



HAL
open science

Evolution des outils de simulation rapide du procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson

Guillaume Trouvain

► **To cite this version:**

Guillaume Trouvain. Evolution des outils de simulation rapide du procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson. Autre [cond-mat.other]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2015. Français. NNT : 2015CLF22546 . tel-01162625

HAL Id: tel-01162625

<https://theses.hal.science/tel-01162625>

Submitted on 11 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Titre

Evolution des outils de simulation rapide du procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson

Résumé

Ces travaux de thèse s'intéressent aux outils de simulation rapide de la fabrication d'un pneumatique. L'objectif est de prédire le mouvement et la position des éléments constitutifs du pneumatique, lors de leur mise en conformation, en prenant en compte les déformations induites par les actions mécaniques associées.

Ces travaux s'appuient sur la mise en place d'un algorithme visant à modéliser le gonflement d'un outillage et la mise en place d'un modèle de déformation d'un système de formes géométriques aux caractéristiques mécaniques différentes. L'algorithme de gonflement de l'outillage se base sur la théorie des membranes inextensibles et son industrialisation est validée pour des dimensions standards de pneumatiques. La méthode Masse-Ressort est retenue pour réaliser la déformation de formes géométriques afin d'obtenir des résultats de déformation en temps réel. Dans ces travaux, cette méthode est adaptée aux matériaux d'un pneumatique à partir de travaux de caractérisations géométrique et mécanique validés par comparaison aux Éléments Finis.

En conclusion, la modélisation développée permet une description à chaque étape du procédé de fabrication.

Mots clés

Français :

Modélisation Masse-Ressort, procédé de fabrication, modélisation géométrique, calcul de déformation en temps réel

Anglais :

Mass-Spring modelization, geometric deformation, real-time deformation computation, manufacturing process,

N° d'ordre : 2546
EDSPIC : 687

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL CLERMONT II
ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT FERRAND

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

Guillaume Trouvain

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

Évolution des outils de simulation rapide du procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson

Soutenue publiquement le 30 janvier 2015 devant le Jury

Pr. Claire	LARTIGUE	IUT de Cachan	Présidente du jury
Pr. Guillaume	RACINEUX	EC Nantes	Rapporteur
Pr. Philippe	VÉRON	ENSAM Aix en Provence	Rapporteur
M. Jean François	SANCHO	Michelin	Membre invité
M. Vincent	GAGNOL	Institut Pascal	Co-encadrant de thèse
Pr. Emmanuel	DUC	Institut Pascal	Directeur de thèse

Institut Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée

Remerciements

Tout d'abord je tiens à exprimer ma reconnaissance au Pr Claire Lartigue, présidente du jury, et aux Pr Guillaume Racineux et Pr Philippe Véron, rapporteurs, pour l'intérêt porté à mes travaux de recherche, pour leurs remarques constructives et pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Ensuite, je souhaite exprimer tout ma gratitude envers mon directeur de thèse, Emmanuel Duc, pour son investissement durant ces trois années et sans qui la thèse n'aurait pas eu la même trajectoire. Je le remercie également pour toutes ses idées et ses conseils précieux ainsi que pour sa réactivité et le soutien dans tous les moments de la thèse.

Je souhaite remercier également Vincent Gagnol, co-encadrant de ma thèse, pour son intérêt porté à mon travail, sa disponibilité et sa réactivité, notamment dans les phases de correction des publications et du manuscrit.

De plus cette thèse s'est déroulée en collaboration avec la Manufacture des Pneumatiques Michelin à Clermont-Ferrand au sein du service XAO.

Au sein de ce service, je souhaite remercier vivement Jean François Sancho pour l'intégration au sein du service dès le premier jour ainsi que pour sa disponibilité, ses conseils techniques, son soutien, son implication et son suivi permanent de mes travaux de recherche.

Je tiens à remercier également Carole Barra, Nicolas Rolland qui ont fait partie de mon encadrement et qui ont suivi l'avancée de mes travaux tout au long de ces trois ans.

Je souhaite également remercier Stéphane Aubé et Fabrice Goizet qui m'ont proposé ce sujet de thèse et qui ont également fait partie de l'encadrement de ma thèse.

Je tiens également à remercier l'ensemble des personnes qui ont eu un apport dans mes travaux. Je pense notamment à Pascal Mineau, Michel Garmy et Ramzy Boussetta pour le suivi de mes travaux, aux K-Users Aurélie Thoraval, Benoit Libner pour leurs connaissances de la modélisation, à Marc Leclerc pour ses explications sur le gonflement de l'outillage.

Enfin merci aux personnes que j'ai connu au sein du service XAO pour leur aide technique, les échanges gastronomiques et autres moments sportifs et pour leur soutien. Je pense notamment à Sarah, Kévin, Philippe, Antony, Sébastien, Julien, Jean-François, Alexis, Carlos, Laurence, Arnold...

Merci également aux membres du laboratoire et notamment aux doctorants pour l'ensemble des moments passés ensemble. Je pense tout particulièrement à Bastien, Aurélie, Julien, Benoit, Benjamin, Georges, Simon, Kévin, Charles, Nat, Sami.... Je profite de ces remerciements pour souhaiter bon courage à ceux qui n'en ont pas encore fini !

Et je ne peux pas oublier toute l'équipe, les clermontois pour leur présence au quotidien et ceux qui sont un peu partout en France et en Europe, qui m'ont suivi de près ou de loin à travers différentes aventures. Tout ce petit monde m'a permis de profiter des week-ends, des vacances et de trouver les ressources nécessaires pour mener à terme ces travaux de recherche.

Enfin une pensée particulière pour ma famille qui est toujours présente quelles que soient les épreuves rencontrées.

En résumé, Merci à toutes les personnes dont j'ai croisé le chemin ses dernières années, qui m'ont permis d'arriver là où j'en suis aujourd'hui et qui m'ont permis de vivre des moments que je ne suis pas prêt d'oublier, que ce soit du point de vue professionnel et personnel.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	iii
Table des figures	vii
Liste des tableaux	xi
Résumé	1
Abstract	3
Introduction	5
1 Fabrication du pneumatique et Modélisation de ce processus	7
1 A propos du pneumatique	7
1.1 Constitution d'un pneumatique	7
1.2 Fabrication d'un pneumatique	8
2 Modélisation mécanique	9
2.1 Modélisation actuelle utilisée chez Michelin	9
2.2 Hypothèses de la modélisation Michelin	12
2.3 Limites de la modélisation Michelin	15
3 Problématiques	17
3.1 Problématique industrielle	17
3.2 Problématique scientifique	18
4 Contributions scientifiques	20
2 Modélisation géométrique du gonflement de l'outillage	23
1 Introduction	24
2 Modèles de déformation	25
2.1 Modèles de déformation d'un tissu	25
2.2 Modèles de déformation d'un fil	27
3 Etude théorique du gonflement de l'outillage de fabrication	28
3.1 Hypothèses de l'étude théorique	28

3.2	Les équations de Laplace	31
3.3	Rapport des tensions T	35
4	Tracé d'une courbe guide	36
4.1	Méthode de tracé par calcul discret	36
4.2	Méthode de tracé par calcul continu	38
4.3	Comparaison des deux méthodes	39
5	Modélisation géométrique proposée	41
5.1	Algorithme de gonflement	41
5.2	Application de l'algorithme de gonflement	43
5.3	Validation mécanique	48
6	Comparaison entre l'algorithme de gonflement et la modélisation Michelin	51
6.1	Méthode de tracé Michelin	51
6.2	Apport de l'algorithme de gonflement	52
7	Conclusion	54
3	Déformation unitaire d'une forme géométrique	55
1	Introduction	56
2	Déformation d'une forme géométrique	56
2.1	Définition d'une forme géométrique	56
2.2	Méthodes de déformation et évaluation	57
2.3	Modélisation Masse-Ressort actuelle	67
3	Modélisation Masse-Ressort proposée	73
3.1	Définition des paramètres de caractérisation	73
3.2	Méthode de caractérisation pour des formes industrielles	79
3.3	Investigations complémentaires - cas d'un maillage régulier	92
4	Conclusion	99
4	Déformation physique d'un système de formes géométriques	101
1	Introduction	102
2	Modélisation des éléments d'un pneumatique	102
2.1	Définition géométrique d'un système de formes géométriques	102
2.2	Paramétrage du système Masse-Ressort associé	103
3	Interactions entre les éléments du pneumatique	104
3.1	Interpénétration de matière	105
3.2	Méthodes de détection d'interférences	105
4	Modélisation mécanique du procédé de fabrication	107
4.1	Étape 1 : Assemblage des éléments sur l'outillage	107
4.2	Étape 2 : Translation de l'outillage jusqu'à la rencontre de la tringle	112
4.3	Étape 3 : Enroulement autour d'une forme indéformable	116
4.4	Étape 4 : Gonflement de l'outillage	121
5	Conclusion	127
	Conclusion et Perspectives	129

Annexes	133
1 Exemples de pneumatiques	133
2 Mise en donnée des tests des premiers tests de caractérisation	135
Bibliographie	137

Table des figures

1	Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.	5
1.1	Coupe transversale d'un pneumatique tourisme.	8
1.2	Exemple d'outillage de fabrication.	9
1.3	Processus de développement d'un pneumatique.	10
1.4	Exemple d'une coupe 2D du pneumatique à industrialiser.	10
1.5	Type de forme polygonale d'un élément du pneumatique.	11
1.6	Exemple d'assemblage des éléments constituant le pneumatique.	11
1.7	Déformation des éléments de la partie basse jusqu'à un état intermédiaire.	12
1.8	Forme finale de la section du pneumatique avant cuisson.	12
1.9	Conservation de volume d'un élément au cours de sa déformation.	13
1.10	Exemple de discrétisation d'une forme géométrique.	14
1.11	Exemple de courbe "support".	14
1.12	Comportement non physique d'un élément rigide déformable.	15
1.13	Absence d'interactions entre les formes géométriques.	16
1.14	Exemples d'interpénétration de formes géométriques.	16
1.15	Interpénétration d'une forme géométrique avec l'outillage.	17
1.16	Déformation de l'outillage pendant le procédé de fabrication d'un pneu- matique [Michelin, 2014].	19
1.17	Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.	19
2.1	Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.	24
2.2	Deformation de l'outillage pendant le procédé de fabrication d'un pneu- matique [Michelin, 2014].	24
2.3	Courbes modélisant le gonflement de l'outillage.	25
2.4	Modèle de Kelvin-Voigt d'une barre d'un système Masse-Ressort.	27
2.5	Représentation de la flexion entre deux barres modélisant un fil [Casiez, 2001].	28
2.6	Gonflement de l'outillage	30
2.7	Paramétrage.	30
2.8	Forces s'appliquant à un élément de membrane.	31
2.9	Relations entre ρ , ϕ et r	33
2.10	Expression du rayon de courbure en fonction de x et r	34
2.11	Algorithme de génération de la courbe guide par calcul discret.	37
2.12	Exemple de tracé par calcul discret des courbes guides.	38

2.13	Algorithme de génération de la courbe guide avec la méthode développée. . .	43
2.14	Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Deux Roues". L=86,5mm, EM=1,91mm , ME=1,59mm , ET=1,64mm	45
2.15	Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Tourisme". L=112mm, EM= 2,14mm, ME=1,81mm , ET= 1,87mm	45
2.16	Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Poids lourd". L=288mm, EM=8,52mm , ME=7,08mm , ET=7,32mm	46
2.17	Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Agricole". L=444mm, EM= 8,95mm, ME= 8,63mm, ET= 8,95mm	46
2.18	Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Génie Civil". L=1320mm, EM=18,61mm , ME=18,1mm , ET=18,61mm	47
2.19	Schéma de principe pour la validation du modèle géométrique.	49
2.20	Validation de la méthode de tracé par calcul continu.	49
2.21	Courbes guides tracées avec la modélisation Michelin.	51
3.1	Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.	55
3.2	Exemples de formes géométriques.	57
3.3	Exemple de déformation d'un objet par la méthode FFD [Sederberg et Parry, 1986].	59
3.4	Illustration de la méthode de déformation par maillage englobant.	60
3.5	Discrétisation des formes déformables.	61
3.6	Exemple d'animations de corps rigides sous phun [Algodoo, 2014].	61
3.7	Maillage composé de masse et de ressorts [Meier <i>et al.</i> , 2005].	64
3.9	Raffinement du maillage [Hutchinson <i>et al.</i> , 1996].	64
3.8	Utilisation des ressorts angulaires [Tang et Hui, 2009].	65
3.10	Maillage d'un élément et définition des raideurs des ressorts.	70
3.11	Répartition des masses sur les particules d'un système Masse-Ressort dans le cas d'un maillage triangulaire	71
3.12	Types de maillage utilisés dans la littérature	72
3.13	Deux types de maillage testés.	74
3.14	Schémas de principe des tests réalisés.	75
3.15	Recherche de la raideur optimale dans le cas d'une poutre 200*30 en acier pour deux types de maillage.	75
3.16	Écart de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage contraint en traction.	76
3.17	Écart de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage libre en traction.	77
3.18	Erreur de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage contraint en compression.	78
3.19	Erreur de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage structuré en compression.	78

3.20	Formes géométriques génériques utilisées lors de la fabrication d'un pneumatique.	79
3.21	Mise en donnée sur une forme industrielle.	80
3.22	Déformation d'une forme géométrique par Éléments Finis.	81
3.23	Forme 1.	81
3.24	Définition de la raideur "optimale" pour trois types de matériaux. Forme 1.	82
3.25	Forme 2.	82
3.26	Définition de la raideur "optimale" pour trois types de matériaux. Forme 2.	83
3.27	Forme 3.	84
3.28	Définition de la raideur "optimale" pour trois types de matériaux. Forme 3	84
3.29	Forme 1.	87
3.30	Comparaison des déformées des courbes basses obtenues par Éléments Finis et Masse-Ressort pour les trois matériaux. Forme 1	87
3.31	Erreurs de déformation dues au maillage	88
3.32	Forme 2.	89
3.33	Comparaison des déformées des courbes basses obtenues par Éléments Finis et Masse-Ressort pour les trois matériaux. Forme 2.	89
3.34	Forme 3.	90
3.35	Comparaison des déformées des courbes basses obtenues par Éléments Finis et Masse-Ressort pour les trois matériaux. Forme 3.	91
3.36	Forme rectangulaire utilisée pour tester un autre maillage	92
3.37	Répartition homogène des ressorts dans la forme rectangulaire	93
3.38	Déformée de la courbe basse pour différentes raideurs de ressorts	94
3.39	Maillage régulier de la Forme 1	95
3.40	Comparaison de la déformation de courbe basse de la Forme 1 en fonction du maillage	96
3.41	Déformée de la courbe haute pour un maillage régulier	96
3.42	Forme rectangulaire pour réaliser le calcul de contraintes	97
3.43	Comparaison des états de contraintes σ_{yy} entre les modèles Masse-Ressort et Éléments Finis	98
4.1	Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.	101
4.2	Système de formes géométriques.	103
4.3	Forme géométrique et ses points caractéristiques.	103
4.4	Frontières dans un système de formes géométriques.	103
4.5	Ressorts sur la frontière entre deux formes géométriques.	104
4.6	Exemple d'interpénétration de matière obtenu avec la méthode actuelle.	105
4.7	Exemple d'intersection entre un point et une forme géométrique [Chendeb, 2007].	106
4.8	Les quatre étapes du procédé de fabrication.	107
4.9	Limites du modèle Michelin lors de l'étape de l'assemblage.	108
4.10	Modélisation de la pose d'une forme géométrique (mise en donnée).	109
4.11	Forme trapézoïdale et courbe support (modèle Michelin).	109

4.12	Modélisation de l'assemblage de deux formes géométriques.	110
4.13	Comparaison de la déformation géométrique du modèle de l'assemblage de deux formes géométriques.	110
4.14	Limite de la modélisation Michelin.	112
4.15	Schéma de principe de la collision entre deux formes déformables et une forme indéformable.	113
4.16	Modélisation de la collision entre une forme indéformable et deux formes déformables.	114
4.17	Limite de modélisation de l'étape d'enroulement autour d'une forme indéformable.	116
4.18	Limite de modélisation de l'étape d'enroulement autour d'une forme indéformable.	117
4.19	Dimensions de la forme déformable.	117
4.20	État initial.	118
4.21	Schémas de principe des étapes du retournement.	118
4.22	Déplacement imposé à l'extrémité de la forme géométrique.	119
4.23	Modélisation de l'enroulement d'une forme géométrique déformable autour d'une forme géométrique indéformable.	119
4.24	États de déformation calculés par le modèle Michelin.	121
4.25	Dimension des formes géométriques pour la maquette de gonflement.	122
4.26	Positionnement des trois formes géométriques sur l'outillage.	122
4.27	Principe de modélisation en continu de la déformation de la courbe guide.	123
4.28	Pilotage en déplacement de la courbe basse des formes géométriques	123
4.29	Modélisation du gonflement d'un système de formes géométriques par la méthode Michelin.	124
4.30	Modélisation du gonflement d'un système de formes géométriques par la méthode Masse-Ressort.	124
4.31	Modélisation du gonflement d'un système de formes géométriques par la méthode Éléments Finis.	124
4.32	Comparaison des déformés de la courbe haute entre les trois modèles.	126
4.33	Comparaison des déformées à un endroit précis de la courbe haute.	126
34	Exemples de pneumatiques (1).	133
35	Exemples de pneumatiques (2).	134

Liste des tableaux

2.1	Temps de calcul et comparaison de longueur pour une courbe donnée (R_S 330mm, R_B 250mm, R_E 270mm).	40
2.2	Écart géométrique entre la courbe discrète et la courbe continue pour une courbe donnée (R_S 330mm, R_B 250mm, R_E 270mm).	41
2.3	Exemples des dimensions d'outillages utilisés pour fabriquer un pneumatique.	44
2.4	Comparaison des écarts géométriques pour les différents types de membrane.	47
2.5	Temps de calcul pour tracer 20 courbes entre l'étape initiale et l'étape finale.	48
2.6	Dimensions des cinq courbes de validation.	50
2.7	Écart entre les courbes calculées avec l'algorithme de gonflement et la courbe déformée par application d'une pression.	50
2.8	Dimensions des pneumatiques testés.	52
2.9	Écart géométrique entre les courbes guides pour différentes applications.	52
2.10	Comparaison des longueurs pour les différents cas tracés avec la méthode Michelin et la méthode proposée.	53
3.1	Symboles utilisés pour évaluer les méthodes de déformation.	58
3.2	Synthèses des méthodes géométriques.	66
3.3	Synthèses des méthodes numériques de déformation.	67
3.4	Caractéristiques des matériaux.	80
3.5	Pression appliquée sur la courbe basse des formes géométriques en fonction du matériau.	80
3.6	Ecart entre l'élasticité du matériau et la raideur des ressorts. Cas de l'Acier.	85
3.7	Ecart entre l'élasticité du matériau et la raideur des ressorts. Cas de l'Aluminium.	85
3.8	Ecart entre l'élasticité du matériau et la raideur des ressorts. Cas du Caoutchouc.	86
3.9	Ecart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux. Forme 1.	88
3.10	Écart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux. Forme 2.	90
3.11	Écart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux. Forme 3.	91

3.12	Écart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux Forme rectangulaire	94
4.1	Comparaison des modèles Michelin, Masse-Ressort et Éléments Finis pour la modélisation de l'étape d'assemblage.	111
4.2	Comparaison des modèles Michelin et Masse-Ressort pour la modélisation de la collision avec une forme indéformable.	115
4.3	Comparaison des modèles Michelin et Masses Ressorts pour la modélisation de l'enroulement autour d'une forme indéformable.	120
4.4	Comparaison des modèles Michelin, Masse-Ressort et Éléments Finis pour la modélisation du gonflement.	125
4.5	Comparaison géométrique des courbes hautes par rapport au modèle Michelin.126	
4.6	Comparaison des aires des systèmes déformés par rapport au modèle Michelin.127	
7	Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de traction (maillage structuré)	135
8	Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de traction (maillage libre)	135
9	Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de compression (maillage structuré)	135
10	Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de compression (maillage libre)	136

Résumé

Dans l'industrie du pneumatique, les phases de développement de nouveaux produits représentent un coût financier important. Les travaux développés dans cette thèse ont pour objectifs de réduire le temps de développement des produits en phase d'industrialisation.

Le travail de thèse est réalisé conjointement au sein de l'Institut Pascal de Clermont-Ferrand et du service de développement des outils de modélisation du procédé de fabrication de la Manufacture Française des Pneumatiques Michelin. Ces travaux couvrent deux problématiques : la mise en place d'un modèle géométrique modélisant le gonflement d'un outillage de fabrication d'un pneumatique et la mise en place d'un modèle de déformation d'un système de formes géométriques aux caractéristiques mécaniques différentes.

Pour répondre à la première problématique, une méthode basée sur la théorie des membranes inextensibles est développée pour modéliser le gonflement de l'outillage lors de la fabrication. L'approche développée est validée pour les dimensions standards des outillages de fabrication des pneumatiques Michelin.

En ce qui concerne la seconde problématique, la méthode Masse-Ressort est utilisée pour déformer en temps réel une forme géométrique en prenant en compte des paramètres mécaniques. Des travaux sur les caractérisations géométriques et mécaniques des systèmes Masse-Ressort sont réalisés. Les déformations des éléments d'un pneumatique obtenues avec la méthode Masse-Ressort sont comparées au modèle Éléments Finis qui fait office de référence.

Les modèles développés précédemment couplés à un moteur de collision sont utilisés pour proposer un outil de modélisation du procédé de fabrication avant cuisson. Pour valider cet outil, les étapes du procédé de fabrication sont simulées et les résultats sont comparés au modèle Michelin actuel et au modèle Éléments Finis.

Au final, la modélisation développée intègre les caractéristiques matériaux des éléments constituant un pneumatique. Le couplage à un moteur de collision permet de simuler de façon très réaliste les contacts entre éléments. La modélisation proposée permet une description à chaque étape de la déformation de l'outillage et permet à l'utilisateur de mieux appréhender les phénomènes de déformation au sein du pneumatique. Les temps de calcul sont supérieurs à l'approche actuelle mais acceptables en contexte industriel.

Abstract

In the tire industry, the phases of development of new products represent a significant financial cost. The work developed in this PHD aims to reduce the development time of products during the industrialization phase.

This PHD is done with the Institute of Pascal and Michelin in Clermont-Ferrand. These works cover two problems : the introduction of a geometric model to simulate the tool inflation for manufacturing a tire and the introduction of a deformation model of geometric shapes taking into account mechanical characteristics.

To solve the first problem, a method based on the theory of the inextensible membrane is developed to model the tool inflation. The developed approach is validated for standard dimensions of manufacturing tools.

According to the second problem, the spring-mass method is used in real time for deforming a geometric shape taking into account mechanical parameters. The works on the geometrical and mechanical characterizations of mass-spring systems are done. Deformations of the tire components are compared with Finite Element Method which is the reference method.

Models developed coupled to a collision engine are used to provide a method to model the manufacturing process before curing. To validate this method, the steps of the manufacturing process are simulated. The results are compared to the current model Michelin and the Finite Element Method.

Finally, the developed model take into account the features of the tire components. A collision engine is used to simulate contacts between the components. The proposed model provides a description of each step of the deformation of the tool and allows the user to understand the phenomena of deformation in the tire. Computation time is superior than the current industrial model but it is acceptable approach.

Introduction

Dans le domaine de l'industrie du pneumatique, les phases de développement de nouveaux produits représentent un coût financier important. Dans le but de réduire ces phases, la Manufacture Française des Pneumatiques Michelin utilise et développe des outils de simulation rapide du procédé de fabrication. Ces outils permettent aux designers de pneumatiques de visualiser en temps réel la mise en forme subie par les éléments qui constituent un pneumatique avec la déformation de l'outillage. Cependant ces outils utilisent des modèles de déformation simplifiés, qui dans certains cas peuvent fournir des résultats incohérents avec la réalité mécanique. Ces erreurs doivent être corrigées a posteriori par les utilisateurs ce qui ralentit le processus d'industrialisation du pneumatique.

Nos travaux portent sur la modélisation du gonflement de l'outillage et sur le calcul de déformation des éléments qui composent un pneumatique. Ils sont réalisés afin de réduire le temps de simulation de ces phases et notamment celle d'industrialisation.

Les travaux de cette thèse visent à modéliser géométriquement la déformation des éléments composant un pneumatique durant les différentes étapes du procédé de fabrication afin de réduire les coûts d'industrialisation. Ainsi, un outil de modélisation temps réel de la déformation d'un assemblage de formes géométriques aux caractéristiques mécaniques différentes est développé.

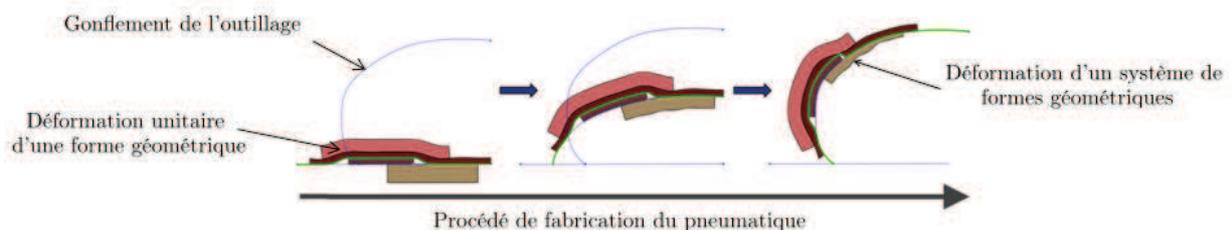


FIGURE 1 – Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.

Pour ce faire, le procédé de fabrication d'un pneumatique est présenté dans le Chapitre 1 ainsi que l'approche de la modélisation actuelle. L'analyse de cette approche permet d'identifier deux verrous scientifiques. La démarche pour les résoudre est la suivante.

Le procédé de fabrication est modélisé géométriquement par l'intermédiaire du tracé du gonflement de l'outillage de fabrication. Cette méthode modélise par des courbes, appelées

courbes guides, le gonflement de l'outillage de l'étape initiale à l'étape finale du procédé de fabrication. Le tracé de ces courbes repose sur la théorie de la déformation d'une membrane inextensible développée dans le Chapitre 2.

Une comparaison des méthodes de déformation de formes géométriques est réalisée dans le Chapitre 3. Parmi ces dernières, la méthode Masse-Ressort est retenue, car elle permet de calculer des déformations en temps réel en prenant en considération les caractéristiques mécaniques des éléments modélisés. Cependant, cette méthode doit être adaptée pour modéliser la mise en forme d'un pneumatique lors de sa fabrication. Pour cela, une étude de sensibilité est réalisée afin d'identifier les paramètres qui influent sur la modélisation d'un système Masse-Ressort conformément au cahier des charges industriel présenté dans le Chapitre 1.

Le Chapitre 4 présente la modélisation proposée du procédé de fabrication d'un pneumatique séquencé. Pour réaliser ces travaux, la modélisation géométrique du gonflement de l'outillage, développé Chapitre 2, est utilisée pour piloter la déformation d'un système de formes géométriques modélisé avec la méthode Masse-Ressort, développée Chapitre 3. La modélisation proposée est comparée à la modélisation Michelin et à une modélisation par Éléments Finis.

Le gonflement de l'outillage et la déformation du pneumatique sont ainsi modélisés. La modélisation finale permet de définir, de façon plus précise, la déformation des formes géométriques et leur emplacement sur l'outillage de fabrication par rapport à la modélisation actuelle.

Cette thèse est réalisée en partenariat avec la Manufacture Française des Pneumatiques Michelin, plus précisément avec le service en charge du développement des outils d'aide à l'industrialisation du pneumatique, et l'Institut Pascal à Clermont-Ferrand.

Chapitre 1

Fabrication du pneumatique et Modélisation de ce processus

Sommaire

1	A propos du pneumatique	7
1.1	Constitution d'un pneumatique	7
1.2	Fabrication d'un pneumatique	8
2	Modélisation mécanique	9
2.1	Modélisation actuelle utilisée chez Michelin	9
2.2	Hypothèses de la modélisation Michelin	12
2.3	Limites de la modélisation Michelin	15
3	Problématiques	17
3.1	Problématique industrielle	17
3.2	Problématique scientifique	18
4	Contributions scientifiques	20

1 A propos du pneumatique

1.1 Constitution d'un pneumatique

Le pneumatique voit le jour à la fin du XIX^e siècle, dans l'entreprise Dunlop, pour équiper dans un premier temps les vélos. Au cours du XX^e siècle des améliorations telles que le pneu à chambre à air, le pneu à architecture radiale développé par Michelin en 1946 (Figure 1.1) ainsi que le pneu tubeless ont permis un développement important dans le monde automobile.

Un pneumatique est une pièce mécanique composite constitué d'un certain nombre d'éléments métallique, textile ou polymère lui conférant ses propriétés de résistance mécanique, d'adhérence et de résistance à l'usure.

Sur la Figure 1.1 apparaissent, les différents éléments standards constituant un pneumatique tels que :

- La "Tringle", fabriquée en acier, qui sert à lier le pneu à la jante ;
- Les différentes nappes constituées d'un mélange de caoutchouc et de textile ou d'acier ("Nappes Ceintures" en nylon ou en acier). Ces nappes servent à rigidifier le pneumatique ;
- Les différents éléments en caoutchouc tels que la "Gomme intérieure d'étanchéité" qui a la même fonction qu'une chambre à air, la "Bande de roulement" qui est le contact entre le pneu et la route ou encore le "Flanc" où se trouvent inscrites les différentes caractéristiques et marque du pneumatique.

L'ensemble de ces éléments apparaît dans tous les types de pneumatiques, que ce soit pour un pneu tourisme, agricole, deux roues ou poids lourds (Annexe 1). Seules leurs dimensions et leurs formes géométriques diffèrent d'un type à l'autre. De plus, chaque élément a un rôle dans les performances du pneumatique (résistance au roulement, bruit,...). La fabrication d'un pneumatique doit garantir le respect de la forme et de la position de ces éléments.

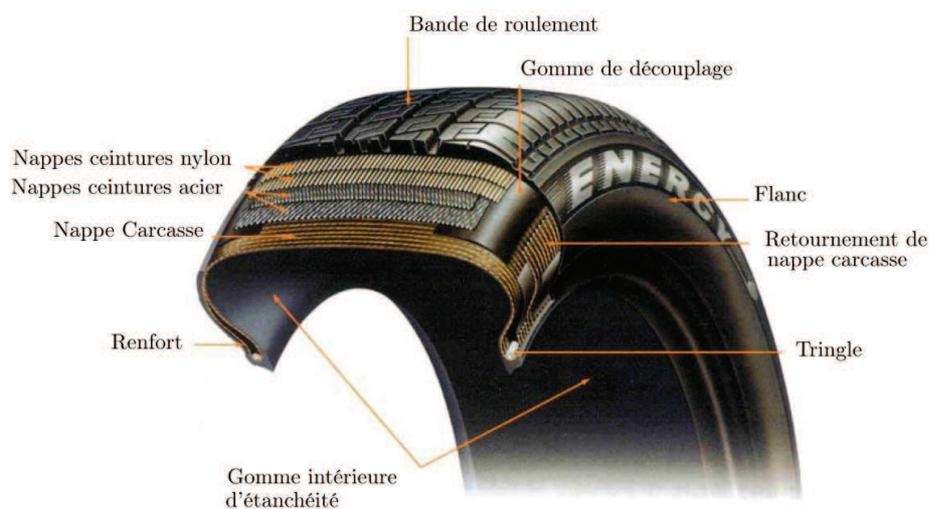


FIGURE 1.1 – Coupe transversale d'un pneumatique tourisme.

1.2 Fabrication d'un pneumatique

Un pneumatique peut être fabriqué selon différents procédés industriels qui comportent trois étapes communes :

1. La fabrication de produits semi-finis constituant le pneumatique :

Chaque élément de section polygonale possède son propre procédé de fabrication. Cette caractéristique géométrique permet de produire les éléments en caoutchouc ou les nappes composées de textile ou d'acier par extrusion en quantité industrielle.

2. L'assemblage des produits semi-finis :

Cet assemblage est réalisé sur un outillage spécial appelé "Tambour" constitué d'une membrane inextensible qui se gonfle au cours du procédé (Figure 1.2). À cette étape, les différents produits semi-finis sont positionnés les uns par rapports aux autres et déformés jusqu'à obtenir par gonflement la forme du pneumatique finale avant cuisson.



FIGURE 1.2 – Exemple d'outillage de fabrication.

3. La cuisson :

La cuisson permet la vulcanisation du caoutchouc à l'intérieur d'un moule dans lequel le pneumatique est cuit à une température comprise en 160°C et 190°C. Cette étape peut durer de quelques minutes à quelques heures suivant le type de pneumatique. La cuisson confère la forme et les caractéristiques finales des matériaux utilisés.

L'étude menée ici porte plus précisément sur la modélisation de la seconde étape du procédé de fabrication Michelin. Ce procédé consiste à concevoir la carcasse du pneumatique et la bande de roulement séparément sur deux "tambours" de diamètres différents, dans un premier temps, puis de les assembler dans un second temps.

2 Modélisation mécanique

Aujourd'hui, le procédé de fabrication est modélisé mécaniquement en quatre étapes. Pour réaliser cette modélisation, des hypothèses sont définies avec les utilisateurs. Cependant ces hypothèses entraînent des limites et des erreurs de modélisation.

2.1 Modélisation actuelle utilisée chez Michelin

Le but de la modélisation mécanique de la fabrication d'un pneumatique est de représenter l'assemblage et la déformation des éléments qui constituent un pneumatique, tout au long du procédé de fabrication. Cette modélisation est utilisée par l'ingénieur responsable de l'étude de la phase d'industrialisation. Cette phase est comprise entre la phase de conception

du pneumatique et son lancement en production (Figure 1.3). La modélisation permet de réaliser plusieurs prototypes virtuels afin d’obtenir un pneumatique fabricable respectant le cahier des charges initial. Les prototypes virtuels sont ensuite fabriqués pour la validation du pneumatique développé avant son industrialisation à grande échelle.

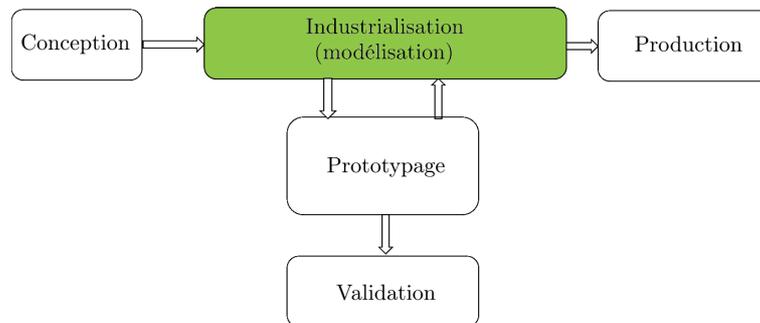


FIGURE 1.3 – Processus de développement d’un pneumatique.

L’ingénieur chargé de la conception d’un pneumatique modélise, avec un logiciel de CAO, une coupe 2D de la forme finale du pneumatique à concevoir à partir du cahier des charges (Figure 1.4). Ce modèle constitue la donnée d’entrée pour la modélisation de la fabrication d’un pneumatique. En effet, la modélisation doit permettre d’obtenir la forme géométrique initiale des différents éléments du pneumatique afin de pouvoir les fabriquer. De plus, elle doit simuler l’assemblage des produits semi-finis sur un outillage et la déformation de ce dernier jusqu’à obtenir la forme finale du pneumatique avant cuisson.

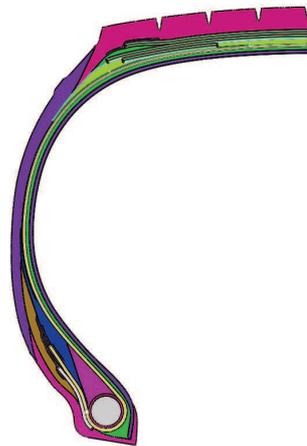


FIGURE 1.4 – Exemple d’une coupe 2D du pneumatique à industrialiser.

L’objectif de la modélisation est de représenter les différentes étapes de la fabrication afin d’atteindre la cible définie préalablement. Ces étapes sont :

1. *La définition de formes géométriques polygonales représentant les sections des différents éléments constituant le pneumatique (Figure 1.5)*

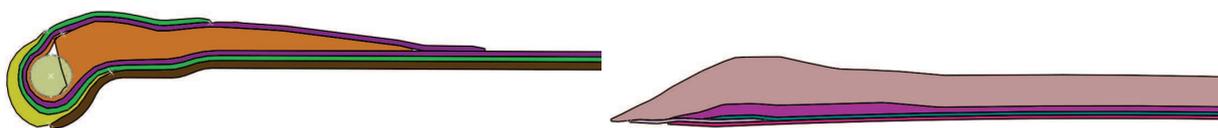
Les éléments constituant un pneumatique sont pour la plupart extrudés. Cependant la forme de leur section exacte n'est pas directement fabricable dans un contexte industriel pour des causes de coût essentiellement. Une forme polygonale approchée en est déduite avec une précision de $0,1\text{mm}$.



FIGURE 1.5 – Type de forme polygonale d'un élément du pneumatique.

2. *Le positionnement de chaque forme géométrique sur l'outillage afin de constituer un pneumatique "à plat" (Figure 1.6)*

Les différents éléments du pneumatique sont positionnés les uns par rapport aux autres sur un outillage. La connaissance de ce positionnement permet à l'opérateur en usine de régler la machine d'assemblage lors de la phase de prototypage et ensuite lors de la fabrication en grande série. Deux assemblages correspondant à la partie basse du pneumatique (la carcasse du pneumatique) et la partie haute du pneumatique (les nappes métalliques de renfort et de la bande de roulement) sont créés sur deux outillages différents et constituent deux systèmes de formes géométriques.



(a) Assemblage des éléments de la partie basse. (b) Assemblage des éléments de la partie haute.

FIGURE 1.6 – Exemple d'assemblage des éléments constituant le pneumatique.

3. *La simulation de la déformation de l'outillage jusqu'à l'étape d'assemblage de la partie basse et de la partie haute du pneumatique (Figure 1.7)*

Cette première simulation modélise la déformation du système de formes géométriques constituant la partie basse du pneumatique créé à l'étape précédente. Cette modélisation représente la déformation des différents éléments du pneumatique lors de la déformation de l'outillage jusqu'à l'assemblage de la partie basse et partie haute du pneumatique.

4. *La simulation de l'assemblage de la partie basse et haute du pneumatique (Figure 1.7)*

Lors de la modélisation de cet assemblage, le système composé des formes géométriques de la partie haute du pneumatique est assemblé au système initial afin de constituer le système de forme géométrique complet.

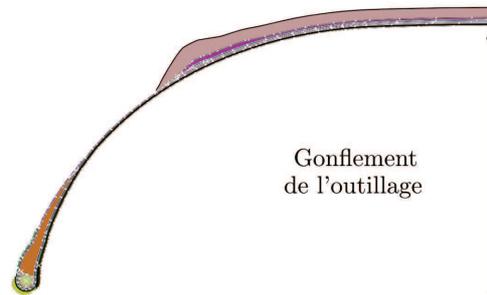


FIGURE 1.7 – Déformation des éléments de la partie basse jusqu'à un état intermédiaire.

5. *La simulation jusqu'à l'état final avant cuisson du pneumatique et la comparaison avec la CAO représentant la cible de la modélisation (Figure 1.8) :*

Cette dernière simulation déforme le système créé à l'étape précédente jusqu'à un état final représentant la section du pneumatique avant cuisson. Cette section correspond à la version du pneumatique industrialisée et doit être comparée avec la section cible définie Figure 1.4.

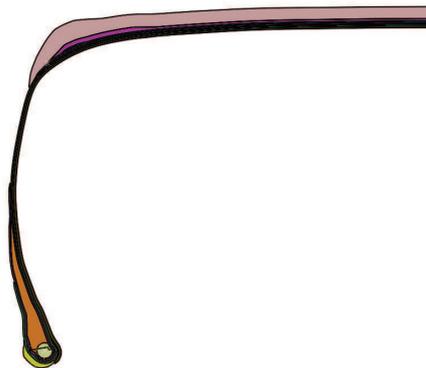


FIGURE 1.8 – Forme finale de la section du pneumatique avant cuisson.

Ainsi, plus les étapes de modélisation sont réalistes et rapides, plus la phase d'industrialisation est efficace et participe à la diminution des coûts de développement d'un pneumatique.

Cependant, la modélisation actuelle comporte des erreurs, présentées en Section 2.3, qui pénalisent son utilisation. Avant de présenter ces limites de modélisation et de comprendre leur cause, les hypothèses de modélisation sont présentées dans la section 2.2.

2.2 Hypothèses de la modélisation Michelin

La modélisation des étapes de fabrication définies s'appuie sur plusieurs hypothèses :

- a) *Conservation du volume*

Un pneumatique est composé essentiellement de caoutchouc considéré comme incompressible. Ainsi l'hypothèse de conservation de volume de l'ensemble des éléments qui le constitue est faite (Equation 1.1).

Lors de la fabrication, chaque élément est posé sur un outillage du type "Tambour" (Figure 1.2). Ce dernier admet une symétrie de révolution tout au long de sa déformation qui permet de ne représenter qu'une section du pneumatique étudié. Cette possibilité, couplée au fait que l'outillage subit un changement de diamètre lors de la fabrication, permet d'appliquer l'équation 1.2 aux différents éléments constituant le pneumatique. Cette équation traduit la conservation de volume d'un élément, posé sur un outillage, qui conserve sa largeur mais dont l'épaisseur varie lors du changement de diamètre de l'outillage.

$$V_{initial} = V_{final} \quad (1.1)$$

$$L_1 = L_2$$

$$2\pi * R_1 * S_{initiale} = 2\pi * R_2 * S_{finale}$$

$$R_1 * h * L_1 = R_2 * h' * L_2$$

$$h' = \frac{R_1 * h}{R_2} \quad (1.2)$$

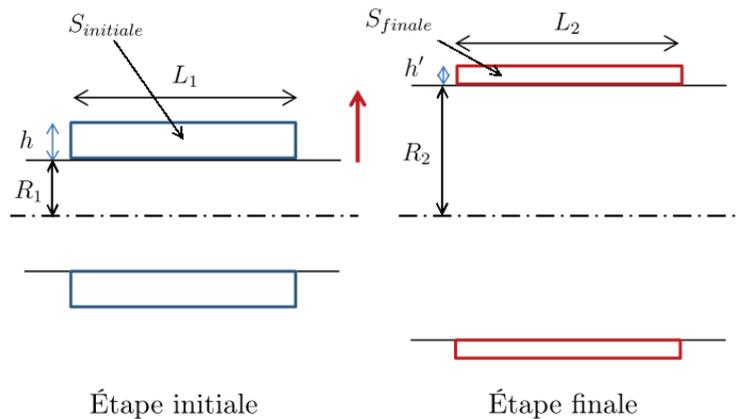


FIGURE 1.9 – Conservation de volume d'un élément au cours de sa déformation.

2. Discrétisation des formes géométriques :

Les éléments composant un pneumatique sont représentés sous une forme géométrique polygonale (Figure 1.5). Ces formes géométriques sont ensuite discrétisées en éléments par plusieurs segments (Figure 1.10). Cette discrétisation permet d'appliquer l'hypothèse de conservation de volume en faisant varier l'épaisseur des différentes formes géométriques.

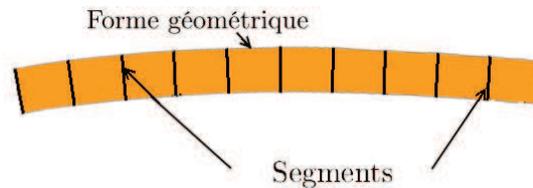


FIGURE 1.10 – Exemple de discrétisation d'une forme géométrique.

3. Positionnement des formes géométriques lors de l'assemblage

Afin de positionner les formes géométriques les unes par rapport aux autres, une courbe est créée après l'ajout de chaque forme géométrique (Figure 1.11). Cette courbe, appelée "courbe support", passe partiellement ou entièrement par les contours de la forme précédemment ajoutée. Ainsi la forme ajoutée par la suite est posée en contact sur cette courbe par rapport à sa position curviligne définie préalablement. Ceci permet d'obtenir un positionnement précis de chaque forme géométrique afin d'obtenir le réglage de la machine lors de la fabrication.

L'intérêt de l'utilisation des courbes support est de simplifier l'étape de positionnement des formes géométriques les unes par rapport aux autres, en un positionnement d'une forme sur une courbe. Cette simplification permet ainsi d'obtenir une modélisation en temps réel en CAO.

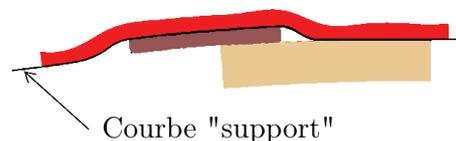


FIGURE 1.11 – Exemple de courbe "support".

4. Calcul de la déformation des formes géométriques

La modélisation Michelin est géométrique et utilise des outils géométriques tels que des courbes support présentées précédemment. Par contre elle ne représente que les étapes initiale et finale de la déformation des formes géométriques. Ainsi les résultats de la déformation sont calculés en temps réel (temps inférieur à 30 secondes) pour l'ensemble des étapes du procédé de fabrication. Cependant, elle ne permet pas à l'utilisateur de comprendre les phénomènes apparaissant entre les deux étapes.

L'ensemble de ces hypothèses permet de modéliser géométriquement la fabrication d'un pneumatique en moins d'une dizaine de secondes, ce qui correspond à une modélisation dite en temps réel. De plus, cela permet d'obtenir le placement des produits sur l'outillage avec une précision dimensionnelle de $10^{-3}mm$ qui correspond à la précision demandée par les utilisateurs. Cependant, la nature géométrique de la modélisation conduit à des limites dans la représentation de la déformation des formes géométriques présentées ci-après.

