HAL
open science

H-cobordismes en géométrie symplectique

Sylvain Courte

To cite this version:

Sylvain Courte. H-cobordismes en géométrie symplectique. Mathématiques générales [math.GM]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2015. Français. NNT : 2015ENSL0991 . tel-01160399

HAL Id: tel-01160399

https://theses.hal.science/tel-01160399v1

Submitted on 5 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale Informatique et Mathématiques de Lyon

H-cobordismes en géométrie symplectique

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4 juin 2015

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lyon, délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

Discipline : Mathématiques

par

Sylvain Courte

Directeur de thèse :

Emmanuel Giroux (École Normale Supérieure de Lyon)

Après avis de :

Jean-François Barraud (Université de Toulouse)
Kai Cieliebak (Universität Augsburg)

Devant la commission d'examen formée de :

Jean-François Barraud (Université de Toulouse)
Emmanuel Giroux (École Normale Supérieure de Lyon)
François Laudenbach (Université de Nantes)
Alexandru Oancea (Université Pierre et Marie Curie, Paris-Jussieu)
Jean-Claude Sikorav (École Normale Supérieure de Lyon)

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées — UMR 5669

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à mon directeur de thèse Emmanuel Giroux. Je lui suis infiniment reconnaissant de m'avoir guidé au cours de cette thèse en m'orientant sur des problèmes passionnants et en partageant avec moi son expérience en géométrie symplectique. Merci surtout d'avoir fait cela avec tant d'humour et d'humanité.

Je suis très honoré que Jean-François Barraud et Kai Cieliebak aient accepté de relire ce manuscrit. Ce fut un plaisir de faire la connaissance de Jean-François Barraud lors d'une visite à Toulouse, je n'oublie pas son accueil chaleureux. Sans le savoir, Kai Cieliebak m'a accompagné pendant une bonne partie de ma thèse à travers son excellent livre [CE12] coécrit avec Yasha Eliashberg. L'intérêt que François Laudenbach a porté à mon travail m'a également beaucoup stimulé, je le remercie en particulier pour sa relecture attentive d'un de mes papiers. Pendant toutes ces années à l'ENS Lyon, je ne compte pas les heures passées à discuter de mathématiques avec Jean-Claude Sikorav (heureusement, lui ne compte pas non plus !). Merci de partager ton immense culture avec tant de générosité. Je suis également très heureux de compter Alexandru Oancea parmi les membres du jury.

Je remercie plus largement tous les membres de l'UMPA de contribuer à l'ambiance conviviale (mais studieuse !) qui règne au laboratoire. J'ai profité des connaissances de chacun à plusieurs reprises ; merci en particulier à Jean-Yves qui m'a suivi depuis mon arrivée à Lyon, à Marco pour ses précieux conseils, à Bruno Sévennec toujours prêt à donner un coup de main. Merci à Magalie et Virginia pour leur efficacité et leur sourire.

L'enseignement des mathématiques à l'ENS Lyon a été une source d'épanouissement pour moi. Je remercie tous les enseignants, notamment Claude Danthony, Laurent Berger et Jean-Claude Sikorav, grâce auxquels j'ai beaucoup appris d'abord sur les bancs de l'amphi A puis en préparant les TDs pour leurs cours. Merci également d'une part à mes co-TD (wo)-men : Anne, Daniel, Matthias et Mickaël de m'avoir indiqué à plusieurs reprises la résolution des exercices 5 minutes avant que j'entre dans l'arène et, d'autre part, aux étudiants qui ont subi mes TDs sans trop s'en plaindre !

Mes cobureaux successifs sont pour beaucoup dans cet aboutissement, leur soutien (moral et latex entre autres) et leur humour subtil (ou beauf ?) ont rendu agréable le quotidien parfois frustrant du thésard. François et Marielle, pas d'inquiétude, je me charge de récupérer la collection de cartes postales (pour plus d'informations voir [Sim14] et les références s'y trouvant). Je souhaite à leurs successeurs Loïc (Monsieur patron) et Samuel de la foutre au fond à leur tour. Merci plus généralement à tous ceux qui ont été dans le même bateau pendant ces années : (en plus de ceux déjà cités) Romain (détends-toi !), Alessandro (fournisseur officiel d'huile d'olive), Pierre-Adelin (attention aux pruneaux), Sébastien (fiston), Émeric (expert en latex), Rémi,

Michele, Ramla, Maxime, Álvaro, Mohamed, Vincent, Juhan, Marie, Olga, Valentin, Roland, Fangzhou, ... j'en oublie à coup sûr, pardonnez-moi. Mention spéciale pour mon petit frère mathématique, Alexandre, qui a toujours été là pour se faire tirer les oreilles à ma place ! Je vous souhaite à tous le meilleur.

Merci aussi aux amis de Lyon : Kévin et Rozenn, le Nunz', Matthieu, Bruno, Adriane, Thomas et Cécile, Lauriane, Bérénice et Thibaut, aux footeux qui m'ont permis de sécréter assez d'endorphine pour terminer cette thèse, aux amis d'ailleurs (toujours intrigués par le mot symplectique !), aux amis matheux rencontrés en conférence ou ailleurs.

Merci à ma famille pour votre soutien, vous m'avez aidé à croire en moi et à faire les bons choix. Ces retours périodiques dans ch'nord m'ont fait tant de bien.

Merci à toi Cyrielle, la joie que tu m'apportes depuis 10 ans (!) est inestimable. Sans ton soutien pendant cette thèse, j'aurais sans doute abandonné de nombreuses fois, merci d'avoir supporté mon moral sinusoïdal !

Merci à Martin dont l'arrivée a été un immense bonheur au milieu de cette période de rédaction ô combien réjouissante ! Pardon d'avoir utilisé la lecture de ce texte pour t'endormir, j'espère qu'il n'y aura pas de séquelles !

Sommaire

Introduction **1**

Chapitre 1
H-cobordismes

1.1 Procédé infini de Mazur 8
1.2 Autour du théorème du s-cobordisme 11
1.2.1 H-cobordismes et cobordismes inversibles 11
1.2.2 Fonctions et pseudo-gradients 11
1.2.3 Complexe de Morse et type d'homotopie simple 14
1.2.4 H-cobordismes de torsion prescrite 18
1.2.5 Chemins de traversée de $\mathcal{F}^1$ 20
1.2.6 Glissement d'anses 22
1.2.7 Le théorème du s-cobordisme 23
1.2.8 Composition et classification des h-cobordismes 26
1.2.9 Une remarque de Hatcher et Lawson 27
1.2.10 Connexité de $\mathcal{F}_k$ 28
1.3 Exemples de h-cobordismes non triviaux 28
1.3.1 Espaces lenticulaires et équivalences d'homotopie 28
1.3.2 H-cobordismes à partir d'équivalences d'homotopie . . 32

Chapitre 2
Symplectisation et procédé infini de Mazur

2.1 Variétés symplectiques et de contact 36
2.2 Cobordismes de Liouville 38
2.2.1 La notion classique 38
2.2.2 Cobordismes de Liouville idéaux 39

2.3 Procédé infini de Mazur 49

Chapitre 3
COBORDISMES DE WEINSTEIN

3.1 Définitions et propriétés 52
3.2 Cobordisme de Weinstein élémentaire 58
3.3 Isotopie des sphères descendantes et montantes 61
3.4 Chemins de traversée de $\mathcal{F}^1_\omega$ 62

Chapitre 4
FLEXIBILITÉ DES COBORDISMES DE WEINSTEIN FLEXIBLES

4.1 H-principe pour les plongements isotropes 68
4.2 Structures de Weinstein flexibles avec fonction fixée 73
4.3 Des fonctions aux fonctions ω-convexes 75
4.4 Le théorème de flexibilité de Cieliebak et Eliashberg 78
4.5 H-cobordismes de Weinstein flexibles 78

Chapitre 5
RÉSULTATS PRINCIPAUX

5.1 Symplectisations exact symplectomorphes 82
5.2 La compactification idéale n'est pas unique 82
5.3 Stabilisation 82
5.4 Exemples 83
5.4.1 À base de $L(7,1)$ et de $L(7,2)$ 84
5.4.2 À base de $L(5,1)$ 85

Bibliographie **91**

Introduction

La *géométrie de contact* est née des travaux de Sophus Lie sur les symétries des équations différentielles. La condition d'holonomie d'une section du fibré des 1-jets d'une variété M (c'est-à-dire être de type $(x, \mathrm{d}_x f, f(x))$ avec $f : M \to \mathbb{R}$) se traduit par la tangence de son graphe à un certain champ d'hyperplans ($\ker(\mathrm{d}z - p\,\mathrm{d}q)$ avec les notations usuelles) maximalement non-intégrable. En généralisant, on appelle *structure de contact* sur une variété (alors nécessairement de dimension impaire) un champ d'hyperplans ξ localement isomorphe à celui du fibré des 1-jets. En dimension 3, on connait beaucoup de choses sur la classification des structures de contact sur les variétés (voir [Gir00], [CGH09]). En dimension plus grande, la situation est plus complexe mais de nombreuses avancées ont été réalisées récemment. Borman, Eliashberg et Murphy ont notamment étendu la dichotomie tendue/vrillée, fondamentale en dimension 3 ([Eli89]), pour les structures de contact en dimension supérieure ([BEM14]).

La *géométrie symplectique* prend sa source dans la formalisation mathématique de la mécanique classique. Une *structure symplectique* sur une variété (nécessairement de dimension paire) est une 2-forme ω fermée et non-dégénérée. Cette structure permet, par dualité, d'associer à toute fonction un champ de vecteur dit *hamiltonien* dont le flot peut modéliser l'évolution d'un système mécanique. La *géométrie complexe* est une source importante d'exemples de variété symplectiques. Par exemple, les *variétés de Stein*, variétés complexes proprement plongées dans $\mathbb{C}^n$, portent une structure symplectique naturelle ; on les appelle *variétés de Weinstein* lorsqu'on décide d'oublier leur structure complexe.

Si en premier lieu la géométrie des champs d'hyperplans maximalement non intégrables et celle des 2-formes fermées non-dégénérées peuvent sembler éloignées, elles sont en fait intimement liées, notamment par la construction suivante. À toute variété de contact (M, ξ) on peut associer une variété symplectique $(\mathrm{S}_\xi M, \omega)$, appelée sa *symplectisation*, difféomorphe à $M \times \mathbb{R}$ de sorte que la géométrie de contact de (M, ξ) s'interprète entièrement comme la géométrie symplectique $\mathbb{R}$-équivariante de $(\mathrm{S}_\xi M, \omega)$.

Cette thèse porte principalement sur la question suivante concernant cette construction fondamentale.

Question 1. *Si deux variétés de contact possèdent des symplectisations exact symplectomorphes, sont-elles contactomorphes ?*

Le travail fondateur de Gromov ([Gro85]) a démontré l'importance des *courbes pseudo-holomorphes* en géométrie symplectique. La *théorie symplectique des champs* introduite par Eliashberg, Givental et Hofer (voir [EGH00]) vise notamment à construire des invariants des variétés de contact à l'aide de courbes pseudo-holomorphes dans leurs symplectisations. Cette méthode permet en effet de distinguer des variétés de contact mais elle semble impuissante dans l'étude de cette question. En fait, on ne connait pas d'invariant permettant de distinguer des variétés de contact ayant des symplectisations exact symplectomorphes ; il est ainsi tentant de penser que la réponse à la question 1 est positive. Cependant, on a construit au cours de cette thèse les contre-exemples suivants.

Théorème A. *En toute dimension impaire supérieure ou égale à* 5*, il existe des variétés de contact compactes, sans bord, non difféomorphes mais possédant des symplectisations exact symplectomorphes.*

On peut prendre par exemple $\mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{S}^{2n}$ *et* $\mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{S}^{2n}$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

Même si l'on suppose en plus que les variétés de contact sont difféomorphes, la réponse est toujours négative.

Théorème B. *En toute dimension impaire supérieure ou égale à* 5*, il existe une variété compacte sans bord portant deux structures de contact non contactomorphes mais possédant des symplectisations exact symplectomorphes.*

On peut prendre par exemple $\mathrm{L}(5,1) \times \mathrm{S}^{2n}$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

Ces exemples sont basés sur un phénomène bien connu en topologie différentielle : l'existence de *h-cobordismes* non triviaux en grande dimension. Les h-cobordismes de dimension supérieure ou égale à 6 sont très bien compris depuis les années 60′ : ils sont triviaux (de la forme $M \times [0,1]$) dans le cas simplement connexe (Smale) et sont classifiés en général par la *torsion de Whitehead*, un invariant lié au groupe fondamental (Barden-Mazur-Stallings). Une conséquence amusante de cette classification est le fait que deux variétés h-cobordantes, bien que non-difféomorphes en général, le deviennent quand on en fait le produit par $\mathbb{R}$; c'est le cas par exemple de $\mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{S}^2$ et $\mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{S}^2$.

Les théorèmes A et B ci-dessus consistent à réaliser ces phénomènes dans le monde symplectique. Pour cela, on a besoin de construire et déformer des structures symplectiques sur les h-cobordismes. Une classe particulière de structures symplectiques, les *structures de Weinstein*, est bien adaptée à l'étude par la théorie de Morse. Celles-ci ont reçu beaucoup d'attention depuis leur première apparition dans [EG91] (voir aussi [Eli90] et [Wei91]). La dichotomie flexibilité/rigidité, désormais habituelle en géométrie symplectique, est particulièrement intéressante pour les structures de Weinstein : il existe à la

fois des phénomènes de rigidité ([SS05], [McL09], [AS10]) et une classe de structures de Weinstein, dites *flexibles*, qui jouit de propriétés de flexibilité (!) ([CE12]). En combinant ce phénomène de flexibilité découvert par Cieliebak et Eliashberg avec le théorème du s-cobordisme, on obtient le résultat suivant, à la base des théorèmes A et B.

Théorème C. *Soit (W, ω) un h-cobordisme de Weinstein flexible de dimension $2n \geqslant 6$ d'une variété de contact (M, ξ) vers une autre (M', ξ'). Les symplectisations de (M, ξ) et de (M', ξ') sont exact symplectomorphes.*

Hatcher et Lawson ont remarqué le phénomène de stabilisation suivant ([HL76]) : deux variétés h-cobordantes de dimension $m \geqslant 5$ deviennent difféomorphes après somme connexe avec un nombre suffisant de $S^k \times S^{m-k}$ (pour tout $2 \leqslant k \leqslant m-2$). On obtient l'analogue suivant en géométrie symplectique.

Théorème D. *Soit (W, ω) un h-cobordisme de Weinstein flexible de dimension $2n \geqslant 6$ de (M, ξ) vers (M', ξ'). Pour p assez grand, (M, ξ) et (M', ξ') deviennent contactomorphes après somme connexe de contact avec p copies de $S^k \times S^{2n-k-1}$ (pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-1$) où $S^k \times S^{m-k}$ est muni de la structure de contact comme bord de $D(T^* S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)})$.*

Une classe agréable de variétés symplectiques non compactes est formée des variétés obtenues en complétant des cobordismes (compacts) de Liouville, c'est-à-dire en leur attachant des bouts modelés sur des symplectisations (c'est notamment le cadre utilisé en théorie symplectique des champs). Emmanuel Giroux propose la notion de *cobordisme de Liouville idéal* (voir le chapitre 2) permettant de compactifier cet objet en un cobordisme muni d'une forme symplectique dans l'intérieur et qui détermine une structure de contact sur son bord. Il est naturel de se demander si cette compactification est unique, posons par exemple la question suivante.

Question 2. *Si deux domaines de Liouville idéaux ont des intérieurs exact symplectomorphes, leurs bords sont-ils contactomorphes ?*

Cette question est très liée à la première et on obtient sans surprise des contre-exemples par les mêmes méthodes.

Théorème E. *En toute dimension paire $\geqslant 6$, il existe des domaines de Weinstein idéaux, à bords non-difféomorphes, mais dont les intérieurs sont exact symplectomorphes.*

On peut prendre par exemple $L(7,1) \times D^{2n+1}$ et $L(7,2) \times D^{2n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Théorème F. *En toute dimension paire $\geqslant 6$, il existe un domaine compact portant deux structures de Weinstein idéales avec des bords non contactomorphes mais dont les intérieurs sont exact symplectomorphes.*

On peut prendre par exemple $L(5,1) \times D^{2n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Enfin, grâce à la correspondance entre les variétés de Weinstein et les variétés de Stein (voir [CE12]), les résultats de cette thèse peuvent le plus souvent se formuler également en termes de fonctions pluri-sous-harmoniques sur les variétés de Stein. On a choisi de n'utiliser que le langage des structures de Weinstein par souci de simplicité.

Le travail de cette thèse a fait l'objet de deux articles. Le premier [Cou14] contient les théorèmes A, C et E, le second [Cou15] contient les théorèmes B, D et F.

Voici le plan de ce manuscrit.

Le premier chapitre tourne autour du *théorème du s-cobordisme*. On introduit la *torsion de Whitehead* d'un h-cobordisme à partir du *complexe de Morse* et on donne quelques idées sur la démonstration du théorème du s-cobordisme. Quelques constructions de h-cobordismes non triviaux à base d'*espaces lenticulaires* sont présentées. Les résultats sont bien connus depuis les années 60'-70'.

Dans le second chapitre, on rappelle quelques notions de géométrie symplectique et de contact en ne manquant pas de traiter la symplectisation. On présente les *cobordismes de Liouville* entre variétés de contact ainsi que la notion de cobordisme de Liouville *idéal* proposée par Emmanuel Giroux. Ceci nous permet d'énoncer un premier résultat : deux variétés de contact closes ont des symplectisations exact symplectomorphes si et seulement s'il existe un cobordisme de Liouville idéal inversible entre elles.

Le troisième chapitre est un exposé succinct des *structures de Weinstein* sur les cobordismes. La plupart des résultats sont extraits du livre de Cieliebak et Eliashberg [CE12] et on omet la plupart des démonstrations. Une petite originalité dans la présentation consiste à travailler avec une structure symplectique fixée et à mettre ainsi l'accent sur l'espace des *fonctions ω-convexes*.

Dans le quatrième chapitre, on commence par discuter les résultats de *h-principe* pour les plongements isotropes dans les variétés de contact, dûs à Gromov pour le cas *sous-critique* et, plus récemment, à Murphy pour le cas *legendrien lâche*. Ensuite, on explique comment Cieliebak et Eliashberg en déduisent la flexibilité des structures de Weinstein *flexibles* (!).

Enfin, le cinquième et dernier chapitre contient les résultats principaux de cette thèse. On étudie en détails les structures de Weinstein flexibles sur les h-cobordismes de grande dimension et on en déduit les théorèmes énoncés dans cette introduction.

Terminons cette introduction par quelques conventions et notations qu'on utilisera dans tout ce texte.

— Par *variété* on entend toujours variété (éventuellement à bord) de classe C^∞, séparée, paracompacte, *orientée* et, le plus souvent, connexe. Une variété compacte et sans bord est dite *close*.
— On demande toujours aux difféomorphismes de préserver l'orientation.

— Si X est un champ de vecteurs, on note φ_X^t son flot au temps t. Pour une forme différentielle α, la dérivée de Lie de α dans la direction X sera notée $X.\alpha$ et le produit intérieur $X \lrcorner \alpha$.
— Le champ hamiltonien X_h d'une fonction h sur une variété symplectique (W, ω) est défini par $X_h \lrcorner \omega = -\,\mathrm{d}h$.
— On utilise parfois la notation de Gromov $\mathrm{Op}(A)$ pour désigner un voisinage non spécifié de A.

Chapitre 1

H-cobordismes

Ce chapitre tourne autour du théorème du h-cobordisme de Smale ainsi que sa généralisation au cas non-simplement connexe, à savoir le théorème du s-cobordisme de Barden, Mazur et Stallings. En guise de motivation, on commence par le procédé infini de Mazur. On rappelle ensuite les idées principales de la preuve du théorème du s-cobordisme. Le point culminant est la classification des h-cobordismes par la torsion de Whitehead ainsi que l'inversibilité des h-cobordismes. On termine par des exemples de h-cobordismes non triviaux construits à partir d'espaces lenticulaires de dimension trois.

Sommaire

1.1 Procédé infini de Mazur 8

1.2 Autour du théorème du s-cobordisme 11

1.2.1 H-cobordismes et cobordismes inversibles 11

1.2.2 Fonctions et pseudo-gradients 11

1.2.3 Complexe de Morse et type d'homotopie simple . . . 14

1.2.4 H-cobordismes de torsion prescrite 18

1.2.5 Chemins de traversée de $\mathcal{F}^1$ 20

1.2.6 Glissement d'anses 22

1.2.7 Le théorème du s-cobordisme 23

1.2.8 Composition et classification des h-cobordismes 26

1.2.9 Une remarque de Hatcher et Lawson 27

1.2.10 Connexité de $\mathcal{F}_k$ 28

1.3 Exemples de h-cobordismes non triviaux 28

1.3.1 Espaces lenticulaires et équivalences d'homotopie . . . 28

1.3.2 H-cobordismes à partir d'équivalences d'homotopie . 32

1.1 Procédé infini de Mazur

Pour motiver cette section, voici un premier problème bien connu.

Problème 1.1. *Soient M et M' deux variétés closes (et orientées) telles qu'il existe un difféomorphisme $M \times \mathbb{R} \to M' \times \mathbb{R}$ (préservant l'orientation) et envoyant le bout $M \times \{+\infty\}$ sur le bout $M' \times \{+\infty\}$. Existe-t-il un difféomorphisme (préservant l'orientation) entre M et M' ?*

On appelle *cobordisme* une variété W (orientée) et compacte à bord munie d'une décomposition de son bord $\partial W = \partial_- W \cup \partial_+ W$ où $\partial_- W$ et $\partial_+ W$, appelés respectivement *bord inférieur* et *bord supérieur*, sont des réunions de composantes connexes distinctes de ∂W. On munit toujours $\partial_- W$ (resp. $\partial_+ W$) de l'orientation induite par la règle "normale rentrante (resp. sortante) d'abord". On dira qu'un cobordisme W va d'une variété M à une variété M', ce que l'on notera $(W; M, M')$ si l'on s'est donné des difféomorphismes (préservant l'orientation [1]) $\partial_- W \to M$ et $\partial_+ W \to M'$. L'exemple le plus simple est le *cobordisme produit* $M \times [0,1]$. Les cobordismes peuvent se *composer* : étant donnés deux cobordismes $(W; M, M')$ et $(W'; M', M'')$, on obtient un cobordisme $(W \odot W'; M, M'')$ en collant W et W' le long de M' (avec l'identification donnée). On notera $\sim$ la relation de difféomorphisme relatif au bord (c'est-à-dire induisant l'identité via les identifications) et 1_M la classe d'équivalence du cobordisme $(M \times [0,1]; M, M)$ muni des identifications évidentes. On a les propriétés suivantes (voir [Mil65] p.2-4) :

1. La classe d'équivalence pour $\sim$ de $W \odot W'$ ne dépend que des classes d'équivalence de W et W'.
2. $W \odot 1_{M'} \sim W$ et $1_M \odot W \sim W$.
3. La composition est associative sur les classes d'équivalences.

Définition 1.2. *Un cobordisme $(W; M, M')$ est* inversible *s'il existe un cobordisme $(W'; M', M)$ tel que $W \odot W' \sim 1_M$ et $W' \odot W \sim 1_{M'}$.*

Noter que, par associativité de la composition, si un cobordisme admet un inverse à gauche et un inverse à droite, alors ceux-ci sont équivalents. De plus, l'inverse (à droite et à gauche) est unique à équivalence près.

Les cobordismes inversibles apparaissent naturellement dans l'étude du problème 1.1 mentionné ci-dessus.

Proposition 1.3. *Soient M et M' deux variétés closes orientées telles qu'il existe un difféomorphisme $\phi : M \times \mathbb{R} \to M' \times \mathbb{R}$ préservant l'orientation et envoyant le bout $M \times \{+\infty\}$ sur le bout $M' \times \{+\infty\}$. Alors il existe un cobordisme inversible $(W; M, M')$.*

1. Ce sera toujours le cas, on ne le répètera plus dans la suite.

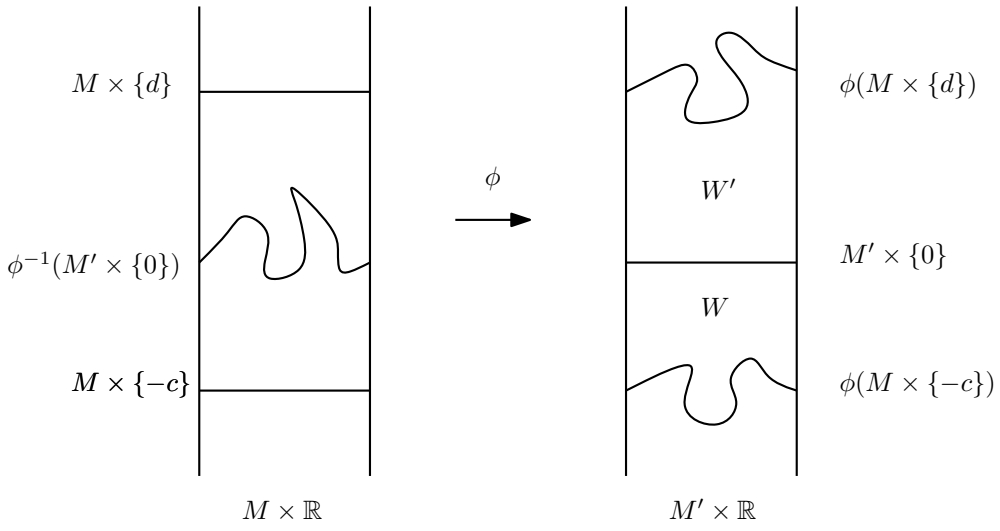

FIGURE 1.1 – Les cobordismes W et W'

Démonstration. Pour $c > 0$ assez grand, la région de $M' \times \mathbb{R}$ comprise entre $\phi(M \times \{-c\})$ et $M' \times \{0\}$ est un cobordisme de M à M' (voir la figure 1.1). Pour $d > 0$ assez grand, la région de $M' \times \mathbb{R}$ située entre $M' \times \{0\}$ et $\phi(M \times \{d\})$ est un cobordisme W' de M' à M et on a $W \odot W' = \phi(M \times [-c, d]) \sim 1_M$. On construit de même un inverse à gauche pour W. □

Remarque 1.4. *Il est essentiel dans la proposition 1.3 que le difféomorphisme ϕ respecte les bouts. Par exemple, les variétés orientées $\mathbb{C}P^4$ et $-\mathbb{C}P^4$ ne sont pas difféomorphes, donc, d'après le théorème du h-cobordisme (voir le théorème 1.23 plus loin), il n'existe pas de cobordisme inversible entre $\mathbb{C}P^4$ et $-\mathbb{C}P^4$. Pourtant, la formule $(x, t) \mapsto (x, -t)$ définit bien un difféomorphisme (préservant l'orientation) de $\mathbb{C}P^4 \times \mathbb{R} \to -\mathbb{C}P^4 \times \mathbb{R}$; mais celui-ci permute les bouts.*

On illustre maintenant le *procédé infini de Mazur* en démontrant la réciproque de la proposition ci-dessus. On note d'abord que si $(W_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite de cobordismes avec des identifications $\partial_+ W_i \to \partial_- W_{i+1}$, on peut les coller pour obtenir une variété (non compacte si un nombre infini des W_i sont non vides)

$$V = \bigodot_{i \in \mathbb{Z}} W_i.$$

Proposition 1.5. *Si $(W; M, M')$ est un cobordisme inversible, alors il existe un difféomorphisme $M \times \mathbb{R} \to M' \times \mathbb{R}$ envoyant le bout $M \times \{+\infty\}$ sur le bout $M' \times \{+\infty\}$.*

Démonstration. Soit $(W'; M', M)$ l'inverse de $(W; M, M')$, c'est-à-dire

$$W \odot W' \sim 1_M \text{ et } W' \odot W \sim 1_{M'}.$$

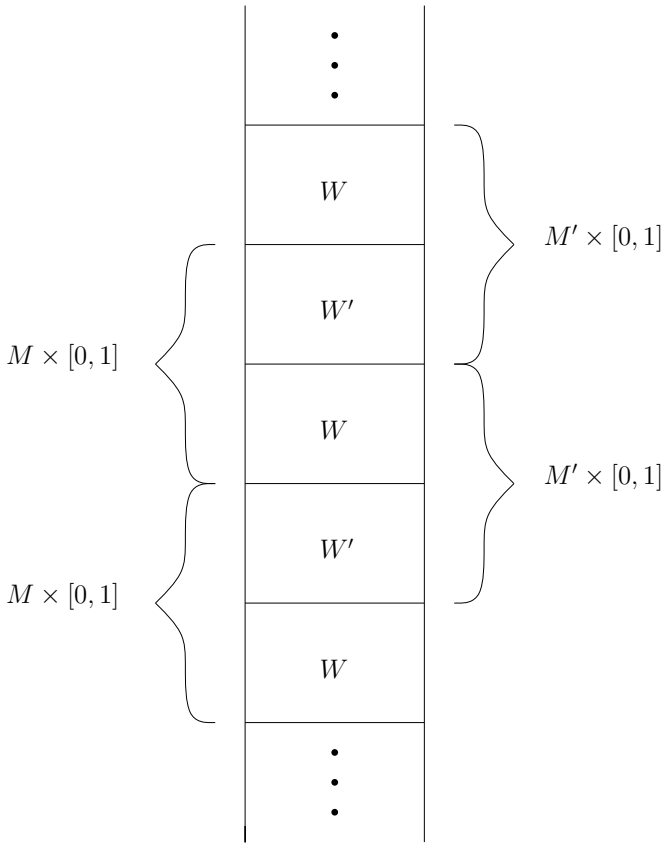

FIGURE 1.2 – Le procédé infini de Mazur

Par un jeu de parenthèses, notant $\simeq$ des difféomorphismes (préservant les bouts) on obtient (voir la figure 1.2) :

$$\begin{aligned} M \times \mathbb{R} &\simeq \cdots \odot 1_M \odot 1_M \odot \dots \\ &\simeq \cdots \odot (W \odot W') \odot (W \odot W') \odot \dots \\ &\simeq \cdots \odot (W' \odot W) \odot (W' \odot W) \odot \dots \\ &\simeq \cdots \odot 1_{M'} \odot 1_{M'} \odot \dots \\ &\simeq M' \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Le procédé infini de Mazur sera intéressant si l'on peut construire des cobordismes inversibles non triviaux.

Problème 1.6. *Les cobordismes inversibles sont-ils tous des produits ?*

1.2 Autour du théorème du s-cobordisme

1.2.1 H-cobordismes et cobordismes inversibles

Définition 1.7. *Un cobordisme W est un* h-cobordisme *si les inclusions $\partial_- W \to W$ et $\partial_+ W \to W$ sont des équivalences d'homotopie.*

Remarque 1.8. *S'il existe une équivalence d'homotopie $\partial_- W \to W$, il existe aussi une rétraction par déformation forte de W sur $\partial_- W$, cela suit du fait que la paire $(W, \partial_- W)$ est triangulable ou bien de l'existence de décomposition en anses. D'après le théorème de Whitehead, c'est équivalent à la nullité de tous les groupes d'homotopie $\pi_k(W, \partial_- W)$. Enfin, c'est aussi équivalent, d'après le théorème de Hurewicz, au fait que $\pi_1 \partial_- W \to \pi_1 W$ soit un isomorphisme et que $H_k(\widetilde{W}, \partial_- \widetilde{W}) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$ (le symbole tilde désignant le revêtement universel).*

Proposition 1.9. *Un cobordisme inversible est un h-cobordisme.*

Démonstration. On utilise à nouveau le procédé infini de Mazur en notant W' le cobordisme inverse de W. On factorise l'inclusion $i : \partial_- W \to W$ en $i = r \circ j$ où

$$j : \partial_- W \to \partial_- W \times [0, +\infty[\simeq W \odot W' \odot W \odot W' \odot \dots$$

et

$$r : W \odot W' \odot W \odot W' \odot \cdots \simeq W \odot \partial_+ W \times [0, +\infty[\to W$$

sont deux équivalences d'homotopie. □

Le problème 1.1 nous amène naturellement à étudier les h-cobordismes. L'outil principal est la *théorie de Morse*.

1.2.2 Fonctions et pseudo-gradients

L'espace des fonctions et sa stratification naturelle. On supposera toujours que les fonctions réelles sur un cobordisme W admettent $\partial_- W$ et $\partial_+ W$ comme niveaux réguliers et y atteignent respectivement leur minimum et leur maximum. On notera $\mathcal{F}$ l'espace (convexe) de toutes ces fonctions, muni de la topologie C^∞. On rappelle aussi que $\mathcal{F}$ est muni d'une stratification naturelle (voir [Cer70] p.22-25). On va seulement considérer les strates $\mathcal{F}^0$ et $\mathcal{F}^1$ de codimension respective 0 et 1 définies comme suit.

1. $\mathcal{F}^0$ est constitué des fonctions dites *excellentes*, c'est-à-dire à points critiques non-dégénérés (ou *de Morse*) et dont toutes les valeurs critiques sont distinctes. D'après le lemme de Morse, les points critiques sont modelés, à une constante additive près, sur une forme quadratique

$$-x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

l'entier k est l'*indice* du point critique.

2. $\mathcal{F}^1$ est constitué des fonctions présentant au plus un des phénomènes de codimension 1 suivants
   — deux points critiques dans un même niveau,
   — un point critique *de type naissance*, c'est-à-dire modelé, à une constante additive près, sur la fonction

$$-x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^3;$$

   de même, l'entier k est appelé l'indice du point critique.

