



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation des effets non linéaires et multidimensionnels d'un moteur thermoacoustique : influence d'une charge résistive

Lin Ma

► **To cite this version:**

Lin Ma. Modélisation et simulation des effets non linéaires et multidimensionnels d'un moteur thermoacoustique : influence d'une charge résistive. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066430 . tel-01165023

**HAL Id: tel-01165023**

**<https://theses.hal.science/tel-01165023v1>**

Submitted on 18 Jun 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Université Pierre et Marie Curie

Ecole doctorale de Sciences Mécaniques, Acoustique, Electronique & Robotique de Paris

*Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur*

## **Modélisation et simulation des effets non linéaires et multidimensionnels d'un moteur thermoacoustique : influence d'une charge résistive.**

Par Lin MA

Thèse de doctorat, spécialité Mécanique des Fluides

Dirigée par Diana BALTEAN-CARLES, Catherine WEISMAN et Ivan DELBENDE

Présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2014

Devant le jury composé de :

Mme	Marie Catherine CHARRIER-MOJTABI,	Professeur de l'Université Paul Sabatier	(Rapporteur)
M.	Pierrick LOTTON,	Directeur de recherche du LAUM	(Rapporteur)
M.	Pierre-Yves LAGREE,	Directeur de recherche de l'IJLRA	(Examineur)
M.	David MARX,	Chargé de recherche de l'Institut PPRIME	(Examineur)
M.	Thierry SCHULLER,	Professeur de l'ECP	(Examineur)
M.	Ivan DELBENDE,	Maître de conférences de l'UPMC	(Directeur de thèse)
Mme	Diana BALTEAN-CARLES,	Maître de conférences de l'UPMC	(Co-directrice de thèse)
Mme	Catherine WEISMAN,	Maître de conférences de l'UPMC	(Co-directrice de thèse)
M.	Luc BAUWENS,	Professeur de l'Université de Calgary	(Invité)



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>12</b>
1.1	Historique de la thermoacoustique . . . . .	12
1.2	Moteur thermoacoustique . . . . .	15
1.3	Effets multidimensionnels . . . . .	15
1.4	Originalité des travaux de thèse . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Modélisation par développement asymptotique raccordé</b>	<b>19</b>
2.1	Systèmes et échelles . . . . .	20
2.1.1	Dispositif expérimental 1 . . . . .	20
2.1.2	Dispositif expérimental 2 . . . . .	21
2.1.3	Echelles et ordre de grandeurs . . . . .	22
2.1.4	Géométrie du système modélisé . . . . .	25
2.1.5	Echelles de référence et adimensionnement . . . . .	25
2.2	Résonateur . . . . .	26
2.2.1	Equations physiques 1D . . . . .	27
2.2.2	Equations adimensionnées . . . . .	28
2.2.3	Développements asymptotiques . . . . .	29
2.2.4	Résolution des équations de l'acoustique linéaire . . . . .	30
2.2.5	Conditions aux extrémités du tube . . . . .	31
2.3	Cellule active . . . . .	35
2.3.1	Equations physiques . . . . .	36

---

2.3.2	Echelles et grandeurs de référence . . . . .	37
2.3.3	Equations adimensionnées . . . . .	38
2.3.4	Développements asymptotiques . . . . .	39
2.3.5	Conditions aux limites . . . . .	41
2.3.6	Conditions initiales . . . . .	44
2.4	Récapitulatif du modèle complet . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Méthode numérique</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Discrétisation temporelle . . . . .	49
3.3	Discrétisation spatiale . . . . .	53
3.4	Méthodes de résolution . . . . .	55
3.4.1	Résolution par ADI . . . . .	55
3.4.2	Méthode Multigrille . . . . .	56
3.5	Algorithme-Mise en oeuvre . . . . .	57
3.6	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Saturation d'un moteur thermoacoustique idéalisé non chargé</b>	<b>60</b>
4.1	Présentation du dispositif et choix de paramètres . . . . .	60
4.1.1	Définition du cas physique simulé . . . . .	61
4.1.2	Conditions physiques du cas de simulation . . . . .	63
4.1.3	Paramètres numériques de la simulation . . . . .	64
4.2	Résultats numériques . . . . .	66
4.2.1	Initialisation . . . . .	66
4.2.2	Amplification initiale . . . . .	68
4.2.3	Obtention du régime périodique . . . . .	73
4.3	Conclusions . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Stabilité d'un moteur thermoacoustique chargé</b>	<b>82</b>

---

5.1	Etat de l'art . . . . .	83
5.2	Etude de stabilité à partir des résultats numériques . . . . .	85
5.2.1	Traitement numérique du signal en temps . . . . .	86
5.2.2	Résultats . . . . .	94
5.3	Etude de stabilité à partir de la théorie linéaire . . . . .	101
5.3.1	Equations de Rott . . . . .	102
5.3.2	Modèle de canal incluant une région avec gradient de température constant . . . . .	105
5.4	Comparaison entre résultats numériques et théorie linéaire . . . . .	111
5.5	Comparaison entre résultats numérique et expérimentaux . . . . .	112
5.6	Conclusion . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Analyse du régime périodique</b>	<b>121</b>
6.1	Introduction . . . . .	121
6.2	Cas de simulation . . . . .	122
6.3	Obtention de la saturation . . . . .	124
6.4	Effets nonlinéaires hydrodynamiques locaux . . . . .	130
6.4.1	Introduction . . . . .	130
6.4.2	Faible $Dr = 3.4\%$ . . . . .	134
6.4.3	Fort $Dr = 15\%$ . . . . .	145
6.5	Conclusion . . . . .	156
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>157</b>
7.1	Conclusion . . . . .	157
7.2	Perspectives . . . . .	159
<b>A</b>	<b>Stabilité d'un moteur thermoacoustique chargé</b>	<b>161</b>
A.1	Canal ouvert/fermé . . . . .	161
A.2	Canal fermé des deux côtés . . . . .	166

---

A.3 Tube dissipatif chargé . . . . . 169

# Table des figures

1.1	.....	13
1.2	Expérience de Carter. ....	14
2.1	Dispositif expérimental 1 (Limsi). Le cadre jaune indique l'emplacement du moteur. ....	21
2.2	Dispositif expérimental 2. ....	22
2.3	Géométrie du système idéalisé. ....	25
2.4	Schéma du résonateur. ....	27
2.5	Modélisation du résonateur. ....	31
2.6	Evolution des variables de Riemann sur les caractéristiques à gauche de la cellule active. ....	32
2.7	Evolution des variables de Riemann sur les caractéristiques à droite de la cellule active. ....	34
2.8	Schéma de la cellule active. ....	37
3.1	Schéma général présentant la discrétisation et le maillage. Positions de la température, de la densité et de la pression (rouge), de la vitesse horizontale (vert) ainsi que la vitesse verticale (bleu). ....	54
3.2	Fonction de phase. Le domaine solide (gris) est caractérisé par $PH=0$ , et le domaine fluide (blanc) est caractérisé par $PH=1$ . ....	55
3.3	Principe de la méthode du multigrille, V-cycle. ....	57



4.1	Représentation 2D du dispositif expérimental du LIMSIS. . . . .	61
4.2	Domaine de simulation. Config. LIMSIS. . . . .	63
4.3	Variation temporelle de la température adimensionnée en un point situé au milieu de l'extrémité gauche des plaques du stack. Config. LIMSIS, $T_h = 1.2$ .	67
4.4	Champs de température stationnaire dans toute la cellule active. Config. LIMSIS, $T_h = 1.2$ . . . . .	67
4.5	Zoom sur la distance entre échangeur chaud/stack. Config. LIMSIS, $T_h = 1.2$ .	68
4.6	Profil de température entre les échangeurs. (Trait rouge) : stack et échangeurs collés ; (Trait bleu en pointillé) : stack et échangeurs séparés. Config. LIMSIS, $T_h = 1.2$ . . . . .	69
4.7	Evolution initiale de la pression acoustique au niveau de la cellule active $\tilde{p}'$ en fonction du temps $\tilde{t}$ . Config. LIMSIS. $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K . . . .	69
4.8	Variation temporelle de la pression acoustique $\tilde{p}'$ . Config. LIMSIS, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. . . . .	70
4.9	Zoom sur le signal temporel initial. Config. LIMSIS, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K.	70
4.10	Variation temporelle du logarithme de la pression acoustique au niveau de la cellule active $\tilde{p}'$ . Config. LIMSIS, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. . . . .	71
4.11	Variation temporelle de la pression acoustique $\tilde{p}'$ au niveau de la cellule active pour trois pas de temps différents. 1. $dt = 0.01$ ; 2. $dt = 0.003$ ; 3. $dt = 0.0003$ . Config. LIMSIS, $\tilde{T}_h = 352$ K, maillage $2048 \times 32$ . . . . .	71
4.12	Variation temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active $\tilde{p}'$ pour trois maillages différents. Config. LIMSIS, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K.	72
4.13	Zoom sur la fin du signal pour trois maillages différents. Config. LIMSIS, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. . . . .	72
4.14	Variation temporelle du logarithme de la pression acoustique $\tilde{p}'$ au niveau de la cellule active. Config. LIMSIS, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. . . . .	73
4.15	Variation temporelle de la pression acoustique $\tilde{p}'$ au niveau de la cellule active. Config. LIMSIS, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. . . . .	74

4.16	Variation temporelle du nombre CFL. Config. LIMSI, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. Maillage : $2048 \times 32$ . . . . .	75
4.17	FFT sur le signal de la pression acoustique $\tilde{p}'$ . Config. LIMSI, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. . . . .	76
4.18	(Gauche) : Evolution temporelle de la pression acoustique $\tilde{p}'$ au niveau de la cellule active ; (Droite) : Zoom sur le signal temporel à la fin du calcul. Config. LIMSI, $Z = -0.9985$ , $\tilde{T}_h = 298.86$ K. Maillage : $2048 \times 32$ . . . . .	77
4.19	Reconstruction du champ acoustique 1D instantané, $\tilde{p}'(\tilde{x})$ , $\tilde{u}$ , dans tout le résonateur à un instant quelconque dans le régime périodique. Config. LIMSI, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. Maillage : $2048 \times 32$ . . . . .	78
4.20	Zoom sur le signal temporel à la fin du calcul montrant $\tilde{p}'$ au niveau de la cellule active, $\tilde{u}_L$ , $\tilde{u}_R$ . Config. LIMSI, $Z = -0.96$ , $\tilde{T}_h = 352$ K. . . . .	79
5.1	Variation temporelle de la pression acoustique $p'(t)$ en échelle semi-logarithmique. Config. Limsi, $Z = -0.96$ . . . . .	87
5.2	Variation temporelle de la pression acoustique $p'(t)$ . Config. LIMSI. $Z =$ $-0.96$ , $T_h = 1.19$ . . . . .	88
5.3	Evolution de $\sigma$ en fonction de $T_h$ pour le mode le plus instable. Config. Limsi, $Z = -0.96$ et $\hat{l}_L = 0.0893$ . . . . .	93
5.4	Température critique $T_{h_{crt}}$ nécessaire au déclenchement de l'instabilité thermoacoustique en fonction de $Z$ . Config. LIMSI. $\tilde{P}_m = 10$ bar, $\hat{l}_L =$ $0.0893$ et $L_{xs} = h$ . . . . .	96
5.5	Variation de $\omega/\omega_{ref}$ pour les modes critiques en fonction de $Z$ . Config. LIMSI. $\tilde{P}_m = 10bar$ , $\hat{l}_L = 0.0893$ et $L_{xs} = h$ . . . . .	96
5.6	Courbe marginale pour $\tilde{P}_m = 4.4$ bar et $\tilde{P}_m = 1.5$ bar en échelle semi- logarithmique. Config. Atchley. . . . .	98
5.7	Evolution de la fréquence angulaire en fonction de $Z$ pour $\tilde{P}_m = 4.4$ bar et $\tilde{P}_m = 1.5$ bar. Config. Atchley. . . . .	99

5.8	Effets de la distance entre stack et échangeurs sur le seuil de stabilité. Config. LIMSI. $\hat{l}_L = 0.0893$ et $\tilde{P}_m = 10$ bar. . . . .	100
5.9	Evolution du taux de croissance $\sigma$ en fonction de la position du stack $\hat{l}_L$ . $Z = -0.96$ et $T_h = 1.2$ sont fixées ici. . . . .	100
5.10	Variation de la température critique en fonction de la position du stack. Config. LIMSI. $Z = -0.85$ et $Z = 0.79$ . . . . .	101
5.11	Canal incluant une région avec gradient de température constant. . . . .	105
5.12	Config. LIMSI. $Z = 0.887$ . . . . .	110
5.13	Influence de $\tilde{L}_{st}$ sur le gradient de température critique de l'instabilité de déclenchement thermoacoustique. Config. LIMSI. (en haut) : $-1 < Z <$ $-0.40$ ; (en bas) $0.40 < Z < 1$ . . . . .	116
5.14	Evolution de la fréquence angulaire correspondante aux situations margi- nales. Config. LIMSI. (en haut) : $-1 < Z < -0.4$ ; (en bas) $0.4 < Z < 1$ . . . . .	117
5.15	Evolution de la température critique en fonction de $Z$ . (en haut) : $-1 <$ $Z < -0.40$ ; (en bas) $0.40 < Z < 1$ . Simulation numérique et théorie linéaire, Config. LIMSI . . . . .	118
5.16	Evolution de la fréquence angulaire en fonction de $Z$ . (en haut) : $-1 <$ $Z < -0.4$ ; (en bas) $0.4 < Z < 1$ . Ces valeurs de référence sont calculées par la théorie linéaire en imposant $T_h = T_c = 1$ . Simulation numérique et théorie linéaire, Config. LIMSI . . . . .	119
5.17	Diagramme de stabilité de [10], dispositif expérimental 2. Courbes margi- nales des modes 1 et 2. . . . .	120
5.18	Evolution de la résistance $\tilde{R}$ utilisée dans les simulations numériques per- mettant de reproduire les résultats expérimentaux de Atchley [10], en fonc- tion de $\tilde{P}_m$ . . . . .	120
6.1	Evolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active pour les cas 1, 2, 3 du tableau 6.1. Config. LIMSI. La température $\tilde{T}_h$ augmente du cas 1 au cas 3. . . . .	125

6.2	(Haut) : Evolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active. (a) cas 8 et (b) cas 9 du tableau 6.2; (Bas) : Agrandi de la fin de calcul correspondant. Config. Atchley. . . . .	127
6.3	Evolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active, cas 4-5-6 (variation de la distance stack/échangeurs). Config. LIMSI.	128
6.4	Formation des recirculations au voisinage d'une plaque du stack ou des échangeurs pour le drive ratio faible en quatre instants régulièrement répartis sur la période. . . . .	134
6.5	Evolution temporelle de l'accélération et de la vitesse horizontale adimensionnée à l'entrée de cellule active. Config. Atchley, $\tilde{L}_{xs} = 0.78\text{mm}$ , $\tilde{T}_h = 352\text{K}$ , $\tilde{P}_m = 4.4\text{bar}$ . Maillage : $4096 \times 64$ . . . . .	135
6.6	Code couleurs du champ de vorticité et du champ de température sans dimension. . . . .	135
6.7	Champ instantané de vorticité à la sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique, instants 1-10. Config. Atchley. $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 10 mm. Code couleurs de la figure 6.6.	137
6.8	Champ instantané de vorticité à la sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique, instants 11-20. Config. Atchley. $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 10 mm. Code couleurs de la figure 6.6. . . . .	138
6.9	Champ instantané de vitesse (vecteurs) et de vorticité (couleurs) aux extrémités froides des plaques du stack. Expérience de Blanc-Benon et al. [22]	139
6.10	Champ instantané de vorticité entre stack et échangeur froid pendant une période acoustique, instants 1-10. Config. Atchley. $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 6 mm. Code couleurs de la figure 6.6. .	140

6.11	Champ instantané de vorticité entre stack et échangeur froid pendant une période acoustique, instants 11-20. Config. Atchley. $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 6 mm. Code couleurs de la figure 6.6. . . . .	141
6.12	Champ instantané de température au niveau du stack et des échangeurs pendant un cycle acoustique. Config. Atchley. $Dr = 3.4\%$ . Code couleurs de la figure 6.6. . . . .	143
6.13	(Centre) : Variation temporelle de la vitesse $u_L$ et accélération correspondante pendant un cycle acoustique ; (Gauche) : Lignes de courant aux instants choisis (10, 11, 12, 13). (Droite) : Champ instantané de température entre échangeur chaud et le stack. Config. Atchley. $Dr = 3.4\%$ . Code couleurs de la figure 6.6. . . . .	144
6.14	Evolution temporelle de l'accélération et de la vitesse horizontale à l'entrée de cellule active. Config. Atchley, $\tilde{L}_{xs} = 0.78\text{mm}$ , $\tilde{T}_h = 552\text{K}$ , $\tilde{P}_m = 4.4\text{bar}$ . Maillage : $2048 \times 32$ . . . . .	145
6.15	Code couleurs du champ de vorticité et du champ de température sans dimension. . . . .	146
6.16	Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 10 mm. Code couleurs de la figure 6.15. . . . .	147
6.17	Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 12 mm. Code couleurs de la figure 6.15. . . . .	148
6.18	Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en entrée de l'échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 12 mm.	149

6.19	Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en entrée de l'échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 12 mm. Code couleurs de la figure 6.15. . . . .	150
6.20	Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) entre le stack et l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15. . . . .	151
6.21	Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) entre le stack et l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15. . . . .	152
6.22	Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) entre le stack et l'échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15. . . . .	153
6.23	Champ de vorticité instantanée (haut) et de température (bas) entre le stack et l'échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15. . . . .	154
6.24	Champ instantané de température et lignes de courant entre l'échangeur chaud et le stack, instants 10 et 11. Config. Atchley. $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 11 mm. . . . .	155
A.1	Tube soumis à une discontinuité de température [75]. . . . .	161
A.2	Tube fermé des deux côtés et soumis à une discontinuité de température. . . . .	166
A.3	Tube chargé et soumis à une discontinuité de température. . . . .	169

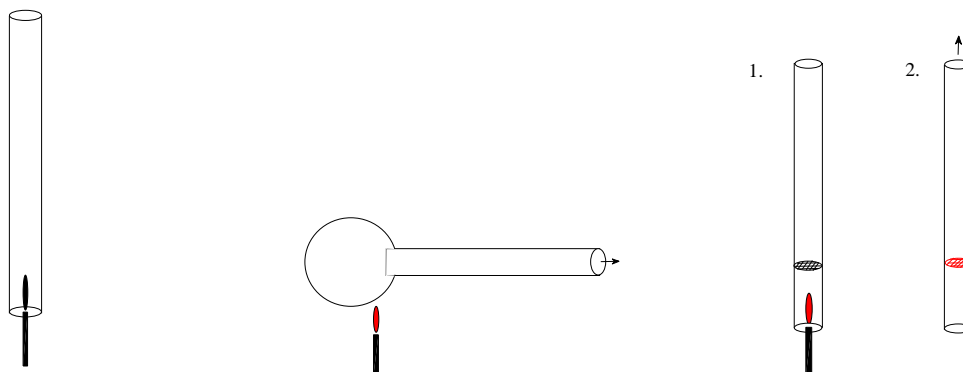
# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Historique de la thermoacoustique

L'effet thermoacoustique est un phénomène qui concerne la conversion de l'énergie acoustique en énergie thermique ou inversement. Les manifestations de l'effet thermoacoustique sont connues depuis longtemps. L'émission du son par un tube chauffé a été observée depuis des siècles par les souffleurs de verre. L'oscillation acoustique excitée par la chaleur a été étudiée pour la première fois par Byron Higgins en 1777 [21], qui a observé que le son peut être généré quand on déplace une flamme dans un tube large et ouvert aux deux extrémités (voir figure 1.1a). En 1850, la première étude quantitative sur le phénomène thermoacoustique a été réalisée par Sondhauss [34], qui a mené les expériences dans un tube ouvert à une extrémité et fermé à l'autre extrémité par un bulbe en verre (voir figure 1.1b). Une fois le bulbe chauffé, un son est créé, et Sondhauss a observé que sa fréquence dépend de la dimension du tube (diamètre, longueur, volume). Ce dispositif expérimental est appelé aujourd'hui le tube de Sondhauss. Presque en même temps, Rijke [33] a réalisé une autre expérience avec un tube vertical ouvert aux deux extrémités. Une grille est placée à l'intérieur du tube, et cette grille est chauffée avec une flamme puis la flamme est retirée (voir figure 1.1c). Rijke a observé la génération du son dans le tube, et a noté que la fréquence du son dépend de la longueur du tube. Les oscillations dans

le tube de Rijke ont été largement étudiées depuis plus de 100 ans, notamment pour leur importance dans le domaine de la combustion.