2.3 Limites de la modélisation Michelin

Les limites de la modélisation inhérentes à la nature géométrique entraînent des erreurs dans la simulation de la fabrication d'un pneumatique. Ces limites ont un impact sur la durée de développement d'un nouveau pneumatique. Ces limites sont regroupées en différentes catégories par rapport à leur cause :

1. Déformation non réaliste des formes géométriques

Dans un pneumatique quatre grands types d'éléments sont présents : les éléments gommés (élément déformable), les nappes textiles ou métalliques (élément rigide déformable), les tringles (éléments indéformables). Or, dans la modélisation Michelin, toutes les formes géométriques sont caractérisées physiquement de la même façon. Autrement dit, une forme géométrique modélisant un élément textile ou métallique se déforme de la même manière qu'une forme géométrique modélisant une gomme caoutchouc. Les résultats obtenus sont donc éloignés de la réalité physique comme le montre la Figure 1.12 où la forme géométrique verte représente une nappe métallique subissant une déformation irréaliste.

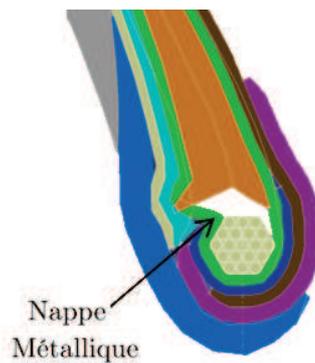


FIGURE 1.12 – Comportement non physique d'un élément rigide déformable.

2. Interactions entre les formes géométriques non prises en compte

L'interaction entre les formes géométriques n'est pas prise en compte en raison de l'utilisation des courbes "supports" (Partie 2.2) et aux caractéristiques du moteur de déformation Michelin. En effet, ce moteur de déformation pose chaque forme géométrique en contact sur une courbe "support". Cette forme est indépendante mécaniquement des formes géométriques sur laquelle elle est posée. Cette hypothèse de modélisation représente une limite lorsque la déformation d'une forme géométrique entraîne la déformation des formes en contact avec elle.

Ce cas est illustré Figure 1.13 où une forme arrondie, Forme 2, est assemblée à une forme rectangulaire, Forme 1. Cette dernière subit un effort de compression horizontale ce qui modifie la largeur de la Forme 2 si les interactions sont prises en compte (cas 1). Or dans le cas de la modélisation Michelin, les interactions ne sont pas prises en compte et la largeur de la Forme 2 ne varie pas (cas 2).

Cette limite de modélisation intervient au niveau de la partie haute du pneumatique où les "nappes de renfort" ont une influence sur la géométrie des éléments en contact avec

celles-ci. En effet, la largeur de ces nappes diminue lors du processus de fabrication et la largeur des éléments collés à ces nappes diminue également (Figure 1.13). Or, les interactions entre les éléments n'étant pas prise en compte par le modèle Michelin, la largeur des formes géométriques en contact avec celles modélisant les "nappes de renfort" ne varie pas.

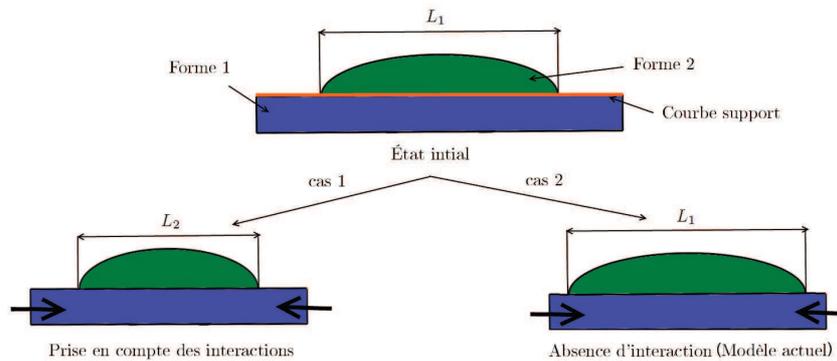


FIGURE 1.13 – Absence d'interactions entre les formes géométriques.

3. Interpénétration entre les formes géométriques

Afin d'accélérer l'ajout des formes géométriques dans les différents états du procédé de fabrication d'un pneumatique, une courbe support est construite après chaque ajout de forme géométrique et la forme suivante est en contact intégral avec cette courbe. Cette courbe "support" est lissée et peut donc être tracée à l'intérieur de certaines formes, ce qui explique l'interpénétration des formes géométriques dans la modélisation Michelin du procédé de fabrication (Figure 1.14a). Un autre cas d'interpénétration de matière intervient lors de la déformation de l'outillage et lorsque les formes géométriques assemblées sur ce dernier ne se déforment pas à la rencontre de formes indéformables durant la simulation. Cette limite est illustrée par la Figure (1.14b) où une forme géométrique représentant un élément caoutchouc entre en collision et interpénètre une autre forme géométrique représentant un élément acier indéformable. Dans ces cas, l'absence de modélisation de la déformation des formes géométriques due à l'absence de détections des interférences entre les formes géométriques entraîne une erreur dans la modélisation.

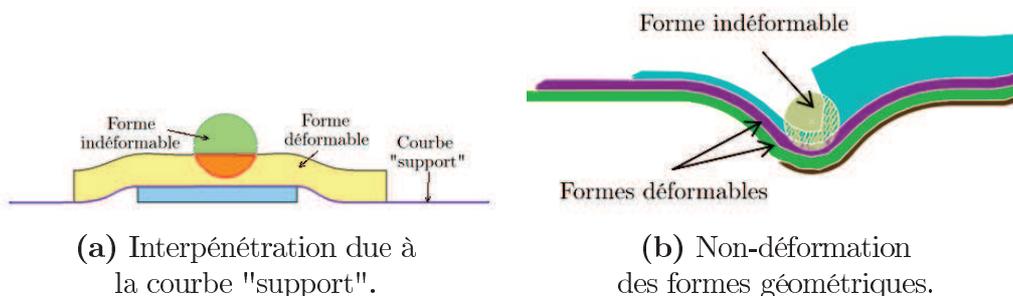


FIGURE 1.14 – Exemples d'interpénétration de formes géométriques.

4. Interpénétration dans l'outillage

Les différentes formes géométriques sont positionnées par rapport à la partie basse de leur contour qui est en contact avec une courbe support. Le reste du contour de cette forme est libre de déplacement. Ainsi, des formes géométriques peuvent pénétrer à l'intérieur de l'outillage comme le montre la Figure 1.15 où la forme géométrique jaune englobe la courbe représentant l'outillage.

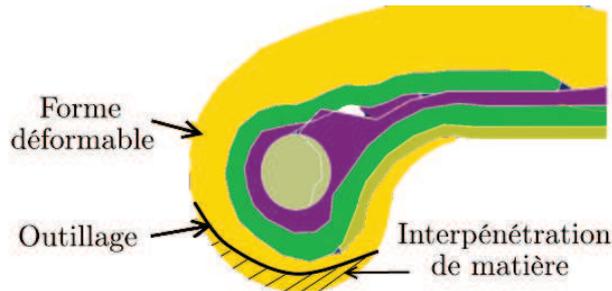


FIGURE 1.15 – Interpénétration d'une forme géométrique avec l'outillage.

L'étude des limites du modèle de déformation Michelin montrent les erreurs de modélisation auxquelles peut être confronté l'ingénieur en charge de l'industrialisation d'un pneumatique. Ces limites sont principalement dues à l'utilisation des courbes "support" et l'absence de prise en compte des caractéristiques des matériaux présents dans un pneumatique.

Cependant ces hypothèses sont réalisées dans le but de répondre aux exigences industrielles de temps. En effet le moteur de déformation actuel permet d'obtenir une simulation géométrique du procédé de fabrication en temps réel réalisée à partir d'un logiciel de CAO. Ainsi le moteur développé dans ces travaux doit conserver ces caractéristiques mais ne pas présenter les limites détaillées ci-dessus qui ralentissent la phase d'industrialisation d'un pneumatique.

3 Problématiques

3.1 Problématique industrielle

Suite à l'analyse de la modélisation Michelin et des limites associées, la problématique industrielle est la suivante :

Modéliser géométriquement la déformation des éléments composant un pneumatique durant les différentes étapes du procédé de fabrication afin de réduire les coûts d'industrialisation.

Afin de répondre à cette problématique, deux principaux axes de recherche sont établis :

Axe 1 - La modélisation géométrique du procédé de fabrication :

Le procédé de fabrication d'un pneumatique s'appuie sur le gonflement d'un outillage sur lequel est assemblé un ensemble d'éléments de différents matériaux composés de caoutchouc, acier et textiles. Le gonflement de l'outillage est modélisé aujourd'hui en trois étapes de la fabrication, l'objectif est de séquencer plus finement la déformation de l'outillage afin de donner plus de contrôle à l'ingénieur chargé de l'industrialisation du pneumatique. En effet, la solution développée lui sera utile pour comprendre la déformation des formes géométriques au sein du pneumatique tout au long du procédé de fabrication afin de définir plus précisément la géométrie initiale et l'emplacement sur l'outillage de chaque forme géométrique. Pour atteindre cet objectif, la déformation de l'outillage de fabrication est modélisée sous la forme d'un modèle géométrique du procédé de fabrication qui se déforme en respectant plusieurs contraintes physiques telles que les caractéristiques matériaux des différentes formes géométriques et en prenant en compte des conditions limites plus réalistes que le modèle Michelin.

Axe 2 - L'étude de la déformation des éléments constituant un pneumatique :

Durant le procédé de fabrication d'un pneumatique, des éléments de formes polygonales différentes et caractérisés par des matériaux différents sont assemblés sur un outillage. Ils sont ensuite déformés de l'étape initiale à l'étape finale du procédé de fabrication jusqu'à obtenir la forme finale du pneumatique avant cuisson. Ces étapes d'assemblage et de déformation sont modélisées en 2D car seule la représentation de la section du pneumatique est utile dans cette étude. Les difficultés de cette modélisation résident dans le placement des différents éléments les uns par rapport aux autres lors de l'assemblage et dans la prise en compte des interactions entre chaque élément lors de la déformation de cet ensemble d'éléments. De plus, cette modélisation doit être réaliste et calculée en temps réel afin de permettre de diminuer le temps de la phase de développement et notamment d'industrialisation d'un pneumatique. C'est pourquoi, un modèle mécanique de déformation rapide est nécessaire pour représenter l'assemblage et la déformation des éléments constituant un pneumatique.

3.2 Problématique scientifique

La modélisation du procédé de fabrication d'un pneumatique nécessite la caractérisation des interfaces par des conditions limites représentatives. De plus, les contraintes industrielles imposent une modélisation des déformations en temps réel. La problématique scientifique est définie de la façon suivante :

Développer un outil de modélisation temps réel de la déformation d'un assemblage de formes géométriques aux caractéristiques mécaniques différentes.

Afin de répondre à cette problématique, deux principaux axes de recherche scientifique sont énoncés :

Axe 1 - La mise en place d'un modèle géométrique de déformation d'une courbe plane :

Le problème est de modéliser la déformation d'une courbe plane soumise à un processus de gonflement. Le modèle retenu est similaire au modèle de gonflement d'une membrane basé sur la théorie des courbes inextensibles. L'objectif est de proposer une méthode de calcul numérique rapide permettant de calculer la déformée avec une précision inférieure à 1 mm par rapport à ses dimensions (Figure 1.16).

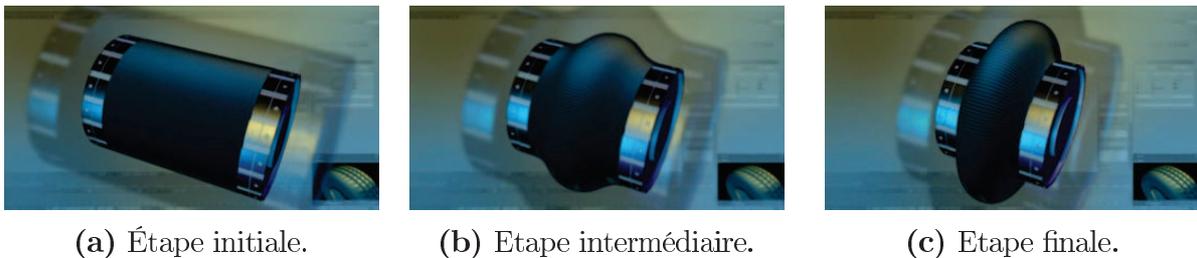


FIGURE 1.16 – Déformation de l'outillage pendant le procédé de fabrication d'un pneumatique [Michelin, 2014].

Axe 2 - La modélisation de la déformation d'un ensemble de formes géométriques de caractéristiques mécaniques différentes et en interactions :

Le problème est de modéliser la déformation d'un ensemble de formes géométriques ayant des caractéristiques matériaux différentes soumises à un processus de gonflement et en tenant compte des interactions entre elles. L'objectif de cette modélisation est de proposer une méthode de calcul numérique rapide dans le cadre d'une phase de conception. Le modèle doit permettre d'estimer la déformée des formes géométriques avec une précision inférieure à 0.01 mm sur les dimensions de la forme et en temps réel (Figure 1.17).

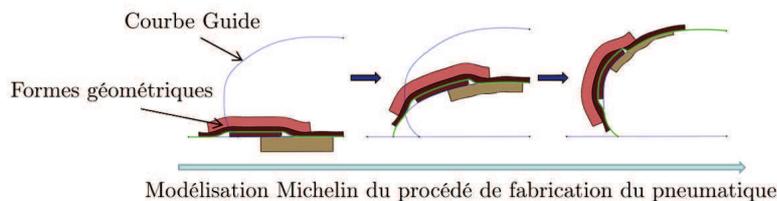


FIGURE 1.17 – Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.

4 Contributions scientifiques

D'après la définition de la problématique scientifique, deux axes de recherche sont à étudier dans ces travaux afin de répondre au sujet qui porte sur l'évolution des outils de simulation rapide du procédé de fabrication des pneumatiques.

Le premier concerne la construction d'un modèle géométrique afin de représenter le gonflement de l'outillage utilisé pour fabriquer un pneumatique. Par symétrie de l'outillage cylindrique, seule une section peut être modélisée. Ainsi ceci revient à modéliser la déformation d'un fil par une courbe [Casiez, 2001]. Le développement du modèle géométrique est basé sur ce type de modélisation mais contrairement à un fil, le coefficient de flexion d'une membrane ne peut pas être mesuré physiquement pour des raisons techniques. De plus, la partie déformable de l'outillage possède des caractéristiques géométriques, telles que sa longueur constante tout au long de sa déformation, qui permettent de mettre en place un modèle théorique.

Ainsi, pour ce premier axe, nous proposons de *mettre en place un modèle géométrique basé sur le tracé d'une courbe avec une contrainte de précision et de temps en représentant fidèlement les critères mécaniques.*

Le second axe concerne le développement d'un modèle mécanique déformable modélisant l'assemblage et la déformation de formes géométriques. La nature déformable ou indéformable des éléments doit être prise en compte. De plus, au sein d'un assemblage, les formes géométriques constituent un système et interagissent entre elles. C'est pourquoi les différentes caractéristiques matériaux doivent être prises en compte ainsi que la modélisation de l'interface entre chaque forme géométrique afin d'obtenir un modèle réaliste.

Jusque dans les années 80, seuls les modèles purement géométriques, tel que le modèle FFD (Free Form Deformation) développé par Sederberg et Parry [Sederberg et Parry, 1986], sont utilisés dans le monde de l'animation et de la simulation. Ces modèles prennent en compte des fonctions cinématiques ou des objets géométriques (Spline, NURBS par exemple) qui permettent de modéliser les comportements de la surface des objets étudiés. Cependant ces modèles ne prennent pas en compte de loi physique ce qui ne leur permettent pas de modéliser des comportements mécaniques. Ainsi des travaux ont été réalisés afin d'insérer des caractéristiques physiques telles que des paramètres biomécaniques dans ces modèles. Ceci est réalisé en faisant le lien entre la position des différents objets géométriques et les différentes énergies de l'objet modélisé [France *et al.*, 2002]. Ces modèles géométriques sont détaillés dans le Chapitre 3.

Les modèles physiques déformables se sont ensuite développées. Parmi eux, les modèles Masse-Ressort [Baudet, 2006], la méthode des éléments frontières [Miller, 1988] [Tang *et al.*, 2006], la méthode des éléments finis [Rappaz *et al.*, 1998], ou encore la méthode des masses-tenseurs [Cotin *et al.*, 2000] sont utilisés aujourd'hui. Toutes ces méthodes, répertoriés par Gibson [Gibson et Mirtich, 1997], sont développées afin de simuler des problèmes de plus en plus complexes en prenant en compte des contraintes et des conditions limites telles que les grandes déformations, les grands déplacements, le contact entre les pièces ou les non

linéarités des matériaux.

Ces méthodes détaillées dans le Chapitre 3 ont toutes en commun l'inconvénient des temps de calcul pour obtenir le résultat de la déformation de l'objet étudié. En effet, des simulations en temps réel sont difficiles à obtenir avec ces modèles. C'est pourquoi, différents travaux portent sur la réduction du temps de calcul afin d'augmenter leur rentabilité et d'obtenir des résultats de déformation en temps réel [Cotin *et al.*, 1999] [Szekely *et al.*, 1998]. Les modèles Masse-Ressort atteignent ces performances de temps. Ils sont utilisés dans le domaine de la simulation chirurgicale [Niroomandi *et al.*, 2008] [Chendeb, 2007].

De plus, dans le domaine de la modélisation géométrique ou physique, peu de travaux ont été réalisés sur la modélisation de la déformation d'un assemblage de formes géométriques liées entre elles. Dans le domaine informatique, les moteurs physiques permettent de prendre en compte des paramètres physiques tels que le contact entre deux pièces ou la gravité. Cependant ces modèles ne sont pas utilisables dans leur état actuel car ils ne différencient pas les matériaux qui caractérisent les différentes formes géométriques d'un système dans un moteur physique [Giannini, 2009].

C'est pour ces raisons que nous proposons dans ce deuxième axe de *modéliser l'assemblage et la déformation d'un système mécanique composé de formes géométriques polygonales 2D liées entre elles et sollicitées. La modélisation est réalisée avec une contrainte de précision et de temps. La méthode repose sur une modélisation de type Masse-Ressort couplée à un contrôle de collision implémenté sous SOFA.*

Chapitre 2

Modélisation géométrique du gonflement de l'outillage

Sommaire

1	Introduction	24
2	Modèles de déformation	25
2.1	Modèles de déformation d'un tissu	25
2.2	Modèles de déformation d'un fil	27
3	Etude théorique du gonflement de l'outillage de fabrication	28
3.1	Hypothèses de l'étude théorique	28
3.2	Les équations de Laplace	31
3.3	Rapport des tensions T	35
4	Tracé d'une courbe guide	36
4.1	Méthode de tracé par calcul discret	36
4.2	Méthode de tracé par calcul continu	38
4.3	Comparaison des deux méthodes	39
5	Modélisation géométrique proposée	41
5.1	Algorithme de gonflement	41
5.2	Application de l'algorithme de gonflement	43
5.3	Validation mécanique	48
6	Comparaison entre l'algorithme de gonflement et la modélisation Michelin	51
6.1	Méthode de tracé Michelin	51
6.2	Apport de l'algorithme de gonflement	52
7	Conclusion	54

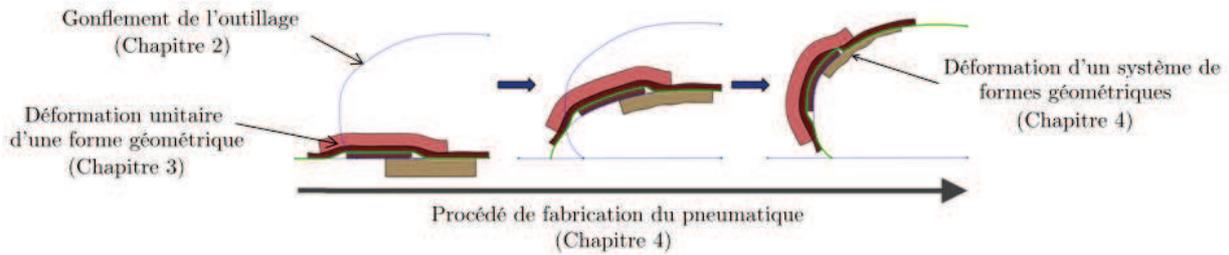


FIGURE 2.1 – Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.

Pour fabriquer un pneumatique, les éléments qui composent un pneumatique sont assemblés sur un outillage déformable. La modélisation du gonflement de l'outillage qui se produit durant le procédé de fabrication est développée dans ce Chapitre 2 (Figure 2.1).

1 Introduction

La fabrication d'un pneumatique s'appuie sur le gonflement d'un outillage de forme cylindrique (Figure 2.2). La partie centrale de ce dernier se déforme sous l'effet du rapprochement des extrémités et d'une pression appliquée à l'intérieur de la membrane. Cette partie déformable est une membrane flexible, considérée inextensible, sur laquelle sont placés les différents éléments qui constituent un pneumatique avant cuisson. La modélisation de la déformation de la membrane permet de représenter les étapes de la fabrication d'un pneumatique. De plus, elle permet à l'utilisateur de comprendre les déformations des différents éléments du pneumatique pendant le procédé de fabrication.



(a) Étape initiale.

(b) Etape intermédiaire.

(c) Etape finale.

FIGURE 2.2 – Déformation de l'outillage pendant le procédé de fabrication d'un pneumatique [Michelin, 2014].

La modélisation Michelin actuelle du gonflement de l'outillage est réalisée à partir d'une méthode de tracé par calcul discret qui permet de ne calculer que trois états du procédé de fabrication définies dans le chapitre précédent (Chapitre 1). Ces trois étapes, qui représentent une section de l'outillage, sont modélisées par trois courbes et seule une demie section est représentée puisque le reste de la courbe est obtenu par symétrie (Figure 2.3). Cependant ces trois étapes sont insuffisantes pour calculer précisément la déformation des

éléments qui constituent un pneumatique durant l'ensemble du procédé de fabrication. C'est pourquoi le développement d'une modélisation permettant de laisser le choix à l'utilisateur de représenter autant d'étapes qu'il souhaite, entre l'étape initiale et l'étape finale de la mise en forme, est l'objectif des travaux réalisés par la suite.

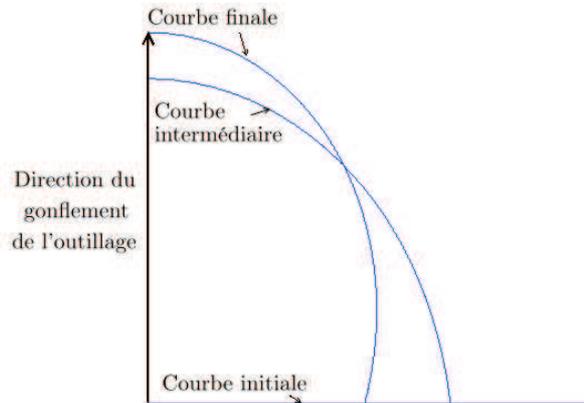


FIGURE 2.3 – Courbes modélisant le gonflement de l'outillage.

Le fait de ne représenter qu'une demi-section de la membrane, associé à ses caractéristiques flexible et inextensible, permet d'apparenter la section de la membrane de l'outillage à un fil de section et de longueur constante.

2 Modèles de déformation

Aujourd'hui seule la section de la membrane de l'outillage est modélisée. Cependant, la déformation de la membrane peut également être assimilée à la déformation d'un textile. Un état de l'art est réalisé sur les méthodes de la déformation des tissus (étude en trois dimensions) et sur celle des fils (en deux dimensions).

2.1 Modèles de déformation d'un tissu

Historiquement, trois modèles de déformation de tissus ont été développés : les modèles géométriques, les modèles énergétiques et les modèles physiques. L'analyse de ces modèles permet d'étudier les techniques de modélisation mises en place pour déformer un tissu et sont présentés dans cette section.

2.1.1 Modèles géométriques

Les premières études de déformation de tissu ont été menées sur des tissus dits "tissu armure toile". Ces études ne s'intéressent qu'au comportement des fils en traction présents dans le tissu. Le modèle de Pierce, premier modèle géométrique sur ce sujet, considère une

section circulaire pour les fils composant le tissu modélisé. Cette hypothèse n'est pas valable pour les tissus dits à "structures serrées" [Pierce, 1930]. Sur le même type de structure de tissu, un second modèle qui permet de simuler la traction bi-axiale d'un tissu est développé par Kawabata et al. [Kawabata *et al.*, 1973].

Des études menées par Grosberg concernent la modélisation de la flexion d'une structure textile [Grosberg et Kedia, 1966]. Cette dernière est assimilée à un système multicouches et la résistance élastique et l'hystérésis des tissus sont pris en compte. Enfin des modèles prenant en compte le cisaillement des tissus ont également été développés par Grosberg [Grosberg, 1966], Skelton [Skelton, 1976] et Olofson [Olofson, 2013].

Ces modèles géométriques permettent de caractériser les propriétés mécaniques des tissus. Cependant cette caractérisation ne s'appuie pas sur des paramètres physiques issus de mesures mais sur des valeurs empiriques ce qui diminue la précision de ce type de modèle.

En conclusion, les modèles géométriques de déformation de tissu manquent de précision et les hypothèses simplificatrices fortes réalisées sur les fils qui composent le tissu ne permettent pas d'utiliser ce type de modèle dans nos travaux.

2.1.2 Modèles énergétiques et physiques

Face au besoin d'obtenir des modèles de déformation de plus en plus proches de la réalité, des modèles s'appuyant sur des valeurs non empiriques sont développés. Pour cela des modèles énergétiques en mécanique de déformation de tissu permettent de déterminer la forme de la structure textile qui tend vers un état d'énergie minimale. Cela revient à déterminer, en fonction des différentes contraintes appliquées au tissu, l'organisation des fils à l'intérieur de ce dernier afin que l'ensemble de la structure tende vers un état d'énergie minimal. Postle et Jong appliquent le principe des méthodes énergétiques pour mettre en place un modèle de déformation textile [Postle *et al.*, 1988]. Pour cela, ils ont décomposé l'énergie globale présente dans une structure textile en quatre énergies par unité de longueur : une énergie de flexion, une énergie de torsion, une énergie de compression latérale et une énergie d'extension longitudinale. Cependant, l'utilisation de cette méthode est restreinte aux structures élastiques conservatives.

Afin d'étendre la mise en place de modèle de déformation, Breen, House et Getto s'appuient sur l'hypothèse de la discontinuité d'une structure textile pour construire leurs modèles physiques [Breen *et al.*, 1994]. Ces modèles sont constitués d'un réseau de particules correspondant aux intersections entre les fils composant un textile. Les trajectoires des particules sont déterminées à partir d'une méthode où l'énergie globale est décomposée en quatre énergies : l'énergie de traction/répulsion entre deux particules, l'énergie de résistance au cisaillement, l'énergie de résistance à la flexion et l'énergie due à la gravité, seule force extérieure intervenant dans ce modèle physique.

Realf propose un modèle où les propriétés physiques des fils et leurs géométries constituent les paramètres d'entrée du modèle [Realf, 1994][Realf *et al.*, 1997]. Ces propriétés physiques sont les comportements en flexion, en écrasement, en traction et de consolidation. Ce modèle de traction uni-axiale s'appuie sur les modèles géométriques et sur la mesure des caractéristiques physiques du tissu étudié.

En conclusion sur les modèles énergétiques et physiques, la prise en compte de caractéristiques physiques des fils mesurés permet d'obtenir des résultats plus précis que les modèles géométriques. Cependant les modèles de déformation d'un tissu, qu'ils soient géométriques, énergétiques ou physiques, utilisent des hypothèses sur la structure du tissu qui ne correspondent pas à celles qui peuvent être faites pour une membrane d'outillage de fabrication d'un pneumatique. D'autre part des modèles de déformation textile basés sur la déformation d'un fil sont développés dans la littérature. Ces travaux peuvent permettre d'assimiler la déformation de la membrane d'un outillage, lors de son gonflement, à la déformation d'un fil.

2.2 Modèles de déformation d'un fil

L'état de l'art relatif aux modèles de déformation d'un fil ne fait apparaître qu'un très faible nombre de travaux. Notamment ceux de Casiez s'intéressent aux méthodes permettant de mesurer le coefficient de flexion d'un fil [Casiez, 2001]. Dans sa modélisation, un fil considéré uniforme est constitué d'un ensemble de barres sans masse et de longueur constante. Ces barres sont modélisées par un système de Kelvin-Voigt (Figure 2.4) prenant en considération la raideur du fil. Dans ce modèle, chaque barre est représentée par un ressort lié en parallèle à un amortisseur visqueux et l'ensemble des barres sont reliées entre elles par des particules ayant chacune la même masse.

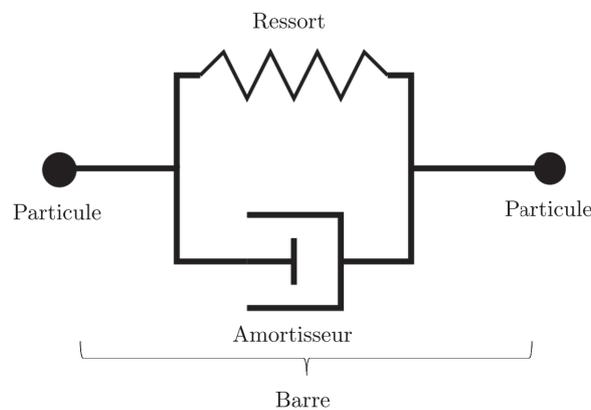


FIGURE 2.4 – Modèle de Kelvin-Voigt d'une barre d'un système Masse-Ressort.

Afin de modéliser le comportement visqueux d'un fil en flexion, une force de flexion correspondant à la force résultante des couples équivalents à un ressort spirale au nœud M_k pour tout angle θ est prise en compte (Figure 2.5). Cette force vaut $\vec{F}_k = Cf * \theta * \vec{u}_k$ et est portée par le vecteur :
$$\vec{u}_k = \frac{M_k \vec{M}_{k+1} + M_k \vec{M}_{k-1}}{\|M_k \vec{M}_{k+1} + M_k \vec{M}_{k-1}\|}$$

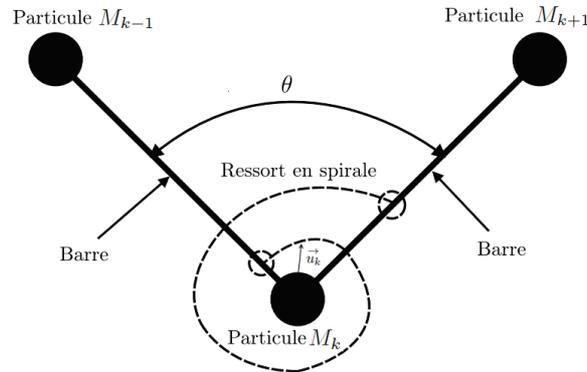


FIGURE 2.5 – Représentation de la flexion entre deux barres modélisant un fil [Casiez, 2001].

Casiez utilise la méthode de Lagrange où deux types de forces sont différenciées. D'une part, les forces qui dérivent d'un potentiel (le poids du nœud, la force de flexion \vec{F}_k et la force de rappel du ressort de la barre) et d'autre part celles qui n'en dérivent pas (la force de l'amortissement visqueux et celle représentative du frottement de l'air). Les conditions limites du modèle telles que les extrémités fixes, les angles fixes sont introduites. Enfin des tests sont réalisés en faisant varier la force de flexion et la masse du fil. Ces tests sont comparés à la déformation réelle d'un fil par interpolation afin de déterminer le coefficient de flexion du fil et permettre de calibrer le modèle de déformation proposé.

Le modèle développé par Casiez se rapproche de l'étude de déformation de la membrane, partie déformable de l'outillage. De plus, la déformation de la membrane est induite par une pression et des forces internes présentes. Pour prendre en compte ces contraintes, une étude mécanique de la déformation de la membrane est réalisée.

3 Etude théorique du gonflement de l'outillage de fabrication

La membrane de l'outillage utilisée pour la fabrication d'un pneumatique est assimilée à un objet flexible. Cette hypothèse permet de développer une méthode analytique pour tracer des courbes guides modélisant le gonflement de l'outillage à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques telles que sa longueur et les tensions internes.

3.1 Hypothèses de l'étude théorique

La membrane, composant déformable de l'outillage, est un objet flexible qui ne développe pas de contraintes de flexion et dont la déformée est toujours normale à la direction des charges appliquées. Les fils et les câbles sont des exemples qui possèdent des caractéristiques mécaniques similaires aux membranes. Par rapport aux méthodes développées dans l'état

de l'art précédent, le coefficient de flexion et la masse de la membrane ne peuvent pas être déterminés dans l'étude d'une membrane d'outillage. Or, aucune des références trouvées n'étudie la déformation de ce type de membrane, le choix de développer un modèle théorique de déformation est fait sur la base d'hypothèses portant sur les caractéristiques mécaniques et géométriques.

De plus, une membrane d'outillage est un objet déformable inextensible dont la forme dépend de son état de contraintes. Une forme unique de membrane existe pour un chargement donné, cette forme est appelée courbe guide dans notre étude. La courbe guide est calculée et tracée afin de décrire le comportement de la membrane de l'outillage utilisé lors de la fabrication d'un pneumatique à tout instant du gonflement (Chapitre 1).

Lors du procédé de fabrication, la membrane d'un outillage ne subit que l'effet de la pression appliquée entre l'étape initiale et l'étape finale du procédé de fabrication (Figure 2.2). De ce fait, les hypothèses suivantes sont prises en compte dans l'étude de la déformation de la membrane d'un outillage :

- Les contraintes de flexions sont nulles ;
- La normale à la surface médiane d'une membrane reste normale durant la déformation ce qui implique que les contraintes de cisaillement sont nulles également ;
- La membrane est inextensible ;
- La membrane est considérée comme un fil d'épaisseur nulle.

Ces hypothèses permettent de considérer l'épaisseur de la membrane nulle. Ainsi seules les contraintes de traction/compression sont les inconnues lors du calcul de la déformation de la courbe guide.

La membrane étudiée est un objet de révolution axisymétrique, ce qui permet de réaliser l'étude de la déformation d'une demi-courbe guide (Figure 2.6a). Dans la suite de ces travaux, le plan dans lequel la courbe est inscrite, ainsi que tous les plans qui contiennent l'axe de révolution de la membrane, sont appelés plans méridiens.

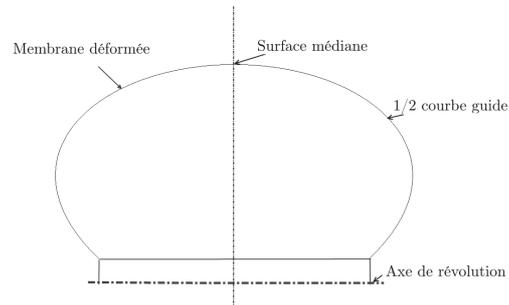
L'étude théorique développée dans la section suivante a pour but d'établir les équations relatives aux contraintes générées dans la membrane en réaction à la pression appliquée. Ces équations permettent de tracer les courbes décrivant le gonflement de la membrane de l'outillage entre l'état initial et l'état final de la fabrication d'un pneumatique.

Dans cette étude théorique, chaque point M de la courbe est défini et repéré par des paramètres géométriques (Figure 2.7) :

- La distance r qui correspond à la distance entre le point M et l'axe de révolution de la courbe et par son abscisse Y_M ;
- L'angle ϕ qui correspond à l'angle entre la tangente du profil et l'horizontale ;
- La distance R qui correspond au rayon de courbure circonférentiel. Cette distance est égale à la distance entre les points M et J et est obtenue en traçant la normale en ce point M qui coupe l'axe de révolution au point J (Figure 2.7b).
- La distance ρ qui correspond au rayon de courbure méridien.



(a) Membrane de l'outillage déformée

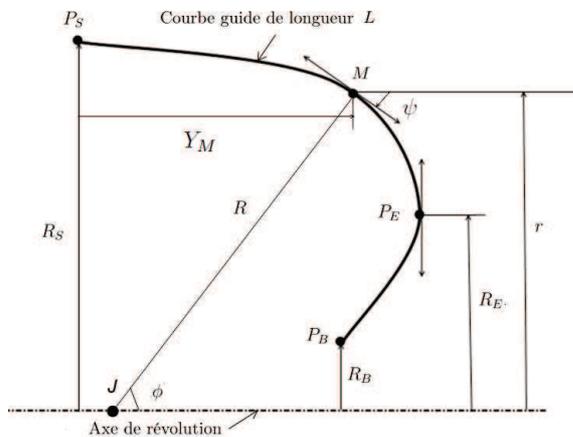


(b) Modélisation de la membrane d'outillage déformée

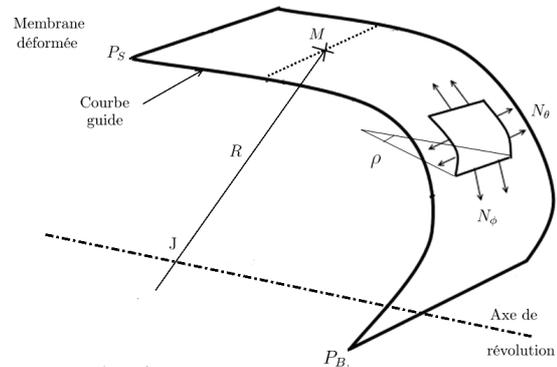
FIGURE 2.6 – Gonflement de l'outillage

Le profil de la courbe guide possède trois points particuliers (Figure 2.7) :

- P_S , le point sommet. Ce point correspond au sommet de la membrane. Le rayon en ce point, R_S , est appelé rayon sommet.
- P_E , le point équateur. Ce point correspond à celui de la courbe qui admet une tangente verticale. Le rayon en ce point, R_E , est appelé rayon équateur.
- P_B , le point bas. Ce point correspond au point le plus bas du profil. Le rayon en ce point, R_B , est appelé rayon bas.



(a) Profil en 2D de l'outillage.



(b) Profil 3D de l'outillage.

FIGURE 2.7 – Paramétrage.

Enfin, la membrane étudiée est inextensible et soumise à une pression de gonflage p qui génère des tensions circonférentielle N_θ et méridienne N_ϕ (Figure 2.7b).

Pour réaliser cette étude théorique, un élément de membrane est isolé et soumis à une pression p qui engendre les tensions méridienne N_ϕ et circonférentielle N_θ dans cet élément (Figure 2.8b).

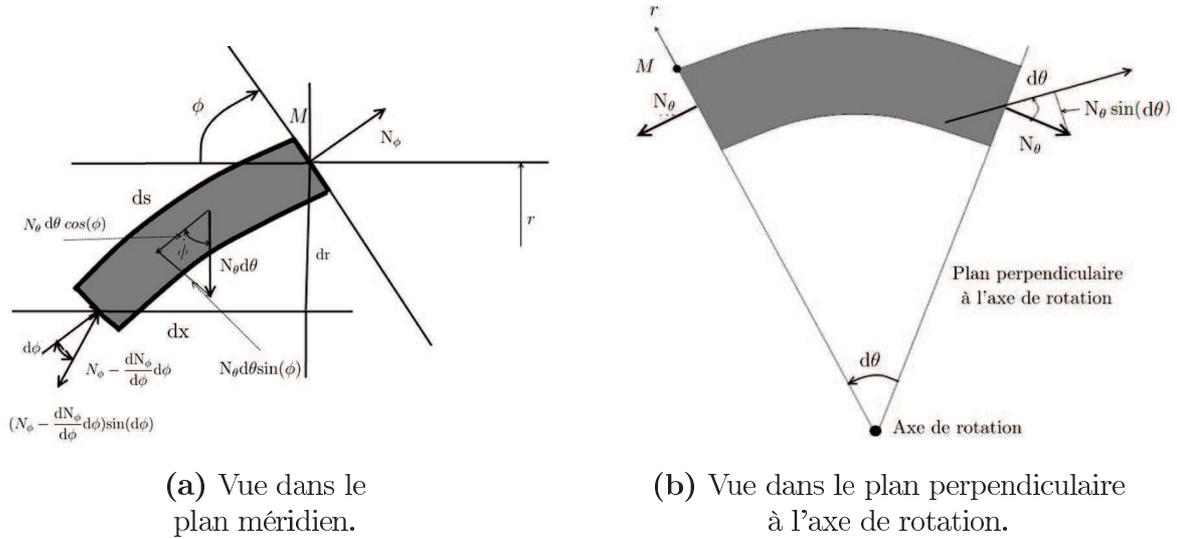


FIGURE 2.8 – Forces s'appliquant à un élément de membrane.

3.2 Les équations de Laplace

Pour réaliser l'étude théorique de la déformation de la membrane d'un outillage, un élément de cette dernière est isolé en statique afin de faire un bilan des forces.

Dans un premier temps, la somme des forces normales sur cet élément est calculée (Figure 2.8a et 2.8b) :

$$\sum F_{normales} = -(N_\phi - \frac{dN_\phi}{d\phi} d\phi) \sin(d\phi) (r - dr) d\theta - N_\theta d\theta \sin(\phi) \rho d\phi + p \rho d\phi r d\theta = 0$$

Le développement de la relation précédente avec l'hypothèse $\sin(d\phi) = d\phi$ donne :

$$-r N_\phi d\phi d\theta + r \frac{dN_\phi}{d\phi} d\phi^2 d\theta + N_\phi dr d\phi d\theta - \frac{dN_\phi}{d\phi} d\phi^2 d\theta dr - N_\theta d\theta \sin(\phi) \rho d\phi + p \rho d\phi r d\theta = 0$$

En divisant par $d\phi$ et $d\theta$ et en négligeant les termes différentiels, la relation précédente devient :

$$-r N_\phi - N_\theta \sin(\phi) \rho + p \rho r = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{N_\phi}{\rho} + \frac{N_\theta \sin(\phi)}{r} = p$$

En posant $r = R \sin(\phi)$, la relation obtenue en réalisant la somme des forces normale sur un élément de membrane (Equation 2.1) correspond à la relation de LAPLACE.

$$\frac{N_\theta}{R} + \frac{N_\phi}{\rho} = p \quad (2.1)$$

La relation 2.1 traduit l'équilibre des efforts sur une portion de membrane et montre le lien entre :

- les contraintes circonférentielle et méridienne au sein de la membrane ;
- la géométrie à travers les rayons de courbure circonférentiel et méridien ;
- la pression appliquée à la membrane.

Dans un second temps, la somme des forces tangentielles sur un élément de la membrane est réalisée :

$$\sum F_{tangentielles} = N_\phi r d\theta - (N_\phi - \frac{dN_\phi}{d\phi} d\phi) \cos(d\phi) (r - \frac{dr}{d\phi} d\phi) d\theta - N_\theta d\theta \cos(\phi) \rho d\phi = 0$$

En développant et en faisant l'hypothèse des angles petits $\cos(d\phi) = 1$:

$$N_\phi r d\theta - N_\phi r d\theta + N_\phi \frac{dr}{d\phi} d\phi d\theta + r \frac{dN_\phi}{d\phi} d\phi d\theta - \frac{dN_\phi}{d\phi} \frac{dr}{d\phi} d\phi^2 d\theta - N_\theta \rho \cos(\phi) d\phi d\theta = 0$$

En divisant par $d\phi$ et $d\theta$ et en négligeant les termes différentiels de deuxième ordre :

$$N_\phi \frac{dr}{d\phi} + r \frac{dN_\phi}{d\phi} - N_\theta \rho \cos(\phi) = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{d}{d\phi} (r N_\phi) - N_\theta \rho \cos(\phi) = 0$$

De plus, les relations géométriques $\rho d\phi = ds$ et $\cos(\phi) ds = dr$ donnent $\rho \cos(\phi) d\phi = dr$ (Figure 2.9). En prenant en compte ces relations géométriques dans la précédente :

$$\rho \cos(\phi) \frac{d}{dr} (r N_\phi) - N_\theta \rho \cos(\phi) = 0$$

Cette relation permet d'obtenir la deuxième relation qui lie les contraintes circonférentielle et méridienne au sein d'une membrane (Equation 2.2) :

$$\frac{d(r N_\phi)}{dr} = N_\theta \quad (2.2)$$

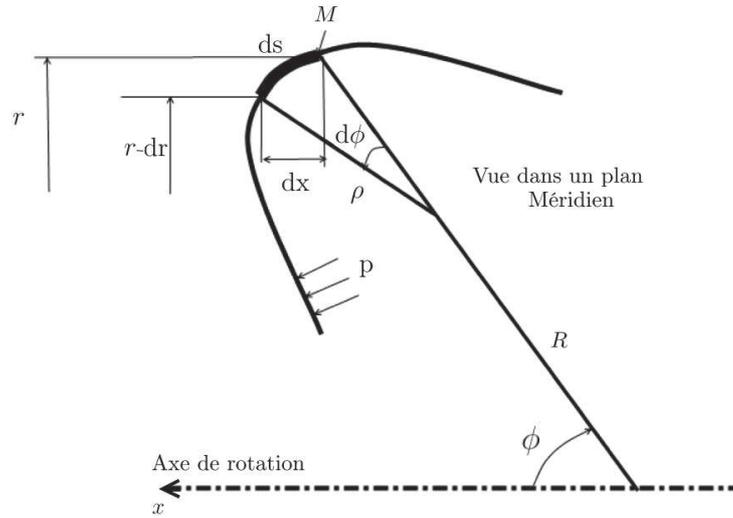


FIGURE 2.9 – Relations entre ρ , ϕ et r .

Les deux relations établies (2.1 et 2.2) permettent d'exprimer les tensions circonférentielle et méridienne pour tout point de la courbe guide et également d'obtenir les différentes équations (2.12, 2.17, 2.21) permettant de tracer la courbe guide étudiée.

Pour établir ces dernières équations, le rayon de courbure méridien ρ est défini en fonction de r et x :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \frac{dr}{dr} = \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{ds}$$

Géométriquement $\tan(\phi)dr = dx$ donne $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{dx}{dr}\right)$ et la relation précédente devient :

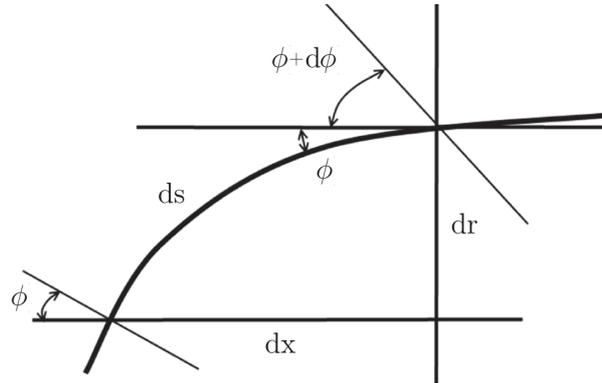
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2} \frac{d^2x}{dr^2} \frac{dr}{ds}$$

De plus, $ds^2 = dx^2 + dr^2$ (Figure 2.10) et ce qui donne :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2} \left(1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2x}{dr^2} \frac{dr}{ds}$$

D'où :

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dr^2}} \tag{2.3}$$

FIGURE 2.10 – Expression du rayon de courbure en fonction de x et r .

