



HAL
open science

Modélisation et optimisation du sertissage de connecteurs électriques utilisés dans l'industrie automobile

Mickaël Abbas

► **To cite this version:**

Mickaël Abbas. Modélisation et optimisation du sertissage de connecteurs électriques utilisés dans l'industrie automobile. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 2002. Français. NNT: . tel-01161655

HAL Id: tel-01161655

<https://theses.hal.science/tel-01161655>

Submitted on 8 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Modélisation et optimisation du sertissage de connecteurs électriques utilisés dans l'industrie automobile

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2002

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne

par

Mickaël ABBAS

Directeur de thèse : Jean-Louis BATOZ

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	M. Maurice Touratier	École Nationale Supérieure des Arts et Métiers
	M. Bernard Peseux	École Centrale de Nantes
<i>Examineurs :</i>	M. René Meyer	Laboratoire de Génie Électrique de Paris
	M. El Mostafa Zindine	FCI Corporate Research Center
	M. Jean-Marc Roelandt	Université de Technologie de Compiègne
	M. Gouri. Dhatt	Université de Technologie de Compiègne
	M. Jean-Louis Batoz	Institut Supérieur d'Ingénierie de la Conception



Ce document a été entièrement réalisé en \LaTeX (voir [GMS00] et [Lac95])
Sa mise en page est assurée par la classe `throberval` (adaptée de `thloria`)

A ma famille

A Isabelle

A la mémoire du professeur Lionel Boyer

Remerciements

Il est de coutume de remercier quantité de personnes ayant participé de près ou de loin à un travail aussi important qu'une thèse.

Coutume admirable!

Il est aussi très probable que l'on oublie quelqu'un, qui peut en être mortellement vexé.

Effet désastreux!

C'est donc un travail à haut risque dont il faut que je m'acquitte ici.

Mes remerciements s'adressent d'abord à M.Jean-Marc Roelandt, qui a accepté de diriger le jury, ainsi qu' M.Bernard Peseux et M.Maurice Touratier qui ont accepté la difficile tâche d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie également M.René Meyer, M.Gouri Dhatt et M.El Mostafa Zindine qui ont accepté de sacrifier un peu de leur temps pour s'impliquer dans le jury de thèse.

Rétrospectivement et honorablement, il est de mon devoir de remercier sincèrement mon directeur de thèse, M.Jean-Louis Batoz, qui a accepté de me supporter pendant de longues années et, qui, malgré son exil au delà des terres civilisées, près de la ligne bleue des Vosges, a continué à m'encadrer admirablement bien.

N'oublions pas de remercier chaleureusement toutes les personnes de FCI qui ont participé activement au projet : M.Zindine, directeur de recherche éclairé, M.Flavio Fantini, l'initiateur de ce projet, M.Thierry Courtin, organisateur parfait d'un projet tentaculaire, M.Christian.Albertin et tous les membres de FCI que j'ai rencontré et avec lesquels j'ai travaillé tout au long de ces trois années, en France, aux USA et en Allemagne. La liste est longue. Dédicace spéciale à Gabriele qui a su prouver que le temps de trajet La Ferté Bernard-Lucerne était tout à fait raisonnable lorsqu'un italien est au volant. Merci aussi à Laurent Merle, spécialiste du maillage délicat qui m'a fait gagné plusieurs semaines de travail.

A cette liste déjà longue, il faut ajouter Lanouar Ben Ayed, qui m'a fait gagné six mois de travail grâce à son stage de DEA remarquable sur l'optimisation. Incidemment, merci à Catherine Vayssade pour l'avoir suivi et à Arnaud Delamézière, camarade thésard et ami des Vosges pour avoir soutenu Lanouar.

Merci à tous les membres du laboratoire qui ont supporté mon humour désastreux pendant trois longues années. Je pense en particulier au directeur du laboratoire, M.Amphoux de Belleval, ainsi qu'aux membres du conseil du laboratoire dont j'étais un modeste élu étudiant. Revenons géographiquement sur tous les membres du secteur mécanique numérique : son chef, Jean-Marc Roelandt, ainsi qu'Alain Rassinoux, Pierre Villon, Piotr Breilkopf (les spécialistes du salissage du tableau de notre bureau). Merci aussi au(x) directeurs du département GSM M.Orsero et M.Ramond. Merci à Muriel et à Brigitte pour leur soutien administratif et amical. Merci à Pascal Lardeur, Hakim Naceur, Hocine Kébir, Gouri Dhatt, Emmanuel Lefrançois, Charles Forster (camarade de soutien lors de notre exil auvergnat).

Pour (presque) finir, merci à mes camarades d'infortune, les thésards divers des deux étages. Claudie Darcourt, Zahira Benadla, Euro Casanova, Walid Gati, Isabelle Fresson, Zohra Chorfi, Daly Daly, Slim Ben Elechi.

Merci à mes deux voisins de bureau, le flegmatique Philippe et le (déjà) vieux copain Cédric.

Et bien sûr, merci à mes parents, à ma famille et à Isabelle.

MERCI

Table des matières

Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xvii
Liste des symboles utilisés	xix
Chapitre 1 Introduction	1
1.1 Le projet sertissage	2
1.1.1 L'entreprise	2
1.1.2 Les produits	2
1.1.2.1 Applications pour l'automobile	2
1.1.2.2 Axes de développement et de recherche	3
1.1.3 Organisation du projet	4
1.2 État de l'art	5
1.2.1 Description et terminologie	5
1.2.1.1 Définitions	5
1.2.1.2 Types de sertissage	6
1.2.2 Techniques industrielles	7
1.2.2.1 Outillage	7
1.2.2.2 Procédé	7
1.2.2.3 Câble	9
1.2.3 État de l'art	9
1.2.3.1 Cahier des charges et spécifications	10
1.2.3.2 Contact	10
1.2.3.3 Bibliographie	13
1.3 Objectifs de la thèse	14
1.3.1 Description de la problématique	14
1.3.2 Plan de travail et organisation de l'étude	15

Chapitre 2 Éléments finis en grandes transformations	17
2.1 Introduction aux transformations finies	18
2.1.1 Description du mouvement	18
2.1.1.1 Définitions	18
2.1.1.2 Repères et formulations	19
2.1.1.3 L'application déformation	19
2.1.1.4 Gradient de déformation	19
2.1.1.5 Transformation des éléments géométriques élémentaires . .	20
2.1.2 Mesures de déformation	20
2.1.2.1 Décomposition polaire	20
2.1.2.2 Tenseurs de déformation	21
2.1.3 Contraintes	22
2.1.3.1 Tenseur des contraintes de Cauchy	22
2.1.3.2 Contraintes de Kirchhoff et de Piola-Kirchhoff	23
2.1.4 Vitesses de déformation	24
2.1.4.1 Tenseur gradient des vitesses de déformations	25
2.1.4.2 Tenseur de rotation pure	26
2.1.5 Objectivité	26
2.1.5.1 Changement d'observateur	26
2.1.5.2 Le cas des grandeurs courantes	26
2.1.5.3 Dérivées objectives	27
2.1.6 Hypothèses bi-dimensionnelles	28
2.1.6.1 Contraintes planes	28
2.1.6.2 Déformations planes	29
2.1.6.3 Déformations planes généralisées	29
2.2 Loi de comportement	30
2.2.1 Forme générale des lois de comportement	30
2.2.2 Le cas élasto-plastique	31
2.2.2.1 Séparation des contributions élastiques et plastiques . . .	31
2.2.2.2 Surface de charge	32
2.2.2.3 Loi d'écoulement	32
2.2.2.4 Loi de Prandtl-Reuss	32
2.2.3 Grandes déformations élasto-plastiques	33
2.2.3.1 Modèle hypoélastique-plastique	33

2.2.3.2	Modèle hyperélastique-plastique	34
2.2.3.3	Intégration des équations	34
2.2.4	Équations d'équilibre	36
2.2.4.1	Principe des puissances virtuelles([GM95] et [LC96])	36
2.2.4.2	Écritures eulériennes et lagrangiennes des équations d'équilibre	38
2.3	Discrétisation et résolution par éléments finis	41
2.3.1	Discrétisation spatiale	41
2.3.1.1	Interpolation de la géométrie	41
2.3.1.2	Interpolation cinématique	42
2.3.1.3	Discrétisation de la forme variationnelle	42
2.3.1.4	Intégration numérique	43
2.3.2	Algorithme explicite dynamique	48
2.3.2.1	Formulation variationnelle	49
2.3.2.2	Schéma d'intégration temporelle ([GR96])	49
2.3.2.3	Stabilité	51
2.3.2.4	Viscosité volumique	51
2.3.2.5	Algorithme	52
2.3.3	Contact - frottement	54
2.3.3.1	Définitions	54
2.3.3.2	Conditions de contact	55
2.3.3.3	Formulation variationnelle	57
2.3.3.4	Implémentation	57
Chapitre 3 Analyses bidimensionnelles		61
3.1	Géométrie	62
3.1.1	Ailes de sertissage	62
3.1.2	Outils	62
3.1.3	Sertissage en B	63
3.2	Résultats expérimentaux	64
3.2.1	Dispositifs expérimentaux	64
3.2.1.1	Coupes de sertissage	64
3.2.1.2	Presse instrumentée	65
3.2.2	Matériaux	67
3.2.2.1	Caractéristique des ailes	67

3.2.2.2	Caractéristiques des câbles	67
3.3	Modèles numériques	68
3.3.1	Modèle statique implicite	69
3.3.1.1	Problématique	69
3.3.1.2	Détails du modèle	69
3.3.1.3	Effet de l’hypothèse bi-dimensionnelle	71
3.3.2	Modèle dynamique explicite	72
3.3.2.1	Choix de la vitesse du poinçon	73
3.3.3	Discrétisation spatiale	74
3.3.3.1	Finesse du maillage	74
3.3.3.2	Type d’éléments	77
3.4	Estimation du retour élastique	79
3.4.1	Simulation avec un algorithme statique implicite	79
3.4.2	Simulation du cambrage	80
3.4.3	Conclusion	81
3.5	Résultats	83
3.5.1	Contraintes	83
3.5.2	Déformations	84
3.5.3	Simulation de différents câbles	84
3.6	Validation expérimentale	87
3.6.1	Surface sertie	87
3.6.2	Surface des ailes	88
3.6.3	Taux de compression	88
3.6.4	Force de sertissage	89
3.7	Analyse de paramètres technologiques	90
3.7.1	Position initiale des brins	90
3.7.2	Coefficients de frottement	92
3.8	Automatisation	93
3.8.1	Génération du modèle	93
3.8.1.1	Variables	93
3.8.1.2	Principe de fonctionnement	94
3.8.2	Dépouillement des résultats	94

Chapitre 4 Analyses tridimensionnelles	97
4.1 Description des modèles numériques	98
4.1.1 Généralités	98
4.1.2 Stratégie de simulation	98
4.2 Résultats	99
4.2.1 Modèle simplement extrudé	99
4.2.1.1 Modes sabliers	100
4.2.1.2 Contraintes	101
4.2.1.3 Déformations	102
4.2.1.4 Géométrie finale	103
4.2.1.5 Force de sertissage	104
4.2.2 Effet des stries	106
4.2.3 Modèle complet avec zones de transition	107
4.2.3.1 Contraintes et déformations	108
4.2.3.2 Géométrie	111
4.3 Conclusion	111
Chapitre 5 Optimisation des paramètres du sertissage	115
5.1 Éléments théoriques	116
5.1.1 Plans d'expérience	116
5.1.1.1 Terminologie et notation	116
5.1.1.2 Coordonnées centrées réduites	117
5.1.1.3 Équation du modèle	117
5.1.1.4 Matrice des effets	118
5.1.1.5 Méthode des moindres carrés	118
5.1.1.6 Plans de Doehlert	119
5.1.2 Modèle mathématique des surfaces de réponse	120
5.1.2.1 Analyse canonique	121
5.1.3 Procédure d'optimisation sous contraintes	123
5.1.3.1 Fonction d'adaptation	123
5.1.3.2 Algorithme d'optimisation	124
5.2 Description du problème d'optimisation	126
5.2.1 Paramètres	126
5.2.2 Fonctions objectifs	127
5.3 Résultats	128

5.3.1	Plan de dépouillement	128
5.3.1.1	Domaine de recherche	128
5.3.1.2	Surface de réponse	129
5.3.1.3	Analyse canonique	129
5.3.1.4	Optimisation	130
5.3.2	Plan de raffinement	131
5.3.3	Plan étendu	132
5.4	Conclusion	135
Chapitre 6 Conclusion et perspectives		137
6.1	Conclusion	137
6.2	Perspectives	138
Annexes		141
Annexe A Tests de qualification pour le sertissage		141
A.1	RENAULT	141
A.2	PSA	141
Annexe B Script d'automatisation des modèles éléments finis		143
B.1	Modèles bi-dimensionnels	143
B.1.1	Structure	143
B.1.2	Paramètres	143
B.1.3	Script	144
B.2	Modèles tri-dimensionnels	145
Annexe C Analyse géométrique du sertissage		149
C.1	Outils	149
C.1.1	Poinçon	149
C.1.2	Enclume	149
C.2	Ailes de sertissage	151
C.2.1	Points du contour	151
C.2.2	Quelques grandeurs géométriques	152
C.2.2.1	Calcul de l'angle d'ouverture	152
C.2.2.2	Longueur intérieure	152
C.2.2.3	Longueur développée	153

C.2.2.4	Surface	153
C.2.2.5	Taux de compression	153
Annexe D	Informations sur l'optimisation bi-dimensionnelle	155
D.1	Plans de Doehlert	155
D.2	Tables des résultats	156
Annexe E	Opérations automatiques de dépouillement des résultats	163
E.1	Scripts Python	163
E.2	Calcul des surfaces 2D	167
E.2.1	Structure	167
E.2.2	Structure de données	167
E.2.2.1	Boîte englobante	168
E.2.2.2	Position	168
E.2.2.3	Noeud	168
E.2.2.4	Élément	168
E.2.2.5	Arête	168
E.2.2.6	Groupe	168
E.2.2.7	Instance	168
E.2.2.8	Assembly	169
E.2.3	Principe de calcul	169
E.3	Calcul des surfaces 3D	169
E.3.1	Structure	169
E.3.2	Structure de données	169
E.3.2.1	Plane	169
E.3.2.2	Contour	170
E.3.2.3	Surface	170
E.3.2.4	Assembly	170
E.3.3	Principe de calcul	170
Annexe F	Contrôle des modes sabliers	171
F.1	Quadrilatères	171
F.2	Hexaèdres	171
Bibliographie		173

Table des figures

1.1	Exemple de systèmes électroniques embarqués sur véhicule	2
1.2	Quelques exemples de connecteurs électriques automobiles	3
1.3	Organisation du projet sertissage	4
1.4	Exemple de connecteur automobile	5
1.5	Composition d'un connecteur électrique classique	6
1.6	Les différents types de sertissage en fût ouvert	7
1.7	Processus automatisé du sertissage	8
1.8	Think compression! (d'après [But97b])	10
1.9	Les aires de contact mécaniques et électriques	11
2.1	Configuration initiale et déformée	18
2.2	Élément de force surfacique	23
2.3	Hypothèse des contraintes planes	28
2.4	Hypothèse des déformations planes	29
2.5	Hypothèse des déformations planes généralisées	30
2.6	Principe de calcul des contraintes pour un modèle plastique	35
2.7	Discrétisation du domaine	41
2.8	Élément réel et élément de référence (coordonnées réelles et paramétriques)	42
2.9	Déformation des mailles en sabliers dues à une sous-intégration des éléments	47
2.10	Discrétisation temporelle	49
2.11	Définitions des quantités pour la gestion du contact entre deux corps	54
3.1	Ailes de sertissage	62
3.2	Géométrie des outils	63
3.3	Forme finale du sertissage en B	64
3.4	Un exemple de coupe réalisée sur un sertissage de type SICMA-3 et un câble de 0,50 mm ²	65
3.5	Instrumentation de la presse	65
3.6	Déplacement réel et vitesse du poinçon	66
3.7	Effet de la vitesse de la presse sur la courbe d'effort de sertissage	66
3.8	Courbe de traction du matériau des ailes	67
3.9	Courbe de traction du matériau du câble	68
3.10	Modèle implicite	70
3.11	Effet du choix des modèles bi-dimensionnels en statique implicite	71
3.12	Effet du choix de l'hypothèse bi-dimensionnelle en dynamique explicite	72

3.13	Effet de l'hypothèse bi-dimensionnelle sur la force de sertissage (cas dynamique explicite)	73
3.14	Effet de la vitesse réelle de la presse sur la courbe d'effort de sertissage . . .	74
3.15	Détail du maillage optimal pour le chanfrein des ailes	74
3.16	Les différents maillages testés	75
3.17	Effets de la finesse du maillage sur la surface sertie et sur la force de sertissage	76
3.18	Effets de la finesse du maillage sur les contraintes	76
3.19	Effets de la finesse du maillage sur les déformations plastiques	77
3.20	Effets du choix des éléments sur la surface sertie	78
3.21	Effets du choix des éléments sur la surface des trous et la force de sertissage	78
3.22	Effets du choix des éléments sur la contrainte équivalente de Von Mises . . .	79
3.23	Pressions de contact - Simulation du sertissage avec un algorithme statique implicite	80
3.24	Opérations successives pour mettre en forme les ailes	81
3.25	Pressions de contact - Simulation du cambrage puis du sertissage avec un algorithme statique implicite	81
3.26	Contraintes équivalentes de Von Mises - Avant et après retour élastique . . .	83
3.27	Déformation équivalente plastique - Avant et après retour élastique	84
3.28	Déformées finales pour un câble de 0,35 mm ²	85
3.29	Déformées finales pour un câble de 0,50 mm ²	85
3.30	Déformées finales pour un câble de 0,60 mm ²	85
3.31	Déformées finales pour un câble de 0,75 mm ²	86
3.32	Résultats numériques et expérimentaux concernant la surface sertie	87
3.33	Résultats numériques et expérimentaux concernant la surface des ailes . . .	88
3.34	Résultats numériques et expérimentaux concernant le taux de compression	89
3.35	Comparaison calculs-expériences pour la force de sertissage	90
3.36	Étude de l'influence de la position des torons dans le câble	91
3.37	Effet du frottement des outils	92
4.1	Fût de sertissage	99
4.2	Maillage initial du fût de sertissage pour le modèle 3D extrudé	100
4.3	Énergie interne et énergie de contrôle des modes sabliers dans le cas 3D extrudé	100
4.4	Interférences de contact et modes sabliers dans le cas 3D extrudé	101
4.5	Contrainte de Von Mises pour le câble sur le modèle 3D extrudé	102
4.6	Contrainte de Von Mises pour le fût sur le modèle 3D extrudé	102
4.7	Déformation plastique totale pour le câble sur le modèle 3D extrudé	103
4.8	Déformation plastique totale pour le fût sur le modèle 3D extrudé	103
4.9	Caractéristiques géométriques finales pour le modèle 3D extrudé	104
4.10	Force de sertissage dans le cas du modèle 3D	105
4.11	Comparaison entre une coupe expérimentale et une coupe obtenue avec un coefficient de frottement inférieur à 0,15	105
4.12	Maillage initial du fût de sertissage pour le modèle 3D symétrique avec les stries	106
4.13	Déformation des stries	107

4.14	Déformation des torons par les stries	107
4.15	Maillage initial du fût de sertissage pour le modèle 3D complet	108
4.16	Contrainte de Von Mises pour le fût sur le modèle 3D complet	109
4.17	Contrainte de Von Mises pour le câble sur le modèle 3D complet	109
4.18	Déformation plastique totale pour le fût sur le modèle 3D complet	110
4.19	Déformation plastique totale pour le câble sur le modèle 3D complet	110
4.20	Caractéristiques géométriques finales pour le modèle 3D complet	111
5.1	Plan de Doehlert pour deux facteurs	119
5.2	Plan de Doehlert pour deux facteurs - Rotation	120
5.3	Exploration du domaine pour un plan de Doehlert à deux facteurs	120
5.4	Transformations canoniques	121
5.5	Paramètres d'optimisation	126
5.6	Forme finale du sertissage en B	127
5.7	Fonctions d'adaptation	128
5.8	Fonctions d'adaptation du premier plan d'expériences	130
5.9	Géométrie optimale pour le plan d'expérience I	131
5.10	Géométrie optimale pour le plan d'expérience II	132
5.11	Plis sur les ailes	133
5.12	Géométrie optimale pour le plan d'expérience III	134
5.13	Géométrie optimale pour le plan d'expérience IV	135
B.1	Structure de fonctionnement de la création automatique des modèles bi- dimensionnels	144
B.2	Repérage des arêtes des outils pour leur maillage automatique	145
B.3	Structure de fonctionnement de la création automatique des modèles tri- dimensionnels	147
C.1	Les points du contour du poinçon	150
C.2	Les points du contour de l'enclume	150
C.3	Les points du contour d'une aile de sertissage	152
C.4	Estimation de la surface sertie finale	153
E.1	Principe de fonctionnement du programme de calcul des surfaces	167
F.1	Modes de déformation des éléments quadrilatéraux linéaires	171
F.2	Modes de déformation des éléments hexaédriques linéaires	172

Liste des tableaux

1.1	Quelques enroulements standards de câble utilisés en Europe	9
1.2	Câbles les plus courants utilisés dans l'automobile	9
2.1	Choix de la mesure de déformation suivant le type d'analyse	22
2.2	Relations entre les différentes mesures des contraintes	24
3.1	Dimensions des ailes de sertissage	62
3.2	Dimensions des outils	63
3.3	Propriétés mécaniques des ailes)	67
3.4	Propriétés mécaniques du câble)	68
3.5	Les caractéristiques des différents maillages testés	75
3.6	Simulation du retour élastique en explicite et en implicite	80
3.7	Câbles utilisés dans les simulations	84
4.1	Caractéristiques du modèle 3D extrudé	99
4.2	Caractéristiques du modèle 3D complet	108
5.1	Espace de recherche des paramètres	128
5.2	Espace de recherche des paramètres pour le plan II	131
5.3	Résultats pour le plan II	132
5.4	Résultats pour le plan III	133
5.5	Résultats pour le plan IV	134
B.1	Les différents paramètres du fichier <Parameter2DExp.dat>	146
C.1	Points du contour du poinçon	149
C.2	Points du contour de l'enclume	151
C.3	Points du contour de l'aile	151
D.1	Plan d'expérience de Doehlert pour cinq paramètres	155
D.2	Caractéristiques du plan d'expérience de Doehlert	156
D.3	Plan d'expérience I - Paramètres	156
D.4	Plan d'expérience I - Réponses	157
D.5	Plan d'expérience II - Paramètres	158
D.6	Plan d'expérience 2 - Réponses	159
D.7	Plan d'expérience III - Paramètres	160
D.8	Plan d'expérience 3 - Réponses	161

Liste des tableaux

E.1	Principaux objets de la structure de données développée (2D)	168
E.2	Principaux objets de la structure de données développée (3D)	169
F.1	Vecteurs de déformations d'un élément quadrilatéral linéaire	171
F.2	Vecteurs de déformations d'un élément hexaédrique linéaire	172

Liste des symboles utilisés

Un vecteur est noté \vec{x} et un tenseur est noté $\overline{\overline{A}}$. Nous noterons par une lettre majuscule les grandeurs lagrangiennes et par une lettre minuscule les grandeurs eulériennes.

C_0	configuration de référence
C_t	configuration déformée
ϕ	application déformation
\vec{X}	position dans la configuration de référence
\vec{x}	position dans la configuration déformée
\vec{dX}	vecteur infinitésimal matériel
\vec{dx}	vecteur infinitésimal spatial
$\overline{\overline{F}}$	tenseur gradient de déformation (mixte)
$\overline{\overline{R}}$	tenseur de rotation rigide (mixte)
$\overline{\overline{U}}$	tenseur d'allongement à droite
$\overline{\overline{v}}$	tenseur d'allongement à gauche
$\overline{\overline{C}}$	tenseur de Cauchy-Green droit
$\overline{\overline{b}}$	tenseur de Cauchy-Green gauche
$\overline{\overline{E}}$	tenseur des déformations de Green-Lagrange
$\overline{\overline{a}}$	tenseur des déformations d'Euler-Almansi
$\overline{\overline{e_0}}$ ou $\overline{\overline{\varepsilon}}$	tenseur des déformations d'Hencky-Mises (logarithmiques)
$\overline{\overline{\sigma}}$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\overline{\overline{T}}$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de première espèce (PK1)
$\overline{\overline{S}}$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce (PK2)
$\overline{\overline{\tau}}$	tenseur des contraintes de Kirchhoff
$\overline{\overline{\sigma_R}}$	tenseur co-rotationnel des contraintes
$\overline{\overline{L}}$	tenseur gradient des vitesses de déformation
$\overline{\overline{D}}$	tenseur des taux de déformation
$\overline{\overline{W}}$	tenseur des taux de rotation
$\overline{\overline{\Omega}}$	tenseur taux de rotation pure
$\overline{\overline{M^{G-N}}}$	dérivée objective de Green-Naghdi
$\overline{\overline{M^{Jau.}}}$	dérivée objective de Jaumann
$\overline{\overline{\varepsilon_p}}$	tenseur des déformations plastiques
$d\lambda$	multiplicateur plastique

Liste des symboles utilisés

f	surface de charge
$\overline{\overline{H_e}}$	tenseur d'élasticité (quatrième ordre)
A	largeur des ailes de sertissage
B	hauteur des ailes de sertissage
β	angle d'ouverture des ailes
R_c	rayon intérieur des ailes
e_1	épaisseur du matériau
e_2	largeur du chanfrein
α	angle du chanfrein
W_p	largeur du poinçon
C	hauteur du poinçon
D	hauteur totale du poinçon
R_p	rayon du poinçon
δ	angle supérieur du poinçon
ε	angle inférieur du poinçon
D_p	profondeur du rayon du poinçon
L_a	largeur de la partie arrondie de l'enclume
W_t	profondeur du rayon de l'enclume
L_c	longueur du chanfrein des ailes
L_i	longueur intérieure des ailes
L_d	longueur développée des ailes
W_a	largeur de l'enclume
W_f	largeur du méplat de l'enclume
R_a	rayon de l'enclume
S_{ini}^{wire}	surface initiale du câble
S_{end}^{wire}	surface finale du câble
t_C	taux de compression du câble
S_{ini}^{wing}	surface initiale des ailes
S_{end}^{wing}	surface finale des aile
t_W	taux de compression des ailes
H	hauteur finale du sertissage
W	argeur finale du sertissage

Résumé

Le sertissage est une technologie classiquement employée pour assurer la liaison électrique et mécanique entre un câble et un connecteur. La modélisation numérique du procédé est utile pour choisir et optimiser en particulier les dimensions du sertissage. L'étude présentée est une discussion des modèles 2D et 3D réalisés avec la méthode des éléments finis, que ce soit en statique implicite (ABAQUS/Standard) ou en dynamique explicite (ABAQUS/Explicit). Les résultats de ces modèles sont comparés à ceux issus directement du procédé industriel (géométrie, forme, surfaces et force de sertissage). Le sertissage est un problème non-linéaire impliquant des grandes déformations élasto-plastiques et des conditions de contact multiples, avec frottement. La plus grande difficulté réside dans la profusion de couples de contact possibles entre les torons du câble. Pour cette raison, la méthode dynamique explicite est préférée, en dépit de l'aspect quasi-statique du sertissage. Toutefois, certaines simulations 2D ont pu être réalisées avec un algorithme statique implicite, pour comparer et pour régler quelques paramètres de simulation dans l'approche dynamique explicite (discrétisation spatiale et temporelle). Enfin, nous proposons une optimisation des paramètres du sertissage reposant sur l'usage de plans d'expériences et d'analyse des surfaces de réponse ainsi constituées.

Mots-clés: sertissage, connecteurs, éléments finis, grandes déformations, élastoplastique, explicite

Abstract

The crimping is a classical technology process to ensure the electrical and the mechanical link between a wire and a connector. The numerical modelling of the process is helpful to choose and to optimize the dimensions of the crimping part of the connector. In this work, we discuss a 2D and 3D simulation of the crimping, using implicit and explicit finite element method (ABAQUS/Standard and ABAQUS/Explicit) and we compare the results with experimental data from industrial process of crimping (geometry, shape, surfaces and punch force). This nonlinear problem involves large elasto-plastic strains and multiple contact conditions, with friction between the wires and the grip. One of the major difficulties of the simulation is due to the definition of all possible contact couples between strands. The explicit method is preferred for the modelling of multi-contact, in spite of the quasi-static process of crimping. Thus, some simulations with the implicit method have been performed to compare the results and tune the simulation parameters of the explicit approach (space and time discretization). After that, a mathematical optimisation of the parameters of the crimping based on design of experiments and response surfaces.

Keywords: crimping, connectors, finite elements, large strains, elastoplastic, explicit

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre introduit le sujet et pose la problématique de l'étude. Dans un premier temps, nous présentons le produit, l'entreprise et les technologies. Nous nous attardons sur les applications de la connectique à l'automobile. L'accent est mis sur l'organisation du projet qui implique plusieurs acteurs importants dans les principaux domaines afférents au sertissage. Puis, nous étudions la littérature sur le sertissage. Cette documentation est essentiellement d'origine technologique : spécifications, cahiers des charges et rapports divers provenant des différentes unités du groupe FCI. Nous commentons également quelques articles plus académiques sur le sujet et nous finissons par esquisser le plan adopté dans le présent mémoire.

1.1 Le projet sertissage

1.1.1 L'entreprise

Le projet sertissage (« Crimping Project ») a été lancé en 1998 par la société FCI France. FCI (pour Framatome Connectors International) est l'un des plus grands fabricants de connecteurs électriques mondiaux. C'est une compagnie du groupe AREVA, société issue du regroupement des activités de CEA-Industries (études et projets), de la COGEMA (retraitement du combustible nucléaire) et de Framatome ANP (construction de chaudières et de matériel nucléaire). Mais près de 50% de ses activités concernent la connectique (FCI) et l'électronique (par une participation au capital de STMicroelectronics). La connectique est une activité charnière dans l'industrie électrique et électronique car elle est indispensable au fonctionnement de tous les systèmes électriques et électroniques. Les applications vont des lignes à très haute tension des producteurs d'électricité mondiaux jusqu'aux mini-connecteurs employés en téléphonie ou en informatique. FCI a des activités dans tous ces domaines : aéronautique, industries spatiale et militaire, automobile, communication, électronique et informatique.

1.1.2 Les produits

1.1.2.1 Applications pour l'automobile

Pour l'automobile, les applications sont multiples et en plein développement (voir figure 1.1). Aux fonctions électriques de base (éclairage et accessoires classiques), il faut désormais ajouter les systèmes électroniques embarqués pour la sécurité active (ESP, suspension et direction électrique, ABS), la sécurité passive (airbag et prétensionneurs de ceinture), les équipements de navigation et de confort (climatisation, navigation GPS) et de contrôle du moteur et de la mécanique en général (injection électronique, accélérateur électronique, etc.).

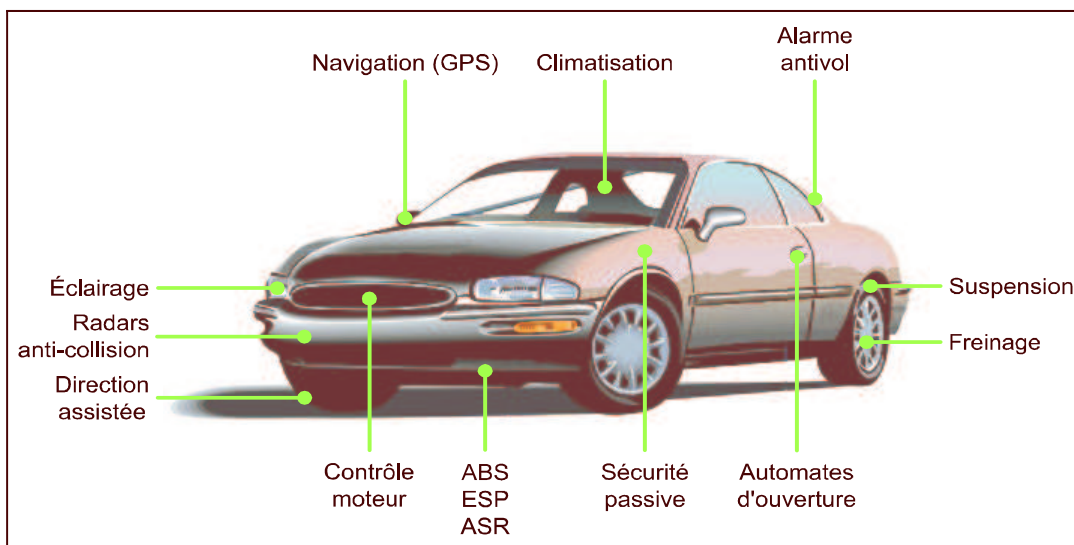


Fig. 1.1: Exemple de systèmes électroniques embarqués sur véhicule

Sur la figure 1.2, nous avons quelques exemples de connecteurs fabriqués par FCI. Les connecteurs sont des pièces complexes constituées par un assemblage de pièces métalliques, d'électronique et de plastique.

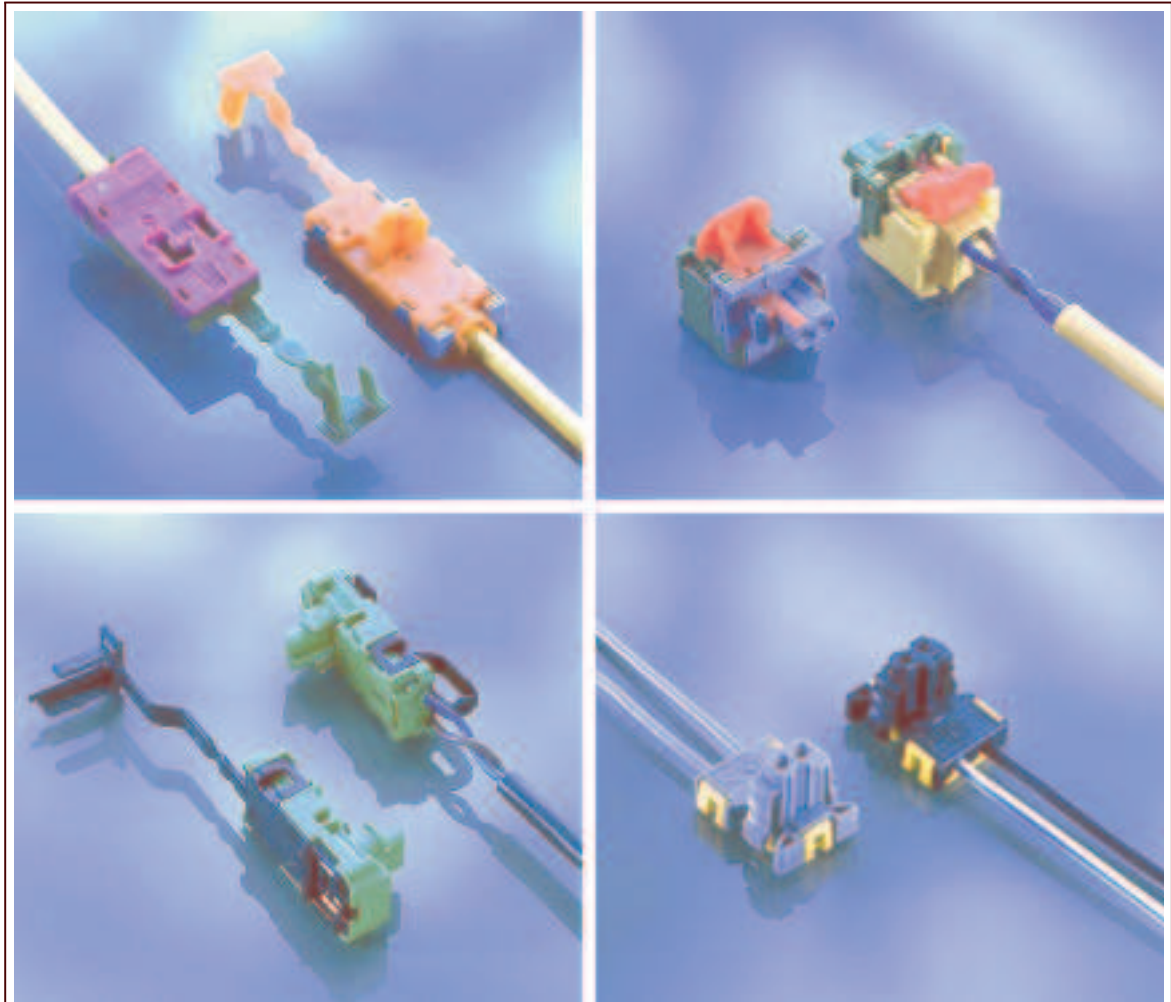


Fig. 1.2: Quelques exemples de connecteurs électriques automobiles

1.1.2.2 Axes de développement et de recherche

Il y a plusieurs axes de développement impliquant la technologie du sertissage dans le domaine de l'automobile. Le sujet est sensible, car, par exemple, une automobile moderne comme la Peugeot 406 développe de 4 à 5 km de fil et près de mille points de contact. Les pannes d'origine électrique sur véhicule atteignent plus de 30% du total des défaillances et sur ces 30%, les trois quarts proviennent d'un défaut de la connectique. On voit donc l'importance de développer les connaissances sur le sertissage. Nous citons quelques axes de développement qui concernent directement le sertissage.

a Sections des câbles

Actuellement, le câble le plus répandu est de section 0,35 mm² pour une tension nominale de 12 V. Mais il est prévu de changer l'alimentation électrique des automobiles à 42V, ceci afin de diminuer la section des câbles. En effet, pour la même puissance disponible, on réduira l'intensité dans le fil et donc la section nécessaire. Cette miniaturisation impliquera des câbles de section 0,22 mm², 0,18 mm², voire 0,14 mm².

b Équipements électroniques

L'électronique numérique a pour particularité d'utiliser des courants faibles et nécessite donc une très faible résistance et une très bonne continuité électrique. De plus, la plupart des centrales électroniques « sensibles » (Airbag, ABS ou contrôle de l'injection du carburant) ont des systèmes de diagnostic qui contrôlent en permanence l'état de leur réseau, en particulier la qualité de ses liaisons électriques (par une mesure de la résistance globale des câbles). Ceci se répercute souvent vers le conducteur par un voyant de défaillance.

c Nature des câbles

Le projet de changer la nature du câble consiste essentiellement à passer du cuivre à l'aluminium, afin de gagner du poids et de réduire les coûts. Cette problématique est particulièrement aigüe dans certains domaines comme l'aéronautique.

1.1.3 Organisation du projet

Le projet sertissage est un projet important pour FCI (voir figure 1.3). Il implique trois thèses, deux laboratoires universitaires, le centre de recherche commun (CRC) de FCI et les différentes unités concernées (essentiellement les divisions *Automotive*, *Aeronautic* et *Electrical* en France, en Allemagne, aux USA et en Italie).

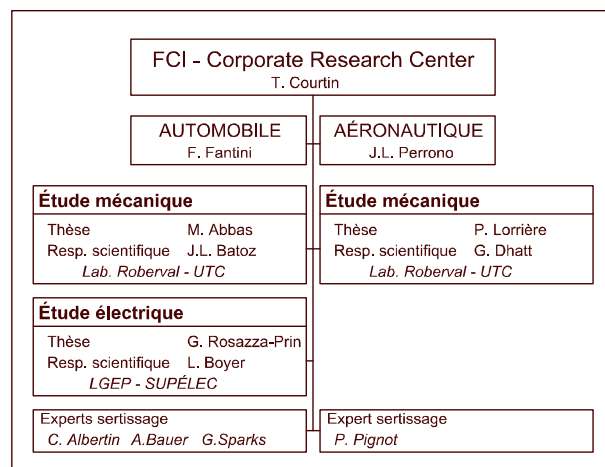


Fig. 1.3: Organisation du projet sertissage

1.2 État de l'art

Tous ces systèmes électriques sont de plus en plus exigeants sur la qualité des connexions (continuité électrique). Cette fonction de base du connecteur se réalise en deux endroits : sur le contact proprement dit (système mâle/femelle) et sur la liaison entre le connecteur et le câble.

1.2.1 Description et terminologie

Un connecteur électrique est un système fort complexe. Sur la figure 1.4, on voit un exemple de connecteur évolué. Il est constitué d'un système de verrouillage en plastique qui assure aussi l'étanchéité du système. Ce connecteur est équipé pour les liaisons HI-FI grâce à deux contacts de type fibre optique (fil jaune) et d'un terminal plus classique avec verrouillage mécanique.

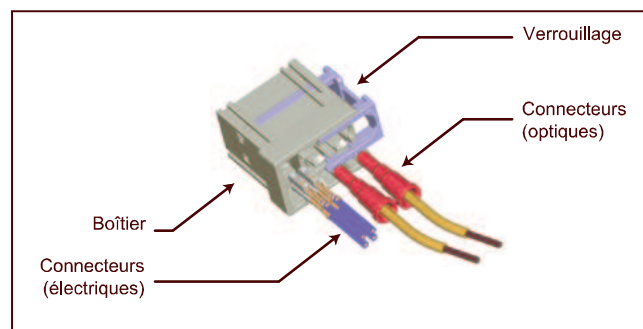


Fig. 1.4: Exemple de connecteur automobile

Le sertissage a une double fonction :

- Assurer une résistance mécanique minimale (résistance à l'arrachement du câble principalement).
- Assurer la continuité électrique (minimiser la résistance électrique et les discontinuités).

Les deux fonctions sont étroitement couplées et dépendent de l'opération de mise en forme que constitue le sertissage.

1.2.1.1 Définitions

La figure 1.5 présente la partie métallique du connecteur, appelée aussi *terminal*.

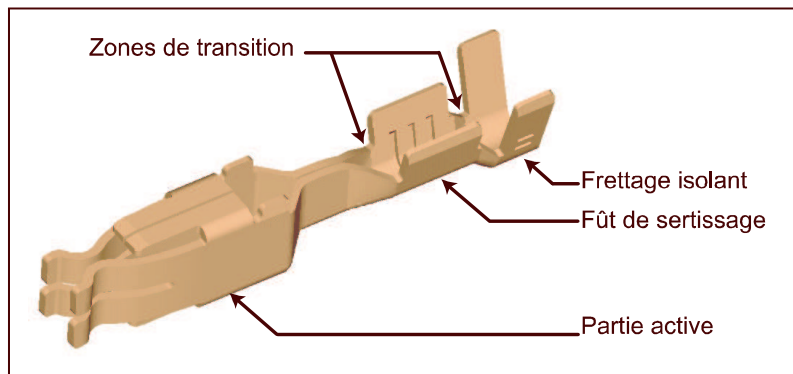


Fig. 1.5: Composition d'un connecteur électrique classique

Les principaux constituants d'un contact sont :

- La partie active : c'est la partie utile d'un connecteur. Elle sert à établir le contact avec un autre connecteur associé, généralement basé sur le principe mâle/femelle. Il existe des centaines de variantes de cette partie, selon l'application.
- Le sertissage : cette partie est aussi appelée fût de sertissage. C'est ici que l'on réalise la liaison électrique et mécanique du câble avec le contact.
- Frettage isolant : cette partie fixe la partie isolée du câble. Sa fonction est purement mécanique. On y adjoint souvent un joint d'étanchéité.
- Zones de transition : ces zones assurent les transitions entre les différentes parties.

1.2.1.2 Types de sertissage

Il existe plusieurs sortes de sertissage. La première distinction se fait suivant le type du fût, ouvert ou fermé. Nous étudions le système en fût ouvert. Une autre thèse (celle de Philippe Lorrière) s'intéresse au cas des fûts fermés (voir aussi [Abb99]).

- Fût fermé : le fût est fait d'un seul tenant, d'une forme circulaire ou carrée. On assure le sertissage en écrasant certaines parties. C'est le mode privilégié par l'industrie aéronautique : il ne demande pas d'efforts très importants et s'accommode fort bien d'un outillage manuel (normalisé).
- Fût ouvert : le fût est généralement fait d'une ou plusieurs paires d'ailes, des parties que l'on va replier et écraser sur le câble. C'est le mode privilégié dans l'industrie automobile.

Le système en fût ouvert est lui-même divisé en plusieurs catégories (voir figure 1.6)

- Le sertissage en « B » : deux ailes sont repliées de manière symétrique et forment une sorte de B ou de double bosse de chameau.
- Le sertissage en « O » : les deux ailes sont repliées et forment un cercle.
- Le sertissage « par recouvrement » : les deux ailes sont repliées et viennent se recouvrir.

La principale technique utilisée dans l'automobile est le sertissage en « B », que nous étudions ici.

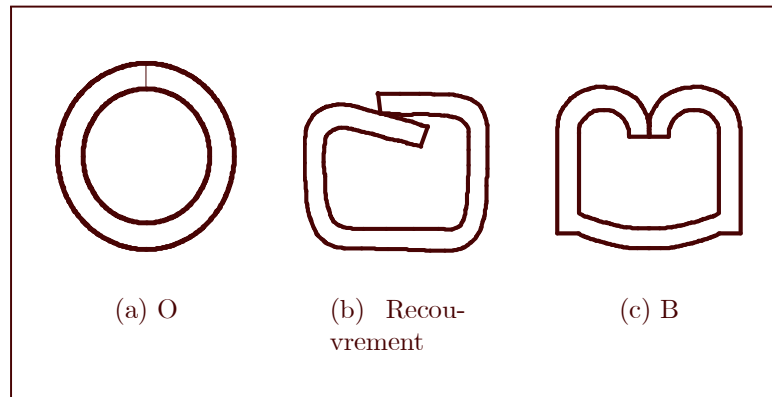


Fig. 1.6: Les différents types de sertissage en fût ouvert

Les contacts de type « fût ouvert » sont réalisés à partir de feuillard de cuivre ou de cuivre étamé que l'on découpe et que l'on plie, grâce à un outillage très élaboré, sur des presses de grande capacité. La vitesse de fabrication de ces contacts est très élevée (les cadences de fabrication des contacts atteignent près de 7000 pièces à l'heure). A la fin du processus de fabrication, les contacts sont fixés sur une bande métallique que l'on enroule.

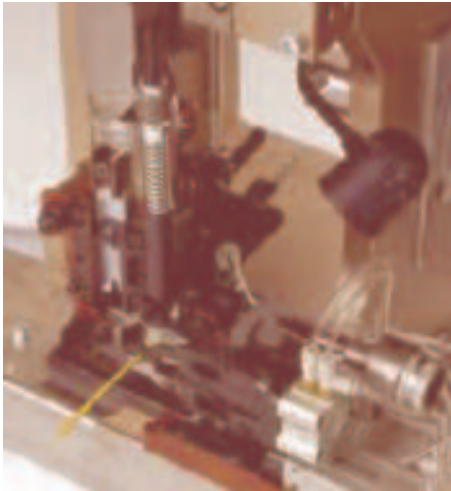
1.2.2 Techniques industrielles

1.2.2.1 Outillage

Le sertissage en « B » est réalisé par un outillage simple et compact. L'ensemble des poinçons et enclumes nécessaires sont réunis dans un bloc interchangeable que l'on monte sur une presse électrique standard. On appelle ce bloc un mini-applicateur. Il contient aussi des systèmes de calage et de positionnement des contacts (qui sont sur une bande métallique enroulée). Le mini-applicateur est généralement utilisé pour toute une génération de contacts, la partie sertissage étant la plus standardisée possible. Les poinçons et enclumes sont modifiables et il est donc possible de sertir plusieurs tailles de contact dans le même mini-applicateur.

1.2.2.2 Procédé

Le sertissage est une opération entièrement automatisée. Le système complet comprend un système qui s'occupe de découper et dénuder le câble (voir figure 1.7 à la page 8).



(a) Le câble à sertir est inséré automatiquement dans le support. Les pinces se ferment et restent fermées durant tout le processus.



(b) Les couteaux dénudent alors automatiquement la bonne longueur de cuivre.



(c) Le support de câble se place de manière à insérer le câble au bon endroit dans le mini-applicateur. Le sertissage commence.

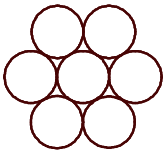
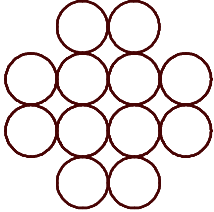
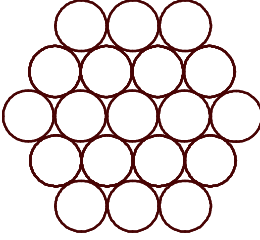


(d) Le sertissage est terminé. Le support de câble se déplace et ses pinces lâchent le câble dans le réceptacle prévu. Le système est prêt pour un nouveau cycle.

Fig. 1.7: Processus automatisé du sertissage

1.2.2.3 Câble

Les câbles utilisés dans l'industrie automobile sont faits de plusieurs torons de cuivre. On construit ces câbles en enroulant plusieurs couches successives de torons. Ces brins sont torsadés d'environ 50° sur la longueur du fût. Les sections de câble sont plus ou moins normalisées et on retrouve des sections standards chez la plupart des constructeurs automobiles. Certaines sections sont spécifiques à certains pays. Par exemple, on utilise beaucoup le câble de section $0,85 \text{ mm}^2$ au Japon et pas du tout en Europe ou en Amérique. On distingue généralement les enroulements de torons symétriques ou non-symétriques. (voir table 1.1).

7 brins	12 brins	19 brins
		
symétrique	non symétrique	symétrique

Tab. 1.1: Quelques enroulements standards de câble utilisés en Europe

Cette profusion de sections différentes (voir table 3.7) oblige les connecticiens à proposer des *gammes* de contacts aux équipementiers et constructeurs automobiles. Une gamme est un ensemble constitué d'une géométrie pour les ailes de sertissage et pour l'outillage (poinçon et enclume). Elle est conçue pour plusieurs tailles de câble. Ceci a pour but de réduire au maximum les coûts d'outillage et de gestion. Sachant que ces gammes sont généralement indépendantes de la partie active. C'est à dire que pour plusieurs types de contacts à emplois différents, on retrouvera la même géométrie de sertissage.

Section	Nombre de brins	Diamètre des brins	Section réelle
$0,22 \text{ mm}^2$	7	0,20 mm	$0,2199 \text{ mm}^2$
$0,35 \text{ mm}^2$	7	0,25 mm	$0,3436 \text{ mm}^2$
$0,50 \text{ mm}^2$	7	0,30 mm	$0,4947 \text{ mm}^2$
$0,60 \text{ mm}^2$	12	0,25 mm	$0,5890 \text{ mm}^2$
$0,75 \text{ mm}^2$	19	0,22 mm	$0,7222 \text{ mm}^2$
$1,00 \text{ mm}^2$	19	0,25 mm	$0,9327 \text{ mm}^2$

Tab. 1.2: Câbles les plus courants utilisés dans l'automobile

1.2.3 État de l'art

Le sertissage est une technique industrielle très ancienne. Les premiers travaux sur le sujet remontent à plus de cinquante ans.

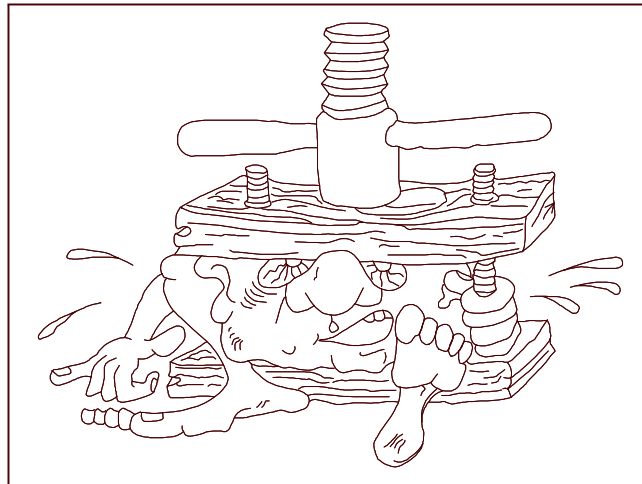


Fig. 1.8: Think compression! (d'après [But97b])

1.2.3.1 Cahier des charges et spécifications

La plupart des connaissances acquises sur le sujet sont empiriques. La masse d'expériences accumulées au cours des années par les différents experts est transmise dans quelques rares documents, difficiles d'accès car souvent confidentiels et internes aux entreprises. Nous disposons cependant d'une base intéressante à travers les différents articles de J. Butler ([But98],[But97a], [But97b], [But96a] et [But96b]) publiés dans *Wiring Harnesses News*, une revue professionnelle. Ces articles sont essentiellement historiques (J. Butler présente par exemple les différentes presses de sertissage utilisées au cours de l'histoire). Mais on peut y trouver quelques informations intéressantes sur les critères visuels de détermination de la qualité d'un sertissage. La source d'informations la plus fiable se trouve dans les cahiers des charges des constructeurs automobiles ([REN98], [SOG98] et [REN89]). La plupart de ces documents décrivent les tests que doivent subir les sertissages avant d'être validés :

- Tests mécaniques : arrachement du câble, tenue à la flexion, tenue aux vibrations.
- Tests thermiques : tests en cyclage de température (VRT : variations rapides de températures).
- Tests électriques : qualité de la connexion (résistance, mesure des discontinuités). Ces tests sont effectués avant et après les autres.
- Test chimiques : brouillard salin ou d'autres atmosphères corrosives qui accélèrent le processus de vieillissement du connecteur.

Au cours de ce projet, nous avons recueilli un maximum de renseignements auprès des différentes unités du groupe. Une synthèse sur les règles de conception utilisées en France, en Allemagne, en Italie et aux USA peut être trouvée dans [ARPL02].

1.2.3.2 Contact

À cause de la rugosité de la surface, la zone de contact mécanique réelle n'est qu'un faible pourcentage de la zone de contact macroscopique. De plus, la particularité du

contact électrique est de se satisfaire de très petits spots de contact qui ne sont qu'une infime partie des aires réelles de contact mécanique.

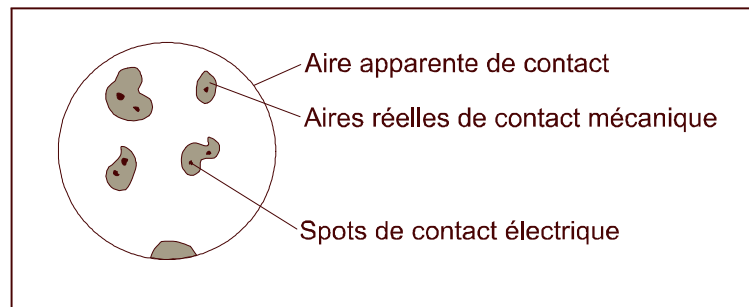


Fig. 1.9: Les aires de contact mécanique et électriques

Grâce aux travaux de Rosazza-Prin, [RPCB02], nous disposons désormais d'une méthode de mesure très fine des résistances « individuelles ». C'est-à-dire que nous sommes capables d'isoler les contributions de chaque toron à la résistance globale du sertissage.

a Point de vue mécanique

Nous utilisons l'ouvrage de Johnson ([Joh85]), où un certain nombre de résultats issus de la mécanique analytique classique sont présentés.

- Chargement sur un solide élastique semi-infini (travaux de Boussinesq), sollicitation de type ponctuel, ou linéaire.
- Contact normal de deux corps élastiques (théorie de Hertz).
- Contact non-hertzien (plastification, friction).
- Contact entre surfaces rugueuses.

Ces résultats utilisent des critères macroscopiques, appartenant au champ de la mécanique :

- La courbure relative des surfaces en contact (sphère, plan,).
- Le comportement : élastique ou plastique.
- La force de mise en contact.

Les résultats intéressants sont, généralement, la pression moyenne de contact \bar{p} et la pression locale de contact p . Dans le cadre d'une simulation par éléments finis (voir chapitre 2), les zones de contact sont discrétisées et le comportement de l'interface est modélisé par une loi de frottement de type Coulomb. La méthode des éléments finis ne permet pas de calculer la zone de contact mécanique réelle.

b Point de vue électrique

D'un point de vue micro-physique, le courant électrique passe à travers des zones de contact entre les torons, et entre les torons et le fût du câble (voir par exemple [Féc96]). Un

bon contact électrique est un contact où la résistance interne est minimisée. La conduction du courant dans un système électrique est attachée à deux limitations physiques principales :

1. La résistance interne du matériau. Sauf dans le cas des supraconducteurs, tout conducteur électrique oppose une résistance au passage du courant : c'est la résistivité électrique (pour l'argent $1,59 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, pour le cuivre $1,67 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, pour l'or : $2,35 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ et pour l'aluminium $2,69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$).
2. La résistance de contact entre les conducteurs dans le cas d'une liaison électrique multi-connectée.

Les deux surfaces en contact (mécanique) sont au moins assimilables localement à des surfaces de degré deux. Cette hypothèse est réaliste car en adéquation avec les procédés de fabrication. Deux corps sont en contact au travers de zones réelles de contact mécanique, définies par le niveau de charge et la rugosité des deux surfaces. Les zones de contact mécanique ne sont pas disponibles entièrement pour le contact électrique. Il existe donc des spots de contact électriques. En définitive, un faible pourcentage de la surface de contact apparente est utile au passage du courant électrique.

La résistance électrique de contact contient deux composantes principales :

- La résistance de constriction, due à la constriction des lignes de champ électrique.
- La résistance de film, due à l'interface matériau entre les deux corps en contact (couche d'oxyde éventuelle ou pollution atmosphérique, lubrification, etc.).

En raison de la résistance de film, on utilise deux grandes classes de modèles : les modèles à continuité ou quasi continuité du conducteur (avec une résistance de film négligeable) et les modèles à discontinuité du conducteur.

Modèles à continuité ou quasi-continuité du conducteur Les deux membres du contact communiquent par un ou plusieurs passages à caractère principalement conducteur. Les modèles à un seul passage sont de trois types, selon la valeur du nombre de Knudsen K où l est le libre parcours moyen des électrons et a est le rayon du point de contact :

- Si $K \ll 1$, le régime est localement ohmique.
- Si $K \gg 1$, le régime est balistique.
- Si $K = 1$, le régime est intermédiaire.

Chaque cas se traite différemment. Pour les modèles à plusieurs passages, on utilise les mêmes hypothèses, selon la nature du régime. Il existe également des modèles numériques faisant appel à la méthode des éléments finis.

Modèles à discontinuité du conducteur Les modèles sont bien plus complexes et font appel à des notions de physique du solide. En général, on distingue le cas des barrières épaisses (émission thermoélectronique) et celui des barrières fines (effet tunnel).

