



Structures produits sur la filtration par le poids des variétés algébriques réelles

Thierry Limoges

► To cite this version:

Thierry Limoges. Structures produits sur la filtration par le poids des variétés algébriques réelles. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2015. Français. NNT : 2015NICE4001 . tel-01160153

HAL Id: tel-01160153

<https://theses.hal.science/tel-01160153>

Submitted on 4 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

Discipline : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par
Thierry LIMOGES

Structures produits sur la filtration par le poids des variétés algébriques réelles

Thèse dirigée par Adam PARUSIŃSKI et Goulwen FICHO
soutenue le 10 mars 2015

devant le jury composé de :

M. CHATAUR David Université de Lille 1	Maître de conférences, HDR	Rapporteur
M. FICHO Goulwen Université de Rennes 1	Maître de conférences, HDR	Codirecteur de thèse
M. KURDYKA Krzysztof Université de Savoie	Professeur	Examineur
M. MAISONOBE Philippe Université de Nice-Sophia Antipolis	Professeur	Examineur
M. MCCRORY Clint University of Georgia États-Unis	Professeur	Rapporteur
M. PARUSIŃSKI Adam Université de Nice-Sophia Antipolis	Professeur	Directeur de thèse
M. PRIZIAC Fabien Université d'Aix-Marseille	Maître de conférences	Examineur

Remerciements

Me voici arrivé au moment d'écrire les dernières lignes de ce manuscrit.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Adam Parusiński et Goulwen Fichou, pour m'avoir orienté et guidé sur le chemin de la géométrie réelle. Ce domaine des mathématiques m'a passionné et je suis heureux d'avoir pu apporter un grain de sable sur cette montagne.

Merci également à Fabien Priziac, pour nos discussions constructives, qui ont permis de lever les difficultés techniques sur certains points mathématiques.

Merci à David Chataur et Clint McCrory d'avoir accepté de rapporter cette thèse, à Krzysztof Kurdyka d'avoir accepté de se déplacer pour la soutenance, ainsi qu'à Philippe Maisonobe pour sa participation en tant que membre du jury.

Merci à ma famille et mes amis, dont le soutien m'a donné l'énergie de terminer ce travail. Merci en particulier à ma soeur qui me fournit des solutions informatiques fiables depuis de nombreuses années.

Merci à l'École Normale Supérieure de Cachan pour m'a accordé une allocation pour préparer cette thèse.

Je ne saurais énumérer l'ensemble des personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à développer mon goût pour les mathématiques pendant ma scolarité. Enseignants et chercheurs ont, par des cours des discussions, éveillé ma curiosité pour cette matière. À tous, merci également.

Enfin, dans une actualité difficile de janvier 2015, je mesure ma chance d'avoir travaillé une science qui a traversé l'histoire, les lieux, les politiques et les religions.

Introduction

L'intérêt historiquement porté aux objets géométriques du plan ou de l'espace, dont les coordonnées vérifient des équations ne faisant intervenir que des sommes et des produits de coordonnées, a conduit aux premières définitions de la géométrie algébrique. Par exemple, dans le plan muni d'un repère orthonormé, le cercle de centre l'origine O et de rayon 1 est caractérisé par l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$. C'est l'égalité que doivent vérifier les coordonnées (x, y) d'un point M pour être sur ce cercle. Les droites, coniques, sphères, tores peuvent également être caractérisés par de telles équations algébriques.

Pour un ensemble, le fait d'être les racines d'un polynôme en les coordonnées ne dépend pas du système de coordonnées choisi, car en composant un polynôme avec une application affine on obtient encore un polynôme.

La géométrie analytique autorise des définitions plus générales que les polynômes, comme le développement en séries entières. La sinusoïde $y - \sin x = 0$ est une courbe analytique, mais pas algébrique. En effet, si elle l'était, son intersection $\sin x = 0$ avec l'axe des abscisses $y = 0$ serait également algébrique, mais cette courbe contient une infinité de points, ce qui contredit que $\sin x$ est un polynôme d'une variable.



On verra que la rigidité de la géométrie algébrique permet d'utiliser des propriétés fortes de ses objets, alors que la géométrie analytique est plus souple.

Les équations algébriques, initialement regardées dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, peuvent se généraliser à $\mathbb{R}^n$, ou d'autres corps k .

Les corps algébriquement clos sont ceux dont tous les polynômes d'une variable ont au moins une racine. C'est le cas de $\mathbb{C}$, mais pas de $\mathbb{R}$. Le polynôme $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de racine réelle, il *manque* des points, ici l'intersection de la parabole $y - x^2 - 1 = 0$ avec l'axe des abscisses $y = 0$. C'est le cas d'autres paires d'objets géométriques réels, qui ne s'intersectent pas dans $\mathbb{R}^2$, mais dans $\mathbb{C}^2$.

Lorsque l'on travaille sur un corps algébriquement clos, on dispose d'outils comme le théorème des zéros (*Nullstellensatz*). Dans un cadre bien choisi, le théorème de Bézout permet de compter les points d'intersections de deux courbes algébriques.

Une sous-variété algébrique affine de k^n est un sous-ensemble de k^n qui est le lieu d'annulation commun d'un certain nombre de polynômes à n variables et à coefficients dans k . On la

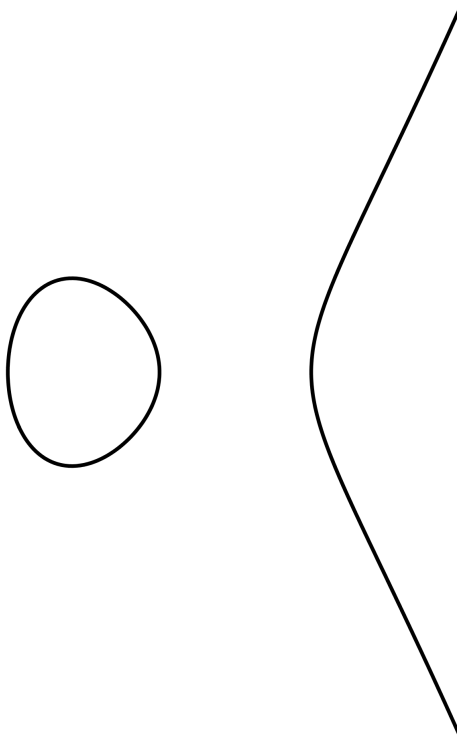
note $Z(f_i, i \in I)$ où $f_i \in k[X_1, \dots, X_n]$. Dans le cas d'un corps algébriquement clos, le *Nullstellensatz* donne une correspondance bijective entre les sous-variétés algébriques affines de k^n et les idéaux réduits de $k[X_1, \dots, X_n]$. Cet anneau étant noethérien, une variété affine est toujours le lieu d'annulation commun d'un nombre fini de polynômes, et se décompose de manière unique en une union de sous-variétés algébriques irréductibles. Ces propriétés permettent de définir la topologie de Zariski, qui est noéthérienne.

Sur une variété algébrique affine X , les fonctions régulières sont les fonctions polynomiales sur X à valeurs dans k , modulo celles identiquement nulles sur X . L'ensemble des fonctions régulières est isomorphe à la k -algèbre réduite de type fini $k[X_1, \dots, X_n]/I$ où I est l'idéal réduit associé à la variété X .

En transportant une variété algébrique affine avec son anneau de fonctions régulières sur un espace topologique, avec des recollements adéquats, on obtient les variétés algébriques.

Les variétés analytiques réelles sont des espaces topologiques localement isomorphes à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ munis des fonctions localement développables en séries entières. Ces ouverts sont relatifs à la topologie forte de $\mathbb{R}^n$, beaucoup plus fine que celle de Zariski. Ce cadre est beaucoup plus souple que celui de la géométrie algébrique.

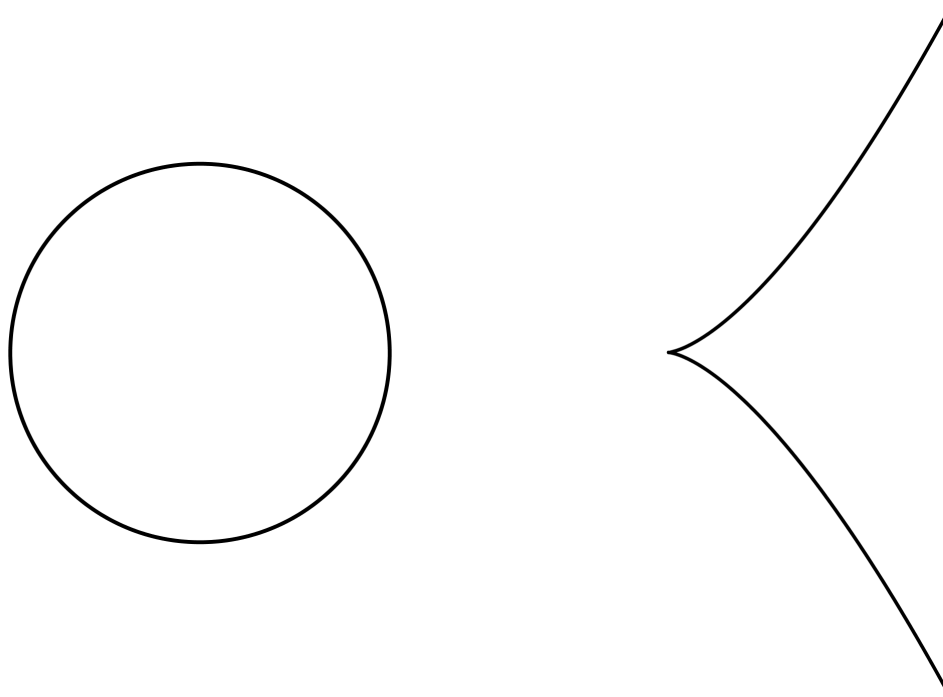
En géométrie algébrique complexe, les composantes irréductibles d'une variété algébrique sont connexes. Ce n'est pas le cas en géométrie algébrique réelle, comme le montre la cubique lisse irréductible $y^2 = x^3 - x$. Pour palier ce manque de souplesse, K. Kurdyka a introduit les sous-ensembles symétriques par arcs de $\mathbb{R}^n$. Ils sont en un certain sens *engendrés* par les composantes connexes des ensembles algébriques.



Un sous-ensemble symétrique par arcs de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble qui intersecte les arcs analytiques de $\mathbb{R}^n$ en un nombre fini de points ou les contient entièrement. Pour tenir compte des points à l'infini, on considère plutôt les sous-ensembles symétriques par arcs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Cette notion se transporte sur les variétés réelles par les cartes. Les ensembles $\mathcal{AS}$ sont une classe d'ensembles proche de celle des ensembles algébriques, bien que vivant dans les ensembles analytiques.

Les notions de lissité et de singularités empruntées à la géométrie différentielle ont leur propre sens en géométrie algébrique. Le *cusp* $y^2 - x^3 = 0$, paramétrable par $t \mapsto (t^2, t^3)$ est une courbe régulière pour $t \neq 0$, et possède un point de rebroussement en $t = 0$. Le point $(0, 0)$ est singulier.

Pour les courbes planes d'équation $f(x, y) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème des fonctions implicites s'applique en un point (x_0, y_0) vérifiant $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. On peut alors localement écrire le lieu $f(x, y) = 0$ comme le graphe $y = \varphi(x)$ d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut écrire $x = \psi(y)$. Par exemple, le cercle unité $x^2 + y^2 - 1 = 0$ au point $(0; 1)$ peut s'écrire $y = \sqrt{1 - x^2}$. Dans ce cas la fonction φ est explicite. Cependant, le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas au cusp au point $(0, 0)$.



Les points singuliers pour une courbe algébrique plane sont ceux pour lesquels toutes les différentielles s'annulent en ce point, on ne peut pas a priori appliquer le théorème des fonctions implicites. Cela se généralise à plusieurs fonctions en dimension plus grande par des conditions sur la matrice jacobienne, et peut aussi se lire sur les dimensions de Krull d'anneaux de fonctions régulières. La différentiation et les déterminants étant des opérations polynomiales en les variables, l'ensemble des points singuliers est algébrique.

La géométrie algébrique permet des opérations comme les éclatements. Par exemple, l'éclatement d'un point N dans S^2 est $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On a remplacé N par l'ensemble des directions qui arrivent sur N , c'est $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. En recollant ce diviseur exceptionnel $E = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à $S^2 \setminus \{N\}$, on obtient un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Cette opération est algébrique, et fournit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \longrightarrow & S^2 \end{array}$$

Une telle opération existe pour l'éclatement d'une sous-variété Y d'une variété algébrique X . Dans le carré ci-dessus, la restriction de $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$ est un isomorphisme entre ces deux ouverts. C'est une propriété d'additivité.

Les éclatements sont des opérations qui ont permis d'obtenir, pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique nulle, la résolution des singularités (1964), les hyperrésolutions cubiques (1988), le théorème de factorisation faible (2002). Ces théorèmes ont eu de nombreuses applications en géométrie algébrique.

La résolution des singularités pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique nulle a été prouvée par Hironaka ([14]). Pour X une telle variété, il existe une application birationnelle $X' \longrightarrow X$ avec X' lisse, qui est une composée d'éclatements le long de sous-variétés lisses.

Les hyperrésolutions cubiques, construites par Guillén et Navarro-Aznar ([10], [11]), sont des diagrammes faisant intervenir des applications birationnelles, comme les éclatements, et des décompositions en composantes irréductibles. Comme pour le carré obtenu par un éclatement, ces diagrammes ont des propriétés d'acyclicité, au sens des faisceaux.

Le théorème de factorisation faible, prouvé par D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk ([1]) permet d'écrire une application birationnelle φ entre deux variétés algébriques X et X' sur un corps de caractéristique nulle comme composée d'éclatements, ou d'inverses d'éclatements, chaque centre étant disjoint du lieu singulier de X , X' et f .

Les variétés algébriques fournissent de nombreux exemples d'espaces topologiques. La topologie est l'étude de la forme des objets. L'homologie et la cohomologie classiques sont des algèbres associées à des espaces topologiques contenant des informations sur leur forme. Ce sont des invariants par homéomorphisme. On peut en extraire un invariant additif pour les inclusions fermées, la caractéristique d'Euler à support compact χ_c . Les variétés algébriques possédant une structure beaucoup plus rigide que les espaces topologiques, il est raisonnable d'espérer avoir pour cette catégorie un invariant additif plus fin que χ_c , et que leurs homologie et cohomologie contiennent également une structure supplémentaire.

Dans le cas des variétés algébriques réelles, C. McCrory et A. Parusiński utilisent ces espaces de cohomologie et le théorème de factorisation faible pour construire des invariants plus fins que χ_c , le polynôme de Poincaré virtuel β ([19]), étendu aux ensembles symétriques par arc par G. Fichou ([12]).

Dans le cadre des variétés algébriques complexes, P. Deligne a développé la théorie de Hodge ([8]), qui a permis d'obtenir des invariants additifs grâce à la filtration par le poids sur la cohomologie à supports compacts $H_c^*(X, \mathbb{Q})$ d'une variété algébrique complexe X .

L'existence d'une filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles est annoncée par B. Totaro dans [25], puis construite par C. McCrory et A. Parusiński dans [21]. C. McCrory et A. Parusiński utilisent un théorème d'extension de foncteurs de [11], s'appuyant sur les hyperrésolutions cubiques, pour construire un complexe de chaînes filtrés, et une suite spectrale $(\widetilde{E}^r)$, définie pour $r \geq 2$. Cette suite spectrale converge vers l'homologie de Borel-Moore à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, $H_*^{BM}(X)$. Le terme E^∞ de cette suite spectrale contient la filtration par le poids $\mathcal{W}H_*^{BM}(X)$.

Cette suite spectrale est un analogue de la suite spectrale de Deligne ([8]) pour les variétés complexes et la cohomologie à supports compacts et à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Dans le cadre des variétés complexes, la suite spectrale dégénère au terme 2. Cette page de la suite spectrale contient alors à la fois les propriétés additives et la filtration par le poids. Pour les variétés réelles lisses et compactes, la suite spectrale dégénère au terme 2, mais ce n'est pas le cas en général. C'est le terme $\widetilde{E}^2$ de la suite spectrale qui possède les propriétés d'additivité et permet de reconstruire le polynôme de Poincaré virtuel, le terme E^∞ n'étant pas additif en général, en un sens naturel (exemple 3.3 de [19]).

Dans [21], C. McCrory et A. Parusiński construisent également une filtration géométrique $\mathcal{G}C_*$ sur le complexe de chaînes semi-algébriques à supports fermés $C_*(X)$, un complexe qui calcule l'homologie de Borel-Moore $H_*^{BM}(X)$. Comme toute filtration sur un complexe, celle-ci induit une suite spectrale E^r qui, à une renumérotation près, correspond à la suite spectrale obtenue par les hyperrésolutions cubiques, et qui dans ce cadre est définie une page plus tôt. Ce point de vue géométrique, avec des ensembles semi-algébriques, permet d'étendre la filtration par le poids à la catégorie $\mathcal{X}_{AS}$ des ensembles symétriques par arcs, en utilisant les fonctions constructibles. L'invariance de la suite spectrale associée sous homéomorphisme AS , c'est-à-dire avec graphe AS , montre que le polynôme de Poincaré virtuel est invariant sous cette classe d'applications.

Dans cette thèse, on construit la filtration par le poids sur la cohomologie à supports compacts d'une variété réelle, qui se trouve être duale à la filtration sur l'homologie de Borel-Moore. Cette filtration s'étend également à la catégorie $\mathcal{X}_{AS}$. On étudie le comportement de la filtration par le poids vis-à-vis de structures comme le produit de variétés réelles, les produits *cup* et *cap* sur l'homologie $H_*^{BM}(X)$ et la cohomologie $H_c^*(X)$ à supports de X . Les produits *cup* et *cap* de classes de chaînes et de cochaînes sur les espaces $H_*^{BM}(X)$ et $H_c^*(X)$ ont des propriétés vis-à-vis des filtrations, qui se lisent sur le terme E^∞ de la suite spectrale. Ces produits peuvent être définis plus en amont sur la suite spectrale, à partir de la page $E^1 \cong \widetilde{E}_2$, c'est-à-dire sur les chaînes à quasi-isomorphisme près.

Dans le premier chapitre, on rappelle des définitions et propriétés de l'homologie et cohomologie singulière des espaces topologiques. Sous certaines hypothèses sur ces espaces topologiques, comme la séparation, la compacité locale, la triangulation, ces homologies et cohomologies peuvent être calculées avec d'autres complexes que celui des chaînes singulières. Nous utilisons ces notions pour des sous-ensembles semi-algébriques de variétés algébriques réelles, qui vérifient ces hypothèses.

Dans le second chapitre, on définit les objets filtrés et les suites spectrales dans la catégorie des $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels ([8], §1 et §3), ainsi que les suites spectrales associées aux complexes

de tels objets filtrés. Le décalage de Deligne, qui est une opération sur les suites spectrales, permet d'obtenir des isomorphismes entre deux suites spectrales, comme l'illustre l'exemple de la filtration triviale et de la filtration canonique. La suite spectrale d'un complexe double sera également utilisée dans le chapitre 5.

Le troisième chapitre traite de nombreuses propriétés et objets spécifiques à la géométrie algébrique réelle. Les ensembles semi-algébriques et symétriques par arcs sont liés aux fonctions constructibles et Nash-constructibles ([6], [16]). On suit [19] pour construire le polynôme de Poincaré virtuel β . C'est un invariant additif pour les isomorphismes algébriques, mais pas pour les homéomorphismes en général. Enfin on détaille la construction du complexe de chaînes semi-algébriques à supports fermés $C_*(X)$, qui est un point clé de la construction de la filtration par le poids de [21], et du chapitre 5.

Dans le quatrième chapitre, on énonce un résultat de Hironaka concernant la résolution des singularités sur un corps de caractéristique zéro ([14]). On reformule le théorème d'extension d'un foncteur de Guillén et Navarro-Aznar ([11]) dans le cadre de la géométrie algébrique réelle et des complexes de $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels, qui est celui utilisé dans le chapitre 5.

Le chapitre 5 est le coeur de cette thèse. Il utilise en partie les notions et résultats des quatre premiers chapitres.

Dans la partie 2 on fixe le cadre et les catégories dans lesquelles on va travailler, en particulier appliquer un théorème d'extension de foncteurs de Guillén et Navarro-Aznar (2.2.2 de [11]), ce qui nécessite le langage des schémas.

Dans la partie 3, on développe la théorie de la filtration par le poids sur la cohomologie à supports compacts $H_c^*(X)$ d'une variété algébrique réelle X , en adaptant la méthode de McCrory et Parusiński dans [21]. Cette méthode utilise un théorème de Guillén et Navarro-Aznar ([11]) reposant sur les hyperrésolutions cubiques. On doit choisir un complexe de cochaînes adapté $C^*(X)$, qui calcule $H_c^*(X)$ et qui vérifie la propriété d'additivité pour les inclusions fermées $Y \subset X$:

$$0 \longrightarrow C^*(X \setminus Y) \longrightarrow C^*(X) \longrightarrow C^*(Y) \longrightarrow 0$$

On obtient l'existence, mais surtout l'unicité de cette filtration par le poids, à valeurs dans une certaine catégorie localisée.

Dans la partie 4, on construit une filtration sur un complexe de cochaînes $\mathcal{G}C^*(X)$, qui représente la filtration par le poids précédemment obtenue avec le théorème d'extension de Guillén et Navarro-Aznar. On retrouve l'existence de la filtration par le poids cohomologique, mais définie plus en amont du point de vue des suites spectrales. Ce résultat est obtenu en dualisant la construction géométrique de la filtration par le poids sur le complexe de chaînes semi-algébriques $\mathcal{G}C_*(X)$, ainsi que la construction via les fonctions Nash-constructibles de [21]. Cette filtration $\mathcal{G}C^*(X)$ s'étend à la catégorie $\mathcal{X}_{AS}$ des ensembles symétriques par arcs. La filtration sur ce complexe de cochaînes $C^*(X)$ vérifie des propriétés d'additivité similaires à celles pour les chaînes, avec des suites exactes courtes (lemme 5.4.2) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}C^*(X \setminus Y) \longrightarrow \mathcal{G}C^*(X) \longrightarrow \mathcal{G}C^*(Y) \longrightarrow 0$$

On démontre que la suite spectrale associée E_r est duale à la suite spectrale de poids homologique E^r définie dans [21] : pour $r \geq 0$,

$$E_r^{p,q} \cong (E_{p,q}^r)^\vee$$

Dans la partie 5, on étudie le comportement de ces filtrations par le poids, homologique et cohomologique, par rapport au produit des variétés. Un des résultats clés est que la suite spectrale associée à un *cross* produit $X \times Y$ de variétés X et Y est isomorphe au produit tensoriel des suites spectrales de chaque variété. Pour $r \geq 1$,

$$u'_r : \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_{p,q}^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} E_{s,t}^r(Y) \xrightarrow{\sim} E_{a,b}^r(X \times Y)$$

est un isomorphisme. Comme conséquence on obtient une manière différente de démontrer la multiplicativité du polynôme de Poincaré virtuel ([19]) sans recourir au théorème de factorisation faible :

$$\beta(X \times Y)(u) = \beta(X)(u)\beta(Y)(u).$$

Avant d'obtenir les isomorphismes de suites spectrales, il a fallu définir les morphismes au niveau des chaînes (paragraphe 5.5.1). Les produits de chaînes, de cochaînes et de suites spectrales sont définis de manière naturelle, mais des considérations sur la compatibilité avec l'opérateur de bord ont été nécessaires pour avoir un morphisme de complexes de $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels (lemmes 5.5.2 et 5.5.4). La démonstration du théorème 5.5.15, dont l'énoncé dit que

$$u : \mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y)$$

est un quasi-isomorphisme filtré, repose sur l'unicité de la filtration par le poids pour les variétés algébriques réelles (Théorème 1.1 de [21]), au sens d'isomorphisme de foncteurs. En particulier, il n'est pas prouvé ici que cet isomorphisme reste vrai pour la catégorie $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$ des ensembles symétriques par arcs.

Des résultats similaires sont obtenus pour la filtration par le poids cohomologique, cependant le quasi-isomorphisme de complexes de cochaînes filtrés n'est pas obtenu comme localisation d'un seul morphisme de complexes filtrés, comme c'est le cas pour les chaînes, mais comme composé des localisations de deux flèches en sens opposés l'une de l'autre (preuve du corollaire 5.5.20) : les flèches $u^\vee$ et w définies par

$$u^\vee : \begin{array}{ccc} (C_*(X \times Y))^\vee & \longrightarrow & (C_*(X) \otimes C_*(Y))^\vee \\ \eta & \longmapsto & \left[\sum_i c_{X,i} \otimes c_{Y,i} \longmapsto \sum_i \eta(c_{X,i} \times c_{Y,i}) \right] \end{array}$$

et

$$w : \begin{array}{ccc} (C_*(X))^\vee \otimes (C_*(Y))^\vee & \longrightarrow & (C_*(X) \otimes C_*(Y))^\vee \\ \varphi \otimes \psi & \longmapsto & \left[\sum_i c_{X,i} \otimes c_{Y,i} \longmapsto \sum_i \varphi(c_{X,i}) \cdot \psi(c_{Y,i}) \right] \end{array}$$

sont des quasi-isomorphismes de complexes de cochaînes filtrés, et le diagramme

$$(C_*(X \times Y))^\vee \xrightarrow{u^\vee} (C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} C_*(Y))^\vee \xleftarrow{w} (C_*(X))^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_2} (C_*(Y))^\vee,$$

se localise en un isomorphisme, ce qui montre que $\mathcal{G}_\bullet C^*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C^*(Y)$ et $\mathcal{G}_\bullet C^*(X \times Y)$ sont quasi-isomorphes.

L'intérêt principal de considérer la cohomologie est qu'elle a une structure enrichie par rapport à l'homologie, le produit *cup*. On construit un tel produit (paragraphe 5.5.4) sur le complexe filtré $\mathcal{G}^\bullet C^*(X)$, toujours défini à quasi-isomorphisme près :

$$\smile = \Delta^* \circ (u^\vee)^{-1} \circ w : \mathcal{G}^\bullet C^*(X) \otimes \mathcal{G}^\bullet C^*(X) \xrightarrow{(u^\vee)^{-1} \circ w} \mathcal{G}^\bullet C^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} \mathcal{G}^\bullet C^*(X)$$

où Δ désigne l'application diagonale

$$\Delta : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \times X \\ x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

Cette définition du produit *cup* sur $\mathcal{G}^\bullet C^*(X)$ induit le produit *cup* classique sur la cohomologie à supports compacts $H_c^*(X)$ (proposition 5.5.22). Des propriétés de la filtration par le poids montrent des obstructions sur l'image du produit *cup* pour une variété algébrique réelle X donnée : au niveau des suites spectrales, on a

$$\smile'_r : \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_r^{p,q}(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} E_r^{s,t}(X) \longrightarrow E_r^{a,b}(X)$$

Pour définir le produit *cap* entre des chaînes et des cochaînes à partir du produit *cup* (paragraphe 5.5.5), on utilise la relation $\psi(\varphi \frown c) = (\psi \smile \varphi)(c)$, et le fait que les $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels apparaissant dans les suites spectrales E^r et E_r pour $r \geq 1$ sont de dimension finie. Ceci permet de définir le produit *cap* entre des représentants des complexes filtrés $\mathcal{G}^\bullet C^*(X)$ et $\mathcal{G}_\bullet C_*(X)$, à valeurs dans $\mathcal{G}^\bullet C^*(X)$, toujours à quasi-isomorphisme près. Ce produit se décline sur les suites spectrales en

$$\frown'_r : \bigoplus_{s-p=a, t-q=b} E_r^{p,q}(X) \otimes E_{s,t}^r(X) \longrightarrow E_r^{a,b}(X)$$

ce qui fournit des obstructions équivalentes sur le produit *cap*. Cette définition induit bien le produit *cap* classique sur la cohomologie à supports compacts et l'homologie de Borel-Moore

$$\frown : H_c^*(X) \otimes H_*^{BM}(X) \longrightarrow H_c^*(X)$$

Pour X compacte, on peut considérer l'application D de *dualité de Poincaré* (paragraphe 5.5.6), qui associe à une classe de cohomologie φ de $H^*(X)$ son produit *cap* $\varphi \frown [X]$ avec la classe fondamentale de X . Cette application D coïncide avec l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} H^k(X) & \longrightarrow & H_{n-k}(X) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \frown [X] \end{array}$$

de dualité de Poincaré lorsque X est aussi lisse. Comme la classe fondamentale $[X]$ d'une variété compacte est une chaîne pure, c'est-à-dire $[X] \in \mathcal{G}_{-n} C_n(X)$, l'application D induit sur les suites spectrales

$$D_r^{s,t} := \cdot \frown [X] : \begin{array}{ccc} E_r^{s,t}(X) & \longrightarrow & E_{-n-s, 2n-t}^r(X) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \frown [X] \end{array}$$

ce qui montre que le noyau de D contient les classes de cochaînes non-pures (celles de poids non minimal), et que l'image de D est incluse dans les classes de chaînes pures (celles de poids minimal). Sur l'homologie et cohomologie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D(H^k(X)) \subset \mathcal{W}_{k-n} H_{n-k}(X)$$

et, si $p > -k$,

$$D(\mathcal{W}^p H^k(X)) = 0.$$

Cependant ces inclusions ne sont pas des égalités en général (Remarque 5.5.28). Ce résultat apporte en particulier des obstructions pour une variété réelle à vérifier la dualité de Poincaré.

Le chapitre 6 est consacré au calcul de filtrations par le poids sur des exemples. On utilise des hyperrésolutions cubiques dans des cas relativement simples (résolution des singularités, décomposition en composantes irréductibles, carrés acycliques dans la catégorie $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$). Les exemples 6.1 et 6.2 sont homéomorphes, mais non algébriquement isomorphes puisque de filtrations par le poids distinctes. Il en est de même pour les exemples 6.5 et 6.6. Les exemples 6.3 et 6.4 ont même (co)homologies et filtration par le poids (pure), mais ne sont pas homéomorphes d'après la structure produit sur leur cohomologie. Les exemples 6.7, 6.8, 6.9, 6.10 sont calculés en appliquant les résultats sur les produits (Théorème 5.5.19 et formule 5.5.3, rappelée dans la remarque 6.6.1). Les exemples 6.11 et 6.12 sont calculés en se ramenant aux exemples précédents avec un carré acyclique. L'exemple 6.13 est obtenu grâce à une hyperrésolution cubique de taille 3, par décomposition et inclusion de composantes irréductibles. Les exemples 6.1, 6.2, 6.14, 6.15 et 6.16 proviennent de [19]. En particulier la filtration par le poids de 6.16 est calculée en supposant que celle-ci existe. C'est un exemple de variété algébrique réelle pour laquelle la suite spectrale de poids ne dégénère pas à l'ordre 2.

Table des matières

1	Topologie	17
1.1	Chaînes et homologie singulières	17
1.1.1	Chaînes singulières	17
1.1.2	Homologie relative	18
1.2	Cohomologie et supports	19
1.3	Coefficients	19
1.4	Produits en homologie et cohomologie	20
1.4.1	Produit <i>cup</i>	20
1.4.2	Produit <i>cap</i>	20
1.4.3	Produit <i>cross</i>	20
1.4.4	Liens par les formules	21
1.5	Caractéristique d'Euler à support compact	21
1.6	Dualité	21
2	Objets filtrés et suites spectrales	23
3	Géométrie réelle	29
3.1	Variétés algébriques réelles	29
3.2	Ensembles semi-algébriques	30
3.3	Fonctions constructibles	31
3.3.1	Fonctions semi-algébriquement constructibles et opérateurs	31
3.3.2	Fonctions algébriquement constructibles	33
3.3.3	Fonctions Nash-constructibles	34
3.4	Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs	35
3.5	Le polynôme de Poincaré virtuel	39
3.5.1	Exemples	42
3.6	Chaînes semi-algébriques et homologie de Borel-Moore	43
3.6.1	Chaînes semi-algébriques	43
3.6.2	Filtration Nash-constructible	46
4	Résolution des singularités et hyperrésolutions cubiques	49
4.1	Résolution des singularités	49
4.2	Hyperrésolutions cubiques	50

4.3	Théorème de Guillén Navarro-Aznar	50
5	Cohomology and products of real weight filtrations	53
5.1	Introduction	53
5.2	Framework	55
5.2.1	Filtered cochain complexes	55
5.2.2	Real algebraic varieties	56
5.2.3	Semialgebraic chain and cochain complexes	56
5.3	Cohomological weight complex	57
5.3.1	The construction of the cohomological weight complex	60
5.3.2	Cohomological weight filtration	62
5.3.3	Cohomological weight spectral sequence and virtual Betti numbers . . .	63
5.3.4	Cohomological weight complex, cubical hyperresolutions and the Deligne shift	65
5.4	The dual geometric filtration	67
5.4.1	Definition	68
5.4.2	Realization of the cohomological weight complex	69
5.5	Weight filtrations and products	71
5.5.1	Product of semialgebraic chains	72
5.5.2	Product and geometric filtration	75
5.5.3	Product and cohomological weight complex	83
5.5.4	Cup product	85
5.5.5	Cap product	86
5.5.6	Weight filtrations and Poincaré duality map	88
6	Exemples de filtrations par le poids	91
6.1	La figure « huit »	92
6.2	Les deux cercles tangents $S^1 \vee S^1$	93
6.3	Le tore $\mathcal{T}$	94
6.4	La sphère à deux oreilles $S^1 \vee S^2 \vee S^1$	95
6.5	Le tore pincé	96
6.6	Le tore-sphère	97
6.7	Le « huit » $\times S^1$	97
6.8	Le « huit » $\times$ « huit »	98
6.9	Le « huit » $\times$ « deux cercles tangents »	98
6.10	Le « deux cercles tangents » $\times$ « deux cercles tangents »	99
6.11	Le « huit » $\times S^1$ pincé	99
6.12	Le « deux cercles tangents » $\times S^1$ pincé	100
6.13	L'union de trois sphères à croisements normaux	101
6.14	Les deux ellipses	102
6.15	Les deux cercles bitangents	103
6.16	Les deux sphères et le tore à croisements normaux	105
6.17	Annexe : code source pour les dessins avec POV-Ray	106

Chapitre 1

Topologie

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions et des propriétés de l'homologie et cohomologie singulière des espaces topologiques. Sous certaines hypothèses sur ces espaces, comme la séparation, la compacité locale, ou la triangulation, leurs homologies et cohomologies peuvent être calculées avec d'autres complexes que celui des chaînes singulières. Nous utiliserons ces notions pour des sous-ensembles semi-algébriques de variétés algébriques réelles, qui vérifient ces hypothèses.

1.1 Chaînes et homologie singulières

1.1.1 Chaînes singulières

Le n -simplexe standard est l'ensemble

$$\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 + \dots + t_n = 1 \text{ et } t_i \geq 0 \text{ pour tout } i\}$$

C'est l'enveloppe convexe de ses sommets $v_0, \dots, v_n$; on le note aussi $[v_0, \dots, v_n]$.