De la même manière, le rayon de courbure circonférentiel R est défini en fonction de x et r en sachant que $r = R\sin(\phi)$ et $\sin(\phi)ds = dx$. D'où :

$$R = r\left(1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Et

$$R = \frac{r\left(1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{dx}{dr}} \quad (2.4)$$

Les deux équations d'équilibre 2.1 et 2.2 permettent d'exprimer la tension méridienne N_ϕ en fonction de r :

$$\frac{N_\phi}{\rho} + \frac{1}{R} \frac{d}{dr}(rN_\phi) = p$$

La relation précédente et les relations géométriques $dr = \rho\cos(\phi)d\phi$ et $r = R\sin(\phi)$ (Figure 2.9) donnent :

$$N_\phi\cos(\phi)\frac{d\phi}{dr} + \frac{d}{dr}(rN_\phi)\frac{\sin\phi}{r} = p$$

En multipliant par dr :

$$rN_\phi\cos(\phi)d\phi + d(rN_\phi)\sin\phi = prdr$$

$$d(rN_\phi\sin\phi) = prdr$$

L'intégration de la relation précédente donne :

$$rN_\phi\sin\phi = p\frac{r^2}{2} + c$$

De plus, pour $\phi = 0$, $r = R_E$, d'où :

$$c = -\frac{pR_E^2}{2}$$

Ainsi la relation entre N_ϕ , p , R , R_E et ϕ est obtenue :

$$N_\phi = p \frac{r^2 - R_E^2}{2r \sin(\phi)} \quad (2.5)$$

De plus la relation 2.2 donne la tension circonférentielle N_θ en fonction de la tension méridienne N_ϕ . Or en prenant en compte la relation précédente et avec $r = R \sin(\phi)$:

$$N_\theta = \frac{d(rN_\phi)}{dr} = \frac{d(rp \frac{r^2 - R_E^2}{2r \sin(\phi)})}{dr} = p \frac{d(\frac{r^2 - R_E^2}{2 \sin(\phi)})}{dr} \quad (2.6)$$

En développant :

$$N_\theta = \left[\frac{d(r^2 - R_E^2)}{dr} * 2 \sin(\phi) - (2(r^2 - R_E^2)) * \frac{d(\sin(\phi))}{dr} \right] * \frac{1}{4 \sin(\phi)^2}$$

Ce qui donne avec $\frac{d(\sin(\phi))}{dr} = \frac{1}{\rho}$:

$$N_\theta = p \left(\frac{r}{\sin(\phi)} - \frac{r^2 - R_E^2}{2\rho \sin(\phi)^2} \right) \quad (2.7)$$

D'après les relations établies précédemment (Equations 2.5 et 2.7), les tensions méridienne N_θ et circonférentielle N_ϕ dépendent uniquement des caractéristiques géométriques de la membrane et de la pression p . De plus, si pour toutes valeurs de r , les paramètres R_E , $\cos(\phi(r))$ et $\rho(r)$ sont connus alors les tensions N_θ et N_ϕ le sont également en tout point de la courbe guide.

3.3 Rapport des tensions T

Pour la suite de l'étude, le rapport des tensions méridienne et circonférentielle T est introduit tel que :

$$T = \frac{N_\phi}{N_\theta} \quad (2.8)$$

Ce rapport T varie le long du profil étudié et dépend de sa position curviligne s sur le profil par définition à partir de la relation 2.2.

$$N_\theta = N_\phi + r \frac{d(N_\phi)}{dr} = \frac{N_\phi}{T(s)} \quad (2.9)$$

Ce qui donne la relation suivante :

$$\frac{d(N_\phi)}{N_\phi} = \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{T(s)} - 1 \right)$$

En considérant la valeur particulière $r = R_S$, la relation précédente devient :

$$N_\phi = N_{\phi S} * \left(\frac{r}{R_S} \right)^{\left(\frac{1}{T(s)} - 1 \right)}$$

De plus la relation 2.5 avec $R = R_S$ devient :

$$N_\phi = p \frac{R_S^2 - R_E^2}{2R_S} \left(\frac{r}{R_S} \right)^{\left(\frac{1}{T(s)} - 1 \right)} \quad (2.10)$$

Et d'après la relation 2.9

$$N_\theta = p \frac{R_S^2 - R_E^2}{2R_S} \frac{1}{T(s)} \left(\frac{r}{R_S} \right)^{\left(\frac{1}{T(s)} - 1 \right)} \quad (2.11)$$

A partir des relations établies précédemment (Equation 2.10 et 2.11), celles faisant intervenir l'angle ϕ et le rayon ρ sont définies pour chaque point de la courbe guide, et sont exprimées en fonction de R_E , R_S , r et T :

$$\sin(\phi) = \left(\frac{R_S}{r} \right)^{\frac{1}{T(s)}} \frac{r^2 - R_E^2}{R_S^2 - R_E^2} \quad (2.12)$$

$$\rho = \left(\frac{r}{R_S} \right)^{\frac{1}{T(s)}} \frac{T(s)r(R_S^2 - R_E^2)}{2T(s)r^2 - r^2 + R_E^2} \quad (2.13)$$

Ces deux dernières formules (2.12 et 2.13) montrent que la courbe guide étudiée est définie géométriquement si le rayon équateur R_E , le rayon sommet R_S et le rapport des tensions T sont connus.

Dans la suite, les formules (2.12 et 2.13) sont utilisées dans le but de tracer des courbes guides par une approche discrète et une approche continue à des fins de comparaison de performances.

4 Tracé d'une courbe guide

Les travaux réalisés sur la mise en forme des membranes, lors du processus de fabrication, sont réalisés pour les pneumatiques de type radial. La membrane de fabrication est construite de façon à ne subir aucune tension circonférentielle N_θ . Cette hypothèse se traduit par une tension circonférentielle N_θ nulle dans les équations établies précédemment et implique que le rapport des tensions T tend vers l'infini (Equation 2.8). Ainsi les relations précédemment simplifiées permettent d'aboutir à deux méthodes de tracé pour une courbe guide lorsque le rayon sommet R_S , le rayon équateur R_E , le rapport T et la longueur sont donnés. Une première méthode de tracé par calcul discret s'appuie sur le calcul itératif des points de la courbe à partir du point sommet P_S jusqu'au point bas P_B de cette courbe. Une seconde méthode par calcul continu s'appuie sur le calcul d'une intégrale numérique. Ces deux méthodes sont présentées ci-dessous.

4.1 Méthode de tracé par calcul discret

Dans le cas où la tension circonférentielle N_θ est nulle, la relation 2.13 montre que le rayon de courbure méridien ρ augmente lorsque r diminue.

$$\rho = \frac{R_S^2 - R_E^2}{2r} \quad (2.14)$$

De plus, la tension méridienne N_ϕ est obtenue à partir de la relation 2.10 et elle est inversement proportionnelle au rayon r :

$$N_\phi = p \frac{R_S^2 - R_E^2}{2r} \quad (2.15)$$

Et la formule 2.12 devient avec $\sin(\phi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = \cos(\psi)$:

$$\cos(\psi) = \frac{r^2 - R_E^2}{R_S^2 - R_E^2} \quad (2.16)$$

Cette relation permet de déterminer l'angle ϕ au point sommet P_S de coordonnée $(0; R_S)$ et l'expression 2.17 permet de calculer l'abscisse du point X_{t+1} situé à l'ordonnée R_{t+1} .

$$X_{t+1} = X_t - \frac{X_{t+1} - X_t}{\tan(\psi)} \quad (2.17)$$

Ces deux relations 2.16 et 2.17 sont utilisées de façon itérative afin de calculer les abscisses de l'ensemble des points de la courbe à partir des coordonnées du point précédent de la courbe à une ordonnée donnée (Figure 2.12b) jusqu'au dernier point de la courbe. L'algorithme utilisé est résumé Figure 2.11. Le nombre de points de la courbe calculé dépend du pas de discrétisation et de l'axe des ordonnées entre les ordonnées R_S et R_B . Cette méthode permet de tracer les courbes de manière "discrète" si les paramètres R_S , R_E , R_B , T et la longueur L sont connus.

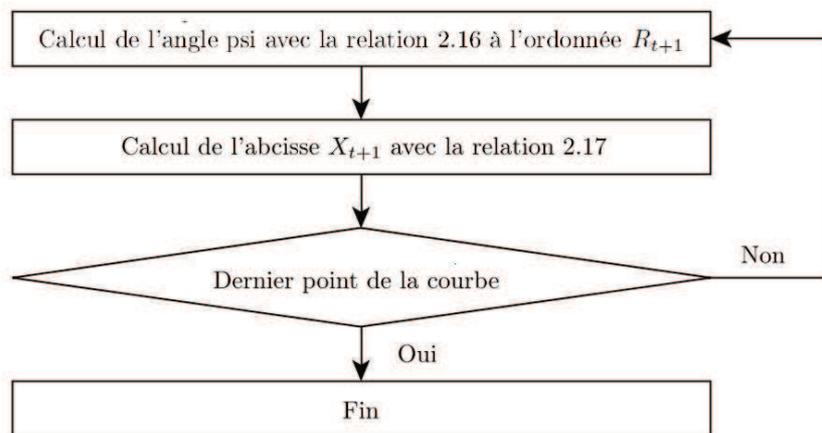


FIGURE 2.11 – Algorithme de génération de la courbe guide par calcul discret.

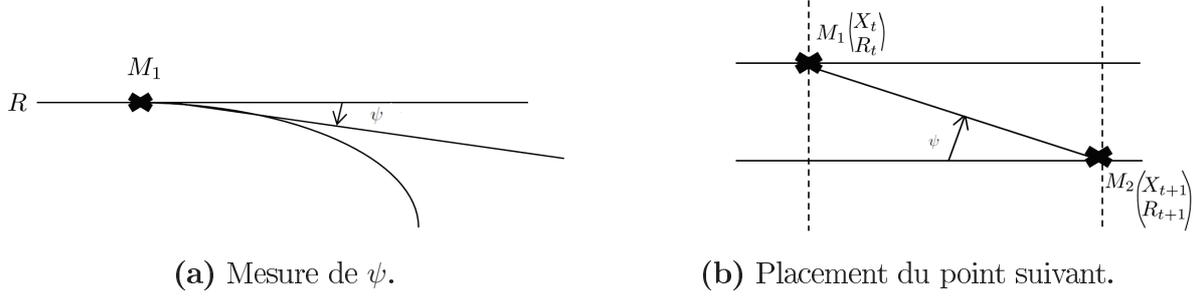


FIGURE 2.12 – Exemple de tracé par calcul discret des courbes guides.

La longueur des courbes guides est un critère de validation. En effet, cette longueur doit être calculée afin de vérifier l'hypothèse de membrane inextensible. Ainsi pour calculer la longueur, les coordonnées de l'ensemble des points calculés sont utilisés par la relation 2.18 :

$$L = \sum_{i=1}^n \sqrt{((X_{t+1} - X_t)^2 + (R_{t+1} - R_t)^2)} \quad (2.18)$$

4.2 Méthode de tracé par calcul continu

Les courbes guides peuvent aussi être tracées par calcul continu avec les mêmes paramètres R_S , R_E , R_B , T et la longueur L connus. Avec l'hypothèse des tensions circonférentielles nulles, la relation 2.1 devient :

$$\frac{N_\phi}{\rho} = p \quad (2.19)$$

Ainsi les relations 2.15 et 2.19 donnent :

$$p \frac{R(r^2 - R_E^2)}{2\rho r^2} = p \quad (2.20)$$

Et, d'après les relations 2.4 et 2.14 :

$$\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{dx}{dr} \left(1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2\right) \left(\frac{2r}{r^2 - R_E^2}\right) = 0$$

En posant $zdr = dx$, la relation précédente devient :

$$\frac{dz}{dr} - z(1 + z^2) \left(\frac{2r}{r^2 - R_E^2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{z(1 + z^2)} dz = \left(\frac{2r}{r^2 - R_E^2}\right) dr$$

En intégrant, la relation suivante est obtenue :

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{z^2}{z(1 + z^2)}\right) = \ln(r^2 - R_E^2) + C$$

La constante C est déterminée à partir de la condition limite : quand z tend vers l'infini, r tend vers R_S . Ce qui donne :

$$C = -\ln(R_S^2 - R_E^2)$$

$$\ln\left(\left(\frac{z^2}{z(1+z^2)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \ln\left(\frac{r^2 - R_E^2}{R_S^2 - R_E^2}\right)$$

Soit :

$$\left(\frac{z^2}{z(1+z^2)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{r^2 - R_E^2}{R_S^2 - R_E^2}\right)$$

Et ainsi, la relation suivante est obtenue :

$$\int_x^0 dx = \int_r^{R_S} \frac{r^2 - R_E^2}{((R_S^2 - r^2)(r^2 - (2R_E^2 - R_S^2)))^{\frac{1}{2}}} dr \quad (2.21)$$

Cette relation 2.21 permet d'obtenir l'ensemble des points de la courbe guide étudiée par intégration continue entre l'ordonnée R_S du point sommet P_S et l'ordonnée R_B du point Bas.

Enfin l'intégration numérique précédente permet de calculer les coordonnées de l'ensemble des points de la courbe guide étudiée et la même relation pour la méthode discrète (Equation 2.18) permet d'obtenir la longueur de la courbe guide tracée. De plus, la relation 2.22 permet d'obtenir la longueur théorique de la courbe étudiée qui sert de référence dans la suite de l'étude lorsqu'une courbe guide est calculée.

$$\int_0^L ds = \int_r^{R_S} \frac{R_S^2 - R_E^2}{((R_S^2 - r^2)(r^2 - (2R_E^2 - R_S^2)))^{\frac{1}{2}}} dr \quad (2.22)$$

4.3 Comparaison des deux méthodes

Deux méthodes sont développées pour tracer les courbes guide du procédé de fabrication d'un pneumatique : une méthode de tracé par calcul discret et une méthode de tracé par calcul continu. Ces méthodes doivent être comparées par rapport à des critères de performance afin de retenir la méthode optimale à utiliser dans la modélisation développée.

Pour réaliser cette comparaison, chaque méthode est implémentée sous le logiciel Scilab et testée sur une machine équipée d'un processeur 2.67 GHz, de 3.00 GB de RAM et de Microsoft Windows XP.

La comparaison est faite pour une courbe guide utilisée dans le procédé de fabrication d'un pneumatique de type tourisme. Les paramètres de cette courbe sont un Rayon Sommet R_S de 330mm, un Rayon Équateur R_E de 270mm et un Rayon Bas R_B de 250mm. La courbe est tracée pour différents pas de discrétisation. Pour une première comparaison les performances retenues pour évaluer les méthodes de tracé sont les temps de calcul et la longueur de la courbe calculée avec l'équation 2.18 comparée à la longueur de référence calculée avec l'équation 2.22.

Type de méthode	Pas (mm)	Temps de calcul	Longueur (mm)	Longueur Réf (mm)	Erreur Relative
Méthode par calcul discret	0,01	0,625s	111,37	112,126	0,675 %
	0,1	0,1s	109,77		2,104 %
	1	0,05s	105,02		6,340 %
	10	0,05s	93,08		16,98 %
Méthode par calcul continu	0,01	3,1s	112,13	112,126	0 %
	0,1	0,35s	112,125		$5,62E^{-4}$ %
	1	0,1s	112,11		$1,78E^{-2}$ %
	10	0,06s	111,49		0,57 %

Tableau 2.1 – Temps de calcul et comparaison de longueur pour une courbe donnée (R_S 330mm, R_B 250mm, R_E 270mm).

Les résultats du Tableau 2.1 montrent que la méthode par calcul discret présente des temps de calcul inférieurs par rapport à la méthode par calcul continu pour un même pas de discrétisation. Cependant la comparaison des longueurs des courbes obtenues montrent que pour un pas de 10 mm (0,57% d'erreur), la méthode par calcul continu fournit des résultats plus précis que la méthode par calcul discret utilisé avec un pas de 0,01 mm (0,675% d'erreur).

De plus, d'après les critères définis avec les utilisateurs, le temps de calcul d'une courbe doit être inférieur à une seconde. Ce critère est validé pour les pas de 10 mm, 1 mm et 0,1 mm avec la méthode de tracé par calcul continu.

Afin d'approfondir la comparaison de ces deux méthodes de tracé, l'écart géométrique entre les courbes tracées avec les deux méthodes est calculé pour un même pas de discrétisation. Cet écart géométrique est donné par l'écart maximum, la moyenne des écarts et l'écart type pour chaque cas de discrétisation utilisé. De plus, pour chaque pas, la courbe tracée par calcul continu est utilisée comme référence puisque la longueur de la courbe tracée avec cette méthode est plus proche de la théorie que la méthode par calcul discret.

L'analyse des calculs des écarts maximaux, les moyennes des écarts et les écarts types (Tableau 2.2) montre que pour un pas de discrétisation de 0,1 mm, l'écart géométrique entre la courbe tracée par calcul continu et la courbe tracée par calcul discret est inférieur à 1%. En dessous de ce seuil, les deux méthodes d'erreur correspondent aux attentes industrielles fixées par les utilisateurs.

La comparaison des temps de tracé et des longueurs de courbes tracées montre que la précision des résultats, par rapport aux attentes industrielles, est satisfaite avec la méthode par calcul continu pour un pas compris entre 0,1 mm et 1 mm. Pour un pas inférieur à 0,1 mm, le temps de tracé obtenu avec la méthode par calcul continu est trop important du point de vue industriel (Tableau 2.1).

Pour un pas inférieur ou égal à 0,1 mm, la méthode par calcul discret est plus rapide que la méthode par calcul continu mais reste moins précise par rapport à la longueur de la

	Pas (mm)	Écart maximum		Moyenne des écarts		Écart type	
		Absolue (mm)	Erreur	Absolue (mm)	Erreur	Absolue (mm)	Erreur
Écart entre le tracé continu et discret	0,01	0,19	0,17 %	0,12	0,11%	0,13	0,12%
	0,1	0,58	0,52%	0,33	0,29 %	0,37	0,33%
	1	5,29	4,71%	4,25	3,79%	4,41	3,9%
	10	22,26	19,85%	13,77	12,28%	16,03	14,3%

Tableau 2.2 – Écart géométrique entre la courbe discrète et la courbe continue pour une courbe donnée (R_S 330mm, R_B 250mm, R_E 270mm).

courbe tracée.

En conclusion, à partir de l'analyse de ces comparaisons, le pas de discrétisation de 0,1 mm permet d'obtenir des résultats qui correspondent aux critères de performance attendus avec la méthode de tracé par calcul continu. En effet, par rapport à la précision du calcul sur la longueur de la courbe et pour des temps équivalents à la méthode discrète utilisée aujourd'hui la méthode par calcul continu est plus précise.

Ainsi un pas de 0,1 mm de discrétisation de l'axe des ordonnées est retenu pour tracer les courbes avec la méthode par calcul continu dans le reste des travaux, quelle que soit la dimension de la membrane étudiée.

5 Modélisation géométrique proposée

Dans cette partie, un algorithme de modélisation géométrique du gonflement de l'outillage est développé. Cet algorithme permet d'établir les courbes guides entre l'étape initiale et l'étape finale du procédé en couplant les deux méthodes de tracé au sein d'un même algorithme. L'outil obtenu est testé et comparé à la méthode de modélisation Michelin.

5.1 Algorithme de gonflement

Dans les deux sections précédentes, les deux méthodes de tracé, par calcul discret et par calcul continu, sont développées et comparées sur le tracé d'une courbe qui représente un état de gonflement de la membrane de l'outillage.

Pour cela, ces deux méthodes utilisent les mêmes paramètres pour tracer une seule courbe :

- le Rayon Sommet R_S
- le Rayon Équateur R_E ,
- le Rayon Bas R_B ,
- le Rapport T des tensions circonférentielle et méridienne N_θ et N_ϕ

Cependant la méthode par calcul continu ne permet pas de calculer les coordonnées du Point Equateur P_E . C'est pourquoi, l'algorithme de gonflement utilise la méthode par calcul discret qui permet de calculer les coordonnées de ce point caractéristique. C'est dans ce calcul que réside le couplage avec la méthode par calcul continu car une fois P_E connu, la méthode par calcul continu est utilisée pour tracer l'ensemble des courbes guides.

Pour une membrane donnée, l'algorithme résumé Figure 2.13 se déroule de la façon suivante.

La première courbe est tracée pour un Rayon Sommet initial R_S , un Rayon Équateur R_E et un Rayon Bas R_B et un rapport T^1 . Ces paramètres sont déterminés à partir des caractéristiques géométriques de la membrane. Enfin la courbe est tracée par calcul continu par intégration numérique de l'équation 2.21 avec un pas de discrétisation de 0.1mm (Section 4.3).

Le tracé de cette courbe permet de calculer sa longueur qui sert de référence, L_{Ref} , pour l'ensemble des courbes représentatives du gonflement de la membrane. De plus, le Rayon Bas R_B et la longueur de référence L_{Ref} ne varient pas quel que soit l'état de gonflement

Pour tracer une nouvelle courbe guide comprise entre l'état initial et l'état final du gonflement de la membrane, un Rayon Sommet R_{Si} est compris entre le Rayon Sommet initial R_S et le Rayon Bas R_B . Ainsi, le seul paramètre à calculer est le Rayon Équateur R_{Ei} . Pour cela la relation géométrique 2.23 issue de la relation 2.16, obtenue lors de la mise en place de la méthode par calcul discret, est utilisée².

$$R_{Ei} = \sqrt{\frac{r^2 - R_S^2 \cos(\phi)}{1 - \cos(\phi)}} \quad (2.23)$$

Une fois le Rayon Equateur R_{Ei} calculé, la longueur L de la courbe est calculée. Si cette longueur est supérieure à la longueur référence alors une itération par dichotomie est réalisé sur R_{Ei} . L'erreur est définie à l'initialisation du modèle par l'utilisateur à 0,01% pour atteindre la précision attendue lors de la fabrication du pneumatique.

Enfin, la courbe guide est tracée par calcul continu en réalisant l'intégration numérique de la relation 2.21.

Cette démarche est réalisée pour chaque étape du procédé de fabrication d'un pneumatique que souhaite modéliser l'utilisateur.

1. Dans l'ensemble des travaux, le rapport T tend vers l'infini

2. Si la relation 2.23 donne un Rayon Équateur R_{Ei} imaginaire, ce Rayon Équateur doit être converti en réel négatif afin de pouvoir tracer la courbe étudiée

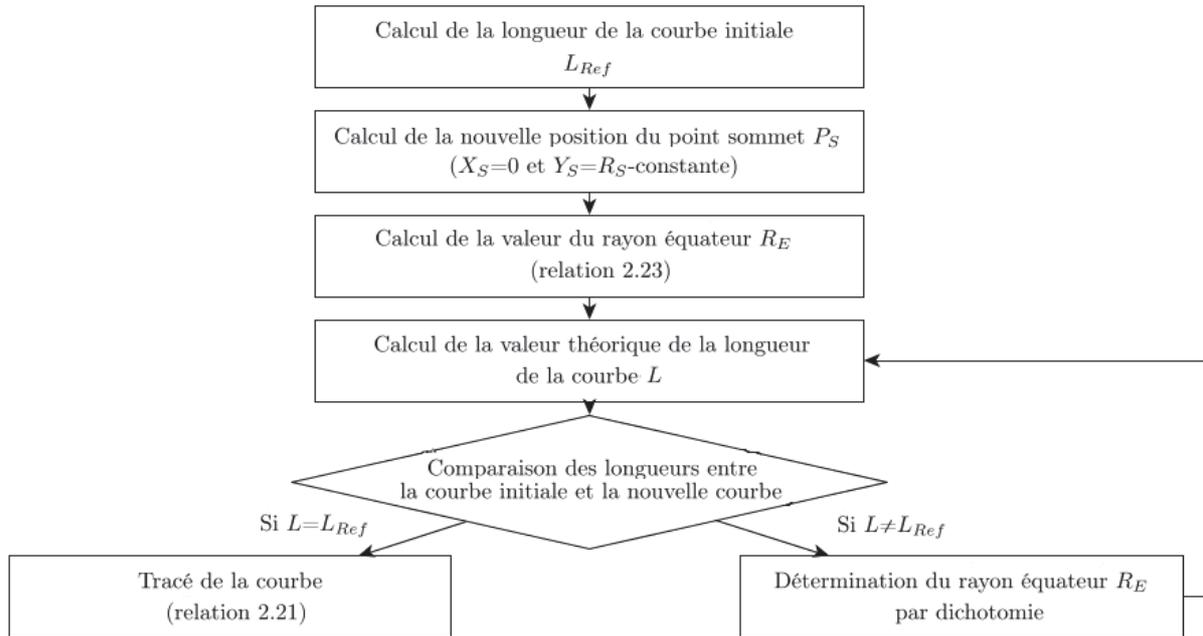


FIGURE 2.13 – Algorithme de génération de la courbe guide avec la méthode développée.

En conclusion, l'algorithme proposé laisse une liberté importante à l'utilisateur. En effet, ce dernier peut choisir le nombre d'étapes qu'il souhaite obtenir entre les étapes initiales et finales pour modéliser le procédé de fabrication d'un pneumatique. Les données d'entrée de la méthode proposée sont quatre paramètres géométriques du pneumatique ce qui permet à des utilisateurs aux compétences hétérogènes de l'utiliser.

Cependant la validation de notre approche est réalisée dans la section suivante par comparaison avec la modélisation Michelin actuelle.

5.2 Application de l'algorithme de gonflement

Le but de cette section est de valider l'utilisation de la méthode par calcul continu en vérifiant qu'aucune dérive n'apparaît au cours du procédé de fabrication du pneumatique.

Pour réaliser cette validation, des tests sont effectués sur cinq dimensions de membrane d'outillage utilisée pour fabriquer des pneumatiques. Dans la suite, ces dimensions de membrane sont appelées : "Deux Roues", "Tourisme", "Poids Lourd", "Agricole", "Génie Civil". Pour chaque dimension, les données géométriques utiles sont données dans le Tableau 2.3 (coordonnées des points sommets P_S , des points équateurs P_E , des points bas P_B et la longueur L de la membrane).

L'algorithme décrit précédemment (section 5.1) est implémenté sous le logiciel Scilab et testé sur une machine équipée d'un processeur 2.67 GHz, de 3.00 GB de RAM et de Microsoft Windows XP. Cette même machine est utilisée pour tous les calculs réalisés dans la suite de cette section.

Types de membrane						
Point	Coordonnées	Deux roues	Tourisme	Poids Lourd	Agricole	Génie Civil
Point sommet	R_S (mm)	285	330	506	825	1852
	Y_S (mm)	0	0	0	0	0
Point Équateur	R_E (mm)	247	270	406	604	1277
	Y_E (mm)	60	128	161,5	336	729
Point Bas	R_B (mm)	221	250	290	496	842
	Y_B (mm)	96	173,5	338	581	1558
Longueur	L (mm)	86,5	112	288	444	1320

Tableau 2.3 – Exemples des dimensions d'outillages utilisés pour fabriquer un pneumatique.

Pour chaque test, vingt courbes sont tracées entre l'étape initiale et l'étape finale du procédé de fabrication en utilisant l'algorithme développé dans la Section 5.1 appelé "algorithme de gonflement" ³. Le pas de discrétisation de l'axe des ordonnées est fixé à 0.1 mm pour la courbe modélisant l'étape finale. Enfin pour un même type de membrane, les vingt courbes contiennent le même nombre de points. La courbe "1" correspond à la courbe finale et la courbe "20" à l'état initial du procédé de fabrication du pneumatique.

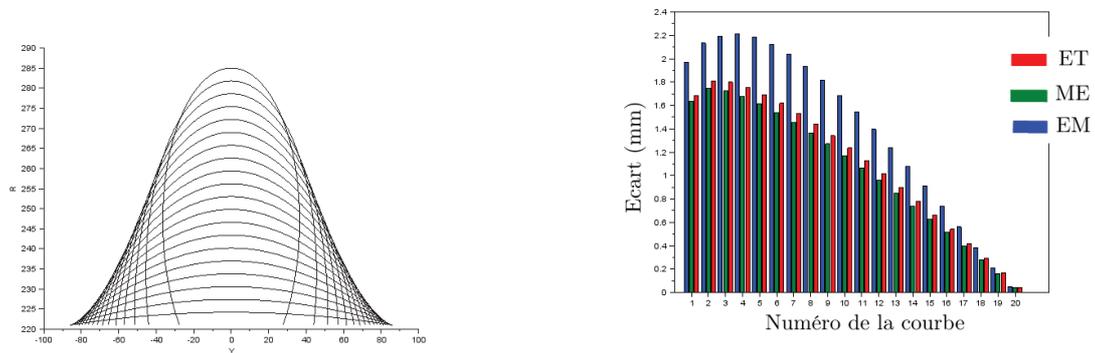
Afin d'évaluer l'écart géométrique entre les courbes guides tracées par calcul continu et par calcul discret, l'Écart Maximum (EM), la Moyenne des Ecarts (ME) et l'Écart Type (ET) des écarts sont calculés et comparés par rapport à la longueur "L" de la première courbe guide tracée.

Enfin les temps pour le tracé des vingt courbes, pour chaque cas, sont calculés. Ces temps sont utilisés afin de conclure sur la possibilité d'utiliser la modélisation proposée dans un cadre industriel.

Cas de la membrane "Deux Roues"

Dans le cas de la membrane "Deux Roues", l'algorithme de gonflement trace les vingt courbes en 7,5 secondes. L'écart géométrique maximum entre les courbes tracées avec l'algorithme de gonflement et la méthode de tracé par calcul discret est de 2,3% comparé à la longueur de la courbe guide. De plus, il diminue avec la diminution du Rayon Sommet R_S .

3. L'algorithme de gonflement utilise la méthode de tracé par calcul continu pour tracer les courbes guides



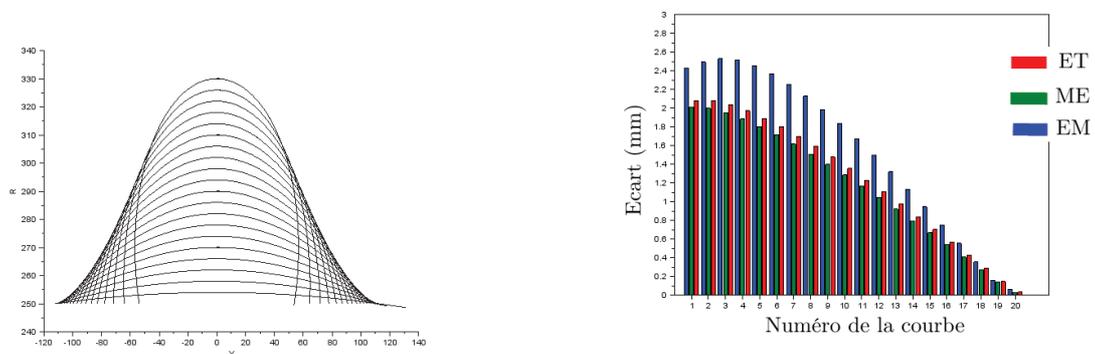
(a) Vingt courbes guides "Deux Roues".

(b) Comparaison entre le tracé discret et le tracé continu ("Deux Roues").

FIGURE 2.14 – Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Deux Roues".
 $L=86,5\text{mm}$, $EM=1,91\text{mm}$, $ME=1,59\text{mm}$, $ET=1,64\text{mm}$

Cas de la membrane "Tourisme"

Dans le cas de la membrane "Tourisme", l'algorithme de gonflement trace les vingt courbes en 9 secondes. L'écart géométrique maximum entre les courbes tracées avec l'algorithme de gonflement et la méthode de tracé par calcul discret est de 2,3% comparé à la longueur de la courbe guide. Cet écart diminue avec la diminution du Rayon Sommet R_S .



(a) Vingt courbes guides "Tourisme".

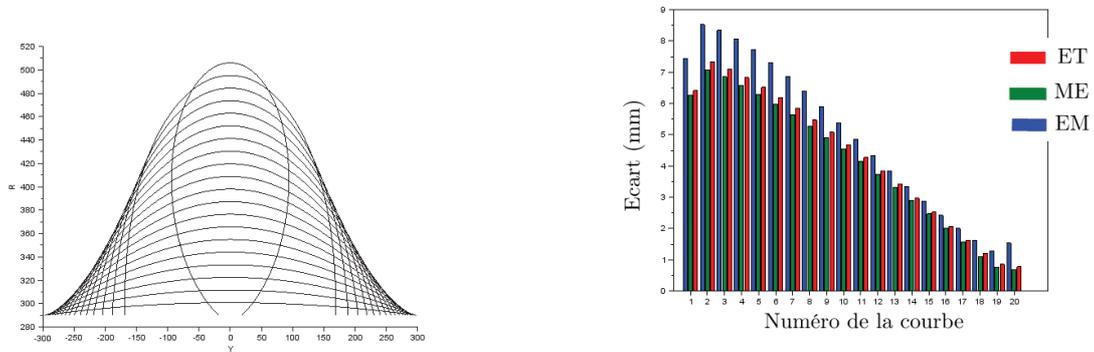
(b) Comparaison entre le tracé discret et le tracé continu ("Tourisme").

FIGURE 2.15 – Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Tourisme".
 $L=112\text{mm}$, $EM= 2,14\text{mm}$, $ME=1,81\text{mm}$, $ET= 1,87\text{mm}$

Cas de la membrane "Poids Lourd"

Dans le cas de la membrane "Poids Lourd", l'algorithme de gonflement trace les vingt courbes en 19 secondes. L'écart géométrique maximum entre les courbes tracées avec l'al-

gorithme de gonflement et la méthode de tracé par calcul discret est de 3% comparé à la longueur de la courbe guide. De plus, il diminue avec la diminution du Rayon Sommet R_S .



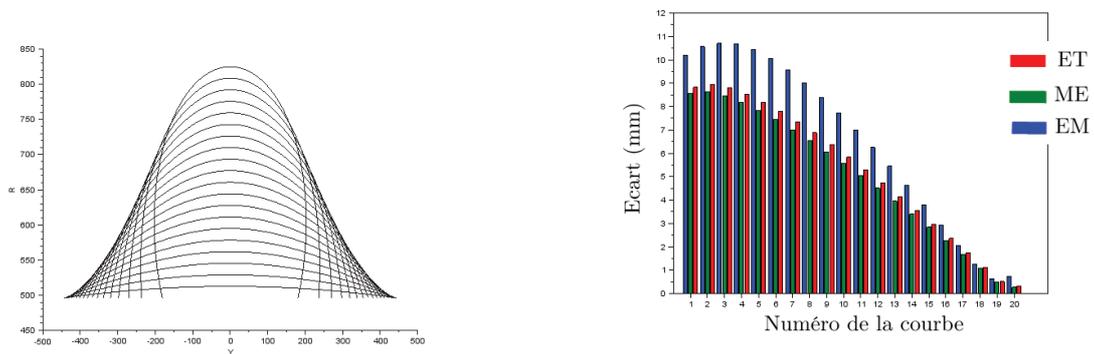
(a) Vingt courbes guides "Poids Lourd".

(b) Comparaison entre le tracé discret et le tracé continu ("Poids Lourd").

FIGURE 2.16 – Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Poids lourd".
L=288mm, EM=8,52mm, ME=7,08mm, ET=7,32mm

Cas de la membrane "Agricole"

Dans le cas de la membrane "Agricole", l'algorithme de gonflement trace les vingt courbes en 30 secondes. L'écart géométrique maximum entre les courbes tracées avec l'algorithme de gonflement et la méthode de tracé par calcul discret est de 2,5% comparé à la longueur de la courbe guide. De plus, il diminue avec la diminution du Rayon Sommet R_S .



(a) Vingt courbes guides "Agricole".

(b) Comparaison entre le tracé discret et le tracé continu ("Agricole").

FIGURE 2.17 – Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Agricole".
L=444mm, EM= 8,95mm, ME= 8,63mm, ET= 8,95mm

Cas de la membrane "Génie Civil"

Dans le cas de la membrane "Génie Civil", l'algorithme de gonflement trace les vingt courbes en 75 secondes. L'écart géométrique maximum entre les courbes tracées avec l'algorithme de gonflement et la méthode de tracé par calcul discret est de 1,6% comparé à la longueur de la courbe guide. De plus, il diminue avec la diminution du Rayon Sommet R_S .

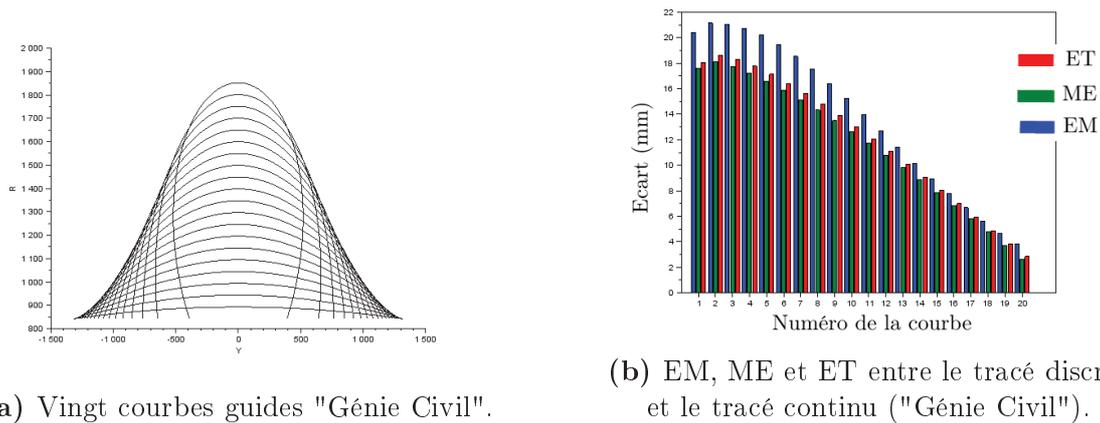


FIGURE 2.18 – Comparaison des méthodes de tracé pour un pneu type "Génie Civil".
 $L=1320\text{mm}$, $EM=18,61\text{mm}$, $ME=18,1\text{mm}$, $ET=18,61\text{mm}$

Les résultats illustrés sur les Figures 2.14 à 2.18 sont synthétisés dans le Tableau 2.4 montrant que l'écart géométrique entre les courbes tracées par calcul continu et calcul discret est stable suivant la dimension du pneumatique. En effet l'Écart Maximum (EM), la Moyenne des Écarts (ME) et l'Écart Type (ET) entre les courbes ne dépassent pas 3% pour l'ensemble des courbes tracées.

Ainsi, aucune dérive n'est observée, ce qui permet de valider le choix de tracer les courbes avec la méthode par calcul continu dans l'algorithme de gonflement.

Critères	Types de pneumatique				
	Deux Roues	Tourisme	Poids Lourd	Agricole	Génie Civil
Écart Maximum (EM)	2,25%	2,26%	2,86%	2,41%	1,60%
Moyenne des écarts (ME)	2,01%	1,80%	2,37%	1,94%	1,37%
Écart Type (ET)	2,09%	1,85%	2,45%	2,01%	1,41%
Longueur L (mm)	86,5	112	288	444	1320

Tableau 2.4 – Comparaison des écarts géométriques pour les différents types de membrane.

Pour la méthode de tracé par calcul continu, les temps de calcul pour tracer vingt courbes sont compris entre 7.5 et 75 secondes. Ces temps de calcul et de tracé sont proportionnels au nombre de points que comporte la courbe et à la longueur de cette dernière.

Une optimisation de l'algorithme de gonflement consiste à adapter le pas de discrétisation à la dimension de la membrane modélisée. En effet, le pas fixé à 0,1 mm dans nos travaux fournit des résultats conformes aux exigences des utilisateurs. Cependant ce pas est validé dans le cadre d'une membrane "Tourisme" (Section 4.3) et peut s'avérer d'une précision non nécessaire pour des membranes de taille supérieure du type "Génie Civil" et moins précis pour des membranes de taille inférieure du type "Deux Roues".

Toutefois sans cette optimisation, les temps de calcul obtenus pour modéliser le gonflement de l'outillage en vingt états correspondent aux exigences industrielles des utilisateurs.

Critères	Types de pneumatique				
	Deux Roues	Tourisme	Poids Lourd	Agricole	Génie Civil
Temps de tracé pour 20 courbes (Par l'outil proposé)	7,5s	9s	19s	30s	75s
Nombre de points par courbes	641	802	2161	3291	10101

Tableau 2.5 – Temps de calcul pour tracer 20 courbes entre l'étape initiale et l'étape finale.

Après ces calculs, la méthode par calcul continu est retenue pour le calcul et le tracé des courbes dans l'algorithme de gonflement pour modéliser géométriquement le procédé de fabrication du pneumatique. Cette conclusion généralise celle faite lors de l'étude réalisée sur une seule courbe pour déterminer la pas de discrétisation de l'axe des ordonnées (Section 4.3).

Enfin, l'exactitude des courbes tracées avec l'algorithme de gonflement reste à valider par rapport à la modélisation Michelin. Une étude est également menée par la suite pour déterminer les apports de cet algorithme.

5.3 Validation mécanique

La validation mécanique de l'outil proposé pour modéliser le gonflement de l'outillage de fabrication d'un pneumatique est présentée dans cette section.

Pour cela, une méthode de modélisation physique est utilisée pour appliquer un état de pression de 5 bars à plusieurs courbes modélisant plusieurs états de gonflement de l'outillage. L'étude théorique réalisée en Section 3 montre que la géométrie de la courbe ne dépend pas de la pression qui lui est appliquée. De ce fait, si la géométrie de la courbe guide tracée ne se déforme pas sous l'application d'une pression, alors l'algorithme de gonflement est validé pour réaliser la modélisation géométrique du procédé de fabrication du pneumatique.

Pour réaliser la modélisation physique, un modèle Masse-Ressort est utilisé sous SOFA [Allard *et al.*, 2007]. Ce type de modèle est utilisé dans le cadre de la déformation de formes géométriques et expliqué dans le Chapitre 3.

Le principe de la validation réside dans le tracé d'une courbe guide avec la méthode par calcul continu sous le logiciel Scilab. Cette courbe sert de référence et de donnée d'entrée

à la modélisation Masse-Ressort. Pour cette modélisation physique, les points de la courbe d'entrée deviennent des particules ayant toute la même masse. Ces particules sont reliées les unes aux autres par des ressorts de raideur infinie. Cette hypothèse permet de prendre en compte l'hypothèse de la conservation de la longueur de la courbe guide tout au long du procédé de fabrication du pneumatique. Une pression p est appliquée sur l'ensemble des particules du modèle Masse-Ressort afin de modéliser un état de gonflement. (Figure 2.19).

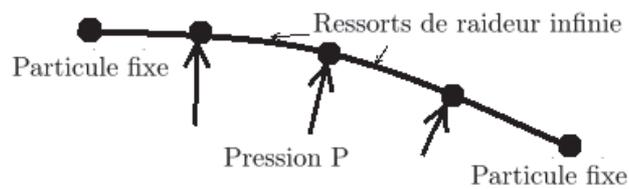


FIGURE 2.19 – Schéma de principe pour la validation du modèle géométrique.

Dans le but de valider la méthode développée, cinq courbes guides sont tracées entre l'étape initiale et l'étape finale du procédé de fabrication pour un pneumatique de type "Tourisme" (Figure 2.20). La longueur référence, pour la dimension étudiée, est 224,24 mm et par symétrie, l'étude est réalisée sur une demi-courbe de longueur 112,12 mm (Tableau 2.6).

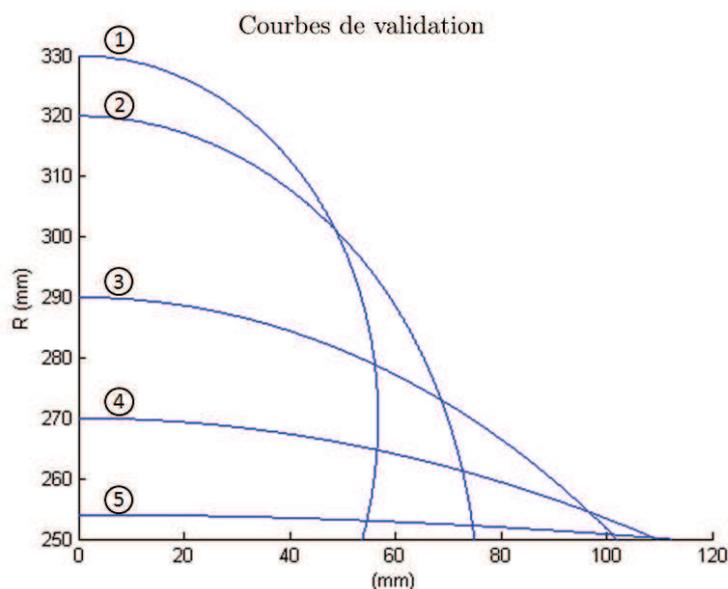


FIGURE 2.20 – Validation de la méthode de tracé par calcul continu.

		Numéro de la courbe de validation				
Rayon	Coordonnées	1	2	3	4	5
Rayon Sommet	R_S (mm)	300	320	290	270	254
Rayon Équateur	R_E (mm)	270	250	144	-211	-699
Rayon Bas	R_B (mm)	250	250	250	250	250
Longueur L (mm)		112,12				

Tableau 2.6 – Dimensions des cinq courbes de validation.

Une comparaison géométrique entre la courbe tracée par l'algorithme de gonflement et la courbe déformée par l'application d'une pression est réalisée. Dans ce but, l'Écart Maximum (EM), la Moyenne des Écarts (ME) et l'Écart Type (ET) sont calculés (Tableau 2.7) en utilisant la courbe tracée par l'algorithme de gonflement comme courbe de référence.