On rappelle quelques propriétés standards de $\mathcal{F}^0$ et $\mathcal{F}^1$ (voir [Cer70] p.24).

Proposition 1.10. *1. $\mathcal{F}^0$ est un ouvert dense de $\mathcal{F}$.*

2. Dans l'espace des chemins f_t, $t \in [0,1]$, de $\mathcal{F}$, les chemins contenus dans $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$, à extrémité dans $\mathcal{F}^0$ et rencontrant $\mathcal{F}^1$ transversalement (en particulier un nombre fini de fois) forment un ouvert dense. Par abus, on dira qu'un tel chemin est générique.

On rappelle aussi l'énoncé suivant concernant l'action du groupes des difféomorphismes sur l'espace $\mathcal{F}$ (voir [Cer70] p.24).

Proposition 1.11. *1. Deux fonctions f et f' de $\mathcal{F}^0$ sont* isotopes, *c'est-à-dire $f = \psi \circ f' \circ \phi$ avec $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphisme croissant et $\phi : W \to W$ difféomorphisme isotope à l'identité, si et seulement si elles appartiennent à la même composante connexe de $\mathcal{F}^0$.*

2. Deux chemins génériques f_t et f'_t, $t \in [0,1]$, de $\mathcal{F}$ d'origine $f \in \mathcal{F}^0$ et d'extrémité dans $\mathcal{F}^0$ sont isotopes, c'est-à-dire $f_t = \psi_t \circ f'_t \circ \phi_t$ avec $\psi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphismes croissants, $\phi_t : W \to W$ difféomorphismes isotopes à l'identité, $\psi_0 = \mathrm{id}$ et $\phi_0 = \mathrm{id}$ si et seulement s'ils sont homotopes à origine fixe et extrémité dans $\mathcal{F}^0$ parmi les chemins transverses à $\mathcal{F}^1$.

A tout chemin générique f_t, $t \in [0,1]$, on peut associer son *diagramme de Cerf* : c'est le graphe des valeurs critiques de f_t en fonction de t, c'est-à-dire

$$\{(t,c) \in [0,1] \times \mathbb{R} \mid c \text{ est une valeur critique de } f_t\}.$$

Voir la figure 1.3 pour un exemple. Les points doubles correspondent à des *croisements* de valeurs critiques alors que les points de rebroussement correspondent à des *naissances* ou des *morts* de paires de points critiques d'indices consécutifs.

Pseudo-gradients. Un champ de vecteur X est dit *pseudo-gradient* pour une fonction $f \in \mathcal{F}$ si une inégalité de type

$$|X.f| \geqslant \delta(|\,\mathrm{d}f|^2 + |X|^2)$$

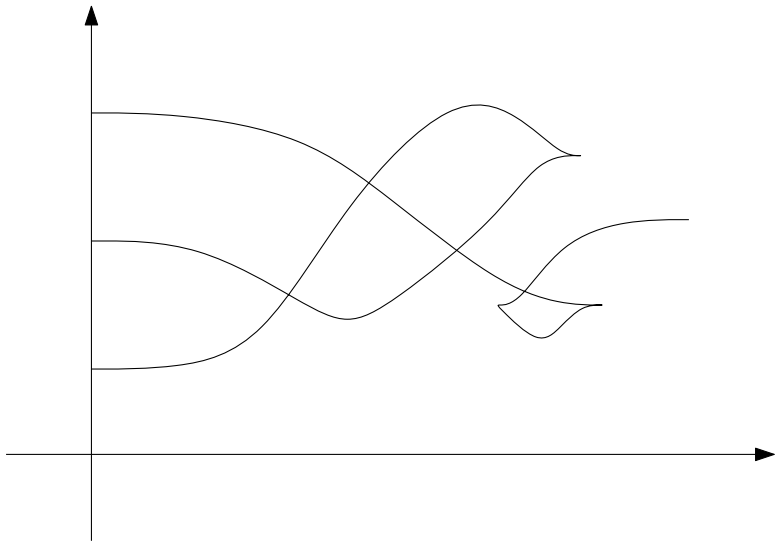

FIGURE 1.3 – Un exemple de diagramme de Cerf

est vérifiée pour un certain $\delta > 0$ et une métrique riemannienne fixée (cette condition est indépendante de la métrique). Les zéros de X coïncident alors avec les points critiques de f. En dehors des points critiques, la condition de pseudo-gradient signifie simplement $X.f > 0$, c'est-à-dire f croît strictement le long des orbites de X. En un point critique non-dégénérée p d'indice k, la condition de pseudo-gradient signifie exactement que la fonction $X.f$ admet un minimum non-dégénéré. Notant φ_X^t le flot du champ X au temps t, les parties

$$\mathcal{W}_p^- = \left\{ q \in W \;\middle|\; \varphi_X^t(q) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} p \right\},$$
$$\mathcal{W}_p^+ = \left\{ q \in W \;\middle|\; \varphi_X^t(q) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} p \right\},$$

appelées variétés respectivement *stable* et *instable* du point critique p, sont des sous-variétés de W de dimension respectives k et $m+1-k$. S'il n'y a pas de trajectoires de p vers un autre point critique dans $f^{-1}([a, f(p)])$ pour $a < f(p)$, alors $f^{-1}([a, f(p)]) \cap \mathcal{W}^-(p)$ est un disque de dimension k que l'on appellera *nappe descendante* du point p jusqu'au niveau a, son bord est une sphère de dimension $k-1$ situé au niveau a, on l'appelle *sphère descendante*. On définit de la même façon les notions de *nappes montantes* et *sphères montantes*. Si Δ est un disque plongé dans W dont le bord est situé au niveau a et tel que la restriction de f à Δ a un seul point critique qui est un maximum situé en p, alors on peut construire un pseudo-gradient X pour lequel Δ est la nappe descendante (voir [CG68] p.17). Enfin, on peut montrer que pour un pseudo-gradient générique, les variétés stables et instables sont transverses : c'est la

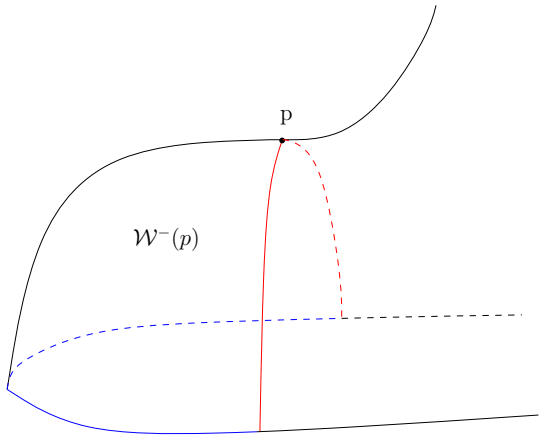

FIGURE 1.4 – La variété stable du point de naissance p est un demi-disque délimité par son bord vertical en rouge et son bord horizontal en bleu.

propriété de *Morse-Smale* (voir [Lau12] p.149).

Si p est un point de naissance d'indice k, les ensembles $\mathcal{W}_p^-$ et $\mathcal{W}_p^+$ définis comme ci-dessus sont des sous-variétés à bord de dimensions respectives $k+1$ et $m-k+1$. Les nappes montantes ou descendantes sont des demi-disques dont le bord est constitué de deux disques (voir [CE12] p.191), l'un est "vertical" et l'autre est situé dans un niveau (voir la figure 1.4).

1.2.3 Complexe de Morse et type d'homotopie simple

Si f est une fonction de Morse et X un pseudo-gradient satisfaisant la propriété de Morse-Smale, on peut former un complexe de chaînes sur l'anneau $\mathbb{Z}$ dont les modules sont librement engendrés par les points critiques, gradués par l'indice et dont l'opérateur bord compte algébriquement les trajectoires entre points critiques d'indice consécutifs. C'est le *complexe de Morse* de W associé à f et X, que l'on notera $C_k(W; f, X)$. On renvoie à [AD10] p.52-73 pour plus de détails. L'homologie de ce complexe est isomorphe à l'homologie singulière de la paire (W, M). Les modules du complexe de Morse ne dépendent que de la fonction mais l'opérateur bord dépend du pseudo-gradient. Chaque $\mathbb{Z}$-module $C_k(W; f, X)$ admet des *bases privilégiées* obtenues en choisissant une orientation des nappes descendantes (ou, de façon équivalente, une coorientation des nappes montantes) ainsi qu'une numérotation des points critiques d'indice k. Dans le cas d'une fonction *ordonnée*, c'est-à-dire si l'indice des points critiques est croissant en fonction de la valeur critique, alors l'opérateur bord a une interprétation très simple. Dans un niveau séparant les points d'indice k et les points d'indice $k+1$, l'opérateur bord $C_{k+1} \to C_k$ compte les intersections algébriques des sphères descendantes (orientées) S^k des points d'indice $k+1$ avec les sphères montantes (coorientées) S^{m-k} des

points d'indice k.

Étant donné un revêtement galoisien $p : \widetilde{W} \to W$ (en pratique ce sera le revêtement universel), on peut relever les fonctions et pseudo-gradients de W à $\widetilde{W}$ (on notera les relevés avec des tildes) et considérer le complexe de Morse associé sur $\widetilde{W}$. Le groupe du revêtement, noté π, agit naturellement sur ce complexe et en fait un complexe de chaînes sur l'anneau $\mathbb{Z}[\pi]$ (combinaisons linéaires formelles des éléments de π à coefficients entiers). La projection du revêtement induit un morphisme $p_* : C_*(\widetilde{W}; \widetilde{f}, \widetilde{X}) \to C_*(W; f, X)$ vérifiant :

$$\forall a \in \mathbb{Z}[\pi], \forall v \in C_*, \quad p_*(av) = \varepsilon(a)p(v),$$

où

$$\varepsilon(\sum_{g\in\pi} a_g g) = \sum_{g\in\pi} a_g$$

est le morphisme d'augmentation $\mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Z}$. Les $Z[\pi]$-bases de $C_k(\widetilde{W}; \widetilde{f}, \widetilde{X})$ qui se projettent sur des $\mathbb{Z}$-bases privilégiées de $C_k(W; f, X)$ par p seront dites *privilégiées* ; autrement dit, on obtient ces bases en choisissant des relevés des points critiques. L'homologie de $C_k(\widetilde{W}; \widetilde{f}, \widetilde{X})$ est isomorphe à l'homologie singulière de la paire $(\widetilde{W}, \partial_- \widetilde{W})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[\pi]$. Dans le cas d'un h-cobordisme, celle-ci est nulle mais on peut obtenir un invariant plus fin à partir des $\mathbb{Z}[\pi]$-bases privilégiées, à savoir la *torsion de Whitehead*.

Parenthèse algébrique. La référence pour ce paragraphe est [Coh73] p.36-61.

Sur l'ensemble des matrices inversibles à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[\pi]$ on considère les opérations suivantes :

1. *Stabilisation* : $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. *Déstabilisation* : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A$;
3. *Opérations élémentaires sur les lignes et colonnes* : $A \mapsto (I + aE_{i,j})A$ ou $A \to A(I + aE_{i,j})$ avec $a \in \mathbb{Z}[\pi]$, $i \neq j$ ($E_{i,j}$ désigne la matrice avec des 0 partout sauf en position (i, j)) ;
4. *Multiplication* de A par une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \pm g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm g_p \end{pmatrix}$ avec $g_i \in \pi$.

Les classes d'équivalence de matrices dans $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{Z}[\pi]) = \cup_{p=1}^{\infty} \mathrm{GL}_p(\mathbb{Z}[\pi])$ pour la relation engendrée par les opérations ci-dessus forment un groupe abélien : c'est le *groupe de Whitehead* noté $\mathrm{Wh}(\pi)$. La *torsion* d'une matrice $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{Z}[\pi])$ est sa classe dans $\mathrm{Wh}(\pi)$; on dira qu'une torsion $\tau \in \mathrm{Wh}(\pi)$

est de *taille p* si c'est la taille minimale d'une matrice la représentant. Si π est le groupe trivial, $\mathrm{Wh}(\pi) = 0$ car toute matrice inversible à coefficients entiers peut être transformée en la matrice identité par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

Sur un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre de type fini, l'ensemble des bases est muni d'une relation d'équivalence : deux bases (nécessairement de même cardinal en vertu du morphisme $\varepsilon : \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{Q}$) sont équivalentes si la matrice de changement de bases correspondante est de torsion nulle. On appellera $\mathrm{Wh}(\pi)$-*module* un $\mathbb{Z}[\pi]$-module libre de type fini muni d'une classe d'équivalence de bases ; on définit de même la notion de $\mathrm{Wh}(\pi)$-complexe de chaînes. La torsion d'un isomorphisme entre $\mathrm{Wh}(\pi)$-modules est bien définie : elle ne dépend pas des bases privilégiées choisies pour la calculer.

Exemple 1.12. *Le complexe de Morse $C_k(\widetilde{W}; \widetilde{f}, \widetilde{X})$ est naturellement un $\mathrm{Wh}(\pi)$-complexe. En fait, ses bases privilégiées sont bien définies modulo la seule opération 4 ci-dessus. On utilisera plus loin les opérations 1, 2 et 3 pour l'invariance de ce $\mathrm{Wh}(\pi)$-complexe vis à vis de f et X.*

Deux $\mathrm{Wh}(\pi)$-complexes sont dit *simplement isomorphes* s'il existe un isomorphisme de chaînes envoyant bases privilégiées sur bases privilégiées. Le complexe

$$0 \to \mathbb{Z}[\pi]^p \xrightarrow{1} \mathbb{Z}[\pi]^p \to 0,$$

où $\mathbb{Z}[\pi]^p$ est muni de la classe d'équivalence de la base canonique, est un $\mathrm{Wh}(\pi)$-complexe dit *trivial*. La somme directe de $\mathrm{Wh}(\pi)$-modules ou complexes est également muni de bases privilégiées obtenu en juxtaposant simplement les bases de chaque facteur. On dira que deux $\mathrm{Wh}(\pi)$-complexes C et C' ont le même type d'homotopie simple s'il existe deux complexes triviaux T et T' et un isomorphisme simple $C \oplus T \to C' \oplus T'$.

Proposition 1.13. *Le type d'homotopie simple du complexe de Morse $C_k(\widetilde{W}; \widetilde{f}, \widetilde{X})$ est indépendant de f et X.*

On trouve la démonstration de cet énoncé dans l'appendice de [Lau92] par Laudenbach. Celle-ci consiste à analyser les accidents génériques dans un chemin (f_t, X_t) : en plus des traversées de $\mathcal{F}^1$ décrites plus haut, il existe des accidents du pseudo-gradient X_t (que l'on peut supposer arriver à des instants distincts) qui correspondent à un défaut de transversalité de deux variétés stable et instable (en ces instants, la propriété de Morse-Smale n'est plus vérifiée). On parle de *glissements d'anses* quand cela concerne deux points critiques de même indice. Parmi ces accidents, les seuls ayant un effet sur le complexe de Morse sont :

1. *Naissance* d'une paire de points critiques d'indice k et $k+1$;
2. *Mort* d'une paire de points critiques d'indice k et $k+1$;

3. *Glissement d'anse* entre deux points critiques d'indice k.

Ils correspondent essentiellement aux opérations 1, 2 et 3 sur les matrices discutées plus haut, ce qui explique le résultat d'indépendance ci-dessus.

Torsion de Whitehead d'un h-cobordisme Dans le cas d'un h-cobordisme W, le complexe de Morse $C_k(\widetilde{W}; \widetilde{f}, \widetilde{X})$ est *acyclique*. On peut alors utiliser le résultat algébrique suivant (voir [Coh73] p.56-58).

Proposition 1.14. *Il existe une unique application, appelée torsion de Whitehead,*

$$\tau : \{\mathrm{Wh}(\pi)\text{-}\textit{complexes acycliques}\} \to \mathrm{Wh}(\pi)$$

vérifiant :

1. $\tau(C) = \tau(C')$ *si* C *et* C' *sont simplement isomorphes ;*
2. $\tau(C \oplus C') = \tau(C) + \tau(C')$ *;*
3. $\tau(0 \to C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \to 0) = (-1)^{n-1}\tau(d)$ *;*

Ces propriétés impliquent que τ ne dépend que du type d'homotopie simple. En fait, c'est un invariant complet : deux $\mathrm{Wh}(\pi)$-complexes acycliques de même torsion ont le même type d'homotopie simple (voir [Coh73] p.58).

Définition 1.15. *La torsion de Whitehead d'un h-cobordisme W est la torsion de Whitehead $\tau(C_k(\widetilde{W}; \widetilde{f}, \widetilde{X}))$ du complexe de Morse de son revêtement universel.*

La définition ci-dessus est légitimée par la proposition 1.13. La seule ambiguïté restante est liée au choix du revêtement universel $\widetilde{W} \to W$. Le groupe $\pi_1(M; x)$ dépend du point base x et l'identification entre $\pi_1(M; x)$ et le groupe π n'est pas canonique. Heureusement, les automorphismes intérieurs de π induisent l'identité sur $\mathrm{Wh}(\pi)$ (voir [Coh73] p.40), on peut alors construire un groupe abélien abstrait $\mathrm{Wh}(M)$ canoniquement isomorphe à $\mathrm{Wh}(\pi)$ et à $\mathrm{Wh}(\pi_1(M, x))$ pour chaque $x \in M$, on place alors la torsion $\tau(W, M)$ dans ce groupe $\mathrm{Wh}(M)$ (voir [Coh73] p.65). De plus, la construction de $\mathrm{Wh}(M)$ est fonctorielle ; par exemple, une équivalence d'homotopie entre variétés $\phi : M \to M'$ induit un isomorphisme $\phi_* : \mathrm{Wh}(M) \to \mathrm{Wh}(M')$.

En transportant une paire (f, X) par un difféomorphisme, on obtient la propriété d'invariance par difféomorphisme suivante.

Proposition 1.16. *Si $\phi : (W_1; M_1, M_1') \to (W_2; M_2, M_2')$ est un difféomorphisme entre deux h-cobordismes, alors $\tau(W_1) = \tau(W_2)$ avec l'identification $\mathrm{Wh}(M_1) \simeq \mathrm{Wh}(M_2)$ induite par ϕ.*

Enfin, la torsion est additive pour la composition des h-cobordismes.

Proposition 1.17. *Soit* (W, M, M') *et* (W', M', M'') *deux h-cobordismes. On a :*

$$\tau(W \odot W') = \tau(W) + \tau(W')$$

avec les identifications $\mathrm{Wh}(M) \simeq \mathrm{Wh}(W) \simeq \mathrm{Wh}(M')$ *induites par les différentes inclusions.*

On peut consulter [Coh73] p.67-68 pour une démonstration dans le cadre des CW-complexes (la preuve est la même avec les complexes de Morse).

1.2.4 H-cobordismes de torsion prescrite

Il est temps de donner des exemples et des constructions de cobordismes. Au moyen d'une fonction $f \in \mathcal{F}^0$, on peut décomposer un cobordisme en un nombre fini de *cobordismes élémentaires*, c'est-à-dire ne contenant chacun qu'un seul point critique. Dans un cobordisme élémentaire W muni d'un pseudo-gradient, on a des nappes descendante D^- et montante D^+ et on peut rétracter W par isotopie dans un voisinage de $\partial_- W \cup \mathrm{D}^-$ ou de $\partial_+ W \cup D^+$. On peut ainsi penser à W comme l'attachement d'une anse (voisinage tubulaire d'une nappe descendante) à $\partial_- W$ le long de la sphère descendante $S^- = \partial D^-$ ou d'une coanse (voisinage tubulaire d'une nappe montante) à $\partial_+ W$ le long de la sphère montante $S^+ = \partial D^+$. On remarque que les sphères montantes et descendantes sont à fibré normal trivial (car ce fibré normal s'étend aux nappes, qui sont des disques). Réciproquement si on se donne une variété M de dimension m et une sphère S de dimension $k-1$ plongée dans M à fibré normal trivial, on peut construire un cobordisme élémentaire W partant de M en attachant une anse $\mathrm{D}^k \times \mathrm{D}^{m+1-k}$ à $M \times [0,1]$ le long de $S \times \mathrm{D}^{m+1-k} \subset M \times \{1\}$ et en lissant les coins (voir [Mil65] p.30-31). Le résultat dépend à la fois d'une trivialisation du fibré normal (*framing* en anglais) et d'un paramétrage $\mathrm{S}^{k-1} \to S$ de la sphère S par la sphère standard S^{k-1} (penser aux sphères exotiques obtenues comme l'union de deux disques). Néanmoins, si on remplace la trivialisation par une trivialisation homotope ou si l'on change le paramétrage en le précomposant par un difféomorphisme de S^{k-1} qui s'étend à D^k, alors le résultat est inchangé modulo un difféomorphisme relatif à M. Enfin, on peut construire en même temps une fonction de Morse et un pseudo-gradient sur le cobordisme élémentaire avec un seul point critique et dont les nappes montantes et descendantes correspondent (essentiellement) à $\{0\} \times \mathrm{D}^{m+1-k}$ et à $\mathrm{D}^k \times \{0\}$. Pour résumer, un cobordisme muni d'une fonction de Morse avec un seul point critique et d'indice k partant de M est essentiellement la même chose (modulo un difféomorphisme relatif à M) que l'attachement d'une anse d'indice k à M.

Un premier exemple consiste à prendre une sphère S triviale dans M, c'est-à-dire bordant un disque $\mathrm{D}^k \to M$. Son fibré normal est alors trivial et on l'équipe d'une trivialisation (unique à homotopie près) s'étendant en une

trivialisation du fibré normal du disque. L'attachement d'une anse sur une sphère triviale résulte en la somme connexe de $M \times [0,1]$ et de $\mathrm{S}^k \times \mathrm{D}^{m+1-k}$ le long du bord supérieur.

Proposition 1.18. *Soit M une variété close connexe de dimension $m \geqslant 5$ et $\tau \in \mathrm{Wh}(M)$. Il existe un h-cobordisme $(W; M, M')$ de torsion τ.*

Démonstration. On se donne un entier $2 \leqslant k \leqslant m-3$. On va construire un cobordisme W avec une fonction de Morse ordonnée comprenant seulement des points critiques d'indice k et $k+1$. Soit $\widetilde{M} \to M$ un revêtement universel de M de groupe π et $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{Z}[\pi])$ telle que $(-1)^k A$ représente la torsion τ dans le groupe de Whitehead $\mathrm{Wh}(\pi) = \mathrm{Wh}(M)$. On construit un premier cobordisme (W_k, f, X) en attachant p anses triviales d'indice k à M ; W_k est difféomorphe à la somme connexe de $M \times [0,1]$ avec p copies de $\mathrm{S}^k \times \mathrm{D}^{m-k+1}$. Puisque $\pi_1 M \to \pi_1 W_k$ est un isomorphisme ($k \geqslant 2$ et les sphères descendantes sont homotopiquement triviales), on peut prolonger le revêtement universel de M en un revêtement universel $\widetilde{W_k} \to W_k$ (de groupe toujours égal à π).

On note N le bord supérieur de W_k et S_i^+ les sphères montantes des points critiques d'indice k dans N (on peut les prendre de la forme $\{\text{point}\} \times \mathrm{S}^{m-k-1}$ dans une décomposition en somme connexe comme ci-dessus). On choisit des relevés à $\widetilde{W}_k$ des points critiques d'indice k ainsi que des orientations de leurs nappes descendantes. On va construire W en attachant p anses d'indice $k+1$ à M (et choisir des relevés et des orientations pour les points critiques d'indice $k+1$) de sorte que l'opérateur bord $\partial : C_{k+1} \to C_k$ du complexe de Morse de $\widetilde{W}$ ait A pour matrice. A partir de copies des sphères $\mathrm{S}^k \times \{x\}$ pour

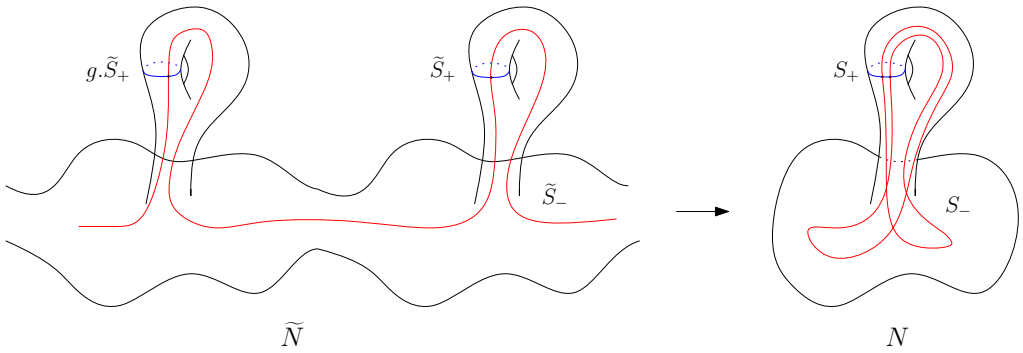

FIGURE 1.5 – Les sphères montantes et descendantes dans le niveau intermédiaire N et son revêtement universel $\widetilde{N}$

$x \in \mathrm{S}^{m-k+1}$ (à fibré normal trivial) de N, on peut construire, par sommes connexes plongées le long d'arcs, des sphères orientées à fibré normal trivial dans N notées S_j^- dont les intersections algébriques de relevés $\widetilde{S}_j^-$ avec les

$g\widetilde{S}_i^+$ pour $g \in \pi$ sont égales aux coefficients $a_{i,j}$ de la matrice A (voir la figure 1.5).

On attache alors p anses d'indice $k+1$ à $\partial_+ W_k$ le long des sphères S_j^-, et on prolonge la paire (f, X) et le revêtement universel au cobordisme W obtenu. Le complexe de Morse de W a alors la forme

$$0 \to C_{k+1} \to C_k \to 0$$

où l'opérateur bord $C_{k+1} \to C_k$ a pour matrice A dans les bases privilégiées choisies. Comme $m+1-(k+1) = m-k \geqslant 3$, l'inclusion $\pi_1 M' \to \pi_1 W$ est un isomorphisme. Le fait que la matrice A soit inversible signifie alors que W est un h-cobordisme ; d'après la proposition 1.14, sa torsion vaut

$$(-1)^k \tau(\partial) = (-1)^k \tau(A) = \tau.$$

□

Remarque 1.19. 1. *Pour $m = 3$, la proposition ci-dessus est fausse. En effet, si $(W; M, M')$ est un h-cobordisme de dimension 4, Kwasik et Schultz ont montré que sa torsion de Whitehead est toujours nulle (voir [KS92] p.736). D'autre part, Turaev a montré que M et M' sont nécessairement difféomorphes (voir [Tur88] théorème 1.4 p.293). En fait, ces deux résultats ont été montrés initialement dans le cas où M et M' sont géométriques au sens de la conjecture de géométrisation de Thurston, mais c'est le cas de toutes les variétés closes de dimension 3 d'après les travaux de Perelman.*

2. *Dans la construction ci-dessus, les anses d'indice k sont trivialement attachées à M. Comme on le verra plus loin, les coanses d'indice $k+1$ sont également trivialement attachées à M', cela suit de la preuve du théorème du s-cobordisme.*

Dans la démonstration ci-dessus on a construit un cobordisme avec une fonction de Morse f qui est *ordonnée*, c'est-à-dire que l'indice des points critiques est croissant en fonction des valeurs critiques, et a seulement deux indices k et $k+1$. On notera $\mathcal{F}_k^0$ l'espace de ces fonctions, $\mathcal{F}_{k,p}^0$ le sous-espace constitué des fonctions ayant p points critiques d'indice k (et p points critiques d'indice $k+1$) et $\mathcal{F}_k$ l'intérieur de l'adhérence de $\mathcal{F}_k^0$ dans $\mathcal{F}$. Les fonctions de $\mathcal{F}_k^1 = \mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}^1$ présentent au plus un point de naissance d'une paire de points critiques d'indice k et $k+1$ dans un niveau intermédiaire, ou un croisement de valeurs critiques d'une paire de points critiques d'indice $k+1$ ou d'indice k.

1.2.5 Chemins de traversée de $\mathcal{F}^1$

On s'intéresse ici à la classification des traversées de $\mathcal{F}^1$. Dans chaque cas (croisement, naissance, mort), on pose deux questions :

— La traversée est-elle possible ?
— De combien de façons, à homotopie près, peut-on réaliser la traversée ?

On trouve une étude complète de ces questions dans les chapitres 2 et 3 de [Cer70], auxquels nous ferons références. Le schéma de démonstration y est toujours le même :

1. Remplacer les chemins de traversée quelconques par des chemins donnés par un modèle (voir le lemme des chemins élémentaires, [Cer70] p.20).
2. Classifier les chemins élémentaires. Cela se ramène à des problèmes géométriques concernant les nappes descendantes et montantes.

On rappelle que, l'espace des nappes descendantes étant acyclique (voir [Cer70], p.168-169), la sphère descendante dans un niveau juste en dessous du point critique est bien définie à isotopie près, et que deux telles sphères descendantes sont canoniquement jointes par une isotopie unique à homotopie près (c'est de cette isotopie qu'il sera question dans le deuxième point des trois énoncés suivants). On se donne un cobordisme W de dimension $m+1$ et $f \in \mathcal{F}^0$ dans tous les énoncés suivants.

Lemme 1.20 (Croisement)**.** *Soient p et q deux points critiques de valeurs critiques consécutives avec $f(p) > f(q)$. On considère, dans un niveau intermédiaire N, une sphère montante S^+ de q et une sphère descendante S^- de p.*

1. *S^- est isotope à une sphère disjointe de S^+ si et seulement s'il existe un chemin de croisement des valeurs critiques de p et q.*
2. *Deux tels chemins de croisement f_t et f'_t, $t \in [0,1]$, sont isotopes si et seulement si les sphères S^- et $S^{-'}$ descendantes correspondantes disjointes de S^+ juste avant le croisement sont isotopes dans le complémentaire de S^+.*

On renvoie à [Cer70] p.40-59 (en particulier, le corollaire de la proposition 2 et le premier point du lemme 4). La déformation de la fonction f au cours d'un chemin de croisement peut être réalisée dans un voisinage arbitraire d'une nappe de p descendant jusqu'à un niveau plus bas que q (voir [Cer70] p.42). De plus, la déformation peut se faire avec un pseudo-gradient fixe (voir [Lau14] p.202-204 ou [CE12] p.208-209).

Lemme 1.21 (Naissance)**.** *Soit N un niveau régulier et $0 \leqslant k \leqslant m$.*

1. *Il existe un chemin de naissance d'une paire de points critiques d'indices k et $k+1$ dans un niveau N si et seulement si N est non vide.*
2. *Deux tels chemins sont isotopes si et seulement si les points de naissance sont dans la même composante connexe de N.*

On trouve la démonstration dans [Cer70] p.64-67. Rappelons simplement le modèle local d'une naissance d'une paire de points critiques d'indice k et $k+1$:

$$f_t = -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^3 + tx_{k+1} + x_{k+2}^2 + \cdots + x_{m+1}^2.$$

Lemme 1.22 (Mort). *Soient p et q deux points critiques d'indices respectifs $k+1$ et k, de valeurs critiques consécutives avec $f(p) > f(q)$. On considère, dans un niveau intermédiaire N, une sphère descendante S^- du point p et une sphère montante S^+ du point q.*

1. *S^- est isotope dans N à une sphère intersectant S^+ en un seul point et transversalement si et seulement s'il existe un chemin de mort des points critiques p et q.*
2. *Deux tels chemins de mort f_t et f'_t, $t \in [0,1]$, sont isotopes si et seulement si les sphères descendantes S^- et S'^- associées sont isotopes parmi les sphères intersectant S^+ en un seul point et transversalement.*

On renvoie à [Cer70] p.68-73 pour la démonstration (en particulier la proposition 3 et le lemme 2). On trouve plusieurs démonstrations du premier point dans la littérature : [CG68] p.22-27, [Lau13], [Mil65] p.48 ou [Kos93] p.107. On note que dans la situation du lemme 1.22, l'anse d'indice k est trivialement attachée et la coanse d'indice $k+1$ est trivialement attachée (c'est particulièrement explicite dans la preuve de [Kos93]).

1.2.6 Glissement d'anses

Soit W un cobordisme, f une fonction de Morse ordonnée et X un pseudo-gradient de Morse-Smale. On cherche à décrire les bifurcations dans un chemin de pseudo-gradient X_t, $t \in [0,1]$, concernant les points critiques d'indice k.

Dans un niveau N séparant deux points critiques d'indice k, on observe les sphères montantes S^{m-k} des points d'indice k situés plus bas que N et les sphères descendantes S^{k-1} des points d'indice k situés plus haut. Dans une famille à un paramètre générique de pseudo-gradients, les sphères descendantes rencontrent les sphères montantes un nombre fini de fois (voir la figure 1.6) et l'effet sur le complexe de Morse de $\widetilde{W}$ est le suivant. Ayant choisi des bases privilégiées de $C_k(\widetilde{W}, \widetilde{f}, \widetilde{X})$, à chaque intersection d'une sphère montante S^+ avec une sphère descendante S^- est associé un signe $\varepsilon = \pm 1$ et un élément $g \in \pi$: le relevé $\widetilde{S}^-$ intersecte $g.\widetilde{S}^+$ et avec un signe ε déterminé par l'orientation de S^- et la coorientation de S^+. Les opérateurs $\partial_{k+1} : C_{k+1} \to C_k$ et $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ sont changés respectivement en $A \circ \partial_{k+1}$ et en $\partial_k \circ A^{-1}$ où A est une matrice élémentaire de type $I + \varepsilon g E_{i,j}$.