1.2.3.3 Bibliographie

Pour la bibliographie d'origine plus académique, nous avons quatre actes de conférence qui se rapportent à la simulation numérique du sertissage des connecteurs électriques en fût ouvert. Deux d'entre eux proviennent de la conférence IEEE-Holm, spécialisée dans les problèmes de contact électrique.

- [Kug95]. Cet article est un peu particulier puisqu'il est publié dans le journal « publicitaire » du numéro un mondial de la connectique, AMP-Tyco. L'auteur présente les résultats de simulation de sertissage faite sur le logiciel ANSYS, à l'aide d'une méthode statique implicite. Confronté aux problèmes de non-linéarités très importants du sertissage, l'auteur utilise des techniques simplificatrices comme l'utilisation d'un matériau plein équivalent à la place du câble multi-torons, avec ses multiples possibilités de contact. La géométrie étudiée est également limitée au cas du sertissage « par recouvrement », la gestion d'un contact symétrique en « B » ayant échoué.
- [VKBB96]. Dans cet article, les auteurs présentent une analyse éléments finis utilisée pour simuler le sertissage. Les modèles ont été créés sur ABAQUS, en 2D (en contraintes et en déformations planes). Cet article se limite pour l'essentiel à démontrer la faisabilité de la démarche et à étudier l'effet du frottement sur la qualité du sertissage. Notons que les auteurs ont fait le choix d'une méthode de simulation explicite à vitesse accélérée (24 m/s au lieu des 0,4 m/s réels de l'opération), ceci afin de gagner du temps sur la simulation. L'article conclut aussi qu'il est impératif d'utiliser le modèle en contraintes planes (extrusion transverse libre) sous peine de bloquer le calcul.
- [Ber98]. Cet article ressemble au précédent dans les méthodes employées : ABAQUS/Explicit et contraintes planes. L'auteur met aussi en évidence un problème que l'on rencontre fréquemment en simulation des procédés de mise en forme : la loi de comportement n'est pas parfaitement connue. En simulation du sertissage, on atteint des niveaux de déformations plastiques supérieures à 100% alors que les tests de traction utilisés habituellement pour identifier les matériaux ne dépassent guère les 10-15% de déformation avant rupture. Il préconise de ne pas laisser la courbe de traction être prolongée automatiquement par ABAQUS, qui utilise une extrapolation à pente nulle de la courbe d'écrouissage quand la simulation dépasse les spécifications indiquées par l'utilisateur. Il est intéressant aussi de noter l'évolution du logiciel (cet article utilisait la version 5.3 d'ABAQUS et nous en sommes à la version 6.3). En effet, l'auteur a éprouvé des difficultés dues aux problèmes de modes sabliers en utilisant les éléments quadrangulaires à intégration réduite utilisables dans ABAQUS/Explicit. Cela l'a contraint à se limiter à des éléments triangulaires un peu trop rigides. Ces problèmes sont bien moins présents dans les versions plus récentes. Pour finir, l'article expose également (tout comme dans [Ber98]) les problèmes de frottement et leurs effets sur la géométrie finale du sertissage.
- [MSTa95]. Cet article présente le résultat de la simulation du sertissage en 2D sur le logiciel MARC, avec la méthode statique implicite. Les résultats sont intéressants car les auteurs utilisent des éléments en déformations planes et arrêtent la simulation

dès que le câble s'écrase, car le calcul se bloque du fait de l'impossibilité physique d'extrusion. Ils discutent aussi d'une méthode un peu empirique de matériau viscoplastique pour tenter de simuler un retour élastique correct. A noter également un intéressant modèle équivalent avec des ressorts pour expliquer les effets du retour élastique.

- Nous citons aussi une référence trouvée sur internet. Il s'agit d'une simulation 3D faite par la société AC-Engineering (rachetée en 2002 par le groupe HKS, éditeur d'ABAQUS). Cette société propose sur son site WEB une animation 3D de la simulation d'un sertissage en « B » faite avec le logiciel ABAQUS/Explicit.

Ces quelques articles nous permettent d'orienter notre étude sur la simulation bi-dimensionnelle en contraintes planes plutôt qu'en déformations planes (qui sont physiquement bloquées), à l'aide de logiciels en dynamique explicite plutôt qu'en statique implicite. Ils nous donnent également des pistes pour améliorer la vitesse d'un calcul par l'emploi d'une vitesse de poinçon accélérée, et les moyens de contrôler la qualité des résultats obtenus. Ils mettent aussi en exergue le problème du frottement et le choix des coefficients adéquats ainsi que les paramètres de la loi de comportement.

1.3 Objectifs de la thèse

1.3.1 Description de la problématique

La problématique du sertissage se définit en une phrase :

Qu'est-ce qu'un bon sertissage et comment l'obtenir ?

La question est vaste et mérite quelques éclaircissements. Le premier but de l'étude est de trouver des moyens et des méthodes pour concevoir de manière numérique des modèles du sertissage. L'effet congruent est d'accroître les connaissances objectives et scientifiques sur le sertissage. Pour cela, le projet ne se contente pas de simuler le sertissage mais possède aussi un pan entier baigné dans les problèmes purement électriques, car il faut se souvenir que la première fonction du sertissage est de conduire le courant.

Ces outils permettront de pré-concevoir des sertissages, d'élaborer des règles générales de conception avant de passer à un prototypage toujours très coûteux. De plus, l'objectif à moyen terme est d'obtenir une standardisation des gammes à travers toutes les unités de FCI. Il est donc impératif de fournir des preuves objectives et rigoureuses d'une bonne conception.

La définition d'un bon sertissage repose sur deux niveaux de connaissances :

- Les connaissances objectives : résultats des théories micro-physiques, électriques et mécaniques.
- Les connaissances empiriques : résultats des tests, expériences et connaissances accumulées par les experts du domaine.

On connaît de ce fait quelques règles de base pour la définition d'un bon sertissage. Ces critères sont principalement :

- Un taux de réduction de section du câble compris entre 15 et 20%.

- Une surface de contact maximale.
- Un minimum de vide dans la section.
- Un bon respect de la symétrie et quelques règles de qualité visuelle (pour plus de détails, voir le chapitre 5).

1.3.2 Plan de travail et organisation de l'étude

La simulation numérique du sertissage se fera en trois temps :

1. Simulation en 2D sans câble.
2. Simulation en 2D avec câble.
3. Simulation en 3D avec câble.

Les problèmes sont de difficulté croissante mais la répartition du temps de travail n'est pas nécessairement proportionnelle. Le modèle bidimensionnel avec câble est important car il s'agit de la manière actuelle de concevoir les sertissages utilisés par tous les bureaux d'études. Et c'est sur ce même modèle que l'on greffera une optimisation (au sens mathématique du terme) des paramètres du sertissage. En termes d'efficacité et de productivité, les modèles bi-dimensionnels simulés par des méthodes explicites sont rapides, et les modèles tri-dimensionnels viendront compléter l'analyse.

Le présent mémoire n'est qu'un résumé du travail fourni durant ce projet. Il se divise en six chapitres :

1. La présente introduction.
2. Un chapitre consacré aux aspects théoriques de mécanique numérique utilisés.
3. Les résultats de l'analyse bi-dimensionnelle, les modèles numériques employés, leurs limites et leurs hypothèses. Ce chapitre présente aussi les résultats expérimentaux permettant la validation du modèle numérique.
4. Les résultats de la simulation tri-dimensionnelle, dans le même esprit que le chapitre trois.
5. L'optimisation des paramètres géométriques du sertissage, la méthode d'optimisation employée (plans d'expérience et optimisation sous contraintes).
6. Une conclusion de l'étude.

Nous avons présenté quelques unes des définitions importantes du sertissage. Cette analyse industrielle et technologique nous a permis, au travers d'une large analyse bibliographique, d'esquisser les premiers traits d'une analyse nécessaire du sertissage, d'un point de vue mécanique. Nous sommes donc prêts à aborder les résultats proprement dits de l'étude, après un nécessaire détour du côté des aspects théoriques de mécanique et modélisation pour la simulation numérique du sertissage.

Chapitre 2

Quelques aspects généraux de modélisation par éléments finis en présence de grandes transformations

La modélisation numérique du sertissage utilise les développements faits au cours des trente dernières années sur les méthodes de simulation des procédés de mise en forme. A ce titre, le sertissage est un parfait exemple des trois grandes classes de non-linéarités rencontrées habituellement :

- Les non-linéarités géométriques qui apparaissent à cause des grands déplacements, des grandes rotations et des grandes déformations.*
- Les non-linéarités matérielles. Les matériaux ont un comportement élasto-plastique.*
- Les non-linéarités dues au contact. La simulation du sertissage sur des câbles multi-torons présentant une difficulté majeure.*

Dans ce chapitre, nous rappelons les principaux concepts relatifs à la mécanique des milieux continus solides en transformations finies (grands déplacements, grandes rotations) : mesures de déformations et de contraintes, principe des puissances virtuelles, conditions de contact-frottement. La discrétisation par éléments finis de type déplacements en deux et trois dimensions est également abordée dans le cadre d'une résolution du problème par un algorithme dynamique explicite (nous utiliserons principalement le code commercial ABAQUS/Explicit pour nos calculs).

2.1 Introduction aux transformations finies

Les références bibliographiques sur le sujet sont très nombreuses. En effet, il existe des ouvrages de référence en mécanique des milieux continus ([GM95], [LC96], [GZ68], [MH83] et [Ogd84]), des chapitres dans les ouvrages consacrés à la méthode des éléments finis ([BD90a], [BD90b], [BW97], [Cri91], [ZT00], [BLM00] et [Bat96]). Il existe aussi beaucoup d'articles, de cours et de rapport sur ces sujets.

2.1.1 Description du mouvement

2.1.1.1 Définitions

Nous débutons par quelques définitions importantes.

Définition 1 (Volume Élémentaire Représentatif) *La mécanique des milieux continus repose sur l'hypothèse fondamentale de comportement homogène du Volume Élémentaire Représentatif (VER). Ce volume doit être «grand» par rapport à l'échelle des hétérogénéités de la microstructure et suffisamment «petit» par rapport à celle de la structure macroscopique pour prêter à un comportement continu ([FPZ95]). La taille de la brique élémentaire (VER) dépend de la nature du matériau, de la théorie, des méthodes et des comportements étudiés.*

Un corps solide quelconque \mathcal{S} occupe, à l'instant t , un domaine matériel \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 , de volume V_t et de frontière Γ_t . Ce solide occupe différentes positions dans le temps et l'espace lorsqu'il est soumis à l'action de sollicitations extérieures (voir 2.1).

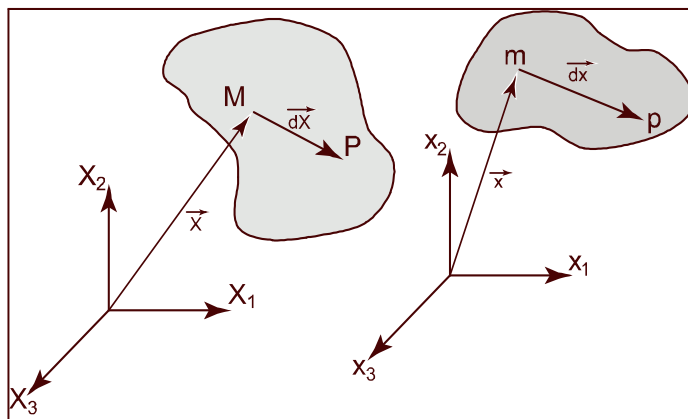


Fig. 2.1: Configuration initiale et déformée

Définition 2 (Configuration) *On appelle configuration du solide à l'instant t et on note \mathcal{C}_t l'ensemble des positions des points matériels du solide. Nous appelons configuration de référence que nous noterons \mathcal{C}_0 , la configuration choisie pour l'instant initial.*

Il est possible de ne considérer qu'un seul repère pour toutes les configurations mais nous continuerons cependant de distinguer le repère $(E_I)_{I=1,2,3}$ de la configuration de référence \mathcal{C}_0 , du repère $(e_i)_{i=1,2,3}$ de la configuration courante \mathcal{C}_t .

Notation Sauf ambiguïté, nous noterons par une lettre MAJUSCULE toutes les grandeurs se référant à la configuration initiale (pour $t = 0$) et par une lettre minuscule, toutes les grandeurs se référant à la configuration courante (pour un t quelconque).

2.1.1.2 Repères et formulations

Il y a deux grandes manières d'aborder la description d'un mouvement. Si l'on suit le mouvement individuel d'une particule dans le repère de la configuration de référence, on adopte l'attitude habituelle des mécaniciens des solides : c'est la description *matérielle* ou *lagrangienne*. Si l'on observe une position particulière de l'espace et que l'on repère cette position dans un repère qui suit le milieu dans son mouvement, nous sommes dans l'attitude habituelle des mécaniciens des fluides : c'est la description *spatiale* ou *eulérienne*.

Définition 3 (lagrangien et eulérien) Par extension, les grandeurs liées à la configuration de référence sont qualifiées de lagrangiennes et celles liées à la configuration déformée sont qualifiées de grandeurs eulériennes.

2.1.1.3 L'application déformation

L'ensemble Ω_0 des positions spatiales occupées par les particules du solide à l'instant initial $t = 0$ est un ouvert connexe de \mathbb{R}^3 . Chaque particule de ce solide est repérée par le vecteur position $\vec{X}_{t=0} = \vec{X}$. La déformation d'un solide se caractérise par la variation spatiale d'une particule du solide \mathcal{S} , ce que l'on traduit par l'application $\phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Définition 4 (non-pénétrabilité) La condition de non-pénétrabilité de la matière implique que l'application ϕ soit injective. Ce qui garantira que l'image de la frontière Γ_t du solide \mathcal{S} est bien la frontière du même solide dans la configuration déformée.

La transformée de \vec{X} par l'application ϕ est notée \vec{x}

$$\vec{x} = \phi(\vec{X}, t) \text{ et } \vec{X} = \phi^{-1}(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

2.1.1.4 Gradient de déformation

Un vecteur matériel $d\vec{X}$ se transforme en élément $d\vec{x}$ par l'application ϕ . En différenciant l'équation 2.1 on obtient

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \cdot d\vec{X} \text{ et } d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x}$$

Le gradient de l'application ϕ dans ce voisinage est appelé gradient de déformation (ou gradient de déplacement) $\overline{\overline{F}}$

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\nabla}}_{\vec{X}} \phi = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \quad (2.2)$$

C'est un tenseur bipoint ou tenseur mixte Eulérien-Lagrangien, c'est-à-dire un tenseur « à cheval » sur deux configurations différentes

$$d\vec{x} = \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X} \text{ et } d\vec{X} = \overline{\overline{F^{-1}}} \cdot d\vec{x} \quad (2.3)$$

L'existence de $\overline{\overline{F^{-1}}}$ est assurée par la condition de non-pénétrabilité de la matière qui implique

$$\det \overline{\overline{F}} = J > 0 \quad (2.4)$$

2.1.1.5 Transformation des éléments géométriques élémentaires

Un élément de volume dV_0 dans la configuration de référence \mathcal{C}_0 se transforme par l'application ϕ en élément de volume dV

$$dV = J.dV_0 \quad (2.5)$$

Un élément de surface dS et sa normale $\overline{\overline{N}}$ dans la configuration de référence, se transforme par l'application ϕ en élément de surface ds et sa normale $\overline{\overline{n}}$ dans la configuration courante par la formule de Nanson (ou transport de Piola)

$$\overline{\overline{n}}.ds = J.\overline{\overline{F^{-T}}}. \overline{\overline{N}}.dS \quad (2.6)$$

2.1.2 Mesures de déformation

2.1.2.1 Décomposition polaire

Le tenseur gradient de déformation $\overline{\overline{F}}$ est une mesure locale de la transformation d'un solide. Il mesure non seulement les déformations mais aussi les mouvements de corps rigide¹. Pour séparer ces deux composantes, nous utilisons le théorème de la décomposition polaire.

Théorème 1 *Le tenseur $\overline{\overline{F}}$ quelconque s'écrit de manière unique comme le produit d'un tenseur symétrique défini positif $\overline{\overline{U}}$ et d'un tenseur orthogonal $\overline{\overline{R}}$.*

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}}.\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{v}}.\overline{\overline{R}} \quad (2.7)$$

La démonstration de ce théorème se trouve aisément (par exemple, voir [GABB89, cours 2 de J.C.Gelin] ou [Ogd84]). Le tenseur gradient de déformation $\overline{\overline{F}}$ se décompose donc de manière unique en un tenseur orthogonal de rotation rigide $\overline{\overline{R}}$ et en un tenseur d'allongement à droite $\overline{\overline{U}}$ (ou en un tenseur d'allongement à gauche $\overline{\overline{v}}$)². Il est facile de trouver la relation entre $\overline{\overline{U}}$ et $\overline{\overline{v}}$

$$\overline{\overline{v}} = \overline{\overline{R}}.\overline{\overline{U}}.\overline{\overline{R^T}} \quad (2.8)$$

¹Un mouvement de corps rigide est un mouvement qui transforme un solide sans induire de déformation. Il s'agit, dans le cas le plus général, de la superposition de translations et de rotations rigides.

²Comme nous avons adopté la notation des grandeurs lagrangiennes avec des majuscules et celle des grandeurs eulériennes avec des minuscules, nous pouvons remarquer que le tenseur d'allongement à droite est lagrangien et que le tenseur d'allongement à gauche est eulérien. Le tenseur de rotation rigide est mixte, comme le tenseur gradient de déformation.

2.1.2.2 Tenseurs de déformation

Nous pouvons ainsi disposer de mesures des déformations grâce aux tenseurs d'élongation pure $\overline{\overline{U}}$ et $\overline{\overline{v}}$. Pour les matériaux hyperélastiques, comme les élastomères, cette mesure est tout à fait acceptable, puisque la déformation peut atteindre 300, voire 400% (soit une élongation de 3 ou 4). Pour un matériau élasto-plastique classique comme l'acier (module de Young de 200 GPa et limite élastique à 200 MPa), l'élongation pure atteint 1,001 (en tension) à la limite élastique, ce qui signifie qu'il faut atteindre quatre chiffres après la virgule pour mesurer la déformation.

Une mesure plus appropriée pour des matériaux élasto-plastiques en petites déformations est ainsi donnée par $\overline{\overline{U}} - \overline{\overline{I}}$ qui permet de satisfaire la condition de déformation nulle dans un mouvement de corps rigide.

Nous pouvons définir d'autres mesures en remarquant que pour caractériser les changements de forme, il suffit de mesurer les variations de longueurs (allongement d'une fibre) et les variations d'angle (glissement). Pour cela, il suffit de quantifier les variations du produit scalaire de deux vecteurs infinitésimaux \overrightarrow{dX} et \overrightarrow{dY} se transformant en vecteurs \overrightarrow{dx} et \overrightarrow{dy}

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dy} = \overrightarrow{dX} \cdot \overline{\overline{F^T}} \cdot \overline{\overline{F}} \cdot \overrightarrow{dY} \quad (2.9)$$

On définit ainsi le tenseur des dilatations ou tenseur de Cauchy-Green droit $\overline{\overline{C}}$ (lagrangien et symétrique)

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F^T}} \cdot \overline{\overline{F}} \quad (2.10)$$

On peut aussi considérer la variation du produit scalaire $\overrightarrow{dX} \cdot \overrightarrow{dY}$

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dy} - \overrightarrow{dX} \cdot \overrightarrow{dY} = \overrightarrow{dX} \cdot (\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) \cdot \overrightarrow{dY} = 2 \cdot \overrightarrow{dX} \cdot \overline{\overline{E}} \cdot \overrightarrow{dY} \quad (2.11)$$

On définit ainsi le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$ (lagrangien et symétrique)

$$\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) \quad (2.12)$$

Les quantités eulériennes associées au tenseur de Cauchy-Green droit $\overline{\overline{C}}$ et au tenseur des déformations de Green-Lagrange $\overline{\overline{E}}$, sont, respectivement, le tenseur de Cauchy-Green gauche $\overline{\overline{b}}$ et le tenseur des déformations d'Euler-Almansi $\overline{\overline{a}}$

$$\overline{\overline{b}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F^T}} \text{ et } \overline{\overline{a}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{b^{-1}}}) \quad (2.13)$$

Notons qu'il existe une relation entre les tenseurs d'allongement à droite et à gauche et les tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{u}}^2 \text{ et } \overline{\overline{b}} = \overline{\overline{v}}^2$$

De plus

$$\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{R}}^T \quad (2.14)$$

Toutes ces mesures de déformation se généralisent facilement grâce aux formules de Hill ([Hil50]). Les mesures de déformation lagrangiennes s'écrivent ainsi

$$\begin{cases} \bar{\bar{e}}_\alpha = \frac{1}{\alpha} \cdot (\bar{\bar{U}}^\alpha - \bar{\bar{I}}) & \text{pour } \alpha \neq 0 \\ \bar{\bar{e}}_0 = \ln \bar{\bar{U}} = \frac{1}{2} \cdot \ln \bar{\bar{C}} \end{cases} \quad (2.15)$$

Pour $\alpha = 1$, nous trouvons la mesure de déformation dite nominale (tenseur déformation de Biot) $\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{e}}_1 = (\bar{\bar{U}} - \bar{\bar{I}})$. Pour $\alpha = 2$, nous retrouvons le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\bar{\bar{E}} = \bar{\bar{e}}_2 = \frac{1}{2} (\bar{\bar{U}}^2 - \bar{\bar{I}})$. Le cas $\alpha = 0$ est très important, puisqu'il s'agit du tenseur de Hencky $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\ln} = \bar{\bar{e}}_0 = \ln \bar{\bar{U}}$ ou tenseur des déformations logarithmiques ou encore tenseur des déformations «vraies». C'est celui que la majorité des codes de calcul utilise dans le cas de la simulation numérique. Cependant, il arrive très fréquemment que l'on utilise les déformations de Green-Lagrange $\bar{\bar{E}}$ dans le cas des grandes rotations, grands déplacements mais petites déformations³. Cette mesure des déformations est alors très valable dans ce cas et reste facile à calculer puisqu'elle n'est défini qu'en fonction du tenseur gradient de déformation $\bar{\bar{F}}$.

Type d'analyse	Déformation
Élasticité, petits déplacements, petites rotations	Toutes
Hyperélasticité	$\bar{\bar{U}}$
Grands déplacements, grandes rotations, petites déformations	$\bar{\bar{E}}$
Grands déplacements, grandes rotations, grandes déformations	$\bar{\bar{\varepsilon}}_{\ln}$

Tab. 2.1: Choix de la mesure de déformation suivant le type d'analyse

2.1.3 Contraintes

Nous avons vu qu'il existe plusieurs mesures de déformations. Pour les contraintes, c'est la même situation et nous verrons que les différentes mesures de déformations et de contraintes peuvent être conjuguées pour décrire l'équilibre de la structure par l'intermédiaire du principe des puissances virtuelles.

2.1.3.1 Tenseur des contraintes de Cauchy

Le tenseur des contraintes de Cauchy a un vrai sens physique. C'est la contrainte vraie ou « true stress ». Les postulats de Cauchy définissent cette grandeur :

³Fréquemment rencontrées dans l'analyse des structures minces comme les poutres, plaques et coques

- Les efforts exercés sur une partie \mathcal{D} d'un milieu continu par le complémentaire de \mathcal{D} peuvent être schématisés par une répartition surfacique de force.
- Cette densité surfacique ne dépend du domaine que par sa normale extérieure.

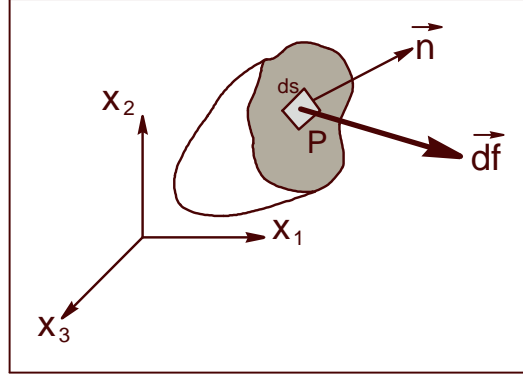


Fig. 2.2: Élément de force surfacique

Considérons la force surfacique $\overrightarrow{\Delta f}$ qui s'exerce sur un élément de surface Δs de normale \vec{n} au point P dans la configuration déformée \mathcal{C}_t (premier postulat de Cauchy). Le vecteur contrainte \vec{t} , conformément au second postulat, ne dépend que de la normale \vec{n}

$$\vec{t} = \vec{t}(\vec{n}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{\Delta f}}{\Delta s} \right) \quad (2.16)$$

Ainsi, il existe une infinité de vecteurs contraintes au point P suivant l'orientation du vecteur \vec{n} . On définit donc le tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\sigma}$ comme

$$\vec{t}(\vec{n}) = \overline{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (2.17)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\overline{\sigma}$ est symétrique et eulérien. La force agissant sur l'élément de surface ds s'écrit

$$\overrightarrow{df} = \overline{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (2.18)$$

2.1.3.2 Contraintes de Kirchhoff et de Piola-Kirchhoff

Le second tenseur des contraintes ayant une interprétation physique se définit en changeant la surface sur laquelle agit la force à l'aide de la formule de Nanson (équation 2.6)

$$\overrightarrow{df} = \overline{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot ds = J \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\vec{F}}^{-T} \cdot \vec{N} \cdot dS = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{N} \cdot dS \quad (2.19)$$

Le tenseur $\overline{\overline{T}}$ est le tenseur des contraintes de Kirchhoff de première espèce (PK1) ou tenseur de Boussinesq (c'est la contrainte nominale ou « engineering stress »). Il n'est pas symétrique et il est mixte. De fait, nous allons construire, à partir de $\overline{\overline{T}}$, un tenseur

exclusivement lagrangien et symétrique. Nous introduisons artificiellement⁴ un vecteur force $\overline{d\vec{F}}$ sur la configuration de référence

$$\overline{d\vec{F}} = \overline{\overline{F^{-1}}}.d\vec{f} \text{ et } d\vec{f} = \overline{\overline{F}}.d\overline{d\vec{F}} \quad (2.20)$$

En injectant cette force dans l'équation 2.19

$$d\vec{f} = \overline{\overline{T}}.\overline{\vec{N}}.dS \Rightarrow \overline{d\vec{F}} = \overline{\overline{F^{-1}}}.d\overline{\overline{T}}.\overline{\vec{N}}.dS = \overline{\overline{S}}.\overline{\vec{N}}.dS \quad (2.21)$$

Le tenseur $\overline{\overline{S}}$ est lagrangien et symétrique. On l'appelle tenseur de seconde espèce de Piola-Kirchhoff (PK2) ou tenseur de Piola-Lagrange. Pour terminer, nous définissons le tenseur des contraintes de Kirchhoff (eulérien et symétrique) $\overline{\overline{\tau}}$ qui a un rôle important dans la formulation variationnelle des problèmes en grandes déformations

$$\overline{\overline{\tau}} = J.\overline{\overline{\sigma}} \quad (2.22)$$

Il n'est pas inutile de définir le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma_R}}$ dans le repère co-rotationnel provenant de la décomposition polaire de $\overline{\overline{F}}$

$$\overline{\overline{\sigma_R}} = \overline{\overline{R^T}}.\overline{\overline{\sigma}}.\overline{\overline{R}} \quad (2.23)$$

Les relations entre ces différentes mesures de contraintes sont rassemblées sur le tableau 2.2 (d'après [BGKL89]).

	$\overline{\overline{\sigma}}$	$\overline{\overline{\tau}}$	$\overline{\overline{T}}$	$\overline{\overline{S}}$	$\overline{\overline{\sigma_R}}$
$\overline{\overline{\sigma}} =$	$\overline{\overline{\sigma}}$	$\frac{1}{J}.\overline{\overline{\tau}}$	$\frac{1}{J}.\overline{\overline{T}}.\overline{\overline{F^T}}$	$\frac{1}{J}.\overline{\overline{F}}.\overline{\overline{S}}.\overline{\overline{F^T}}$	$\overline{\overline{R}}.\overline{\overline{\sigma_R}}.\overline{\overline{R^T}}$
$\overline{\overline{\tau}} =$	$J.\overline{\overline{\sigma}}$	$\overline{\overline{\tau}}$	$\overline{\overline{T}}.\overline{\overline{F^T}}$	$\overline{\overline{F}}.\overline{\overline{S}}.\overline{\overline{F^T}}$	$J.\overline{\overline{R}}.\overline{\overline{\sigma_R}}.\overline{\overline{R^T}}$
$\overline{\overline{T}} =$	$J.\overline{\overline{\sigma}}.\overline{\overline{F^{-T}}}$	$\overline{\overline{\tau}}.\overline{\overline{F^{-T}}}$	$\overline{\overline{T}}$	$\overline{\overline{F}}.\overline{\overline{S}}$	$J.\overline{\overline{R}}.\overline{\overline{\sigma_R}}.\overline{\overline{U^{-1}}}$
$\overline{\overline{S}} =$	$J.\overline{\overline{F^{-1}}}.d\overline{\overline{\sigma}}.\overline{\overline{F^{-T}}}$	$\overline{\overline{F^{-1}}}.d\overline{\overline{\tau}}.\overline{\overline{F^{-T}}}$	$\overline{\overline{F^{-1}}}.d\overline{\overline{T}}$	$\overline{\overline{S}}$	$J.\overline{\overline{U^{-1}}}.d\overline{\overline{\sigma_R}}.\overline{\overline{U^{-1}}}$
$\overline{\overline{\sigma_R}} =$	$\overline{\overline{R^T}}.\overline{\overline{\sigma}}.\overline{\overline{R}}$	$\frac{1}{J}.\overline{\overline{R^T}}.\overline{\overline{\tau}}.\overline{\overline{R}}$	$\frac{1}{J}.\overline{\overline{R^T}}.\overline{\overline{T}}.\overline{\overline{U}}$	$\frac{1}{J}.\overline{\overline{U}}.\overline{\overline{S}}.\overline{\overline{U}}$	$\overline{\overline{\sigma_R}}$

Tab. 2.2: Relations entre les différentes mesures des contraintes

2.1.4 Vitesses de déformation

L'expression des vitesses est indispensable, même lorsque l'on utilise les équations d'équilibre statique, car la plupart des lois de comportement (voir la section 2.2, page 30) sont introduites sous forme différentielle. Dans les problèmes stationnaires, l'expression des vitesses de déformation et de contraintes se transforme alors en accroissements, dont l'on se sert dans les lois de comportement incrémentales.

⁴Artificiel, car sur la configuration de référence, il n'y a pas de forces, par définition.

2.1.4.1 Tenseur gradient des vitesses de déformations

Nous allons introduire la notion de vitesse de déformation. Soit \vec{v} la vitesse d'une particule matérielle définie sur la configuration \mathcal{C}_t

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad (2.24)$$

La dérivée temporelle $\dot{\overline{F}}$ du tenseur gradient de déformation s'écrit

$$\dot{\overline{F}} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{F}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{X}} \quad (2.25)$$

La différence de vitesse entre deux points voisins dans la configuration déformée \mathcal{C}_t vaut donc

$$d\vec{v} = \vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (2.26)$$

On appelle tenseur gradient des vitesses de déformations et on note \overline{L}

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \cdot d\vec{x} = \overline{L} \cdot d\vec{x} \quad (2.27)$$

Soit

$$\overline{L} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{X}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \vec{x}} = \dot{\overline{F}} \cdot \overline{F}^{-1} \quad (2.28)$$

\overline{L} est un tenseur eulérien non symétrique. Habituellement, on le décompose en une partie symétrique \overline{D} et une partie anti-symétrique \overline{W}

$$\overline{L} = \overline{D} + \overline{W} \text{ avec } \begin{cases} \overline{D} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{L} + \overline{L}^T) \\ \overline{W} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{L} - \overline{L}^T) \end{cases} \quad (2.29)$$

Le tenseur \overline{D} est appelé tenseur des taux de déformation (eulérien et symétrique) et le tenseur \overline{W} ⁵ est appelé tenseur des taux de rotation. Les tenseurs taux sont liés aux mesures des déformations par la relation élémentaire suivante

$$\varepsilon = \int_0^t \dot{\varepsilon} \cdot d\tau \quad (2.30)$$

Le tenseur taux de déformation \overline{D} est lié au taux de déformations logarithmiques $\overline{\varepsilon}_{\ln}$. Dans le cas unidimensionnel si $\varepsilon = \ln \lambda$ avec l'élongation $\lambda = \frac{dx}{dX}$, alors $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{d\dot{x}}{dX} = \dot{D}$.

⁵ \overline{W} est parfois noté $\overline{\Omega}$ dans certains ouvrages.

2.1.4.2 Tenseur de rotation pure

Nous allons introduire une nouvelle quantité, le tenseur taux de rotation pure $\overline{\overline{\Omega}}$ dont l'on se sert dans l'expression de certaines dérivées objectives (voir paragraphe 2.1.5.3). Pour cela, notons que les tenseurs $\overline{\overline{D}}$ et $\overline{\overline{W}}$ s'écrivent facilement avec la décomposition polaire de $\overline{\overline{F}}$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{D}} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{\overline{R}} \cdot \left(\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{U^{-1}}} + \overline{\overline{U^{-1}}} \cdot \overline{\overline{U}} \right) \cdot \overline{\overline{R^T}} \\ \overline{\overline{W}} &= \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{R^T}} + \frac{1}{2} \cdot \overline{\overline{R}} \cdot \left(\overline{\overline{U}} \cdot \overline{\overline{U^{-1}}} - \overline{\overline{U^{-1}}} \cdot \overline{\overline{U}} \right)\end{aligned}\quad (2.31)$$

Le tenseur taux de rotation pure $\overline{\overline{\Omega}}$ est l'expression

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{R^T}} \quad (2.32)$$

2.1.5 Objectivité

2.1.5.1 Changement d'observateur

Soit le repère R attaché au référentiel \mathcal{R} dans la configuration déformée \mathcal{C}_t et le repère R' attaché au référentiel \mathcal{R}' . Ces deux référentiels correspondent à deux observateurs différents et sont liés par une translation $\overline{\overline{C}}$ et une rotation $\overline{\overline{Q}}$ représentée par un tenseur orthogonal ($\overline{\overline{Q}} \cdot \overline{\overline{Q^T}} = 1$). Soit un point M repéré par le vecteur $\overline{\overline{x}}$ dans le référentiel \mathcal{R} et par le vecteur $\overline{\overline{x'}}$ dans le référentiel \mathcal{R}' , alors, le changement de repère s'écrit

$$\overline{\overline{x'}} = \overline{\overline{C}} + \overline{\overline{Q}} \cdot \overline{\overline{x}} \quad (2.33)$$

Ce changement d'observateur s'applique à des vecteurs $\overline{\overline{u}}$, des tenseurs lagrangiens $\overline{\overline{T}}_L$ ou eulériens $\overline{\overline{T}}_E$ suivant les formules

$$\overline{\overline{u'}} = \overline{\overline{Q}} \cdot \overline{\overline{u}} \quad (2.34)$$

$$\overline{\overline{T}}'_E = \overline{\overline{Q}} \cdot \overline{\overline{T}}_E \cdot \overline{\overline{Q^T}} \quad (2.35)$$

$$\overline{\overline{T}}'_L = \overline{\overline{T}}_L$$

Les tenseurs lagrangiens sont invariants puisque le changement d'observateur s'applique sur la configuration déformée.

2.1.5.2 Le cas des grandeurs courantes

Les tenseurs « en déplacement » (par opposition aux tenseurs taux) sont, pour la plupart, objectifs ou invariants (car purement lagrangiens). Les tenseurs mixtes ne le sont pas (en particulier le tenseur gradient de déformation $\overline{\overline{F}}$). Le cas le plus délicat est celui

des dérivées des tenseurs objectifs. En effet, de manière générale, la dérivée temporelle d'un tenseur objectif n'est pas un tenseur objectif. La démonstration est facile. Supposons que $\overline{\overline{M}}$ soit un tenseur objectif

$$\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{Q}} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{Q}}^T \quad (2.36)$$

Alors la dérivée temporelle s'écrit

$$\dot{\overline{\overline{M'}}} = \dot{\overline{\overline{Q}}} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{Q}}^T + \overline{\overline{Q}} \cdot \dot{\overline{\overline{M}}} \cdot \overline{\overline{Q}}^T + \overline{\overline{Q}} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \dot{\overline{\overline{Q}}^T} \quad (2.37)$$

En utilisant la définition du taux de rotation pure $\overline{\overline{\Omega}}$

$$\overline{\overline{\Omega}} = \dot{\overline{\overline{Q}}} \cdot \overline{\overline{Q}}^T = -\overline{\overline{Q}} \cdot \dot{\overline{\overline{Q}}^T} \quad (2.38)$$

Soit

$$\dot{\overline{\overline{M'}}} = \overline{\overline{Q}} \cdot \dot{\overline{\overline{M}}} \cdot \overline{\overline{Q}}^T + \overline{\overline{\Omega}} \cdot \overline{\overline{M'}} - \overline{\overline{M'}} \cdot \overline{\overline{\Omega}} \quad (2.39)$$

Il apparaît un terme indésirable de rotation. Or, ces dérivées temporelles sont indispensables dans l'écriture des lois de comportement de type incrémentales comme l'élasto-plasticité.

2.1.5.3 Dérivées objectives

Pour pallier ce défaut d'objectivité, de nombreux auteurs ont proposé des dérivées objectives. Il en existe de nombreuses (voir [XBM98], [XBM98] et [SB89], pour une bonne synthèse). Le principe de base est de se placer dans un repère qui s'affranchit de la rotation rigide du mouvement. On peut également utiliser les transports covariants et contravariants provenant du repère matériel entraîné dans le mouvement. Nous ne présentons que les deux plus utilisés dans le contexte des éléments finis.

Pour éliminer les rotations parasites, on se place dans le référentiel qui suit la rotation $\overline{\overline{R}}$. Dans le transport de la quantité $\overline{\overline{M}}$ de \mathcal{C}_t dans \mathcal{C}_0 , la partie allongement $\overline{\overline{U}}$ est négligée et on s'arrête donc à la configuration \mathcal{C}_R . En posant

$$\overline{\overline{\Omega}} = \dot{\overline{\overline{R}}} \cdot \overline{\overline{R}}^T \quad (2.40)$$

La dérivée $\overline{\overline{\overline{M}^{G-N}}}$ de Green-Naghdi est

$$\overline{\overline{\overline{M}^{G-N}}} = \left(\dot{\overline{\overline{M}}} + \overline{\overline{M}} \cdot \overline{\overline{\Omega}} - \overline{\overline{\Omega}} \cdot \overline{\overline{M}} \right) \quad (2.41)$$

Cette dérivée est dans un repère orthonormé. Mais il est difficile de calculer $\dot{\overline{\overline{R}}}$ et cette dérivée dépend de la configuration de référence. Cette dérivée n'est donc, en pratique, utilisée

que dans les formulations explicites⁶ dans lesquelles il est facile d'obtenir $\dot{\overline{R}}$. La dérivée objective de Jaumann est une approximation de celle de Green-Naghdi. L'approximation s'écrit

$$\dot{\overline{R}} \cdot \overline{R}^T \simeq \overline{W} \quad (2.42)$$

La dérivée objective $\overline{M}^{Jau.}$ de Jauman s'écrit alors

$$\overline{M}^{Jau.} = \dot{\overline{M}} + \overline{M} \cdot \overline{W} - \overline{W} \cdot \overline{M} \quad (2.43)$$

Cette dérivée est dans un repère orthonormé et la quantité \overline{W} est facile à évaluer dans le cadre d'une formulation Lagrangienne actualisée. Le calcul de \overline{W} est généralement fait à l'aide de la méthode de Hughes-Winget (c'est le cas d'ABAQUS/Standard, voir [HW80]). Cette formulation est très efficace car elle réduit le coût de calcul tout en minimisant l'erreur.

2.1.6 Hypothèses bi-dimensionnelles

Dans cette étude nous avons utilisé des modèles bi-dimensionnels, c'est à dire que nous avons fait l'hypothèse d'un état plan de contraintes ou de déformations. Nous présentons aussi un état intermédiaire que l'on a utilisé : l'hypothèse des déformations planes généralisées.

2.1.6.1 Contraintes planes

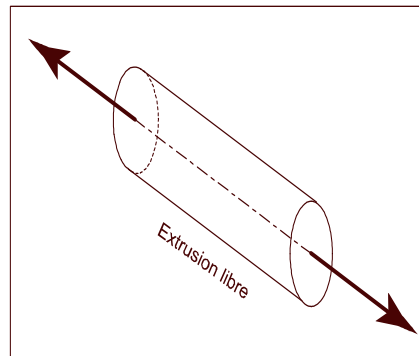


Fig. 2.3: Hypothèse des contraintes planes

Dans l'hypothèse des contraintes planes, on suppose que la contrainte transverse σ_{33} est nulle, ainsi que σ_{13} et σ_{23} . Cette hypothèse est généralement utilisée pour les structures

⁶La dérivée de Green-Naghdi était employée dans ABAQUS/Explicit pour les éléments solides. Mais depuis la version 6.1, l'éditeur du logiciel a fait le choix de revenir à une formulation de type Jaumann, afin de rester cohérent avec la version statique implicite d'ABAQUS (ABAQUS/Standard).

minces, par exemple, la formulation des éléments de coques. Physiquement, elle correspond aussi à une possibilité d'extrusion du matériau hors du plan principal (1, 2) car la déformation transverse ε_{33} n'est pas nulle et vaut (en élasticité)

$$\widehat{\varepsilon}_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\widehat{\varepsilon}_{11} + \widehat{\varepsilon}_{22}) \quad (2.44)$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}_{11} &= \widehat{\varepsilon}_{11}^{el} + \Delta\varepsilon_{11} \\ \widehat{\varepsilon}_{22} &= \widehat{\varepsilon}_{22}^{el} + \Delta\varepsilon_{22} \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.1.6.2 Déformations planes

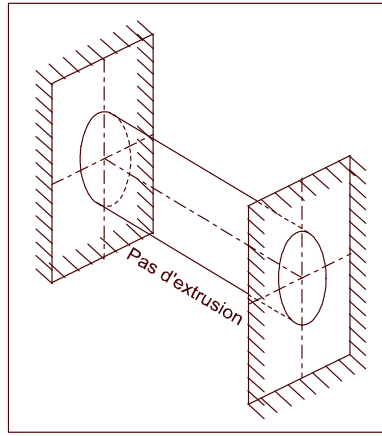


Fig. 2.4: Hypothèse des déformations planes

Dans l'hypothèse des déformations planes, on suppose que la déformation transverse ε_{33} est nulle, ainsi que ε_{13} et ε_{23} . Cette hypothèse est généralement utilisée pour les structures épaisses. Physiquement, elle correspond aussi à l'impossibilité pour le matériau de s'extruder hors du plan principal (1, 2).

2.1.6.3 Déformations planes généralisées

Les déformations planes généralisées sont un intermédiaire entre les contraintes et les déformations planes. On suppose que la structure est enfermée entre deux plans rigides qui peuvent bouger. Soit $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ un point fixé sur un des plans. La longueur de la fibre entre P_0 et son image sur l'autre plan est noté t_0 dans la configuration initiale. L'accroissement d'épaisseur est noté Δu_z . La longueur de la fibre dans la configuration déformée

$$t = t_0 + \Delta u_z \quad (2.46)$$

La déformation transverse

$$\varepsilon_{33} = \ln \frac{t}{t_0} \quad (2.47)$$

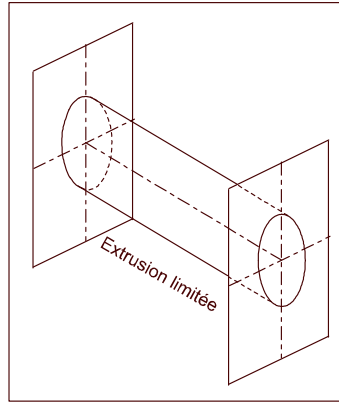


Fig. 2.5: Hypothèse des déformations planes généralisées

Il y a donc possibilité d'extrusion hors du plan, mais cette extrusion est plus limitée que dans le cas des contraintes planes.

2.2 Loi de comportement

La loi de comportement permet de réduire le nombre d'inconnues d'un problème physique en établissant un système d'équations qui relie les contraintes aux déformations. Ces équations traduisent la nature physique du matériau. Le comportement du matériau est identifié par des procédures expérimentales et il s'agit sûrement d'un des points les plus délicats dans la simulation numérique. Les lois de comportement ont une base théorique très solide, grâce au formalisme thermodynamique et à la méthode de l'état local (voir [LC96]).

2.2.1 Forme générale des lois de comportement

La loi de comportement permet de calculer les contraintes $\bar{\sigma}$ à l'instant t et au point M à partir du point considéré M , du temps t et de l'ensemble des positions de tous les points N de la structure pour tout $\tau \leq t$:

$$\bar{\sigma}(M, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t}(M, t, \bar{x}(N, \tau)) \quad (2.48)$$

\mathcal{G} est la fonctionnelle de réponse. C'est la forme la plus générale sur laquelle nous allons faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses sont fondamentales et justifiées dans tous les cas courants que l'on rencontre en mécanique ([FPZ95]).

– Hypothèse de la localisation

Cette hypothèse consiste à considérer uniquement les interactions locales dans le voisinage du point M considéré. Avec cette hypothèse, la fonctionnelle \mathcal{G} s'écrit :

$$\bar{\sigma}(M, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t}(M, t, \nabla \bar{x}(N, \tau), \nabla^2 \bar{x}(N, \tau), \nabla^3 \bar{x}(N, \tau), \dots) \quad (2.49)$$

- Hypothèse des milieux matériellement simples

Un milieu est dit matériellement simple lorsque son comportement repose sur une interaction locale des particules le constituant. Cette hypothèse permet de simplifier grandement le problème en ne considérant que l'aspect local, ce qui se traduit par l'utilisation du premier gradient $\overline{\overline{F}}$ uniquement

$$\overline{\overline{\sigma}}(M, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left(M, t, \overline{\overline{F}} \right) \quad (2.50)$$

- Invariance temporelle

Le principe d'invariance temporelle fait que le temps t ne doit pas intervenir explicitement dans l'expression de la fonctionnelle. Deux observateurs décalés dans le temps doivent observer le même comportement

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \mathcal{G}_{\tau \leq t} \left(M, \overline{\overline{F}} \right) \quad (2.51)$$

- Indifférence matérielle

Pour être utilisable, la loi de comportement utilisée doit être invariante par changement de référentiel.

$$\mathcal{G} \left(\overline{\overline{Q}} \cdot \overline{\overline{F}} \right) = \overline{\overline{Q}} \cdot \mathcal{G} \left(\overline{\overline{F}} \right) \cdot \overline{\overline{Q}}^T \quad (2.52)$$

La conséquence sera d'utiliser des tenseurs objectifs (voir §2.1.5.3, page 27).

2.2.2 Le cas élasto-plastique

Nous allons utiliser un modèle élasto-plastique très classique issu des travaux de Prandtl et Reuss dans les années 30, ainsi que des travaux de Hill ([Hil50]). Pour les métaux classiques, l'érouissage isotrope correspond à l'augmentation de la densité des dislocations. Nous restons donc dans le cadre de la théorie de la plasticité associée, c'est à dire que l'on considère qu'il n'y pas de changement brusque de la direction de l'écoulement plastique, au contraire des modèles de plasticité des sols lorsque la dissipation plastique provient principalement des forces de friction ([FPZ95]). Thermodynamiquement, les variables internes scalaires V_k se réduisent à la seule déformation plastique cumulée.

2.2.2.1 Séparation des contributions élastiques et plastiques

La première hypothèse utilisée dans la formulation d'un comportement élasto-plastique est de séparer les contributions élastiques et plastiques. En effet, pour les matériaux métalliques, la déformation réversible est petite devant la déformation irréversible (postulat de Rice). Dans le cadre des grandes déformations plastiques, la séparation se fait au niveau des gradients de déformation, cette séparation a été introduite pour la première fois par Lee ([Lee69])

$$\overline{\overline{F}}_{\text{totale}} = \overline{\overline{F}}_{\text{élastique}} \cdot \overline{\overline{F}}_{\text{plastique}} \quad (2.53)$$

2.2.2.2 Surface de charge

Pour qualifier le comportement d'une structure élasto-plastique, nous considérons la surface de charge notée $f = 0$. Cette surface est définie dans l'espace des contraintes et l'écoulement plastique ne peut se produire que si l'état de contrainte $\overline{\sigma^*}$ reste sur la surface. C'est ce que l'on appelle la condition de consistance

$$df(\overline{\sigma^*}) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \overline{\sigma}} : d\overline{\sigma^*} + \frac{\partial f}{\partial V_k} \cdot V_k = 0 \quad (2.54)$$

Pour les états de contraintes contenus à l'intérieur de cette surface, le comportement est purement élastique. La plasticité classique impose donc que l'état de contraintes ne puisse sortir de la surface, donc que $f \leq 0$. Les trois possibilités sont

$$\begin{aligned} f < 0 &\rightarrow \text{comportement purement élastique} \\ f = 0 \text{ et } df = 0 &\rightarrow \text{écoulement plastique} \\ f = 0 \text{ et } df < 0 &\rightarrow \text{décharge élastique} \end{aligned} \quad (2.55)$$

2.2.2.3 Loi d'écoulement

Pour respecter le postulat du travail plastique maximum, on peut démontrer que tout accroissement de déformation plastique est normal à la surface de charge (postulat de stabilité de Drucker), c'est la règle de normalité

$$\overline{\overline{d\varepsilon_p}} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{\sigma}} \quad (2.56)$$

Le facteur de proportionnalité $d\lambda$ est appelé multiplicateur plastique

2.2.2.4 Loi de Prandtl-Reuss

La loi de Prandtl-Reuss repose sur cinq hypothèses ([LC96]).

– Hypothèse d'incompressibilité plastique

Cette hypothèse stipule que l'écoulement plastique est isochore. L'écoulement ne dépend donc pas de la contrainte hydrostatique σ_H

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_H} = 0 \quad (2.57)$$

– Hypothèse d'écrouissage isotrope

La fonction de charge ne dépend que de l'invariant J_2 du déviateur $\overline{\overline{s}}$ des contraintes

$$f = f(J_2) \quad (2.58)$$

avec

$$J_2 = \sigma_{eq.} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \overline{\overline{s}} : \overline{\overline{s}}} \quad (2.59)$$

– Hypothèse de plasticité associée et hypothèse de normalité

Ces deux hypothèses permettent d'écrire

$$\overline{\overline{d\varepsilon_p}} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{\overline{\sigma}}} \quad (2.60)$$

$$dp = -d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad (2.61)$$

σ_y est la limite élastique dépendant de l'écrouissage et p est la déformation plastique cumulée

$$p = \int_0^t \left[\frac{3}{2} \overline{\overline{d\varepsilon_p}} : \overline{\overline{d\varepsilon_p}} \right]^{1/2} \cdot d\tau \quad (2.62)$$

La fonction de charge est celle de Von Mises et elle s'écrit

$$f = \sigma_{eq.} - \sigma_y \quad (2.63)$$

On peut en déduire la valeur du multiplicateur plastique

$$dp = -d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = -d\lambda \cdot (-1) = d\lambda \quad (2.64)$$

2.2.3 Grandes déformations élasto-plastiques

2.2.3.1 Modèle hypoélastique-plastique

La formulation de problèmes en grandes déformations élasto-plastiques nécessite quelques précautions dans l'expression de la partie élastique. La première idée est d'étendre la formulation intégrale classique

$$\overline{\overline{\sigma^\nabla}} = \overline{\overline{\overline{H^e}}} : \overline{\overline{D^e}} \quad (2.65)$$

$\overline{\overline{\sigma^\nabla}}$ est une dérivée objective du tenseur des contraintes de Cauchy, $\overline{\overline{D}}$ est le taux de déformation et $\overline{\overline{\overline{H^e}}}$ est le tenseur (du quatrième ordre) d'élasticité. C'est un modèle dit hypo-élastique. En utilisant l'hypothèse de séparation des déformations plastiques et élastiques

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{D^e}} + \overline{\overline{D^p}} \quad (2.66)$$

Et donc

$$\overline{\overline{\sigma^\nabla}} = \overline{\overline{\overline{H^e}}} : \left(\overline{\overline{D}} - \overline{\overline{D^p}} \right) \quad (2.67)$$

La loi d'écoulement plastique s'écrit

$$\overline{\overline{D^p}} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{\overline{\sigma}}} \quad (2.68)$$

Cette formulation hypoélastique-plastique est insuffisante et présente de nombreuses limitations :

- La réponse hypo-élastique du matériau produit un travail non nul sur un cycle fermé de déformation.
- Si le module élastique est constant, l’observation de l’indifférence matérielle l’oblige à être isotrope.
- La surface de charge est forcément isotrope.
- Le modèle requiert une intégration en temps précise des contraintes. Et les schémas d’intégration doivent être objectifs pour ne pas perturber le résultat lors des grandes rotations.

Toutefois, si l’on utilise une formulation co-rotationnelle, le modèle hypoélastique-plastique peut utiliser des surfaces de charge et des modules élastiques non-isotropes. Un modèle plastique non-isotrope est fréquent, par exemple, le cas de l’érouissage cinématique. Johnson (voir [JB84]) a démontré que la dérivée de Jaumann est alors inapplicable pour les grandes déformations plastiques (supérieures à 30%) car les contraintes présentent des oscillations non-physiques. Ce qui oblige à utiliser un autre type de dérivée objective comme la dérivée de Green-Naghdi, qui est beaucoup plus délicate à employer et plus coûteuse.

2.2.3.2 Modèle hyperélastique-plastique

Pour toutes ces raisons, il est fréquent d’employer un modèle hyperélastique qui repose sur deux principes :

1. Décomposition multiplicative de la déformation entre ses parties élastiques et plastiques au niveau des gradients de déformations

$$\overline{\overline{F}}_{\text{totale}} = \overline{\overline{F}}_{\text{élastique}} \cdot \overline{\overline{F}}_{\text{plastique}} \quad (2.69)$$

2. Les déformations élastiques sont calculées à partir d’un potentiel hyperélastique w

$$\overline{\overline{S}} = \frac{\partial w(\overline{\overline{E}}_e)}{\partial \overline{\overline{E}}_e} \quad (2.70)$$

Cette formulation permet d’éviter les problèmes des formulations hypoélastiques. Elle est utilisée dans ABAQUS.

2.2.3.3 Intégration des équations

Les équations des modèles élasto-plastiques font intervenir une variation de plusieurs quantités (déformations, contraintes). Il faut donc utiliser des schémas d’intégration pour résoudre le problème. Dans le cas élasto-plastique, il est nécessaire d’utiliser des algorithmes spécifiques pour détecter le passage de la surface de charge et pour actualiser les variables internes comme la déformation plastique cumulée et le multiplicateur plastique. Le principe des algorithmes d’intégration des équations pour la plasticité est de faire une

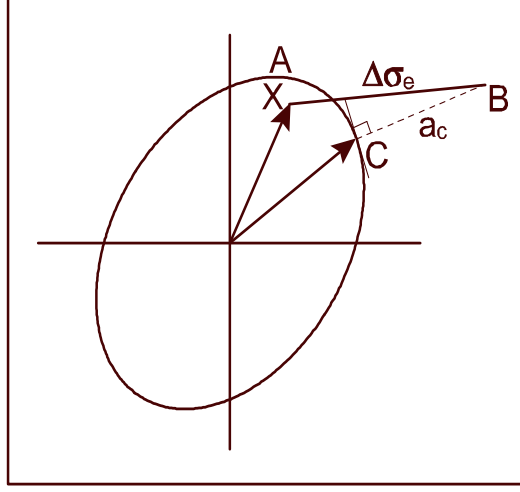


Fig. 2.6: Principe de calcul des contraintes pour un modèle plastique

évaluation élastique puis de ramener les contraintes sur la surface de charge (voir figure 2.6). On écrit

$$\overline{\overline{\sigma}}_C = \overline{\overline{\sigma}}_A + \overline{\overline{H}}^e : (\overline{\overline{\Delta\varepsilon}} - \overline{\overline{\Delta\varepsilon}}^p) = \overline{\overline{\sigma}}_B - \overline{\overline{H}}^e : \overline{\overline{\Delta\varepsilon}}^p \quad (2.71)$$

Avec l'évaluation de la déformation plastique

$$\overline{\overline{\Delta\varepsilon}}^p = \Delta\lambda \cdot [(1 - \eta) \cdot \overline{\overline{a}}_A + \eta \cdot \overline{\overline{a}}_C] \quad (2.72)$$

Si $\eta = 0$, nous avons un algorithme de type Euler explicite (conditionnellement stable) et si $\eta = 1$, nous avons un algorithme de type Euler implicite. Les algorithmes d'Euler implicites sont les plus généralement utilisés. En particulier, pour le cas de la plasticité dite J2 (critère de Von Mises et incompressibilité plastique), il est fréquent d'utiliser l'algorithme du retour radial (Crisfield, voir [Cri91]). Nous avons donc

$$\overline{\overline{\sigma}}_C = \overline{\overline{\sigma}}_B - \overline{\overline{H}}^e : \Delta\lambda \cdot \overline{\overline{a}}_C \quad (2.73)$$

$\overline{\overline{a}}_C$ n'est pas connu car il dépend de $\overline{\overline{\sigma}}_C$ qui est inconnu. Cet algorithme nécessite donc une procédure itérative dans laquelle le résidu $\overline{\overline{r}}$ doit être annulé

$$\overline{\overline{r}} = \overline{\overline{\sigma}} - \overline{\overline{\sigma}}_C \quad (2.74)$$

En utilisant un développement de Taylor tronqué à l'ordre un

$$\overline{\overline{r}}^{i+1} = \overline{\overline{r}}^i + \dot{\lambda} \cdot \left(\frac{\partial \overline{\overline{r}}}{\partial \Delta\lambda} \right)^i + \dot{\overline{\overline{\sigma}}} \cdot \left(\frac{\partial \overline{\overline{r}}}{\partial \overline{\overline{\sigma}}_C} \right)^i \quad (2.75)$$

Avec

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \overline{\overline{r}}}{\partial \Delta\lambda} \right)^i &= \left(\overline{\overline{H}}^e : \overline{\overline{a}}_C \right)^i \\ \left(\frac{\partial \overline{\overline{r}}}{\partial \overline{\overline{\sigma}}_C} \right)^i &= \overline{\overline{I}} + \left(\Delta\lambda \cdot \overline{\overline{H}}^e \cdot \frac{\partial \overline{\overline{a}}_C}{\partial \overline{\overline{\sigma}}_C} \right)^i \end{aligned} \quad (2.76)$$

Les contraintes en C doivent être sur la surface de charge, soit $f_C = 0$. On peut démontrer que la correction itérative sur le multiplicateur plastique s'écrit

$$\delta\lambda = \frac{f_C^i - \overline{\overline{a_C}} \cdot \left(\frac{\partial \overline{\overline{r}}}{\partial \overline{\overline{\sigma_C}}} \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{r}}}{\overline{\overline{a_C}} \cdot \left(\frac{\partial \overline{\overline{r}}}{\partial \overline{\overline{\sigma_C}}} \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{H^e}} \cdot \overline{\overline{a_C}} + \frac{\partial f_C}{\partial \varepsilon^p}} \quad (2.77)$$

Et sur les contraintes

$$\overline{\overline{\delta\sigma}} = - \left(\frac{\partial \overline{\overline{r}}}{\partial \overline{\overline{\sigma_C}}} \right)^{-1} \cdot \left(\overline{\overline{r}}^i + \overline{\overline{H^e}} \cdot \overline{\overline{a_C}} \cdot \delta\lambda \right) \quad (2.78)$$

On actualise le multiplicateur plastique et les contraintes

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^{i+1} &= \Delta\lambda^i + \delta\lambda \\ \overline{\overline{\sigma_C}}^{i+1} &= \overline{\overline{\sigma_C}}^i + \overline{\overline{\delta\sigma}} \end{aligned} \quad (2.79)$$

La méthode du retour radial est une forme particulière de l'algorithme implicite présenté précédemment. Le principe est de séparer les contributions volumiques et déviatoriques, ce qui simplifie considérablement les expressions.