On appelle $i^{\text{ième}}$ face $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ l'enveloppe convexe de tous les sommets sauf v_i .

Soit X un espace topologique. Un n -simplexe standard est une application continue

$$\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$$

Les n -chaînes singulières sont les éléments de $C_n(X)$, le groupe abélien libre engendré par les n -simplexes standards.

On appelle $n^{\text{ième}}$ bord l'application $\partial : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ définie par

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$$

où $\sigma|[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ est une application $\Delta_{n-1} \longrightarrow X$, c'est la restriction de σ à sa $i^{\text{ième}}$ face.

Les bords vérifient

$$\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$$

On obtient un complexe différentiel $(C_*(X), \partial)$. Son homologie est définie par

$$H_n(X) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n-1}}$$

Ces notions sont fonctorielles : pour $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, on a un *push-forward* sur les chaînes

$$f_* : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y), \quad \sigma \longmapsto f \circ \sigma$$

compatible avec le bord, qui induit un *pushforward* sur l'homologie

$$f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$$

Pour $g : Y \longrightarrow Z$,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

$$(\operatorname{id}_X)_* = \operatorname{id}_{H_*(X)}$$

1.1.2 Homologie relative

Soit $A \subset X$ un sous-ensemble. L'inclusion

$$i : A \hookrightarrow X$$

induit

$$i_* : C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$$

Les groupes

$$C_n(X, A) = \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

peuvent être munis du bord de $C_*(X)$, et forment le complexe $C_*(X, A)$ des *chaînes relatives*. Son homologie $H_*(X, A)$ est appelée *homologie relative*, et vérifie également des propriétés de fonctorialité.

Lemme 1.1.1. *Lemme du serpent.*

Soient

$$0 \longrightarrow A_* \longrightarrow B_* \longrightarrow C_* \longrightarrow 0$$

une suite exacte de complexes. On a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(B) \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Dans notre cas ce lemme du serpent s'applique à la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C_*(A) \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow C_*(X, A) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

1.2 Cohomologie et supports

Les *cochaînes singulières* sont les éléments des groupes

$$C^n(X) = \text{Hom}(C_n(X), \mathbb{Z})$$

Ces groupes sont munis de la différentielle $\delta : \varphi \mapsto \varphi \circ \partial$, qui en fait un complexe, et permet de définir la cohomologie de X .

On a la notion de cohomologie des paires, de cohomologie relative, qui sont fonctorielles.

Une cochaîne $\varphi \in C^n(X)$ est dite à *support compact* s'il existe un compact $K \subset X$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour toute chaîne $x \in C_n(X \setminus K)$.

On note $C_c^n(X)$ les chaînes de $C^n(X)$ à support compact. Ce sont des groupes compatibles avec la différentielle. La cohomologie du complexe $(C_c^*(X), \delta)$ est notée $H_c^*(X)$ et est appelée *cohomologie à supports compacts de X* . On a une fonctorialité contravariante pour les applications continues et propres.

Pour les espaces triangulés, la cohomologie à support compacts s'écrit aussi grâce à une compactification ouverte $X \hookrightarrow \overline{X}$ de X :

$$H_c^*(X) \cong H^*(\overline{X}, \overline{X} \setminus X)$$

Dans les paragraphes suivants, nous travaillons avec les coefficients dans le corps $\mathbb{Z}_2$. Dans ce cas, l'homologie de Borel-Moore est isomorphe au dual de la cohomologie à support compacts ([5], Théorème 3.3 a).

$$H_*^{BM}(X) \cong \text{Hom}(H_c^*(X), \mathbb{Z}_2)$$

Dans ces cas, on peut exprimer l'homologie de Borel-Moore grâce à une compactification ouverte $X \hookrightarrow \overline{X}$ de X .

$$H_*^{BM}(X) \cong H_*(\overline{X}, \overline{X} \setminus X)$$

Ces groupes sont indépendants de la compactification ouverte choisie.

1.3 Coefficients

On a évoqué de l'homologie $H_*(C)$ d'un complexe C à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ces notions existent plus généralement pour des coefficients dans un groupe abélien G , ce qui revient à prendre l'homologie $H_*(C, G)$ du complexe $C \otimes G$. On peut comparer ces deux objets grâce au foncteur Tor (Théorème des coefficients universels, [13], Théorème 3.A.3 et Proposition 3.A.5). La suite suivante est exacte

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \longrightarrow H_n(C, G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow 0$$

En pratique nous utilisons comme coefficients le corps $\mathbb{Z}_2$, et d'après les propriétés du foncteur Tor, on a dans ce cas

$$\text{Tor}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}_2) \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}_2, H_{n-1}(X)) \cong \ker \left[H_{n-1}(X) \xrightarrow{2} H_{n-1}(X) \right]$$

où la dernière flèche est la multiplication par 2, c'est-à-dire l'addition deux fois dans le groupe $H_{n-1}(X)$.

1.4 Produits en homologie et cohomologie

Pour éviter tout problème de torsion on prendra $\mathbb{Z}_2$ comme corps de coefficients. Les produits *cup*, *cap* existent au niveau des chaînes singulières, et pas seulement sur leur homologie ou cohomologie. Le produit *cross* existe au niveau des chaînes cellulaires. Ces produits sont liés par des formules. Lorsque l'un d'eux est défini sur les espaces d'homologie ou cohomologie, s'ils sont de dimension finie, les formules permettent de retrouver les deux autres.

1.4.1 Produit *cup*

Pour $\varphi \in C^k(X)$ et $\psi \in C^l(X)$ on définit $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X)$ par

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma| [v_0, \dots, v_k]) \psi(\sigma| [v_k, \dots, v_{k+l}])$$

pour $\sigma \in C_{k+l}(X)$.

Le bord vérifie

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$$

Cette formule montre que le produit *cup* est bien défini sur la cohomologie

$$\smile : H^k(X) \times H^l(X) \longrightarrow H^{k+l}(X)$$

1.4.2 Produit *cap*

Pour $\sigma \in C_k(X)$ et $\varphi \in C^l(X)$ on définit $\sigma \frown \varphi \in C_{k-l}(X)$ par

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma| [v_0, \dots, v_l]) \sigma| ([v_l, \dots, v_k])$$

Le bord vérifie

$$\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^l \partial\sigma \frown \varphi + (-1)^{l+1} \sigma \frown \delta\varphi$$

Ainsi le produit *cap* est défini sur l'homologie et cohomologie de X

$$\frown : H_k(X) \times H^l(X) \longrightarrow H_{k-l}(X)$$

1.4.3 Produit *cross*

Le produit *cross* associe à une i -chaîne cellulaire e^i de X et à une j -chaîne cellulaire e^j de Y leur produit $e^i \times e^j$ dans $X \times Y$. Le bord vérifie

$$d(e^i \times e^j) = de^i \times e^j + (-1)^i e^i \times de^j$$

Ce produit induit un isomorphisme, appelé *formule de Künneth*

$$H_*(X) \otimes H_*(X) \cong H_*(X)$$

Plus précisément,

$$\bigoplus_{k+l=n} H_k(X) \otimes H_l(X) \cong H_n(X)$$

On a aussi l'isomorphisme dual en cohomologie

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \cong H^*(X)$$

1.4.4 Liens par les formules

On note $\Delta : X \longrightarrow X \times X$, $x \longmapsto (x, x)$ l'application diagonale, $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ et $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ les projections canoniques. On a

$$\begin{aligned}\sigma \times \tau &= (\pi_X)^*(\sigma) \smile (\pi_Y)^*(\tau) \\ \varphi \smile \psi &= \Delta^*(\varphi \times \psi) \\ \forall \psi \in H^{k-l}(X) \quad \psi(\sigma \frown \varphi) &= (\varphi \smile \psi)(\sigma)\end{aligned}$$

Dans certains cas ces produits respectent la compacité des supports, et sont définis entre $H_c^*(X)$ ou $H_*^{BM}(X)$.

1.5 Caractéristique d'Euler à support compact

Pour les sous-ensembles semi-algébriques de variétés algébriques réelles, la *caractéristique d'Euler à supports compacts* est définie par

$$\chi_c(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim H_c^i(X, \mathbb{Z}_2)$$

Elle vérifie, pour une inclusion fermée d'ensembles semi-algébriques $Y \subset X$

$$\chi_c(X) = \chi_c(Y) + \chi_c(X \setminus Y)$$

En effet, de tels ensembles peuvent être triangulés et on a

$$H_c^*(X \setminus Y) \cong H^*(X, Y)$$

La suite exacte longue de cohomologie des paires

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, Y) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^{n+1}(X, Y) \longrightarrow \cdots$$

induit un autre suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^n(X \setminus Y) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(Y) \longrightarrow H^{n+1}(X \setminus Y) \longrightarrow \cdots$$

1.6 Dualité

On se servira d'outils d'algèbre linéaire, comme les suites exactes et les produits tensoriels, ainsi que de l'effet de la dualité sur ceux-ci.

Pour une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{g_{n+1}} G_n \xrightarrow{g_n} G_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

c'est-à-dire vérifiant pour tout n

$$\ker g_n = \operatorname{img}_{n+1}$$

on pose

$$G'_n = \text{Hom}(G_n, \mathbb{Z}_2)$$

et

$$g'_n : G'_n \longrightarrow G'_{n+1}, \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ g_{n+1}$$

La suite

$$\cdots \longrightarrow G'_{n-1} \xrightarrow{g'_{n-1}} G'_n \xrightarrow{g_n} G'_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

est exacte : pour tout n ,

$$\ker g'_n = \text{img}'_{n-1}$$

En effet, $g'_n(\varphi) = 0$ si et seulement si φ s'annule sur img_{n+1} , donc

$$\ker g'_n \cong \text{Hom}\left(\frac{G_n}{\text{img}_{n+1}}\right)$$

L'image de g'_{n-1} est l'ensemble des formes linéaires s'écrivant $\varphi \circ g_n$ avec $\varphi \in G'_{n-1}$, or les formes se factorisant par g_n sont celles qui s'annulent sur $\ker g_n$. Ainsi

$$\text{img}'_{n-1} \cong \text{Hom}\left(\frac{G_n}{\ker g_n}\right)$$

Chapitre 2

Objets filtrés et suites spectrales

On suivra [8], §1 et §3. Dans ce paragraphe on travaille dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. En pratique on prendra la catégorie des complexes différentiels de $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels, où $\mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, ou celle des $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels (lorsqu'on en prendra l'homologie). On pourra parler de quotients.

Définition 2.0.1. ([8], Définitions 1.1.2 à 1.1.5)

Une *filtration décroissante* sur un objet A de $\mathcal{A}$ est une famille $(F^n(A))_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-objets de A vérifiant

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad n \leq m \implies F^m(A) \subset F^n(A)$$

On passe d'une filtration décroissante à une filtration croissante en prenant l'opposé des indices. Une filtration est dite *finie* s'il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $F^n(A) = A$ et $F^m(A) = 0$.

Un *morphisme d'objets filtrés* de (A, F) dans (B, F) est un morphisme $f : A \rightarrow B$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(F^n(A)) \subset F^n(B)$$

Un tel morphisme d'objets filtrés est dit *strict* si

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(F^n(A)) = F^n(B) \cap \text{im} f$$

Les objets et morphismes filtrés forment une catégorie additive.

Définition 2.0.2. *Filtrations induites sur un sous-objet et sur un quotient.* ([8], Définition 1.1.8)

Soit (A, F) un objet filtré et $j : X \hookrightarrow A$ un sous-objet de A .

La *filtration induite* par F sur X est

$$F^n(X) = F^n(A) \cap X$$

La *filtration quotient* sur $\frac{A}{X}$ est

$$F^n\left(\frac{A}{X}\right) = \frac{X + F^n(A)}{X} = \frac{F^n(A)}{X \cap F^n(A)}$$

Lemme 2.0.3. ([8], Définition 1.1.9)

Soient X et Y deux sous-objets de A avec $X \subset Y$. On a

$$\frac{Y}{X} \cong \ker \left[\frac{A}{X} \longrightarrow \frac{A}{Y} \right]$$

La filtration sur $\frac{Y}{X}$ coïncide avec celle induite par $\frac{A}{X}$.

Définition 2.0.4. Suite spectrale.

Une suite spectrale est une suite de complexes bigradués $(E_r^{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2, r \in \mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{A}$, où la différentielle d_r sur E_r est de degré $(r, -r+1)$:

$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

et où le terme E_{r+1} est la cohomologie du terme E_r :

$$E_{r+1}^{p,q} = H^* \left[E_r^{p-r, q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r, q-r+1} \right]$$

Définition 2.0.5. Complexes filtrés.

On appelle *complexe filtré* un complexe $F^\bullet C^*$ d'objets de $\mathcal{A}$ muni d'une filtration respectant le bord :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \delta(F^n C^*) \subset F^n C^*$$

La filtration F est dite *birrégulière* si elle est finie sur chaque composante de C .

Définition 2.0.6. Suite spectrale d'un complexe filtré. ([8], Définition 1.3.1)

Un complexe filtré définit une suite spectrale $(E_r)_{r \geq 0}$, où les différentielles

$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

sont induites par la différentielle δ du complexe. Le premier terme E_0 vérifie

$$E_0^{p,q} = \frac{F^p C^{p+q}}{F^{p+1} C^{p+q}}$$

et le terme E_{r+1} est la cohomologie du terme E_r :

$$E_{r+1}^{p,q} = H^* \left[E_r^{p-r, q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r, q-r+1} \right]$$

Il existe une définition directe des $E_r^{p,q}$ en posant :

$$Z_r^{p,q} = \ker \left[\delta : F^p C^{p+q} \longrightarrow \frac{C^{p+q+1}}{F^{p+r} C^{p+q+1}} \right]$$

et $B_r^{p,q}$ tels que

$$\frac{C^{p+q}}{B_r^{p,q}} = \text{coker} \left[\delta : F^{p-r+1} C^{p+q-1} \longrightarrow \frac{C^{p+q}}{F^{p+1} C^{p+q}} \right]$$

On a alors

$$\begin{aligned} E_r^{p,q} &= \text{im} \left[\begin{array}{c} Z_r^{p,q} \\ Z_r^{p,q} \end{array} \longrightarrow \frac{C^{p+q}}{Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}} \right] \\ &= \frac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}} \end{aligned}$$

On dit qu'une suite spectrale *dégénère* si les différentielles sont nulles à partir d'un certain rang. Les E_r , pour r assez grand, sont alors stationnaires, on les note E_∞ .

Dans le cas d'une filtration birégulière, la suite spectrale associée dégénère et vérifie

$$\bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q} \cong H^n(C)$$

On note

$$E_r^{p,q} \implies H^n(C)$$

Définition 2.0.7. *Quasi-isomorphisme de complexes filtrés.* ([8], Définition 1.3.6)

Un morphisme de complexes filtrés

$$u : (C, F) \longrightarrow (C', F')$$

induit des morphismes sur leur suites spectrales associées

$$u_r : E_r(C, F) \longrightarrow E_r(C', F')$$

On dit que u est un *quasi-isomorphisme filtré* si pour $r \geq 1$ les u_r sont des isomorphismes.

Exemple 2.0.8. *La filtration triviale.* ([8], Définition 1.4.6)

La *filtration triviale* η sur un complexe (C^*, δ) est définie par

$$\eta^p C^q = \begin{cases} C^q & \text{si } p \leq 0 \\ 0 & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

On a alors $E_0^{p,q} = 0$ si $p \neq 0$ et $E_0^{0,q} = C^q$. Pour $r \geq 1$, $E_r^{p,q} = 0$ si $p \neq 0$ et $E_r^{0,q} = H^q(C)$.

Exemple 2.0.9. *La filtration canonique.* ([8], Définition 1.4.6)

La *filtration canonique* F_{can} sur un complexe (C^*, δ) est définie par

$$F_{can}^p C^q = \begin{cases} C^q & \text{si } q < -p \\ \ker \delta_q & \text{si } q = -p \\ 0 & \text{si } q > -p \end{cases}$$

Le calcul des deux premiers termes de la suite spectrale donne :

$$E_0^{p,q} = \frac{F_{can}^p C^{p+q}}{F_{can}^{p+1} C^{p+q}} \text{ munie de } d_0^{p,q} = \delta_{-p} : E_0^{p,q} \longrightarrow E_0^{p,q+1}$$

$$E_0^{p,q} = \begin{cases} \ker \delta_{-p} & \text{if } p+q = -p \\ \frac{C^{-p-1}}{\ker \delta_{-p-1}} & \text{if } p+q = -p-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \frac{\ker \delta_{-p}}{\text{im} \delta_{-p-1}} = H^{p+q}(C^*) & \text{si } p+q = -p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite spectrale dégénère au niveau deux : pour $r \geq 1$, $E_r = E_1$.

Définition 2.0.10. *Décalage de Deligne.* ([8], Définition 1.3.1)

Avec les notations de 2.0.6, on définit la *filtration décalée de Deligne* $\text{Dec}(F)^\bullet$ de la filtration F sur C par

$$\text{Dec}(F)^p C^n = Z_1^{p+n, -p}$$

Proposition 2.0.11. ([8], Définition 1.3.4)

On a

$$d(\text{Dec}(F)^p C^n) \subset \text{Dec}(F)^p C^{n-1}$$

De plus, le morphisme naturel

$$\frac{Z_1^{p+n, -p}}{Z_1^{p+n+1, -p-1}} \longrightarrow \frac{Z_1^{p+n, -p}}{B_1^{p+n, -p}}$$

induit des morphismes

$$u_0 : E_0^{p, n-p}(C, \text{Dec} F) \longrightarrow E_1^{p+n, -p}(C, F)$$

$$u_r : E_r^{p, n-p}(C, \text{Dec} F) \longrightarrow E_{r+1}^{p+n, -p}(C, F)$$

compatibles aux différentielles d_r , qui sont des isomorphismes de complexes pour $r \geq 1$.

La preuve consiste à calculer les $Z_r^{p, q}$ et $B_r^{p, q}$ de chaque filtration.

Exemple 2.0.12.

A renumérotation près, la filtration décalée de la filtration triviale est la filtration canonique.

$$Z_1^{p, n-p} = \begin{cases} C^n & \text{si } p < -n \\ \ker \delta_n & \text{si } p = -n \\ 0 & \text{si } p > -n \end{cases}$$

Le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \frac{C^{n-1}}{\ker \delta_{n-1}} \longrightarrow \ker \delta_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

est quasi-isomorphe à

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Définition 2.0.13. *Suite spectrale d'un complexe double.*

Soit $(A^{p, q})_{(p, q) \in \mathbb{Z}^2}$ un complexe double de $\mathbb{Z}^2$ -espaces vectoriels. Les différentielles

$$\partial_{p, q} : A^{p, q} \longrightarrow A^{p+1, q}$$

et

$$\delta_{p, q} : A^{p, q} \longrightarrow A^{p, q+1}$$

vérifient

$$\partial \delta + \delta \partial = 0$$

On associe à un complexe double un complexe filtré, le *complexe total*

$$C^k = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}$$

$$F^s C^k = \bigoplus_{p+q=k, p \geq s} A^{p,q}$$

avec différentielle

$$d_k : C^k \longrightarrow C^{k+1}, \quad d_k = \sum_{p+q=k} (\partial_{p,q} + \delta_{p,q})$$

La suite spectrale du complexe total vérifie

$$E_0^{p,q} = A^{p,q}, \text{ et } d_0 = \partial_{p,q} : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q}$$

$$E_1^{p,q} = H^p(A^{*,q}), \text{ et } d_1 : H^p(A^{*,q}) \longrightarrow H^p(A^{*,q+1}) \text{ est induite par } \delta_{p,q}$$

$E_2^{p,q} = H^q(H^p(A^{*,\bullet}))$ et d_2 est donnée par le lemme du serpent. On a une autre filtration sur le complexe total

$$F'^s C^k = \bigoplus_{p+q=k, q \geq s} A^{p,q}$$

qui fournit une suite spectrale E' vérifiant

$$E_0'^{p,q} = A^{q,p}, \text{ et } d_0 = \delta_{q,p} : A^{q,p} \longrightarrow A^{q,p+1}$$

$$E_1'^{p,q} = H^p(A^{q,*}), \text{ et } d_1 : H^p(A^{q,*}) \longrightarrow H^p(A^{q+1,*}) \text{ est induite par } \partial_{p,q}$$

$$E_2'^{p,q} = H^q(H^p(A^{\bullet,*})) \text{ et } d_2 \text{ est donnée par le lemme du serpent.}$$

Dans les écritures de E_2 et E_2' l'espace de cohomologie indexé par p est pris par rapport au complexe en $*$, et l'espace indexé par q est pris par rapport au complexe indexé par $\bullet$. Ces suites convergent vers la cohomologie du complexe total, mais sont différentes en général.

Exemple 2.0.14. Le complexe double de De Rham fournit un exemple de complexe double, avec $A^{p,q}$ les formes différentielles de type (p, q) :

$$\omega =_{loc} \sum u(z) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

Les différentielles

$$\partial_{p,q} : A^{p,q} \longrightarrow A^{p+1,q}$$

et

$$\delta_{p,q} : A^{p,q} \longrightarrow A^{p,q+1}$$

sont respectivement les différentielles ∂z et $\partial \bar{z}$.

Exemple 2.0.15. Pour une décomposition $X = X_1 \cup X_2$ d'une variété algébrique X en union de sous-variétés, par exemple une décomposition en composantes irréductibles, on peut poser

$$X^{(0)} = X$$

$$X^{(1)} = X_1 \sqcup X_2$$

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= X_1 \cap X_2 \\ C^{i,j} &= C^j(X^{(i)}) \end{aligned}$$

Les différentielles

$$\delta'_i : C^j(X^{(i)}) \longrightarrow C^j(X^{(i+1)})$$

est l'opérateur induit par les inclusions, avec un signe, et

$$\delta''_j : C^j(X^{(i)}) \longrightarrow C^{j+1}(X^{(i)})$$

est l'opérateur de cobord de $X^{(i)}$.

Ce procédé se généralise à une décomposition en k sous-variétés. Les i -intersections de sous-variétés peuvent se voir dans un cube de dimension k , les inclusions de certaines $(i+1)$ -intersections dans une i -intersection correspondent à une arête du cube, ce qui donne lieu à un schéma cubique (paragraphe 5.3.4).

Chapitre 3

Géométrie réelle

3.1 Variétés algébriques réelles

On prendra la définition de [4].

Définition 3.1.1. *Variété algébrique réelle affine.* ([4], Définition 3.2.9)

Une variété algébrique réelle affine est un espace topologique X , muni d'un faisceau de fonctions $\mathcal{R}_X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, isomorphe comme espace annelé à un ensemble algébrique $V \subset \mathbb{R}^n$ avec sa topologie de Zariski, muni de son faisceau de fonctions régulières $\mathcal{R}_V$.

Le faisceau $\mathcal{R}_X$ est appelé faisceau des fonctions régulières sur X .

Proposition 3.1.2. ([4], Définition 3.2.10)

Pour $V \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble algébrique réel, $U \subset V$ un ouvert de Zariski, $(U, \mathcal{R}_{X|U})$ est une variété algébrique réelle affine.

Définition 3.1.3. *Variété algébrique réelle.* ([4], Définition 3.2.11 et [6], 2.1)

Une variété algébrique réelle est un espace topologique X , muni d'un faisceau de fonctions $\mathcal{R}_X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, tel qu'il existe un recouvrement fini $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, chaque $(U_i, \mathcal{R}_{X|U_i})$ étant une

variété algébrique réelle affine.

Le faisceau $\mathcal{R}_X$ est appelé faisceau des fonctions régulières sur X , et la topologie de X est appelée topologie de Zariski.

Remarque 3.1.4. *La propriété de séparation est automatique pour les variétés algébriques affines (diagonale fermée dans $X \times X$). On n'impose pas de condition de séparation, car les variétés algébriques réelles considérées seront soit affines, soit des points réels venant de schémas déjà séparés.*

Proposition 3.1.5. ([4], Définition 3.2.13)

Soient $(X, \mathcal{R}_X)$ une variété algébrique réelle et $U \subset X$ un ouvert de Zariski. Alors $(U, \mathcal{R}_{X|U})$ est une variété algébrique réelle.

3.2 Ensembles semi-algébriques

On suivra [6]. Les ensembles semi-algébriques sont ceux qui vérifient des équations et inéquations polynomiales. Ces ensembles sont stables par projection (Théorème 3.2.3), et satisfont le lemme du petit chemin (Théorème 3.2.5). Leur topologie locale peut différer de celle des ensembles algébriques. Certains outils fournissent des obstructions au fait qu'ils puissent être homéomorphes à un ensemble algébrique, comme par exemple la caractéristique d'Euler du *link*, ou plus généralement les fonctions constructibles.

Définition 3.2.1. *Ensembles semi-algébriques.* ([6])

Les sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$ sont la plus petite classe $\mathcal{SA}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

(i) Si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, alors

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) = 0\} \in \mathcal{SA}_n \text{ et } \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0\} \in \mathcal{SA}_n$$

(ii) Si $A \in \mathcal{SA}_n$ et $B \in \mathcal{SA}_n$ alors

$$A \cup B \in \mathcal{SA}_n, \quad A \cap B \in \mathcal{SA}_n, \quad \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{SA}_n$$

Les ensembles semi-algébriques contiennent les ensembles algébriques, et sont stables par les opérations $\cup, \cap, \setminus$. Ils sont aussi stables par produits : si $A \in \mathcal{SA}_n$ et $B \in \mathcal{SA}_m$ alors $A \times B \in \mathcal{SA}_{n+m}$.

On peut aussi définir des ensembles semi-algébriques sur une variété algébrique réelle X grâce au faisceau de fonctions régulières $\mathcal{P}_X$.

Définition 3.2.2. *Morphisme semi-algébrique.* ([6])

Soient $A \in \mathcal{SA}_n$ et $B \in \mathcal{SA}_m$. Une application $f : A \rightarrow B$ est dite semi-algébrique si son graphe Γ_f est semi-algébrique dans $\mathbb{R}^{n+m}$.

Théorème 3.2.3. *(Tarski-Seidenberg).* ([6], Théorème 1.1)

Soient A un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les n premières coordonnées.

Alors $\pi(A)$ est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$.

Conséquence 3.2.4. Les images ou images réciproques d'ensembles semi-algébriques par une application semi-algébrique sont semi-algébriques, et la composition d'applications semi-algébriques est semi-algébrique.

Le lemme du petit chemin permet d'atteindre les points du bord d'un ensemble semi-algébrique par des arcs.

Théorème 3.2.5. *(Lemme du petit chemin).* ([6], Théorèmes 1.14 et 1.15)

Soient $A \in \mathcal{SA}_n$ et $x \in \overline{A} \setminus A$.

Il existe une application semi-algébrique et analytique $\eta :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\eta(0) = x$ et $\eta([0, 1]) \subset A$.

Exemple 3.2.6. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ un demi-plan ouvert, on a $(0, 0) \in \overline{A} \setminus A$. Les arcs $t \mapsto (t, 0)$ conviennent pour la conclusion du théorème précédent.

Les entrelacs (*links*) sont un outil pour étudier la topologie locale des ensembles semi-algébriques.

Définition 3.2.7. *Entrelacs.* ([6], §1.7)

Soit $a \in A$ un ensemble semi-algébrique localement compact. On appelle *entrelac* de a dans A l'ensemble

$$lk(a, A) = A \cap S(a, \epsilon)$$

pour ϵ assez petit, et où $S(a, \epsilon)$ désigne la sphère de centre a et rayon ϵ . Cet ensemble est défini à homéomorphisme près, d'après le théorème de structure conique locale des ensembles semi-algébriques.

Exemple 3.2.8. Avec A comme dans l'exemple 3.2.6, $lk((0, 0), \overline{A})$ est un demi-cercle, donc homotopiquement équivalent à un point.

On définit plus généralement l'*entrelac* d'un sous-ensemble.

Définition 3.2.9. Soit $K \subset A$ un sous-ensemble semi-algébrique compact. On définit

$$lk(K, A) = f^{-1}(\epsilon) \cap A$$

pour ϵ assez petit, où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction semi-algébrique, continue et propre telle que $f^{-1}(0) = K$.

Exemple 3.2.10. On peut prendre la distance à K comme fonction f . Avec A comme dans l'exemple 3.2.6, et $K = S((0, 0), 1) \cap \overline{A}$ qui est un demi-cercle, l'ensemble $lk(K, A)$ est deux demi-cercles disjoints. Il est donc homotopiquement équivalent à deux points.

3.3 Fonctions constructibles

On suivra [6], §3, [16] et [18]. Les fonctions constructibles, et surtout les opérations sur celles-ci, donnent des informations sur les ensembles semi-algébriques.

3.3.1 Fonctions semi-algébriquement constructibles et opérateurs

Définition 3.3.1. ([6], Définition 3.1)

Soit X un ensemble semi-algébrique. Une fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est dite semi-algébriquement constructible si elle prend un nombre fini de valeurs, et si pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ses fibres $\varphi^{-1}(n)$ sont semi-algébriques.

De manière équivalente, les fonctions constructibles sont celles qui s'écrivent

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i \mathbf{1}_{X_i}$$

où les m_i sont des entiers presque tous nuls, et X_i est un sous-ensemble semi-algébrique de X . Les fonctions constructibles sur X forment un anneau $F(X)$.

On appelle support de φ l'ensemble

$$\overline{\{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

On note χ la caractéristique d'Euler à supports compacts.

Définition 3.3.2. Soient φ une fonction constructible sur X et $A \subset X$. On appelle intégrale d'Euler de φ sur A l'entier

$$\int_A \varphi d\chi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi(\varphi^{-1}(n) \cap A) = \sum_{i \in I} m_i \chi(X_i \cap A)$$

Définition 3.3.3. *Opérateurs pushforward et pullback.*

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application semi-algébrique.

Pour φ une fonction constructible sur X , on définit une fonction $f_*\varphi$ sur Y par

$$f_*\varphi(y) = \int_{f^{-1}(y)} \varphi d\chi$$

appelée *pushforward* de φ par f . C'est une fonction constructible sur Y .

Pour ψ une fonction constructible sur Y , la fonction $f^*\psi = \psi \circ f$ sur X est appelée *pullback* de ψ par f . C'est une fonction constructible sur X .

Théorème 3.3.4. *Théorème de Fubini. ([6], Théorème 3.5)*

Avec les notations ci-dessus

$$\int_Y f_*\varphi d\chi = \int_X \varphi d\chi$$

Corollaire 3.3.5. *Pour $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications semi-algébriques, on a*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Définition 3.3.6. *Opérateur link.* Soit φ une fonction constructible sur X semi-algébrique. On définit la fonction $\Lambda\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ par

$$\Lambda\varphi(x) = \int_{lk(x,X)} \varphi d\chi$$

On définit aussi $\Omega\varphi = 2\varphi - \Lambda\varphi$. Ces fonctions sont bien définies car le type topologique du *link* est bien défini.

Exemple 3.3.7.

$\Lambda\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} = (1 + (-1)^{n-1})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$, c'est la caractéristique d'Euler de la sphère S^{n-1} .

Soit $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. On a

$\Lambda\mathbf{1}_A(x) = (1 + (-1)^{n-1})$ si $x > 0$, pour la même raison que ci-dessus,

$\Lambda\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x < 0$ (link vide), et

$\Lambda\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x = 0$, c'est la caractéristique d'Euler d'une demi-sphère de dimension $(n - 1)$, homotopiquement équivalent à un point.

Remarquons que $\Lambda\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$ est à valeurs dans $2\mathbb{Z}$, mais pas $\Lambda\mathbf{1}_A$.

Remarque 3.3.8. *Des calculs similaires sur des simplexes et des théorèmes de triangulations permettent de montrer*

$$\Omega\Lambda = \Lambda\Omega = 0$$

En particulier, $\Lambda^2 = 2\Lambda$. Ces opérateurs serviront à construire des opérateurs de bords de complexes différentiels.

Proposition 3.3.9. ([6], Paragraphe 3.3)

Soit φ une fonction constructible sur un ensemble semi-algébrique X .

(i) La fonction $\Lambda\varphi$ est constructible.

(ii) Le link $\Lambda : F(X) \longrightarrow F(X)$ est un morphisme de groupes abéliens.

(iii) L'opérateur link commute avec l'opérateur pushforward : pour f une application semi-algébrique continue et propre,

$$\Lambda(f_*\varphi) = f_*(\Lambda\varphi)$$

(iv) Pour $A \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique compact,

$$\int_{lk(A,X)} \varphi d\chi = \int_A \Lambda\varphi d\chi$$

(v) Pour X compact,

$$\int_X \Lambda\varphi d\chi = 0$$

3.3.2 Fonctions algébriquement constructibles

Lorsque φ est une fonction constructible sur un ensemble algébrique réel X , il est naturel d'imposer la condition que les fibres doivent être des sous-ensembles algébriques de X . C'est-à-dire dans l'écriture $\varphi = \sum_{i \in I} m_i \mathbf{1}_{X_i}$, d'imposer que les X_i soient algébriques. Cependant ces fonctions ne seraient pas stables par *pushforward* (Exemple 3.3.14).

Définition 3.3.10. *Fonctions algébriquement constructibles.*

Soit X un ensemble algébrique réel. On appelle fonction algébriquement constructible sur X une fonction constructible s'écrivant

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i f_{i*}(\mathbf{1}_{Z_i})$$

où les m_i sont des entiers presque tous nuls, les Z_i sont des ensembles algébriques et les $f_i : Z_i \longrightarrow X$ sont algébriques.

Il existe une écriture

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i f_{i*}(\mathbf{1}_{Z_i})$$

avec les Z_i lisses et les f_i régulières et propres ([6], Lemme 3.13.)

Les fonctions algébriquement constructibles sur X forment un anneau $A(X) \subset F(X)$. Cette classe de fonctions est la plus petite contenant les fonctions constantes sur les ensembles algébriques réels et stable par *pushforward*.

Théorème 3.3.11. ([6], Théorème 3.14)

Soit φ une fonction algébriquement constructible sur un ensemble algébrique réel X .

Alors $\Lambda\varphi$ est à valeurs dans $2\mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2}\varphi$ est algébriquement constructible.

Ce théorème fournit des obstructions locales sur un ensemble semi-algébrique à ce qu'il soit homéomorphe à un ensemble algébrique ([2], [22]).

Proposition 3.3.12. ([6], Théorème 3.15)

Soit φ une fonction constructible sur un ensemble algébrique réel X de dimension d . Alors $2^d \varphi$ est algébriquement constructible.

Remarque 3.3.13. Étant donnée une fonction constructible φ , on peut regarder les $2^k \varphi$. Plus k est grand, plus on a de chances que $2^k \varphi$ soit algébriquement constructible, et dans tous les cas $k = d$ convient.