Si l'on souhaite réaliser les traversées de S^- et S^+ avec ε et g prescrits, il y a quelques conditions nécessaires : $\widetilde{N}$ connexe (sinon certains $g \in \pi$ ne viennent pas de lacets de N), $k \neq 0, m+1$ (sinon S^- ou S^+ est vide). Dans la situation qui nous intéresse principalement où $m \geqslant 5$, $2 \leqslant k \leqslant m-1$ et $\widetilde{N}$ connexe, tous les glissements d'anses sont réalisables (voir [Ker65] p.88-89 ou [Mil65] p.92-97). On pourra ainsi changer arbitrairement les opérateurs bords par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

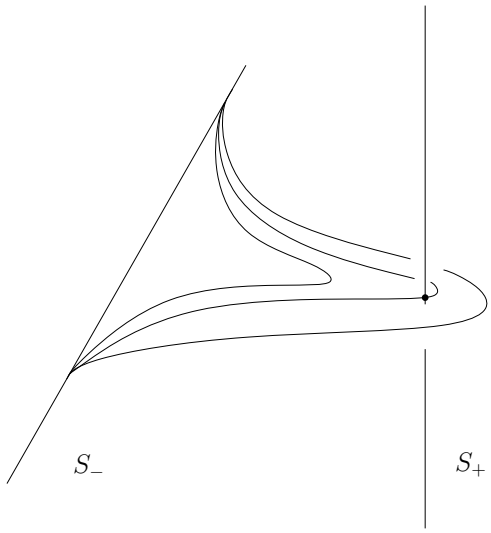

FIGURE 1.6 – Les sphères descendante et montante se rencontrent dans une famille à 1 paramètre

1.2.7 Le théorème du s-cobordisme

En 1962, Smale réalise une avancée majeure en démontrant le résultat suivant (voir [Sma62]).

Théorème 1.23 (h-cobordisme)**.** *Un h-cobordisme de dimension $\geqslant 6$ et simplement connexe est trivial.*

Comme application de ce résultat, Smale a démontré la conjecture de Poincaré en grande dimension (voir [Sma61]), voici sa démarche. Si Σ est une sphère d'homotopie de dimension $\geqslant 6$, en retirant deux disques à Σ on obtient un h-cobordisme simplement connexe. D'après le théorème 1.23, celui-ci est un produit et on peut en conclure que Σ est *homéomorphe* à une sphère (par contre, pas nécessairement difféomorphe à la sphère standard d'après [Mil56]).

Peu de temps après Barden, Mazur et Stallings démontrent la généralisation suivante au cas non-simplement connexe (voir [Maz63], [Sta65] et [Ker65]).

Théorème 1.24 (s-cobordisme)**.** *Un h-cobordisme de dimension $\geqslant 6$ et de torsion de Whitehead nulle est trivial.*

Le théorème du h-cobordisme est en effet un cas particulier puisque le groupe de Whitehead du groupe trivial est trivial.

Esquisse de démonstration. La stratégie est la suivante : on démarre avec une fonction $f \in \mathcal{F}^0$ et on essaye d'éliminer tous ses points critiques (en lui faisant traverser $\mathcal{F}^1$).

Réordonnement des points critiques. La première étape consiste à ordonner les valeurs critiques de f selon leur indice. Si p et q sont deux points critiques d'indices respectifs i et j avec $i \leqslant j$ et de valeurs critiques consécutives avec $f(q) < f(p)$, alors, dans un niveau intermédiaire, la sphère montante S^+ du point q est de dimension $m - j$ et la sphère descendante du point p est de dimension $i - 1$. Puisque $m - j + i - 1 < m$, ces sphères sont génériquement disjointes. Le lemme 1.20 permet alors de réaliser le croisement de ces deux valeurs critiques. Un nombre fini d'opérations de ce type permet d'aboutir à une fonction ordonnée.

Élimination des points critiques d'indice 0 **et** $m+1$**.** Soit q le point critique d'indice 0 le plus haut. Pour tout choix de pseudo-gradient de Morse-Smale, il y a nécessairement un point p d'indice 1 qui a exactement une trajectoire vers q, sinon l'inclusion $\partial_- W \to W$ ne serait pas 0-connexe. On descend la valeur critique du point p au moyen du lemme 1.20 jusqu'à un niveau situé juste au-dessus de q puis le lemme 1.22 permet d'éliminer p et q. En itérant ce procédé et le procédé dual (appliqué à $-f$), on élimine tous les points critiques d'indice 0 et $m+1$.

Élimination des points critiques d'indice 1 **et** m**.** On utilise ici le *procédé d'échange de Smale*, c'est-à-dire que l'on va remplacer chaque point critique d'indice 1 par un point critique d'indice 3. Cela se fait en deux temps, on crée une paire de points critiques d'indice 2 et 3 puis on élimine le point critique d'indice 1 avec un point critique d'indice 2. Soit p le point d'indice 1 le plus haut. Avec le lemme 1.21, on crée une paire de points critiques d'indice 2 et 3 dans un niveau séparant les points critiques d'indice 2 et les points critiques d'indice 3. On appelle q le nouveau point d'indice 2. La sphère descendante de q est un lacet homotope à un lacet constant. Puisque $\pi_1 \partial_- W \to \pi_1 W$ est surjectif, on peut par un nombre fini de glissement d'anses avec les points d'indice 2 puis en descendant le point critique p, mettre p et q en position d'élimination (voir [Ker65] pour plus de détails). On répète ce procédé jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de points critiques d'indice 1 ; on élimine de même les points d'indice m. Noter que le fait que $\pi_1 \partial_- W \to \pi_1 W$ et $\pi_1 \partial_+ W \to \pi_1 W$ sont injectifs implique que les sphères descendantes des points d'indice 2 et les sphères montantes des points d'indice $m-1$ sont homotopiquement triviales. En particulier, à partir de là, le revêtement universel $\widetilde{W} \to W$ induit un revêtement universel sur chaque niveau de f.

Vers une fonction de $\mathcal{F}_k^0$**.** On fixe un entier k vérifiant $2 \leqslant k \leqslant m-2$ et on va maintenant éliminer les points critiques d'indice $< k$ et $> k+1$. Supposons avoir supprimé tous les points critiques d'indice $< i$ pour un certain

$1 \leqslant i \leqslant m-3$. On utilise à nouveau le procédé d'échange de Smale pour remplacer les points critiques d'indice i par des points critiques d'indice $i+2$. Soit q le point critique d'indice i le plus haut. Comme au paragraphe précédent, on crée une paire de points critiques d'indice $i+1$ et $i+2$ puis on procède à des glissements d'anses entre les points critiques d'indice $i+1$ pour amener le nouveau point p d'indice $i+1$ en position d'élimination avec q. On l'amène d'abord en position d'élimination *algébrique*, c'est-à-dire que le coefficient devant p dans l'expression de ∂q vaut 1 dans le complexe de Morse de $\widetilde{W}$. Cela signifie que le compte algébrique des intersections de $\widetilde{S}^-$ (un relevé de la sphère descendante de p) avec les sphères $g\widetilde{S}^+$ (relevés de la sphère montante de q) pour $g \in \pi$ est égal à $1 \in \mathbb{Z}[\pi]$. On peut donc isoler un point d'intersection $a \in \widetilde{S}^- \cap \widetilde{S}^+$ de signe positif et regrouper les autres par paires (b_i, c_i) où b_i et c_i sont des points d'intersection de $\widetilde{S}^-$ avec $g_i\widetilde{S}^+$, $g_i \in \pi$, et sont de signes opposés. Comme la dimension du niveau est supérieur ou égale à 5, on peut trouver des disques D^2 plongés le long desquels éliminer chaque paire de points d'intersection (b_i, c_i) suivant le *procédé de Whitney* ([Whi44], voir la figure 1.7).

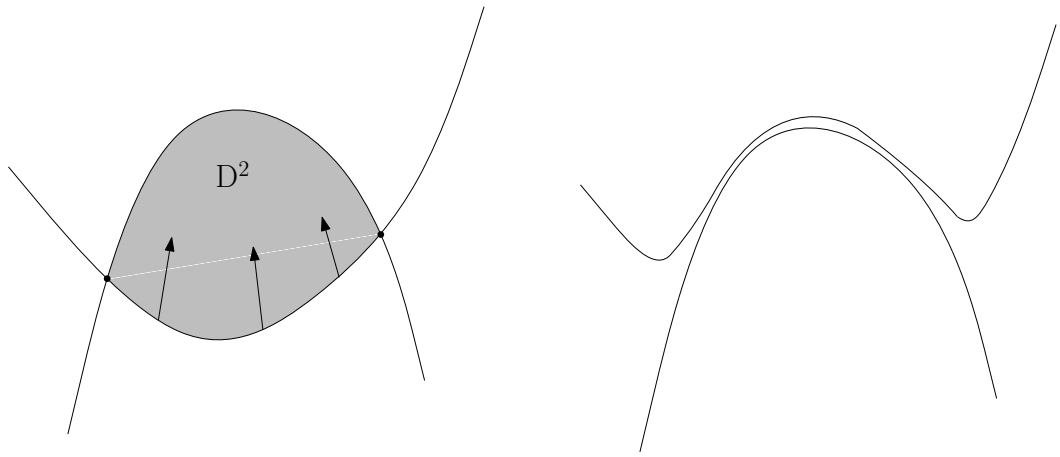

FIGURE 1.7 – Le procédé de Whitney

Élimination des points critiques d'une fonction de $\mathcal{F}_k^0$. Le complexe de Morse du revêtement universel est de la forme

$$0 \to C_{k+1} \to C_k \to 0.$$

L'opérateur bord est représenté, dans des bases privilégiées, par une matrice $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{Z}[\pi])$ dont la torsion est égale à $(-1)^k\tau(W)$, soit zéro par hypothèse. Cela signifie que par un nombre fini de naissances de paires de points critiques d'indice k et $k+1$ puis par un nombre fini de glissements d'anses et de croisements (entre points d'indice k ou bien entre points d'indice $k+1$, au

choix) on peut se ramener à une matrice égale à l'identité. Cela signifie que les points critiques sont regroupés par paires en position d'élimination algébriques. Le procédé de Whitney comme au paragraphe précédent permet de passer à une vraie position d'élimination pour éliminer successivement toutes ces paires de points critiques. □

La preuve ci-dessus admet le corollaire suivant qui nous sera utile au chapitre 4. On note $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ l'espace des fonctions ayant des points critiques d'indice inférieurs ou égaux à n.

Corollaire 1.25. *Soit W un h-cobordisme de dimension $2n \geqslant 6$ et k un entier tel que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.*

1. *Toute fonction peut être déformée en une fonction dans $\mathcal{F}_k^0$.*
2. *Toute fonction de $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ peut être déformée dans $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ vers une fonction dans $\mathcal{F}_k^0$.*
3. *Le nombre minimal de points critiques d'une fonction de $\mathcal{F}_k^0$ est égal à $2p$ où p est la taille de la torsion de Whitehead de W. Le nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse sur W est aussi égal à $2p$.*

1.2.8 Composition et classification des h-cobordismes

Finalement, on obtient, en grande dimension, la réciproque de la proposition 1.9.

Théorème 1.26. *Les h-cobordismes de dimension $\geqslant 6$ sont inversibles.*

Démonstration. Soit (W, M, M') un h-cobordisme de torsion $\tau_0 \in \mathrm{Wh}(M) = \mathrm{Wh}(M')$ (on utilise l'isomorphisme $\mathrm{Wh}(M) \to \mathrm{Wh}(M')$ induit par les inclusions $M \to W$ et $M' \to W'$). D'après la proposition 1.18, il existe un h-cobordisme (W', M', M'') de torsion $-\tau_0$. D'après la proposition 1.17, $W \odot W'$ est alors de torsion $\tau_0 - \tau_0 = 0$ donc trivial d'après le théorème 1.24. On construit de même un inverse à droite. □

Théorème 1.27. *Deux h-cobordismes partant de M et de même torsion sont difféomorphes relativement à M.*

Démonstration. Soit (W_1, M, M_1') et (W_2, M, M_2') deux h-cobordismes de torsion $\tau \in \mathrm{Wh}(M)$. D'après le théorème 1.26, il existe un h-cobordisme (W', M'', M) de torsion $-\tau \in \mathrm{Wh}(M)$ et celui-ci est un inverse à gauche de W_1 et W_2. Ainsi W_1 et W_2, en tant qu'inverses d'un même h-cobordisme, sont difféomorphes relativement à M. □

On peut résumer les résultats de cette section dans l'énoncé suivant.

Théorème 1.28 (Classification des h-cobordismes)**.** *Soit M une variété close de dimension $\geqslant 5$ et $\mathcal{H}(M)$ l'ensemble des classes de difféomorphismes relatifs à M de h-cobordismes partant de M. La torsion de Whitehead induit une bijection*

$$\mathcal{H}(M) \to \mathrm{Wh}(M).$$

1.2.9 Une remarque de Hatcher et Lawson

Dans [HL76], Hatcher et Lawson font la remarque suivante. On en présente une démonstration légèrement différente de celle de [HL76].

Proposition 1.29 (Hatcher-Lawson)**.** *Soit $(W; M, M')$ un h-cobordisme de dimension $m+1 \geqslant 6$ dont la torsion de Whitehead est de taille p. Pour $2 \leqslant k \leqslant m-2$, les variétés $M\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{m-k})^{\#p}$ et $M'\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{m-k})^{\#p}$ sont difféomorphes.*

Démonstration. D'après la preuve du théorème 1.24, il existe une fonction $f \in \mathcal{F}^0_{k,p}$. Le point clé est que les anses d'indice k et les coanses d'indice $k+1$ sont trivialement attachées. Ainsi, un niveau intermédiaire est difféomorphe à la fois à $M\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{m-k})^{\#p}$ et à $M'\#(\mathrm{S}^{m-k} \times \mathrm{S}^k)^{\#p}$.

Pour montrer que les anses d'indice k sont trivialement attachées, on procède comme suit. Soit X un pseudo-gradient de Morse-Smale pour f et $\widetilde{W} \to W$ un revêtement universel de groupe π. Le complexe de Morse de $\widetilde{W}$ associé est concentré en degré k et $k+1$ et l'opérateur bord $C_{k+1} \to C_k$ est représenté, dans des bases privilégiées, par une matrice $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{Z}[\pi])$.

On commence par créer p nouvelles paires de points critiques d'indice k et $k+1$ loin des variétés stables et instables des points critiques existants, par un chemin de fonctions ordonnées. Ainsi le nouvel opérateur bord $C_{k+1} \to C_k$ devient

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par des glissements d'anses successifs entre les points d'indice $k+1$ (nécessitant également des croisements), on peut changer l'opérateur bord par opérations successives sur les colonnes de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ A & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Enfin, le procédé de Whitney permet de réaliser géométriquement les intersections algébriques prescrites par l'opérateur bord. En particulier, on trouve un chemin de fonctions éliminant tous les anciens points critiques d'indice k,

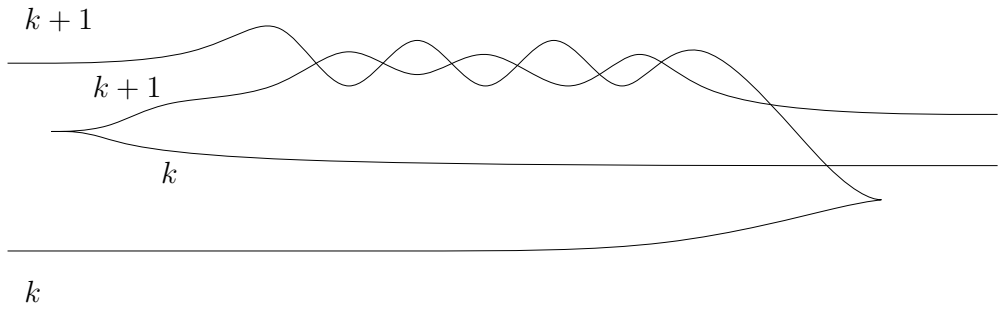

FIGURE 1.8 – Le diagramme de Cerf du chemin f_t dans le cas $p = 1$

sans autre accident les concernant, ce implique que leurs anses sont trivialement attachées. La figure 1.8 illustre le chemin de fonctions obtenu dans le cas $p = 1$.

On peut reproduire la démonstration pour montrer que les coanses d'indice $k+1$ sont également trivialement attachées, on utilise pour cela des opérations sur les lignes (glissements d'anses entre les points d'indice k) à la place des opérations sur les colonnes. □

1.2.10 Connexité de $\mathcal{F}_k$

Théorème 1.30. *Sur un h-cobordisme de dimension $m+1 \geqslant 6$, l'espace $\mathcal{F}_k$ est connexe pour tout $2 \leqslant k \leqslant m-2$.*

Ce résultat a été démontré par Cerf dans le cas d'un cobordisme produit simplement connexe ([Cer70] théorème 2 p.100) puis étendu par Chenciner et Laudenbach ([CL70] p.449).

Ces méthodes fournissent également le résultat suivant déduit par Cieliebak et Eliashberg de résultats postérieurs dus à Hatcher, Wagoner et Igusa (voir [CE12] corollary 9.52 p.213 et les références s'y trouvant).

Théorème 1.31. *L'espace $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ pour un cobordisme de dimension $2n \geqslant 6$ est toujours connexe.*

1.3 Exemples de h-cobordismes non triviaux

1.3.1 Espaces lenticulaires et équivalences d'homotopie

Pour $m \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{Z}/m^\times$, on appelle *espace lenticulaire* (de dimension trois) $\mathrm{L}(m,n)$, la variété quotient de S^3 par l'action (libre) du groupe cyclique

$$\mathbb{Z}/m = \langle t | t^m - 1 \rangle$$

donnée par

$$t.(z_1, z_2) = (e^{i\frac{2\pi}{m}} z_1, e^{i\frac{2\pi n}{m}} z_2).$$

On note que $\pi_1(\mathrm{L}(m,n))$ est alors canoniquement identifié à $\mathbb{Z}/m$. On rappelle (voir [Coh73] p.89-90) que $\mathrm{L}(m,n)$ admet une fonction de Morse f avec 4 points critiques d'indices respectifs 0, 1, 2 et 3, et un pseudo-gradient X dont le complexe de Morse du revêtement universel S^3 est le suivant :

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m] \xrightarrow{t^r-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m]$$

où $rn = 1 \mod m$ et $N = 1 + t + \cdots + t^{m-1}$.

Ce complexe n'est bien sûr pas acyclique puisque l'homologie de S^3 n'est pas nulle ; sa torsion de Whitehead n'est donc pas définie. Cependant si on tensorise le complexe par le morphisme d'anneaux $h_\zeta : \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{C}$ qui envoie t sur une racine primitive m-ième de l'unité ζ, on observe que $h_\zeta(N) = 0$ et $\zeta^r - 1 \neq 0$, si bien que le complexe C_{h_ζ} sur $\mathbb{C}$ associé est acyclique. C'est également le cas pour le morphisme $h : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m] \to \mathbb{Q}[\mathbb{Z}/m]/(N) = R_m$. En utilisant la proposition 1.14, on obtient

$$\tau_{h_\zeta}(\mathrm{L}(m,n)) = \tau(C_{h_\zeta}) = (\zeta^r - 1)(\zeta - 1) \in \mathbb{C}^\times / \langle \pm t \rangle$$

et

$$\tau_h(\mathrm{L}(m,n)) = \tau(C_h) = (t^r - 1)(t - 1) \in R_m / \langle \pm t^k \rangle.$$

Noter que l'on obtient τ_{h_ζ} en posant $t = \zeta$ puisque $h_\zeta : \mathbb{Z}[\pi] \to \mathbb{C}$ se factorise par h. Ces invariants sont connus sous le nom de *torsion de Reidemeister*, ils ont été introduits avant la torsion de Whitehead et permettent la classification complète à difféomorphisme près des espaces lenticulaires (voir [Coh73] p.97). On présente maintenant quelques exemples de calculs de torsion. Une application $\phi : \mathrm{L}(m,n) \to \mathrm{L}(m,n')$ induit un morphisme $\mathbb{Z}/m \to \mathbb{Z}/m$ via son action sur le groupe fondamental ; ce morphisme est la multiplication par un certain entier $a(\phi) \in \mathbb{Z}/m$. Les espaces lenticulaires étant orientés par les coordonnées complexes z_1, z_2, le degré de ϕ, noté $\deg(\phi) \in \mathbb{Z}$, est bien défini. Les classes d'homotopie d'application entre espaces lenticulaires sont complètement classifiées par $a(\phi)$ et $\deg(\phi)$.

Proposition 1.32. 1. *Deux applications $\phi, \psi : \mathrm{L}(m,n) \to \mathrm{L}(m,n')$ sont homotopes si et seulement si $a(\phi) = a(\psi)$ et $\deg(\phi) = \deg(\psi)$.*

2. *Soit $a \in \mathbb{Z}/m$ et $d \in \mathbb{Z}$. Il existe une application $\phi : \mathrm{L}(m,n) \to \mathrm{L}(m,n')$ avec $a(\phi) = a$ et $\deg(\phi) = d$ si et seulement si $dn = n'a^2 \mod m$.*

On peut consulter la preuve de ce résultat dans [Coh73] p.91-95 ou dans [dRMK67] p.96-101. Il suit de la proposition précédente que $\phi : \mathrm{L}(m,n) \to \mathrm{L}(m,n')$ est une équivalence d'homotopie si et seulement si son degré vaut ± 1. En effet, on a alors $n \deg(\phi) = a(\phi)^2 n'$, puis $n' \deg(\phi) = a(\phi)^{-2} n$ et

il existe une application $\psi : \mathrm{L}(m,n') \to \mathrm{L}(m,n)$ avec $\deg(\psi) = \deg(\psi)$ et $a(\psi) = a(\phi)^{-1}$. Les applications $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$ sont alors homotopes à l'identité car elles sont de degré 1 et induisent l'identité sur le groupe fondamental.

Corollaire 1.33. $\mathrm{L}(m,n)$ *et* $\mathrm{L}(m,n')$ *ont le même type d'homotopie si et seulement si* $\pm nn'^{-1}$ *est un carré modulo* m.

On peut également définir la torsion de Whitehead $\tau(\phi)$ d'une équivalence d'homotopie $\phi : X \to Y$; cet invariant mesure le défaut de ϕ à être homotope à un difféomorphisme. Dans le cadre des CW-complexes, $\tau(\phi) \in \mathrm{Wh}(Y)$ est défini comme la torsion de la paire contractile (M_ϕ, Y) où M_ϕ désigne le cylindre de ϕ (voir [Coh73] p.72). Pour une équivalence d'homotopie $\phi : \mathrm{L}(m,n) \to \mathrm{L}(m,n')$, on a la relation (voir [Coh73] p.74)

$$\tau_h(\phi) = \tau_h(\mathrm{L}(m,n'))/\phi_*\tau_h(\mathrm{L}(m,n)).$$

D'après la formule de produit pour la torsion (voir [Coh73] p.77), on a aussi, pour $k \geqslant 1$,

$$\tau_h(\mathrm{L}(m,n) \times \mathrm{S}^{2k}) = \tau_h(\mathrm{L}(m,n))^{\chi(\mathrm{S}^{2k})} = \tau_h(\mathrm{L}(m,n))^2.$$

Pour une équivalence d'homotopie $\phi : \mathrm{L}(m,n) \times \mathrm{S}^{2k} \to \mathrm{L}(m,n') \times \mathrm{S}^{2k}$, on a la relation

$$\begin{aligned}\tau_h(\phi) &= \tau_h(\mathrm{L}(m,n') \times \mathrm{S}^{2k})/\phi_*\tau_h(\mathrm{L}(m,n) \times \mathrm{S}^{2k}) \\ &= (\tau_h(\mathrm{L}(m,n'))/\phi_*\tau_h(\mathrm{L}(m,n)))^2.\end{aligned}$$

On va maintenant calculer la torsion de Whitehead sur quelques exemples en utilisant ces relations. On va en fait d'abord calculer $\tau_h \in R_m^\times/\langle \pm t\rangle$ et en déduire $\tau \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m]^\times/\langle \pm t\rangle$.

L'espace lenticulaire $\mathrm{L}(5,1)$ **:** Soit $\phi : \mathrm{L}(5,1) \to \mathrm{L}(5,1)$ une équivalence d'homotopie d'invariants $a(\phi) = 2$ et $\deg(\phi) = -1$. Alors on a [1]

$$\begin{aligned}\tau_h(\phi) &= \frac{(t-1)(t-1)}{(t^2-1)(t^2-1)} \\ &= (1+t^2+t^4)(1+t^2+t^4) \\ &= (N-t-t^3)(N-t-t^3) \\ &= t^2(1+t^2)^2 \\ &= 1+2t^2+t^4 \\ &= t^2-t-t^3 \\ &= 1-t-t^4.\end{aligned}$$

1. On calcule dans $(\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/m]/(N))^\times/\langle \pm t\rangle = R_m^\times/\langle \pm t\rangle$, on est donc autorisé à ajouter un multiple de N, ou multiplier l'ensemble par $\pm t^k$.

En fait, $1 - t - t^4$ est une unité de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/5]$ (son inverse étant $1 - t^2 - t^3$) donc représente un élément de $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/5)$, c'est la torsion de Whitehead de ϕ. On peut en fait montrer (voir [Coh73] p.44-45, [Ran02] p.186-188) que $\mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/5)$ est égal à $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/5]^\times / \pm \mathbb{Z}/5$ (autrement dit, les torsions sont de taille 1) et isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par $1 - t - t^4$. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.34. *L'application $\phi : \mathrm{L}(5,1) \to \mathrm{L}(5,1)$ n'est pas homotope à un difféomorphisme.*

Pour une équivalence d'homotopie ψ d'invariants $a(\psi) = -2$ et $\deg(\psi) = -1$, on trouve également $\tau(\psi) = 1 - t - t^4$. On peut vérifier que

$$\tau(\phi \circ \psi) = \tau(\phi) + \phi_* \tau(\psi) = (1 - t - t^4)(1 - t^2 - (t^2)^4) = 1,$$

en accord avec le fait que $\phi \circ \psi$ est homotope à l'identité d'après la proposition 1.32.

Soit $\phi : \mathrm{L}(5,1) \times S^{2k} \to \mathrm{L}(5,1) \times S^{2k}$ une équivalence d'homotopie avec $a(\phi) = \pm 2$. Alors on a, grâce aux relations ci-dessus,

$$\tau(\phi) = (1 - t - t^4)^2 \neq 1.$$

On en déduit le résultat suivant qui nous sera utile au chapitre 5.

Proposition 1.35. *Pour $k \geqslant 1$, aucun difféomorphisme de $\mathrm{L}(5,1) \times \mathrm{S}^{2k}$ n'induit la multiplication par ± 2 sur π_1.*

Les espaces lenticulaires $\mathrm{L}(7,1)$ et $\mathrm{L}(7,2)$: Soit $\phi : \mathrm{L}(7,1) \to \mathrm{L}(7,2)$ une équivalence d'homotopie d'invariants $a(\phi) = 2$ et $\deg(\phi) = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\tau_h(\phi) &= \frac{(t^4 - 1)(t - 1)}{(t^2 - 1)(t^2 - 1)} \\
&= (1 + t^2)(1 + t^2 + t^4 + t^6) \\
&= 1 + t + 2t^2 + 2t^4 + 2t^6 \\
&= t^2 + t^4 + t^6 - t^3 - t^5 \\
&= 1 - t + t^2 + t^5 - t^6
\end{aligned}$$

Comme précédemment, l'expression obtenu pour $\tau_h(\phi)$ est en fait valable pour $\tau(\phi) \in \mathrm{Wh}(\mathbb{Z}/7)$ (l'inverse de $1 - t + t^2 + t^5 - t^6$ est $-1 + t^2 + t^5$). Au vu de la relation $\pm 1 = 2a(\phi)^2$, la seule autre possibilité pour ϕ est $a(\phi) = -2$; un calcul analogue donne également $\tau(\phi) = 1 - t + t^2 + t^5 - t^6$ dans ce cas, d'où le résultat suivant.

Proposition 1.36. $\mathrm{L}(7,1)$ *et* $\mathrm{L}(7,2)$ *ne sont pas difféomorphes.*

Pour une équivalence d'homotopie $\phi : \mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{S}^{2k} \to \mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{S}^{2k}$ avec $k \geqslant 1$, on doit analyser a priori tous les cas $a(\phi) = 1,2,3,4,5,6$ (car la proposition 1.32 ne s'applique pas). Mais si $a(\phi) \neq 2,5$, on trouve que $\tau_h(\phi)$ ne provient pas d'une unité de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m]$ ce qui est contradictoire. Par exemple, si $a(\phi) = 1$, on aurait :

$$\tau_h(\phi) = (\frac{(t^4-1)(t-1)}{(t-1)(t-1)})^2 = (1+t+t^2+t^3)^2 = -1+t^2+2t^3+t^4-t^6$$

dont l'augmentation ε vaut $-1+1+2+1-1 = 2$ et n'est donc pas égale à ± 1 modulo 7 (même en lui ajoutant kN avec $k \in \mathbb{Z}$ on ne peut pas en faire une unité de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/7]$).

Pour $a(\phi) = \pm 2$, on trouve comme précédemment,

$$\tau(\phi) = (1-t+t^2+t^5-t^6)^2 = 5-4t+3t^2-t^3-t^4+3t^5-4t^6.$$

On obtient ainsi le résultat suivant.

Proposition 1.37. *Pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{L}(7,1) \times S^{2k}$ et $\mathrm{L}(7,2) \times S^{2k}$ ne sont pas difféomorphes.*

1.3.2 H-cobordismes à partir d'équivalences d'homotopie

On explique ici une construction de h-cobordismes non triviaux à partir d'équivalences d'homotopie entre espaces lenticulaires. Cette construction a été utilisée par Milnor dans [Mil61] pour construire un contre-exemple au Hauptvermutung, elle est également à rapprocher du théorème de Mazur sur la classification stable des variétés ([Maz61]).

Soit $\phi : L \to L'$ une équivalence d'homotopie entre deux espaces lenticulaires de dimension 3. Pour $m \geqslant 6$, l'application $\phi \times 0 : L \to L' \times \mathrm{D}^{m-2}$ peut être perturbée en un plongement $\psi : L \to \mathrm{int}(L' \times \mathrm{D}^{m-2})$. Pour $m = 5$, $\phi \times 0$ est également homotope à un plongement d'après un théorème de Haefliger (voir [Hae61]). De plus, dans tous les cas le fibré normal $\nu(\psi)$ de ψ est trivial. En effet, on a :

$$\nu(\psi) \oplus \mathrm{T}\,L \simeq \psi^* \,\mathrm{T}\,L' \oplus \underline{\mathbb{R}}^{m-2},$$

(on note $\underline{\mathbb{R}}^k$ le fibré vectoriel réel trivial de rang k) et, puisque les espaces lenticulaires sont parallélisables,

$$\nu(\psi) \oplus \underline{\mathbb{R}}^3 \simeq \underline{\mathbb{R}}^{m+1}. \tag{1.1}$$

Pour $m \geqslant 6$, cela implique directement que $\nu(\psi)$ est trivial car le rang de $\nu(\psi)$ est strictement plus grand que la dimension de la base. Pour $m = 5$, il faut un argument supplémentaire. La théorie de l'obstruction affirme que $\nu(\psi)$ est trivial si et seulement si les classes d'obstruction dans $\mathrm{H}^i(L; \pi_{i-1}O(3))$

s'annulent. Les seules classes non nulles sont dans $\mathrm{H}^1(L;\mathbb{Z}/2)$ et $\mathrm{H}^2(L,\mathbb{Z}/2)$ et correspondent respectivement à la première et à la seconde classe de Stiefel-Whitney ; ces dernières s'annulent d'après 1.1. En fait, dans le cas qui nous intéresse où le cardinal de $\pi_1(L)$ est impair, ces groupes de cohomologie sont nuls.

On peut donc prolonger ψ en un plongement (toujours noté ψ)

$$L \times \mathrm{D}^{m-2} \to \mathrm{int}(L' \times D^{m-2}).$$

Dans la suite, on note $V = L \times D^{m-2}$, $V' = L' \times D^{m-2}$, $M = L \times S^{m-3}$ et $M' = L' \times S^{m-3}$.

Proposition 1.38. *La région $W = V' \setminus \psi(V)$ est un h-cobordisme de M vers M' (voir la figure 1.9).*

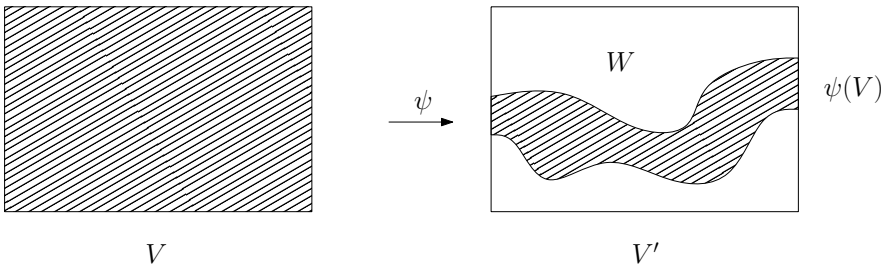

FIGURE 1.9 – Le h-cobordisme W

Démonstration. L'inclusion $W \to V'$ induit un isomorphisme au niveau du π_1. En effet, puisque $m \geqslant 5$, par position générale tout lacet ou homotopie entre lacets dans V' peut être disjointe de $\psi(L \times \{0\})$ donc de $\psi(V)$. Le diagramme commutatif suivant implique alors que les inclusions $M \to W$ et $M' \to W$ sont des isomorphismes sur le π_1 :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & \pi_1(W) \arrow[dr, "\sim"] & \pi_1(M') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] \\
\pi_1(V) \arrow[rr, "\sim"] & & \pi_1(V')
\end{tikzcd}$$

On note au passage que l'isomorphisme $\pi_1(M) \to \pi_1(M')$ induit par le cobordisme W est égal à celui induit par $\phi \times \mathrm{id}$.