2.2.4 Équations d'équilibre

Il y a deux méthodes pour obtenir les équations fondamentales de la mécanique.

1. On considère que ces équations d'équilibre (obtenues en faisant l'équilibre du VER) sont les axiomes de base. En utilisant la méthode des résidus pondérés de Galerkin, on obtient alors les formulations variationnelles de base pour appliquer la méthode des éléments finis. Le principe des puissances virtuelles devient alors un théorème.
2. On part des axiomes du principe des puissances virtuelles et on en déduit les équations d'équilibre local au travers du lemme fondamental (voir page 36) de la physique des milieux continus.

Nous allons présenter la seconde méthode.

2.2.4.1 Principe des puissances virtuelles ([GM95] et [LC96])

Le principe des puissances virtuelles (PPV) repose sur deux axiomes.

- Axiome d'objectivité : la puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle.
- Axiome d'équilibre : pour tout milieu matériel repéré dans un référentiel absolu (en fait galiléen), à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs et des efforts extérieurs.

Lemme 1 (Lemme fondamental du milieu continu) À toute fonction $f(M)$ définie et continue dans \mathcal{V}

$$\int_{\mathcal{V}} f(M).dV = 0 \quad \forall \mathcal{V} \Rightarrow f(M) = 0 \text{ dans } \mathcal{V} \quad (2.80)$$

Le principe des puissances virtuelles repose sur une description cinématique du mouvement. On considère un champ de vecteurs de vitesses virtuelles \vec{v}^* . Dans le cadre de la mécanique des solides classique⁷, ce champ de vitesse et son premier gradient $\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^*$ sont suffisants pour décrire la cinématique du milieu. On décompose le premier gradient des vitesses virtuelles en sa partie symétrique et anti-symétrique

$$\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* + \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* \right)^T \right] + \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* - \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* \right)^T \right] \quad (2.81)$$

La partie symétrique est le tenseur de deuxième ordre des taux de déformations virtuelles $\overline{\overline{D}}^*$

$$\overline{\overline{D}}^* = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* + \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* \right)^T \right] \quad (2.82)$$

La partie anti-symétrique est le tenseur de deuxième ordre des taux de rotations virtuelles $\overline{\overline{W}}^*$

$$\overline{\overline{W}}^* = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* - \left(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* \right)^T \right] \quad (2.83)$$

Dans le milieu continu, on définit la puissance virtuelle des efforts intérieurs $p_{int.}^*$ par l'intégrale sur tout le domaine \mathcal{D} de trois quantités : un vecteur densité volumique d'efforts correspondant aux vitesses virtuelles, un tenseur du deuxième ordre symétrique correspondant au tenseur des taux de déformations et un tenseur du deuxième ordre anti-symétrique pour le tenseur des taux de rotations. On écrit donc

$$p_{int.}^* = - \int_{\mathcal{V}} \left(\vec{v}^* \cdot \vec{f}' + \overline{\overline{D}}^* : \overline{\overline{\sigma}} + \overline{\overline{\Omega}}^* : \overline{\overline{\Gamma}} \right) .dV \quad (2.84)$$

En appliquant le premier axiome

$$p_{int.}^* = - \int_{\mathcal{V}} \left(\overline{\overline{D}}^* : \overline{\overline{\sigma}} \right) .dV \quad (2.85)$$

Il ne reste que la partie symétrique du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$. Cette symétrie peut être également démontrée dans la méthode classique en appliquant la conservation de la quantité de mouvement. Les efforts sont de deux types principaux :

1. Les efforts exercés à distance sur le système, définis par une densité volumique de force \vec{f}_v .

⁷En particulier, on ne considère pas le cas des milieux micropolaires.

2. Les sollicitations surfaciques connues et les efforts de contact modélisés par une densité surfacique de forces \vec{f}_s (postulat de Cauchy, voir page 22), agissant sur le contour de \mathcal{V} .

D'où la puissance virtuelle des efforts extérieurs

$$p_{ext.}^* = \int_{\mathcal{V}} (\vec{v}^* \cdot \vec{f}_v) \cdot dV + \int_{\partial\mathcal{V}} (\vec{v}^* \cdot \vec{f}_s) \cdot dS \quad (2.86)$$

La puissance virtuelle s'écrit en considérant la masse volumique ρ , et le vecteur accélération $\vec{\gamma}$

$$p_{acc.}^* = \int_{\mathcal{V}} (\rho \cdot \vec{v}^* \cdot \vec{\gamma}) \cdot dV \quad (2.87)$$

Par application du deuxième axiome des puissances virtuelles, l'équilibre du système s'écrit

$$p_{int.}^* + p_{ext.}^* = p_{acc.}^* \quad (2.88)$$

Soit

$$- \int_{\mathcal{V}} (\overline{\overline{D^*}} : \overline{\overline{\sigma}}) \cdot dV + \int_{\mathcal{V}} (\vec{v}^* \cdot \vec{f}_v) \cdot dV + \int_{\partial\mathcal{V}} (\vec{v}^* \cdot \vec{f}_s) \cdot dS = \int_{\mathcal{V}} (\rho \cdot \vec{v}^* \cdot \vec{\gamma}) \cdot dV \quad (2.89)$$

Le principe des puissances virtuelles est valable quelque soit le choix du champ des vitesses virtuelles. Considérons le premier terme de l'équation précédente et la symétrie du tenseur des contraintes

$$- \int_{\mathcal{V}} (\overline{\overline{D^*}} : \overline{\overline{\sigma}}) \cdot dV = - \int_{\mathcal{V}} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v}^* : \overline{\overline{\sigma}}) \cdot dV \quad (2.90)$$

En utilisant le théorème de la divergence

$$- \int_{\mathcal{V}} (\overline{\overline{D^*}} : \overline{\overline{\sigma}}) \cdot dV = - \int_{\partial\mathcal{V}} (\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{v}^* \cdot \vec{n}) \cdot dS + \int_{\mathcal{V}} (\vec{v}^* \cdot \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}}) \cdot dV \quad (2.91)$$

D'où la nouvelle écriture du PPV

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{v}^* \cdot (\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \vec{f}_v - \rho \cdot \vec{\gamma}) \cdot dV = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{v}^* \cdot (\vec{f}_s - \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot dS = 0 \quad \forall \vec{v}^* \quad (2.92)$$

2.2.4.2 Écritures eulériennes et lagrangiennes des équations d'équilibre

Il est habituel de séparer la frontière $\partial\mathcal{V}$ en trois parties :

- Une partie \mathcal{S}_f sur laquelle s'applique des efforts surfaciques connus
- Une partie \mathcal{S}_u sur laquelle s'applique des conditions cinématiques connues.
- Une partie \mathcal{S}_c sur laquelle s'applique les conditions de contact et dont les forces sont inconnues.

$$\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}^u \cup \mathcal{S}^f \cup \mathcal{S}^c \text{ et } \mathcal{S}^u \cap \mathcal{S}^f \cap \mathcal{S}^c = \emptyset \quad (2.93)$$

La forme locale eulérienne est obtenue en appliquant le lemme fondamental de la mécanique des milieux continus sur l'équation 2.92

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \overline{\overline{f}}_v - \rho \cdot \overline{\overline{\gamma}} = \overline{\overline{0}} \quad \text{dans } \mathcal{V} \\ \overline{\overline{f}}_s = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\overline{n}} \quad \text{sur } \mathcal{S}^f \\ \overline{\overline{f}}_c = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\overline{n}} \quad \text{sur } \mathcal{S}^c \\ \overline{\overline{u}} = \overline{\overline{u}} \quad \text{sur } \mathcal{S}^u \end{array} \right. \quad (2.94)$$

Son expression variationnelle s'écrit en reprenant le PPV

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\overline{\overline{D}}^* : \overline{\overline{\sigma}} \right) \cdot dV + \int_{\mathcal{V}} \overline{\overline{v}}^* \cdot \left(\rho \cdot \overline{\overline{\gamma}} - \overline{\overline{f}}_v \right) \cdot dV - \int_{\mathcal{S}^f} \overline{\overline{v}}^* \cdot \overline{\overline{f}}_s \cdot dS - \int_{\mathcal{S}^c} \overline{\overline{v}}^* \cdot \overline{\overline{f}}_c \cdot dS = 0 \quad (2.95)$$

$\forall \overline{\overline{v}}^* \text{ sauf } \overline{\overline{v}}^* = 0 \text{ sur } \mathcal{S}^u$

On peut également écrire les versions lagrangiennes (totales)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{T}} + \overline{\overline{f}}_0^V = \rho_0 \cdot \overline{\overline{\gamma}} \quad \text{dans } \mathcal{V}_0 \\ \overline{\overline{f}}_s^0 = \overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{n}} \quad \text{sur } \mathcal{S}_0^f \\ \overline{\overline{f}}_c^0 = \overline{\overline{T}} \cdot \overline{\overline{n}} \quad \text{sur } \mathcal{S}_0^c \\ \overline{\overline{u}} = \overline{\overline{u}} \quad \text{sur } \mathcal{S}_0^u \end{array} \right. \quad (2.96)$$

$$\int_{\mathcal{V}_0} \left(\overline{\overline{F}}^* : \overline{\overline{T}} \right) \cdot dV_0 + \int_{\mathcal{V}_0} \overline{\overline{v}}^* \cdot \left(\rho_0 \cdot \overline{\overline{\gamma}} - \overline{\overline{f}}_v^0 \right) \cdot dV_0 - \int_{\mathcal{S}_0^f} \overline{\overline{v}}^* \cdot \overline{\overline{f}}_s^0 \cdot dS_0 - \int_{\mathcal{S}_0^c} \overline{\overline{v}}^* \cdot \overline{\overline{f}}_c^0 \cdot dS_0 = 0 \quad (2.97)$$

$\forall \overline{\overline{v}}^* \text{ sauf } \overline{\overline{v}}^* = 0 \text{ sur } \mathcal{S}_0^u$

Il faut faire attention à la non-symétrie du tenseur PK1 $\overline{\overline{T}}$ qui implique que $\overline{\overline{T}}^T : \overline{\overline{F}}^* \neq \overline{\overline{F}}^* : \overline{\overline{T}}^T$. Le tenseur $\overline{\overline{F}}^*$ s'écrit

$$\overline{\overline{F}}^* = \frac{\partial \overline{\overline{v}}^*}{\partial \overline{\overline{X}}} \quad (2.98)$$

Remarque *Il existe deux variantes de la description lagrangienne. En effet, la configuration de référence peut, soit rester identique tout au long du calcul (formulation lagrangienne totale), soit être actualisée à chaque itération (formulation lagrangienne actualisée ou FLA). Mais, fondamentalement, il n'y a pas de différences entre les deux écritures.*

Il existe beaucoup d'autres écritures selon la configuration sur laquelle est écrite l'équation d'équilibre (voir, par exemple [BGKL89]). Si l'on remplace les vitesses virtuelles par

les vitesses réelles

$$p_{int.} = - \int_{\mathcal{V}} \left(\overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\sigma}} \right) .dV \quad (2.99a)$$

$$p_{int.} = - \int_{\mathcal{V}_0} \left(\dot{\overline{\overline{F}}} : \overline{\overline{T^T}} \right) .dV_0$$

$$p_{int.} = - \int_{\mathcal{V}_0} \left(\dot{\overline{\overline{E}}} : \overline{\overline{S}} \right) .dV_0$$

La puissance massique des efforts intérieurs est donnée par

$$-\frac{1}{\rho_0} . \dot{\overline{\overline{E}}} : \overline{\overline{S}} = -\frac{1}{\rho_0} . \dot{\overline{\overline{F}}} : \overline{\overline{T^T}} = -\frac{1}{\rho} . \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\sigma}} = -\frac{1}{\rho_0} . \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\tau}} \quad (2.100)$$

Ce qui justifie la dualité entre contraintes et taux de déformation

$$\dot{\overline{\overline{E}}} : \overline{\overline{S}} = \dot{\overline{\overline{F}}} : \overline{\overline{T^T}} = \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\tau}} \quad (2.101)$$

2.3 Discrétisation et résolution par éléments finis

Nous avons désormais tous les éléments pour discrétiser le problème et appliquer la méthode des éléments finis. Cependant, nous nous limitons volontairement aux hypothèses utilisées par ABAQUS, et, plus spécifiquement ABAQUS/Explicit, le code de calcul de dynamique explicite qui utilise une description lagrangienne actualisée.

2.3.1 Discrétisation spatiale

La formulation par éléments finis repose sur une discrétisation spatiale du domaine. Nous partons d'une formulation variationnelle globale sur tout le domaine et nous le divisons en éléments géométriques élémentaires (voir 2.7).

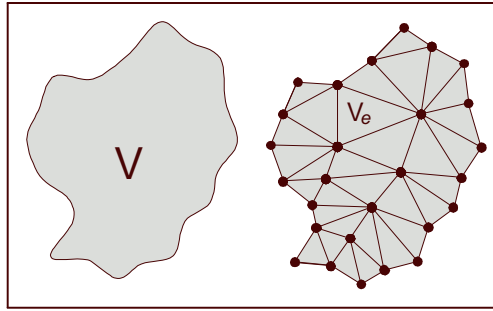


Fig. 2.7: Discrétisation du domaine

Nous écrivons donc

$$V \simeq \bigcup V_e \quad (2.102)$$

La discrétisation spatiale est une partie importante de la modélisation par éléments finis. De la qualité du maillage dépend la qualité du résultat. L'objectif global est que, plus le maillage est fin, meilleur est le résultat.

2.3.1.1 Interpolation de la géométrie

Les éléments utilisés sont des triangles, des quadrangles, des tétraèdres et des hexaèdres avec une approximation linéaire.

Notation Désormais, nous allons utiliser la notation matricielle que l'on utilise habituellement dans le formalisme des éléments finis (voir [BD90a] par exemple). $[M]$ sera une matrice, $\langle l \rangle$ un vecteur ligne et $\{c\}$ un vecteur colonne. De plus, il est habituelle de « ranger » les composantes des tenseurs (de contraintes, de déformations) dans des vecteurs lignes et colonnes

La géométrie des éléments est interpolée linéairement sur les coordonnées de référence (ξ, η, ς)

$$\{x\} = [N(\xi, \eta, \varsigma)] \cdot \{x^e\} \text{ ou } x_i = N^\alpha \cdot x_i^\alpha$$

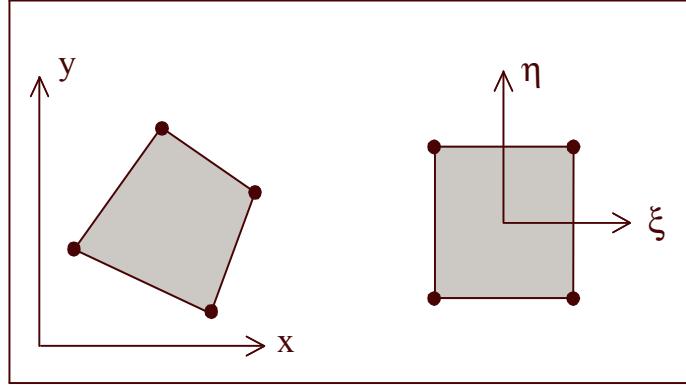


Fig. 2.8: Élément réel et élément de référence (coordonnées réelles et paramétriques)

Les lettres grecques minuscules en exposant numérotent les composantes discrètes. En 2D, pour un élément à quatre noeuds par exemple

$$\begin{aligned} x_1 &= N^1 \cdot x_1^1 + N^2 \cdot x_1^2 + N^3 \cdot x_1^3 + N^4 \cdot x_1^4 \\ x_2 &= N^1 \cdot x_2^1 + N^1 \cdot x_2^2 + N^1 \cdot x_2^3 + N^1 \cdot x_2^4 \end{aligned}$$

$[N(\xi, \eta, \varsigma)]$ est la matrice d'interpolation linéaire et $\{x^e\}$ est le vecteur des coordonnées nodales.

2.3.1.2 Interpolation cinématique

Pour les approximations isoparamétriques généralement utilisées, les déplacements et les vitesses (les quantités réelles et virtuelles) aux noeuds sont interpolés de la même façon que la géométrie, avec les mêmes fonctions de forme (formulation de Galerkin).

$$\begin{aligned} \{v\} &= [N(\xi, \eta, \varsigma)] \cdot \{v_e\} \text{ et } \{v^*\} = [N(\xi, \eta, \varsigma)] \cdot \{v_e^*\} \\ \{u\} &= [N(\xi, \eta, \varsigma)] \cdot \{u_e\} \text{ et } \{u^*\} = [N(\xi, \eta, \varsigma)] \cdot \{u_e^*\} \end{aligned}$$

$\{u_e\}$ (respectivement $\{u_e^*\}$) est le vecteur des déplacements nodaux (respectivement déplacements virtuels nodaux) et $\{v_e\}$ (respectivement $\{v_e^*\}$) est le vecteur des vitesses nodales (respectivement vitesses virtuelles nodales)

2.3.1.3 Discrétisation de la forme variationnelle

Nous reprenons l'expression du PPV

$$\int_{\mathcal{V}} (\overline{\overline{D^*}} : \overline{\overline{\sigma}}) \cdot dV = \int_{S_f} \overline{v^*} \cdot \overline{f_s} \cdot dS + \int_{\mathcal{V}} \overline{v^*} \cdot (\overline{f_v} - \rho \cdot \overline{\gamma}) \cdot dV \quad (2.103)$$

On remplace la première partie de l'équation

$$\int_{\mathcal{V}_0} (\overline{\overline{D^*}} : \overline{\overline{\tau}}) \cdot dV_0 = \int_{S_f} \overline{v^*} \cdot \overline{f_s} \cdot dS + \int_{\mathcal{V}} \overline{v^*} \cdot (\overline{f_v} - \rho \cdot \overline{\gamma}) \cdot dV \quad (2.104)$$

En passant en mode matriciel

$$\int_{\mathcal{V}_0} \langle D^* \rangle \cdot \{\tau\} \cdot dV_0 = \int_{S^f} \langle v^* \rangle \cdot \{f_s\} \cdot dS + \int_{\mathcal{V}} \langle v^* \rangle \cdot (\{f_v\} - \rho \cdot \{\gamma\}) \cdot dV \quad (2.105)$$

En remplaçant par les approximations éléments finis

$$\{v^*\} = [N] \cdot \{v_e^*\} \quad (2.106)$$

Le taux de déformation s'écrit alors

$$\{D^*\} = [B] \cdot \{v_e^*\} \quad (2.107)$$

On obtient sur un élément

$$\int_{\mathcal{V}_{0,e}} \langle v_e^* \rangle \cdot [B]^T \cdot \{\tau\} \cdot dV_0 = \int_{S_e^f} \langle v_e^* \rangle \cdot [N]^T \cdot \{f_s\} \cdot dS + \int_{\mathcal{V}_e} \langle v_e^* \rangle \cdot [N]^T \cdot (\{f_v\} - \rho \cdot \{\gamma\}) \cdot dV \quad (2.108)$$

La formulation est lagrangienne actualisée. Comme cette expression est valable quelque soit la vitesse virtuelle $\{v_e^*\}$, on peut simplifier

$$\int_{\mathcal{V}_{0,e}} [B]^T \cdot \{\tau\} \cdot dV_0 = \int_{S_e^f} [N]^T \cdot \{f_s\} \cdot dS + \int_{\mathcal{V}_e} [N]^T \cdot (\{f_v\} - \rho \cdot \{\gamma\}) \cdot dV \quad (2.109)$$

En utilisant les notions de force interne, force externe et matrice masse, on écrit

$$\{f_e^{int}\} = \{f_e^{ext}\} - [M_e] \cdot \{\gamma_e\} \quad (2.110)$$

Avec

$$\begin{aligned} \{f_e^{int}\} &= \int_{\mathcal{V}_0} [B]^T \cdot \{\tau\} \cdot dV_0 \\ \{f_e^{ext}\} &= \int_{S^f} [N]^T \cdot \{f_s\} \cdot dS + \int_{\mathcal{V}} [N]^T \cdot \{f_v\} \cdot dV \\ [M_e] &= \int_{\mathcal{V}} [N]^T \cdot \rho \cdot [N] \cdot dV \end{aligned} \quad (2.111a)$$

On assemble le tout pour résoudre au niveau global

$$\{f_G^{int}\} = \{f_G^{ext}\} - [M_G] \cdot \{\gamma_G\} \quad (2.112)$$

2.3.1.4 Intégration numérique

a Principe

Les intégrales sont évaluées à l'aide de formules d'intégration numérique, en général, on utilise la méthode de Gauss (voir [DT84]). L'intégration numérique remplace la somme

continue par une somme discrète de fonctions $f(\zeta_k)$ pondérée par des poids d'intégration w_i . Par exemple, pour une intégrale triple, on aura

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\vec{\xi}) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_J} \sum_{k=1}^{n_K} w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot f(\xi_i) \cdot f(\eta_j) \cdot f(\zeta_k) \quad (2.113)$$

La méthode d'intégration de Gauss est exacte pour des fonctions purement polynomiales et le nombre des points dépend du degré de ces polynômes. Il faut noter que le nombre de points d'intégration est multiplié par le nombre d'éléments et le nombre d'itération, d'où l'importance de limiter ce nombre au maximum.

b Intégration réduite

La méthode de Gauss est très précise, voire exacte, pour les fonctions « lisses » en analyse linéaire, mais l'analyse non-linéaire apporte généralement des intégrands non lisses. Par exemple, pour un matériau élasto-plastique, les contraintes sont discontinues à la frontière entre la partie élastique et la partie plastique.

En pratique, le nombre de points d'intégration en analyse non-linéaire est le même que celui utilisé en analyse linéaire. Mais on procède souvent à une intégration sélective ou réduite. L'intégration réduite permet de mieux satisfaire les conditions d'incompressibilité plastique ou d'éviter le blocage en cisaillement transverse qui provient de l'usage d'éléments épais pour des structures minces. Dans ces situations, les éléments complètement intégrés conduisent à une rigidité excessive nuisant à la qualité des résultats.

Dans l'intégration sélective, on sépare la partie hydrostatique des contraintes et cette partie est sous-intégrée. Pour cela, on utilise généralement une formulation variationnelle de Hu-Washizu dans laquelle on sépare les parties déviatoriques et hydrostatiques du tenseur des contraintes, ce sont des éléments dits « hybrides ».

Dans ABAQUS, l'intégration réduite à un point est faite avec une modification de la matrice gradient $[B]$. Cette modification a été introduite par Flanagan et Belytschko ([FB81]) Elle est appelée formulation en déformation uniforme ou réduction moyenne (« uniform strain formulation »). Dans ce schéma, la déformation est constante sur l'élément et calculé analytiquement comme la moyenne des déformations sur le volume de l'élément. En effet, une simple intégration réduite sans modification de la matrice gradient ne passe pas le patch-test. Pour des éléments sans distorsion angulaire, l'intégration réduite avec ou sans modification de la matrice $[B]$ donne les mêmes résultats.

Nous allons expliquer rapidement cette modification de la matrice gradient. Les fonctions d'interpolation N peuvent se ré-écrire, pour un élément bidimensionnel quadrilatéral

$$\{N\} = \frac{1}{4} \cdot \{\Sigma\} + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \{\Lambda_I\} + \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \{\Lambda_{II}\} + \xi\eta \cdot \{\Gamma\} \quad (2.114)$$

Et pour un élément tridimensionnel hexaédrique

$$\begin{aligned} \{N\} = & \frac{1}{8} \cdot \{\Sigma\} + \frac{1}{4} \cdot \xi \cdot \{\Lambda_I\} + \frac{1}{4} \cdot \eta \cdot \{\Lambda_{II}\} + \frac{1}{4} \cdot \zeta \cdot \{\Lambda_{III}\} \\ & + \frac{1}{2} \cdot \eta\zeta \cdot \{\Gamma_I\} + \frac{1}{2} \cdot \xi\zeta \cdot \{\Gamma_{II}\} + \frac{1}{2} \cdot \eta\xi \cdot \{\Gamma_{III}\} + \xi\eta\zeta \cdot \{\Gamma_{IV}\} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Les différents vecteurs Σ , Λ et Γ se trouvent dans la littérature (voir [FB81]) et dans l'annexe F. Nous développons le formalisme pour le cas bi-dimensionnel. Nous partons de l'expression de la puissance des efforts intérieurs

$$\langle v_n \rangle \cdot \{f^{int}\} = \int_V \langle D \rangle \cdot \{\sigma\} \cdot dV \quad (2.116)$$

Comme $\{\sigma\}$ est symétrique, on peut remplacer $\langle D \rangle$ par $\langle L \rangle$. L'approximation de Flanagan et Belytschko consiste à remplacer la valeur exacte de l'intégrale par des valeurs moyennes

$$\langle v_n \rangle \cdot \{f^{int}\} = V \cdot \langle \widehat{L} \rangle \cdot \{\widehat{\sigma}\} \quad (2.117)$$

Le vecteur $\langle \widehat{L} \rangle$ est la valeur moyenne sur l'élément, l'épaisseur h étant supposée constante

$$\langle \widehat{L} \rangle = \frac{1}{A} \cdot \int_A \{L\} \cdot dA \quad (2.118)$$

Il est plus facile de travailler avec la notation matricielle pure. Sous cette forme, le tenseur gradient des vitesses de déformations s'écrit

$$\left[\widehat{L} \right] = \begin{bmatrix} \widehat{v}_{x,x} & \widehat{v}_{x,y} \\ \widehat{v}_{y,x} & \widehat{v}_{y,y} \end{bmatrix}$$

Que l'on écrit en utilisant la matrice gradient $\left[\widehat{B} \right]$

$$\left[\widehat{L} \right] = \frac{1}{A} \cdot \left[\widehat{B} \right] \cdot [v_n]$$

Avec la notation indicielle

$$\widehat{L}_{ij} = \widehat{v}_{i,j} = \frac{1}{A} \cdot \widehat{B}_j^\alpha \cdot v_i^\alpha$$

Les v_i^α sont les composantes nodales de la vitesse. La matrice gradient $\left[\widehat{B} \right]$ a pour composantes

$$\widehat{B}_i^\alpha = \int_A \frac{\partial N^\alpha}{\partial x_i} \cdot dA$$

On peut lier la matrice $\left[\widehat{B} \right]$ et l'aire de l'élément. En effet

$$x_i^\alpha \cdot \widehat{B}_j^\alpha = x_i^\alpha \cdot \int_A \frac{\partial N^\alpha}{\partial x_i} \cdot dA$$

Or

$$\frac{\partial (x_i^\alpha \cdot N^\alpha)}{\partial x_j} = \overbrace{\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j}}^{=0} \cdot N^\alpha + x_i^\alpha \cdot \frac{\partial N^\alpha}{\partial x_j} = x_i^\alpha \cdot \frac{\partial N^\alpha}{\partial x_j}$$

Donc

$$x_i^\alpha \cdot \widehat{B}_j^\alpha = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial (x_i^\alpha \cdot N^\alpha)}{\partial x_j} \cdot dA$$

Cette intégrale se résoud simplement en remarquant que

$$x_i^\alpha \cdot N^\alpha = x_i \cdot N^\alpha \cdot N^\alpha = x_i \Rightarrow \frac{\partial (x_i^\alpha \cdot N^\alpha)}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement

$$x_i^\alpha \cdot \widehat{B}_j^\alpha = \delta_{ij} \cdot A \Rightarrow x_i^\alpha \cdot \widehat{B}_i^\alpha = A$$

Et l'expression de la matrice $[\widehat{B}]$ en fonction de l'aire de l'élément

$$\widehat{B}_i^\alpha = \frac{\partial A}{\partial x_i^\alpha}$$

Il reste à évaluer l'aire de l'élément en passant par les coordonnées paramétriques

$$A = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} J \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (2.119)$$

J est le jacobien du changement de variable et vaut

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.120)$$

Et donc l'aire de l'élément s'écrit

$$A = \langle x_n \rangle \cdot [C] \cdot \{y_n\} \quad (2.121)$$

$\{x_n\}$ est le vecteur des coordonnées nodales réelles de l'élément. La matrice antisymétrique $[C]$ a pour composantes

$$C^{\alpha\beta} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial N^\alpha}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N^\beta}{\partial \eta} - \frac{\partial N^\beta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N^\alpha}{\partial \xi} \right) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (2.122)$$

Que l'on calcule simplement

$$[C] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

Finalement, la matrice $[\widehat{B}]$ correspondant à la formulation de Flanagan vaut

$$[\widehat{B}] = \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot [C] \quad (2.124)$$

Ce résultat se généralise aisément au cas d'un élément hexaédrique. Le vecteur des forces internes se calcule avec cette matrice gradient modifiée

$$f_i^{\alpha,int} = h \cdot \widehat{B}_j^\alpha \cdot \widehat{\sigma}_{ij} \quad (2.125)$$

Avec l'épaisseur h .

c Modes sabliers

Les éléments à intégration réduite sont particulièrement performants pour le faible coût de calcul qu'ils requièrent, en particulier pour les problèmes de formage qui utilisent des lois de comportement exigeantes. Cependant, ces éléments ont un défaut très gênant car ils provoquent l'apparition de modes dégénérés (modes sabliers ou « hourglass modes ») qu'il faut absolument contrôler.

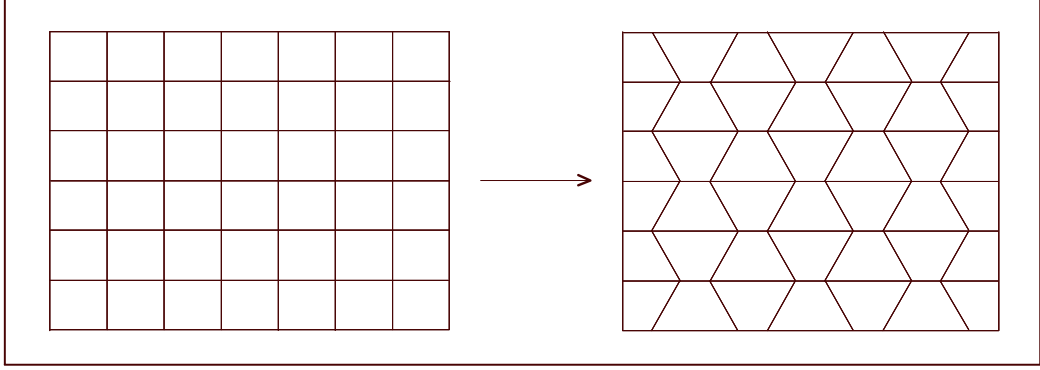


Fig. 2.9: Déformation des mailles en sabliers dues à une sous-intégration des éléments

Ces modes dégénérés (voir figure 2.9) correspondent aux vecteurs Γ définis précédemment. Pour contrôler ces modes sabliers, on utilise principalement la méthode introduite par Flanagan et Belytschko ([FB81]). Nous avons vu que l'intégration par la méthode de Flanagan produit un champ de vitesse linéaire. Le champ de vitesse des modes sabliers est une fonction linéaire des vecteurs des modes sabliers, soit

$$\dot{q}_i = \frac{1}{2} \cdot v_i^\alpha \cdot \gamma^\alpha \quad (2.126)$$

Le vecteur des modes sabliers s'écrit

$$\gamma^\alpha = \Gamma^\alpha - \frac{1}{A} \cdot \langle x_n \rangle \cdot B_j^\alpha \cdot x_i^\beta \cdot \Gamma^\beta \quad (2.127)$$

Ou de manière explicite (où l'on a remplacé x_1 par x et x_2 par y)

$$\{\gamma\} = \frac{1}{4A} \cdot \left\{ \begin{array}{l} x^2 \cdot (y^3 - y^4) + x^3 \cdot (y^4 - y^2) + x^4 \cdot (y^2 - y^3) \\ x^3 \cdot (y^1 - y^4) + x^4 \cdot (y^3 - y^1) + x^1 \cdot (y^4 - y^3) \\ x^4 \cdot (y^1 - y^2) + x^1 \cdot (y^2 - y^4) + x^2 \cdot (y^4 - y^1) \\ x^1 \cdot (y^3 - y^2) + x^2 \cdot (y^1 - y^3) + x^3 \cdot (y^2 - y^1) \end{array} \right\} \quad (2.128)$$

Ce qui permet de quantifier la force de résistance aux modes sabliers f_i^{HG}

$$f_i^{\alpha, HG} = \frac{1}{2} \cdot Q_i \cdot \gamma^\alpha \quad (2.129)$$

Pour contrôler les modes sabliers apparaissant à cause de la sous-intégration de l'élément, on ajoute ces forces de contrôle⁸ au vecteur des forces internes

$$f_i^{\alpha,int} = h \cdot \widehat{B}_j^\alpha \cdot \widehat{\sigma}_{ij} + f_i^{\alpha,HG} \quad (2.130)$$

Nous pouvons utiliser deux types de résistance aux modes sabliers : l'amortissement artificielle ou la rigidité artificielle. L'amortissement et la rigidité sont définies avec la fréquence maximale et la rigidité d'un élément, soit, respectivement

$$Q_i = \varepsilon h \cdot \sqrt{\left[\frac{\rho(\lambda + 2\mu) \cdot B_i^\alpha \cdot B_i^\alpha}{6} \right]} \cdot \dot{q}_i \quad (2.131)$$

$$\dot{Q}_i = \kappa h \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{3} \frac{B_i^\alpha \cdot B_i^\alpha}{A} \cdot \dot{q}_i \quad (2.132)$$

Le coefficient ε est la viscosité anti-modes sabliers et κ est le coefficient de rigidité de contrôle des modes sabliers. λ et μ sont les coefficients de Lamé. Cette méthode de contrôle des modes sabliers est généralement efficace pour les problèmes linéaires ou faiblement non-linéaires mais elle est insuffisante pour des problèmes fortement non-linéaires et peut donner des résultats non-utilisables. Or, il se trouve que dans le cas du sertissage, nous avons été confronté à des problèmes de modes sabliers lors des simulations tridimensionnelles.

Il existe d'autres méthodes plus élaborées pour contrôler les modes sabliers. Une de ces nouvelles méthodes est programmée dans ABAQUS/Explicit pour les éléments hexaédriques. La méthode la plus souvent employée en complément de celle de Flanagan et Belytschko repose sur une formulation avancée des méthodes de moyennation des déformations (« enhanced assumed strain »). Le contrôle utilise une formulation variationnelle mixte de type Hu-Washizu et une stabilisation physique des vecteurs de force interne. Les références sont [Pus00] et [BB93]. On trouvera en particulier dans ce dernier article, la description de la méthode pour un algorithme dynamique explicite.

2.3.2 Algorithme explicite dynamique

Dans cette étude du sertissage nous avons utilisé principalement la méthode explicite d'intégration temporelle. En effet, la présence de plus de soixante couples de contact possibles (pour un câble de douze brins), plus les grandes déformations et le comportement élasto-plastique, constitue une difficulté majeure pour obtenir la convergence d'un code en calcul statique implicite. ABAQUS/Explicit, comme la plupart des codes de calcul en dynamique explicite, utilise un schéma d'intégration temporelle de type différences finies centrales.

⁸Cette modification du vecteur des forces internes est suffisante pour l'algorithme dynamique explicite. Pour l'analyse statique implicite, il est également nécessaire de modifier la matrice de rigidité.

2.3.2.1 Formulation variationnelle

La base de la méthode consiste à résoudre itérativement l'équation 2.112 après assemblage des contributions élémentaires

$$[M_G] \cdot \{\gamma_G\} = \{f_G^{ext}\} - \{f_G^{int}\} = \{f_G\} \quad (2.133)$$

Dans les méthodes explicites, on ne linéarise pas cette équation et on ne calcule donc pas de matrice de rigidité. Mais la force de cette méthode ne provient pas que de cet aspect. Elle provient surtout du fait que l'on utilise une matrice masse concentrée diagonalisée

$$[M] \rightarrow [M_{diag}] = [I] \cdot [M] \quad (2.134)$$

Grâce à cette approximation, on économise la résolution d'un système d'équations à l'aide des méthodes habituelles (factorisation).

2.3.2.2 Schéma d'intégration temporelle ([GR96])

Les opérateurs d'intégration temporelle directe doivent être utilisés avec beaucoup de précautions car ils filtrent une partie de la réponse fréquentielle des systèmes dynamiques. La stabilité de la méthode est liée à la topologie de la structure et à la taille du pas de temps choisi. On construit généralement ces schémas par différences finies temporelles. La plupart des schémas utilisés sont des schémas à un pas qui appartiennent à la famille de Newmark. Considérons le temps de simulation totale t_E que l'on divise en pas de temps Δt^n avec n variant de 1 à n_E .

Notation L'exposant indique le pas de temps n . Ainsi, les déplacements au pas n seront notés u^n

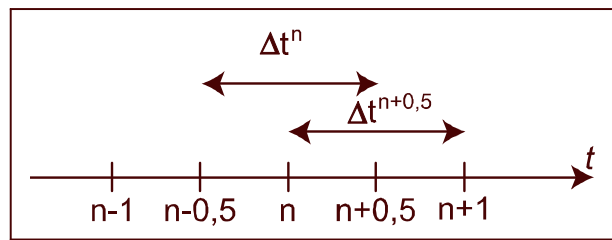


Fig. 2.10: Discrétisation temporelle

Il est important de noter que le pas de temps Δt est variable au cours du calcul, puisque le schéma explicite est conditionnellement stable et dépend de la géométrie et de la vitesse de propagation du son (dépendant du matériau) qui varient au cours du calcul. Nous noterons donc le demi-pas de temps $\Delta t^{n+1/2}$ (voir 2.10) tel que

$$\Delta t^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n \quad (2.135)$$

$$\Delta t^n = t^{n+1/2} - t^{n-1/2} \quad (2.136)$$

On utilise donc le schéma d'intégration temporelle à différences finies centrées. La vitesse s'écrit (étant entendu que la vitesse, le déplacement ou l'accélération sont des vecteurs mais que nous avons omis les notations habituelles pour ne pas surcharger l'écriture)

$$v^{n+1/2} = \frac{u^{n+1} - u^n}{t^{n+1} - t^n} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t^{n+1/2}} \quad (2.137)$$

Qui s'écrit aussi

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t^{n+1/2} \cdot v^{n+1/2} \quad (2.138)$$

et

$$v^{n-1/2} = \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t^{n-1/2}} \quad (2.139)$$

L'accélération s'approxime de la même manière

$$\gamma^n = \frac{v^{n+1/2} - v^{n-1/2}}{t^{n+1/2} - t^{n-1/2}} = \frac{v^{n+1/2} - v^{n-1/2}}{\Delta t^n} \quad (2.140)$$

En injectant l'expression des vitesses 2.137 et 2.139

$$\gamma^n = \frac{(u^{n+1} - u^n)}{\Delta t^{n+1/2} \cdot \Delta t^n} - \frac{(u^n - u^{n-1})}{\Delta t^{n-1/2} \cdot \Delta t^n} \quad (2.141)$$

Finalement

$$\gamma^n = \frac{\Delta t^{n-1/2} \cdot (u^{n+1} - u^n) - \Delta t^{n+1/2} \cdot (u^n - u^{n-1})}{\Delta t^{n+1/2} \cdot \Delta t^n \cdot \Delta t^{n-1/2}} \quad (2.142)$$

On remarque qu'en prenant un pas de temps constant, on retrouve la définition habituelle d'un schéma des différences finies centrées

$$\gamma^n = \frac{(u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1})}{(\Delta t^n)^2} \quad (2.143)$$

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation d'équilibre

$$[M] \cdot \{\gamma^n\} = \{f^{ext}(u^n, t^n)\} - \{f^{int}(u^n, t^n)\} \quad (2.144)$$

Les vecteurs de forces internes et de force externe dépendent de manière plus ou moins directe des déplacements. Pour le vecteur des forces internes, le déplacement agit sur les déformations, et, via la loi de comportement, sur l'état de contraintes. Les équations pour actualiser les vitesses et les déplacements s'écrivent

$$\{v^{n+1/2}\} = \{v^{n-1/2}\} + \Delta t^n \cdot [M^{-1}] \cdot (\{f^{ext}(u^n, t^n)\} - \{f^{int}(u^n, t^n)\}) \quad (2.145)$$

Et

$$\{u^{n+1}\} = \{u^n\} + \Delta t^{n+1/2} \cdot \{v^{n+1/2}\} \quad (2.146)$$

On voit donc la remarquable efficacité de la méthode : il ne s'agit que d'inverser une matrice pour actualiser déplacements, vitesses, puis déformations et contraintes. De plus, dans la majorité des cas, on utilise une matrice masse concentrée, donc diagonale. L'inversion de celle-ci est donc immédiate.

2.3.2.3 Stabilité

Il existe quand même des défauts dans l'utilisation des méthodes explicites. La plus importante est que l'on ne vérifie à aucun moment l'équilibre et que la justesse du résultat dépend de la taille des pas. En effet, autre inconvénient, les méthodes explicites sont conditionnellement stables : la taille du pas de temps dépend de la géométrie de l'élément et du matériau. Cette limite de stabilité, ou condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) s'écrit

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (2.147)$$

ω_{\max} est la valeur propre maximale du système. Cette condition de stabilité est valable pour la dynamique linéaire (élasticité). Pour les cas non-linéaires, il est nécessaire d'actualiser à chaque pas la condition de stabilité. Pour contrôler les oscillations de haute fréquence, on introduit un peu de viscosité. Et dans ce cas, la condition de stabilité se ré-écrit

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \left(\sqrt{1 - \xi^2} - \xi \right) \quad (2.148)$$

où ξ est une fraction d'amortissement dans le mode le plus élevé du système.

Remarque 1 Augmenter la valeur d'amortissement ξ diminue la taille du pas maximum utilisable.

On peut démontrer que $\omega_{\max} < \omega_{\max}^e$. Concrètement, cette limite de stabilité s'écrit

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_{\max}^e} = \min \left(\frac{L_e}{c_d} \right) \quad (2.149)$$

L_e est une longueur caractéristique de l'élément (une longueur de diagonale par exemple). c_d est la vitesse du son dans le matériau. Il est possible d'augmenter le pas de temps en augmentant la masse des éléments artificiellement. Il existe deux grandes méthodes :

- On augmente uniformément la masse.
- On augmente la masse des éléments dans la limite de stabilité inférieure à une limite fixée par l'utilisateur.

La deuxième hypothèse est la plus généralement adoptée. Cette opération, dite de « mass scaling » est efficace, à condition de pas trop abuser. En effet, augmenter la masse augmente mécaniquement les effets d'inertie. Il faut donc veiller à ce que ces effets ne deviennent pas trop importants en contrôlant le niveau des énergies (cinétique et interne) à la fin du calcul.

2.3.2.4 Viscosité volumique

La viscosité volumique introduit un amortissement associé à la déformation volumique. Cette viscosité permet d'améliorer la qualité des résultats pour les simulations de dynamique très rapide. Elle améliore aussi substantivement la qualité des résultats lors des simulations quasi-statiques, en éliminant les vibrations de haute fréquence indésirables. ABAQUS/Explicit introduit deux types de viscosité :

1. Une viscosité linéaire : utilisable pour tous les éléments, cette viscosité introduit un amortissement directement proportionnel à la déformation volumique. On dit aussi que cette viscosité tronque les fréquences élevées et on l'écrit

$$p_{lin} = b_1 \cdot \rho \cdot c_d \cdot L_e \cdot \dot{\epsilon}_{vol} \quad (2.150)$$

L_e est une longueur caractéristique de l'élément, c_d est la vitesse du son dans le matériau et le paramètre b_1 permet de régler cette viscosité (par défaut $b_1 = 0,06$). $\dot{\epsilon}_{vol}$ est l'incrément de déformation volumique ($\dot{\epsilon}_{vol} = \frac{1}{3} \text{trace}(\dot{\epsilon}_{vol})$)

2. Une viscosité quadratique : utilisable uniquement avec les éléments continus (poutres, éléments 2D et éléments 3D, sauf les éléments en contraintes planes). C'est une sécurité supplémentaire pour amortir les gradients de déformation très rapides qui peuvent écraser complètement les éléments. Cette viscosité est quadratique en $\dot{\epsilon}_{vol}$.

$$p_{quad} = \left(b_2 \cdot \rho \cdot L_e \cdot \dot{\epsilon}_{vol} \right)^2 \quad (2.151)$$

le paramètre b_2 permet de régler cette viscosité (par défaut $b_2 = 1,2$).

Ces deux viscosités sont introduites au niveau d'une matrice d'amortissement globale et non au niveau de la loi de comportement. On recherche un effet purement numérique et on évite donc de le mélanger à un comportement purement physique. La fraction d'amortissement pour chaque élément s'écrit

$$\xi = b_1 - (b_2)^2 \cdot \frac{L_e}{c_d} \cdot \min \left(0, \dot{\epsilon}_{vol} \right) \quad (2.152)$$

On ajoute donc une matrice d'amortissement diagonale $[C]_{diag}$ (purement numérique) à l'équation d'équilibre

$$[M]_{diag} \cdot \{\gamma\} + [C]_{diag} \cdot \{v\} = \{f\} \quad (2.153)$$

2.3.2.5 Algorithme

Nous proposons ici de détailler l'algorithme général de résolution de la méthode dynamique explicite.

Initialiser: Initialisation des déplacements $\{u^0\}$, des vitesses $\{v^0\}$, des contraintes $\{\sigma^0\}$ et initialisation des variables internes des matériaux, $n = 0$ et $t = 0$.

- 1: Calcul de la matrice masse $[M]_{diag}$.
- 2: Initialisation du vecteur des forces $\{f^n\}$
- 3: Calcul du vecteur des accélérations $\{\gamma^n\} = [M^{-1}]_{diag} \cdot \left(\{f^n\} - [C]_{diag} \cdot \{v^{n-1/2}\} \right)$.
- 4: Mise à jour du pas de temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1/2}$ et $t^{n+1/2} = \frac{1}{2} (t^{n+1} + t^n)$
- 5: Calcul du vecteur des vitesses $\{v^{n+1/2}\} = \{v^n\} + (t^{n+1/2} - t^n) \cdot \{\gamma^n\}$
- 6: Imposition des conditions limites en vitesse

-
- 7: Calcul du vecteur des déplacements $\{d^{n+1}\} = \{d^n\} + \Delta t^{n+1/2} \cdot \{v^{n+1/2}\}$
 - 8: Calcul du vecteur des forces $\{f^{n+1}\} \Rightarrow \{\text{Appel de la sous-routine } \textit{CalculForce}\}$
 - 9: Calcul du vecteur des accélérations $\{\gamma^{n+1}\} = [M^{-1}]_{diag} \cdot (\{f^{n+1}\} - [C]_{diag} \cdot \{v^{n+1/2}\})$
 - 10: Calcul du vecteur des vitesses $\{v^{n+1}\} = \{v^{n+1/2}\} + (t^{n+1} - t^{n+1/2}) \cdot \{\gamma^{n+1}\}$
 - 11: Mise à jour $n \leftarrow n + 1$
 - 12: Boucle vers 4
-

Le calcul des forces est fait dans l'algorithme suivant

Initialiser: Initialisation du vecteur des forces $\{f_G^n\} = \{0\}$.

- 1: Calcul du vecteur GLOBAL des forces externes $\{f_G^{ext,n}\}$.
 - 2: **pour** tous les éléments e **faire**
 - 3: Récupération des déplacements et des vitesses nodales de l'élément.
 - 4: Initialisation du vecteur des forces internes $\{f_e^{int,n}\} = \{0\}$.
 - 5: **pour** tous les points d'intégration i **faire**
 - 6: **si** $n = 0$ **alors**
 - 7: Sortie vers 21
 - 8: **fin si**
 - 9: Calcul du tenseur gradient de déformations $[\Delta F^n(\xi i)] = \left[\frac{\partial \{x^n\}}{\partial \{x^{n-1}\}} \right]$ à partir de la configuration précédente (Lagrangien actualisé).
 - 10: Décomposition polaire de $[\Delta F^n(\xi i)] \rightarrow [\Delta R^n(\xi i)], [\Delta U^n(\xi i)]$.
 - 11: Calcul de la matrice gradient $[D^n(\xi i)]$.
 - 12: Calcul de l'état de contraintes avec la loi de comportement $\sigma^n(D^n)$ et Jaumann
Calcul du rabattement plastique si nécessaire par la méthode d'Euler implicite.
 - 13: Calcul du vecteur contraintes $\{\sigma^n(\xi i)\} = \{\Delta \sigma^n(\xi i)\} + \{\sigma^{n-1}(\xi i)\}$.
 - 14: Calcul du vecteur des forces internes
 $\{f_e^{int,n}(\xi i)\} \leftarrow \{f_e^{int,n}(\xi i)\} + [B]^T \cdot \{\sigma^n(\xi i)\} \cdot w_i \cdot J_i$.
 - 15: **fin pour**
 - 16: Calcul du vecteur des forces externes élémentaire $\{f_e^{ext,n}\}$.
 - 17: Calcul du vecteur des forces $\{f_e^n\} = \{f_e^{ext,n}\} - \{f_e^{int,n}\}$.
 - 18: Calcul du nouveau pas de temps
 - 19: Assemblage les vecteurs des forces élémentaires dans le vecteur des forces global
 $\{f_G^n\}$.
 - 20: **fin pour**
 - 21: Fin de la sous-routine
-

2.3.3 Contact - frottement

La simulation du sertissage des câbles multi-brins implique la gestion du frottement et de tous les couples de contact possibles. D'un point de vue algorithmique, ABAQUS/Explicit emploie une formulation cinématique pure bien que l'on puisse faire appel à la méthode par pénalité en cas de besoin (essentiellement pour gérer le contact entre deux surfaces rigides).

L'avantage majeur de la formulation cinématique est qu'elle n'a pas d'effet sur le pas de temps en explicite, contrairement à la méthode par pénalisation. La méthode par pénalisation permet aussi une certaine souplesse sur la condition d'impenétrabilité. Cette souplesse se paie par des problèmes de conditionnement des matrices (il faut choisir un coefficient de pénalisation adéquat), surtout dans les méthodes explicites.

La méthode par multiplicateurs de Lagrange augmente le nombre de degrés de liberté du système.

2.3.3.1 Définitions

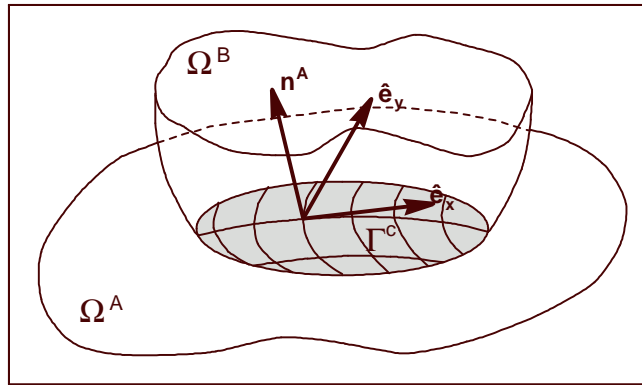


Fig. 2.11: Définitions des quantités pour la gestion du contact entre deux corps

Considérons deux corps dans deux configurations Ω^A et Ω^B . Leur surface est notée Γ^A et Γ^B . La surface de contact Γ^c entre les deux solides est une intersection de ces deux surfaces

$$\Gamma^c = \Gamma^A \cap \Gamma^B \quad (2.154)$$

Un système local de coordonnées est attaché à chaque point de la surface de contact. La normale n^A de la surface de contact pour le corps Ω^A vaut alors

$$\vec{n}^A = \vec{\hat{e}}_x^A \wedge \vec{\hat{e}}_y^A \quad (2.155)$$

On a

$$\vec{n}^A = -\vec{n}^B \quad (2.156)$$

Les vitesses sont exprimées en fonction des composantes locales de la surface par

$$\vec{v}^A = v_N^A \vec{n}^A + v_x^A \vec{e}_x^A + v_y^A \vec{e}_y^A = v_N^A \vec{n}^A + v_t^A \vec{t}^A \quad (2.157)$$

$$\vec{v}^B = v_N^B \vec{n}^A + v_x^B \vec{e}_x^A + v_y^B \vec{e}_y^A = -v_N^B \vec{n}^B + v_t^B \vec{t}^B \quad (2.158)$$

Les composantes normales des vitesses de deux corps s'écrivent

$$v_N^A = \vec{v}^A \cdot \vec{n}^A \text{ et } v_N^B = \vec{v}^B \cdot \vec{n}^A \quad (2.159)$$

On définit une distance g entre les deux surfaces potentiellement en contact.

2.3.3.2 Conditions de contact

Nous allons définir ici les principales hypothèses restrictives sur le modèle de contact standard employé par ABAQUS/Explicit.

a Condition d'impénétrabilité

Cette condition stipule que les deux corps ne peuvent s'interpénétrer, ce que l'on traduit par

$$\Omega^A \cap \Omega^B = \emptyset \quad (2.160)$$

Cette condition est très difficile et ne peut être traduite en fonctions des déplacements des deux corps, surtout pour les problèmes en grands déplacements. C'est elle qui rend très non-linéaire le contact. La difficulté est facile à concevoir : pour un mouvement quelconque des deux corps, il est quasi-impossible de déterminer à l'avance quelles seront les zones de contact.

Les deux corps ne seront pas en interpénétration si

$$g \geq 0 \quad (2.161)$$

Pour tous les points des deux surfaces potentiellement en contact, on définit (voir [BLM00]) un taux d'interpénétration v_N

$$v_N = \vec{v}^A \cdot \vec{n}^A + \vec{v}^B \cdot \vec{n}^B = (\vec{v}^A - \vec{v}^B) \cdot \vec{n}^A \quad (2.162)$$

La condition d'impénétrabilité se ré-écrit alors

$$v_N = v_N^A - v_N^B \leq 0 \quad (2.163)$$

En pratique, on utilise plus volontiers la quantité opposée, appelé taux d'écart relatif v_{gap}

$$v_{gap} = -v_N \text{ et donc } v_{gap} \geq 0 \quad (2.164)$$

On définit aussi la vitesse tangentielle relative des deux surfaces

$$\vec{v}_T = \vec{v}_T^A - \vec{v}_T^B \quad (2.165)$$

b Condition d'équilibre des forces de contact

Les deux forces de contact \vec{f}^A et \vec{f}^B doivent respecter l'équilibre à travers la surface de contact commune. Si on suppose que cette interface n'a pas de masse, ceci se traduit par

$$\vec{f}^A + \vec{f}^B = 0 \quad (2.166)$$

Ces forces de contact sont reliées au tenseur des contraintes de Cauchy

$$\vec{f}^A = \overline{\sigma^A} \cdot \vec{n}^A \text{ et } \vec{f}^B = \overline{\sigma^B} \cdot \vec{n}^B \quad (2.167)$$

Les composantes normales des forces de contact s'écrivent

$$f_N^A = \vec{f}^A \cdot \vec{n}^A \text{ et } f_N^B = \vec{f}^B \cdot \vec{n}^B \quad (2.168)$$

L'équilibre en composantes normales est donc

$$f_N^A + f_N^B = 0 \quad (2.169)$$

Et en composantes tangentielles

$$\vec{f}_T^A + \vec{f}_T^B = 0 \quad (2.170)$$

Avec

$$\vec{f}_T^A = \vec{f}^A - f_N^A \vec{n}^A \quad (2.171)$$

c Condition de non-adhésion

Cette hypothèse suppose que les deux surfaces en contact ne sont pas collées, ce que l'on traduit par

$$f_N = f_N^A = -f_N^B \leq 0 \quad (2.172)$$

d Contact unilatéral

Les conditions d'impénétrabilité et de contact non-collant peuvent être réunies en une seule condition que l'on nomme condition de contact unilatéral

$$v_N \cdot f_N = 0 \quad (2.173)$$

Ce qui traduit le fait que la composante normale de contact ne travaille pas.

e Modèle de friction de Coulomb

Nous utilisons le modèle classique de friction solide de Coulomb, le plus répandu. Si les corps A et B sont en contact en \vec{x} alors

$$\begin{cases} \text{si } \vec{v}_T(\vec{x}, t) = 0 \text{ alors } \left\| \vec{f}_T(\vec{x}, t) \right\| = 0 \\ \text{si } \vec{v}_T(\vec{x}, t) > 0 \text{ alors } \left\| \vec{f}_T(\vec{x}, t) \right\| = \mu \cdot f_N(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (2.174)$$

2.3.3.3 Formulation variationnelle

ABAQUS/Explicit utilise une formulation du contact dite cinématique, ce qui implique l'utilisation du formalisme des multiplicateurs de Lagrange λ . Pour celà, on reprend le PPV en abandonnant les forces volumiques

$$P = \int_{\mathcal{V}} \left(\overline{\overline{D}}^* : \overline{\overline{\sigma}} \right) .dV - \int_{\mathcal{S}^f} \overline{v}^* . \overline{f}_s .dS = 0 \quad (2.175)$$

En se limitant au cas sans frottement, on définit une nouvelle forme variationnelle en ajoutant les conditions de contact P_{lag} sous forme de multiplicateurs de Lagrange

$$P_{mod} = P + P_{lag} \geq 0 \text{ avec } P_{lag} = \int_{\Gamma^c} (\lambda_N^* . v_N + v_N^* . \lambda_N) .d\Gamma \quad (2.176)$$

Ceci constitue une forme variationnelle mixte ou formulation de Hu-Washizu. Les multiplicateurs de Lagrange s'identifient à la force normale de contact

$$\lambda = -f_N^A = f_N^B \quad (2.177)$$

Si on considère qu'il y a frottement (c'est-à-dire que la force tangentielle de contact n'est pas nulle), on augmente le nombre de multiplicateurs de Lagrange.

$$P_{lag} = \int_{\Gamma^c} \left(\lambda_N^* . v_N + v_N^* . \lambda_N + \overline{\lambda}_T^* . \overline{v}_T + \overline{v}_T^* . \overline{\lambda}_T \right) .d\Gamma \quad (2.178)$$

Trivialement

$$\lambda_N = -f_N^A \quad (2.179)$$

$$\overline{\lambda}_T = -\overline{f}_T^A \quad (2.180)$$

2.3.3.4 Implémentation

On se limitera au cas sans frottement pour alléger la formulation. La méthode des multiplicateurs de Lagrange ajoute des nouvelles variables qu'il faut interpoler sur l'élément, comme les autres variables. Les fonctions d'interpolation Λ sont de continuité C^{-1}

$$\{\lambda\} = [\Lambda] . \{\lambda^e\} \quad (2.181)$$

v_N (et sa forme virtuelle v_N^*) se traduit en fonction des vitesses et des normales aux surfaces

$$v_N = \int_{\Gamma_e^c \cap \Gamma_e^A} \langle n^{e,A} \rangle . \left([N]^T . \{v^{e,A}\} \right) .d\Gamma + \int_{\Gamma_e^c \cap \Gamma_e^B} \langle n^{e,B} \rangle . \left([N]^T . \{v^{e,B}\} \right) .d\Gamma$$

On reprend la formulation variationnelle des conditions de contact

$$P_{lag} = \int_{\Gamma^c} (\lambda_N^* . v_N + v_N^* . \lambda_N) .d\Gamma \quad (2.182)$$

On écrit la forme discrétisée de P_{lag}

$$P_{lag} = \langle \lambda^{e,*} \rangle \cdot [\widehat{G}] \cdot \{v^e\} \quad (2.183)$$

avec la matrice locale $[\widehat{G}]$

$$[\widehat{G}] = \int_{\Gamma_g^e} [\Lambda] \cdot [N]^T \cdot d\Gamma \quad (2.184)$$

L'équation d'équilibre de l'interface s'écrit alors

$$\begin{aligned} [M] \cdot \{\gamma\} + \{f^{int}\} - \{f^{ext}\} + [\widehat{G}]^T \cdot \{\lambda\} &= \{0\} \text{ sur } \Gamma^c \\ [\widehat{G}] \cdot \{v\} &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.185)$$

Nous avons présenté l'essentiel du formalisme de l'analyse par éléments finis de solides en grandes déformations élasto-plastiques en présence de contact. Les principales hypothèses utilisées dans le cadre de notre étude ont été rappelées. Nous avons insisté en particulier sur le cas de la procédure dynamique explicite puisque l'on utilisera principalement cette méthode, à travers des codes commerciaux (ABAQUS et LS-DYNA principalement), dont certains détails d'implémentations algorithmiques nous sont inconnus.