Exemple 3.3.14. Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ et $\varphi = \mathbf{1}_A$.

Le *link* $lk(\cdot, A)$ vaut 0 sur l'intérieur de A et 1 sur le bord de A . Ainsi $\Lambda \varphi = \mathbf{1}_{\partial A}$.

Le *pushforward* de $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}$ par la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2, y)$ est $f_* \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2} = 2\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$. On a « replié » le plan sur sa partie droite.

Le *pushforward* de $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}$ par la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$ est $g_* \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2} = 4\varphi$. On a « replié » le plan sur sa partie supérieure et sa partie droite. On voit ainsi que 4φ est algébriquement constructible.

3.3.3 Fonctions Nash-constructibles

Les ensembles $\mathcal{AS}$ sont une classe plus large que les ensembles algébriques, tout en gardant des propriétés fortes. Les fonctions Nash-constructibles sont aux ensembles symétriques par arcs ce que les fonctions algébriquement constructibles sont aux ensembles algébriques.

Définition 3.3.15. *Fonctions Nash-constructibles.* ([16], Définition 3.7)

Soit X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. On appelle fonction Nash-constructible sur X une fonction constructible s'écrivant

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i f_{i*}(\mathbf{1}_{Z'_i})$$

où les m_i sont des entiers presque tous nuls, les Z'_i sont des composantes connexes d'ensembles algébriques Z_i et les $f_i : Z_i \rightarrow X$ sont des morphismes algébriques, propres et réguliers.

Les fonctions Nash-constructibles sur X forment un anneau.

Cette classe de fonctions est la plus petite contenant les fonctions constantes sur les composantes connexes d'ensembles algébriques compacts et stable par *pushforward*.

Théorème 3.3.16. ([16], Théorème 3.9)

Soient X un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $A \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique. On a l'équivalence

$$A \in \mathcal{AS} \iff \mathbf{1}_A \text{ est une fonction Nash-constructible sur } X$$

Corollaire 3.3.17. ([16], Corollaire 3.13)

Soient $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $Y \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ des ensembles algébriques et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme $\mathcal{AS}$, c'est-à-dire dont le graphe $\Gamma_f \in \mathcal{AS}$. On a

(i) Pour φ une fonction Nash-constructible sur X , son pushforward $f_*\varphi$ est une fonction Nash-constructible sur Y .

(ii) Pour ψ une fonction Nash-constructible sur Y , son pullback $f^*\psi$ est une fonction Nash-constructible sur X .

Démonstration. On utilise les propriétés des fonctions Nash-constructibles. Elles forment un anneau, sont stables par *pushforward* et *pullback* par des morphismes algébriques. La fonction $\mathbf{1}_{\Gamma_f}$ est Nash-constructible et les opérations f_* et f^* se décomposent en

$$f_*\varphi = (\pi_Y)_*[\mathbf{1}_{\Gamma_f} \cdot (\pi_X)^*\varphi]$$

$$f^*\psi = (\pi_X)_*[\mathbf{1}_{\Gamma_f} \cdot (\pi_Y)^*\psi]$$

où $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ et $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ désignent les projections. $\square$

3.4 Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs

On suivra [16]. Les composantes irréductibles d'une variété algébrique complexe projective sont connexes pour la topologie forte. Ce n'est pas le cas des variétés réelles : la cubique $y^2 = x^3 - x$ a deux composantes connexes. Les ensembles semi-algébriques symétriques par arcs vont permettre de contourner ce problème, puisqu'ils sont, en un certain sens, engendrés par les composantes connexes des ensembles algébriques réels, et fournissent une topologie noethérienne plus fine que la topologie de Zariski.

Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Les notions exposées sont aussi valables sur une variété algébrique réelle X . On se ramène à $\mathbb{R}^n$ par des cartes. Tous les ensembles considérés seront semi-algébriques. Nous aurons les inclusions suivantes d'ensembles :

$$\text{algébriques} \subset (\text{analytiques et semi-algébriques}) \subset \text{symétriques par arcs} \subset \text{semi-algébriques}$$

La notion de symétrie par arcs introduite par K. Kurdyka dans [15] considère les sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$. La définition de A. Parusiński ([16]) considère les sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, pour avoir aussi la propriété de symétrie par arcs « à l'infini », propriété qui nous sera nécessaire. Cependant la théorie des ensembles symétriques par arcs dans $\mathbb{R}^n$ possède généralement les mêmes propriétés que celle dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Définition 3.4.1. Un ensemble $E \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ semi-algébrique est dit symétrique par arcs si pour tout arc analytique $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$\gamma(]-1, 0]) \subset E \implies \gamma(]-1, 1]) \subset E$$

De manière équivalente on peut demander comme condition

$$\text{Int}(\gamma^{-1}(E)) \neq \emptyset \implies \gamma(]-1, 1]) \subset E$$

Ainsi, un arc analytique rencontre un ensemble symétrique par arcs en des points isolés ou est entièrement contenu dedans.

Par le lemme du petit chemin, on montre :

Proposition 3.4.2. ([16], Proposition 2.8)

Un ensemble symétrique par arcs est fermé pour la topologie forte.

Démonstration. Soient E semi-algébrique et $a \in \overline{E}$. Par le lemme du petit chemin il existe $\gamma :]-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\gamma(]-1, 0[) \subset E$ et $\gamma(0) = a$. L'arc γ se prolonge en $\gamma :]-1, \epsilon[\rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ avec $\epsilon > 0$ ([16], Lemme 2.6). Comme E est symétrique par arcs, $\gamma(]-1, \epsilon[) \subset E$ et $a \in E$. $\square$

Définition 3.4.3. Un ensemble semi-algébrique E est dit localement analytique si pour tout $x \in E$ il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, et une fonction analytique $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $E \cap U = f^{-1}(0)$.

Proposition 3.4.4. ([16], Proposition 2.9)

Un ensemble semi-algébrique localement analytique est symétrique par arcs.

Démonstration. Avec les notations ci-dessus, soit $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ un arc analytique avec $\gamma(]-1, 0[) \subset E$ et $\gamma(0) = x$. L'arc $f \circ \gamma$ est analytique et s'annule sur $]-1, 0[$, donc est identiquement nul. On a bien $\gamma(]-1, 1[) \subset E$. $\square$

Ainsi, les ensembles symétriques par arcs contiennent les ensembles algébriques de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et leurs composantes analytiques, en particulier leurs composantes connexes. Ils comportent aussi d'autres ensembles que ceux là.

Exemple 3.4.5. *Le cusp.*

Le cusp $y^2 = x^3$ est symétrique par arcs, en particulier en $(0, 0)$. Un arc analytique dont la première moitié est tracée sur sa partie supérieure ne sortira pas du cusp.

Exemple 3.4.6. *Le demi-plan.*

L'ensemble $X = \mathbb{R}^2 \cap \{x \leq 0\}$ n'est pas symétrique par arcs, en effet $\gamma : t \mapsto (t, 0)$ sort de X .

Exemple 3.4.7. ([16], Exemple 2.10).

L'ensemble

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad z = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq (0, 0) \right\} \cup (0, 0, 0)$$

est semi-algébrique, analytique excepté en $(0, 0, 0)$, contenu dans

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad z(x^2 + y^2) = x^3\}$$

qui est algébrique et irréductible. Or E n'est pas une composante analytique de V .

Définition 3.4.8. *Algèbre booléenne et algèbre booléenne engendrée.*

Pour un ensemble A , l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(A)$ est une algèbre booléenne munie des opérations $\cup, \cap$, avec comme complémentaire $\setminus$. C'est un ensemble ordonné par l'inclusion,

avec un plus petit élément $\emptyset$, un plus grand élément A , où les lois $\cup$ et $\cap$ sont distributives l'une par rapport à l'autre, et où le complémentaire existe :

$$\forall B \in \mathcal{P}(A) \quad B \cup (A \setminus B) = A$$

Comme une intersection d'algèbres booléennes est booléenne, on peut parler d'algèbre booléenne engendrée.

Définition 3.4.9. La classe d'ensembles $\mathcal{AS}$ est l'algèbre booléenne engendrée par les ensembles symétriques par arcs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

On peut définir directement les ensembles $\mathcal{AS}$ en regardant les arcs.

Proposition 3.4.10. ([16], Proposition 3.2).

Un ensemble $E \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ semi-algébrique est $\mathcal{AS}$ si et seulement si pour tout arc analytique $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$\gamma(]-1, 0[) \subset E \implies \exists \epsilon > 0 \quad \gamma(]0, \epsilon[) \subset E$$

Définition 3.4.11. *Topologie noethérienne.* Une topologie $\mathcal{O}$ sur une espace topologique X est dite noethérienne si toute suite décroissante de fermés est stationnaire.

Un fermé F est dit irréductible si l'écriture $F = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés implique $F = F_1$ ou $F = F_2$.

Propriété 3.4.12. Dans un espace topologique noethérien tout fermé F admet une décomposition en irréductibles, unique à l'ordre près :

$$F = F_1 \cup \dots \cup F_r$$

avec F_i irréductible, $F_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} F_j$.

Exemple 3.4.13. La topologie de Zariski est une topologie noethérienne.

Théorème 3.4.14. Les ensembles $\mathcal{AS}$ forment une topologie noethérienne sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ dont les fermés sont les ensembles semi-algébriques symétriques par arcs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Le point essentiel de la preuve est de montrer que les ensembles semi-algébriques et symétriques par arcs sont stables par intersection quelconque.

Une intersection de semi-algébriques n'est pas nécessairement semi-algébrique, comme l'ensemble de Cantor. En revanche une intersection d'ensembles symétriques par arcs est symétrique par arcs.

Conséquences 3.4.15. Tout ensemble semi-algébrique fermé possède une décomposition en composantes $\mathcal{AS}$ -irréductibles. Tout ensemble semi-algébrique possède une clôture symétrique par arcs, c'est l'intersection des semi-algébriques symétriques par arcs qui le contiennent.

Remarque 3.4.16. Les ensembles $\mathcal{AS}$ -irréductibles sont connexes pour la topologie forte.

On notera $\mathcal{AR}$ la topologie dont les fermés sont les sous-ensembles semi-algébriques symétriques par arcs de $\mathbb{R}^n$ (sans condition « à l'infini »).

Exemple 3.4.17. *La demi-hyperbole.* ([16], Remarque 3.6).

Soient $H \subset \mathbb{R}^2$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$, et $H_1 = H \cap \{x > 0\}$. La demi-hyperbole H_1 vue dans $\mathbb{R}^2$ est symétrique par arcs au sens $\mathcal{AR}$ (c'est une composante connexe d'un ensemble algébrique). Mais H_1 n'est pas $\mathcal{AS}$, en effet, vue dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, on peut tracer un arc analytique le long de cette hyperbole, passant par son point infini, qui en sortira pour continuer sur l'autre branche $H_2 = H \cap \{x < 0\}$, ce qui montre la non symétrie par arcs à l'infini de H_1 .

Proposition 3.4.18. ([16], Remarque 2.17 et Proposition 2.20).

La topologie $\mathcal{AR}$ est plus fine (strictement si dimension ≥ 3) que la topologie $\mathcal{AZ}$ Zariski-analytique semi-algébrique, celle dont les fermés sont les ensembles semi-algébriques localement analytiques.

Définition 3.4.19. On note $\text{Reg}_k(E)$ les points où E est localement une variété analytique de dimension k .

Le théorème suivant relie les composantes $\mathcal{AS}$ -irréductibles de dimension maximale d'un ensemble algébrique et les composantes connexes d'une résolution.

Théorème 3.4.20. ([16], Théorème 2.21).

Soient $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ un ensemble algébrique et $E \subset X$ un ensemble fermé et irréductible pour la topologie $\mathcal{AS}$ avec $\dim E = \dim X = k$. Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ une résolution des singularités de X . Il existe une unique composante connexe $\tilde{E}$ de $\tilde{X}$ telle que

$$\pi(\tilde{E}) = \overline{\text{Reg}_k(E)}$$

où l'adhérence est prise pour la topologie forte.

Conséquence 3.4.21. Les ensembles $\mathcal{AS}$ sont en ce sens « engendrés » par les composantes connexes des ensembles algébriques et les morphismes algébriques.

Exemple 3.4.22. ([16], Exemples 2.19 et 2.23).

La cubique lisse et irréductible $C : y^2 = x^3 - x$ a deux composantes connexes $C_1 = C \cap \left\{x \leq \frac{1}{2}\right\}$

et $C_2 = C \cap \left\{x \geq \frac{1}{2}\right\}$. Chacune des composantes connexes C_1 et C_2 est symétrique par arcs, non algébrique.

Considérons le cône dans $\mathbb{R}^3$ défini par C , l'ensemble $C' : y^2z = x^3 - xz^2$. C'est un ensemble algébrique irréductible connexe. Ce cône C' est l'union des cônes C'_1 sur C_1 et C'_2 sur C_2 , qui se coupent en $(0, 0, 0)$. Les cônes C'_1 et C'_2 sont symétriques par arcs.

Lorsqu'on éclate C' en $(0, 0, 0)$, son point singulier, on obtient un cylindre $C'' : y^2 = x^3 - x$ dans $\mathbb{P}^3$, union disjointe des cylindres sur C_1 et C_2 . Chacune des composantes $\mathcal{AS}$ -irréductibles C'_1 et C'_2 est l'image d'un cylindre de la résolution C'' de C' .

Définition 3.4.23. *Fonctions arc-analytiques.*

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$ des ensembles $\mathcal{AR}$. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite arc-analytique si pour tout arc analytique $\gamma :]-1, 1[\rightarrow X$, l'arc $f \circ \gamma$ est analytique.

Remarque 3.4.24. *Il existe des fonctions arc-analytiques non continues, mais pas dans le cadre semi-algébrique.*

Les graphes des fonctions semi-algébriques et arc-analytiques fournissent des ensembles symétriques par arcs.

Proposition 3.4.25. *([16], Proposition 2.31).*

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction semi-algébrique et arc-analytique. On a :

- (i) Le graphe de f est un sous-ensemble symétrique par arcs de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*
- (ii) f est continue pour la topologie $\mathcal{AR}$.*
- (iii) f est continue pour la topologie forte.*

Les propriétés énoncées ci-dessus étant locales, on a des résultats similaires avec la topologie $\mathcal{AS}$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exemple 3.4.26. *([16], Exemple 2.30).*

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $(0, 0) \mapsto (0, 0)$ est arc-analytique mais non différentiable en $(0, 0)$.

Définition 3.4.27. On appelle morphisme $\mathcal{AS}$ une fonction $f : X \rightarrow Y$ entre X et Y des ensembles $\mathcal{AS}$ dont le graphe est $\mathcal{AS}$.

Proposition 3.4.28. *Les ensembles $\mathcal{AS}$ munis des morphismes $\mathcal{AS}$ forment une catégorie, que l'on notera $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$.*

3.5 Le polynôme de Poincaré virtuel

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux invariants additifs définis sur la catégorie des variétés algébriques réelles, ou sur la catégorie $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$ (définition 3.4.9). Le théorème de factorisation faible ([1], Théorème 0.1.1) permet de donner des critères d'extension sur des invariants additifs, définis sur les variétés lisses et compactes, pour qu'ils se prolongent à toutes les variétés algébriques ([3] Théorème 3.1). Ce critère peut être utilisé pour construire un invariant additif sur les variétés algébriques réelles, le polynôme de Poincaré virtuel ([19]). En utilisant directement le théorème de factorisation faible, le polynôme de Poincaré virtuel peut être étendu à la catégorie $\mathcal{X}_{\mathcal{AS}}$ ([12]).

Théorème 3.5.1. *Théorème de factorisation faible ([1], Théorème 0.1.1).*

Soient $\phi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une fonction birationnelle entre variétés complètes non singulières X_1 et X_2 sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et $U \subset X_1$ un ouvert où ϕ est un isomorphisme.

Alors ϕ se factorise en une suite d'éclatements ou d'effondrements de centres irréductibles et non singuliers disjoints à U , c'est-à-dire il existe une suite de fonctions birationnelles entre variétés algébriques complètes non-singulières

$$X_1 = V_0 \xrightarrow{\varphi_1} V_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{i-1}} V_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} V_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_l} V_l = X_2$$

où

(i) $\phi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_l$,

(ii) les φ_i sont des isomorphismes sur U , et

(iii) $\varphi_i : V_{i-1} \dashrightarrow V_i$ ou $\varphi_i^{-1} : V_i \dashrightarrow V_{i-1}$ est l'éclatement d'un centre irréductible non-singulier disjoint à U .

De plus, il existe un indice i_0 tel que pour $i \leq i_0$, la fonction $V_i \dashrightarrow X_1$ est projective, et pour $i \geq i_0$, la fonction $V_i \dashrightarrow X_2$ est projective.

Si X_1 et X_2 sont projectives, alors toutes les V_i sont projectives.

Pour avoir un critère d'extension des invariants additifs on utilisera une présentation simplifiée du groupe de Grothendieck des variétés algébriques réelles.

Définition 3.5.2. *Groupe de Grothendieck des variétés algébriques réelles.*

On appelle *groupe de Grothendieck des variétés algébriques réelles* $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$ le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes $[X]$ des variétés algébriques réelles, muni des relations $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$ où $Y \subset X$ est une sous-variété fermée.

C'est un anneau commutatif muni de la loi $[X] \times [Y] = [X \times Y]$.

Théorème 3.5.3. *Présentation du $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$ ([3], Théorème 3.1).*

Le groupe $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$ est isomorphe au groupe (bl), engendré par les classes d'isomorphismes des variétés lisses projectives $[X]$, muni des relations $[\emptyset] = 0$ et

$$[Bl_Y(X)] - [E] = [X] - [Y]$$

où $C \subset X$ est une sous-variété fermée lisse de X , $Bl_C(X)$ est l'éclatement de X le long de C , et E est le diviseur exceptionnel de cet éclatement.

Définition 3.5.4. *Caractéristique d'Euler généralisée ([19], Définition 1.2).*

Une *caractéristique d'Euler généralisée* sur les variétés algébriques réelles est un morphisme d'anneaux $e : K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \rightarrow R$, où R est un anneau commutatif. En particulier e vérifie

$e(X) = e(Y)$ si X et Y sont isomorphes,

$e(X) = e(Y) + e(X \setminus Y)$ si $Y \subset X$ est une inclusion fermée,

$e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$

Le théorème 3.5.3 permet de donner un critère d'extension.

Théorème 3.5.5. *Critère d'extension. ([19], Théorème 1.3).*

Soit $e : X \rightarrow e(X)$ une fonction définie sur les variétés lisses projectives réelles, à valeurs dans un groupe abélien G , telle que

$e(X) = e(Y)$ si X et Y sont isomorphes,

$e(\emptyset) = 0$,

si $Bl_C(X) \rightarrow X$ est l'éclatement d'une variété lisse projective X le long d'une sous-variété fermée lisse $C \subset X$, et E le diviseur exceptionnel de cet éclatement,

$$e(Bl_C(X)) - e(E) = e(X) - e(C)$$

alors e se prolonge de manière unique à un morphisme de groupes

$$e : K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \rightarrow G$$

Si de plus e est à valeurs dans un anneau R , et si pour toutes variétés lisses projectives X, Y , on a $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$, alors

$$e : K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow R$$

ainsi prolongé est un morphisme d'anneaux.

Dans la suite, les espaces d'homologie et de cohomologie considérés seront à coefficients dans $\mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

La caractéristique d'Euler à support compact, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, définie par

$$\chi_c(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim H^i(X)$$

est une caractéristique d'Euler généralisée.

On notera $b_i(X) = \dim H^i(X)$ le $i^{\text{ème}}$ nombre de Betti de X . Le polynôme

$$P(X, T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim H^i(X) T^i \in \mathbb{Z}[T]$$

est appelé *polynôme de Poincaré* de X . Ce n'est pas une caractéristique d'Euler généralisée, ni aucun des b_i (Exemple 3.5.10).

Proposition 3.5.6. ([19], Proposition 2.1).

Soient X une variété lisse projective, $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ l'éclatement de X le long d'une sous-variété fermée lisse $C \subset X$, et E le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Pour tout i , la suite

$$0 \longrightarrow H^i(X) \longrightarrow H^i(C) \oplus H^i(\tilde{X}) \longrightarrow H^i(E) \longrightarrow 0$$

est exacte. En conséquence,

$$b_i(\tilde{X}) - b_i(E) = b_i(X) - b_i(C)$$

Théorème 3.5.7. ([19], Corollaire 2.2 et Théorème 2.4).

Pour tout i , il existe un unique morphisme de groupe $\beta_i : K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que $\beta_i(X) = b_i(X)$ pour X lisse projective.

Il existe un unique morphisme de groupe $\beta : K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{Z}[T]$ tel que $\beta(X, T) = P(X, T)$ pour X lisse projective.

On a $\beta(X, T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i(X) T^i$. Pour X de dimension n , $\deg(\beta(X, T)) = n$, et $\beta_n > 0$.

Démonstration. Les fonctions b_i et $P(X, \cdot)$ vérifient les hypothèses du théorème 3.5.5. Grâce à la proposition 3.5.6, elles se prolongent donc de manière unique en β_i et β . Par unicité $\beta = \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i T^i$ puisque ces deux fonctions sont des extensions de $P(\cdot, T)$. Le dernier point se prouve par récurrence sur n ([19], Théorème 2.4). $\square$

Les β_i sont appelés *nombre de Betti virtuels* et β *polynôme de Poincaré virtuel*.

Remarque 3.5.8. *Par construction, on a $\beta(X, -1) = \chi_c(X)$ pour les variétés lisses projectives, et par extension pour toutes les variétés puisque ce sont des caractéristiques d'Euler généralisées. Cependant, en général $\beta_i(X) \neq b_i(X)$, en effet $\beta_i(X)$ peut être négatif. Contrairement à la caractéristique d'Euler à supports compacts χ_c , le polynôme de Poincaré virtuel β n'est pas un invariant topologique (exemples 3.5.9 et 3.5.10).*

Le polynôme de Poincaré virtuel pour les variétés algébriques réelles a été construit dans [19], en utilisant le théorème de factorisation faible et la proposition 3.5.6. Il a été étendu aux ensembles $\mathcal{AS}$ dans [12]. Pour ces deux catégories, on retrouve une construction de β et son additivité dans [21]. On retrouve aussi sa multiplicativité comme conséquence du théorème 5.5.15, en utilisant les hyperrésolutions cubiques et des théorèmes d'extension de [11], mais sans utiliser le théorème de factorisation faible. Il y a des suites spectrales $E^r(X)$ desquelles on extrait β .

3.5.1 Exemples

Exemple 3.5.9. ([19], exemple 2.7)

Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 - x^4\}$ la figure « huit ». L'éclatement du plan à l'origine $C = \{(0, 0)\}$ transforme X en un cercle $\tilde{X}$ avec comme diviseur exceptionnel E l'union de deux points. Le carré d'un éclatement nous permet d'écrire
 $\beta(X) = \beta(\tilde{X}) + \beta(C) - \beta(E) = (1 + T) + 1 - 2 = T$
 $\chi_c(X) = -1$.

Exemple 3.5.10. Soit $X = X_1 \cup X_2$ l'union de deux cercles tangents en un point

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$$

Avec $\tilde{X}$ l'union disjointe de deux cercles se projetant sur X_1 et X_2 , $Y = \{(0, 0)\}$, et $\tilde{Y}$ l'image réciproque de Y dans $\tilde{X}$, le carré acyclique

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

nous permet d'écrire

$$\beta(X) = \beta(\tilde{X}) + \beta(Y) - \beta(\tilde{Y}) = 2(1 + T) + 1 - 2 = 1 + 2T$$

$$\chi_c(X) = -1$$

Cet espace X est homéomorphe à la figure « huit » précédente, en particulier ils ont même caractéristique d'Euler, mais ils ont des polynômes de Poincaré virtuels différents. Remarquons que

$$b_1(X) \neq b_1(X_1) + b_1(X \setminus X_1)$$

Les nombres de Betti ne sont pas additifs en général.

Exemple 3.5.11. ([19], exemple 2.6)

Soit $X = X_1 \cup X_2$ l'union des deux ellipses sécantes

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 - 1 = 0\}$$

Le carré acyclique

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \longrightarrow & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

nous permet d'écrire

$$\beta(X) = \beta(X_1) + \beta(X_2) - \beta(X_1 \cap X_2) = (1 + T) + (1 + T) - 4 = -2 + 2T$$

$$\chi_c(X) = -4$$

Exemple 3.5.12. ([19], exemple 2.6)

Soit $X = X_1 \cup X_2$ l'union de deux cercles tangents en deux points, tracés sur un cylindre dans $\mathbb{R}^3$

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, (x - z^2) = 0\}$$

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, (x + z^2) = 0\}$$

Le même carré nous permet d'écrire

$$\beta(X) = \beta(X_1) + \beta(X_2) - \beta(X_1 \cap X_2) = (1 + T) + (1 + T) - 2 = 2T$$

$$\chi_c(X) = -2$$

3.6 Chaînes semi-algébriques et homologie de Borel-Moore

On suivra [21], §6 pour définir un complexe de chaînes semi-algébriques et des opérations sur ces chaînes, puis [21], §3 pour définir une filtration sur celui-ci. On note $\mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ le corps à deux éléments.

3.6.1 Chaînes semi-algébriques

Définition 3.6.1. *Complexe de chaînes semi-algébriques.*

Soit X un sous-ensemble semi-algébrique d'une variété algébrique réelle. On va définir un complexe différentiel $C_*(X)$.

$C_k(k) = \mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel engendré par les sous-ensembles semi-algébriques fermés de X de dimension inférieure ou égale à k , avec les relations

(i) Si A et B sont des sous-ensembles semi-algébriques fermés de X de dimension inférieure à k ,

$$A + B \sim A \Delta B$$

(ii) Si $\dim A < k$ alors $A \sim 0$.

L'opération Δ est la différence symétrique : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

La relation (i) signifie que la somme dans le complexe revient à faire l'union, modulo 2. En effet, dans $A \cup B$ on a deux fois la partie $A \cap B$.

La relation (ii) signifie que l'on travaille génériquement en dimension k .

Le bord $\partial_k : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X)$ est défini grâce à l'opérateur *link* des fonctions constructibles (Définition 3.2.7) : pour $A \subset X$ semi-algébrique, on définit le bord de A par

$$\partial A = \{x \in A \mid \Lambda \mathbf{1}_A(x) \equiv 1 \pmod{2}\}$$

Cette opération passe aux relations (i) et (ii) et définit ainsi le bord du complexe. On a bien $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ car $\Lambda^2 = 2\Lambda$ (Remarque 3.3.8).

Remarque 3.6.2. Pour un ensemble $A \in \mathcal{AS}$, la fonction $\mathbf{1}_A$ est Nash-constructible, et son *link* $\Lambda \mathbf{1}_A$ est à valeurs dans $2\mathbb{Z}$. Son bord est donc nul.

Plus généralement, le bord ∂B est formé des points où B n'est pas localement symétrique par arcs.

Définition 3.6.3. *Support.*

Pour $c \in C_k(X)$, on définit son support comme le plus petit ensemble semi-algébrique fermé qui la représente. Si $c = [A]$,

$$\text{supp } c = \overline{\{x \in A \mid \dim_x(A) = k\}}$$

Définition 3.6.4. *Pushforward.*

Pour $f : X \longrightarrow Y$ une fonction semi-algébrique continue et propre, on définit un morphisme *pushforward* $f_* : C_k(X) \longrightarrow C_k(Y)$. C'est l'image prise avec des coefficients modulo 2, correspondant au cardinal des fibres, ceci génériquement en dimension k . Plus précisément, si $c = [A] \in C_k(X)$, on décompose

$$f(A) \sim B_1 + \cdots + B_r$$

avec $y \longmapsto \text{card}(f^{-1}(y) \cap A) = n_i$ constant modulo 2 sur $B_i \setminus B'_i$, où $B'_i \subset B_i$ est semi-algébrique, et $\dim B'_i < k$. On définit alors

$$f_*(c) = n_1[B_1] + \cdots + n_r[B_r]$$

On peut définir directement ce *pushforward* sur les chaînes avec celui des fonctions constructibles 3.3.3

$$f_*(c) = [\{y \in Y \mid f_* \mathbf{1}_A \equiv 1 \pmod{2}\}]$$

Exemple 3.6.5. La fonction $f : (x, y) \longmapsto (x^2, y)$ replie le plan sur sa partie droite. Le cardinal d'une fibre $f^{-1}(x, y)$ vaut $\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Comme on travaille avec coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ et génériquement en dimension k , $f_*(\mathbb{R}^2) = [\{0\} \times \mathbb{R}] = [0]$.

Proposition 3.6.6. *Fonctorialité et bord.*

Pour $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des fonctions semi-algébriques continues et propres, on a les propriétés

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

et

$$\partial_{k,Y} \circ f_* = f_* \circ \partial_{k,X}$$

Définition 3.6.7. *Restriction et clôture.*

Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble semi-algébrique localement fermé.

Si $c \in C_k(X)$, on définit la *restriction* de $c = [A]$ à Z par

$$c|_Z = [A \cap Z] \in C_k(Z)$$

Cette opération est bien définie et ne commute pas avec le bord en général.

Si $U \subset X$ est un ouvert semi-algébrique, alors

$$\partial_{k,U}(c|_U) = (\partial_{k,X}(c))|_U$$

Si $c \in C_k(Z)$, on définit la *clôture* de $c = [A]$ dans X par

$$\bar{c} = [cl(A)] \in C_k(X)$$

où $cl(\cdot)$ est l'adhérence pour la topologie forte.

Cette opération est bien définie et ne commute pas avec le bord en général.

Définition 3.6.8. *Pullback.*

On définit le *pullback* dans le cas particulier d'un carré acyclique. On utilise le fait que dans une telle situation on a génériquement un isomorphisme, et on fait le *pushforward* de la réciproque. Dans un carré

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

avec $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}$ des ensembles semi-algébriques localement fermés,

π semi-algébrique, propre et continue,

i l'inclusion d'un fermé semi-algébrique $Y \subset X$,

$\tilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$,

la restriction de π est un homéomorphisme $\pi' : \tilde{X} \setminus \tilde{Y} \longrightarrow X \setminus Y$.

Pour $c \in C_k(X)$, on définit $\pi^{-1}(c) \in C_k(\tilde{X})$ par

$$\pi^{-1}(c) = \overline{(\pi'^{-1})_*(c|_{X \setminus Y})}$$

Proposition 3.6.9. *L'homologie du complexe $C_*(X)$ est $H_*^{BM}(X)$, l'homologie de Borel-Moore de X .*

Proposition 3.6.10. *Pour une inclusion fermée $Y \subset X$ d'ensembles $\mathcal{AS}$ la suite*

$$0 \longrightarrow C_*(Y) \longrightarrow C_*(X) \longrightarrow C_*(X \setminus Y) \longrightarrow 0$$

est exacte, où la première flèche est donnée par functorialité de l'inclusion $i : Y \hookrightarrow X$ et la deuxième est la restriction des chaînes définie en 3.6.7.

Ceci découle de la définition des chaînes et de leur restriction à un ouvert. Le bord est compatible avec ces flèches.

3.6.2 Filtration Nash-constructible

On suivra [21], §3. On va définir une filtration sur $C_*(X)$

$$0 = \mathcal{N}_{-k-1}C_k(X) \subset \mathcal{N}_{-k}C_k(X) \subset \cdots \subset \mathcal{N}_0C_k(X) = C_k(X)$$

Comme les chaînes dans $C_k(X)$ sont définies à un ensemble de dimension $(k-1)$ près, on travaillera génériquement en dimension k .

Définition 3.6.11. *Fonctions génériquement Nash-constructibles.*

Pour $k \in \mathbb{N}$, une fonction constructible $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ est dite *génériquement Nash-constructible en dimension k* si elle coïncide avec une fonction Nash-constructible sur $X \setminus X'$ avec $\dim X' < k$. Elle est dite *génériquement Nash-constructible* si elle est génériquement Nash-constructible en dimension $\dim X$.

Définition 3.6.12. *Chaînes p -Nash-constructibles.*

Soient $c \in C_k(X)$ et $-k \leq p \leq 0$. La chaîne c est dite *p -Nash-constructible* s'il existe une fonction $\varphi_{c,p} : X \longrightarrow 2^{k+p}\mathbb{Z}$ génériquement Nash-constructible en dimension k telle que

$$c = \left[\left\{ x \in X \mid \varphi_{c,p}(x) \equiv 2^{k+p} \pmod{2^{k+p+1}} \right\} \right]$$

On note $c \in \mathcal{N}_p C_k(X)$, et on dit que $\varphi_{c,p}$ représente c pour l'indice p .

Le choix d'une telle fonction $\varphi_{c,p}$ n'est pas unique. Si Z est la clôture $\mathcal{AS}$ de $\text{supp}(c)$, on peut toujours supposer que $\text{supp}(\varphi_{c,p}) \subset Z$. En particulier, on peut supposer que $\dim Z \leq k$. En effet, on peut remplacer $\varphi_{c,p}$ par $\varphi_{c,p} \cdot \mathbf{1}_Z$, car $\mathbf{1}_Z$ est Nash-constructible. Il peut arriver que l'on puisse choisir $\varphi_{c,p} = 2^{k+p} \cdot \mathbf{1}_{\text{supp}(c)}$ pour représenter c si cette fonction est Nash-constructible.

Remarque 3.6.13. *Le cas $p = -k$.*

Les éléments de $\mathcal{N}_{-k}C_k(X)$ sont les chaînes $c = [A]$ représentées par un ensemble $A \in \mathcal{AS}$. Dans ce cas, la fonction $\mathbf{1}_A$ est Nash-constructible et représente c . On dit que c est pure.

Exemple 3.6.14. Pour $A = \mathbb{R}^2 \cap \{x \leq 0\}$, la fonction $2 \cdot \mathbf{1}_A$ est Nash-constructible et représente A . Ainsi $[A] \in \mathcal{N}_{-1}C_2(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 3.6.15. ([21], § 3.3 et Théorème 3.6)

Les chaînes p -constructibles vérifient les propriétés suivantes :

(i) Croissance.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_p C_k(X) \subset \mathcal{N}_{p+1} C_k(X)$$

(ii) Borne inférieure.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_{-k-1} C_k(X) = 0$$

(iii) Borne supérieure.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{N}_0 C_k(X) = C_k(X)$$

(iv) Compatibilité avec le bord.

$$\forall k, p \in \mathbb{N} \quad \partial : \mathcal{N}_p C_k(X) \subset \mathcal{N}_p C_{k-1}(X)$$

(v) Fonctorialité. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme $\mathcal{AS}$. On a

$$f_* : \mathcal{N}_p C_k(X) \rightarrow \mathcal{N}_p C_k(Y)$$

(vi) Additivité. Pour une inclusion fermée $Y \subset X$ d'ensembles $\mathcal{AS}$ la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_p C_k(Y) \rightarrow \mathcal{N}_p C_k(X) \rightarrow \mathcal{N}_p C_k(X \setminus Y) \rightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. (i) Si $\varphi_{c,p}$ est p -Nash-constructible, à valeurs dans $2^{k+p}\mathbb{Z}$, et représente c , alors $2 \cdot \varphi_{c,p}$ représente c pour l'indice $(p+1)$.