Pour montrer que $M \to W$ est une équivalence d'homotopie, il suffit de montrer que $\pi_k(W, M) = 0$ pour tout k. D'après le théorème de Hurewicz, on a, pour $k \geqslant 2$,

$$\pi_k(W, M) \simeq \mathrm{H}_k(\widetilde{W}, \widetilde{M})$$

où le symbole tilde désigne le revêtement universel. Par excision, il vient :

$$\mathrm{H}_k(\widetilde{W}, \widetilde{M}) \simeq \mathrm{H}_k(\widetilde{V'}, \widetilde{\psi(V)}) = 0,$$

puisque ψ est une équivalence d'homotopie. Il reste à montrer que $M' \to W$ est également une équivalence d'homotopie : on a

$$H_k(\widetilde{W}, \widetilde{M'}) \simeq H^{m+1-k}(\widetilde{W}, \widetilde{M})$$

par dualité de Poincaré ; d'où le résultat. □

Proposition 1.39. *La torsion de Whitehead de W est égale à la torsion de ϕ.*

Démonstration. D'après la formule d'excision (voir [Coh73] p. 68), on a

$$\tau(W, M) = \tau(V', \psi(V))$$

où on identifie $\mathrm{Wh}(M) \simeq \mathrm{Wh}(V) \simeq \mathrm{Wh}(L')$ par les isomorphismes évidents. Ensuite, en contractant le facteur D^{m-2} (où en utilisant la formule du produit pour la torsion), on voit que $\tau(V', \psi(V)) = \tau(\phi)$. □

Chapitre 2

Cobordismes de Liouville et procédé infini de Mazur

Ce chapitre commence par un rappel de quelques notions de géométrie symplectique et de contact, en insistant sur la procédure de symplectisation. On discute ensuite en détail la catégorie des cobordismes de Liouville idéaux pour aboutir à une reformulation de la question 1 en termes de cobordismes de Liouville idéaux inversibles.

Sommaire

2.1 Variétés symplectiques et de contact **36**

2.2 Cobordismes de Liouville **38**

2.2.1 La notion classique 38

2.2.2 Cobordismes de Liouville idéaux 39

2.3 Procédé infini de Mazur **49**

2.1 Variétés symplectiques et de contact

Variétés symplectiques Une *structure symplectique* sur une variété W de dimension $2n$ est une 2-forme ω fermée ($\mathrm{d}\omega = 0$) et non-dégénérée ($\omega^n \neq 0$). La variété W est alors naturellement orientée par la forme volume ω^n. Un théorème de Darboux assure que toute variété symplectique est localement isomorphe au modèle suivant : l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la 2-forme $\omega_0 = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i$. Un deuxième exemple fondamental est le fibré cotangent $\mathrm{T}^* M$ d'une variété M, celui-ci est muni d'une 1-forme canonique λ_{can} appelée *forme de Liouville* dont la différentielle ω_{can} est symplectique. Le champ dual X_{can} défini par l'équation $X_{\mathrm{can}} \lrcorner \omega_{\mathrm{can}} = \lambda_{\mathrm{can}}$ est le champ radial dans les fibres, il vérifie l'équation $X.\omega = \omega$ des *champs de Liouville*. Les structures symplectiques que l'on rencontre dans cette thèse sont *exactes*, c'est-à-dire que, comme dans le cas du fibré cotangent, il existe une primitive λ de ω. On note que la donnée de λ est équivalente à la donnée du couple (ω, X) où X est le champ dual de λ. On dira qu'un difféomorphisme symplectique $\varphi : (W, \lambda) \to (W', \lambda')$ est *exact* si $\phi^* \lambda' - \lambda$ est une 1-forme exacte.

Variétés de contact Une *structure de contact* sur une variété M de dimension impaire $2n-1$ est un champ d'hyperplans ξ satisfaisant l'hypothèse suivante : si α est une 1-forme (locale) vérifiant $\ker \alpha = \xi$ (on parlera d'*équation* locale de ξ), alors $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1} \neq 0$. Comme pour les variétés symplectiques, un théorème de Darboux assure que toute structure de contact est localement modelée sur l'exemple suivant : l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n-1}$ muni du champ d'hyperplans $\xi = \ker \alpha_0$ où $\alpha_0 = \mathrm{d}z + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \, \mathrm{d}y_i - y_i \, \mathrm{d}x_i)$. On supposera toujours que ξ est *coorienté*, on dispose donc d'équations globales $\xi = \ker \alpha$ et ξ induit une orientation de M (par la forme volume $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1}$). Le fibré cotangent en sphère (ou de façon équivalente, le fibré des hyperplans coorientés) d'une variété M porte naturellement une structure de contact, c'est le pendant du fibré cotangent en dimension paire. Parmi les champs d'hyperplans, les structures de contact sont l'extrême opposé des feuilletages de codimension 1 qui, au vu du théorème de Frobenius, sont exactement ceux qui vérifient l'équation $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = 0$. Les sous-variétés tangentes à une structure de contact sont dites *isotropes* et sont de dimension au plus $n-1$, on parle de sous-variétés *legendriennes* si la dimension est égale à $n-1$.

Symplectisation des variétés de contact Voici maintenant un lien fondamental entre la géométrie symplectique et la géométrie de contact. Si ξ est un champ d'hyperplans coorientés sur une variété M, on note $\mathrm{S}_\xi M$ l'ensemble des covecteurs $\beta \in \mathrm{T}^* M$ tels que $\ker \beta = \xi$ (comme hyperplans *coorientés*). L'action naturelle de $\mathbb{R}_+^*$ par multiplication sur $\mathrm{S}_\xi M$ en fait un fibré principal $\pi : \mathrm{S}_\xi M \to M$ dont les sections sont les équations de ξ. Le choix d'une section

globale α détermine la trivialisation

$$\begin{aligned} M \times \mathbb{R}_+^* &\xrightarrow{\sim} S_\xi M \\ (p, r) &\mapsto r\alpha_p \end{aligned}$$

dans laquelle la 1-forme canonique de $\mathrm{T}^* M$ s'écrit $\lambda = r\alpha$.

Proposition 2.1. *ξ est une structure de contact si et seulement si $\mathrm{S}_\xi M$ est une sous-variété symplectique de $\mathrm{T}^* M$.*

Démonstration. Dans une trivialisation donnée par le choix d'une section α, on a

$$\omega = \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}(r\alpha) = \mathrm{d}r \wedge \alpha + r\,\mathrm{d}\alpha,$$

puis

$$\omega^n = nr^{n-1}\,\mathrm{d}r \wedge \alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^{n-1};$$

d'où l'équivalence souhaitée. □

Si (M, ξ) est une variété de contact, on appelle alors $(\mathrm{S}_\xi M, \lambda)$ sa *symplectisation*, c'est une variété symplectique exacte. Le champ de Liouville X de $\mathrm{T}^* M$ est tangent à $\mathrm{S}_\xi M$ et son flot donne l'action de $\mathbb{R}_+^*$ via la formule

$$\forall \beta \in \mathrm{S}_\xi M, \forall r > 0, \quad r.\beta = \varphi_X^{\ln r}(\beta).$$

On retrouve alors (M, ξ) à partir de $(\mathrm{S}_\xi M, \lambda)$: d'une part M est le quotient de $\mathrm{S}_\xi M$ par le flot de X et d'autre part ξ est la projection du champ d'hyperplans $\ker \lambda$ de $\mathrm{S}_\xi M$ (en effet, un vecteur $v \in \xi$ si et seulement si tout relevé $\tilde{v}$ à $\mathrm{S}_\xi M$ vérifie $\lambda(\tilde{v}) = 0$, et ceci ne dépend pas du choix du relevé au vu de la définition de λ). Plus généralement, on peut traduire toute la géométrie de contact en terme de géométrie symplectique $\mathbb{R}_+^*$-équivariante de sa symplectisation.

Proposition 2.2. *Soit (M, ξ) et (M', ξ') deux variétés de contact.*

1. *L'application qui à un difféomorphisme $\mathbb{R}_+^*$-équivariant $\mathrm{S}_\xi M \to \mathrm{S}_{\xi'} M'$ associe le difféomorphisme $M \to M'$ sous-jacent induit une bijection entre les difféomorphismes symplectiques $\mathbb{R}_+^*$-équivariants $\mathrm{S}_\xi M \to \mathrm{S}_{\xi'} M'$ et les difféomorphismes de contact $(M, \xi) \to (M', \xi')$.*
2. *L'application qui à un champ de vecteurs $\mathbb{R}_+^*$-équivariant sur $\mathrm{S}_\xi M$ associe le champ de vecteurs sur M sous-jacent induit une bijection entre les champs symplectiques $\mathbb{R}_+^*$-équivariant de $\mathrm{S}_\xi M$ et les champs de contact de (M, ξ). De plus, les champs symplectiques $\mathbb{R}_+^*$-équivariant admettent un unique hamiltonien $\mathbb{R}_+^*$-équivariant.*

Démonstration. 1. Un difféomorphisme équivariant $\widetilde{\phi}$ induit un difféomorphisme $\phi : M \to M'$ et vérifie $\phi_* X = X'$, s'il est en plus symplectique, alors $\widetilde{\phi}^* \lambda' = \phi^*(X' \lrcorner \omega') = X \lrcorner \omega = \lambda$ et $\phi_* \xi = \xi'$.
Réciproquement, tout difféomorphisme $\phi : M \to M'$ se relève en un difféomorphisme $\widetilde{\phi} : \mathrm{T}^* M \to \mathrm{T}^* M'$ vérifiant $\widetilde{\phi}^* \lambda' = \lambda$ via la formule :

$$\forall \beta \in \mathrm{T}_p^* M, \quad \widetilde{\phi}(\beta) = \beta_p \circ \mathrm{d}_{\phi(p)}(\phi^{-1}).$$

Si $\phi_* \xi = \xi'$, $\widetilde{\phi}$ induit un difféomorphisme $\mathrm{S}_\xi M \to \mathrm{S}_{\xi'} M'$, qui est symplectique et $\mathbb{R}_+^*$-équivariant.
Concrètement, si α et α' sont deux équations de ξ et ξ', dans les trivialisations induites de $\mathrm{S}_\xi M$ et $\mathrm{S}_{\xi'} M'$, alors le relevé d'un difféomorphisme de contact $\phi : M \to M'$ s'écrit $\widetilde{\phi}(q, r) = (\phi(q), rg(q))$ avec $g(q) = \frac{\alpha}{\phi^* \alpha'}$.

2. On déduit ce point du précédent en utilisant le flot local associé aux champs de vecteurs.
Concrètement, dans une trivialisation $\mathrm{S}_\xi M \simeq M \times \mathbb{R}_+^*$ induite par le choix d'une équation globale $\xi = \ker \alpha$. Un relevé de Y s'écrit $\widetilde{Y}(q, r) = Y(q) + f(q, r) \frac{\partial}{\partial r}$ et l'équation $\widetilde{Y}.\lambda = 0$ est équivalente à $rY.\alpha + f(q, r)\alpha = 0$, ce qui donne l'unique solution

$$f(q, r) = -r \frac{Y.\alpha}{\alpha}.$$

On a

$$\begin{aligned} \widetilde{Y} \lrcorner \omega &= -\alpha(Y)\, \mathrm{d}r + rY \lrcorner\, \mathrm{d}\alpha - r \frac{Y.\alpha}{\alpha} \alpha \\ &= -d(rY \lrcorner \alpha) \\ &= -\,\mathrm{d}(Y \lrcorner \lambda) \end{aligned}$$

Donc $\widetilde{Y}$ est le champ hamiltonien de la fonction $\mathbb{R}_+^*$-équivariante $H = Y \lrcorner \lambda$ (cette expression a bien un sens, c'est $\widetilde{Y} \lrcorner \lambda$ pour n'importe quel choix de relevé $\widetilde{Y}$).

□

Si α et β sont deux sections globales avec $\alpha < \beta$ (c'est-à-dire $\frac{\alpha}{\beta} < 1$) en tout point on définit $\mathrm{S}_\xi M^{[\alpha,\beta]} = \{\gamma \in \mathrm{S}_\xi M \mid \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta\}$ et de façon analogue les parties $\mathrm{S}_\xi M^{<\alpha}$, $\mathrm{S}_\xi M^{\geqslant \beta}$, etc.

2.2 Cobordismes de Liouville

2.2.1 La notion classique

Définition 2.3. *Un* cobordisme de Liouville *est un cobordisme W muni d'une forme symplectique positive ω telle qu'il existe un champ de Liouville X* positive-

ment transverse *à* ∂W *(c'est-à-dire rentrant le long de* $\partial_- W$ *et sortant le long de* $\partial_+ W$*).*

La structure symplectique induit une orientation de W, puis également sur ∂W en utilisant la coorientation de ∂W. La 1-forme $\lambda = X \lrcorner \omega$ est une primitive de ω et elle induit une forme de contact positive sur $\partial_- W$ et sur $\partial_+ W$; d'après l'équation :

$$X \lrcorner \omega^n = n\lambda \wedge (\mathrm{d}\lambda)^{n-1}.$$

On dit que $\partial_- W$ est un bord *concave* tandis que $\partial_+ W$ est un bord *convexe*.

On parle de *domaine de Liouville* dans le cas où $\partial_- W$ est vide. D'après la formule de Stokes, si W est non vide, on a :

$$0 < \int_W \omega^n = \int_{\partial_+ W} \lambda \wedge \omega^{n-1} - \int_{\partial_- W} \lambda \wedge \omega^{n-1} \leqslant \int_{\partial_+ W} \lambda \wedge \omega^{n-1},$$

et $\partial_+ W$ est nécessairement non-vide.

Puisque l'espace des champs de Liouville transverse à une hypersurface donnée est un convexe, la structure de contact sur ∂W est bien déterminée par ω à homotopie près (en fait, à un choix contractile près), et donc à isotopie près d'après le théorème de Gray.

On ne s'intéresse pas ici aux invariants quantitatifs des cobordismes de Liouville (e.g. volume, capacité symplectique, feuilletage caractéristique sur le bord), on souhaite par exemple pouvoir considérer tous les domaines étoilés de $\mathbb{R}^{2n}$ comme équivalents.

Soit (W, ω) un cobordisme de Liouville et X un champ de Liouville. En utilisant le flot de X, on obtient des voisinages colliers $\partial_+ W \times [1-\varepsilon, 1]$ et $\partial_- W \times [1, 1+\varepsilon]$ dans lesquels la forme de Liouville $\lambda = X \lrcorner \omega$ s'écrit respectivement $\lambda = r\alpha_+$ et $\lambda = r\alpha_-$ où r désigne la coordonnées dans les intervalles et $\alpha_\pm$ sont les formes de contact induites par λ sur $\partial_\pm W$. On peut alors dans un premier temps attacher à W les morceaux de symplectisation $\partial_+ W \times [1, +\infty[$ et $\partial_- W \times]0, 1]$ afin d'obtenir une variété symplectique $\widehat{W}$ (appelée *complétion* de W) munie d'un champ de Liouville complet. L'inconvénient pratique est que l'on obtient ainsi une variété non compacte. Emmanuel Giroux propose la notion de *cobordisme de Liouville idéal* permettant de réconcilier les deux aspects : champ de Liouville complet et variété compacte. Cette notion a fait une première apparition dans [MNW12]. On va présenter cette notion ainsi que ses principales propriétés qui en font une notion naturelle et maniable.

2.2.2 Cobordismes de Liouville idéaux

Le modèle de compactification est le suivant. On considère la symplectisation $\mathrm{S}_\xi M$ d'une variété de contact (M, ξ) et on choisit une équation α de ξ. On a alors une trivialisation $\mathrm{S}_\xi M \simeq]0, +\infty[\times M$ et la forme de Liouville canonique s'écrit $\lambda = r\alpha$. On forme alors simplement $M \times [0, +\infty]$, avec au

voisinage de $M \times \{+\infty\}$ la structure de variété telle que $\{-\frac{1}{r} = 0\}$ soit une équation régulière de $M \times \{+\infty\}$. Cette procédure est canonique au sens où, si β est une autre équation de ξ, le difféomorphisme $M \times]0, +\infty[\to M \times]0, +\infty[$ de changement de trivialisation, étant de la forme $(x, r) \mapsto (x, f(x)r)$ avec $f : M \to]0, +\infty[$, s'étend en un difféomorphisme $\phi : M \times [0, +\infty] \to M \times [0, +\infty]$ avec $\phi^*(r\alpha) = r\beta$ sur $M \times]0, +\infty[$. On appellera *symplectisation idéale* cette construction et on la notera $\overline{\mathrm{S}_\xi M}$.

Le modèle de forme de Liouville que l'on souhaite près d'un bord concave et convexe sont donc respectivement les suivants :

$$\begin{aligned} &M \times [0, \varepsilon], \quad \lambda = r\alpha, \quad X = r\frac{\partial}{\partial r}, \quad \omega = \mathrm{d}r \wedge \alpha + r\,\mathrm{d}\alpha \\ &M \times [-\varepsilon, 0], \quad \lambda = -\frac{1}{r}\alpha, \quad X = -r\frac{\partial}{\partial r}, \quad \omega = \frac{1}{r^2}(\mathrm{d}r \wedge \alpha - r\,\mathrm{d}\alpha) \end{aligned} \tag{2.1}$$

On peut caractériser ce modèle par la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Soit W un cobordisme muni d'une forme symplectique ω sur un voisinage de ∂W privé de ∂W. Soit $\{u_\pm = 0\}$ une équation régulière de $\partial_\pm W$. Soit λ une forme de Liouville ($\mathrm{d}\lambda = \omega$) et X le champ dual ($X \lrcorner \omega = \lambda$). Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *$-u_+\lambda$ (resp. $\frac{\lambda}{u_-}$) s'étend de façon C^∞ à $\partial_+ W$ (resp. $\partial_- W$) et y définit une forme de contact positive $\alpha_\pm$ (pour l'orientation comme bord d'un cobordisme).*
2. *$-\frac{X}{u_+}$ (resp. $\frac{X}{u_-}$) s'étend de façon C^∞ à $\partial_+ W$ (resp. $\partial_- W$) et satisfait $\mathrm{d}u_+(-\frac{X}{u_+}) = 1$ (resp. $\mathrm{d}u_-(\frac{X}{u_-}) = 1$) le long de $\partial_+ W$ (resp. $\partial_- W$).*

De plus, ces conditions sont indépendantes du choix de l'équation régulière $\{u_\pm = 0\} = \partial_\pm W$ et la structure de contact $\xi_\pm = \ker \alpha_\pm$ induite sur $\partial_\pm W$ ne dépend ni de $u_\pm$, ni de λ, elle est déterminée uniquement par ω.

Démonstration. On va le vérifier seulement pour $\partial_- W$, la démonstration étant analogue pour $\partial_+ W$. On fixe une équation régulière $\{u = 0\}$ de $\partial_- W$ (avec $\mathrm{d}u(v) > 0$ si v est un vecteur tangent rentrant le long de $\partial_- W$).

1. $\Rightarrow$ 2.

Supposons que $\beta = \frac{\lambda}{u}$ s'étende de façon C^∞ et définisse une forme de contact positive α sur $\partial_- W$.

D'une part, la $2n$-forme

$$\begin{aligned} u^{1-n}\omega^n &= u^{1-n}(\mathrm{d}(u\beta))^n \\ &= u^{1-n}(\mathrm{d}u \wedge \beta + u\,\mathrm{d}\beta)^n \\ &= u^{1-n}(n\,\mathrm{d}u \wedge \beta \wedge u^{n-1}(\mathrm{d}\beta)^{n-1} + u^n(\mathrm{d}\beta)^n \\ &= n\,\mathrm{d}u \wedge \beta \wedge (\mathrm{d}\beta)^{n-1} + u(\mathrm{d}\beta)^n \end{aligned}$$

s'étend de façon C^∞ à $\partial_- W$ et définit une forme volume positive au voisinage de M.

D'autre part, la $(2n-1)$-forme

$$\begin{aligned}\frac{X}{u}\lrcorner(u^{1-n}\omega^n) &= nu^{-n}\lambda\wedge\omega^{n-1}\\ &= n\beta\wedge(\frac{\omega}{u})^{n-1}\\ &= n\beta\wedge(\mathrm{d}\beta)^{n-1}\end{aligned}$$

s'étend de façon C^∞ à $\partial_- W$ et y définit une forme volume (positive pour l'orientation comme bord inférieur) par hypothèse. On en déduit que $\frac{X}{u}$ s'étend à $\partial_- W$ de façon C^∞ et vérifie $\mathrm{d}u(\frac{X}{u}) = 1$.

2. $\Rightarrow$ 1.

Réciproquement, supposons que $\frac{X}{u}$ s'étende à $\partial_- W$ avec $\mathrm{d}u(\frac{X}{u}) = 1$ sur $\partial_- W$. Notant $\lambda = X\lrcorner\omega$, on va montrer à la fois que β s'étend de façon C^∞ à $\partial_- W$, y définit une forme de contact positive α, et que l'on peut modéliser un voisinage de $\partial_- W$ sur $M\times[0,\varepsilon]$ avec $\lambda = r\alpha$ (r désignant la coordonnée de $[0,\varepsilon]$).

On cherche une fonction r définie au voisinage de $\partial_- W$ de la forme $r = fu$ où f est une fonction valant 1 sur $\partial_- W$ et satisfaisant l'équation :

$$X.r = r$$

Cette équation se traduit par

$$\frac{X.f}{f} + \frac{X.u}{u} = 1,$$

soit, en divisant par u,

$$\mathrm{d}\ln(f)(\frac{X}{u}) = \frac{1}{u}(1 - \mathrm{d}u(\frac{X}{u})).$$

Le membre de droite dans cette dernière égalité s'étend de façon C^∞ à $\partial_- W$ car $\mathrm{d}u(\frac{X}{u})$ y est égal à 1. On peut ainsi définir correctement f en utilisant le flot de $\frac{X}{u}$ au voisinage de $\partial_- W$.

Ensuite, on obtient un voisinage collier de $\partial_- W$ en utilisant le flot du champ $\frac{X}{r}$:

$$i\colon \partial_- W\times[0,\varepsilon]\to W,\quad (x,t)\mapsto \varphi^t_{\frac{X}{r}}(x)$$

est un difféomorphisme pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Puisque $\frac{X}{r}.r = 1$ et $r = 0$ sur $\partial_- W$, l'application $\varphi^t_{\frac{X}{r}}$ de $\partial_- W$ dans W vérifie $(\varphi^t_{\frac{X}{r}})^* r = t$. Il vient, pour $t\in]0,\varepsilon[$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((\varphi^t_{\frac{X}{r}})^*\lambda) = (\varphi^t_{\frac{X}{r}})^*(\frac{X}{r}.\lambda) = (\varphi^t_{\frac{X}{r}})^*(\frac{\lambda}{r}) = \frac{1}{t}(\varphi^t_{\frac{X}{r}})^*\lambda,$$

puis, notant $\varepsilon\alpha$ la forme de contact $(\varphi^{\varepsilon}_{\frac{X}{r}})^*\lambda$,

$$(\varphi^{t}_{\frac{X}{r}})^*\lambda = \frac{\varepsilon\alpha t}{\varepsilon} = t\alpha.$$

Ainsi,

$$i^*\lambda = (\varphi^{t}_{\frac{X}{r}})^*\lambda + \lambda(\frac{X}{r} \circ \varphi^{t}_{\frac{X}{r}})\,\mathrm{d}t = t\alpha + 0 = t\alpha$$

et $\frac{\lambda}{r} = i_*(\frac{t\alpha}{t}) = i_*\alpha$ s'étend de façon C^∞ à $\partial_- W$ et y définit une forme de contact positive.

Indépendance vis à vis de l'équation régulière du bord :

Si $\{v_\pm = 0\}$ est une autre équation régulière de $\partial_\pm W$, alors $\frac{v_\pm}{u_\pm} = f_\pm$ est une fonction C^∞ strictement positive au voisinage de $\partial_\pm W$. C'est alors immédiat pour le premier point, quant au second point, cela suit du calcul suivant :

$$\mathrm{d}v_\pm(\frac{X}{v_\pm}) = \mathrm{d}(f_\pm u_\pm)(\frac{X}{f_\pm u_\pm}) = \mathrm{d}u_\pm(\frac{X}{u_\pm}) + \frac{u_\pm}{f_\pm}\,\mathrm{d}f(\frac{X}{u_\pm});$$

ainsi, sur $\{u_\pm = 0\} = \partial_\pm W$, on a $\mathrm{d}v_\pm(\frac{X}{v_\pm}) = \mathrm{d}u_\pm(\frac{X}{u_\pm})$.

La structure de contact sur ∂W est déterminée par ω :

Il suffit de regarder le modèle local près de ∂W. Faisons le d'abord pour $\partial_- W$. On considère $M \times [0, \varepsilon]$ muni de la forme de Liouville $\lambda = r\alpha$. La 2-forme

$$\omega = \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}r \wedge \alpha + r\,\mathrm{d}\alpha$$

s'étend de façon C^∞ à $M \times \{0\}$ et y dégénère en la 2-forme $\mathrm{d}r \wedge \alpha$ dont le noyau est précisément $\ker \alpha$. Pour $\partial_+ W$, on considère $M \times [-\varepsilon, 0]$ muni de la forme de Liouville $\lambda = -\frac{1}{r}\alpha$. On a

$$\omega = \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{r^2}(\mathrm{d}r \wedge \alpha - r\,\mathrm{d}\alpha),$$

si bien que $r^2\omega$ s'étend de façon C^∞ à $M \times \{0\}$ et y dégénère en $\mathrm{d}r \wedge \alpha$ dont le noyau est égal à $\ker \alpha$. Si on remplace $\{r = 0\}$ par une autre équation régulière $\{u = 0\}$ de $\partial_+ W$, le noyau de $u^2\omega$ sera le même. Ainsi, on a montré que la structure de contact $\ker \alpha$ est bien déterminée par ω. □

Définition 2.5. *Un* cobordisme de Liouville idéal *est un cobordisme compact W muni d'une forme symplectique positive ω sur* $\operatorname{int} W$ *telle qu'il existe une forme de Liouville défini sur* $\operatorname{int} W$ *et vérifiant la première condition de la proposition 2.4. On dira qu'une telle forme (ou champ) de Liouville est* adaptée *à W.*

Remarque 2.6. *L'espace des formes (ou des champs) de Liouville adaptées sur un cobordisme de Liouville idéal (W, ω) est convexe. On devra souvent en choisir mais ce choix n'aura pas d'importance.*

Voisinages colliers Au cours de la démonstration de la proposition 2.1, on a démontré que tout voisinage du bord dans un cobordisme de Liouville idéal (W, ω) est isomorphe au modèle local 2.1. Plus précisément, pour tout choix d'une forme de Liouville adaptée λ et d'une équation α de $(\partial_- W, \xi)$, on dispose d'un unique voisinage collier $i : \partial_- W \times [0,1] \to W$ avec $i^*\lambda = r\alpha$. On a l'énoncé suivant concernant l'unicité (à symplectomorphisme exact près) de ces voisinages colliers.

Proposition 2.7. *Soit (W, ω) un cobordisme de Liouville idéal. Soit λ_t, $t \in [0,1]$, une famille de formes de Liouville sur (W, ω). Il existe une famille ϕ_t, $t \in [0,1]$, de difféomorphismes de W égaux à l'identité sur ∂W et tels que*

$$\phi_t^* \lambda_t = \lambda_0 + \mathrm{d}h_t$$

où $h_t \colon W \to \mathbb{R}$ est nulle sur un voisinage de ∂W.

Démonstration. Pour tout choix de formes de contact α_- et α_+ pour $\partial_- W$ et $\partial_+ W$, on dispose d'une famille canonique de colliers $i_t^- : \partial_- W \times [0,1] \to W$ et $i_t^+ : \partial_+ W \times [-1,0] \to W$ avec $(i_t^-) * \lambda_t = r\alpha_-$ et $(i_t^+) * \lambda_t = -\frac{1}{r}\alpha_+$. De plus, si on choisit α_- assez petit (ou α_+ assez grand), on peut supposer que les images de i_t^+ et de i_t^- sont disjointes. Il existe alors une famille ψ_t de difféomorphismes de W tels que $i_t^\pm = \psi_t \circ i_0^\pm$. Notant $\lambda_t' = \psi_t^* \lambda_t$, on a $\lambda_t' = \lambda_0$ près de ∂W. On applique ensuite la méthode de Moser : on cherche des difféomorphismes θ_t engendré par un champ Y_t vérifiant

$$\theta_t^* \lambda_t' = \lambda_0 + \mathrm{d}h_t$$

où h_t est une fonction inconnue. Cela nous amène à définir Y_t par l'équation

$$Y_t \lrcorner \, \mathrm{d}\lambda_t' = -\dot{\lambda}_t'$$ [1]

qui est un champ de vecteur nul près de ∂W donc on peut l'intégrer pour obtenir les difféomorphismes θ_t cherchés. La famille de difféomorphismes $\psi_t \circ \theta_t$ a alors les propriétés voulues. □

Remarque 2.8. *Dans la proposition ci-dessus, on peut déplacer le support de la fonction h_t en remplaçant ϕ_t par $\phi_t' = \varphi_{X_t}^{-T} \circ \phi_t \circ \varphi_{X_0}^T$ pour un certain $T \in \mathbb{R}$. Ce difféomorphisme est toujours égal à l'identité sur ∂W et vérifie*

$$(\phi_t')^* \lambda_t = \lambda_0 + \mathrm{d}h_t'$$

avec $h_t' = e^{-T} h_t \circ \varphi_{X_0}^T$.

Au passage, on obtient un résultat de stabilité.

1. $\dot{\lambda}_t'$ désigne la dérivée par rapport à t de λ_t'

Proposition 2.9. *Soit W un cobordisme et ω_t, $t \in [0,1]$, une famille de structures de cobordismes de Liouville idéaux sur W. Alors il existe une famille de difféomorphismes ϕ_t, $t \in [0,1]$, de W avec $\phi_0 = \mathrm{id}$ et $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$. De plus, si la structure de contact $\xi_t^\pm$ induite par ω_t sur $\partial_\pm W$ est constante, alors on peut supposer $\phi_t = \mathrm{id}$ sur $\partial_\pm W$.*

Démonstration. D'après le théorème de Gray, il existe une famille $\phi_t^\pm$ de difféomorphismes de $\partial_\pm W$ avec $\phi_0^\pm = \mathrm{id}$ et $(\phi_t^\pm)^* \xi_t^\pm = \xi_0$. Ensuite, on considère une famille λ_t de formes de Liouville pour ω_t. Les difféomorphismes $\phi_t^\pm$ se relèvent en difféomorphismes des symplectisations de $\xi_t^\pm$ d'après la proposition 2.2. On trouve ainsi une famille de difféomorphismes ψ_t comme dans la preuve de la proposition 2.7 tels que $\psi_t^* \lambda_t = \lambda_0$ près de ∂W. Le reste de la démonstration est identique à celle de la proposition 2.7 et fournit les difféomorphismes ϕ_t voulus (prolongeant $\phi_t^\pm$ sur $\partial_\pm W$; en particulier, on peut prendre $\phi_t = \mathrm{id}$ sur $\partial_\pm W$ si $\xi_t^\pm$ est constante). □

Complétion idéale Étant donné un cobordisme de Liouville (W, ω), on peut obtenir sa *complétion idéale* en attachant des morceaux des symplectisations idéales de $\partial_- W$ et $\partial_+ W$. Voici une autre construction utile.

Proposition 2.10. *Soit (W, ω) un cobordisme de Liouville, λ une forme de Liouville, X son champ de Liouville dual et $u : W \setminus \partial_+ W \to [0, +\infty[$ une fonction telle que $\{u = 0\}$ soit une équation régulière de $\partial_- W$ et telle que $-\frac{1}{u}$ s'étende de façon C^∞ à $\partial_+ W$ et s'y annule transversalement. Alors $u\lambda$ est une forme de Liouville adaptée (à $\mathrm{d}(u\lambda)$) si et seulement si $u + X.u > 0$. Dans ce cas, le champ de Liouville dual de $u\lambda$ est égal à $\frac{u}{u+X.u} X$.*

Démonstration. Il suffit de voir à quelle condition $\mathrm{d}(u\lambda)$ est symplectique dans $\operatorname{int} W$. Le résultat découle alors du calcul suivant :

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}(u\lambda))^n &= u^n \omega^n + n u^{n-1}\, \mathrm{d}u \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1} \\ &= u^{n-1}(u + X.u)\omega^n\end{aligned}$$

(car $0 = X \lrcorner (\mathrm{d}u \wedge \omega^n) = (X.u)\omega^n - n\, \mathrm{d}u \wedge \lambda \wedge \omega^{n-1}$).
On vérifie que le champ $\frac{u}{u+X.u} X$ est $\mathrm{d}(u\lambda)$-dual de $u\lambda$:

$$\frac{u}{u + X.u} X \lrcorner\, \mathrm{d}(u\lambda) = \frac{u}{u + X.u}((X.u)\lambda + u X \lrcorner\, \mathrm{d}\lambda) = u\lambda.$$

□

Comme l'espace des fonctions u satisfaisant les conditions de la proposition 2.10 et l'espace des champs de Liouville de (W, ω) sont tous deux convexes, le cobordisme de Liouville idéal obtenu est indépendant de ces choix en vertu de la proposition 2.9, on l'appellera la *complétion idéale* de (W, ω).

Réciproquement, étant donné un cobordisme de Liouville idéal, (W, ω), λ une forme de Liouville et u une fonction comme dans la proposition 2.10. Alors un calcul semblable à celui ci-dessus montre que $\frac{\lambda}{u}$ définit une structure de Liouville (ordinaire) si et seulement si $u - X.u > 0$.