Rayon Sommet R_S (mm)		330	320	290	270	254
Écart Maximum	Valeur absolue (mm)	9,97E-04	5,00E-4	3,99E-03	6,00E-3	1,10E-2
	Erreur	0,001%	0,001%	0,004%	0,005%	0,009%
Moyenne des Écarts	Valeur absolue (mm)	3,91E-04	1,46E-04	3,37E-03	5,66E-03	1,08E-02
	Erreur	0,001%	0,001%	0,004%	0,005%	0,009%
Écart Type	Valeur absolue (mm)	4,93E-04	2,14E-04	3,42E-03	5,71E-03	1,09E-02
	Erreur	0,001%	0,001%	0,004%	0,005%	0,009%
Longueur de la courbe		112,12 mm				

Tableau 2.7 – Écart entre les courbes calculées avec l'algorithme de gonflement et la courbe déformée par application d'une pression.

Les résultats montrent que quelle que soit la forme de la courbe initiale, l'écart géométrique est très faible entre la courbe obtenue après l'application de la pression et la courbe tracée avec l'algorithme de gonflement. Dans chaque cas, l'Écart Maximum est insignifiant par rapport à la longueur de la courbe. De plus l'analyse de la Moyenne des Écarts et de l'Écart Type permet de conclure que les courbes obtenues, après l'application de la pression, correspondent aux courbes tracées avec la méthode proposée.

Ainsi l'algorithme de gonflement développé dans ces travaux est validé et peut être utilisé pour modéliser le gonflement de la membrane de l'outillage pendant la fabrication du pneumatique quel que soit l'état modélisé.

6 Comparaison entre l'algorithme de gonflement et la modélisation Michelin

La modélisation géométrique du gonflement de l'outillage développée doit être comparée à la modélisation Michelin, afin d'identifier l'apport réalisé par l'utilisation de l'algorithme développé. Pour cela, la méthode Michelin est expliquée et des comparaisons sont réalisées par rapport à des critères de performance. Ces derniers sont :

- le temps de tracé des courbes guides ;
- la précision des courbes tracées ;
- le nombre de courbes tracées entre l'état initial et l'état final

6.1 Méthode de tracé Michelin

La méthode de tracé utilisée actuellement pour modéliser la fabrication d'un pneumatique s'appuie sur la méthode discrète de tracé. Les courbes guides sont tracées en un nombre de points fixé arbitrairement à 100 quelle que soit la taille de la membrane modélisée. Les courbes sont tracées dans un environnement de CAO et seulement trois courbes guides peuvent être tracées :

- une première représentant l'étape initiale (Figure 2.21a) ;
- une deuxième représentant l'étape d'assemblage de la partie basse et de la partie haute du pneumatique (Figure 2.21b) ;
- une troisième représentant l'étape finale du procédé de fabrication d'un pneumatique (Figure 2.21c)

Ces trois courbes guides permettent d'obtenir les principales étapes du procédé de fabrication (Voir chapitre 1).

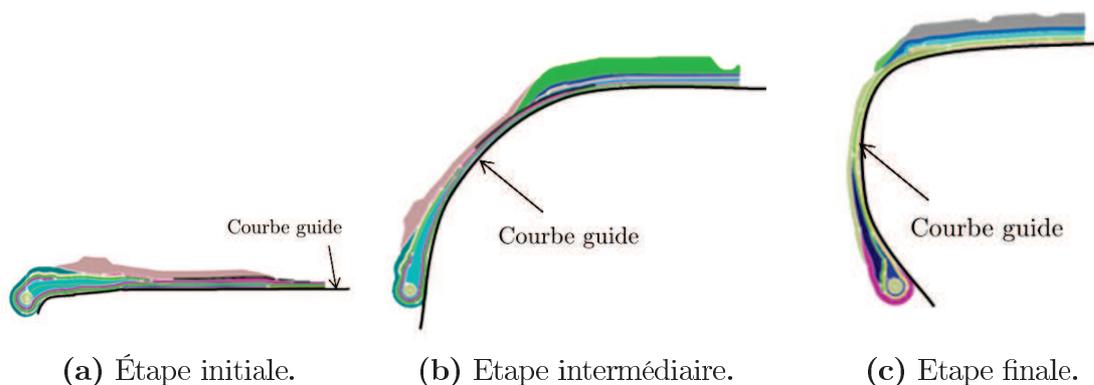


FIGURE 2.21 – Courbes guides tracées avec la modélisation Michelin.

6.2 Apport de l'algorithme de gonflement

La méthode proposée est comparée à la méthode de tracé Michelin. La comparaison est faite sur trois dimensions de courbe guide déterminées à partir des dimensions de membrane utilisée lors de la fabrication des pneumatiques (Tableau 2.8). Le pas de discrétisation de l'axe des ordonnées, choisi par rapport aux calculs réalisés précédemment, est de 0,1 mm pour la modélisation proposée (Section 4.3) alors que la courbe réalisée avec la modélisation Michelin permet de ne calculer que 100 points par courbe pour les trois cas.

		Types de membrane		
Point	Coordonnées	Deux Roues	Poids Lourd	Génie Civil
Point Sommet	R_S (mm)	308,86	506	1852
	Y_S (mm)	0	0	0
Point Équateur	R_E (mm)	239,95	318,45	938
	Y_E (mm)	93,82	195,72	793,4
Point Bas	R_B (mm)	213,927	290,6	938,2
	Y_B (mm)	89,5	194,2	793,4

Tableau 2.8 – Dimensions des pneumatiques testés.

Pour chaque cas, l'Écart Maximum (EM), la Moyenne des Écarts (ME) et l'Écart Type (ET) sont calculés. De plus la méthode Michelin sert de référence puisqu'elle est validée industriellement. Ces critères de comparaison géométriques sont comparés par rapport à la longueur de la courbe référence dans chaque cas.

Types de membrane	Deux Roues	Poids Lourd	Génie Civil
Ordonnée du Point Sommet(mm)	308,86	506	1852
Écart Maximum (mm)	0,285	0,823	2,395
Erreur par rapport à l'ordonnée du Point Sommet	0,22%	0,27%	0,17%
Moyenne des Écarts (mm)	0,136	0,361	1,112
Erreur par rapport à l'ordonnée du Point Sommet	0,10%	0,11%	0,08%
Écart Type (mm)	0,160	0,442	1,337
Erreur par rapport à l'ordonnée du Point Sommet	0,12%	0,14%	0,09%

Tableau 2.9 – Écart géométrique entre les courbes guides pour différentes applications.

Le Tableau 2.9 montre que quel que soit le cas, l'écart géométrique entre les deux modélisations restent inférieur à 0,3%. Cette erreur est inférieure à l'erreur admissible en milieu industriel.

Types de membrane	Deux Roues	Poids Lourd	Génie Civil
Longueur Théorique	131,30 mm	306,69 mm	1425,20 mm
Longueur Méthode Michelin	131,15 mm	306,75 mm	1423,73 mm
Longueur Méthode Développée	132,22 mm	306,61 mm	1425,15 mm
Erreur relative entre Longueur Michelin et Longueur Théorique	0,705%	0,026%	0,004%
Erreur relative entre Longueur Méthode Développée et Longueur Michelin	0,818%	0,045%	0,100%

Tableau 2.10 – Comparaison des longueurs pour les différents cas tracés avec la méthode Michelin et la méthode proposée.

La longueur théorique des courbes est calculée avec l'équation 2.22 pour les trois cas étudiés. Cette longueur théorique est comparée aux longueurs des courbes tracées avec la méthode Michelin et avec l'algorithme de gonflement (Tableau 2.10). Les calculs d'erreur relative par rapport aux longueurs des courbes permettent de remarquer que l'écart est inférieur à 1% pour les trois cas. Or le taux d'erreur accepté pour les cas industriels est fixé à 1% ce qui valide le tracé par la méthode proposée.

De plus, l'algorithme de gonflement permet d'augmenter la densité de points calculés par rapport à la méthode Michelin lorsque le pas de discrétisation est égale à 0,1mm (Voir Section 4.3), quelle que soit la dimension du pneumatique (Tableau 2.5). Les résultats de la partie précédente (Section 5.2) montrent la précision des tracés réalisés avec la méthode de calcul par calcul continu par rapport à celle par calcul discrète. Enfin, la partie précédente montre également que le tracé de vingt courbes guides de plus de 100 points chacune est égale à 75 secondes dans le cas des membranes les plus grandes utilisées. Or ce temps correspond aux temps de calcul de la méthode Michelin pour tracer uniquement trois courbes avec la méthode Michelin. Ainsi la méthode développée permet de modéliser au moins cinq fois plus d'étapes de la modélisation géométrique du procédé de fabrication d'un pneumatique.

En résumé, la modélisation proposée permet de tracer autant de courbes que souhaité entre l'étape initiale et l'étape finale du procédé de fabrication du pneumatique. De plus, ces courbes sont obtenues dans des temps cinq fois inférieurs à ceux de la méthode Michelin qui ne permet de tracer que les trois étapes principales de la fabrication. Enfin les courbes modélisées obtenues avec la méthode par calcul continu sont valides et plus précises du point de vue géométrique.

Avec la méthode proposée, un utilisateur peut modéliser le nombre d'étapes qu'il souhaite de la fabrication d'un pneumatique plus rapidement qu'avec la méthode Michelin et chaque étape est calculée de façon plus précise.

7 Conclusion

Dans ce chapitre, une modélisation géométrique du gonflement de l'outillage est proposée. Elle permet à l'utilisateur de représenter autant d'étapes qu'il le souhaite entre l'étape initiale et l'étape finale du procédé de fabrication d'un pneumatique (Section 6.2). Cette modélisation se base sur un algorithme utilisant la méthode de tracé par calcul discret afin de déterminer numériquement les coordonnées d'un point caractéristique de la courbe, le point équateur P_E . Une fois l'ensemble des paramètres déterminés, le tracé de la courbe est réalisé avec la méthode par calcul continu qui apporte précision, rapidité et un nombre important d'étapes pour modéliser le gonflement de l'outillage (Section 5.2).

Afin de valider la méthode proposée, les courbes obtenues pour modéliser les différentes étapes du procédé de fabrication sont validées par une étude Masse-Ressort et comparée à la modélisation Michelin.

Dans la suite du mémoire, la déformation des éléments posés sur l'outillage est étudiée entre l'étape initiale et l'étape finale du procédé. En effet, les éléments sont modélisés par des formes géométriques et l'ensemble subit la déformation imposée par la membrane de l'outillage modélisé par la méthode proposée dans ce chapitre.

Chapitre 3

Déformation unitaire d'une forme géométrique

Sommaire

1	Introduction	56
2	Déformation d'une forme géométrique	56
2.1	Définition d'une forme géométrique	56
2.2	Méthodes de déformation et évaluation	57
2.3	Modélisation Masse-Ressort actuelle	67
3	Modélisation Masse-Ressort proposée	73
3.1	Définition des paramètres de caractérisation	73
3.2	Méthode de caractérisation pour des formes industrielles	79
3.3	Investigations complémentaires - cas d'un maillage régulier	92
4	Conclusion	99

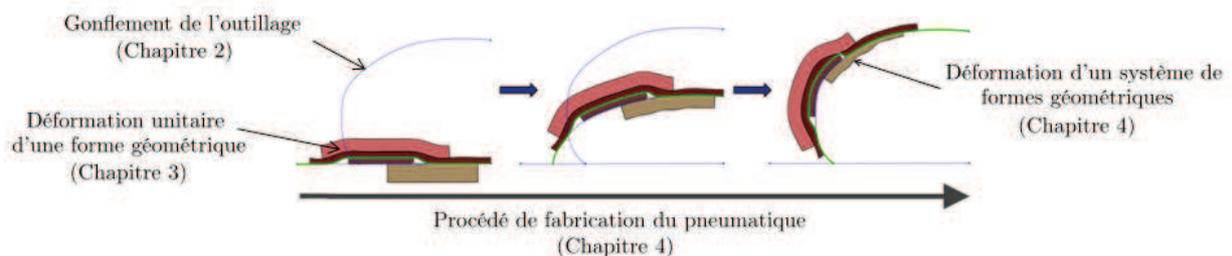


FIGURE 3.1 – Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.

Pour modéliser le procédé de fabrication d'un pneumatique, les éléments du pneumatique sont représentés par des formes géométriques polygonales (Figure 3.1). Ces formes subissent des déformations lors du gonflement de l'outillage. La déformation de l'ensemble du pneumatique nécessite au préalable de maîtriser la déformation unitaire d'une forme géométrique. C'est l'objectif de ce Chapitre 3.

1 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à la modélisation de la déformation des éléments qui constituent un pneumatique. Ces éléments sont assemblés à l'étape initiale de fabrication et sont déformés, sous l'effet du gonflement de l'outillage, jusqu'à atteindre leur forme finale. Avant de traiter la modélisation globale du procédé de fabrication au Chapitre 4, la déformation d'un élément unitaire est étudiée. Pour calculer la déformation d'un élément, seule sa section est représentée par une forme polygonale puisque la modélisation est réalisée en 2D. De plus, les caractéristiques matériaux des éléments qui composent le pneumatique doivent être prises en compte dans le calcul de la déformation. Un état de l'art des méthodes de déformation adaptées à nos besoins est réalisé. À partir de cet état de l'art, nous proposons un modèle de déformation dont la validation est réalisée par des tests comparatifs avec la méthode par Éléments Finis qui fait office de méthode de référence.

2 Déformation d'une forme géométrique

Plusieurs méthodes existent pour modéliser la déformation d'une forme géométrique représentative d'un élément du pneumatique. Il convient de rechercher la méthode la plus en adéquation avec les exigences industrielles que sont la réalisation du calcul de déformation en temps réel en prenant en compte les caractéristiques mécaniques du matériau modélisé.

2.1 Définition d'une forme géométrique

Une forme géométrique est délimitée par un contour 2D qui peut se déformer jusqu'à atteindre une position et une forme dépendantes des forces qui lui sont appliquées. Ces forces sont de deux types :

- Des forces internes représentatives de la cohésion du matériau modélisé ;
- Des forces externes définies à partir de la mise en données du problème modélisé.

La forme initiale peut être un rectangle pour représenter la section d'une nappe (Figure 3.2a), ou une forme polygonale plus complexe pour représenter les sections des autres éléments. La modélisation Michelin actuelle s'appuie sur une courbe basse et une courbe haute représentatives de l'enveloppe de l'élément. Des exemples sont donnés Figure 3.2 où la courbe basse est représentée par des tirets et la courbe haute par un trait continu. Cette

division permet de réaliser l'assemblage des différentes formes géométriques pour lequel la courbe basse est positionnée par rapport à une courbe support ¹.

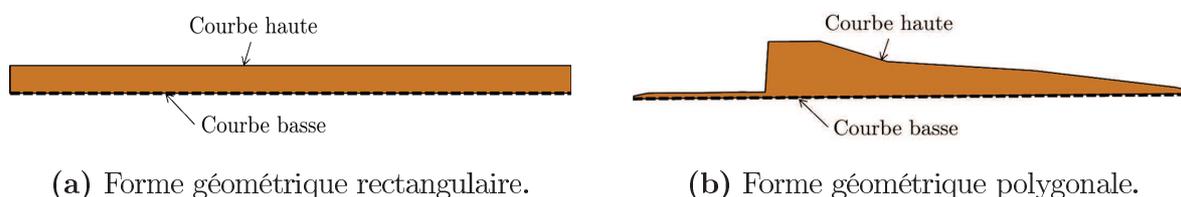


FIGURE 3.2 – Exemples de formes géométriques.

Enfin, des propriétés matériaux sont associées à la forme géométrique et doivent être prises en compte par les méthodes de déformation.

2.2 Méthodes de déformation et évaluation

Les méthodes de déformation issues de la bibliographie se divisent en deux catégories :

- Les méthodes géométriques (Section 2.2.2) ;
- Les méthodes physiques (Section 2.2.3).

Afin d'identifier les plus pertinentes pour nos travaux, les méthodes sont comparées par rapport à des critères de performance.

2.2.1 Évaluation des méthodes de déformation

Les critères d'évaluation sont définis sur la base des limites rencontrées dans la modélisation Michelin et sont regroupés en deux catégories :

Les critères mécaniques

a) *Prise en compte des propriétés matériau*

La méthode développée doit donc permettre de déformer une forme géométrique en prenant en compte ses caractéristiques matériau.

b) *Prise en compte des interactions entre les formes*

La modélisation développée vise à représenter un système de formes géométriques aux caractéristiques mécaniques différentes. Ce système peut entrer en contact avec d'autres systèmes et se déformer. Les formes géométriques au sein de ces systèmes doivent pouvoir interagir entre elles. La méthode développée doit permettre de modéliser les contraintes aux interfaces de chaque forme géométrique.

1. Définition des courbes support Chapitre 1 Section 2.2

Les critères de simulation

a) *Le temps de calcul*

La modélisation du procédé de fabrication est utilisée en centre de recherche et en usine de fabrication par des utilisateurs aux compétences hétérogènes. Ces utilisateurs souhaitent obtenir les résultats en temps réel comme c'est le cas avec la modélisation Michelin actuelle.

b) *La mise en donnée*

La mise en donnée de la modélisation doit être réalisée en un temps inférieur à la minute et de façon automatisée.

Les critères sont pondérés en fonction de leur importance pour retenir la méthode la plus appropriée et chaque critère est utilisé pour évaluer chaque méthode selon plusieurs niveaux : très adaptée, adaptée, peu adaptée ou inadaptée (Tableau 3.1). Si l'interprétation des différentes publications analysées ne permet pas d'évaluer la méthode, le symbole (?) est utilisé.

Méthode	Très Adaptée	Adaptée	Peu Adaptée	Inadaptée	Non évaluable
Symbole	++	+	-	--	(?)

Tableau 3.1 – Symboles utilisés pour évaluer les méthodes de déformation.

A l'issue de cette comparaison, la méthode qui répond le mieux aux besoins de la modélisation est retenue. Si plusieurs méthodes paraissent équivalentes pour répondre au problème posé, le choix est réalisé par rapport aux critères mécaniques qui ont plus d'importance que les critères de simulation par rapport à la pondération réalisée.

2.2.2 Méthodes de déformation géométrique

Les méthodes de déformation géométrique s'appuient sur la modification des composants tels que les points ou courbes des formes. Les méthodes présentées dans ces travaux sont :

- La méthode des déformations libres (FFD) ;
- La méthode de déformation par maillage englobant ;
- L'animation de corps rigides.

Méthode des déformations libres

Parmi les méthodes géométriques, Sederberg et Parry présentent une méthode appelée méthode de déformations de formes libres (Free Form Deformation - FFD en anglais) [Sederberg et Parry, 1986] [Sederberg et Greenwood, 1992]. Cette méthode permet de déformer la géométrie d'un objet en agissant sur les points de contrôle des contours de la forme géométrique. La FFD permet de déformer toutes les formes géométriques possibles en temps réel mais sans prendre en compte de caractéristiques mécaniques. Pour cette raison, les résultats de cette méthode sont loin de la réalité physique du comportement de l'objet modélisé.

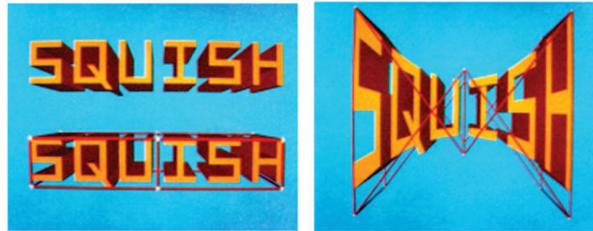


FIGURE 3.3 – Exemple de déformation d'un objet par la méthode FFD [Sederberg et Parry, 1986].

Les travaux de Guillet et Pernot portent sur la définition de la forme géométrique. Cette dernière est divisée en volumes de Bézier qui empêchent l'apparition de discontinuité lors de la déformation [Guillet, 1999] [Pernot, 2004]. Pour déformer une surface paramétrée, cette méthode agit directement sur les points de contrôle de l'objet situés dans un espace donné [Cheutet *et al.*, 2005].

La méthode des déformations libres a été reprise par Coquillard et al [Coquillard, 1990] où l'espace, dans lequel est modélisée une forme géométrique, est considéré comme un bloc pour générer la déformation. Les manipulations appliquées à ce bloc produisent la déformation des formes géométriques contenues à l'intérieur. Cette méthode peut prendre en compte des caractéristiques physiques afin de simuler le comportement d'un objet réel.

Des travaux en rapport avec la prise en compte de paramètres physiques ont été réalisés et s'appuient sur cette méthode géométrique. Ils permettent de lier les caractéristiques biomécaniques aux déformations des formes géométriques. Pour cela, les positions des points de contrôles sont les degrés de liberté, et les différentes énergies de la forme géométrique modélisée (cinétiques, dissipatives, déformations) sont exprimées par les équations de Lagrange en fonction de la position des différents points [France *et al.*, 2002].

La méthode FFD est utilisée dans le monde du design où l'utilisateur peut modifier chaque forme selon sa volonté. Elle est également utilisée dans le domaine de l'animation [Singh et Kokkevis, 2000].

En résumé la méthode FFD permet de prendre en compte des paramètres mécaniques à travers des lois géométriques (+). Les déformations sont obtenues en temps réel (+ +) mais toutes les déformations réalisées avec cette méthode nécessitent une intervention systématique de l'utilisateur (- -).

Méthode de déformation par maillage englobant

La méthode de déformation par maillage englobant, développée dans les années 90, déforme en temps réel des formes géométriques [Boissonnet, 1997a]. Ces formes sont polygonales et leurs sommets sont repérés comme des points caractéristiques (Étape 1, Figure 3.4a).

Cette méthode de déformation s'appuie sur la définition d'un maillage quadrangulaire déformé dont la taille des éléments est calculée en fonction de la courbe frontière de la forme étudiée. Le maillage est créé couche par couche à partir de la courbe frontière et

recouvre entièrement la forme géométrique. La position relative des points caractéristiques de la forme géométrique est repérée dans le maillage (Étape 2, Figure 3.4b).

Ensuite une loi géométrique est utilisée pour déformer la courbe frontière de la forme géométrique initiale. Cette loi peut traduire la déformation d'un outillage industriel par exemple. Le maillage déformé est créé couche par couche à partir de la courbe frontière déformée. Ce second maillage comporte le même nombre d'éléments que le maillage initial. La taille des éléments peut être régie par une loi mécanique prenant en compte les caractéristiques matériaux (Étape 3, Figure 3.4c).

Enfin, les points caractéristiques de la forme géométrique sont reportés dans le maillage déformé à partir de leur position relative repérée dans le maillage initial. Ces points permettent de reconstruire la forme géométrique déformée (Étape 4, Figure 3.4d).

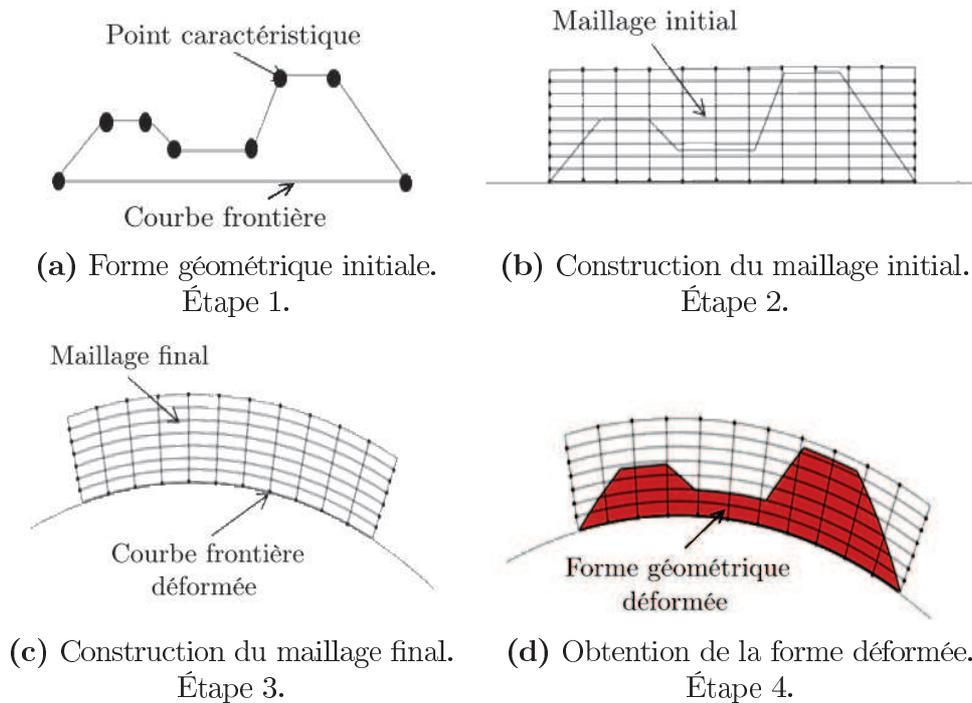


FIGURE 3.4 – Illustration de la méthode de déformation par maillage englobant.

La méthode de déformation par maillage englobant est utilisée dans le cadre industriel de la modélisation du procédé de fabrication du pneumatique [Boissonnet, 1997a] [Boissonnet, 1997b]. Cette méthode est également utilisée pour réaliser des tests physiques simples tels que des essais de traction et flexion à partir d'approximations géométriques [Trouvain *et al.*, 2013].

En résumé, cette méthode permet de déformer des formes géométriques en temps réel (++) tout en prenant en compte des caractéristiques matériaux à partir des lois géométriques empiriques. Néanmoins l'élasticité, ne peut pas être prise en compte (-). Cependant, cette méthode ne permet de déformer qu'une seule forme et non un ensemble de formes géométriques (-).

Méthode de l'animation de corps rigides

La méthode de l'animation de corps rigides s'appuie sur la discrétisation des formes géométriques en un ensemble de corps rigides. Dans une même forme géométrique, les corps rigides sont reliés les uns aux autres par des liens (Figure 3.5). Par définition, les corps rigides ne sont pas déformés même s'ils sont soumis à des forces extérieures. Une masse est attribuée à chaque corps rigide pour que l'ensemble de la forme géométrique modélisée subisse l'effet de la gravité.

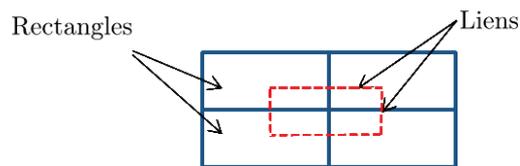


FIGURE 3.5 – Discrétisation des formes déformables.

Des travaux se sont focalisés sur l'utilisation des lois de Newton en dynamique pour simuler les mouvements des corps rigides. Ces méthodes fournissent des animations de corps rigides et déformables très réalistes après une phase d'ajustements qui peut être coûteuse en temps. En effet, les premiers résultats sont souvent approximatifs [Hahn, 1988].

Baraff présente une méthode pour calculer analytiquement les forces entre les systèmes de corps rigides [Baraff, 1989]. Ces systèmes peuvent être en mouvement ou en équilibre statique et des corps adjacents peuvent être en contact à plusieurs endroits différents du système.

Le moteur de physique "phun" développé par Emil Ermerfeldt est un exemple de l'utilisation de ce modèle pour créer des systèmes physiques [Algodoo, 2014]. La Figure 3.6 montre un exemple de système réalisable. Ce moteur physique intègre les notions de frottement et de masse dans les simulations réalisées avec la méthode de l'animation de corps rigides. De plus les résultats sont obtenus en temps réel.

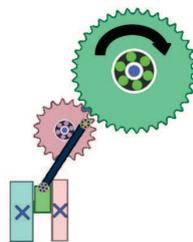


FIGURE 3.6 – Exemple d'animations de corps rigides sous phun [Algodoo, 2014].

En résumé, la théorie des corps rigides peut être utilisée pour créer des modélisations physiques avec la prise en compte de la gravité et des frottements entre différentes formes géométriques (+ +). Son utilisation est intuitive (+) et les résultats sont obtenus en temps réel

(+ +). Cependant les corps rigides qui composent les formes géométriques ne se déforment pas (- -) ce qui empêche l'utilisation de cette théorie dans nos travaux.

2.2.3 Méthodes numériques de déformation

A la fin des années 80, Terzopoulos et al. introduisent les modèles physiques de déformation dans le domaine du graphisme numérique [Terzopoulos *et al.*, 1987] [Terzopoulos et Fleisher, 1988]. Ces modèles unifient la déformation de la forme géométrique et son déplacement dans l'espace au cours du temps en utilisant les lois de la mécanique continue. Ils permettent d'obtenir des déformations mécaniques plus cohérentes que les méthodes géométriques.

Les méthodes physiques détaillées dans cette section sont :

- La méthode des Éléments Finis (FEM) ;
- La méthode Masse-Ressort ;
- La méthode des éléments frontières (BEM) ;
- La méthode des Masses Tenseurs.

Méthode des Éléments Finis (FEM)

La méthode des Éléments Finis apparait comme la méthode la plus adaptée pour obtenir une modélisation physique fine des déformations d'un objet et pour résoudre des problèmes de mécanique continus [Bathe, 1996] [Rappaz *et al.*, 1998]. Son utilisation nécessite une discrétisation du système mécanique étudié en un maillage d'éléments composés chacun de nœuds. Ces nœuds permettent d'approximer, par des fonctions d'interpolation continues, les champs de forces et de déplacements.

La précision des résultats et les temps de calcul dépendent de la précision du maillage. En effet, pour un maillage précis, des temps de calculs très importants peuvent être atteints dans le cas de modélisations complexes. Cet inconvénient empêche la FEM d'être utilisée pour des applications nécessitant des résultats en temps réels.

Afin de réduire le temps de calcul, des méthodes alternatives sont développées et répertoriées par [Paccini, 2005] :

- Le principe de superposition :

Cette méthode développée par Cotin et al. est applicable lorsque le comportement du matériau modélisé est supposé linéaire [Cotin *et al.*, 1999]. Dans ce cas, les efforts sont considérés indépendants à chaque nœud du maillage. Cette hypothèse permet de réaliser un pré-calcul pour construire une base de données. Cette phase prend le plus de temps mais une fois réalisée, un calcul de déformation en temps réel est possible. Cependant, cette méthode n'est pas applicable lorsque la topologie du maillage est modifiée pendant la simulation puisqu'à chaque changement de système et de conditions limites, le pré-calcul doit être refait.

- La parallélisation :

Cette méthode détaillée par Székely et al. peut être utilisée lorsque le maillage est décomposé en plusieurs sous domaines [Szekely *et al.*, 1998]. Chacun d'entre eux peut être

traité indépendamment par un processeur informatique lors du calcul. La qualité de la parallélisation et la réduction du temps de calcul dépend du temps de communication entre les processeurs. Ainsi cette méthode dépend des moyens informatiques mis en œuvre.

En résumé, la Méthode des Éléments Finis permet d'obtenir des résultats précis au dépend d'une mise en donnée qui nécessite un niveau d'expertise (-) et d'un temps de calcul importants. En effet, les temps de calcul ne permettent pas de fournir des résultats en temps réel dans des études de déformations complexes (- -). Enfin La FEM prend en compte des critères mécaniques à partir des lois de comportement des matériaux (+ +). Cette méthode gère également la liaison entre les formes (+ +) géométriques.

Méthode des Éléments Frontières

La méthode des éléments frontières (Boundary Element Method - BEM) s'appuie sur un maillage des contours de la forme géométrique. Les éléments utilisés pour ce maillage sont appelés "éléments frontières" [Allard *et al.*, 2007]. La résolution numérique se base sur l'équation de Navier obtenue à partir de l'équation de conservation de l'énergie et des propriétés des matériaux. Les matériaux doivent être continus, isotropes, élastiques et linéaires [James et Pai, 1999].

Les éléments triangulaires et quadrilatères sont les deux types utilisés pour discrétiser la surface extérieure en 3D, et des éléments poutres sont utilisés en 2D. Ces éléments peuvent être constants, linéaires ou quadratiques mais quel que soit le type d'éléments les déplacements et les efforts sont appliqués aux nœuds.

Le module de Young et le coefficient de Poisson pour un matériau linéaire et isotrope sont renseignés. De plus, seuls des petits déplacements peuvent être réalisés pour respecter les hypothèses de modélisation et pour obtenir des résultats finaux cohérents.

Pour réduire le temps de calcul de déformation, une étape de pré-calcul doit être réalisée afin d'optimiser le temps de calcul. Cette étape consiste à calculer la matrice de raideur du système modélisé, étape très importante en temps de calcul. Le calcul de déformation réalisé par la suite pour modéliser la déformation de la forme géométrique étudiée s'appuie sur ce pré-calcul et peut être obtenu en temps réel. Cependant l'étape de pré-calcul doit être refaite à chaque changement de conditions aux limites du problème modélisé.

La méthode BEM est utilisée dans les domaines de déformation des tissus mous, de l'acoustique et du calcul de structure où elle est souvent comparée à la méthode Éléments Finis [Tang *et al.*, 2006]. Cette méthode est également utilisée dans le domaine de l'animation afin de prendre en compte des paramètres physiques dans les calculs de déformation [Meier *et al.*, 2005].

En résumé, la méthode BEM permet de ne modéliser que des matériaux linéaires et isotropes (-). Par rapport au temps de calcul, un pré-calcul doit être réalisé pour obtenir une déformation en temps réel (+). Enfin cette méthode est complexe à mettre en place et à utiliser (-).

Modèle Masse-Ressort

Le modèle Masse-Ressort est un modèle de déformation physique qui s'appuie sur la discrétisation de la forme géométrique en un maillage. Une masse est attribuée aux nœuds de ce maillage en fonction de la densité volumique du matériau modélisé. Les nœuds d'un modèle Masse-Ressort sont appelés particules et sont reliés les uns aux autres par des ressorts (Figure 3.7). Ces ressorts modélisent l'élasticité du matériau à partir du module de Young et du coefficient de Poisson [Gudukbay *et al.*, 1997] [Paccini, 2005].

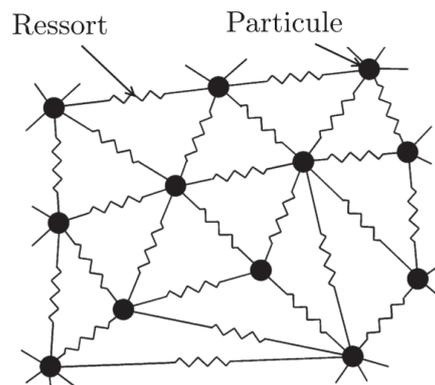


FIGURE 3.7 – Maillage composé de masse et de ressorts [Meier *et al.*, 2005].

La qualité des résultats et du temps de calcul fournis par la méthode Masse-Ressort dépend de la discrétisation et de la caractérisation du système. Des approches de caractérisation existent pour définir les raideurs et les masses d'un système Masse-Ressort [Baudet, 2006]. Ces modèles ont une influence directe sur la qualité du résultat de la modélisation et sont expliqués dans la suite du chapitre.

Afin de modéliser des comportements plus complexes, Nedel intègre des ressorts angulaires [Porcher Nedel et Thalmann, 2000] (Figure 3.8). Ce modèle est utilisé par Tang et al dans le domaine médical [Tang et Hui, 2009]. De plus, une modélisation prenant en compte des comportements viscoélastiques peut être réalisée en utilisant les modèles de Kelvin-Voigt ou de Maxwell.

Des techniques de maillage adaptatif sont développées afin de modifier ce dernier lors des calculs de déformations dans les zones à grandes déformations. Ces techniques sont illustrées par Hutchinson et al [Hutchinson *et al.*, 1996].



FIGURE 3.9 – Raffinement du maillage [Hutchinson *et al.*, 1996].

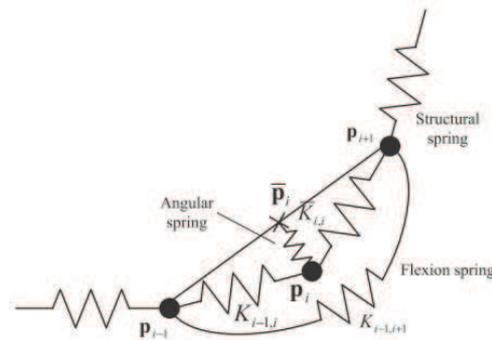


FIGURE 3.8 – Utilisation des ressorts angulaires [Tang et Hui, 2009].

Ce modèle est apparu dans les années 80 [Paccini, 2005] et s'est répandu dans les années 90, dû au besoin de simulation en temps réel et de façon interactive dans le domaine du biomédical [Terzopoulos et Waters, 1990] [Tang et Hui, 2009]. Cette méthode est également utilisée dans le domaine de l'animation faciale où les propriétés non élastiques des matériaux sont prises en compte [Gibson et Mirtich, 1997], dans la simulation du mouvement d'animaux avec prise en compte d'un coefficient de frottement [Miller, 1988], pour la modélisation de la déformation de textile [Provot, 1996], et dans le domaine chirurgical [Chendeb, 2007]. Pour chacune de ces utilisations, les systèmes Masse-Ressort sont construits de façon spécifique afin de modéliser les problèmes physiques étudiés.

En résumé, la méthode Masse-Ressort prend en compte des caractéristiques matériaux tel que le module de Young et le coefficient de Poisson (+). En couplant cette méthode à un moteur de collisions, les interactions entre deux formes géométriques distinctes peuvent être prises en compte (+). Les résultats sont obtenus en temps réel (++) et la mise en donnée peut être automatisée (+).

Méthode Masse-Tenseur

La méthode Masse-Tenseur, développée par Cotin [Cotin *et al.*, 2000], s'appuie sur une résolution locale et interactive des équations fournies par la méthode Éléments Finis. La méthode Masse-Tenseur s'appuie sur la topologie du maillage qui peut être modifiée pendant le calcul de déformation.

Pour réaliser le calcul de déformation, une matrice de raideur est calculée à chaque nœud appartenant à un élément. À partir de la discrétisation du champ des déplacements sur un élément, l'énergie de déformation est exprimée en fonction des déplacements des sommets. La dérivée de l'énergie de déformation permet d'obtenir la force élastique exercée sur chacun des sommets et de réaliser ainsi un bilan des forces sur chaque nœud. Ce bilan détermine le déplacement du point.

La méthode Masse-Tenseur seule ne permet pas d'accélérer les temps de calcul par rapport à la méthode Éléments Finis dans le cas d'un calcul global quasi-statique. Pour ces raisons, Cotin propose de combiner la méthode Éléments Finis et le principe de superposition avec cette méthode de déformation [Cotin *et al.*, 2000]. Dans ce cas, la méthode Masse

Tenseur n'est appliquée qu'aux lieux de changement de topologie du maillage.

Dans les travaux de Nienhuys-van der Stappen [Nienhuys et Van der Stappen, 2000] et de Laugier-Mendoza [Mendoza *et al.*, 2003], la méthode des Masses Tenseurs est utilisée seule pour modéliser la découpe de corps mous. Enfin Picinbono propose un modèle déformable mettant en œuvre l'élasticité non-linéaire de St Venant-Kirchhoff [Picinbono *et al.*, 2002].

En résumé, la méthode Masse-Tenseur permet de prendre en compte des caractéristiques matériaux (+) et de gérer les liaisons entre les formes géométriques. Les résultats sont fournis en temps réel mais la mise en donnée des problèmes à modéliser est complexe (-).

2.2.4 Synthèse des méthodes de déformation

À partir des descriptions des méthodes de déformations géométrique et physique, une synthèse est réalisée par catégorie afin de déterminer la méthode la plus adaptée à la modélisation du procédé de fabrication des pneumatiques.

Synthèse des méthodes géométriques

Le Tableau 3.2 montre l'ensemble des méthodes géométriques qui permettent de déformer des formes géométriques en temps réel. La méthode FFD nécessite l'acquisition d'un niveau d'expertise élevé de la part de l'utilisateur. La méthode de déformation par maillage englobant et celle sur la méthode de l'animation de corps rigides ne permettent pas de déformer plusieurs formes en même temps et de gérer les liaisons entre elles. Enfin ces trois méthodes ne permettent pas de prendre en compte les caractéristiques matériaux lors du calcul de déformation des formes géométriques.

Ainsi, les inconvénients des trois méthodes géométriques ne permettent pas leur implémentation dans le cadre de nos travaux.

Critères	Pondération	Méthode de Déformations Libres (FFD)	Déformation par maillage englobant	Animation de corps rigides
Différenciation des matériaux	30%	(-)	(-)	(-)
Liaisons entre plusieurs formes géométriques	30%	(?)	(-)	(++)
Temps réel	25%	(++)	(++)	(++)
Mise en donnée	15%	(-)	(+)	(+)

Tableau 3.2 – Synthèses des méthodes géométriques.

Synthèse des méthodes numériques de déformation

L'ensemble des méthodes physiques prennent en compte les caractéristiques des matériaux lors du calcul de déformation. L'utilisation de la méthode BEM est limitée à des matériaux continus, isotropes, élastiques et linéaires. Cette restriction limite son utilisation par rapport aux autres méthodes. La comparaison est fournie dans le Tableau 3.3.

La gestion des liaisons entre les formes géométriques évite les phénomènes d'interpénétration présents dans la modélisation actuelle. Cette fonctionnalité est réalisée par le couplage d'un moteur de collision dans le cas de la méthode Masse-Ressort.

La méthode Éléments Finis n'est pas utilisable pour fournir des résultats en temps réels alors que c'est une des caractéristiques principales de la méthode Masse-Ressort. De plus, cette dernière méthode ne nécessite pas un niveau d'expertise pour être utilisée et mise en place rapidement contrairement aux méthodes Masse-Tenseur et BEM.

Critères	Pondération	Méthode des Éléments Finis	Méthode Masse-Ressort	Méthode Masse-Tenseur	Méthode des Éléments Frontières
Différenciation des matériaux	30%	(++)	(+)	(+)	(-)
Liaisons entre les formes géométriques	30%	(++)	(+)	(+)	(?)
Temps réel	25%	(-)	(++)	(+)	(+)
Mise en donnée	15%	(-)	(+)	(-)	(-)

Tableau 3.3 – Synthèses des méthodes numériques de déformation.

A partir de la comparaison de ces méthodes physiques et de la pondération de chaque critère, la méthode Masse-Ressort est choisie pour modéliser la déformation des formes géométrique du procédé de fabrication d'un pneumatique. Les applications actuelles se limitent au domaine de déformation des matériaux souples, principalement dans le domaine du médical et du textile. Une adaptation de cette méthode est nécessaire pour l'appliquer à la déformation d'un pneumatique dont les propriétés mécaniques présente une grande variabilité. Ainsi une méthode de caractérisation de la méthode Masse-Ressort doit être développée pour déformer des formes qui modélisent les éléments d'un pneumatique.

2.3 Modélisation Masse-Ressort actuelle

Un système Masse-Ressort est composé de particules et de ressorts. Une masse est associée à chaque particule et une raideur à chaque ressort définies à partir du matériau modélisé. La définition des masses et raideurs permettant de déformer de façon cohérente un système nécessite le développement de méthode de caractérisation.

2.3.1 État de l'art des méthodes de caractérisations

Flechon recense les méthodes de caractérisation existantes et les classe en deux catégories [Flechon, 2011] :

- Les méthodes de minimisation et d'adaptation d'énergie ;
- Les méthodes analytiques.

Les méthodes de minimisation et d'adaptation d'énergie

Parmi les méthodes de minimisation et d'adaptation d'énergie, Bianchi préconise de définir simultanément les coefficients de raideur et la topologie du maillage [Bianchi *et al.*, 2003][Bianchi *et al.*, 2004]. Pour cela, une stratégie évolutionniste² est employée afin d'optimiser une fonction qui représente la différence entre le comportement du modèle de référence et du modèle étudié.

Dans le cas de la méthode exposée par Zerbato [Zerbato *et al.*, 2007], les informations nécessaires pour définir la masse de chaque particule sont extraites à partir d'images médicales permettant de récupérer les densités locales de l'objet modélisé. Un algorithme génétique est utilisé pour définir la raideur des ressorts minimisant les différences entre les mesures de déformation faites sur un modèle réel et le comportement de l'objet virtuel.

En effet, ces méthodes s'appuient sur l'identification empirique des paramètres pour obtenir un résultat visuel proche de la réalité physique. En conclusion, le temps de calcul excessif et la nécessité d'avoir une solution de référence ne permettent pas d'utiliser ces méthodes de minimisation et d'adaptation d'énergie pour réaliser le paramétrage du système Masse-Ressort dans nos travaux.

Les méthodes analytiques

Les méthodes analytiques consistent à formuler les paramètres des systèmes Masse-Ressort à partir d'expressions analytiques. Ces dernières peuvent être des lois de mécanique des milieux continus par exemple.

Terzopoulos est le premier à avoir proposé une méthode analytique [Terzopoulos *et al.*, 1991] qui dérive des équations de la conductivité thermique. Sa modélisation permet de simuler le transfert de chaleur dans un système Masse-Ressort volumique.

Van Gelder expose une méthode de caractérisation basée sur les équations de la mécanique des milieux continus. Elle est valable pour un matériau élastique isotrope et pour des maillages triangulaires ou tétraédriques [Van Gelder, 1998]. Cette méthode montre que les coefficients de raideur de chaque ressort sur un même objet doivent être différents selon leur position dans l'objet. Cependant cette méthode n'est valable que pour un coefficient de poisson nul, ce qui n'est pas le cas dans nos travaux.

2. Théorie de mathéuristique d'optimisation

Jansson et al. définit un modèle Masse-Ressort pour calculer des déformations de tissus dans le domaine biomédical mais ce modèle ne prend pas en compte les paramètres réels des matériaux [Jansson et Vergeest, 2002]. Lloyd reprend cette méthode et énonce une méthode de caractérisation basée sur la comparaison des matrices de raideur du système modélisé par Masse-Ressort et par Éléments Finis. Cette méthode est efficace pour des maillages triangulaires, rectangulaires ou tétraédriques [Lloyd *et al.*, 2007]. Cependant elle est restreinte aux matériaux ayant un coefficient de Poisson égal 0.3 car pour cette valeur l'erreur est minimisée. Enfin, Natsupakpong propose une approche similaire à celle de Lloyd et applicable pour des modèles 2D et 3D. Cependant, cette méthode n'aboutit pas à des équations analytiques générales mais à des exemples de cas particulier [Natsupakpong et Cenk Cevusoglu, 2010].

