins important. Cette image est après seuillée par un seuil local. Les différentes étapes sont illustrées sur un cas particulier. L’image initiale est l’image (a) de la Figure 10.2. Par souci de rapidité les minimisations sont en fait un certain nombre d’itérations d’un algorithme de minimisation. Je détaille maintenant les différentes étapes.

- La partie de l’image qui représente le support sur lequel le patient est adossé est enlevée.
- Des pixels noirs sont rajoutés autour de l’image pour que les bords du corps soient traités de manière plus uniforme. Le résultat est l’image

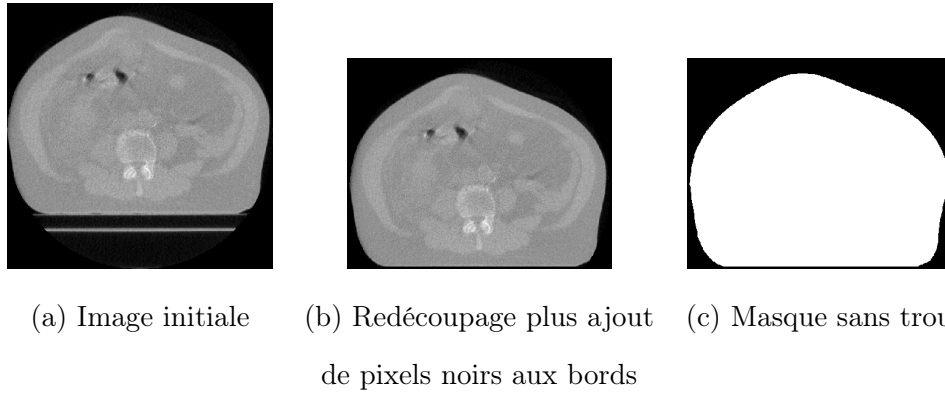


FIGURE 10.2 – L'image initiale est à gauche, le support en bas est enlevé et des pixels noirs sont rajoutés au bord

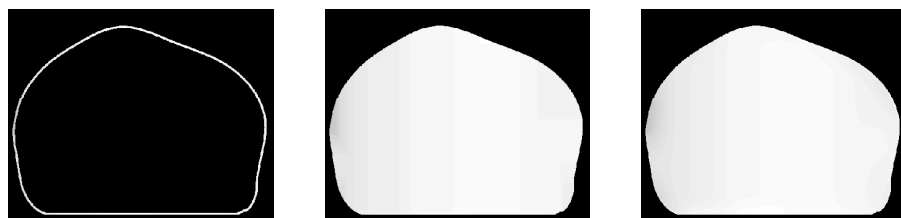
- (b) de la Figure 10.2.
- Un masque binaire est créé pour représenter l'intérieur du corps. Dans ce but on effectue un seuillage. Comme on peut avoir des niveaux de gris assez bas à l'intérieur du corps (on le voit dans l'image (a) de la Figure 10.2), le seuillage peut donner un masque qui ne couvre pas tout l'intérieur du corps. Cependant on trouve le bord et obtenir le masque complété n'est pas un problème. On obtient l'image (c) de la Figure 10.2.
- Une bande de 4 pixels de large au bord du masque est supprimée pour enlever la partie plus claire au niveau de la peau.
- L'image est régularisée en minimisant le modèle ROF (Rudin et al., 1992). C'est cette image qui sera seuillée, on régularise avec ce modèle pour diminuer le bruit tout en conservant des contours. Une bande aux bords de largeur 5 pixels est régularisée de manière plus forte en premier pour avoir moins de soucis avec les parties plus claires qui arrivent au bord dans certaines images. Le résultat est l'image (a) de la Figure 10.3.
- On fait en sorte que la partie centrale ait des niveaux de gris plus élevés que l'extérieur quand on suit des chemins verticaux ou horizontaux. Pour cela, on part d'un côté et on remplace la valeur d'un pixel par la valeur maximale rencontrée sur le chemin horizontal ou vertical parcouru. On parcourt l'image de gauche à droite puis de haut en bas, et



(a) Image régularisée (b) On étend les valeurs (c) On régularise.
vers le centre.