Équivalence et composition des cobordismes de Liouville idéaux Un difféomorphisme entre deux cobordismes de Liouville idéaux qui est symplectique dans l'intérieur (ce qu'on abrègera par symplectomorphisme) induit des difféomorphismes de contact sur les bords inférieurs et supérieurs d'après la dernier point de la proposition 2.4. On dira que deux cobordismes de Liouville idéaux de (M, ξ) vers (M', ξ') sont *équivalents* s'il existe un tel symplectomorphisme induisant l'identité sur M et M' ; on notera $\sim$ cette relation d'équivalence.

Soit (W, ω) et (W', ω') deux cobordismes de Liouville idéaux avec $\partial_+ W = \partial_- W' = (M, \xi)$. Pour les composer, on choisit des champs de Liouville X et X' respectivement sur W et W' (on note aussi $\lambda = X \lrcorner \omega$ et $\lambda' = X' \lrcorner \omega'$) et cela fournit, pour toute forme de contact α de (M, ξ), des voisinages colliers :

$$i : M \times [-1, 0] \to W, \quad i' : M \times [0, 1] \to W'$$

avec $i^* \lambda = r\alpha$ et $i'^* \lambda' = -\frac{1}{r}\alpha$.

On définit alors $W'' = W \setminus i(M \times]-1, 0]) \cup W' \setminus i'(M \times [0, 1[)/\sim$ où la relation d'équivalence $\sim$ identifie $i(M \times \{-1\})$ et $i'(M \times \{1\})$ par l'identité. Il existe alors une unique structure de variété différentiable sur W'' compatible avec celles de $W \setminus i(M \times]-1, 0])$ et de $W' \setminus i'(M \times [0, 1[)$ et telle que la fonction égale $-\frac{1}{r}$ sur W et à r sur W' se recollent en une fonction C^∞. De plus, W'' hérite d'une forme de Liouville prolongeant celles de W et W', c'est un cobordisme de Liouville idéal.

En fait, on peut définir directement W'' en collant $W \setminus \partial_+ W$ et $W' \setminus \partial_- W'$ le long des ouverts images des plongements canoniques $S_\xi M \to W$ et $S_\xi M \to W'$ (définis par les champs de Liouville), si bien que le choix de la forme de contact α n'importe pas. La description précédente assure que cette composition correspond bien à celle employée au chapitre précédent si l'on oublie les structures symplectiques.

On montre maintenant que la composition est indépendante du choix des champs de Liouville. Si X_0 et X_1 sont deux champs de Liouville sur W, ils définissent deux plongements $i_0, i_1 : S_\xi M \to W$. Bien qu'il n'existe pas toujours un difféomorphisme symplectique $\phi : W \to W$ tel que $\phi \circ i_0 = i_1$, c'est le cas d'après la proposition 2.7 et la remarque 2.8 si l'on se restreint à des colliers compacts $S_\xi M^{\leqslant \alpha}$ pour une forme de contact α de (M, ξ). C'est alors clair par la première description de la composition que la classe d'équivalence de W'' est indépendante du choix des champs de Liouville (voir aussi la proposition 2.16 plus loin). On notera $W \odot W'$ cette classe d'équivalence.

Les propriétés suivantes de la composition sont immédiates.

Proposition 2.11. *1. La classe d'équivalence de la composition de deux cobordismes de Liouville idéaux (W, ω) et (W', ω') ne dépend que des classes d'équivalence de (W, ω) et de (W', ω').*

2. Si (W, ω) est un cobordisme de Liouville idéal de (M, ξ) vers (M', ξ'), alors $1_{(M,\xi)} \odot W \sim W$ et $W' \odot 1_{(M',\xi')} \sim W'$.

3. La composition des cobordismes de Liouville idéaux est associative sur les classes d'équivalence.

Ces propriétés justifient la définition suivante.

Définition 2.12. *La* catégorie des cobordismes de Liouville idéaux *est la catégorie dont les objets sont les variétés de contact et les morphismes sont les classes d'équivalence de cobordismes de Liouville idéaux.*

C'est l'occasion d'ouvrir une petite parenthèse sur la notion de pseudo-isotopie symplectique.

Définition 2.13. *Une pseudo-isotopie symplectique d'une variété de contact (M, ξ) est un difféomorphisme symplectique de $\overline{\mathrm{S}_\xi M}$ induisant l'identité sur le bord inférieur. Le difféomorphisme de contact induit sur le bord supérieur est alors dit symplectiquement pseudo-isotope à l'identité.*

Pour jouer avec ces définitions, on peut démontrer les propositions suivantes. L'énoncé suivant est tautologique.

Proposition 2.14. *Soient (M, ξ) une variété de contact close et $\phi : M \to M$ un difféomorphisme de contact. Le cobordisme de Liouville idéal $\overline{\mathrm{S}_\xi M}$ muni des identifications* id *sur ∂_- et ϕ sur ∂_+ est équivalent au cobordisme trivial $1_{(M,\xi)}$ si et seulement si ϕ est symplectiquement pseudo-isotope à l'identité.*

En particulier, lorsqu'on compose deux cobordismes de Liouville, on utilise un difféomorphisme de contact pour identifier les bords que l'on doit coller mais le résultat ne dépend que de la classe de pseudo-isotopie symplectique de ce difféomorphisme.

Proposition 2.15. *Un difféomorphisme de contact isotope à l'identité est symplectiquement pseudo-isotope à l'identité.*

Démonstration. Soit ϕ_t, $t \in [0, 1]$, une isotopie de contact avec $\phi_0 = \mathrm{id}$. Soit $\widetilde{\phi}_t$ son relevé hamiltonien à $\mathrm{S}_\xi M$ (voir la proposition 2.2), on tronque son hamiltonien près du bord inférieur : le temps 1 de l'isotopie hamiltonienne obtenue est une pseudo-isotopie symplectique convenant. □

Composition infinie de cobordismes de Liouville idéaux Soit (W_i, ω_i), $i \in \mathbb{Z}$, une suite de cobordismes de Liouville idéaux avec

$$\partial_- W_i = \partial_+ W_{i-1} = (M_i, \xi_i).$$

On souhaite construire la composition infinie

$$\cdots \odot W_{-2} \odot W_{-1} \odot W_0 \odot W_1 \odot W_2 \odot \cdots .$$

On choisit des champs de Liouville X_i sur W_i. On peut construire par récurrence des formes de contact α_i pour (M_i, ξ_i) de sorte que les colliers de Liouville $M_i \times [0,1] \to W_i$ et $M_{i+1} \times [-1,0] \to W_i$ soient disjoints (on choisit α_0 arbitrairement, puis on prend α_1 assez grande, etc, puis on choisit α_{-1} assez petite, etc). On peut alors construire la composition infinie comme précédemment en collant les $W_i \setminus (M_i \times]-1,0] \cup M_{i+1} \times [0,1[)$ le long des M_i et on obtient une variété symplectique munie d'un champ de Liouville complet. Alternativement, on peut coller directement les $W_i \setminus (M_i \cup M_{i+1})$ le long des plongements canoniques des $\mathrm{S}_{\xi_i} M_i$ et il y a une identification canonique entre les deux constructions. De plus, la variété sous-jacente est bien la composition infinie employée au chapitre précédent.

Proposition 2.16. *La composition infinie des cobordismes de Liouville idéaux ne dépend pas du choix des champs de Liouville à symplectomorphisme exact près.*

Démonstration. Soient λ_i et λ_i' deux formes de Liouville pour (W_i, ω_i) (on note X_i et X_i' les champs de Liouville associés). La proposition 2.7 fournit des difféomorphismes $\phi_i : W_i \to W_i$ vérifiant $\phi_i^* \lambda_i' = \lambda_i + \mathrm{d}h_i$ avec $h_i = 0$ au voisinage de M_i et de M_{i+1}. On choisit une forme de contact α_0 pour (M_0, ξ_0). Il existe alors une forme de contact α_1 de (M_1, ξ_1) assez grande pour que X_0 et $\phi_0^* X_0'$ coïncide sur le voisinage collier $M_1 \times [-1,0]$ pour la forme de contact α_1. Sur W_1, les colliers de Liouville définis par les champs X_1 et $\phi_1^* X_1'$ ne coïncident pas nécessairement jusqu'à la section α_1, mais on peut y remédier grâce à la remarque 2.8 en remplaçant ϕ_1 par un autre difféomorphisme ϕ_1'. On construit ensuite α_2 assez grande pour que X_1 et $(\phi_1')^*(X_1')$ coïncide sur le collier $M_2 \times [-1,0]$ définis par la forme de contact α_2, etc. On procède de même pour construire les formes de contact α_i pour $i < 0$.

Les difféomorphismes ϕ_i' se recollent alors en un difféomorphisme symplectique exact entre les deux compositions infinies construites avec les champs X_i et X_i'. □

On a également les propriétés immédiates suivantes.

Proposition 2.17. 1. *La composition infinie des cobordismes idéaux ne dépend à symplectomorphisme exact près que de la classe d'équivalence de chaque cobordismes.*

2. *La composition infinie est associative, on peut introduire des parenthèses à loisir.*
3. *La composition infinie*

$$\cdots \odot 1_{(M,\xi)} \odot 1_{(M,\xi)} \odot 1_{(M,\xi)} \odot \cdots$$

est exact symplectomorphe à $\mathrm{S}_{\tilde{\xi}} M$.

Produit de domaines de Liouville idéaux Si (W_1, ω_1) et (W_2, ω_2) sont deux domaines de Liouville idéaux, on peut en former le produit de la façon suivante. On choisit des formes de Liouville adaptées λ_1 et λ_2, puis on considère le produit $W_1 \setminus \partial_+ W_1 \times W_2 \setminus \partial_+ W_2$ que l'on munit de la forme de Liouville $\lambda_1 + \lambda_2$. La compactification idéale de cette variété est alors un domaine de Liouville idéal (à bord sans coins).

Exemples de cobordismes de Liouville idéaux Dans les exemples suivants, on donne la forme symplectique ω sous la forme $\mathrm{d}\lambda$ et on note X le champ dual de λ. La proposition 2.10 permet de voir rapidement que ω est symplectique dans l'intérieur et permet de calculer X.

Exemple 2.18. 1. *On a déjà défini la symplectisation idéale* $\overline{\mathrm{S}_{\tilde{\xi}} M}$ *d'une variété de contact. En choisissant une équation* α *de* ξ*, on peut en donner le modèle suivant : sur* $M \times [0,1]$*,* r *désignant la coordonnée de* $[0,1]$

$$\lambda = \frac{r}{1-r}\alpha, \quad X = r(1-r)\frac{\partial}{\partial r}.$$

2. *L'espace vectoriel symplectique* $\mathbb{R}^{2n}$ *se compactifie en un domaine de Liouville idéal dont le bord est la sphère* S^{2n-1} *munie de sa structure de contact standard. On peut le modéliser par le disque* D^{2n} *avec, notant* (r_i, θ_i) *les coordonnées multipolaires et* $r^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2$*,*

$$\lambda = \frac{1}{2(1-r^2)} \sum_{i=1}^n r_i^2 \, \mathrm{d}\theta_i, \quad X = (1-r^2)\frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r}.$$

3. *Le fibré cotangent* $\mathrm{T}^* M$ *muni de la forme symplectique canonique se compactifie en un domaine de Liouville idéal dont le bord est le fibré cotangent en sphères* $\mathrm{S}\,\mathrm{T}^* M$ *muni de sa structure de contact standard. Notant* $\rho : \mathrm{T}^* M \to \mathbb{R}$ *une fonction norme au carré pour une métrique donnée sur le fibré vectoriel* $\mathrm{T}^* M \to M$*, on peut choisir sur* $\mathrm{D}\,\mathrm{T}^* M = \{\rho \leqslant 1\}$*,*

$$\lambda = \frac{1}{1-\rho}\lambda_{\mathrm{can}}, \quad X = (1-\rho)X_{\mathrm{can}}$$

où λ_{can} *est la forme de Liouville canonique de* $\mathrm{T}^* M$.

4. *Le fibré cotangent stabilisé* $\mathrm{T}^* M \times \mathbb{R}^{2k}$ *est le produit des deux exemples précédents. On peut considérer* $\mathrm{D}(\mathrm{T}^* M \times \mathbb{R}^{2k}) = \{\rho + r^2 \leqslant 1\}$ *(avec les notations des deux exemples précédents) muni de*

$$\lambda = \frac{1}{1-\rho-r^2}(\lambda_{\mathrm{can}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \,\mathrm{d}\theta_i), \quad X = (1-\rho-r^2)(X_{\mathrm{can}} + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r})$$

2.3 Procédé infini de Mazur

Définition 2.19. *Un cobordisme de Liouville idéal* (W, ω) *de* (M, ξ) *vers* (M', ξ') *est* inversible *s'il existe un cobordisme de Liouville idéal* (W', ω') *de* (M', ξ') *vers* (M, ξ) *tel que* $W \odot W' \sim 1_{(M,\xi)}$ *et* $W' \odot W \sim 1_{(M',\xi')}$.

Autrement dit, il existe un cobordisme de Liouville idéal de (M, ξ) vers (M', ξ') si et seulement si (M, ξ) et (M', ξ') sont isomorphes dans la catégorie des cobordismes de Liouville idéaux.

On peut maintenant donner une démonstration rapide du théorème suivant qui est l'analogue symplectique des propositions 1.3 et 1.5.

Théorème 2.20. 1. *Soient* (M, ξ) *et* (M', ξ') *deux variétés de contact closes, sont équivalents :*

   (a) $\mathrm{S}_\xi M$ *et* $\mathrm{S}'_\xi M'$ *sont exact symplectomorphes ;*

   (b) *Il existe un cobordisme de Liouville idéal inversible* (W, ω) *de* (M, ξ) *vers* (M', ξ').

2. *Soit* (V, ω) *et* (V', ω') *deux domaines de Liouville idéaux, sont équivalents :*

   (a) *Les intérieurs de* (V, ω) *et de* (V', ω') *sont exact symplectomorphes ;*

   (b) *Il existe un cobordisme de Liouville idéal inversible* W *tel que* $V \odot W \sim V'$.

Démonstration. 1. $(a) \Rightarrow (b)$: Soit $\phi\colon \mathrm{S}_\xi M \to \mathrm{S}_{\xi'} M'$ un symplectomorphisme exact, on a $\phi^* \lambda_{\xi'} = \lambda_\xi + \mathrm{d} f$. Soit α une section de $\mathrm{S}_\xi M$. Puisque le volume symplectique de $\mathrm{S}_\xi M^{\leqslant \alpha}$ est fini alors que celui de $\mathrm{S}_\xi M^{\geqslant \alpha}$ est infini, ϕ envoie nécessairement le bout convexe sur le bout convexe et le bout concave sur le bout concave. Par compacité, on trouve alors une section α' de $\mathrm{S}_{\xi'} M'$ telle que $\phi(\mathrm{S}_\xi M^{\leqslant \alpha}) \subset \mathrm{S}_{\xi'} M'^{<\alpha'}$. Alors $W = \mathrm{S}_{\xi'} M'^{\leqslant \alpha'} \cap \phi(\mathrm{S}_\xi M^{\geqslant \alpha})$ est un cobordisme de M à M'. Il existe une fonction $\rho\colon W \to [0,1]$ avec $\rho = 0$ près de M' et $\rho = 1$ près de M ; on munit W de la 1-forme $\lambda' = \lambda'_\xi - \mathrm{d}(\rho \cdot f \circ \phi^{-1})$, c'est un cobordisme de Liouville de (M, ξ) vers (M', ξ'). On considère ensuite une section β de $\mathrm{S}_\xi M$ telle que $\mathrm{S}\, M'^{\leqslant \alpha'} \subset \phi(\mathrm{S}\, M^{<\beta})$, et la région $W' = \mathrm{S}_{\xi'} M'^{\geqslant \alpha'} \cap \phi(\mathrm{S}_\xi M^{\leqslant \beta})$ munit de même d'une forme de Liouville λ' coïncidant avec $\lambda_{\xi'}$ près de M' et avec $\phi_* \lambda_\xi$ près de M. Le cobordisme de Liouville $W \odot W'$ est

alors équivalent à $1_{(M,\xi)}$. On construit de même un inverse à gauche pour W.
$(b) \Rightarrow (a)$: On pose $W_{2j} = W$ et $W_{2j+1} = W'$ pour $j \in \mathbb{Z}$, et on écrit ($\simeq$ désignant des symplectomorphismes exacts) :

$$\mathrm{S}_{\xi} M \simeq \bigodot_{j\in\mathbb{Z}} W_{2j} \odot W_{2j+1} \simeq \bigodot_{i\in\mathbb{Z}} W_i \simeq \bigodot_{j\in\mathbb{Z}} W_{2j-1} \odot W_{2j} \simeq \mathrm{S}_{\xi'} M'.$$

2. $(a) \Rightarrow (b)$: On construit W de façon analogue au cas précédent.
$(b) \Rightarrow (a)$: On écrit :

$$V \simeq V \bigodot_{j\in\mathbb{N}} W_{2_j} \odot W_{2j+1} \simeq V \odot W \bigodot_{j\in\mathbb{N}} W_{2j+1} \odot W_{2j+2} \simeq V'.$$

□

Remarque 2.21. *Noter que la notion de symplectomorphisme exact a un sens pour l'intérieur d'un cobordisme de Liouville au vu de la proposition 2.7. Dans le deuxième point du théorème ci-dessus, on peut remplacer symplectomorphisme exact par symplectomorphisme car tout symplectomorphisme de l'intérieur d'un domaine de Liouville idéal est isotope parmi les symplectomorphismes à un symplectomorphisme exact (voir [CE12] p.238). On ne sait pas ce qu'il en est pour le premier point (en présence d'un bord concave).*

Deux variétés de contact ayant des symplectisations exact symplectomorphes sont donc isomorphes dans la catégorie des cobordismes de Liouville idéaux. Aucun invariant fonctoriel de cette catégorie ne peut les distinguer, en particulier :

— L'homologie de contact de deux variétés de contact ayant des symplectisations exact symplectomorphes sont isomorphes.
— L'homologie symplectique de deux domaines de Liouville idéaux dont les intérieurs sont exact symplectomorphes sont isomorphes (ceci a déjà été observé par McLean dans sa thèse, voir [Mcl08] p.33-39).

Afin que le théorème 2.20 ait un quelconque intérêt, il faudrait répondre à la question suivante.

Question 2.22. *Les cobordismes de Liouville idéaux inversibles sont-ils tous triviaux ?*

Chapitre 3

Cobordismes de Weinstein

On introduit dans ce chapitre les cobordismes de Weinstein qui sont des cobordismes de Liouville particuliers. Leur étude mêle la théorie de Morse et la géométrie symplectique. Les résultats sont tirés du livre de Cieliebak et Eliashberg [CE12] même si on s'en écarte parfois légèrement dans la présentation.

Sommaire

3.1 Définitions et propriétés **52**
3.2 Cobordisme de Weinstein élémentaire **58**
3.3 Isotopie des sphères descendantes et montantes **61**
3.4 Chemins de traversée de $\mathcal{F}^1_\omega$ **62**

3.1 Définitions et propriétés

Dans un cobordisme de Liouville, l'existence d'un champ de Liouville transverse au bord apporte peu d'information car on ne contrôle pas sa dynamique dans l'intérieur du cobordisme. Cependant, si l'on fait l'hypothèse que ce champ est un pseudo-gradient pour une fonction de Morse, on va voir que la géométrie est beaucoup plus simple. La notion suivante apparait pour la première fois dans [EG91].

Définition 3.1. *Soit (W, ω) un cobordisme de Liouville de dimension $2n$. Une fonction f sur W est ω-*convexe *s'il existe un champ de Liouville X pseudo-gradient pour f. Un cobordisme (W, ω) est dit* de Weinstein *s'il admet une fonction de Morse ω-convexe.*

Si f est une fonction ω-convexe et X un pseudo-gradient de Liouville pour f, alors la forme de Liouville $\lambda = X \lrcorner \omega$ induit une forme de contact sur les niveaux réguliers de f. Comme l'espace des champs de Liouville pseudo-gradients de f est un convexe, la structure de contact induite sur les niveaux de f est bien définie à un choix contractile près.

Comme au chapitre précédent, on considérera de préférence des *cobordismes de Weinstein idéaux*, c'est-à-dire qu'on demande au champ de Liouville pseudo-gradient d'être adapté à ∂W (comme dans le modèle 2.1). On note $\mathcal{F}_\omega$ l'espace des fonctions ω-convexes sur un cobordisme de Weinstein idéal (W, ω). Comme au premier chapitre $\mathcal{F}^0_\omega = \mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}_\omega$ et $\mathcal{F}^1_\omega = \mathcal{F}^1 \cap \mathcal{F}_\omega$ sont les strates de codimension 0 et 1 de l'espace $\mathcal{F}_\omega$.

Remarque 3.2. *Le groupe des difféomorphismes symplectiques agit sur $\mathcal{F}_\omega$ mais on n'a pas d'analogue de la proposition 1.11 : les niveaux de f portent un feuilletage caractéristique qui n'a aucune raison d'être stable par perturbation. La méthode des chemins élémentaires de Cerf ne semble donc pas adaptée à cette situation et on doit la remplacer par des lemmes de déformations des champs de Liouville (comme dans [CE12] chapitre 12).*

On va revenir maintenant sur les exemples du chapitre précédent et les caractériser en termes de fonctions ω-convexes.

Symplectisation idéale La symplectisation idéale d'une variété de contact (M, ξ) est un cobordisme de Weinstein idéal. Considérons le modèle

$$(M \times [0,1], \omega = \mathrm{d}\lambda)$$

où $\lambda = \frac{r}{1-r}\alpha$, α est une équation de ξ et r est la coordonnée de $[0,1]$. La fonction r est ω-convexe avec pour pseudogradient $X = r(1-r)\frac{\partial}{\partial r}$ (dual de λ) ; elle n'a pas de point critique.

Proposition 3.3. *Un cobordisme de Weinstein idéal (W, ω) admettant une fonction ω-convexe sans point critique est symplectomorphe à une symplectisation idéale.*

Démonstration. Soit X un champ de Liouville pseudo-gradient pour une fonction ω-convexe sans point critique. Notant (M, ξ) le bord inférieur de W et α une équation de ξ, on cherche un difféomorphisme $M \times [0,1] \to W$ avec $\phi^*\lambda = \frac{r}{1-r}\alpha$, égal à l'identité sur $M \times \{0\}$. On peut définir ϕ de manière unique au voisinage de $M \times \{0\}$ d'après le chapitre précédent (voir la démonstration de la proposition 2.4) et puisque toutes les trajectoires de X rentrent dans ce voisinage en temps négatif assez grand, ϕ se prolonge en un difféomorphisme symplectique $\phi : M \times [0,1[\to W \setminus \partial_+ W$. Ce difféomorphisme se prolonge automatiquement à $M \times \{1\}$ car la compactification idéale est canonique (voir le début de la section 2.2.2). □

Disque L'espace vectoriel symplectique standard $\mathbb{R}^{2n}$ se compactifie en un domaine de Weinstein idéal dont le bord supérieur est la sphère standard. On peut prendre pour modèle le disque D^{2n} muni de la forme symplectique $\omega_{\mathrm{std}} = \mathrm{d}\lambda_{\mathrm{std}}$ avec

$$\lambda_{\mathrm{std}} = \frac{1}{2(1-r^2)} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \, \mathrm{d}\theta_i$$

(en coordonnées multipolaires (r_i, θ_i)).

La fonction $r^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2$ est ω_{std}-convexe avec le champ de Liouville

$$X_{\mathrm{std}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{1-r_i^2} \frac{\delta}{\partial r_i}$$

(dual de λ_{std}) pour pseudo-gradient ; elle possède un seul point critique (un minimum non dégénéré en l'origine). On a la caractérisation suivante.

Proposition 3.4. *Un domaine de Weinstein idéal W de dimension $2n$ qui admet une fonction ω-convexe avec un seul point critique (nécessairement un minimum) est symplectomorphe à $(\mathrm{D}^{2n}, \omega_{\mathrm{std}})$.*

Démonstration. Soit f une fonction ω-convexe, X un pseudo-gradient de Liouville pour f et p le point critique de f. Dans un premier temps, on va déformer X au voisinage de p parmi les pseudo-gradients de Liouville pour f de sorte qu'il soit conjugué au modèle du disque (D^{2n}, ω) près de 0. Le théorème de Darboux fournit un difféomorphisme $\phi : \mathrm{Op}(p) \subset W \to \mathrm{Op}(0) \subset \mathrm{D}^{2n}$ avec $\phi^*\omega_{\mathrm{std}} = \omega$. Le champ $\phi^* X_{\mathrm{std}}$ est pseudo-gradient de f sur $\mathrm{Op}(p)$ (car le champ radial est pseudo-gradient pour toute forme quadratique définie positive). D'après le lemme de Poincaré, il existe une fonction $h : \mathrm{Op}(p) \to \mathbb{R}$ telle que $\phi^* X_{\mathrm{std}} - X = X_h$. On pose alors

$$Z = X + X_{\rho h}$$

où ρ est une fonction de la forme $\chi \circ f$ avec $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égale à 1 sur $[f(p), f(p) + \varepsilon]$ et égale à 0 sur $[f(p) + 2\varepsilon, +\infty[$ (avec $\varepsilon > 0$ assez petit). On peut réécrire Z sous la forme

$$Z = X + \rho X_h + hX_\rho = (1 - \rho)X + \rho\phi^* X_{\text{std}} + hX_\rho$$

Puisque $X_\rho.f = 0$, le champ de Liouville Z est encore un pseudo-gradient de f et il coïncide avec $\phi^* X_{\text{std}}$ près de p. Noter que en posant $Z_t = X + X_{t\rho h}$ on trouve une homotopie de X vers Z parmi les pseudo-gradients de Liouville de f.

Enfin, on prolonge le difféomorphisme ϕ de sorte que $\phi^*(X_{\text{std}}) = Z$ (cela détermine ϕ de manière unique), cela fournit un difféomorphisme symplectique $W \to \mathrm{D}^{2n}$. □

La propriété fondamentale des fonctions ω-convexes est la suivante.

Proposition 3.5. *Soit (W, ω) un cobordisme de Weinstein, $f \in \mathcal{F}_\omega$, p un point critique non-dégénéré ou de naissance et X un pseudo-gradient de Liouville pour f. Alors la variété stable (resp. instable) de p pour le champ X est isotrope (resp. coisotrope).*

En particulier, les points critiques d'une fonction ω-convexe sont d'indices inférieurs ou égaux à n. Puisque la variété stable est tangente à X, son intersection avec les niveaux de f est isotrope pour la structure de contact $\ker(X \lrcorner \omega)$. Voici un énoncé d'algèbre linéaire qui explique bien le phénomène.

Lemme 3.6. *Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et X un champ de Liouville linéaire. On note respectivement E^0, E^+ et E^- la somme des sous-espaces caractéristiques de X de valeurs propres de parties réelles respectivement nulles, strictement positives et strictement négatives. Alors $E^0 \oplus E^-$ est isotrope et E^+ est coisotrope.*

Démonstration. Comme X est un champ de Liouville, pour $v, w \in E$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\omega(e^{tX}v, e^{tX}w) = e^t \omega(v, w).$$

Si $v, w \in E^- \oplus E^0$, le terme de gauche est un $O(t^d)$ quand t tend vers $+\infty$ pour un certain $d > 0$, alors que le terme de droite est exponentiel ; c'est donc que $\omega(v, w) = 0$. Ainsi $E^- \oplus E^0$ est isotrope.

L'orthogonal symplectique de E^+, noté $E^{+,\perp}$, est invariant par le flot (en effet, E^+ est invariant et ω est conformément invariante). Puisque ω est non-dégénérée et $E^- \oplus E^0$ est isotrope, on a

$$E^{+,\perp} \cap (E^- \oplus E^0) = \{0\}.$$

Ainsi l'endomorphisme induit par X sur le sous-espace stable $E^{+,\perp}$ n'a que des valeurs propres de parties réelles strictement positives, et $E^{+,\perp}$ est inclus dans E^+. □

Par une déformation au voisinage d'un point critique, on peut toujours se ramener à une situation modèle (linéaire).

Lemme 3.7. *Soit (W, ω) une variété symplectique, f une fonction ω-convexe et p un point critique non-dégénéré d'indice k de f, et X un pseudo-gradient de Liouville pour f. Il existe une homotopie (X_t, f_t), $t \in [0,1]$ partant de (X, f) avec un point critique non-dégénéré en p, les mêmes variétés stables et instables près de p et telle que (ω, X_1, f_1) soit conjugué au modèle suivant d'un voisinage de 0 de $\mathrm{T}^* \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$*

$$\omega_{\mathrm{std}}, \quad X_{\mathrm{std}} = 2p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r}, \quad f_{\mathrm{std}} = -q^2 + p^2 + r^2$$

avec les notations usuelles.

Démonstration. Puisque les espaces stables/instables du champ X_0 sont isotropes/coisotropes, on peut trouver un symplectomorphisme local $\mathrm{Op}(p) \subset W \to \mathrm{Op}(0) \subset \mathrm{T}^* \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$ qui envoie les variétés stables et instables locales de p respectivement sur $\{p = 0, r = 0\}$ et $\{q = 0\}$. Ensuite, par interpolation, on déforme f au voisinage de 0 de sorte que les espaces $\{p = q = 0\}$, $\{p = r = 0\}$ et $\{q = r = 0\}$ soient deux à deux orthogonaux pour la hessienne de f (on réduit les coefficients hors de la diagonale de la hessienne de f). Ensuite, on a Ainsi le champ $\phi_* X_{\mathrm{std}}$ est pseudo-gradient de f au voisinage de 0. Il s'agit alors de déformer X sur $\phi^* X_{\mathrm{std}}$ près de p. Pour simplifier les notations, on suppose dans la suite que ϕ est égal à l'identité (c'est-à-dire qu'on identifie un voisinage de p et un voisinage de 0 via ϕ).

D'après le lemme de Poincaré, on a $X_{\mathrm{std}} = X + X_h$ où h est une fonction avec $\mathrm{d}h(0) = 0$ et $h(0) = 0$ (quitte à lui ajouter une constante). On cherche maintenant une fonction plateau ρ égale à 1 près de 0 et telle que le champ

$$Z = X + X_{\rho h}$$

soit pseudo-gradient de f. On calcule :

$$Z.f = (1-\rho)X.f + \rho X_{\mathrm{std}}.f + hX_\rho.f = (1-\rho)X.f + \rho X_{\mathrm{std}}.f - hX_f.\rho$$

Puisque X et X_{std} sont pseudo-gradients pour f près de 0, il existe $r_0 > 0$ et $C > 0$ tel que pour $v \in \mathrm{T}^* \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$ avec $\|v\| \leqslant r_0$, on ait

$$\|X.f\|(v) \geqslant C\|v\|^2, \quad \|X_{\mathrm{std}}.f\|(v) \geqslant C\|v\|^2.$$

Il suffit donc de construire ρ à support dans la boule de rayon r_0 et telle que $\|hX_f.\rho\|(v) \leqslant \frac{C}{2}\|v\|^2$ pour $\|v\| \leqslant r_0$.

L'argument suivant est tiré de [GP14] p.23-24. On cherche ρ sous la forme $\chi(\|v\|)$ avec $\chi : [0, r_0] \to [0, +\infty[$ et $\chi(r_0) = 0$. Puisque $h(v) = O(\|v\|^2)$ et $X_f(v) = O(\|v\|)$, en réduisant éventuellement le rayon r_0, on peut trouver $A > 0$ tel que pour tout v tel que $\|v\| \leqslant r_0$,

$$\|h(v)X_f.\rho(v)\| \leqslant A\chi'(\|v\|)\|v\|^3.$$

La contrainte sur χ' s'écrit alors $t|\chi'(t)| \leqslant \frac{C}{2A}$ pour $t \in [0, r_0]$, en intégrant, on trouve $\chi(t) \leqslant \frac{C}{2A} \ln(\frac{r_0}{t})$. Il est clair que l'on peut trouver une fonction χ valant 1 près de 0 et satisfaisant cette inégalité (car $\ln(r_0/t) \underset{t\to 0}{\to} +\infty$). On peut de plus déformer X vers Z via $Z_t = (1-t)X + tZ$.

Enfin par interpolation, on peut déformer f sur f_{std} près de 0 avec Z pour pseudo-gradient fixe. □

Cotangent et cotangent stabilisé La complétion idéale $\mathrm{D}\,\mathrm{T}^* M$ du fibré cotangent $\mathrm{T}^* M$ d'une variété close M est un domaine de Weinstein complété. Le champ de Liouville standard X_{std} (radial dans les fibres) est pseudo-gradient pour n'importe quelle fonction ρ égale à la norme au carré dans les fibres pour une métrique quelconque sur le fibré $\mathrm{T}^* M \to M$. Cependant la fonction ρ n'est pas de Morse (elle est de Morse-Bott avec la section nulle pour sous-variété critique). On peut la modifier en une fonction de Morse ω-convexe de la façon suivante. On choisit une fonction de Morse $g : M \to \mathbb{R}$ et on pose

$$f = g \circ \pi + \rho,$$

où $\pi : \mathrm{T}^* M \to M$ est la projection. On peut construire un champ de Liouville X pseudo-gradient pour f et coïncidant avec X_{std} à l'infini. Pour cela, on choisit un pseudo-gradient Y pour g et on considère son relevé hamiltonien $\tilde{Y}$ à $\mathrm{T}^* M$ (comme dans la proposition 2.2). On calcule alors :

$$\begin{aligned}(X_{\text{std}} + \tilde{Y}).f &= X_{\text{std}}.(g \circ \pi) + X_{\text{std}}.\rho + \tilde{Y}.(g \circ \pi) + \tilde{Y}.\rho \\ &= 2\rho + (Y.g) \circ \pi + \mathrm{d}\rho(\tilde{Y})\end{aligned}$$

Dans chaque fibre, la fonction $\mathrm{d}\rho(\tilde{Y}) + 2\rho$ est une forme quadratique, et, si Y est assez petit (en norme C^1), celle-ci est définie positive auquel cas $(X_{\text{std}} + \tilde{Y}).f > 0$ en dehors de la section nulle. En un point de la section nulle, il y a deux cas :

— Y ne s'annule pas : $X_{\text{std}}.f = Y.\psi > 0$;
— Y s'annule : la hessienne de $(X_{\text{std}} + \tilde{Y}).f$ est diagonale dans la décomposition $\mathrm{T}\,\mathrm{T}^* M = \mathrm{T}^* M \oplus \mathrm{T}\,M$, et chaque terme diagonal est défini positif.