Baudet présente une méthode basée sur l'identification de la constante de raideur par rapport au module d'Young et au coefficient de Poisson [Baudet, 2006]. L'auteur propose un maillage original, pour réaliser cette identification en deux dimensions (Figure 3.10). Des tests de cisaillement, de traction et de compression sont réalisés pour définir les raideurs des différents ressorts. Ces travaux permettent de caractériser un système Masse-Ressort dans le cas d'un matériau linéaire, homogène, isotrope en 2D (Equations 3.5).

Le paramétrage proposé par Baudet est réalisé sur un seul élément quadrangle du système Masse-Ressort. Si un système est composé de plusieurs éléments, ces derniers sont caractérisés individuellement et assemblés ensuite. Lors de l'assemblage, les ressorts latéraux des éléments sont dédoublés et les ressorts en parallèle sont sommés en appliquant la théorie des ressorts en parallèle.

Les formules permettant de calculer les raideurs des ressorts latéraux K_1 , K_2 (figure 3.10) en deux dimensions sont :

$$K_1 = \frac{E(h_0^2(3\nu + 2) - l_0^2)}{4l_0h_0(1 + \nu)} \quad (3.1)$$

$$K_2 = \frac{E(l_0^2(3\nu + 2) - h_0^2)}{4l_0h_0(1 + \nu)} \quad (3.2)$$

La raideur du ressort diagonal K_3 est obtenue avec la relation :

$$K_3 = \frac{E(l_0^2 + h_0^2)}{4l_0h_0(1 + \nu)} \quad (3.3)$$

E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson du matériau de l'objet et h_0 et l_0 les longueurs des ressorts.

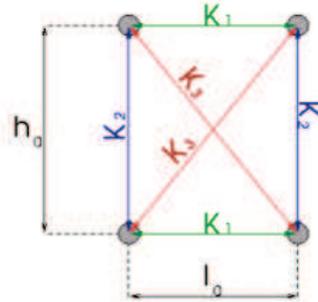


FIGURE 3.10 – Maillage d'un élément et définition des raideurs des ressorts.

Les formules 3.2 sont symétriques et sont déterminées par des tests de traction qui permettent d'obtenir les raideurs des ressorts non diagonaux. Ces tests conduisent à la résolution d'un système sur-contraint dont l'unique solution est donnée pour un coefficient de Poisson de 0,3. Dans le but d'agrandir le champ d'action de la méthode Masse-Ressort des degrés de liberté sont ajoutés pour résoudre le système Masse-Ressort. Ceci se traduit par l'ajout de forces de corrections orthogonales à la direction de l'élongation qui s'appliquent sur l'ensemble des particules et exprimées par les relations 3.5.

$$F_{h_0} = \frac{h_0 F_{h_0} (1 - 3\nu)}{8l_0} \quad (3.4)$$

$$F_{l_0} = \frac{l_0 F_{l_0} (1 - 3\nu)}{8h_0} \quad (3.5)$$

Cependant cette méthode d'identification développée par Baudet et reprise par Flechon dans son rapport de Master Recherche [Flechon, 2011] dépend du maillage, ce qui implique l'identification des paramètres à réaliser à chaque changement de maillage.

2.3.2 Positionnement de nos travaux par rapport aux caractérisations existantes

Afin de mettre en place une méthode de caractérisation, les méthodes énoncées précédemment sont utilisées pour paramétrer mécaniquement et géométriquement un système Masse-Ressort.

Les critères à paramétrer dans un système Masse-Ressort sont :

- La masse des particules ;
- La raideur des ressorts ;
- La méthode de résolution.

Masses des particules

Pour un objet et un maillage donné, le nombre et la position des particules sont fixés à l'état initial de la modélisation.

La masse est déterminée numériquement en fonction de la densité surfacique ρ_S du matériau. La répartition de la masse dépend de la taille des éléments du maillage et de la

position dans l'objet étudié. En effet l'aire de chaque élément, formé par les ressorts, est calculée pour répartir de façon homogène la masse sur l'ensemble des nœuds de cet élément (Figure 3.11).

Baudet exprime la relation du calcul de la masse M_i d'une particule d'un maillage quadrangle appartenant à n éléments e_j , d'aire chacun A_{e_j} , modélisant un objet de masse surfacique ρ_S .

$$M_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\rho_S A_{e_j}}{4} \right) \quad (3.6)$$

La Figure 3.11 illustre un exemple de pondération des masses dans le cas d'un maillage triangulaire. Les masses sont définies à partir de la relation 3.7 et cette définition est utilisée pour nos travaux.

$$M_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\rho_S A_{e_j}}{3} \right) \quad (3.7)$$

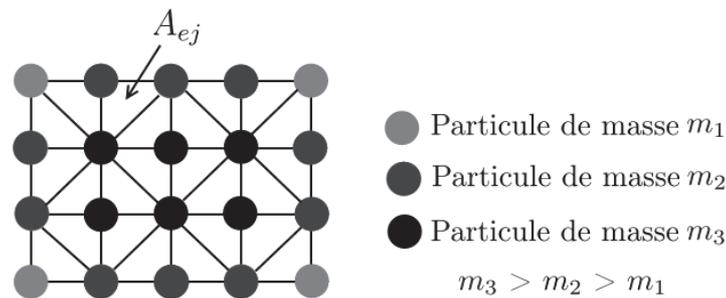


FIGURE 3.11 – Répartition des masses sur les particules d'un système Masse-Ressort dans le cas d'un maillage triangulaire

Raideurs des Ressorts

Les méthodes de caractérisation présentées Section 2.3 sont validées dans le cadre de la déformation de corps mous caractérisés par des modules d'Young inférieur à 1 MPa. Ce n'est pas le cas pour les matériaux utilisés pour la modélisation du procédé de fabrication d'un pneumatique. Ces matériaux ont un module d'Young compris entre 1 et 210000 MPa et un coefficient de Poisson compris entre 0,3 et 0,5.

De plus, des méthodes exposées par Van Gelder [Van Gelder, 1998] ou Lloyd [Lloyd *et al.*, 2007] ne sont pas valables pour tous les coefficients de Poisson. D'autres méthodes ne s'appuient que sur des calculs empiriques comme celle développée par Natsupakpong [Natsupakpong et Cenk Cevusoglu, 2010]. Enfin la méthode introduite par Baudet et Flechon apparait être générique mais le maillage utilisé en deux dimensions n'est pas mécanique avec le croisement des ressorts diagonaux et nécessite l'ajout de forces correctrices au sein du modèle pour caractériser tout type de matériaux.

En conclusion, les méthodes existantes de caractérisation ne sont pas applicables pour nos travaux.

Maillage utilisé

D'après la littérature, le maillage des systèmes Masse-Ressort dépend du comportement mécanique du matériau étudié. Par exemple, le maillage régulier 2D de la Figure 3.12a est utilisé par Baudet [Baudet *et al.*, 2009] et Flechon [Flechon, 2011] pour modéliser un comportement isotropique. D'autre part le maillage régulier de la Figure 3.12b est utilisé pour modéliser un comportement anisotrope. L'utilisation de ces deux maillages est validée mais elle oblige à créer un maillage structuré et régulier sur l'ensemble du système étudié.

Dans nos travaux, le comportement des matériaux étudiés est supposé linéaire et isotrope. Cette hypothèse permet d'appliquer la même raideur à tous les ressorts du système quels que soient sa taille, son emplacement et son orientation dans le système étudié.

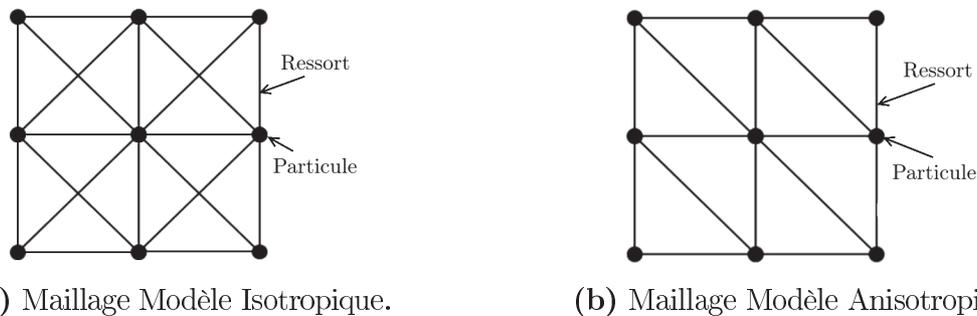


FIGURE 3.12 – Types de maillage utilisés dans la littérature

Trois configurations de maillage sont possibles pour positionner les ressorts dans un élément. Un ressort peut être placé sur les arêtes des quadrilatères ou sur les diagonales mais une combinaison des deux est également possible. Pour Baudet, cette dernière configuration est la plus efficace pour définir précisément un système où les ressorts latéraux ont des caractéristiques différentes par rapport aux ressorts diagonaux (Figure 3.10).

Cependant quel que soit le maillage, sa qualité a une influence importante sur la qualité de la modélisation.

Méthodes de résolution

Pour effectuer la résolution de la méthode Masse-Ressort, le principe fondamental de la dynamique est appliqué. La boucle de calcul suivante est réalisée :

1. Calcul des forces exercées sur chacune des particules
Ces forces sont les forces internes engendrées par les ressorts et les forces externes appliquées au système.
2. Calcul des accélérations
Le calcul est fait à partir des forces appliquées aux particules et de leur masse grâce au principe fondamental de la dynamique.

3. Calcul des vitesses des particules
Le calcul est fait en fonction des accélérations grâce à un schéma d'intégration numérique.
4. Calcul des positions des particules
Le calcul est fait en fonction des vitesses grâce à un schéma d'intégration numérique.
5. Affichage des positions
L'affichage permet de visualiser le comportement de l'objet au cours du temps.

Différents schémas d'intégration peuvent être utilisés tels que les schémas implicites et explicites d'Euler ou les méthodes de Runge Kutta. De plus, d'autres méthodes sont développées telles que la méthode proposée par Desbrun et al [Desbrun *et al.*, 1999] qui s'appuie sur un schéma d'intégration implicite qui permet d'obtenir une animation réaliste de n'importe quel système Masse-Ressort. Dans nos travaux, la méthode Euler implicite, qui est robuste pour des calculs de système Masse-Ressort, est utilisée.

En conclusion, les méthodes de caractérisation existantes nous permettent de choisir une méthode de résolution, de définir la masse des différentes particules d'un système Masse-Ressort. Les travaux pour mettre en place une modélisation Masse-Ressort portent alors sur la définition des raideurs des ressorts ainsi que sur leur répartition sous forme de maillage au sein d'une forme géométrique.

3 Modélisation Masse-Ressort proposée

Les travaux décrits dans la littérature traitent la déformation unitaire de produits pour des matériaux souples au module de Young inférieur à 1 MPa. Or dans ces travaux, une méthode Masse-Ressort dans le cadre de la modélisation du procédé de fabrication du pneumatique est proposée. Pour cela, une caractérisation mécanique et géométrique est effectuée afin de paramétrer les différents critères tels que la répartition et la raideur des ressorts.

Enfin les résultats fournis par la méthode proposée sont comparés à ceux obtenus par la méthode Éléments Finis afin de les valider.

3.1 Définition des paramètres de caractérisation

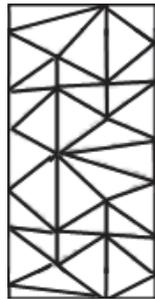
Une première caractérisation est réalisée afin de définir les paramètres importants de la modélisation Masse-Ressort pour la suite de nos travaux.

Pour cette caractérisation, les ressorts possèdent la même raideur quelle que soit leur position dans le système Masse-Ressort. Pour définir cette raideur, des tests mécaniques de traction et compression sont conduits sur des formes géométriques simples en référence à des séquences du procédé de fabrication du pneumatique (Figure 3.14a et 3.14b).

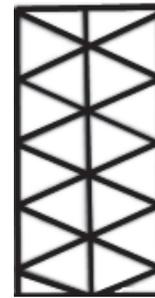
3.1.1 Mise en donnée

Les tests mécaniques sont réalisés sur trois poutres de dimensions 100*20, 200*40 et 200*30. Ces poutres sont encastrées sur une des largeurs et une pression s'exerce sur l'autre. Les deux longueurs sont laissées libres (Figure 3.14).

D'après la littérature, la répartition des ressorts dans un système Masse-Ressort est un paramètre à caractériser. Pour cette première caractérisation, deux types de maillage sont testés. Un premier maillage appelé "Maillage libre" est composé de ressorts disposés de façon à créer des éléments triangulaires sans contrainte sur la longueur des ressorts (Figure 3.13a). Un second maillage est appelé "Maillage Contraint" est composé de ressorts disposés de façon à créer des éléments triangulaires dans lequel l'ensemble des ressorts ont la même longueur initiale (Figure 3.13b).



(a) Triangulation de Delaunay libre
"Maillage libre".



(b) Triangulation de Delaunay structurée
"Maillage contraint".

FIGURE 3.13 – Deux types de maillage testés.

La déformée de la poutre, sous un chargement imposé et pour une raideur donnée, obtenue par la méthode Masse-Ressort est comparée à celle obtenue par Éléments Finis. Le modèle Éléments Finis est réalisé avec une mise en donnée et un maillage identiques au modèle Masse-Ressort. Les temps de calculs ne sont pas comparés dans ces travaux car les deux méthodes utilisées fournissent des résultats dans des temps inférieurs à une seconde, considérés comme temps réel.

Le matériau de la poutre est un acier de module de Young 210000MPa, de coefficient de Poisson 0,3 et de masse volumique 7500 kg/m³.

Une étude de sensibilité est réalisée pour définir la raideur des ressorts des différents modèles. Cette étude concerne les dimensions de la poutre, le type et la taille du maillage, le chargement et le matériau modélisé.

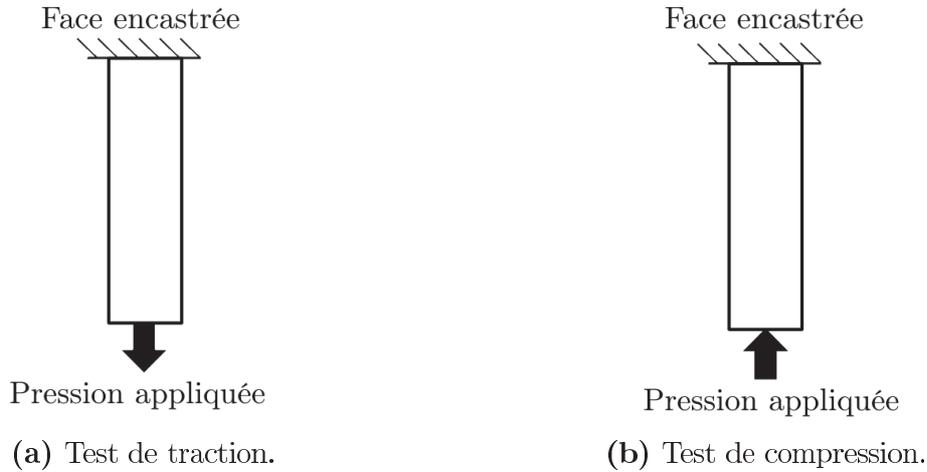


FIGURE 3.14 – Schémas de principe des tests réalisés.

3.1.2 Tests de caractérisation

Le premier test de caractérisation est un essai de traction sur une poutre de dimension 200*30 réalisé pour déterminer la raideur des ressorts du système modélisé. La raideur est identique pour tous les ressorts quelles que soient leur taille et leur position au sein du système. Ce test est réalisé dans le cas d'un essai de traction pour les deux types de maillages (Figure 3.13) avec des éléments de taille 2 mm.

Une recherche de la raideur des ressorts est réalisée par dichotomie jusqu'à obtenir une erreur de déformation inférieure à 1% par rapport au modèle Éléments Finis.

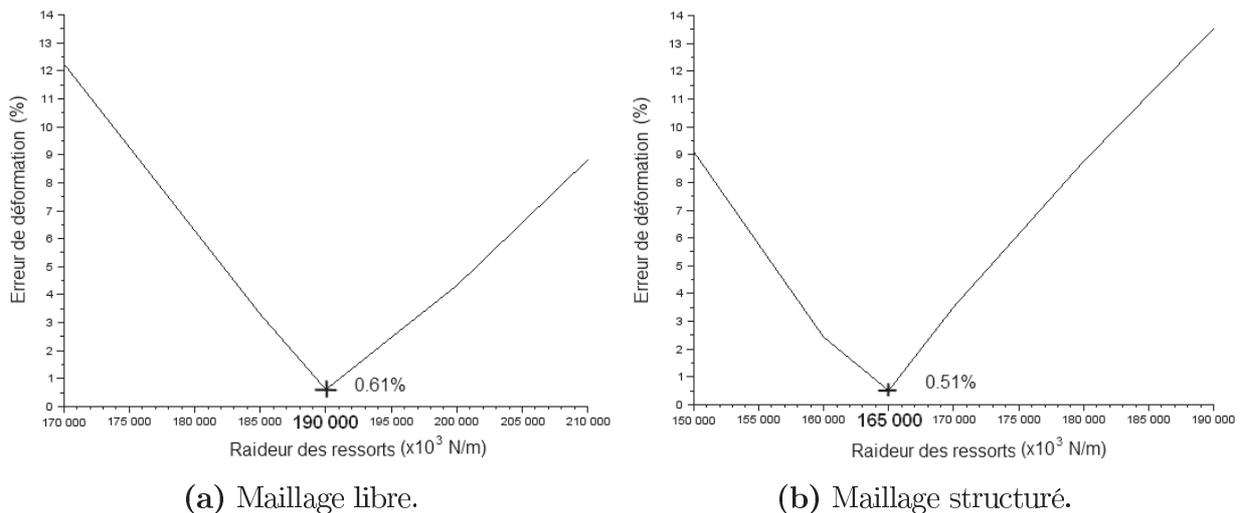


FIGURE 3.15 – Recherche de la raideur optimale dans le cas d'une poutre 200*30 en acier pour deux types de maillage.

Les résultats de l'étude de sensibilité sont donnés sur la Figure 3.15. Ces résultats montrent que la forme du maillage a une influence sur la raideur des ressorts. Dans le cas du maillage "libre", la raideur appliquée à l'ensemble des ressorts est $190E^6 N/m$ pour obtenir une déformée à 0,61% d'écart par rapport à la déformée obtenue par Éléments Finis (Figure 3.15a). Dans le cas du maillage "structuré", la raideur est de $165E^6 N/m$ pour obtenir une déformée à 0,51% d'erreur (Figure 3.15b).

La raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts d'une poutre est déterminée pour une dimension et un maillage donné. Pour les tests suivants, cette raideur est appliquée à différentes tailles d'éléments et pour différentes dimensions de poutres. Enfin, chaque poutre subit un chargement en traction et un en compression réalisés séparément.

Chargement en traction sur l'ensemble des poutres

Pour une poutre de dimension donnée, la mise en donnée reste identique. Les tailles d'éléments du maillage de 1 mm, 2 mm et 5 mm sont testées. La mise en donnée complète pour chaque taille de poutre est donnée en Annexe 2.

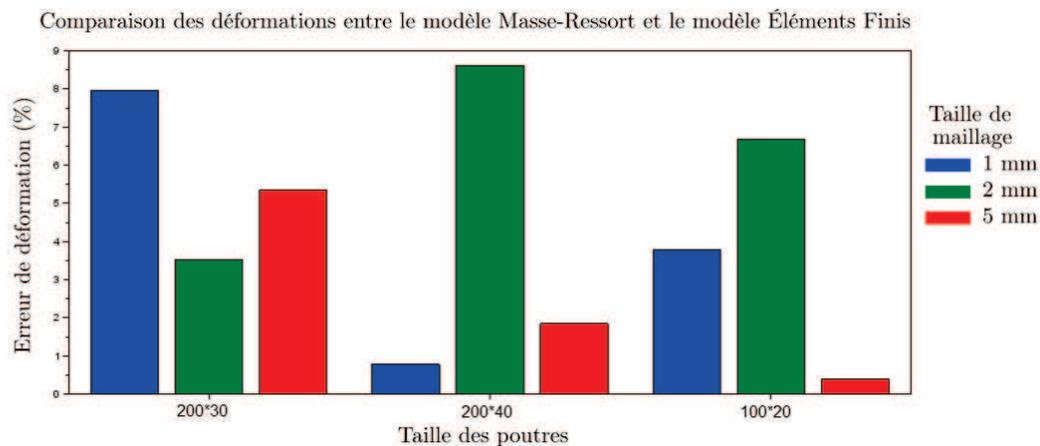


FIGURE 3.16 – Écart de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage contraint en traction.

Les résultats obtenus pour un maillage contraint, une dimension de poutre donnée montrent que la diminution de taille d'éléments ne permet pas d'obtenir des résultats plus précis (Figure 3.16). Sur ce point, le modèle Masse-Ressort diffère du modèle Éléments Finis pour lequel la diminution de la taille du maillage permet d'obtenir des résultats numériques plus précis.

De plus, l'écart de déformation, obtenue pour chaque dimension de poutre, est inférieur à 9% par rapport au modèle Éléments Finis.

Les résultats obtenus pour un maillage libre montrent également que la diminution de taille d'éléments ne permet pas d'obtenir des résultats plus précis pour une raideur fixée (Figure 3.17). De plus, les écarts de déformation obtenus peuvent être supérieurs à 10%.

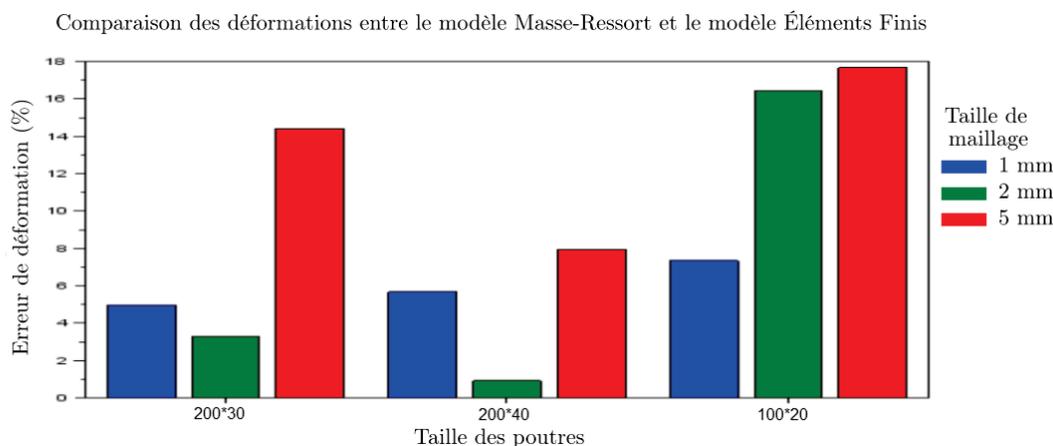


FIGURE 3.17 – Écart de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage libre en traction.

En conclusion pour le chargement en traction de différentes poutres, les résultats obtenus valident l'utilisation de la raideur déterminée dans un cas particulier (Figure 3.15b). Cette raideur est applicable pour calculer la déformation de poutres de dimensions différentes, dans le cas d'un maillage contraint. Par contre, les écarts de déformation obtenus pour un maillage libre sont trop importants pour être admissibles au point de vue industriel, pour le cas d'un chargement en traction.

Chargement en compression sur l'ensemble des poutres

Un cas de chargement en compression est réalisé pour valider les conclusions précédentes. Dans ce cas, des pressions plus faibles sont appliquées afin d'éviter le flambement de la poutre (Annexe 2). De manière analogue à la méthode précédente, une analyse de sensibilité est réalisée par rapport aux dimensions de la poutre et aux dimensions des ressorts (Figure 3.18 et Figure 3.19).

Les résultats obtenus pour un maillage contraint montrent que la diminution de taille d'éléments ne permet pas d'obtenir des résultats plus précis pour une raideur fixée (Figure 3.17). De plus, les écarts de déformation obtenus sont inférieurs à 7,5%.

Les résultats obtenus pour un maillage libre montrent également que la diminution de taille d'éléments ne permet pas d'obtenir des résultats plus précis pour une raideur fixée (Figure 3.17). De plus, les écarts de déformation obtenus sont supérieurs à 10% et peuvent même atteindre 21%.

En conclusion pour le chargement en compression, les résultats obtenus pour cette étude de sensibilité valident l'utilisation de la raideur déterminée pour calculer la déformation d'une géométrie donnée dans le cas d'un maillage contraint. En effet, les écarts de déformation obtenus pour un maillage libre sont trop importants pour être admissibles au point de vue industriel pour le cas d'un chargement en compression.

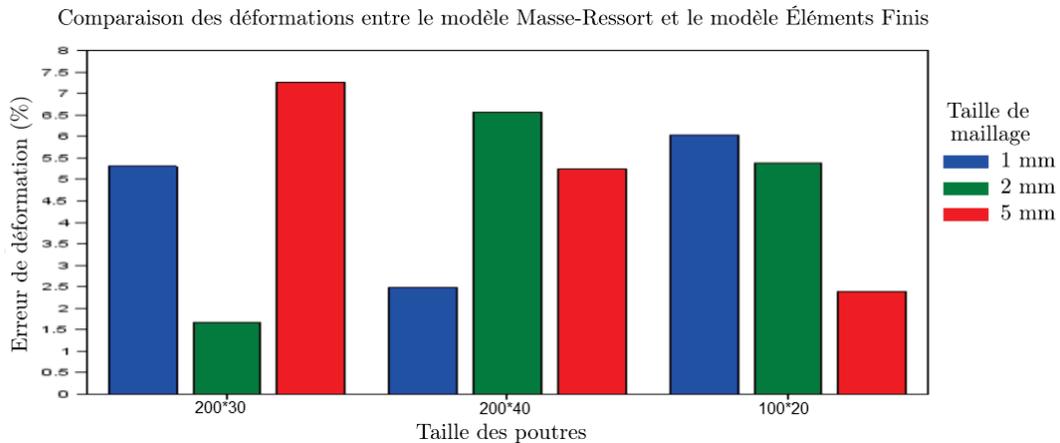


FIGURE 3.18 – Erreur de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage contraint en compression.

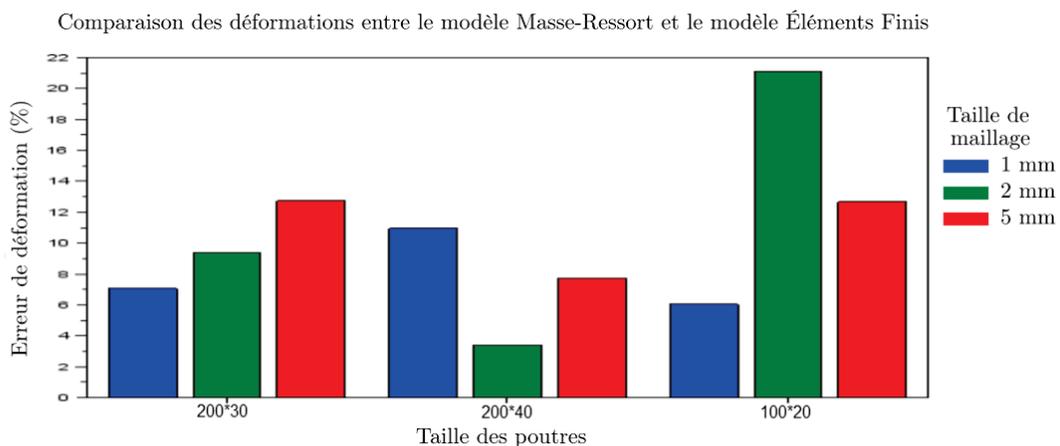


FIGURE 3.19 – Erreur de déformation pour une raideur donnée en fonction de la taille de la poutre et de la taille des éléments dans le cas du maillage structuré en compression.

Conclusion des premiers tests de caractérisation

Ces premiers tests de caractérisation d'un système Masse-Ressort pour un maillage 2D permettent de dire que la qualité du résultat dépend de la taille des éléments du maillage et également de sa typologie. De plus, la raideur déterminée pour une géométrie choisie peut être appliquée à d'autres dimensions. Ceci est valable dans le cas d'un maillage de même typologie et pour une poutre rectangulaire. Enfin l'étude de sensibilité réalisée pour les deux cas de chargement préconise l'utilisation d'un maillage contraint pour réaliser les calculs de déformations.

Des tests complémentaires doivent être réalisés sur des formes géométriques polygonales pour définir, si possible, une méthode de caractérisation géométrique et mécanique en fonction des formes géométriques déformées et du matériau modélisé.

3.2 Méthode de caractérisation pour des formes industrielles

Après avoir réalisé une première caractérisation des systèmes Masse-Ressort sur des formes rectangulaires, la méthode est appliquée à des formes industrielles pour réaliser une caractérisation générale. Cette caractérisation se décompose en une caractérisation mécanique et une caractérisation géométrique. La première est réalisée pour étudier l'influence du chargement et du matériau modélisé, la deuxième est réalisée pour étudier l'influence de la forme modélisée et du maillage associée. Enfin ces deux caractérisations s'appuient sur une mise en donnée d'un test mécanique.

3.2.1 Mise en donnée pour des formes industrielles

Pour réaliser la caractérisation mécanique et géométrique d'un modèle Masse-Ressort, un test de compression sur des formes géométriques est réalisé. Ce test fait référence à la première phase de gonflement de l'outillage de fabrication où une pression est appliquée sur la face inférieure des éléments qui composent un pneumatique.

Les caractérisations sont réalisées pour trois formes polygonales aux dimensions données Figure 3.20 et pour trois matériaux présents dans un pneumatique : l'acier, l'aluminium et le caoutchouc. Leurs caractéristiques sont répertoriées dans le Tableau 3.4.

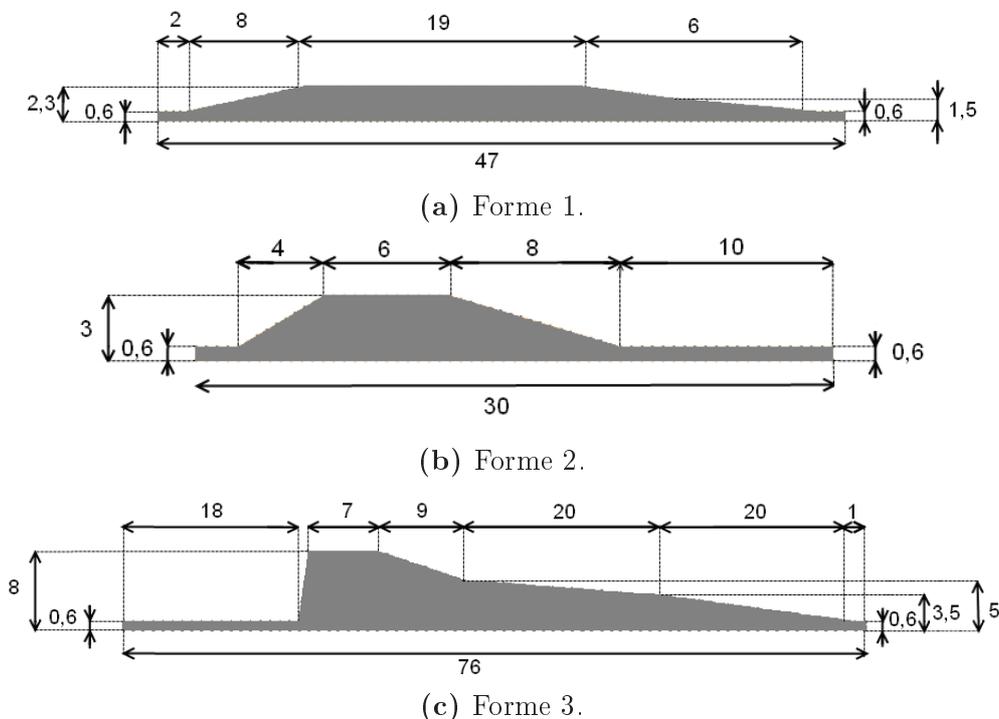


FIGURE 3.20 – Formes géométriques génériques utilisées lors de la fabrication d'un pneumatique.

Matériaux	Acier	Aluminium	Caoutchouc
Module de Young	210000 MPa	70000 MPa	1 MPa
Coefficient de Poisson	0,3	0,3	0,5
Masse Volumique	7500 kg/m ³	2700 kg/m ³	920 kg/m ³

Tableau 3.4 – Caractéristiques des matériaux.

Pour réaliser l'essai de compression sur chaque forme, la courbe haute de la forme géométrique est encastrée et une pression uniforme est appliquée sur la courbe basse³. Un exemple de chargement est donnée Figure 3.21.

Les résultats des travaux réalisés sont comparés à ceux obtenus par Éléments Finis.

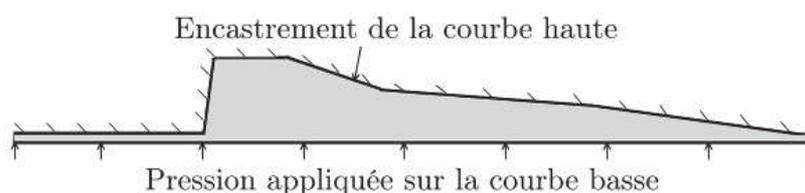


FIGURE 3.21 – Mise en donnée sur une forme industrielle.

3.2.2 Caractérisation mécanique

La caractérisation mécanique a pour but d'étudier la relation entre la raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts et le module de Young du matériau modélisé. Par rapport au chargement, la pression appliquée diffère selon la forme géométrique traitée et le matériau modélisé afin d'obtenir des déformées de même grandeur dans chaque cas. Les pressions appliquées pour chaque caractérisation sont présentées dans le Tableau 3.5.

Type de Forme	Forme 1	Forme 2	Forme 3
Acier	50000 MPa	10000 MPa	10000 MPa
Aluminium	10000 MPa	10000 MPa	10000 MPa
Caoutchouc	0,1 MPa	0,1 MPa	0,1 MPa

Tableau 3.5 – Pression appliquée sur la courbe basse des formes géométriques en fonction du matériau.

3. Voir la définition des courbes hautes Section 2.1 de ce Chapitre

Un exemple de déformée de la courbe basse obtenue par une simulation Eléments Finis est donnée Figure 3.22 pour la Forme 3.

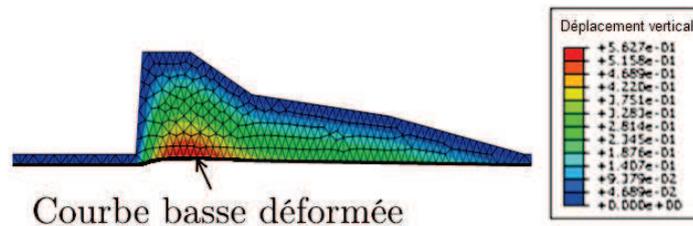


FIGURE 3.22 – Déformation d'une forme géométrique par Eléments Finis.

Le déplacement maximal vertical de la courbe basse est utilisé comme critère de comparaison entre les deux modèles de déformation. Cette comparaison permet de rechercher la raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts inclus dans une forme géométrique.

Pour obtenir la raideur à appliquer, une recherche par dichotomie est réalisée jusqu'à obtenir un écart des déformations maximales entre les deux modèles inférieurs à 3%. Ce seuil est déterminé à partir de la précision industrielle des extrusions des pièces caoutchoucs qui est de $0,1\text{mm}$ par rapport aux dimensions de la forme. Or, la modélisation de ce procédé de fabrication doit être dix fois plus précise. Ainsi le pourcentage d'erreur de 3% représente un seuil de $0,01\text{mm}$.

Les résultats obtenus sont détaillés Figures 3.24 à 3.28 pour chaque forme géométrique.

Forme 1

La Forme 1 a une épaisseur de $2,3\text{ mm}$ et une largeur de 47 mm .

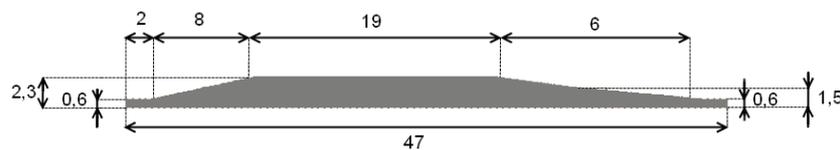
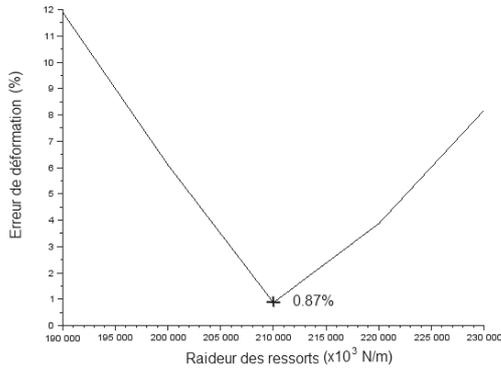


FIGURE 3.23 – Forme 1.

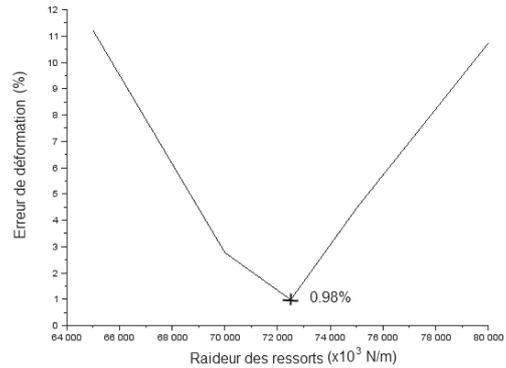
Les résultats de la recherche par dichotomie de la raideur optimale pour chaque cas sont représentés sur la Figure 3.24.



(a) Cas de l'acier.

Déformation maximale : 0,199 mm

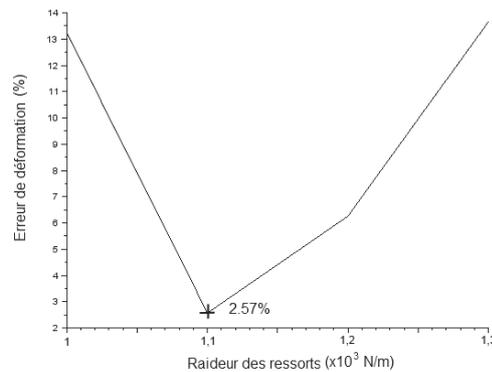
Écart de déformation : 0,002 mm



(b) Cas de l'aluminium.

Déformation maximale : 0,299 mm

Écart de déformation : 0,003 mm



(c) Cas du caoutchouc.

Déformation maximale : 0,172 mm

Écart de déformation = 0,004 mm

FIGURE 3.24 – Définition de la raideur "optimale" pour trois types de matériaux.
Forme 1.

L'écart de déformation entre les modèles Masse-Ressort et Eléments Finis est inférieur à 3% pour les trois types de matériaux. Pour obtenir ces résultats, la raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts est $210000 \times 10^3 \text{ N/m}$ dans le cas de l'acier, $72500 \times 10^3 \text{ N/m}$ dans le cas de l'aluminium et $1,1 \times 10^3 \text{ N/m}$ dans le cas du caoutchouc.

Forme 2

La Forme 2 a une épaisseur de 3 mm et une largeur de 40 mm.

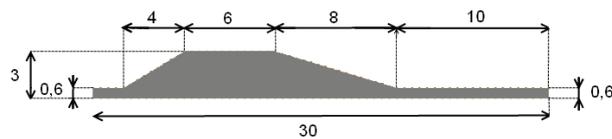
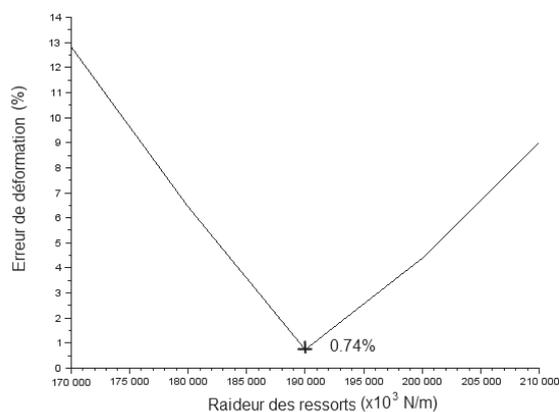


FIGURE 3.25 – Forme 2.

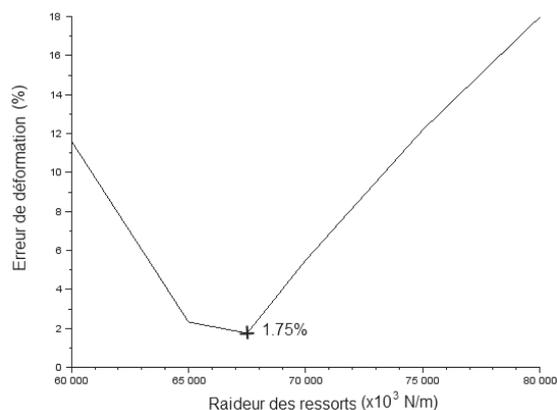
Les résultats de la recherche de la raideur optimale pour chaque cas sont tracés Figure 3.26.



(a) Cas de l'acier.

Déformation maximale : 0,129 mm

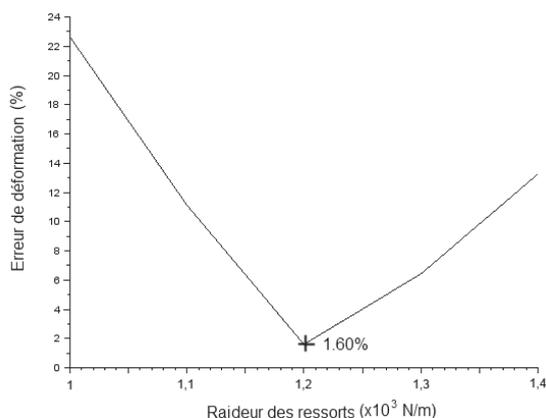
Écart de déformation : 0,001 mm



(b) Cas de l'aluminium.

Déformation maximale : 0,389 mm

Écart de déformation : 0,007 mm



(c) Cas du caoutchouc.

Déformation maximale : 0,233 mm

Écart de déformation : 0,004 mm

FIGURE 3.26 – Définition de la raideur "optimale" pour trois types de matériaux.

Forme 2.

L'écart de déformation entre les modèles Masse-Ressort et Eléments Finis est inférieur à 2% pour les trois types de matériaux. Pour obtenir ces résultats, la raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts est 190000×10^3 N/m dans le cas de l'acier, 67500×10^3 N/m dans le cas de l'aluminium et $1,2 \times 10^3$ N/m dans le cas du caoutchouc.

Forme 3

La Forme 3 a une épaisseur de 3.5 mm et une largeur de 76 mm.

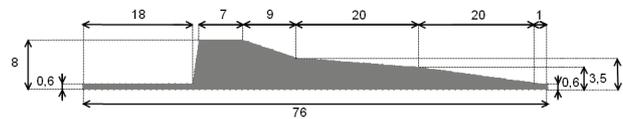
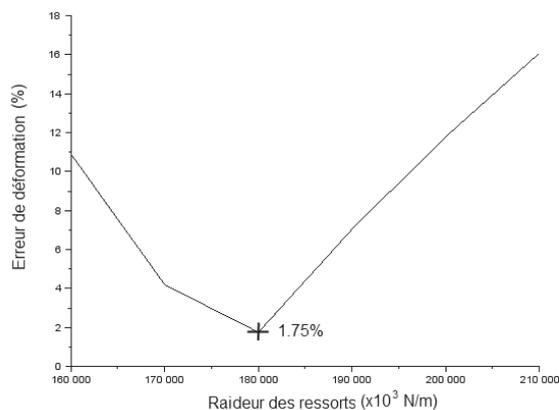


FIGURE 3.27 – Forme 3.

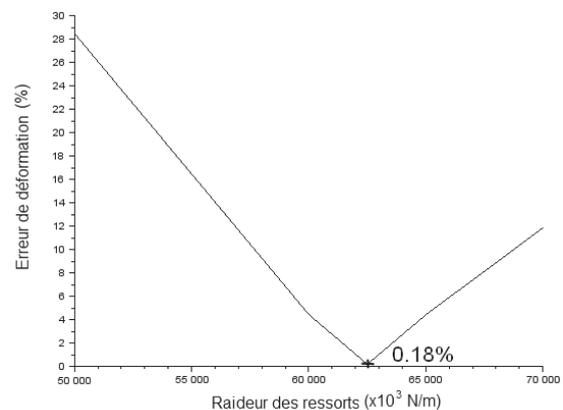
Les résultats de la recherche de la raideur optimale pour chaque cas sont tracés Figure 3.28.



(a) Cas de l'acier.

Déformation maximale : 0,318 mm

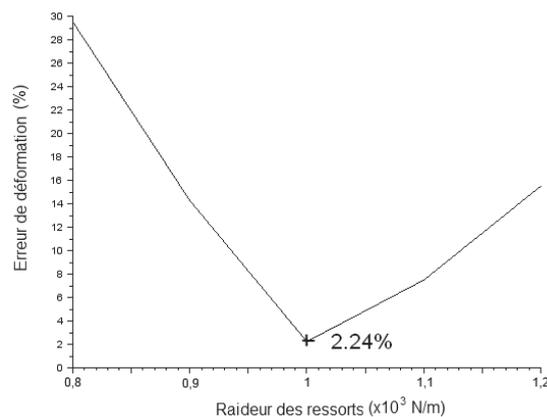
Écart de déformation : 0,005 mm



(b) Cas de l'aluminium.

Déformation maximale : 0,955 mm

Écart de déformation : 0,002 mm



(c) Cas du caoutchouc.

Déformation maximale : 0,562 mm

Écart de déformation : 0,012 mm

FIGURE 3.28 – Définition de la raideur "optimale" pour trois types de matériaux.

Forme 3

L'écart de déformation entre les modèles Masse-Ressort et Éléments Finis est inférieur à 2,5% pour les trois types de matériaux. Pour obtenir ces résultats, la raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts est $180000 \cdot 10^3 N/m$ dans le cas de l'acier, $62500 \cdot 10^3 N/m$ dans le cas de l'aluminium et $1 \cdot 10^3 N/m$ dans le cas du caoutchouc.