(ii) Si $c \in \mathcal{N}_{-k-1} C_k(X)$, alors $c = [\{x \in X \mid \varphi_{c,-k-1}(x) \equiv 2^{-1} \pmod{2}\}] = [\emptyset] = 0$.

(iii) Toute chaîne c est représentée par $2^k \cdot \mathbf{1}_{\text{supp}(c)}$ pour l'indice 0. C'est une fonction Nash-constructible d'après le Théorème 3.3.12.

(iv) Si $c = [A]$ est représentée par $\varphi_{c,p}$ pour l'indice p en dimension k alors ∂c est représentée par la fonction $\varphi_{\partial c, p} = \frac{1}{2} \Lambda \varphi_{c,p}$ pour l'indice p en dimension $(k-1)$. Des raisons géométriques suggèrent de prendre plutôt $\frac{1}{2} \Omega \varphi_{c,p} = \varphi_{c,p} - \frac{1}{2} \Lambda \varphi_{c,p}$ pour représenter le bord en indice p et dimension $(k-1)$ lorsque k est impair, cependant ces fonctions sont congrues modulo 2^{k+p} .

On a :

$$c = \left[\left\{ x \in X \mid \varphi_{c,p}(x) \equiv 2^{k+p} \pmod{2^{k+p+1}} \right\} \right]$$

$$c = \left[\left\{ x \in X \mid 2^{k+p} \cdot \mathbf{1}_A(x) \equiv 2^{k+p} \pmod{2^{k+p+1}} \right\} \right]$$

or $\varphi_{c,p} \equiv 2^{k+p} \cdot \mathbf{1}_A \pmod{2^{k+p+1}}$, ainsi que leur *link*, mais la fonction $2^{k+p} \cdot \mathbf{1}_A$ n'est pas nécessairement Nash-constructible. Par définition du bord

$$\partial A = \{x \in A \mid \Lambda \mathbf{1}_A(x) \equiv 1 \pmod{2}\}$$

$$\partial c = \left[\left\{ x \in A \mid \Lambda(2^{k+p} \cdot \mathbf{1}_A)(x) \equiv 2^{k+p} \pmod{2^{k+p+1}} \right\} \right]$$

$$\partial c = \left[\left\{ x \in X \mid \Lambda \varphi_{c,p}(x) \equiv 2^{k+p} \pmod{2^{k+p+1}} \right\} \right]$$

Or $\Lambda \varphi_{c,p}$ est à valeurs paires car $\varphi_{c,p}$ est Nash-constructible, en divisant par 2 on obtient

$$\partial c = \left[\left\{ x \in X \mid \frac{1}{2} \Lambda \varphi_{c,p}(x) \equiv 2^{k+p-1} \pmod{2^{k+p}} \right\} \right]$$

Ainsi $\frac{1}{2}\Lambda\varphi_{c,p}$ représente le bord pour l'indice p en dimension $(k-1)$.

(v) Si c est représentée par $\varphi_{c,p}$ alors f_*c est représentée par $\varphi_{f_*c,p} = f_*(\varphi_{c,p})$:

$$f_*c = \left[\left\{ y \in Y \quad f_*\varphi_{c,p}(y) \equiv 1 \pmod{2^{k+p+1}} \right\} \right]$$

(vi) On a déjà, d'après la proposition 3.6.10, l'exactitude de

$$0 \longrightarrow C_k(Y) \longrightarrow C_k(X) \longrightarrow C_k(X \setminus Y) \longrightarrow 0$$

Il reste à vérifier la définition et l'exactitude avec la filtration. La fonctorialité donne l'existence de $\mathcal{N}_p C_k(Y) \longrightarrow \mathcal{N}_p C_k(X)$. Par construction, la restriction d'une fonction Nash-constructible à $X \setminus Y$ est Nash-constructible, donc $\mathcal{N}_p C_k(X) \longrightarrow \mathcal{N}_p C_k(X \setminus Y)$ est bien définie. L'exactitude découle de la suite exacte ci-dessus et de restrictions de fonctions Nash-constructibles. $\square$

Corollaire 3.6.16. ([21])

Le complexe filtré $\mathcal{N}_\bullet C_*(X)$ définit une suite spectrale $(E^r(X))_{r \geq 0}$ vérifiant

(i) Le terme $E^0(X)$ est donné par

$$E_{p,q}^0(X) = \frac{\mathcal{N}_p C_{p+q}(X)}{\mathcal{N}_{p-1} C_{p+q}(X)}$$

et la différentielle d_0 est induite par la bord ∂ du complexe $C_*(X)$.

(ii) La suite spectrale $(E^r(X))_{r \geq 0}$ est fonctorielle en X .

(iii) Pour une inclusion fermée $Y \subset X$

$$0 \longrightarrow E_{p,q}^0(Y) \longrightarrow E_{p,q}^0(X) \longrightarrow E_{p,q}^0(X \setminus Y) \longrightarrow 0$$

est exacte, et induit une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow E_{p,q}^1(Y) \longrightarrow E_{p,q}^1(X) \longrightarrow E_{p,q}^1(X \setminus Y) \longrightarrow E_{p,q-1}^1(Y) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. (i) La suite spectrale est définie en appliquant 2.0.6 au complexe filtré $\mathcal{N}_\bullet C_*(X)$.

(ii) découle de la proposition 3.6.15, (v). On obtient (iii) en prenant le quotient de deux suites exactes de la proposition 3.6.15, (vi). $\square$

Chapitre 4

Résolution des singularités et hyperrésolutions cubiques

Ces outils permettent d'étudier des singularités de variétés algébriques réelles définies sur un corps de caractéristique nulle, en les reliant à des variétés lisses.

4.1 Résolution des singularités

Les hyperrésolutions cubiques développées dans [11] et [10] utilisent la résolution des singularités pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique zéro. Ce théorème a été démontré dans [14].

Théorème 4.1.1. *Soit X une variété algébrique définie sur un corps k de caractéristique zéro. Il existe une résolution de X , qui est une variété lisse $\tilde{X}$ et un morphisme birationnel et propre $f : \tilde{X} \rightarrow X$, fonctoriel par rapport aux morphismes lisses : pour tout morphisme lisse $\varphi : X' \rightarrow X$, il existe un lifting $\varphi' : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ lisse, qui rend le carré*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi \\ \tilde{X} & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

commutatif.

De plus, si Y est une sous-variété fermée de X , il existe une résolution f telle que $\tilde{Y} = f^{-1}(Y)$ est un diviseur à croisements normaux dans $\tilde{X}$, et f est un isomorphisme en dehors de $\tilde{Y}$ et du lieu singulier de X .

Dans le cadre d'une variété plongée, une résolution d'une variété algébrique X peut être obtenue en composant un nombre fini d'éclatements de l'espace ambiant, dont le centre est une sous-variété fermée contenue dans les lieux singuliers.

Théorème 4.1.2. ([26], Théorème 1.0.2)

Soit Y une sous-variété d'une variété algébrique lisse X définie sur un corps k de caractéristique

zéro. Il existe une suite

$$X = X_0 \xleftarrow{\sigma_1} X_1 \xleftarrow{\sigma_2} X_2 \leftarrow \cdots \leftarrow X_{r-1} \xleftarrow{\sigma_r} X_r$$

d'éclatements $\sigma_i : X_{i-1} \leftarrow X_i$ de centres lisses $C_{i-1} \subset X_{i-1}$ tels que

(a) Le diviseur exceptionnel E_i du morphisme induit $\sigma^i = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_i : X_i \rightarrow X$ est à croisements normaux simples, et C_i est à croisements normaux simples avec E_i .

(b) Soit $Y_i \subset X_i$ la transformée stricte de Y . Les centres C_i sont disjoints de l'ensemble $\text{Reg}(Y) \subset Y_i$ des points où Y (et non pas Y_i) est lisse (et n'est pas nécessairement contenu dans Y_i).

(c) La transformée stricte $\tilde{Y} = Y_r$ de Y est lisse et est à croisements normaux simples avec le diviseur exceptionnel E_r .

(d) Le morphisme $(X, Y) \leftarrow (\tilde{X}, \tilde{Y})$ défini par cette résolution plongée commute avec les morphismes lisses.

4.2 Hypperrésolutions cubiques

Les hyperrésolutions cubiques sont des outils définis dans [10] et redéfinis dans [11]. On peut en retrouver une construction dans [23]. Des rappels sont effectués dans les paragraphes 5.3 et 5.3.4.

4.3 Théorème de Guillén Navarro-Aznar

Dans [11], Guillén et Navarro-Aznar démontrent des théorèmes qui permettent d'étendre la définition d'une structure fonctorielle à des variétés algébriques singulières lorsque celle-ci est définie sur les variétés lisses. Les outils employés sont les hyperrésolutions cubiques, construites dans [10], qui utilisent la résolution des singularités de Hironaka ([14]). Ces théorèmes s'appliquent dans différents cadres.

La catégorie de départ du foncteur est une sous-catégorie de $\mathbf{Sch}(k)$, les schémas réduits de type fini définis sur un corps k de caractéristique zéro. Nous utiliserons ce théorème avec $k = \mathbb{R}$.

Soit $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ la sous-catégorie $\mathbf{Sch}(\mathbb{R})$ avec même objets et morphismes propres réguliers.

Soit $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ dont les objets sont les schémas projectifs réguliers.

Le Théorème 2.2.2 de Guillén et Navarro-Aznar dans [11] permet d'étendre un foncteur défini sur $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ à la catégorie $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$.

La catégorie d'arrivée peut être très générale. Nous utilisons ce théorème dans un cadre particulier, plus simple. Notre catégorie $\mathfrak{C}$ sera la catégorie des complexes bornés de $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels, filtrés par une filtration décroissante et bornée. Les morphismes respectent la filtration et commutent avec l'opérateur de cobord.

La catégorie $Ho\mathfrak{C}$, qui est obtenue en localisant $\mathfrak{C}$ par rapport à une certaine classe de quasi-isomorphismes, peut alors être vue de manière plus concrète. En effet, il y a une suite spectrale

associée à un complexe filtré $(K^*, F^\bullet)$ définie par

$$E_0^{p,q}(K) = \frac{F^p K^{p+q}}{F^{p+1} K^{p+q}}$$

avec la différentielle induite par le cobord sur chaque terme.

La filtration sur K induit naturellement une filtration sur la cohomologie de K par

$$\mathcal{W}^p H^q(K) = \text{im} [H^q(F^p K^*) \longrightarrow H^q(K^*)]$$

La suite spectrale converge vers $H^*(X)$, c'est-à-dire

$$E_\infty^{p,q}(K) = \frac{\mathcal{W}^p H^{p+q}(K^*)}{\mathcal{W}^{p+1} H^{p+q}(K^*)}$$

Par ce procédé la catégorie $\mathfrak{C}$ est équivalente à celle des suites spectrales $(E_r)_{r \geq 0}$.

Si $(E_r)_{r \geq 0}$ est la suite spectrale d'un complexe filtré, un *quasi-isomorphisme* dans $\mathcal{C}$ est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme sur E_1 (et donc sur tous les E_r pour $r \geq 1$).

La catégorie $Ho \mathfrak{C}$ est enfin la catégorie $\mathfrak{C}$ localisée en ces quasi-isomorphismes. Un isomorphisme dans $Ho \mathfrak{C}$ sera un composé $s_1(t_1)^{-1} \cdots s_p(t_p)^{-1}$ de morphismes s_i et t_i de suites spectrales dont chacun est un isomorphisme à partir du terme E_1 .

Ces catégories $\mathfrak{C}$ et $Ho \mathfrak{C}$ vérifient les hypothèses du Théorème 2.2.2 de [11].

On se servira du foncteur simple s défini dans le paragraphe 5.3.

Un *carré acyclique* est un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xhookrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xhookrightarrow{i} & X \end{array}$$

où i est l'inclusion d'une sous-variété fermée Y dans X , $\tilde{Y} = \pi^{-1}(Y)$, et la restriction de $\pi : \tilde{X} \setminus \tilde{Y} \longrightarrow X \setminus Y$ est un isomorphisme.

Un *carré acyclique élémentaire* est un carré acyclique où X est lisse compacte, Y est lisse, et π est l'éclatement de X le long de Y .

Théorème 4.3.1. *Soit $G : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{C}$ un foncteur contravariant vérifiant (F1) $G(\emptyset) = 0$, et le morphisme canonique, obtenu à partir des inclusions,*

$$G(X \sqcup Y) \longrightarrow G(X) \times G(Y)$$

est un isomorphisme.

(F2) *Pour un carré acyclique élémentaire*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xhookrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xhookrightarrow{i} & X \end{array}$$

on a

$$\mathbf{s} \left(\begin{array}{ccc} G(\tilde{Y}) & \xleftarrow{G(j)} & G(\tilde{X}) \\ \uparrow_{G(\pi)} & & \uparrow_{G(\pi)} \\ G(Y) & \xleftarrow{G(i)} & G(X) \end{array} \right) \cong 0$$

Alors, il existe une extension de G en un foncteur contravariant $G_c : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{Ho}\mathfrak{C}$ vérifiant

(Ad) Pour une inclusion fermée de schémas, on a un isomorphisme

$$G_c(X \setminus Y) \cong \mathbf{s}(G_c(X) \rightarrow G_c(Y))$$

(Ac) Pour un carré acyclique

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

on a un isomorphisme

$$\mathbf{s} \left(\begin{array}{ccc} G_c(\tilde{Y}) & \xleftarrow{G_c(j)} & G_c(\tilde{X}) \\ \uparrow_{G_c(\pi)} & & \uparrow_{G_c(\pi)} \\ G_c(Y) & \xleftarrow{G_c(i)} & G_c(X) \end{array} \right) \cong 0$$

De plus, cette extension G_c est unique, à isomorphisme unique près : si G'_c est une autre extension vérifiant les propriétés (Ad) et (Ac), alors il existe un unique isomorphisme de foncteurs $G_c \rightarrow G'_c$.

Chapitre 5

Cohomology and products of real weight filtrations

5.1 Introduction

In [7], Deligne showed the existence of a so-called weight filtration on the rational cohomology with compact supports of complex algebraic varieties, using mixed Hodge structures. In the real case, where there is no such structure, an analog of the weight filtration on the cohomology with compact supports and $\mathbb{Z}_2$ -coefficients of real algebraic varieties was proposed by Totaro in [25], and in [21], McCrory and Parusiński developed a homological analog on the Borel-Moore homology with $\mathbb{Z}_2$ -coefficients of the set of real points of real algebraic varieties. These real weight filtrations can be defined using the work of Guillén and Navarro-Aznar on cubical hyperresolutions ([10] and [11]) : for a compact variety, the weight filtration is induced by the spectral sequence (from its level two) associated to a cubical hyperresolution. Furthermore, unlike the complex case with coefficients in $\mathbb{Q}$, in the real case, where we are dealing with coefficients in $\mathbb{Z}_2$ in order to have a $(\mathbb{Z}_2)$ -orientation, the associated spectral sequence does not degenerate at level two in general.

In [21], McCrory and Parusiński showed furthermore that the spectral sequence inducing the weight filtration is itself a natural invariant of a real algebraic variety in the following sense. There is a functor that assigns to each real algebraic variety a filtered chain complex, the so-called weight complex, which is unique up to filtered quasi-isomorphism, and functorial for proper regular morphisms, inducing the weight filtration on Borel-Moore homology. The spectral sequence induced by the weight complex, called the weight spectral sequence, coincides from level one with the spectral sequence associated to a cubical hyperresolution in the compact case, and we can extract from its level one the virtual Betti numbers ([19]), which are the unique additive invariants of real algebraic varieties coinciding with the usual Betti numbers on compact nonsingular varieties. Moreover, the weight complex can be realized at the geometric chain level by a filtration defined on semialgebraic chains with closed supports, using resolution of singularities. Extending it to the wider category of $\mathcal{AS}$ -sets ([15], [16]) using Nash-constructible functions ([18], [20]), McCrory and Parusiński showed that their geometric filtration is also functorial with respect to semialgebraic maps with $\mathcal{AS}$ -graph.

In this paper, we first achieve the cohomological counterpart of McCrory and Parusiński's work. Using the extension criterion of Guillén and Navarro-Aznar ([11]), we associate to any real algebraic variety a filtered cochain complex, which induces Totaro's weight filtration on the cohomology with compact supports and $\mathbb{Z}_2$ -coefficients of the set of real points of real algebraic varieties (theorem 5.3.4, proposition 5.3.7 and corollary 5.3.8). This functor, that we call the cohomological weight complex, is unique (with properties of extension, acyclicity and additivity) and well-defined from the level one of the spectral sequence it induces. The virtual Betti numbers can be recovered from the rows of the level two of the reindexed cohomological weight spectral sequence (proposition 5.3.10). In paragraph 5.3.4, we prove that, in the compact case, the reindexed cohomological weight spectral sequence is isomorphic to the spectral sequence associated to a cubical hyperresolution from the level two.

In section 5.4, we construct a filtration on the semialgebraic cochain complex (which we define in section 5.2.3 to be the dual of the semialgebraic chain complex with closed supports of [21], showing in proposition 5.2.2 that it does compute the cohomology with compact supports) that realizes at the cochain level the cohomological weight complex (theorem 5.4.3). This filtration is a dualization of the geometric filtration of [21]. It verifies on short exact sequences the dual properties of additivity for a closed inclusion and acyclicity for a resolution of singularities (lemma 5.4.2) and is filtered quasi-isomorphic to the canonical filtration on nonsingular projective real algebraic varieties. Moreover, since the spectral sequence induced by the dualized filtration is naturally isomorphic (from level zero) to the dual spectral sequence of the original filtration (remark 5.4.1), we deduce that the cohomological weight spectral sequence is dual to the homological one and that the cohomological and homological weight filtrations are dual too (corollary 5.4.4).

The second part of this paper is devoted to the question of the compatibility of the real weight filtrations with products. First, if X and Y are two real algebraic varieties, we define the product of two respective semialgebraic chains of X and Y in a natural way (definition 5.5.1). We then look at its compatibility with the geometric filtration (proposition 5.5.6). Finally, we show that there is a filtered quasi-isomorphism between the tensor product of the geometric filtrations of X and Y and the geometric filtration of the cross product $X \times Y$ (theorem 5.5.15). In particular, the weight complex of the product is isomorphic to the product of the weight complexes and the Künneth isomorphism is filtered with respect to the weight filtration. The induced relations on weight spectral sequences can also be used to prove the multiplicativity of the virtual Poincaré polynomial.

These results have their cohomological counterparts (paragraph 5.5.3) and we use them with $Y = X$ to define a cup product on the dual geometric filtration of X considered in the category of filtered cochain complexes localized with respect to filtered quasi-isomorphisms (paragraph 5.5.4). We obtain an induced cup product on the cohomological weight spectral sequence of X and furthermore the usual cup product on the cohomology with compact supports of (the set of real points of) X is filtered with respect to the cohomological weight filtration (proposition 5.5.22). We define also a cap product, inducing the properties of the usual cap product on cohomology and homology from the ones on the (co)chain level (section 5.5.5). In the last subsection 5.5.6, we study the cap product with the fundamental class of a compact

variety X at the weight spectral sequences level. This morphism coincides with Poincaré duality isomorphism for X nonsingular. We show that, when X is singular, the kernel contains the non-pure cohomology classes (non-minimal weight) and the image is included in the pure homology classes (minimal weight). However these inclusions are not equalities in general (remark 5.5.28). In particular, this brings us some obstructions for a compact real algebraic variety to satisfy Poincaré duality.

5.2 Framework

In this section, we set the context in which we work in this paper. We first fix precisely the source categories (categories of schemes over $\mathbb{R}$) and target categories (categories of filtered chain and cochain complexes) of the functors we are going to deal with. We then describe the geometry of real algebraic varieties we study.

5.2.1 Filtered cochain complexes

In this paper, we will work with cochain complexes equipped with a decreasing filtration. We will use the following notations :

- $\mathfrak{C}$ will denote the category of bounded cochain complexes of $\mathbb{Z}_2$ -vector spaces with bounded decreasing filtration.

To each filtered complex $(K^*, F^\bullet)$ of $\mathfrak{C}$ is associated a second quadrant spectral sequence E with

$$E_0^{p,q} = \frac{F^p K^{p+q}}{F^{p+1} K^{p+q}} \text{ and } E_1^{p,q} = H^{p+q} \left(\frac{F^p K^*}{F^{p+1} K^*} \right),$$

the differential d of the spectral sequence being induced by the coboundary operator of K^* .

The filtration $F^\bullet$ on K^* induces naturally a filtration on the cohomology of K^* by setting

$$F^p H^q(K) := \text{im} [H^q(F^p K^*) \longrightarrow H^q(K^*)],$$

and the spectral sequence E converges to the cohomology $H^*(K^*)$ of K^* , that is

$$E_\infty^{p,q} = \frac{F^p H^{p+q}(K^*)}{F^{p+1} H^{p+q}(K^*)}.$$

A morphism of filtered complexes which induces an isomorphism on E_1 (and therefore on all E_r from $r \geq 1$) will be called a *quasi-isomorphism of $\mathfrak{C}$* , or simply a *filtered quasi-isomorphism*.

- $Ho\mathfrak{C}$ denotes the localization of $\mathfrak{C}$ with respect to quasi-isomorphisms of $\mathfrak{C}$ (we keep the notation of [11], 1.5.1).

- $\mathfrak{D}$ will denote the category of complexes of $\mathbb{Z}_2$ -vector spaces, and a morphism of cochain complexes which induces an isomorphism on their cohomology will be called a *quasi-isomorphism of $\mathfrak{D}$* , or simply a *quasi-isomorphism*.
- $Ho\mathfrak{D}$ denotes the localisation of $\mathfrak{D}$ with respect to quasi-isomorphisms of $\mathfrak{D}$.

Remark 5.2.1. Let $\phi : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ be the forgetful functor forgetting the filtration. It can be localized into a functor $Ho\mathfrak{C} \longrightarrow Ho\mathfrak{D}$, which we denote again by ϕ , because a filtered quasi-isomorphism is in particular a quasi-isomorphism.

5.2.2 Real algebraic varieties

We are interested in the study of the geometry of the set of real points of real algebraic varieties. In this paper, a real algebraic variety will be a reduced scheme of finite type defined over $\mathbb{R}$. We denote by :

- $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ the category of real algebraic varieties and proper regular morphisms.
- $\mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R})$ the full subcategory of $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ whose objects are compact nonsingular varieties, that is proper regular schemes.
- $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ the full subcategory of $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$ whose objects are nonsingular projective varieties, that is regular projective schemes.

For X a real algebraic variety of $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, we denote by $X_{\mathbb{R}}$ the set of its real points. Equipped with its sheaf of regular functions, the set $X_{\mathbb{R}}$ is a real algebraic variety in the sense of [4], which can be locally embedded in an affine space $\mathbb{R}^n$. We equip it with the strong topology of $\mathbb{R}^n$, and then $X_{\mathbb{R}}$ is a Hausdorff space, locally compact.

5.2.3 Semialgebraic chain and cochain complexes

Let X be a real algebraic variety. We will consider complexes of semialgebraic chains defined using semialgebraic subsets of $X_{\mathbb{R}}$. In this paper, we will always work with $\mathbb{Z}_2$ -coefficients, so that real algebraic varieties and arc-symmetric sets ([4], [16]) always have a $(\mathbb{Z}_2)$ -orientation and a fundamental class (recall that real algebraic varieties may not be $\mathbb{Z}$ -oriented, as $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).

We will consider the two following dual complexes :

- the chain complex $(C_*(X), \partial_*)$ of semialgebraic chains of $X_{\mathbb{R}}$ with closed supports, whose homology is the Borel-Moore homology $H_*(X) := H_*^{BM}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2)$ of $X_{\mathbb{R}}$ with coefficients in $\mathbb{Z}_2$ (see Appendix, paragraph 6 of [21]),
- the cochain complex $(C^*(X), \delta^*)$ which will be by definition the dual of $(C_*(X), \partial_*)$ and whose cohomology $(H_*(X))^{\vee}$ is, by proposition 5.2.2 below, isomorphic to the cohomology with compact supports $H_c^*(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2)$ of $X_{\mathbb{R}}$ with coefficients in $\mathbb{Z}_2$.

Proposition 5.2.2. *With the notations above, the Borel-Moore homology $H_*(X) := H_*^{BM}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2)$ and the cohomology with compact supports $H^*(X) := H_c^*(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_2)$ of $X(\mathbb{R})$ are dual :*

$$H^*(X) = (H_*(X))^{\vee}$$

Proof. Borel-Moore homology and cohomology with compact supports of $X_{\mathbb{R}}$ can be defined using relative homology and cohomology of pairs. We have

$$H_*^{BM}(X_{\mathbb{R}}) = H_*(\overline{X}_{\mathbb{R}}, \overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) := H_*(C_*(\overline{X}_{\mathbb{R}}, \overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}))$$

and

$$H_c^*(X_{\mathbb{R}}) = H^*(\overline{X}_{\mathbb{R}}, \overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) := H^*(C^*(\overline{X}_{\mathbb{R}}, \overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}})),$$

with $C_*(\overline{X}_{\mathbb{R}}, \overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) := \frac{C_*(\overline{X})}{C_*(\overline{X} \setminus X)}$ and $C^*(\overline{X}_{\mathbb{R}}, \overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) := \frac{C^*(\overline{X})}{C^*(\overline{X} \setminus X)}$, where $X \hookrightarrow \overline{X}$ is an open compactification, that is an embedding of X in a compact variety $\overline{X}$, whose image is open in $\overline{X}$ (notice that we have $\overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}} = (\overline{X} \setminus X)_{\mathbb{R}}$).

The closed inclusion $\overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathbb{R}}$ induces the following long exact sequences of homology and cohomology of the pair $(\overline{X}_{\mathbb{R}}, \overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}})$:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_n^{BM}(\overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) &\longrightarrow H_n^{BM}(\overline{X}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow H_n^{BM}(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow H_{n-1}^{BM}(\overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longleftarrow H_c^n(\overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) &\longleftarrow H_c^n(\overline{X}_{\mathbb{R}}) \longleftarrow H_c^n(X_{\mathbb{R}}) \longrightarrow H_c^{n-1}(\overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}) \longleftarrow \cdots \end{aligned}$$

The dual of the first sequence is then isomorphic to the second one by the five lemma, because the sets $\overline{X}_{\mathbb{R}}$ and $\overline{X}_{\mathbb{R}} \setminus X_{\mathbb{R}}$ are compact and consequently their Borel-Moore homology and cohomology with compact supports are respectively isomorphic to their singular homology and cohomology which are dual to each other. $\square$

Remark 5.2.3. The cohomology with compact supports is normally computed from the complex of cochains with compact supports. However, this complex does not have good additivity properties, in contrast with the complex C^* .

5.3 Cohomological weight complex

We prove the existence and uniqueness of the cohomological weight complex in a way similar to the method of [21], using Theorem 2.2.2 of Guillén and Navarro-Aznar in [11]. The cohomological weight complex is the unique extension to all real algebraic varieties and proper regular morphisms, satisfying conditions of additivity for closed inclusions and acyclicity for generalized blow-ups, of the functor that assigns to a nonsingular projective variety its complex of semialgebraic cochains with the canonical filtration.

The Theorem 2.2.2 of [11] is a criterion of extension for functors defined on nonsingular projective varieties. Precisely, suppose that G is a functor defined on nonsingular projective varieties. Theorem 2.2.2 of [11] ensures the existence of an extension G' of G defined for all (possibly singular or non-compact) varieties, as soon as some relation between the values of G on a nonsingular projective variety X , a smooth closed subvariety Y , the blowup $\tilde{X}$ of X along Y and the exceptional divisor $\tilde{Y}$ (these four varieties form a so-called elementary acyclic square) is verified (proof of theorem 5.3.4, condition (F2)). The extended functor G' then satisfies a generalization (Theorem 5.3.4, condition (Ac)) of such a blowup formula for any morphism f :

$\tilde{X} \rightarrow X$ of varieties that is an isomorphism over the complement of a subvariety Y of X (this constitutes a so-called acyclic square).

The structure of the target category of the functor G is important in this theory. The prototype is the derived category of chain complexes of an abelian category, where the set of morphisms between two complexes is expanded to include the inverses of quasi-isomorphisms (morphisms that induce isomorphisms on homology). Guillén and Navarro-Aznar introduced in [11] a generalization of the category of chain complexes with the notion of category of cohomological descent, such a category possessing a class of morphisms analogous to quasi-isomorphisms and a functor $\mathbf{s}$ from diagrams to objects that is analogous to the operation associating to a diagram of chain complexes its total complex.

The category $\mathfrak{D}$ that we defined above in 5.2.1 is an abelian category and its derived category $Ho\mathfrak{D}$ is a triangulated category. However $\mathfrak{C}$ is not an abelian category, nevertheless it is a category of cohomological descent (Proposition (1.7.5) of [11]). In order to replace the notions of exact sequences and distinguished triangles in an abelian category, Guillén and Navarro-Aznar introduced the notions of acyclicity of diagrams and acyclicity of objects in a category of cohomological descent. In our context, an object in $\mathfrak{C}$ is acyclic if by definition $E_1 = 0$ for the associated spectral sequence.

In this paper we consider varieties over $\mathbb{R}$. The target category will be $Ho\mathfrak{C}$, which is the localization of the category $\mathfrak{C}$ of filtered cochain complexes of $\mathbb{Z}_2$ -vector spaces, with respect to the class of filtered quasi-isomorphisms (5.2.1). The diagrams we will consider will be cubical diagrams, on which is defined a functor $\mathbf{s}$ that associates to each cubical diagram its simple filtered complex : see definition 5.3.1 below.

The initial functor will be the functor which assigns to a real nonsingular projective variety its complex of semialgebraic cochains (5.2.3) equipped with the canonical filtration defined below (definition 5.3.2). The blowup formula will follow from a short exact sequence for the cohomology of a blowing-up (remark 5.3.5), showing the existence of an acyclic and additive extension called the cohomological weight complex (paragraph 5.3.1).

In paragraph 5.3.2, we show that the spectral sequence induced by the cohomological weight complex (well-defined only from level one) converges to the cohomological weight filtration on the cohomology with compact supports and, in paragraph 5.3.3, that one can recover, as in [21], section 1, the virtual Betti numbers ([19]) from its level one terms. More precisely, the virtual Betti numbers coincide with the Euler characteristics of the rows of the reindexed cohomological weight spectral sequence.

Finally, in paragraph 5.3.4, we give to the cohomological weight spectral sequence of a compact real algebraic variety the following viewpoint : it can be regarded as the spectral sequence naturally induced from a cubical hyperresolution of the variety. Precisely, the spectral sequence associated to a cubical hyperresolution of a compact variety is isomorphic from level two to its cohomological weight spectral sequence, by the Deligne shift.

Definition 5.3.1. Keeping the notations from [21] and [11], for $n \geq 0$, let $\square_n^+$ be the set of subsets of $\{0, 1, \dots, n\}$, partially ordered by inclusion. A *cubical diagram* of type $\square_n^+$ in a category $\mathcal{X}$ is by definition a contravariant functor from $\square_n^+$ to $\mathcal{X}$. If $\mathcal{K}$ is a cubical diagram of

type $\square_n^+$ in $\mathfrak{C}$, let $K^{*,S}$ be the complex labelled by the subset $S \subset \{0, 1, \dots, n\}$ and $|S|$ denote the number of elements of S . The simple complex $\mathbf{sK}$ is defined by

$$\mathbf{sK}^k := \bigoplus_{i+|S|-1=k} \mathcal{K}^{i,S}$$

with differentials $\delta : \mathbf{sK}^k \rightarrow \mathbf{sK}^{k+1}$ defined as follows. For each S , let $\delta' : K^{i,S} \rightarrow K^{i+1,S}$ be the differential of $K^{*,S}$. If $T \subset S$ and $|T| = |S| - 1$, let $\delta_{S,T} : K^{*,S} \rightarrow K^{*,T}$ be the cochain map corresponding to the inclusion of T in S . If $a \in K^{i,S}$, let

$$\delta''(a) := \sum \delta_{S,T}(a)$$

where the sum is taken over all $T \subset S$ such that $|T| = |S| - 1$, and

$$\delta(a) := \delta'(a) + \delta''(a). \quad (5.3.1)$$

The induced filtration on $\mathbf{sK}$ is given by $F^p \mathbf{sK} := \mathbf{sF}^p \mathcal{K}$

$$(F^p \mathbf{sK})^k = \bigoplus_{i+|S|-1=k} F^p(\mathcal{K}^{i,S}) \quad (5.3.2)$$

Definition 5.3.2. Let (K^*, δ) be a cochain complex. We define the canonical filtration $F_{can}^\bullet$ by

$$F_{can}^p K^q := \begin{cases} K^q & \text{if } q < -p \\ \ker \delta_q & \text{if } q = -p \\ 0 & \text{if } q > -p \end{cases}$$

Such a filtered complex defines a spectral sequence that converges to the cohomology of K^* at level one :

Lemma 5.3.3. *The associated spectral sequence of the filtered complex $F_{can}^\bullet K^*$ is a second quadrant spectral sequence satisfying*

$$E_\infty^{p,q} = E_1^{p,q} = \begin{cases} \frac{\ker \delta_{-p}}{\text{im} \delta_{-p-1}} = H^{p+q}(K^*) & \text{if } p+q = -p, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. We compute the first terms of the spectral sequence. We have

$$E_0^{p,q} = \begin{cases} \frac{\ker \delta_{-p}}{K^{-p-1}} & \text{if } p+q = -p, \\ \frac{\ker \delta_{-p-1}}{0} & \text{if } p+q = -p-1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and consequently

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \frac{\ker \delta_{-p}}{\text{im} \delta_{-p-1}} = H^{p+q}(K^*) & \text{if } p+q = -p \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

5.3.1 The construction of the cohomological weight complex

We define a functor $\mathcal{WC}^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \rightarrow Ho\mathfrak{C}$ such that, for X an object of $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, the homology of the complex $\phi(\mathcal{WC}^*(X))$ is $H^*(X)$ (recall that ϕ denotes the forgetful functor). The spectral sequence E_r , $r = 1, 2, \dots$ associated to $\mathcal{WC}^*(X)$, converges to $H^*(X)$. In particular, it induces a filtration on the cohomology with compact supports of $X_{\mathbb{R}}$.

Theorem (2.2.2) of [11] allows us to prove the existence and uniqueness of the functor $\mathcal{WC}^*$ with properties of extension, additivity and acyclicity. We keep the notations from [11] and [21].