Ainsi $X_{\text{std}} + \tilde{Y}$ est bien un pseudo-gradient de f. On remarque aussi que X_{std} est pseudo-gradient de f hors d'un compact, donc on peut interpoler entre $X_{\text{std}} + \tilde{Y}$ et X_{std} près d'une hypersurface $\{f = c\}$ pour c assez grand, de façon à obtenir un champ de Liouville X, pseudo-gradient de f et coïncidant avec X_{std} hors d'un compact.

La complétion idéale $\mathrm{D}(\mathrm{T}^* M \times \mathbb{R}^{2n})$ du fibré cotangent stabilisé est également un domaine de Weinstein idéal, on prend simplement pour fonction ω-convexe la somme des deux fonctions ω-convexes de chaque facteur décrites précédemment.

En fait, on peut caractériser ces deux exemples de la manière suivante.

Proposition 3.8. *Soit W un domaine de Weinstein idéal de dimension $2n$ admettant une fonction ω-convexe et un pseudo-gradient de Liouville X pour lequel l'union des variétés stables des points critiques est une sous-variété isotrope close L de dimension k à fibré normal symplectique trivial. Alors W est symplectomorphe à* $\mathrm{D}(\mathrm{T}^* L \times \mathbb{R}^{2(n-k)})$.

Démonstration. D'après le théorème de voisinage tubulaire de Weinstein, il existe un symplectomorphisme

$$\phi : \mathrm{Op}(L) \subset \mathrm{T}^* L \times \mathbb{R}^{2(n-k)} \to \mathrm{Op}(L) \subset W$$

induisant l'identité sur L. On peut supposer en plus que, en chaque point critique x de f, les variétés stables et instables de X coïncide via ϕ avec $\mathrm{T}_x L$ et $\mathrm{T}_x^* L \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$. En utilisant le lemme 3.7, on peut déformer f et X pour les rendre standards près des points critiques.

Il s'agit maintenant de construire un champ de Liouville Z coïncidant avec $Y = \phi^* X_{\mathrm{std}}$ près de L et avec X hors d'un voisinage de L. Après cela, on pourra prolonger le germe de ϕ près de L (de manière unique) en un symplectomorphisme $W \to \mathrm{D}(\mathrm{T}^* L \times \mathbb{R}^{2(n-k)})$ satisfaisant $\phi^* X_{\mathrm{std}} = Z$ (car toutes les trajectoires de X rentrent dans un voisinage de L en temps négatif assez grand). Pour simplifier les notations, on suppose que $\phi = \mathrm{id}$.

Notons que $X \lrcorner \omega$ et $X_{\mathrm{std}} \lrcorner \omega$ s'annulent sur $\mathrm{T} L$, donc le lemme de Poincaré relatif (voir [Lau12] p.46) fournit une fonction $h : \mathrm{Op}(L) \to \mathbb{R}$ telle que

$$X = X_{\mathrm{std}} + X_h.$$

Pour construire le champ Z, il suffit alors de construire un voisinage tubulaire (assez petit) T de L tel que X et Y pointent à l'extérieur de T le long de ∂T. En effet, si $\{u = 0\}$ est une équation transverse de ∂T, on pose

$$Z = Y + X_{\chi h},$$

où $\chi = \kappa \circ u$ et $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction valant 0 sur $]-\infty, -\varepsilon]$ et 1 sur $[\varepsilon, +\infty[$ (avec ε assez petit). Le champ Z ainsi défini près de ∂T est une interpolation entre le champ X_{std} d'un côté et le champ X de l'autre.

Pour achever la démonstration, voici comment construire le tube T. On choisit une métrique sur le fibré $\mathrm{T} L \times \mathbb{R}^{2(n-k)} \to L$ de la forme $g + r^2$ où g est une métrique sur $\mathrm{T}^* L$ égale à p^2 près des points critiques de f (cela se construit avec une partition de l'unité) et r^2 est la métrique standard sur $\mathbb{R}^{2(n-k)}$. Notant $\rho : \mathrm{T}^* L \times \mathbb{R}^{2(n-k)} \to [0, +\infty[$ la fonction norme au carrée associée, on a $X.\rho > 0$ près des points critiques, mais cette inégalité n'a pas de raison d'être valable ailleurs. On remplace alors la métrique $g + r^2$ par $k(g + r^2)$ avec $k : L \to]0, +\infty[$ si bien que

$$X.(k\rho) = kX.\rho + \rho X.k,$$

et l'inégalité $X.(k\rho) > 0$ est satisfaite dès que $\frac{X.k}{k}$ est assez grand. Par exemple, la fonction $k = e^{Cf}$ convient pour $C > 0$ assez grand. Les champs X et X_{std} sont alors transverses sortants des tubes $\{\rho \leqslant \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. $\square$

3.2 Cobordisme de Weinstein élémentaire

On discute ici les cobordismes de Weinstein élémentaires, c'est-à-dire admettant une fonction ω-convexe avec un seul point critique (attention, le mot élémentaire a un autre sens dans [CE12], voir p.203). A la suite du travail d'Eliashberg sur les variétés de Stein (voir [Eli90]), Weinstein a présenté dans [Wei91] un modèle d'attachement d'anse permettant de construire de tels cobordismes et de réaliser ainsi des opérations de chirurgie sur les variétés de contact.

Soit (W^{2n}, ω) un cobordisme de Weinstein élémentaire partant de (M, ξ) et $f \in \mathcal{F}^0_\omega$ présentant un seul point critique et d'indice k. La nappe descendante, pour un champ de Liouville X pseudo-gradient pour f, du point critique est un disque isotrope D de dimension k dont le bord S est isotrope dans (M, ξ). Le fibré normal symplectique $\mathrm{T}\,D^\perp / \mathrm{T}\,D$ de D dans (W, ω), admet une trivialisation canonique (à un choix contractile près) et celle-ci induit une trivialisation du fibré normal symplectique $\mathrm{T}\,S^\perp / \mathrm{T}\,S$ de S dans (M, ξ) (où $\perp$ désigne ici l'orthogonal dans ξ). Après une déformation de (X, f) au voisinage de D, on peut modéliser un voisinage de D de la façon suivante.

Dans l'espace $(\mathbb{R}^{2n} = \mathrm{T}^*\,\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)}, \omega_{k,\text{std}} = \sum_{i=1}^k \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i + \sum_{j=1}^{n-k} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}y_j)$, on considère la fonction

$$f_{k,\text{std}} = \sum_{i=1}^{k}(-q_i^2 + p_i^2) + \sum_{j=1}^{n-k}(x_j^2 + y_j^2),$$

pour laquelle le champ de Liouville

$$X_{k,\text{std}} = \sum_{i=1}^{k}(-q_i\frac{\partial}{\partial q_i} + 2p_i\frac{\partial}{\partial p_i}) + \sum_{j=1}^{n-k}\frac{1}{2}(x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + y_j\frac{\partial}{\partial y_j})$$

est un pseudo-gradient.

Le disque de dimension k

$$D^k_{\text{std}} = \{q_1^2 + \cdots + q_k^2 \leqslant 1, q_{k+1} = \cdots = q_n = 0, \forall i, p_i = 0, \forall j, x_j = 0, y_j = 0\}$$

est isotrope et son bord S^{k-1}_{std} est isotrope dans l'hypersurface de contact $\{f_{k,\text{std}} = -1\}$. Les vecteurs $(\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{\partial}{\partial q_j})$, $1 \leqslant j \leqslant n-k$ fournissent une base symplectique du fibré normal symplectique de D^k_{std} et de S^{k-1}_{std}.

Pour se ramener à ce modèle, on utilise dans un premier temps le lemme suivant (avec les notations ci-dessus).

Lemme 3.9. *Il existe un difféomorphisme* $\psi : \mathrm{Op}(S^{k-1}_{\mathrm{std}}) \subset \{f_{k,\mathrm{std}} \geqslant -1\} \to \mathrm{Op}(S) \subset W$ *tel que* $\psi(\{f_{st} = -1\}) = \partial_- W$, $\psi(S^{k-1}_{\mathrm{std}}) = S$, $\psi^*(X) = X_{k,\mathrm{std}}$, $\psi^*\omega = \omega_{k,\mathrm{std}}$, $\psi|S$ *s'étend en un difféomorphisme* $D^k_{\mathrm{std}} \to D$ *et* ψ *respecte les trivialisations canoniques des fibrés normaux symplectiques de* S *et* S^{k-1}_{std}.

Démonstration. Soit $\psi : \mathrm{D}^k_{\mathrm{std}} \to D$ un difféomorphisme. Le théorème de voisinage tubulaire pour une sous-variété isotrope dans une variété munie d'une forme de contact (voir par exemple [Gei08] p.294-296) fournit un difféomorphisme $\psi : \mathrm{Op}(S^{k-1}_{\mathrm{std}}) \subset \{\psi_{k,\mathrm{std}} = -1\} \to \mathrm{Op}(S) \subset \partial_- W$ vérifiant $\psi^*\alpha = \alpha_{k,\mathrm{std}}$ (ici, α est la forme de contact sur (M, ξ) induite par $X \lrcorner \omega$ et de façon analogue pour $\alpha_{k,\mathrm{std}}$) et tel que ψ envoie la trivialisation du fibré normal symplectique de S^{k-1}_{std} sur celle de S. On prolonge ensuite ψ à un voisinage de S dans $\{f_{k,\mathrm{std}} \geqslant -1\}$ de façon unique en satisfaisant $\psi_* X_{k,\mathrm{std}} = X$. □

Ensuite, on peut prolonger le difféomorphisme ψ fournit par le lemme ci-dessus à un voisinage de D^k_{std} de sorte que $\psi(D^k_{\mathrm{std}}) = D$ en utilisant le théorème de voisinage tubulaire de Weinstein. De plus, en choisissant convenablement le difféomorphisme ψ sur D^k_{std}, on peut aussi supposer que $\psi^* f_{k,\mathrm{std}}$ et $g \circ f_k$ coïncident pour un certain $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ difféomorphisme croissant (c'est-à-dire que ψ envoie les niveaux de f sur ceux de $f_{k,\mathrm{std}}$).

On peut alors déformer (X, f) au voisinage de D pour qu'ils coïncident avec $\psi_*(X_{k,\mathrm{std}}, f_{k,\mathrm{std}})$ (voir la proposition 12.14 p.265 de [CE12]) et on est ainsi ramené au modèle. Enfin, si deux structures de Weinstein coïncident au voisinage de $D \cup \partial_- W$, on peut déformer l'une sur l'autre en utilisant une isotopie de W qui rétracte W dans un voisinage de $\partial_- W \cup D$ (on a déjà utilisé ce genre d'arguments pour les propositions 3.4 et 3.8).

A partir d'une variété de contact (M, ξ) et d'un plongement isotrope

$$g\colon \mathrm{S}^{k-1} \to (M, \xi)$$

muni d'une trivialisation (symplectique) de son fibré normal symplectique, on peut construire un cobordisme élémentaire en collant un voisinage de D^k_{std} (on parle d'attachement d'une *anse de Weinstein*). On renvoie à [Wei91] pour plus de détails. Le cobordisme élémentaire obtenu ne dépend que de la classe d'isotopie du plongement et de la classe d'homotopie de la trivialisation du fibré normal symplectique. On peut consulter [GP14] p.22-24 pour un énoncé général sur l'unicité de l'attachement d'une anse de Weinstein.

Exemple 3.10. 1. *L'attachement d'une anse d'indice* 1 *permet de réaliser la somme connexe le long du bord supérieur de deux cobordismes de Weinstein. Le bord supérieur est difféomorphe à la somme connexe des deux bords supérieurs et hérite d'une structure de contact. Ceci permet de définir la somme connexe de deux variétés de contact.*

2. *Étant donné un nœud legendrien dans* S^3 *muni de sa structure de contact standard, on peut attacher une anse de Weinstein d'indice* 2 *le long de ce nœud. La trivialisation du fibré normal correspondante diffère de la trivialisation de Seifert de* $\mathrm{tb}-1$ *où* tb *est l'invariant de Thurston-Bennequin du nœud (voir [Gei08] p.299). Les inégalités de Bennequin (portant sur les invariants formels* tb *et* rot*, voir le chapitre suivant) établissent ainsi des restrictions à réaliser certaines chirurgies topologiques par des chirurgies de contact.*
3. *Une sphère d'attachement isotrope de dimension* $k-1 \leqslant n-1$ *est dite* triviale *si elle contenue dans une boule de Darboux* $B \subset \mathrm{J}^1\,\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{2(n-k)}$ *avec la structure de contact* $\ker(\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\,\mathrm{d}q_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-k} x_j\,\mathrm{d}y_j - y_j\,\mathrm{d}x_j)$ *dans laquelle son front est donnée par l'équation*

$$z = \pm(\|q\|^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$$

(c'est-à-dire que $p_i = \frac{\partial z}{\partial q_i}$, $x_j = 0$, $y_j = 0$*) (voir la figure 3.1). Les vecteurs* $(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j})$, $1 \leqslant j \leqslant n-k$ *fournissent une trivialisation de son fibré normal symplectique.*
On peut voir aussi cette sphère isotrope S^{k-1} *dans* S^{2n-1} *comme l'intersection avec un k-plan isotrope. Pour* $k < n$*, cette sphère borde un disque isotrope dans* S^{2n-1} *(l'intersection avec un demi-espace isotrope* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k$*) et puisque tous les disques isotropes sont isotopes (via une rétraction sur leur centre) cela caractérise dans ce cas la sphère isotrope triviale.*

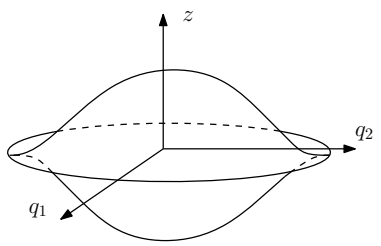

FIGURE 3.1 – Le front d'une sphère isotrope triviale avec $k = 2$

Proposition 3.11. *Le cobordisme de Weinstein élémentaire (idéal) correspondant à l'attachement d'une anse de Weinstein le long d'une sphère isotrope triviale à une variété de contact* (M, ξ) *est symplectomorphe à la somme connexe le long du bord supérieur de* $\overline{\mathrm{S}_\xi M}$ *et de* $\mathrm{D}(\mathrm{T}^* S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)})$.

Esquisse de démonstration. Le résultat de l'attachement d'une anse de Weinstein triviale à une boule D^{2n} est le cotangent stabilité $\mathrm{D}(\mathrm{T}^*\,\mathrm{S}^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)})$. En effet, la sphère d'attachement est isotope à une sphère équatoriale obtenue comme l'intersection d'un plan isotrope avec la sphère et la proposition 3.8 permet de conclure.

En général, on peut voir le cobordisme trivial $\overline{\mathrm{S}_\xi M}$ comme la somme connexe le long du bord supérieur de $\overline{\mathrm{S}_\xi M}$ et de D^{2n} (en faisant naître une paire de points critiques d'indice 0 et 1, voir le lemme de naissance 3.17 plus loin) et le résultat découle du point précédent. □

3.3 Isotopie des sphères descendantes et montantes

Soit (M, ξ) une variété de contact, $\mathrm{S}_\xi M$ sa symplectisation et X son champ de Liouville standard. Si ϕ_t est une isotopie de contact de (M, ξ), on tronque son relevé hamiltonien $\widetilde{\phi}_t$ en une isotopie ψ_t de sorte qu'elle soit égale à l'identité près de ∂_+ et égale à $\widetilde{\phi}_t$ près de ∂_-. L'holonomie

$$M = \partial_+ \mathrm{S}_\xi M \to \partial_- \mathrm{S}_\xi M = M$$

du champ $X_t = (\psi_t)_* X$ est alors égale à ϕ_t. Si f est une fonction ω-convexe sur $\mathrm{S}_\xi M$ avec X pour pseudo-gradient, alors $f_t = f \circ \psi_t^{-1}$ est ω-convexe avec X_t pour pseudo-gradient. Enfin, puisque X_t est égal à X près de ∂_+ et de ∂_-, on peut y déformer f_t sur f en poussant les niveaux selon les trajectoires de leur pseudo-gradient commun X. Cette discussion aboutit à l'énoncé suivant.

Lemme 3.12. *Soit ϕ_t une isotopie de contact de (M, ξ) et f une fonction ω-convexe sur $\mathrm{S}_\xi M$ de pseudo-gradient X. Il existe une homotopie (f_t, X_t) à support compact telle que $(f_0, X_0) = (f, X)$, f_t est ω-convexe sans point critique, X_t est Liouville pseudo-gradient de f_t et l'holonomie $\partial_+ \to \partial_-$ de X_t est égale à ϕ_t.*

Ceci permet de bouger les sphères montantes et descendantes par des isotopies de contact des niveaux. On l'utilisera seulement pour les sphères descendantes pour lesquelles on a le résultat suivant.

Proposition 3.13. *Soit L une variété compacte, (M, ξ) une variété de contact et $j_t \colon L \to (M, \xi)$ une isotopie de plongements isotropes. Alors il existe une isotopie de contact $\phi_t : M \to M$ telle que $j_t = \phi_t \circ j_0$.*

Démonstration. On rappelle que les champs de contact sont en correspondance bijective avec les sections de $\mathrm{T}M/\xi$ par projection sur le quotient (voir [Thu97] p.175-176). Concrètement, si α est une équation de ξ, on trivialise $\mathrm{T}M/\xi \simeq \mathbb{R}$ et un champ de contact X est décrit par une fonction h par les équations

$$\begin{cases} \alpha(X) = h \\ (X \lrcorner \, \mathrm{d}\alpha)_{|\xi} = -(\mathrm{d}h)_{|\xi} \end{cases}.$$

L'isotopie j_t fournit un champ de vecteur X_t le long de $j_t(L)$ défini par $X_t \circ j_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} j_t$. On cherche une fonction h_t définie près de $j_t(L)$ dont le champ

de contact associé prolonge X_t. La fonction h_t est prescrite sur L par la première équation : $h_t = \alpha(X_t)$. Il s'agit de voir que la deuxième condition est compatible avec la première, cela provient du fait que j_t est isotrope :

$$j_t^* \alpha = 0,$$

donc, en dérivant par rapport à t, on obtient, pour tout $v \in \mathrm{T}\, L$,

$$0 = (X_t \lrcorner\, \mathrm{d}\alpha)(v) + \mathrm{d}(X_t \lrcorner \alpha)(v) = (X_t \lrcorner\, \mathrm{d}\alpha)(v) + \mathrm{d}h_t(v).$$

Ainsi, on peut construire un champ de contact qui prolonge X_t, d'abord sur un voisinage de $j_t(L)$ (il s'agit de construire une fonction dont la différentielle est prescrite sur ξ le long de $j_t(L)$), puis sur M en le tronquant par 0 hors d'un voisinage tubulaire de $j_t(L)$. L'isotopie ϕ_t engendrée par ce champ de contact vérifie alors $j_t = \phi_t \circ j_0$. □

Lemme 3.14. *(voir le lemme 12.18 de [CE12]). Soit (W, ω) un cobordisme de Weinstein idéal, $f \in \mathcal{F}^0_\omega$ et X un pseudo-gradient de Liouville pour f. Soit p un point critique de f et D^- la nappe descendante de p jusqu'à un niveau régulier N. N'importe quelle isotopie isotrope de ∂D^- dans N peut être réalisée par une homotopie (X_t, f_t) avec $f_t \in \mathcal{F}^0_\omega$.*

Démonstration. La démonstration consiste à implanter le modèle décrit plus haut, pour cela on a besoin d'un peu de place. On commence par pousser les niveaux de f le long des trajectoires de X de sorte que, notant $a < b$ les valeurs critiques entourant N, la région $f^{-1}[a, b]$ contienne le support compact de la déformation du lemme 3.12. On peut alors implanter cette déformation (en identifiant cette région à un morceau de symplectisation). □

Remarque 3.15. *Noter que la forme symplectique reste fixe dans le lemme 3.14. En revanche les niveaux de f sont largement déplacés. En topologie, ce phénomène n'apparait pas : on peut toujours bouger les nappes par isotopie sans changer la fonction par des isotopies "horizontales". Le problème ici est qu'il n'y a pas assez d'isotopies horizontales symplectiques (à cause du feuilletage caractéristique sur les niveaux). Dans [CE12] p.256-257, on trouve un énoncé un peu différent où la fonction est fixe mais la forme symplectique varie (avec structure de contact fixée sur les niveaux).*

3.4 Chemins de traversée de $\mathcal{F}^1_\omega$

On explique ici les analogues ω-convexes des lemmes de traversée de $\mathcal{F}^1$ énoncés au chapitre 1. On se donne dans toute la suite un cobordisme de Weinstein idéal (W, ω) ainsi qu'une fonction $f \in \mathcal{F}^0_\omega$.

Lemme 3.16 (Croisement, ω-convexe)**.** *Soient p et q deux points critiques de valeurs critiques consécutives avec $f(p) > f(q)$ et X un champ de Liouville pseudo-gradient pour f. On considère, dans un niveau intermédiaire N, la sphère montante S^+ de q et la sphère descendante (isotrope) S^- de p.*

1. *S^- est isotope à une sphère disjointe de S^+ parmi les sphères isotropes si et seulement s'il existe un chemin f_t, $t \in [0,1]$, de croisement des valeurs critiques de p et q.*
2. *Deux tels chemins de croisement f_t et f'_t, $t \in [0,1]$, sont homotopes à origine fixe parmi les chemins de croisement si et seulement si l'isotopie isotrope (canonique à un choix contractile près) entre les sphères descendantes S_- et S'_- juste avant le croisement peut être déformée relativement à ses extrémités en une isotopie isotrope dans le complémentaire de S^+. (On précisera cet énoncé au cours de la démonstration).*

Démonstration. 1. Soit t_0 l'instant du croisement. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $t_0 - \varepsilon \leqslant t < t_0$, la sphère descendante S^-_t (pour le champ X_t) est disjointe de la sphère montante S^+_t (car il n'y a pas de trajectoires entre q et p pour le champ X_{t_0}) dans une famille N_t de niveaux intermédiaires pour f_t. Par stabilité de Gray, on peut supposer que N_t est une variété de contact fixe et que S^+_t est fixe (elle varie par isotopie de contact). Ainsi, S^-_t définit une isotopie isotrope de S^- vers une sphère isotrope disjointe de S^+.

Réciproquement, étant donnée une isotopie isotrope de S^- qui la disjoint de S^+, on peut la réaliser par le lemme 3.14 en une homotopie (X_t, f_t), $t \in [0,1]$, avec $f_t \in \mathcal{F}^0_\omega$ (sans accident). On peut alors trouver un chemin de fonction (f_t, X_1), $t \in [1,2]$, qui descend la valeur critique de p plus bas que celle de q en utilisant un lemme de descente d'une valeur critique (voir les références après l'énoncé du lemme 1.20).

2. S'il existe une famille $(X_{t,s}, f_{t,s})$, $s, t \in [0,1]$, de chemins de croisements avec $f_{t,0} = f_t$ et $f_{t,1} = f'_t$. Quitte a reparamétrer les chemins, on peut supposer que le croisement a lieu à l'instant $t = t_0$ pour tout ces chemins. Notons $N_{t,s}$ une famille de niveaux intermédiaires pour $f_{t,s}$, $t < t_0$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $t_0 - \varepsilon \leqslant t < t_0$, la sphère descendante $S^-_{t,s}$ est disjointe de la sphère montante $S^+_{t,s}$. Comme précédemment, par stabilité de Gray, on peut supposer $N_{t,s}$ fixe et $S^+_{t,s}$ fixe. On observe alors une isotope isotrope $S^-_{t,s}$, $s \in [0,1]$ dans le complémentaire de S^+.

   Réciproquement, avec les mêmes notations que ci-dessus, l'isotopie $S^-_{t,0}$ de $t = t_0 - \varepsilon$ jusque $t = 0$ concaténée avec $S^-_{t,1}$ de $t = 0$ jusque $t = t_0 - \varepsilon$ est un chemin de sphères isotropes à extrémités disjointes de S^+. On suppose que ce chemin est homotope relativement à ses extrémités à un chemin de sphères isotropes disjointes de S^+. Par le lemme 3.14 (en fait, une version à 1 paramètre de ce lemme), on construit $(X_{t,s}, f_{t,s})$ pour $s \in [0,1], t \in [0, t_0 - \varepsilon]$ comme ci-dessus. On peut ensuite descendre la valeur critique de p pour $f_{t_0-\varepsilon,s}$ en dessous de celle de q par une version à 1 paramètre d'un lemme de descente d'une valeur critique, cela définit le chemin $(f_{t,s}, X_{t_0-\varepsilon,s})$, $t \in [t_0 - \varepsilon, 1]$, $s \in [0,1]$. On a ainsi

obtenue une homotopie de f_t vers f'_t parmi les chemins de croisement. □

Lemme 3.17 (Naissance, ω-convexe)**.** *Soit N un niveau régulier et $0 \leqslant k \leqslant n-1$.*

1. *Il existe un chemin de naissance d'une paire de points critiques d'indices k et $k+1$ dans un niveau N si et seulement si N est non vide.*
2. *Deux tels chemins sont homotopes parmi les chemins de naissance si et seulement si les points de naissance sont dans la même composante connexe de N.*

Démonstration. Les implications directes sont immédiates, on va montrer les implications réciproques.

1. On renvoie à la proposition 12.21 p.267-268 de [CE12].
2. Notant $f_{t,0}$ et $f_{t,1}$ les deux chemins de naissance et t_0 l'instant (supposé le même) de la naissance, on choisit un chemin dans N (supposé fixe comme dans la démonstration du lemme précédent) joignant les points de naissances de f et une version à 1 paramètre de la proposition 12.21 de [CE12] (la preuve s'y adapte sans difficulté) permet de construire une famille $f_{t,s}$ de fonctions ω-convexes avec $f_{t_0,s}$ ayant un point de naissance décrivant dans N le chemin choisi.

□

Lemme 3.18 (Mort, ω-convexe)**.** *Soient p et q deux points critiques d'indice $k+1$ et k de valeurs critiques consécutives avec $f(p) > f(q)$, X un champ de Liouville pseudo-gradient pour f. On considère, dans un niveau intermédiaire N, la sphère descendante S^- du point p et la sphère montante S^+ du point q.*

1. *S^- est isotope parmi les sphères isotropes dans N à une sphère isotrope intersectant S^+ en un seul point et transversalement si et seulement s'il existe un chemin de mort f_t, $t \in [0,1]$, des points critiques p et q.*
2. *Deux tels chemins de mort f_t et f'_t, $t \in [0,1]$, sont isotopes si et seulement si l'isotopie (canonique à un choix contractile près) entre les sphères descendantes S^- et S'^- juste avant la mort peut-être réalisée parmi les sphères isotropes intersectant S^+ en un seul point et transversalement.*

La démonstration du lemme 3.18 est analogue à celle du lemme 3.16 où l'on remplace le lemme de descente d'une valeur critique par un lemme d'élimination de points critiques d'une fonction ω-convexe (voir la proposition 12.22 p.268 de [CE12]).

On remarque que, comme dans le cas topologique, dans une position d'élimination les anses sont trivialement attachées.

Lemme 3.19. *Soit (W, ω) un cobordisme de Weinstein idéal de dimension $2n$. Soit p et q deux points critiques d'indice respectifs $k+1$ et k de valeurs critiques consécutives ($f(q) < f(p)$) d'une fonction $f \in \mathcal{F}^0_\omega$ qui peuvent être éliminés par un chemin de fonctions ω-convexes. Alors l'anse de Weinstein de q est trivialement attachée. En particulier, un niveau intermédiaire N est contactomorphe à la somme connexe (de contact) du niveau juste en dessous de q avec $\partial \mathrm{D}(\mathrm{T}^* S^k \times \mathbb{R}^{2(n-k)})$.*

Esquisse de démonstration. Soit X un champ de Liouville pseudo-gradient pour f standard près du point critique q et tel que, dans N, la sphère descendante S^- de p et la sphère montante S^+ de q s'intersectent transversalement. Alors l'adhérence de la variété stable de p descendant jusqu'à un niveau M juste en dessous de q est un demi-disque isotrope plongé dont le bord horizontal est un disque isotrope Δ dans M et le bord vertical est la nappe descendante de q (voir le lemme 9.30 de [CE12] p.205). Le bord de Δ est la sphère descendante Σ^- de q et la trivialisation naturelle du fibré normal symplectique de Σ^- est celle induite par Δ (car Δ est homotope à la nappe descendante du point q parmi les disque isotropes, en déformant le bord horizontal du demi-disque vers son bord vertical). Ainsi, l'anse de Weinstein du point q est trivialement attachée (voir le troisième point de l'exemple 3.10. □

Chapitre 4

Flexibilité des cobordismes de Weinstein flexibles

Ce chapitre commence par une présentation de résultats de flexibilité concernant les plongements isotropes dans les variétés de contact dus à Gromov et Murphy. On explique ensuite comment Cieliebak et Eliashberg en déduisent la flexibilité d'une certaine classe de structures de Weinstein (dites *flexibles*, à juste titre). On discute enfin les structures de Weinstein flexibles sur les h-cobordismes en vue des applications au chapitre suivant.

Sommaire

4.1 H-principe pour les plongements isotropes **68**
4.2 Structures de Weinstein flexibles avec fonction fixée **73**
4.3 Des fonctions aux fonctions ω-convexes **75**
4.4 Le théorème de flexibilité de Cieliebak et Eliashberg **78**
4.5 H-cobordismes de Weinstein flexibles **78**

4.1 H-principe pour les plongements isotropes

Soit (M, ξ) une variété de contact et L une variété. Un plongement $g\colon L \to M$ est *isotrope* si $\mathrm{d}g(\mathrm{T}\,L) \subset \xi$. L'analogue *formel* de cette notion est un couple (g, G_s) où $g : L \to M$ est un plongement (pas nécessairement isotrope) et $G_s : \mathrm{T}\,L \to \mathrm{T}\,M$, $s \in [0,1]$, est une famille (continue) de monomorphismes de fibrés au-dessus de g avec $G_0 = \mathrm{d}g$ et G_1 isotrope (c'est-à-dire $G_1(\mathrm{T}\,L) \subset \xi$ et $G_1(\mathrm{T}\,L)$ est isotrope dans ξ pour sa structure symplectique conforme). On commence par quelques commentaires sur cette notion.

Remarque 4.1. *La notion de plongement isotrope formel a un sens dans une variété* presque-contact *(l'analogue formel d'une variété de contact), c'est-à-dire une variété M munie d'un champ d'hyperplans ξ et d'une 2-forme non dégénérée $\xi \times \xi \to \mathrm{T}\,M/\xi$. Par exemple, si W est une variété munie d'une 2-forme non dégénérée ω, Σ une hypersurface de W et L une sous-variété ω-isotrope et transverse à Σ. Alors, à des choix contractiles près, Σ a une structure presque-contact (choisir un champ d'hyperplans ξ supplémentaires au feuilletage caractéristique de Σ) et $L \cap \Sigma$ est formellement isotrope ($L \cap \Sigma$ est transverse au feuilletage caractéristique, donc on peut projeter ses espaces tangents sur ξ). On y reviendra dans la section suivante.*

On trouve une classification des plongements legendriens formels dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ dans l'appendice de [Mur12]. On va discuter ici le cas plus modeste de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure de contact standard. On commence par étendre la définition des invariants de Maslov et de Thurston-Bennequin pour les nœuds legendriens formels (plongement de S^1). Dans une trivialisation (canonique à homotopie près) de ξ le long de g, l'application G_1 définit une application de Gauss $L \to S^1$ (vecteur tangent unitaire) dont le degré est l'invariant de Maslov (c'est un entier si L est orienté, sinon seule sa valeur absolue est bien définie). Quant à l'invariant de Thurston-Bennequin, on peut le définir ainsi. On choisit un chemin d'automorphismes A_s, $s \in [0,1]$, de $g^*\,\mathrm{T}\,Y$ tels que $G_s = A_s \circ \mathrm{d}g$ et $A_0 = \mathrm{id}$. Si v une section de $g^*\,\mathrm{T}\,Y$ transverse à ξ, alors $A_1^{-1}v$ définit une section du fibré normal de g. L'invariant de Thurston-Bennequin est alors l'enlacement de g avec g poussé dans la direction de $A^{-1}(v)$. Ceci ne dépend pas du choix de A_s car si B_s est un autre tel chemin d'automorphismes, alors $A_s^{-1}B_s$ est un chemin d'automorphismes égal à id pour $s = 0$ et satisfaisant $A_s^{-1}B_s(\mathrm{d}g(\mathrm{T}\,L)) = \mathrm{d}g(\mathrm{T}\,L)$ et on peut le déformer vers le chemin constant égal à l'identité parmi les chemins ayant ces propriétés.