Comparaison des raideurs par rapport aux modules d'Young

Lors de cette caractérisation mécanique, les raideurs des ressorts sont déterminées en fonction du matériau modélisé. Or la raideur et le module d'Young ne sont pas des grandeurs de même dimension elles sont comparées ici pour étudier les liens qui peuvent exister entre elles. Les raideurs à appliquer aux ressorts pour chaque forme et chaque matériau sont répertoriées dans les Tableaux 3.6 à 3.8.

Matériau : Acier			
Type de Forme	Forme 1	Forme 2	Forme 3
Module d'Young (MPa)	210000		
Raideur des ressorts ($\times 10^3 N/m$)	210000	190000	180000
Écart	0%	9,5%	14,3%

Tableau 3.6 – Ecart entre l'élasticité du matériau et la raideur des ressorts.
Cas de l'Acier.

Les raideurs appliquées aux ressorts d'une forme géométrique caractérisée par un acier dépendent de la forme géométrique déformée. En effet, les raideurs appliquées varient dans un intervalle de plus ou moins 15% par rapport au module d'Young de l'acier.

Matériau : Aluminium			
Type de Forme	Forme 1	Forme 2	Forme 3
Module d'Young (MPa)	70000		
Raideur des ressorts ($\times 10^3 N/m$)	72500	67500	62500
Écart	3,5%	3,57%	10,71%

Tableau 3.7 – Ecart entre l'élasticité du matériau et la raideur des ressorts.
Cas de l'Aluminium.

Pour le cas de l'aluminium, les raideurs appliquées varient dans un intervalle de plus ou moins 10% par rapport au module d'Young.

Pour le cas du caoutchouc, les raideurs appliquées varient dans un intervalle de plus ou moins 10% par rapport au module d'Young du caoutchouc.

Matériau : Caoutchouc			
Type de Forme	Forme 1	Forme 2	Forme 3
Module d'Young (MPa)	1		
Raideur des ressorts ($\times 10^3$ N/m)	1,2	1,1	1
Écart	20%	10%	0%

Tableau 3.8 – Ecart entre l'élasticité du matériau et la raideur des ressorts.
Cas du Caoutchouc.

Conclusion de la caractérisation mécanique

Pour l'ensemble des caractérisations mécaniques réalisées, le seuil de précision entre le Modèle Masse-Ressort et le modèle Éléments Finis est atteint par rapport à la déformée de la courbe basse.

De plus, la raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts dépend de la forme géométrique quel que soit le matériau. Toutefois le module d'Young permet d'identifier la raideur des ressorts avec une erreur inférieure à 15% pour les matériaux rigides tels que l'acier et l'aluminium et avec une erreur inférieure à 20% pour un matériau souple tel que le caoutchouc.

Les raideurs déterminées pour chaque caractérisation sont utilisées pour réaliser la caractérisation géométrique.

3.2.3 Caractérisation géométrique

Pour la caractérisation géométrique, la déformée de la courbe basse des trois formes géométriques est étudiée. Ces travaux sont réalisés dans le but de déterminer l'influence de la forme et du maillage sur la déformation calculée.

Suite aux travaux réalisés Section 3.1 dans ce chapitre, un maillage structuré est réalisé pour les trois formes (Figure 3.20).

Les raideurs déterminées lors de la caractérisation mécanique précédente, sont utilisées pour calculer la déformée des courbes basses de chaque forme. Enfin, le calcul de déformation est réalisé à partir de la même mise en donnée utilisée pour la caractérisation mécanique.

Chaque courbe déformée est tracée et comparée à celle obtenue par Éléments Finis (Figures 3.30 à 3.35). L'écart géométrique entre les courbes des déformées obtenues avec ces deux modèles est calculé dans chaque cas. Pour cela, l'Écart Maximum entre les deux courbes obtenues est calculé ainsi que la Moyenne des Écarts et l'Écart Type (Tableaux 3.9 à 3.11).

Forme 1

Le maillage de la Forme 1 est composé de ressorts de longueur 0,6 mm formant des éléments triangulaires. La raideur appliquée à l'ensemble des ressorts est 210000 kN/m dans le cas de l'acier, 72500 kN/m dans le cas de l'aluminium, 1,2 kN/m dans le cas du caoutchouc.

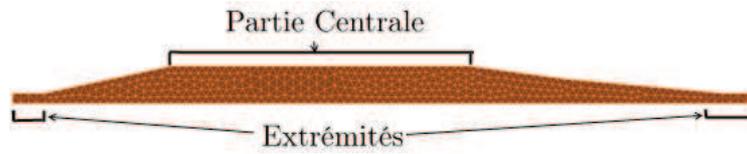
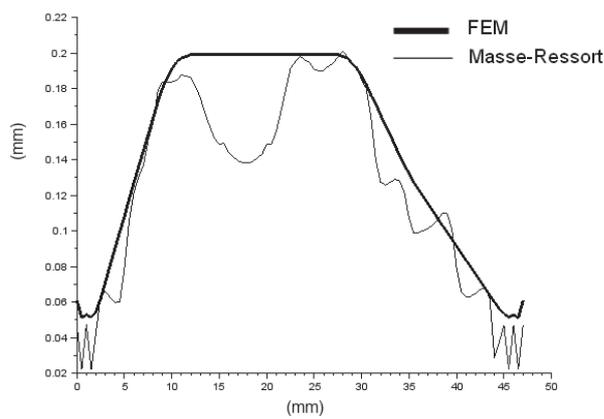
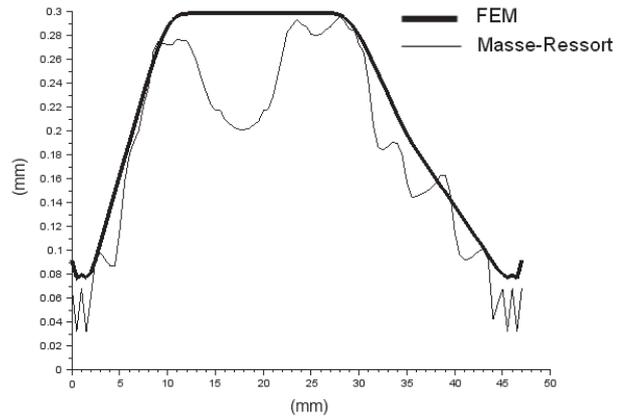


FIGURE 3.29 – Forme 1.

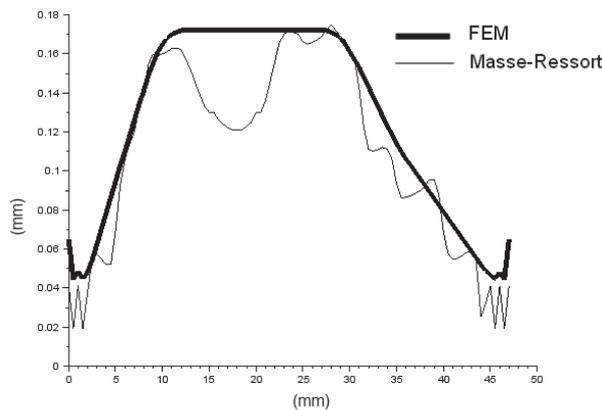
Les déformées obtenues pour chaque matériau et chaque modèle sont tracées Figure 3.30.



(a) Cas de l'acier.



(b) Cas de l'aluminium.

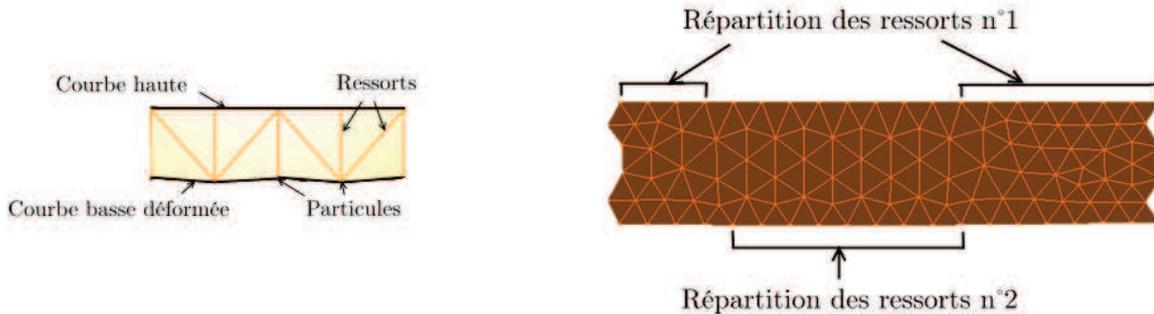


(c) Cas du caoutchouc.

FIGURE 3.30 – Comparaison des déformées des courbes basses obtenues par Éléments Finis et Masse-Ressort pour les trois matériaux.

Forme 1

Pour cette forme, un écart existe entre la déformée cible obtenue par Éléments Finis et la déformée obtenue par Masse-Ressort. Cet écart s'explique par la répartition hétérogène des ressorts au sein de la forme géométrique (Figure 3.31) qui se traduit par une répartition des efforts non uniforme sur les particules. De plus, la répartition dans la partie centrale de la forme géométrique est hétérogène comme le montre les zones n°1 et n°2 de la Figure 3.31b.



(a) Déformation aux extrémités // de la courbe basse (b) Répartition hétérogène dans la partie centrale de la Forme 1

FIGURE 3.31 – Erreurs de déformation dues au maillage

La Moyenne des Écarts, l'Écart Maximum et l'Écart Type sont comparés par rapport à la déformation maximale de la courbe basse obtenue par Éléments Finis. La comparaison montre que ces trois paramètres sont du même ordre de grandeur par rapport à la déformation maximale et ce pour les trois matériaux. En effet la Moyenne des Ecarts est d'environ 10%, l'Écart Maximum d'environ 30% et l'Écart Type de 10% également (Tableau 3.9).

Forme 1			
Matériau	Acier	Aluminium	Caoutchouc
Déformation Maximale (DM)	0,199 mm	0,299 mm	0,172 mm
Moyenne des Ecarts	0,0159 mm	0,0327 mm	0,0223 mm
Ecart par rapport à la DM	7,96%	10,94%	12,91%
Ecart Maximum	0,0338 mm	0,0979mm	0,0510 mm
Ecart par rapport à la DM	16,94%	32,74%	29,58%
Ecart Type	0,0185 mm	0,0431 mm	0,0223 mm
Ecart par rapport à la DM	9,27%	14,41%	12,91%

Tableau 3.9 – Ecart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux. Forme 1.

Forme 2

Le maillage de la Forme 2 est composé de ressorts de longueur 0,8 mm formant des éléments triangulaires. La raideur appliquée à l'ensemble des ressorts est 190000 kN/m dans le cas de l'acier, 67500 kN/m dans le cas de l'aluminium, 1,1 kN/m dans le cas du caoutchouc.

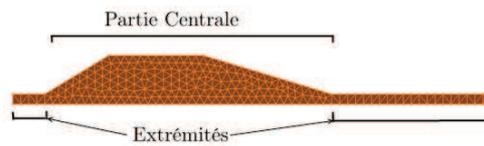
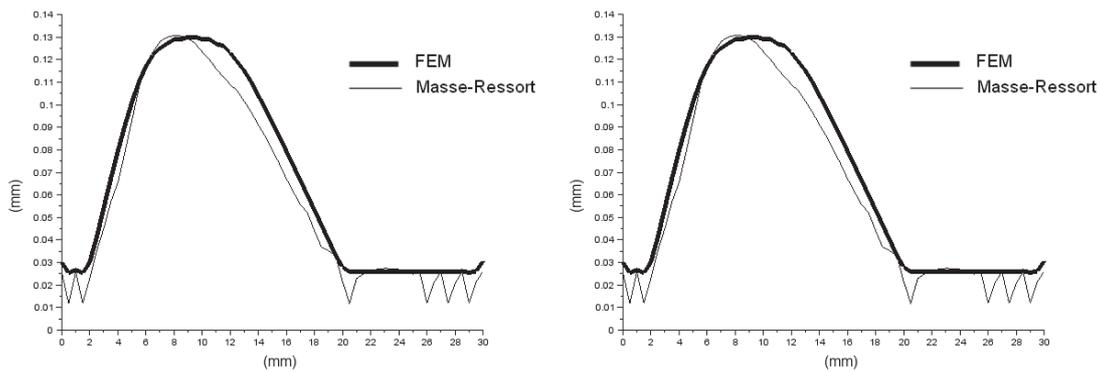


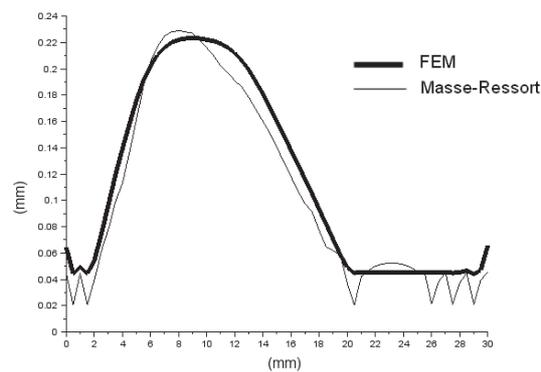
FIGURE 3.32 – Forme 2.

Les déformées obtenues pour chaque matériau et chaque modèle sont tracées Figure 3.33.



(a) Cas de l'acier.

(b) Cas de l'aluminium.



(c) Cas du caoutchouc.

FIGURE 3.33 – Comparaison des déformées des courbes basses obtenues par Éléments Finis et Masse-Ressort pour les trois matériaux.
Forme 2.

Pour cette forme, un écart existe entre les deux déformées obtenues par Masse-Ressort et Éléments Finis. La répartition hétérogène des ressorts explique cet écart au niveau de la partie centrale et des extrémités.

Forme 2			
Matériau	Acier	Aluminium	Caoutchouc
Déformation Maximale (DM)	0,129 mm	0,389 mm	0,223 mm
Moyenne des Écarts	0,0068 mm	0,028mm	0,0123 mm
Écart par rapport à la DM	5,24%	7,11%	5,51%
Écart Maximum	0,0141 mm	0,053mm	0,0261 mm
Écart par rapport à la DM	10,87%	13,63%	11,69%
Écart Type	0,0085 mm	0,033mm	0,0147 mm
Écart par rapport à la DM	6,55%	8,39%	6,58%

Tableau 3.10 – Écart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux.
Forme 2.

La comparaison de la Moyenne des Écarts, l'Écart Maximum et l'Écart Type montre que ces trois paramètres sont du même ordre de grandeur quel que soit le matériau modélisé. En effet la Moyenne des Écarts est d'environ 5%, l'Écart Maximum d'environ 10% et l'Écart Type de 7% (Tableau 3.10).

Forme 3

Le maillage de la Forme 3 est composé de ressorts de longueur 0,6 mm formant des éléments triangulaires. La raideur appliquée à l'ensemble des ressorts est 180000 kN/m dans le cas de l'acier, 62500 kN/m dans le cas de l'aluminium, 1 kN/m dans le cas du caoutchouc.

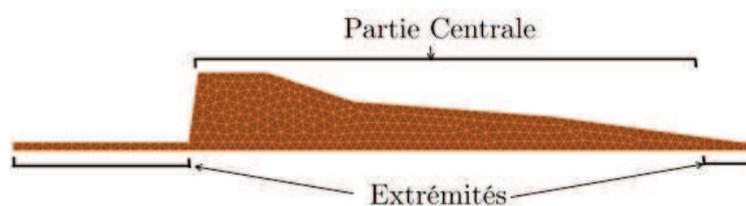


FIGURE 3.34 – Forme 3.

Les déformées obtenues pour chaque matériau et chaque modèle sont tracées Figure 3.33.

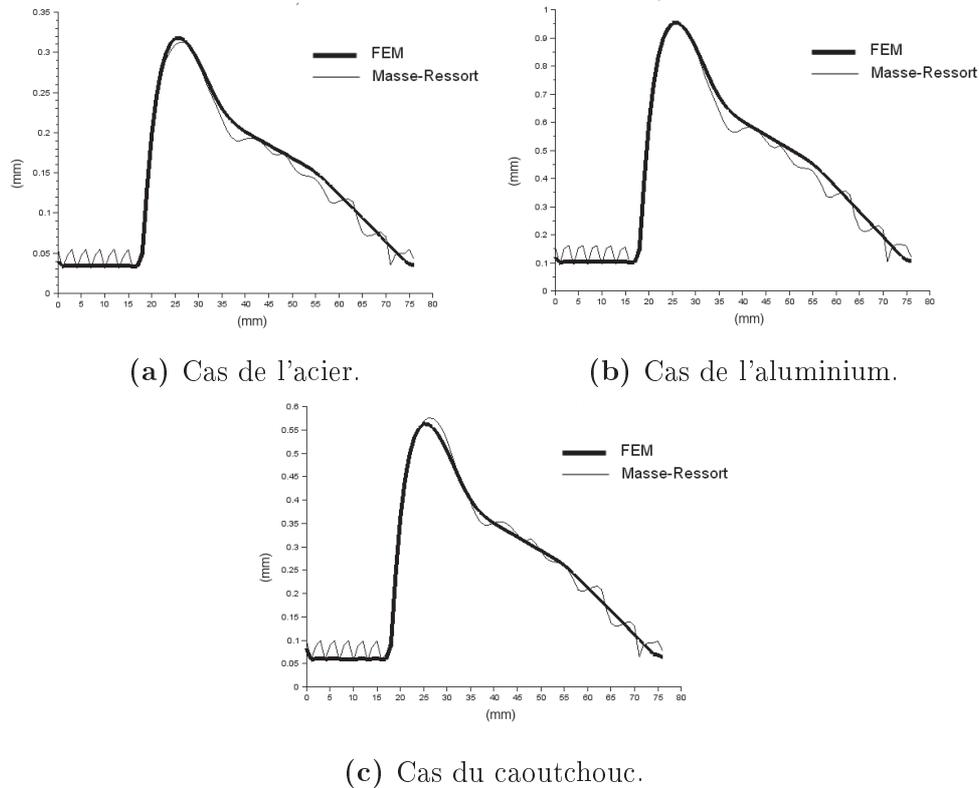


FIGURE 3.35 – Comparaison des déformées des courbes basses obtenues par Éléments Finis et Masse-Ressort pour les trois matériaux.

Forme 3.

Pour cette forme, un écart existe entre les deux déformées obtenue par Masse-Ressort et Éléments Finis. La répartition hétérogène des ressorts explique cet écart au niveau de la partie centrale et des extrémités.

Forme 3			
Matériau	Acier	Aluminium	Caoutchouc
Déformation Maximale (DM)	0,3184 mm	0,9551 mm	0,5627 mm
Moyenne des Écart	0,0092 mm	0,0293 mm	0,0140 mm
Écart par rapport à la DM	2,88%	3,07%	2,49%
Écart Maximum	0,0234 mm	0,0734 mm	0,0390 mm
Écart par rapport à la DM	7,34%	7,68%	6,93%
Écart Type	0,0111 mm	0,0357 mm	0,0179 mm
Écart par rapport à la DM	3,48%	3,73%	3,18%

Tableau 3.11 – Écart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux.

Forme 3.

La comparaison de la Moyenne des Écarts, l'Écart Maximum et l'Écart Type montre que ces trois paramètres sont du même ordre de grandeur quel que soit le matériau modélisé. En effet la Moyenne des Écarts est d'environ 3%, l'Écart Maximum d'environ 7% et l'Écart Type de 3% également (Tableau 3.11).

Conclusion de la caractérisation géométrique

Les travaux réalisés pour la caractérisation géométrique montrent que la qualité des résultats dépend de la répartition des ressorts au sein de la forme géométrique.

Les mêmes forces doivent être appliquées à l'ensemble des particules pour obtenir une déformée cohérente. Dans notre cas, chaque particule de la courbe basse subit la même force interne due aux ressorts et la même force externe due au chargement. De plus, la répartition des ressorts doit être homogène, notamment pour les produits de faible épaisseur.

Enfin une partie de l'erreur du calcul de l'écart géométrique provient de la caractérisation mécanique. En effet, la raideur déterminée dans la caractérisation mécanique est réalisée afin d'obtenir moins de 3% d'écart entre la déformation maximale obtenue par Éléments Finis et par Masse-Ressort.

Ces travaux nous amènent à réaliser le même type de caractérisation sur une forme géométrique rectangulaire où les ressorts sont répartis de façon homogène.

3.3 Investigations complémentaires - cas d'un maillage régulier

La qualité des déformations dépend de la répartition des ressorts au sein de la forme géométrique une fois la caractérisation mécanique réalisée. Dans cette section, une répartition homogène des ressorts est testée sur une forme rectangulaire et sur une forme industrielle. De plus, une étude des contraintes après déformation est réalisée sur les deux mêmes formes et comparée aux résultats obtenus par Éléments Finis. Cette dernière étude est réalisée pour valider mécaniquement l'outil développé.

3.3.1 Répartition des ressorts dans un système Masse-Ressort

– Etude sur la forme rectangulaire

Les travaux de caractérisation sont réalisés dans cette section sur une forme rectangulaire de dimension $60mm \times 3,5mm$ et un autre type de maillage.

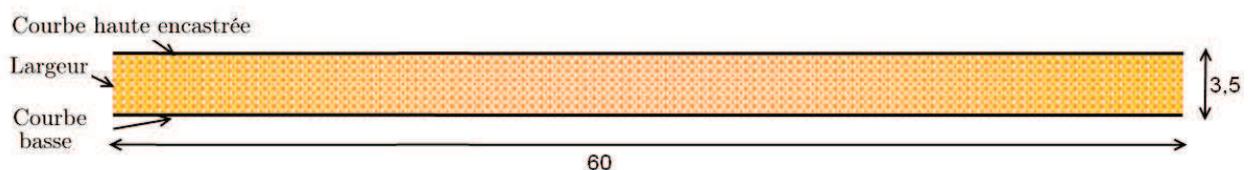


FIGURE 3.36 – Forme rectangulaire utilisée pour tester un autre maillage

Mise en donnée

Un maillage contraint est utilisé avec des ressorts formant des éléments isocèles de base 0,5 mm et de hauteur 0,25 mm (Figure 3.37). La forme rectangulaire est caractérisée par un matériau qui a un module d'Young de 210000 MPa et un coefficient de Poisson de 0,3. Enfin l'ensemble des résultats obtenus est comparé à ceux obtenus par Éléments Finis.

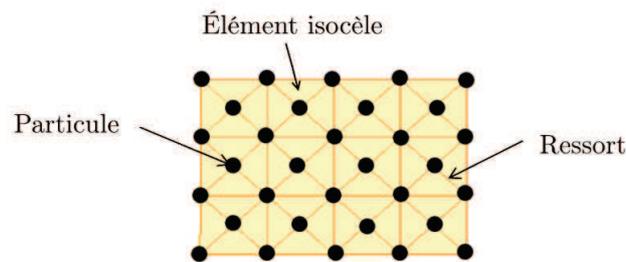


FIGURE 3.37 – Répartition homogène des ressorts dans la forme rectangulaire

Afin de déterminer la raideur à appliquer à l'ensemble des ressorts du système créé, trois tests sont réalisés. Pour l'ensemble de ces tests, une pression de 25000 MPa est appliquée sur la courbe basse de la forme géométrique et la courbe haute est encastree (Figure 3.36).

Le premier test consiste à appliquer une raideur équivalente au module d'Young du matériau modélisé, soit $210000 \cdot 10^3$ N/m. Cette raideur est appliquée à l'ensemble des ressorts.

Pour le deuxième test, une recherche par dichotomie est réalisée pour déterminer la raideur qui permet d'obtenir la déformation maximale la plus proche de celle obtenue par Éléments Finis.

Pour le troisième test, une recherche par dichotomie est également réalisée. Cette fois ci, elle est réalisée pour obtenir la Moyenne des Écarts la plus faible possible entre le modèle Masse-Ressort et le modèle Éléments Finis.

Résultats de déformation

Les profils des déformées obtenus, Figure 3.38, montrent aucune aberration contrairement aux résultats obtenus sur les cas industriels (Exemple Figure 3.35a). En effet, la déformée obtenue avec une répartition homogène du maillage est continue. Par contre l'amplitude de la déformation de la courbe basse de la forme rectangulaire n'est pas la même suivant la raideur appliquée à l'ensemble des ressorts. Enfin, pour évaluer l'écart géométrique entre les deux profils comparés, la Moyenne des Écarts, l'Écart Maximum et l'Écart Type sont calculés (Tableau 3.12).

Déformée de la courbe basse de la forme rectangulaire

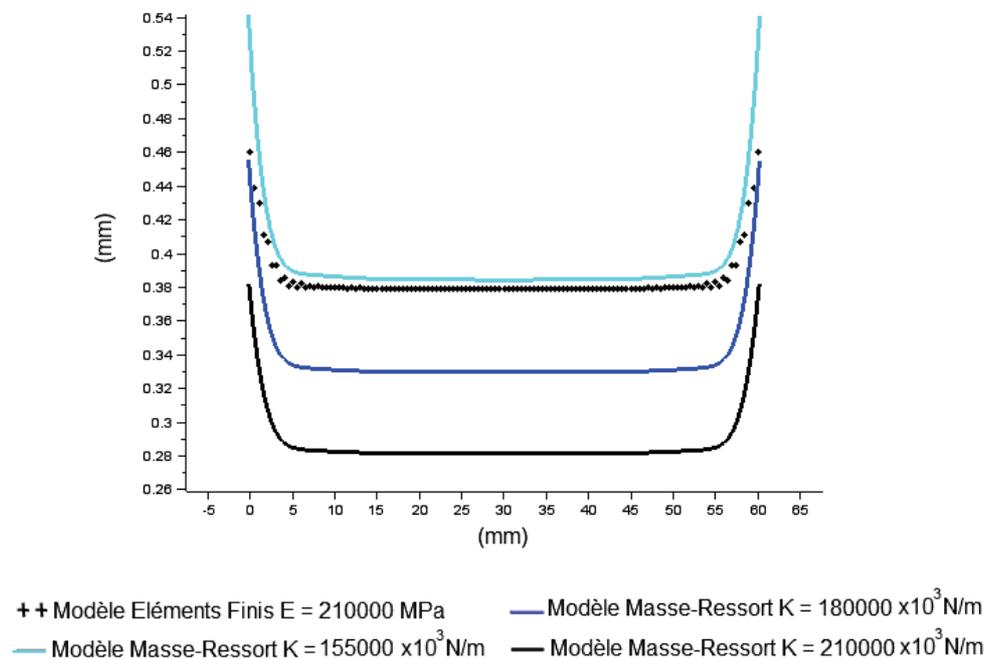


FIGURE 3.38 – Déformée de la courbe basse pour différentes raideurs de ressorts

Forme rectangulaire			
Matériau	Acier		
Raideur (x10 ³ N/m)	210000	180000	155000
Déformation Maximale du modèle référence (DM)	0.46 mm		
Déformation Maximale du modèle Masse-Ressort	0.38 mm	0.46 mm	0.54 mm
Écart entre les déformations maximales	17,01%	0%	18,05%
Moyenne des Écarts	0.096 mm	0.047 mm	0.009 mm
Écart par rapport à la DM	20.88%	10.24%	1.92%
Écart Maximum	0.100 mm	0.050 mm	0.072 mm
Écart par rapport à la DM	21.81%	10.80%	15.54%
Écart Type	0.097 mm	0.048 mm	0.013 mm
Écart par rapport à la DM	20.98%	10.35%	2.87%

Tableau 3.12 – Écart de déformation des courbes basses pour les différents matériaux
Forme rectangulaire

Pour le premier test, l'écart géométrique entre le Modèle Masse-Ressort et le modèle Élé-

ments Finis est supérieur à 20%, ce qui n'est pas acceptable pour une utilisation industrielle de l'outil développé.

Pour le deuxième test, la déformation maximale a lieu sur les largeurs de la forme rectangulaire. Cette déformation est équivalente à celle obtenue par Éléments-fins. Par contre, l'écart géométrique entre les deux modèles est supérieur à 10%, ce qui n'est pas acceptable pour une application industrielle.

Pour le troisième test, l'écart géométrique sur la partie centrale de la courbe basse est très faible par rapport au modèle de référence. En effet, la Moyenne des Écarts et l'Écart Type des Écarts sont inférieurs à 3%. Cela se traduit par la déformation de la partie centrale de la courbe basse correspondant à la déformation du modèle Michelin. Cependant la déformation maximale de ce troisième modèle présente un Écart supérieur à 15% par rapport au modèle Éléments Finis ce qui n'est pas acceptable par rapport aux attentes industrielles.

En conclusion, d'après les deuxième et troisième tests, la raideur des ressorts positionnés sur les bords des formes géométriques doit être supérieure à celle des ressorts inclus dans la forme géométrique.

De plus, l'utilisation d'un maillage contraint avec une répartition uniforme permet d'obtenir une déformation continue sur l'ensemble de la partie basse. Des tests sont réalisés par la suite sur la Forme 1, forme polygonale étudiée dans la section précédente afin de qualifier ce type de maillage pour une forme industrielle.

– Test sur la forme 1 avec maillage régulier

Le but de ce test est de juger l'influence d'une répartition homogène des ressorts pour discrétiser une forme géométrique. Pour cela la Forme 1 (Figure 3.39), utilisée pour modéliser un pneumatique, est choisie. L'intérêt d'étudier cette forme géométrique réside dans le fait qu'elle présente une épaisseur non constante.

Mise en donnée

Les ressorts sont répartis dans cette forme de façon à créer des triangles isocèles (Figure 3.37) du même type que la forme rectangulaire étudiée précédemment.

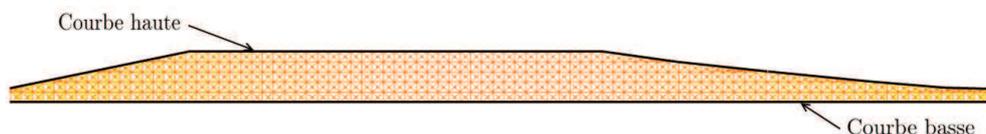


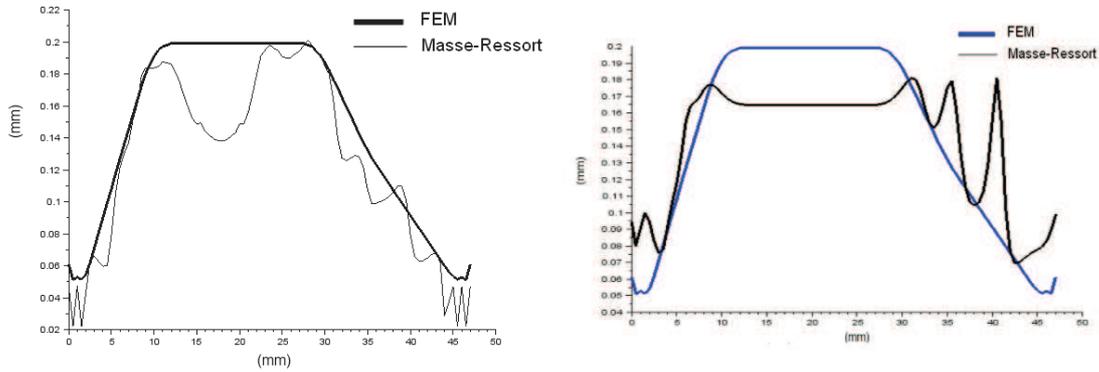
FIGURE 3.39 – Maillage régulier de la Forme 1

Pour la caractérisation, la courbe haute est encastrée et une pression de 10000 MPa est appliquée sur la courbe basse.

Un matériau de type acier caractérise cette forme géométrique de module d'Young 210000 MPa et de coefficient de poisson de 0,3 et de masse volumique 7500 kg/m³. Pour modéliser

le comportement de ce matériau et à partir des conclusions tirées Section 3.2.2, une raideur de 210000 N/m est appliquée à l'ensemble des ressorts.

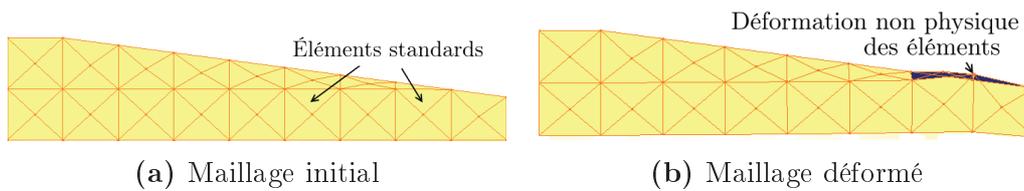
Résultats de déformation



(a) Déformée de la courbe basse pour un maillage non homogène. (b) Déformée de la courbe basse pour un maillage homogène.

FIGURE 3.40 – Comparaison de la déformation de courbe basse de la Forme 1 en fonction du maillage

La comparaison visuelle des déformées montre que celle obtenue par Masse-Ressort (Figure 3.40) est différente de celle obtenue lors des premiers tests (Figure 3.31). Cependant le résultat reste éloigné de la déformée référence obtenue par Éléments Finis (courbe bleue sur la Figure 3.40) aux niveaux des extrémités.



(a) Maillage initial (b) Maillage déformé

FIGURE 3.41 – Déformée de la courbe haute pour un maillage régulier

Les erreurs de déformations sont dues à la mauvaise qualité du maillage. Les éléments formés par les ressorts au niveau de la réduction de section ont une hauteur trop faible par rapport aux éléments standards du maillage (Figure 3.41a). Ces éléments sont positionnés sur les extrémités de la forme géométrique (Figure 3.23) et leur déformation est incohérente. Ainsi la déformée de la courbe basse obtenue au niveau des extrémités de la Forme 1 est faussée.

– Conclusion sur la répartition des ressorts dans une forme géométrique

Ces travaux sur la répartition des ressorts au sein d'un système Masse-Ressort montre l'importance d'avoir une répartition des ressorts homogène sous la forme d'un maillage contraint.

Les travaux sur la forme rectangulaire montre qu'avec ce type de maillage, la raideur ne doit pas être la même sur l'ensemble de la forme géométrique. La raideur des ressorts situés sur les contours de la forme doit être supérieure par rapport à ceux situés au sein de la forme géométrique.

De plus, les travaux sur la forme industrielle mettent en avant l'importance de ne pas avoir de ressorts trop petits lors des changements de la forme. Dans ces cas-là, les contraintes présentes à ces endroits déforment de façon excessive la forme par rapport à la réalité.

Afin de tirer des lois de construction de maillage, une étude comparative des contraintes entre celles obtenues par Masse-Ressort et celles par Éléments Finis est réalisée afin de valider mécaniquement le modèle développé.

3.3.2 Contraintes mécaniques estimées au sein d'une forme déformée

Une étude des contraintes mécaniques est réalisée pour les deux formes géométriques étudiées dans la partie précédente. Ces travaux sont réalisés afin de comprendre l'influence de la répartition des ressorts sur la déformation calculée.

Les états de contraintes calculés dans la forme déformée sont comparés à ceux obtenus par Éléments Finis.

– Étude des contraintes dans la forme rectangulaire

La mise en donnée pour réaliser le calcul des contraintes dans la forme rectangulaire est identique à celle réalisée Section 3.3.1 (Figure 3.42).

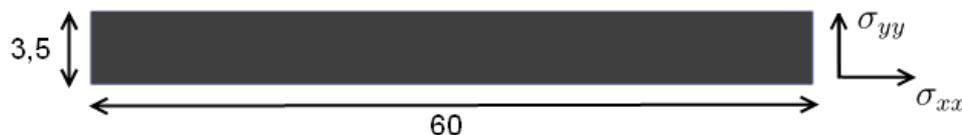


FIGURE 3.42 – Forme rectangulaire pour réaliser le calcul de contraintes

Une étude des contraintes est réalisée sur la courbe basse où est appliqué le chargement. Pour calculer les contraintes dans cette zone de la forme rectangulaire, la relation 3.8 est utilisée. Cette relation est adaptée de la relation 3.9 pour une étude en 2D et pour un système Masse-Ressort.

$$\sigma = k * (l - l_0) \quad (3.8)$$

où σ est la contrainte, k est le coefficient de raideur appliqué à l'ensemble des ressorts et ϵ l'allongement calculé de la forme.

$$\sigma = E * \epsilon \quad (3.9)$$

où σ est la contrainte, E est le module d'Young du matériau modélisé et ϵ l'allongement calculé de la forme.

Les calculs de contraintes σ_{yy} sont réalisés pour les trois raideurs obtenus lors des trois tests de caractérisations réalisés précédemment : $155000 * 10^3$ N/m, $180000 * 10^3$ N/m et $210000 * 10^3$ N/m.

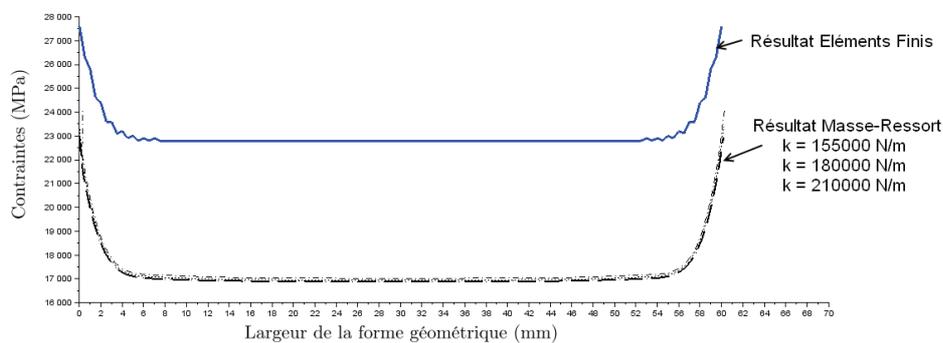


FIGURE 3.43 – Comparaison des états de contraintes σ_{yy} entre les modèles Masse-Ressort et Éléments Finis

Les calculs de contraintes sont réalisés à partir des déformées obtenues dans la section précédente. Les résultats montrent que quel que soit le coefficient de raideur appliquée au système Masse-Ressort, les contraintes sont les mêmes au niveau de la courbe basse de la forme rectangulaire. Ainsi le niveau de contrainte obtenu dans un modèle Masse-Ressort pour le cas d'un essai de compression sur une forme rectangulaire admet une erreur de 25% du modèle Éléments Finis.

Une perspective est de réaliser le calcul de contraintes σ_{yy} pour un autre type de maillage afin de connaître l'influence du maillage sur le taux de contraintes au sein d'une forme géométrique déformée.

En conclusion, ces investigations complémentaires montrent l'influence du maillage sur la qualité des résultats de déformations obtenues avec la méthode Masse-Ressort mais ne permettent pas de mettre en place des règles de caractérisation mécanique et géométrique.

4 Conclusion

La méthode de déformation physique Masse-Ressort est choisie comme méthode de déformation pour nos travaux. Elle permet de réaliser des calculs de déformation en prenant en compte les caractéristiques matériaux contrairement aux méthodes de déformations géométriques. De plus, le modèle Masse-Ressort fournit des résultats en temps réel, ce qui n'est pas le cas de la méthode par Éléments Finis. Enfin, d'après la littérature, la méthode Masse-Ressort a fait ses preuves dans le domaine biomédical pour des matériaux souples où le module d'Young des matériaux modélisés est inférieur à 1 MPa. Nos travaux permettent de caractériser un modèle Masse-Ressort pour des matériaux au module d'Young compris entre 1 MPa et 210000 MPa, considéré isotrope et linéaire. La méthode Masse-Ressort est donc adaptée pour répondre à nos besoins.

Les travaux de cette partie sont réalisés en appliquant la même raideur à l'ensemble des ressorts au sein de la forme géométrique et un maillage triangulaire en deux dimensions est utilisé. Les résultats montrent que le calcul de déformation par la méthode Masse-Ressort dépend de la répartition des ressorts qui composent le maillage.

De plus, un maillage composé de ressorts répartis de façon la plus homogène possible permet d'obtenir des résultats équivalents à ceux obtenus par Éléments Finis, méthode qui fait office de référence pour pouvoir valider les résultats obtenus.

Ainsi, dans la suite de nos travaux, le choix d'associer une raideur aux ressorts équivalente au module d'Young du matériau modélisé et d'utiliser un maillage le plus régulier possible est réalisé.

Chapitre 4

Déformation physique d'un système de formes géométriques

Sommaire

1	Introduction	102
2	Modélisation des éléments d'un pneumatique	102
2.1	Définition géométrique d'un système de formes géométriques	102
2.2	Paramétrage du système Masse-Ressort associé	103
3	Interactions entre les éléments du pneumatique	104
3.1	Interpénétration de matière	105
3.2	Méthodes de détection d'interférences	105
4	Modélisation mécanique du procédé de fabrication	107
4.1	Étape 1 : Assemblage des éléments sur l'outillage	107
4.2	Étape 2 : Translation de l'outillage jusqu'à la rencontre de la tringle	112
4.3	Étape 3 : Enroulement autour d'une forme indéformable	116
4.4	Étape 4 : Gonflement de l'outillage	121
5	Conclusion	127

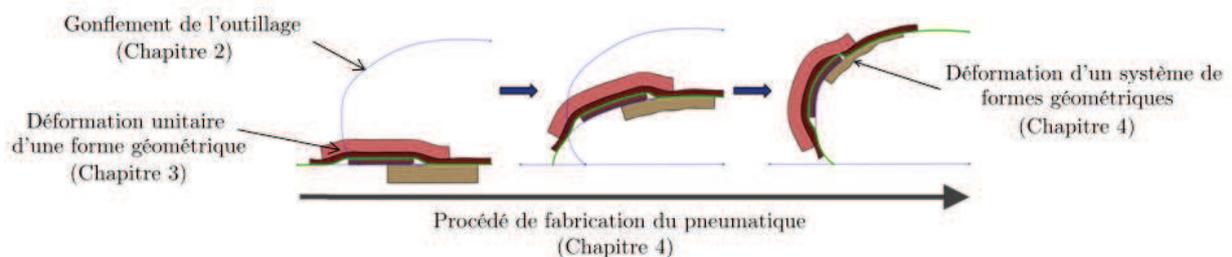


FIGURE 4.1 – Modélisation du procédé de fabrication du pneumatique.

Dans les chapitres précédents, un algorithme est développé pour modéliser le gonflement de l'outillage de fabrication et une méthode numérique est mise en place pour calculer la déformation des éléments qui constituent un pneumatique. Ces travaux sont repris dans le Chapitre 4 pour calculer la déformation d'un système de formes géométriques dans le but de modéliser le procédé de fabrication d'un pneumatique (Figure 4.1).

1 Introduction

La modélisation du procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson consiste à déformer un ensemble de formes géométriques. Chaque forme représente un élément du pneumatique aux caractéristiques matériaux propres. Le procédé se divise en quatre étapes qui correspondent à l'assemblage des éléments du pneumatique et aux états de déformation de l'outillage de fabrication. Ces quatre étapes sont l'assemblage des éléments sur l'outillage, la translation de l'outillage jusqu'à la rencontre de la tringle, l'enroulement autour de la tringle et le gonflement de l'outillage jusqu'à atteindre la forme souhaitée du pneumatique avant cuisson. La modélisation Michelin de ces étapes comporte des limites qui doivent être levées.

Pour la modélisation de chaque étape, les caractéristiques matériaux des éléments doivent être associées aux formes géométriques pour obtenir des déformations cohérentes. Pour cela, la méthode de caractérisation développée dans le Chapitre 3 est utilisée. De plus, les formes géométriques doivent interagir entre elles afin de ne pas avoir d'interpénétrations au cours de la déformation. Ce dernier point est la cause de plusieurs limites de la modélisation Michelin (Chapitre 1 Section 2.3) et un état de l'art sur les méthodes de collisions est réalisé afin de le résoudre.

Enfin, des contraintes géométriques et physiques caractérisent chaque étape du procédé et elles servent à définir la mise en données des calculs de déformation des formes géométriques assemblées sous forme de système.

2 Modélisation des éléments d'un pneumatique

Un pneumatique est constitué d'éléments modélisés par un ensemble de formes géométriques appelé "système" dans nos travaux. Les deux étapes à réaliser pour modéliser un système sont la définition géométrique du système et le paramétrage du système Masse-Ressort associé.

2.1 Définition géométrique d'un système de formes géométriques

Afin de définir géométriquement le système, chacune forme géométrique doit être définie séparément à partir des contours de la section de l'élément du pneumatique modélisé. Les formes sont ensuite positionnées les unes par rapport aux autres afin de créer le système pour modéliser la première étape du procédé de fabrication du pneumatique.

Tous les éléments sont considérés collés les uns aux autres et aucun glissement n'est possible entre eux. Ainsi, dans la modélisation Masse-Ressort, les formes géométriques doivent interagir entre elles mais aucun mouvement relatif n'est possible (Figure 4.2). Les contraintes géométriques sont utilisées pour définir le maillage et pour caractériser le système Masse-Ressort créé à partir de l'assemblage de formes géométriques.



FIGURE 4.2 – Système de formes géométriques.

2.2 Paramétrage du système Masse-Ressort associé

Le maillage est défini à partir des points caractéristiques de la forme polygonale associée à l'élément du pneumatique modélisé. Cette forme possède des points caractéristiques correspondant aux différents sommets de la forme géométrique (Figure 4.3).

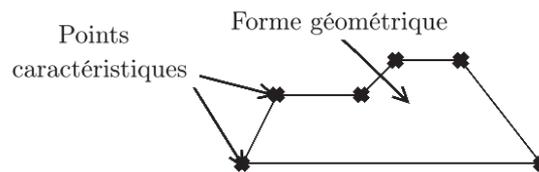


FIGURE 4.3 – Forme géométrique et ses points caractéristiques.

D'après les travaux réalisés dans le Chapitre 3, le maillage a une importance sur la qualité du résultat de déformation finale de chaque forme géométrique. Or un système étant un ensemble de formes aux caractéristiques géométriques et mécaniques différentes, le maillage attribué a une influence sur la qualité de sa déformation. Ainsi pour respecter les règles énoncées dans le Chapitre 3, le maillage du système doit s'adapter aux frontières de chaque forme (Figure 4.4).

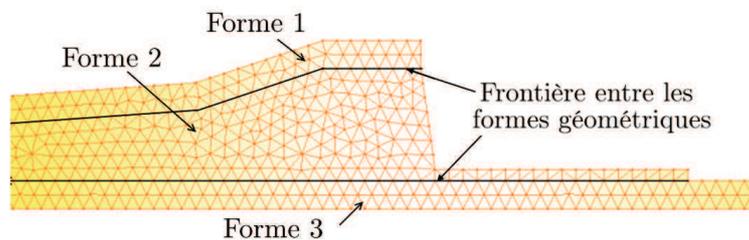


FIGURE 4.4 – Frontières dans un système de formes géométriques.