(a) Expérience de Higgins.

(b) Tube de Sondhauss.

(c) Tube de Rijke.

FIGURE 1.1

En 1887, Lord Rayleigh a expliqué qualitativement le phénomène thermoacoustique dans son livre *The Theory of Sound* [74] : si un gaz qui oscille absorbe de la chaleur pendant la phase de compression et cède de la chaleur pendant la phase de détente, alors l'oscillation est amplifiée. Au contraire, si le gaz qui oscille absorbe de la chaleur pendant la phase de détente, et cède de la chaleur pendant la phase de compression, alors l'oscillation est amortie. Le critère de Rayleigh conditionne donc l'apparition de l'instabilité thermoacoustique à la présence d'un déphasage entre les fluctuations de pression et celles de température. Il permet de rendre compte du fonctionnement du tube de Sondhauss.

En 1948, Taconis [95] a observé l'apparition de fortes oscillations spontanées lorsque l'on plonge un tube ouvert étroit dans un récipient contenant de l'hélium liquide à 4 K. La différence de température entre l'extrémité du tube à température ambiante et celle en contact avec le liquide cryogénique est à l'origine de ces oscillations spontanées de nature thermoacoustique, potentiellement nuisibles.

Kramers [55] a fait la première tentative de modélisation de l'oscillation thermoacoustique à l'aide de l'approximation de couche limite, afin d'expliquer les oscillations de Taconis. En s'inspirant du calcul théorique de Kirchhoff [54] pour un tube large, Kramers



a calculé pour la première fois la température de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique, mais le résultat était largement surestimé par rapport à l'observation de Taconis. Rott a poursuivi ce travail dans les années 1960. Il a développé et établi le modèle linéaire classique de la thermoacoustique [75, 76], basé sur l'approximation acoustique et celle de couche limite. La théorie linéaire de Rott permet d'expliquer quantitativement le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique : son calcul est en bon accord avec les résultats expérimentaux [47, 115, 116]. Ce travail marque le début de la recherche en thermoacoustique. Entre 1960 et 1980, une série d'articles est publiée par Rott et al. [68, 78, 79, 80, 81, 120] sur la théorie linéaire complète.

Au début des années 60, Carter [37] a modifié le tube de Sondhauss en y insérant un empilement de plaques de métal (stack) (voir figure 1.2). La puissance délivrée par

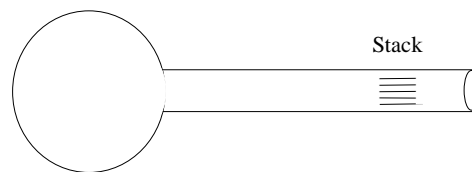


FIGURE 1.2 – Expérience de Carter.

le tube de Sondhauss a ainsi pu être améliorée [37] : à partir d'une puissance calorifique fournie de 600 W par la source de chaleur, ce type de moteur thermoacoustique permet de produire 27 W de puissance acoustique. Le stack est le siège des processus de transfert et de conversion de chaleur par effet thermoacoustique, il est le cœur des systèmes thermoacoustiques modernes. Les travaux de Rott ont été poursuivis et étendus par Wheatley et Swift [107, 108] (dans les années 1980) et par Swift dans les années 1990 [12, 92], qui ont

construit respectivement la première pompe à chaleur thermoacoustique, et le premier moteur thermoacoustique moderne.

## 1.2 Moteur thermoacoustique

Swift a développé une théorie linéaire qui permet de prédire le fonctionnement d'un système thermoacoustique sous l'hypothèse d'oscillations de petite amplitude. L'écart entre l'expérience et la prédiction devient important quand l'amplitude des oscillations est plus forte. Il est alors nécessaire d'étudier les effets non-linéaires et multidimensionnels [8]. Suite aux travaux de Swift, la plupart des efforts dans le domaine de la thermoacoustique ont été consacrés au développement et à la compréhension des systèmes thermoacoustiques à ondes stationnaires [2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 69, 118]. Cependant, le rendement de ce type de machine reste faible à cause de l'imperfection du contact thermique entre la particule fluide et le stack. A la fin des années 1990, le développement des systèmes annulaires à ondes progressives [12, 114] a permis d'augmenter significativement le rendement des moteurs thermoacoustiques.

## 1.3 Effets multidimensionnels

Les effets multidimensionnels font référence aux phénomènes hydrodynamiques qui ne sont pas pris en compte dans les théories linéaires classiques de la thermoacoustique : formation de tourbillons, décollement de couche limite dans les régions avoisinant le stack. Ils sont importants car ils sont à l'origine de pertes réduisant l'efficacité des machines. Ils sont liés à la présence de jets, de changement de section, et aux géométries particulières de cellules actives comprenant échangeurs de chaleur et stack [1, 25, 49, 60, 61, 77, 105, 106].

Nous nous intéressons dans ce mémoire à la simulation numérique d'un système thermoacoustique, pour pouvoir prendre en compte les effets multidimensionnels en général dans la cellule active. La première simulation numérique 2D a été réalisée par Cao et

al. [25], qui ont résolu les équations de Navier-Stokes complètes pour un écoulement compressible. Le domaine de simulation est réduit à la proximité d'une plaque du stack considérée isotherme. Plus tard, Worlikar et Knio [110, 111, 112, 113] ont réalisé des simulations numériques basées sur une approximation à faible nombre de Mach sur un modèle très simplifié de réfrigérateur thermoacoustique. L'onde acoustique est imposée aux frontières du domaine de calcul, la présence du résonateur ne se manifestant que par cette condition aux limites. Hamilton *et al.* [42] ont introduit un modèle nonlinéaire bidimensionnel basé sur l'approximation de couche limite permettant de décrire l'amplification thermoacoustique jusqu'à la saturation. Dans cette approche, les plaques sont infiniment fines. Marx [62] a effectué des simulations numériques basées sur l'approximation à faible nombre de Mach et a mis en œuvre la méthode des caractéristiques pour prendre en compte l'acoustique dans le résonateur via les conditions aux limites sur les frontières du domaine de calcul. Dans ces travaux, l'épaisseur des plaques est prise en compte. Fontaine *et al.* [35] ont réalisé une étude similaire pour un fluide compressible, en s'intéressant particulièrement à l'influence de la loi d'état du gaz (gaz parfait ou gaz de Van Der Waals) sur l'effet thermoacoustique.

Enfin, il existe plusieurs études numériques de moteurs thermoacoustiques dans les systèmes à géométrie complexe, utilisant des logiciels commerciaux (Fluent, CFX) [59, 117]. Les simulations décrivent bien le fonctionnement des moteurs dans le régime transitoire et le régime périodique, mais les calculs sont très coûteux et des études paramétriques ne peuvent pas être envisagées.

## 1.4 Originalité des travaux de thèse

Dans l'étude réalisée au LIMSI, le système moteur thermoacoustique complet est partagé en 2 parties : cellule active (stack+échangeurs) d'une part, résonateur d'autre part. La cellule active est considérée compacte et un modèle de type développements asymptotiques raccordés donne les conditions de couplage entre deux parties. Ce modèle

a été développé dans la thèse de Hireche [44, 45, 46]. La résolution bidimensionnelle des équations instationnaires dans une tranche de stack prend en compte la présence des parties solides (plaque des stack et échangeurs) et le couplage avec l'acoustique dans le résonateur par les conditions aux limites. Ce modèle permet d'obtenir une résolution fine des échanges au niveau du stack et des échangeurs, en un temps de calcul raisonnable. Hireche a effectué l'implémentation numérique du modèle dans la configuration du moteur thermoacoustique. Des simulations ont déjà été réalisées et montrent le démarrage et la saturation de l'onde sur plusieurs dispositifs expérimentaux [45, 46].

Ce travail s'inscrit dans la continuité. L'objectif est d'étudier l'influence de la charge sur le fonctionnement d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires idéalisé du déclenchement de l'onde jusqu'à la saturation, ainsi que les effets de variation de certains paramètres géométriques caractérisant les échangeurs et le stack.

Le chapitre 2 du mémoire présente le modèle. Après avoir présenté les dispositifs expérimentaux de référence, les échelles sont précisées et les équations du modèle dans le résonateur puis dans la cellule active sont décrites.

Le chapitre 3 présente les méthodes numériques de résolution du système couplé. Les discrétisations temporelle et spatiale ainsi que les méthodes de résolution sont présentées, et l'algorithme général de résolution est donné.

Le chapitre 4 présente le cas d'un moteur non chargé : après avoir détaillé les paramètres physiques et numériques, les phases d'amplification et de saturation de l'onde sont détaillées. La convergence numérique est discutée.

Le chapitre 5 présente les résultats du seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique pour un moteur thermoacoustique chargé. L'étude est menée pour différentes valeurs de charge couvrant toutes les configurations de charge résistive. Après avoir présenté la méthodologie utilisée pour le post-traitement des résultats numériques, on détermine les seuils de déclenchement, et l'influence de la charge et de certains paramètres géométriques de la cellule active. Les résultats de l'étude sont comparés avec ceux de la théorie linéaire et avec les expériences de Atchley et al. [10].

Le chapitre 6 est consacré à l'étude du régime périodique. Après avoir montré comment on obtient la saturation, les aspects locaux de l'écoulement dans la cellule active (dynamique tourbillonnaire et instabilités) sont présentés.

# Chapitre 2

## Modélisation par développement asymptotique raccordé

Nous présentons dans ce chapitre le modèle hybride développé dans [44, 45, 46] pour un moteur thermoacoustique idéalisé. Ce modèle sera utilisé par la suite pour l'étude de stabilité d'un moteur couplé à une charge ainsi que pour l'analyse du régime périodique du même type de système. Le modèle est basé sur une approximation des équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible d'un gaz parfait dans le domaine occupé par le fluide [70], ainsi que sur l'équation de conduction de la chaleur instationnaire dans le domaine occupé par le solide (échangeurs et plaques du stack). La première partie est consacrée à la présentation des expériences de référence et des échelles du système thermoacoustique. Ensuite, le développement des équations du modèle hybride est présenté en deux parties : l'approximation acoustique linéaire dans le résonateur, puis l'approximation faible Mach des équations de Navier-Stokes compressibles dans la cellule active. Enfin, le couplage des deux modèles d'approximation se fait par un raccordement des solutions, présenté à la fin de ce chapitre.

## 2.1 Systèmes et échelles

Un moteur thermoacoustique est un système constitué d'un résonateur rempli de gaz à l'intérieur duquel se trouve une cellule active, composée d'un empilement de plaques (appelé stack) et de deux échangeurs de chaleur (chaud et froid) de part et d'autre du stack. Le résonateur peut être fermé à ses deux extrémités ou fermé à une extrémité et chargé à l'autre extrémité, la charge pouvant être un réfrigérateur thermoacoustique ou un ensemble de vannes, réservoir ou tubes. Lorsqu'on maintient le stack sous une différence de température suffisamment importante, imposée via les échangeurs de chaleur, toute perturbation dans le gaz est amplifiée (instabilité thermoacoustique) et une onde d'origine thermoacoustique est établie dans le système qui fonctionne comme un moteur, où la chaleur est convertie en travail acoustique.

Dans ce qui suit deux systèmes expérimentaux ont servi comme référence pour la démarche de modélisation ainsi que pour la comparaison avec les résultats du modèle.

### 2.1.1 Dispositif expérimental 1

Le dispositif expérimental 1 est un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires, et il a été réalisé au LIMSI depuis 1998 [30, 32]. Il est composé (voir figure 2.1) d'un résonateur cylindrique long de 7 m avec un diamètre intérieur de 5.63 cm. A l'intérieur du résonateur, proche d'une extrémité se trouve la cellule active composée d'un stack long de 15 cm, un échangeur chaud long de 8 cm et un échangeur froid long de 4 cm. L'épaisseur des plaques du stack est de 0.2 mm et l'espacement entre les plaques est de 0.8 mm. Les échangeurs sont constitués de réseaux de canaux cylindriques de diamètre 2 mm parallèles à l'axe du résonateur. Le stack et le résonateur sont fabriqués en INOX tandis que les échangeurs de chaleur sont en cuivre. Le système est fermé et rempli de gaz (Hélium ou Azote) sous pression. Il peut fonctionner entre 7 bar et 30 bar de pression moyenne. L'expérience de référence est à 10 bar. L'onde établie dans ce système est quasi-stationnaire, la fréquence fondamentale étant fixée par le gaz utilisé et la longueur

du résonateur ( $\approx$  demi-longueur d'onde). Si l'on utilise de l'hélium la période acoustique du mode fondamental est de 7.5 ms.

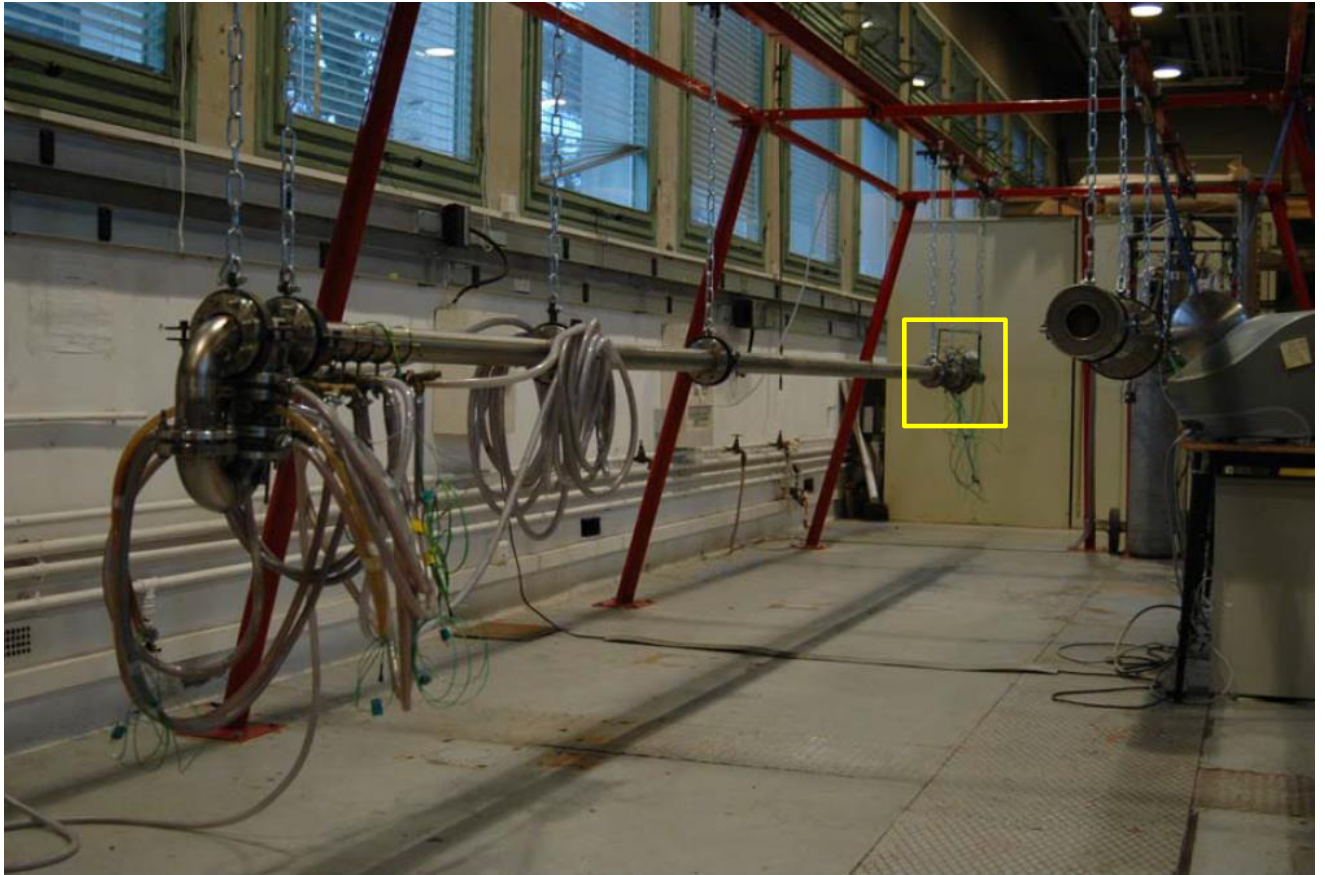


FIGURE 2.1 – Dispositif expérimental 1 (Limsi). Le cadre jaune indique l'emplacement du moteur.

### 2.1.2 Dispositif expérimental 2

Le dispositif expérimental 2 a été réalisé par A. Atchley et al. [7, 8, 9, 10, 11, 66] dans les années 1990. Un schéma du dispositif est présenté sur la figure 2.2. Le résonateur est un tube cylindrique de 1 m de long, de 3.82 cm de diamètre intérieur, fermé aux deux extrémités. À l'intérieur du résonateur, la cellule active comprend un stack et deux échangeurs de chaleur tous constitués d'empilements de plaques. Le stack est en INOX tandis que les échangeurs sont fabriqués en nickel. Le stack a 3.5 cm de longueur, l'échangeur froid 2.18 cm et l'échangeur chaud 0.76 cm. Le gaz utilisé est l'hélium. Les expériences



sont faites pour trois valeurs de pression moyenne [10] : 4.4 bar, 2.4 bar et 1.5 bar. Il s'agit de nouveau d'un système à ondes quasi-stationnaires pour lequel l'oscillation acoustique se fait avec une période de 1ms.

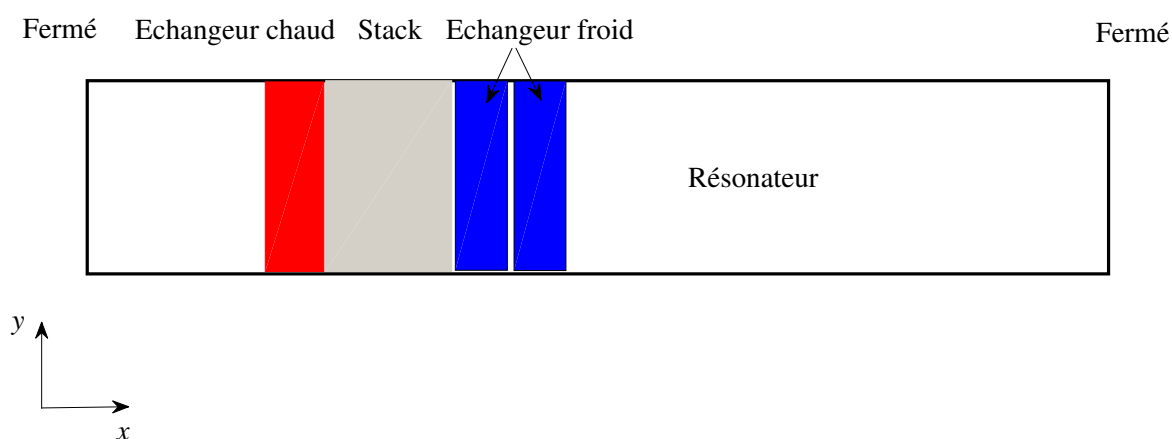


FIGURE 2.2 – Dispositif expérimental 2.

### 2.1.3 Echelles et ordre de grandeurs

Les caractéristiques géométriques des deux systèmes sont résumées dans le tableau 2.1. Le symbole " $\tilde{\cdot}$ " est utilisé pour les grandeurs physiques dimensionnées.

Expériences de référence	$\tilde{L}_{res}$ (m)	$\tilde{L}_{st}$ (cm)	$\tilde{D}$ (cm)	$\tilde{H}$ (mm)
Dispositif expérimental 1	7.56	15	5.63	1
Dispositif expérimental 2	1	3.5	3.82	1

TABLE 2.1 – Caractéristiques géométriques des dispositifs expérimentaux.