Proposition 4.2. *Deux nœuds legendriens formels dans $\mathbb{R}^3$ sont isotopes si et seulement s'ils sont isotopes comme plongements et ont mêmes invariants de Maslov et de Thurston-Bennequin. De plus, on a toujours la relation*

$$\mathrm{tb} + \mathrm{rot} = 1 \mod 2$$

et pour chaque classe d'isotopie de plongement, tous les couples $(\mathrm{tb}, \mathrm{rot})$ *satisfaisant cette relation sont réalisés par des nœuds legendriens formels.*

L'application $g \mapsto (g, \mathrm{d}g)$ induit une application de l'espace $\mathcal{P}$ des plongements isotropes dans l'espace $\mathcal{P}^{\text{formel}}$ des plongements isotropes formels (munis de la topologie C^∞) ; on s'intéresse aux propriétés homotopiques de cette application dans l'esprit du h-principe.

Gromov a démontré le résultat suivant concernant le cas dit *sous-critique*.

Théorème 4.3 (Gromov). *Si (M, ξ) est une variété de contact de dimension $2n-1$ et L est une variété de dimension $k < n-1$, l'application $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^{\text{formel}}$ est une équivalence d'homotopie faible. En particulier, tout plongement isotrope formel est isotope à un vrai plongement isotrope et deux plongements isotropes formellement isotopes sont isotopes. De plus, on peut choisir les isotopies C^0-petites.*

Les conclusions du théorème ci-dessus sont fausses pour les plongements *legendriens*, c'est-à-dire de dimension $k = n-1$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, l'inégalité de Bennequin (voir [Ben83])

$$\mathrm{tb}(L) + |\,\mathrm{rot}(L)| \leqslant 2g(L) - 1,$$

où $g(L)$ est le genre minimal d'une surface de Seifert d'un nœud L, impose des restrictions sur les nœuds legendriens, c'est-à-dire que l'application $\pi_0\mathcal{P} \to \pi_0\mathcal{P}^{\text{formel}}$ n'est pas surjective. Aussi, Chekanov et Eliashberg ont construit des nœuds legendriens dans $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes invariants formels mais non isotopes (voir [Che02] et [Eli98]), c'est-à-dire que $\pi_0\mathcal{P} \to \pi_0\mathcal{P}^{\text{formel}}$ n'est pas injective.

Dans les variétés de contact de dimension $\geqslant 5$, il existe cependant une classe de plongements legendriens, dits *lâches* (*loose* en anglais) pour laquelle le h-principe est valide, c'est un résultat dû à Emmy Murphy [Mur12]. On note $\mathcal{P}_l$ l'espace des plongements lâches (voir la définition plus loin), voici l'énoncé.

Théorème 4.4 (Murphy). *Soit (M, ξ) une variété de contact de dimension $2n-1 \geqslant 5$ et L une variété de dimension $n-1$. L'application $\mathcal{P}_l \to \mathcal{P}^{\text{formel}}$ est une bijection au niveau du π_0, c'est-à-dire : tout plongement legendrien formel est isotope à un vrai plongement legendrien lâche et deux plongements legendriens lâches formellement isotopes sont isotopes.*

Avant de donner la définition des plongements legendriens lâches, on tente d'expliquer brièvement son origine. Un ingrédient principal de la démonstration du théorème 4.4 est un résultat d'Eliashberg et Mishachev concernant les plongements *ridés* (voir [Mur12] p.10). Au cours de l'application de ce résultat, on est obligé d'introduire des singularités, dont le type correspond dans une projection frontale à une queue d'aronde déployée (voir la figure 4.1). Le rôle de la carte lâche est de résoudre ces singularités pour obtenir des vrais plongements legendriens.

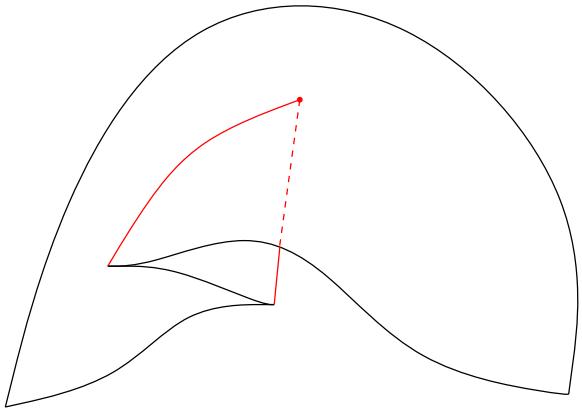

FIGURE 4.1 – La projection frontale d'une surface legendrienne ridée près d'une singularité

On décrit maintenant le modèle d'une carte lâche en suivant [CE12] p.142-143.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la forme de contact $\mathrm{d}z - p\,\mathrm{d}q$, on considère pour $a > 0$, la boîte

$$Q_a = \{|q| \leqslant 1, |p| \leqslant 1, |z| \leqslant a\}$$

et un arc λ_0 contenu dans Q_a et dont la projection frontale contient exactement un point double (où les pentes sont égales à ± 1), un cusp à droite et une corde de Reeb (voir la figure 4.2)

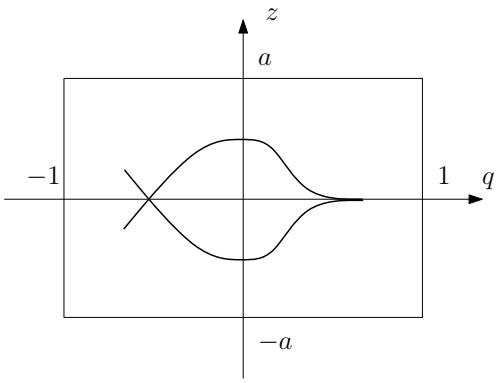

FIGURE 4.2 – Front de l'arc legendrien λ_0

On épaissit ce modèle en considérant pour $b, c > 0$,

$$R_{abc} = Q_a \times \{|q'| \leqslant b, |p'| \leqslant c\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathrm{T}^*\,\mathbb{R}^{n-2}$$

avec $(q', p') \in \mathrm{T}^*\,\mathbb{R}^{n-2}$ muni de la forme de contact $\mathrm{d}z - p\,\mathrm{d}q - \sum_{i=1}^{n-2} p'_i\,\mathrm{d}q'_i$, et la sous-variété legendrienne $\Lambda_0 = \lambda_0 \times \{p' = 0\}$ (voir la figure 4.3). La paire (R_{abc}, Λ_0) est une *carte lâche standard* si $a < bc$.

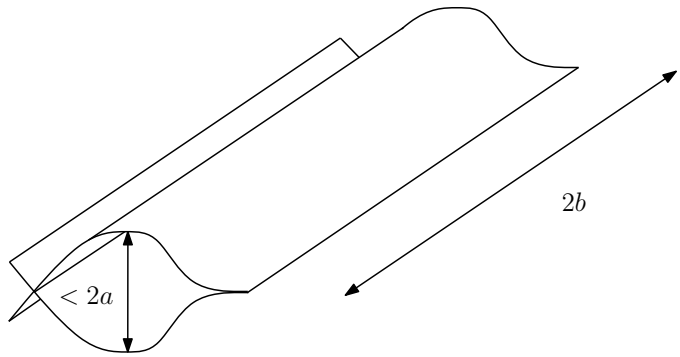

FIGURE 4.3 – Front de la sous-variété legendrienne Λ_0

Définition 4.5. *Une sous-variété legendrienne L compacte connexe d'une variété de contact (M, ξ) de dimension $\geqslant 5$ est dite* lâche *s'il existe un plongement de contact $(R_{abc}, \Lambda_0) \to (M, L)$ d'une carte lâche standard. Si L n'est pas connexe, on demande que chaque composante connexe soit lâche dans le complémentaire des autres.*

Remarque 4.6. *Dans la carte lâche standard, on peut remplacer λ_0 par un zig-zag comme sur la figure 4.4 (voir [CE12] p.144).*

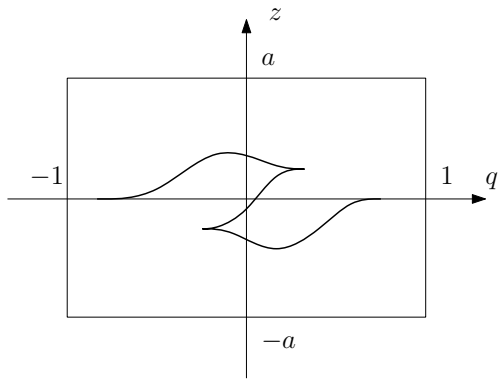

FIGURE 4.4 – Une autre possibilité pour λ_0

La figure 4.5 donne une petite idée du lien entre la carte lâche et la résolution des rides, on n'en dira pas plus et on renvoie à [Mur12].

Voici maintenant quelques exemples.

Exemple 4.7.

1. *Un disque legendrien. Puisque deux tels disques sont toujours isotopes, ils sont tous lâches.*
2. *La sphère legendrienne de $\mathbb{R}^5$ dont le front correspond à la figure 4.6.*
3. *La sphère descendante d'un point d'indice n après une naissance (voir [CE12] p.285).*

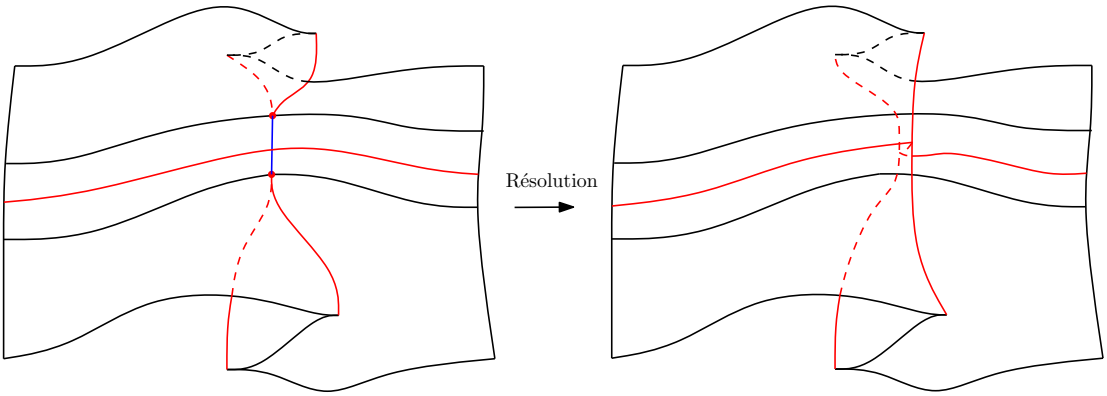

FIGURE 4.5 – Une ride renversée (à gauche) dont la résolution fait apparaître une carte lâche (à droite)

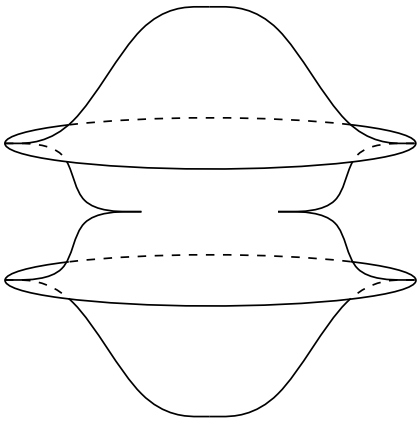

FIGURE 4.6 – Le front d'une sphère legendrienne lâche dans R^5

4. *Dans une variété vrillée de dimension $\geqslant 5$ (voir [BEM14]), toute sous-variété legendrienne dans le complémentaire d'un disque vrillé (voir [MNPS13]).*

Puis quelques non-exemples.

Exemple 4.8. 1. *Le nœud legendrien trivial dans S^5 (voir la figure 3.1). Plus généralement, tout nœud legendrien admettant un remplissage lagrangien exact. La démonstration utilise l'homologie de contact legendrienne (voir [EES05a] et [EES05b]).*

2. *Dans $\partial(D(T^*S^2 \times \mathbb{R}^2)) \simeq S^2 \times S^3$, deux copies parallèles du legendrien standard S^2 forment un entrelacs non lâches, dont chaque composante est pourtant lâche (d'après le troisième exemple ci-dessus). La démonstration utilise les résultats de [BEE12] : en attachant deux anses de Weinstein sur cet entrelacs à $D(T^*S^2 \times \mathbb{R}^2)$, on obtient DT^*S^3. Si l'entrelacs legendrien était lâche, alors*

l'homologie symplectique de $\mathrm{D}\,\mathrm{T}^*\,\mathrm{S}^3$ *devrait s'annuler d'après [BEE12], ce qui n'est pas (voir [Vit99]).*

3. *La sphère legendrienne décrite par Eliashberg dans [Eli97] p.64-66, la démonstration [Eli14] utilise également [BEE12].*

Le reste de ce chapitre s'intéresse à la notion suivante (voir [CE12] p.251).

Définition 4.9. *Une fonction de* $\mathcal{F}^0_\omega$ *sur un cobordisme de Weinstein* (W, ω) *est* flexible *si pour chaque point critique d'indice n, la sphère descendante, située dans un niveau régulier juste en dessous du point critique, est lâche. On note* $\mathcal{F}^0_{\omega,\mathrm{flex}}$ *l'espace de ces fonctions et* $\mathcal{F}_{\omega,\mathrm{flex}}$ *l'intérieur de l'adhérence de* $\mathcal{F}^0_{\omega,\mathrm{flex}}$ *dans* $\mathcal{F}_\omega$*. Un cobordisme de Weinstein est* flexible *s'il admet une fonction* $f \in \mathcal{F}^0_\omega$ *flexible.*

4.2 Structures de Weinstein flexibles avec fonction fixée

Soit W un cobordisme de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{F}^0_{\leqslant n}$. On se donne un germe de forme symplectique ω près de $\partial_- W$ pour lequel f est ω-convexe et on introduit les espaces suivants :

— Ω^{formel} : l'espace des 2-formes non-dégénérées sur W qui coïncident avec ω près de $\partial_- W$.

— Ω_f : l'espace des formes symplectiques ω sur W qui coïncident avec η près de $\partial_- W$ et pour lesquelles f est ω-convexe.

— $\Omega_{f,\mathrm{flex}}$: l'espace des $\omega \in \Omega$ avec f flexible.

Dans l'esprit du h-principe, on pose le problème suivant.

Problème 4.10. *Étudier les propriétés homotopiques de l'application* $\Omega_f \to \Omega^{\mathrm{formel}}$.

On va expliquer le résultat suivant du à Cieliebak et Eliashberg (voir [CE12] theorem 13.1 p.271-273 et lemma 14.14 p.286-287).

Théorème 4.11. *(Cieliebak-Eliashberg) Si* $2n \geqslant 6$*, avec les notations ci-dessus, l'application* $\pi_0\Omega_{f,\mathrm{flex}} \to \pi_0\Omega^{\mathrm{formel}}$ *est un isomorphisme.*

Le résultat d'existence (surjectivité sur π_0) se trouve déjà dans [Eli90] (mais la notion de flexibilité n'existait pas encore). La partie unicité (injectivité sur π_0) était connue dans le cas sous-critique, c'est-à-dire si $f \in F^0_{<n}$, (voir [EG91] theorem 1.12.C) mais le cas des points d'indice n utilise de façon cruciale le théorème 4.4 plus récent de Murphy.

En décomposant W, on se ramène au cas d'un cobordisme élémentaire d'indice $k \leqslant n$.

Existence On se donne $\omega \in \Omega^{\text{formel}}$ que l'on souhaite déformer vers Ω. L'approche suivante diffère légèrement de celle employée dans [CE12] p.150-154. On fixe un pseudo-gradient X pour f qui est de Liouville près de $\partial_- W$ et on note D la nappe descendante de l'unique point critique de f.

Au voisinage du point critique, on peut déformer ω parmi les 2-formes non-dégénérées de sorte que D soit isotrope. En effet, cela revient à se demander si l'on peut déformer tout k-plan vers un k-plan isotrope, et c'est possible car les grassmanniennes correspondantes $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^{2n})$ et $\mathrm{Gr}_k^{iso}(\mathbb{R}^{2n})$ sont connexes (en fait, on utilise seulement $\pi_0(\mathrm{Gr}_k, \mathrm{Gr}_k^{iso}) = 0$). En dessous du point critique, on trivialise W en un produit $M \times [0,1]$ ($M \times \{0\} = \partial_- W$) et D en un cylindre $S \times [0,1]$ de sorte que f soit une fonction croissante de t et X soit colinéaire à $\frac{\partial}{\partial t}$ (où t désigne la coordonnée de $[0,1]$). Dans chaque niveau $S \times \{t\}$ pour t proche de 0, la forme de Liouville $\lambda = X \lrcorner \omega$ induit une structure de contact ξ_t. On étend ξ_t pour $t \in [0,1]$ en un champ d'hyperplans dans $M \times \{t\}$ transverse au feuilletage caractéristique de $M \times \{t\}$ (donné par $\ker \omega$), c'est une structure presque-contact (bien définie à un choix contractile près). Pour t proche de 1, $S \times \{t\}$ est transverse au feuilletage caractéristique de $M \times \{t\}$ (car D est isotrope), donc en projetant sur ξ_t parallèlement à $\ker \omega$, on munit $S \times \{t\}$ d'une structure isotrope formelle canonique. On étend ensuite à $t \in [0,1]$, la structure isotrope formelle de $S \times \{t\}$. Cela définit en particulier une structure isotrope formelle pour ∂D. Le h-principe (théorèmes 4.3 et 4.4) permet alors de déformer ∂D (et $S \times \{t\}$ pour t proche de 1) en une sphère isotrope (et lâche dans le cas legendrien si on le souhaite). Ainsi D est maintenant isotrope sur un voisinage du point critique et de ∂D et on cherche à déformer ω parmi les 2-formes non-dégénérées relativement à ce voisinage de sorte que D soit partout isotrope. On le fait en deux temps : on déforme ξ_t et ω dans les tranches $M \times \{t\}$ de sorte que $S \times \{t\}$ soit isotrope dans ξ_t, puis on déforme ω de sorte que $\frac{\partial}{\partial t}$ soit ω-orthogonal à ξ_t, ainsi D est isotrope partout.

La fin de l'argument consiste à implanter le modèle de Weinstein discuté au chapitre précédent et à rétracter W sur un voisinage de $D \cup \partial_- W$.

Unicité On se donne ici une famille ω_t, $t \in [0,1]$, de Ω^{formel} avec $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$. On se donne une famille X_t de pseudo-gradients de f de Liouville et fixe près de $\partial_- W$ et de Liouville pour $t = 0, 1$. On note D_t la nappe descendante du point critique pour X_t. On suit le même raisonnement qu'au paragraphe précédent. Au point critique, on peut déformer les espaces tangents à D_t relativement à $t = 0, 1$ vers des k-plans isotropes car $\pi_1(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^{2n}), \mathrm{Gr}_k^{iso}(\mathbb{R}^{2n})) = 0$. Pour la nullité de ce groupe d'homotopie, voici un argument possible. $\mathrm{Gr}_k^{iso}(\mathbb{R}^{2n})$ est un rétracté par déformation de $\mathrm{Gr}_k^{reel}(\mathbb{C}^n)$ (les k-plans totalement réels de $\mathbb{C}^n$) et l'espace des k-plans qui contiennent une droite complexe est de codimension $\geqslant 2$ dans $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^{2n})$ par le calcul de dimension suivant :

— $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^{2n})$ est de dimension $k(2n-k)$,
— l'espace des droites complexes $\mathbb{C}P^{n-1}$ est de dimension (réelle) $2n-2$,
— l'espace des k-plans qui contiennent une droite complexe donnée est de dimension $(k-2)(2n-k)$,
— donc l'espace des k-plans qui contiennent une droite complexe est de dimension $\leqslant 2n-2+(k-2)(2n-k) = k(2n-k)-2(n-k)-2$, donc de codimension $\geqslant 2$.

Le reste de la démonstration est analogue au paragraphe précédent ; on utilise la partie injectivité sur π_0 dans les théorèmes 4.3 et 4.4 plutôt que la partie surjectivité.

4.3 Des fonctions aux fonctions ω-convexes

On se donne ici un cobordisme de Weinstein idéal (W,ω) de dimension $2n$ et on souhaite comparer les espaces $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ et $\mathcal{F}_\omega$ ainsi que leur stratification.

Problème 4.12. *Tout chemin de $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ transverse à $\mathcal{F}^1$ et d'origine dans $\mathcal{F}_\omega$ est-il homotope à un chemin de $\mathcal{F}_\omega$ parmi les chemins transverses à $\mathcal{F}^1$?*

Le problème se ramène à étudier chaque type de traversée de $\mathcal{F}^1$, à savoir croisements, naissances et morts. En analysant chacun des cas et en utilisant les théorèmes 4.3 et 4.4, on va expliquer le résultat suivant, dû à Cieliebak et Eliashberg.

Théorème 4.13. *(Cieliebak-Eliashberg) Soit W un cobordisme de Weinstein idéal flexible de dimension $2n \geqslant 6$ et $f \in \mathcal{F}^0_{\omega,\mathrm{flex}}$. Tout chemin de $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ transverse à $\mathcal{F}^1$ et d'origine f est homotope à un chemin de $\mathcal{F}_{\omega,\mathrm{flex}}$ parmi les chemins transverses à $\mathcal{F}^1$.*

Croisement

Proposition 4.14. *Soit f_t, $t \in [0,1]$, un chemin de croisement dans $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ d'origine $f \in \mathcal{F}_{\omega,\mathrm{flex}}$. Alors il existe un chemin f'_t de $\mathcal{F}^0_{\omega,\mathrm{flex}}$ d'origine f et homotope à f_t parmi les chemins de croisement d'origine f.*

Démonstration. Soit N un niveau intermédiaire entre les deux points critiques p et q ($f(p) > f(q)$) concernées par le croisement, et S^- et S^+ les sphères descendantes et montantes dans N respectivement. D'après le lemme 1.20, S^- est isotope à une sphère S'^- disjointe de S^+. La sphère S'^- est formellement isotrope et le théorème 4.3 ou 4.4 (partie surjectivité sur π_0) permet de la déformer en une vraie sphère isotrope S''^- ; de plus, dans le cas où S^- est legendrienne, on peut supposer S''^- lâche dans le complémentaire de S^+. Ensuite, toujours par les mêmes théorèmes (partie injectivité sur π_0), S^- est isotope à S''^- parmi les sphères isotropes, ce qui permet, d'après le lemme 3.16 de construire un chemin de croisement f'_t. Ce chemin sera dans $\mathcal{F}_{\omega,\mathrm{flex}}$

car, S''^{-} étant lâche dans le complémentaire de S^{+}, elle sera aussi lâche dans le complémentaire de la sphère descendante de q (car le flot du champ de Liouville fournit un contactomorphisme entre ces complémentaires). □

Remarque 4.15. *Un chemin de croisement quelconque n'est pas nécessairement flexible, voici un exemple. Soit W un cobordisme de Weinstein partant de l'union disjointe de S^5 muni de sa structure de contact standard et d'une variété vrillée M^5 (voir [BEM14]), et munie d'une fonction ω-convexe présentant dans l'ordre un point d'indice n dont la sphère descendante est le nœud legendrien trivial dans S^5 et un point d'indice 1 connectant S^5 et M^5. Cette fonction n'est pas flexible car le nœud legendrien trivial n'est pas lâche dans S^5 (voir le premier point de l'exemple 4.8). Cependant, on peut réordonner la fonction par un chemin de croisements des deux valeurs critiques si bien que la sphère descendante du point d'indice n devient lâche dans la somme connexe $S^5\#M^5$ (voir le troisième point de l'exemple 4.7). La fonction ordonnée obtenue est alors flexible. Noter que l'on peut toutefois croiser à nouveau les valeurs critiques en gardant la propriété de flexibilité et obtenir pour sphère descendante la version lâche du nœud legendrien trivial dans S^5.*

En général, l'inclusion $\mathcal{F}_{\omega,\mathrm{flex}} \to \mathcal{F}_\omega$ est donc stricte. A part cet exemple, la question importante de l'invariance de la flexibilité par homotopie (voir [CE12] p.251) est largement ouverte, notamment en ce qui concerne les croisements de points critiques d'indice n.

Remarque 4.16. *Dans le cas où le point critique le plus haut concerné par le croisement est d'indice $< n$, alors les chemins de croisement f_s fournis par la proposition 4.14 sont tous homotopes. En effet, si deux sphères isotropes dans $N \setminus S^+$ sont topologiquement isotopes dans $N \setminus S^+$ alors elles sont également isotopes parmi les sphères isotropes dans $N \setminus S^+$ en utilisant la propriété C^0-petit dans le théorème 4.3.*

Cependant dans le cas où ce point est d'indice n, on peut obtenir des chemins de croisement non homotopes, en voici un exemple. Dans la variété de contact $N = \partial\,\mathrm{D}(\mathrm{T}^*\mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}^2)$, on prend S^- et S^+ deux copies parallèles du S^2 legendrien standard. S^- est lâche dans N mais pas dans le complémentaire de S^+ (voir le non-exemple 4.8). On peut cependant obtenir une sphère legendrienne S_1^- lâche dans le complémentaire de S^+ et formellement isotope à S^- en la stabilisant. Il suit du théorème 4.4 que S^- et S_1^- sont isotopes dans N parmi les legendriennes mais pas dans le complémentaire de S^+. Les chemins de croisement associés à S^- et S_1^- par le lemme 3.16 ne sont alors pas homotopes.

Naissance

Proposition 4.17. *Soit f_t, $t \in [0,1]$, un chemin de naissance dans $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ d'origine $f \in \mathcal{F}_\omega^0$. Alors il existe un chemin f_t' de $\mathcal{F}_\omega$ d'origine f et homotope à f_t parmi les chemins de naissance dans $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ d'origine f. De plus, deux tels chemins f_t' sont toujours homotopes parmi les chemins de naissance dans $\mathcal{F}_\omega$. Si f est flexible, f_t l'est aussi.*

Démonstration. C'est une application directe des lemmes 1.21 et 3.17. La flexibilité de f'_t provient du troisième point de l'exemple 4.7. □

Mort

Proposition 4.18. *Soit f_t, $t \in [0,1]$, un chemin de mort d'origine $f \in \mathcal{F}^0_{\omega,\mathrm{flex}}$. Alors il existe un chemin f'_t de $\mathcal{F}_\omega$ d'origine f et homotope à f_t parmi les chemins de mort d'origine f. De plus, un tel chemin f'_t est toujours flexible.*

Démonstration. Soit N un niveau intermédiaire séparant la paire de points critiques d'indice k et $k+1$ concernée et S^- et S^+ les sphères descendantes et montantes dans N respectivement. D'après le lemme 1.22, S^- est isotope à une sphère S'^- en position d'élimination avec S^+. Cette sphère S'^- est formellement isotrope, on commence par la rendre isotrope près du point d'intersection avec S^+ par une isotopie restant transverse à S^+. Ensuite, par une seconde isotopie fixe près du point d'intersection avec S^+, on la rend isotrope (et lâche dans le cas legendrien), ceci est possible d'après les théorèmes 4.3 et 4.4. Enfin, la sphère isotrope obtenue est isotope à S^- (qui est lâche) parmi les sphères isotropes d'après ces mêmes théorèmes et le lemme 3.18 fournit le chemin f'_t désiré. Il est clair qu'un tel chemin f'_t est toujours flexible. □

Remarque 4.19. *Noter que d'après la proposition 4.17, si une élimination de points critiques d'indice $n-1$ et n est possible parmi les fonctions ω-convexes, alors la sphère descendante du point d'indice n est nécessairement lâche. On l'a donc supposé dans la proposition 4.18.*

Remarque 4.20. *Comme pour les croisements, dans le cas sous-critique, les chemins f'_t obtenus dans la proposition 4.18 sont tous homotopes, grâce à la propriété C^0-petit dans le théorème 4.3. Par contre dans le cas d'une paire de points critiques d'indice $n-1$ et n, existe-t-il des chemins de mort non homotopes ? Ce problème est lié à celui des pseudo-isotopies symplectiques de même que dans le cas topologique (voir [CL70]). Dans $\partial\,\mathrm{D}(\mathrm{T}^* S^2 \times \mathbb{R}^2)$, on prend $S^+ = \partial(\mathrm{T}^*_x S^2 \times \mathbb{R}^2) \simeq S^3$ et S^- le legendrien S^2 standard. S'il existe une sphère legendrienne S'^- en position d'élimination avec S^+ et formellement isotope à S^- (donc isotope) mais pas isotope à S^- parmi les sphères legendriennes en position d'élimination avec S^+, alors on peut construire un chemin f'_t de fonctions ω-convexes sur la symplectisation de S^5 d'origine une fonction sans point critique et présentant simplement une naissance d'une paire d'indice 2 et 3 puis une mort déterminée par la sphère S'^-. La fonction sans point critique obtenue est candidate pour représenter une classe de pseudo-isotopie symplectique non triviale mais topologiquement triviale. En tout cas, il ne serait pas possible de simplifier son graphique directement comme dans le lemme d'unicité des morts (voir [Cer70] p .253).*

4.4 Le théorème de flexibilité de Cieliebak et Eliashberg

En combinant les résultats des deux sections précédentes, Cieliebak et Eliashberg démontre le théorème de flexibilité suivant.

Théorème 4.21 (Cieliebak-Eliashberg)**.** *Soit (M, ξ) un variété de contact de dimension $\geqslant 5$ et (W, M, M') un cobordisme. Si deux structures de weinstein idéales* flexibles *ω et ω' induisent la structure de contact ξ sur M et sont homotopes relativement à M parmi les 2-formes non-dégénérées, alors elles sont homotopes parmi les structures de Weinstein idéales induisant la structure de contact ξ sur M.*

La démonstration se fait en deux temps. En utilisant le théorème 1.31 et le théorème 4.13 on peut trouver des fonctions f et f' respectivement ω et ω'-convexes et homotopes dans $\mathcal{F}^0$. D'après la proposition 1.11, f et f' sont isotopes, ce qui permet de déformer ω' par isotopie pour que f soit ω'-convexe. Enfin, puisque ω et ω' sont homotopes parmi les 2-formes non dégénérées et rendent la fonction f à la fois ω-convexe et ω'-convexe, on peut appliquer le théorème 4.11 pour déformer ω sur ω' relativement à $\partial_- W$. On renvoie à [CE12] p.286-288 pour plus de détails.

4.5 H-cobordismes de Weinstein flexibles

On s'intéresse ici aux structures de Weinstein flexibles sur les h-cobordismes de dimension $\geqslant 6$. On aura besoin du lemme homotopique suivant.

Lemme 4.22. *Soit W un h-cobordisme et ω une 2-forme non dégénérée définie sur un voisinage de $\partial_- W$. Alors l'espace Ω^{formel} des 2-formes non-dégénérées sur W qui coïncident avec ω sur $\mathrm{Op}(\partial_- W)$ est non-vide et faiblement contractile.*

Démonstration. Soit U un voisinage de $\partial_- W$ sur lequel ω est défini. Puisque W est un h-cobordisme, il existe une rétraction par déformation lisse $(r_t)_{t\in[0,1]}$: $W \to W$ telle que $r_0 = \mathrm{id}$, $r_t = \mathrm{id}$ sur $\mathrm{Op}(\partial_- W)$ et r_1 soit à valeurs dans U. De plus, par homotopie, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$r_t^* \mathrm{T}W \simeq r_o^* \mathrm{T}W = \mathrm{T}W$$

et on peut donc relever r_t en une famille continue d'isomorphisme de fibrés $R_t : \mathrm{T}W \to \mathrm{T}W$, avec $R_0 = \mathrm{id}$ et $R_t = \mathrm{id}$ sur $\mathrm{Op}(\partial_- W)$. La 2-forme $R_1^*\omega$ sur W est non-dégénérée et coïncide avec ω près de $\partial_- W$; l'espace Ω^{formel} est donc non vide.

On se donne maintenant une famille $(\omega_s)_{s\in S^k}$ de 2-formes non-dégénérées sur W coïncidant toutes avec ω sur un voisinage V de $\partial_- W$. En utilisant, de même une rétraction (r_t, R_t) avec r_1 à valeurs dans V, la formule $R_t^*\omega_s$ donne

une homotopie de ω_s vers la constante $R_1^*\omega_s$. Ainsi Ω^{formel} est faiblement contractile. □

Théorème 4.23. *Soit (M, ξ) une variété de contact de dimension $2n - 1 \geqslant 5$ et (W, M, M') un h-cobordisme. Il existe une structure de Weinstein idéale flexible sur W partant de (M, ξ).*

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme 4.22, du premier point du corollaire 1.25 et du théorème 4.11. □

Remarque 4.24. *Cette démonstration montre également que le nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse ω-convexe sur un h-cobordisme de Weinstein flexible de dimension $\geqslant 6$ est le même que pour les fonctions de Morse, c'est-à-dire $2p$ où p est la taille de la torsion de Whitehead de W (voir le corollaire 1.25).*

Théorème 4.25. *Un h-cobordisme de Weinstein idéal flexible W de torsion nulle et de dimension $2n \geqslant 6$ partant de (M, ξ) est symplectomorphe à $\overline{\mathrm{S}_\xi M}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{F}_\omega^0$. D'après la preuve du théorème 1.24, il existe un chemin de $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ d'origine f vers une fonction sans point critique. Le théorème 4.13 permet alors de trouver un chemin de $\mathcal{F}_\omega$ d'origine f vers une fonction sans point critique. On applique alors la proposition 3.3. □

Théorème 4.26. *Soit W un h-cobordisme de Weinstein idéal flexible de dimension $2n \geqslant 6$ de (M, ξ) vers (M', ξ'). Il existe un h-cobordisme de Weinstein idéal flexible W' de (M', ξ') vers (M, ξ) tel que $W \odot W' \sim 1_{(M,\xi)}$ et $W' \odot W \sim 1_{(M',\xi')}$.*

Démonstration. Soit (W', M', M) un h-cobordisme tel que $W \odot W' \sim 1_M$ et $W' \odot W \sim 1_{M'}$ (topologiquement). D'après le théorème 4.23, il existe une structure de Weinstein flexible sur W' qui induit la structure de contact ξ' sur M' ; celle-ci induit à son tour une structure de contact ξ'' sur M. La structure de Weinstein obtenue sur $W \odot W'$ est flexible, donc d'après le théorème 4.25, celle-ci est équivalente à une symplectisation. En particulier, cette équivalence induit difféomorphisme de contact $(M, \xi'') \to (M, \xi)$. En utilisant cette identification, on fait de W' un cobordisme de (M', ξ') vers (M, ξ) de sorte que $W \odot W' \sim 1_{(M,\xi)}$.