Une fois le maillage créé, les coordonnées des nœuds des éléments qui le composent sont utilisées pour définir les coordonnées des particules du système Masse-Ressort. La relation

3.7, où M_i représente la masse d'une particule appartenant à n éléments e_j , d'aire chacun A_{e_j} , modélisant un objet de masse surfacique ρ_S , est utilisée pour définir la masse de chaque particule en rapport avec le matériau caractérisant l'élément. La raideur des ressorts est attribuée à chaque forme et correspond au module d'Young du matériau.

$$M_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\rho_S A_{e_j}}{3} \right) \quad (3.7)$$

Pour les ressorts positionnés sur la frontière de deux formes géométriques dans un système (Figure 4.5), la raideur la plus importante, en lien avec les matériaux modélisés, est prise en compte. En accord avec les utilisateurs de la modélisation, l'influence de l'élément le plus rigide est plus importante sur la déformation que celle d'un élément souple en contact avec un autre élément. La masse des particules présentes sur la frontière est calculée avec la relation 3.7 également mais cette fois-ci les masses surfaciques des deux formes interviennent.

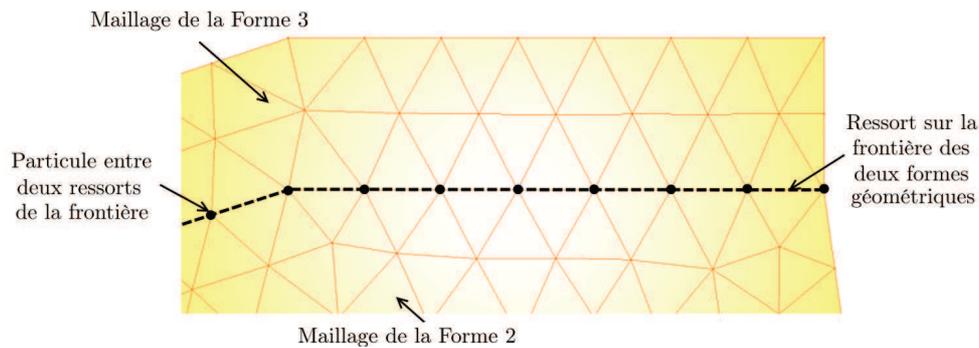


FIGURE 4.5 – Ressorts sur la frontière entre deux formes géométriques.

Lorsque le paramétrage du système Masse-Ressort est réalisé, les contraintes de chaque étape du procédé de fabrication du pneumatique sont appliquées au système pour calculer la déformation de ce dernier.

3 Interactions entre les éléments du pneumatique

La déformation de plusieurs formes géométriques assemblées sous forme de système implique la gestion des interférences entre les formes puisque des systèmes interagissent lors de la modélisation du procédé de fabrication. La modélisation Michelin ne prend pas en compte ses contraintes et rend possible l'interpénétration entre les formes géométriques. Afin que la modélisation Masse-Ressort ne présente pas cette limite, ce problème d'interaction entre les éléments du pneumatique est présenté. Un état de l'art est mené sur les différentes méthodes qui traitent les problèmes de collisions avant de proposer l'intégration de l'interaction entre les formes dans notre approche.

3.1 Interpénétration de matière

Lors de la modélisation du procédé de fabrication d'un pneumatique, les formes géométriques entrent en contact avec d'autres à deux étapes :

- Lors de l'assemblage pour créer le système initial :

Durant cette phase, les formes géométriques sont positionnées les unes par rapport aux autres sur l'outillage de fabrication.

- lors du gonflement de l'outillage de fabrication :

Durant cette phase, des formes géométriques caractérisées par un matériau caoutchouc entrent en contact avec des formes caractérisées par un matériau acier considéré indéformable.

Dans ces deux étapes, les formes géométriques doivent se déformer lorsqu'elles rencontrent un élément extérieur et ne pas s'interpénétrer (Figure 4.6).

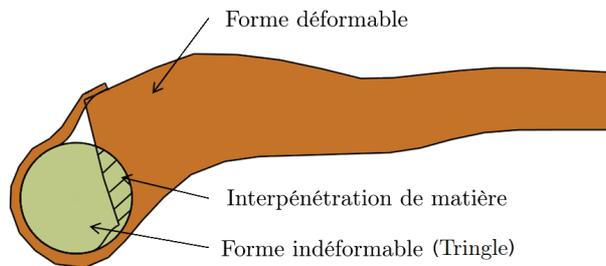


FIGURE 4.6 – Exemple d'interpénétration de matière obtenu avec la méthode actuelle.

Afin de prendre en compte ces cas d'interférences entre les formes géométriques dans la modélisation du procédé de fabrication, un état de l'art portant sur les méthodes de détection de collisions est réalisé.

3.2 Méthodes de détection d'interférences

Le but des méthodes de détection d'interférences entre les formes géométriques est de déterminer automatiquement un contact géométrique lorsqu'il intervient entre deux éléments tels que des surfaces ou des courbes. Ce problème de détection de d'interférences entre les formes intervient dans les domaines de la conception, de calculs de trajectoire en usinage, de l'animation et dans notre domaine de la modélisation numérique.

Pour détecter les interférences, plusieurs méthodes existent et sont répertoriées dans la littérature par Lin [Lin et Gottschalk, 1998], Jimenez [Jimenez *et al.*, 2001] et Madera [Madera, 2011].

Tout d'abord, le principe général de la détection d'interférences repose sur le calcul de la distance entre deux objets géométriques. Par exemple, dans un modèle en deux dimensions, une collision entre un point et une forme géométrique quelconque existe lorsque le point se situe à l'intérieur de l'objet. Afin de détecter le passage de ce point à l'intérieur

de la forme géométrique, un test d'intersection est réalisé entre le segment défini par les positions initiales, à l'instant t_n , et finale, à l'instant t_{n+1} du point et le contour de l'objet considéré (Figure 4.7). Si l'intersection existe cela signifie que le point est situé dans la forme géométrique, mais si l'intersection n'existe pas, il n'y a pas collision [Chendeb, 2007].

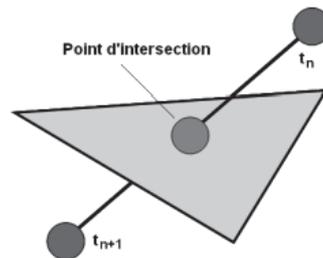


FIGURE 4.7 – Exemple d'intersection entre un point et une forme géométrique [Chendeb, 2007].

De plus, la performance d'un algorithme de détection d'interférences dépend essentiellement du nombre de tests à réaliser à chaque pas de temps de calcul et dépend de la taille et du nombre de formes géométriques situées dans l'environnement de modélisation. Ainsi l'optimisation d'un algorithme de détection repose sur l'application de deux principes d'interférences.

- La détection approximative est le premier principe qui permet de localiser les régions potentielles d'interférences afin de réduire le nombre de tests à réaliser. Pour mettre en place ce principe, des méthodes de tri, des méthodes de décomposition, de partition spatiale ou des méthodes hiérarchiques peuvent être utilisées. L'ensemble de ces méthodes est détaillé par Chendeb dans [Chendeb, 2007].
- La détection exacte des interférences est le second principe qui s'appuie sur la localisation réalisée lors de l'application de la détection approximative. Ce principe permet d'obtenir le nombre exact et la localisation de chacune des collisions dans un environnement donné.

Les temps de calcul de détection d'interférences peuvent être optimisés avec les principes précédents mais ils sont liés directement à la taille des formes en contact et de leur discrétisation. En effet, si deux formes géométriques discrétisées finement entrent en collision, le calcul des interférences est plus important que pour deux formes géométriques discrétisées grossièrement.

En conclusion, le principe général de détection géométrique d'interférences en deux dimensions, implémenté dans le modèle SOFA [Allard *et al.*, 2007] est utilisé dans nos travaux. Une condition de distance minimale est également ajoutée pour optimiser les temps de calcul de collisions.

Cet outil de détection d'interférences est couplé à la méthode Masse-Ressort pour modéliser mécaniquement le procédé de fabrication des pneumatiques avant cuisson.

4 Modélisation mécanique du procédé de fabrication

La modélisation du procédé de fabrication d'un pneumatique avant cuisson se décompose en quatre étapes :

1. L'assemblage des éléments sur l'outillage ;
2. La translation de l'outillage jusqu'à la rencontre de la tringle ;
3. l'enroulement autour de la tringle ;
4. Le gonflement de l'outillage jusqu'à l'état final du procédé de fabrication.

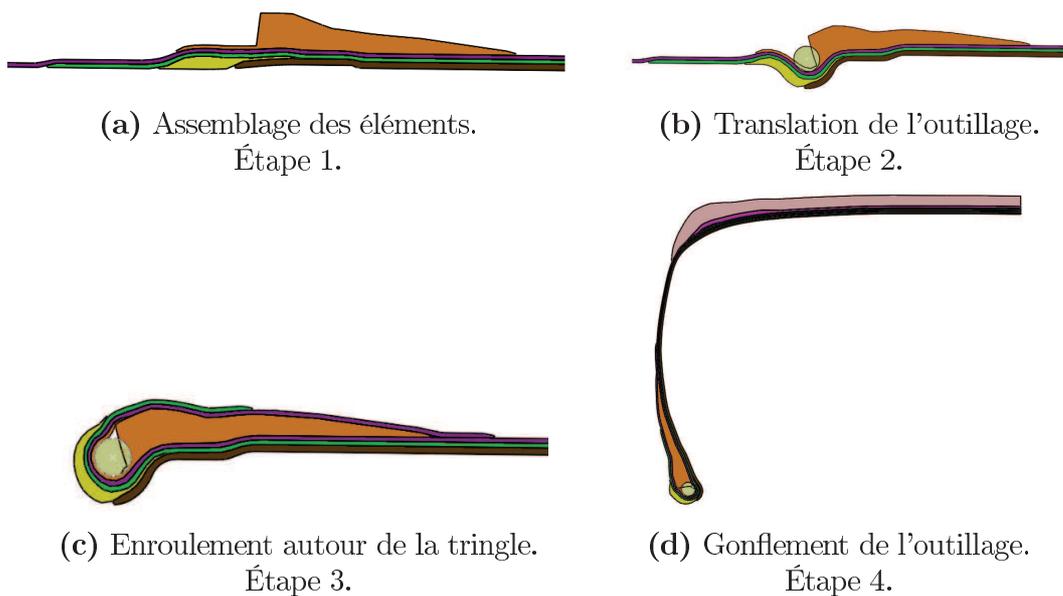


FIGURE 4.8 – Les quatre étapes du procédé de fabrication.

La méthode Masse-Ressort est utilisée pour modéliser la déformation des systèmes de formes géométriques pour chacune des étapes. La déformation s'appuie sur un pilotage en déplacement des formes géométriques défini à partir des contraintes géométriques et physiques qui caractérisent chaque étape.

Pour chaque étape détaillée dans cette section, des indicateurs de performance sont définis à partir des limites de modélisation de la méthode Michelin. Ces indicateurs ainsi que les temps de calcul permettent de comparer la méthode Masse-Ressort à la méthode Michelin, méthode de référence, et à la méthode Éléments Finis.

4.1 Étape 1 : Assemblage des éléments sur l'outillage

La première étape du procédé de fabrication du pneumatique consiste à positionner des formes géométriques les unes par rapport aux autres sur un outillage fixe. Lors du positionnement, la forme géométrique est déformée et la modélisation avec la méthode Michelin comporte des limites qui sont :

- L'absence de conservation de l'aire des formes géométriques.

Cette absence se traduit par le changement d'épaisseur de la forme géométrique positionnée sur une autre (Figure 4.9a), ce qui n'est pas cohérent.

- L'absence de la prise en compte des propriétés mécaniques du matériau.

Cette absence de caractérisation de la forme géométrique se traduit par des résultats erronés sur les déformations calculées. Un cas limite est illustré par la forme géométrique verte sur la Figure 4.9b qui modélise un produit rigide composé de caoutchouc et de fils d'acier.

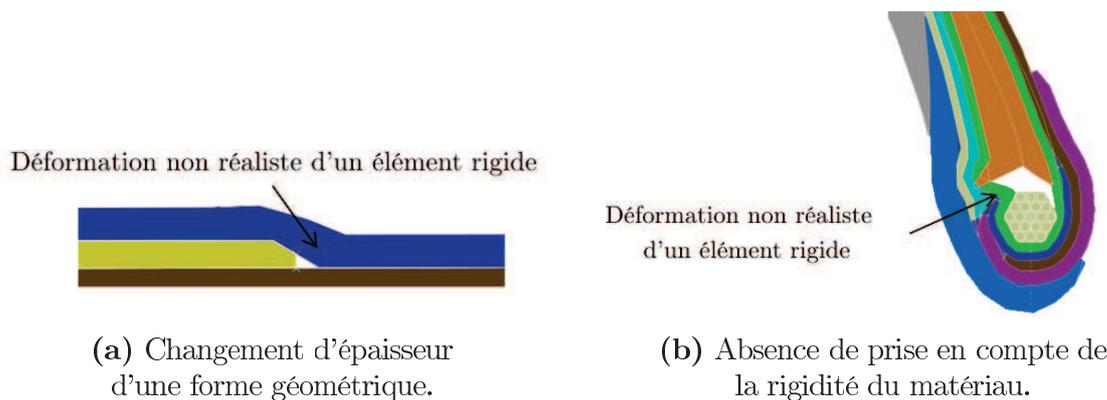


FIGURE 4.9 – Limites du modèle Michelin lors de l'étape de l'assemblage.

Ces limites pénalisent la modélisation actuelle du procédé de fabrication du pneumatique et doivent être corrigées a posteriori par l'utilisateur. Des indicateurs de performance sont définis pour comparer le modèle Michelin, la modélisation Masse-Ressort proposée et la modélisation Éléments Finis :

- La comparaison de l'aire de la forme géométrique déformée lors de son positionnement sur une autre forme géométrique.

Cet indicateur quantifie la conservation de l'aire de la forme déformée.

- La comparaison de l'aire sous la forme géométrique déformée.
- La comparaison de la longueur de la forme géométrique déformée.

Les deux derniers indicateurs qualifient la déformation de la forme géométrique positionnée.

4.1.1 Maquette de validation de l'assemblage des éléments sur l'outillage

La maquette de positionnement d'une forme géométrique sur une autre consiste à poser une forme rectangulaire sur une forme trapézoïdale. Cette dernière est positionnée sur l'outillage considéré indéformable dans cette étape et modélisé par une droite (Figure 4.10). Les dimensions des deux formes géométriques sont représentatives d'éléments présents dans un pneumatique. Par rapport aux paramètres matériaux, la forme rectangulaire représente un élément composé de caoutchouc et de fils d'acier au module d'Young de 6000 MPa et la forme trapézoïdale modélise un élément en acier au module d'Young de 21000 MPa.

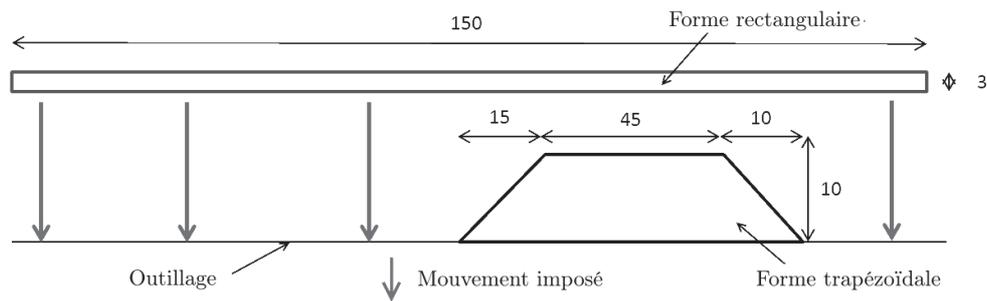


FIGURE 4.10 – Modélisation de la pose d'une forme géométrique (mise en donnée).

Pour le modèle Michelin, les deux formes géométriques sont définies en CAO et la forme trapézoïdale est placée sur la droite. Une courbe support est alors créée et la forme rectangulaire est placée dessus.



FIGURE 4.11 – Forme trapézoïdale et courbe support (modèle Michelin).

Pour la modélisation Masse-Ressort, basée sur l'utilisation de la méthode Masse-Ressort et un moteur de collisions, les résultats présentés dans le Chapitre 3 sont utilisés. Les masses des particules sont calculées à partir de la relation 3.7 avec une masse volumique pour l'acier de 7500 kg/m^3 et pour le second matériau de 980 kg/m^3 . Concernant les raideurs des ressorts, une raideur de 6000 N/m est utilisée pour modéliser l'élément composé de caoutchouc et de fils d'acier et une raideur de $210 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ pour l'élément en acier. Le maillage utilisé est un maillage contraint avec une taille de maille de 1 mm . Enfin, pour modéliser le contact entre les deux formes géométriques, un outil de détection d'interférences entre les formes géométriques, basé sur une méthode de calcul géométrique, est utilisé.

Pour la modélisation par Éléments Finis, un module d'Young de 210000 MPa et un coefficient de Poisson de $0,3$ sont attribués à la forme trapézoïdale et un module d'Young de 6000 MPa et un coefficient de Poisson de $0,5$ pour la forme rectangulaire. Le maillage du modèle Masse-Ressort est utilisé et une loi de contact est définie entre les deux formes géométriques.

Pour les deux dernières modélisations, la forme rectangulaire est pilotée en translation verticale de sa position initiale jusqu'à la mise en contact de sa courbe basse avec la droite qui modélise l'outillage et le dessus de la forme trapézoïdale (Figure 4.10).

4.1.2 Résultats

La Figure 4.12 présente les résultats de déformation obtenus pour chaque modèle. Une superposition des résultats du modèle Masse-Ressort et du modèle Éléments finis est réalisée sur la Figure 4.13. Cette dernière figure montre que la forme trapézoïdale ne se déforme pas et qu'un écart géométrique entre les deux modèles existe.

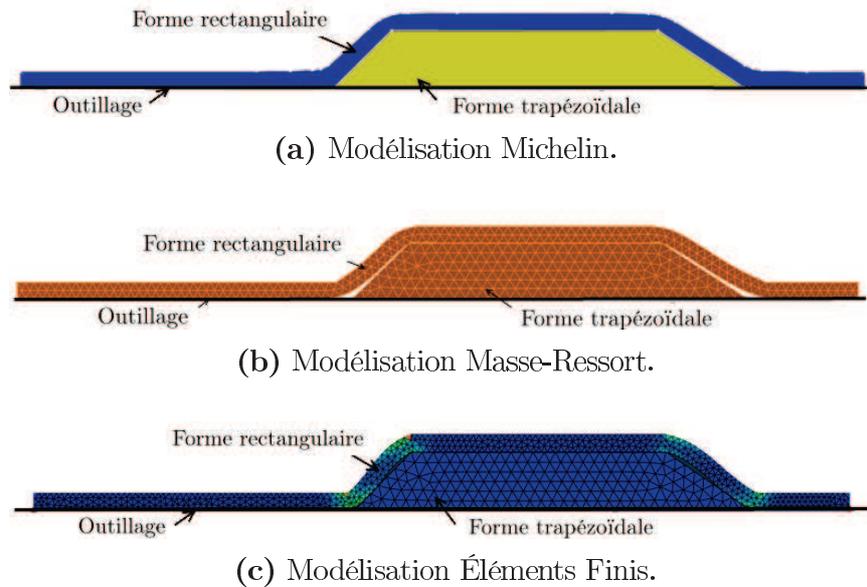


FIGURE 4.12 – Modélisation de l'assemblage de deux formes géométriques.

Les indicateurs de performance définis préalablement sont utilisés pour quantifier les méthodes dans le Tableau 4.1.

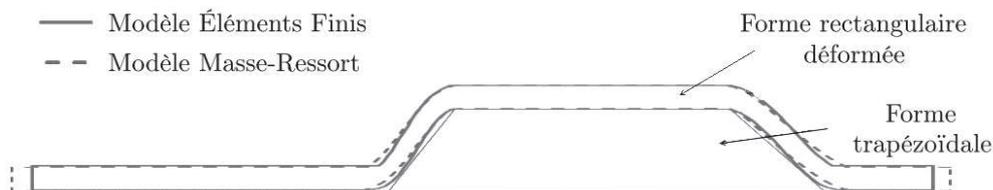


FIGURE 4.13 – Comparaison de la déformation géométrique du modèle de l'assemblage de deux formes géométriques.

Les indicateurs de calcul de l'aire de la forme rectangulaire déformée et de l'aire sous la courbe basse de la forme déformée indique une bonne cohérence entre le modèle Michelin et le modèle Éléments Finis, puisque l'écart reste inférieur à 1%. Par contre pour le modèle Masse-Ressort, l'écart devient supérieur à 2% par rapport au modèle Michelin. Toutefois, cet écart reste inférieur à 3%, écart maximum correspondant à la précision souhaitée par les utilisateurs.

Cependant, pour la longueur de la courbe basse de la forme rectangulaire déformée, le modèle Masse-Ressort présente un écart supérieur à 3% par rapport au modèle Michelin et au modèle de référence. Cet écart est considéré trop important par les utilisateurs pour valider l'utilisation du modèle Masse-Ressort pour cette étape de modélisation. Cependant, le modèle Masse-Ressort peut être amélioré car dans cette maquette, la courbe basse de forme rectangulaire est pilotée en déplacement vertical et les déplacements horizontaux sont bloqués, car l'outil SOFA ne permet pas de les débloquer (Figure 4.10). Cette hypothèse de modélisation explique cet écart avec les autres modèles.

Au sujet des temps de calcul, le modèle Michelin fournit des résultats en temps réel contrairement aux modèles Masse-Ressort et Éléments Finis qui fournissent un résultat en 35 secondes et 40 secondes respectivement. L'écart entre les modèles s'explique par l'utilisation des courbes supports dans le modèle Michelin ¹. Ainsi le modèle Michelin ne fournit que les étapes initiale et finale de la déformation de la forme géométrique.

	Méthode Michelin	Méthode Masse-Ressort	Méthode des Éléments Finis
Aire initiale de la forme rectangulaire	450 mm ²		
Aire de la forme rectangulaire déformée	449,97 mm ²	462,27 mm ²	450,29 mm ²
Écart de déformation avec le modèle Michelin	/	2,73%	0,07%
Aire sous la courbe basse de la forme rectangulaire déformée	585 mm ²	600,04 mm ²	586,62 mm ²
Écart de déformation avec le modèle Michelin	/	2,57%	0,11%
Longueur de la courbe basse forme rectangulaire déformée	150 mm	156,255 mm	150,81 mm
Écart de déformation avec le modèle Michelin	/	4,17%	0,54%
Temps de calcul	Temps réel	35 s	40 s

Tableau 4.1 – Comparaison des modèles Michelin, Masse-Ressort et Éléments Finis pour la modélisation de l'étape d'assemblage.

En conclusion, pour modéliser cette étape, le modèle Masse-Ressort respecte la conservation de l'aire de la forme géométrique positionnée sur une autre forme géométrique. Cependant, le modèle ne peut pas être utilisé en état puisque l'hypothèse de conservation de longueur des produits n'est pas respectée. Cette erreur provient de la mise en donnée du problème qui peut être améliorée pour valider cette hypothèse.

Enfin par rapport aux temps de calcul, le modèle Masse-Ressort ainsi que le modèle

1. Description donnée Chapitre 1 Section 2.2

Éléments Finis ne sont pas en temps réel mais ces deux modèles permettent d'observer la déformation en continu de la forme rectangulaire entre l'état initial et l'état final de déformation. Cette évolution présente un apport pour les utilisateurs.

De plus, les courbes supports sont la source des interpénétrations entre les formes géométriques². Or, l'utilisation d'un outil de détection des interférences entre les formes dans le modèle Masse-Ressort supprime l'utilisation des courbes. Ainsi l'interpénétration entre les formes ne se produit pas, ce qui représente un autre avantage par rapport à la modélisation Michelin.

4.2 Étape 2 : Translation de l'outillage jusqu'à la rencontre de la tringle

Lors de la deuxième étape du procédé, le diamètre de l'outillage augmente. Cette étape se traduit par une translation de la droite qui modélise l'outillage. Les formes géométriques, qui composent le système, sont positionnées sur cet outillage (Section 2) et entrent en contact avec une forme géométrique circulaire appelée tringle, considérée indéformable. La modélisation Michelin de cette étape du procédé présente les limites suivantes :

- L'absence de déformation d'une forme géométrique lors de la collision avec une autre forme.

Cette limite a d'autant plus d'importance pour le contact entre une forme déformable et une forme indéformable.

- L'interpénétration entre les formes géométriques.

Cette limite découle de la première puisque deux formes qui se rencontrent ne se déforment pas.

Ces deux limites sont illustrées par la Figure 4.14 où les formes géométriques modélisant des éléments en caoutchouc entrent en collision avec une forme modélisant un élément en acier considéré indéformable. Or les formes déformables ne se déforment pas et interpénètrent celle indéformable, ce qui n'est pas cohérent.

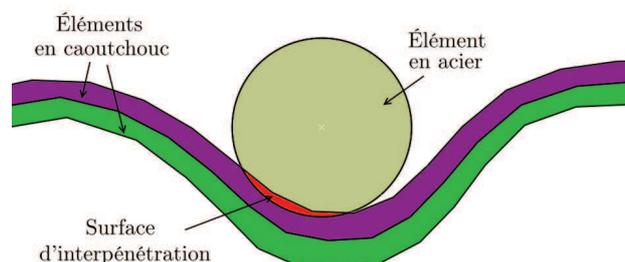


FIGURE 4.14 – Limite de la modélisation Michelin.

2. Voir Chapitre 1 Section 2.3

Dans le modèle Masse-Ressort proposé, des indicateurs de performance sont définis pour quantifier ces deux limites :

- La comparaison des surfaces d'interpénétration de matière entre la forme déformable et la forme indéformable.

Cet indicateur concerne la limite d'interpénétration de matière que présente la modélisation Michelin. Pour vérifier cet indicateur, la surface d'interpénétration entre les formes géométriques déformables et indéformables est calculée.

- La comparaison des écrasements sous la forme indéformable ;

Cet indicateur consiste à mesurer l'épaisseur des formes géométriques déformables qui entrent en collision avec la forme indéformable pour constater leur déformation.

- La comparaison des aires des formes déformables avant et après déformation.

Cet indicateur valide la prise en compte des caractéristiques matériaux des éléments lors de la déformation des formes géométriques.

4.2.1 Maquette de validation de la collision avec une forme indéformable

La maquette de collision, réalisée pour modéliser cette étape consiste à définir un système de deux formes déformables rectangulaires posées l'une sur l'autre et une forme indéformable circulaire positionnée à 20mm au-dessus du système. Les formes rectangulaires ont pour dimension 50 mm*1,3 mm et 40 mm*1 mm et sont translatées vers la forme indéformable jusqu'à obtenir un écrasement de 1,6 mm sous la forme circulaire de rayon de 3,4 mm (Figure 4.15).

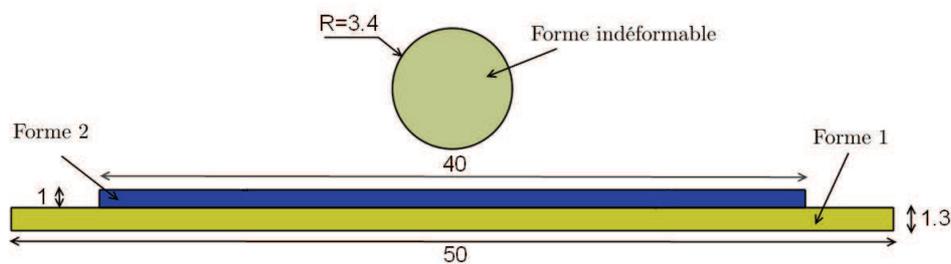


FIGURE 4.15 – Schéma de principe de la collision entre deux formes déformables et une forme indéformable.

Pour le modèle Michelin, les deux formes géométriques rectangulaires sont définies et la forme la plus petite, Forme 1, est positionnée sur la Forme 2. Cette dernière est elle-même placée sur une droite modélisant l'outillage. La droite est ensuite translatée de 2 mm afin d'obtenir la distance d'encastrement souhaitée.

Le modèle Masse-Ressort est construit sur la base d'un système de formes géométriques, présentée Section 2 de ce chapitre. Les masses des particules sont calculées à partir de la relation 3.6 avec une masse volumique pour l'acier de 7500 kg/m^3 et pour le caoutchouc de 920 kg/m^3 . Concernant les raideurs des ressorts, une raideur de $1 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ est utilisée pour modéliser les éléments en caoutchouc et une raideur de $210 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ pour l'élément en acier.

Le maillage utilisé est un maillage contraint avec une taille de maille de 1 mm. Pour modéliser le contact entre les deux formes géométriques, un outil de détection des interférences entre les formes géométriques, basé sur une méthode de calcul géométrique, est utilisé. Enfin pour cette maquette la tringle est translatée de 2 mm pour obtenir l'écrasement souhaité.

Pour la modélisation Éléments Finis, les formes rectangulaires sont caractérisées par un matériau caoutchouc de module d'Young 1 MPa et de coefficient de Poisson 0,5 et la forme circulaire par un matériau acier de module d'Young 210000MPa et de coefficient de Poisson 0,3. Les formes rectangulaires sont déjà placées les unes par rapport aux autres à l'état initial de la simulation et le même maillage que celui défini pour le modèle Masse-Ressort est utilisé. Pour cette modélisation la courbe basse de la forme rectangulaire la plus grande est pilotée en déplacement qui correspond à une translation de 2 mm.

4.2.2 Résultats

La Figure 4.16 montre les résultats de déformations obtenus avec chaque modélisation. Pour le modèle Michelin, les deux formes rectangulaires ne se déforment pas et interpénètrent la forme circulaire. Ce n'est pas le cas pour les deux autres modèles où un écrasement de ces formes se produit.

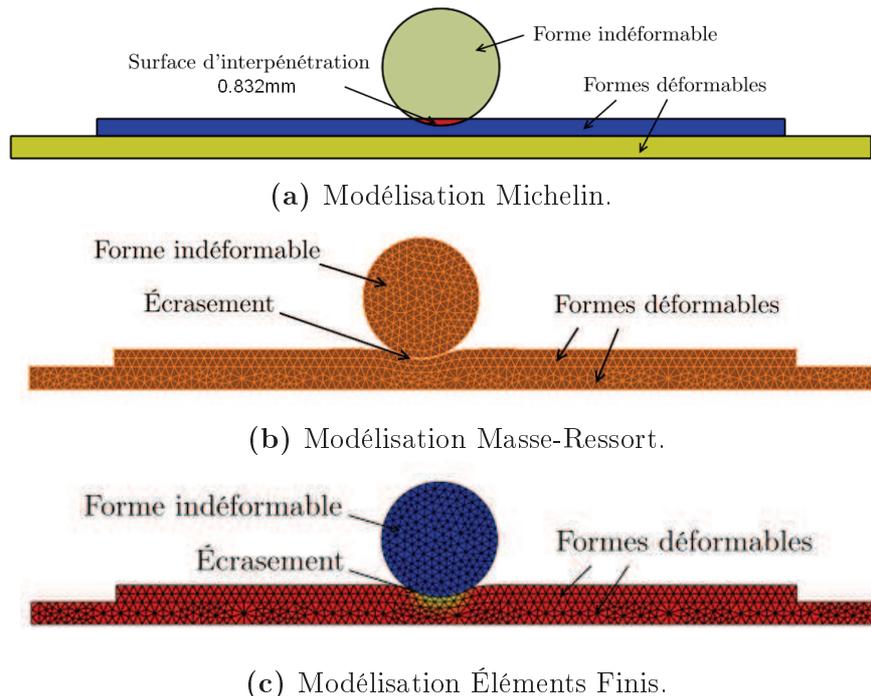


FIGURE 4.16 – Modélisation de la collision entre une forme indéformable et deux formes déformables.

Pour comparer les résultats de la maquette réalisée avec les trois modèles, les indicateurs de performance définis précédemment sont repris dans le Tableau 4.2.

Par rapport à l'interpénétration de matière, la maquette réalisée avec la modélisation Michelin montre que la forme 1 est présente à l'intérieur de la forme circulaire avec une aire d'interpénétration de $0,832 \text{ mm}^2$. Par contre, les maquettes réalisées avec la modélisation Masse-Ressort et la méthode par Éléments finis ne présentent pas d'interpénétration de matière entre les deux formes rectangulaires et la forme circulaire.

Au sujet de l'écrasement sous la forme circulaire, les deux formes rectangulaires ne se déforment pas avec la modélisation Michelin contrairement à la modélisation Masse-Ressort où un écrasement se produit avec un écart de 1,2% par rapport à celui obtenu avec la modélisation Éléments Finis.

L'écrasement des formes déformables n'a pas lieu avec la modélisation Michelin, ainsi l'aire des deux formes rectangulaires après déformation est égale à celle avant déformation. Par contre l'aire de la forme 1 diminue de $1,09 \text{ mm}^2$ et celle de la forme 2 de $0,69 \text{ mm}^2$ avec le modèle Masse-Ressort. Cette variation d'aire pour les deux formes géométriques est équivalente à celle constatée sur la maquette réalisée par Éléments Finis puisque l'écart entre ces deux modèles est inférieur ou égal à 0,5%. Ainsi, les résultats de la déformation des formes rectangulaires traduisent la prise en compte de l'élasticité du matériau avec le modèle Masse-Ressort.

Le temps de calcul de la modélisation Michelin, qui ne calcule que les étapes initiale et finale de la déformation, fournit un résultat en temps réel. Le résultat de la déformation pour le modèle Masse-Ressort est obtenu en 25 secondes et avec le modèle par Éléments Finis en 300 secondes. Ainsi ces deux dernières méthodes ne fournissent pas de résultats en temps réel.

	Méthode Michelin	Méthode Masse-Ressort	Méthode Éléments Finis
Aire d'interpénétration	$0,832 \text{ mm}^2$	0 mm^2	0 mm^2
Écrasement sous la forme indéformable	0 mm	1,635 mm	1,62 mm
Écart de déformation avec la Méthode Éléments Finis	/	0,9%	/
Aire initiale de la forme 1	65 mm^2		
Aire finale de la forme 1	65 mm^2	$63,91 \text{ mm}^2$	$63,98 \text{ mm}^2$
Écart de déformation avec la Méthode Éléments Finis	1,5%	0,1%	%
Aire initiale de la forme 2	40 mm^2		
Aire finale de la forme 2	40 mm^2	$39,31 \text{ mm}^2$	$39,11 \text{ mm}^2$
Écart de déformation avec la Méthode Éléments Finis	2,27%	0,5%	/
Temps de calcul	Temps réel	25 s	300 s

Tableau 4.2 – Comparaison des modèles Michelin et Masse-Ressort pour la modélisation de la collision avec une forme indéformable.

En conclusion, pour cette étape du procédé de fabrication, le modèle Masse-Ressort couplé à un outil de détection des interférences entre les formes géométriques empêche l'interpénétration entre ces formes. De ce fait, un écrasement se produit alors sous la forme indéformable et la déformation subie par les autres formes correspond à celle obtenue par Éléments Finis, ce qui permet de valider le résultat du modèle Masse-Ressort.

Ainsi par rapport au modèle Michelin, le modèle Masse-Ressort fournit un résultat de déformation qui prend en compte les caractéristiques matériaux, ce qui améliore la modélisation de cette étape. Bien que les résultats ne sont pas fournis en temps réel, ils restent acceptables en utilisation industrielle et sont dix fois plus rapides qu'en simulation par Éléments finis

4.3 Étape 3 : Enroulement autour d'une forme indéformable

Lors de la troisième étape du procédé, la déformation de l'outillage entraîne celle des éléments en caoutchouc placés à l'extérieur de la tringle en acier et les enroule autour de cette dernière. La modélisation Michelin de cette étape comporte des limites qui sont :

- L'absence de prise en compte des caractéristiques matériaux.
- L'interpénétration de matériaux entre les formes géométriques.

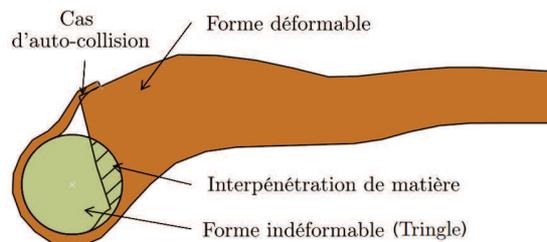
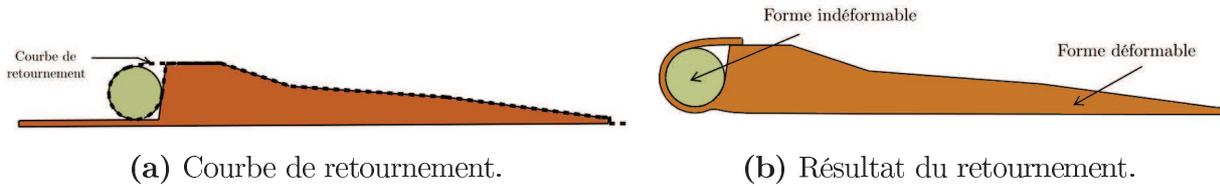


FIGURE 4.17 – Limite de modélisation de l'étape d'enroulement autour d'une forme indéformable.

Ces deux limites sont traitées dans les deux étapes précédentes mais sont également abordées dans cette étape de modélisation puisque leur cause n'est pas la même (Figure 4.17). Dans le cas présent, ces limites proviennent du pilotage du retournement des formes géométriques autour de la forme indéformable. Pour réaliser cette étape avec la modélisation Michelin, une courbe doit être créée. Cette courbe est appelée courbe de retournement (Figure 4.18). Cette courbe est utilisée pour calculer la déformation de la forme déformable positionnée dessus en contraignant la courbe haute de cette forme.



(a) Courbe de retournement.

(b) Résultat du retournement.

FIGURE 4.18 – Limite de modélisation de l'étape d'enroulement autour d'une forme indéformable.

Ainsi une autre méthode doit être développée avec le modèle Masse-Ressort afin de résoudre les limites présentes dans la modélisation Michelin. Des indicateurs de performance sont définis pour quantifier ces limites :

- La comparaison des aires de la forme déformable avant et après déformation ; Cet indicateur traduit la prise en compte ou non des caractéristiques matériaux des éléments modélisés.

- La comparaison de la longueur de la courbe basse avant et après déformation ; Cet indicateur fait référence à une loi définie par les utilisateurs et respectée dans la modélisation Michelin. Les utilisateurs souhaitent que la courbe haute de la forme déformée autour de la forme indéformable conserve la même longueur avant et après déformation.

A noter que la limite d'interpénétration entre les formes géométriques qui n'est pas abordée dans la maquette de cette étape mais elle l'est dans les deux étapes précédentes avec l'utilisation d'un outil de détection des interférences dans le modèle Masse-Ressort. Cette limite n'est également pas prise en compte pour la définition des indicateurs de performance de cette étape.

4.3.1 Maquette de validation de l'enroulement autour d'une forme indéformable

La maquette de l'enroulement consiste à modéliser la déformation d'une forme géométrique autour d'une forme indéformable. Cette dernière est un cercle de rayon 3,4 mm et les dimensions principales de la forme déformable sont données sur la Figure 4.19.

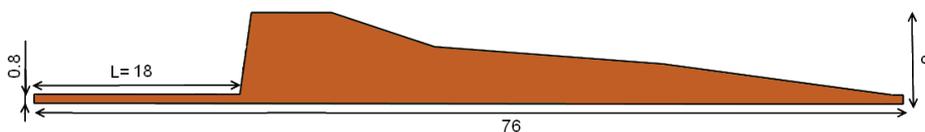


FIGURE 4.19 – Dimensions de la forme déformable.

Pour la modélisation Michelin, les deux formes géométriques sont définies puis positionnées l'une par rapport à l'autre (Figure 4.21a). Une courbe de retournement est ensuite créée afin de pouvoir réaliser la déformation de la forme modélisant le produit en caoutchouc.

Pour le modèle Masse-Ressort, la forme modélisant un élément en caoutchouc de masse volumique 920 kg/m^3 est caractérisée par des ressorts de 1000 N/m . La forme modélisant un élément en acier de masse volumique 7500 kg/m^3 est caractérisée par des ressorts de 210.10^6 N/m . La masse des particules des deux formes géométriques est calculée à partir de la relation 3.6. Le maillage utilisé est contraint avec une taille de maille de 1 mm et le contact est pris en compte entre les deux formes géométriques par un moteur de collisions basé sur une méthode de calcul géométrique.

Une loi de déplacement du point P_{ext} , situé à l'extrémité de la forme déformable, est développée (Figure 4.20). Cette loi géométrique est établie de façon à respecter les indicateurs de performance, notamment la conservation de la longueur de la partie enroulée avec la modélisation Masse-Ressort.

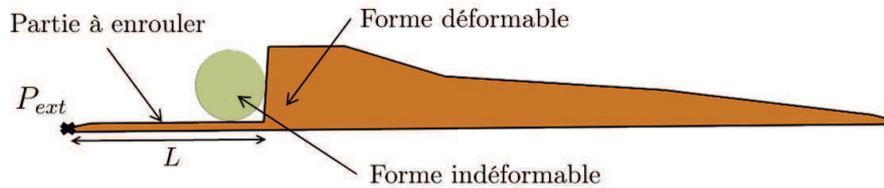


FIGURE 4.20 – État initial.

Cette loi détermine la trajectoire du point extrémité P_{ext} de la partie à enrouler autour de la forme géométrique circulaire. Ainsi la loi géométrique $L = L_a + L_i$ avec $L_a = R * \theta$ expliquée sur le schéma de principe de la Figure 4.21 est développée et utilisée.

Dans cette loi, les paramètres sont :

- L , la longueur initiale de la partie enroulée de la forme indéformable ;
- L_a , la longueur d'enroulement autour de la forme indéformable ;
- L_i , la longueur libre de la partie enroulée ;
- θ , l'angle d'enroulement

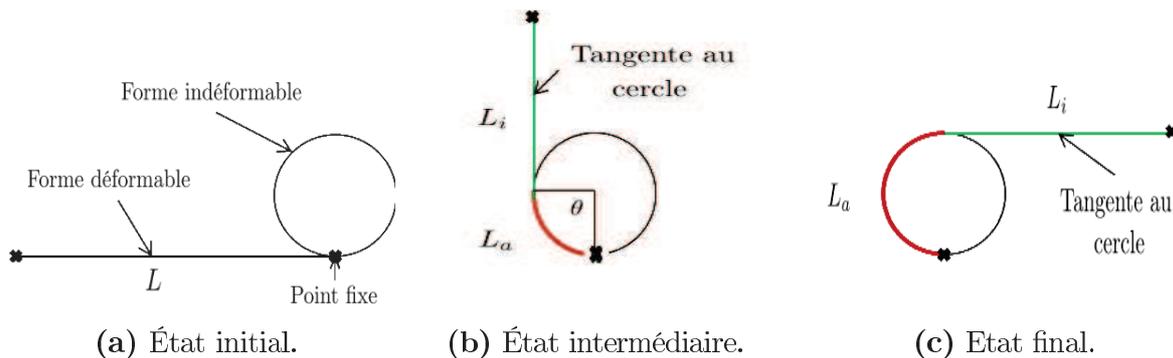


FIGURE 4.21 – Schémas de principe des étapes du retournement.

Un exemple de trajectoire du point P_{ext} obtenue avec la loi géométrique définie ci-dessus, appliquée avec le modèle Masse-Ressort, est présenté sur la Figure 4.22.



FIGURE 4.22 – Déplacement imposé à l'extrémité de la forme géométrique.

Pour la modélisation Éléments Finis, un module d'Young de 1 MPa et un coefficient de Poisson 0,5 sont attribués à la forme déformable et un module d'Young 210000 MPa et un coefficient de Poisson 0,3 à la forme indéformable. Le maillage défini pour le modèle Masse-Ressort est utilisé et une loi de contact est définie entre les deux formes géométriques de la maquette. Enfin le point extrémité de la forme déformable est piloté avec la même loi de déplacement que pour le modèle Masse-Ressort.

4.3.2 Résultats

La Figure 4.23 montre les résultats de déformations obtenus avec chaque modélisation. Le modèle Michelin ne présente pas le même type de déformation au niveau de la partie enroulée comparé au modèle Masse-Ressort et au modèle Éléments Finis. Cette différence s'explique par l'utilisation de la courbe de retournement utilisée dans le modèle Michelin.

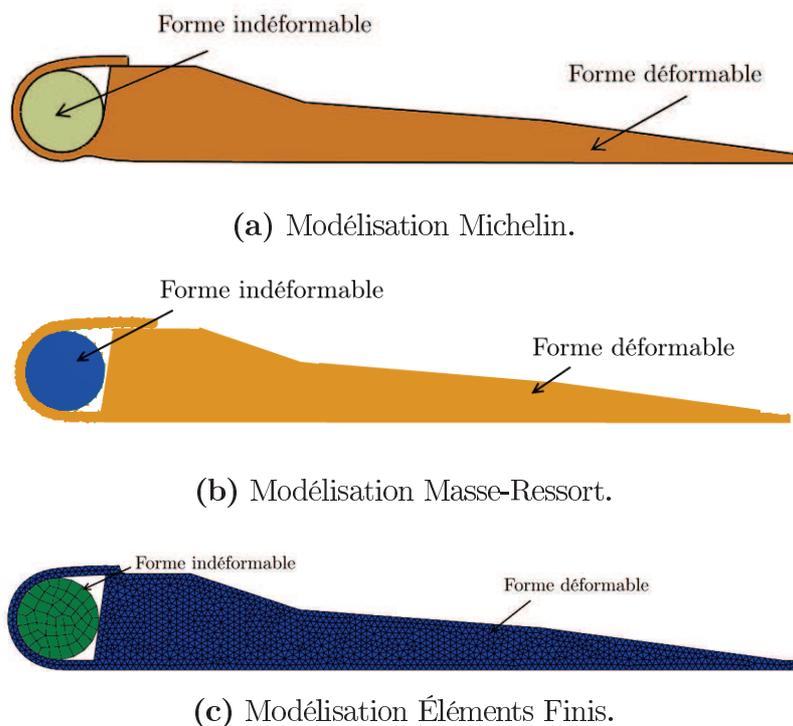


FIGURE 4.23 – Modélisation de l'enroulement d'une forme géométrique déformable autour d'une forme géométrique indéformable.