On constate qu'il y a plusieurs échelles spatiales ayant des ordres de grandeurs très différents : la longueur du résonateur  $\tilde{L}_{res} = O(\text{m})$  (qui est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde acoustique), la longueur du stack  $\tilde{L}_{st} = O(\text{cm})$ ,  $\tilde{L}_{st} \ll \tilde{L}_{res}$ , l'espacement entre les plaques du stack  $\tilde{H} = O(\text{mm})$  (qui est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de couche limite visqueuse et thermique),  $\tilde{H} \ll \tilde{L}_{st}$ . L'analyse des échelles

(tableau 2.2) de temps conduit à deux échelles très différentes : la période des oscillations acoustiques  $\tilde{t}_{ac} = O(\text{ms})$  et le temps caractéristique de conduction thermique dans les plaques du stack ( $= \tilde{L}_{st}^2/\text{diffusivité}$ )  $\tilde{t}_{th} = O(\text{min})$ ,  $\tilde{t}_{ac} \ll \tilde{t}_{th}$ .

Expérience de référence	$\tilde{t}_{ac}$ (ms)	$\tilde{t}_{th}$ (min)
Dispositif expérimental 1	7.5	21
Dispositif expérimental 2	1	30

TABLE 2.2 – Echelles de temps des dispositifs expérimentaux.

La difficulté principale pour décrire les oscillations du gaz dans des géométries variables (passages étroits et larges), en présence d'un gradient de température important dans le stack, réside dans l'existence de ces échelles spatiales et temporelles très différentes. Par conséquent, pour décrire finement les phénomènes physiques dans ce type de systèmes, on aurait besoin de simulations numériques avec des maillages spatiaux très fins sur des domaines très grands, ainsi que de pas de temps très petits pour des simulations décrivant de longs temps physiques. Cette démarche serait trop coûteuse en temps de calcul numérique et impossible à utiliser pour des études paramétriques systématiques. Il est donc nécessaire de développer des modèles simplifiés.

La théorie linéaire classique propose une modélisation quasi 1D, à partir des équations de Rott (1969-1980), étendues et utilisées par Swift et al. [92] par la suite. Le modèle de Rott est basé sur une approximation d'acoustique linéaire et une approximation de couche limite des équations de Navier-Stokes compressibles en présence d'un gradient de température moyen. Les équations approchées sont moyennées sur la section pour obtenir 3 équations différentielles dans le domaine fréquentiel. Les équations relient les fluctuations de pression, vitesse, température, l'énergie totale et la fréquence de l'onde. Elles utilisent les conditions initiales au repos du gaz ainsi que les paramètres physiques du gaz et du solide. La géométrie de chaque élément de la machine thermoacoustique (stack, échangeurs de chaleur, résonateur etc.) est prise en compte à travers sa porosité et des facteurs de forme traduisant les dissipations visqueuses et thermiques. La théorie

linéaire permet de calculer le champ acoustique, d'analyser les performances des machines et de prédire le seuil de déclenchement de l'onde pour un système donné mode par mode.

Cependant, le modèle linéaire présente plusieurs limitations : les simulations basées sur ce modèle sont faites pour un seul mode acoustique et seulement le régime périodique établi est décrit. Les effets nonlinéaires et multidimensionnels, qui apparaissent dans les systèmes thermoacoustiques et qui sont au coeur des pertes d'efficacité des machines thermoacoustiques, sont soit négligés soit partiellement pris en compte par le modèle linéaire. Malgré les nombreuses études récentes consacrées aux effets nonlinéaires, ces derniers sont toujours mal connus. Les travaux prenant en compte les non-linéarités et/ou les effets multidimensionnels sont peu nombreux dans la littérature. On peut citer les modèles quasi-unidimensionnels (en espace) développés par l'équipe de Prosperetti [51, 52, 53, 104, 119] qui permettent de décrire l'amplification thermoacoustique du régime transitoire jusqu'à la saturation à l'aide d'un modèle multi-échelles en temps. Cependant, les écoulements dans le stack ne sont pas finement décrits à cause de l'approximation 1D en espace. Hamilton et al. [42] ont développé un modèle 2D en approximation de couche limite, mais la résolution numérique est assez grossière dans le stack et les échangeurs.

Le modèle hybride qui fait l'objet de ce chapitre a été développé pour simuler le démarrage d'un moteur thermoacoustique, de la phase transitoire jusqu'à la saturation et établissement du régime périodique [45]. Il est basé sur une approximation "Faible Mach" des équations de Navier-Stokes compressibles sur le domaine occupé par le stack et les échangeurs de chaleur, couplé à l'approximation acoustique linéaire des résonateurs 1D. L'avantage de ce type de modèle est qu'il est instationnaire, permettant ainsi de décrire le régime transitoire, que l'approche utilisée dans le stack et les échangeurs est multidimensionnelle et non-linéaire, et que le couplage avec l'acoustique du résonateur est fait à chaque pas de temps. Notons que l'approximation "Faible Mach" a été utilisée par le passé dans la modélisation de la réfrigération thermoacoustique [20, 110], mais avec une acoustique imposée aux frontières de la cellule active et qui n'est pas influencée par les échanges dans cette dernière.

### 2.1.4 Géométrie du système modélisé

Le système idéalisé est constitué d'un résonateur cylindrique, fermé à l'extrémité gauche et chargé à l'extrémité droite, à l'intérieur duquel est placée la cellule active thermoacoustique. Cette dernière est composée de deux échangeurs séparés par le stack. Entre les échangeurs et le stack il y a un espace horizontal, de la taille de l'espacement entre les plaques.

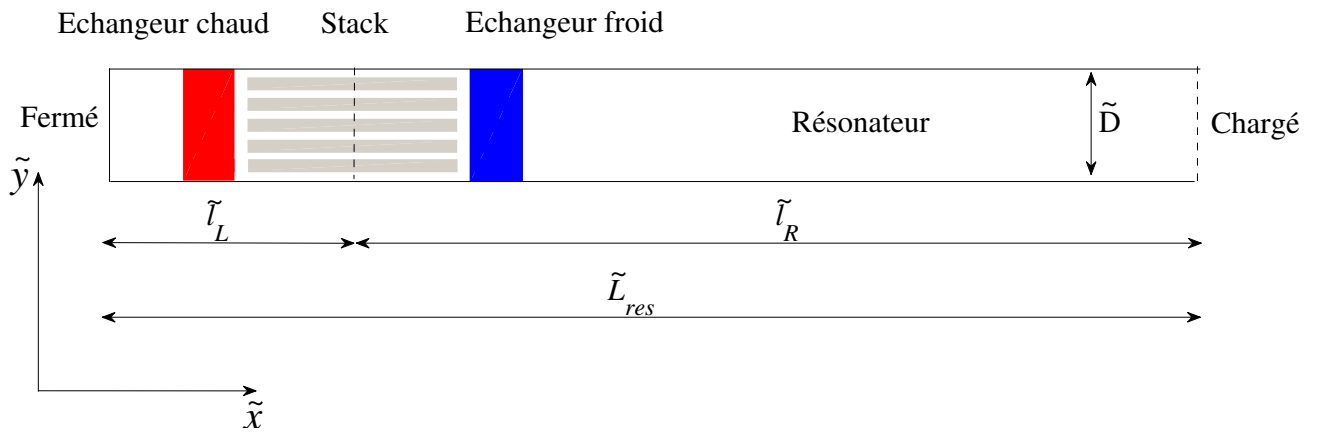


FIGURE 2.3 – Géométrie du système idéalisé.

### 2.1.5 Echelles de référence et adimensionnement

Compte tenu de l'analyse faite dans la section 2.1.3, on peut résumer les échelles de référence appropriées à l'adimensionnement du problème. Pour décrire l'acoustique dans le résonateur on choisit la longueur du résonateur  $\tilde{L}_{res}$  comme échelle spatiale. La température de référence  $\tilde{T}_{ref}$  est la température de l'échangeur froid. On prendra  $\tilde{c}_{ref} = \sqrt{\gamma r \tilde{T}_{ref}}$  comme vitesse du son de référence dans le gaz,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  étant le rapport des chaleurs spécifiques à  $\tilde{T}_{ref}$  et  $r$  la constante du gaz. L'échelle de temps est déterminée par la résonance acoustique

$$\tilde{t}_{ref} = \frac{\tilde{L}_{res}}{\tilde{c}_{ref}}. \quad (2.1)$$

Elle représente la moitié de la période acoustique du mode résonant fondamental pour un tube rempli de gaz à température  $\tilde{T}_{ref}$ , fermé à ses deux extrémités. En régime établi périodique, le déplacement acoustique a une amplitude du même ordre de grandeur que la longueur du stack et  $\tilde{L}_{st} \ll \tilde{L}_{res}$ . Par conséquent, pour établir une approximation pouvant décrire l'écoulement à l'intérieur de la cellule active il est préférable d'utiliser une autre échelle spatiale :  $\tilde{L}_{st}$ . L'écoulement dans le régime périodique est caractérisé par une amplitude de vitesse acoustique qui aura l'ordre de grandeur donné par

$$\tilde{U}_{ref} = \frac{\tilde{L}_{st}}{\tilde{t}_{ref}} \quad (2.2)$$

Ceci nous amène à définir le nombre de Mach :

$$M = \frac{\tilde{U}_{ref}}{\tilde{c}_{ref}} = \frac{\tilde{L}_{st}}{\tilde{L}_{res}} \ll 1 \quad (2.3)$$

La pression oscille autour de la pression moyenne du gaz au repos, qui est prise comme une pression de référence  $\tilde{p}_{ref}$ . La masse volumique de référence est aussi prise comme la valeur moyenne au repos et sera définie à partir de l'équation d'état

$$\tilde{\rho}_{ref} = \frac{\tilde{p}_{ref}}{r\tilde{T}_{ref}}. \quad (2.4)$$

Toutes les variables sont adimensionnées par ces valeurs de référence dans tout le domaine, excepté pour les coordonnées spatiales dont la valeur de référence est soit  $\tilde{L}_{st}$  (cellule active) soit  $\tilde{L}_{res}$  (résonateur).

## 2.2 Résonateur

Le résonateur se compose de deux parties situées à gauche et à droite du centre de la cellule active et ayant pour longueur  $\tilde{l}_L$  et  $\tilde{l}_R$  ( $\tilde{l}_L + \tilde{l}_R = \tilde{L}_{res}$ ) (voir figure 2.4). Dans le dispositif expérimental 1,  $\tilde{l}_L = 0.09$  m, et dans le dispositif expérimental 2,  $\tilde{l}_L = 0.1$  m.

## 2.2.1 Equations physiques 1D

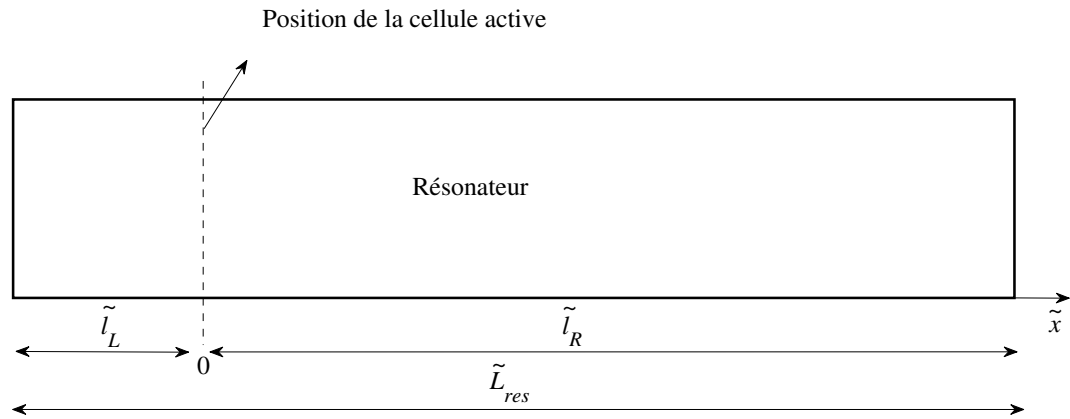


FIGURE 2.4 – Schéma du résonateur.

La dimension transversale du résonateur (son diamètre) étant très grande devant l'épaisseur des couches limites visqueuse et thermique, l'écoulement peut être considéré unidimensionnel, non visqueux et isentropique. Les équations régissant le mouvement du fluide s'écrivent :

— Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u})}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (2.5)$$

— Conservation de la quantité de mouvement (équations d'Euler) :

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}^2)}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \quad (2.6)$$

— Conservation de l'énergie totale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\rho}[\tilde{c}_v\tilde{T} + \tilde{u}^2/2]) + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{\rho}\tilde{u}[\tilde{c}_v\tilde{T} + \tilde{u}^2/2]) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{k}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}) \quad (2.7)$$

— Loi d'état (gaz parfait) :

$$\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{r}\tilde{T} \quad (2.8)$$

Dans ces équations  $\tilde{t}$  désigne le temps,  $\tilde{\rho}$  la masse volumique du fluide,  $\tilde{u}$  désigne la vitesse eulérienne d'une particule selon  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{\mu}$  la viscosité dynamique du fluide,  $\tilde{T}$  la température,  $\tilde{c}_p$  la capacité calorifique massique à pression constante,  $\tilde{c}_v$  la capacité calorifique massique à volume constant,  $\tilde{k}$  la conductivité thermique du fluide.

### 2.2.2 Equations adimensionnées

On introduit les variables sans dimension suivantes :

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{ref}}, p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{ref}}, u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_{ref}},$$

$$\hat{x} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_{ref}}, t = \frac{\tilde{t}}{\tilde{t}_{ref}}$$

avec les valeurs de référence définies dans le paragraphe précédent. On rappelle que dans le résonateur  $\tilde{L}_{ref} = \tilde{L}_{res}$ . Pour un écoulement isentropique  $\tilde{c}_{ref}^2 = \gamma \frac{\tilde{p}_{ref}}{\tilde{\rho}_{ref}}$ , les équations adimensionnées s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + M \frac{\partial(\rho u)}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.9)$$

$$M \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + M^2 \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial \hat{x}} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{p}{\gamma} + M^2 \frac{(\gamma-1)}{2} \rho u^2 \right] + M \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ u p + M^2 \frac{(\gamma-1)}{2} \rho u^3 \right] = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{c}_{ref} \tilde{L}_{res}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( k \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} \right) \quad (2.11)$$

$$p = \rho T \quad (2.12)$$

L'équation (2.11) a été obtenue en combinant l'équation de l'énergie avec la loi d'état. Pour simplifier les équations adimensionnées, on fait une analyse des ordres de grandeur des nombres adimensionnels. Pour les dispositifs expérimentaux présentés  $M = O(10^{-2}) - O(10^{-3})$ , tandis que  $\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{c}_{ref} \tilde{L}_{res}} = O(10^{-9})$ . On peut donc supposer que  $\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{c}_{ref} \tilde{L}_{res}} \ll M^2 \ll M$ , ce qui permet de faire les premières simplifications. Les équations écrites jusqu'à

l'ordre  $O(M)$  sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + M \frac{\partial(\rho u)}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.13)$$

$$M \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial(\rho u)}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.15)$$

$$p = \rho T \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Développements asymptotiques

Dans l'hypothèse  $M \ll 1$ , on cherche une approximation du problème précédent, en développant chaque inconnue en fonction du petit paramètre  $M$ .

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + o(1) \\ T &= T^{(0)} + M T^{(1)} + o(M) \\ p &= p^{(0)} + M p^{(1)} + o(M) \\ \rho &= \rho^{(0)} + M \rho^{(1)} + o(M) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où  $u^{(i)}$ ,  $T^{(i)}$ ,  $p^{(i)}$ ,  $\rho^{(i)} = O(1)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . En injectant ces développements dans les équations (2.13)-(2.16), et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de  $M$ , on obtient :

A l'ordre  $O(1)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial p^{(0)}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} = 0 \\ p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)}. \end{array} \right. \quad (2.18)$$



On trouve donc  $p^{(0)} = \text{constant}$  et on pose  $p^{(0)} = 1$ . Alors  $p^{(0)} = \rho^{(0)}T^{(0)} = 1$ .

A l'ordre  $O(M)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^{(0)}u^{(0)})}{\partial \hat{x}} = 0 \\ \frac{\partial(\rho^{(0)}u^{(0)})}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \hat{x}} = 0 \\ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(u^{(0)}p^{(0)})}{\partial \hat{x}} = 0. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

En simplifiant les équations précédentes on obtient les équations de l'acoustique linéaire [56] :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \frac{T^{(0)}}{\gamma} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.21)$$

### 2.2.4 Résolution des équations de l'acoustique linéaire

On résout les équations (2.20) et (2.21) avec la méthode des caractéristiques à l'aide des invariants de Riemann [109]. En multipliant (2.21) par  $\pm 1/\sqrt{T^{(0)}}$ , avec  $T^{(0)}$  constante sur chaque partie du résonateur, et en l'additionnant à (2.20) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \gamma u^{(0)} \pm \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)} \right] \pm \sqrt{T^{(0)}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ \gamma u^{(0)} \pm \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)} \right] = 0 \quad (2.22)$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\hat{x}, t) = \gamma u^{(0)} - \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)} \\ \mathcal{R}(\hat{x}, t) = \gamma u^{(0)} + \sqrt{T^{(0)}} p^{(1)} \end{array} \right. , \quad (2.23)$$

$\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$  sont les invariants de Riemann et sont constants sur les caractéristiques se déplaçant à la vitesse  $\sqrt{T^{(0)}}$ , respectivement vers la gauche ( $\mathcal{L}$  est constant sur la caractéristique  $\hat{x} + \sqrt{T^{(0)}}t = \text{cte}$ ) et vers la droite ( $\mathcal{R}$  est constant sur la caractéristique  $\hat{x} - \sqrt{T^{(0)}}t = \text{cte}$ ).

En considérant un point initial quelconque d'espace-temps  $(\hat{x}_0, t_0)$  on a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\hat{x}_0 - \sqrt{T^{(0)}}(t - t_0), t] = \mathcal{L}(\hat{x}_0, t_0) \\ \mathcal{R}[\hat{x}_0 + \sqrt{T^{(0)}}(t - t_0), t] = \mathcal{R}(\hat{x}_0, t_0) \end{cases} \quad (2.24)$$

Ceci est la solution générale des équations pour chaque partie du résonateur. La cellule active est positionnée en  $\hat{x} = 0$ . La température  $T^{(0)}$  est différente selon que l'on considère la partie de résonateur à droite de la cellule active ( $T^{(0)} = T_c = 1$ ) et à gauche de la cellule active ( $T^{(0)} = T_h = \frac{\tilde{T}_h}{\tilde{T}_c}$ ) (voir figure 2.5). L'extrémité gauche est fermée et elle est située

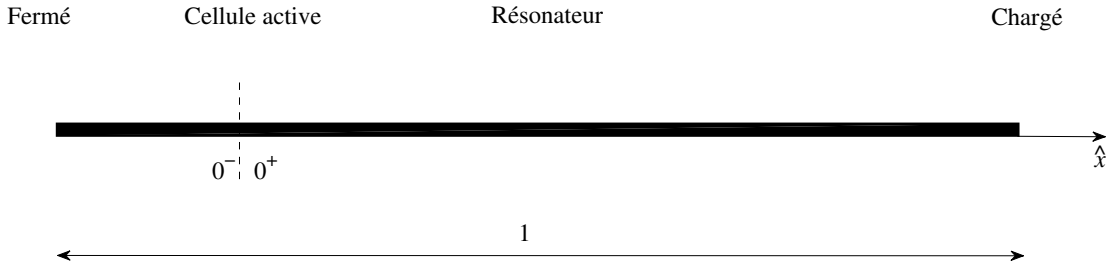


FIGURE 2.5 – Modélisation du résonateur.

en  $\hat{x} = -\hat{l}_L = -\frac{\tilde{l}_L}{\tilde{L}_{res}}$  ; l'extrémité droite (où une charge est positionnée) est située en  $\hat{x} = +\hat{l}_R = \frac{\tilde{l}_R}{\tilde{L}_{res}}$ .

On note par la suite  $\mathcal{L}_L, \mathcal{R}_L$  les invariants de Riemann à gauche de la cellule active et  $\mathcal{L}_R, \mathcal{R}_R$  les invariants à droite de la cellule active.

### 2.2.5 Conditions aux extrémités du tube

Les conditions aux limites dans le résonateur sont celles relatives à une onde plane dans un tube fermé à une extrémité et avec une charge à l'autre extrémité. Ces conditions

portent sur les fluctuations de vitesse et pression et elles seront interprétées à travers l'évolution des invariants de Riemann sur les caractéristiques.

### Extrémité fermée

L'onde acoustique se trouvant à l'interface avec la cellule active se déplace vers la gauche et se réfléchit sur la paroi fixe du tube située à la distance  $\hat{l}_L$  de la cellule active (voir figure 2.6).