FIGURE 10.3 – À gauche l'image est régularisée en minimisant la variation totale, puis les valeurs sont étendues de sorte qu'elles soient croissantes en allant vers le centre (image du milieu), et le résultat est régularisé à droite.

on prend le minimum pixel à pixel entre ce résultat et celui du passage de gauche à droite puis de bas en haut. On répète ce processus en parcourant d'abord l'image de la droite vers la gauche au lieu de la gauche vers la droite. Le résultat final est le minimum des deux minima obtenus. L'image (b) de la Figure 10.3 est obtenue de cette manière. L'image est régularisée (de nouveau avec le modèle ROF) pour arrondir les lignes de niveaux. Le résultat est l'image (c) de la Figure 10.3. Cette dernière image sera seuillée pour obtenir la segmentation.



(a) Bord régularisé (b) On étend les valeurs (c) On régularise.
vers le centre.

FIGURE 10.4 – À gauche le bord de l'image est régularisé en minimisant la variation totale, puis les valeurs sont étendues pour qu'elles soient croissantes en allant vers le centre (image du milieu), et le résultat est régularisé à droite.

- Pour définir le seuil local, le bord de l'image précédente est extrait et régularisé une fois de plus. On obtient l'image (a) de la Figure 10.4. L'image est complétée vers le centre comme dans l'étape précédente et devient l'image (b) de la Figure 10.4. L'intérieur est régularisé par une diffusion laplacienne en gardant fixées les conditions données au bord par l'image (a) de la Figure 10.4. On obtient ainsi l'image (c) de la Figure 10.4 qui, à une constante près, définit un seuil local dépendant de l'image pour la segmentation.
- L'image régularisée est seuillée avec un seuil défini comme l'image (c) de la Figure 10.4 construite précédemment plus une certaine constante déterminée empiriquement. Cette constante est voulue la plus grande possible, tout en étant inférieure à la différence de niveau de gris entre la ceinture graisseuse et sa frontière intérieure. On ajoute le bord qui avait été enlevé. Le résultat est l'image de la Figure 10.5. Arrivé à ce stade, l'utilisateur a la possibilité de modifier le seuil, en tester un autre est immédiat.

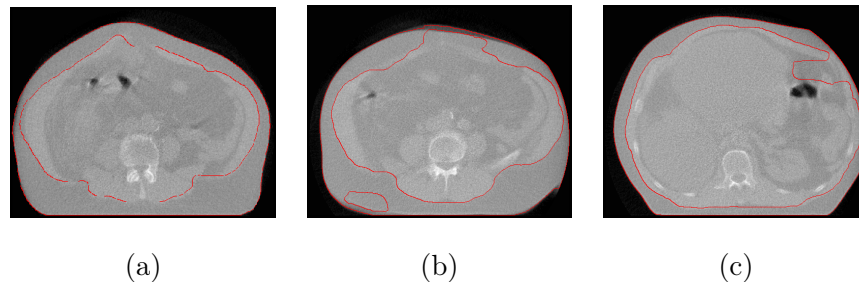


FIGURE 10.5 – L'image (a) est le résultat de la segmentation de l'image (a) de la Figure 10.2. Cette segmentation est obtenue en seuillant l'image (c) de la Figure 10.3 par l'image de seuillage (c) de la Figure 10.4 plus une constante. L'image (b) est un cas où la segmentation échoue car l'image est un peu différente : il y a une bande plus sombre en haut et une ligne de pixels plus clairs en bas. On a un problème dans la segmentation de l'image (c) car la ceinture graisseuse n'apparaît pas sur l'image en haut à droite.

La segmentation est correcte dans 90% des cas. En effet certaines images sont trop différentes de l'image moyenne, c'est le cas pour l'image (b) de la Figure 10.5, et parfois le corps sort beaucoup de l'image, c'est le cas pour l'image (c) de la Figure 10.5. Dans ce dernier cas l'estimation de la masse

graisseuse doit être corrigée par d'autres moyens. Une vérification reste nécessaire mais cette méthode a permis aux praticiens de gagner un temps précieux.