Theorem 5.3.4. *The contravariant functor*

$$F_{can}C^* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \rightarrow Ho\mathfrak{C}$$

which assigns to a nonsingular projective variety M the semialgebraic cochain complex with closed supports $C^(M)$ equipped with the canonical filtration extends to a contravariant functor*

$$\mathcal{WC}^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \rightarrow Ho\mathfrak{C}$$

satisfying :

(Ac) *For an acyclic square*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

the simple filtered complex of the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{WC}^*(\tilde{Y}) & \xleftarrow{j^*} & \mathcal{WC}^*(\tilde{X}) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ \mathcal{WC}^*(Y) & \xleftarrow{i^*} & \mathcal{WC}^*(X) \end{array}$$

is acyclic.

(Ad) *For a closed inclusion $Y \xrightarrow{i} X$, the simple filtered complex of the diagram*

$$\mathcal{WC}^*(Y) \longleftarrow \mathcal{WC}^*(X)$$

is quasi-isomorphic in $\mathfrak{C}$ to $\mathcal{WC}^(X \setminus Y)$.*

Such a functor $\mathcal{WC}^$ is unique up to a unique filtered quasi-isomorphism.*

Remark 5.3.5. The proof uses ingredients analogous to the ones in homological weight complex existence and uniqueness' proof in [21], in particular the fact that, for an elementary acyclic square

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

the sequences

$$0 \longrightarrow H^q(X) \longrightarrow H^q(\tilde{X}) \oplus H^q(Y) \longrightarrow H^q(\tilde{Y}) \longrightarrow 0$$

are exact for all $q \in \mathbb{N}$ (this uses Poincaré duality : see proof of Proposition 2.1 of [19]).

Proof. (of Theorem 5.3.4) Since the functor $F_{can}C^* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \longrightarrow Ho\mathfrak{C}$ can be factorized through $\mathfrak{C}$, it is Φ -rectified. It remains to check the hypotheses (F1) and (F2) of theorem (2.2.2) of [11].

(F1) The inclusions $X \xrightarrow{i_X} X \sqcup Y$ and $Y \xrightarrow{i_Y} X \sqcup Y$ glue into an isomorphism $C^*(X \sqcup Y) \xrightarrow{i_X^* \oplus i_Y^*} C^*(X) \oplus C^*(Y)$. As a consequence, $F_{can}C^*(X \sqcup Y) \cong F_{can}C^*(X) \oplus F_{can}C^*(Y)$.

(F2) For an elementary acyclic square

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

we check that the following diagram, denoted by $\mathcal{K}$,

$$\begin{array}{ccc} F_{can}C^*(\tilde{Y}) & \xleftarrow{j^*} & F_{can}C^*(\tilde{X}) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ F_{can}C^*(Y) & \xleftarrow{i^*} & F_{can}C^*(X) \end{array}$$

is acyclic. In other words, we check that the spectral sequence associated to its simple filtered diagram satisfies $E_1(\mathbf{s}\mathcal{K}) = 0$.

Let $p \in \mathbb{Z}$. We compute the p -th column $(E_0^{p,*}(\mathbf{s}\mathcal{K}), d^{p,*})$ of $E_0(\mathbf{s}\mathcal{K})$ and we check that its homology is 0. The terms $E_0^{p,*}(\mathbf{s}\mathcal{K})$ are given by :

$$\frac{F^p(\mathbf{s}\mathcal{K})}{F^{p+1}(\mathbf{s}\mathcal{K})} = \frac{\mathbf{s}(F^p\mathcal{K})}{\mathbf{s}(F^{p+1}\mathcal{K})}$$

However $\frac{(F^p\mathbf{s}\mathcal{K})^k}{(F^{p+1}\mathbf{s}\mathcal{K})^k} \neq 0$ only if $-p \leq k \leq -p+3$, and we have

$$E_0^{p,k}(\mathbf{s}\mathcal{K}) = \begin{cases} 0 & \text{for } k \leq -p-1, \\ \frac{C^{-p-1}(X)}{\ker \delta_{-p-1,X}} & \text{for } k = -p, \\ \ker \delta_{-p,X} \oplus \frac{C^{-p-1}(\tilde{X})}{\ker \delta_{-p-1,\tilde{X}}} \oplus \frac{C^{-p-1}(Y)}{\ker \delta_{-p-1,Y}} & \text{for } k = -p+1, \\ 0 \oplus \ker \delta_{-p,\tilde{X}} \oplus \ker \delta_{-p,Y} \oplus \frac{C^{-p-1}(\tilde{Y})}{\ker \delta_{-p-1,\tilde{Y}}} & \text{for } k = -p+2, \\ 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \ker \delta_{-p,\tilde{Y}} & \text{for } k = -p+3, \\ 0 & \text{for } k \geq -p+4. \end{cases}$$

The differentials are sums of morphisms (5.3.1), induced by the functoriality and the differentials of the semialgebraic cochain complex C^* , and the homology of $(E_0^{p,*}, d^{p,*})$ is given by

$$H^k(E_0^{p,*}) = \begin{cases} 0 & \text{for } k = -p, \\ \ker \left[H^{-p}(X) \longrightarrow H^{-p}(\tilde{X}) \oplus H^{-p}(Y) \right] & \text{for } k = -p+1, \\ \ker \left[H^{-p}(\tilde{X}) \oplus H^{-p}(Y) \longrightarrow H^{-p}(\tilde{Y}) \right] & \text{for } k = -p+2, \\ \frac{\operatorname{im} \left[H^{-p}(X) \longrightarrow H^{-p}(\tilde{X}) \oplus H^{-p}(Y) \right]}{H^{-p}(\tilde{Y})} & \text{for } k = -p+3, \\ \frac{\operatorname{im} \left[H^{-p}(\tilde{X}) \oplus H^{-p}(Y) \longrightarrow H^{-p}(\tilde{Y}) \right]}{0} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

These spaces are all 0 (see previous remark 5.3.5) and therefore $E_1(\mathbf{sK}) = 0$. $\square$

Remark 5.3.6. • The extension theorem 2.2.2 of [11] gives us also the fact that the functor $\mathcal{WC}^*$ is Φ -rectified.

- Let $(E_r)_{r \geq 0}$ be the spectral sequence associated to the filtered complex $\mathcal{WC}^*(X)$ provided by theorem 5.3.4. By definition of the category $H\mathfrak{o}\mathfrak{C}$, the terms E_r for $r = 1, 2, \dots$ are well-defined and do not depend on the construction of $\mathcal{WC}^*(X)$. On the other hand, E_0 depends on this construction, that is on the chosen cubical hyperresolution of X (see paragraph 5.3.4 below).

5.3.2 Cohomological weight filtration

For X a real algebraic variety, we call the filtered complex $\mathcal{WC}^*(X)$ the *cohomological weight complex* of X .

To show that the cohomological weight complex computes the cohomology with compact supports of the set of real points of real algebraic varieties, we prove that the functor $C^*(\cdot)$ satisfy the additivity and acyclicity properties of Theorem (2.2.2) of [11]. Therefore, since $\phi \circ \mathcal{WC}^*$ and $C^*(\cdot)$ both satisfy these additivity and acyclicity properties and because they are equal on objects of $\mathbf{V}(\mathbb{R})$, thanks to the unicity provided by the extension theorem, these functors $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow H \circ \mathfrak{D}$ are isomorphic. In particular, the semialgebraic cochain complex with closed supports and the cohomological weight complex compute the same homology.

Proposition 5.3.7. *For X an object of $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, the homology of the complex $\phi(\mathcal{WC}^*(X))$ is $H^*(X)$.*

Proof. The functor $C^*(\cdot)$ is additive : consider, for a closed inclusion $Y \xhookrightarrow{i} X$, the sequence

$$0 \longrightarrow C^*(X \setminus Y) \xrightarrow{r^\vee} C^*(X) \xrightarrow{i^*} C^*(Y) \longrightarrow 0 \quad (5.3.3)$$

which is the dual sequence of the sequence (Proposition 1.5 of [21])

$$0 \longrightarrow C_*(Y) \xrightarrow{i} C_*(X) \xrightarrow{r} C_*(X \setminus Y) \longrightarrow 0$$

(where r is the restriction of chains of X to $X \setminus Y$ given by $\begin{matrix} C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X \setminus Y) \\ [A] & \longmapsto & [A \cap (X \setminus Y)] \end{matrix}$). Since the latter is exact, the former is exact as well.

Considering now an acyclic square $\begin{matrix} \tilde{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{matrix}$. Writing the additivity of the two closed

inclusions $Y \xrightarrow{i} X$ and $\tilde{Y} \xrightarrow{j} \tilde{X}$, remarking that $C^*(X \setminus Y) \cong C^*(\tilde{X} \setminus \tilde{Y})$ and chasing in the following diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^*(X \setminus Y) & \xrightarrow{\alpha} & C^*(X) & \xrightarrow{i^*} & C^*(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \cong_{\pi^*} & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \pi^* & & \\ 0 & \longrightarrow & C^*(\tilde{X} \setminus \tilde{Y}) & \xrightarrow{\beta} & C^*(\tilde{X}) & \xrightarrow{j^*} & C^*(\tilde{Y}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

we obtain the sequence

$$0 \longrightarrow C^*(X) \xrightarrow{\pi^* \oplus i^*} C^*(\tilde{X}) \oplus C^*(Y) \xrightarrow{\pi^* + j^*} C^*(\tilde{Y}) \longrightarrow 0$$

and its exactness, that is the acyclicity of $C^*(\cdot)$. Notice the latter short exact sequence is the dual of the corresponding sequence of Proposition 1.5 in [21]. $\square$

Corollary 5.3.8. *By theorem 5.3.4 and previous property 5.3.7, we obtain a filtration on the cohomology with compact supports of the set of real points of real algebraic varieties :*

$$H^k(X) = \mathcal{W}^{-k} H^k(X) \supset \mathcal{W}^{-k+1} H^k(X) \supset \dots \supset \mathcal{W}^0 H^k(X) \supset \mathcal{W}^{+1} H^k(X) = \{0\},$$

called the cohomological weight filtration.

We say that the cohomological weight filtration of a variety X is pure if for all $k \in \mathbb{Z}$ the space $\mathcal{W}^{-k+1} H^k(X)$ is 0.

It will be shown in section 5.4.1 that the cohomological weight filtration is dual to the weight filtration on Borel-Moore homology of [21]. In particular, the cohomological weight filtration of a real algebraic variety X is pure if and only if its homological weight filtration is pure.

5.3.3 Cohomological weight spectral sequence and virtual Betti numbers

Analogously to [21], we recover the virtual Betti numbers from the *cohomological weight spectral sequence*, which is by definition the spectral sequence E_r associated to the cohomological weight complex $\mathcal{WC}^*(X)$ of X (it is well-defined for $r \geq 1$: see remark 5.3.6). We reindex it by setting $\tilde{E}_r^{p,q} = E_{r-1}^{-q,p+2q}$. Notice that the column $(-p)$ of E_1 is sent to the row p of $\tilde{E}_2$, the line $p+q = -p$ is sent to the vertical line $p = 0$ and the lines $p+q = \text{constant}$ are globally preserved.

Lemma 5.3.9. *The vector spaces appearing in E_1 (or equivalently $\tilde{E}_2$) have finite dimension.*

Proof. It will be shown in paragraph 5.3.4 that, for compact varieties, the spectral sequence $\tilde{E}_r$ is isomorphic to the spectral sequence $\hat{E}_r$ of the double complex associated to a cubical hyperresolution (from $r \geq 2$). Since the latter is computed from homologies of real algebraic varieties, its terms are finite-dimensional. We next use the additivity property of the cohomological weight complex to prove the non-compact case. $\square$

Proposition 5.3.10. *The q -th virtual Betti number can be read on the q -th row of $\tilde{E}_2$:*

$$\beta_q(X) = \sum_{p=0}^{\dim X} (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{E}_2^{p,q}(X)$$

Proof. We show that the right-hand side of the formula equals $b_q(X) := \dim_{\mathbb{Z}_2} H^q(X)$ for X compact nonsingular, and is additive for a closed inclusion $Y \xrightarrow{i} X$: this gives us the result by the unicity with such properties of the virtual Betti numbers, see [19].

If X is compact nonsingular, then, according to proposition 5.3.11 below, $\mathcal{WC}^*(X)$ is filtered quasi-isomorphic to $C^*(X)$ equipped with the canonical filtration and, taking into account the reindexing, we have

$$\tilde{E}_2^{p,q} = \begin{cases} H^{p+q}(X) = H^q(X) & \text{if } p = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Consequently,

$$\sum_{p=0}^{\dim X} (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{E}_2^{p,q}(X) = \dim \tilde{E}_2^{0,q}(X) = b_q(X).$$

Now, if $Y \xrightarrow{i} X$ is a closed inclusion, the property (Ad) of Theorem 5.3.4 tells us that $\mathcal{WC}^*(X \setminus Y)$ is filtered quasi-isomorphic to $\mathbf{s}[\mathcal{WC}^*(Y) \leftarrow \mathcal{WC}^*(X)]$. This means, if we denote the q -th line of $\tilde{E}_1(X)$ by $C^*(X, q)$, with differential $d^{*,q}$ (and so as for Y and $X \setminus Y$), that the simple filtered complex $\mathbf{s}[C^*(X \setminus Y, q) \rightarrow C^*(X, q) \rightarrow C^*(Y, q)]$ is acyclic (i.e. filtered quasi-isomorphic to the zero complex), and consequently, we have a long exact sequence :

$$\cdots \rightarrow \tilde{E}_2^{p,q}(X \setminus Y) \rightarrow \tilde{E}_2^{p,q}(X) \rightarrow \tilde{E}_2^{p,q}(Y) \rightarrow \tilde{E}_2^{p+1,q}(X \setminus Y) \rightarrow \cdots$$

In particular,

$$\sum_{p=0}^{\dim X} (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{E}_2^{p,q}(X) = \sum_{p=0}^{\dim Y} (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{E}_2^{p,q}(Y) + \sum_{p=0}^{\dim X \setminus Y} (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{E}_2^{p,q}(X \setminus Y).$$

$\square$

Proposition 5.3.11. *For X compact nonsingular, the cohomology of the complex $\frac{\mathcal{WC}^*(X)}{\mathcal{WC}^{p+1}C^*(X)}$ satisfies*

$$H_k \left(\frac{\mathcal{WC}^*(X)}{\mathcal{WC}^{p+1}C^*(X)} \right) = \begin{cases} H^p(X) & \text{if } k = -p, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In other words, the cohomological weight filtration of a compact nonsingular real algebraic variety is pure.

Proof. The proof is similar to the proof of Proposition 1.8. in [21]. Since the inclusion $\mathbf{V}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R})$ has the extension property of [11] (2.1.10), the functor $F_{can}^* C^* : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \rightarrow Ho\mathfrak{C}$ extends to a functor $\mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R}) \rightarrow Ho\mathfrak{C}$, unique up to filtered quasi-isomorphism with extension, additivity and acyclicity properties. Since $F_{can}^* C^* : \mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R}) \rightarrow Ho\mathfrak{C}$ and $WC^* : \mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R}) \rightarrow Ho\mathfrak{C}$ both are such extensions (see the remark 5.3.5 and the proof of theorem 5.3.4 : $F_{can} C^*$ is acyclic on acyclic squares in $\mathbf{Reg}_{comp}(\mathbb{R})$), they are quasi-isomorphic in $\mathfrak{C}$ and we obtain the result by lemma 5.3.3. $\square$

5.3.4 Cohomological weight complex, cubical hyperresolutions and the Deligne shift

This subsection gives the following viewpoint for the weight complex : the spectral sequence given by Theorem 5.3.4 is quasi-isomorphic to the spectral sequence of the double complex associated to a cubical hyperresolution. For an introduction to cubical hyperresolutions of algebraic varieties, see [23], ch. 5.

Here, we keep the notations from [11]. For any compact real algebraic variety X , there exists a so-called *cubical hyperresolution* of X , which is a special case of cubical diagram (see definition 5.3.1) denoted by

$$X_{\bullet} = [X_{\bullet}^+ \longrightarrow X],$$

where $X_{\bullet}^+$ is the so-called *augmented cubical diagram*.

A cubical hyperresolution $X_{\bullet}$ of X is composed of varieties X_S , $S \in \mathcal{P}[[1, n]]$, associated to the vertices of a n -dimensional cube, with $X_{\emptyset} = X$ and X_S compact nonsingular for $S \neq \emptyset$, and of morphisms $\pi_{S,T} : X_S \longrightarrow X_T$ for $T \subset S$, such that $\pi_{R,T} = \pi_{R,S} \circ \pi_{S,T}$ if $T \subset S \subset R$.

According to [11], proof of Theorem 2.1.5, we can compute the cohomological weight complex of X from the functor WC^* applied to a cubical hyperresolution of X . Guillén and Navarro-Aznar use such a property to extend functors (a cubical hyperresolution is a particular case of diagram of *cohomological descent* : see [23], Definition 3.6).

Let $X_{\bullet}$ be a cubical hyperresolution of a compact real algebraic variety X . We associate to $X_{\bullet}$ a double complex $C^{i,j}$, defined by

$$X^{(i)} := \bigsqcup_{S \subset [[1, n]], |S|=i+1} X_S$$

and

$$C^{i,j} := C^j(X^{(i)}) \cong \bigoplus_{|S|=i+1} C^j(X_S)$$

for $i, j \geq 0$, and equipped with the differentials

$$\delta'_i : C^j(X^{(i)}) \longrightarrow C^j(X^{(i+1)}),$$

induced by the morphisms $X^{(i+1)} \longrightarrow X^{(i)}$ (that is by the morphisms $X_S \rightarrow X_T$ with $T \subset S$ and $|T| = |S| - 1$), and

$$\delta_j'' : C^j(X^{(i)}) \longrightarrow C^{j+1}(X^{(i)})$$

which are the coboundary operators of the $X^{(i)}$'s (recall that we do not need to care about signs because we work with $\mathbb{Z}_2$ coefficients).

The double complex $C^{i,j}$ leads to a filtered complex $(C^*, \hat{F})$: it is the associated total complex equipped with the *naive* filtration coming from the cubical diagram structure. Precisely, we set

$$C^k := \bigoplus_{i+j=k} C^j(X^{(i)})$$

and

$$\hat{F}^p C^k := \bigoplus_{i \geq p} C^{k-i}(X^{(i)}),$$

the differential being $\delta := \delta' + \delta''$.

In the following, we show that the spectral sequence $\hat{E}$ induced by the filtered complex $(C^*, \hat{F})$ associated to the cubical hyperresolution $X_\bullet$ of X is isomorphic to the (reindexed) cohomological weight spectral sequence of X (from level two).

First, the construction of cubical hyperresolutions implies that the functor $\mathcal{W}C^*$ is acyclic for cubical hyperresolutions (see again [11], proof of Theorem 2.1.5) : the cubical diagram $\mathcal{W}C^*(X_\bullet)$ is acyclic, that is $s[\mathcal{W}C^*(X_\bullet)]$ is isomorphic to the zero complex in $Ho\mathfrak{C}$. In other words, the cohomological weight complex $\mathcal{W}C^*(X)$ of X is filtered quasi-isomorphic to the total complex associated to the double complex given by $\mathcal{W}C^{i,j} := \mathcal{W}C^j(X^{(i)})$, equipped with the filtration induced as in 5.3.1. Since the varieties X_S are compact nonsingular for $S \neq \emptyset$, the latter filtered cochain complex is filtered quasi-isomorphic to the cochain complex C^* equipped with (the filtration induced by) the canonical filtration denoted by F_{can} .

Now, using the so-called Deligne shift ([8] Paragraph 1.3), we give, in lemma 5.3.12 below, a relation between the filtrations $\hat{F}$ and F^{can} of C^* , the latter computing the weight filtration of X .

If (K, F) is a filtered cochain complex, the *Deligne shift* $\text{Dec}(F)$ of the filtration F is a new filtration on K^* , given by

$$\text{Dec}(F)^p K^n := \ker \left[\delta : F^{p+n} K^n \longrightarrow \frac{K^{n+1}}{F^{p+n+1} K^{n+1}} \right],$$

such that ([8])

$$E_r^{p,n-p}(K, \text{Dec}(F)) = E_{r+1}^{p+n,-p}(K, F) \quad (5.3.4)$$

In our situation, this gives :

Lemma 5.3.12. *The Deligne shift of the naive filtration $\hat{F}$ on C^* is the canonical filtration*

$$\text{Dec}(\hat{F})^{p-k} C^k = F_{can}^{p-k} C^k$$

Proof. We compute the Deligne shift of the filtration $\hat{F}$ on C^* :

$$\begin{aligned}
\text{Dec}(\hat{F})^{p-k} C^k &= \ker \left[\delta : \hat{F}^p C^k \longrightarrow \frac{C^{k+1}}{\hat{F}^{p+1} C^{k+1}} \right] \text{ (by definition of the Deligne shift)} \\
&= \ker \left[\delta : \bigoplus_{i \geq p} C^{k-i}(X^{(i)}) \longrightarrow \bigoplus_{i \leq p} C^{k+1-i}(X^{(i)}) \right] \\
&= \ker \left[\delta''_{k-p} : C^{k-p}(X^{(p)}) \longrightarrow C^{k-p+1}(X^{(p)}) \right] \oplus \bigoplus_{i > p} C^{k-i}(X^{(i)}) \\
&= F_{can}^{p-k} C^k
\end{aligned}$$

□

This finally allows us to prove the isomorphism between the cohomological weight spectral sequence of X and the spectral sequence induced by the filtration $\hat{F}$ on C^* :

Proposition 5.3.13. *For $r \geq 2$*

$$\tilde{E}_r^{a,b} = E_r^{a,b}(C^*, \hat{F})$$

Proof. We have the following relations, for $r \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{r+1}^{p+n,-p}(X) &= E_r^{p,n-p}(X) && \text{by definition} \\
&= E_r^{p,n-p}(C^*, F_{can}) && \text{by the theory of cubical hyperresolutions} \\
&= E_r^{p,n-p}(C^*, \text{Dec}(\hat{F})) && \text{by Lemma 5.3.12} \\
&= E_{r+1}^{p+n,-p}(C^*, \hat{F}) && \text{by the relation 5.3.4.}
\end{aligned}$$

□

Remark 5.3.14. If U is a non-compact real algebraic variety, take a compactification X of U and consider the complement $X \setminus U$ of U in X . Then, using the additivity property of the weight complex and the proposition 5.3.13 above, we can compute the cohomological weight spectral sequence of X from the spectral sequences induced by cubical hyperresolutions of X and $X \setminus U$.

5.4 The dual geometric filtration

In [21], McCrory and Parusiński built a functor $\mathcal{G}_\bullet C_* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}$ (where $\mathcal{C}$ is the category of bounded filtered chain complexes, see [21]) representing the weight complex functor $\mathcal{WC}_*$ defined in $Ho\mathcal{C}$ (up to filtered quasi-isomorphisms only). Dualizing the geometric filtration $\mathcal{G}_\bullet$, we obtain a functor representing the cohomological weight complex $\mathcal{WC}^*$ at the cochain level. Therefore, our cohomological weight complex functor

$$\mathcal{WC}^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow Ho\mathfrak{C}$$

can be factorized into a functor

$$\mathcal{G}^\bullet C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{C}$$

through the canonical localization $\mathfrak{C} \longrightarrow Ho \mathfrak{C}$.

Analogously we can dualize the Nash filtration $\mathcal{N}_\bullet$ that extends the geometric filtration on the wider category $\chi_{\mathcal{AS}}$ of $\mathcal{AS}$ -sets (if X is a real algebraic variety, we have $\mathcal{N}_\bullet C_*(X) = \mathcal{G}_\bullet C_*(X)$, see section 3 of [21]), and then extend the functor $\mathcal{G}^\bullet C^*$ to the category $\chi_{\mathcal{AS}}$, showing in particular that the semialgebraic chain complex equipped with the dualized geometric filtration is functorial with respect to semialgebraic morphisms with $\mathcal{AS}$ graph.

We remark also that the cohomological weight spectral sequence E_r is dual to the homological weight spectral sequence for $r \geq 0$ and deduce that the cohomological weight filtration can be obtained by dualizing the homological weight filtration.

5.4.1 Definition

Let X be a real algebraic variety. We dualize the geometric filtration on the semialgebraic chain complex of (the set of real points of) X in the following way. We set

$$\mathcal{G}^p C^q(X) := \{\varphi \in C^q(X) \mid \varphi \equiv 0 \text{ on } \mathcal{G}_{p-1} C_q(X)\}$$

i.e. $\mathcal{G}^p C^q(X)$ consists of the linear forms defined on $C_q(X)$ and vanishing on $\mathcal{G}_{p-1} C_q(X)$.

We get a decreasing filtration on $C^*(X)$:

$$C^k(X) = \mathcal{G}^{-k} C^k(X) \supset \mathcal{G}^{-k+1} C^k(X) \supset \dots \supset \mathcal{G}^0 C^k(X) \supset \mathcal{G}^1 C^k(X) = 0,$$

that we call the cohomological geometric filtration of X . We show in Proposition 5.4.3 that the induced spectral sequence E_r (well-defined for $r = 0, 1, \dots$ and functorial in X) coincides with the spectral sequence of the weight complex from $r \geq 1$.

The cohomological geometric filtration satisfies the properties of short exact sequences of additivity and acyclicity (Lemma 5.4.2), dual to the ones of Theorem (2.7) and (3.6) of [21]. These properties are stronger than the additivity and acyclicity properties (Ad) and (Ac) of $\mathcal{WC}^*$, which can be recovered by the snake lemma.

Remark 5.4.1. We have $\mathcal{G}^p C^q(X) \cong \left(\frac{C_q(X)}{\mathcal{G}_{p-1} C_q(X)} \right)^\vee$, since we can factorize a linear form on $C_q(X)$ which kernel contains $\mathcal{G}_{p-1} C_q(X)$ through $C_q(X) \rightarrow \frac{C_q(X)}{\mathcal{G}_{p-1} C_q(X)}$. Furthermore, if we consider the restriction of morphisms of $\mathcal{G}^p C^q(X)$ to $\mathcal{G}_p C_q(X)$, the quotients on chains and cochains are related by :

$$\frac{\mathcal{G}^p C^q(X)}{\mathcal{G}^{p+1} C^q(X)} = \left(\frac{\mathcal{G}_p C_q(X)}{\mathcal{G}_{p-1} C_q(X)} \right)^\vee.$$

Since the isomorphisms are compatible with the differentials of the complexes which are dual to one another, they induce a duality between the spectral sequence associated the cochain complex $\mathcal{G}^\bullet C^*(X)$ and the spectral sequence associated to the chain complex $\mathcal{G}_\bullet C_*(X)$:

$$E_r^{p,q} = (E_{p,q}^r)^\vee$$

(from $r \geq 0$).

Notice that the construction of the dual geometric filtration can be generalized to any filtered chain complex of $\mathcal{C}$, providing the same duality on the induced spectral sequences : if $(K_*, F_\bullet) \in \mathcal{C}$, we define the *dual filtration* of $F_\bullet$ by

$$F_\vee^p K_\vee^q := \{ \varphi \in (K_q)^\vee \mid \varphi \equiv 0 \text{ on } F_{p-1} K_q(X) \}$$

and then

$$E_r^{p,q}(K_\vee, F_\vee) = (E_{p,q}^r(K, F))^\vee$$

from $r \geq 0$.

Lemma 5.4.2. *For any closed inclusion $Y \xhookrightarrow{i} X$ and any $p, q \in \mathbb{Z}$, the sequence*

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^p C^q(X \setminus Y) \xrightarrow{r^*} \mathcal{G}^p C^q(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{G}^p C^q(Y) \longrightarrow 0$$

is exact.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xhookrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \text{For an acyclic square } \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xhookrightarrow{i} & X \end{array} \text{ and any } p, q \in \mathbb{Z}, \text{ the sequence}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^p C^q(X) \xrightarrow{\pi^* \oplus i^*} \mathcal{G}^p C^q(\tilde{X}) \oplus \mathcal{G}^p C^q(Y) \xrightarrow{\pi^* - j^*} \mathcal{G}^p C^q(\tilde{Y}) \longrightarrow 0$$

is exact.

Proof. We prove the exactness of the short sequence of additivity. The exactness of the short sequence of acyclicity comes from similar arguments.

Let $Y \xhookrightarrow{i} X$ be a closed inclusion. The short sequences on chains with closed supports

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_{p-1} C_q(Y) \xrightarrow{i_*} \mathcal{G}_{p-1} C_q(X) \xrightarrow{r_*} \mathcal{G}_{p-1} C_q(X \setminus Y) \longrightarrow 0$$

are exact for $p, q \in \mathbb{Z}$. Consequently, we have the following exact sequences of quotients :

$$0 \longrightarrow \frac{C_q(Y)}{\mathcal{G}_{p-1} C_q(Y)} \xrightarrow{i_*} \frac{C_q(X)}{\mathcal{G}_{p-1} C_q(X)} \xrightarrow{r_*} \frac{C_q(X \setminus Y)}{\mathcal{G}_{p-1} C_q(X \setminus Y)} \longrightarrow 0$$

that we dualize to obtain the exactness of the short sequences for the cohomological geometric filtration (remark 5.4.1). $\square$

5.4.2 Realization of the cohomological weight complex

We now use the previous lemma 5.4.2 to show that the cohomological geometric filtration realizes the cohomological weight filtration :

Proposition 5.4.3. *The dual geometric filtration $\mathcal{G}^\bullet C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}$ induces the functor $\mathcal{WC}^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow Ho\mathcal{C}$.*

Proof. The functor $\mathcal{G}^\bullet C^*$, composed with the canonical localization $\mathfrak{E} \rightarrow Ho \mathfrak{E}$ verifies the properties (Ac) and (Ad) of Theorem 5.3.4 by Lemma 5.4.2 (use the snake lemma). If it verifies also the extension property, by unicity of the cohomological weight complex, the two functors $\mathcal{G}^\bullet C^*$, $\mathcal{W}C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \rightarrow Ho \mathfrak{E}$ will be isomorphic.

Let X be a nonsingular projective real algebraic variety. We show that $\mathcal{G}^\bullet C^*(X)$ is filtered quasi-isomorphic to $F_{can}^\bullet C^*(X)$. According to [21] Theorem 2.8., the complexes $\mathcal{G}_\bullet C_*(X)$ and $F_{\bullet}^{can} C_*(X)$ are filtered quasi-isomorphic (through the inclusion morphism). By remark 5.4.1, we deduce that, on the cohomological spectral sequences level,

$$E^1(\mathcal{G}^\bullet C^*) = (E_1(\mathcal{G}_\bullet C_*))^\vee \cong (E_1(F_{\bullet}^{can} C_*(X)))^\vee = E^1((F^{can})_\vee^\bullet C^*(X)),$$

where the dual canonical filtration $(F^{can})_\vee^\bullet C^*(X)$ is given by

$$(F^{can})_\vee^p C^q(X) = \{\varphi \in C^q(X) \mid \varphi \equiv 0 \text{ on } F_{p-1}^{can} C_q(X)\} = \begin{cases} 0 & \text{if } q > -(p-1), \\ \text{im } \delta_{q-1} & \text{if } q = -(p-1), \\ C^q(X) & \text{if } q < -(p-1), \end{cases}$$

(notice that a linear form on $C_q(X)$ which vanishes on $\ker \partial_q$ can be factorised into a linear form on $C^{q-1}(X)$ through ∂_q and then belongs to $\text{im } \delta_{q-1}$).

We observe that there is an inclusion of the canonical filtration given by

$$F_{can}^p C^q(X) = \begin{cases} 0 & \text{if } q > -p, \\ \ker \delta_q & \text{if } q = -p, \\ C^q(X) & \text{if } q < -p, \end{cases}$$

in the (bounded decreasing) filtration $(F^{can})_\vee^\bullet C^*(X)$, that induces a quasi-isomorphism in $\mathfrak{E}$. Indeed

$$E_1^{p,q}((F^{can})_\vee^\bullet C^*(X)) = (E_1^{p,q}(F_{\bullet}^{can} C_*(X)))^\vee = \begin{cases} H^{p+q}(X) & \text{if } p+q = -p, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} = E_1^{p,q}(F_{can}^\bullet C^*(X))$$

(see Paragraph 1.1 of [21] and lemma 5.3.2).

As a consequence, $E^1(\mathcal{G}^\bullet C^*) = E^1((F^{can})_\vee^\bullet C^*(X)) = E_1(F_{can}^\bullet C^*(X))$ and $\mathcal{G}^\bullet C^*(X)$ and $F_{can}^\bullet C^*(X)$ are isomorphic in $Ho \mathfrak{E}$. $\square$

Corollary 5.4.4. *We have isomorphisms*

$$\frac{\mathcal{W}^p H^q(X)}{\mathcal{W}^{p+1} H^q(X)} = \left(\frac{\mathcal{W}_p H_q(X)}{\mathcal{W}_{p-1} H_q(X)} \right)^\vee,$$

and the weight filtrations on Borel-Moore homology in [21] and cohomology with compact supports in 5.3.8 are related by

$$\mathcal{W}^p H^q(X) = \{\varphi \in H^q(X) \mid \varphi \equiv 0 \text{ on } \mathcal{W}_{p-1} H_q(X)\}$$

Proof. We use the facts that the homological and cohomological geometric filtrations realize respectively the homological and cohomological weight spectral sequences, and that these spectral sequences are dual to one another (remark 5.4.1) : the first assertion is just the isomorphism

$$E_\infty = (E^\infty)^\vee.$$

We deduce that

$$\mathcal{W}^p H^q(X) = \left(\frac{H_q(X)}{\mathcal{W}_{p-1} H_q(X)} \right)^\vee,$$

i.e.

$$\mathcal{W}^p H^q(X) = \{ \varphi \in H^q(X) \mid \varphi \equiv 0 \text{ on } \mathcal{W}_{p-1} H_q(X) \}.$$

□

In a similar way, we can define a filtration $\mathcal{N}^\bullet$ on the semialgebraic cochain complex $C^*(X)$ of an $\mathcal{AS}$ -set, dual to the Nash filtration $\mathcal{N}_\bullet$ of [21], section 3. This dual filtration defines a functor

$$\mathcal{N}^\bullet C^* : \chi_{\mathcal{AS}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

from the category of $\mathcal{AS}$ -sets, which extends $\mathcal{G}^\bullet C^* : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}$. In particular we obtain :

Proposition 5.4.5. *The dual geometric filtration and its spectral sequence are functorial with respect to semialgebraic morphisms with $\mathcal{AS}$ -graph.*

5.5 Weight filtrations and products

In this section, we define the cross product of semialgebraic chains with closed supports, which induces a filtered quasi-isomorphism with respect to the geometric filtration, relating the weight complex of the cross product of real algebraic varieties with the tensor product of the weight complexes by an isomorphism of $H\mathcal{O}\mathcal{C}$. The isomorphism of $H\mathcal{O}\mathfrak{C}$ on the cohomological counterpart allows us to define cup and cap products on the localized chain and cochain level. This shows in particular that the induced cup and cap products on the (co)homology level are filtered with respect to the weight filtrations. Finally, we give obstructions for a compact real algebraic variety to satisfy Poincaré duality, relating to its weight filtrations.