Pour comparer les résultats issus des trois modèles, les indicateurs de performance sont repris dans le Tableau 4.3 et la modélisation Michelin sert de référence.

La comparaison de l'aire de la forme initiale à celle déformée montre que l'aire est conservée pour la modélisation Michelin contrairement aux modélisations Masse-Ressort et Éléments Finis.

De plus, la comparaison des aires des formes déformées obtenues avec les modèles Masse-Ressort et Éléments Finis par rapport à celle obtenue avec la méthode Michelin montre que l'écart entre les modèles est inférieur à 1%.

La comparaison de la longueur de la courbe basse montre que le modèle Masse-Ressort présente un écart inférieur à 3% par rapport à la déformée obtenue avec le Modèle Michelin et le modèle Éléments Finis présente un écart inférieur à 1%.

Le temps de calcul de la méthode Michelin est en temps réel alors que la modélisation Masse-Ressort fournit un résultat en 180 secondes pour cette étape. Ce dernier temps de calcul s'explique par l'utilisation de l'outil de détection des interférences entre les formes géométriques. Cet outil permet d'obtenir la déformation d'une forme autour d'une forme indéformable sans qu'il n'y ait d'interpénétration de matière. Le temps de calcul de la méthode Éléments Finis fournit un temps de calcul équivalent à la méthode Masse-Ressort.

	Méthode Michelin	Méthode Masse-Ressort	Méthode Éléments Finis
Aire de la forme Initiale	262,1 mm ²		
Aire de la forme Finale	261,2 mm ²	262 mm ²	263,9 mm ²
Écart de déformation par rapport au modèle Michelin	/	0,3%	1%
Longueur Initiale de la courbe basse	76 mm		
Longueur Finale de la courbe basse	79,54 mm	81,81 mm	79,07 mm
Écart de déformation par rapport au modèle Michelin	/	2,8%	0,6%
Temps de calcul	Temps réel	180 s	180 s

Tableau 4.3 – Comparaison des modèles Michelin et Masses Ressorts pour la modélisation de l'enroulement autour d'une forme indéformable.

En conclusion, malgré les temps de calcul importants de la méthode Masse-Ressort pour réaliser l'étape d'enroulement autour de la tringle, la qualité des résultats fournis par cette méthode apporte un gain important pour les utilisateurs. L'interpénétration entre les deux formes géométriques observé dans des configurations complexes (Figure 4.6) avec le modèle actuel est absent du modèle Masse-Ressort grâce à l'utilisation d'un outil de détection des interférences entre les formes.

4.4 Étape 4 : Gonflement de l'outillage

Lors de la dernière étape, une pression permet de gonfler la membrane qui constitue la partie centrale de l'outillage. La modélisation Michelin de cette étape comporte des limites qui sont :

- Le nombre d'états calculés.

La modélisation Michelin de cette étape ne permet le calcul que de trois états de déformation : l'état initial, l'état intermédiaire et l'état final (Figure 4.24). Le calcul de ces états permet d'avoir le résultat de déformation de l'ensemble des formes géométriques au cours de cette étape mais ne permet pas d'obtenir le suivi de déformation de chaque forme entre l'état initial et l'état final.

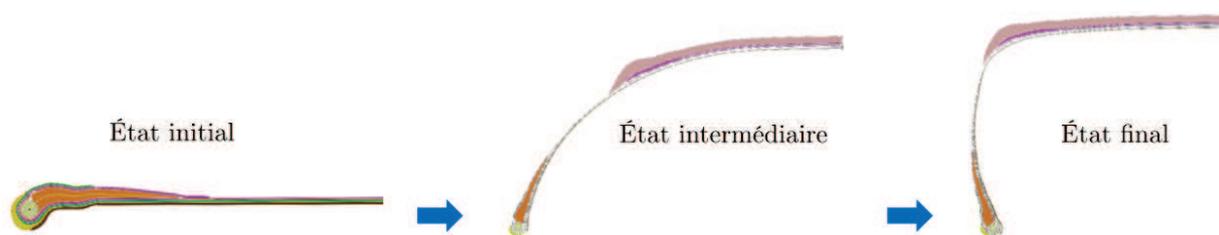


FIGURE 4.24 – États de déformation calculés par le modèle Michelin.

- L'absence de prise en compte des propriétés matériaux.

Cette limite induit des résultats incohérents sur les déformations puisque toutes les formes géométriques se déforment de la même façon.

Ces limites pénalisent les utilisateurs qui ne comprennent pas la cause de la déformation incohérente des formes géométriques qu'ils ont définies indépendamment. Les indicateurs de performance définis pour quantifier ces limites sont :

- la prise en compte des caractéristiques mécaniques pour la déformation des formes géométriques ;
- La comparaison du nombre d'états calculés entre l'étape initiale et l'étape finale

Ces indicateurs de performance sont utilisés pour comparer la maquette de gonflage de l'outillage et la déformation du pneumatique réalisée avec le modèle Michelin, le modèle Masse-Ressort et le modèle Éléments Finis.

4.4.1 Maquette de validation du gonflement de l'outillage et déformation du pneumatique

La maquette simulant cette étape du procédé de fabrication consiste à déformer des formes géométriques aux caractéristiques mécaniques différentes positionnées sur l'outillage. Le gonflement de l'outillage est modélisé entre l'état initial et l'état final du procédé de fabrication.

La maquette est composée de trois formes géométriques analysées sur la Figure 4.25. La Forme 3 est placée sur la Forme 2 qui est-elle même sur la Forme 1 positionnée sur une droite qui modélise l'outillage à l'état initial de l'étape de gonflement (Figure 4.26) et la courbe modélisant l'état final de l'étape de gonflement de l'outillage est calculé avec l'algorithme de gonflement développé dans le Chapitre 2.

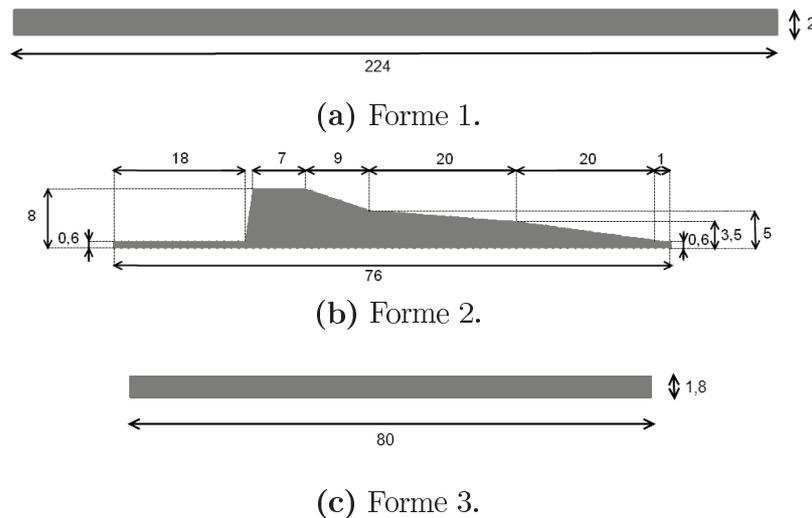


FIGURE 4.25 – Dimension des formes géométriques pour la maquette de gonflement.

Pour le modèle Masse-Ressort, la Forme 1 modélise un élément composé de caoutchouc et de fils d'acier, de masse volumique 1200 kg/m^3 , et caractérisée par des ressorts de 6000 N/m . La Forme 2 modélise un élément en caoutchouc, de masse volumique 920 kg/m^3 , et caractérisée par des ressorts de 1000 N/m . Enfin la Forme 3 modélise un élément en acier, de masse volumique 7500 kg/m^3 , et caractérisée par des ressorts de $210 \cdot 10^6 \text{ N/m}$. La masse des particules des trois formes géométriques est calculée à partir de la relation 3.7. Le maillage utilisé est contraint avec une taille de maille de 1 mm . Ces trois formes géométriques sont placées les unes par rapport aux autres afin de créer un système (Figure 4.26).

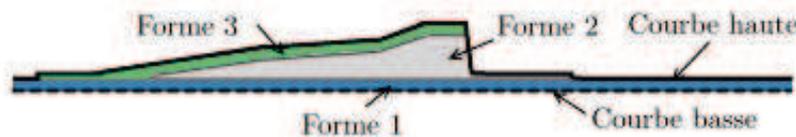


FIGURE 4.26 – Positionnement des trois formes géométriques sur l'outillage.

Pour déformer ce système entre l'état initial et l'état final de l'étape de gonflement, la modélisation géométrique du gonflement de l'outillage développée dans le Chapitre 2 est utilisée. Elle permet d'obtenir un nombre, choisi arbitrairement, de courbes guides modélisant la déformation de l'outillage de fabrication d'un pneumatique lors de la phase de gonflement.

Ces courbes permettent d'obtenir une modélisation du gonflement de l'outillage de fabrication en continu et ainsi la déformation du système des formes géométriques assemblées sur cet outillage.

Pour obtenir une modélisation en continu, les courbes guides ont toutes la même longueur et le même nombre de points. Ainsi les courbes peuvent être tracées de façon à conserver la distance curviligne entre chaque point. Dans ce cas, la trajectoire de chaque point de la courbe guide entre l'état initial et l'état final (Figure 4.27).

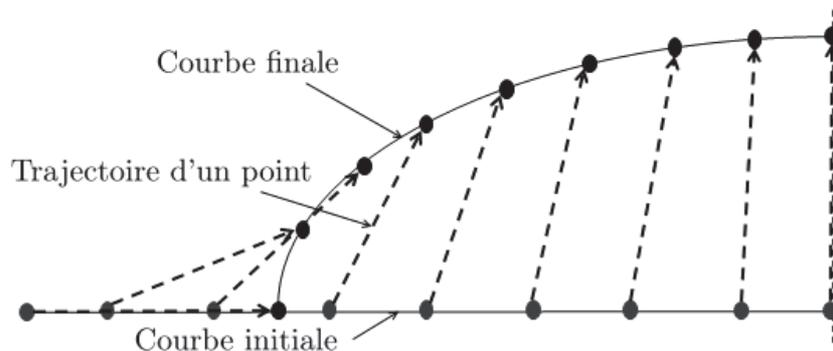


FIGURE 4.27 – Principe de modélisation en continu de la déformation de la courbe guide.

D'un point de vue technique, pour la modélisation Masse-Ressort et le modèle Éléments Finis, l'outillage n'est pas modélisé. Les courbes basses des formes géométriques sont en contact avec l'outillage et sont pilotées en déplacement (Figure 4.28) à partir des trajectoires des points de la courbe guide déterminées au préalable (Figure 4.26). Ainsi la déformation des formes en contact avec l'outillage entraîne la déformation des autres formes puisqu'elles interagissent au sein du système de l'état initial à l'état final de cette dernière étape du procédé.

Pour la modélisation Éléments Finis, un module d'Young de 6 MPa et un coefficient de Poisson 0,3 sont attribués à la Forme 1, un module d'Young 1 MPa et un coefficient de Poisson 0,5 à la Forme 2 et un module d'Young 210000 MPa et un coefficient de Poisson 0,3 à la Forme 3. Le maillage du modèle Masse-Ressort est utilisé et la courbe basse de la Forme 1 est pilotée en déplacement à partir de la définition des courbes guides comme pour le modèle Masse-Ressort.

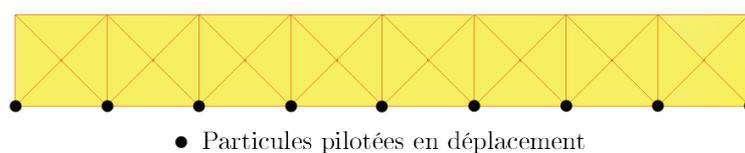


FIGURE 4.28 – Pilotage en déplacement de la courbe basse des formes géométriques

4.4.2 Résultats

Les Figures 4.29, 4.30 et 4.31 montre les états initiaux et finaux des résultats obtenus avec les modélisations Michelin, Masse-Ressort et Éléments Finis. La déformation obtenue avec le modèle Michelin montre qu'une seule partie du pneumatique déformé est modélisé. Ce résultat est un inconvénient pour la modélisation des pneumatiques asymétriques.

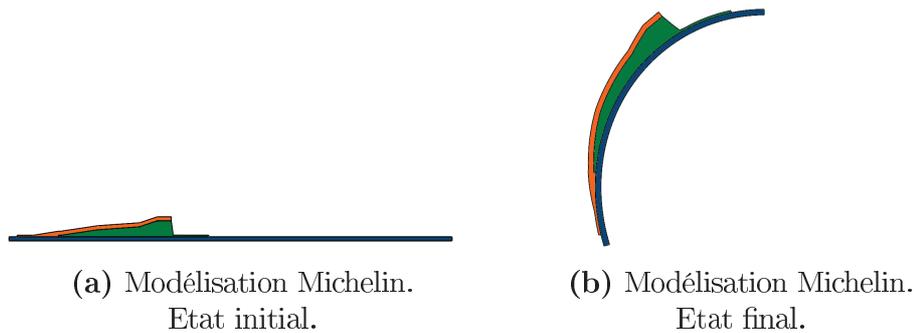


FIGURE 4.29 – Modélisation du gonflement d'un système de formes géométriques par la méthode Michelin.

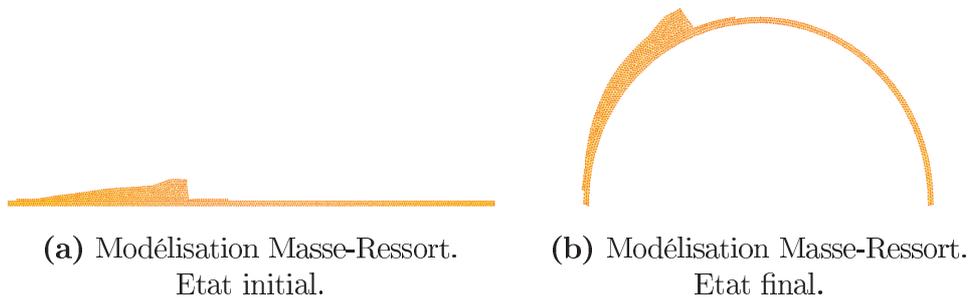


FIGURE 4.30 – Modélisation du gonflement d'un système de formes géométriques par la méthode Masse-Ressort.

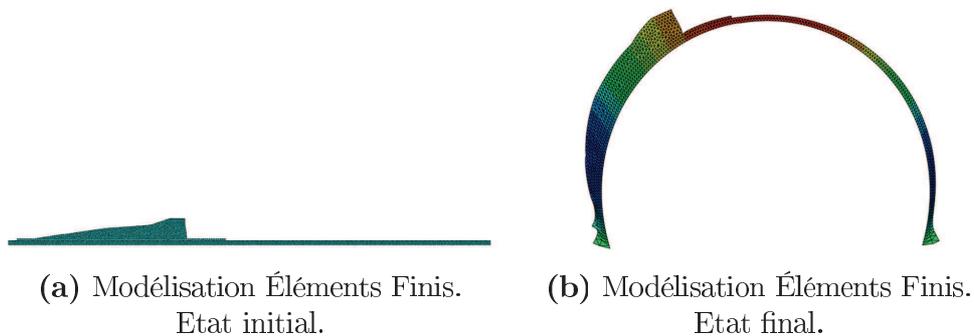


FIGURE 4.31 – Modélisation du gonflement d'un système de formes géométriques par la méthode Éléments Finis.

Pour comparer les résultats de la maquette réalisée avec les trois modèles, les indicateurs de performance sont repris dans le Tableau 4.4.

La modélisation Michelin calcule trois états de la dernière étape du procédé alors que la méthode Masse-Ressort permet à l'utilisateur de choisir le nombre d'états à calculer. Cela permet à l'utilisateur de comprendre la déformation subie par les formes géométriques positionnées sur l'outillage durant l'ensemble du procédé de fabrication.

De plus, la modélisation Michelin caractérise toutes les formes géométriques avec les mêmes caractéristiques matériaux alors que la modélisation Masse-Ressort caractérise mécaniquement et indépendamment chacune des formes. Ce type de caractérisation permet d'obtenir des calculs de déformations cohérents par rapport à la modélisation Michelin.

Enfin, la déformation du système de formes géométriques est calculée en 20 secondes avec le modèle Masse-Ressort et en 30 secondes avec le modèle par Éléments Finis. Ces temps de calculs sont acceptables pour une utilisation industrielle du modèle Masse-Ressort.

	Méthode Michelin	Méthode Masse-Ressort	Méthode Éléments Finis
Nombre d'états calculés	3	choix de l'utilisateur	
Caractérisation mécaniques des formes géométriques	1 matériau	choix de l'utilisateur	
Temps de calcul	Temps réel	20 s	30 s

Tableau 4.4 – Comparaison des modèles Michelin, Masse-Ressort et Éléments Finis pour la modélisation du gonflement.

Afin de comparer la déformation d'un système de formes géométriques obtenue pour un état intermédiaire de l'étape de gonflement de l'outillage, les déformées fournies par les trois modèles sont comparées. Pour réaliser cette comparaison, l'écart géométrique entre les courbes hautes du système, après déformation, obtenues avec chaque méthode de déformation est analysé (Figure 4.26). Les déformées des courbes hautes obtenues pour chaque système sont tracées Figure 4.32. Pour commenter l'écart géométrique entre les courbes par rapport au modèle Michelin, la Moyenne des Écarts, de l'Écart Maximum et de l'Écart Type sont calculés et comparés par rapport à la longueur de la courbe haute déformée (Tableau 4.6). Enfin, l'aire des systèmes déformés est également comparée par rapport au modèle Michelin.

Par rapport à l'écart géométrique entre les courbes déformées, la Moyenne des Écarts est des 3,9% pour le modèle Masse-Ressort et 6,2% pour le modèle Éléments finis comparés à la méthode Michelin. Cependant, l'Écart Type de 8,1% pour le modèle Masse-Ressort et de 10,2% pour le modèle Éléments finis ainsi que l'Écart Maximum supérieur à 35% pour les deux modèles sont trop importants pour valider la maquette réalisée pour cette étape de la modélisation. Cet écart géométrique s'explique par une différence de déformation importante à l'endroit où l'épaisseur du système varie (Figure 4.33).

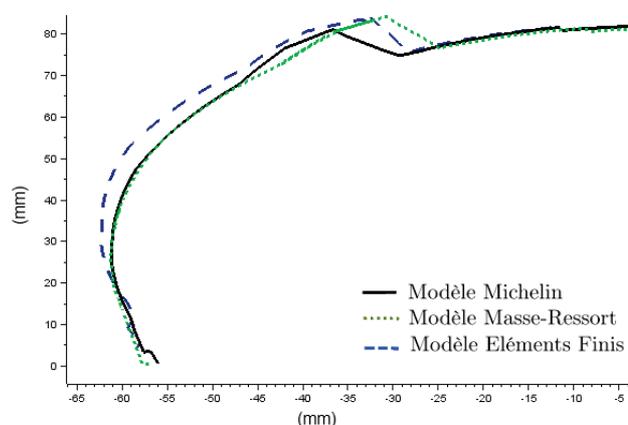


FIGURE 4.32 – Comparaison des déformés de la courbe haute entre les trois modèles.

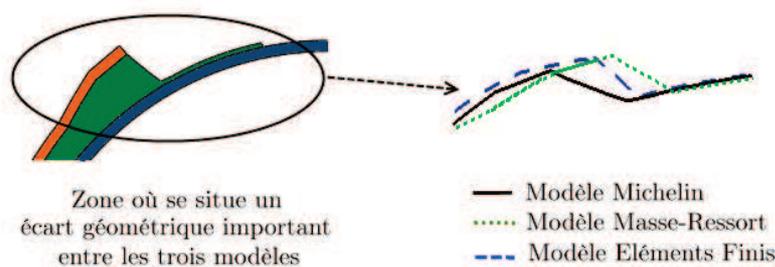


FIGURE 4.33 – Comparaison des déformées à un endroit précis de la courbe haute.

	Méthode Masse-Ressort	Méthode Éléments Finis
Écart géométrique entre les déformées des courbes hautes		
Longueur de la courbe haute déformée obtenu avec le Modèle Michelin	131,03 mm	
Écart maximum	51,02mm	47,90 mm
Écart avec la longueur de la courbe haute	38,9%	36,5%
Moyenne des Écarts	5,21 mm	8,11 mm
Écart avec la longueur de la courbe haute	3,9%	6,2%
Écart type	10.67 mm	13.33 mm
Écart avec la longueur de la courbe haute	8,1%	10,2%

Tableau 4.5 – Comparaison géométrique des courbes hautes par rapport au modèle Michelin.

Enfin, par rapport à la comparaison des aires, le modèle Masse-Ressort est proche du modèle Michelin avec 1% d'écart mais très éloignés du modèle Éléments Finis avec plus de 30% d'écart. Cet écart s'explique par la prise en compte des matériaux dans le modèle Éléments Finis. Cependant d'autres essais de gonflement incluant l'ensemble des formes géométriques composant un pneumatique doivent être réalisés pour valider cette explication.

	Méthode Michelin	Méthode Masse-Ressort	Méthode Éléments Finis
Comparaison des aires des systèmes déformés			
Aire du système après déformation	851,5 mm ²	863,35mm ²	1145,9mm ²
Écart avec le modèle Michelin	/	1,3%	34,6%

Tableau 4.6 – Comparaison des aires des systèmes déformés par rapport au modèle Michelin.

L'ensemble du pneumatique est modélisé par la méthode Masse-Ressort ce qui représente un véritable apport dans le cadre de la modélisation de pneumatique asymétrique. En effet, la modélisation Michelin ne modélise que la moitié du système déformé (Figure 4.29b).

En conclusion, la méthode Masse-Ressort fournit un véritable apport lorsque l'utilisateur a besoin de modéliser l'ensemble des étapes du procédé de fabrication et l'ensemble du système dans le cas des pneumatiques non symétriques.

5 Conclusion

Dans ce Chapitre 4, les limites de la modélisation Michelin, sont levées pour les étapes du procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson.

L'algorithme de gonflement présenté dans le Chapitre 2 est utilisé pour la modélisation de l'Étape 4, le gonflement de l'outillage. Les travaux de caractérisation mécanique et géométrique de la déformation unitaire d'une forme géométrique réalisé Chapitre 3 sont utilisés pour l'ensemble des étapes.

Au sujet de la déformation incohérente des formes géométriques, la méthode Masse-Ressort caractérise les formes géométriques en prenant en compte les caractéristiques matériaux des éléments modélisés. Ainsi, les systèmes modélisés se déforment de façon cohérente, ce qui représente un apport conséquent par rapport à la modélisation Michelin.

L'absence de prise en compte des interactions et les interpénétrations entre les formes est résolue par l'utilisation d'un outil de détection des interférences entre les formes géométriques et la modélisation de ces formes dans un système permet aux formes géométriques d'interagir entre elles. De plus, cet outil remplace les courbes supports utilisées dans la modélisation Michelin et les formes géométriques se déforment à la rencontre d'une autre forme

géométrique. La modélisation de des interactions entre les formes et l'absence d'interpénétration sont des apports importants de la modélisation Masse-Ressort.

Les temps de calcul obtenus avec le modèle Masse-Ressort ne sont pas en temps réel contrairement à la modélisation Michelin car celle-ci s'appuie sur l'utilisation d'hypothèses géométriques qui ne représentent pas tous les calculs de la déformation pour une étape. L'état initial et l'état final sont les deux seuls états obtenus alors que tous les états de la déformation d'un système de formes géométriques sont obtenus avec la modélisation Masse-Ressort. Le gain obtenu sur la connaissance des états intermédiaires s'accompagne d'une augmentation des temps de calcul. Cependant ces derniers restent inférieurs ou équivalents aux temps obtenus avec la modélisation Éléments Finis ce qui permet de valider l'utilisation industrielle de la méthode Masse-Ressort.

Enfin, la méthode Michelin ne modélise que trois états de la dernière étape du procédé de fabrication du pneumatique et que la moitié du pneumatique. Ces limites sont moins importantes par rapport à celles identifiées par les utilisateurs mais la méthode Masse-Ressort calcule la déformation de l'ensemble du pneumatique en continu entre l'étape initial et l'étape finale du procédé. Ainsi, l'utilisateur peut suivre l'évolution de la déformation de chaque forme géométrique ce qui représente un nouvel apport à la modélisation Michelin.

Conclusion et Perspectives

Les outils de simulation rapide du procédé de fabrication des pneumatiques avant cuisson sont utilisés dans le cadre de l'industrialisation du pneumatique. Un premier travail a été mené pour comprendre la modélisation Michelin actuelle ainsi que ses hypothèses. A chaque étape du procédé, les limites de cette modélisation ont été identifiées avec l'aide des utilisateurs qui nous ont également permis de les prioriser.

Lors de la fabrication, les éléments du pneumatique sont positionnés les uns par rapport aux autres sur un outillage cylindrique qui se gonfle afin d'obtenir la forme finale du pneumatique. Un modèle géométrique de gonflement, qui s'appuie sur la théorie des membranes inextensibles, est développé pour tracer des courbes guides. Ces courbes représentent chacune un état de gonflement intermédiaire de l'outillage. Ainsi, l'utilisateur peut tracer le nombre d'états qu'il souhaite entre l'état initial et l'état final du procédé de fabrication, contrairement à la modélisation Michelin qui ne permet de tracer que trois états.

Les temps de calcul du modèle géométrique de gonflement peuvent être améliorés car l'algorithme de gonflement s'appuie sur un algorithme à pas constant de discrétisation des courbes. Ce pas, validé pour une taille de membrane donnée, peut être adapté en fonction de la dimension pour optimiser le temps de calcul.

A l'avenir, lorsque cette méthode sera industrialisée, il conviendra d'élargir le domaine d'utilisation de la modélisation géométrique du gonflement de l'outillage à tous les types de pneumatique. En effet, dans nos travaux, cet outil est restreint à la modélisation de la fabrication des pneumatiques de type radiaux. Pour résoudre cette perspective, l'algorithme de gonflement développé dans nos travaux doit être adapté en modifiant les hypothèses des méthodes de tracé, pour tenir compte des tensions internes aux membranes.

De plus, le gonflement de l'outillage de fabrication entraîne la déformation des éléments du pneumatique. Le modèle Michelin modélise ces éléments par des formes géométriques sans prendre en compte leurs caractéristiques matériaux. Cette hypothèse de modélisation représente une limite puisque des déformations incohérentes sont ainsi calculées. Un état de l'art est réalisé afin d'identifier une méthode de déformation qui peut être adaptée à la modélisation de ce procédé, pour fournir un résultat en temps réel. Elle doit également prendre en compte des paramètres matériaux lors du calcul de déformation afin d'améliorer la modélisation Michelin. La méthode Masse-Ressort répond à ces besoins puisqu'elle permet de calculer la déformation d'une forme géométrique en temps réel tout en respectant des paramètres mécaniques de l'élément modélisé.

Cette méthode est adaptée dans nos travaux aux contraintes de la modélisation de la fabrication d'un pneumatique. Les travaux sur la déformation d'un système Masse-Ressort montre le lien entre la raideur des ressorts et l'élasticité du matériau modélisé et la caractérisation géométrique montre l'influence du maillage sur la qualité du calcul de déformations.

Cependant, il sera nécessaire de prendre en compte d'autres paramètres matériaux tels que le coefficient de Poisson ou l'hyperélasticité du caoutchouc lors de la caractérisation mécanique du système Masse-Ressort. Les travaux actuels ne permettent pas de le faire mais la résolution de ce verrou scientifique améliorera la qualité des résultats de déformations calculées.

De plus, l'optimisation de la répartition des ressorts en fonction des formes traitées sera un facteur d'amélioration de la qualité de la déformation. En effet, nous avons vu, lors de la caractérisation géométrique et des investigations complémentaires, que l'influence du maillage est du premier ordre sur la qualité du résultat obtenu. Une solution pour résoudre ce verrou serait de construire le maillage optimal pour chaque type de forme géométrique déformée.

Enfin, un modèle de déformation du procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson est proposé dans ces travaux. Il est basé sur le modèle géométrique de gonflement de l'outillage et le calcul de déformation unitaire d'une forme géométrique utilisant la méthode Masse-Ressort. La modélisation proposée intègre un outil de détection des interférences entre les formes géométriques pour résoudre le problème d'interpénétration de matière présent dans la modélisation Michelin.

Afin d'évaluer nos travaux, le procédé est modélisé en quatre étapes chronologiques et pour chacune d'elle, des indicateurs de performances sont définis en rapport avec les limites de la modélisation Michelin telles que l'interpénétration de matière et les déformations incohérentes des formes géométriques. Ces indicateurs permettent de comparer la modélisation Michelin, la modélisation proposée et la modélisation par Éléments Finis. En effet, les résultats des déformations obtenues avec le modèle proposé sont validés par comparaison avec la méthode Éléments Finis qui fait office de référence pour ces travaux. La méthode proposée apporte des améliorations avec la prise en compte de l'élasticité des matériaux, l'absence d'interpénétration des formes géométriques et la possibilité de modéliser tous les états du gonflement de l'outillage.

La modélisation proposée calcule tous les états de déformation d'une étape. Cet apport est significatif par rapport à la modélisation Michelin qui ne fournit que les états initial et final de chaque étape. Cette différence explique les temps de calcul plus importants de la méthode proposée par rapport à la méthode Michelin. Cependant ces temps restent acceptables pour une utilisation industrielle au vu de l'apport en termes de qualité de résultats fournis aux utilisateurs. De plus, la sélection par les utilisateurs à l'avenir des seules étapes pertinentes permettra de réduire le temps de calcul. De même, la modélisation proposée fournit des résultats plus rapides ou équivalents à ceux de la modélisation Éléments Finis.

D'un point de vue géométrique, la méthode devra évoluer vers le respect de la conser-

vation du volume des différents éléments du pneumatique lors du gonflement de l'outillage. Cette perspective technique peut-être réalisée en calculant à chaque état de gonflement l'épaisseur théorique des différents éléments.

La méthode proposée pour modéliser le procédé de fabrication du pneumatique avant cuisson traite l'ensemble des limites significatives, telles que l'interpénétration de matière entre les éléments et la prise en compte des caractéristiques matériaux lors du calcul de déformation, ce qui représente un réel apport pour les utilisateurs. Ainsi la qualité des résultats obtenus valide l'utilisation industrielle de cette méthode même si cette méthode n'est pas équivalente en termes de temps de calcul par rapport à la méthode Michelin.

Alors que le début des années 2000 a permis de proposer des outils géométriques permettant de modéliser industriellement des procédés de fabrication, il apparaît qu'aujourd'hui les nouvelles exigences de performances imposent dorénavant de modéliser aussi les comportements mécaniques induits par le procédé en temps réel. Ces travaux à l'interface entre plusieurs disciplines (CAO, Éléments Finis, calcul en temps réel) montrent qu'il est désormais possible de le faire dans des situations industrielles exigeant à la fois une grande précision et une grande rapidité de calcul.

1 Exemples de pneumatiques



(a) Pneumatique Deux Roues (VTT).



(b) Pneumatique Deux Roues (Moto).



(c) Pneumatique Tourisme.



(d) Pneumatique Poids Lourd.

FIGURE 34 – Exemples de pneumatiques (1).



(a) Pneumatique Avion.



(b) Pneumatique Agricole.



(c) Pneumatique Génie Civil.

FIGURE 35 – Exemples de pneumatiques (2).

2 Mise en donnée des tests des premiers tests de caractérisation

Dimension de la poutre	200*40			200*30			100*20		
Matériau	Acier E=210000MPa								
Force Appliquée (N)	400000			300000			200000		
Taille des éléments (mm)	1	2	5	1	2	5	1	2	5
Déformation FEM (mm)	9.49			9.5			0.475		
Déformation Masse-Ressort (mm)	9.57	8.68	9.32	8.99	9.16	8.74	0.45	0.44	0.47
Raideur des ressorts	170E6 N/m								
Erreur de Déformation (%)	0.78	8.61	1.84	7.95	3.52	5.34	3.79	6.68	0.38

Tableau 7 – Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de traction (maillage structuré)

Dimension de la poutre	200*40			200*30			100*20		
Matériau	Acier E=210000MPa								
Force Appliquée (N)	400000			300000			200000		
Taille des éléments (mm)	1	2	5	1	2	5	1	2	5
Déformation FEM (mm)	9.49			9.5			0.475		
Déformation Masse-Ressort (mm)	10.04	9.58	8.74	9.97	9.81	8.13	0.44	0.55	0.39
Raideur des ressorts	185E6 N/m								
Erreur de Déformation (%)	5.67	0.92	7.95	4.96	3.30	14.4	7.35	16.5	17.7

Tableau 8 – Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de traction (maillage libre)

Dimension de la poutre	200*40			200*30			100*20		
Matériau	Acier E=210000MPa								
Force Appliquée (N)	40000			30000			20000		
Taille des éléments (mm)	1	2	5	1	2	5	1	2	5
FEM deformation (mm)	0.95			0.95			0.475		
Déformation Masse-Ressort (mm)	0.97	0.88	0.93	0.88	0.93	0.90	0.45	0.45	0.48
Raideur des ressorts	170E6 N/m								
Erreur de Déformation (%)	2.48	6.57	5.24	5.30	1.66	7.26	6.04	5.37	2.40

Tableau 9 – Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de compression (maillage structuré)

Dimension de la poutre	200*40			200*30			100*20		
Matériau	Steel E=210000MPa								
Force Appliquée (N)	40000			30000			20000		
Taille des éléments (mm)	1	2	5	1	2	5	1	2	5
FEM deformation (mm)	0.95			0.95			0.475		
Déformation Masse-Ressort (mm)	1.05	0.98	0.91	1.02	1.05	0.83	0.45	0.57	0.41
Raideur des ressorts	185E6 N/m								
Erreur de Déformation (%)	10.9	3.38	7.74	7.06	9.38	12.7	6.04	21.1	12.7

Tableau 10 – Comparaison entre le modèle Masse-Ressort and le modèle FEM pour le test de compression (maillage libre)

Bibliographie

- [Algodoo, 2014] ALGODOO (2014). <http://phun.softsonic.fr>.
- [Allard *et al.*, 2007] ALLARD, J., COTIN, S., FAURE, F., BENSOUSSAN, P.-J., POYER, F., DURIEZ, C., DELINGUETTE, H. et GRISONI, L. (2007). Sofa an open source framework for medical simulation. *Medicine Meets Virtual Reality(MMVR15), Long Beach, USA*.
- [Baraff, 1989] BARAFF, D. (1989). Analytical Methods for Dynamic Simulation of Non-penetrating Rigid Bodies. *SIGGRAPH 89'*, 23:223–232.
- [Bathe, 1996] BATHE, K. J. (1996). *Finite Element procedures*. Prentice Hall.
- [Baudet, 2006] BAUDET, V. (2006). *Modélisation et simulation paramétrable d'objets déformables. Application aux traitements des cancers pulmonaires*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1.
- [Baudet *et al.*, 2009] BAUDET, V., BEUVE, M. et JAILLET, F. (2009). Integrating tensile parameters in hexahedral mass spring system for simulation. *International Conference on Computer Graphics, Visualisation and Computer Vision 2009*, page 8.
- [Bianchi *et al.*, 2003] BIANCHI, G., SOLENTHALER, B. et SZEKELY, G. (2003). Mesh topology for mass-springs models. *MICCAI 2003*, pages 50–58.
- [Bianchi *et al.*, 2004] BIANCHI, G., SOLENTHALER, B. et SZEKELY, G. (2004). Simultaneous topology and stiffness identification for mass-spring models based on fem reference deformaions. *MICCAI 2004*, pages 293–301.
- [Boissonnet, 1997a] BOISSONNET, M. (1997a). Algoritihme informatique Evantail. *Publication interne Michelin*.
- [Boissonnet, 1997b] BOISSONNET, M. (1997b). Algoritihme informatique Ricardo. *Publication interne Michelin*.
- [Breen *et al.*, 1994] BREEN, D., HOUSE, D. et WOZNY, M. (1994). *In Proceedings of SIGGRAPH 94, Computer Graphics Proceedings, Annual Conferene Series*, pages 365–372.
- [Casiez, 2001] CASIEZ, G. (2001). *Mémoire*, page 31.

- [Chendeb, 2007] CHENDEB, S. (2007). *Chirurgie Virtuelle, Modélisation temps réel des tissus mous, Interactions et système haptique dédié*. Thèse de doctorat, Mines Paris PARISTECH.
- [Cheutet et al., 2005] CHEUTET, V., CATALANO, C. et PERNOT, J. (2005). 3D sketching for aesthetic design using fully Free-Form Deformation feature. *Computer and Graphics*, 29:916–930.
- [Coquillard, 1990] COQUILLARD, S. (1990). Extended free-form deformation :a sculpturing tool for 3d geometric modelling. *Computer Graphics*, 24(4):187–196.
- [Cotin et al., 1999] COTIN, S., DELINGUETTE, H. et AYACHE, N. (1999). Real-time elastic deformations of soft tissues for surgery simulation. *IEEE Transactions on Visualisation and Computer Graphics*, 5(1):62–73.
- [Cotin et al., 2000] COTIN, S., DELINGUETTE, H. et AYACHE, N. (2000). A hybrid elastic model for real-time cutting, deformations, and force feedback for surgery training and simulation. *The Visual Computer*, 16:437–452.
- [Desbrun et al., 1999] DESBRUN, M., SCHRODER, P. et BARR, A. (1999). Interactive animation of structured deformable objects. *Proceedings of the graphics interface conference*, pages 1–8.
- [Flechon, 2011] FLECHON, E. (2011). Simulation d'objets déformables. *Rapport de stage Recherche Master 2 Professionnel*, page 43.
- [France et al., 2002] FRANCE, L., LENOIR, J., MESEURE, P. et CHAILLOU, C. (2002). Simulation of a minimally invasive surgery of intestines. *Proc IEEE Virtual Reality Int. Conf (VRIC) Laval*, page 7p.
- [Giannini, 2009] GIANNINI, S. (2009). page 13.
- [Gibson et Mirtich, 1997] GIBSON, S. et MIRTICH, B. (1997). A Survey of Deformable Modeling in Computer Graphics. *Mitsubishi Electric Research Laboratories*, page 35p.
- [Grosberg, 1966] GROSBERG, P. (1966). *Textile Research Journal*, 36(3):205–211.
- [Grosberg et Kedia, 1966] GROSBERG, P. et KEDIA, S. (1966). *Textile Research Journal*, 36(1):71–79.
- [Gudukbay et al., 1997] GUDUKBAY, U., OYGUC, B. et TOKAD, Y. (1997). A spring force formulation for elastically deformable models. *Computer and Graphics*, 21(3):335–346.
- [Guillet, 1999] GUILLET, S. (1999). *Modification et construction de formes gauches soumises à des contraintes de conception*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.

- [Hahn, 1988] HAHN, J. K. (1988). *Computer Graphics*, 22 (4):299–308.
- [Hutchinson *et al.*, 1996] HUTCHINSON, D., PRESTON, M. et HEWITT, T. (1996). Adaptive Refinement for Mass-Spring simulations. *Proceedings of Seventh Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, 26:31–45.
- [James et Pai, 1999] JAMES, D. L. et PAI, D. K. (1999). Artdefo : Accurate real time deformable objects. *Proceedings of ACM SIGGRAPH 99 Computer Graphics*, pages 65–72.
- [Jansson et Vergeest, 2002] JANSSON, J. et VERGEEST, J. S. M. (2002). *Computer Aided Design*, 32 (12):913–928.
- [Jimenez *et al.*, 2001] JIMENEZ, P., THOMAS, F. et TORRAS, C. (2001). 3d collision detection : A survey. *Computers and Graphics*, 25(2):269–285.
- [Kawabata *et al.*, 1973] KAWABATA, S., NIWA, M. et KWAI, H. (1973). *The journal of the textile institute*, (2):62.
- [Lin et Gottschalk, 1998] LIN, M. et GOTTSCHALK, S. (1998). Collision detection between geometric models : a survey. *In Proc. of IMA Conference on Mathematics of Surfaces*, pages 37–56.
- [Lloyd *et al.*, 2007] LLOYD, B., SZEKELY, G. et HARDERS, M. (2007). Identification of spring parameters for deformable object simulation. *IEEE Trans. On Visualization and Computer Graphics*, 13:1081–1094.
- [Madera, 2011] MADERA, F. (2011). *Abstraction & Application*, 5:7–18.
- [Meier *et al.*, 2005] MEIER, U., LOPEZ, O. et MONSERRAT, C. (2005). Real-time deformable models for surgery simulation : a survey. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 77:183–197.
- [Mendoza *et al.*, 2003] MENDOZA, C., C. LAUGIER, C., GALIZZI, O. et FAURE, F. (2003). Simulating cutting in surgery applications using haptics and finite element models. *Virtual Reality, Proceedings, IEEE*, pages 295–296.
- [Michelin, 2014] MICHELIN (2014). <http://toutsurlepneu.michelin.com/le-pneu-cet-inconnu-la-fabrication-du-pneu>.
- [Miller, 1988] MILLER, G. (1988). The Motion Dynamics of Snakes and Worms. *Computer Graphics*, 22(4):169–178.
- [Natsupakpong et Cenk Cevusoglu, 2010] NATSUPAKPONG, S. et CENK CEVUSOGLU, M. (2010). Determination of elasticity parameters in lumped element (mass-spring) models of deformable objects. *Graphical models*, page XX.

- [Nienhuys et Van der Stappen, 2000] NIENHUYS, H. et Van der STAPPEN, A. (2000). Combining finite element deformation with cutting for surgery simulations. *Eurographics.00(short presentations)*, pages 43–51.
- [Niroomandi et al., 2008] NIROOMANDI, S., ALFARO, I. et CHINESTA, F. (2008). Real-Time deformable models of non-linear tissues by model reduction techniques. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 91:223–231.
- [Olofson, 2013] OLOFSON, B. (2013). *The journal of the textile institute*, 58(6):221.
- [Paccini, 2005] PACCINI, A. (2005). *Développement d'un modèle par éléments finis 3D appliqué à la simulation d'opérations chirurgicales des tissus mous*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- [Pernot, 2004] PERNOT, J.-P. (2004). *Fully Free Form Deformation Features for Aesthetic and Engineering Designs*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [Picinbono et al., 2002] PICINBONO, G., DELINGETTE, H. et AYACHE, N. (2002). Modèle déformable élastique non linéaire pour la simulation de chirurgie en temps réel. *C.R.Biologies 325*, pages 335–344.
- [Pierce, 1930] PIERCE, F. (1930). *The journal of the textile institute*, 46 (5):45–96.
- [Porcher Nedel et Thalmann, 2000] PORCHER NEDEL, L. et THALMANN, D. (2000). Anatomic modeling of deformable human bodies. *The Visual Computer*, 16:306–321.
- [Postle et al., 1988] POSTLE, R., CARNABY, G. et JONG, S. (1988).
- [Provot, 1996] PROVOT, X. (1996). Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. *Graphics Interface*, 4:147–154.
- [Rappaz et al., 1998] RAPPAZ, M., BELLET, M. et DEVILLE, M. (1998). *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*. PPUR Presse Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [Realf, 1994] REALF, M. (1994). *Textile Research Journal*, 64 (3):135–141.
- [Realf et al., 1997] REALF, M., BOYCE, M. et BACKER, S. (1997). *Textile Research Journal*, 67(6):445–459.
- [Sederberg et Greenwood, 1992] SEDERBERG, T. et GREENWOOD, E. (1992). A physically based approach to 2D shape blending. *Comput. Graphics*, 26:25–34.
- [Sederberg et Parry, 1986] SEDERBERG, T. W. et PARRY, S. R. (1986). Free-Form Deformation of Solid Geometric Models. *SIGGRAPH*, 20(4):151–160.

- [Singh et Kokkevis, 2000] SINGH, K. et KOKKEVIS, E. (2000). Skinning Characters using Surface Oriented Free Form Deformations. *Graphics Interface'00*, pages 35–42.
- [Skelton, 1976] SKELTON, J. (1976). *Textile Research Journal*, 67:862–869.
- [Szekely et al., 1998] SZEKELY, S., BRECHBUHLER, C., HUTTER, R., RHOMBERG, A. et SCHMID, P. (1998). Modelling of soft tissue deformation for laparoscopic surgery simulation. *MICCAI 1998, Medical Image Computing Computer Assisted Intervention*, pages 550–561.
- [Tang et al., 2006] TANG, Y., HOU, A. et HUI, K. (2006). Comparison of FEM and BEM for interactive object simulation. *Computer Aided Design*, 38:874–886.
- [Tang et Hui, 2009] TANG, Y.-M. et HUI, K.-C. (2009). Simulation tendon motion with axial mass-spring system. *Computer & Graphics*, 33:162–172.
- [Terzopoulos et Fleisher, 1988] TERZOPOULOS, D. et FLEISHER, K. (1988). Deformable models. *The Visual Computer*, 4:306–331.
- [Terzopoulos et al., 1987] TERZOPOULOS, D., PLATT, J. et BARR, A. (1987). Elastically Deformable Models. *Computer Graphics*, 21(4):205–214.
- [Terzopoulos et al., 1991] TERZOPOULOS, D., SZEKELY, G. et HARDERS, M. (1991). Heating and melting deformable models. *The journal of Visualization and Computer Animation*, 2:68–73.
- [Terzopoulos et Waters, 1990] TERZOPOULOS, D. et WATERS, K. (1990). Physically-Based Facial Modeling, Analysis, and Animation. *Journal of Visualization and Computer Animation*, 1:73–80.
- [Trouvain et al., 2013] TROUVAIN, G., GAGNOL, V., DUC, E. et SANCHO, J.-F. (2013). Fast deformation method for a 2d shape. *XXI Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, France*, page 8.
- [Van Gelder, 1998] VAN GELDER, A. (1998). Approximate simulation of elastic membranes by triangulated spring meshes. *Journal of Graphics Tools*, 3:21–42.
- [Zerbato et al., 2007] ZERBATO, D., GALVAN, S. et FIORINI, P. (2007). Calibration of mass spring models for organ simulations. *Intelligent Robots and Systems*, pages 370–375.