On peut alors composer W et W' dans l'autre sens : on obtient une structure de Weinstein flexible sur le cobordisme produit $W' \odot W$, celui-ci est donc équivalent relativement à M' à $\mathrm{S}_{\xi'} M'$. On a ainsi construit un inverse à droite et un inverse à gauche. □

Théorème 4.27. *Soit (M, ξ) une variété de contact de dimension $2n - 1 \geqslant 5$ et (W, M, M') un h-cobordisme. Deux structures de weinstein flexibles idéales sur W sont équivalentes relativement à M. Mieux, deux structures de Weinstein flexibles sont isotopes relativement à M.*

Démonstration. D'après la preuve du théorème 4.26, il existe sur le cobordisme inverse $(W'; M', M)$ une structure de Weinstein flexible vers (M, ξ) et les structures de Weinstein flexible sur W en sont des inverses à droites, donc sont équivalentes.

Pour montrer l'unicité à isotopie près, on utilise le lemme 4.22 et le théorème 4.21. Noter que l'on a besoin seulement du théorème 1.30 là où le théorème 4.21 utilise le théorème 1.30. □

On peut se poser la question suivante.

Question 4.28. *Un cobordisme de Liouville inversible de dimension $\geqslant 6$ est-il nécessairement un h-cobordisme de Weinstein flexible ?*

Chapitre 5

Résultats principaux

Ce dernier chapitre contient les résultats principaux de cette thèse. On y construit notamment des variétés de contact non difféomorphes possédant des symplectisations exact symplectomorphes. Dans l'esprit du résultat de stabilisation de Hatcher et Lawson, on montre que ces variétés deviennent contactomorphes après un nombre suffisant de sommes connexes avec la variété de contact $S^k \times S^{2n-k-1}$ (pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$). On discute enfin quelques exemples obtenus à partir d'espaces lenticulaires de dimension 3 et quelques questions.

Sommaire

5.1 Symplectisations exact symplectomorphes **82**

5.2 La compactification idéale n'est pas unique **82**

5.3 Stabilisation **82**

5.4 Exemples **83**

5.4.1 À base de $L(7,1)$ et de $L(7,2)$ 84

5.4.2 À base de $L(5,1)$ 85

5.1 Symplectisations exact symplectomorphes

On commence par le théorème C de l'introduction que l'on rappelle ici.

Théorème 5.1. *Deux variétés de contact de dimension $2n-1 \geqslant 5$ reliées par un h-cobordisme de Weinstein flexible ont des symplectisations exact symplectomorphes.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des théorèmes 2.20 (premier point) et 4.26. □

Le théorème suivant est une source de contre-exemples à la question 1 de l'introduction.

Théorème 5.2. *Soit (M, ξ) une variété de contact close de dimension $\geqslant 5$ et M' une variété h-cobordante à M. Il existe une structure de contact ξ' sur M' telle que $S_\xi M$ et $S_{\xi'} M'$ soient exact symplectomorphes.*

Démonstration. Soit (W, M, M') un h-cobordisme. D'après le théorème 4.11, on peut munir W d'une structure de Weinstein idéale flexible induisant la structure de contact ξ sur M. La structure de contact ξ' induite sur M' convient, d'après le théorème 5.1. □

5.2 La compactification idéale n'est pas unique

On explique maintenant comment modifier la variété de contact dans une compactification idéale à l'aide d'un h-cobordisme de Weinstein flexible. Voici par exemple un énoncé pour un domaine de Liouville.

Théorème 5.3. *Soit V un domaine de Liouville idéal de bord supérieur (M, ξ) et M' une variété h-cobordante à M. Alors il existe une structure de contact ξ' sur M' et un domaine de Liouville idéal V' de bord (M', ξ') tel que les intérieurs de V et de V' soient exact symplectomorphes.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle du théorème 5.2 en utilisant le deuxième point du théorème 2.20 plutôt que le premier point. □

5.3 Stabilisation

Enfin, on obtient un analogue du résultat de Hatcher et Lawson pour les h-cobordismes de Weinstein flexibles, c'est le théorème D de l'introduction.

Théorème 5.4. *Si (M, ξ) et (M', ξ') sont deux variétés de contact closes de dimension $2n-1 \geqslant 5$ reliées par un h-cobordisme de Weinstein idéal flexible dont la torsion est de taille p, alors pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-1$, les variétés de contact $M\#(S^k \times S^{2n-k-1})^{\#p}$ et $M'\#(S^k \times S^{2n-k-1})^{\#p}$ sont contactomorphes.*

Démonstration. Soit W le h-cobordisme de Weinstein idéal flexible en question, celui-ci admet une fonction ω-convexe flexible $f \in \mathcal{F}^0_{k,p}$ pour tout $2 \leqslant k \leqslant n-1$ (voir la remarque 4.24).

La preuve de la proposition 1.29 fournit un chemin de fonctions f_t (parmi les fonctions ayant des points critiques d'indice k et $k+1$, mais pas nécessairement ordonnées) éliminant successivement tous les points d'indice k initiaux et sans accidents concernant ces points avant leur élimination. Le théorème 4.13 permet de trouver un chemin de fonctions ω-convexes homotope parmi les chemins de $\mathcal{F}$ transverses à $\mathcal{F}^1$. Ceci implique que les anses d'indice k de f sont trivialement attachées et que le niveau intermédiaire de f est contactomorphe à $M\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1})^{\#p}$ (voir la proposition 3.11 et le lemme 3.19).

La proposition 1.29 fournit un chemin analogue permettant l'élimination des points d'indice $k+1$ et le théorème 4.13 permet de le réaliser en un chemin de fonctions ω-convexes. Ainsi les coanses d'indice $k+1$ sont également trivialement attachées et le niveau intermédiaire de f est également contactomorphe à $M'\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1})^{\#p}$. □

Théorème 5.5. *Si (M, ξ) est une variété de contact de dimension $2n-1 \geqslant 5$ de la forme $N\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1})^{\#p}$ avec $2 \leqslant k \leqslant n-1$ pour une variété de contact close (N, ζ) et si $\mathrm{GL}_p(\mathbb{Z}[\pi_1 M]) \to \mathrm{Wh}(\pi_1 M)$ est surjective, alors toute variété de contact (M', ξ') reliée à (M, ξ) par un h-cobordisme de Weinstein idéal flexible lui est contactomorphe.*

Démonstration. Soit W un h-cobordisme de Weinstein flexible de (M, ξ) vers (M', ξ') et de torsion τ . On identifie $\mathrm{Wh}(M)$ et $\mathrm{Wh}(N)$ de façon naturelle (la variété $\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1}$ est simplement connexe). Le théorème du s-cobordisme fournit, d'une part, un h-cobordisme (V, N, N') de torsion τ que l'on munit, grâce au théorème 4.23, d'une structure de Weinstein flexible induisant la structure de contact ζ sur N et ζ' sur N'. On réalise ensuite la somme connexe de V avec p copies de la symplectisation de $\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1}$ le long de p trajectoires du champ de Liouville allant du bord inférieur au bord supérieur ; le résultat est un h-cobordisme de Weinstein flexible W' de torsion τ de $(M, \xi) = (N, \zeta)\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1})^{\#p}$ vers $(N', \zeta')\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1})^{\#p}$. D'après les théorèmes 1.27 et 4.27, W' est équivalent à W relativement à M. Ainsi M' est contactomorphe à $(N', \zeta')\#(\mathrm{S}^k \times \mathrm{S}^{2n-k-1})^{\#p}$. Le résultat découle alors du théorème 5.4. □

5.4 Exemples

Dans cette section, on discute quelques exemples pour illustrer les théorèmes des sections précédentes. Comme ces derniers théorèmes sont basés sur le h-principe, il est difficile d'expliciter complètement les objets que l'on

construit et on verra que cela mène à plusieurs problèmes ouverts intéressants.

5.4.1 À base de $\mathrm{L}(7,1)$ et de $\mathrm{L}(7,2)$

Soit $m \geqslant 0$. On a vu au chapitre 1 (proposition 1.38) comment construire un h-cobordisme W entre $M = \mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{S}^{2m+2}$ et $M' = \mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{S}^{2m+2}$ tel que, notant $V = \mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{D}^{2m+3}$ et $V' = \mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{D}^{2m+3}$, on ait :

$$V \odot W \sim V'.$$

On a vu également que M et M' ne sont pas difféomorphes et (donc) qu'il en est de même pour V et V' (proposition 1.37).

Si ξ est une structure de contact sur M, on peut construire une structure de Weinstein flexible sur W et obtenir ainsi une structure de contact ξ' sur M'. Les symplectisations de (M, ξ) et de (M', ξ') sont alors exact symplectomorphes d'après le théorème 5.1. Si, de plus, ξ est le bord d'une structure de Liouville sur V, alors on obtient une structure de Liouville sur V' telle que $V \odot W \sim V'$. Les complétions de V et V' sont alors exact symplectomorphes d'après le théorème 5.3.

On discute maintenant quelques exemples.

Fibrés cotangents : On regarde ici le cas où $m = 0$. Puisque $\mathrm{L}(7,1)$ est parallélisable, le fibré en disques de $\mathrm{T}^*\,\mathrm{L}(7,1)$ est difféomorphe à V. On peut donc munir V de la structure de Weinstein standard sur $\mathrm{T}^*\,\mathrm{L}(7,1)$. La structure de contact ξ induite sur M est celle du fibré cotangent en sphères de $\mathrm{L}(7,1)$. Dans ce cas, on ne sait pas identifier les structures obtenues sur M' et V'. On peut se demander si V' est équivalente au fibré cotangent en disque de $\mathrm{L}(7,2)$, auquel cas $\mathrm{T}^*\,\mathrm{L}(7,1)$ et $\mathrm{T}^*\,\mathrm{L}(7,2)$ seraient exact symplectomorphes ; en contradiction avec la "nearby lagrangian conjecture" stipulant qu'une sous-variété lagrangienne exacte dans un fibré cotangent est l'image de la section nulle par une isotopie hamiltonienne. Ici, on obtiendrait même une sous-variété lagrangienne exacte non difféomorphe à la section nulle. En fait, Abouzaid et Kragh ont annoncé très récemment un résultat disant que, dans le cotangent d'une variété close, la projection sur la base induit une équivalence d'homotopie simple sur toute sous-variété lagrangienne exacte ; s'il se confirme, ce théorème règle la question puisque $\mathrm{L}(7,1)$ et $\mathrm{L}(7,2)$ n'ont pas le même type d'homotopie simple.

Fibrés cotangents flexibles ou stabilisés : Toujours pour $m = 0$, on considère sur V la structure de Weinstein flexible formellement homotope à la structure standard $\mathrm{T}^*\,\mathrm{L}(7,1)$ (la version flexible du cotangent). Dans ce cas,

on obtient sur V' la version flexible du cotangent en disque de $\mathrm{L}(7,2)$. D'où le théorème suivant.

Théorème 5.6. *Les fibrés cotangents flexibles de* $\mathrm{L}(7,1)$ *et* $\mathrm{L}(7,2)$ *sont exact symplectomorphes.*

Pour $m \geqslant 1$, on peut munir $V = \mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{D}^{2m+3}$ de la structure de Weinstein standard sur $\mathrm{T}^*\,\mathrm{L}(7,1) \times \mathbb{C}^m$ (cotangent stabilisé). Puisque c'est une structure sous-critique (en particulier, flexible), la structure de Weinstein obtenue sur V' est équivalente au fibré cotangent stabilisé $\mathrm{T}^*\,\mathrm{L}(7,2) \times \mathbb{C}^m$. On retrouve ainsi un résultat d'Eliashberg et Gromov (leur preuve est essentiellement la même, voir [EG91]).

Théorème 5.7 (Eliashberg-Gromov)**.** *Les fibrés cotangents stabilisés de* $\mathrm{L}(7,1)$ *et* $\mathrm{L}(7,2)$ *sont exact symplectomorphes.*

Structures vrillées : Si (M,ξ) est une structure vrillée au sens de [BEM14], alors la structure de contact sur (M',ξ') est également vrillée. En effet, la construction du h-cobordisme de Weinstein flexible W de (M,ξ) à (M',ξ') peut être réalisée de sorte que l'union des nappes descendantes soit disjointe d'un disque vrillé, si bien que le flot de Liouville transporte ce disque vrillé de M en un disque vrillé dans M'.

L'une ou l'autre des constructions précédentes fournit en tout cas les contre-exemples suivants à la question 1 (ce sont les théorèmes A et E de l'introduction).

Théorème 5.8. *Pour* $m \geqslant 0$,

1. *Il existe sur les variétés* $\mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{S}^{2m+2}$ *et* $\mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{S}^{2m+2}$ *des structures de contact dont les symplectisations sont exact symplectomorphes. Pourtant* $\mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{S}^{2m+2}$ *et* $\mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{S}^{2m+2}$ *ne sont pas difféomorphes.*
2. *Il existe sur les domaines* $\mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{D}^{2m+3}$ *et* $\mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{D}^{2m+3}$ *des structures de Weinstein idéales dont les intérieurs sont exact symplectomorphes. Pourtant* $\mathrm{L}(7,1) \times \mathrm{D}^{2m+3}$ *et* $\mathrm{L}(7,2) \times \mathrm{D}^{2m+3}$ *ne sont pas difféomorphes.*

5.4.2 À base de $\mathrm{L}(5,1)$

Pour $m \geqslant 0$, on considère la variété $V = \mathrm{L}(5,1) \times D^{2m+3}$ et $M = \partial V = \mathrm{L}(5,1) \times S^{2m+2}$. D'après le chapitre 1, il existe un h-cobordisme non-trivial W de M vers lui-même. Bien que V soit difféomorphe à lui-même (!), l'équivalence d'homotopie $V \to V$ induite par le plongement $V \to V \odot W \sim V$ n'est pas homotope à un difféomorphisme car sa torsion de Whitehead est non nulle. Prenons par exemple le h-cobordisme W obtenu comme au chapitre 1 à partir d'une équivalence d'homotopie $\phi : \mathrm{L}(5,1) \to \mathrm{L}(5,1)$ induisant la multiplication par 2 sur $\pi_1 = \mathbb{Z}/5$.

Comme dans la section précédente, en étendant une structure de contact ξ sur M en une structure de Weinstein flexible sur W, on obtient une structure de contact ξ' sur M telle que $\mathrm{S}_\xi M$ et $\mathrm{S}_{\xi'} M$ soient exact symplectomorphes. Même si ξ' se trouve être conjuguée à ξ par un difféomorphisme de M, la construction présente un intérêt car on obtient un symplectomorphisme exact $\mathrm{S}_\xi M \to \mathrm{S}_\xi M$ qui n'est pas homotope au relevé d'un contactomorphisme. On discute quelques exemples, en particulier des cas où ξ et ξ' ne sont pas conjuguées.

Fibrés cotangents : Dans le cas où $m = 0$ et V est muni de la structure de Weinstein standard de $\mathrm{T}^*\mathrm{L}(5,1)$, on ne sait pas identifier les structures obtenues sur M' et V'. Comme précédemment, un résultat d'Abouzaid et Kragh semble impliquer que V' n'est pas équivalent à $\mathrm{T}^*\mathrm{L}(5,1)$.

Fibrés cotangents flexibles et stabilisés : Dans ce cas où V est le fibré cotangent en disques flexible ou stabilisé, la structure de Weinstein obtenue sur V' est flexible donc équivalente au cotangent flexible ou stabilisé également. En particulier, on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.9. *Soit V la complétion idéale du fibré cotangent flexible ou stabilisé de* $\mathrm{L}(5,1)$. *Il existe un symplectomorphisme exact de l'intérieur de V qui n'est pas homotope à un symplectomorphisme qui se prolonge à ∂V.*

Structures non-conjuguées : On va construire ici des exemples de structures non-conjuguées en distinguant leurs premières classes de Chern. On abrège $\mathrm{L}(5,1)$ en L. D'après la classification des fibrés en droites complexes, pour chaque $c \in \mathrm{H}^2(V;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/5$, il existe un fibré en droite complexe $E \to V$ avec $c_1(E) = c$. On choisit un tel E avec $c_1(E) \neq 0$. Ensuite, on remarque que

$$\mathrm{T}\,V = \mathrm{T}\,L \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m+1} \simeq \underline{\mathbb{R}}^{2m+4}$$

et que le fibré $E \oplus \underline{\mathbb{R}}$ est trivial comme fibré réel (en effet, d'après la théorie de l'obstruction, tous les fibrés réels de rang $k \geqslant 3$ sur L sont triviaux puisque les groupes $\mathrm{H}^i(L;\pi_{i-1}O(k))$ sont nuls). Il existe alors un isomorphisme de fibrés réels

$$\mathrm{T}\,V \simeq E \oplus \underline{\mathbb{C}}^{m+1},$$

que l'on utilise pour munir V d'une structure presque-complexe notée J (en tirant en arrière). Le théorème 4.11 fournit une structure de Weinstein flexible sur V formellement homotope à J ; celle-ci induit une structure de contact ξ sur M. Ensuite, on utilise la même procédure que précédemment : on étend la structure de Weinstein flexible à W et on obtient une seconde structure de Weinstein sur V induisant une structure de contact ξ' sur M ; on choisit aussi une structure presque-complexe J' sur V compatible avec cette nouvelle

structure de Weinstein. Notant $\psi : V \to V \odot W = V$ le plongement utilisé dans la construction de W (voir chapitre 1). Le point clé est alors l'égalité suivante sur les premières classes de Chern :

$$c_1(J) = \psi^* c_1(J') = 2c_1(J')$$

découlant du fait que ψ agit par multiplication par 2 sur $\pi_1 V = \mathrm{H}_1(V) \simeq \mathrm{H}^2(V)$ (par dualité de Poincaré pour $\mathrm{L}(5,1)$).

On montre maintenant qu'un difféomorphisme de V ou de M conjuguant les deux structures doit nécessairement agir par multiplication par ± 2 sur π_1, en contradiction avec la proposition 1.35.

On va raisonner sur la cohomologie et l'homologie (toujours à coefficients $\mathbb{Z}$).

Pour V, c'est assez direct : $\mathrm{H}^2(V) = \mathrm{H}^2(L) \simeq \mathrm{H}_1(L) = \mathbb{Z}/5$ d'après la dualité de Poincaré. Si $\theta : V \to V$ est un difféomorphisme tel que $\theta^* J'$ est homotope à J, alors

$$\theta^* c_1(J') = c_1(\theta^* J') = c_1(J) = 2c_1(J').$$

Puisque $c_1(J') \neq 0$, cette dernière équation implique que θ induit la multiplication par 2 sur H^2, donc sur H_1 et sur π_1.

Pour M, on remarque que, notant $i : M \to V$ l'inclusion,

$$i^* \mathrm{T}V \simeq \mathrm{T}M \oplus \mathbb{R} \simeq \xi \oplus \underline{\mathbb{C}},$$

donc $c_1(\xi') = i^* c_1(J')$ et $c_1(\xi) = i^* c_1(J) = i^*(2c_1(J')) = 2c_1(\xi')$. Si $\theta : M \to M$ est un difféomorphisme tel que $\theta^* \xi'$ est homotope à ξ (parmi les structures de contact, ou simplement parmi les structures presque-contact), alors

$$\theta^* c_1(\xi') = c_1(\theta^* \xi') = c_1(\xi) = 2c_1(\xi').$$

Puisque $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{2m+2})$ est libre, la formule de Künneth donne un isomorphisme d'anneaux gradués :

$$\mathrm{H}^*(M) \simeq \mathrm{H}^*(L) \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^{2m+2}).$$

L'application $i : M \to V$ induit l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^2(V) = \mathrm{H}^2(L) \to \mathrm{H}^2(L) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^{2m+2}) = \mathbb{Z}/5,$$

donc $c_1(\xi) \in \mathrm{H}^2(L) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^{2m+2}) \subset \mathrm{H}^2(M)$.

Pour clarifier, on distingue maintenant les cas $m = 0$ et $m \geqslant 1$.

Cas $m = 0$:

La formule de Künneth donne

$$\mathrm{H}^2(M) = \mathrm{H}^2(L) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2) \oplus \mathrm{H}^0(L) \otimes \mathrm{H}^2(\mathrm{S}^2) = \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}.$$

Puisque θ envoie $c_1(\xi')$ sur $2c_1(\xi')$, son action sur H^2 est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

dans la décomposition $\mathrm{H}^2(M) = \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}$.

Notant b un générateur de $\mathrm{H}^0(L) \otimes \mathrm{H}^2(\mathrm{S}^2)$, on a :

$$h^*(c_1(\xi') \cup b) = 2c_1(\xi') \cup (\pm b + ac_1(\xi')) = \pm 2c_1(\xi') \cup b.$$

Puisque $c_1(\xi') \cup b$ engendre $\mathrm{H}^4(M) \simeq \mathbb{Z}/5$, on en déduit que θ agit sur $\mathrm{H}^4(M)$ par multiplication par ± 2 et de même sur $\mathrm{H}_1(M) = \pi_1(M)$ par dualité de Poincaré.

Cas $m \geqslant 1$ **:** On choisit cette fois un générateur b de

$$\mathrm{H}^{2m+2}(M) = \mathrm{H}^0(L) \otimes \mathrm{H}^{2m+2}(\mathrm{S}^{2m+2}) \simeq \mathbb{Z},$$

on a alors

$$\theta^*(c_1(\xi') \cup b) = 2c_1(\xi') \cup \pm b.$$

Donc θ agit sur $\mathrm{H}^{2m+2}(M)$ par multiplication par ± 2, et de même sur $\mathrm{H}_1 = \pi_1$ par dualité de Poincaré.

On vient de démontrer le théorème suivant (correspondant aux théorèmes B et F de l'introduction).

Théorème 5.10. *Pour $m \geqslant 0$,*

1. *Il existe sur la variété $\mathrm{L}(5,1) \times \mathrm{S}^{2m+2}$ deux structures de contact non conjuguées dont les symplectisations sont exact symplectomorphes.*
2. *Il existe sur le domaine $\mathrm{L}(5,1) \times \mathrm{D}^{2m+3}$ deux structures de Weinstein idéales non équivalentes dont les intérieurs sont exact symplectomorphes.*

La question suivante reste ouverte.

Question 5.11. *Si deux variétés de contact sont isomorphes comme variétés presque-contact et ont des symplectisations exact symplectomorphes, sont-elles contactomorphes ?*

Remarque 5.12. *Dans tous les exemples considérés dans cette section, le théorème 5.4 s'applique avec $p = 1$, c'est-à-dire que, en faisant seulement une somme connexe avec $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^{2m+3}$, les variétés de contact M et M' deviennent contactomorphes.*

Abstract

To any contact manifold one can associate a symplectic manifold called its symplectization in such a way that contact geometry can be reformulated in terms of equivariant symplectic geometry. Concerning this fundamental construction, a basic question remained open : if two contact manifolds have isomorphic symplectizations, are they isomorphic ? In this thesis, we construct counter-examples to this question. Indeed, in any odd dimension greater than or equal to 5, there exist non-diffeomorphic contact manifolds with isomorphic symplectizations. In addition, we construct two contact structures on a closed manifold that are not conjugate by a diffeomorphism though their symplectizations are isomorphic. The proofs are based on a well-known phenomenon in differential topology (the existence of non-trivial h-cobordisms, detected by Whitehead torsion) as well as flexibility results in symplectic geometry due to Cieliebak and Eliashberg. Another result from this thesis asserts that though these contact manifolds are not isomorphic, they become so after sufficiently many connect sum with a product of spheres.

Keywords: Contact manifolds, symplectic manifolds, symplectization, Weinstein cobordisms, h-principle, h-cobordisms, Whitehead torsion.

Résumé

À toute variété de contact, on peut associer canoniquement une variété symplectique appelée sa symplectisation de sorte que la géométrie de contact peut se reformuler en termes de géométrie symplectique équivariante. Au sujet de cette construction fondamentale, une question basique restait ouverte : si deux variétés de contact ont des symplectisations isomorphes sont-elles isomorphes ? On construit dans cette thèse des contre-exemples à cette question. Il existe en effet, en toute dimension impaire supérieure ou égale à 5, des variétés de contact non difféomorphes admettant pourtant des symplectisations isomorphes. On construit également, sur une même variété, deux structures de contact non conjuguées par un difféomorphisme mais admettant des symplectisations isomorphes. Les démonstrations sont basées sur un phénomène bien connu en topologie différentielle (l'existence de h-cobordismes non triviaux, détectée par la torsion de Whitehead) ainsi que sur des résultats de flexibilité en géométrie symplectique dus à Cieliebak et Eliashberg. Un autre résultat de cette thèse affirme que ces variétés de contact, bien que non isomorphes, le deviennent toutefois après un nombre suffisant de sommes connexes avec un produit de sphères.

Mots-clés: Variétés de contact, variétés symplectiques, symplectisation, cobordismes de Weinstein, h-principe, h-cobordismes, torsion de Whitehead.

Bibliographie

[AD10] Michèle Audin et Mihai Damian, *Théorie de Morse et homologie de Floer*, EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2010.

[AS10] Mohammed Abouzaid et Paul Seidel, *Altering symplectic manifolds by homologous recombination*, arXiv :1007.3281 (2010).

[BEE12] Frédéric Bourgeois, Tobias Ekholm et Yasha Eliashberg, *Effect of legendrian surgery*, Geometry & Topology **16** (2012), no. 1, 301–389, With an appendix by Sheel Ganatra and Maksim Maydanskiy.

[BEM14] Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg et Emmy Murphy, *Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions*, arXiv :1404.6157 (2014).

[Ben83] Daniel Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Third Schnepfenried geometry conference, Vol. 1 (Schnepfenried, 1982), Astérisque, vol. 107, Société Mathématique de France, Paris, 1983, pp. 87–161.

[CE12] Kai Cieliebak et Yakov Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[Cer70] Jean Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publications mathématiques de l'IHÉS **39** (1970), 5–173.

[CG68] Jean Cerf et André Gramain, *Le théorème du h-cobordisme (Smale).*, École normale supérieure (1968).

[CGH09] Vincent Colin, Emmanuel Giroux et Ko Honda, *Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **109** (2009), 245–293.

[Che02] Yuri Chekanov, *Differential algebra of legendrian links*, Inventiones Mathematicae **150** (2002), no. 3, 441–483.

[CL70] Alain Chenciner et François Laudenbach, *Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série **3** (1970), 409–478.

[Coh73] Marshall M. Cohen, *A course in simple-homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 10, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1973.

[Cou14] Sylvain Courte, *Contact manifolds with symplectomorphic symplectizations*, Geometry & Topology **18** (2014), no. 1, 1–15.

[Cou15] _____, *Contact manifolds and Weinstein h-cobordisms*, à paraître dans Journal of Symplectic Geometry (2015).

[dRMK67] Georges de Rham, Serge Maumary et Michel A. Kervaire, *Torsion et type simple d'homotopie*, Exposés faits au séminaire de Topologie de l'Université de Lausanne. Lecture Notes in Mathematics, No. 48, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[EES05a] Tobias Ekholm, John Etnyre et Michael Sullivan, *The contact homology of legendrian submanifolds in* $\mathbb{R}^{2n+1}$, Journal of Differential Geometry **71** (2005), no. 2, 177–305.

[EES05b] _____, *Non-isotopic legendrian submanifolds in* $\mathbb{R}^{2n+1}$, Journal of Differential Geometry **71** (2005), no. 1, 85–128.

[EG91] Yakov Eliashberg et Mikhael Gromov, *Convex symplectic manifolds*, Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 52, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, pp. 135–162.

[EGH00] Yasha Eliashberg, Alexander Givental et Helmut Hofer, *Introduction to symplectic field theory*, Geometric and Functional Analysis (2000), no. Special Volume, Part II, 560–673, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).

[Eli89] Yakov Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Inventiones Mathematicae **98** (1989), no. 3, 623–637.

[Eli90] _____, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension >2*, International Journal of Mathematics **1** (1990), no. 1, 29–46.

[Eli97] _____, *Symplectic geometry of plurisubharmonic functions*, Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, PQ, 1995), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 488, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, With notes by Miguel Abreu, pp. 49–67.

[Eli98] _____, *Invariants in contact topology*, Documenta Mathematica, 1998, pp. 327–338.

[Eli14] _____, *Communication personnelle*, 2014.

[Gei08] Hansjörg Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[Gir00] Emmanuel Giroux, *Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces*, Inventiones Mathematicae **141** (2000), no. 3, 615–689.

[GP14] Emmanuel Giroux et John Pardon, *Existence of Lefschetz fibrations on Stein and Weinstein domains*, arXiv :1411.6176 (2014).

[Gro85] Mikhail Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Inventiones Mathematicae **82** (1985), no. 2, 307–347.

[Hae61] André Haefliger, *Plongements différentiables de variétés dans variétés*, Commentarii Mathematici Helvetici **36** (1961), 47–82.

[HL76] Allen Hatcher et Terry Lawson, *Stability theorems for "concordance implies isotopy" and "h-cobordism implies diffeomorphism"*, Duke Mathematical Journal **43** (1976), no. 3, 555–560.

[Ker65] Michel A. Kervaire, *Le théorème de Barden-Mazur-Stallings*, Commentarii Mathematici Helvetici **40** (1965), 31–42.

[Kos93] Antoni A. Kosinski, *Differential manifolds*, Pure and Applied Mathematics, vol. 138, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993.

[KS92] Slawomir Kwasik et Reinhard Schultz, *Vanishing of Whitehead torsion in dimension four*, Topology. An International Journal of Mathematics **31** (1992), no. 4, 735–756.

[Lau92] François Laudenbach, *On the Thom-Smale complex*, dans : *An extension of a theorem by Cheeger and Müller* de Jean-Michel Bismuth et Weiping Zhang, Astérisque **205** (1992), 219–233.

[Lau12] ———, *Transversalité, courants et théorie de Morse*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2012.

[Lau13] ———, *A proof of Morse's theorem about the cancellation of critical points*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris **351** (2013), no. 11, 483–488.

[Lau14] ———, *A proof of Reidemeister-Singer's theorem by Cerf's methods*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série 6 **23** (2014), no. 1, 197–221.

[Maz61] Barry Mazur, *Stable equivalence of differentiable manifolds*, Bulletin of the American Mathematical Society **67** (1961), 377–384.

[Maz63] ———, *Relative neighborhoods and the theorems of Smale*, Annals of Mathematics. Second Series **77** (1963), 232–249.

[Mcl08] Mark Mclean, *The Symplectic Topology of Stein Manifolds*, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 2008.

[McL09] Mark McLean, *Lefschetz fibrations and symplectic homology*, Geometry & Topology **13** (2009), no. 4, 1877–1944.

[Mil56] John Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics. Second Series **64** (1956), 399–405.

[Mil61] _____, *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct*, Annals of Mathematics. Second Series **74** (1961), 575–590.

[Mil65] _____, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Notes by Larry Siebenmann and Jonathan Sondow, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.

[MNPS13] Emmy Murphy, Klaus Niederkrüger, Olga Plamenevskaya et András I. Stipsicz, *Loose legendrians and the plastikstufe*, Geometry & Topology **17** (2013), no. 3, 1791–1814.

[MNW12] Patrick Massot, Klaus Niederkrüger et Chris Wendl, *Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds*, Inventiones mathematicae **192** (2012), no. 2, 287–373.

[Mur12] Emmy Murphy, *Loose legendrian embeddings in high dimensional contact manifolds*, arXiv :1201.2245 (2012).

[Ran02] Andrew Ranicki, *Algebraic and geometric surgery*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Sim14] Marielle Simon, *Diffusion problems for perturbed harmonic chains*, Thèse, École normale supérieure de Lyon, juin 2014.

[Sma61] Stephen Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, Annals of Mathematics. Second Series **74** (1961), 391–406.

[Sma62] _____, *On the structure of manifolds*, American Journal of Mathematics **84** (1962), 387–399.

[SS05] Paul Seidel et Ivan Smith, *The symplectic topology of Ramanujam's surface*, Commentarii Mathematici Helvetici **80** (2005), no. 4, 859–881.

[Sta65] John R. Stallings, *On infinite processes leading to differentiability in the complement of a point*, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965, pp. 245–254.

[Thu97] William P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Edited by Silvio Levy.

[Tur88] Vladimir G. Turaev, *Towards the topological classification of geometric 3-manifolds*, Topology and geometry—Rohlin Seminar, Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer, Berlin, 1988, pp. 291–323.

[Vit99] Claude Viterbo, *Functors and computations in Floer homology with applications. I*, Geometric and Functional Analysis **9** (1999), no. 5, 985–1033.

[Wei91] Alan Weinstein, *Contact surgery and symplectic handlebodies*, Hokkaido Mathematical Journal **20** (1991), no. 2, 241–251.

[Whi44] Hassler Whitney, *The self-intersections of a smooth n-manifold in* $2n$*-space*, Annals of Mathematics. Second Series **45** (1944), 220–246.