If X and Y are two real algebraic varieties and c and c' two respective chains, we define the chain $c \times c'$ of $X \times Y$ in a natural way (definition 5.5.1). We first check that it is well-defined and give its behaviour under the boundary operator (lemmas 5.5.2 and 5.5.4). We then look at its behaviour with respect to the geometric filtration (proposition 5.5.6) : if c is a q -dimensional chain of X of filtration index p and c' a q' -dimensional chain of Y of index p' , the product $c \times c'$ is a $(q + q')$ -dimensional chain of $X \times Y$ of index $(p + p')$. The product of chains induces then a well-defined morphism u from the tensor product of the geometric filtrations of X and Y to the geometric filtration of the cross product $X \times Y$ (theorem 5.5.15). Using the naturality property of the extension criterion of Guillén and Navarro-Aznar in [11], we show that it is a filtered quasi-isomorphism. Consequently, the tensor product of the weight complexes

is isomorphic in $Ho\mathcal{C}$ to the weight complex of the product, the induced relations between the weight spectral sequences terms implying in particular the multiplicativity of the virtual Poincaré polynomial (without the use of the weak factorization theorem) and the fact that the Künneth isomorphism is filtered with respect to the weight filtration. In paragraph 5.5.3, dualizing the quasi-isomorphism u , we show the cohomological counterparts of these results : the tensor product of the dual geometric filtrations of X and Y and the dual geometric filtration of their product are related by the two filtered quasi-isomorphisms in opposite directions $u^\vee$ and w (proposition 5.5.19).

Composing the isomorphism $(u^\vee)^{-1} \circ w$ of $H \circ \mathfrak{C}$ with the morphism induced by the diagonal map, we define a cup product on the dual geometric filtration of a real algebraic variety X at the localized cochain level (subsection 5.5.4). It induces the usual cup product on the cohomology of its real points, showing that the latter is filtered with respect to the cohomological weight filtration. We then use this cup product in $Ho\mathfrak{C}$ to define also a cap product on the cochain and chain level (subsection 5.5.5). Finally, in paragraph 5.5.6, we focus on the cap product with the fundamental class $[X]$ of a compact real algebraic variety X , showing that the image of any cohomology class by Poincaré duality map in (co)homology is pure with respect to the weight filtration, the non-pure classes of the cohomological weight filtration being sent to zero. In particular, a compact variety with non-pure weight filtration do not satisfy Poincaré duality.

5.5.1 Product of semialgebraic chains

Let X and Y two real algebraic varieties. We define a product operation between the chains of X and the chains of Y , checking in lemma 5.5.2 that this operation is well-defined.

Definition 5.5.1. For any chains $c = [A] \in C_q(X)$ and $c' = [B] \in C_{q'}(Y)$, we define

$$c \times c' := [A \times B] \in C_{q+q'}(X \times Y).$$

Lemma 5.5.2. Let A and A' , respectively B and B' , two closed semialgebraic subsets of (the set of real points) of X , respectively Y , such that $[A] = [A']$ in $C_n(X)$ and $[B] = [B']$ in $C_m(Y)$ for some nonnegative integers n and m . Then

$$[A \times B] = [A' \times B']$$

in $C_{n+m}(X \times Y)$.

Proof. We check that $[A \times B] + [A' \times B'] = 0$ in $C_{n+m}(X \times Y)$. By the definition of semialgebraic chains with closed supports in the Appendix of [21], we have

$$[A \times B] + [A' \times B'] = [cl_{X \times Y}(A \times B \div A' \times B')].$$

Since $A \times B \cup A' \times B' \subset (A \cup A') \times (B \cup B')$ and $A \times B \cap A' \times B' = (A \cap A') \times (B \cap B')$, we have

$$A \times B \div A' \times B' \subset (A \cup A') \times (B \cup B') \setminus (A \cap A') \times (B \cap B') = ((A \div A') \times (B \cup B')) \cup ((A \cup A') \times (B \div B')).$$

But $\dim(A \div A') < n$ and $\dim(B \div B') < m$, therefore

$$\dim cl_{X \times Y}(A \times B \div A' \times B') = \dim A \times B \div A' \times B' < n + m$$

and $[A \times B] + [A' \times B'] = 0$. □

We then verify that the product of chains is distributive over the sum :

Lemma 5.5.3. *If c_1, c_2 are two chains of X and c' is a chain of Y ,*

$$(c_1 + c_2) \times c' = c_1 \times c' + c_2 \times c',$$

and if c is a chain of X and c'_1, c'_2 are two chains of Y ,

$$c \times (c'_1 + c'_2) = c \times c'_1 + c \times c'_2.$$

Proof. We write $c_1 = [A_1]$, $c_2 = [A_2]$ and $c' = [B]$. We then have

$$\begin{aligned} c_1 \times c' + c_2 \times c' &= [A_1 \times B] + [A_2 \times B] \\ &= [cl_{X \times Y}((A_1 \times B) \div (A_2 \times B))] \\ &= [cl_{X \times Y}((A_1 \div A_2) \times B)] \\ &= [cl_{X \times Y}(A_1 \div A_2) \times B] \\ &= [cl_{X \times Y}(A_1 \div A_2)] \times [B] \\ &= (c_1 + c_2) \times c' \end{aligned}$$

The equality $(c'_1 + c'_2) = c \times c'_1 + c \times c'_2$ comes from a symmetric computation. □

The next lemma describes the behaviour of the semialgebraic boundary operator with respect to the product on semialgebraic chains we defined above.

Lemma 5.5.4. *The boundary of the product of two chains $c \in C_q(X)$ and $c' \in C_{q'}(Y)$ verifies, in $C_{q+q'-1}(X \times Y)$,*

$$\partial(c \times c') = \partial c \times c' + c \times \partial c'.$$

Proof. Let $A \subset X$ and $B \subset Y$ be closed semialgebraic sets representing respectively c and c' . Then, by definition, the closed semialgebraic set $A \times B \subset X \times Y$ represents the chain $c \times c'$ and $\partial(c \times c') = [\partial(A \times B)]$ (see Appendix of [21]).

We show that

$$\partial(A \times B) = \partial A \times B \cup A \times \partial B,$$

and then $\partial(c \times c') = [\partial A \times B] + [A \times \partial B] = \partial c \times c' + c \times \partial c'$ (notice that $\partial A \times B \cap A \times \partial B = \partial A \times \partial B$ and $\dim \partial A \times \partial B \leq q + q' - 2$).

First recall that, for a semialgebraic set S , $\partial S = \{x \in S \mid \chi(\text{lk}(x, S)) \equiv 1 \pmod{2}\}$, where $\text{lk}(x, S) := S(x, \epsilon) \cap S$ for ϵ small enough. In the lemma 5.5.5 below, we prove that, for a fixed point $(a, b) \in A \times B$, the link $\text{lk}((a, b), A \times B)$ of (a, b) in $A \times B$ is semialgebraically homeomorphic to the set

$$\{\lambda(a, \beta) + (1 - \lambda)(\alpha, b) \mid \lambda \in [0, 1], \beta \in \text{lk}(b, B), \alpha \in \text{lk}(a, A)\}.$$

By additivity of the Euler characteristic χ , we deduce

$$\chi(\text{lk}((a, b), A \times B)) = \chi(\{a\} \times \text{lk}(b, B)) + \chi(\text{lk}(a, A) \times \{b\}) + \chi(C'),$$

where $C' := \{\lambda(a, \beta) + (1 - \lambda)(\alpha, b) \mid \lambda \in]0, 1[, \beta \in \text{lk}(b, B), \alpha \in \text{lk}(a, A)\}$.

Notice that two segments $] (a, \beta), (\alpha, b) [$ and $] (a, \beta'), (\alpha', b) [$ of C' , with $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$, do not intersect, providing us a semialgebraic homeomorphism between C' and the product $(\{a\} \times \text{lk}(b, B)) \times]0, 1[\times (\text{lk}(a, A) \times \{b\})$.

As a consequence we have

$$\chi(\text{lk}((a, b), A \times B)) = \chi(\text{lk}(a, A)) + \chi(\text{lk}(b, B)) - \chi(\text{lk}(a, A))\chi(\text{lk}(b, B)).$$

Therefore, if $(a, b) \in \partial(A \times B)$, that is by definition $\chi(\text{lk}((a, b), A \times B)) \equiv 1 \pmod{2}$, we deduce from the above equality that $\chi(\text{lk}(a, A)) \equiv 1 \pmod{2}$ or $\chi(\text{lk}(b, B)) \equiv 1 \pmod{2}$ i.e. $a \in \partial A$ or $b \in \partial B$.

Conversely, if $a \in \partial A$, i.e. $\chi(\text{lk}(a, A)) \equiv 1 \pmod{2}$, then necessarily, $\chi(\text{lk}((a, b), A \times B)) \equiv 1 \pmod{2}$. Consequently, $\partial A \times B \subset \partial(A \times B)$ and symmetrically $A \times \partial B \subset \partial(A \times B)$.

We proved

$$\partial(A \times B) = \partial A \times B \cup A \times \partial B.$$

□

Lemma 5.5.5. *Let $(a, b) \in A \times B$, then the link $\text{lk}((a, b), A \times B)$ of (a, b) in $A \times B$ is semialgebraically homeomorphic to the set*

$$\{\lambda(a, \beta) + (1 - \lambda)(\alpha, b) \mid \lambda \in [0, 1], \beta \in \text{lk}(b, B), \alpha \in \text{lk}(a, A)\}.$$

Proof. Suppose $X \subset \mathbb{R}^n$ and $Y \subset \mathbb{R}^m$ for some $n, m \geq 0$.

Consider the continuous semialgebraic function $p_1 : \mathbb{R}^n \times \{b\} \rightarrow \mathbb{R} ; (x, b) \mapsto \|x - a\|^2$. By Hardt's theorem, for ϵ small enough, there exists a semialgebraic trivialization of p_1 over $]0, \epsilon^2]$, compatible with $A \times \{b\}$, given by :

$$\overline{B}_n(a, \epsilon) \times \{b\} \rightarrow]0, \epsilon^2] \times S_n(a, \epsilon) \times \{b\} ; (x, b) \mapsto (\|x - a\|^2, \tilde{h}_1(x), b)$$

with $\tilde{h}_1$ continuous and semialgebraic such that $\tilde{h}_1|_{S_n(a, \epsilon)} = Id$.

Symmetrically, there exists a semialgebraic trivialization of the function $p_2 : \{a\} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} ; (a, y) \mapsto \|y - b\|^2$ over $]0, \epsilon^2]$, compatible with $\{a\} \times B$ given by

$$\{a\} \times \overline{B}_m(b, \epsilon) \rightarrow]0, \epsilon^2] \times \{a\} \times S_m(b, \epsilon) ; (a, y) \mapsto (\|y - b\|^2, a, \tilde{h}_2(y))$$

with $\tilde{h}_2$ continuous and semialgebraic such that $\tilde{h}_2|_{S_m(b, \epsilon)} = Id$.

We then define

$$f : S_{m+n}((a, b), \epsilon) \rightarrow C ; (x, y) \mapsto \frac{\|x - a\|^2}{\epsilon^2}(\tilde{h}_1(x), b) + \frac{\|y - b\|^2}{\epsilon^2}(a, \tilde{h}_2(y)),$$

where $C := \{\lambda(a, \beta) + (1 - \lambda)(\alpha, b) \mid \lambda \in [0, 1], \beta \in S_m(b, \epsilon), \alpha \in S_n(a, \epsilon)\}$, which is a semialgebraic homeomorphism. Since the trivializations of p_1 and p_2 over $]0, \epsilon^2]$ are compatible with $A \times \{b\}$ and $\{a\} \times B$ respectively, we have

$$f(S_{m+n}((a, b), \epsilon) \cap A \times B) = \{\lambda(a, \beta) + (1 - \lambda)(\alpha, b) \mid \lambda \in [0, 1], \beta \in S_m(b, \epsilon) \cap B, \alpha \in S_n(a, \epsilon) \cap A\}.$$

□

5.5.2 Product and geometric filtration

Now we study the behaviour of the product of chains with respect to the geometric filtration :

Proposition 5.5.6.

(1) If $c \in \mathcal{G}_p C_q(X)$ and $c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y)$, then

$$c \times c' \in \mathcal{G}_{p+p'} C_{q+q'}(X \times Y)$$

(2) If $c \in C_q(X)$, $c' \in C_{q'}(Y)$ and $c \times c' \in \mathcal{G}_s C_{q+q'}(X \times Y)$, then there exists p, p' with $p+p' = s$, such that

$$c \in \mathcal{G}_p C_q(X) \text{ and } c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y)$$

Remark 5.5.7. Because the filtration $\mathcal{G}_\bullet$ is increasing, the proposition shows in particular that the index $p+p'$ of the product $c \times c'$ in the filtration is minimal if and only if the indices p of c and p' of c' are minimal. In other words, if $c \in \mathcal{G}_p C_q(X) \setminus \mathcal{G}_{p-1} C_q(X)$ and $c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y) \setminus \mathcal{G}_{p'-1} C_{q'}(Y)$, then

$$c \times c' \in \mathcal{G}_{p+p'} C_{q+q'}(X \times Y) \setminus \mathcal{G}_{p+p'-1} C_{q+q'}(X \times Y),$$

and if $c \in \mathcal{G}_p C_q(X)$ and $c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y)$ with $c \times c' \notin \mathcal{G}_{p+p'-1} C_{q+q'}(X \times Y)$ then

$$c \notin \mathcal{G}_{p-1} C_q(X) \text{ and } c' \notin \mathcal{G}_{p'-1} C_{q'}(Y).$$

For the proof of Proposition 5.5.6, we use the notion of adapted resolutions (see [21], section 2). Adapted resolutions allow us to work with chains lying in a nonsingular ambient space, with boundary belonging to a normal crossing divisor.

Lemma 5.5.8. Suppose X is compact and consider a chain $c = [A]$ of X . We can assume that the dimension of A is maximal, equal to the dimension of X , by considering the Zariski closure $A \subset \overline{A}^Z$ of A , since the filtration is only depending on the support of c (Theorem 2.1 (1) of [21]) : we have

$$c \in \mathcal{G}_p C_k(X) \iff c \in \mathcal{G}_p C_k(\overline{A}^Z).$$

With this assumption, there exists a resolution of singularities $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ of X such that $\text{supp}(\partial(\pi^{-1}c)) \subset D$, where D is a normal crossing divisor of $\tilde{X}$.

Such a resolution is called a *resolution of X adapted to the chain c* . Notice that the pullback $\pi^{-1}c$ of c is defined because π is a resolution of singularities (the pullback operation on chains is more generally defined for any acyclic square of real algebraic varieties : see [21] Appendix).

Proof. First consider a resolution $\pi' : X' \longrightarrow X$ of X to make the ambient space nonsingular, then consider a resolution $\tilde{X} \longrightarrow X'$ of the embedded variety $\text{supp}(\partial(\pi'^{-1}c))$ (which is a hypersurface of X'), so that it is in a normal crossing divisor. $\square$

Proof. (of Proposition 5.5.6) The first point can be proved using the description of geometric filtration using Nash-constructible functions. We keep the notations from [21]. There exist generically Nash-constructible functions $\varphi : X \rightarrow 2^{q+p}\mathbb{Z}$ and $\psi : Y \rightarrow 2^{q'+p'}\mathbb{Z}$ such that

$$c = [\{x \in X \mid \varphi(x) \notin 2^{q+p+1}\mathbb{Z}\}] \text{ and } c' = [\{y \in Y \mid \psi(y) \notin 2^{q'+p'+1}\mathbb{Z}\}].$$

Denote by $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ and $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ the projections. We define the function

$$\eta := \pi_X^*(\varphi) \cdot \pi_Y^*(\psi) : \begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & 2^{q+q'+p+p'}\mathbb{Z} \\ (x, y) & \longmapsto & \varphi(x) \cdot \psi(y) \end{array}$$

which is Nash-constructible because the pullback of a Nash-constructible function and the product of Nash-constructible functions are Nash-constructible. Since,

$$c \times c' = \left[\left\{ (x, y) \in X \times Y \mid \eta(x, y) \notin 2^{q+q'+p+p'+1}\mathbb{Z} \right\} \right],$$

the chain $c \times c'$ is in $\mathcal{G}_{p+p'}C_{q+q'}(X \times Y)$.

To prove the second point of the proposition, we use the very definition of the geometric filtration (see [21] Theorem 2.1. and Proposition 2.6.). We first assume X and Y to be compact and we proceed by induction on the dimension of $X \times Y$. Suppose $c \times c' \in \mathcal{G}_s C_{q+q'}(X \times Y)$.

Let $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ be an adapted resolution of c (it exists by lemma 5.5.8 above). Then, if we set $\tilde{c} := \pi^{-1}(c)$, the support $\text{supp}(\partial\tilde{c})$ is included in a normal crossing divisor D of $\tilde{X}$, and by definition of the geometric filtration, we have

$$c \in \mathcal{G}_p C_q(X) \iff \partial\tilde{c} \in \mathcal{G}_p C_{q-1}(D).$$

In the same way, consider $\pi' : \tilde{Y} \rightarrow Y$ an adapted resolution of c' . We have $\text{supp}(\partial\tilde{c}') \subset D'$, with $\tilde{c}' := \pi'^{-1}(c')$ and D' a normal crossing divisor of $\tilde{Y}$, and

$$c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y) \iff \partial\tilde{c}' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'-1}(D').$$

Now $\pi \times \pi' : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$; $(x, y) \mapsto \pi(x) \times \pi'(y)$ is an adapted resolution of $c \times c'$. Indeed, by Lemma 5.5.4,

$$\partial(\tilde{c} \times \tilde{c}') = \partial\tilde{c} \times \tilde{c}' + \tilde{c} \times \partial\tilde{c}', \quad (5.5.1)$$

in particular,

$$\text{supp}(\partial(\tilde{c} \times \tilde{c}')) \subset (D \times \tilde{Y}) \cup (\tilde{X} \times D') :$$

the subvarieties $D \times \tilde{Y}$ and $\tilde{X} \times D'$ are normal crossing divisors of $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ because $\tilde{X}$ and $\tilde{Y}$ are nonsingular, and their union that we denote by $\tilde{D}$ is again a normal crossing divisor of $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ since they have no common irreducible component (their intersection is $D \times D'$ which has strictly smaller dimension).

Therefore $c \times c' \in \mathcal{G}_s C_{q+q'}(X \times Y) \iff \partial(\tilde{c} \times \tilde{c}') \in \mathcal{G}_s C_{q+q'-1}(\tilde{D})$. We then use the lemma 5.5.9 below to deduce that $\partial(\tilde{c}) \times \tilde{c}' \in \mathcal{G}_s C_{q+q'-1}(D \times \tilde{Y})$ (and $\tilde{c} \times \partial(\tilde{c}') \in \mathcal{G}_s C_{q+q'-1}(\tilde{X} \times D')$).

By induction on dimension, there exists p and p' in $\mathbb{Z}$ such that $p+p' = s$, $\partial(\tilde{c}) \in \mathcal{G}_p C_{q-1}(D)$ and $\tilde{c}' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(\tilde{Y})$, that is $c \in \mathcal{G}_p C_q(X)$ and $c' \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y)$ (since $\tilde{Y}$ is nonsingular and $\tilde{c}' \in D'$,

we have $\tilde{c}' \in \mathcal{G}_{p'}C_{q'}(\tilde{Y}) \Leftrightarrow \partial(\tilde{c}') \in \mathcal{G}'_pC_{q'-1}(D')$.

Finally, to prove the result in the general case, consider real algebraic compactifications $\overline{X}$ and $\overline{Y}$ of X and Y respectively. Then $\overline{X} \times \overline{Y}$ is a compactification of $X \times Y$ and, by definition of the geometric filtration,

$$c \times c' \in \mathcal{G}_sC_{q+q'}(X \times Y) \Leftrightarrow \overline{c \times c'} \in \mathcal{G}_sC_{q+q'}(\overline{X} \times \overline{Y}).$$

The closure $\overline{c \times c'}$ of the chain $c \times c'$ is equal to $\overline{c} \times \overline{c'}$ and, by what we proved above in the compact case, there exist p and p' in $\mathbb{Z}$ such that $p + p' = s$ and

$$\overline{c} \in \mathcal{G}_pC_q(\overline{X}) \text{ and } \overline{c'} \in \mathcal{G}_{p'}C_{q'}(\overline{Y})$$

which is equivalent to

$$c \in \mathcal{G}_pC_q(X) \text{ and } c' \in \mathcal{G}_{p'}C_{q'}(Y).$$

□

Lemma 5.5.9. *With the above notations, we have*

$$\partial(\tilde{c} \times \tilde{c}') \in \mathcal{G}_sC_{q+q'-1}(\tilde{D}) \iff \begin{cases} \partial(\tilde{c}) \times \tilde{c}' \in \mathcal{G}_sC_{q+q'-1}(D \times \tilde{Y}) \\ \text{and} \\ \tilde{c} \times \partial(\tilde{c}') \in \mathcal{G}_sC_{q+q'-1}(\tilde{X} \times D') \end{cases}$$

Proof. The implication from right to left follows from the definition of the geometric filtration ($D \times \tilde{Y}$ and $\tilde{X} \times D'$ are two subvarieties of $\tilde{D}$) and the formula 5.5.1.

We prove the implication from left to right using the description of the geometric filtration via Nash-constructible functions ([21], section 3).

First denote $A := \text{supp}(\partial(\tilde{c}) \times \tilde{c}')$, $B := \text{supp}(\tilde{c} \times \partial(\tilde{c}'))$, then the closed semialgebraic set $A \cup B$ represents the chain $\partial(\tilde{c} \times \tilde{c}')$ in $C_{q+q'-1}(\tilde{D})$ (because $A \cap B \subset D \times D'$ is of strictly smaller dimension). Furthermore, because it belongs to $\mathcal{G}_sC_{q+q'-1}(\tilde{D})$, the chain $\partial(\tilde{c} \times \tilde{c}')$ is represented by a Nash-constructible function $\varphi : \tilde{D} \rightarrow 2^{q+q'-1+s}\mathbb{Z}$ and we have

$$A \cup B = \{(x, y) \in \tilde{D} \mid \varphi(x, y) \notin 2^{q+q'+s}\mathbb{Z}\},$$

up to a set of dimension $< q + q' - 1$.

Consider now the characteristic functions ψ_A and ψ_B on $\tilde{D}$ of the Zariski closures of A and B respectively. The Nash-constructible function $\varphi \cdot \psi_A : \tilde{D} \rightarrow 2^{q+q'-1+s}\mathbb{Z}$ represents the chain $[(A \cup B) \cap \overline{A}^Z]$ in $C_{q+q'-1}(\tilde{D})$. But, since the intersection of the Zariski closures of A and B is of dimension $< q + q' - 1$ (because it is a subvariety of $D \times D'$), we have $[(A \cup B) \cap \overline{A}^Z] = [A]$ and the Nash-constructible function $\varphi \cdot \psi_A : \tilde{D} \rightarrow 2^{q+q'-1+s}\mathbb{Z}$ represents the chain $[A] = \partial(\tilde{c}) \times \tilde{c}'$. Consequently, $\partial(\tilde{c}) \times \tilde{c}' \in \mathcal{G}_sC_{q+q'-1}(\tilde{D})$ and, since $\text{supp}(\partial(\tilde{c}) \times \tilde{c}') \subset D \times \tilde{Y}$, we have

$$\partial(\tilde{c}) \times \tilde{c}' \in \mathcal{G}_sC_{q+q'-1}(D \times \tilde{Y}).$$

Symmetrically, the Nash-constructible function $\varphi \cdot \psi_B : \tilde{D} \rightarrow 2^{q+q'-1+s}\mathbb{Z}$ represents $c \times \partial(\tilde{c}')$ and

$$\tilde{c} \times \partial(\tilde{c}') \in \mathcal{G}_s C_{q+q'-1}(\tilde{X} \times D').$$

□

Next, we want to find a relation between the geometric filtration of the product variety $X \times Y$ and the product of the geometric filtrations of X and Y . First, we have to make precise what we mean by a product of filtered complexes :

Definition 5.5.10. Let (K_*, F) et (M_*, J) be two filtered complexes in the category $\mathcal{C}$. We define $((K \otimes_{\mathbb{Z}_2} M)_*, F \otimes J)$ to be the complex given by

$$(K \otimes M)_n := \bigoplus_{i+j=n} K_i \otimes_{\mathbb{Z}_2} M_j$$

equipped with the differential

$$d(x \otimes y) := dx \otimes y + x \otimes dy$$

and the bounded increasing filtration given by

$$(F \otimes J)_p(K \otimes M)_n := \bigoplus_{i+j=n} \sum_{a+b=p} F_a K_i \otimes_{\mathbb{Z}_2} J_b M_j$$

Remark 5.5.11. Notice that there is no sign in the definition of the differential because we are working with $\mathbb{Z}_2$ coefficients.

Therefore, a product of filtered complexes of $\mathcal{C}$ induces a spectral sequence converging to its homology. In lemma 5.5.13 below, we give the relation between this spectral sequence and some product of the spectral sequences induced by each filtered complex. This result will follow from the Künneth isomorphism (see for instance [9], Theorem 29.10) that we recall here. This theorem allows one to compare the homology a product of complexes with the tensor product of their homologies. Because $\mathbb{Z}_2$ is a field, there is no torsion.

Theorem 5.5.12. *For any K_* and M_* two chain complexes over $\mathbb{Z}_2$, we have a so-called Künneth isomorphism*

$$H_*(K) \otimes H_*(M) \longrightarrow H_*(K \otimes M) ;$$

in particular, for all $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n(K \otimes M) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(K) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H_j(M).$$

Lemma 5.5.13. *Let (K_*, F) and (M_*, J) be two filtered chain complexes. The spectral sequence of their product verifies, for $r \geq 0$,*

$$E_{a,b}^r(K \otimes M) \cong \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_{p,q}^r(K) \otimes E_{s,t}^r(M). \quad (5.5.2)$$

Proof. We prove this lemma by induction on r . First we have, for $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
E_{a,b}^0(K \otimes M) &= \frac{(F \otimes J)_a(K \otimes M)_{a+b}}{(F \otimes J)_{a-1}(K \otimes M)_{a+b}} \\
&= \bigoplus_{i+j=a+b} \frac{\sum_{\alpha+\beta=a} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j}{\sum_{\alpha+\beta=a-1} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j} \\
&= \bigoplus_{i+j=a+b} \bigoplus_{\alpha+\beta=a} \frac{F_\alpha K_i}{F_{\alpha-1} K_i} \otimes \frac{J_\beta M_j}{J_{\beta-1} M_j} \\
&= \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_{p,q}^0(K) \otimes E_{s,t}^0(M)
\end{aligned}$$

We prove the equality $\bigoplus_{i+j=a+b} \frac{\sum_{\alpha+\beta=a} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j}{\sum_{\alpha+\beta=a-1} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j} = \bigoplus_{i+j=a+b} \bigoplus_{\alpha+\beta=a} \frac{F_\alpha K_i}{F_{\alpha-1} K_i} \otimes \frac{J_\beta M_j}{J_{\beta-1} M_j}$ in the lemma 5.5.14 below.

Then suppose the property is true for a fixed $r \geq 0$. The term $E^r(K \otimes M)$ of the spectral sequence induced by the filtered tensor product of K_* and M_* is composed of chain complexes $(E_{*,*}^r, d_{*,*}^r)$ whose homology computes the term $E^{r+1}(K \otimes M)$. Applying homology and Künneth isomorphism to the formula 5.5.2 given at level r by induction, we obtain the property at level $r+1$. □

Lemma 5.5.14. *Let a and b be in $\mathbb{Z}$. Keeping the notations from Lemma 5.5.13 above, we have*

$$\bigoplus_{i+j=a+b} \frac{\sum_{\alpha+\beta=a} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j}{\sum_{\alpha+\beta=a-1} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j} = \bigoplus_{i+j=a+b} \bigoplus_{\alpha+\beta=a} \frac{F_\alpha K_i}{F_{\alpha-1} K_i} \otimes \frac{J_\beta M_j}{J_{\beta-1} M_j}.$$

Proof. Let $i, j \in \mathbb{Z}$ such that $i+j = a+b$, we prove that

$$\frac{\sum_{\alpha+\beta=a} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j}{\sum_{\alpha+\beta=a-1} F_\alpha K_i \otimes J_\beta M_j} \cong \bigoplus_{\alpha+\beta=a} \frac{F_\alpha K_i}{F_{\alpha-1} K_i} \otimes \frac{J_\beta M_j}{J_{\beta-1} M_j}.$$

Denoting simply $F_\alpha K_i$ by F_α and $J_\beta M_j$ by J_β , let ψ be the $\mathbb{Z}_2$ -linear map

$$\sum_{\alpha+\beta=a} F_\alpha \otimes J_\beta \rightarrow \bigoplus_{\alpha+\beta=a} \frac{F_\alpha}{F_{\alpha-1}} \otimes \frac{J_\beta}{J_{\beta-1}}$$

(well-)defined by, if $x \otimes y \in F_\alpha \otimes J_\beta$, $\psi(x \otimes y) := \bar{x} \otimes \hat{y} \in \frac{F_\alpha}{F_{\alpha-1}} \otimes \frac{J_\beta}{J_{\beta-1}}$.

The map ψ is surjective and $\sum_{r+s=a-1} F_r \otimes J_s \subset \ker \psi$. Now let $\gamma \in \ker \psi$. Then, $\gamma = \sum_{\alpha+\beta=a} \sum_{i \in I_{\alpha,\beta}} x_i^\alpha \otimes y_i^\beta$ with $x_i^\alpha \in F_\alpha$ and $y_i^\beta \in J_\beta$ for all α, β, i . We have

$$0 = \psi(\gamma) = \sum_{\alpha,\beta} \sum_i \bar{x}_i^\alpha \otimes \widehat{y}_i^\beta$$

that is, for all α, β , $\sum_i \overline{x_i^\alpha} \otimes \widehat{y_i^\beta} = 0$ and thus, for all i , there exist $z_i^{\alpha-1} \in F_{\alpha-1}$ and $w_i^{\beta-1} \in J_{\beta-1}$ such that $\sum_i (x_i^\alpha + z_i^{\alpha-1}) \otimes (y_i^\beta + w_i^{\beta-1}) = 0$ i.e.

$$\sum_i x_i^\alpha \otimes y_i^\beta = \sum_i x_i^\alpha \otimes w_i^{\beta-1} + \sum_i z_i^{\alpha-1} \otimes y_i^\beta + \sum_i z_i^{\alpha-1} \otimes w_i^{\beta-1} \in F_\alpha \otimes J_{\beta-1} + F_{\alpha-1} \otimes J_\beta.$$

As a consequence, $\gamma \in \sum_{r+s=a-1} F_r \otimes J_s$ and we get the result by universal quotient property. $\square$

This lemma 5.5.13 will allow us to relate the weight spectral sequence of a product of real algebraic varieties and the product of the weight spectral sequences, as an interpretation of the following result. We relate the product of geometric filtrations with the geometric filtration of the product : the map that associates to a tensor product of chains their cross product is a filtered quasi-isomorphism with respect to the geometric filtration.

Theorem 5.5.15. *We have a filtered quasi-isomorphism*

$$u : \mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y)$$

given by

$$c_X \otimes c_Y \longmapsto c_X \times c_Y$$

if $c_X \in \mathcal{G}_p C_q(X)$ and $c_Y \in \mathcal{G}_{p'} C_{q'}(Y)$ with $p + p' = s$ and $q + q' = n$.

The morphism u is filtered by proposition 5.5.6 (recall also the definition 5.5.1 of the product of filtered complexes).

Corollary 5.5.16. *The filtered complexes $\mathcal{W}C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{W}C_*(Y)$ and $\mathcal{W}C_*(X \times Y)$ are isomorphic in $Ho\mathcal{C}$ and the above map u induces a filtered isomorphism*

$$u_\infty : \mathcal{W}_\bullet H_*(X) \otimes \mathcal{W}_\bullet H_*(Y) \longrightarrow \mathcal{W}_\bullet H_*(X \times Y).$$

Above theorem 5.5.15 has an interpretation from the viewpoint of spectral sequences : u is a morphism of filtered complexes which induces an isomorphism on spectral sequences from level one

$$u_r : E_{a,b}^r(\mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y)) \xrightarrow{\sim} E_{a,b}^r(X \times Y)$$

for $r \geq 1$. Using Lemma 5.5.13, we get an isomorphism

$$u'_r : \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_{p,q}^r(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} E_{s,t}^r(Y) \xrightarrow{\sim} E_{a,b}^r(X \times Y) \quad (5.5.3)$$

(for $r \geq 1$). In particular, using this isomorphism, we show the multiplicativity property of the virtual Poincaré polynomial

$$\beta(\cdot)(u) := \sum_{q \geq 0} \beta_q(\cdot) u^q,$$

without using the weak factorization theorem as in [19] and [12]. Precisely, taking the alternating sum of the E^1 terms in the equation 5.5.3 as in proposition 5.3.10, we obtain the following relation on the virtual Betti numbers :

$$\beta_n(X \times Y) = \sum_{p+q=n} \beta_p(X) \beta_q(Y).$$

Consequently,

$$\beta(X \times Y)(u) = \beta(X)(u) \beta(Y)(u).$$

Furthermore, the Künneth isomorphism in homology is filtered through the isomorphisms

$$u'_\infty : \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_{p,q}^\infty(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} E_{s,t}^\infty(Y) \xrightarrow{\sim} E_{a,b}^\infty(X \times Y)$$

Remark 5.5.17. To prove theorem 5.5.15, we use the naturality property of the extension theorem of [11] (Proposition 1.4 of [21]). We first show that u is a filtered quasi-isomorphism for nonsingular projective real algebraic varieties and then use this naturality to prove that u is a filtered quasi-isomorphism for all real algebraic varieties. We do not know whether the theorem follows directly from the geometric filtration of [21] and Proposition 5.5.6, without the theory of cubical hyperresolutions of [11].

Proof. (of Theorem 5.5.15) When X and Y are nonsingular projective varieties, so is the product variety $X \times Y$ and the three induced weight spectral sequences verify

$$E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^1 = \begin{cases} H_{p+q} & \text{if } p+q = -p \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore, by lemma 5.5.13, the morphism $u : \mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \rightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y)$ induces on $E^1 = E^\infty$ the morphism $H_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H_*(Y) \rightarrow H_*(X \times Y)$, which is the classical Künneth isomorphism in singular homology. Thus, u is a filtered quasi-isomorphism when X and Y are projective nonsingular.