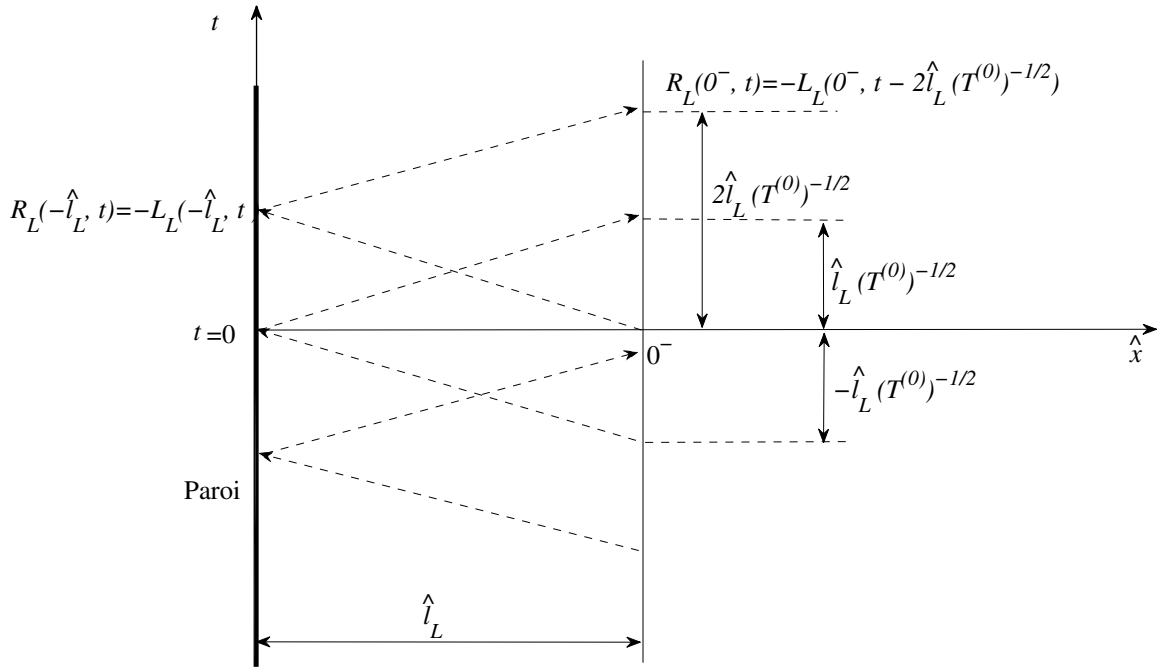


FIGURE 2.6 – Evolution des variables de Riemann sur les caractéristiques à gauche de la cellule active.

On se place en  $\hat{x} = 0^-$  au temps  $t_0$ . La cellule active voit une onde arrivant de la gauche, se déplaçant sur la caractéristique  $\hat{x} - \sqrt{T^{(0)}}t = \text{cte}$ . On écrit (2.24) pour  $\mathcal{R}_L$  :

$$\mathcal{R}_L [0^-, t_0] = \mathcal{R}_L \left( -\hat{l}_L, t_0 - \frac{\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}} \right) \quad (2.25)$$

En  $\hat{x} = -\hat{l}_L$ , la vitesse est nulle sur la paroi, donc  $u^{(0)}(-\hat{l}_L, t) = 0$ . Or  $\mathcal{L}_L + \mathcal{R}_L = 2\gamma u^{(0)}$ . Pour  $t = t_0 - \frac{\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}}$ , cette dernière relation devient :

$$\mathcal{R}_L \left( \hat{l}_L, t_0 - \frac{\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}} \right) = -\mathcal{L}_L \left( -\hat{l}_L, t_0 - \frac{\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}} \right) \quad (2.26)$$

On se place sur la caractéristique  $\hat{x} + \sqrt{T^{(0)}}t = \text{cte}$ , et on trouve :

$$\mathcal{L}_L \left( -\hat{l}_L, t_0 - \frac{\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}} \right) = \mathcal{L}_L \left( 0^-, t_0 - \frac{2\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}} \right). \quad (2.27)$$

De (2.25), (2.26) et (2.27) on trouve :

$$\mathcal{R}_L(0^-, t_0) = -\mathcal{L}_L \left( 0^-, t_0 - \frac{2\hat{l}_L}{\sqrt{T^{(0)}}} \right). \quad (2.28)$$

### Modèle de charge

A l'extrémité droite du tube, à la distance  $\hat{x} = \hat{l}_R$ , on place une charge. Un modèle complet de charge se traduit par une relation entre les fluctuations de pression et vitesse du type :

$$p^{(1)} = A \frac{du^{(0)}}{dt} + fu + B \int u dt \quad (2.29)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $f$  sont des constantes dépendantes du type de charge. Si l'on assimile la charge avec un piston placé à  $\hat{x} = \hat{l}_R$  alors  $Adu^{(0)}/dt$  représente l'inertie due à la masse du piston,  $fu^{(0)}$  la force de frottement, et  $B \int u^{(0)} dt$  la force élastique due au ressort du piston. Dans cette étude, on simplifie cette relation en considérant une charge purement dissipative, représentée donc par un coefficient de réflexion appliqué en  $\hat{x} = \hat{l}_R$  (voir [44, 45]).

$$p^{(1)}(\hat{l}_R, t) = fu^{(0)}(\hat{l}_R, t) \quad (2.30)$$

La charge utilisée dans ce modèle hybride peut être interprétée comme une résistance pure, la pression acoustique instantanée  $p^{(1)}(\hat{l}_R, t)$  et la vitesse longitudinale instantanée

$u^{(0)}(\hat{l}_R, t)$  étant en phase à l'extrémité chargée. Dans notre étude, la charge  $f$  peut être exprimée sous la forme du rapport entre  $p^{(1)}(\hat{l}_R, t)$  et  $u^{(0)}(\hat{l}_R, t)$  :

$$f = \frac{p^{(1)}(\hat{l}_R, t)}{u^{(0)}(\hat{l}_R, t)} \quad (2.31)$$

Lorsque  $f \rightarrow \infty$ , la configuration correspond à un tube fermé des deux côtés avec  $u^{(0)}(\hat{l}_R, t) = 0$ . Lorsque  $f \rightarrow 0$ , la configuration correspond à un tube ouvert, avec  $p^{(1)}(\hat{l}_R, t) = 0$ .

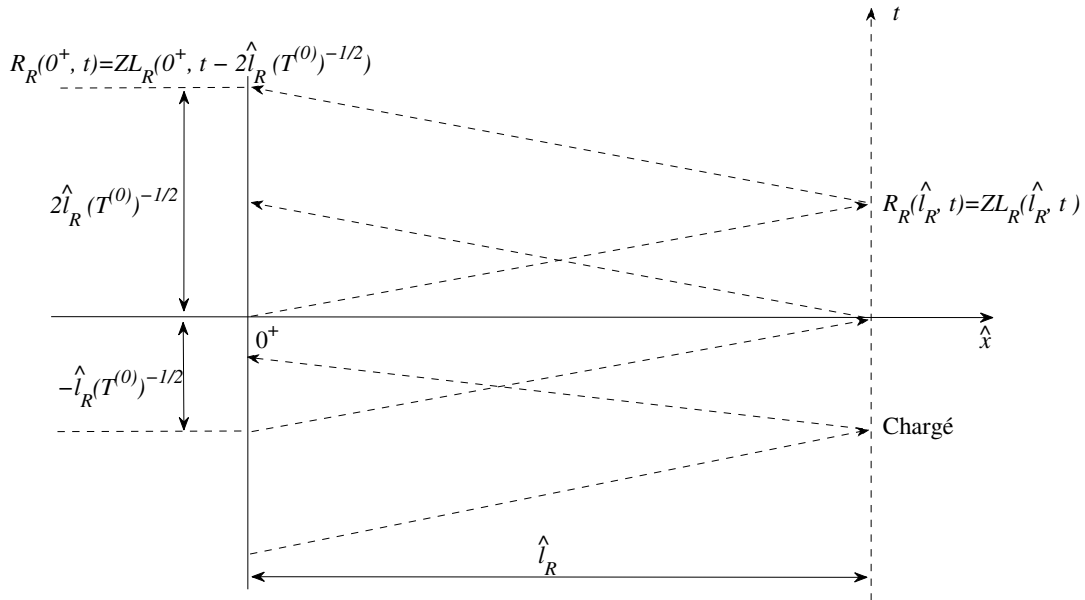


FIGURE 2.7 – Evolution des variables de Riemann sur les caractéristiques à droite de la cellule active.

La condition limite (2.31) écrite en  $\hat{x} = \hat{l}_R$  peut être transportée sur les caractéristiques, à l'aide des invariants de Riemann, pour obtenir une condition en  $\hat{x} = 0^+$ , à la sortie de la cellule active (voir figure 2.7). Cette dernière voit une onde arrivant de la droite, se déplaçant sur la caractéristique  $\hat{x} + \sqrt{T^{(0)}}t = \text{cte}$  vers la gauche. L'équation

(2.31) est écrite en remplaçant  $p^{(1)}$  et  $u^{(0)}$  en fonction de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$  :

$$\begin{cases} p^{(1)}\left(\hat{l}_R, t_0 - \frac{\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right) = \frac{\mathcal{R}_R\left(\hat{l}_R, t_0 - \frac{\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right) - \mathcal{L}_R\left(\hat{l}_R, t_0 - \frac{\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right)}{2\sqrt{T^{(0)}}} \\ u^{(0)}\left(\hat{l}_R, t_0 - \frac{\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right) = \frac{\mathcal{R}_R\left(\hat{l}_R, t_0 - \frac{\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right) + \mathcal{L}_R\left(\hat{l}_R, t_0 - \frac{\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right)}{2\gamma} \end{cases} \quad (2.32)$$

On transporte maintenant cette équation sur les caractéristiques jusqu'à  $\hat{x} = 0^+$ .

$$\boxed{\mathcal{L}_R(0^+, t_0) = Z\mathcal{R}_R\left(0^+, t_0 - \frac{2\hat{l}_R}{\sqrt{T^{(0)}}}\right)} \quad (2.33)$$

où

$$Z = \frac{\gamma - f\sqrt{T^{(0)}}}{\gamma + f\sqrt{T^{(0)}}} \quad (2.34)$$

avec  $T^{(0)} = 1$  (car on décrit la propagation dans la partie froide du tube).  $Z$  représente un coefficient de transmission de l'onde à l'extrémité droite du tube. Quand  $f \rightarrow \infty$ ,  $Z \rightarrow -1$ , ce qui correspond à une extrémité fermée et un résonateur à demi-longueur d'onde. Quand  $f \rightarrow 0$ ,  $Z \rightarrow 1$ , ce qui correspond à une extrémité ouverte et un résonateur à un quart de longueur d'onde. Lorsque  $f = \gamma$ ,  $Z$  devient zéro et  $\mathcal{L}_R = 0$ , donc il n'y a pas de réflexion de l'onde à l'extrémité chargée (en  $\hat{x} = \hat{l}_R$ ) et la solution ne dépend plus de la longueur à droite de la cellule active.

## 2.3 Cellule active

Dans la cellule active, le modèle est basé sur deux hypothèses importantes : l'amplitude des oscillations dans le fluide reste petite devant les valeurs moyennes, et la longueur de la cellule active est très courte comparée à la longueur d'onde, le rapport étant de l'ordre  $O(M)$ .

### 2.3.1 Equations physiques

Dans la cellule active l'écoulement est compressible, visqueux et conducteur de chaleur. Pour établir un modèle simplifié, on part des équations de Navier-Stokes pour un écoulement compressible dans le domaine fluide (conservation de la masse, de la quantité du mouvement et de l'énergie), une loi d'état du fluide, ainsi que l'équation de conduction de la chaleur instationnaire dans le domaine solide (les plaques du stack et des échangeurs). Ces équations s'écrivent [67] :

— Conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{V}}) = 0} \quad (2.35)$$

— Conservation de la quantité du mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{V}})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{V}} \otimes \tilde{\mathbf{V}}) = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\tau} + \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{g}}} \quad (2.36)$$

— Conservation de l'énergie totale :

$$\boxed{\tilde{\rho}\tilde{c}_p \left[ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \tilde{T} \right] = \nabla \cdot (\tilde{k} \nabla \tilde{T}) + \left[ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \tilde{p} \right] + \tilde{\phi}} \quad (2.37)$$

Dans ces équations  $\tilde{\mathbf{V}}$  désigne la vitesse eulérienne d'une particule,  $\tilde{\phi}$  est la fonction de dissipation visqueuse.

$\tilde{\tau}$  est le tenseur des contraintes visqueuses,

$$\tilde{\tau} = \tilde{\mu}(\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}} + (\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{V}})^T) - \frac{2}{3}\tilde{\mu}\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{I}$$

où  $\mathbf{I}$  désigne le tenseur unité.

On suppose que le fluide est un gaz parfait, la loi d'état s'écrit donc :

$$\boxed{\tilde{p} = \tilde{\rho}\tilde{r}\tilde{T}} \quad (2.38)$$

Enfin, l'équation de conduction de la chaleur instationnaire pour le solide s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\kappa}_s \tilde{\nabla}^2 \tilde{T}} \quad (2.39)$$

où  $\tilde{\kappa}_s = \frac{\tilde{k}_s}{\tilde{\rho}_s \tilde{c}_{p_s}}$  représente la diffusivité thermique pour le solide. On note  $\tilde{k}_s$  le coefficient de conductivité thermique,  $\tilde{\rho}_s$  la masse volumique et  $\tilde{c}_{p_s}$  la chaleur massique à pression constante. On pourra tenir compte des différences de valeurs des propriétés physiques entre les différents solides (stack, échangeur froid, échangeur chaud).

### 2.3.2 Echelles et grandeurs de référence

L'adimensionnement se fait en utilisant les mêmes échelles caractéristiques du résonateur. La seule échelle différente est l'échelle spatiale utilisée, la longueur du stack  $\tilde{L}_{ref} = \tilde{L}_{st}$ . Si l'on se place à l'échelle du résonateur, ceci revient à faire une dilatation dans le rapport  $\frac{1}{M}$  en  $\hat{x} = 0$  ( $x = \frac{\hat{x}}{M}$ ). Dans le nouveau repère  $(x, y)$ , l'origine est au milieu des plaques du stack, et les extrémités de la cellule active sont repoussées à  $\pm\infty$  (voir figure 2.8).

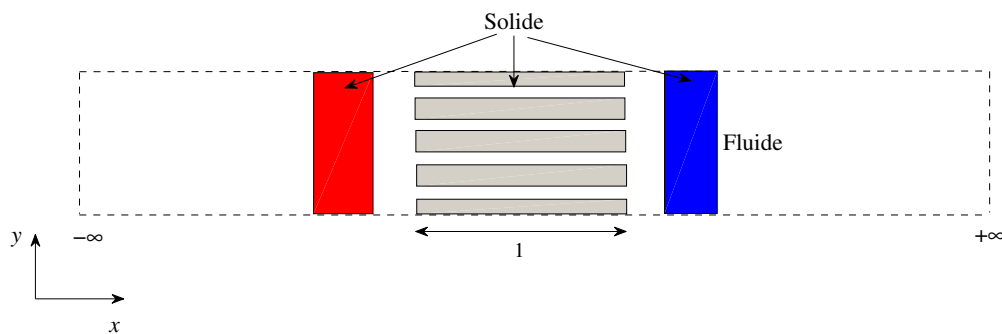


FIGURE 2.8 – Schéma de la cellule active.



### 2.3.3 Equations adimensionnées

Pour toutes les variables du problème, on a :

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_{ref}}, p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{ref}}, u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_{ref}}, v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{V}_{ref}},$$

$$x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_{ref}}, y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}_{ref}}, t = \frac{\tilde{t}}{\tilde{t}_{ref}}, \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_{ref}}, k = \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_{ref}}.$$

Les équations adimensionnées s'écrivent :

— Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.40)$$

— Conservation de la quantité du mouvement :

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = - \boxed{\frac{1}{\gamma M^2}} \nabla p + \boxed{\frac{1}{Re}} \mu \nabla \cdot \tau + \boxed{\frac{1}{Fr}} \rho \mathbf{e}_y \quad (2.41)$$

— Conservation de l'énergie :

$$\rho \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right] = \boxed{\frac{1}{Pe}} \nabla \cdot (k \nabla T) + \boxed{\left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p \right] + \boxed{(\gamma - 1) M^2 \frac{1}{Re}} \phi \quad (2.42)$$

— Loi d'état :

$$p = \rho T \quad (2.43)$$

Dans ces équations :

$Re = \frac{\tilde{\rho} \tilde{U}_{ref} \tilde{L}_{st}}{\tilde{\mu}}$  désigne le nombre de Reynolds de référence construit à partir de  $\tilde{U}_{ref}$  et  $\tilde{L}_{st}$ .

$Fr = \frac{\tilde{U}_{ref}^2}{\tilde{g} \tilde{L}_{st}}$  désigne le nombre de Froude de référence.

$Pe = \frac{\tilde{\rho} \tilde{c}_p \tilde{U}_{ref} \tilde{L}_{st}}{\tilde{k}}$  désigne le nombre de Péclet de référence.

On peut donc faire les hypothèses suivantes :

$$\boxed{Fr \gg Re, Pe \gg \frac{1}{M} \gg 1 \gg M}. \quad (2.44)$$

### 2.3.4 Développements asymptotiques

On cherche les variables adimensionnées sous forme de développements asymptotiques en fonction du nombre de Mach :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}^{(0)} + M\mathbf{V}^{(1)} + M^2\mathbf{V}^{(2)} + o(M^2) \\ T &= T^{(0)} + MT^{(1)} + M^2T^{(2)} + o(M^2) \\ p &= p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)} + o(M^2) \\ \rho &= \rho^{(0)} + M\rho^{(1)} + M^2\rho^{(2)} + o(M^2) \\ \mu &= \mu^{(0)} + M\mu^{(1)} + M^2\mu^{(2)} + o(M^2) \\ k &= k^{(0)} + Mk^{(1)} + M^2k^{(2)} + o(M^2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

On injecte les développements (2.45) dans les équations (2.40)-(2.43) et on identifie les coefficients de mêmes puissances de  $M$  :

— A l'ordre  $M^{-2}$ , de l'équation (2.41) on a :

$$\boxed{\nabla p^{(0)} = 0}$$

— A l'ordre  $M^{-1}$ , de l'équation (2.41) on a :

$$\boxed{\nabla p^{(1)} = 0}$$

— A l'ordre  $M^0$ , des équations (2.40), (2.41), (2.42) et (2.43) et en négligeant le terme de gravité, on a :

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{V}^{(0)}) = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial (\rho^{(0)} \mathbf{V}^{(0)})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{V}^{(0)} \otimes \mathbf{V}^{(0)}) = -\frac{1}{\gamma} \nabla p^{(2)} + \frac{1}{Re} \mu^{(0)} \nabla \cdot \tau^{(0)} \quad (2.47)$$

$$\rho^{(0)} \left[ \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + (\mathbf{V}^{(0)} \cdot \nabla) T^{(0)} \right] = \frac{1}{Pe} k^{(0)} \nabla \cdot (\nabla T^{(0)}) + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{dp^{(0)}}{dt} \quad (2.48)$$

$$p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} \quad (2.49)$$

Dans la suite, on prend  $\mu^{(0)}$  et  $k^{(0)}$  constants. En conclusion, le problème approché obtenu est :

— dans le fluide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p^{(1)} = 0 \\ \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{V}^{(0)}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho^{(0)} \mathbf{V}^{(0)})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^{(0)} \mathbf{V}^{(0)} \otimes \mathbf{V}^{(0)}) = -\frac{1}{\gamma} \nabla p^{(2)} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \tau^{(0)} \\ \rho^{(0)} \left[ \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + (\mathbf{V}^{(0)} \cdot \nabla) T^{(0)} \right] = \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (\nabla T^{(0)}) + \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{dp^{(0)}}{dt} \\ p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} = p^{(0)}(t) \end{array} \right. \quad (2.50)$$

— dans les plaques du stack :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pe_s} \nabla \cdot (\nabla T) \end{array} \right. \quad (2.51)$$

où  $Pe_s$  est le nombre de Péclet solide,  $Pe_s = \kappa_s / \kappa_f Pe$ .