Bibliographie

- Ambrosio, L., N. Fusco, N., and Pallara, D. (2000). *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford University Press.
- Antoine, M., Sargos, P., Saut, O., Pouypoudat, C., Desjardins, M., Loizeau, H., Ternisien, P., Yıldızođlu, R., Stoeckle, E., Henrique de Figueireido, B., Caron, J., and Kantor, G. (2014). Geometrical analysis of organs motion for preoperative high dose (54gy) helical tomotherapy of retroperitoneal liposarcoma. In *American Society for Radiation Oncology's 56th annual meeting (ASTRO)*.
- Arrow, K. J., Hurwicz, L., Uzawa, H., and Chenery, H. B. (1958). *Studies in linear and non-linear programming*, volume 2. Stanford University Press Stanford.
- Aubert, G. and Aujol, J.-F. (2005). Optimal partitions, regularized solutions, and application to image classification. *Applicable Analysis*, 84(1) :15–35.
- Aubert, G. and Aujol, J.-F. (2008). A variational approach to remove multiplicative noise. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 68(4) :925–946.
- Aubert, G., Barlaud, M., Faugeras, O., and Jehan-Besson, S. (2002). Image segmentation using active contours : Calculus of variations or shape gradients? *SIAM Applied Mathematics*, 63 :2003.
- Aubert, G. and Kornprobst, P. (2002). *Mathematical Problems in Image Processing*, volume 147 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag.
- Aujol, J.-F., Aubert, G., and Blanc-Féraud, L. (2003). Wavelet-based level set evolution for classification of textured images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12 :1634–1641.

- Aujol, J.-F., Masnou, S., and Ladjal, S. (2010). Exemplar-based inpainting from a variational point of view. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 42(3) :1246–1285.
- Bae, E., Yuan, J., and Tai, X.-C. (2011). Global minimization for continuous multiphase partitioning problems using a dual approach. *International Journal of Computer Vision*, 92(1) :112–129.
- Baeza, A., Caselles, V., Gargallo, P., and Papadakis, N. (2010). A narrow band method for the convex formulation of discrete multilabel problems. *SIAM MMS*. 8(5) :2048–2078.
- Ballester, C., Garrido, L., Lazcano, V., and Caselles, V. (2012). A tv-l1 optical flow method with occlusion detection. In *DAGM/OAGM Symposium*, pages 31–40.
- Bauschke, H. H. and Combettes, P. L. (2011). *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Springer.
- Bigun, J., Granlund, G. H., and Wiklund, J. (1991). Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 13(8) :775–790.
- Black, M. and Anandan, P. (1993). A framework for the robust estimation of optical flow. In *International Conference on Computer Vision (ICCV'93)*, pages 231–236.
- Boykov, Y. Y. and Jolly, M.-P. (2001). Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in nd images. In *Computer Vision, 2001. ICCV 2001. Proceedings. Eighth IEEE International Conference on*, volume 1, pages 105–112. IEEE.
- Brown, E. S., Chan, . F., and Bresson, X. (2012). Completely convex formulation of the chan-vese image segmentation model. *Int. J. Comput. Vision*, 98(1) :103–121.
- Brox, T., Bruhn, A., Papenberg, N., and Weickert, J. (2004). High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. In *European Conference on Computer Visison (ECCV'04)*, pages 25–36.

- Brox, T., Rousson, M., Deriche, R., and Weickert, J. (2003). Unsupervised segmentation incorporating colour, texture, and motion. In *Computer Analysis of Images and Patterns*.
- Brox, T. and Weickert, J. (2006). Level set segmentation with multiple regions. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(10) :3213–3218.
- Bruhn, A., Weickert, J., Feddern, C., Kohlberger, T., and Schnörr, C. (2005). Variational optical flow computation in real-time. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(5) :608–615.
- Caselles, V., R., Kimmel, and Sapiro, G. (1997). Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22 :61–79.
- Chambolle, A. (2004a). An algorithm for mean curvature motion. *Interfaces and Free Boundaries*, 6 :1–24.
- Chambolle, A. (2004b). An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical imaging and vision*, 20(1-2) :89–97.
- Chambolle, A., Cremers, D., and Pock, T. (2011). A convex approach to minimal partitions. Technical report, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00630947>.
- Chambolle, A. and Pock, T. (2011). A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40 :120–145.
- Chan, T. F., Esedoglu, S., and Nikolova, M. (2006). Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(5) :1632–1648.
- Chan, T. F., Golub, G. H., and Mulet, P. (1999). A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(6) :1964–1977.
- Chan, T. F. and Vese, L. A. (2001). Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277.
- Chen, Y. and Ye, X. (2011). Projection onto a simplex. *CoRR*, abs/1208.4873.