Chapitre 3

Analyses bidimensionnelles

Ce chapitre débute par une description du sertissage et présente quelques résultats expérimentaux qui serviront à la validation des modèles numériques. Nous nous attardons ensuite sur la description complète du modèle numérique employé et sur les résultats des études paramétriques nécessaires pour le réglage du modèle. Les paramètres numériques sont les variables temporelles (vitesse du poinçon, options de mass scaling, etc.) et les variables spatiales comme la taille et le choix des éléments. Nous procédons également à une analyse technologique qui met en évidence l'importance de quelques caractéristiques physiques comme la position des brins et le frottement. Nous finissons par quelques exemples d'applications réelles. Toutefois, nous n'abordons pas l'analyse paramétrique géométrique qui fait l'objet d'un chapitre complet, en utilisant des méthodes d'optimisation par plans d'expériences.

3.1 Géométrie

3.1.1 Ailes de sertissage

Les deux parties que l'on rabat sur le câble dans un sertissage en « B » sont appelées *ailes* de sertissage. La figure 3.1 présente leur géométrie avec leurs dimensions caractéristiques⁹. On remarquera le chanfrein sur la partie supérieure des deux ailes. Des exemples de dimensions sont proposés dans la table 3.1.

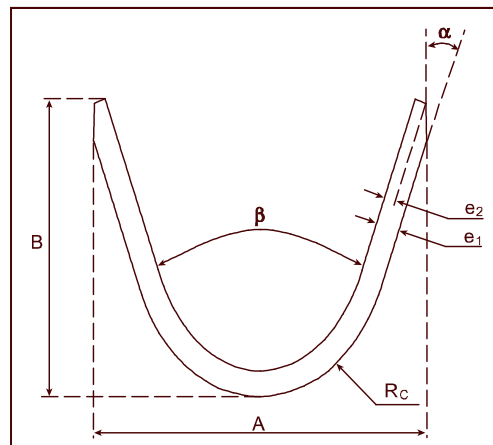


Fig. 3.1: Ailes de sertissage

Dimension	Symbole	Clip 1.5
largeur	A	2,6 mm
hauteur	B	2,2 mm
ouverture	β	$\simeq 30^\circ$
rayon intérieur	R_c	0,75 mm
épaisseur du matériau	e_1	0,29 mm
largeur du chanfrein	e_2	0,15 mm
angle du chanfrein	α	20°

Tab. 3.1: Dimensions des ailes de sertissage

3.1.2 Outils

Le sertissage est fait à l'aide de deux outils. Un poinçon en forme de « B » qui est fixé à la partie mobile de la presse et qui a donc un mouvement de translation verticale. Une enclume avec une cuvette arrondie, qui est fixée au bâti de la presse. On trouvera des exemples de dimensions du poinçon et de l'enclume sur la figure 3.2 et dans la table 3.2.

⁹La valeur de l'angle d'ouverture β peut être calculée analytiquement, voir en annexe.

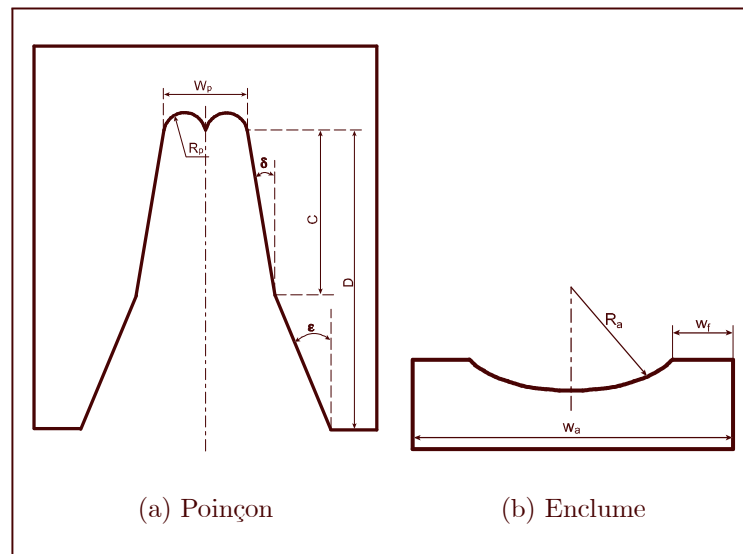


Fig. 3.2: Géométrie des outils

Dimension	Symbole	Clip 1.5
largeur poinçon	W_p	2,1 mm
hauteur poinçon	C	2,9 mm
hauteur totale poinçon	D	7,2 mm
rayon poinçon	R_p	0,57 mm
angle supérieur poinçon	δ	4°
angle inférieur poinçon	ε	20°
largeur enclume	W_a	2,1 mm
largeur méplat enclume	W_a	0,26 mm
rayon enclume	R_a	1,26 mm

Tab. 3.2: Dimensions des outils

3.1.3 Sertissage en B

La forme finale du sertissage en « B » est décrite par trois longueurs principales et la valeur de la surface sertie (voir la figure 3.3). Les deux longueurs W et H caractérisent le sertissage. Ce sont ces mesures qui servent à faire le réglage des presses. La cote x est importante et peut servir à définir un bon sertissage. La règle communément admise est qu'il ne faut en aucun cas que les ailes butent en fond de rayon. On impose généralement que x soit supérieur à l'épaisseur du matériau employé pour les ailes. Sur cette figure, nous voyons aussi la surface sertie finale S_{end}^{wire} . Cette surface doit être inférieure à la section réelle du câble pour qu'il soit compressé.

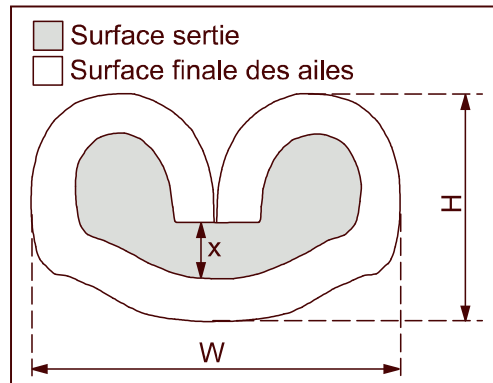


Fig. 3.3: Forme finale du sertissage en B

On définit ainsi le taux de compression t_C par

$$t_C = \frac{S_{ini}^{wire} - S_{end}^{wire}}{S_{ini}^{wire}} \quad (3.1)$$

Une règle de bonne conception propose que ce taux soit compris entre 15 et 30%

$$15\% < t_C < 30\% \quad (3.2)$$

On peut également mesurer l'extrusion t_{EW} des ailes grâce à la mesure finale de la surface des ailes S_{end}^{wing}

$$t_{EW} = \frac{S_{ini}^{wing} - S_{end}^{wing}}{S_{ini}^{wing}} \quad (3.3)$$

La surface initiale des ailes S_{ini}^{wing} est facile à calculer par des relations géométriques simples (voir annexe C).

3.2 Résultats expérimentaux

La simulation numérique du sertissage ne peut être proposée sans une validation complète des résultats. A cette fin, nous avons développé deux types de procédés expérimentaux. Le premier est purement géométrique et consiste à faire des coupes bidimensionnelles de sertissages réels et d'en relever les dimensions. Le second est le résultat d'un dispositif expérimental de mesure monté sur une presse à sertir qui permet de récupérer le déplacement et la force du poinçon lors du sertissage.

3.2.1 Dispositifs expérimentaux

3.2.1.1 Coupes de sertissage

Après l'opération de sertissage faite dans les conditions normales, on coupe le contact au niveau du fût de sertissage. Ainsi faite, la coupe transversale peut être analysée à l'aide d'un logiciel d'analyse d'images ad-hoc. Voici la procédure complète pour obtenir ces données :

- Couper le fût entre les stries avec une scie à fil diamanté de 0,3 mm.
- Enrober l'échantillon dans une résine acrylique.
- Polir avec des papiers abrasifs 1200, 400 puis à l'aide d'un feutre aspergé de poudre diamantée 6 μm et 3 μm .
- Prendre une photo de la coupe ainsi obtenue à l'aide d'un microscope optique.
- Mesurer les dimensions et les surfaces à l'aide d'un logiciel d'analyse d'images.

Sur la figure 3.4, nous avons un exemple de ce que l'on obtient.

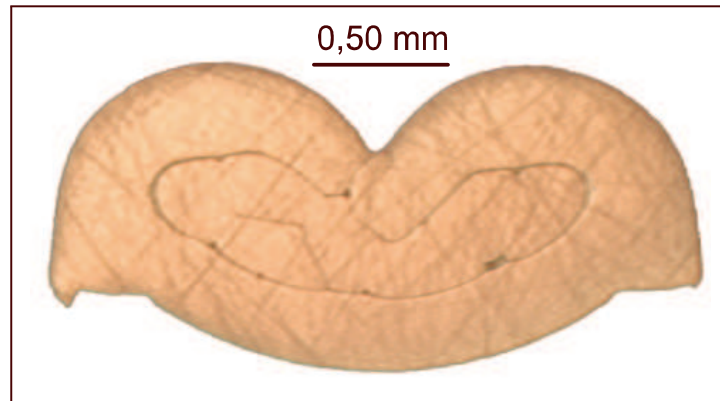


Fig. 3.4: Un exemple de coupe réalisée sur un sertissage de type SICMA-3 et un câble de 0,50 mm²

3.2.1.2 Presse instrumentée

L'opération de sertissage est effectuée sur des presses standards. Il est aisé d'équiper ces machines de capteurs pour récupérer des informations durant le sertissage. Le principe adopté ici est d'y installer deux capteurs :

- Un capteur d'effort de type piézo-électrique.
- Un capteur de déplacement de type inductif.

L'ensemble est relié à un système d'acquisition en temps réel (LabView) et à un micro-ordinateur (le détail de l'installation se trouve dans [CHLRP02]).

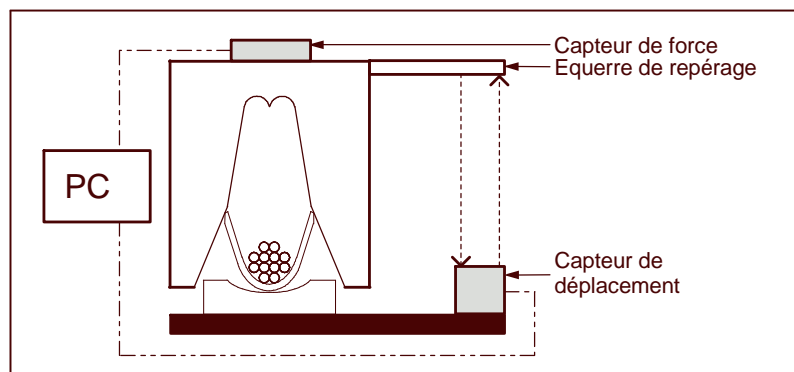


Fig. 3.5: Instrumentation de la presse

La presse instrumentée nous permet d'avoir des renseignements précis sur la vitesse et le déplacement du poinçon sur la figure 3.6. Le profil sinusoïdal est justifié par la technologie de la presse, constituée d'un moteur et d'un excentrique. Nous pouvons d'ailleurs facilement identifier la vitesse de rotation ω de l'ensemble moto-réducteur de la presse, elle vaut environ $650 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

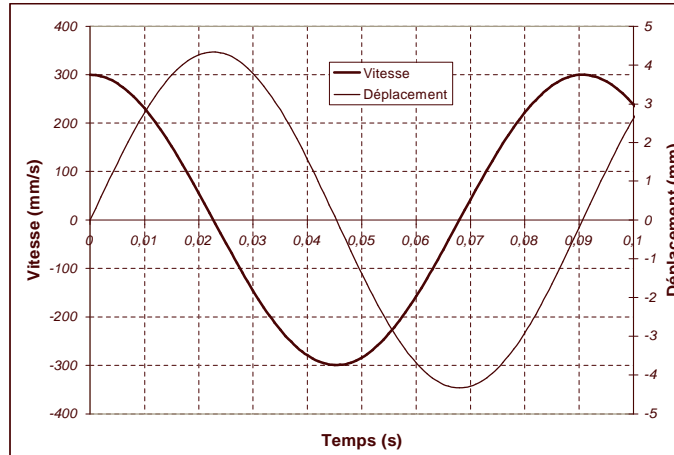


Fig. 3.6: Déplacement réel et vitesse du poinçon

La figure 3.6 nous indique que la vitesse du poinçon ne dépasse pas $0,4 \text{ m/s}$. Une vitesse ne permettant normalement pas aux effets visqueux de se manifester. Par comparaison, dans la simulation d'emboutissage, il est habituel de fixer la limite des modèles en plasticité indépendante du temps à une vitesse de poinçon de l'ordre de 15 m/s à 20 m/s . De fait, nous pouvons faire l'hypothèse que le sertissage se fait suivant un modèle élasto-plastique à écrouissage isotrope et que le processus est quasi-statique.

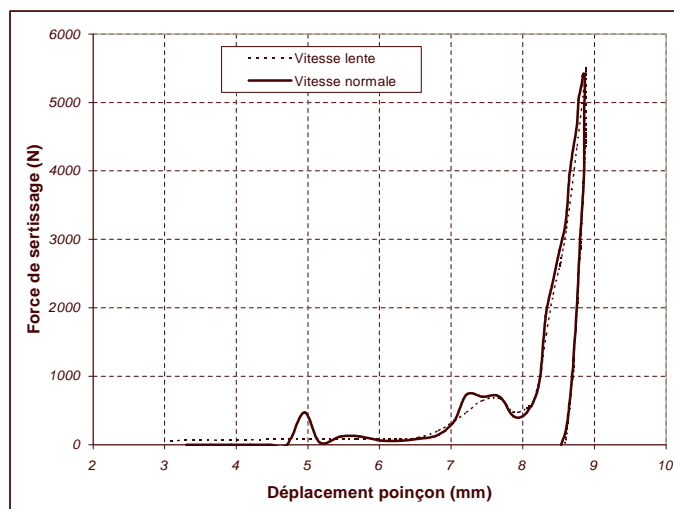


Fig. 3.7: Effet de la vitesse de la presse sur la courbe d'effort de sertissage

Nous proposons sur la figure 3.7 une comparaison de deux courbes efforts/déplacement mesurées sur la presse instrumentée. L'une a été obtenue à vitesse réelle (soit 0,4 m/s maximum) et l'autre très lentement. On ne voit aucune différence sur les deux courbes mis à part un pic vers 5 mm (bien avant le sertissage) qui correspond simplement à un jeu de l'outillage et qui n'a rien à voir avec la vitesse de descente du poinçon.

3.2.2 Matériaux

La connaissance de la loi de comportement est essentielle pour la bonne qualité des simulations. Le contact (ailes de sertissage) et le câble sont en cuivre de nuances différentes.

3.2.2.1 Caractéristique des ailes

Le contact, et donc sa partie sertissage, est fait à partir d'un feuillard de cuivre de nuance CuFe2P dont les caractéristiques principales sont dans la table 3.3.. Nous avons

Propriété	Valeur
Module d'Young	123.000 MPa
Coefficient de Poisson	0,29
Masse volumique	8780 kg/m ³

Tab. 3.3: Propriétés mécaniques des ailes)

mené des essais de traction sur ce matériau. Les résultats sont reportés sur la figure 3.8

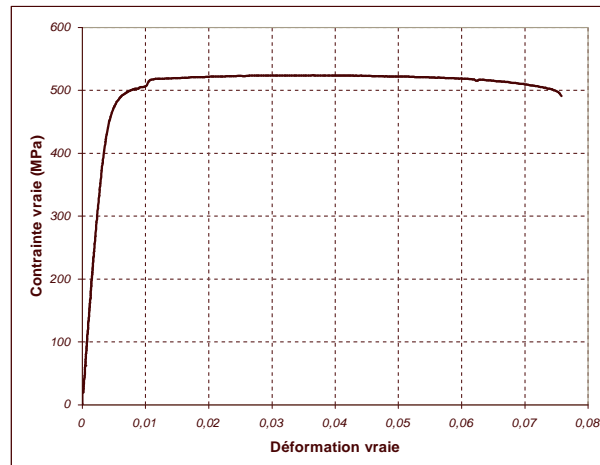


Fig. 3.8: Courbe de traction du matériau des ailes

3.2.2.2 Caractéristiques des câbles

Pour le matériau du câble, c'est beaucoup plus délicat. D'abord, son choix n'est pas de la compétence de FCI mais des câbleurs, il est donc difficile d'obtenir des informations

fiables. De plus, il est quasi impossible de faire des tests de traction sur des brins qui ont des diamètres de 0,25 mm, voire 0,18 mm. Les câbles sont en cuivre (Cu-ETP), $\frac{1}{4}$ dur, dont les propriétés principales sont données dans la table 3.4. Pour des caractéristiques

Propriété	Valeur
Module d'Young	118.000 MPa
Coefficient de Poisson	0,29
Masse volumique	8940 kg/m ³

Tab. 3.4: Propriétés mécaniques du câble)

mécaniques plus complètes (courbe d'écouissage principalement), nous avons fait appel aux fabricants de câble (principalement, ACOME en France). Les caractéristiques choisies pour la simulation sont données sur la figure 3.9.

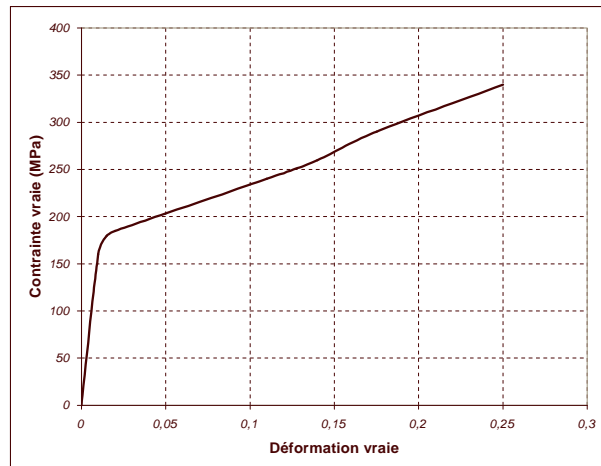


Fig. 3.9: Courbe de traction du matériau du câble

3.3 Modèles numériques

Nous allons présenter ici les résultats et les hypothèses de la simulation bi-dimensionnelle du sertissage. Le sertissage est une opération tri-dimensionnelle, mais nous avons logiquement choisi de concentrer nos efforts sur un modèle bi-dimensionnel a priori plus simple qu'un modèle tri-dimensionnel. De plus, la faible bibliographie dont nous disposons sur le sertissage considère essentiellement des modèles bi-dimensionnels, avec plusieurs logiciels et plusieurs approches, en particulier des modèles en statique implicite et en dynamique explicite.

Une partie importante de nos résultats expérimentaux est particulièrement bien adaptée à une hypothèse plane (nous pensons en particulier aux coupes transversales des sertissages). Les experts ont également le plus souvent une approche bi-dimensionnelle pour concevoir et dimensionner l'outillage et les ailes du sertissage.

Enfin, dans la perspective de mener une étude paramétrique géométrique et de faire un travail complet d'optimisation sur ces paramètres, il est nécessaire de disposer d'un modèle relativement peu coûteux en temps de calcul.

Nous avons deux possibilités pour faire nos simulations. Soit nous utilisons un algorithme de type statique implicite (ABAQUS/Standard), soit nous utilisons un algorithme de type dynamique explicite (ABAQUS/Explicit). Le problème est d'adopter une hypothèse acceptable en 2D. Nous avons trois possibilités pour la choisir (voir le paragraphe 2.1.6, page 28 dans le chapitre 2) :

1. Hypothèse des déformations planes : il ne peut pas y avoir d'extrusion hors du plan.
2. Hypothèse des contraintes planes : l'extrusion hors du plan est possible.
3. Hypothèse des déformations planes généralisées : c'est un compromis entre les déformations planes et les contraintes planes. Cette hypothèse implique de développer un modèle qui fonctionne sur ABAQUS/Standard puisque les éléments de déformations planes généralisées n'existent que sur cette version d'ABAQUS.

A priori, l'hypothèse des déformations planes n'est pas appropriée puisque l'on doit permettre aux ailes et au câble de s'extruder hors du plan (puisque un sertissage est supposé bon lorsque l'on réduit la section du câble d'au moins 15%). Or, pour réduire une section dans le cadre de l'hypothèse isochore des déformations plastiques, il est nécessaire que la matière puisse « s'écouler » hors du plan. En termes plus mécaniques, la déformation ε_{33} ne doit pas être nulle.

3.3.1 Modèle statique implicite

3.3.1.1 Problématique

La mise au point d'un modèle statique sur un logiciel de type statique implicite (ABAQUS/Standard) est relativement difficile pour les problèmes fortement non-linéaires. La différence majeure avec un algorithme de type dynamique explicite (pour ce dernier, voir détails dans le chapitre 2, section 2.3.2, page 48), c'est que le processus de linéarisation associé à une résolution par la méthode de Newton-Raphson conduit à définir une matrice tangente non-linéaire de rigidité $[K_T(u)]$. Le processus itératif (avec l'indice i pour marquer l'itération) conduisant à l'équilibre s'écrit alors

$$[K_T(u)]_i \cdot \{\Delta u\} = \{f_{ext}\}_i - \{f_{int}\}_i$$

Il est nécessaire que la matrice $[K_T(u)]$ soit bien conditionnée pour éviter des problèmes lors de la résolution du système. Le modèle bi-dimensionnel de sertissage implique que les torons ne soient pas fixés dans le plan, puisque, physiquement, ils sont normalement fixés hors du plan. Ils se comportent donc un peu comme des billes qui rebondissent et provoquent des problèmes de conditionnement de la matrice tangente. Il faut donc « fixer » ces torons afin de ne pas laisser de mouvements parasites de corps rigide.

3.3.1.2 Détails du modèle

Nous avons divisé le processus de sertissage en six étapes, chacune correspondant à une difficulté de modélisation dans le cas de l'utilisation d'un algorithme statique implicite.

1: **Initialisation des contacts.**

Le poinçon, l'enclume et les ailes de sertissage sont placés dans leur configuration initiale pour que les zones de contact soient bien définies dès le départ. Les deux ailes ont été fixées par des ressorts à leurs extrémités (voir figure 3.3.1.2) pour initier le glissement sur le poinçon.

2: **Glissement sur les murs.**

On retire les ressorts des ailes et on fait glisser le poinçon jusqu'à ce que les ailes atteignent la partie arrondie.

3: **Glissement sur le plafond.**

On initie le contact entre les ailes et la partie arrondie du poinçon du haut puis on fait glisser les ailes dans la partie arrondie du poinçon.

4: **Auto-contact.**

On initie le contact entre les deux ailes et on continue à descendre le poinçon.

5: **Écrasement.**

On ajoute les câbles avec les torons fixés par quatre ressorts chacun (voir figure 3.3.1.2) et on initie tous les contacts des torons (entre eux et avec les ailes).

6: **Retour élastique.**

On retire les outils et les ressorts.

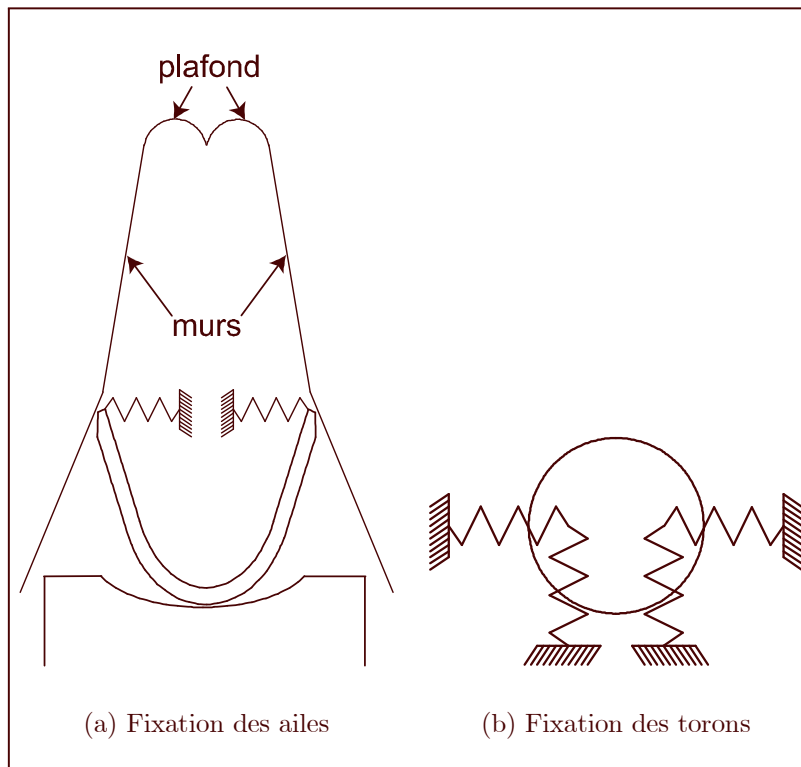


Fig. 3.10: Modèle implicite

Cette méthode a été mise au point après de nombreux essais mais elle n'est pas universelle. Si on change légèrement la géométrie des ailes, des outils ou du câble, il faut tout recommencer et tâtonner pour trouver un bon maillage et les bons paramètres de convergence d'ABAQUS/Standard.

3.3.1.3 Effet de l'hypothèse bi-dimensionnelle

Grâce au choix de l'algorithme statique implicite, nous pouvons tester plusieurs types d'éléments qui ne sont disponibles qu'avec ABAQUS/Standard. En particulier, nous pouvons simuler le sertissage avec des éléments dits de déformations planes généralisées.

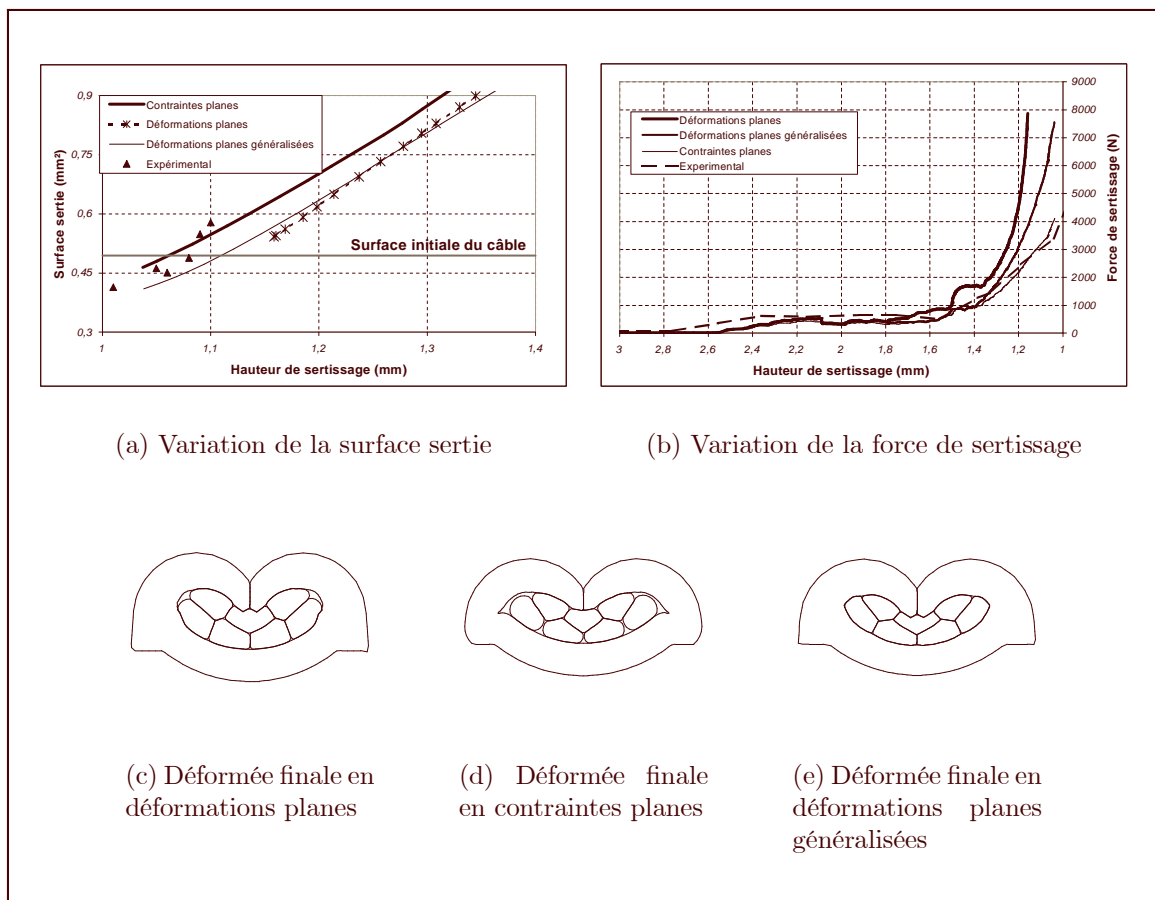


Fig. 3.11: Effet du choix des modèles bi-dimensionnels en statique implicite

Ces résultats sont rassemblés sur la figure 3.11. Le modèle de déformation plane (simple ou généralisée) présente une grande rigidité par rapport au modèle de contrainte plane, ce que l'on observe aisément sur la force de sertissage. Nous avons trop peu de résultats expérimentaux sur la surface sertie pour conclure de manière définitive quant à la qualité de corrélation avec les trois modèles numériques bi-dimensionnels. Par contre, en terme de force de sertissage, la conclusion est plus immédiate : seul le modèle en contraintes planes donne des résultats corrects.

3.3.2 Modèle dynamique explicite

Nous avons entrepris de simuler en dynamique explicite un cas en déformations planes et un cas en contraintes planes pour vérifier que nous obtenons les mêmes résultats qu'avec l'algorithme statique implicite. L'hypothèse des déformations planes bloque le sertissage dès qu'il n'y a plus de vides entre les torons.

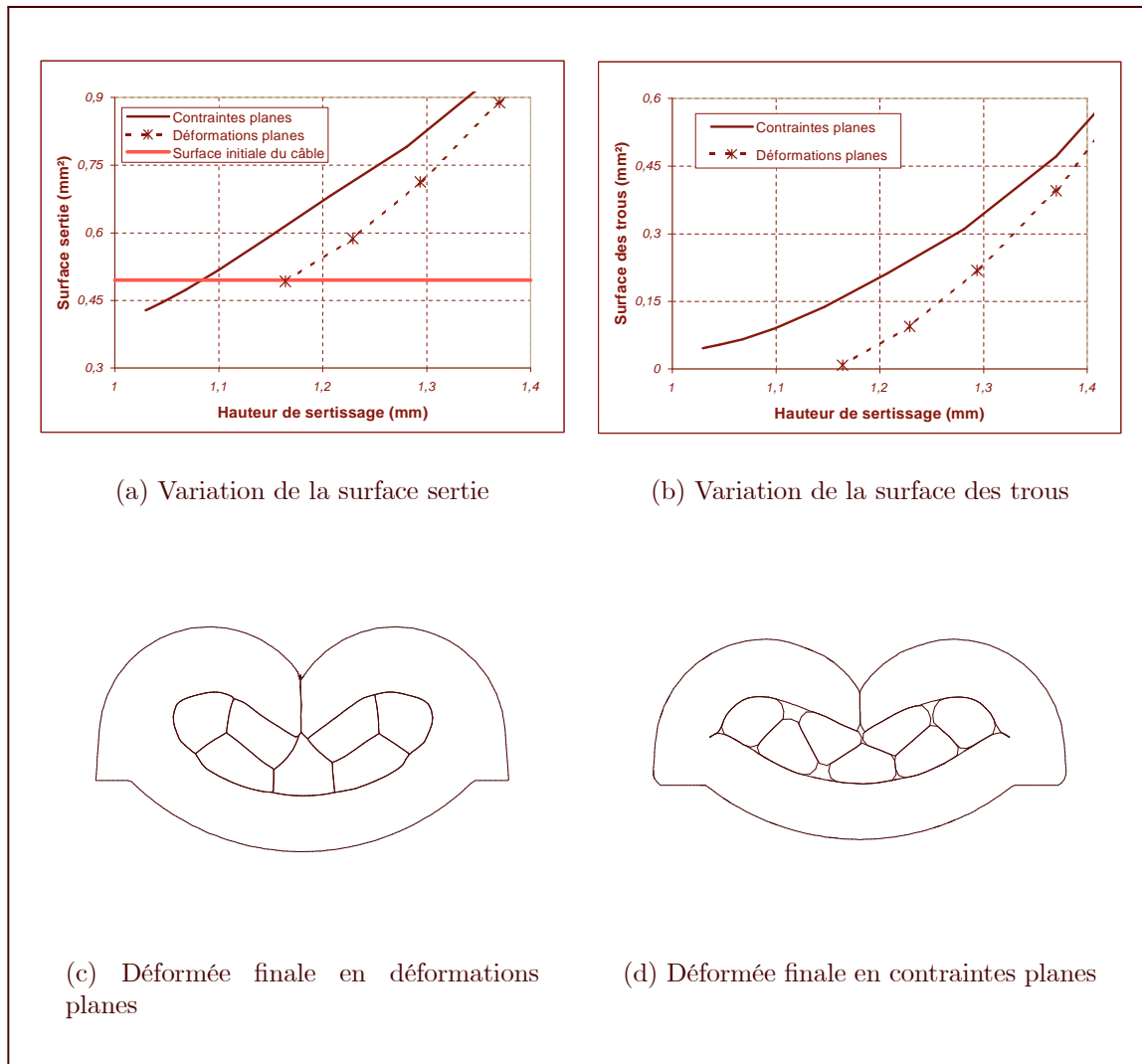


Fig. 3.12: Effet du choix de l'hypothèse bi-dimensionnelle en dynamique explicite

Sur la figure 3.12, on observe l'effet de blocage du modèle en déformations planes. En effet, dans le cas de l'hypothèse des déformations planes, le calcul s'arrête (des éléments se retournent) dès que la surface sertie atteint la taille initiale du câble ou encore dès que tout le vide entre les torons a disparu. Sur la figure 3.13, on voit que l'hypothèse des déformations planes traduit un comportement plus rigide de la structure par rapport à l'hypothèse des contraintes planes.

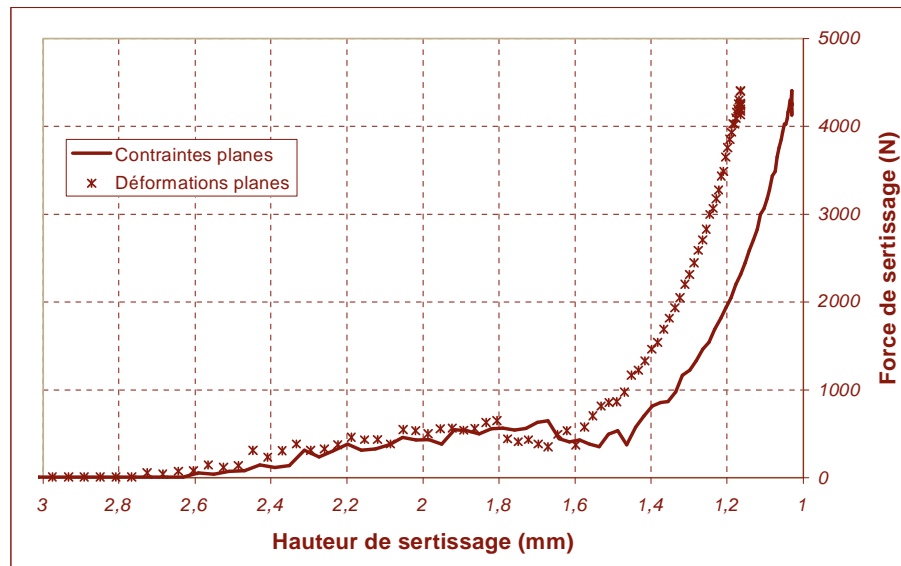


Fig. 3.13: Effet de l'hypothèse bi-dimensionnelle sur la force de sertissage (cas dynamique explicite)

3.3.2.1 Choix de la vitesse du poinçon

Quand on utilise un modèle dynamique, les conditions initiales concernent les vitesses. Pour le choix de la vitesse du poinçon, nous disposons des résultats de notre modèle statique implicite et de quelques références pour comparer un modèle quasi-statique avec un algorithme dynamique explicite. La limite de stabilité (voir 2.3.2.3, page 51) calculée par ABAQUS/Explicit est d'environ $5 \mu s$. Or l'opération de sertissage réelle prend environ 10 ms, ce qui nécessitera plus de deux millions d'incrément! C'est beaucoup trop long. Nous devons donc accélérer le calcul. Il y a plusieurs voies :

- Augmenter la masse du modèle (voir 2.3.2.3, page 51).
- Augmenter la vitesse du poinçon.

La seconde voie est celle adoptée dans [VKBB96] qui recommandent une vitesse de poinçon maximale de 24 m/s. En augmentant la vitesse ou la masse du modèle, nous diminuons le temps de calcul mais nous augmentons parallèlement les effets d'inertie. Or nous avons fait l'hypothèse que le procédé était quasi-statique. Pour vérifier que nous n'ajoutons pas d'effets d'inertie indésirables à notre modèle, il y a plusieurs moyens de vérification :

- Le premier indice est de ne pas utiliser des vitesses supérieures à 1% de la vitesse du son dans le matériau. Dans le cuivre, elle est de 6000 m/s. Il ne faut donc pas dépasser 60 m/s.
- Il ne faut pas que l'énergie cinétique soit supérieure à 5% de l'énergie interne.
- On peut comparer avec les résultats de l'analyse statique et avec les résultats expérimentaux.

On peut voir sur la figure 3.14 l'influence de la vitesse sur la force de sertissage : plus la vitesse est élevée, plus la courbe est bruitée et moins les résultats sont fiables. La vitesse maximale a été fixée à 10 m/s.

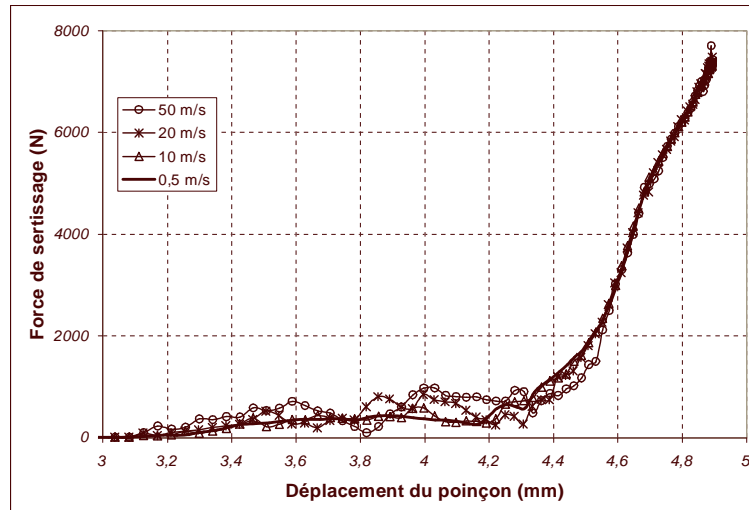


Fig. 3.14: Effet de la vitesse réelle de la presse sur la courbe d'effort de sertissage

3.3.3 Discrétisation spatiale

3.3.3.1 Finesse du maillage

L'influence de la finesse du maillage est prépondérante dans les modèles éléments finis. Nous avons, dans la mesure du possible, évité de faire appel aux méthodes de remaillage automatique¹⁰. En effet, sauf cas particuliers (principalement en simulation de découpe ou de mise en forme avec perte d'éléments), les méthodes de remaillage sur des codes explicites apportent souvent plus d'inconvénients que d'avantages. Quand on remaille, on est obligé de faire du transfert de champ de contraintes et de déformations entre l'ancien et le nouveau maillage. Compte tenu de la faiblesse intrinsèque de l'évaluation des contraintes dans les algorithmes explicites, un tel transfert, même s'il est fait avec beaucoup de précautions, est toujours préjudiciable à la qualité des résultats finaux. L'expérience nous a montré que dans le cas du sertissage, le remaillage automatique n'était pas nécessaire si on prenait garde à la qualité initiale des éléments, en particulier pour gérer l'impact du chanfrein des ailes sur la partie arrondie du poinçon (figure 3.15).

¹⁰Dans ABAQUS/Explicit, le remaillage implémenté par défaut est de type « r », c'est à dire qu'il relocalise les noeuds sans modifier la topologie générale du maillage.

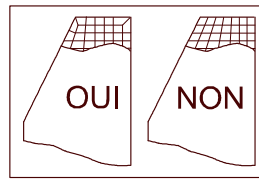


Fig. 3.15: Détail du maillage optimal pour le chanfrein des ailes

Nous avons étudié l'influence de la finesse du maillage sur le résultat final. Sur le tableau 3.5 et la figure 3.16, nous décrivons les différents maillages (nous utilisons des éléments quadrilatéraux avec deux degrés de liberté par nœud) testés avec le nombre d'éléments, de nœuds, d'éléments dans l'épaisseur de l'aile et de degrés de liberté (uniquement pour le câble et les ailes), ainsi qu'un indice de l'erreur faite sur la géométrie, calculée comme le rapport entre la surface réelle du câble et la surface discrétisée.

Maillage	Noeuds	Éléments	Éléments dans l'épaisseur de l'aile	d.d.l.	Erreur de discrétisation (câble)
1	830	666	5	1660	2,76%
2	1181	984	6	2362	1,68%
3	1640	1400	7	3280	1,18%
4	2552	2499	9	5104	0,75%
5	5548	5098	14	11096	0,32%

Tab. 3.5: Les caractéristiques des différents maillages testés

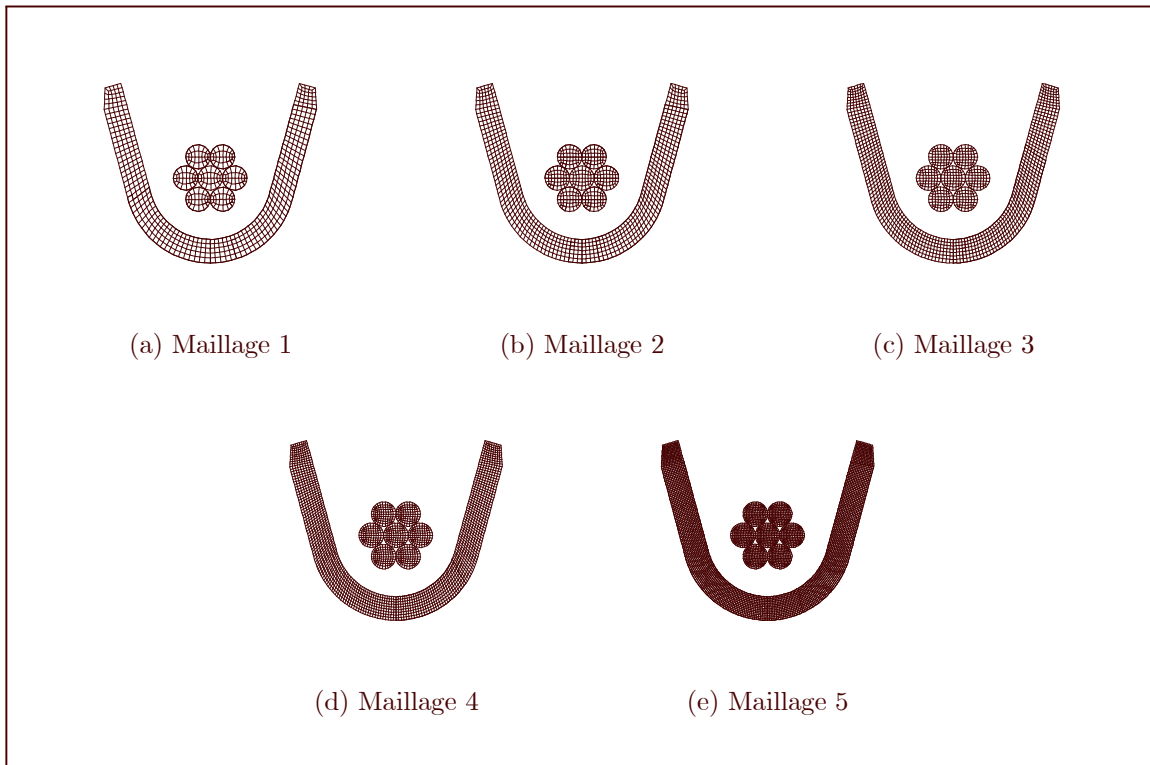


Fig. 3.16: Les différents maillages testés

Sur les figures 3.17, nous avons reporté les différentes forces de sertissage et les surfaces serties. Il n'y a pas de différences notables. Cependant un maillage trop grossier (inférieur à 1500 éléments) provoque parfois des problèmes de convergence (en l'absence de remaillage) et augmente la surface des trous entre les torons du câble.

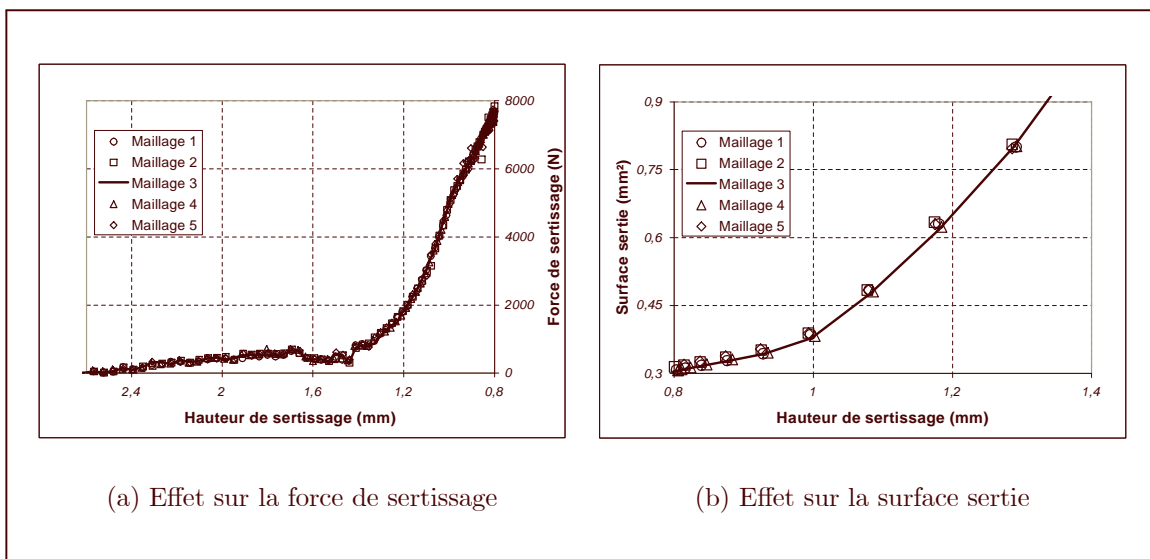


Fig. 3.17: Effets de la finesse du maillage sur la surface sertie et sur la force de sertissage

Contrairement aux apparences, l'influence du maillage sur l'état de contraintes (voir figure 3.18) est limitée. L'usage d'une échelle de couleur unique pour les trois maillages fausse l'interprétation des résultats. En réalité, l'écart entre le maillage le plus fin et le plus grossier est inférieur à 10%.

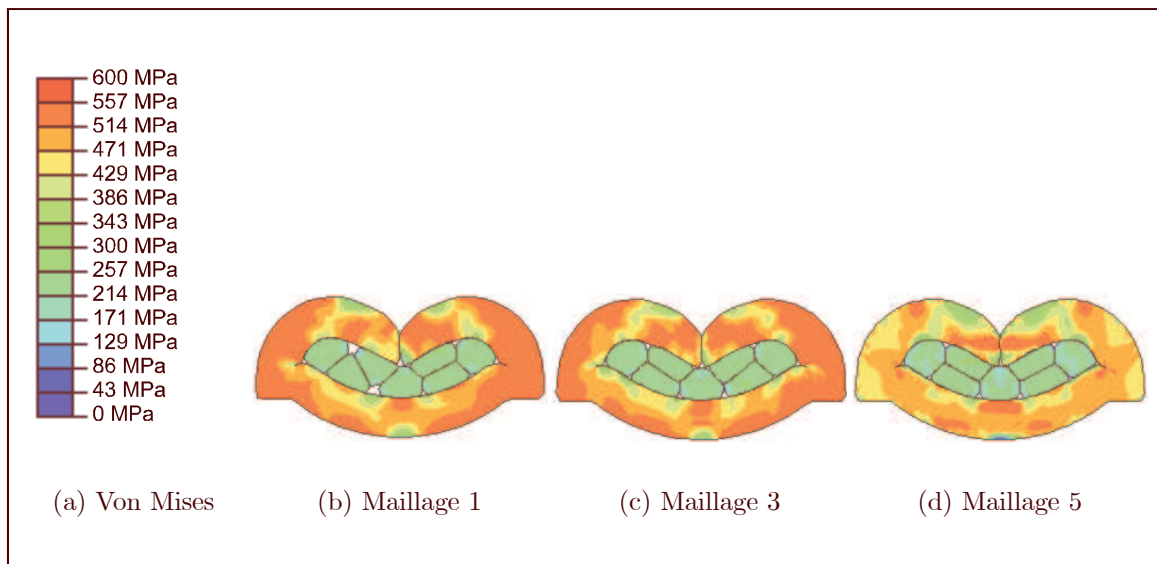


Fig. 3.18: Effets de la finesse du maillage sur les contraintes

Les déformations plastiques sont identiques pour tous les maillages (voir figure 3.19). Les résultats géométriques seront, de fait, plus fiables que les résultats qui concernent les efforts. Or les résultats géométriques sont les plus importants en termes de conception.

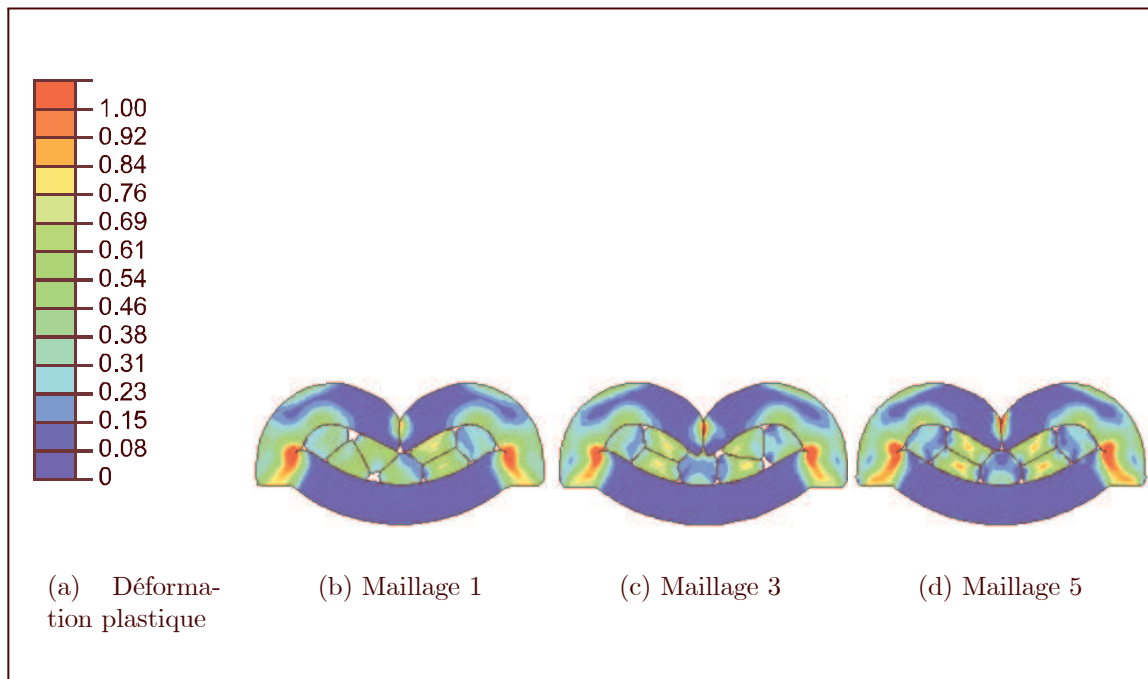


Fig. 3.19: Effets de la finesse du maillage sur les déformations plastiques

3.3.3.2 Type d'éléments

Nous ne disposons que de trois types d'éléments continus bi-dimensionnels différents dans ABAQUS/Explicit :

1. Élément triangulaire à trois noeuds avec deux ddl par noeud (CPS3).
2. Élément quadrangulaire à quatre noeuds avec deux ddl par noeud, intégration réduite et contrôle des modes sabliers (CPS4R).
3. Élément triangulaire à six noeuds avec deux ddl par noeud, modifié avec contrôle des modes sabliers (CPS6M). Ces éléments sont modifiés car les éléments du second degré « purs » ne sont pas appropriés pour les problèmes de contact. En effet, dans le cas d'une pression uniforme, les forces de contact sont significativement différentes aux noeuds coins par rapport aux noeuds milieux, ce qui provoque des problèmes de convergence. De plus, les éléments du second ordre présente un blocage volumétrique quand on s'approche des cas incompressibles (c'est le cas des problèmes en forte déformation plastique). Ils sont donc modifiés dans ABAQUS/Explicit par une approche de type hybride.

Les éléments triangulaires sont souvent trop rigides et demandent donc des maillages fins pour compenser. Les éléments quadrangulaires sont meilleurs sauf dans les cas où le maillage en quadrangles est difficile ou propose des éléments trop distordus. Dans ces cas, les éléments triangulaires (du premier ou du second ordre modifié) sont souvent préférés. Sur la figure 3.20, on peut voir le faible effet du choix des éléments sur la surface sertiée.

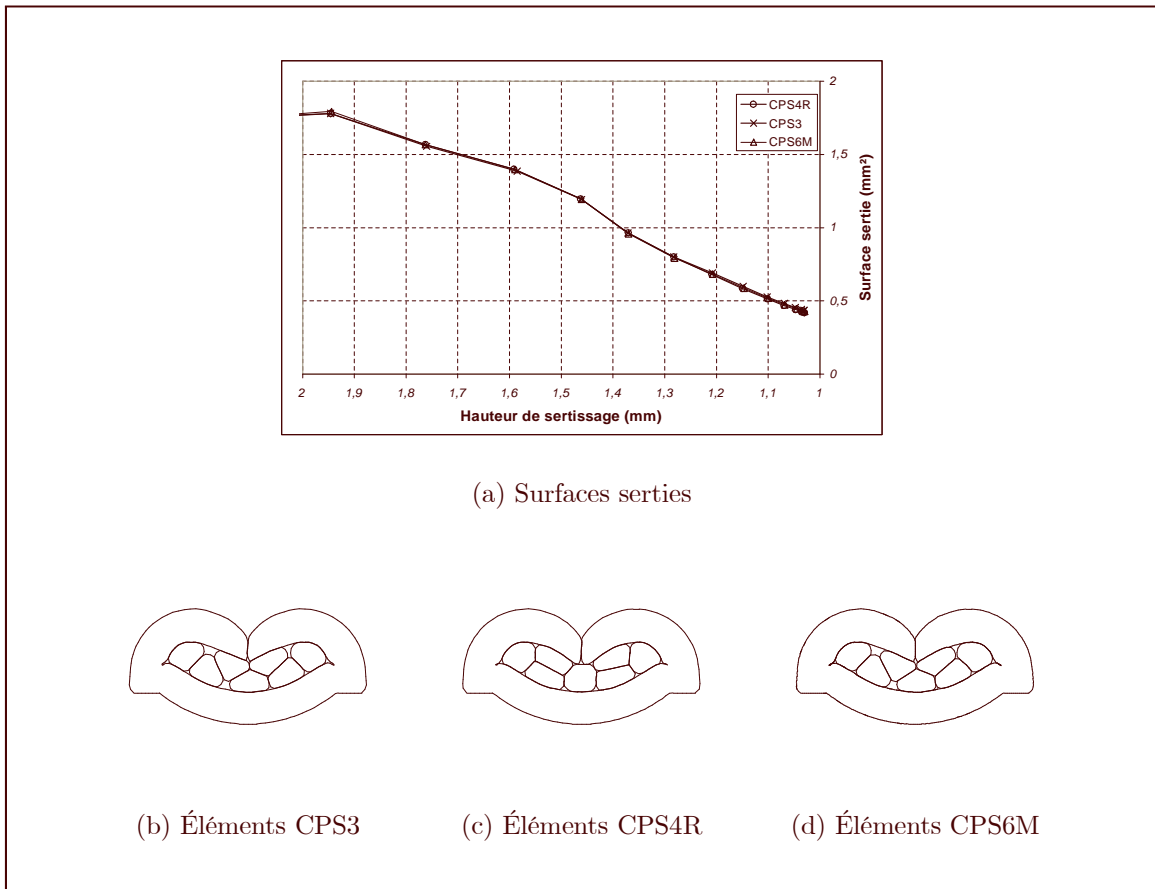


Fig. 3.20: Effets du choix des éléments sur la surface sertie

Nous pouvons avoir comme crainte que les éléments du premier ordre soient trop rigides et augmentent artificiellement la surface des trous et la force de sertissage. Nous constatons sur les figures 3.21 qu'il n'en ait rien.