— dans les plaques des échangeurs :

$$\mathbf{V} = 0, T = \begin{cases} T_h = \frac{\tilde{T}_h}{T_c} & \text{dans les plaques de l'échangeur chaud} \\ 1 & \text{dans les plaques de l'échangeur froid} \end{cases} \quad (2.52)$$

### 2.3.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées sur les interfaces entre fluide/solides sont la continuité de la température et du flux de chaleur ainsi que la condition d'adhérence pour la vitesse.

Les conditions aux limites imposées sur les frontières horizontales du domaine de la cellule active vont dépendre de la géométrie du système choisi.

Les conditions aux limites imposées sur les frontières verticales du domaine de la cellule active sont obtenues du raccordement avec la solution du modèle dans le résonateur. Plus précisément, la solution du résonateur (solution extérieure) et la solution de la cellule active (solution intérieure) doivent être raccordées lorsque  $M \rightarrow 0$ . Le raccord consiste à écrire que la vitesse, la température et la pression doivent approcher la même valeur suivant qu'elles sont calculées par la solution intérieure ou extérieure. Les échelles caractéristiques de ces variables étant les mêmes dans les deux approximations, la continuité des variables dimensionnelles induit la continuité des variables adimensionnelles. Ceci se traduit par les conditions suivantes :

— Pour la vitesse horizontale :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} u^{(0)}(x) = \lim_{\hat{x} \rightarrow 0^-} u^{(0)}(\hat{x}) = u_L \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u^{(0)}(x) = \lim_{\hat{x} \rightarrow 0^+} u^{(0)}(\hat{x}) = u_R \end{cases} \quad (2.53)$$

On a noté  $\lim_{\hat{x} \rightarrow 0^-} u^{(0)}(\hat{x}) = u_L$  et  $\lim_{\hat{x} \rightarrow 0^+} u^{(0)}(\hat{x}) = u_R$ . Les variables  $u_L$  et  $u_R$  dépendent du temps et représentent les vitesses acoustiques de part et d'autre de la cellule active.

— Vitesse verticale :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} v^{(0)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} v^{(0)}(\hat{x}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} v^{(0)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} v^{(0)}(\hat{x}) = 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Dans les résonateurs (gauche et droite) le champ de vitesse est 1D et donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} v^{(0)}(\hat{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} v^{(0)}(\hat{x}) = 0$ .

— Pression thermodynamique :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} p^{(0)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} p^{(0)}(\hat{x}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} p^{(0)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} p^{(0)}(\hat{x}) = 1 \end{cases} \quad (2.55)$$

Dans les résonateurs, la pression moyenne est constante, donc  $\lim_{x \rightarrow 0^-} p^{(0)}(\hat{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} p^{(0)}(\hat{x}) = 1$ .

— Pression acoustique :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} p^{(1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} p^{(1)}(\hat{x}) = p^{(1)}(0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} p^{(1)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} p^{(1)}(\hat{x}) = p^{(1)}(0) \end{cases} \quad (2.56)$$

Dans les résonateurs,  $p^{(1)}$  est donnée par l'acoustique et elle est continue  $p^{(1)}(0^-) = p^{(1)}(0^+) = p^{(1)}(0)$ .

— Flux de chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial T^{(0)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=-\infty} = \frac{\partial T^{(0)}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0^-} = 0 \\ \frac{\partial T^{(0)}(x)}{\partial x} \Big|_{x=+\infty} = \frac{\partial T^{(0)}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0^+} = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Dans le résonateur la température moyenne est constante donc  $\frac{\partial T^{(0)}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0^-} = 0$ ,  $\frac{\partial T^{(0)}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0^+} = 0$

Dans ces conditions aux limites,  $u_L$ ,  $u_R$  et  $p^{(1)}$  sont inconnues mais elles caractérisent l'acoustique dans les résonateurs et sont reliées par les relations (2.28) et (2.33). Il manque donc une condition limite pour fermer le problème. Pour cela, on va intégrer l'équation de l'énergie (2.50-4) sur le domaine fluide de la cellule active. On utilise l'équation (2.50-2) et le développement à l'ordre  $O(1)$  de la dérivée temporelle de l'équation d'état (2.50-5).

En utilisant  $p^{(0)} = 1$  pour  $x \rightarrow \pm\infty$  et le fait que  $p^{(0)} = p^{(0)}(t)$ , on trouve  $p^{(0)} = 1$  partout. Au final [44], on obtient une équation donnant la divergence de  $\mathbf{V}^{(0)}$  :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{V}^{(0)} = \frac{1}{Pe} (\nabla \cdot (\nabla T^{(0)}))} \quad (2.58)$$

On peut alors intégrer cette équation sur tout le domaine du fluide ( $\Omega$ ) au sein de la cellule active, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{V}^{(0)}) d\Omega = \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} (\nabla \cdot (\nabla T^{(0)})) d\Omega \quad (2.59)$$

En utilisant la théorème de la divergence, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{V}^{(0)} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{Pe} \int_{\partial\Omega} \nabla T^{(0)} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.60)$$

avec  $\partial\Omega$  la frontière du domaine fluide au sein de la cellule active.

Quelque soit le type de condition sur la frontière horizontale (glissement ou adhérence), la vitesse horizontale sur les frontières du domaine est nulle et on a :

$$\boxed{S(u_L - u_R) = \frac{1}{Pe} \int_{\partial\Omega} \nabla T^{(0)} \cdot \mathbf{n} dS} \quad (2.61)$$

où  $S$  est la surface des frontières verticales du domaine.

En réécrivant les relations 2.28 et 2.33 entre les variables de Riemann aux extrémités de la cellule active, et en y ajoutant l'équation 2.61, on obtient trois équations à trois inconnues  $u_L$ ,  $u_R$  et  $p^{(1)}$  qui introduisent à chaque pas de temps, le couplage des solutions à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule active :

$$\left\{ \begin{array}{l} S [u_L(t) - u_R(t)] = \frac{1}{Pe} \int_{\partial\Omega} \nabla T^{(0)}(t) \cdot \mathbf{n} dS \\ \gamma u_L(t) + \sqrt{T_h^{(0)}} p^{(1)}(t) = -\mathcal{L}_L(0^-, t - t_L^{ar}), \quad t_L^{ar} = \left( \frac{2\hat{l}_L}{\sqrt{T_h^{(0)}}} \right) \\ \gamma u_R(t) - \sqrt{T_c^{(0)}} p^{(1)}(t) = \mathcal{Z}\mathcal{R}_R(0^+, t - t_R^{ar}), \quad t_R^{ar} = \left( \frac{2\hat{l}_R}{\sqrt{T_c^{(0)}}} \right) \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Dans les équations précédentes, on a utilisé  $T^{(0)} = T_h^{(0)}$  dans le résonateur à gauche de la cellule active, et  $T^{(0)} = T_c^{(0)}$  à droite de la cellule active.

### 2.3.6 Conditions initiales

- Pour la température  $T^{(0)}$  initiale, on imposera soit une variation linéaire entre les échangeurs, soit la solution de conduction thermique stationnaire qui sera présentée dans le chapitre suivant ;
- La vitesse  $\mathbf{V}^{(0)}$  et la pression dynamique  $p^{(2)}$  initiale sont nulles dans le domaine ;
- Une perturbation de type bruit aléatoire est introduite comme perturbation initiale pour la pression acoustique  $p^{(1)}$ .

## 2.4 Récapitulatif du modèle complet

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, on supprime l'indice (0) pour la vitesse et la température, et on utilisera  $p_1$  pour  $p^{(1)}$  et  $p_2$  pour  $p^{(2)}$ . Les équations à résoudre dans le fluide deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\frac{1}{\gamma} \nabla p_2 + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T \right] = \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (\nabla T) \\ \rho = \frac{1}{T}, \end{array} \right. \quad (2.63)$$

l'équation à résoudre dans le solide (en supposant que les matériaux constituant le stack et les échangeurs sont les mêmes) est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pe_s} \nabla \cdot (\nabla T) \quad (2.64)$$

et le couplage est effectué par les équations (2.62) écrites dans l'adimensionnement de la cellule active :

$$\left\{ \begin{array}{l} S [u_L(t) - u_R(t)] = \frac{1}{Pe} \int_{\partial\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \text{Flux} \\ \gamma u_L(t) + \sqrt{T_h} p_1(t) = -\gamma u_L \left( t - \frac{2Ml_L}{\sqrt{T_h}} \right) - \sqrt{T_h} p_1 \left( t - \frac{2Ml_L}{\sqrt{T_h}} \right) \quad \text{avec } l_L = \frac{\hat{l}_L}{M}, \\ \quad \quad \quad = -\mathcal{L}_L \left( t - \frac{2Ml_L}{\sqrt{T_h}} \right) \\ \gamma u_R(t) - \sqrt{T_c} p_1(t) = \mathcal{Z} \left[ \gamma u_R \left( t - \frac{2Ml_R}{\sqrt{T_c}} \right) - \sqrt{T_c} p_1 \left( t - \frac{2Ml_R}{\sqrt{T_c}} \right) \right] \quad \text{avec } l_R = \frac{\hat{l}_R}{M}. \\ \quad \quad \quad = \mathcal{Z} \mathcal{R}_R \left( t - \frac{2Ml_R}{\sqrt{T_c}} \right) \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Dans ce modèle hybride, on a développé les équations du modèle en deux parties. L'approximation acoustique linéaire dans le résonateur a une solution analytique ; l'approximation faible Mach des équations de Navier-Stokes nécessite une solution numérique ; le couplage des deux variables se fait par un raccordement des solutions lorsque  $M \rightarrow 0$  à chaque pas de temps.

Le modèle dans la cellule active est un modèle nonlinéaire instationnaire, qui peut être considéré "dynamiquement" incompressible. Le transfert de chaleur et les variations spatio-temporelles de la masse volumique à l'ordre dominant sont prises en compte dans le modèle. L'hypothèse fondamentale de "stack court" conduit au fait que la cellule active est acoustiquement compacte, c'est à dire qu'elle est transparente aux fluctuations de pression à l'ordre  $O(M)$  (la correction dynamique en pression étant à l'ordre  $O(M^2)$ ), mais se comporte comme une source de volume.

En supposant une différence de température constante au niveau des échangeurs et une perturbation initiale aléatoire, le système amplifie la perturbation et une oscillation



périodique s’installe, la fréquence de fonctionnement étant sélectionnée naturellement. Une différence de vitesse longitudinale est obtenue,  $\Delta u = u_L - u_R$ , au niveau de la cellule active. La source de volume est directement liée à la puissance acoustique délivrée par ce moteur idéalisé. Malgré le fait que la pression acoustique n’intervienne pas dans les équations de la cellule active, elle est présente à travers les conditions limites de raccord avec l’acoustique du résonateur. Elle peut être calculée à chaque pas de temps par les caractéristiques et les vitesses  $u_L$ ,  $u_R$  issues de la simulation numérique.

La cellule active se comporte comme un tout, un seul volume qui en absorbant de la chaleur pendant la phase de compression et en cédant de la chaleur pendant la phase de détente, provoque une amplification de l’oscillation. Le critère de Rayleigh pour l’instabilité thermoacoustique est ainsi vérifié.

C’est une différence majeure avec les modèles linéaires : dans le volume de fluide occupant la cellule active, chaque petite parcelle de fluide (volume élémentaire) fait un cycle acoustique pendant lequel elle échange de la chaleur avec le stack. L’amplification de l’oscillation du volume entier de chaque volume est le résultat du travail d’amplification de chaque volume élémentaire qui se transmet de proche en proche tout au long de la cellule. Le modèle linéaire ne peut pas rendre compte des interactions entre modes acoustiques, ni des non-linéarités hydrodynamiques à l’intérieur du stack, ni des effets multidimensionnels liés à une géométrie potentiellement complexe du stack.

L’intérêt du modèle hybride utilisé dans notre étude est précisément l’étude de ces aspects, découplés des non-linéarités qui peuvent exister dans le résonateur.

# Chapitre 3

## Méthode numérique

### 3.1 Introduction

Les équations instationnaires obtenues au chapitre précédent (2.63, 2.64, 2.65) sont résolues numériquement en associant une discrétisation en volumes finis du problème posé sur la cellule active d'un écoulement dynamiquement incompressible avec densité variable, et une discrétisation en temps des conditions limites traduisant le couplage avec l'acoustique linéaire 1D dans le résonateur. Ce chapitre est consacré à la description de la méthode numérique de résolution de ces équations.

Des simulations numériques des équations de Navier-Stokes compressibles dans l'hypothèse faible nombre de Mach ont déjà été réalisées en thermoacoustique sur la cellule active [20, 110, 111, 112, 113], mais sans prendre en compte un couplage réel avec l'acoustique dans le résonateur. La première implémentation numérique du modèle avec couplage utilisé dans ce travail a été réalisée par O. Hireche [44, 45, 46]. Afin de réaliser correctement le couplage, le domaine de simulation de la cellule active est centré sur l'ensemble stack-échangeurs et est ensuite étendu sur la gauche et la droite par des régions fluides sans obstacle pour assurer le raccordement à l'infini avec la solution dans le résonateur. Le domaine de simulation peut être allongé autant que nécessaire pour retrouver un écoulement 1D longitudinal en entrée/sortie de cellule active. Dans la pratique, on utilisera

des domaines de simulation dont la longueur est de quatre à cinq fois la longueur du stack.

Des méthodes numériques diverses ont été développées depuis une vingtaine d'années pour la résolution des équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse faible nombre de Mach [58]. On distingue essentiellement les approches adaptées des méthodes utilisées pour les écoulements compressibles [16, 15] de celles adaptées de méthodes utilisées pour les écoulements incompressibles [103]. Dans cette étude, l'algorithme principal de résolution du problème sur la cellule active utilise une méthode à pas fractionnaire, développée pour résoudre les équations Navier-Stokes dynamiquement incompressibles avec densité variable [58]. Un maillage cartésien décalé de la cellule active est introduit. Les schémas de discrétisation spatiale et temporelle sont d'ordre 2. Pour la discrétisation temporelle, on utilise un schéma de type Euler retardé. Un schéma explicite est utilisé pour les termes convectifs, et un schéma implicite est utilisé pour les termes diffusifs. Le maillage étant cartésien, les systèmes de Helmholtz obtenus sont résolus par une méthode ADI, et la correction de pression dynamique est déterminée par une méthode multigrille. L'introduction d'une fonction de phase permet de résoudre simultanément les équations dans le domaine fluide et sur les parties solides (échangeurs, plaques du stack). Le couplage est mis en place en résolvant à chaque pas de temps les 3 équations liant les invariants de Riemann définis aux 2 extrémités de la cellule active et l'intégrale du flux de chaleur sur les frontières du domaine fluide de la cellule active. La résolution fournit alors à chaque pas de temps les vitesses 1D aux extrémités de la cellule active  $u_L$  et  $u_R$  qui servent de conditions limites au problème en vitesse, ainsi que la valeur de la pression acoustique  $p_1$  qui est homogène sur toute la cellule active.

Dans un premier temps, on présente la discrétisation temporelle générale des équations ainsi que la mise en œuvre pratique du couplage. La deuxième partie est consacrée à la discrétisation spatiale, avec une présentation du maillage décalé et la discrétisation en volumes finis, y compris le traitement des conditions aux limites. La troisième partie est consacrée à la présentation des méthodes de résolution adaptées au code. La quatrième

partie est consacrée à la présentation du principe de l'algorithme complet, en particulier en ce qui concerne l'initialisation des calculs, mais aussi la vérification des conditions de stabilité numérique.

## 3.2 Discrétisation temporelle

Dans ce travail de thèse, on s'est intéressé à la fois au démarrage et au régime périodique d'un moteur thermoacoustique. Les simulations numériques associées sont donc intrinsèquement instationnaires. Par ailleurs, dans le modèle utilisé, on ne fait aucune hypothèse sur la fréquence de l'onde qui va s'établir en régime périodique. La seule donnée est le temps de référence basé sur la fréquence de résonance du résonateur vide de tout stack et de tout échangeur, et rempli de gaz à la pression moyenne imposée, et à la température froide. C'est donc ce temps adimensionné qui va être discrétisé, en prévoyant plusieurs pas de temps par unité de temps adimensionné (environ 100 au démarrage de l'onde puis jusqu'à 1000 en fin de simulation, lorsque le régime périodique s'établit). La discrétisation temporelle des équations (2.63, 2.64) est effectuée avec des schémas à 3 pas de temps. La résolution des équations couplées entre  $t^{n-1}$ ,  $t^n$  et  $t^{n+1}$  s'effectue en plusieurs étapes. On note  $\delta t$  le pas de temps supposé constant. Connaissant les champs de vitesse, de pression dynamique, de température et de densité sur toute la cellule active à  $t^{n-1}$  et  $t^n$ , on calcule les solutions à  $t^{n+1}$  suivant l'algorithme :

1. Résolution de l'équation de conservation de l'énergie. Le champ de température à  $t^{n+1}$ ,  $T^{n+1}$  est déterminé à partir des équations de l'énergie (2.63, 2.64) (fluide, solide). La discrétisation temporelle a été effectuée en utilisant un schéma de type Euler retardé d'ordre 2. Le terme convectif est discrétisé en utilisant le schéma Adams-Bashforth, et pour le terme diffusif on utilise un schéma implicite. En prenant la masse volumique égale à sa valeur à l'instant précédent, dans le fluide

on a :

$$\rho^n \left[ \frac{3T^{n+1} - 4T^n + T^{n-1}}{2\delta t} + 2((\mathbf{V} \cdot \nabla)T)^n - ((\mathbf{V} \cdot \nabla)T)^{n-1} \right] = \left( \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (\nabla T) \right)^{n+1} \quad (3.1)$$

ou encore :

$$\left[ \mathbf{I} - \frac{2\delta t}{3\rho^n Pe} \nabla^2 \right] T^{n+1} = \frac{4}{3}T^n - \frac{1}{3}T^{n-1} - \frac{2\delta t}{\rho^n} [2((\mathbf{V} \cdot \nabla)T)^n - ((\mathbf{V} \cdot \nabla)T)^{n-1}] \quad (3.2)$$

La discrétisation temporelle de l'équation dans le solide est effectuée de manière analogue.

On peut ensuite calculer le champ de densité dans le fluide par la dernière équation (2.63) :

$$\rho^{n+1} = \frac{1}{T^{n+1}} \quad (3.3)$$

2. Afin de résoudre le problème en vitesse, il est nécessaire de spécifier les conditions limites  $u_L(t^{n+1})$  et  $u_R(t^{n+1})$ . Pour cela, on résout les équations de couplage (2.62) en  $t^{n+1}$ .

Notons  $t_L^{ar}$  (respectivement  $t_R^{ar}$ ) le temps de déplacement aller-retour de l'onde acoustique entre l'extrémité gauche (respectivement droite) de la cellule active et l'extrémité gauche (respectivement droite) du résonateur.

$$\begin{cases} t_L^{ar} = \frac{2Ml_L}{\sqrt{T_h}} \\ t_R^{ar} = \frac{2Ml_R}{\sqrt{T_c}} = 2Ml_R \end{cases} \quad (3.4)$$

A chaque pas de temps, l'écriture des équations (2.62) nécessite la connaissance de la valeur des invariants de Riemann  $\mathcal{L}_L(0^-, t)$  (respectivement  $\mathcal{R}_R(0^+, t)$ ) au niveau de l'extrémité gauche (respectivement droite) au temps antérieur  $t^{n+1} - t_L^{ar}$  (respectivement  $t^{n+1} - t_R^{ar}$ ).

C'est pourquoi, à chaque pas de temps, une fois les valeurs  $u_L^{n+1}$ ,  $u_R^{n+1}$  et  $p_1^{n+1}$  calculées, on va en déduire les valeurs de  $\mathcal{L}_L(0^-, t)$  et  $\mathcal{R}_R(0^+, t)$  et les stocker dans un tableau à 2 colonnes pour utilisation ultérieure. On construit ainsi un tableau contenant les valeurs de  $\mathcal{L}_L^n$  et  $\mathcal{R}_R^n$ .