- Combettes, P. and Wajs, V. (2005). Signal recovery by proximal forward-backward splitting. *SIAM J. on Multi. Model. and Simu.*, 4(4).
- Cremers, D., Rousson, M., and Deriche, R. (2007). A review of statistical approaches to level set segmentation : Integrating color, texture, motion and shape. *International Journal of Computer Vision*, 72 :215.
- Delfour, M. C. and Zolésio, J.-P. (2001). *Shapes and geometries : analysis, differential calculus, and optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA.
- Farabet, C., Couprie, C., Najman, L., and LeCun, Y. (2013). Learning hierarchical features for scene labeling. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 35(8) :1915–1929.
- Goldluecke, B. and Cremers, D. (2010). Convex relaxation for multilabel problems with product label spaces. In *European conference on Computer vision (ECCV'10)*, pages 225–238.
- Goldluecke, B., Strelakovsky, E., and Cremers, D. (2013). Tight convex relaxations for vector-valued labeling. *To appear in SIAM Journal on Imaging Science*.
- Goldstein, T., Bresson, X., and Osher, S. (2012). Global minimization of markov random fields with applications to optical flow. *Inverse Problems and Imaging*, 6(4) :623–644.
- Herbulot, A., Jehan-Besson, S., Duffner, S., Barlaud, M., and Aubert, G. (2006). Segmentation of vectorial image features using shape gradients and information measures. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(3) :365–386.
- Horn, B. and Schunck, B. (1981). Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203.
- Kass, M., Witkin, A., and Terzopoulos, D. (1988). Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1 :321–331.
- Li, F., Ng, M. K., Zeng, T., and Shen, C. (2010). A multiphase image segmentation method based on fuzzy region competition. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3(3) :277–299.

- Mäenpää, T. (2003). *The Local binary pattern approach to texture analysis : Extensions and applications*. Oulun yliopisto.
- Maurel, P., Aujol, J.-F., and Peyré, G. (2011). Locally parallel texture modeling. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 4(1) :413–447.
- Mémin, E. and Pérez, P. (2002). Hierarchical estimation and segmentation of dense motion fields. *International Journal of Computer Vision*, 46(2) :129–155.
- Moreau, J. (1965). Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bulletin de la S.M.F.*, 93.
- Mumford, D. and Shah, J. (1989). Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 :577–685.
- Ni, K., Bresson, X., Chan, T. F., and Esedoglu, S. (2009). Local histogram based segmentation using the wasserstein distance. *International Journal of Computer Vision*, 84(1) :97–111.
- Osher, S. and Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *JCP*, 79(1) :12 – 49.
- Papadakis, N., Baeza, A., Gargallo, P., and Caselles, V. (2010). Polyconvexification of the multi-label optical flow problem. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP'10)*.
- Papadakis, N., Yıldızoğlu, R., Aujol, J.-F., and Caselles, V. (2013). High-dimension multilabel problems : Convex or nonconvex relaxation? *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(4) :2603–2639.
- Paragios, N. and Deriche, R. (1999). Geodesic active regions for supervised texture segmentation. In *ICCV*.
- Peyré, G., Fadili, J., and Rabin, J. (2012). Wasserstein active contours. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'12)*.
- Pock, T. and Chambolle, A. (2011). Diagonal preconditioning for first order primal-dual algorithms in convex optimization. In *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'11)*, pages 1762 –1769.

- Pock, T., Cremers, D., Bischof, H., and Chambolle, A. (2010a). Global solutions of variational models with convex regularization. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 3(4) :1122–1145.
- Pock, T., Cremers, D., Bischof, H., and Chambolle, A. (2010b). Global solutions of variational models with convex regularization. *SIAM JIS*, 3 :1122–1145.
- Pock, T., Schoenemann, T., Graber, G., Bischof, H., and Cremers, D. (2008). A convex formulation of continuous multi-label problems. In *Proceedings of the 10th European Conference on Computer Vision (ECCV'08) : Part III*, pages 792–805.
- Rabin, J., Peyré, G., Delon, J., and Bernot, M. (2012). Wasserstein barycenter and its application to texture mixing. In *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, pages 435–446. Springer.
- Rockafellar, R. T. (1976). Augmented lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Mathematics of operations research*, 1(2) :97–116.
- Rockafellar, R. T. (1997). *Convex analysis*, volume 28. Princeton university press.
- Rousson, M., Brox, T., and Deriche, R. (2003). Active unsupervised texture segmentation on a diffusion based feature space. In *CVPR*.
- Rudin, L. I., Osher, S., and Fatemi, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys. D*, 60(1-4) :259–268.
- Shafei, B. and Steidl, G. (2012). Segmentation of images with separating layers by fuzzy c-means and convex optimization. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 23(4) :611–621.
- Stekalovskiy, E., Goldluecke, B., and Cremers, D. (2011). Tight convex relaxations for vector-valued labeling problems. In *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'11)*.
- Swoboda, P. and Schnörr, C. (2013a). Convex variational image restoration with histogram priors. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(3) :1719–1735.