Let Y be now a fixed nonsingular projective variety and consider the two functors

$$\phi_1 : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C} ; X \mapsto \mathcal{G}C(X) \otimes \mathcal{G}C(Y)$$

and

$$\phi_2 : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C} ; X \mapsto \mathcal{G}C(X \times Y)$$

(in this part of the proof, we drop the subscripts of filtrations and complexes for readability). We proved above that these two functors are quasi-isomorphic in $\mathcal{C}$ on $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ (we denote by φ_1 and φ_2 their respective restrictions to $\mathbf{V}(\mathbb{R})$). Furthermore, they both verify the additivity and acyclicity conditions of Theorem (2.2.2) of [11]. Indeed, if $Z \hookrightarrow X$ is a closed inclusion, the additivity of the geometric filtration (see Theorem 2.7. of [21]) induces the exactness of the sequences

$$0 \rightarrow \mathcal{G}C(Z) \otimes \mathcal{G}C(Y) \rightarrow \mathcal{G}C(X) \otimes \mathcal{G}C(Y) \rightarrow \mathcal{G}C(X \setminus Z) \otimes \mathcal{G}C(Y) \rightarrow 0$$

and

$$0 \rightarrow \mathcal{GC}(Z \times Y) \rightarrow \mathcal{GC}(X \times Y) \rightarrow \mathcal{GC}((X \setminus Z) \times Y) \rightarrow 0$$

(the induced morphism $Z \times Y \hookrightarrow X \times Y$ is also a closed inclusion). Now, if the diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \rightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \rightarrow & X \end{array}$$

is an acyclic square, we check that the simple filtered complexes associated to the induced diagrams

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GC}(\tilde{Z}) \otimes \mathcal{GC}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{GC}(\tilde{X}) \otimes \mathcal{GC}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{GC}(Z) \otimes \mathcal{GC}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{GC}(X) \otimes \mathcal{GC}(Y) \end{array}$$

denoted by $\mathcal{K}_1(Y)$, and

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GC}(\tilde{Z} \times Y) & \longrightarrow & \mathcal{GC}(\tilde{X} \times Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{GC}(Z \times Y) & \longrightarrow & \mathcal{GC}(X \times Y) \end{array}$$

denoted by $\mathcal{K}_2(Y)$, are acyclic. The simple filtered complex $\mathbf{s}\mathcal{K}_2(Y)$ is acyclic because the geometric filtration verifies the acyclicity condition for an acyclic square (see Theorem 2.7. of [21]) and the diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} \times Y & \rightarrow & \tilde{X} \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z \times Y & \rightarrow & X \times Y \end{array}$$

is acyclic. The spectral sequence induced by $\mathbf{s}\mathcal{K}_1(Y)$ verifies $E^1 = 0$ because $\mathbf{s}\mathcal{K}_1(Y)$ is nothing more than the tensor product of filtered complexes $\mathbf{s}\mathcal{K}_0 \otimes \mathcal{GC}(Y)$, where $\mathcal{K}_0$ is the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GC}(\tilde{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{GC}(\tilde{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{GC}(Z) & \longrightarrow & \mathcal{GC}(X) \end{array}$$

and therefore, by lemma 5.5.13, $E_{a,b}^1(\mathcal{K}_1(Y)) = \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_{p,q}^1(\mathbf{s}\mathcal{K}_0) \otimes E_{s,t}^1(\mathcal{GC}(Y)) = 0$, for all

$a, b \in \mathbb{Z}$, again because of the acyclicity of the geometric filtration (notice that in both cases, we did not use the fact that Y was projective nonsingular).

Consequently, the localizations $\phi'_1, \phi'_2 : \mathbf{Sch}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{C}$ of ϕ_1 and ϕ_2 respectively are the unique extensions of their respective restrictions $\varphi'_1, \varphi'_2 : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{C}$ given by the Theorem 2.2.2. of [11] (notice that the above arguments prove also that the functors φ_1 and φ_2 satisfy the disjoint additivity condition (F_1) and the elementary acyclicity condition (F_2)). By the naturality of this extension (see Proposition 1.4 of [21]), the localization of the filtered quasi-isomorphism $u(Y) : \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ extends uniquely into a morphism $\phi'_1 \rightarrow \phi'_2$, and this morphism is an isomorphism of $\mathcal{H}\mathcal{O}\mathcal{C}$. Since the localization of

$$u(Y) : \phi_1 \rightarrow \phi_2 ; X \mapsto (\mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y))$$

is such an extension, the latter is a quasi-isomorphism of $\mathcal{C}$, that is the morphism $u : \mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y)$ is a filtered quasi-isomorphism for any real algebraic variety X and Y a nonsingular projective variety.

Now fix X to be any real algebraic variety and consider the morphism of functors

$$u(X) : Y \mapsto (\mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y)).$$

We prove in the same way as above that the localization of the restriction of $u(X)$ to $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ extends uniquely into a morphism of functors on $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$, which is an isomorphism of $Ho\mathcal{C}$ because so is the restriction to $\mathbf{V}(\mathbb{R})$. Because of the uniqueness of the extension, we finally obtain that

$$u : \mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y)$$

is a filtered quasi-isomorphism for any real algebraic varieties X and Y . $\square$

Remark 5.5.18. A morphism between the filtered complexes $WC_*(X) \otimes WC_*(Y)$ and $WC_*(X \times Y)$ for any varieties X and Y can also be obtained without using the geometric filtration. Indeed, using a method similar to the one in the previous proof, we can extend to all real algebraic varieties the morphism of filtered complexes

$$F_\bullet^{can} C_*(X) \otimes F_\bullet^{can} C_*(Y) \longrightarrow F_\bullet^{can} C_*(X \times Y)$$

(given by the product in Definition 5.5.1) restricted to nonsingular projective varieties.

5.5.3 Product and cohomological weight complex

As for the homological weight complex, we show that we can relate the cohomological weight complex of a product with the tensor product of the cohomological weight complexes, so that these two filtered complexes are isomorphic in the localized category $Ho\mathfrak{C}$. More precisely, this isomorphism of $Ho\mathfrak{C}$ is induced by two opposite-directional filtered quasi-isomorphisms of cochain complexes, one of them being the dualization of the quasi-isomorphism in $\mathcal{C}$ in Theorem 5.5.15.

Proposition 5.5.19. *The filtered complexes $\mathcal{G}^\bullet C^*(X) \otimes \mathcal{G}^\bullet C^*(Y)$ and $\mathcal{G}^\bullet C^*(X \times Y)$ are isomorphic in $Ho\mathfrak{C}$.*

Corollary 5.5.20. *The filtered complexes $WC^*(X) \otimes WC^*(Y)$ and $WC^*(X \times Y)$ are isomorphic in $Ho\mathfrak{C}$ and the Künneth isomorphism in cohomology*

$$W^\bullet H^*(X) \otimes W^\bullet H^*(Y) \longrightarrow W^\bullet H^*(X \times Y)$$

is a filtered isomorphism with respect to the cohomological weight filtration.

Proof. Consider the filtered quasi-isomorphism

$$u : \mathcal{G}_\bullet C_*(X) \otimes \mathcal{G}_\bullet C_*(Y) \longrightarrow \mathcal{G}_\bullet C_*(X \times Y)$$

defined in Theorem 5.5.15. Its dual

$$u^\vee : \begin{array}{ccc} (C_*(X \times Y))^\vee & \longrightarrow & (C_*(X) \otimes C_*(Y))^\vee \\ \eta & \longmapsto & \left[\sum_i c_{X,i} \otimes c_{Y,i} \longmapsto \sum_i \eta(c_{X,i} \times c_{Y,i}) \right] \end{array}$$

is also a filtered quasi-isomorphism if we equip the dualized complexes with the corresponding dual filtrations (remark 5.4.1).

On the other hand, the map

$$w : \begin{array}{ccc} (C_*(X))^\vee \otimes (C_*(Y))^\vee & \longrightarrow & (C_*(X) \otimes C_*(Y))^\vee \\ \varphi \otimes \psi & \longmapsto & \left[\sum_i c_{X,i} \otimes c_{Y,i} \longmapsto \sum_i \varphi(c_{X,i}) \cdot \psi(c_{Y,i}) \right] \end{array}$$

where the right-hand side complex is equipped with the same filtration as above (induced by the geometric filtrations of X and Y) and the left-hand side complex is the filtered tensor product of the dual geometric filtrations of X and Y , is also a filtered quasi-isomorphism. Indeed, for $a, b \in \mathbb{Z}$, we have

$$E_1^{a,b}((C_*(X))^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_2} (C_*(Y))^\vee) = \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} (E_{p,q}^1(X))^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_2} (E_{s,t}^1(Y))^\vee,$$

and

$$E_1^{a,b}((C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} C_*(Y))^\vee) = (E_{a,b}^1(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} C_*(Y)))^\vee = \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} (E_{p,q}^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} E_{s,t}^1(Y))^\vee,$$

by lemma 5.5.13 (or its cohomological version), and the morphism w induces on the E_1 -level the morphisms

$$(E_{p,q}^1(X))^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_2} (E_{s,t}^1(Y))^\vee \longrightarrow (E_{p,q}^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} E_{s,t}^1(Y))^\vee,$$

given by $\overline{\varphi} \otimes \widehat{\psi} \mapsto [\sum_i \overline{c_{X,i}} \otimes \widehat{c_{Y,i}} \mapsto \sum_i \varphi(c_{X,i}) \cdot \psi(c_{Y,i})]$, which are isomorphisms (the terms of the weight spectral sequences of X and Y are finite-dimensional).

Therefore, we have the following diagram in $\mathfrak{C}$

$$(C_*(X \times Y))^\vee \xrightarrow{u^\vee} (C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} C_*(Y))^\vee \xleftarrow{w} (C_*(X))^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_2} (C_*(Y))^\vee,$$

where the morphisms $u^\vee$ and w are filtered quasi-isomorphisms. Consequently, in the localization $Ho \mathfrak{C}$ of $\mathfrak{C}$ with respect to filtered quasi-isomorphisms, the filtered complexes $\mathcal{G}^\bullet C^*(X) \otimes \mathcal{G}^\bullet C^*(Y)$ and $\mathcal{G}^\bullet C^*(X \times Y)$ are isomorphic. $\square$

Remark 5.5.21. As for the homological case, a morphism between the filtered complexes $\mathcal{WC}^*(X) \otimes \mathcal{WC}^*(Y)$ and $\mathcal{WC}^*(X \times Y)$ can be obtained without using the geometric filtration. Indeed, in the previous proof, consider the canonical filtration in place of the geometric filtration : one can show in the same way that there is an isomorphism of $Ho\mathfrak{E}$ between $(F^{can})_{\vee}^{\bullet} C^*(X) \otimes (F^{can})_{\vee}^{\bullet} C^*(Y)$ and $(F^{can})_{\vee}^{\bullet} C^*(X \times Y)$. Since the dual canonical filtration and the cohomological canonical filtration are filtered quasi-isomorphic (see the proof of theorem 5.4.3), we deduce an isomorphism of $Ho\mathfrak{E}$ between $F_{can}^{\bullet} C^*(X) \otimes F_{can}^{\bullet} C^*(Y)$ and $F_{can}^{\bullet} C^*(X \times Y)$. Restricting this isomorphism to projective nonsingular varieties, we extend it to all real algebraic varieties in the same way as in proof of theorem 5.5.15 (see also remark 5.5.18) to obtain an isomorphism between $\mathcal{WC}^*(X) \otimes \mathcal{WC}^*(Y)$ and $\mathcal{WC}^*(X \times Y)$.

5.5.4 Cup product

Let X be a real algebraic variety.

We show below that the cup product on the cohomology with compact supports $H^*(X)$ of the set of real points of X is filtered with respect to the cohomological weight filtration. Precisely, we define a cup product on the cochain level in the derived category $Ho\mathfrak{E}$, on the cohomological geometric filtration, using the filtered quasi-isomorphisms w and $u^{\vee}$ defined above in the proof of 5.5.19, that induces a cup product on the cohomological weight spectral sequence of X and the usual cup product on the cohomology of X .

Let Δ denote the diagonal map

$$\Delta : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \times X \\ x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

Now consider the cohomological geometric filtration $\mathcal{G}^{\bullet} C^*(X)$ of X as an object of the derived category $Ho\mathfrak{E}$. We can apply the composition $\Delta^* \circ (u^{\vee})^{-1} \circ w$ to the tensor product $\mathcal{G}^{\bullet} C^*(X) \otimes \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X)$ ($u^{\vee}$ is an isomorphism of $Ho\mathfrak{E}$, see the proof of proposition 5.5.19) :

$$\Delta^* \circ (u^{\vee})^{-1} \circ w : \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X) \otimes \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X) \xrightarrow{(u^{\vee})^{-1} \circ w} \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X)$$

We denote this morphism of $Ho\mathfrak{E}$ by $\smile$.

Proposition 5.5.22.

The cup product

$$\smile : \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X) \otimes \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X) \longrightarrow \mathcal{G}^{\bullet} C^*(X)$$

in $Ho\mathfrak{E}$ induces a morphism of spectral sequences

$$\smile'_r : \bigoplus_{p+s=a, q+t=b} E_r^{p,q}(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} E_r^{s,t}(X) \longrightarrow E_r^{a,b}(X)$$

and the usual cup product

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^*(X) & \xrightarrow{\smile} & H^*(X) \\ \varphi \otimes \psi & \longmapsto & \varphi \smile \psi = [\Delta^*(\varphi \times \psi)] \end{array} .$$

In particular, the cup product in cohomology is a filtered map with respect to the cohomological weight filtration.

Proof. The first fact follows from the cohomological version of lemma 5.5.13, and the cup product in cohomology is the composition of Δ^* and the Künneth isomorphism in cohomology, which is itself induced by $(u^\vee)^{-1} \circ w$ (see proposition 5.5.19 and corollary 5.5.20). $\square$

5.5.5 Cap product

In this section, we define a cap product on the homological and cohomological geometric filtrations considered in the corresponding derived categories $Ho\mathcal{C}$ and $Ho\mathfrak{C}$. This cap product on chain level induces a cap product on the homological and cohomological weight spectral sequences, showing that the cap product on homology and cohomology is a filtered morphism with respect to the homological and cohomological weight filtrations.

First, we give a filtered chain complex structure to the tensor product of a filtered cochain complex and a filtered chain complex :

Definition 5.5.23. Let (K^*, F) and (M_*, J) be respectively a filtered cochain complex of $\mathfrak{C}$ and a filtered chain complex of $\mathcal{C}$. We define $((K^* \otimes M_*)_*, F \otimes J)$ to be the chain complex given by

$$(K \otimes M)_n := \bigoplus_{j-i=n} K^i \otimes_{\mathbb{Z}_2} M_j,$$

equipped with the differential

$$\partial(x \otimes y) := dx \otimes y + x \otimes \partial y$$

and the bounded increasing filtration given by

$$(F \otimes J)_p(K \otimes M)_n = \bigoplus_{j-i=n} \sum_{b-a=p} F^a K^i \otimes J_b M_j$$

Considering the semialgebraic chain and cochain complexes $C_*(X)$ and $C^*(X)$ of X , implicitly equipped with the homological and cohomological geometric filtrations (for sake of readability), as objects of the respective derived categories $Ho\mathcal{C}$ and $Ho\mathfrak{C}$, we are going to define a cap product $C^*(X) \otimes C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ in $Ho\mathcal{C}$.

First, let ω denote the morphism $C^*(X) = (C_*(X))^\vee \rightarrow (C^*(X) \otimes C_*(X))^\vee$ of $Ho\mathfrak{C}$ given by

$$\begin{aligned} (C_{l-m}(X))^\vee &\longrightarrow (C^m(X) \otimes C_l(X))^\vee \\ \psi &\longmapsto [\varphi \otimes c \longmapsto (\psi \smile \varphi)(c)] \end{aligned}$$

The cap product that we define below will be obtained from the dual of this filtered morphism, in order to have a formula

$$\psi(\varphi \frown c) = (\psi \smile \varphi)(c) \tag{5.5.4}$$

on the chain level. We make precise what we mean by the dual filtered chain complex of a filtered cochain complex :

Definition 5.5.24. If $F^\bullet K^*$ is a filtered cochain complex of $\mathfrak{C}$, we define its dual filtered chain complex $F_\bullet^\vee K_*^\vee$ of $\mathcal{C}$ by

$$F_p^\vee K_q^\vee := \{ \eta \in K_q^\vee \mid \eta \equiv 0 \text{ on } F^{p+1} K^q \}.$$

Notice that, as in remark 5.4.1, we have the natural isomorphism of spectral sequences given by $E_{a,b}^r(F^\vee K^\vee) = \left(E_r^{a,b}(FK) \right)^\vee$.

Consider the dual filtered chain complexes $(C_*(X))^{\vee\vee}$ and $(C^*(X) \otimes C_*(X))^{\vee\vee}$ of $(C_*(X))^\vee$ and $(C^*(X) \otimes C_*(X))^\vee$ respectively. We have natural filtered morphisms $\nu : C_*(X) \rightarrow (C_*(X))^{\vee\vee}$ and $\mu : C^*(X) \otimes C_*(X) \rightarrow (C^*(X) \otimes C_*(X))^{\vee\vee}$, inducing the natural morphisms $E_{a,b}^r \rightarrow \left(E_{a,b}^r \right)^{\vee\vee}$ on the spectral sequence level, which are isomorphisms from $r \geq 1$ (the terms of the spectral sequence are finite-dimensional from level one).

Therefore, the morphisms ν and μ are quasi-isomorphisms of $\mathcal{C}$ and we can define the morphism

$$\nu^{-1} \circ \omega^\vee \circ \mu : C^*(X) \otimes C_*(X) \rightarrow C_*(X)$$

of $Ho\mathcal{C}$ given by

$$\begin{aligned} C^m(X) \otimes C_l(X) &\longrightarrow C_{l-m}(X) \\ \varphi \otimes c &\longmapsto \varphi \frown c := \nu^{-1} \circ \omega^\vee \circ \mu(\varphi \otimes c) \end{aligned}$$

We denote it also by $\frown$ and we have :

Proposition 5.5.25. *The cap product on the geometric filtrations of X induces a cap product*

$$E_r^{p,q}(X) \otimes E_{s,t}^r(X) \longrightarrow E_{s-p, t-q}^r(X)$$

on the weight spectral sequences of X , and the usual cap product

$$H^*(X) \otimes H_*(X) \xrightarrow{\frown} H_*(X)$$

on the homology and cohomology of X . In particular, the latter is a filtered morphism with respect to the weight filtrations (the filtration on the tensor product of cohomology and homology is defined in a way similar to definition 5.5.23).

Proof. Similarly to lemma 5.5.13, the term of level r and indices a, b of the spectral sequence induced by $C^*(X) \otimes C_*(X)$ is given by $\bigoplus_{s-p=a, t-q=b} E_r^{p,q}(X) \otimes E_{s,t}^r(X)$. Then the cap product on chains and cochains induces morphisms

$$\frown'_r : \bigoplus_{s-p=a, t-q=b} E_r^{p,q}(X) \otimes E_{s,t}^r(X) \longrightarrow E_r^{a,b}(X).$$

Now, notice that the formula 5.5.4 on the chain level induce that, if $\varphi \in E_r^{p,q}(X)$, $c \in E_{s,t}^r(X)$ and $\psi \in E_r^{p-s, q-t}(X)$ (then $\psi \smile \varphi \in E_r^{p,q}(X)$, which is isomorphic to $(E_{p,q}^r(X))^\vee$), we have

$$\psi(\varphi \frown'_r c) = (\psi \smile'_r \varphi)(c).$$

Since the cup product on the cohomological weight spectral sequence induces the cup product on cohomology and because the cap product on cohomology and homology

$$H^m(X) \times H_l(X) \xrightarrow{\cap} H_{l-m}(X)$$

is characterized by the formula

$$\psi(\varphi \cap c) = (\psi \smile \varphi)(c)$$

(if $\varphi \in H^m(X)$ and $c \in H_l(X)$, $\varphi \cap c$ is the unique element of $H_{l-m}(X)$ verifying this formula for all $\psi \in H^{l-m}(X)$), the cap product on the cohomological and homological weight spectral sequences induce the cap product on cohomology and homology. $\square$

Remark 5.5.26. 1. If $\varphi \in E_r^{p,q}(X)$ and $c \in E_{s,t}^r(X)$ then $\varphi \smile'_r c$ is the unique element of $E_{s-p, t-q}^r(X)$ verifying

$$\psi(\varphi \smile'_r c) = (\psi \smile'_r \varphi)(c)$$

for all $\psi \in E_r^{p-s, q-t}(X)$.

2. Another possible definition for the cap product on the chain level is the following one (see [24]). Consider the morphism

$$h : \begin{array}{ccc} C^*(X) \otimes (C_*(X) \otimes C_*(X)) & \longrightarrow & C_*(X) \\ \varphi \otimes (a \otimes b) & \longmapsto & \varphi(a) \cdot b \end{array}.$$

Then we can also define the cap product on the cohomological and homological geometric filtrations of X (regarded as objects of $Ho\mathfrak{C}$ and $Ho\mathcal{C}$) by setting

$$\varphi \cap c := h(\varphi \otimes u^{-1}(\Delta_*(c))).$$

Notice that this definition would be valid with integer coefficients as well.

5.5.6 Weight filtrations and Poincaré duality map

Let X be a compact real algebraic variety of dimension n .

The semialgebraic chain $[X]$ is pure, that is $[X] \in \mathcal{G}_{-n}C_n(X)$. For $r \geq 1$, it induces homology classes in the weight spectral sequence terms $E_{-n, 2n}^r(X)$.

By taking the cap product with $[X]$, we obtain a map D on the cohomological weight spectral sequence of X , given by :

$$D_r^{s,t} := \cdot \cap [X] : \begin{array}{ccc} E_r^{s,t}(X) & \longrightarrow & E_{-n-s, 2n-t}^r(X) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \cap [X] \end{array} \quad (5.5.5)$$

Recall that the non-zero terms of the weight spectral sequences lie in the triangle given by the inequalities $t \geq -2s$, $s \leq 0$ and $t \leq -s + n$, the terms induced by the pure chains lying in the line $t = -2s$. Then if, for any $r \geq 1$, we consider the cap product of non-pure classes by $[X]$, it is identically zero. Indeed, for $t > -2s$, the term $E_{-n-s, 2n-t}^r(X)$, where lie the values of

$D_r^{s,t}$, is zero since $2n - t < -2(-n - s)$.

The map D on the cohomological weight spectral sequence induces, on the E^∞ and E_∞ level, the classical Poincaré duality map on the cohomology of X (that we denote again by D) given by

$$\begin{array}{ccc} H^k(X) & \longrightarrow & H_{n-k}(X) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \frown [X] \end{array}$$

($[X]$ corresponds here to the fundamental homology class of X) and :

Proposition 5.5.27. *For all p and k in $\mathbb{Z}$, the image of $\mathcal{W}^p H^k(X)$ by Poincaré duality map is in $\mathcal{W}_{-p-n} H_{n-k}(X)$:*

$$D(\mathcal{W}^p H^k(X)) \subset \mathcal{W}_{-p-n} H_{n-k}(X).$$

In particular, for all $k \in \mathbb{Z}$, $D(H^k(X)) \subset \mathcal{W}_{k-n} H_{n-k}(X)$ and, if $p > -k$, $D(\mathcal{W}^p H^k(X)) = 0$. In other words, all the non-pure cohomology classes are in the kernel of Poincaré duality map and the pure cohomology classes are the only classes which may be sent to a nonzero pure homology class by Poincaré duality map. Therefore, if its weight filtrations are not pure, a real algebraic variety does not satisfy Poincaré duality.

Remark 5.5.28. On the other hand, there exist varieties having pure weight filtration but not satisfying Poincaré duality.

For example, let X denote the pinched torus, obtained from a torus T by identifying a circle which generates it as a revolution surface to a point x_0 . To compute its weight spectral sequence, we consider the cubical hyperresolution of X given by the blowing-up at x_0 :

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

We obtain a pure weight filtration given by the term $\tilde{E}^2 = \tilde{E}^\infty$:

$$\tilde{E}^2 = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_2 \cdot [X] & & \\ \mathbb{Z}_2 \cdot [\overline{a}] & 0 & \\ & \mathbb{Z}_2 & 0 \ 0 \end{bmatrix}$$

(if $H_1(T) = \mathbb{Z}_2[\overline{a}] \oplus \mathbb{Z}_2[\overline{b}]$ with $b = S^1$ the exceptional divisor of the blowing-up). However, the variety X does not satisfy Poincaré duality since $[\overline{a}]^\vee \frown [X] = 0$.

Chapitre 6

Exemples de filtrations par le poids

Ce chapitre est consacré à l'étude de filtrations par le poids sur des exemples de variétés algébriques réelles de petites dimensions. Pour calculer une filtration par le poids, on utilise la suite spectrale associée à une hyperrésolution cubique (paragraphe 5.3.4). Le cas d'une hyperrésolution cubique de taille 2 correspond à un carré acyclique

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

On est dans cette situation dans le cas d'un éclatement de X le long de Y , avec comme diviseur exceptionnel $\tilde{Y}$. La suite spectrale de X est quasi-isomorphe à

$$\tilde{E}_1 = \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ H^2(\tilde{X}) \oplus H^2(Y) & \longrightarrow & H^2(\tilde{Y}) \\ H^1(\tilde{X}) \oplus H^1(Y) & \longrightarrow & H^1(\tilde{Y}) \\ H^0(\tilde{X}) \oplus H^0(Y) & \longrightarrow & H^0(\tilde{Y}) \end{array} \right]$$

En notant $E_r^{p,q}$ l'espace de cette suite spectrale à la ligne p et colonne q , les diagonales de $E_\infty^{p,q}$ d'équation $p + q = n$ correspondent à la filtration sur $H^n(X)$. Avec $p + q = n$,

$$\sum_{p+q=n} \tilde{E}_{p,q}^\infty \cong H^n(X)$$

et

$$\tilde{E}_{p,q}^\infty \cong \frac{\mathcal{W}^{-n+q-1}H^n(X)}{\mathcal{W}^{-n+q}H^n(X)} = \frac{\mathcal{W}^{-p-1}H^n(X)}{\mathcal{W}^{-p}H^n(X)}$$

Les classes *pures*, $\frac{\mathcal{W}^{-n}H^n(X)}{\mathcal{W}^{-n+1}H^n(X)}$ sont sur la première colonne (1), d'où $\mathcal{W}^{-n+k-1}H^n(X)$ est engendré par les colonnes $k, k+1, \dots$. Dans tous les exemples de ce chapitre sauf le 6.16, la filtration par le poids dégénère à $\tilde{E}_2$, qui est obtenue en prenant l'homologie de $\tilde{E}_1$.

D'après la proposition 5.3.9, la suite spectrale $\tilde{E}_2$ est composée de $\mathbb{Z}_2$ -espaces vectoriels de dimension finie. Pour plus de lisibilité, on écrira le tableau $\dim \tilde{E}_2$ des dimensions m de ces espaces vectoriels $(\mathbb{Z}_2)^m$.

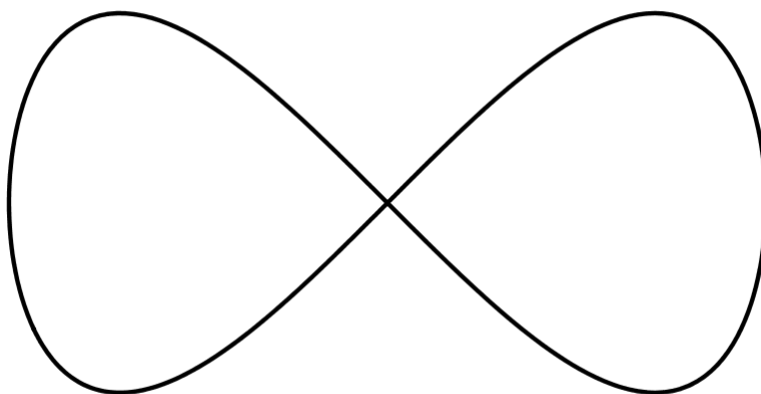
À partir de $\dim \tilde{E}_2$, on obtient le polynôme de Poincaré virtuel $\beta(X)(T) = \sum_{q=0}^{\dim X} \beta_q(X) T^q$,

où $\beta_q(X) = \sum_{p=0}^{\dim X} (-1)^p \dim \tilde{E}_2^{p,q}$ est la somme alternée sur la ligne q des dimensions des espaces de $\tilde{E}_2$.

La filtration de Nash $\mathcal{NC}_*$ de [21] permet de déterminer des cocycles qui engendrent les $\mathcal{W}^{-n+k} H^n(X)$, dans des cas simples, comme celui de l'intersection d'un ensemble algébrique avec un semi-algébrique (comme dans l'exemple 3.3.14).

Les illustrations ont été faites avec POV-Ray pour les surfaces. Certaines ont été dessinées dans $\mathbb{R}^3$ bien qu'elles vivent naturellement dans $\mathbb{R}^4$.

6.1 La figure « huit »



C'est la courbe plane définie par

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2 - x^4\}$$

Une résolution des singularités de X est fournie par un éclatement du point singulier

$$\begin{array}{ccc} \bullet\bullet & \hookrightarrow & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On obtient

$$\tilde{E}_1 = \left[\begin{array}{ccc} \langle c^* \rangle \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \\ \langle x_0^* \rangle \oplus \langle x_0^* \rangle & \longrightarrow & \langle x_1^*, x_2^* \rangle \end{array} \right]$$

où $x_1^* \mapsto x_0^* \oplus x_0^*$ et $x_2^* \mapsto x_0^* \oplus x_0^*$. Par suite

$$\tilde{E}_2 = \begin{array}{ccc} < c^* > & \longrightarrow & 0 \\ < x_0^* \oplus x_0^* > & \longrightarrow & < x_1^* + x_2^* > \end{array}$$

Ainsi

$$\dim \tilde{E}_2 = \begin{array}{cc} 1 & \\ 1 & 1 \end{array}$$

Plus précisément, la filtration sur $H^1(X)$ est

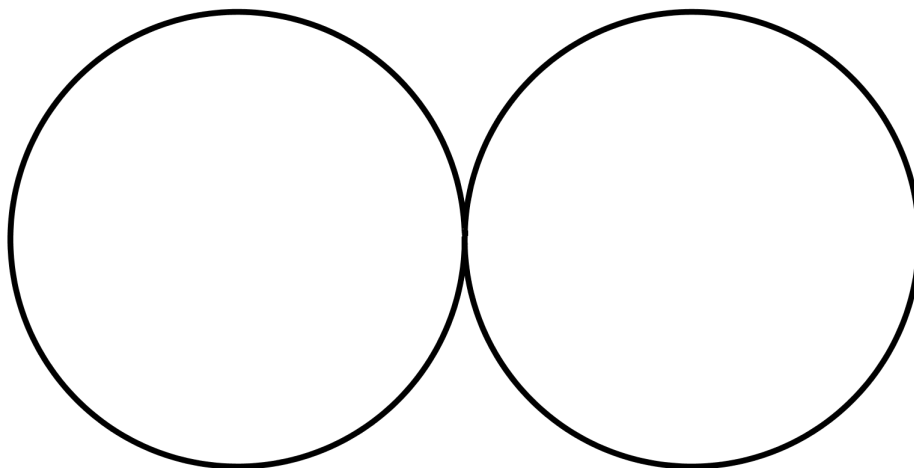
$$\mathcal{W}^{-2}H^1(X) = < a^*, b^* >$$

$$\mathcal{W}^{-1}H^1(X) = < a^* + b^* >$$

$$\mathcal{W}^0H^1(X) = 0.$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T$.

6.2 Les deux cercles tangents $S^1 \vee S^1$



C'est la courbe plane définie par

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x+1)^2 + y^2 - 1)((x-1)^2 + y^2 - 1) = 0\}$$

Une résolution des singularités de X est fournie par la décomposition en composantes irréductibles

$$\begin{array}{ccc} \bullet\bullet & \hookrightarrow & S^1 \sqcup S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On obtient

$$\tilde{E}_1 = \begin{array}{ccc} < c^*, d^* > \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \\ < x_0^* > \oplus < x_1^*, x_2^* > & \longrightarrow & < x_1^*, x_2^* > \end{array}$$

où $x_1^* \mapsto x_0^* \oplus x_0^*$ et $x_2^* \mapsto x_0^* \oplus x_0^*$. Par suite

$$\tilde{E}_2 = \begin{bmatrix} \langle c^*, d^* \rangle & \longrightarrow & 0 \\ \langle x_0^* \rangle & \longrightarrow & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi

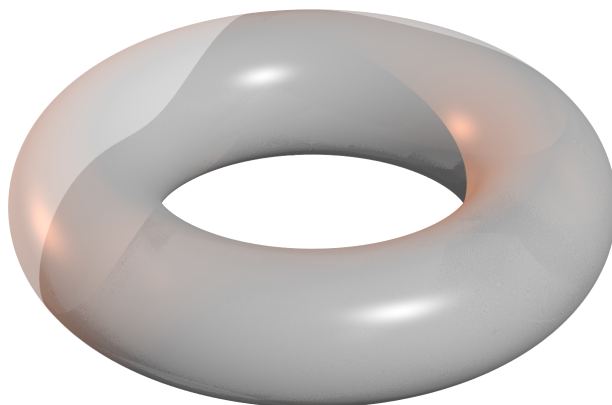
$$\dim \tilde{E}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Plus précisément, la filtration sur $H^1(X)$ est $\mathcal{W}^{-1}H^1(X) = \langle a^*, b^* \rangle$
 $\mathcal{W}^0H^1(X) = 0$.

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = 2T - 1$.

Cet espace est homéomorphe à la figure « huit » mais non algébriquement isomorphe d'après leur filtration par le poids.

6.3 Le tore $\mathcal{T}$



C'est la surface lisse et compacte de $\mathbb{R}^3$ d'équation

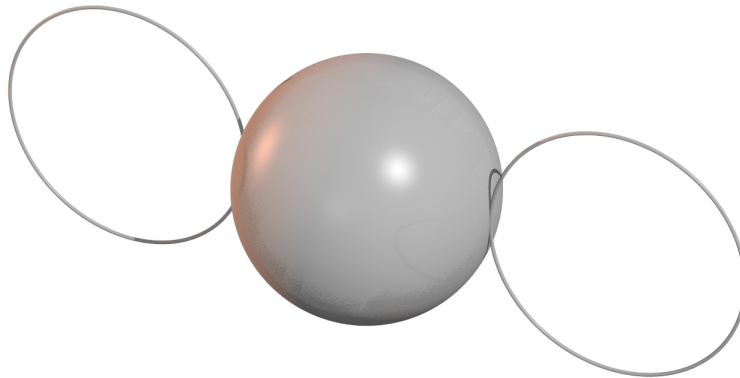
$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R(x^2 + y^2) = 0$$

où r est le rayon du « petit » cercle engendrant la surface, par révolution autour du « grand » cercle de rayon R . On peut aussi le voir comme $\mathcal{T} = S^1 \times S^1$. Sa filtration est pure : tous les cocycles sont de poids minimal.

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où la notation ci-dessus est détaillée dans la remarque 6.6.1. Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(\mathcal{T})(T) = T^2 + 2T + 1$.