Au pas de temps  $t^{n+1}$ , on va utiliser la partie utile de ce tableau pour rechercher les valeurs encadrant  $\mathcal{L}_L(0^-, t^{n+1} - t_L^{ar})$  et  $\mathcal{R}_R(0^+, t^{n+1} - t_R^{ar})$ , effectuer une interpolation et en déduire une valeur approchée de des invariants de Riemann  $\mathcal{L}_L^*$  et  $\mathcal{R}_R^*$  au temps  $t^{n+1}$ . On note

$$n_L = E\left(\frac{t_L^{ar}}{\delta t}\right) + 1 \quad (3.5)$$

et

$$n_R = E\left(\frac{t_R^{ar}}{\delta t}\right) + 1 \quad (3.6)$$

Alors, en introduisant

$$\zeta_L = n_L - \frac{t_L^{ar}}{\delta t} \quad (3.7)$$

et

$$\zeta_R = n_R - \frac{t_R^{ar}}{\delta t} \quad (3.8)$$

On a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_L^* = (1 - \zeta_L)\mathcal{L}_L^{n+1-n_L} + \zeta_L\mathcal{L}_L^{n+2-n_L} \\ \mathcal{R}_R^* = (1 - \zeta_R)\mathcal{R}_R^{n+1-n_R} + \zeta_R\mathcal{R}_R^{n+2-n_R} \end{cases} \quad (3.9)$$

Les équations de couplage s'écrivent alors

$$\begin{cases} S(u_L^{n+1} - u_R^{n+1}) = \frac{1}{P_e} \int_{\partial\Omega} (\nabla T)^{n+1} \cdot \mathbf{n} dS = \text{Flux} \\ \gamma u_L^{n+1} + \sqrt{T_h} p_1^{n+1} = -\mathcal{L}_L^* \\ \gamma u_R^{n+1} - \sqrt{T_c} p_1^{n+1} = \mathcal{Z} \mathcal{R}_R^* \end{cases} \quad (3.10)$$

La variable "Flux" est calculée à partir du champ de température déterminé à l'étape 1 de l'algorithme. La solution du système (3.10) s'écrit

$$\begin{cases} p_1^{n+1} = \mathcal{L}_L^* + \mathcal{Z}\mathcal{R}_R^* - \frac{\text{Flux}}{S} \\ u_L^{n+1} = -\frac{\sqrt{T_h}p_1^{n+1} - \mathcal{L}_L^*}{\gamma} \\ u_R^{n+1} = \frac{\sqrt{T_c}p_1^{n+1} + \mathcal{Z}\mathcal{R}_R^*}{\gamma} \end{cases} \quad (3.11)$$

Enfin, on peut calculer les nouvelles valeurs de Riemann par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_L^{n+1} = \gamma u_L^{n+1} - \sqrt{T_h}p_1^{n+1} \\ \mathcal{R}_R^{n+1} = \gamma u_R^{n+1} + \sqrt{T_c}p_1^{n+1} \end{cases} \quad (3.12)$$

3. Pour obtenir le champ de vitesse à  $t^{n+1}$ , on procède en 2 étapes. L'algorithme développé ici permettant de traiter l'écoulement à faible nombre de Mach et à densité variable est adapté des méthodes de projection utilisées en écoulement incompressible établies par Temam [97] et Chorin [27].

— **Prédiction** : On cherche d'abord un champ de vitesse intermédiaire  $\mathbf{V}^*$  à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement. La discrétisation temporelle a été effectuée en utilisant un schéma de type Euler retardé d'ordre 2. On utilise un schéma explicite pour les termes convectifs et un schéma implicite pour les termes diffusifs. L'équation donnant  $\mathbf{V}^*$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{3\rho^{n+1}\mathbf{V}^* - 4\rho^n\mathbf{V}^n + \rho^{n-1}\mathbf{V}^{n-1}}{2\delta t} + 2(\nabla \cdot (\rho\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}))^n - \\ (\nabla \cdot (\rho\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}))^{n-1} = -\frac{1}{\gamma}\nabla p_2^n + \left(\frac{1}{Re}\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\right)^* \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le champ solution  $\mathbf{V}^*$  ne vérifie pas la valeur attendue de la divergence donnée par l'équation 2.58 écrite au temps  $t^{n+1}$  :

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})^{n+1} = \frac{1}{Pe}(\nabla \cdot (\nabla T))^{n+1} \quad (3.14)$$

— **Correction** : On introduit une fonction auxiliaire  $\Phi$  telle que :

$$(\rho \mathbf{V})^{n+1} = \rho^{n+1} \mathbf{V}^* - \delta t \nabla \Phi \quad (3.15)$$

soit

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^* - \frac{\delta t}{\rho^{n+1}} \nabla \Phi \quad (3.16)$$

En prenant la divergence de l'équation 3.16, on montre que  $\Phi$  doit vérifier l'EDP elliptique suivante :

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho^{n+1}} \nabla \Phi = - \frac{\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{V}^*}{\delta t} \quad (3.17)$$

On impose des conditions aux limites pour  $\Phi$  de type Neumann homogène. Une fois  $\Phi$  déterminée, on obtient  $\mathbf{V}^{n+1}$  et  $p_2^{n+1}$  corrigés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{n+1} &= \mathbf{V}^* - \frac{\delta t}{\rho^{n+1}} \nabla \Phi \\ p_2^{n+1} &= p_2^n + \frac{3}{2} \Phi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La solution  $\mathbf{V}^{n+1}$  satisfait alors à l'équation de la divergence 3.14.

### 3.3 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale est réalisée par la méthode des volumes finis [102]. On introduit un maillage cartésien du domaine de calcul, comprenant le domaine fluide et les domaines solides représentant le stack et les échangeurs. La cellule active se raccorde à l'infini avec la solution dans le résonateur. La longueur de la cellule active doit être assez grande pour pouvoir retrouver un écoulement longitudinal en entrée et sortie. Sur les frontières verticales entre la cellule active et les résonateurs, la vitesse horizontale et la pression acoustique doivent approcher les valeurs  $u_L$ ,  $u_R$ ,  $p_1$  satisfaisant au couplage. Sur ces deux frontières verticales, on impose que la vitesse verticale est nulle et que  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ .



Le maillage est décalé de façon classique (voir l'exemple en 2D représenté sur la figure 3.1), avec les valeurs de pression, densité et température définies aux centres des cellules, et les composantes de vitesses définies aux centres des faces des cellules.

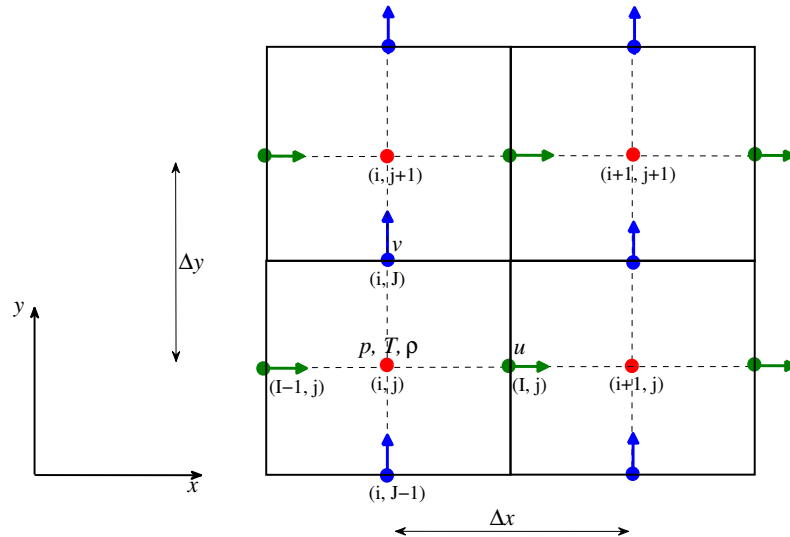


FIGURE 3.1 – Schéma général présentant la discrétisation et le maillage. Positions de la température, de la densité et de la pression (rouge), de la vitesse horizontale (vert) ainsi que la vitesse verticale (bleu).

Les équations sont résolues simultanément sur les domaines fluide et solide grâce à l'introduction d'une fonction de phase, définie au centre de chaque cellule. La fonction de phase est fixée égale à 1 sur les cellules fluides, et à 0 sur les cellules solides (Fig. 3.2). Sur les cellules solides on peut ainsi imposer une densité et une diffusivité thermique choisie ainsi qu'une viscosité très grande ( $10^{30}$ ) afin d'y obtenir une vitesse nulle. La fonction de phase permet de différencier les points solides des points fluides et d'assurer la continuité de température et de flux de chaleur aux interfaces fluide/solide.

Le traitement des conditions aux limites sur les frontières du domaine est réalisé en introduisant des mailles fictives tout autour du domaine de calcul. Les conditions aux limites sont alors calculées à l'ordre 2. Aux interfaces solides/fluides, la température et le flux de chaleur sont bien imposés continus, car on définit les propriétés physiques ( $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ) aux interfaces comme la moyenne géométrique des propriétés aux centres des cellules. Aux frontières du fluide, pour la résolution de l'EDP (3.17), on impose  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ .

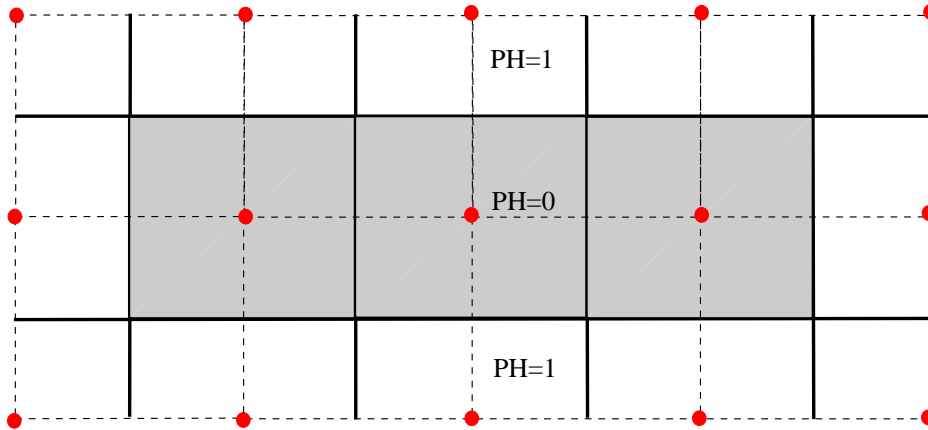


FIGURE 3.2 – Fonction de phase. Le domaine solide (gris) est caractérisé par  $PH=0$ , et le domaine fluide (blanc) est caractérisé par  $PH=1$ .

## 3.4 Méthodes de résolution

### 3.4.1 Résolution par ADI

Pour la résolution des systèmes 3.2 et 3.13, on utilise le caractère cartésien du maillage pour mettre en place une approche ADI (Alternating Direction Implicit). Par exemple en 2D, l'opérateur

$$[\mathbf{I} - a\nabla^2] = [\mathbf{I} - a(\nabla_x^2 + \nabla_y^2)] \quad (3.19)$$

est factorisé sous la forme

$$[\mathbf{I} - a\nabla^2] = (\mathbf{I} - a\nabla_x^2) (\mathbf{I} - a\nabla_y^2) \quad (3.20)$$

en négligeant le terme  $a^2\nabla_x^2\nabla_y^2$ .

La résolution de

$$[\mathbf{I} - a\nabla^2] X = b \quad (3.21)$$

s'effectue alors en deux étapes :

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - a\nabla_x^2)Y &= b \\(\mathbf{I} - a\nabla_y^2)X &= Y.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Les systèmes définissant  $X$  et  $Y$  étant des systèmes tridiagonaux, la résolution de chacune de ces étapes s'effectue par l'algorithme de Thomas.

### 3.4.2 Méthode Multigrille

L'EDP elliptique 3.17 est résolue à chaque pas de temps. Pour accélérer la convergence, on utilise une méthode multigrille [24] qui est bien adaptée pour un maillage cartésien. Les méthodes itératives du type SOR sont très efficaces pour l'élimination des composantes haute fréquence de l'erreur, mais elles ne permettent pas d'éliminer les composantes basse fréquence de l'erreur sur une grille fixe. Il est possible d'accélérer le taux de convergence sur la grille fine en utilisant plusieurs grilles moins fines, sachant que la composante basse fréquence de l'erreur se comporte comme une composante haute fréquence dans une grille plus grossière.

#### Procédure

La méthode itérative (ici SOR, le paramètre de relaxation  $w$  étant un paramètre d'ajustement), permet de lisser les composantes haute fréquence de l'erreur sur une grille  $m$ , et on forme alors l'équation résiduelle. On restreint le résidu au moyen d'un opérateur de restriction sur une grille plus grossière et on effectue quelques itérations par la méthode itérative. On continue le même processus jusqu'à atteindre la grille la plus grossière. Une fois la grille grossière atteinte, la correction de la solution est projetée au moyen d'un opérateur de projection, sur une grille plus fine où quelques étapes de relaxation sont réalisées avant une nouvelle projection sur une grille plus fine. Le même procédé est répété jusqu'à atteindre la grille la plus fine. De cette manière, un simple cycle multigrille représenté sur la figure 3.3 et communément appelé V-cycle est une suite d'itérations et

de restrictions de la grille la plus fine jusqu'à la grille la plus grossière suivies par une succession de projections et d'itérations de la grille la plus grossière jusqu'à la grille la plus fine.

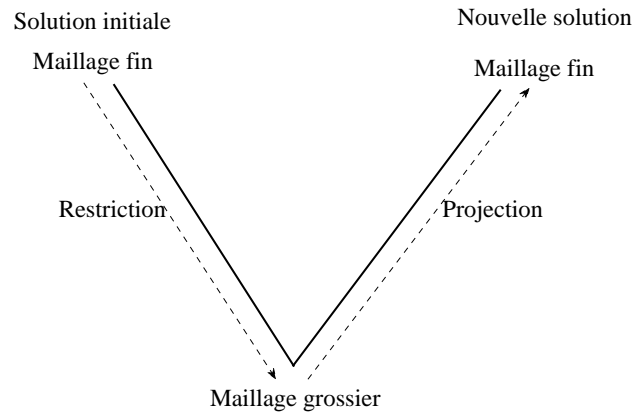


FIGURE 3.3 – Principe de la méthode du multigrille, V-cycle.

### 3.5 Algorithme-Mise en oeuvre

On décrit ci-dessous le programme principal du code, qui est écrit en Fortran.

1. Mise en place du cas : géométrie du domaine de simulation et définition de la fonction de phase, définition des propriétés physiques sur chaque cellule, des nombres caractéristiques (Mach, Reynolds, Peclet,  $\gamma$ ), des températures fixées aux échangeurs, et de la valeur choisie pour la charge, des paramètres numériques (pas de temps, paramètres de la méthode multigrille, nombre de pas de temps à effectuer). Le pas de temps est choisi de façon à respecter la condition de stabilité numérique de type CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), qui s'exprime sous la forme :

$$\frac{\delta t}{\Delta x} \max|u| \leq 1 \quad (3.23)$$

Deux cas sont à distinguer :

Soit il s'agit d'un calcul à partir de  $t = 0$ , soit il s'agit d'une reprise à partir d'un calcul déjà effectué jusqu'au temps  $t = t_0$ . Dans ce cas, on choisit le pas de temps en se basant sur les valeurs obtenues de l'amplitude de vitesse.

## 2. Initialisation du calcul :

### Initialisation à partir de $t = 0$ :

On initialise les champs de vitesses et de pression dynamique à zéro sur la cellule active. La température chaude étant différente de la température froide, la diffusion de la chaleur va initialialement créer un gradient de température le long du stack. On calcule donc d'abord le champ de conduction stationnaire qui servira d'initialisation pour la simulation de l'amplification thermoacoustique. Pour cela, on utilise le même code, en imposant que toutes les vitesses soient nulles (pas d'écoulement). Le temps est adimensionné par le temps de conduction (dans le solide) pour ce calcul.

On calcule ce champ de conduction, une fois la géométrie et les paramètres thermophysiques fixés, pour une certaine valeur de la température à l'échangeur chaud  $T_h$ . Ensuite, si la température pour le cas de simulation est différente, on utilise la linéarité du problème de conduction pour calculer le champ de température initial correspondant.

On fixe aussi, pour tous les instants nécessaires aux temps précédant l'instant "0", les invariants de Riemann  $\mathcal{L}_L^k$  et  $\mathcal{R}_R^k$  en entrée et sortie de la cellule active à des valeurs aléatoires d'ordre  $A \times 10^{-5}$  où  $A$  est une fonction permettant de générer des nombres pseudo-aléatoires entre 0 et 1. (de façon à simuler un bruit aléatoire de faible amplitude). Ces valeurs des invariants de Riemann  $\mathcal{L}_L^k$  et  $\mathcal{R}_R^k$  sont ensuite utilisées aux  $n_L$  et  $n_R$  premiers pas de temps.

### Initialisation à partir d'un calcul précédent :

Dans le cas d'une reprise, le code relit les champs de vitesse, température, pression

dynamique des temps  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , ainsi que les valeurs des invariants de Riemann aux  $n_L$  et  $n_R$  instants précédant le temps  $t_{n+1}$ .

3. Boucle temporelle :

L'avancée en temps suit l'algorithme décrit à la section 3.2. A chaque pas de temps, on sauvegarde les invariants de Riemann, la pression acoustique et quelques grandeurs que l'on souhaite monitorer (températures, vitesses en certains points, flux de chaleur, etc.).

4. Ecriture et sauvegardes :

Le code écrit, à la fin des pas de temps réalisés, les champs de vitesse, température, pression dynamique pour une reprise éventuelle du calcul et pour le post-traitement. On conserve également les  $n_L$  et  $n_R$  dernières valeurs des invariants de Riemann.

## 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté le principe de la méthode numérique. Le couplage entre la cellule active et le résonateur est résolu à chaque pas de temps. La mise en œuvre peut être réalisée pour diverses géométries de la cellule active (stack, échangeurs) et pour divers choix des paramètres thermophysiques. Dans le chapitre suivant, on simulera un moteur thermoacoustique idéalisé sans charge de l'amplification initiale jusqu'à la saturation.

# Chapitre 4

## Saturation d'un moteur

### thermoacoustique idéalisé non chargé

Dans les chapitres précédents, on a présenté en détail le modèle utilisé et la mise en œuvre numérique. On présente ici un exemple de simulation numérique d'un moteur thermoacoustique idéalisé sans charge. Dans un premier temps, on présente le cas physique simulé (géométrie et paramètres physiques) ainsi que les simplifications adoptées pour la simulation, et les paramètres numériques choisis. Ensuite, on présente les résultats obtenus, du déclenchement de l'instabilité thermoacoustique jusqu'au régime périodique, et une étude de convergence est menée.

#### 4.1 Présentation du dispositif et choix de paramètres

Dans ce chapitre, le dispositif expérimental 1 a servi de base pour définir un cas simplifié de moteur thermoacoustique, tout en conservant les ordres de grandeurs d'une machine réelle.

### 4.1.1 Définition du cas physique simulé

#### Géométrie

Le dispositif expérimental de référence 1 (LIMSI) a été présenté dans le chapitre 2 (section 2.1.1). On s'inspire de ce dispositif pour proposer un cas d'étude simplifié (Fig. 4.1). La géométrie de travail est bidimensionnelle, ce qui revient à considérer que le résonateur est un canal plan et que le stack est constitué d'un empilement de plaques planes d'extension infinie dans la direction perpendiculaire au plan. De même, on simplifie la géométrie des échangeurs en considérant qu'ils sont aussi constitués d'empilements de plaques planes.

La longueur du résonateur est choisie égale à celle du dispositif de référence,  $\tilde{L}_{res} = 7.57$  m. De même, on fixe la longueur du stack  $\tilde{L}_{st} = 15$  cm, et la position du centre du stack donnée par  $\tilde{l}_L = 68$  cm et  $\tilde{l}_R = 6.89$  m égales à celles du dispositif de référence.

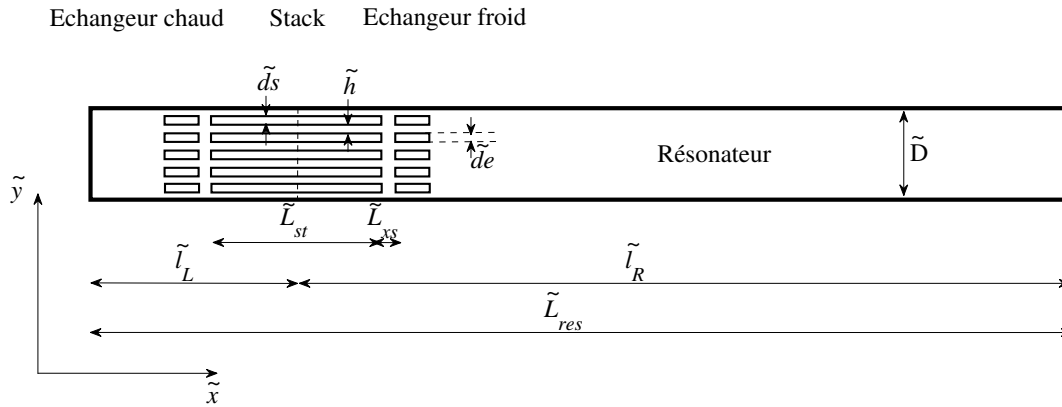


FIGURE 4.1 – Représentation 2D du dispositif expérimental du LIMSI.