- Swoboda, P. and Schnörr, C. (2013b). Variational image segmentation and cosegmentation with the wasserstein distance. In *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 321–334. Springer.
- Vese, L. A. and Chan, T. F. (2002). A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50 :271–293.
- Werlberger, M., Trobin, W., Pock, T., Wedel, A., Cremers, D., and Bischof, H. (2009). Anisotropic huber-l1 optical flow. In *British Machine Vision Conference (BMVC'09)*.
- Yildızoğlu, R., Aujol, J.-F., and Papadakis, N. (2012). Active contours without level sets. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'12)*.
- Yildızoğlu, R., Aujol, J.-F., and Papadakis, N. (2013). A convex formulation for global histogram based binary segmentation. In *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 335–349. Springer.
- Yuan, Y., Ukwatta, E., Tai, X., Fenster, A., and Schnörr, C. (2012). A fast global optimization-based approach to evolving contours with generic shape prior. *In submission in IEEE TPAMI, also UCLA Tech. Report CAM 12-38*.
- Zach, C., Pock, T., and Bischof, H. (2007). A duality based approach for realtime tv-l1 optical flow. In *Proceedings of the 29th DAGM conference on Pattern recognition*, pages 214–223.
- Zhu, M. and Chan, T. (2008). An efficient primal-dual hybrid gradient algorithm for total variation image restoration. *UCLA CAM Report*, pages 08–34.

Résumé

Cette thèse étudie différentes relaxations pour minimiser des fonctionnelles non convexes qui apparaissent en traitement d'images. Des problèmes comme la segmentation d'image peuvent en effet s'écrire comme un problème de minimisation d'une certaine fonctionnelle, le minimiseur représentant la segmentation recherchée. Différentes méthodes ont été proposées pour trouver des minima locaux ou globaux de la fonctionnelle non convexe du modèle de Mumford-Shah constant par morceaux à deux phases. Certaines approches utilisent une relaxation convexe qui permet d'obtenir des minima globaux de la fonctionnelle non convexe. On rappelle et compare certaines de ces méthodes et on propose un nouveau modèle par bande étroite, qui permet d'obtenir des minima locaux tout en utilisant des algorithmes robustes qui proviennent de l'optimisation convexe. Ensuite, on construit une relaxation convexe d'un modèle de segmentation à deux phases qui repose sur la comparaison entre deux histogrammes donnés et les histogrammes estimés globalement sur les deux régions de la segmentation. Des relaxations pour des problèmes multi-étiquettes à plusieurs dimensions comme le flot optique sont également étudiées. On propose une relaxation convexe avec un algorithme itératif qui ne comprend que des projections qui se calculent exactement, ainsi qu'un nouvel algorithme pour une relaxation convexe sur chaque variable mais non convexe globalement. On étudie la manière d'estimer une solution du problème non convexe original à partir d'une solution d'un problème relaxé en comparant des méthodes existantes avec des nouvelles.

Abstract

In this thesis we study different relaxations of non-convex functionals that can be found in image processing. Some problems, such as image segmentation, can indeed be written as the minimization of a functional. The minimizer of the functional represents the segmentation. Different methods have been proposed in order to find local or global minima of the non-convex functional of the two-phase piecewise constant Mumford-Shah model. With a convex relaxation of this model we can find a global minimum of the non-convex functional. We present and compare some of these methods and we propose a new model with a narrow band. This model finds local minima while using robust convex optimization algorithms. Then a convex relaxation of a two-phase segmentation model is built that compares two given histograms with those of the two segmented regions. We also study some relaxations of high-dimension multi-label problems such as optical flow computation. A convex relaxation with a new algorithm is proposed. The algorithm is iterative with exact projections. A new algorithm is given for a relaxation that is convex in each variable but that is not convex globally. We study the problem of constructing a solution of the original non-convex problem with a solution of the relaxed problem. We compare existing methods with new ones.