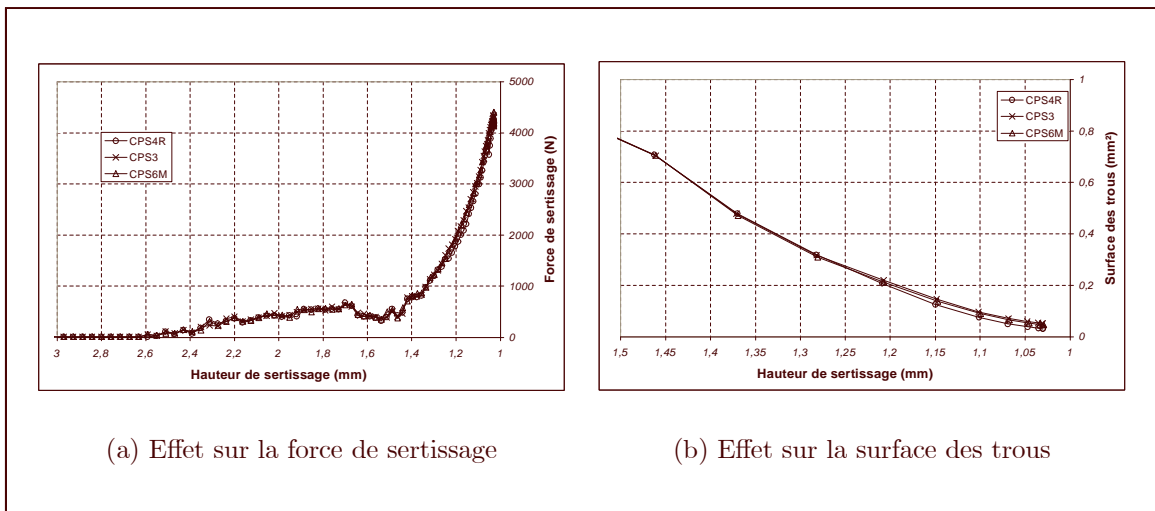


Fig. 3.21: Effets du choix des éléments sur la surface des trous et la force de sertissage

Par contre, nous pouvons observer que les éléments de type triangulaire (linéaire ou quadratique) donne la même géométrie finale, avec la même répartition des brins et le même pourcentage de vide, alors que les éléments de type quadrangulaire donne un résultat plus proche du cas réel observé. L'état de contraintes dans les trois cas (figure 3.22) montre que les éléments quadratiques (CPS6M) présentent des artefacts numériques au niveau du contact entre les ailes et les torons, ce qui illustre la difficulté d'utiliser des éléments quadratiques, même modifiés, pour évaluer un état de contraintes correct.

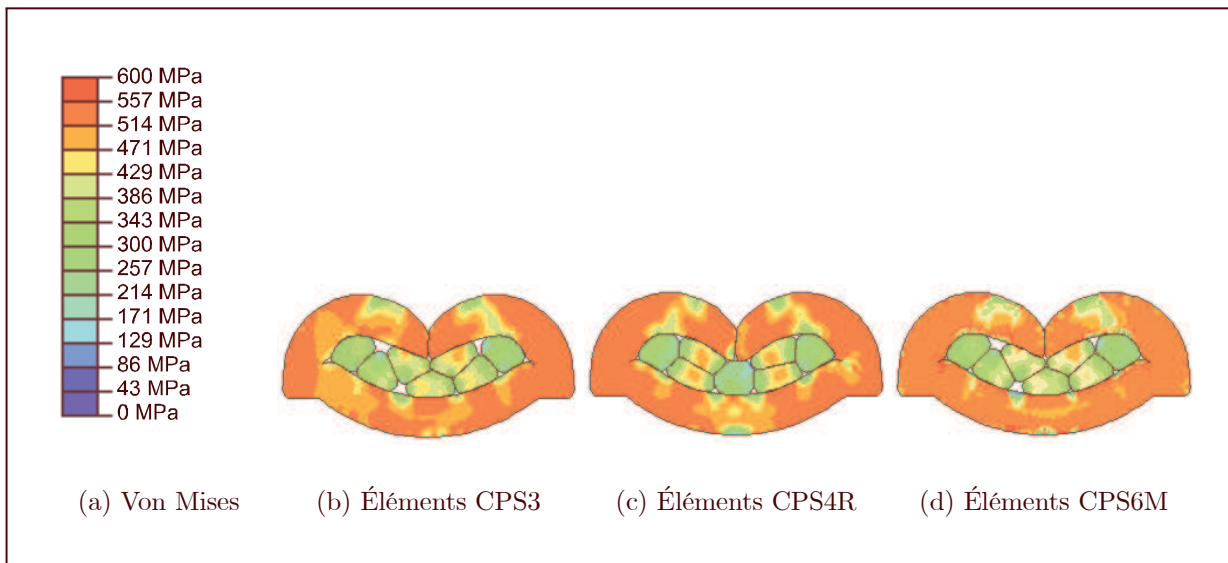


Fig. 3.22: Effets du choix des éléments sur la contrainte équivalente de Von Mises

3.4 Estimation du retour élastique

3.4.1 Simulation avec un algorithme statique implicite

Les premières simulations faites avec l'algorithme dynamique explicite ont montré que les pressions de contact disparaissaient presque totalement après le retrait des outils. Connaissant les défauts dans l'évaluation des contraintes induites par l'utilisation de cet algorithme, nous avons donc utilisé un algorithme statique implicite (figure 3.23).

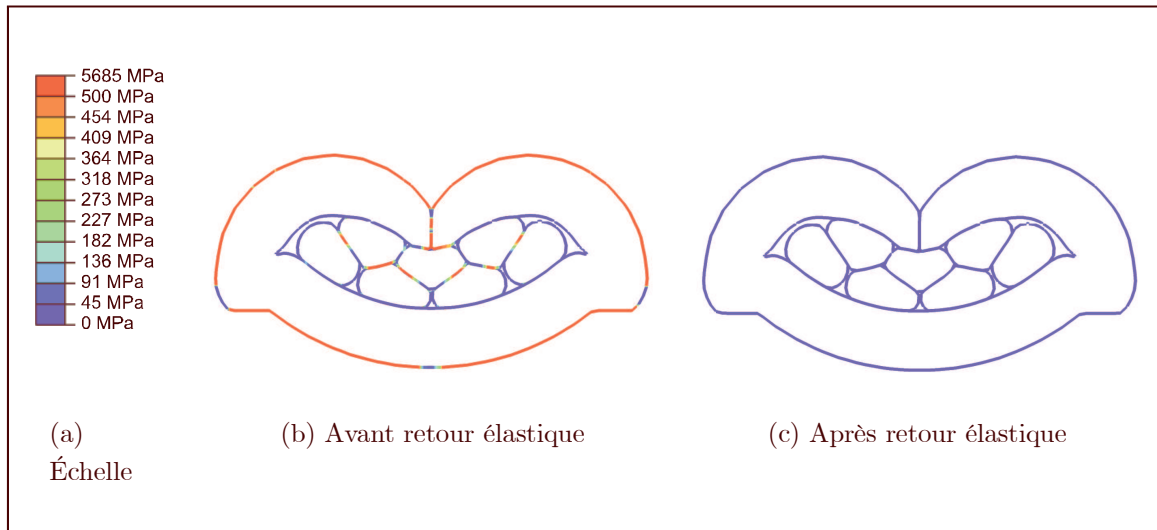


Fig. 3.23: Pressions de contact - Simulation du sertissage avec un algorithme statique implicite

Dans ce cas aussi, les pressions de contact ont complètement disparu après retrait des outils. Le retour élastique en 2D provoque une réouverture des ailes qui se traduit par une augmentation de la hauteur de sertissage. La différence entre un algorithme explicite et un algorithme implicite n'est pas significative (voir table 3.6).

	Dynamique explicite	Statique implicite
Avant	1,03152 mm	1,03769 mm
Après	1,03593 mm	1,04175 mm
Écart	0,00441 mm	0,00406 mm
$\frac{\text{Écart}}{\text{Avant}}$	0,43%	0,39%

Tab. 3.6: Simulation du retour élastique en explicite et en implicite

L'absence de pression de contact ne semble donc pas provenir de l'usage d'un algorithme explicite.

3.4.2 Simulation du cambrage

Le contact est fabriqué par des opérations de pliage/découpe à partir d'un flanc initial. Avant d'arriver à la forme des ailes finales (voir figure 3.24), au moins deux opérations sont nécessaires (en 3D, il faudrait considérer en plus certaines opérations) :

1. Le chanfreinage du flanc.
2. Le cambrage du flanc (en deux passes).

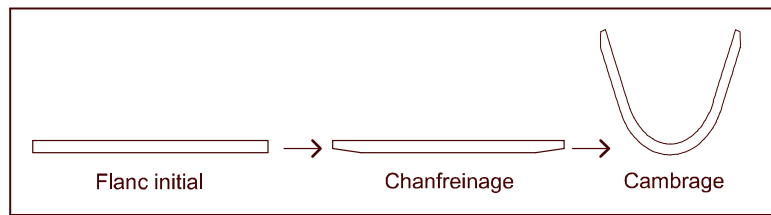


Fig. 3.24: Opérations successives pour mettre en forme les ailes

Nous avons mené une analyse statique complète de l'opération de cambrage afin d'étudier son effet sur le sertissage final, en particulier du point de vue des contraintes et du retour élastique. Nous n'avons pas simulé l'opération de chanfreinage car il s'agit d'un effet purement local qui ne doit pas avoir d'influence sur la simulation du retour élastique. De plus, la simulation du chanfreinage impliquerait de prendre garde à la déformation importante du maillage qui en résulterait et d'utiliser un algorithme de remaillage¹¹. Cette simulation ne change rien à l'état des pressions de contact après retour élastique (voir figure 3.25).

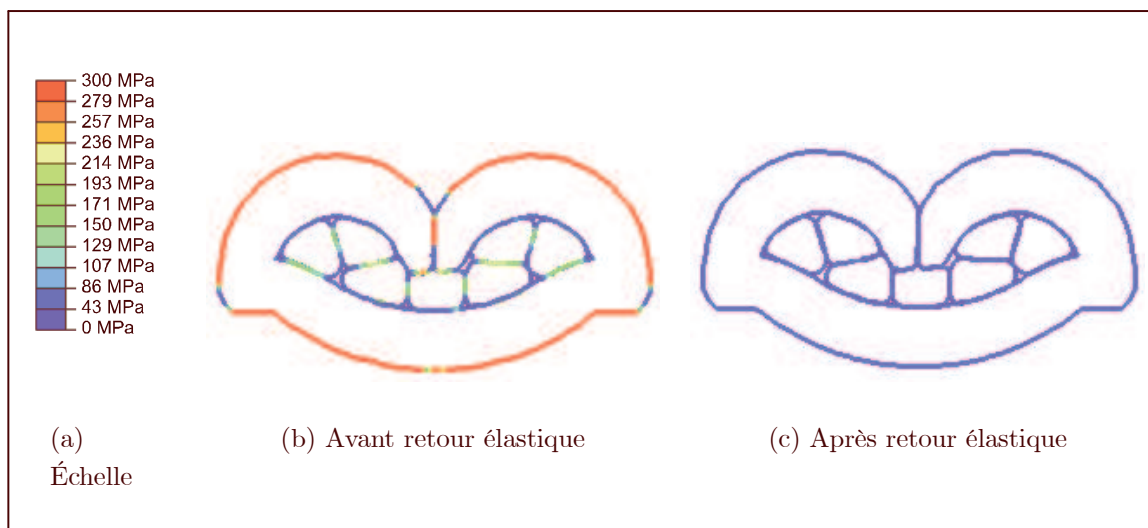


Fig. 3.25: Pressions de contact - Simulation du cambrage puis du sertissage avec un algorithme statique implicite

3.4.3 Conclusion

Aucune de ces simulations bi-dimensionnelles n'a donné de résultat probant pour la simulation du retour élastique. Plusieurs hypothèses peuvent être émises. En premier lieu, les mesures faites grâce à l'étude électrique ont montré que, si les pressions de contact existaient après retour élastique, elles devaient être très faibles. Barbier (dans [Bar98]) affirme même que le sertissage n'est pas un mode d'assemblage à réserve d'élasticité. Les

¹¹Le remaillage automatique sur ABAQUS/Standard n'étant pas implémenté, il aurait nécessité un développement informatique trop important.

travaux du LGEP (dans [RPCB02]) ont estimé que le contact électrique pouvait être d'excellente qualité alors que les aires de contact électriques sont très faibles. Pour un sertissage standard de résistance de $1,9 \text{ m}\Omega$, les spots de contact électrique sont une trentaine et présentent un diamètre inférieur à $10 \text{ }\mu\text{m}$ de diamètre (de l'ordre de $0,001\%$ de la surface de contact mécanique). Il est donc fort probable que nous ne puissions les simuler correctement, puisque ces dimensions sont largement en dessous de l'échelle mésoscopique utilisée en mécanique.

Il est également possible que notre modèle de matériau soit insuffisant. Dans [MSTa95], les auteurs ont été confrontés au même problème, et l'ont résolu en utilisant un modèle visco-plastique, bien que les températures en jeu soient faibles et que la vitesse de déformation soit extrêmement limitée.

Une autre hypothèse est que le modèle bi-dimensionnel en contraintes planes soit insuffisant pour la simulation du retour élastique et qu'il soit nécessaire de recourir à un modèle 3D.

3.5 Résultats

Les résultats présentés dans cette section ont tous été obtenus par un algorithme dynamique explicite, avec l'hypothèse des contraintes planes. Le maillage des ailes et du câble est réalisé avec des éléments quadrilatéraux et deux degrés de liberté par nœud. Il y a entre 1000 et 1300 éléments, suivant le nombre de torons. Les outils sont supposés rigides et chaque calcul prend environ 20 min une machine de type Compaq 64 bits avec processeur Alpha cadencé à 866 MHz, 2 Go de RAM et ABAQUS/Explicit version 6.2.

3.5.1 Contraintes

Sur la figure 3.26, nous présentons une répartition de contraintes au sens de Von Mises dans les ailes et le câble, avant et après retour élastique. On voit fort bien que la zone la plus fortement sollicitée se trouve au niveau du repliement des ailes.

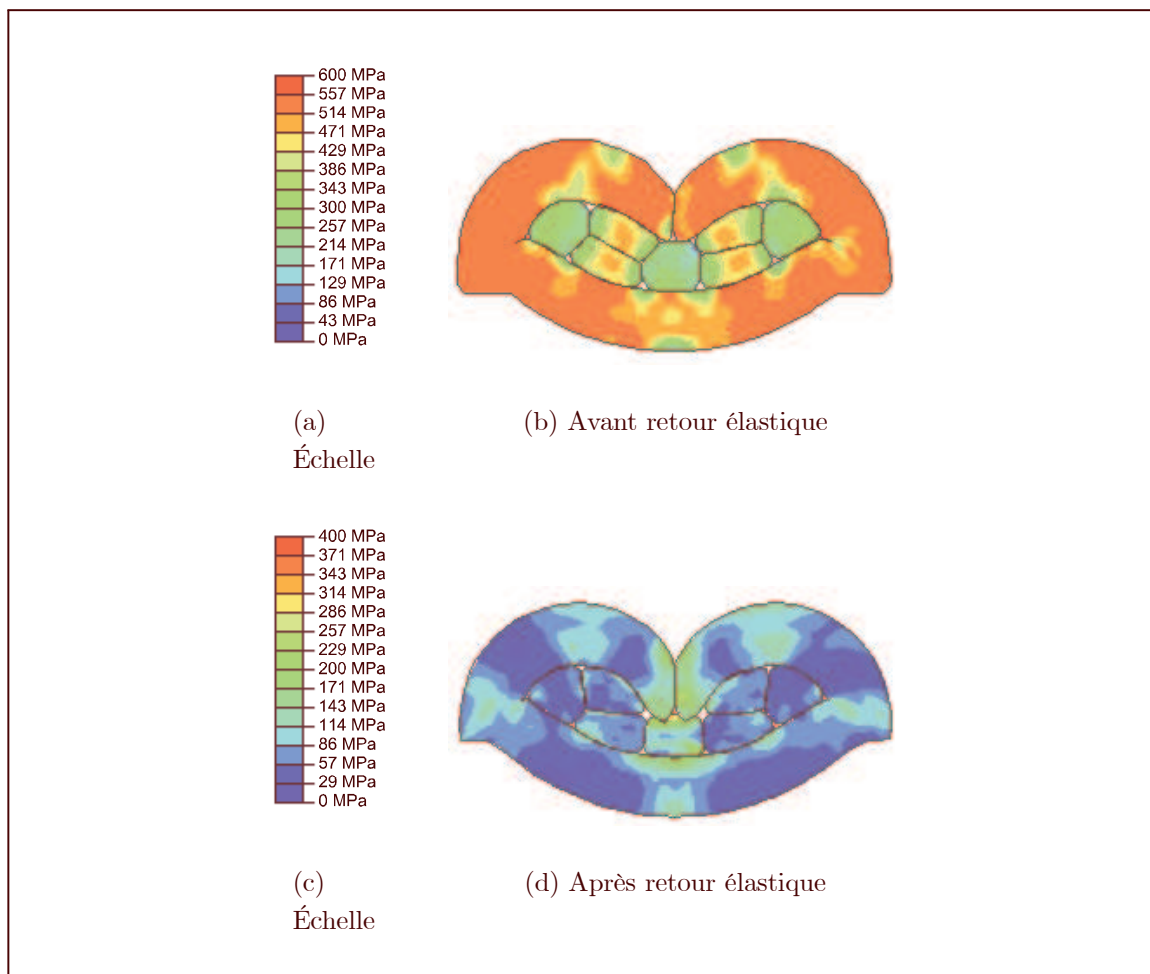


Fig. 3.26: Contraintes équivalentes de Von Mises - Avant et après retour élastique

3.5.2 Déformations

Pour les déformations plastiques, nous proposons la figure 3.27. De même que dans le cas des contraintes, on voit que les zones fortement plastifiées se trouvent au niveau du repliement des ailes.

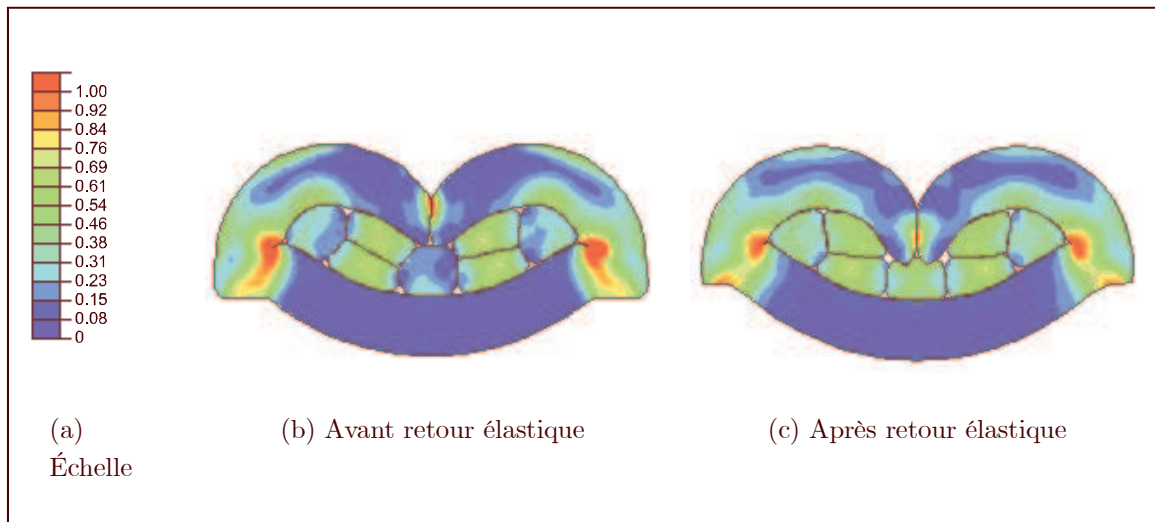


Fig. 3.27: Déformation équivalente plastique - Avant et après retour élastique

Nous observons également que le retour élastique se fait pratiquement sans replastification locale puisque l'état de déformations plastiques est pratiquement identique avant ou après retour élastique.

3.5.3 Simulation de différents câbles

Nous présentons les résultats de la simulation relative à plusieurs câbles de la gamme la plus répandue dans l'industrie automobile : celle qui recouvre les sections allant de $0,35 \text{ mm}^2$ à $0,75 \text{ mm}^2$. Les câbles utilisés dans les simulations sont présentés dans la table 3.7.

Section	Nombre de brins	Diamètre des brins	Section réelle
$0,35 \text{ mm}^2$	7	0,25 mm	$0,3436 \text{ mm}^2$
$0,50 \text{ mm}^2$	7	0,30 mm	$0,4947 \text{ mm}^2$
$0,60 \text{ mm}^2$	12	0,25 mm	$0,5890 \text{ mm}^2$
$0,75 \text{ mm}^2$	19	0,22 mm	$0,7222 \text{ mm}^2$

Tab. 3.7: Câbles utilisés dans les simulations

Nous avons effectué, pour chaque câble (figures 3.28, 3.29, 3.30 et 3.31), trois simulations à 5%, 15% et 25% de taux de compression du câble.

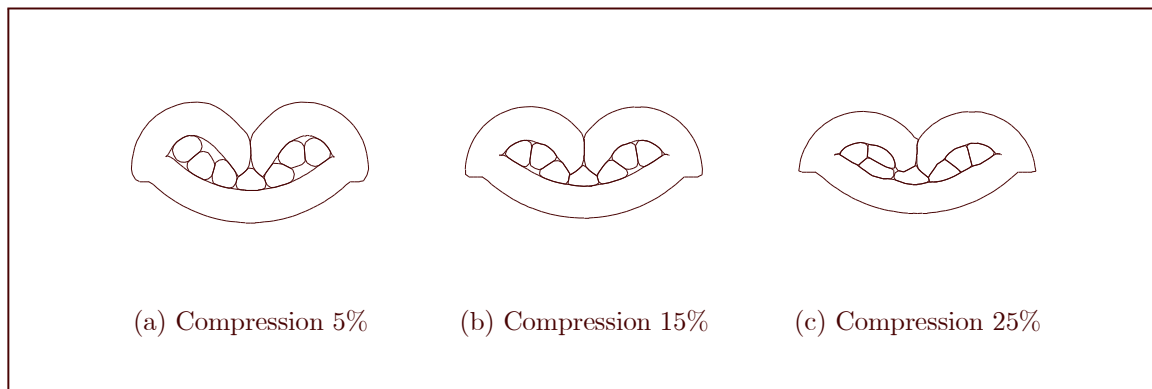


Fig. 3.28: Déformées finales pour un câble de 0,35 mm²

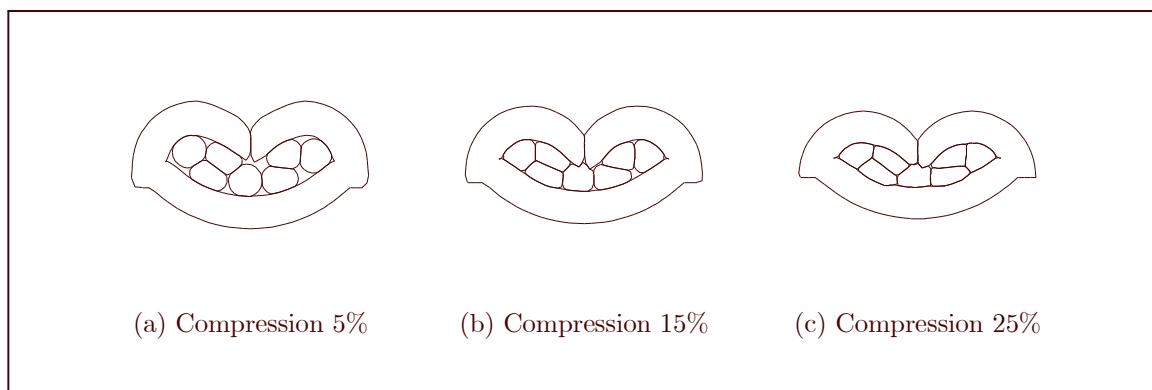


Fig. 3.29: Déformées finales pour un câble de 0,50 mm²

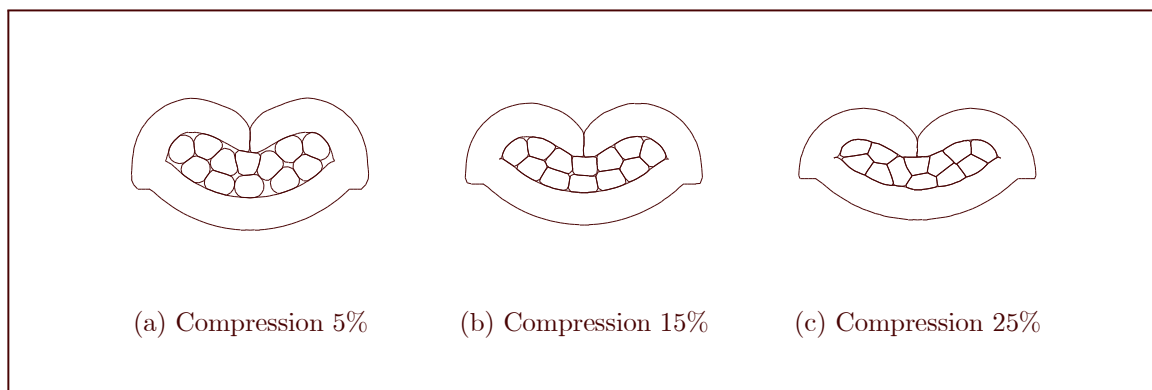


Fig. 3.30: Déformées finales pour un câble de 0,60 mm²

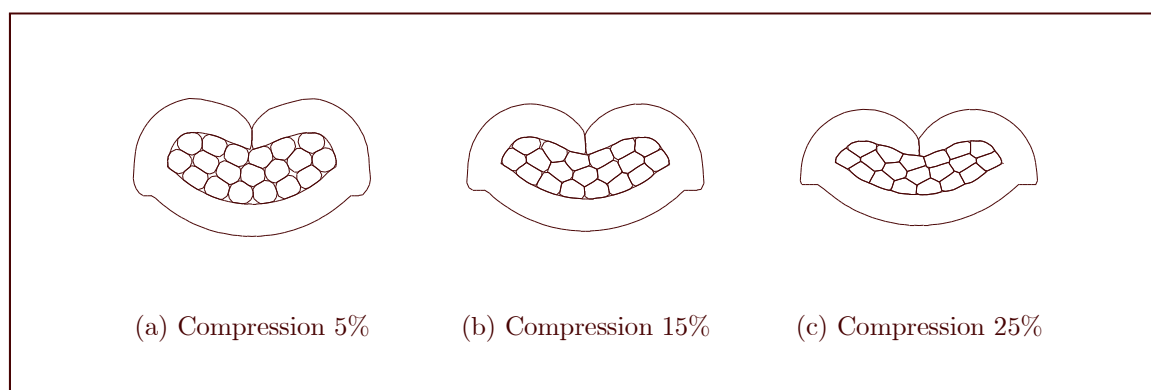


Fig. 3.31: Déformées finales pour un câble de $0,75 \text{ mm}^2$

3.6 Validation expérimentale

Les résultats numériques sont validés grâce aux résultats expérimentaux. Pour le cas bi-dimensionnel, on s'intéresse surtout à la géométrie grâce aux coupes effectués sur des sertissages réels. On rappelle que les différentes définitions des surfaces ont été données dans le paragraphe 3.1.3 et sur la figure 3.3, page 64.

3.6.1 Surface sertie

Sur les figures 3.32, nous pouvons voir que les résultats du modèle numérique sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. La surface sertie obtenue par le modèle éléments finis n'est pas éloignée de plus de 10% de la surface expérimentale.

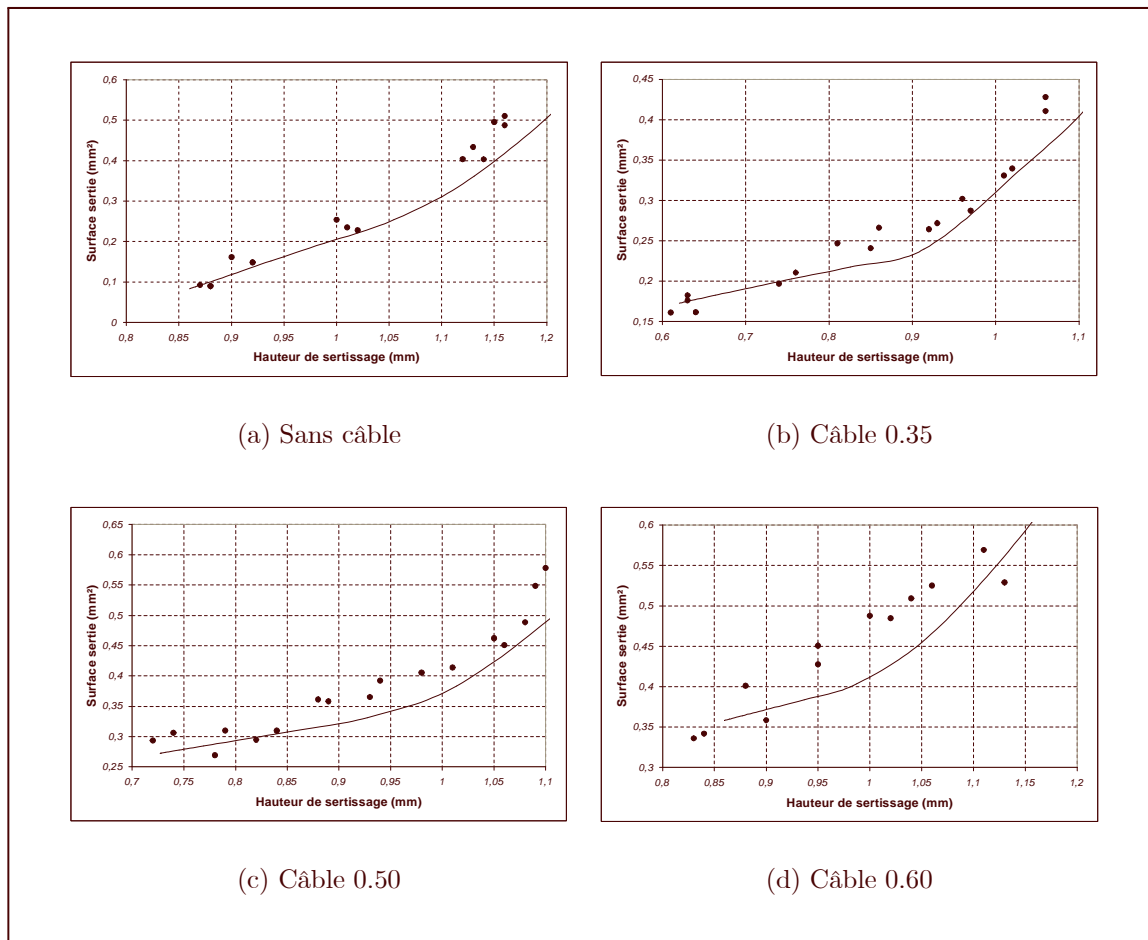


Fig. 3.32: Résultats numériques et expérimentaux concernant la surface sertie

Il faut noter que l'on obtient de meilleurs résultats en imposant un coefficient de frottement compris entre 0,20 et 0,25 pour le contact entre les ailes et la partie arrondie du poinçon. L'effet de ce frottement avait déjà été relevé dans [VKBB96].

3.6.2 Surface des ailes

Sur les figures 3.33, nous pouvons voir que les résultats du modèle numérique sont également en bon accord avec les résultats expérimentaux. La corrélation est excellente car l'extrusion de l'aile est limitée et les données matériaux sont plus fiables.

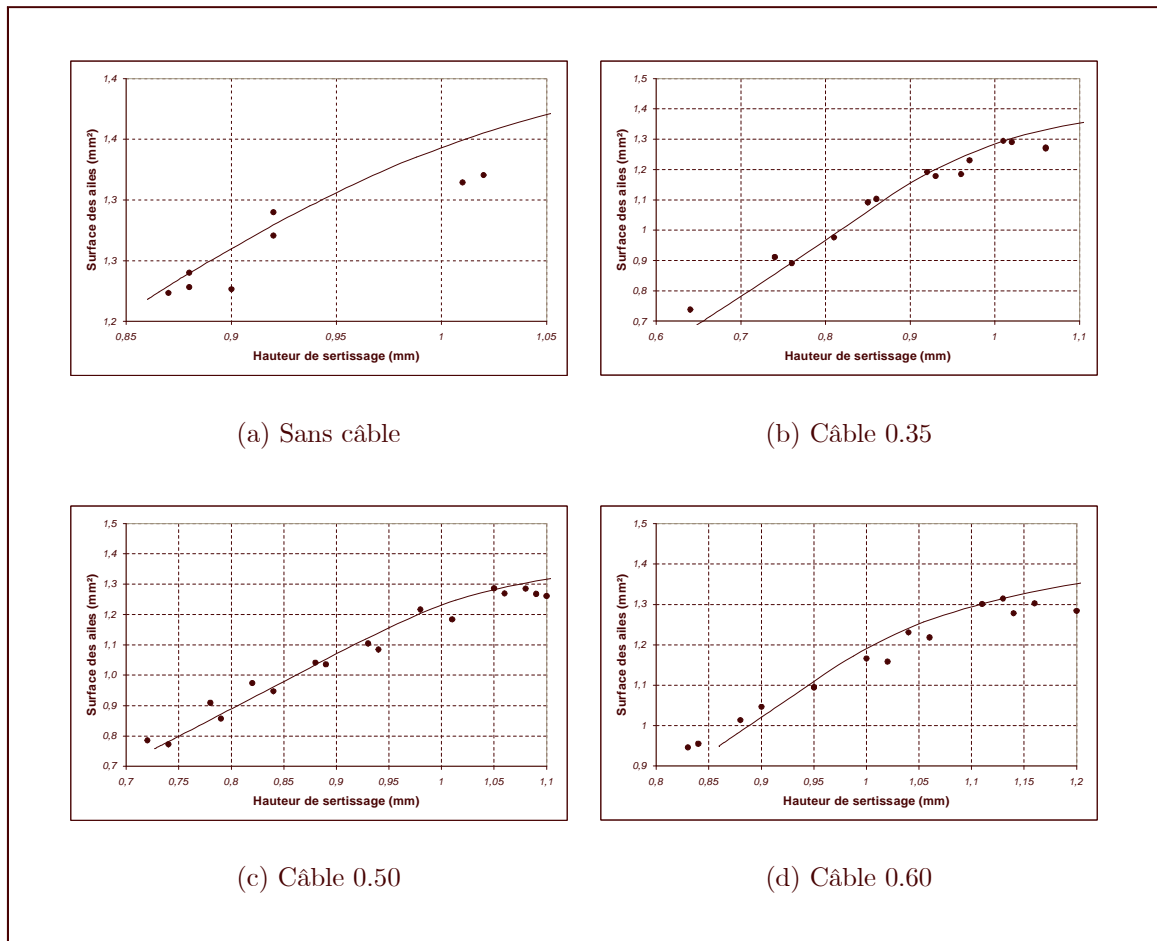


Fig. 3.33: Résultats numériques et expérimentaux concernant la surface des ailes

3.6.3 Taux de compression

Les figures 3.34 concernent la comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le taux de compression. On peut constater des écarts assez importants, alors que la surface sertie (voir 3.6.1) était assez bien évaluée.

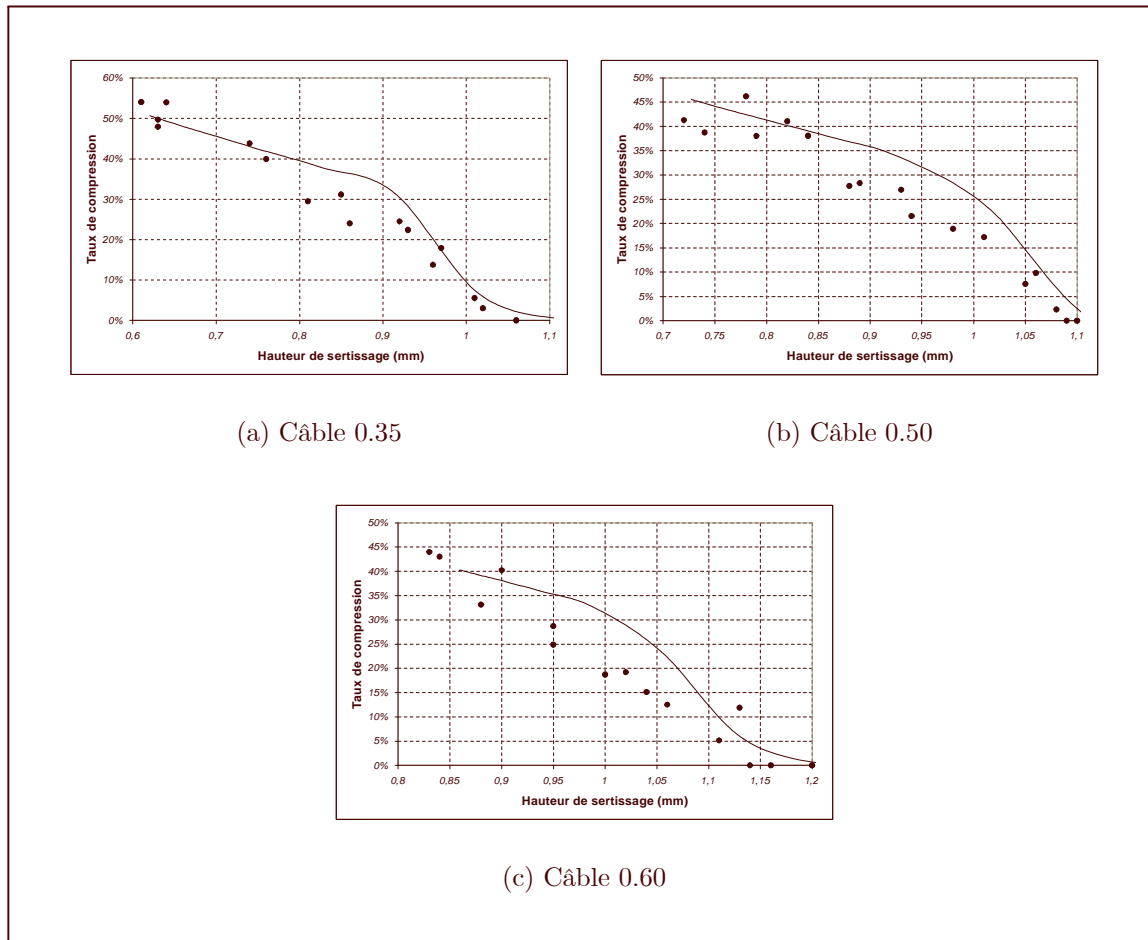


Fig. 3.34: Résultats numériques et expérimentaux concernant le taux de compression

3.6.4 Force de sertissage

Sur les figures 3.35, nous pouvons voir que la différence entre la force de sertissage expérimentale et la force de sertissage numérique est assez limitée et correspond à une erreur d'environ 15% sur l'effort final. La forme de la courbe est correcte, bien que le nombre de points expérimentaux soit limité (en particulier pour le câble 0,60 mm²). Les différences peuvent s'expliquer :

- L'hypothèse bi-dimensionnelle en contraintes planes est limitative pour les efforts, bien qu'elle donne d'excellents résultats pour la géométrie.
- Le manque d'informations sur le matériau du câble est aussi un facteur limitant la précision du modèle numérique.
- La presse de sertissage contient tous les dispositifs de maintien du contact en sus des outils pour le sertissage. La nature de la force de sertissage mesurée n'est donc pas exactement celle relevée sur le modèle numérique. Un processus de découpe de la bande qui tient le contact perturbe notablement la première partie de la courbe expérimentale. Notons aussi que la force relevée sur le matériel correspond à l'effort global sur le mini-applicateur et non sur le poinçon sertissage uniquement, comme

dans la simulation numérique. Il est donc possible que certains effets internes au mini-applicateur perturbent notablement la mesure de la force de sertissage pure.

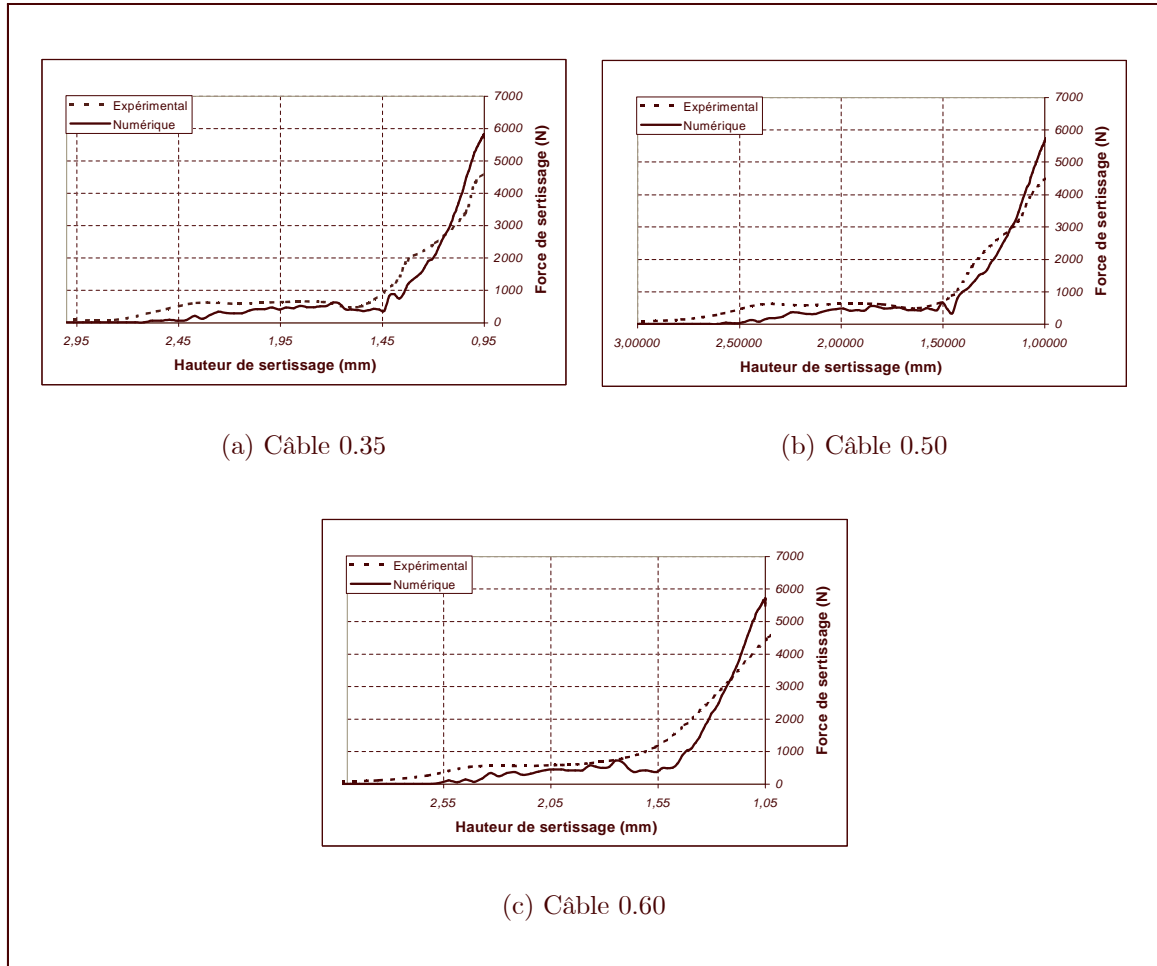


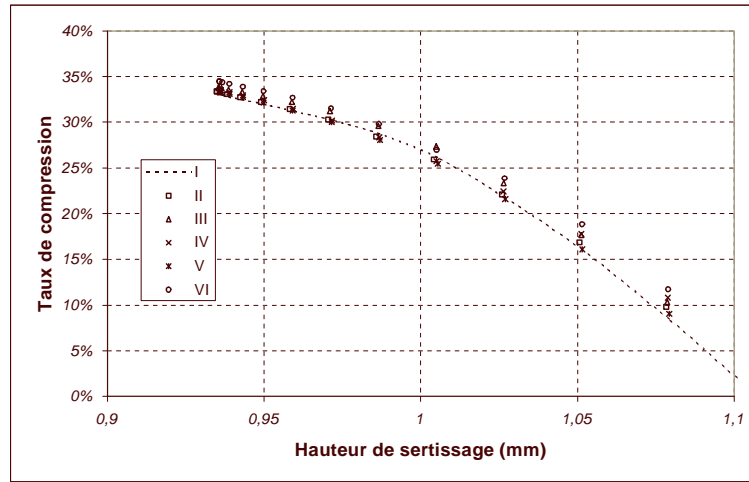
Fig. 3.35: Comparaison calculs-expériences pour la force de sertissage

Le changement de la loi de comportement (pente de la courbe d'écroutissage du câble) ne modifie pas radicalement les résultats. De plus, il convient de noter que l'information sur la force de sertissage n'est absolument pas fondamentale dans l'étude et qu'il s'agit juste d'un moyen de vérification dont la valeur n'est pas forcément probante.

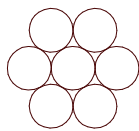
3.7 Analyse de paramètres technologiques

3.7.1 Position initiale des brins

Il était important de vérifier que la position initiale des brins n'avait pas d'influence significative sur les résultats. Pour cela, nous avons testé six configurations différentes avec un câble à sept torons. Les configurations testées et les déformées finales présentées sur la figure 3.36.



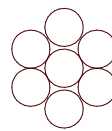
(a) Effet sur le taux de compression du câble



(b) I-Initial



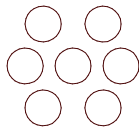
(c) I-Final



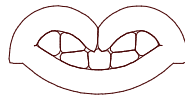
(d) II-Initial



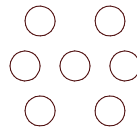
(e) II-Final



(f) III-Initial



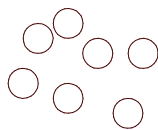
(g) III-Final



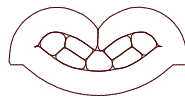
(h) IV-Initial



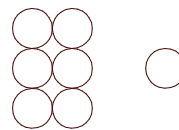
(i) IV-Final



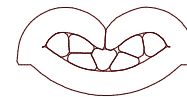
(j) V-Initial



(k) V-Final



(l) VI-Initial



(m) VI-Final

Fig. 3.36: Étude de l'influence de la position des torons dans le câble

L'évolution du taux de compression t_c est présenté sur la figure 3.36. L'écart n'atteint pas $\pm 1\%$ par rapport au taux de compression standard. Ce résultat nous a permis d'utiliser un programme automatique de positionnement des torons pour des câbles allant de un

à deux cents torons¹². En effet, il est possible de trouver sur Internet des listes de positionnement optimal (sous-entendu qui minimisent la surface) des torons dans un cercle. Ainsi programmés, nos logiciels de génération automatique des modèles éléments finis sont en mesure de gérer jusqu'à deux cent torons sans aucune intervention de l'utilisateur.

3.7.2 Coefficients de frottement

L'identification des coefficients de frottement est très délicate. Nous avons tenté une identification sur la presse instrumentée en utilisant des contacts spéciaux : normalement graissés (ils sont graissés en sortie de fabrication), complètement dégraissés et avec un traitement de surface spécial au PTFE¹³. Mais il nous a été impossible d'en tirer les informations que nous recherchions, la différence sur la force de sertissage étant trop faible pour ne pas être noyée dans le bruit de la mesure.

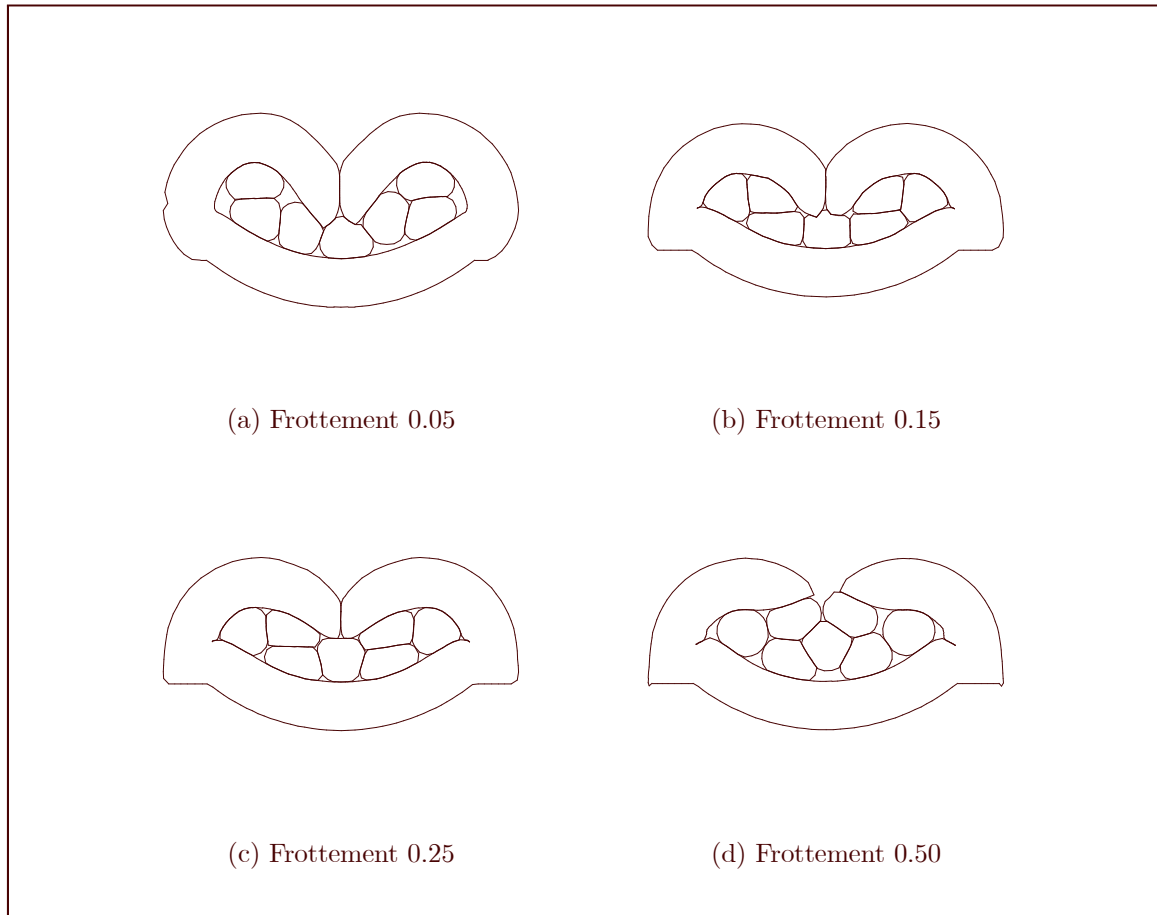


Fig. 3.37: Effet du frottement des outils

¹²Les configurations à deux cents torons n'existent pas dans l'automobile mais on peut trouver des câbles de plus de quatre-vingt torons (câble de puissance de 2,5 mm² des batteries par exemple). Au-delà, on s'intéresse aussi aux câbles de forte section (plusieurs cm²) utilisés dans l'industrie électrique et aéronautique.

¹³Mis au point précédemment par le laboratoire du centre de recherches de FCI, grâce à la collaboration de Laurent Tristani.

Néanmoins, il nous est possible de limiter l'échelle de variation des coefficients de frottement par de simples observations géométriques sur les sections. Par expérience, nous avons constaté que le coefficient de frottement le plus critique était celui du poinçon avec les ailes (surtout la partie arrondie). Ce que confirme les références [VKBB96] et [Ber98] et les experts du sertissage. Le grippage des outils est presque toujours provoqué par une usure prématurée du poinçon. On fournit d'ailleurs un kit de polissage spécial avec les mini-applicateurs pour entretenir les outils. Le coefficient de frottement optimal des outils avec les ailes est compris entre 0,15 et 0,25. Nous observons que pour un coefficient de frottement élevé, les ailes sont raccourcies et le sertissage ne se fait pas correctement, ce qui confirme les résultats obtenus dans [VKBB96].

3.8 Automatisation

3.8.1 Génération du modèle

Le calcul des sertissages avec l'hypothèse bi-dimensionnelle et un algorithme dynamique explicite nous a permis d'automatiser entièrement la création du modèle. La base est constituée par l'analyse géométrique préalable des ailes et de l'outillage (voir annexe C) et les possibilités d'ABAQUS/CAE et du langage Python¹⁴.

3.8.1.1 Variables

Voici la liste des variables choisies pour la création des modèles :

- Géométrie : taille des ailes (en gardant la forme générale en U avec les chanfreins en bout d'aile), outillage (poinçon à double rayon et enclume) et câble. Pour ce dernier, des recherches sur Internet nous ont permis de construire un programme qui génère automatiquement toutes les configurations optimales des câbles pour des géométries allant de un à deux cents torons et pour n'importe quel diamètre de brin. Il est aussi possible de définir complètement manuellement le câble (position, nombre et diamètre des brins).
- Matériau : matériau du câble et du fut (caractéristiques élastiques et plastiques, viscosité, densité).
- Frottement : coefficient de frottement torons/torons, outils/ailes, aile/aile, toron/aile.
- Maillage : finesse et type de maillage (type d'éléments), options pour le contrôle des modes sabliers.
- Options du calcul : vitesse du poinçon, retour élastique ou non, remaillage automatique ou non, mass scaling éventuel, fréquences de sorties des variables pour le post-traitement.

¹⁴Python est un langage orienté objet de type script. Il est gratuit et il existe sur de nombreuses plateformes. Le logiciel de pré et post-processing d'ABAQUS (ABAQUS/CAE) est entièrement fondé sur son utilisation.

3.8.1.2 Principe de fonctionnement

Un fichier Python script principal s'occupe de générer le modèle à l'aide d'ABAQUS CAE. Les variables sont décrites dans plusieurs fichiers textes, chargées automatiquement. Pour chaque modèle, le fichier d'entrée ABAQUS inp est généré, ainsi qu'un fichier d'options qui résume les variables utilisées.

3.8.2 Dépouillement des résultats

Pour le dépouillement des résultats, nous disposons de plusieurs scripts Python pour extraire les informations (force de sertissage, énergies, vitesse et déplacement du poinçon). Nous avons également développé en programme un C++ qui communique avec ABAQUS, afin de calculer les surfaces (voir annexe E).

Ce chapitre a permis de présenter un modèle éléments finis bi-dimensionnel du sertissage. Les difficultés de modélisation d'un problème très fortement non linéaire (grands déplacements, grandes déformations élasto-plastiques et contacts multiples avec frottement) ont été décrites. Les résultats numériques obtenus avec les modèles mis au point avec le logiciel ABAQUS ont été comparés à des résultats expérimentaux. La démarche numérique (mise en données, exploitation des résultats) est rapide, industrialisable et adaptable sans problème dans l'optique d'un transfert immédiat vers les unités de FCI.

Ce modèle bi-dimensionnel a servi de base pour construire des modèles tri-dimensionnels complets, beaucoup plus coûteux en temps de calcul et à la mise au point plus délicate. Le modèle bi-dimensionnel validé sera utilisé dans le chapitre sur l'optimisation d'une section idéale.

Chapitre 4

Analyses tridimensionnelles

Ce chapitre a pour but de décrire les modèles tri-dimensionnels partiels et complets, développés pour la simulation du sertissage avec câble multi-brins. Les difficultés à surmonter sont analogues à celles rencontrées pour le cas bi-dimensionnel, mais amplifiées par la taille du modèle. Nous validons les résultats des simulations grâce aux expériences décrites dans le chapitre 2.

Nous abordons aussi la difficulté d'extraire les résultats dans des modèles à grand nombre d'éléments (plus de cinquante mille pour le cas complet), en particulier l'évaluation des surfaces et du taux de compression.

4.1 Description des modèles numériques

4.1.1 Généralités

Le modèle numérique employé pour les simulations tri-dimensionnelles ne diffère pas fondamentalement de celui utilisé pour les simulations bi-dimensionnelles. Toutefois, il convient de détailler quelques difficultés supplémentaires.

La première spécificité des modèles 3D, c'est que la génération des modèles est plus délicate du fait de leur taille et de leur topologie (apparition de structures du type chanfreins ou stries qui n'apparaissent pas en 2D). Néanmoins, la génération automatique des modèles a été maintenue en partie (voir annexe C). Une autre conséquence directe est le temps de préparation et de calcul nécessaire, ce qui implique beaucoup moins de possibilités d'expérimentations.

L'autre particularité des modèles 3D (toujours par rapport aux modèles 2D) est la difficulté d'analyse des résultats. Par exemple, il a été très difficile d'obtenir des informations sur les surfaces de sertissage (qui définissent le taux de compression) et ceci a nécessité le développement de programmes particuliers très coûteux (voir annexe E pour plus de détails).

Enfin, de manière plus technique, des difficultés de calcul sont apparues en 3D alors qu'elles n'étaient pas présentes en 2D. Citons les problèmes d'interférence lors des contacts (ce qui demande une parfaite définition des surfaces candidates au contact) et l'apparition de modes sabliers, ces deux problèmes étant fortement liés.