Dans la direction perpendiculaire, on fixe la hauteur du canal résonateur égale au diamètre intérieur dans le dispositif de référence,  $\tilde{D} = 5.63$  cm. L'épaisseur des plaques est prise égale à celle des plaques du dispositif expérimental,  $\tilde{d}_s = 0.2$  mm et l'espace interplaques est fixé pour que la porosité soit respectée ( $\approx 80\%$ ), soit  $\tilde{h} = 0.77$  mm.



Gaz : Helium				
$\tilde{r}$	$\gamma$	$\tilde{\mu}$	$\tilde{k}$	$\tilde{c}_p$
( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )		( $\text{Pa}\cdot\text{s}$ )	( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ )	( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )
2077.235	1.67	$2\cdot 10^{-5}$	0.1505	5193
Solides : Inox 304 L				
$\tilde{\rho}_s$		$\tilde{k}_s$		$\tilde{c}_{ps}$
( $\text{Kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )		( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ )		( $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )
7900		14.9		477

TABLE 4.1 – Propriétés physiques du fluide et des solides pour la simulation.

La géométrie des échangeurs est, elle aussi, simplifiée : on décide de considérer chaque échangeur comme un empilement de plaques, de longueur  $\tilde{L}_{hx} = 7.5$  mm chacun [23] et de même porosité que celle du stack (car c'est à peu près le cas dans le dispositif expérimental). On choisit la même épaisseur pour les plaques des échangeurs et celles du stack,  $\tilde{d}_e = 0.2$  mm (ce qui revient à fixer le même nombre de plaques pour le stack et les échangeurs). Comme il existe toujours un petit espace entre les échangeurs et le stack, on choisit la distance horizontale  $\tilde{L}_{xs}$  égale à l'espace interplaques  $\tilde{h}$ .

### Propriétés caractéristiques

On choisit le même gaz que pour l'expérience, donc de l'hélium à la température froide  $\tilde{T}_c = 293$  K et à pression moyenne  $\tilde{P}_m = 10$  bar. Les propriétés thermophysiques de l'hélium ( $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{c}_p$ ,  $\tilde{k}$ ,  $\tilde{r}$ ) sont choisies constantes, fixées aux valeurs correspondant à la pression  $\tilde{P}_m$  et à la température  $\tilde{T}_c$ . De même, on choisit de l'inox 304L pour le solide constituant le stack et les échangeurs, comme dans l'expérience, et on fixe ainsi  $\tilde{c}_{ps}$ ,  $\tilde{k}_s$ ,  $\tilde{\rho}_s$ . Les propriétés du fluide ainsi que celles des solides sont présentées dans le tableau 4.1.

Le stack étant constitué d'un grand nombre de plaques (57), on considère que les empilements de plaques du stack et des échangeurs sont périodiques réguliers. Par ailleurs, on néglige l'effet de la gravité. On isole donc une tranche comprise entre deux demi-plaques du stack et s'étendant ensuite sur les parties gauche et droite du résonateur (Fig. 4.1). Pour la simulation numérique on a implémenté des conditions limites de symétrie

aux frontières horizontales du domaine au lieu des conditions limites de périodicité. On limite ensuite la cellule active, qui est infinie dans le modèle. On choisit cette longueur suffisamment grande pour que l'écoulement redevienne longitudinal en entrée et en sortie de cellule active (qui sont les positions du raccord avec l'acoustique 1D dans le résonateur), mais pas trop grande car plus la longueur augmente, plus le nombre de points de maillage est important et donc la durée du calcul. Pour cela, on considère ici  $\tilde{L}_{cellule} = 4\tilde{L}_{st} = 60$  cm.

On a ainsi défini complètement le domaine de simulation pour la cellule active (voir sur la figure 4.2, une représentation qui ne respecte pas les échelles).

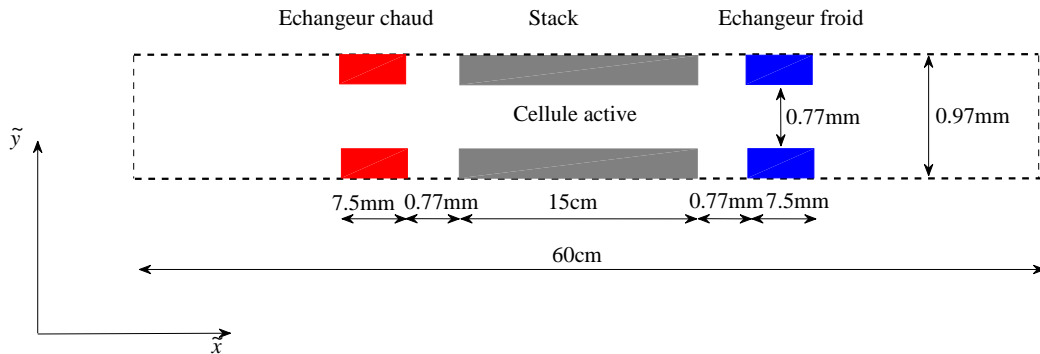


FIGURE 4.2 – Domaine de simulation. Config. LIMSI.

#### 4.1.2 Conditions physiques du cas de simulation

Sur les plaques des échangeurs de chaleur, on choisit d'imposer une température fixée : température chaude  $\tilde{T}_h$  à l'échangeur chaud, et température froide  $\tilde{T}_c$  à l'échangeur froid. La valeur de la température chaude  $\tilde{T}_h$  est fixée après estimation de la valeur de seuil  $\tilde{T}_{hcrit}$  (donnée par estimation numérique sur quelques périodes). On choisira, pour obtenir la saturation en un temps raisonnable, une valeur de  $\tilde{T}_h$  juste supérieure à la valeur critique

$\tilde{T}_{hert}$ . En effet, si  $\tilde{T}_h < \tilde{T}_{hert}$ , toute perturbation sera amortie et le moteur ne démarre pas. Si  $\tilde{T}_h$  est choisie très supérieure à la température critique, les perturbations sont très amplifiées, l'amplitude de vitesse augmente trop vite et le pas de temps, limité par la condition de CFL doit être trop petit pour que le temps de calcul reste raisonnable. Dans la suite de ce chapitre, on a donc fixé, après plusieurs essais, la valeur de  $\tilde{T}_h = 352$  K, ce qui correspond à  $\frac{\tilde{T}_h}{\tilde{T}_c} = 1.2$ .

Le dernier choix concerne celui de la condition limite à l'extrémité droite du résonateur. Pour cet exemple, on a décidé de prendre un cas de résonateur non chargé. Pour cela, on peut choisir soit le coefficient de transmission acoustique  $Z = -1$  (extrémité fermé) soit  $Z = 1$  (extrémité ouverte). Le résonateur du dispositif de référence étant fermé, on décide de choisir  $Z = -1$ , mais ce cas ne peut pas être traité complètement car si la charge est nulle, l'amplification est énorme et la saturation très longue à obtenir. Les simulations présentées dans la suite de ce chapitre ont été réalisées pour une valeur proche,  $Z = -0.96$ .

### 4.1.3 Paramètres numériques de la simulation

#### Equations

Pour obtenir les équations finales à résoudre par le code, on doit faire un adimensionnement en utilisant les grandeurs de référence définies dans le chapitre 2. Le rapport de forme du domaine de la cellule active  $\frac{\tilde{L}_{cellule}}{\tilde{H}}$  est de l'ordre de 600. Pour l'implémentation numérique, en raison de la géométrie allongée de la cellule active (très longue et fine), il nous a donc semblé préférable de choisir la hauteur du domaine  $\tilde{H}$  comme longueur de référence. Cependant, pour présenter les résultats, on reviendra toujours à l'adimensionnement du modèle, c'est-à-dire que  $\tilde{L}_{st}$  sera bien la longueur de référence dans le domaine de la cellule active. En raison de la simplification du domaine de la cellule active, l'équa-

tion de couplage (2.65) se simplifie en :

$$H [u_L(t) - u_R(t)] = \frac{1}{P_e} \int_{\partial\Omega} \nabla T \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.1)$$

où  $H = \frac{\tilde{H}}{\tilde{L}_{st}}$  est la hauteur adimensionnée du domaine de simulation.

### Maillage spatial

Le maillage utilisé par la simulation est cartésien régulier. Comme on utilise la méthode multigrille, on choisit un nombre de points multiple de 2 dans les deux directions. Pour éviter les problèmes de divergence des schémas, le rapport de forme des mailles  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$  doit être limité, et on décide de prendre  $1 \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} \leq 10$ . D'autre part, pour que l'équation de diffusion soit correctement résolue dans les plaques du stack, le maillage doit intégrer au moins 4 points de maillage dans chaque demi-épaisseur des plaques du stack et des échangeurs. Donc dans la direction  $y$  pour un maillage régulier, le nombre de cellules ne doit pas être inférieur à 32. Dans la direction  $x$ , pour assurer la convergence, le nombre de cellules doit être d'au moins 2048. Les calculs sont effectués dans la suite en utilisant le maillage régulier  $2048 \times 32$ . Dans ce cas, on a 4 points de maillage entre le stack et les échangeurs, et le rapport de forme des mailles est égale à 9.

### Maillage temporel

Au début de la simulation, la vitesse longitudinale est petite, on peut choisir un pas de temps  $\delta t = 0.01$ , qui correspond à 200 itérations pour chaque période acoustique de référence.

### Paramètres de résolution

Les derniers choix de paramètres concernent la résolution numérique par la méthode multigrille de l'équation (3.17). On règle le paramètre de relaxation  $w$  à une valeur  $1.7 < w < 1.9$  pour une convergence optimale. On règle également le nombre de grilles ( $= 6$ ),

les nombres  $N_1$  d'itérations à effectuer en descente de V-cycle,  $N_2$  en bas du V-cycle et  $N_3$  en remontée ( $N_1 = 20$ ,  $N_2 = 400$ ,  $N_3 = 100$ ) ainsi que le nombre maximum de V-cycles à effectuer par pas de temps ( $N_{max} = 50$ ).

En pratique, avec ces paramètres, la méthode multigrille converge en 2 à 4 V-cycles (pour le maillage  $2048 \times 32$ ). Le calcul a été effectué sur une machine INTEL XEON. Le temps de calcul CPU sur cette machine est d'environ  $1\mu s$  par pas de temps et par maille.

## 4.2 Résultats numériques

### 4.2.1 Initialisation

#### Champ de température

Comme indiqué au chapitre précédent, on calcule un champ de conduction stationnaire qui servira d'initialisation pour la simulation de l'amplification thermoacoustique. Ce champ de conduction est calculé en utilisant le même code, mais en imposant le champ de vitesse nul et en adimensionnant le temps par le temps caractéristique de conduction (basé sur la longueur du stack et la diffusivité thermique du stack). On impose une température chaude  $T_h = 1.2$  ( $\tilde{T}_h = 352$  K) à l'échangeur chaud, et une température froide  $T_c = 1.0$  ( $\tilde{T}_c = 293K = \tilde{T}_{ref}$ ) à l'échangeur froid. Le temps de conduction caractéristique calculé au niveau des plaques du stack est de l'ordre de 2 heures. On a d'abord effectué  $10^6$  pas de calcul avec  $\delta t = 0.01$  (ce qui correspond à un temps réel de 40 min). Ensuite, on a réduit le pas de temps à  $\delta t = 0.001$  pour assurer la convergence en temps de la solution. On a effectué  $10^7$  pas de temps supplémentaires (ce qui correspond aussi à un temps réel de 40 min). La figure 4.3 représente le profil de température adimensionnée en fonction du temps en un point au milieu de la section verticale de l'extrémité gauche des plaques du stack. La solution a bien convergé.

Le champ stationnaire de température est représenté dans la cellule active sur les figures 4.4 et 4.5. La stratification horizontale de la température sur la figure 4.4 illustre

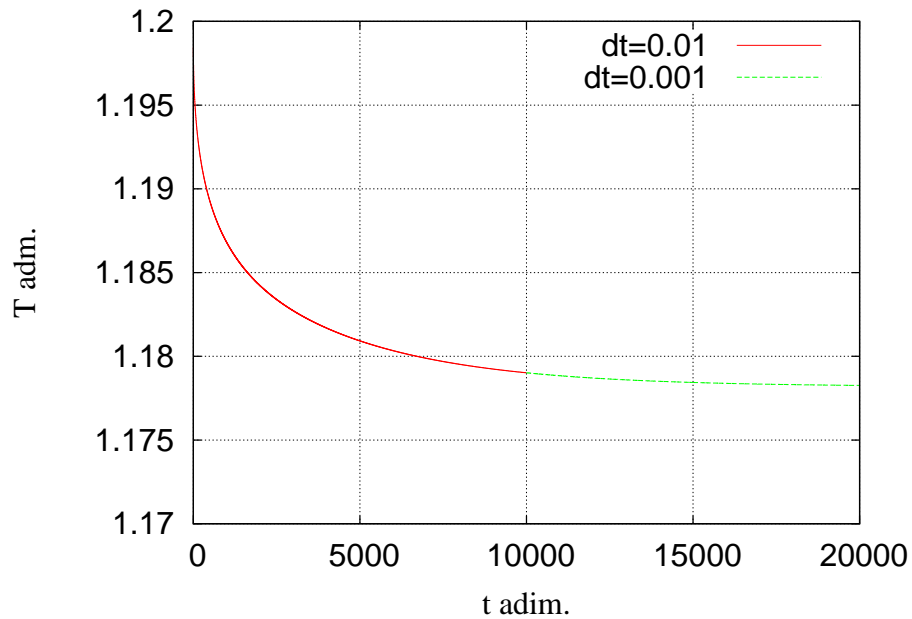


FIGURE 4.3 – Variation temporelle de la température adimensionnée en un point situé au milieu de l’extrémité gauche des plaques du stack. Config. LIMSI,  $T_h = 1.2$ .

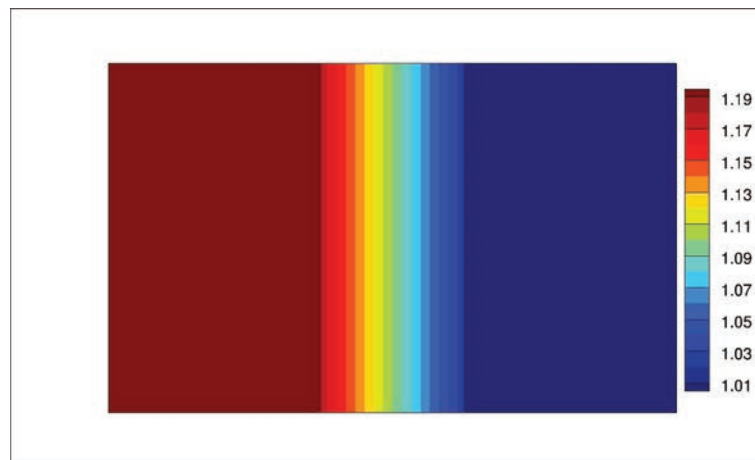


FIGURE 4.4 – Champs de température stationnaire dans toute la cellule active. Config. LIMSI,  $T_h = 1.2$ .

que la solution est essentiellement 1D. La figure 4.5 montre que la solution de conduction est bien 2D au niveau de la zone entre l’échangeur chaud et le stack. La figure 4.6 montre un profil de température entre les échangeurs, le long d’une ligne horizontale traversant le solide en bord de plaque. La présence de la zone fluide, très faiblement conductrice, réduit notablement la différence de température aux bornes du stack par rapport à une variation linéaire que l’on aurait si le stack et les échangeurs étaient parfaitement collés.

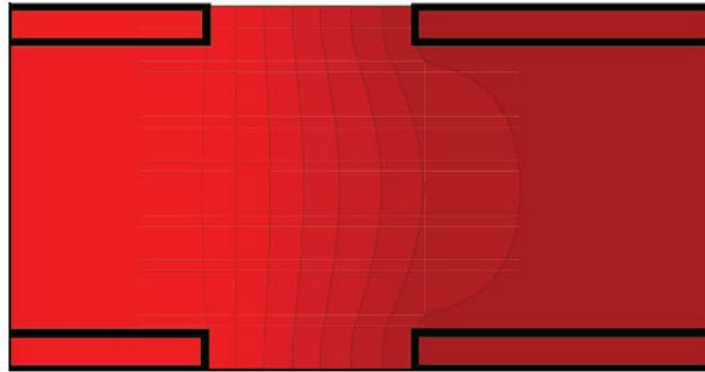


FIGURE 4.5 – Zoom sur la distance entre échangeur chaud/stack. Config. LIMSI,  $T_h = 1.2$ .

Le gradient de température entre les échangeurs dans le champ de conduction stationnaire est égal à 85% du gradient correspondant à une variation linéaire de la température. Ceci a des conséquences importantes sur le déclenchement de l'amplification thermoacoustique, étudié dans la partie 4.2.2.

### Vitesse-pression

Suivant la présentation du chapitre précédent, on fixe aussi, pour tous les instants nécessaires aux temps précédant l'instant "0", les invariants de Riemann adimensionnés  $\mathcal{L}_L$  et  $\mathcal{R}_R$  en entrée et sortie de la cellule active à des valeurs aléatoires d'ordre  $10^{-5}$  (de façon à simuler un bruit aléatoire de faible amplitude avec des variables de pression de l'ordre de 0.1 Pa). On initialise les champs de vitesses et de pression dynamique à zéro sur la cellule active.

### 4.2.2 Amplification initiale

Le calcul est effectué à partir du champ de température de conduction. La figure 4.7 montre l'historique du signal de la pression acoustique au niveau de la cellule active  $\tilde{p}'$  au tout début du calcul. Sur cette figure, on voit que le signal temporel est bien un bruit aléatoire de faible amplitude ( $\approx 0.1$  Pa). La figure 4.8 montre l'évolution temporelle initiale de la pression acoustique  $\tilde{p}'$ , de  $\tilde{t} = 0$  à  $\tilde{t} = 7.64$  s, et la figure 4.9 montre un détail du tracé de la figure 4.8. Il est évident que le signal est multi-fréquentiel car il n'est pas

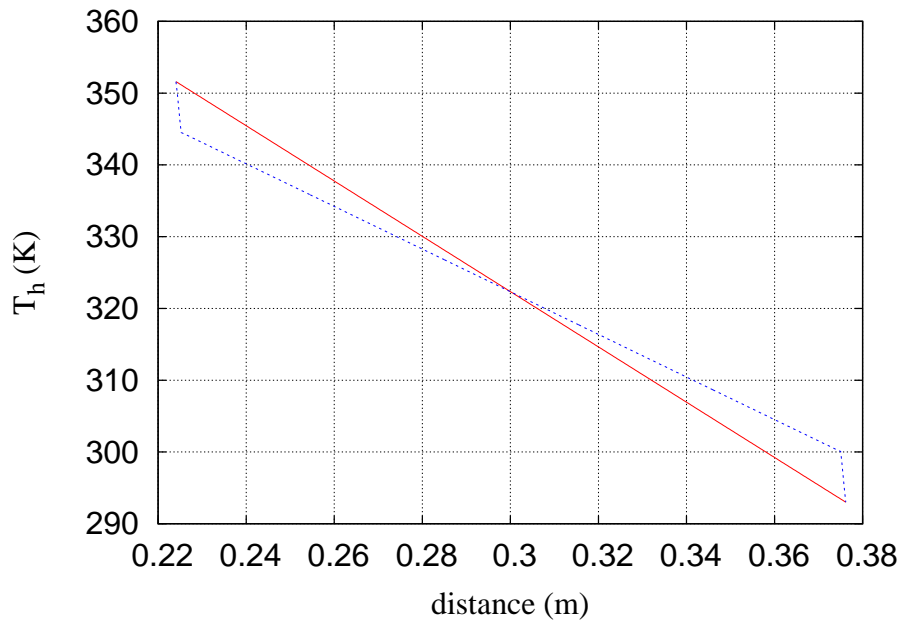


FIGURE 4.6 – Profil de température entre les échangeurs. (Trait rouge) : stack et échangeurs collés; (Trait bleu en pointillé) : stack et échangeurs séparés. Config. LIMSI,  $T_h = 1.2$ .