6.4 La sphère à deux oreilles $S^1 \vee S^2 \vee S^1$



C'est la surface lisse et compacte de $\mathbb{R}^3$

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

où

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + z^2 = 1, y = 0\}$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 1)\}$$

$$X_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 + z^2 = 1, y = 0\}$$

Une résolution des singularités de X est fournie par la décomposition en composantes irréductibles

$$\begin{array}{ccc} \bullet \bullet & \bullet \bullet & \hookrightarrow S^1 \sqcup S^2 \sqcup S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \hookrightarrow S^1 \vee S^2 \vee S^1 \end{array}$$

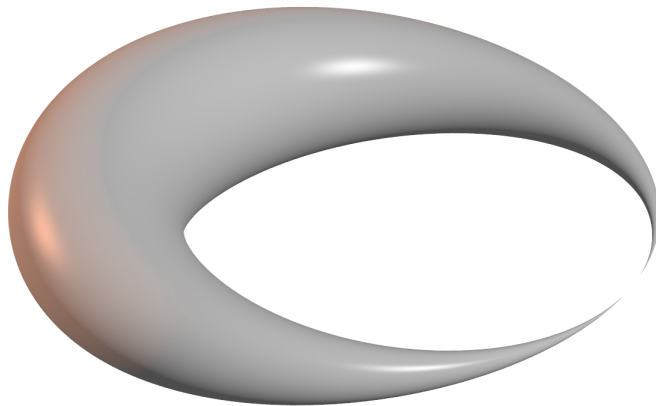
Comme cette surface est lisse et compacte, sa filtration est pure.

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T^2 + 2T + 1$.

Les dimensions des espaces de cohomologie ne permettent pas de montrer que le tore et X ne sont pas homéomorphes, c'est la structure produit de leur cohomologie qui donne $a^* \smile b^* = \mathcal{T}^*$ sur le tore, où $H^1(\mathcal{T}) = \langle a^*, b^* \rangle$ et $H^2(\mathcal{T}) = \langle \mathcal{T}^* \rangle$; et $a'^* \smile b'^* = 0$ sur X , où $H^1(X) = \langle a'^*, b'^* \rangle$.

6.5 Le tore pincé



C'est la surface X compacte de $\mathbb{R}^3$, singulière en un point x_0 , dont une résolution des singularités obtenue en éclatant $\mathbb{R}^3$ en x_0 est un tore et le diviseur exceptionnel un cercle. On peut en obtenir une équation algébrique à partir de celle du tore, en remplaçant le rayon r du tube par $\frac{x-R}{6}$, de sorte que r^2 soit le rayon au carré variable, valant 0 lorsque $x = R$ et soit strictement positif lorsque $x \neq R$. On obtient

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - \frac{(x-R)^2}{36}\right)^2 - 4R(x^2 + y^2) = 0$$

Grâce à la résolution

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & \mathcal{T} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

on obtient

$$\tilde{E}_1 = \left[\begin{array}{ccc} \langle X^* \rangle & \longrightarrow & 0 \\ 0 \oplus \langle a^*, b^* \rangle & \longrightarrow & 0 \\ \langle x_0^* \rangle \oplus \langle x_0^* \rangle & \longrightarrow & \langle x_0^* \rangle \end{array} \right]$$

Par suite

$$\tilde{E}_2 = \left[\begin{array}{ccc} \langle X^* \rangle & \longrightarrow & 0 \\ \langle a^*, b^* \rangle & \longrightarrow & 0 \\ \langle x_0^* \rangle & \longrightarrow & 0 \end{array} \right]$$

Ainsi

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La filtration est pure. Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T^2 + T + 1$.

6.6 Le tore-sphère

C'est la surface X compacte de $\mathbb{R}^3$, singulière en un point x_0 , dont une résolution des singularités obtenue en éclatant $\mathbb{R}^3$ en x_0 est une sphère et le diviseur exceptionnel deux points.

$$\begin{array}{ccc} \bullet\bullet & \hookrightarrow & S^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On obtient

$$\tilde{E}_1 = \left[\begin{array}{ccc} \langle X^* \rangle & \longrightarrow & 0 \\ 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \\ \langle x_0^* \rangle \oplus \langle x_0^* \rangle & \longrightarrow & \langle x_1^*, x_2^* \rangle \end{array} \right]$$

Par suite

$$\tilde{E}_2 = \left[\begin{array}{ccc} \langle X^* \rangle & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & 0 \\ \langle x_0^* \oplus x_0^* \rangle & \longrightarrow & \langle x_1^* + x_2^* \rangle \end{array} \right]$$

Ainsi

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 1 & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

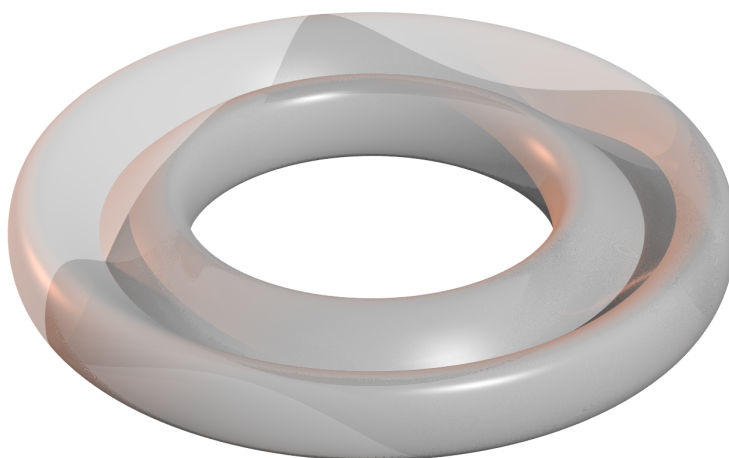
Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T^2$.

Remark 6.6.1. En utilisant la formule du produit, on peut calculer les filtrations des figures suivantes. On obtient en particulier les dimensions des $E_2^{a,b}$:

$$\dim E_2^{a,b}(X \times Y) = \sum_{p+s=a, q+t=b} \dim E_2^{p,q}(X) \times \dim E_2^{s,t}(Y)$$

d'après l'isomorphisme 5.5.3. Dans un produit de suites spectrales on ajoute les indices des lignes, colonnes, et on fait la somme des produits des dimensions des espaces correspondants.

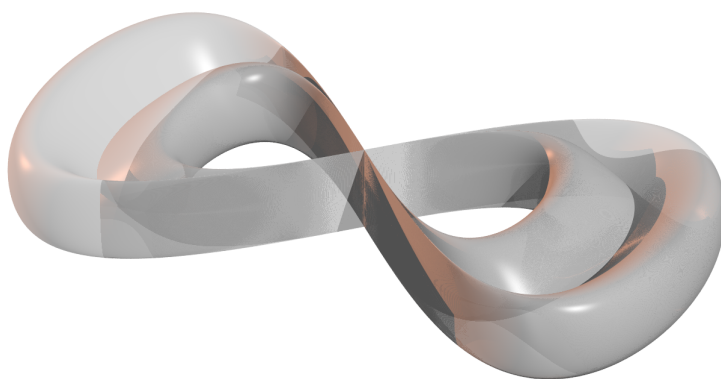
6.7 Le « huit » $\times S^1$



$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T^2 + T = T(T+1)$.

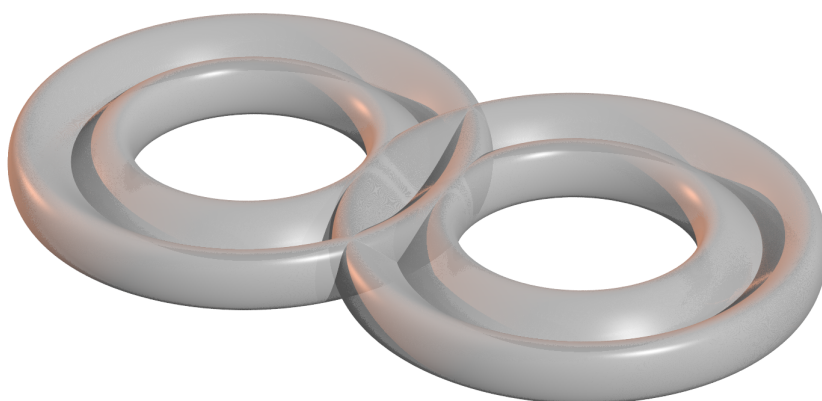
6.8 Le « huit » $\times$ « huit »



$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T^2$.

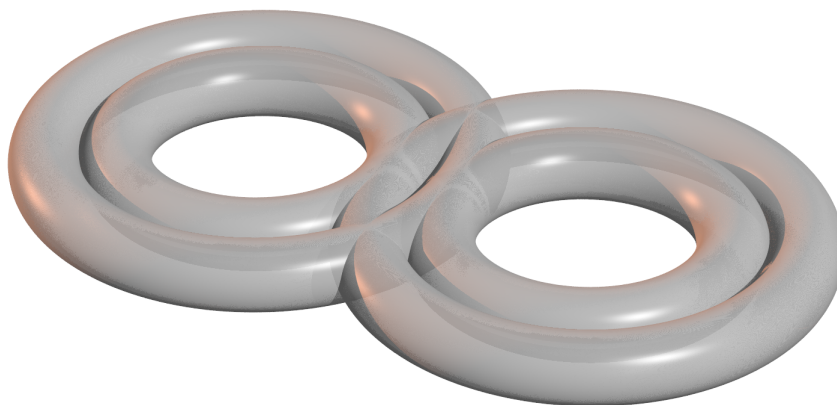
6.9 Le « huit » $\times$ « deux cercles tangents »



$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & & \\ 3 & 2 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = 2T^2 + T = T(2T + 1)$.

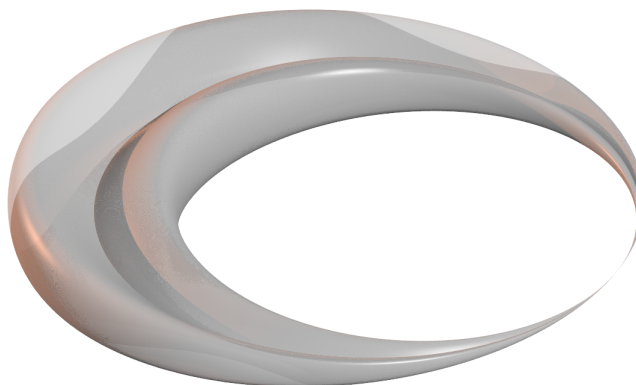
6.10 Le « deux cercles tangents » $\times$ « deux cercles tangents »



$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 2 & & \\ 1 & 0 & \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 2 & & \\ 1 & 0 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & & \\ 4 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = 4T^2 + 4T + 1 = (2T + 1)(2T + 1)$.

6.11 Le « huit » $\times S^1$ pincé



Dans ce cas on n'utilise pas directement une hyperrésolution cubique, mais seulement un carré acyclique dans la catégorie $\mathbf{Sch}_c(\mathbb{R})$. Le foncteur filtration par le poids permet l'additivité dans cette catégorie (Théorème 5.3.4). Comme on connaît la filtration par le poids des trois autres variétés sauf X , on calcule celle de X . On utilise « huit » $\times S^1$.

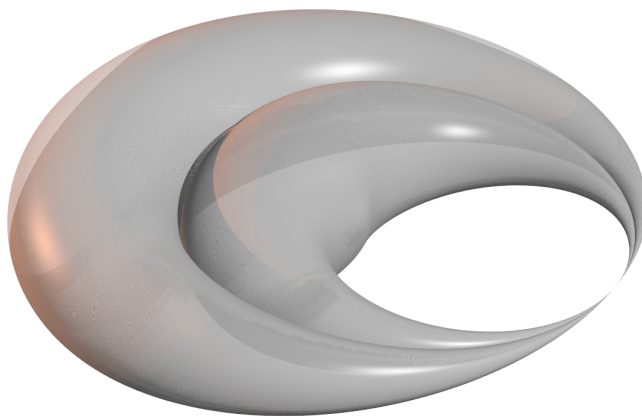
$$\begin{array}{ccc} \ll \text{huit} \gg \times \bullet & \hookrightarrow & \ll \text{huit} \gg \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On obtient

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T^2 + 1$.

6.12 Le « deux cercles tangents » $\times S^1$ pincé



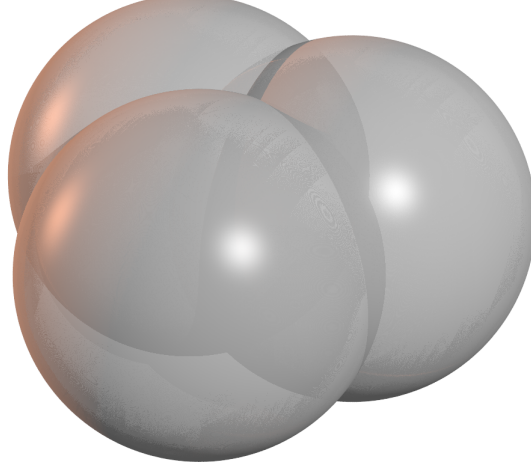
Comme pour la figure précédente, on utilise « deux cercles tangents » $\times S^1$.

$$\begin{array}{ccc} \ll \text{deux cercles tangents} \gg \times \bullet & \hookrightarrow & \ll \text{deux cercles tangents} \gg \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \hookrightarrow & \ll \text{deux cercles tangents} \gg \times S^1 \text{ pincé} \end{array}$$

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = 2T^2 + T + 1$.

6.13 L'union de trois sphères à croisements normaux



Soit X la surface de $\mathbb{R}^3$ union de trois sphères de rayon 2 et de centres $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, -\sqrt{3}, 0)$.

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

où

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

$$X_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y + \sqrt{3})^2 + z^2 = 4\}$$

Comme chaque diviseur à croisements normaux, une hyperrésolution cubique de X est donnée par l'inclusion des $(i+1)$ -auto-intersections des composantes irréductibles dans les i -auto-intersections. Ici

$$X_i \cap X_j \cong S^1 \text{ si } i \neq j$$

et

$$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \right\} = \bullet\bullet$$

La suite spectrale de cette hyperrésolution est quasi-isomorphe à $\tilde{E}_1 =$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H^2(X_1) \oplus H^2(X_2) \oplus H^2(X_3) & \longrightarrow & H^2(X_1 \cap X_2) \oplus H^2(X_1 \cap X_3) \oplus H^2(X_2 \cap X_3) & \longrightarrow & H^2(X_1 \cap X_2 \cap X_3) \\ H^1(X_1) \oplus H^1(X_2) \oplus H^1(X_3) & \longrightarrow & H^1(X_1 \cap X_2) \oplus H^1(X_1 \cap X_3) \oplus H^1(X_2 \cap X_3) & \longrightarrow & H^1(X_1 \cap X_2 \cap X_3) \\ H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) \oplus H^0(X_3) & \longrightarrow & H^0(X_1 \cap X_2) \oplus H^0(X_1 \cap X_3) \oplus H^0(X_2 \cap X_3) & \longrightarrow & H^0(X_1 \cap X_2 \cap X_3) \end{array}$$

dont les dimensions sont

$$\dim \tilde{E}_1 = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Un calcul donne

$$\dim \tilde{E}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ainsi la différentielle $d_2 : E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+2,q-1} \equiv 0$, et $\tilde{E}^2 = \tilde{E}^\infty$.

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = 3T^2 - 3T + 2$.

Les nombres de Betti sont $b_0(X) = 1$, $b_1(X) = 0$, $b_2(X) = 7$.

La filtration sur $H^2(X)$ est donné par

$$\mathcal{W}^{-3}H^2(X) = H^2(X)$$

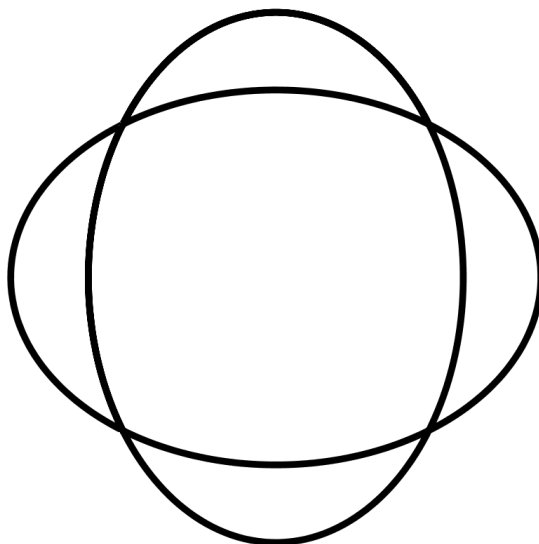
$$\frac{\mathcal{W}^{-3}H^2(X)}{\mathcal{W}^{-2}H^2(X)} = \langle X_1^*, X_2^*, X_3^* \rangle \text{ est engendré par les sphères,}$$

$\frac{\mathcal{W}^{-2}H^2(X)}{\mathcal{W}^{-1}H^2(X)}$ est engendré par les 2-cocycles qui sont la somme de deux cochaînes, chacune correspondant à l'intersection d'une sphère avec l'intérieur d'une autre. Les cycles enferment un volume commun aux deux sphères, ceci pour chaque paire de deux des trois sphères.

Enfin $\frac{\mathcal{W}^{-1}H^2(X)}{\mathcal{W}^0H^2(X)}$ est engendré par le cocycle correspondant au volume central : on intersecte une sphère avec l'intérieur des deux autres, puis on fait la somme de ces trois chaînes.

Remark 6.13.1. Dans [19], McCrory et Parusiński calculent trois exemples de filtration par le poids, en supposant que celle-ci existe, et vérifie des propriétés de fonctorialité et d'additivité, ce qui a été construit depuis.

6.14 Les deux ellipses



C'est l'exemple 2.7 de [19].

Soit X l'union des deux ellipses qui s'intersectent en quatre points :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x^2 + y^2 - 1)(x^2 + 2y^2 - 1) = 0\}$$

et X_1, X_2 ses deux composantes irréductibles. On a $X_i \cong S^1$.

Une résolution des singularités est donné par

$$\begin{array}{ccc} \bullet \bullet \bullet \bullet \sqcup \bullet \bullet \bullet \bullet & \hookrightarrow & X_1 \sqcup X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet \bullet \bullet \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On obtient

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = T - 2$.

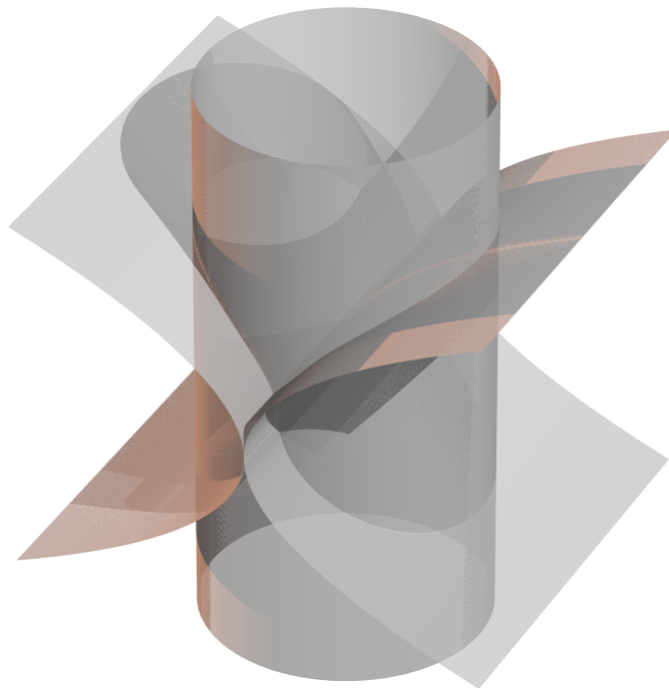
La filtration sur $H^1(X)$ est donné par

$$\mathcal{W}^{-2}H^1(X) = H^1(X)$$

$$\frac{\mathcal{W}^{-2}H^1(X)}{\mathcal{W}^{-1}H^1(X)} = \langle X_1^*, X_2^* \rangle \text{ est engendré par les deux ellipses,}$$

$$\frac{\mathcal{W}^{-1}H^1(X)}{\mathcal{W}^0H^1(X)} \text{ est engendré par trois des quatre boucles extérieures.}$$

6.15 Les deux cercles bitangents



C'est l'exemple 4.2 de [19].

Dans $\mathbb{R}^3$, soit X l'intersection du cylindre de révolution $x^2 + y^2 = 1$ avec l'union de deux cylindres paraboliques $x = z^2$ and $x = -z^2$,

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, (x - z^2)(x + z^2) = 0\}$$

Ainsi X est topologiquement l'union de deux cercles tangents en deux points. Soit $\tilde{X}$ l'union disjointe des deux composantes irréductibles de X . Une hyperrésolution cubique est donnée par

$$\begin{array}{ccc} \bullet \bullet \sqcup \bullet \bullet & \hookrightarrow & S^1 \sqcup S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet \bullet & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On obtient

$$\dim \tilde{E}^2 = \begin{vmatrix} 2 & \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Le polynôme de Poincaré virtuel est $\beta(X)(T) = 2T^2$.

La filtration sur $H^1(X)$ est donnée par $\mathcal{W}^{-2}H^1(X) = H^1(X)$

$\frac{\mathcal{W}^{-2}H^1(X)}{\mathcal{W}^{-1}H^1(X)} = \langle X_1^*, X_2^* \rangle$ est engendré par les deux cercles,

$\frac{\mathcal{W}^{-1}H^1(X)}{\mathcal{W}^0H^1(X)}$ est engendré par le cycle formé d'un arc de chaque cercle.

6.16 Les deux sphères et le tore à croisements normaux



Cet exemple de McCrory et Parusiński dans [19] fournit une suite spectrale qui ne dégénère pas à l'ordre 2, mais seulement au terme $\tilde{E}_3$. C'est donc ce terme $\tilde{E}_3$ qui donne la filtration sur $H_*(X)$, en particulier les nombres de Betti

$$b_n(X) = \sum_{p=0}^3 \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{E}_{p,n-p}^\infty(X)$$

Le terme $\tilde{E}_2$ donne les nombres de Betti virtuels

$$\beta_q(X) = \sum_{p=0}^3 (-1)^p \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{E}_{p,q}^2(X)$$

De plus, cet exemple montre que le terme $\tilde{E}_3$ de la suite spectrale de poids n'est pas additif en général, au même sens que pour $\tilde{E}_2$.

Soit $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ l'union des surfaces de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

X_1 la sphère de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

X_1 la sphère de centre $(-1, 0, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

X_3 le tore de révolution qui est le tube de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ autour du cercle dans le plan (y, z) de centre $(0, 4, 0)$ et de rayon 4.

$$X_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (\sqrt{(y-4)^2 + z^2} - 4)^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

Une hyperrésolution cubique est donnée par l'inclusion des trois composantes irréductibles. La suite spectrale a pour dimensions

$$\dim \tilde{E}_1 = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Un calcul donne

$$\dim \tilde{E}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

puis

$$\dim \tilde{E}_3 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Sur $\dim \tilde{E}_2$, on lit le polynôme de Poincaré virtuel $\beta(X)(T) = 3T^2 - T + 4$. Sur $\tilde{E}_3$, on peut lire la filtration par le poids sur $H^2(X)$ qui est de dimension 8.

6.17 Annexe : code source pour les dessins avec POV-Ray

Le code commence avec l'en-tête suivante :

```
#include "colors.inc"
#include "functions.inc"

global_settings {assumed_gamma 1.0
  max_trace_level 5}
background { color <1.0,1.00,1.00> }

camera {location <20.5,30.0,-42>
  right <4/3, 0, 0>
  up <0, 1, 0> sky <0, 1, 0>
  direction <0, 0, 7>
  look_at <0, 0.0, 0>}
light_source {<120,130,-60> colour <1,1,1>}
light_source {<-120,20,0> colour <1,0.4,0.2>}
```

Puis la plupart des exemples, on a paramétré les surfaces pour plus de transparence.

Exemple 6.3 :

```
parametric{
  function{ cos(u)*(3+cos(v)) } // x(u,v)
  function{ sin(v) } // y(u,v)
  function{ sin(u)*(3+cos(v)) } // z(u,v)
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----
```

Exemple 6.4 :

```
parametric{
  function{ 1.5*cos(u)*cos(v) } // x(u,v)
  function{ 1.5*sin(v) } // y(u,v)
  function{ 1.5*sin(u)*cos(v) } // z(u,v)
  <0,-pi/2>,<2*pi,pi/2> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----
```

```
parametric{
  function{ 3+cos(u)*(1.5+0.02*cos(v)) } // x(u,v)
  function{ sin(u)*(1.5+0.02*cos(v)) } // y(u,v)
  function{ 0.02*sin(v) } // z(u,v)
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----
```

```
parametric{
  function{ -3+cos(u)*(1.5+0.02*cos(v)) } // x(u,v)
  function{ sin(u)*(1.5+0.02*cos(v)) } // y(u,v)
  function{ 0.02*sin(v) } // z(u,v)
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
```

```

    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

Exemple 6.5 :

```

isosurface{
  function{pow(x*x+y*y+z*z+9-pow((x-3)/6,2),2)-36*(x*x + z*z)}
  contained_by{box{<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  max_gradient 2500
  finish{fn}
  texture { pigment{color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.1}
             finish { phong 0.5}
           } // end of texture
}

```

Exemple 6.7 :

```

parametric{
  function{ cos(u)*(3+cos(v)) } // x(u,v)
  function{ cos(v)*sin(v) } // y(u,v)
  function{ sin(u)*(3+cos(v)) } // z(u,v)
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

Exemple 6.8 :

```

parametric{
  function{ cos(u)*(3+cos(v)) } // x(u,v) ou x
  function{ cos(v)*sin(v) } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ cos(u)*sin(u)*(3+cos(v)) } // z(u,v) ou z
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

Exemple 6.9 :

```

parametric{
  function{ -2+cos(u)*(2+0.7*cos(v)) } // x(u,v) ou x
  function{ 0.7*cos(v)*sin(v) } // y(u,v) ou f(x,z)
}

```

```

function{ sin(u)*(2+0.7*cos(v)) }      // z(u,v)  ou z
<0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

```

parametric{
    function{ 2*cos(u)*(2+0.7*cos(v)) } // x(u,v)  ou x
    function{ 0.7*cos(v)*sin(v) }      // y(u,v)  ou f(x,z)
    function{ sin(u)*(2+0.7*cos(v)) }  // z(u,v)  ou z
    <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
    contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
    texture{
        pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
        finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

Exemple 6.10 :

```

parametric{
    function{ -2*cos(u)*(1.6+0.4*cos(v)) } // x(u,v)  ou x
    function{ 0.4*sin(v) }                // y(u,v)  ou f(x,z)
    function{ sin(u)*(1.6+0.4*cos(v)) }    // z(u,v)  ou z
    <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
    contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
    texture{
        pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
        finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

```

parametric{
    function{ -2*cos(u)*(2.4+0.4*cos(v)) } // x(u,v)  ou x
    function{ 0.4*sin(v) }                // y(u,v)  ou f(x,z)
    function{ sin(u)*(2.4+0.4*cos(v)) }    // z(u,v)  ou z
    <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
    contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
    texture{
        pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
        finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

```

parametric{
    function{ 2*cos(u)*(1.6+0.4*cos(v)) } // x(u,v)  ou x

```

```

function{ 0.4*sin(v) } // y(u,v) ou f(x,z)
function{ sin(u)*(1.6+0.4*cos(v)) } // z(u,v) ou z
<0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
texture{
  pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
  finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

parametric{
  function{ 2*cos(u)*(2.4+0.4*cos(v)) } // x(u,v) ou x
  function{ 0.4*sin(v) } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ sin(u)*(2.4+0.4*cos(v)) } // z(u,v) ou z
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

Exemple 6.11 :

```

parametric{
  function{ cos(u)*(3+cos(v)*(cos(u)-1)/2) } // x(u,v) ou x
  function{ cos(v)*sin(v)*(cos(u)-1)/2 } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ sin(u)*(3+cos(v)*(cos(u)-1)/2) } // z(u,v) ou z
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

Exemple 6.12 :

```

parametric{
  function{ cos(u)*(2.5-(cos(u)-1)/2+cos(v)*(cos(u)-1)/2) } // x(u,v) ou x
  function{ sin(v)*(cos(u)-1)/2 } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ sin(u)*(2.5-(cos(u)-1)/2+cos(v)*(cos(u)-1)/2) } // z(u,v) ou z
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

```

parametric{
  function{ cos(u)*(2.5+(cos(u)-1)/2+cos(v)*(cos(u)-1)/2) } // x(u,v) ou x
  function{ sin(v)*(cos(u)-1)/2 } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ sin(u)*(2.5+(cos(u)-1)/2+cos(v)*(cos(u)-1)/2) } // z(u,v) ou z
  <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

Exemple 6.13 :

```

parametric{
  function{ -1+2*cos(u)*cos(v) } // x(u,v) ou x
  function{ 2*sin(v) } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ 2*sin(u)*cos(v) } // z(u,v) ou z
  <0,-pi/2>,<2*pi,pi/2> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

```

parametric{
  function{ 1+2*cos(u)*cos(v) } // x(u,v) ou x
  function{ 2*sin(v) } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ 2*sin(u)*cos(v) } // z(u,v) ou z
  <0,-pi/2>,<2*pi,pi/2> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```

```

parametric{
  function{ 2*cos(u)*cos(v) } // x(u,v) ou x
  function{ 2*sin(v) } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ -sqrt(3)+2*sin(u)*cos(v) } // z(u,v) ou z
  <0,-pi/2>,<2*pi,pi/2> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}

```

```
} // end of parametric -----
```

Exemple 6.15 :

```
parametric{
  function{ cos(u) } // x(u,v) ou x
  function{ v } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ sin(u) } // z(u,v) ou z
  <0,-2>,<2*pi,2> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----
```

```
parametric{
  function{ pow(u,2) } // x(u,v) ou x
  function{ u } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ v } // z(u,v) ou z
  <-1.3,-1.5>,<1.3,1.5> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----
```

```
parametric{
  function{ -pow(u,2) } // x(u,v) ou x
  function{ u } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ v } // z(u,v) ou z
  <-1.3,-1.5>,<1.3,1.5> // start, end(u,v)
  contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
  texture{
    pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
    finish { phong 0.5 }}
  //scale 1.5
} // end of parametric -----
```

Exemple 6.16 :

```
parametric{
  function{ (-1+sqrt(2)*cos(u)*cos(v))/2 } // x(u,v) ou x
  function{ sqrt(2)*sin(v)/2 } // y(u,v) ou f(x,z)
  function{ sqrt(2)*sin(u)*cos(v)/2 } // z(u,v) ou z
  <0,-pi/2>,<2*pi,pi/2> // start, end(u,v)
```

```

    contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
    texture{
        pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
        finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

parametric{
    function{ (1+sqrt(2)*cos(u)*cos(v))/2 } // x(u,v) ou x
    function{ sqrt(2)*sin(v)/2 } // y(u,v) ou f(x,z)
    function{ sqrt(2)*sin(u)*cos(v)/2 } // z(u,v) ou z
    <0,-pi/2>,<2*pi,pi/2> // start, end(u,v)
    contained_by {box {<-5,-5,-5>,<5,5,5>}}
    texture{
        pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
        finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

parametric{
    function{ (sqrt(2)*sin(v)/2)/2 } // x(u,v) ou x
    function{ (4*cos(u)+sqrt(2)*cos(v)/2)/2 } // y(u,v) ou f(x,z)
    function{ (4+4*sin(u)+sqrt(2)*cos(v)/2)/2 } // z(u,v) ou z
    <0,0>,<2*pi,2*pi> // start, end(u,v)
    contained_by {box {<-12,-12,-12>,<12,12,12>}}
    texture{
        pigment{ color rgb<0.8,0.8,0.8> transmit 0.3}
        finish { phong 0.5 }}
} // end of parametric -----

```


Bibliographie

- [1] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk - Torification and factorization of birational maps, *Journal of the American Mathematical Society* (2002) 531-572.
- [2] S. Akbulut, H. King, *The topology of real algebraic sets*, Enseign. math. **29** (1983), p. 221-261.
- [3] F. Bittner, The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero, *Compositio Math.* **140** (2004), no. 4, 1011-1032.
- [4] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, Springer Verlag, New York, 1992.
- [5] A. Borel, J. C. Moore, Homology theory for locally compact spaces, *Michigan Math. J.* 7 (1960), 137-159.
- [6] M. Coste, *Real algebraic sets*, Panoramas & Synthèses **24**, Soc. Math. France (2007), 1-32.
- [7] P. Deligne, *Poids dans la cohomologie des variétés algébriques* Proc. Int. Cong. Math. Vancouver (1974), 79-85.
- [8] P. Deligne, *Théorie de Hodge II*, IHES Publ. Math. **40** (1971), 5-58.
- [9] M.J. Greenberg, *Lectures on algebraic topology*, W. A. Benjamin, Inc, 1967.
- [10] F. Guillén, V. Navarro Aznar, P. Pascual, F. Puerta, *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique*, Lect. Notes in Math., **1335**, Springer, Berlin 1988.
- [11] F. Guillén, V. Navarro Aznar, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, IHES Publ. Math **95** (2002), 1-83.
- [12] G. Fichou, *Motivic invariants of arc-symmetric sets and blow-Nash equivalence*, *Compositio Math.* **141** (2005) 655-688.
- [13] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [14] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, *Annals of Math.* 79 (1964), 109-326.

- [15] K. Kurdyka, *Ensembles semi-algébriques symétriques par arcs*, Math. Ann. **281** (1988), 445-462.
- [16] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Arc-symmetric sets and arc-analytic mappings*, Panoramas & Synthèses **24**, Soc. Math. France (2007), 33-67.
- [17] J. McCleary, *Users's guide to spectral sequences*, Mathematics lecture series, Publish or Perish (1985), **12**.
- [18] C. McCrory, A. Parusiński, *Algebraically constructible functions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **30** (1997), 527-552.
- [19] C. McCrory, A. Parusiński, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. I, **336** (2003), 763-768.
- [20] C. McCrory, A. Parusiński, *Algebraically constructible functions : real algebra and topology*, Panoramas & Synthèses **24**, Soc. Math. France (2007), 69-85.
- [21] C. McCrory, A. Parusiński, *The weight filtration for real algebraic varieties*, in *Topology of Stratified Spaces*, G. Friedman *et al.* eds., MSRI Publ. 58, Cambridge University Press, New York 2011, 121-160.
- [22] C. McCrory, A. Parusiński, *Topology of real algebraic sets of dimension 4 : necessary conditions*, Topology **39** (2000), p.495-523.
- [23] C. Peters, J. Steenbrink, *Mixed Hodge Structures*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.
- [24] E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York 1966.
- [25] B. Totaro, *Topology of singular algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. Math. Beijing (2002), 533-541.
- [26] J. Włodarczyk, *Simple Hironaka resolution in characteristic zero*, Journal of the American Mathematical Society (2005) 779-822.