4.1.2 Stratégie de simulation

La stratégie de simulation repose sur une décomposition géométrique du problème 3D (voir la figure 4.1) :

- Modèle extrudé simple. On part d'une géométrie 2D que l'on extrude simplement. Ce modèle peut se générer automatiquement sans problème.
- Modèle avec stries et chanfreins. Le modèle doit être réalisé avec un logiciel de CAO externe et importé dans ABAQUS/CAE.
- Modèle complet avec stries, chanfreins et zones de transition. Le modèle¹⁵ provient d'un logiciel de CAO externe.

De plus, nous avons testé l'hypothèse de symétrie suivant la profondeur, pour réduire le nombre d'éléments et/ou augmenter la finesse de maillage. Les outils sont toujours supposés rigides. Ils sont formés d'éléments de plaques rigides (R3D4).

¹⁵Le maillage du modèle 3D complet utilisé dans ce travail a été réalisé par Laurent Merle, au centre de recherches de FCI.

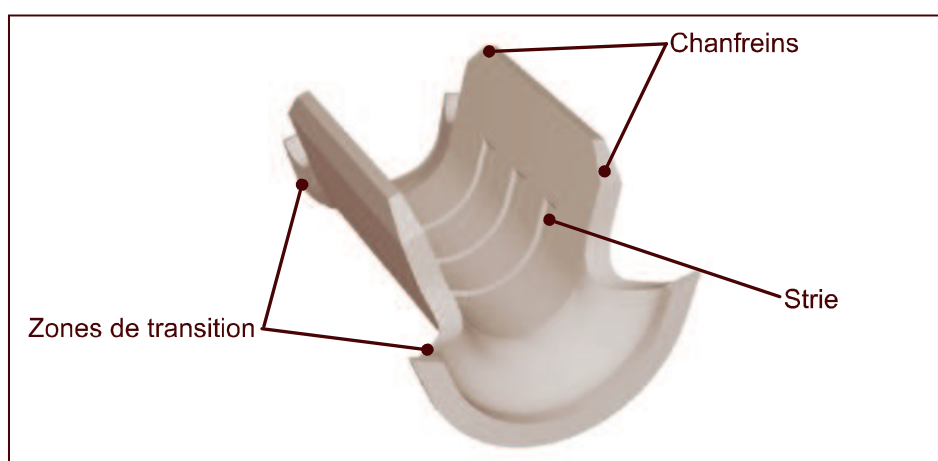


Fig. 4.1: Fût de sertissage

4.2 Résultats

4.2.1 Modèle simplement extrudé

Nous présentons ici les résultats du sertissage tri-dimensionnel d'un câble de $0,50 \text{ mm}^2$ (détails dans le tableau¹⁶ 4.1). Nous avons repris pour cela les mêmes paramètres de simulation que pour les modèles bi-dimensionnels comme la cinématique (vitesse du poinçon) et les lois de comportement des matériaux (voir chapitre 3). Le maillage initial du fût de sertissage est présenté sur la figure 4.2. Pour le maillage du câble et du fût, nous utilisons des éléments hexaédriques à huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud, à intégration réduite (un seul point d'intégration avec contrôle des modes sabliers). L'enclume est fixe durant le sertissage et nous imposons une vitesse sinusoïdale au poinçon. La vitesse moyenne du poinçon vaut 10 m/s . Ce premier modèle nous donne déjà quelques indices des difficultés. La définition des surfaces de contact doit être rigoureuse.

Caractéristique	Valeur
Nombre d'éléments	36.940
Nombre de noeuds	45.620
Temps de calcul	13 h
Nombre d'incrémentes	126.549
Mémoire utilisée	34 megaword

Tab. 4.1: Caractéristiques du modèle 3D extrudé

¹⁶Le temps de calcul est donné pour une machine de type Compaq 64 bits avec processeur Alpha cadencé à 866MHz et 2Go de RAM. Système UNIX et ABAQUS version 6.2.



Fig. 4.2: Maillage initial du fût de sertissage pour le modèle 3D extrudé

4.2.1.1 Modes sabliers

Pour ce premier cas, des interférences de contact sont apparues sur les brins (voir figure 4.4). Ce défaut rédhibitoire est dû à la gestion des modes sabliers, qui apparaissent dans les modèles presque incompressibles en liaison avec l'usage des éléments à intégration réduite (les C3D8R utilisés par ABAQUS). La présence importante de modes sabliers est confirmée par le niveau d'énergie correspondant à leur contrôle (voir figure 4.3). A la fin du sertissage, les brins sont complètement plastifiés et nous sommes donc dans une situation de déformation plastique isochore.

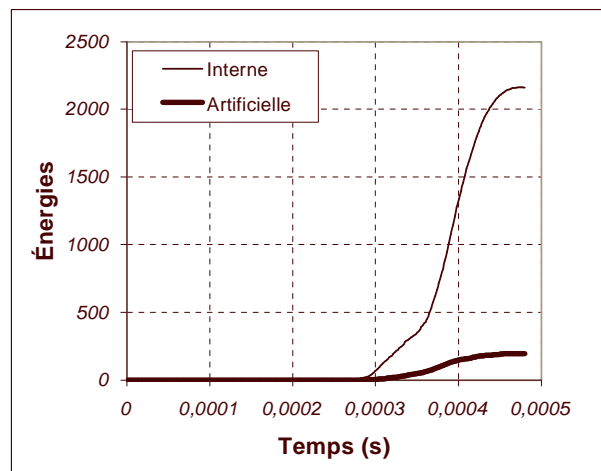


Fig. 4.3: Énergie interne et énergie de contrôle des modes sabliers dans le cas 3D extrudé

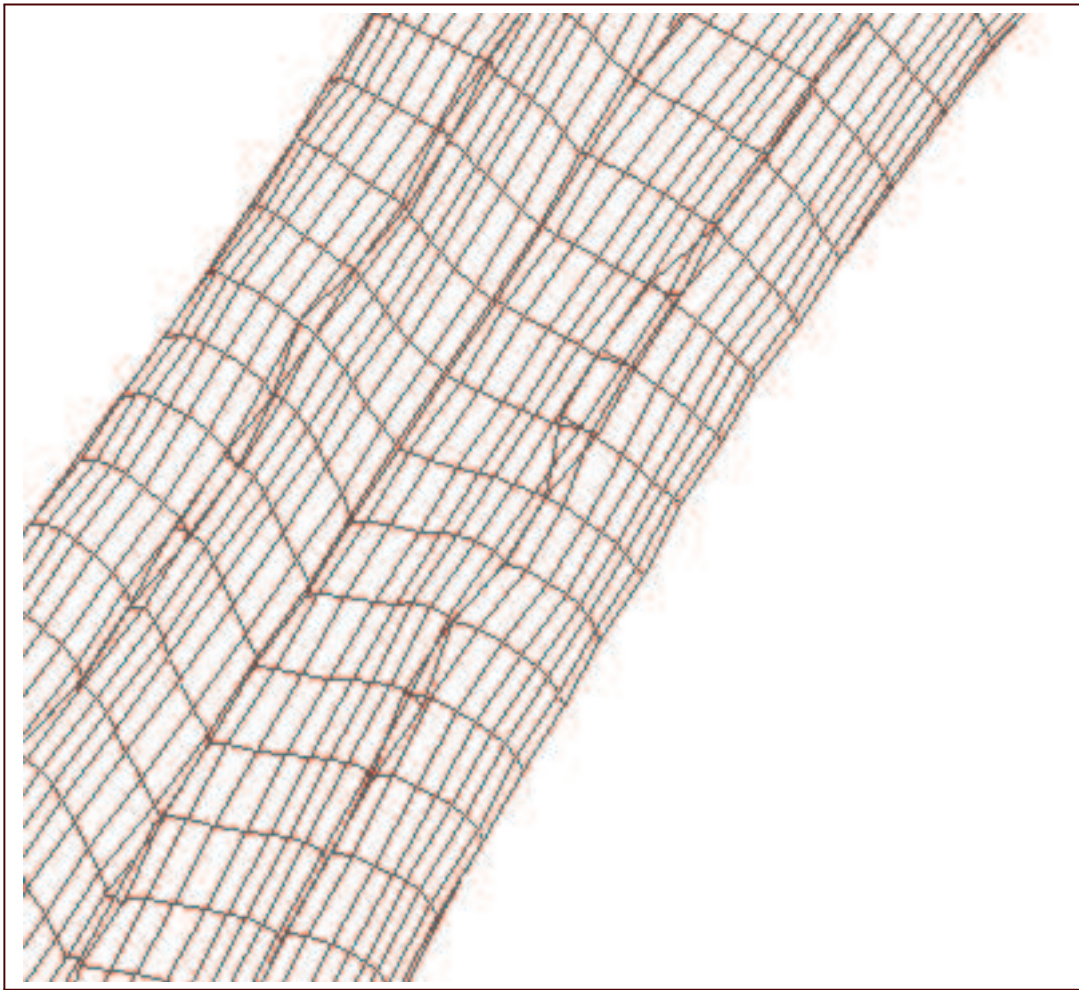


Fig. 4.4: Interférences de contact et modes sabliers dans le cas 3D extrudé

Par défaut, ABAQUS/Explicit utilise la méthode introduite par Flanagan et Belytschko (voir [FB81] et page 47 du chapitre 2) pour contrôler les modes sabliers. Le contrôle est donc insuffisant pour notre cas difficile. Heureusement, ABAQUS offre la possibilité de passer en mode « enhanced ». Cette méthode, développée en particulier par Puso (voir [Pus00]), nous permet de limiter l'apparition de ces défauts.

4.2.1.2 Contraintes

L'état de contraintes en fin de sertissage pour le câble et le fût est présenté sur les figures 4.5 et 4.6 .

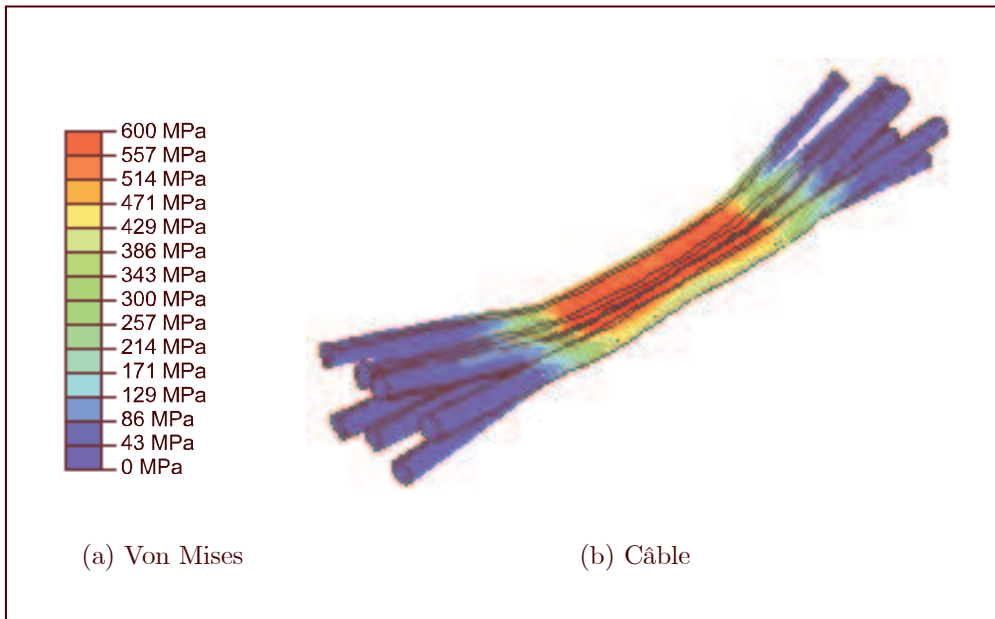


Fig. 4.5: Contrainte de Von Mises pour le câble sur le modèle 3D extrudé

On peut voir que le niveau de contraintes atteint sur le fût est pratiquement uniforme et vaut entre 550 et 600 MPa, comme dans le modèle bi-dimensionnel.

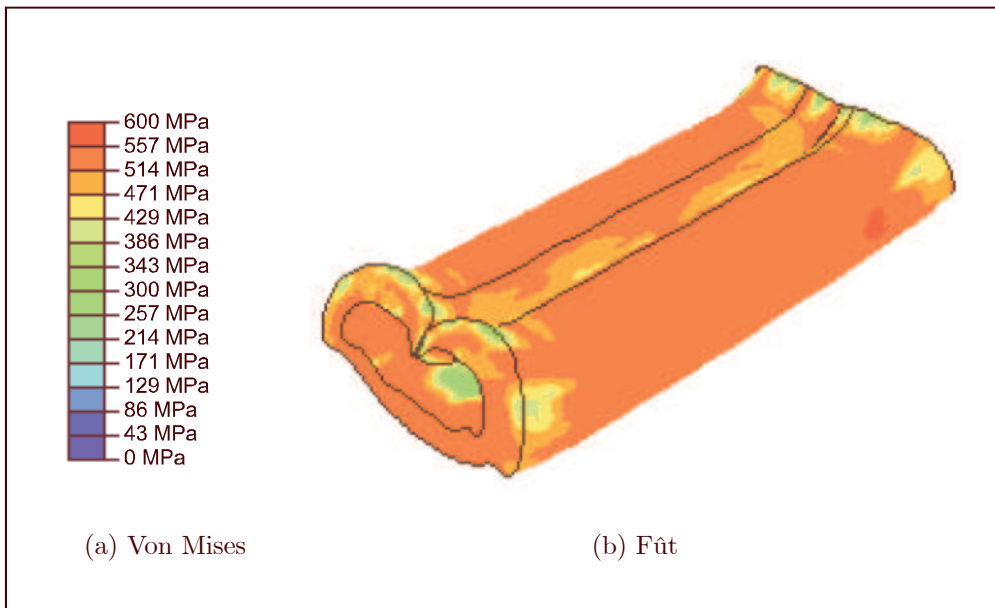


Fig. 4.6: Contrainte de Von Mises pour le fût sur le modèle 3D extrudé

4.2.1.3 Déformations

La déformation plastique équivalente pour les câbles et le fût est présentée sur la figure 4.8 et 4.7.

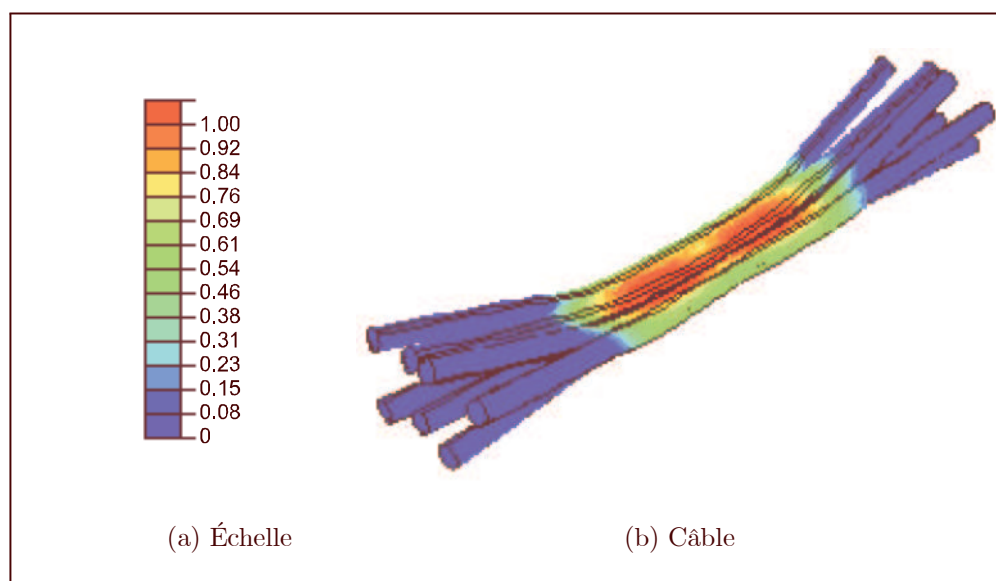


Fig. 4.7: Déformation plastique totale pour le câble sur le modèle 3D extrudé

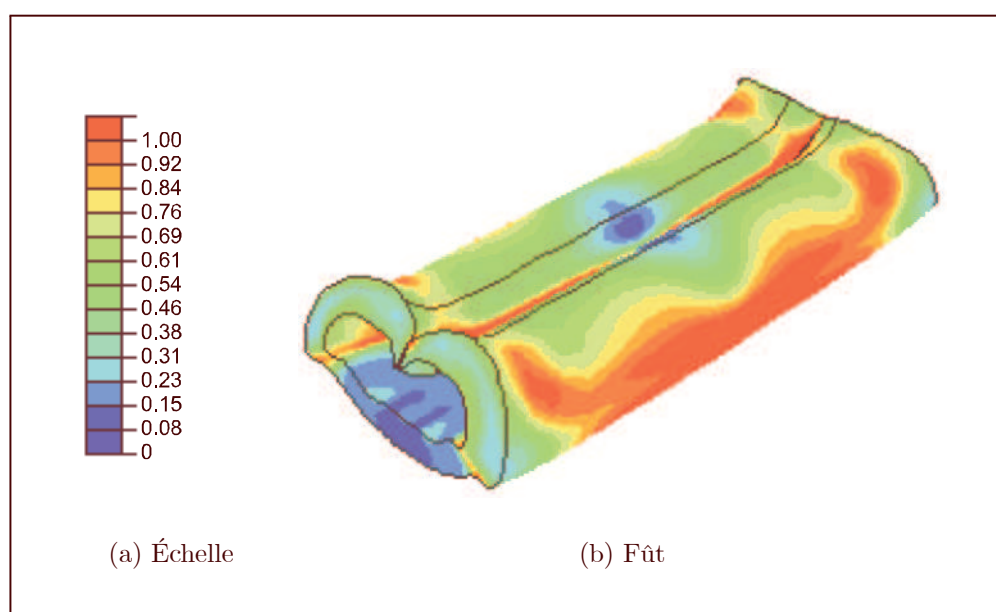


Fig. 4.8: Déformation plastique totale pour le fût sur le modèle 3D extrudé

Tout comme dans le cas bi-dimensionnel, on voit que les zones fortement plastifiées se trouvent au niveau du repliement des ailes.

4.2.1.4 Géométrie finale

Tout comme dans le cas bi-dimensionnel, la géométrie finale du sertissage est le résultat le plus important. Pour cela, nous avons procédé à des coupes au début du fût et au milieu

du fût grâce à des programmes spécialement développés (voir annexe E). Les résultats sont présentés sur la figure 4.9.

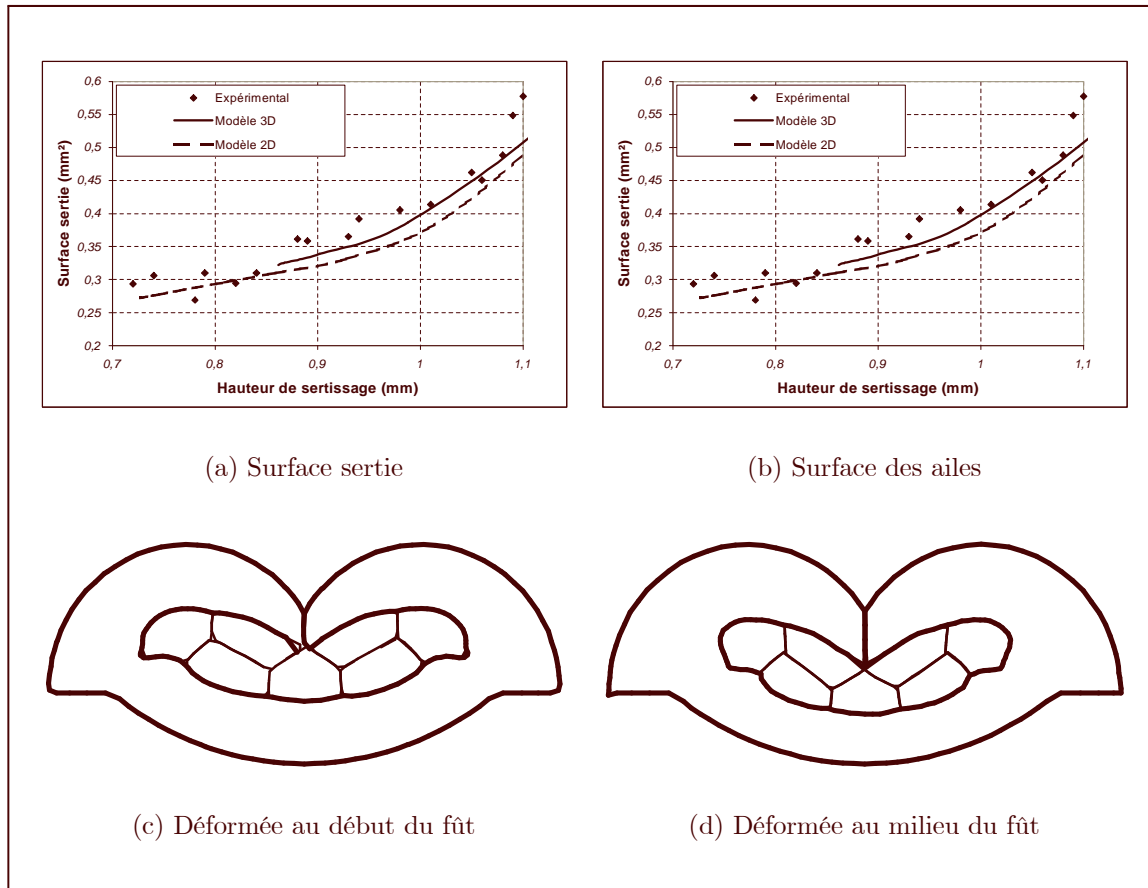


Fig. 4.9: Caractéristiques géométriques finales pour le modèle 3D extrudé

Nous y voyons la très bonne corrélation du modèle tridimensionnel avec les résultats expérimentaux.

4.2.1.5 Force de sertissage

Il est possible de comparer la force de sertissage obtenue dans les modèles 2D et 3D et dans le modèle expérimental. Les résultats sont présentés sur la figure 4.10.

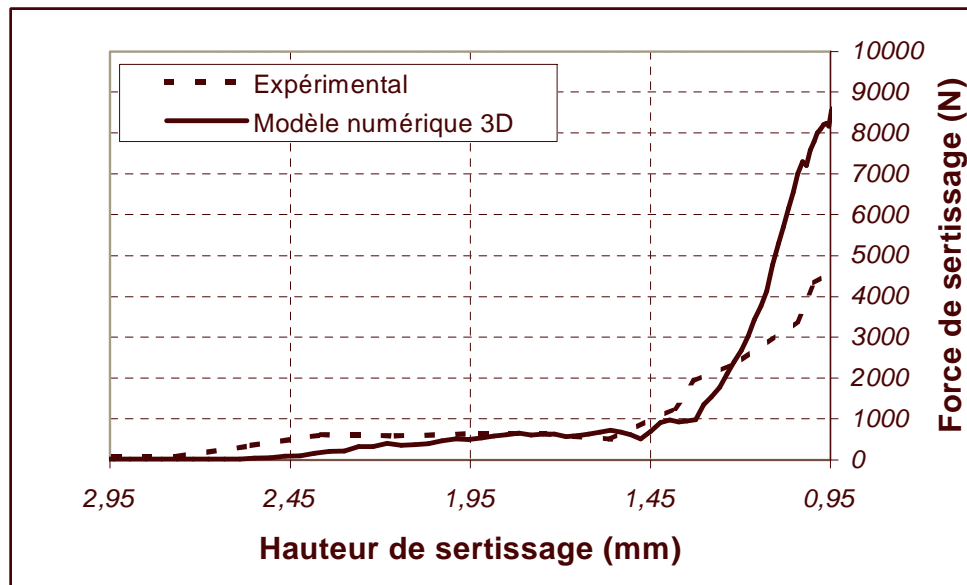


Fig. 4.10: Force de sertissage dans le cas du modèle 3D

On observe la faible qualité de la corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. Une analyse plus poussée nous a montré que la loi de comportement n'était pas en cause. En fait, le paramètre important est le coefficient de frottement entre les ailes et la partie arrondie du poinçon. Un minimum de 0,20 est requis pour obtenir une bonne corrélation géométrique. Sans cela, les ailes sont plus pointues et trop près du fond du sertissage par rapport aux coupes réelles effectuées (voir les coupes sur la figure 4.11).

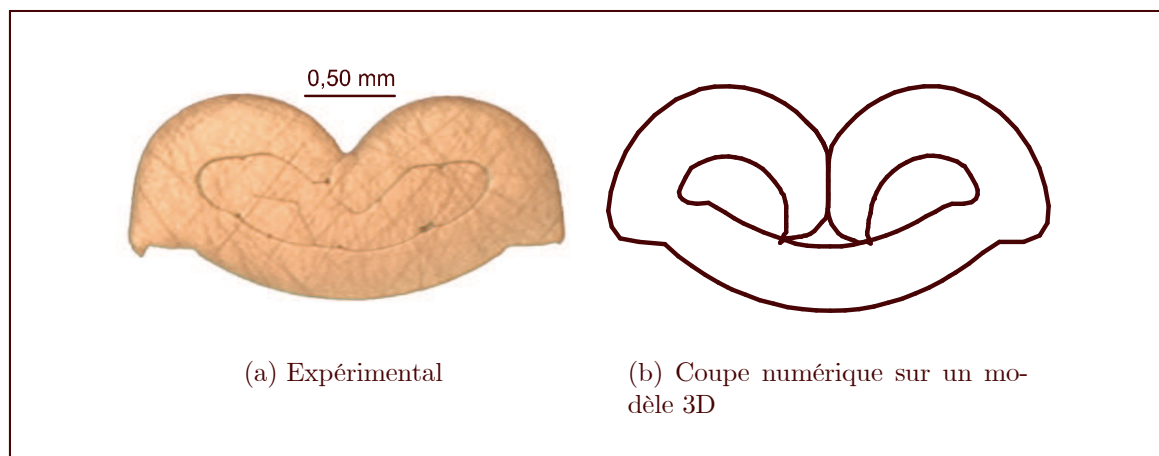


Fig. 4.11: Comparaison entre une coupe expérimentale et une coupe obtenue avec un coefficient de frottement inférieur à 0,15

Nous sommes face à un double effet : un coefficient de frottement de 0,20 est nécessaire pour obtenir une bonne corrélation géométrique mais ne donne pas de bons résultats pour la force de sertissage. Les raisons de cette différence peuvent avoir plusieurs origines :

- Notre dispositif expérimental est défectueux, mal calibré ou inadéquat. Il est possible que le capteur d'effort (global sur l'outillage) ne transmette pas exactement la force de sertissage brute, puisque cet outillage comprend un certain nombre d'autres dispositifs en sus de celui du sertissage proprement dit (en particulier, des outils pour fixer le contact ou sertir l'isolant). Peut-être un effet de levier est-il mal évalué.
- Le frottement relativement important du poinçon avec l'aile n'est pas la bonne manière de restituer le raccourcissement ou le tassement des ailes lors de leur repliement.

4.2.2 Effet des stries

Les stries sont importantes dans le sertissage. Elles ont deux fonctions : améliorer le contact électrique et augmenter la résistance mécanique du sertissage. Pour étudier leur effet, nous avons utilisé un modèle de fût symétrique (voir figure 4.12 pour le maillage utilisé).

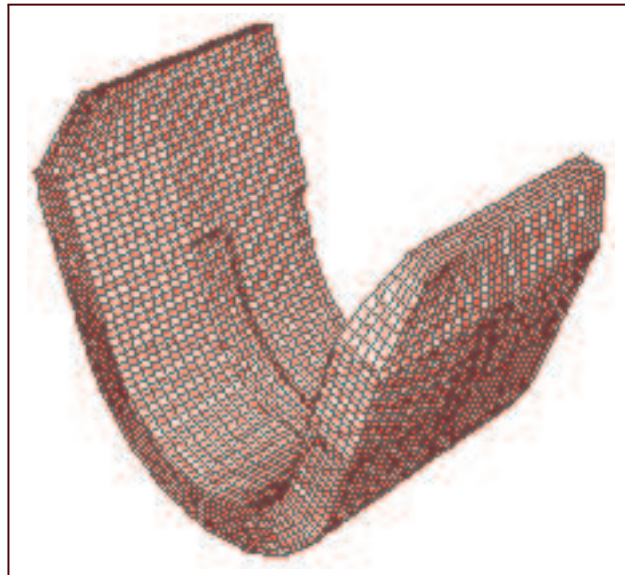


Fig. 4.12: Maillage initial du fût de sertissage pour le modèle 3D symétrique avec les stries

Les stries ont la particularité de ne pas se déformer uniformément dans la section (voir figure 4.13).

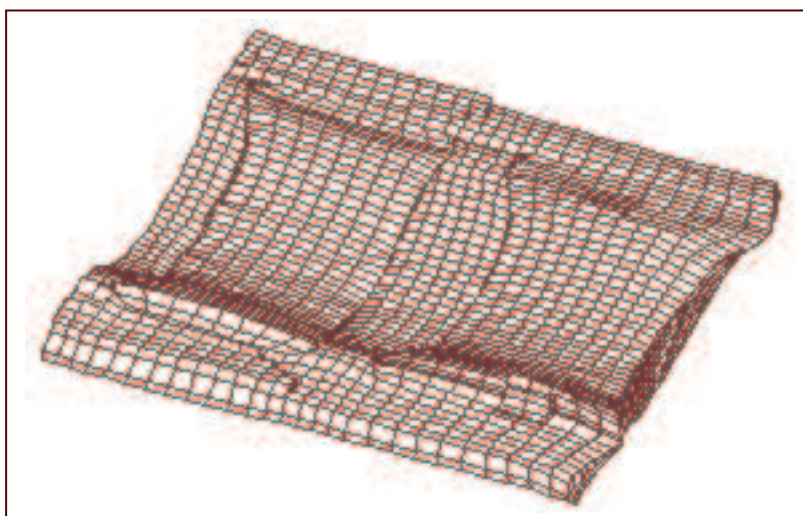


Fig. 4.13: Déformation des stries

Ceci provoque un effet de pincement du câble et augmente les surfaces en contact. Le pincement est également visible sur les torons sur la figure 4.14.

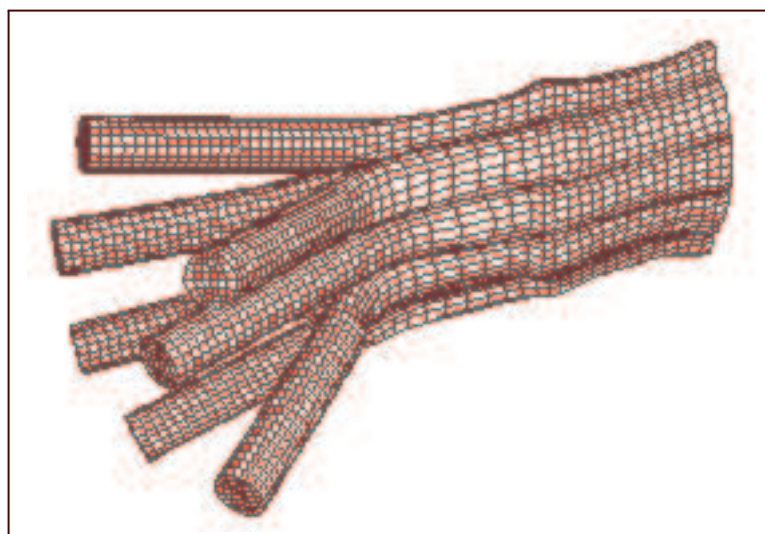


Fig. 4.14: Déformation des torons par les stries

4.2.3 Modèle complet avec zones de transition

Le modèle complet comprend toutes les particularités d'un fût de sertissage classique ainsi que ses zones de raccordement au reste du connecteur. Ceci comprend les stries et les divers chanfreins. La construction d'un tel modèle ne présente pas de difficultés particulières y compris en ce qui concerne la discrétisation (maillage). La qualité de ce maillage est assurée par l'utilisation d'éléments hexaédriques aussi réguliers que possible (voir figure 4.15).

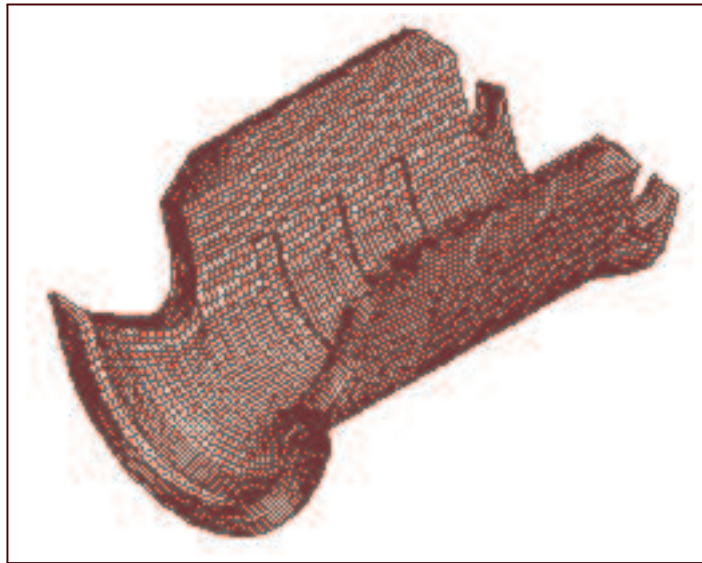


Fig. 4.15: Maillage initial du fût de sertissage pour le modèle 3D complet

Le modèle complet conduit à des temps de calcul très importants. Les caractéristiques du calcul sont détaillées dans le tableau 4.2.

Caractéristique	Valeur
Nombre d'éléments	36.940
Nombre de noeuds	45.620
Temps de calcul	39 h
Nombre d'incréments	126.549

Tab. 4.2: Caractéristiques du modèle 3D complet

4.2.3.1 Contraintes et déformations

La distribution des contraintes équivalentes (au sens de Von Mises) pour le câble et le fût est présenté sur les figures 4.16 et 4.17.

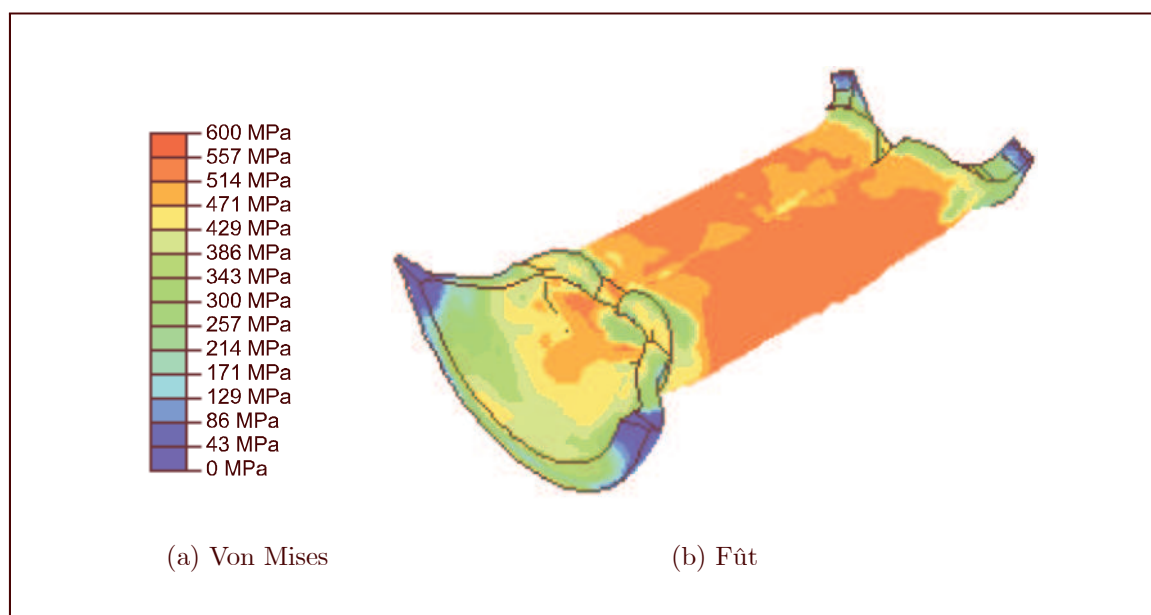


Fig. 4.16: Contrainte de Von Mises pour le fût sur le modèle 3D complet

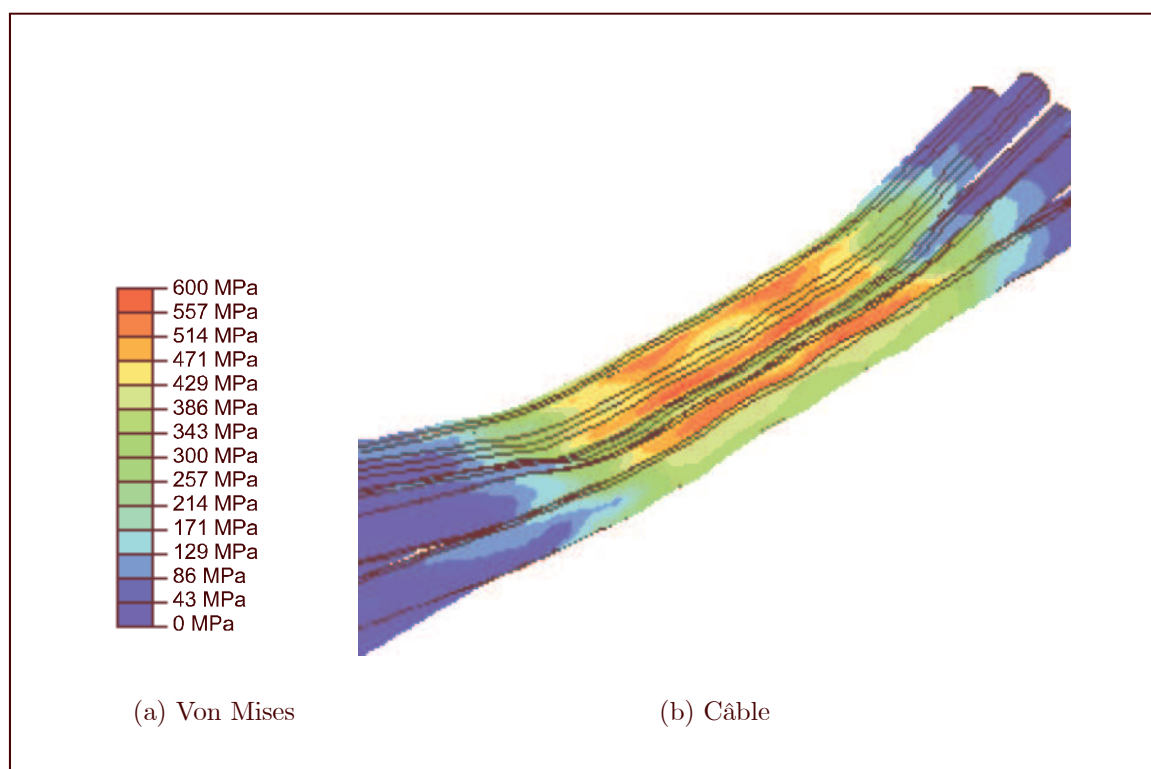


Fig. 4.17: Contrainte de Von Mises pour le câble sur le modèle 3D complet

et celle de la déformation plastique est donnée sur la figure 4.18 et 4.19.

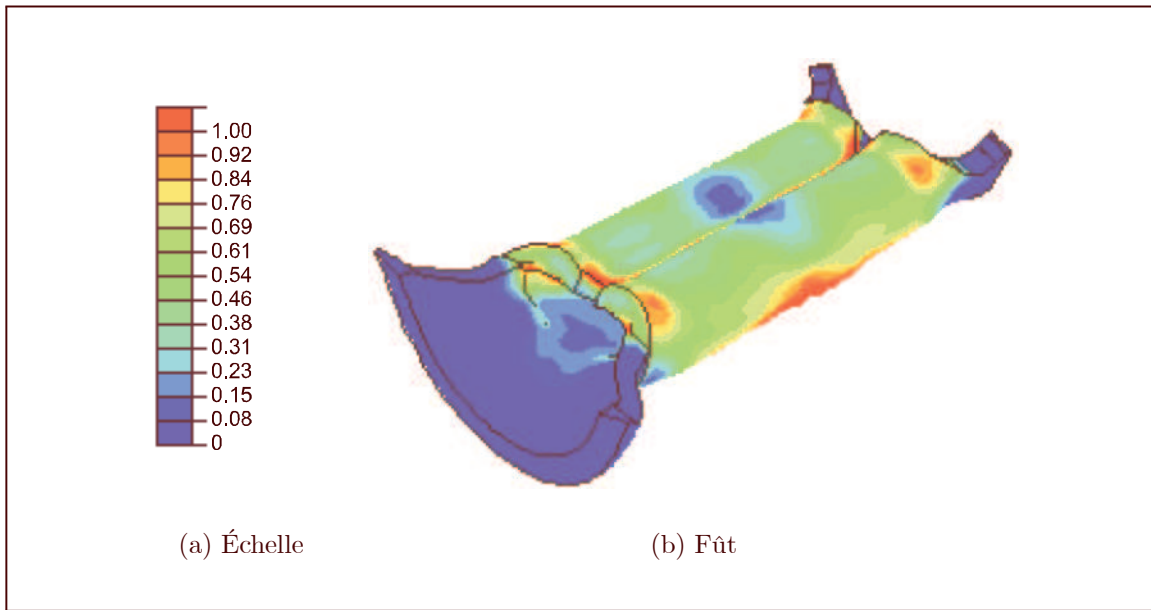


Fig. 4.18: Déformation plastique totale pour le fût sur le modèle 3D complet

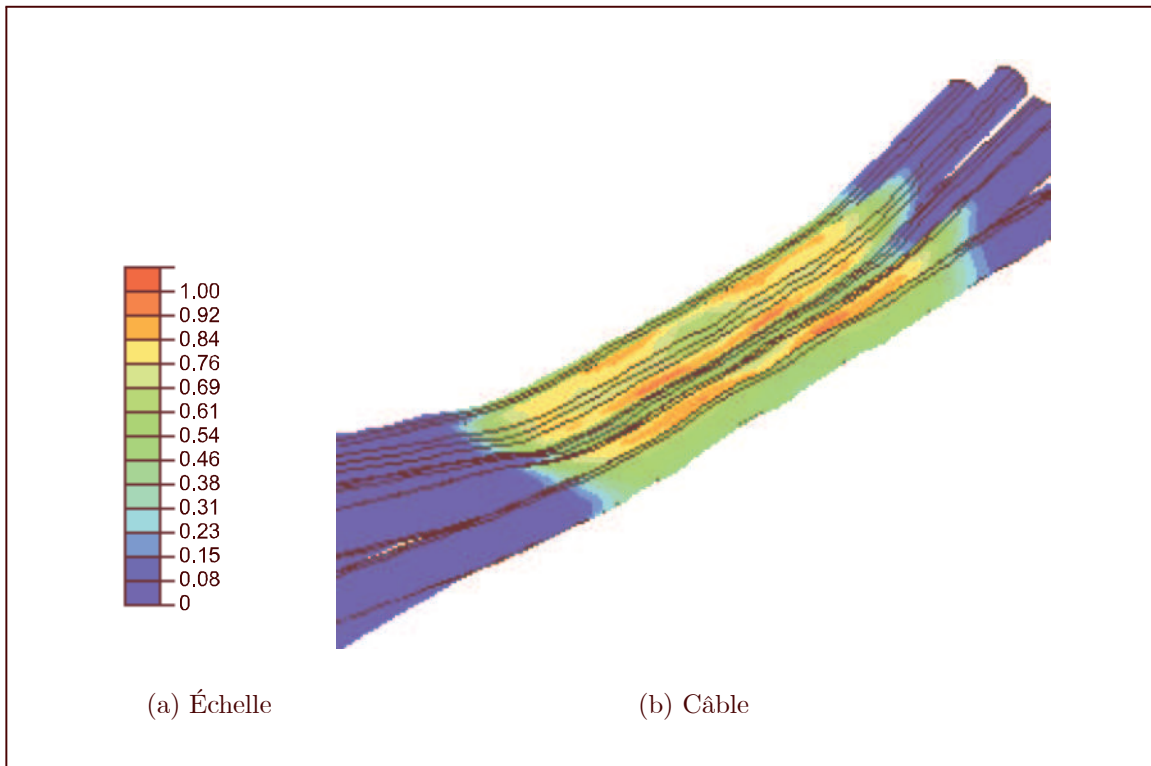


Fig. 4.19: Déformation plastique totale pour le câble sur le modèle 3D complet

Les zones fortement plastifiées se trouvent toujours au niveau du repliement des ailes.

4.2.3.2 Géométrie

Grâce à nos programmes de découpe numérique (voir annexe E), nous pouvons comparer la surface sertie et la surface des ailes finales. Nous pouvons procéder aux coupes à l'extérieur et à l'intérieur des stries sur la figure 4.20.

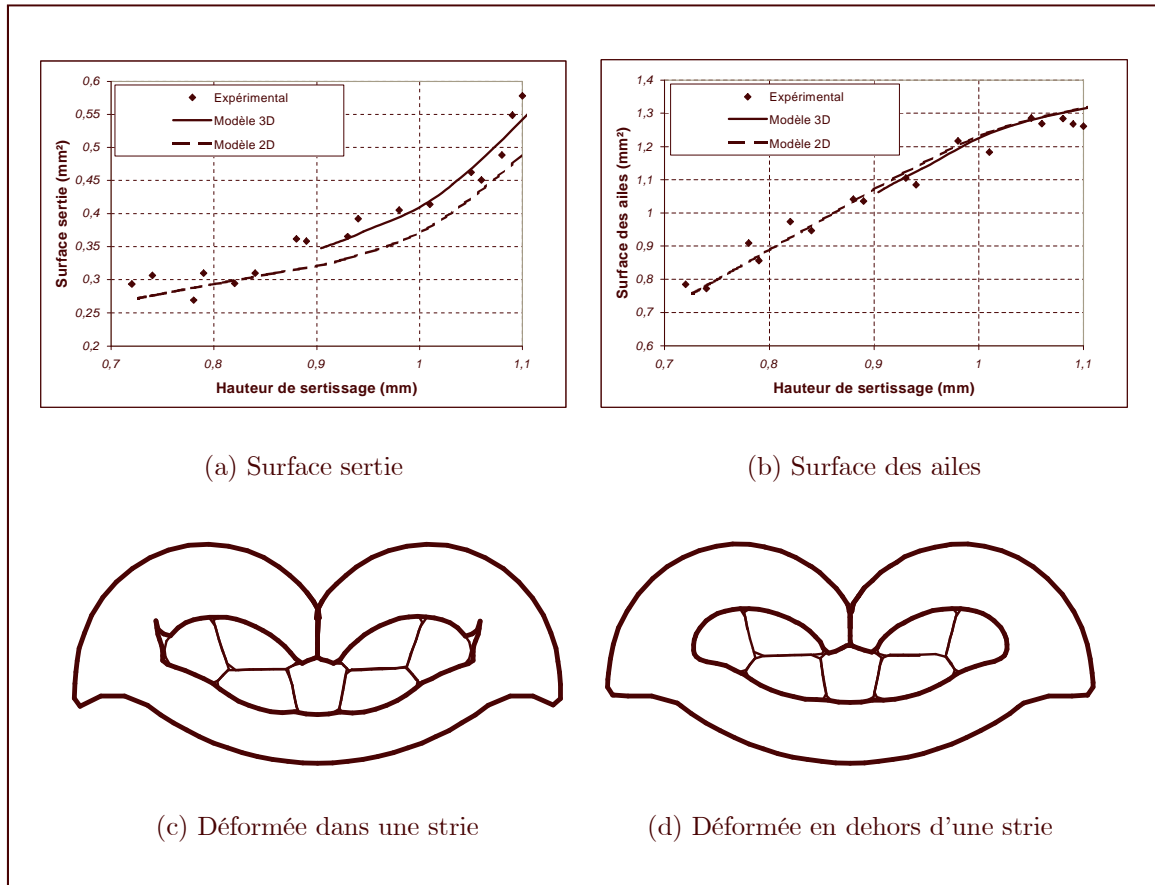


Fig. 4.20: Caractéristiques géométriques finales pour le modèle 3D complet

Par rapport au modèle extrudé, nous pouvons remarquer la meilleure qualité de corrélation vers les grandes hauteurs de sertissage, qui correspondent à un sertissage peu prononcé, avec un faible taux de compression.

4.3 Conclusion

Nous avons démontré que l'analyse tri-dimensionnelle du sertissage était réalisable avec un code de calcul de type explicite. Les résultats présentés permettent de conclure que sa fiabilité est grande en ce qui concerne les surfaces finales et le taux de compression du câble, qui restent les meilleurs indices de la qualité d'un sertissage. Le coefficient de frottement entre le poinçon et les ailes reste aussi important que dans le cas bi-dimensionnel, avec, à la clef, une qualité médiocre de la corrélation de la force de sertissage entre le modèle numérique et le modèle expérimental. Nous avons également démontré que la présence

des stries et des zones de transition améliorerait la qualité des résultats pour les sertissages de faible amplitude, avec un faible taux de compression.

Dans ce chapitre, nous avons présenté des modèles numériques adaptés à la simulation tri-dimensionnelle. Ces modèles sont coûteux en temps de calcul mais apportent des informations supplémentaires sur l'effet des structures topologiques purement tri-dimensionnelles comme les stries ou les chanfreins. Ils permettent également de constater que le taux de compression du câble n'est pas strictement constant sur toute la longueur du fût du sertissage. La performance des simulations est altérée par l'aspect fortement incompressible du modèle et ses conséquences sur le contact. L'apparition concomitante des modes sabliers indésirables doit être contrôlée avec soin.

Chapitre 5

Optimisation des paramètres du sertissage

Nous présentons dans ce chapitre une démarche d'optimisation mathématique couplée à une approche par plans d'expériences en considérant comme variables plusieurs paramètres géométriques du procédé de sertissage. L'optimisation est basée sur le modèle éléments finis présenté au chapitre 3. Après un exposé succinct de la théorie des plans d'expérience, nous décrivons les fonctions objectifs et les paramètres de conception avant de discuter les résultats obtenus. Ce travail a été réalisé en coopération avec Lanouar Ben Ayed (voir [Ben02])

5.1 Éléments théoriques

Lorsque l'on fait appel à la modélisation numérique, nous ne connaissons pas de relations mathématiques explicites reliant les paramètres d'un système physique à sa réponse.

Une stratégie souvent mise en œuvre dans les études d'optimisation consiste à supposer que les réponses sont des fonctions paramétriques, à identifier ces fonctions à l'aide des réponses mesurées ou calculées en quelques points, puis à vérifier *a posteriori* la qualité de l'approximation.

L'expérience et une certaine intuition du problème physique permettent de prévoir de manière suffisamment correcte le type de réponse du problème d'optimisation. Une possibilité pour étudier la sensibilité aux paramètres consiste à utiliser une approche en trois temps :

1. Utilisation d'un plan d'expériences pour tester la dépendance des réponses du système physique vis-à-vis de paramètres choisis.
2. Construction d'une fonction mathématique aussi précise que possible en utilisant des surfaces de réponse de type quadratique.
3. Résolution du problème d'optimisation, avec ses contraintes.

La méthode des plans d'expérience¹⁷ est une méthode générale pour étudier l'influence des facteurs dans une expérience (au sens large du terme). Son but est double :

- Proposer une méthode objective pour limiter au maximum le nombre des expériences et ainsi réduire le coût de réalisation du plan.
- Proposer des outils analytiques et statistiques pour analyser les résultats obtenus.

Il existe beaucoup de plans d'expérience. Ils sont différents selon : l'objectif de l'étude (quantification des effets des facteurs, optimisation, etc.), le nombre et les interactions possibles entre les facteurs, le type des facteurs et leur précision (nombre de niveaux retenus). On utilise des tables prédéfinies comme les tables de Taguchi, les tables de Box ou les tables P&B. Une procédure d'optimisation utilisant les plans d'expérience requiert des conditions minimales pour assurer sa robustesse et son efficacité :

- Les résultats ne doivent pas être trop bruités. En d'autres termes, il faut que la variabilité naturelle des résultats soit limitée. Le résultat d'un calcul par éléments finis est le même d'une exécution à l'autre, nous n'aurons donc pas trop de difficultés pour ce point.
- Les critères d'optimisation ou variables de conception ne doivent pas être trop nombreux. Si on peut les grouper deux par deux, l'interprétation des résultats en est facilitée grâce à une lecture graphique des surfaces de réponses.

5.1.1 Plans d'expérience

5.1.1.1 Terminologie et notation

Dans cette section, nous présentons une série de définitions de base utilisées dans la théorie des plans d'expérience (voir [SSZ98]).

¹⁷en anglais « design of experiments » ou « DOE »

Définition 5 Un facteur est le paramètre que l'on étudie. Sa valeur est appelée niveau.

Définition 6 Une observation est une combinaison de plusieurs niveaux de facteurs.

Définition 7 Le plan d'expériences est la liste des combinaisons de niveau de facteurs.

Définition 8 Un plan est dit factoriel si les niveaux de facteurs sont codés. Généralement, on code les niveaux par 1 et 2 ou par -1 et 1 dans le cas des facteurs à deux niveaux.

Définition 9 Un plan est dit complet si toutes les combinaisons possibles y sont présentes. C'est le cas le plus défavorable du point de vue du coût de réalisation. Un plan complet de n facteurs à k niveaux représente k^n expérience à réaliser.

Définition 10 On appelle ordre d'une action, le niveau considéré d'interaction d'un facteur. Une action d'ordre un traduit l'effet d'un facteur unique sur le résultat. Une action d'ordre deux est l'effet d'une interaction de deux facteurs sur la réponse, etc.

Définition 11 Un plan est dit séquentiel lorsqu'il est possible d'ajouter des nouveaux facteurs sans perdre les résultats des essais déjà effectués.

Le plan d'expériences est formalisé par la matrice des expériences $[U]$ réunissant l'ensemble des p expériences pour n facteurs

$$[U] = \begin{array}{c} \text{Exp. 1} \\ \vdots \\ \text{Exp. } p \end{array} \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \\ \left[\begin{array}{ccc} U_{11} & \cdots & U_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{p1} & \cdots & U_{pn} \end{array} \right] \end{array} \quad (5.1)$$

5.1.1.2 Coordonnées centrées réduites

Les différents facteurs x_i d'un problème physique ne sont généralement pas de la même nature ou de la même amplitude. Il est donc habituel d'utiliser les *coordonnées centrées réduites* x_{ri} , ce qui permet de normaliser les niveaux des facteurs. Le changement de coordonnées se fait en utilisant

$$x_{ri} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{k} \text{ avec } x_{ri} \in [-1; 1] \quad (5.2)$$

$\bar{x}_i = \frac{x_i^{\max} + x_i^{\min}}{2}$ est la moyenne arithmétique des coordonnées réelles
 $k = \frac{x_i^{\max} - x_i^{\min}}{2}$ est le pas

5.1.1.3 Équation du modèle

La loi de comportement relie les n facteurs x_i d'un plan à sa réponse y . Pour un modèle quadratique, on écrit

$$y = c + a_1.x_1 + \cdots + a_n.x_n + A_{12}.x_1.x_2 + \cdots + A_{nn}.x_n.x_n \quad (5.3)$$

Cette équation contient le terme constant c , les termes linéaires a_i et les termes quadratiques A_{nn} . La loi de comportement pour les plans d'expériences classiques est à valeurs

discrètes. Les facteurs sont donc des vecteurs comportant les différents niveaux x_i . On peut écrire la loi de comportement sous forme matricielle

$$y(\{x_1, \dots, x_n\}) = m + \langle a \rangle \cdot \{x\} + \langle x \rangle \cdot [A] \cdot \{x\} \quad (5.4)$$

Dans cette équation, m est la partie moyenne de la réponse, a_i est l'effet moyen du facteur x_i et A_{ij} est la matrice des effets d'interaction entre les facteurs x_i et x_j .

5.1.1.4 Matrice des effets

Nous définissons la matrice des effets $[E]$ comme la matrice qui transforme les coefficients a_i pour donner la réponse y .

$$\{y\} = [E] \cdot \{a\} \quad (5.5)$$

Avec le vecteur des coefficients $\langle a \rangle$

$$\langle a \rangle = \langle c \quad a_1 \quad \dots \quad a_n \quad A_{11} \quad \dots \quad A_{nn} \rangle \quad (5.6)$$

Pour un plan de p expériences et de n facteurs, la matrice $[E]$ vaut

$$[E] = \begin{bmatrix} \underbrace{1}_{\text{Cte}} & \underbrace{U_{11} \quad \dots \quad U_{1n}}_{\text{Linéaire}} & \underbrace{U_{11} \cdot U_{11} \quad \dots \quad U_{1n} \cdot U_{1n}}_{\text{Quadratique}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & U_{p1} \quad \dots \quad U_{pn} & U_{p1} \cdot U_{p1} \quad \dots \quad U_{pn} \cdot U_{pn} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Cette matrice est différente pour chaque plan. Il est important de prendre garde à l'ordre des colonnes de $[E]$ pour rester cohérent avec le vecteur $\langle a \rangle$.

5.1.1.5 Méthode des moindres carrés

Pour calculer les coefficients $\langle a \rangle$, il faut résoudre le système multi-linéaire

$$\{y\} = [E] \cdot \{a\} + \{r\} \quad (5.8)$$

Le vecteur $\{r\}$ représente les résidus, c'est-à-dire l'écart entre la réponse exacte et la réponse approchée. Il s'agit de minimiser cette erreur. Pour cela, nous cherchons le jeu de coefficients $\langle a \rangle$ qui minimise la somme des carrés des écarts $\langle r \rangle \cdot \{r\}$. Cette somme est minimale par rapport aux coefficients $\{a\}$ si

$$\frac{\partial (\langle r \rangle \cdot \{r\})}{\partial \{a\}} = 0 \quad (5.9)$$

La solution approchée $\{\hat{a}\}$ par les moindres carrés est donc

$$\{\hat{a}\} = \left([E]^T \cdot [E] \right)^{-1} \cdot [E]^T \cdot \{y\} \quad (5.10)$$

5.1.1.6 Plans de Doehlert

a Définition

Le plan d'expérience complet est le plus général des plans. Mais il est aussi le plus coûteux dès que l'on a beaucoup de facteurs ou beaucoup de niveaux pour ces facteurs. Pour cinq paramètres à deux niveaux, il faudrait réaliser trente-deux expériences.

Les plans de Doehlert (ou plans hexagonaux) sont des plans particuliers, incomplets, et donc beaucoup moins coûteux. Leur but est d'avoir une répartition uniforme des points dans l'espace des facteurs (voir [Gou99]). On place tous les points à la même distance du centre de l'espace des facteurs. Ils sont donc situés sur le cercle de rayon unité lorsque l'on ramène l'espace des facteurs réel dans l'espace des facteurs réduit (pour deux facteurs) et sur l'hypersphère de rayon unité pour n facteurs. Ils forment un hexagone régulier pour deux facteurs (voir figure 5.1).

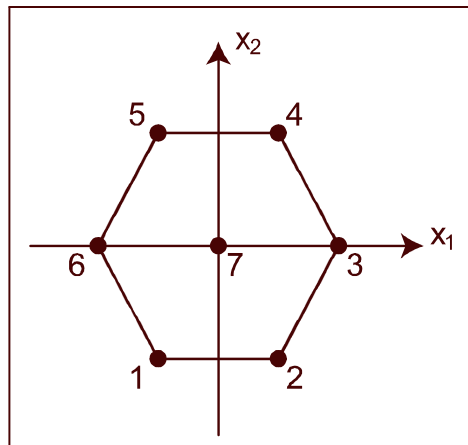


Fig. 5.1: Plan de Doehlert pour deux facteurs

On trouvera dans l'annexe D la table de Doehlert pour cinq facteurs.

b Granularité différentielle

Les plans hexagonaux présentent une différence de granularité des facteurs suivant leur ordre. C'est-à-dire que le nombre de niveaux possibles pour chaque facteur dépend de l'ordre dans lequel on les choisit. Par exemple, pour un plan à deux facteurs, le premier a cinq niveaux et le deuxième a trois niveaux. Cette spécificité implique de considérer attentivement l'importance de ces facteurs. Si le problème se présente, il est tout à fait possible de changer l'ordre des facteurs, ce qui revient à effectuer une rotation de l'hexagone (voir figure 5.2).

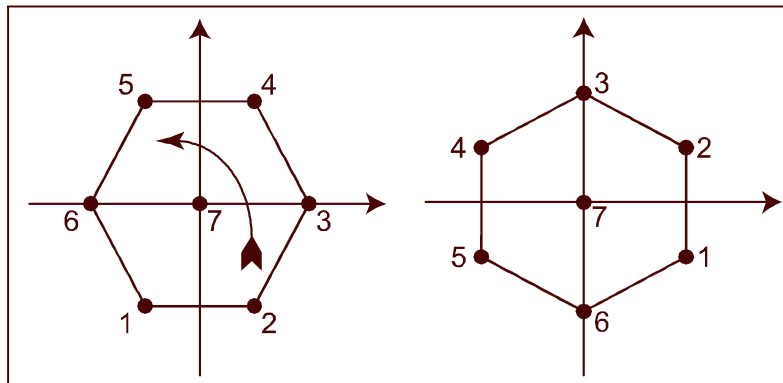


Fig. 5.2: Plan de Doehlert pour deux facteurs - Rotation

Dans ce cas, le premier facteur a trois niveaux et le deuxième a cinq niveaux. Toutefois, si l'on change l'ordre des paramètres, nous sommes obligés de refaire toutes les expériences.

c Séquentialité spatiale

Ces plans sont aussi séquentiels, c'est-à-dire qu'il est possible de rajouter un ou plusieurs facteurs au plan initial sans devoir refaire toutes les expériences. De plus, on peut étendre l'espace des facteurs sans refaire tout le plan. Géométriquement, il est facile d'agrandir le domaine sans perdre la régularité des points expérimentaux et sans perdre toutes les expériences (voir figure 5.3 pour un exemple avec deux facteurs).

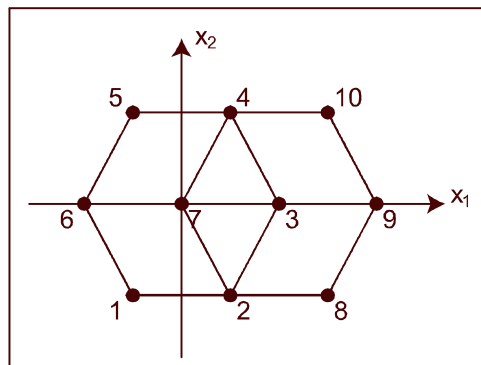


Fig. 5.3: Exploration du domaine pour un plan de Doehlert à deux facteurs

5.1.2 Modèle mathématique des surfaces de réponse

Nous nous limitons à un modèle à n facteurs d'ordre deux, avec interactions. En reprenant l'équation 5.4

$$\tilde{Y}_{app} = b_{x0} + \langle x \rangle \cdot \{b_x\} + \langle x \rangle \cdot [B_x] \cdot \{x\} \quad (5.11)$$

L'analyse graphique des résultats est impossible dès qu'il y a plus de deux facteurs. Cependant, dans le cas où le modèle est quadratique en fonction des facteurs, on peut utiliser une technique de réduction que l'on appelle analyse canonique.

5.1.2.1 Analyse canonique

L'analyse canonique consiste à faire subir aux points une série de transformations géométriques pour simplifier le système quadratique. Ces simplifications sont

- Une rotation autour de l'origine O pour obtenir une matrice $[B_z]$ diagonale

$$\tilde{Y}_{app} = b_{z0} + \langle z \rangle \cdot \{b_z\} + \langle z \rangle \cdot [B_z] \cdot \{z\} \quad (5.12)$$

- Une translation pour déplacer l'origine du repère au sommet S du repère canonique, ce qui élimine les termes linéaires de l'équation 5.4 et se ré-écrit

$$\tilde{Y}_{app} = b_{w0} + \langle w \rangle \cdot [B_w] \cdot \{w\} \quad (5.13)$$

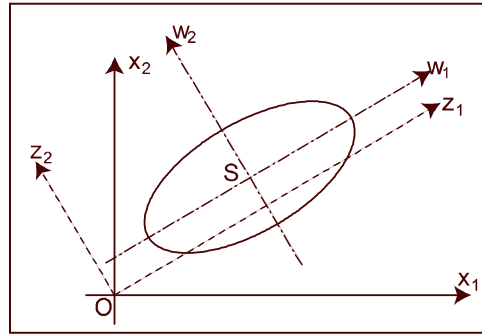


Fig. 5.4: Transformations canoniques

Sur la figure 5.4, on peut voir les différents repères et les passages de l'un à l'autre

$$(x_1, x_2) \xrightarrow{R} (z_1, z_2) \xrightarrow{T} (w_1, w_2) \quad (5.14)$$

Il existe plusieurs manières de mener ces simplifications. On parle d'analyse canonique R lorsque l'on ne fait qu'une rotation et d'analyse canonique RT lorsque l'on fait une rotation et une translation. Le choix du type d'analyse dépend de la position du sommet S. S'il est en dehors du domaine d'étude, on ne fait qu'une analyse R, sinon, on fait une analyse RT.

a Sommet de la canonique.

Le sommet de la canonique est l'endroit où les dérivées partielles de la réponse y par rapport aux facteurs $\{x\}$ s'annulent. Il constitue donc un minimum local, un maximum local ou un point selle. Les coordonnées du sommet $\{x^S\}$ s'écrivent en dérivant (5.11) par rapport aux $\{x\}$

$$\{x^S\} = -\frac{1}{2} \cdot [B_x]^{-1} \cdot \{b_x\} \quad (5.15)$$

La distance d_{OS} entre l'origine O et le sommet S de la canonique s'écrit donc

$$d_{OS} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^S)^2} \quad (5.16)$$

Dans le cas des domaines sphériques (plans de Doehlert), pour savoir s'il faut mener une analyse R ou RT, il suffit de comparer cette distance avec le rayon du domaine d'étude α . Si $d_{OS} < \alpha$, il faudra utiliser une analyse RT car le sommet du repère canonique sera à l'intérieur du domaine d'étude.

b Analyse canonique R

La rotation de l'analyse canonique R transforme les axes du repère initial (x_1, x_2) en les rendant parallèles à ceux du repère canonique (z_1, z_2) . Pour faire ce changement, il faut calculer les vecteurs propres $[M]$ de la matrice des effets d'interaction $[B_x]$ entre les facteurs et nous avons

$$\{x\} = [M] \cdot \{z\} \quad (5.17)$$

Cette matrice est orthogonale puisqu'elle exprime une rotation pure et donc

$$[M]^{-1} = [M]^T \quad (5.18)$$

Les coordonnées du sommet canonique se ré-écrivent dans le repère (z_1, z_2)

$$\{z^S\} = -\frac{1}{2} \cdot [M]^T \cdot [B_x]^{-1} \cdot \{b_x\} \quad (5.19)$$

Les valeurs propres λ_i de la matrice $[B_x]$ donnent des indications sur les extrémums de la réponse y .

- Si $\lambda_i > 0$, y présente un minimum dans la direction de l'axe z_i .
- Si $\lambda_i < 0$, y présente un maximum dans la direction de l'axe z_i .
- Si λ_i est petit, la surface de réponse a une faible courbure dans la direction de l'axe z_i .
- Si λ_i est grand, la surface de réponse a une forte courbure dans la direction de l'axe z_i .

La réponse y s'écrit

$$\tilde{Y}_{app} = b_{z0} + \langle z \rangle \cdot \{b_z\} + \langle z \rangle \cdot [B_z] \cdot \{z\} \quad (5.20)$$

Le vecteur $\{b_z\}$ représente les coefficients des variables du premier degré exprimés dans le repère R

$$\{b_z\} = [M]^T \cdot \{b_x\} \quad (5.21)$$

La matrice $[B_z]$ représente les coefficients des termes quadratiques et cette matrice est purement diagonale

$$[B_z] = [M]^T \cdot [B_x] \cdot [M] \quad (5.22)$$

c Analyse RT

La rotation se fait comme indiqué dans le paragraphe précédent. La translation s'exprime par

$$\{w\} = \{z\} - \{z^S\} \quad (5.23)$$

La réponse y s'écrit

$$\tilde{Y}_{app} = b_{w0} + \langle w \rangle \cdot \{b_w\} + \langle w \rangle \cdot [B_w] \cdot \{w\} \quad (5.24)$$

Le terme constant b_{w0} vaut

$$b_{w0} = b_{x0} + \langle z^S \rangle \cdot [M]^T \cdot \{b_x\} + \langle z^S \rangle \cdot [B_w] \cdot \{z^S\} \quad (5.25)$$

Les termes du premier degré sont

$$\{b_w\} = [M]^T \cdot \{b_x\} + [M]^T \cdot [B_x] \cdot [M] \cdot \{z^S\} + [M]^T \cdot [B_x]^T \cdot [M] \cdot \{z^S\} \quad (5.26)$$

Cette relation se simplifie et on peut démontrer que

$$\{b_w\} = \{0\} \quad (5.27)$$

Les termes du second degré

$$[B_w] = [M]^T \cdot [B_x] \cdot [M] \quad (5.28)$$

Tout comme dans le cas de l'analyse canonique R , la matrice $[B_w]$ est purement diagonale.

5.1.3 Procédure d'optimisation sous contraintes

Le problème d'optimisation s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{minimiser } f(\{x\}) = [f_1(\{x\}), \dots, f_{n_f}(\{x\})]$$

$$\text{avec } \begin{cases} g_i(\{x\}) \leq 0 \text{ tel que } 1 \leq i \leq p \\ g_j(\{x\}) = 0 \text{ tel que } p + 1 \leq j \leq n_c \end{cases}$$

On considère donc n_f fonctions objectifs et n_c contraintes. La méthode originale d'optimisation sous contrainte développée par Ben Ayed ([Ben02]) fait appel à l'analyse canonique et à un algorithme spécialement développé. Les contraintes introduites dans le problème d'optimisation sont considérées comme des fonctions objectifs supplémentaires

5.1.3.1 Fonction d'adaptation

Pour éviter les problèmes d'échelle liées à l'utilisation de fonctions objectifs différentes en nature et en amplitude, il est nécessaire de normaliser ces fonctions. On prend comme référence commune l'intervalle $[0; 1]$ où la valeur 0 correspond à une solution parfaite et 1 à une solution totalement inadaptée. Cette fonction d'adaptation est différente selon qu'il s'agit de minimiser ou de maximiser la fonction objectif.

5.1.3.2 Algorithme d'optimisation

Nous sommes passés d'un algorithme de minimisation d'une fonction objectif avec contraintes à un problème d'optimisation multicritères. L'optimisation se fera sur une somme pondérée des fonctions d'adaptation

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \tilde{Y}_i \text{ avec } \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \quad (5.29)$$

Le choix des poids ω_i dépend de l'importance à donner à chacun des objectifs. L'algorithme d'optimisation est de type gradient canonique à pas variable. Le principe est simple. Les propriétés des directions de descente sont données par l'analyse des valeurs propres. Nous accélérons quand la valeur propre est grande et nous ralentissons dans le cas contraire. Cette méthode a été validée sur l'exemple classique de la fonction selle qui est un exemple particulièrement contraignant pour les problèmes d'optimisation. L'algorithme complet part de l'expression canonique de la surface de réponse \tilde{Y}_{app} . On note les itérations d'optimisation par l'exposant k . Si l'on s'intéresse à un facteur on le note z_i . L'algorithme utilise un système de pas adaptatif. Le pas, noté $\{p\}$ évolue suivant la vitesse de descente.

Initialiser: Initialisation des paramètres

Point de départ : $\{z\}^0$

Pas initial : $\{p\}^0$

Pas minimum : $\{p^{\min}\}$

Coefficient d'accélération du pas : m

- 1: Calcul des valeurs propres $\{\lambda\}$, des vecteurs propres $[M]$ et des coordonnées du point stationnaire $\{z^S\}$
- 2: Classement des directions par ordre décroissant suivant les valeurs absolues des dérivées partielles au point $\{z\}^k$. On utilise pour cela, les valeurs propres $\{\lambda\}$
- 3: Déplacement suivant la direction de la plus forte pente
 $\{z\}^{k+1} = \{z\}^k \pm \{p^N\}$
 Le choix du signe :
 - Si $\lambda_i > 0$ et $z_i^k > z_i^S$ alors le signe est –
 - Si $\lambda_i < 0$ et $z_i^k < z_i^S$ alors le signe est –
 - Si $\lambda_i > 0$ et $z_i^k < z_i^S$ alors le signe est +
 - Si $\lambda_i < 0$ et $z_i^k > z_i^S$ alors le signe est +
- 4: Test de la position de z_i^{k+1} par rapport à z_i^S .
 - Si $p_i^N > p_i^{\min}$, on se déplace dans la même direction avec un pas plus petit $p_i^{N+1} = \frac{p_i^N}{m}$ puis retour en 3
 - Sinon, tant que $i < n$ nombre de facteurs, on change la i -ème direction, $i = i + 1$ puis retour en 3

5: Test de vérification du domaine

Si on atteint la frontière du domaine, on remplace le point par sa projection dans le domaine.

6: Test de fin d'algorithme

$$e = \left(\tilde{Y}^{k+1} - \tilde{Y}^k \right)$$

- Si $e < 10^{-6}$ arrêt
 - Sinon, $k = k + 1$ et retour en 2
-
-

5.2 Description du problème d'optimisation

5.2.1 Paramètres

Nous avons fixé a priori cinq paramètres géométriques (voir 5.5) : le rayon de l'enclume R_e , la longueur développée L_d , l'épaisseur du matériau e_1 , la largeur du poinçon w_p et le rayon du poinçon R_p .

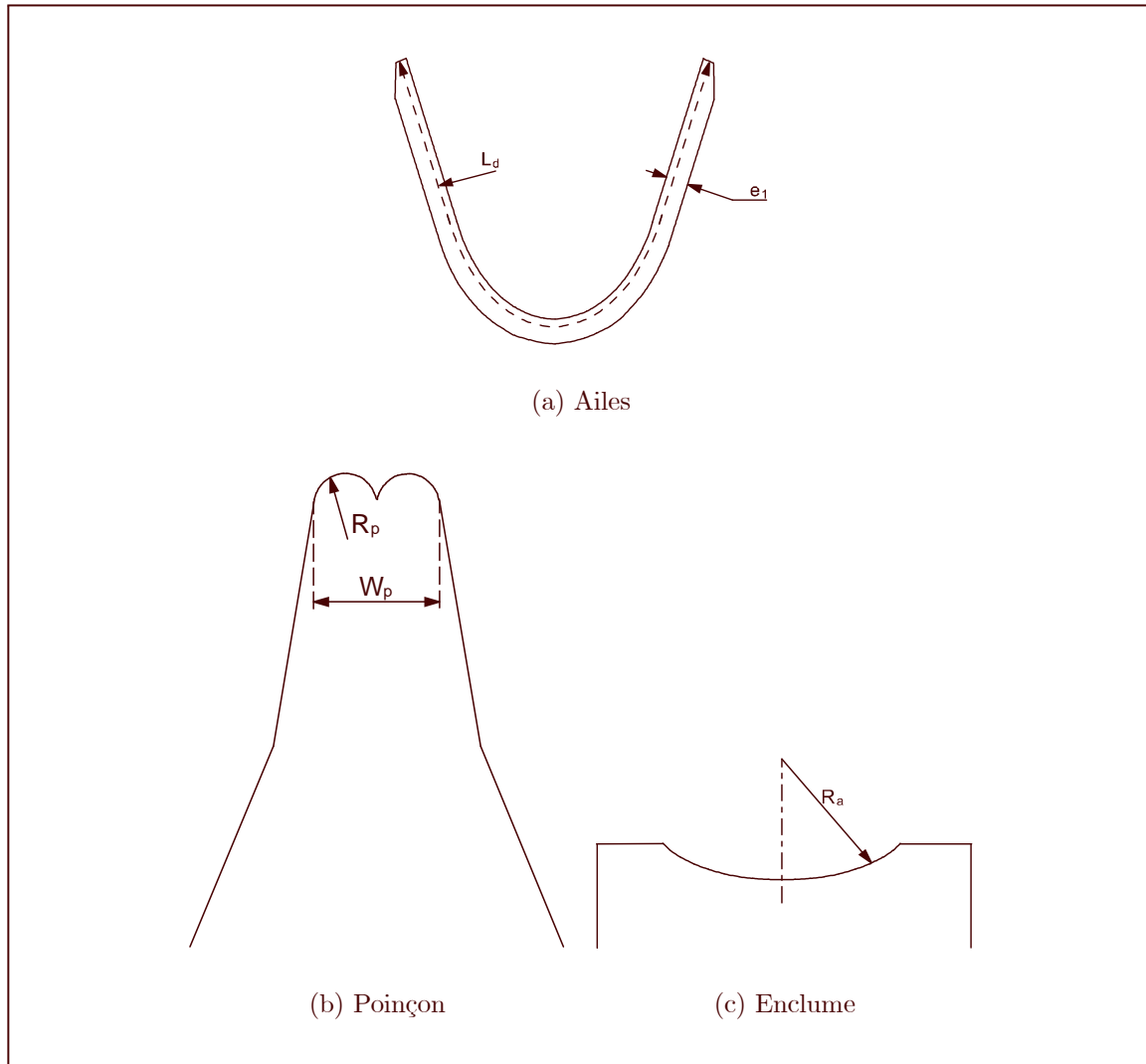


Fig. 5.5: Paramètres d'optimisation

Les premières simulations effectuées ont montré que le paramètre R_p a une grande influence sur la forme finale du sertissage. Seul un faible rayon du poinçon assure le guidage correct des ailes et permet de respecter la symétrie. De plus, ce rayon est fixé par la largeur du poinçon et les contraintes de tangence, il faut que $R_p < 4.w_p$. Ces restrictions nous ont fait abandonner le paramètre R_p .

5.2.2 Fonctions objectives

L'objectif principal est de respecter un taux de compression du câble compris entre 15% et 30% pour une distance x entre les ailes et le fond égale à l'épaisseur du matériau (voir figure 5.6).

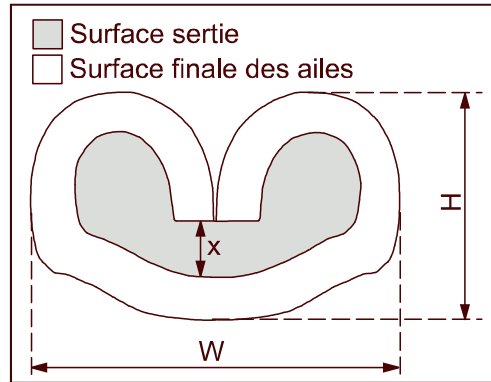


Fig. 5.6: Forme finale du sertissage en B

Cette contrainte est notée Y_1 . Nous la transformons en fonction objectif, via une fonction d'adaptation \tilde{Y}_1 que l'on écrit

$$\tilde{Y}_1 = \begin{cases} \frac{(Y_1 - 0,15)^2}{Y_{1,\max}} & \text{si } Y_1 \leq 0,15 \\ 0 & \text{si } 0,15 \leq Y_1 \leq 0,30 \\ \frac{(Y_1 - 0,3)^2}{Y_{1,\max}} & \text{si } Y_1 \geq 0,30 \end{cases} \quad (5.30)$$

La seconde contrainte est de maximiser la surface de contact entre les torons et l'aile. La fonction d'adaptation s'écrit

$$\tilde{Y}_2 = \frac{Y_{2,\min}}{Y_2} \quad (5.31)$$

La dernière contrainte est de minimiser la surface des trous

$$\tilde{Y}_3 = \frac{Y_3}{Y_{3,\max}} \quad (5.32)$$

Ces trois fonctions d'adaptation sont représentés sur la figure 5.7.

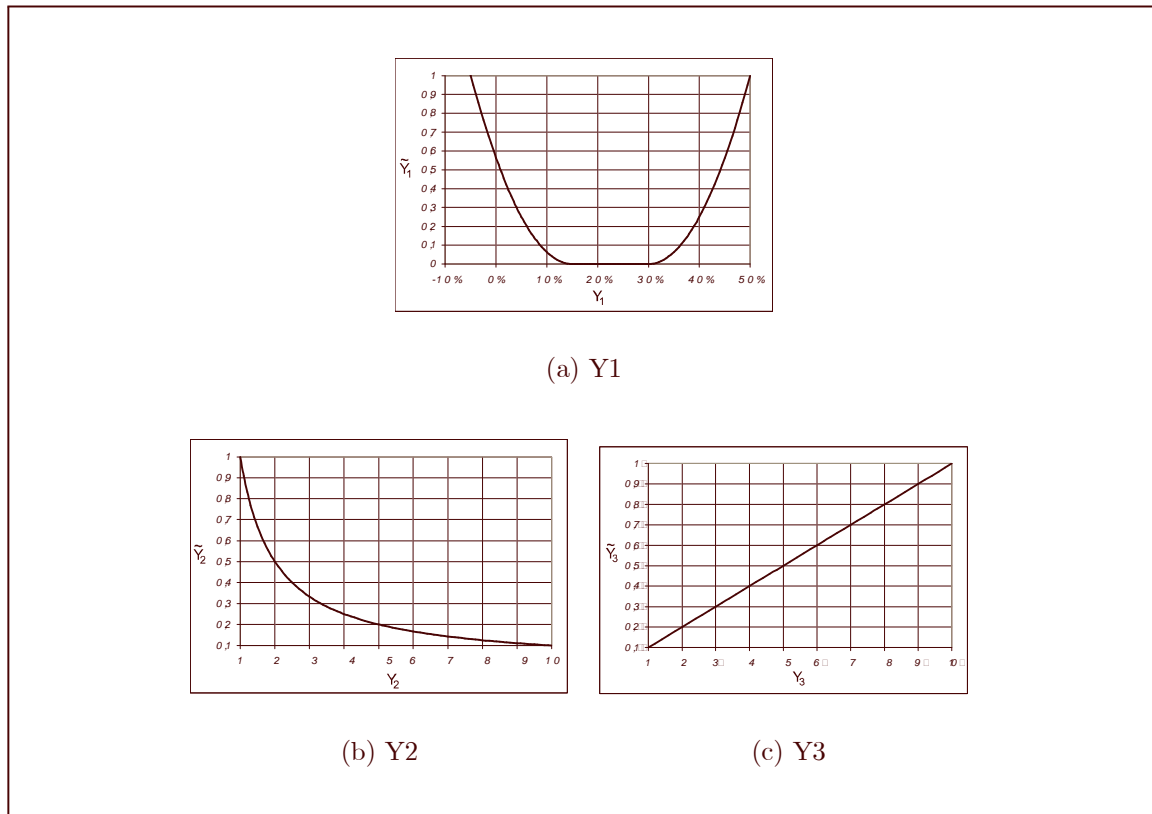


Fig. 5.7: Fonctions d'adaptation

5.3 Résultats

Nous avons réalisé cinq plans d'expériences successifs. Ces plans d'expériences sont de type Doehlert à quatre paramètres et impliquent la réalisation de 21 calculs bi-dimensionnels du sertissage, suivant la procédure générale décrite dans le chapitre 3.

Les calculs ont été menés sur un câble de $0,35 \text{ mm}^2$.

5.3.1 Plan de dépouillement

5.3.1.1 Domaine de recherche

Le domaine de recherche du premier plan d'expérience a été fixé dans le tableau 5.1.

	R_e	L_d	e_1	W_p
Limite inférieure	1	4,0	0,2	1,8
Limite supérieure	2	5,5	0,4	2,2

Tab. 5.1: Espace de recherche des paramètres

5.3.1.2 Surface de réponse

Le modèle de prédiction obtenu est le suivant (pour calculer les différentes quantités, voir la section 5.1.2)

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{app.} = & 0,288 + \langle x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} 0,08 \\ 0,43 \\ -0,17 \\ 0,118 \end{Bmatrix} \\ & + \langle x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \rangle \cdot \begin{bmatrix} -0,041 & 0,1 & -0,048 & -0,005 \\ 0,1 & 0,18 & -0,16 & 0,085 \\ -0,048 & -0,16 & 0,015 & -0,087 \\ -0,005 & 0,085 & -0,087 & -0,007 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Le point stationnaire dans le repère canonique vaut

$$\langle x_s \rangle = \langle 1,127 \ 0,631 \ 1,453 \ -2,503 \rangle \quad (5.34)$$

Il est en dehors du domaine d'étude. Nous orientons donc l'analyse vers la méthode canonique R. En calculant les valeurs propres

$$\langle \lambda \rangle = \langle 0,352 \ -0,005 \ -0,088 \ -0,106 \rangle \quad (5.35)$$

et les vecteurs propres de la matrice $[B]$

$$[V] = \begin{bmatrix} 0,255 & -0,535 & -0,535 & -0,606 \\ 0,780 & -0,283 & 0,021 & 0,557 \\ -0,486 & -0,268 & -0,608 & 0,567 \\ 0,300 & 0,752 & -0,586 & 0,015 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Nous ré-écrivons le modèle de prédiction dans le repère canonique

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{app.} = & 0,288 + \langle z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} 0,476 \\ -0,032 \\ -0,093 \\ 0,001 \end{Bmatrix} \\ & + \langle z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \rangle \cdot \begin{bmatrix} 0,352 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,106 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.3.1.3 Analyse canonique

Le point stationnaire dans le repère canonique vaut

$$\langle z_s \rangle = \langle -0,678 \ -3,051 \ -0,006 \ 0,531 \rangle \quad (5.38)$$

L'analyse des valeurs propres permet de conclure :

- La valeur propre suivant l'axe $R1$ est importante et positive (elle vaut 0,353), ce qui signifie que la réponse varie fortement et passe par un minimum dans le repère canonique.
- La valeur propre suivant l'axe $R2$ est très faible et négative (elle vaut $-0,005$), ce qui signifie que la réponse est pratiquement constante et passe par un maximum dans le repère canonique.
- La valeur propre suivant l'axe $R3$ est faible et négative (elle vaut $-0,088$), ce qui signifie que la réponse est de très faible courbure et passe par un maximum dans le repère canonique.
- La valeur propre suivant l'axe $R4$ est faible et négative (elle vaut $-0,106$), ce qui signifie que la réponse est de faible courbure et passe par un maximum dans le repère canonique.

On peut utiliser une représentation graphique suivant chacun des axes canoniques pour faciliter l'interprétation des résultats. Le domaine de variation dans le repère canonique étant le même pour chacun des axes, on peut même superposer les courbes sur le même système d'axes (voir figure 5.8).

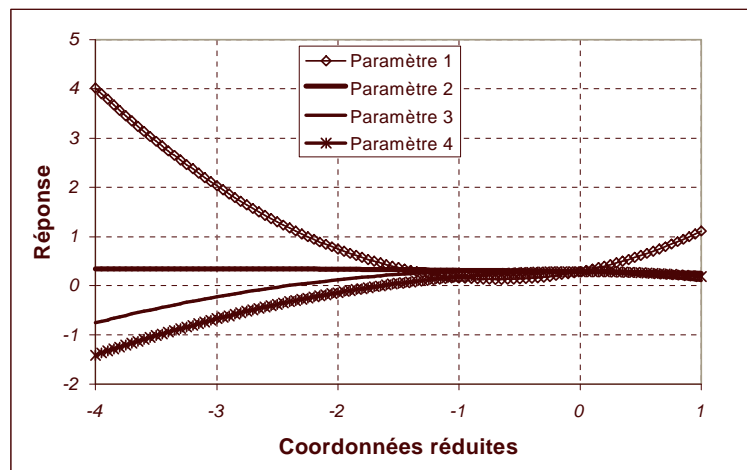


Fig. 5.8: Fonctions d'adaptation du premier plan d'expériences

De manière générale, la réponse varie peu dans le domaine principal $[-1; 1]$ pour chacun des paramètres.

5.3.1.4 Optimisation

Le problème d'optimisation à trois fonctions objectif est transformé en un problème mono-objectif par la combinaison des trois fonctions d'adaptation

$$\text{Min} \left(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3 \right) \Rightarrow \text{Min} \left(\tilde{Y}_i \right) \text{ avec } \tilde{Y}_i = f \left(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3 \right) \quad (5.39)$$

Nous avons le résultat du premier plan pour les trois fonctions d'adaptation \tilde{Y}_1 , \tilde{Y}_2 et \tilde{Y}_3 . Nous avons étudié trois cas

$$\begin{cases} \tilde{Y}_a = \frac{1}{2} \cdot (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2) \\ \tilde{Y}_b = \frac{1}{2} \cdot (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_3) \\ \tilde{Y}_c = \frac{1}{3} \cdot (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_3) \end{cases} \quad (5.40)$$

Le minimum de ces trois fonctions est le même et vaut

$$\langle \tilde{x}^I \rangle = \langle 1,0 \quad 4 \quad 0,2 \quad 1,8 \rangle \quad (5.41)$$

Ce point est à la limite du domaine de recherche, ce qui est fréquent dans un problème d'optimisation. Les trois fonctions objectives globales valent

$$\langle \tilde{Y}^I \rangle = \langle 0,36 \quad 8,276 \quad 0,018 \rangle \quad (5.42)$$

Soit un taux de compression de 36%, une surface de contact de 8,276 mm² et une surface de trous de 0,018 mm². La solution est reportée sur la figure 5.9.

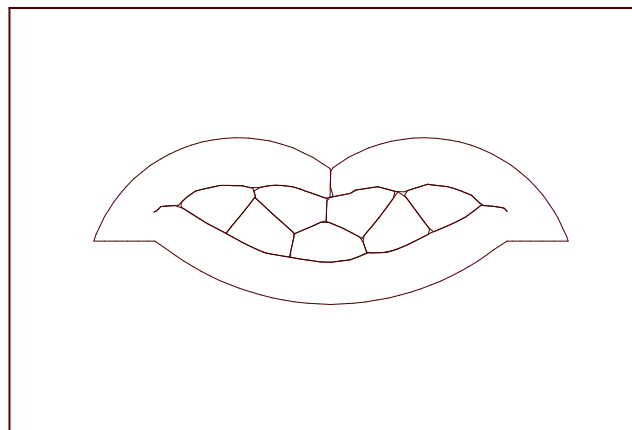


Fig. 5.9: Géométrie optimale pour le plan d'expérience I

Ce premier résultat nous permet de cerner le point optimal. Pour trouver un meilleur point, on peut réduire le domaine de recherche.

5.3.2 Plan de raffinement

Nous nous contentons de réduire le domaine de variation des paramètres (voir table 5.2).

	\mathbf{R}_e	\mathbf{L}_d	\mathbf{e}_1	\mathbf{W}_p
Limite inférieure	1	4,0	0,2	1,8
Limite supérieure	1,5	4,375	0,3	2,0

Tab. 5.2: Espace de recherche des paramètres pour le plan II

L'ensemble des résultats numériques se trouve en annexe. Les résultats optimaux sont dans la table 5.3.

	\tilde{Y}_a^{II}	\tilde{Y}_b^{II}	\tilde{Y}_c^{II}
\mathbf{R}_e (mm)	1	1	1
\mathbf{e}_1 (mm)	0,2	0,2	0,2
\mathbf{L}_d (mm)	4	4	4
\mathbf{W}_p (mm)	1,9448	1,938	1,942
\tilde{Y}_1^{II} (%)	28,5	27,6	25,5
\tilde{Y}_2^{II} (mm ²)	9,38	8,93	9,04
\tilde{Y}_3^{II} (mm ²)	0,0282	0,029	0,03

Tab. 5.3: Résultats pour le plan II

. Nous remarquons immédiatement que le seul paramètre ayant été modifié est la largeur du poinçon La solution est reportée sur la figure 5.10.

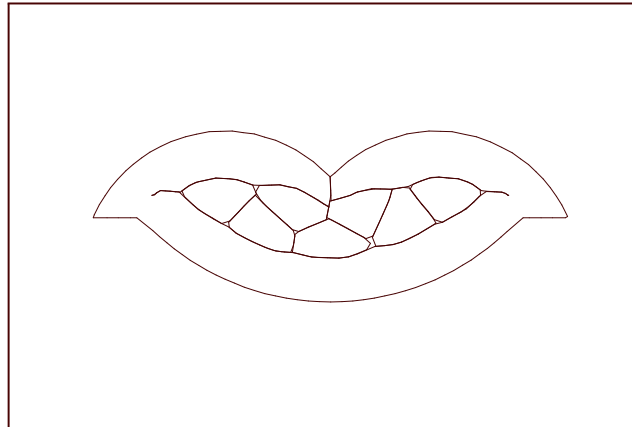


Fig. 5.10: Géométrie optimale pour le plan d'expérience II

5.3.3 Plan étendu

L'analyse des plans précédents par des spécialistes du sertissage a révélé que la présence de plis sur les ailes était à bannir (voir figure 5.11).

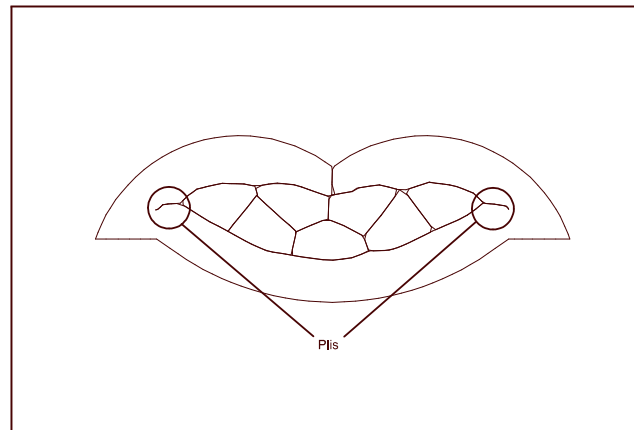


Fig. 5.11: Plis sur les ailes

Nous avons donc ajouté une quatrième contrainte qui consiste à avoir une longueur de pli L_p inférieure à un tiers de l'épaisseur du matériau e_1 , soit la fonction d'adaptation \tilde{Y}_4

$$\tilde{Y}_4 = \begin{cases} 0 & \text{si } L_p < \frac{e_1}{3} \\ \frac{(L_p - \frac{e_1}{3})}{\max(L_p - \frac{e_1}{3})} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.43)$$

La nouvelle fonction objectif globale vaut

$$\tilde{Y}_d = \frac{1}{4} \cdot (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_3 + \tilde{Y}_4) \quad (5.44)$$

Les résultats optimaux sont dans la table 5.4.

	\tilde{Y}_d^{III}
\mathbf{R}_e (mm)	1
\mathbf{e}_1 (mm)	0,225
\mathbf{L}_d (mm)	4,05
\mathbf{W}_p (mm)	1,8
\tilde{Y}_1^{III} (%)	27,7
\tilde{Y}_2^{III} (mm ²)	8,56
\tilde{Y}_3^{III} (mm ²)	0,027
\tilde{Y}_4^{III} (mm)	0,078

Tab. 5.4: Résultats pour le plan III

La solution est reportée sur la figure 5.12.

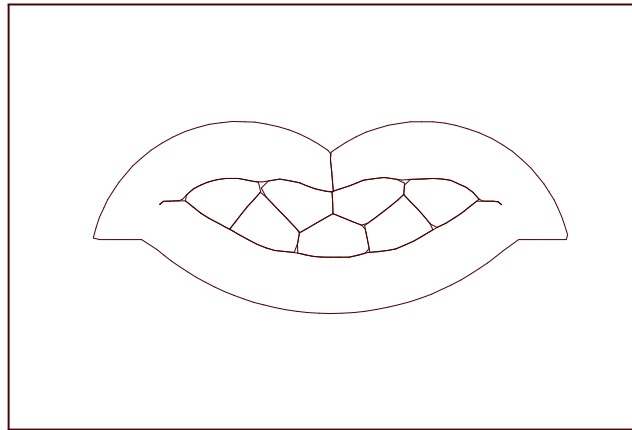


Fig. 5.12: Géométrie optimale pour le plan d'expérience III

On peut trouver un meilleur résultat en changeant une nouvelle fois l'espace de recherche et nous obtenons un nouvel optimum dans la table 5.5.

	\tilde{Y}_d^{IV}
\mathbf{R}_e (mm)	0,9
\mathbf{e}_1 (mm)	0,2
\mathbf{L}_d (mm)	3,3
\mathbf{W}_p (mm)	1,5
\tilde{Y}_1^{IV} (%)	29
\tilde{Y}_2^{IV} (mm ²)	8,18
\tilde{Y}_3^{IV} (mm ²)	0,028
\tilde{Y}_4^{IV} (mm)	0

Tab. 5.5: Résultats pour le plan IV

On voit bien sur la figure 5.13 que les plis ont pratiquement disparu mais qu'il y a peu de contact entre les extrémités des ailes repliées.

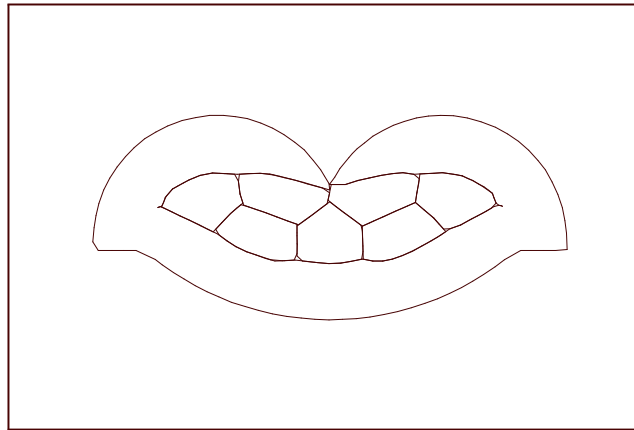


Fig. 5.13: Géométrie optimale pour le plan d'expérience IV

5.4 Conclusion

Pour les objectifs fixés *a priori*, la longueur développée optimale est inférieure à celle que l'on utilise actuellement. Mais l'optimisation n'a été menée que sur une taille de câble alors que la géométrie des ailes (dont la longueur développée) est identique pour plusieurs câbles. Nous observons aussi qu'un sertissage optimal minimise l'épaisseur du matériau utilisé. Cependant, nous n'avons mis aucune contrainte sur la qualité mécanique du sertissage et nous ne pouvons dire qu'une telle épaisseur est suffisante (possibilités de fissuration).

Enfin, l'objectif de minimiser la longueur des plis implique que les extrémités des ailes ont du mal à se rejoindre, ce qui est dommageable pour la qualité du sertissage. Il est possible d'ajouter une contrainte de longueur minimale pour ce contact entre les deux ailes.

Nous avons développé dans ce chapitre une méthodologie rationnelle et efficace pour obtenir la géométrie optimale d'un sertissage. Elle dépend des paramètres que l'on retient et des objectifs que l'on veut atteindre. En effet, cet optimal ne l'est que vis-à-vis de critères de qualité, qui, même s'ils sont frappés du coin du bon sens, restent arbitraires. À cet égard, on peut souligner qu'aucun critère de défaillance mécanique n'a été pris en compte, ce qui explique, par exemple, que pratiquement tous les points optimaux trouvés donnent une épaisseur minimale de la matière. Il convient aussi d'ajouter que nous nous sommes limités à une seule taille de câble, alors qu'il est d'usage de sertir plusieurs sections avec la même géométrie d'aile et d'outils. Toutefois, il est facile de ré-utiliser l'ensemble des outils développés pour atteindre cet objectif d'optimisation plus global.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1 Conclusion

Cette étude nous a permis d'étudier de manière systématique le sertissage d'un connecteur électrique de type « fût fermé en B ». Ce travail a été aussi l'occasion d'effectuer une synthèse des résultats connus sur le sertissage. Cette étude bibliographique a permis de produire des documents extrêmement utiles et de concevoir une base de données aussi complète que possible sur le sujet. L'approche par projet a été bénéfique dans l'optique d'une généralisation et de l'interaction des grands domaines scientifiques concernés par le sertissage.

Les travaux présentés et développés à l'occasion de cette thèse ont été ou sont en cours de transfert dans les différentes unités du groupe FCI, ce qui représente l'archétype d'un travail scientifique en symbiose avec une problématique industrielle.

L'objectif final étant de toujours proposer un triptyque Modélisation Validation Automatisation : modélisation du problème physique par une méthode de simulation numérique, validation des résultats par des tests expérimentaux et automatisation de la méthode employée pour une utilisation orientée vers la conception-production.

Le sertissage est un problème fortement non-linéaire dans les trois axes : grandes déformations, loi de comportement non-linéaire, conditions de contact-frottement évolutives. Ce problème est donc non-trivial et demandait une grande rigueur dans sa résolution. Le choix d'utiliser un logiciel commercial (ABAQUS) plutôt que de développer un logiciel spécifique est donc à la fois un objectif de facilité lors du transfert des méthodes en entreprise et un gain de temps dans la résolution du problème.

Le choix d'un algorithme de type dynamique explicite a été motivé par les aspects très fortement non-linéaires comme la multitude de contact possible entre les différentes entités de l'assemblage. Grâce au développement de modèles plus évolués en utilisant un logiciel de type statique implicite, nous avons démontré la validité du choix de nos hypothèses, surtout en matière de discrétisation spatio-temporelle. Nous rappelons les principales hypothèses retenues dans la modélisation :

- Processus quasi-statique ou dynamique lent. La vitesse du poinçon doit être limitée à 10 m/s.
- Hypothèses des contraintes planes avec loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope non-linéaire.

- Loi de frottement de type Coulomb solide.
- Éléments quadrilatéraux ou hexahédriques à intégration réduite avec contrôle des modes sabliers.

Ces modèles numériques ont été automatisés grâce à l'utilisation des outils modernes de l'informatique comme le langage Python et des programmes en C++.

Nous avons vu qu'un modèle bi-dimensionnel est une bonne approximation de la géométrie finale du sertissage. La validation expérimentale du modèle est très correcte et nous donne toute confiance pour réaliser des études systématiques du sertissage.

Grâce à cette méthode globale de résolution du problème de sertissage, nous avons pu développer un projet d'optimisation, au sens mathématique du terme, des paramètres du sertissage. Tout comme pour la modélisation, nous avons adopté une démarche systématique de résolution du problème. Pour l'optimisation, nous avons donc des outils simples et robustes : plans d'expériences, surfaces de réponse et algorithme d'optimisation. Nous avons également eu l'occasion de faire appel à notre base de données et à l'expérience accumulée pendant l'étude pour évaluer la pertinence des paramètres retenus ou pour choisir les objectifs à atteindre. Tout ceci nous donne à la fois des pistes pour trouver le sertissage optimal et les moyens de l'obtenir.

Enfin, la troisième partie du travail a permis de démontrer que les algorithmes de type dynamique explicite étaient les seuls raisonnablement utilisables pour de tels problèmes de formage de métaux, aux composantes non-linéaires, surtout en ce qui concerne les conditions de contact. Les modèles tri-dimensionnels sont donc des moyens supplémentaires à ajouter à la gamme des outils d'étude du sertissage en apportant des informations très utiles par rapport aux modèles bi-dimensionnels.

6.2 Perspectives

Beaucoup de développements et de perfectionnements sont envisageables pour améliorer la connaissance des phénomènes physiques mis en jeu pendant le sertissage.

Le premier point à résoudre concerne le problème de la simulation du retour élastique. Il n'a pas été possible de savoir si ce problème (disparition des pressions de contact après retrait des outils) était d'origine numérique ou traduisait une réalité physique. Pour cela, plusieurs pistes sont envisageables :

- Être plus précis dans la description du comportement du matériau. L'utilisation d'un matériau de type visco-plastique est à envisager (voir [MSTa95] en particulier).
- Avoir des outils expérimentaux permettant de trancher la question de l'existence ou non de ces pressions de contact, voire de leur quantification si nécessaire.
- Développer la simulation dans les modèles tri-dimensionnels en utilisant un algorithme statique implicite pour l'estimation du retour élastique.
- La qualité des connexions électriques peut dépendre de la formation de points de soudure froide. Cette théorie propose qu'à partir d'un certain niveau de déformation plastique, des zones de contact mécanique soient intimement liés et constituent ainsi des sports de contact électrique de qualité. L'hypothèse est discutée dans [MG96] et

a été reprise très récemment dans les travaux de [AB02] et [Tim02]. Dans le cadre de cette hypothèse, il n'est pas nécessaire que les pressions de contact subsistent après retour élastique.

L'autre piste de développement de l'étude consiste à faire le lien avec les travaux du groupe électrique. Ce lien est nécessaire pour établir des relations mathématiques entre la partie mésoscopique (mécanique) et la partie microscopique (électrique). De bons espoirs sont permis dans cette direction, grâce à la recherche géographique des brins conduisant le mieux le courant et à la corrélation avec le résultat des simulations mécaniques (voir [RPCB02]).

Pour l'optimisation des paramètres du procédé, il est indispensable de mener une étude systématique sur toutes les tailles de câbles. Il serait aussi envisageable d'intégrer des critères non-géométriques comme le niveau des contraintes et les risques de criques et fissures.

Enfin, l'étape suivante est de passer du bureau d'études au laboratoire d'essais et d'envisager de simuler les essais de validation exigés par les clients :

- Essais d'arrachement du câble.
- Fatigue de l'assemblage par cyclage thermique et mécanique.
- Comportement sous l'effet de vibrations.

Il serait également très intéressant de tester d'autres modèles de lois de contact-frottement. L'importance de ce paramètre a été démontré et il ne serait pas inutile d'étudier l'effet de lois moins rustiques que le modèle de frottement de type Coulomb. Par exemple, des lois prenant en compte l'effet de la pression, de la vitesse ou de la température (cette interrogation se retrouve fréquemment dans les problèmes de formage des métaux, voir [Ham98] par exemple).

Pour terminer, il convient de prendre en compte la chaîne de réalisation complète du contact et de simuler les différentes étapes de sa fabrication (découpe, pliage et formage) et de considérer le torsadage du câble.

Annexe A

Tests de qualification pour le sertissage

Cette annexe présente quelques unes des caractéristiques et tests utilisés par certains constructeurs automobiles pour valider les sertissages. Nous nous limitons aux cosntructeurs français, mais on pourra trouver un résumé complet des différents cahiers des charges et tests utilisés par les constructeurs automobiles mondiaux dans [FCI99].

A.1 RENAULT

Cahier des charges 36-05-223 ([REN98]) : La liaison fil/contact (avril 1998).

Le sertissage subit un contrôle visuel. La résistance électrique doit être inférieure à 0,2 m Ω à neuf, et inférieure à 0,5 m Ω après vieillissement. Pour la tenue mécanique, on procède a deux types d'essais :

- Essai de pliage ($\pm 45^\circ$ par rapport à la position alignée), cinq cycles soit dix passages à la position de repos).
- Essai de traction, la force minimale d'arrachement doit être inférieure aux spécifications de RENAULT suivant la section du conducteur.

Les essais de vieillissement sont de cinq types :

- Cyclage thermique (240 h à la température d'essai suivant la classe de fonctionnement du connecteur).
- Chocs thermiques (25 cycles de -40°C à la température maximale de la classe).
- Cyclage de courant (500 cycles, de 0 A à l'intensité nominale).
- Vibrations (16 h selon CDC 36-05-019).
- Atmosphère corrosive (quatre jours dans mélange H₂S, SO₂ selon CEI 68-2-60).

A.2 PSA

Spécification Technique Etudes 96 341 150 99 (avril 1998), voir [SOG98].

Le sertissage subit un contrôle visuel. La résistance électrique doit être inférieure à 1 m Ω à neuf, et inférieure à 2 m Ω après vieillissement. Pour la tenue mécanique, on procède a deux types d'essais :

- Essai de pliage ($\pm 45^\circ$ par rapport à la position alignée), dix cycles.
- Essai de traction, selon B21-7050.

Les essais de vieillissement sont du type chocs thermiques (cent cycles de -40°C à la température maximale de la classe selon B 21 7050).

Annexe B

Script d'automatisation des modèles éléments finis

Dans le cadre d'une étude paramétrique complète des sertissages et afin de gagner du temps lors de la construction des modèles pour ABAQUS, il a été nécessaire d'utiliser les possibilités d'automatisation d'ABAQUS/CAE¹⁸. Pour cela, nous disposons de la technologie Python, qui est un langage de script. ABAQUS/CAE étant construit sur l'utilisation de Python, il est possible de tout automatiser dans la création de nos modèles. Python est un langage script orienté objet très complet et gratuit (voir www.python.org).

B.1 Modèles bi-dimensionnels

B.1.1 Structure

La figure B.1 présente la structure globale de fonctionnement du script automatique de création des modèles bi-dimensionnels (dynamique explicite).

B.1.2 Paramètres

Nous nous sommes arrêtés à un certain niveau d'hypothèses, afin de réduire la complexité d'élaboration du script.

- Géométries : les ailes du connecteur, le poinçon et l'enclume sont complètement variables dans leurs dimensions, mais pas dans leur forme. Il est possible d'étudier toutes les configurations de câbles désirées (nombre et positions des brins) jusqu'à deux cent brins.
- Matériaux : on peut faire varier les caractéristiques élasto-plastiques des ailes et du câble complet (il n'est pas possible de différencier les brins au niveau matériau, le matériau est globalement le même pour tous les brins constituant le câble). On peut également ajouter de la viscosité (damping) aux matériaux.

¹⁸ABAQUS/CAE est le module de pre-processing et de visualisation d'ABAQUS. Il est relativement sommaire mais permet de définir nos modèles 2D et 3D.

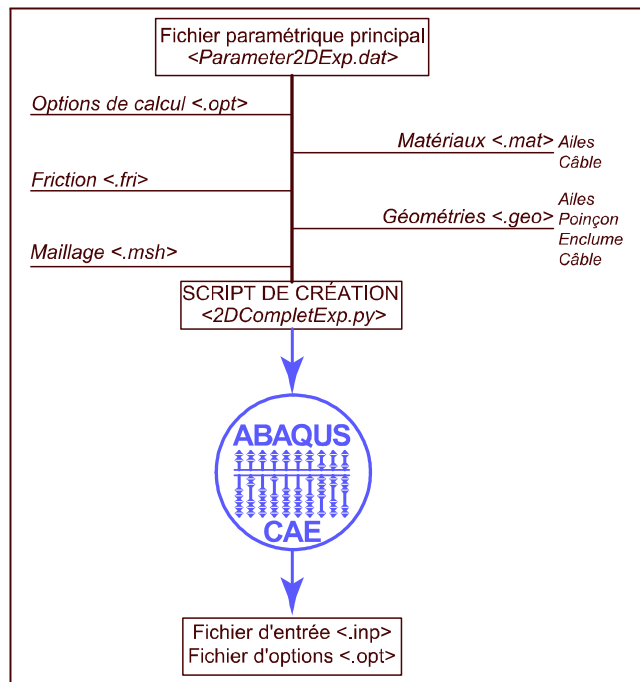


Fig. B.1: Structure de fonctionnement de la création automatique des modèles bi-dimensionnels

- Maillage : on peut choisir la finesse et le type d'éléments (de façon différenciée pour tous les composants, brins compris), voir la figure B.2. On peut également changer le type de contrôle des modes sabliers.
- Friction : on peut faire varier les coefficients de frottement d'un certain nombre de couples de contact : poinçon/aile côté gauche et droit, enclume/aile, auto-contact aile/aile, contact torons/ailes et contact torons/torons. Il n'est pas possible d'affecter des propriétés de contact différentes pour chaque couple de torons.
- Options de calcul : on peut changer la vitesse de descente du poinçon (voire même définir entièrement les courbes d'amplitude), le type de calcul (calcul automatique de la descente du poinçon pour une hauteur de sertissage ou un taux de compression donné), la fréquence de sauvegarde des résultats (fichiers de sorties spécifiques ABAQUS .odb et fichier génériques de sortie .fil), s'il y a calcul du retour élastique, remaillage actif ou non (avec fréquence et domaine de remaillage), si on utilise la méthode de mass scaling (domaine, fréquence et amplitude de cette concentration de masse).

B.1.3 Script

Le script fait environ 1500 lignes et il est complètement commenté. La logique de conception est orientée objet (niveaux d'encapsulation natifs d'ABAQUS/CAE). Tous les fichiers paramétriques sont des fichiers textes simples avec un paramètre par ligne avec la syntaxe

nom du paramètre = Valeur

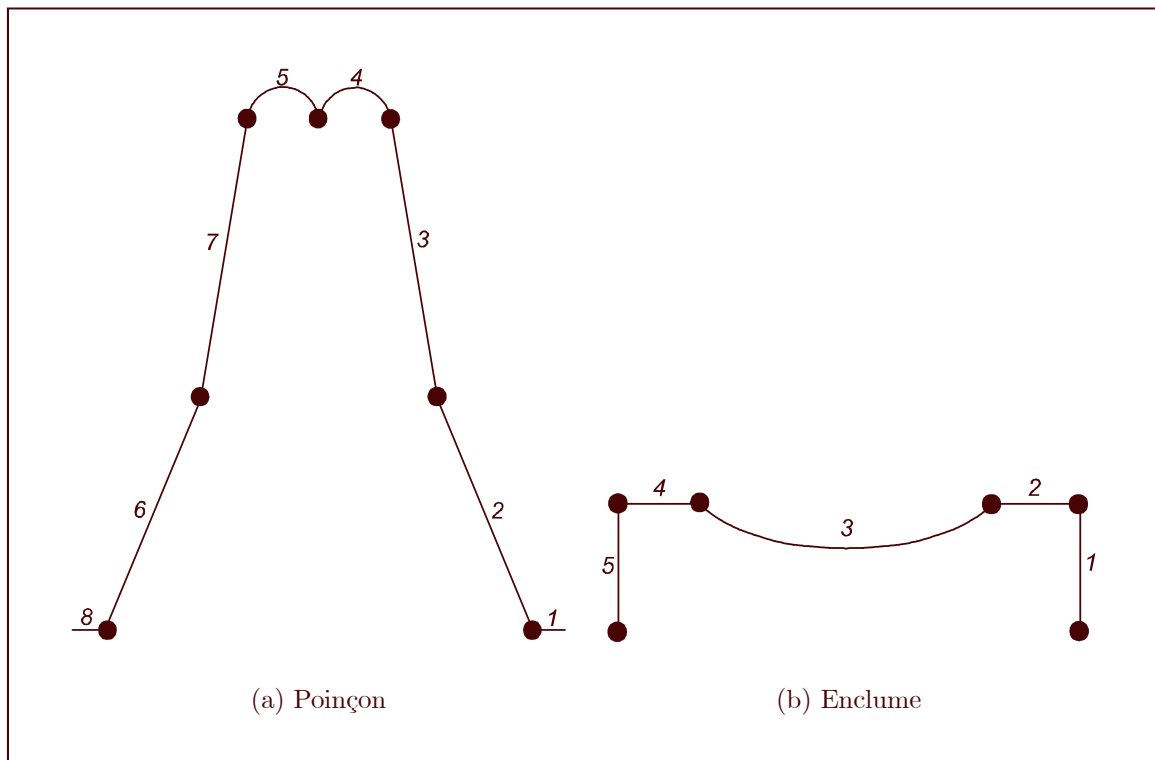


Fig. B.2: Repérage des arêtes des outils pour leur maillage automatique

Le nom du paramètre ne sert pas au script qui décode séquentiellement les paramètres mais il sert à l'utilisateur pour s'y repérer. Il faut cependant veiller à respecter la syntaxe (en particulier le signe =) et le type de la variable. Le script n'est pas complètement protégé contre toutes les erreurs. Le nombre de lignes d'un fichier paramétrique dépend des options choisies. Nous ne détaillerons pas toutes les lignes des fichiers paramétriques. Le fichier paramétrique principal est unique et doit être modifié à chaque nouveau modèle. Son nom <Parameter2DExp.dat> ne peut pas être modifié. Sa structure est décrite dans le tableau B.1.

Le script va fournir trois fichiers : le fichier d'entrée ABAQUS (.inp), le fichier qui sauvegarde le modèle CAE et un fichier qui résume les paramètres utilisés (.opt).

B.2 Modèles tri-dimensionnels

Pour les modèles tri-dimensionnels, le principe de fonctionnement est identique aux modèles bi-dimensionnels. Toutefois, étant donné la complexité et la taille des modèles, il est hors de question, pour les modèles les plus importants, de laisser le maillage aux soins d'ABAQUS. Nous avons donc plusieurs niveaux de modélisation supplémentaires par rapport aux modèles 2D :

- Modèles extrudés simples : il s'agit simplement d'extruder une géométrie 2D. Pour ces modèles, ni les chanfreins, ni les stries ne sont donc représentés. On peut utiliser des ailes extrudées, des outils extrudés ou encore un câble extrudé. Dans ce cas,

Ligne	Paramètre	Type
1	Chemin des fichiers paramétriques	Chaîne
2	Nom des fichiers .inp .cae et .opt	Chaîne
3	Nom du fichier géométrique pour les ailes	Chaîne
4	Nom du fichier matériau pour les ailes	Chaîne
5	Nom du fichier géométrique pour le poinçon	Chaîne
6	Nom du fichier géométrique pour l'enclume	Chaîne
7	Nom du fichier géométrique pour le câble	Chaîne
8	Nom du fichier matériau pour le câble	Chaîne
9	Nom du fichier options du maillage	Chaîne
10	Nom du fichier options du contact	Chaîne
11	Nom du fichier options du calcul	Chaîne

Tab. B.1: Les différents paramètres du fichier <Parameter2DExp.dat>

c'est ABAQUS/CAE qui se charge du maillage.

- Modèles importés : un modèle généré par un mailleur externe est importé dans ABAQUS. On peut ainsi importer, le contact entier, les outils ou le câble.

Dans les deux cas, il est possible de faire des modèles symétriques ou non. Le plan de symétrie est alors représenté par des conditions limites idoines dans ABAQUS. A noter que dans le cas des modèles importés, il est nécessaire de pré-définir les surfaces de contact dans ABAQUS/CAE. Pour importer les modèles, on procède généralement en trois étapes :

1. Générer le maillage dans un logiciel externe¹⁹ capable d'exporter un fichier d'entrée de type ABAQUS.
2. Exécuter un calcul quelconque (élastique en un pas) sur ABAQUS. Ceci afin de récupérer un fichier de sortie binaire de type ABAQUS (au format .odb).
3. Importer le fichier de sortie abaqus au format odb dans ABAQUS/CAE et définir ainsi les surfaces supplémentaires nécessaires.

Nous obtenons ainsi un fichier CAE standard qu'il est facile de réutiliser dans la définition d'un nouveau modèle. La figure B.3 présente la structure globale de fonctionnement du script automatique de création des modèles trii-dimensionnels (dynamique explicite).

¹⁹Par exemple, le maillage complet du connecteur utilisé dans le chapitre 5 a été réalisé par Laurent Merle, au centre de recherches de FCI, sur le logiciel PATRAN.

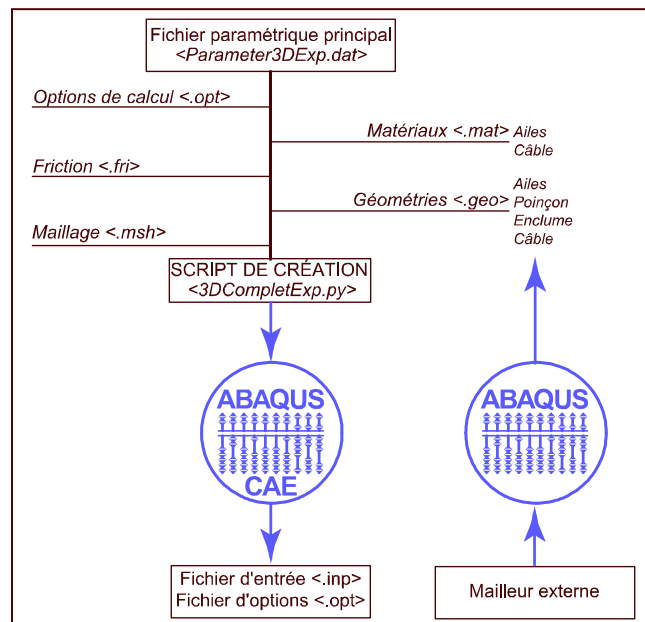


Fig. B.3: Structure de fonctionnement de la création automatique des modèles tri-dimensionnels

Annexe C

Analyse géométrique du sertissage

Cette annexe décrit quelques relations géométriques élémentaires très utiles dans la définition d'un sertissage. Ces relations servent en particulier à l'automatisation de la création des modèles éléments finis et est à la base d'un système simplifié de pré-dimensionnement des sertissages (réalisé sous la forme d'une feuille de calcul EXCEL).

C.1 Outils

C.1.1 Poinçon

Le poinçon est symétrique et nous nous contentons donc de sa moitié représentée avec le détail de sa partie arrondie sur la figure C.1. Les coordonnées des points du contour du poinçon sont dans le tableau C.1.

Point	X	Y
P1	L_p	y_{P2}
P2	$x_{P3} + (D - C) \cdot \tan \varepsilon$	$y_{P3} - (D - C)$
P3	$\frac{W_p}{2} + C \cdot \tan \delta$	H_p
P4	$\frac{W_p}{2}$	$y_{P3} + C$
P5	$\frac{W_p}{2} - R_p \cdot \cos \delta$	$y_{P4} - R_p \cdot \sin \delta$
P6	0	$y_{P5} + R_p \cdot \sin \delta$

Tab. C.1: Points du contour du poinçon

Nous définissons trois autres grandeurs

$$\begin{aligned}\cos \eta &= \frac{\frac{W_p}{2} - R_p \cdot \cos \delta}{R_p} \\ D_p &= R_p \cdot (1 - \sin \delta) \\ D_{p2} &= R_p \cdot (1 - \sin \eta)\end{aligned}$$

C.1.2 Enclume

L'enclume est également symétrique (voir figure C.2). Les points de son contour sont dans le tableau C.2.

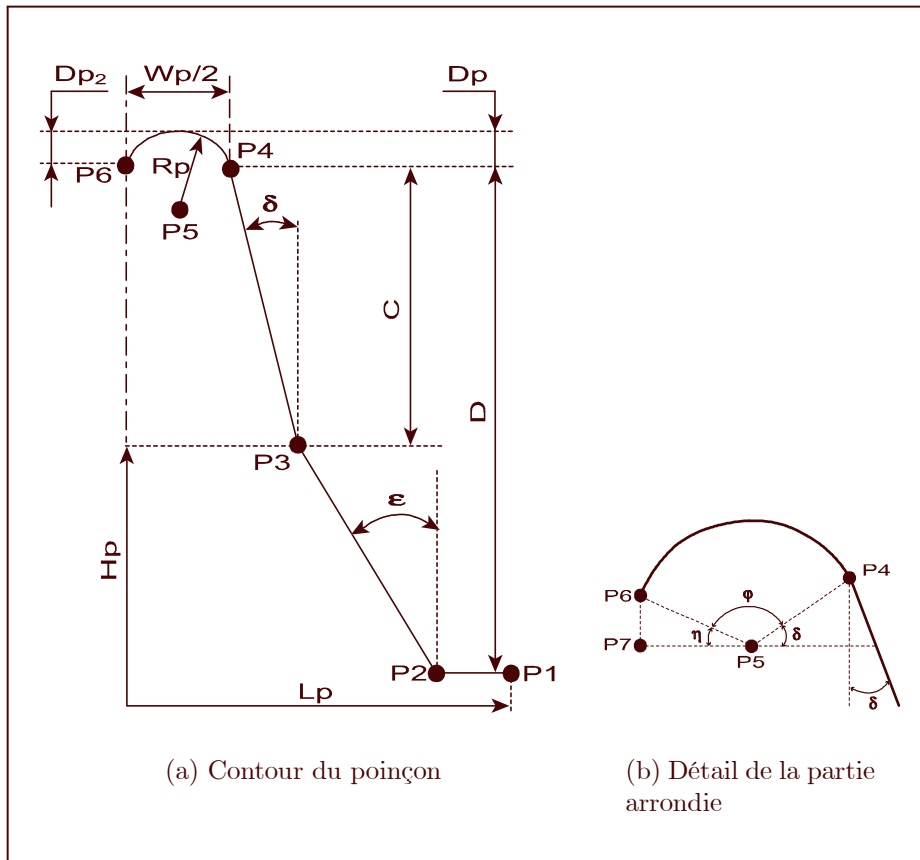


Fig. C.1: Les points du contour du poinçon

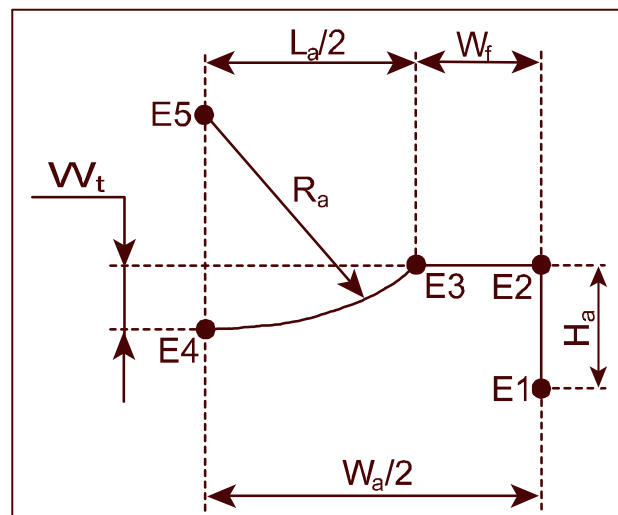


Fig. C.2: Les points du contour de l'enclume

Point	X	Y
E1	$\frac{W_a}{2}$	$y_{E2} - H_a$
E2	x_{E1}	y_{E3}
E3	$\frac{W_p}{2} - W_f$	$y_{E5} - \sqrt{R_a^2 - x_{E3}^2}$
E4	0	y_{E1}
E5	0	$y_{E4} + R_a$

Tab. C.2: Points du contour de l'enclume

Nous définissons deux autres grandeurs géométriques utiles

$$L_a = W_a - 2.W_f$$

$$W_t = R_a - \sqrt{R_a^2 - \left(\frac{W_a}{2} - W_f\right)^2}$$

C.2 Ailes de sertissage

C.2.1 Points du contour

Nous donnons ici les coordonnées fabriquant le contour des ailes. On se contente d'une demi-aile (voir figure C.3) avec la longueur du chanfrein L_c

$$L_c = \frac{e_1 - e_2}{\sin \alpha}$$

et les longueurs

$$i = e_2 \cdot \sin \beta$$

$$j = e_2 \cdot \cos \beta$$

$$k = L_c \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$l = L_c \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

Point	X	Y
1	0	$-(R_c + e_1)$
2	$(R_c + e_1) \cdot \cos \frac{\beta}{2}$	$-(R_c + e_1) \cdot \sin \frac{\beta}{2}$
3	$\frac{A}{2}$	$y_5 - k - i$
4	$x_3 - l$	$y_3 + k$
5	$x_3 - l - j$	$B - R_c - e_1$
5b	$x_5 - L_c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\beta}{2}$	$y_5 - L_c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \frac{\beta}{2}$
6	$R_c \cdot \cos \beta$	$-R_c \cdot \sin \beta$
7	0	$-R_c$

Tab. C.3: Points du contour de l'aile

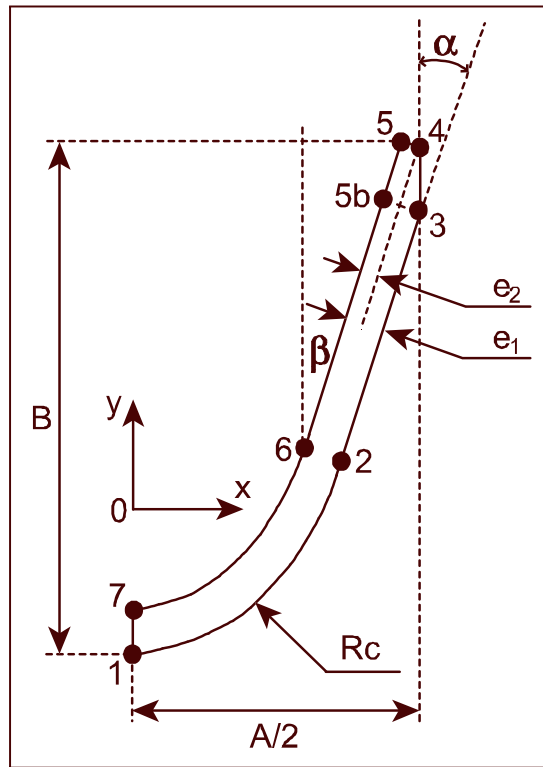


Fig. C.3: Les points du contour d'une aile de sertissage

C.2.2 Quelques grandeurs géométriques

C.2.2.1 Calcul de l'angle d'ouverture

L'angle d'ouverture des ailes β est une fonction des autres dimensions des ailes. La formule exacte pour la retrouver est

$$\frac{A}{2} = (R_c + e_1) \cdot \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} \cdot \tan \beta \cdot (B - e_2 \cdot \sin \beta - L_c \cdot \cos(\alpha - \beta))$$

Cette équation est non-linéaire et demande donc un programme itératif pour trouver la solution. Le solveur d'EXCEL fait parfaitement l'affaire.

C.2.2.2 Longueur intérieure

La longueur intérieure L_i (deux fois celle entre les points 5 et 7) vaut

$$L_i = 2 \left[R_c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + \sqrt{\left(\frac{A}{2} - l - j - R_c \cdot \cos \beta \right)^2 + (B - e_1 + R_c \cdot (\sin \beta - 1))^2} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} l &= L_c \cdot \cos(\alpha - \beta) \\ j &= e_2 \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

C.2.2.3 Longueur développée

La longueur développée L_d est une notion importante pour la conception des sertissages. Elle correspond à peu près à la longueur « à plat », avant cambrage. On la mesure à un tiers de l'épaisseur du matériau en partant de la surface intérieure. Elle vaut

$$L_d = 2 \left[\left(R_c + \frac{e_1}{3} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + \sqrt{\left(\frac{A}{2} - l - j - R_c \cdot \cos \beta \right)^2 + (B - e_1 + R_c \cdot (\sin \beta - 1))^2} \right]$$

C.2.2.4 Surface

La surface des ailes S_{wing} vaut

$$S_{wing} = \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \cdot [(R_c + e_1)^2 - R_c^2] + 2 \cdot e_1 \cdot \left[B - \frac{R_c + e_1 - \sin \beta}{\cos \beta} \right] - (e_1 - e_2) \cdot L_c \cdot \cos \alpha$$

C.2.2.5 Taux de compression

Nous pouvons évaluer de manière assez précise le taux de compression finale d'un sertissage de type « B ». Pour cela, considérons le découpage en quatre surfaces élémentaires de la surface sertie finale $A_{crimped}$ sur la figure C.4.

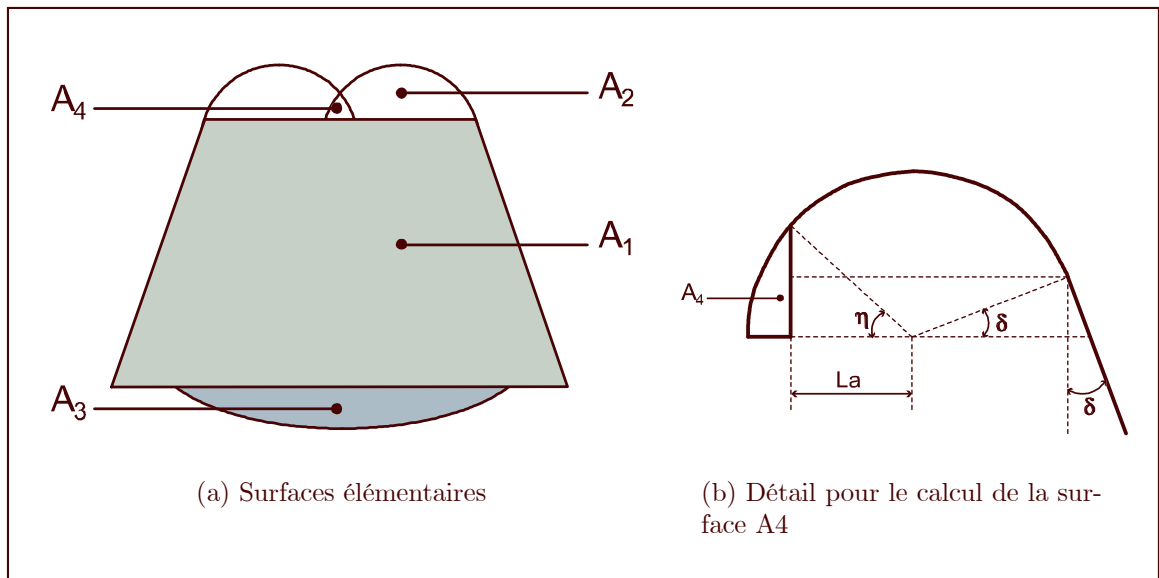


Fig. C.4: Estimation de la surface sertie finale

Nous avons

$$A_{crimped} = A_1 + 2 \cdot A_2 + A_3 - A_4$$

Pour une hauteur de sertissage H , les surfaces élémentaires valent

$$\begin{aligned}A_1 &= W_p \cdot (H - D_p - W_t) + (H - D_p - W_t)^2 \cdot \tan \delta \\A_2 &= \frac{R_p^2}{2} \cdot (\pi - 2 \cdot \delta - \sin(\pi - 2 \cdot \delta)) \\A_3 &= \frac{W_t \cdot (32 \cdot W_t \cdot R_a - 13 \cdot W_t^2)}{12 \cdot \sqrt{2 \cdot W_t \cdot R_a - W_t^2}} \\A_4 &= \frac{R_p^2}{2} \cdot (\eta - \sin \eta) - R_p^2 \cdot \sin \delta \cdot (1 - \cos \eta)\end{aligned}$$

Avec l'angle η tel que

$$\eta = \cos^{-1} \left(\frac{W_p - 2 \cdot R_p}{2 \cdot R_p} \right)$$

Annexe D

Informations sur l'optimisation bi-dimensionnelle

D.1 Plans de Doehlert

La table D.1 donne l'ensemble des expériences à mener pour un plan de Doehlert à cinq paramètres.

Essai	F1	F2	F3	F4	F2	Essai	F1	F2	F3	F4	F5
1	0	0	0	0	0	17	0	0	-0,612	0,791	0
2	1	0	0	0	0	18	0,5	-0,289	-0,204	-0,791	0
3	0,5	0,866	0	0	0	19	-0,5	-0,289	-0,204	-0,791	0
4	-0,5	0,866	0	0	0	20	0	0,577	-0,204	-0,791	0
5	-1	0	0	0	0	21	0	0	0,612	-0,791	0
6	-0,5	-0,866	0	0	0	22	0,5	0,289	0,204	0,158	0,775
7	0,5	-0,866	0	0	0	23	-0,5	0,289	0,204	0,158	0,775
8	0,5	0,289	0,816	0	0	24	0	-0,577	0,204	0,158	0,775
9	-0,5	0,289	0,816	0	0	25	0	0	-0,612	0,158	0,775
10	0	-0,577	0,816	0	0	26	0	0	0	-0,632	0,775
11	0,5	-0,289	-0,816	0	0	27	0,5	-0,289	-0,204	-0,158	-0,775
12	-0,5	-0,289	-0,816	0	0	28	-0,5	-0,289	-0,204	-0,158	-0,775
13	0	0,577	-0,816	0	0	29	0	0,577	-0,204	-0,158	-0,775
14	0,5	0,289	0,204	0,791	0	30	0	0	0,612	-0,158	-0,775
15	-0,5	0,289	0,204	0,791	0	31	0	0	0	0,632	-0,775
16	0	-0,577	0,204	0,791	0						

Tab. D.1: Plan d'expérience de Doehlert pour cinq paramètres

Le plan de Doehlert est séquentiel. Pour n paramètres (avec $n < 6$), on prend les p premières lignes comme expériences. La table D.2 donne le nombre d'expériences à faire pour n paramètres.

Par exemple, pour un plan de Doehlert à quatre paramètres, il suffit de prendre les 21 premières expériences de la table D.1. Le nombre de niveaux de chaque paramètre dépend de son ordre. Le premier paramètre aura toujours cinq niveaux, le dernier aura toujours trois niveaux et les paramètres intermédiaires auront toujours sept niveaux.

Nombre de paramètres	Nombre d'expériences
1	2
2	7
3	13
4	21
5	31

Tab. D.2: Caractéristiques du plan d'expérience de Doehlert

D.2 Tables des résultats

Essai	R_e	L_d	e_1	W_d	Taux de compression	Surface de contact	Surface des trous
1	1,5	4,75	0,3	2	-0,828	2,4559330	0,28724340
2	2	4,75	0,3	2	-0,870	2,3829390	0,30128620
3	1,75	5,399	0,3	2	-1,216	0,2292580	0,41557450
4	1,25	5,399	0,3	2	-1,140	0,5923990	0,39056780
5	1	4,75	0,3	2	-0,595	2,7202830	0,22064210
6	1,25	4,100	0,3	2	-0,139	7,0993330	0,10048310
7	1,75	4,100	0,3	2	-0,193	6,5657760	0,11116180
8	1,75	4,966	0,382	2	-0,773	2,2767238	0,26987790
9	1,25	4,966	0,382	2	-0,692	2,0255100	0,24621980
10	1,5	4,317	0,382	2	-0,282	5,1613310	0,11642310
11	1,75	4,533	0,218	2	-0,741	2,8070050	0,25961770
12	1,25	4,533	0,218	2	-0,576	3,2544530	0,21084780
13	1,5	5,183	0,218	2	-1,257	0,2502610	0,42850910
14	1,75	4,966	0,320	2,158	-1,043	1,3574020	0,37400367
15	1,25	4,966	0,320	2,158	-0,992	1,9357780	0,37658870
16	1,5	4,317	0,320	2,158	-0,544	4,8449320	0,20810660
17	1,5	4,75	0,239	2,158	-0,925	0,3930200	0,31876310
18	1,75	4,533	0,279	1,842	-0,525	4,0654410	0,19297140
19	1,25	4,533	0,279	1,842	-0,429	2,9399150	0,16120910
20	1,5	5,183	0,279	1,842	-0,898	0,8667380	0,30824340
21	1,5	4,75	0,361	1,842	-0,508	2,1269500	0,18050120

Tab. D.3: Plan d'expérience I - Paramètres

Essai	x	$\varepsilon = \mathbf{e}_1 - x$	\mathbf{Y}_1	\mathbf{Y}_2	\mathbf{Y}_3	\mathbf{Y}_{12}	\mathbf{Y}_{13}	\mathbf{Y}_{123}
1	0,3004355	-0,0004355	0,4831	0,093	0,670	0,288	0,577	0,415
2	0,2993355	0,0006645	0,5261	0,096	0,703	0,311	0,615	0,441
3	0,2955	0,00645	0,943	1	0,970	0,971	0,956	0,970
4	0,299	0,001	0,842	0,387	0,911	0,614	0,877	0,713
5	0,2997	0,0003	0,281	0,084	0,515	0,182	0,398	0,293
6	0,29997	0,00003	0,042	0,032	0,234	0,037	0,138	0,103
7	0,29999	0,00001	0,060	0,035	0,259	0,047	0,159	0,117
8	0,381813	-0,001633	0,431	0,101	0,630	0,265	0,530	0,387
9	0,3816545	-0,00000480	0,358	0,111	0,575	0,235	0,466	0,348
10	0,3815005	0,0001492	0,086	0,044	0,272	0,065	0,178	0,134
11	0,2185625	-0,0002122	0,402	0,082	0,606	0,242	0,503	0,363
12	0,218283	0,0000673	0,267	0,070	0,495	0,169	0,379	0,276
13	0,218276	0,0000743	1	0,916	1	0,958	1	0,972
14	0,320745	-0,0003326	0,768	0,169	0,873	0,468	0,820	0,603
15	0,31	0,0104124	0,659	0,118	0,809	0,389	0,734	0,529
16	0,32	0,0004124	0,244	0,047	0,486	0,145	0,364	0,259
17	0,2387255	0,0000373	0,584	0,583	0,744	0,584	0,664	0,634
18	0,2789845	0,0006031	0,232	0,056	0,450	0,143	0,340	0,246
19	0,2797915	-0,0002039	0,170	0,078	0,376	0,124	0,273	0,208
20	0,2779	-0,0199831	0,555	0,264	0,719	0,410	0,637	0,513
21	0,360693	0,0005442	0,219	0,108	0,421	0,163	0,320	0,249

Tab. D.4: Plan d'expérience I - Réponses

Essai	R _e	L _d	e ₁	W _d	Taux de compression	Surface de contact	Surface des trous
1	1,25	4,187	0,25	1,9	-0,003	7,658094	0,0625346
2	1,5	4,187	0,25	1,9	-0,061	7,974352	0,0744209
3	1,375	4,350	0,25	1,9	-0,291	5,136974	0,1291267
4	1,125	4,350	0,25	1,9	-0,334	4,645649	0,1343452
5	1	4,187	0,25	1,9	0,063	7,964368	0,0455122
6	1,125	4,025	0,25	1,9	0,113	8,501461	0,0478509
7	1,345	4,025	0,25	1,9	0,066	8,343191	0,0558054
8	1,345	4,242	0,291	1,9	-0,104	6,446891	0,080943
9	1,125	4,242	0,291	1,9	-0,046	7,106079	0,0691076
10	1,25	4,079	0,291	1,9	0,019	7,743477	0,0593467
11	1,375	4,133	0,209	1,9	0,064	7,740388	0,050806
12	1,125	4,133	0,209	1,9	0,152	8,659895	0,037369
13	1,25	4,295	0,209	1,9	-0,376	3,774738	0,1470729
14	1,375	4,242	0,260	1,979	-0,172	6,422596	0,1031818
15	1,125	4,242	0,260	1,979	-0,123	6,670131	0,0920718
16	1,25	4,079	0,260	1,979	-0,050	7,201094	0,0804057
17	1,25	4,187	0,219	1,979	-0,060	7,169536	0,0764515
18	1,375	4,133	0,240	1,821	-0,280	6,666909	0,0629387
19	1,125	4,133	0,240	1,821	0,006	7,086569	0,0562458
20	1,25	4,296	0,240	1,821	-0,355	4,189518	0,1422106
21	1,25	4,187	0,28	1,821	0,029	6,937469	0,0514213

Tab. D.5: Plan d'expérience II - Paramètres

Essai	x	$\varepsilon = e_1 - x$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_{12}	Y_{13}	Y_{123}
1	0,249789	0,000211	0,084	0,493	0,425	0,289	0,255	0,334
2	0,249917	0,000083	0,161	0,473	0,506	0,317	0,333	0,380
3	0,2412	0,0088	0,700	0,735	0,878	0,717	0,789	0,771
4	0,250193	-0,000193	0,845	0,812	0,933	0,829	0,889	0,863
5	0,249988	0,000012	0,027	0,474	0,309	0,250	0,168	0,270
6	0,24996	0,0004	0,005	0,444	0,325	0,224	0,165	0,258
7	0,250001	-0,000001	0,025	0,452	0,379	0,239	0,202	0,285
8	0,2905	0,0003248	0,234	0,546	0,550	0,409	0,392	0,457
9	0,290747	0,0000779	0,139	0,531	0,469	0,335	0,304	0,380
10	0,289833	0,000992	0,061	0,487	0,403	0,274	0,232	0,317
11	0,2041	0,0050752	0,026	0,488	0,345	0,256	0,185	0,286
12	0,2121	-0,002925	0,000	0,436	0,254	0,217	0,127	0,229
13	0,004277	0,2048984	1	1	1	1	1	1
14	0,2597	0,0005062	0,375	0,588	0,701	0,481	0,538	0,554
15	0,26005	0,0001563	0,269	0,566	0,626	0,417	0,447	0,486
16	0,2518	0,0084064	0,144	0,524	0,547	0,334	0,345	0,405
17	0,219562	-0,000181	0,160	0,526	0,520	0,343	0,339	0,402
18	0,239652	0,0001418	0,114	0,566	0,428	0,340	0,271	0,369
19	0,239	0,0007939	0,074	0,533	0,382	0,303	0,228	0,329
20	0,239507	0,000287	0,922	0,901	0,966	0,912	0,844	0,930
21	0,280429	0,0001896	0,052	0,544	0,349	0,298	0,200	0,315

Tab. D.6: Plan d'expérience 2 - Réponses

Essai	R_e	W_d	e_1	L_d	Taux de compression	Surface de contact	Surface des trous
1	1,25	1,9	0,25	4,187	0,003	7,759	0,061
2	1,5	1,9	0,25	4,187	-0,052	4,036	0,072
3	1,375	1,987	0,25	4,187	-0,127	7,246	0,093
4	1,125	1,987	0,25	4,187	-0,071	7,907	0,082
5	1	1,9	0,25	4,187	0,078	7,803	0,045
6	1,125	1,813	0,25	4,187	0,096	4,676	0,039
7	1,375	1,813	0,25	4,187	0,068	7,681	0,046
8	1,375	1,929	0,291	4,187	-0,092	6,921	0,080
9	1,125	1,929	0,291	4,187	-0,066	6,949	0,075
10	1,25	1,542	0,291	4,187	0,039	7,155	0,051
11	1,375	1,871	0,209	4,187	-0,013	7,743	0,063
12	1,125	1,871	0,209	4,187	0,063	8,176	0,049
13	1,25	1,858	0,209	4,187	0,007	7,430	0,062
14	1,375	1,929	0,260	4,336	-0,236	5,731	0,115
15	1,125	1,929	0,260	4,336	-0,182	6,169	0,099
16	1,25	1,842	0,260	4,336	-0,181	5,756	0,101
17	1,25	1,9	0,219	4,336	-0,425	3,653	0,160
18	1,375	1,871	0,239	4,039	0,07	7,812	0,049
19	1,125	1,871	0,239	4,039	0,145	8,206	0,039
20	1,25	1,958	0,239	4,039	0,044	8,365	0,063
21	1,25	1,9	0,281	4,039	0,074	8,180	0,055

Tab. D.7: Plan d'expérience III - Paramètres

Essai	x	$\varepsilon = e_1 - x$	Y_1	Y_2	Y_3	Y_{12}	Y_{13}	Y_{123}
1	0,249732	0,000268	0,065	0,471	0,383	0,267	0,224	0,306
2	0,249799	0,000201	0,123	0,519	0,450	0,321	0,287	0,364
3	0,250065	-0,0000645	0,232	0,504	0,586	0,368	0,409	0,441
4	0,2499995	0,000005	0,149	0,462	0,516	0,305	0,332	0,375
5	0,249667	0,000333	0,015	0,468	0,286	0,242	0,151	0,257
6	0,251311	-0,001311	0,009	0,477	0,244	0,243	0,127	0,244
7	0,249764	0,000236	0,020	0,476	0,289	0,248	0,155	0,262
8	0,29111	-0,0002852	0,178	0,527	0,502	0,353	0,340	0,403
9	0,2998	-0,0089751	0,141	0,256	0,474	0,333	0,307	0,380
10	0,290696	0,0001295	0,037	0,510	0,319	0,274	0,178	0,289
11	0,2088	0,0003752	0,080	0,489	0,395	0,285	0,238	0,321
12	0,209541	0,0003657	0,022	0,447	0,306	0,235	0,164	0,258
13	0,20895	0,0002259	0,061	0,492	0,389	0,277	0,225	0,314
14	0,259988	0,0002187	0,452	0,637	0,723	0,545	0,588	0,604
15	0,260527	-0,0003207	0,334	0,592	0,618	0,463	0,476	0,515
16	0,25985	0,0003564	0,332	0,634	0,631	0,483	0,481	0,532
17	0,220232	-0,0008506	1	1	1	1	1	1
18	0,240815	-0,0010212	0,019	0,468	0,309	0,243	0,164	0,265
19	0,239548	0,0002459	0,000	0,445	0,245	0,223	0,123	0,230
20	0,239386	0,0004085	0,034	0,437	0,393	0,235	0,214	0,288
21	0,2714	0,0092186	0,017	0,447	0,344	0,232	0,180	0,269

Tab. D.8: Plan d'expérience 3 - Réponses

Annexe E

Opérations automatiques de dépeuillement des résultats

Les données géométriques importantes pour le sertissage sont les surfaces finales. Or, le post-processeur natif d'ABAQUS (ABAQUS/CAE) n'a pas de fonctions évoluées pour extraire ce genre de résultats. Mais il est possible d'utiliser les possibilités d'automatisation d'ABAQUS/CAE et ses interfaces avec Python et le langage C++. ABAQUS dispose de bibliothèques statiques et dynamiques pour l'utiliser avec C++, en particulier pour analyser et extraire les résultats du fichier de sortie binaire propriétaire d'ABAQUS (fichiers `.odb`, **output database**). Nous présentons aussi quelques éléments pour automatiser l'extraction des résultats plus classiques à l'aide de scripts Python exécutables depuis ABAQUS/CAE.

E.1 Scripts Python

Nous proposons ici quelques exemples de scripts Python développés. Ils s'exécutent sur ABAQUS/CAE et ils permettent de gagner beaucoup de temps lors du dépeuillement des résultats. Le premier programme (programme E.1) montre comment charger un fichier de sortie `.odb` dans ABAQUS/CAE grâce à Python.

```
# ABAQUS CAE modules loading
from abaqus import *
from visualization import *

# Output file name
baseFile = 'Clip15_7b030.odb'

# Open the odb file
odb = session.openOdb(baseFile)
```

Programme E.1: Chargement d'un fichier `.odb` avec ABAQUS/CAE et Python

La variable `myViewport` servira à changer les options d'affichage. Le programme suivant montre comment changer les options d'affichage les plus courantes (programme E.2).

```
# Set the current viewport
myViewport = session.viewport['Viewport: 1']

# Display current odb model
myViewport.setValues(displayedObject=odb)

# Change step and frame
myViewport.odbDisplay.setFrame(step=0, frame=40 )

# Display deformed shape
myViewport.odbDisplay.setPlotMode(DEFORMED_SHAPE)

# Display contour
myViewport.odbDisplay.setPlotMode(CONTOUR)

# Display only free edges
myViewport.odbDisplay.contourOptions.setValues(visibleEdges=FREE, )

# Set the edges thickness
myViewport.odbDisplay.contourOptions.setValues(
edgeLineThickness=VERY_THIN, )

# No display informations on viewport except LEGEND
myViewport.viewportAnnotationOptions.setValues(
triad=OFF,legend=ON, legendBox=OFF, title=OFF, state=OFF)
```

Programme E.2: Affichage d'un fichier .odb avec ABAQUS/CAE et Python

Il est possible de manipuler les groupes d'affichage, ce qui permet, par exemple, de retirer des objets, des surfaces ou des groupes définis dans ABAQUS. Le programme E.3 montre comment procéder.

```
# Tools names
toolsName = ('PUNCH-3-1', 'DIE-3-1', 'PUNCH-2-1',
'DIE-2-1', 'PUNCH-1-1', 'DIE-1-1', )

# Remove tools
leaf = LeafFromPartInstance(partInstanceName=toolsName)
myViewport.odbDisplay.displayGroup.remove(leaf)
```

Programme E.3: Gestion des groupes d'affichage avec ABAQUS/CAE et Python

Le programme E.4 propose d'afficher les contraintes de Von Mises et de changer l'échelle de couleur.

```

# Max and min values for limits
MIN_VALUE = 0
MAX_VALUE = 600

# Set the min and Max values for scale
myViewport.odbDisplay.contourOptions.setValues(
maxAutoCompute=OFF, maxValue=MAX_VALUE,
minAutoCompute=OFF, minValue=MIN_VALUE, )

# Set the values outside the limits in the max/min colors
myViewport.odbDisplay.contourOptions.setValues(
outsideLimitsMode=SPECTRUM, )

# Display the image (Von Mises stresses)
myViewport.odbDisplay.setPrimaryVariable(
variableLabel='S', outputPosition=INTEGRATION_POINT, refinement=(
INVARIANT, 'Mises' ) )

```

Programme E.4: Affichage de valeurs de type champ avec ABAQUS/CAE et Python

Pour finir, le dernier exemple (programme E.5) exporte l'image sous forme de fichier Postscript.

```

# Option: COLOR, GREYSCALE, BLACK_AND_WHITE
session.printOptions.setValues(rendition=COLOR, vpDecorations=OFF
, vpBackground=OFF)

# Option: imageSize (w,y) or SIZE_ON_SCREEN
session.epsOptions.setValues(imageSize=SIZE_ON_SCREEN, units=MM,
resolution=DPI_300, fontType=PS_IF_AVAILABLE)

# Print to file
session.printToFile(fileName=imageFile+'.eps', format=EPS
, canvasObjects=( myViewport, ))

# Option: imageSize (w,y) or SIZE_ON_SCREEN
session.epsOptions.setValues(imageSize=SIZE_ON_SCREEN, units=MM,
resolution=DPI_600, fontType=PS_IF_AVAILABLE)

# Print to file
session.printToFile(fileName=imageFile+'HR.eps', format=EPS
, canvasObjects=( myViewport, ))

```

Programme E.5: Exportation de l'image affichée avec ABAQUS/CAE et Python

Enfin, le dernier programme montre comment automatiser l'extraction de la force de

sertissage en récupérant la réaction verticale sur le noeud de référence du poinçon (rigide).

```
# File name
forceFile = 'Force.rpt'

# Name of the reaction force
reactionForce =
'Reaction force: RF2 PI: PUNCH-3-1 Node 83 in NSET NODEPUNCH3'

# Name of the displacement
displacement =
'Spatial displacement: U2 PI: PUNCH-3-1 Node 83 in NSET NODEPUNCH3'

# Name of the steps
stepsName= ('InitContacts_1', 'Crimping_1', 'Crimping_2', 'Crimping_3',
'Crimping_4', 'Springback_3', )

# Extract reaction force
session.XYDataFromHistory(name='F1', odb=odb,
outputVariableName=reactionForce,
steps= stepsName, )

# Extract punch displacement
session.XYDataFromHistory(name='U1', odb=odb,
outputVariableName=displacement,
steps= stepsName, )

# Combine force and displacement
xy1 = session.xyData['U1']
xy2 = session.xyData['F1']
xy3 = combine(-xy1, xy2)

session.XYData(name='FU', xyData=xy3 )
x0 = session.xyData['FU']

# Write in file
session.writeXYReport(fileName=forceFile, xyData=(x0, ) )
```

Programme E.6: Exportation de la force de sertissage avec ABAQUS/CAE et Python

E.2 Calcul des surfaces 2D

E.2.1 Structure

Le principe est d'extraire les contours pour calculer les surfaces suivantes : surface intérieure, surface des ailes et surface des torons. Pour cela, nous utilisons un programme C++ (voir schéma E.1).

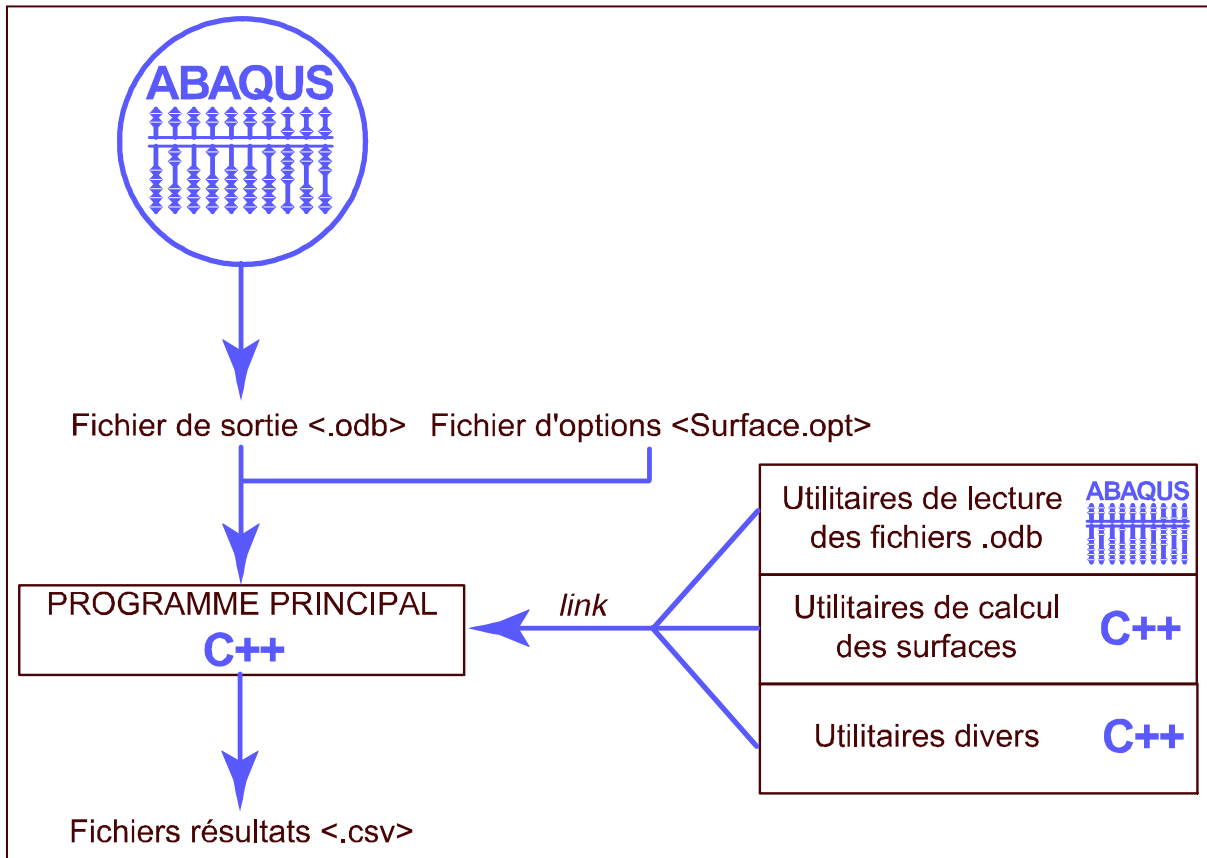


Fig. E.1: Principe de fonctionnement du programme de calcul des surfaces

Une bibliothèque dynamique en C++ est fournie par ABAQUS pour lire et extraire les informations de leur fichier de sortie natif (.odb). Le travail a consisté à développer une autre bibliothèque (statique), également en C++ pour calculer les surfaces et à interfacer l'ensemble dans un programme unique (toujours en C++).

E.2.2 Structure de données

La structure de données utilisée dans notre programme C++ et la bibliothèque de calcul des surfaces est écrite en C++ standard avec la bibliothèque standard. Elle comporte huit objets (voir table E.1).

Nom de la classe	Description
MinMaxBox	Boîte englobante d'un ensemble de points
Pos3D	Position 3D d'un point
NodeData	Noeud
ElementData	Élément
EdgeData	Arête
Set	Groupe de noeuds et d'éléments
Instance	Instance (pièce élémentaire)
Assembly	Assemblage des instances et des groupes (objet unique)

Tab. E.1: Principaux objets de la structure de données développée (2D)

E.2.2.1 Boîte englobante

Cet objet ne contient les valeurs minimales et maximales suivant chacun des axes (soit en tout six valeurs).

E.2.2.2 Position

Il ne s'agit que de la position 3D d'un point (soit trois valeurs).

E.2.2.3 Noeud

Un objet noeud (`NodeData`) contient le label (un entier) et la position du noeud (un objet de type `Pos3D`).

E.2.2.4 Élément

Un objet élément (`ElementData`) contient le label de l'élément (un entier), le type de l'élément (quadrangle, triangle, etc.) et la liste des noeuds (vecteur de `NodeData`).

E.2.2.5 Arête

Un objet arête (`EdgeData`) contient quatre objets : les deux noeuds qui le définit (des entiers qui font référence à deux noeuds), un vecteur d'entier faisant référence à des éléments partageant cette arête et un indicateur du type d'arête (arête extérieure ou non). Une arête qui n'a qu'un élément pour la définir, est une arête extérieure.

E.2.2.6 Groupe

Un objet groupe (`Set`) contient six objets : le nom de groupe, un entier faisant référence à l'instance liée au groupe, la liste des noeuds le composant (vecteur d'entiers).

E.2.2.7 Instance

Un objet instance (`Instance`) contient six objets : le nom de l'instance, la liste des noeuds le composant (vecteur d'entiers), la liste des éléments le composant (vecteur d'en-

tiers), la liste des arêtes (vecteur d'entiers) et la liste de tous les déplacements pour tous les pas de calcul.

E.2.2.8 Assembly

L'objet assemblage (**Assembly**) est unique et contient deux listes d'objets : un vecteur des groupes (**Set**) et un vecteur des instances (**Instance**).

E.2.3 Principe de calcul

La principale difficulté est qu'une surface de contact 2D définie dans ABAQUS n'est qu'une suite de noeuds et d'éléments, sans aucune logique topologique ni de sens de parcours. Il faut donc reconstituer le contour pour calculer les surfaces. L'algorithme est le suivant :

- Création d'une table des arêtes (vecteur de **EdgeData**).
- Reconstitution du contour extérieur et tri du contour.
- Calcul de la surface délimitée par le contour par la méthode des trapèzes.

E.3 Calcul des surfaces 3D

E.3.1 Structure

Le principe de fonctionnement est strictement identique au cas des modèles 2D.

E.3.2 Structure de données

La structure de données utilisée dans notre programme C++ et la bibliothèque de calcul des surfaces est écrite en C++ standard avec la bibliothèque standard. Elle comporte les huit objets provenant de la bibliothèque 2D (voir table E.1) et trois objets supplémentaires (table E.2).

Nom de la classe	Description
Plane	Plan infini
Contour	Description du contour
Surface	Description d'une surface

Tab. E.2: Principaux objets de la structure de données développée (3D)

E.3.2.1 Plane

L'objet **Plane** définit un plan infini à travers ses quatre paramètres (A, B, C et D)

$$A.x + B.y + C.z + D = 0 \quad (\text{E.1})$$

E.3.2.2 Contour

Le contour est construit grâce au plan de coupe et utilise 4 objets : un drapeau qui dit si le contour est de type ouvert ou fermé, la liste des noeuds le constituant (**Pos3D**) et l'aire de la surface délimitée par le contour.

E.3.2.3 Surface

L'objet **surface** décrit une surface. Il contient le nom de la surface, l'instance à laquelle il est attaché, la liste des noeuds, la listes des éléments, les déplacements et la liste des faces.

E.3.2.4 Assembly

Par rapport à la structure du cas 2D, l'objet unique **Assembly** contient une liste d'objets supplémentaires : un vecteur des surfaces (**Surface**).

E.3.3 Principe de calcul

Par rapport au cas 2D, nous avons une difficulté supplémentaire : il faut calculer l'intersection entre le plan de coupe et les surfaces. En revanche, il n'est pas nécessaire de recréer la topologie puisque la surface est définie par les faces des éléments. L'algorithme est le suivant :

- Calcul de l'intersection du plan de coupe avec toutes les arêtes. Une liste de points est créée.
- Reconstitution du contour extérieur et tri des noeuds constituant le contour.
- Calcul de la surface délimitée par le contour par la méthode des trapèzes.

Annexe F

Contrôle des modes sabliers

F.1 Quadrilatères

Les modes de déformation d'un élément quadrilatéral linéaire sont représentés sur la figure F.1.

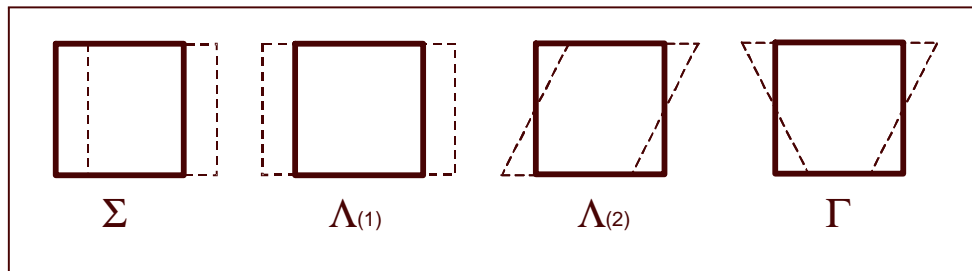


Fig. F.1: Modes de déformation des éléments quadrilatéraux linéaires

Ces modes sont détaillés dans la table F.1

Noeud	ξ	η	Σ	Λ_I	Λ_{II}	Γ
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	-1	1
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	1	1

Tab. F.1: Vecteurs de déformations d'un élément quadrilatéral linéaire

F.2 Hexaèdres

Les modes de déformation d'un élément hexaédrique linéaire sont représentés sur la figure F.2.

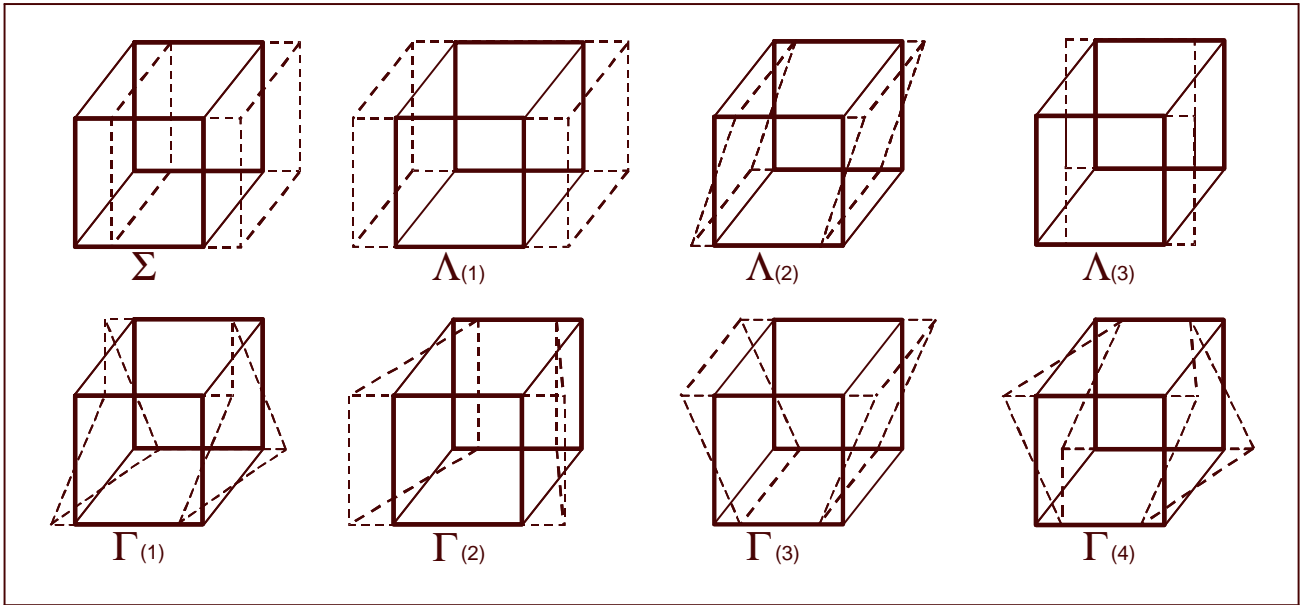


Fig. F.2: Modes de déformation des éléments hexaédriques linéaires

Ces modes sont détaillés dans la table F.2

Noeud	ξ	η	ζ	Σ	Λ_I	Λ_{II}	Λ_{III}	Γ_I	Γ_{II}	Γ_{III}	Γ_{IV}
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1	1	1	1
8	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1

Tab. F.2: Vecteurs de déformations d'un élément hexaédrique linéaire

Bibliographie

- [AB02] J. Aronstein et R. Butturini. « *Evaluation of crimped terminations and splices in In-Wall electric heaters* ». Dans *IEEE Holm*, pp. 252–258, 2002.
- [Abb99] M. Abbas. « *Modélisation numérique simplifiée du sertissage des connecteurs électriques* ». Mémoire de DEA, Université de Technologie de Compiègne, 1999.
- [ARPL02] M. Abbas, G. Rosazza-Prin, et P. Lorrière. « *Crimp termination technology* ». Rapport Technique 559, 2002.
- [Bar98] D. Barbier. « *Connexions Par Sertissage Dans L'industrie Automobile. Rappel Des Paramètres de Base, Vieillessement et Simulations En Laboratoire* ». Dans *S.E.E.*, Avril 1998.
- [Bat96] K.J. Bathe. « *Finite element procedures* ». Prentice Hall, Upper Saddle River (New Jersey, USA), 1996.
- [BB93] T. Belytschko et L.P. Bindeman. « *Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element* ». *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 105, pp.225–260, 1993.
- [BD90a] J.L. Batoz et G. Dhatt. « *Modélisation des structures par éléments finis - Vol.1 : Solides élastiques* ». Éditions Hermès, Paris, 1990.
- [BD90b] J.L. Batoz et G. Dhatt. « *Modélisation des structures par éléments finis - Vol.2 : Poutres et plaques* ». Éditions Hermès, Paris, 1990.
- [Ben02] L. Ben-Ayed. « *Optimisation de la Géométrie D'un Connecteur Pour un Sertissage Optimal* ». Mémoire de DEA, Université de Technologie de Compiègne, 2002.
- [Ber98] D. Berry. « *Development of a crimp forming simulator* ». Dans *ABAQUS Users' conference*, 1998.
- [BGKL89] J.L. Batoz, Y.Q. Guo, I. Katili, et P. Lardeur. « *Éléments finis de plaques et coques : présentation de quelques développements et résultats* ». Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, 1989.
- [BLM00] T. Belytschko, W.K. Liu, et B. Moran. « *Nonlinear finite elements for continua and structures* ». John Wiley & Sons, Chichester (West Sussex - England), 2000.
- [But96a] J.D. Butler. « *Geometric considerations in crimp tooling design* ». *Wiring Harness News*, 1996.

- [But96b] J.D. Butler. « *Introduction to terminating and terminal applications* ». *Wiring Harness News*, 1996.
- [But97a] J.D. Butler. « *Evolution and Anatomy of a terminating press* ». *Wiring Harness News*, 1997.
- [But97b] J.D. Butler. « *Targeting quality crimps from a crimp compression perspective* ». *Wiring Harness News*, 1997.
- [But98] J.D. Butler. « *Validating crimp quality with a microscope* ». *Wiring Harness News*, 1998.
- [BW97] J. Bonet et R.D. Wood. « *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis* ». Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [CHLRP02] T. Courtin, S. Haran, D. Lemaréchal, et G. Rosazza-Prin. « *Crimping press instrumentation* ». Rapport Technique 558, 2002.
- [Cri91] M.A. Crisfield. « *Non-linear finite element analysis of solids and structures - Vol.1 : Essentials* ». John Wiley & Sons, Chichester (West Sussex - England), 1991.
- [DT84] G. Dhatt et G. Touzot. « *Une Présentation de la Méthode Des Éléments Finis* ». Éditions Maloine, 1984.
- [FB81] D.P. Flanagan et T. Belytschko. « *A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control* ». *Int. J. Num. Methods Eng.*, 17, pp.679–706, 1981.
- [FCI99] « *Synthesis of car manufacturers specifications and international standards on mechanical, electrical, thermal and environmental testing of automotive connectors* ». Rapport Technique, 1999.
- [Féc96] L. Féchant. « *Le contact électrique* ». Éditions Hermès, Paris, 1996.
- [FPZ95] D. François, A. Pineau, et A. Zaoui. « *Comportement mécanique des matériaux - Vol.1 : Élasticité et plasticité* ». Éditions Hermès, Paris, 1995.
- [GABB89] J.C. Gelin, J.F. Agassant, J.C. Boyer, et M. Brunet. *Modèles et méthodes numériques en grandes déformations plastiques*. Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, 1989.
- [GM95] P. Germain et P. Muller. « *Introduction à la mécanique des milieux continus* ». Masson, Paris, 1995.
- [GMS00] M. Goosens, F. Mittelbach, et A. Samarin. « *ÉTEX companion* ». Campus Press, Paris, 2000.
- [Gou99] J. Goupy. « *Plans D'expériences Pour Surfaces de Réponse* ». Dunod, 1999.
- [GR96] M. Géradin et D. Rixen. « *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures* ». Masson, Paris, 1996.
- [GZ68] A.E. Green et W. Zerna. « *Theoretical elasticity* ». Dover, New York, 1968.
- [Ham98] V. Hamel. « *Contribution à l'étude de l'assemblage par clinchage. Aspects numériques et expérimentaux* ». Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1998.

-
- [Hil50] R. Hill. « *The mathematical theory of plasticity* ». Oxford University Press, Oxford, 1950.
- [HKS01] HKS. « *ABAQUS Theory Manual v6.2* », 2001.
- [HW80] T. Hughes et J. Winget. « *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis* ». *Int. J. Num. Methods Eng.*, 15, pp.1862–1867, 1980.
- [JB84] G.C. Johnson et D.J. Bammann. « *A discussion of stress rates in finite deformation problems* ». *Int. J. Solids Structures*, 8, pp.725–737, 1984.
- [Joh85] K.L. Johnson. « *Contact mechanics* ». Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [Kug95] S. Kugener. « *Simulation of the crimping process by implicit and explicit finite element methods* ». *AMP Journal of technology.*, 4, 1995.
- [Lac95] T. Lachand-Robert. « *La maîtrise de T_EX et L^AT_EX* ». Masson, Paris, 1995.
- [LC96] J. Lemaitre et J.L. Chaboche. « *Mécanique des matériaux solides* ». Dunod, Paris, 1996.
- [Lee69] E.H. Lee. « *Elastic-plastic deformation at finite strain* ». *J. Mech. Eng.*, 36, pp.1–6, 1969.
- [LT98] Livermore Technology. « *LS-DYNA Theoretical manual* », 1998.
- [MG96] R.S. Mroczkowski et R.J. Geckle. « *Concerning Cold welding in crimped connections* ». Dans *IEEE Holm*, pp. 151–155, 1996.
- [MH83] J.E. Marsden et T.J.R. Hughes. « *Mathematical foundations of elasticity* ». Dover, New York, 1983.
- [MSTa95] T. Morita, Y. Saitoh, M. Takahashi, et al. « *Numerical model of crimping by finite element method* ». Dans *IEEE Holm*, pp. 154–164, 1995.
- [Ogd84] R.W. Ogden. « *Non-linear elastic deformations* ». Dover, New York, 1984.
- [Pus00] M.A. Puso. « *A highly efficient enhanced assumed strain physically stabilized hexahedral element* ». *Int. J. Num. Methods Eng.*, 49, pp.1029–1064, 2000.
- [REN89] « *Assurance qualité sertissage* ». Rapport Technique, 1989.
- [REN98] « *Cahier des charges liaison fil/contact* ». Rapport Technique, 1998.
- [RPCB02] G. Rosazza-Prin, T. Courtin, et L. Boyer. « *A new method to investigate electrical conduction in crimp joints; Influence of the compaction ratio and electrical model* ». Dans *IEEE Holm Conf.*, Octobre 2002.
- [SB89] L. Szabó et M. Balla. « *Comparison of some stress rates* ». *Int. J. Solids Structures*, 25, pp.279–297, 1989.
- [SOG98] « *Cahier des charges connectique* ». Rapport Technique, 1998.
- [SSZ98] P. Schimmerling, J.C. Sisson, et A. Zaïdi. « *Pratique des plans d'expérience* ». TEC-DOC Lavoisier, Paris, 1998.
- [Tim02] R.S. Timsit. « *The technology of high-power connections : a review* ». Dans *ICEC*, 2002.

- [VKBB96] G. Villeneuve, D. Kulkarni, P. Bastnagel, et D. Berry. « *Dynamic finite element analysis simulation of the terminal crimping process* ». Dans *IEEE Holm*, pp. 156–171, 1996.
- [XBM98] H. Xiao, O.T. Bruhns, et A. Meyers. « *On objective corotational rates and their defining spin tensors* ». *Int. J. Solids Structures*, 30, pp.4001–4014, 1998.
- [ZT00] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor. « *The finite element method - Vol.2 : Solid mechanics* ». Butterworth Heinemann, Oxford, 2000.