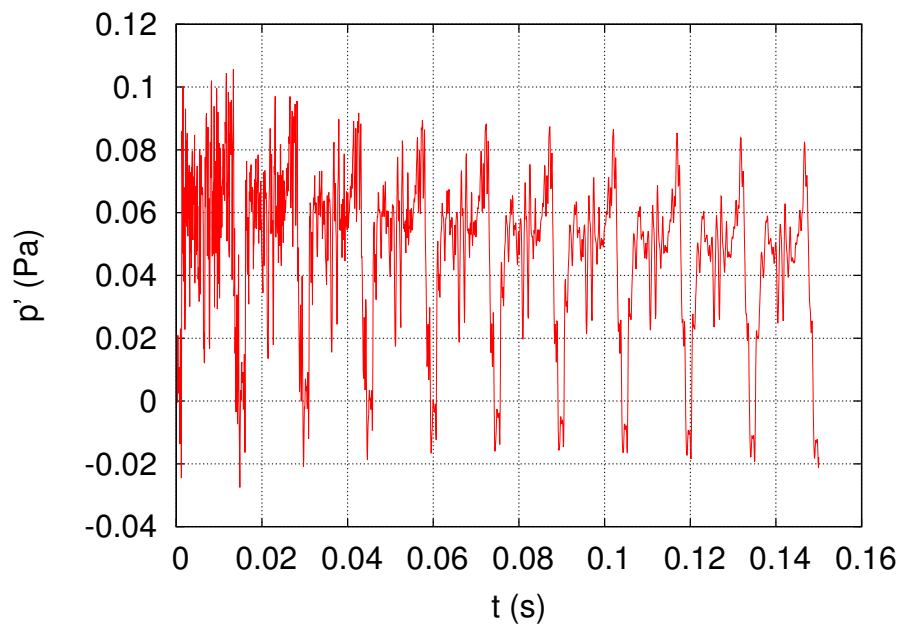


FIGURE 4.7 – Evolution initiale de la pression acoustique au niveau de la cellule active  $\tilde{p}'$  en fonction du temps  $\tilde{t}$ . Config. LIMSI.  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K

symétrique autour de 0, et que le zoom de la figure 4.9 montre l'émergence de plusieurs modes. La figure 4.10 représente la variation temporelle du logarithme de la pression



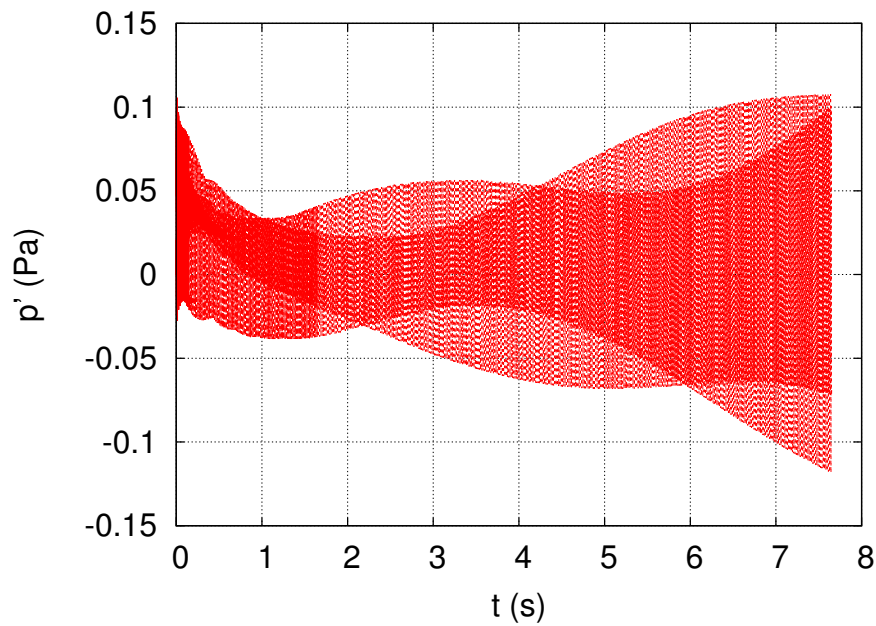


FIGURE 4.8 – Variation temporelle de la pression acoustique  $\tilde{p}'$ . Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

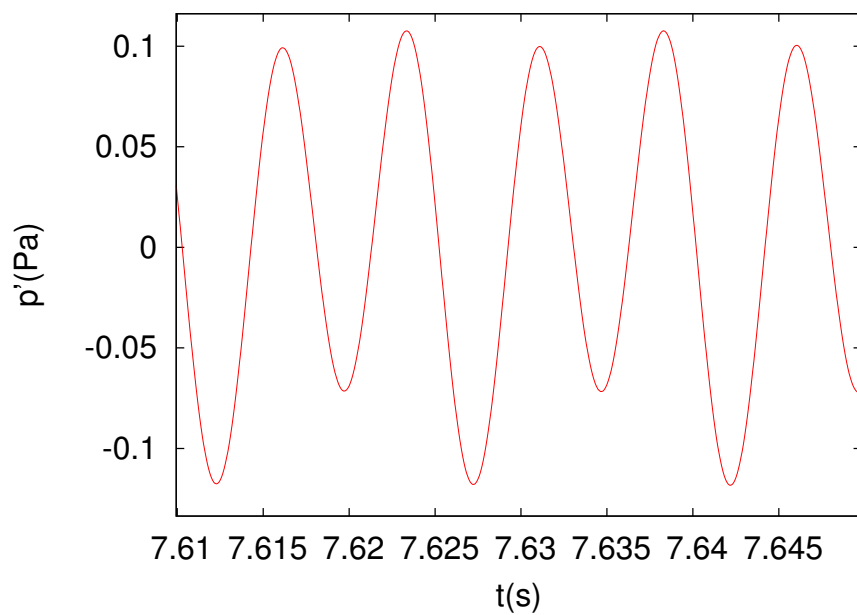


FIGURE 4.9 – Zoom sur le signal temporel initial. Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

acoustique  $\tilde{p}'$ . La pente du signal temporel étant positive, il y a bien amplification et le moteur se déclenche.

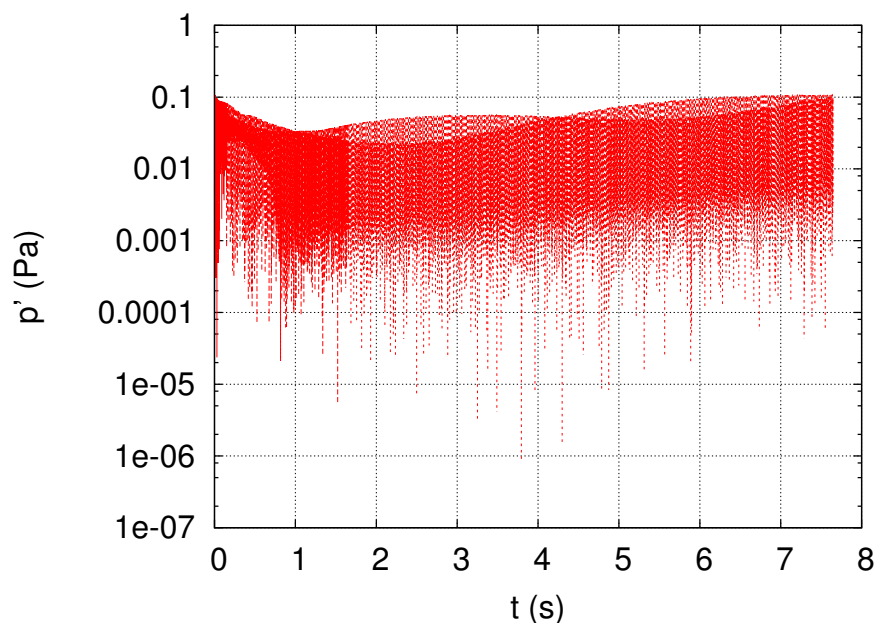


FIGURE 4.10 – Variation temporelle du logarithme de la pression acoustique au niveau de la cellule active  $\tilde{p}'$ . Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

### Convergence

Pour le maillage  $2048 \times 32$ , on a effectué le calcul de l'amplification initiale pour 3 pas de temps différents (0.01, 0.003 et 0.0003). La figure 4.11 montre la sensibilité de la solution en fonction de la variation du pas de temps. Sur la phase d'amplification initiale, on voit que l'influence de  $\delta t$  sur la pression acoustique est insignifiante.

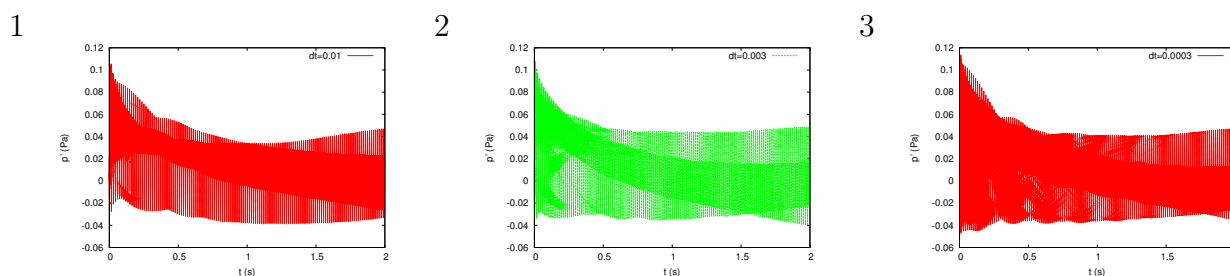


FIGURE 4.11 – Variation temporelle de la pression acoustique  $\tilde{p}'$  au niveau de la cellule active pour trois pas de temps différents. 1.  $dt = 0.01$ ; 2.  $dt = 0.003$ ; 3.  $dt = 0.0003$ . Config. LIMSI,  $\tilde{T}_h = 352$  K, maillage  $2048 \times 32$ .

Une étude de la sensibilité numérique a été réalisée pour trois maillages :  $2048 \times 32$ ,  $4096 \times 64$ ,  $10240 \times 32$ . On s'intéresse ici à l'évolution temporelle initiale de la pression acoustique. On fixe  $\delta t = 0.01$  ce qui est suffisant pour assurer la stabilité du schéma nu-

mérique. Les figures 4.12 et 4.13 (détail) montrent l'influence du maillage sur la solution numérique. Quand on mesure entre  $\tilde{t} = 1.1$  s et  $\tilde{t} = 2$  s, il existe des différences quantitatives d'environ 0.3% sur les taux de croissance entre le maillage le plus grossier et le plus fin. Sur la figure 4.13, on voit que la variation temporelle du signal est semblable pour ces trois maillages. Il n'y a que des différences quantitatives d'environ 0.1% sur la valeur de la période obtenue entre le maillage le plus grossier et le plus fin. De plus, on constate qu'il y a des différences quantitatives d'environ 29% sur l'amplitude de la pression acoustique entre le maillage le plus grossier et le plus fin. Cette différence se réduit à seulement 2% entre les deux maillages les plus fins.

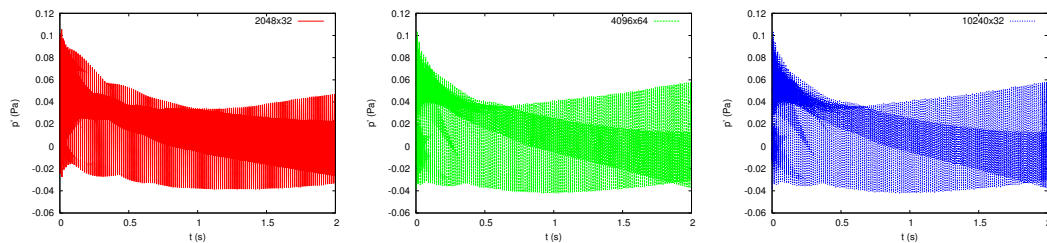


FIGURE 4.12 – Variation temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active  $\tilde{p}'$  pour trois maillages différents. Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

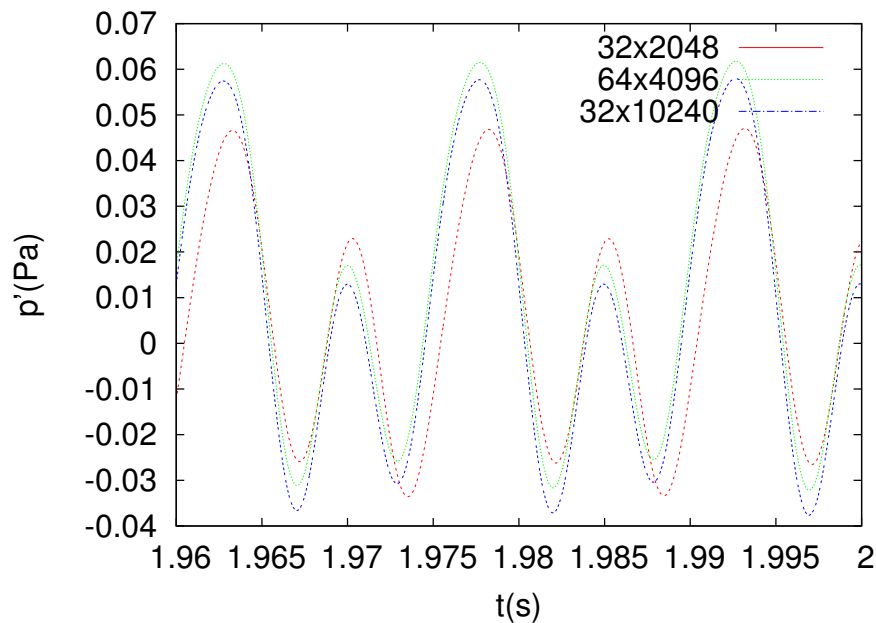


FIGURE 4.13 – Zoom sur la fin du signal pour trois maillages différents. Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

### 4.2.3 Obtention du régime périodique

#### a. Simulation

Les calculs présentés ci-dessous ont été obtenus avec un maillage  $2048 \times 32$ . Une fois le moteur déclenché, le signal s'amplifie de manière exponentielle entre le déclenchement et la saturation ( $50 \text{ s} \leq \tilde{t} \leq 64 \text{ s}$ ). Cette partie intermédiaire constitue un régime transitoire. Environ 80% de temps de calcul a été utilisé sur les calculs du transitoire. La figure 4.14

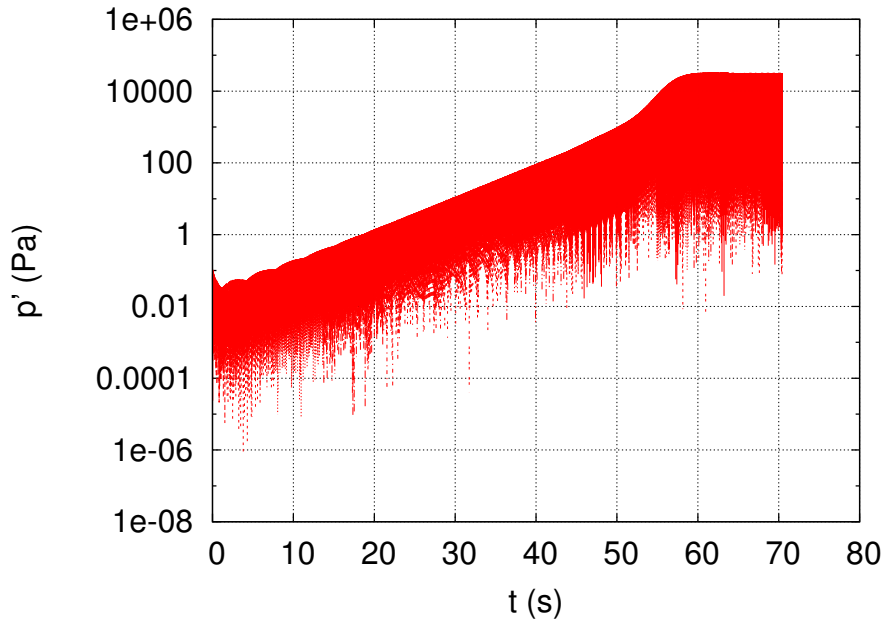


FIGURE 4.14 – Variation temporelle du logarithme de la pression acoustique  $\tilde{p}'$  au niveau de la cellule active. Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352 \text{ K}$ .

montre l'évolution temporelle du logarithme de la pression acoustique  $\tilde{p}'$  au niveau de la cellule active. Lorsque  $0 < \tilde{t} < 15 \text{ s}$ , en raison du contenu multi-fréquentiel du signal, la variation n'est pas linéaire. Sur  $15 \leq \tilde{t} \leq 50 \text{ s}$ , on voit que l'enveloppe du signal est bien linéaire. De  $\tilde{t} = 50 \text{ s}$  à  $\tilde{t} = 60 \text{ s}$ , la variation de  $\log \tilde{p}'$  n'est plus linéaire. A partir du temps  $\tilde{t} = 64 \text{ s}$ , l'enveloppe du signal devient une ligne droite, et le taux de croissance est nul, ce qui veut dire qu'on obtient le régime périodique.

La figure 4.15 montre l'évolution temporelle de la pression acoustique  $\tilde{p}'$  à partir du déclenchement jusqu'à la saturation. Sur cette figure, on observe que la saturation se produit après  $\tilde{t} \approx 64 \text{ s}$ . On peut mesurer le drive ratio final  $Dr$  défini comme le rapport

de l'amplitude de pression acoustique sur la pression moyenne, égal à 3.2%. On peut constater que ce drive ratio est important.

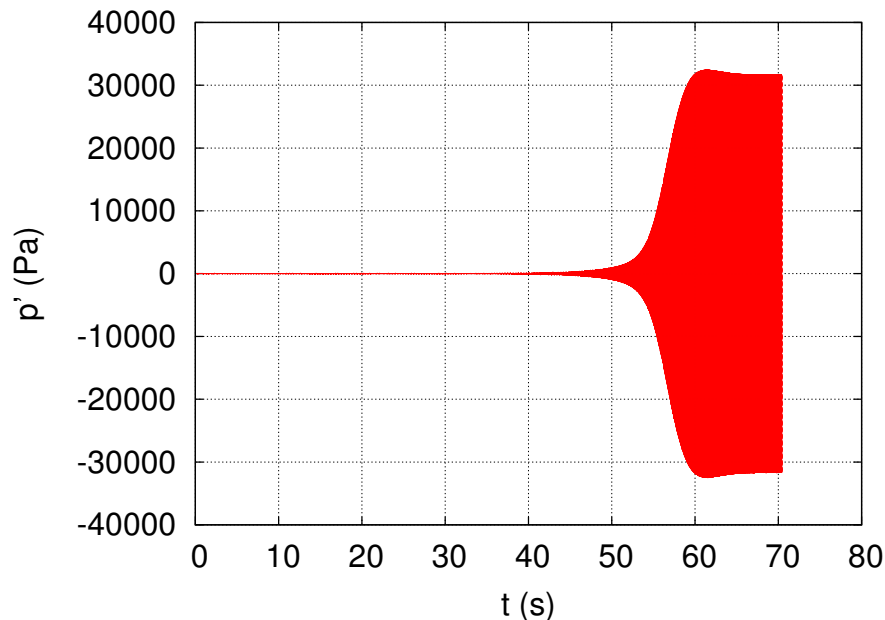


FIGURE 4.15 – Variation temporelle de la pression acoustique  $\tilde{p}'$  au niveau de la cellule active. Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

### b. Convergence de la solution

Pour obtenir le régime périodique, on a été conduit à modifier le pas de temps au cours du calcul lorsque l'amplitude de la vitesse augmente. La figure 4.16 représente la variation du CFL entre le déclenchement et la saturation. On a diminué deux fois le pas de temps. Initialement  $\delta t = 0.01$ , puis  $\delta t = 3 \times 10^{-3}$  et enfin  $\delta t = 3 \times 10^{-4}$ , de façon à limiter le CFL à 0.39. En fin de calcul, le CFL maximum se stabilise autour de la valeur 0.16.

Il faut environ 10 heures de temps CPU pour la simulation du déclenchement du moteur ( $\tilde{t} < 45$  s) et environ 96 heures de calcul pour obtenir la saturation. L'étude de convergence en maillage qui a été présentée au 4.2.2 a été poursuivie ici. On a constaté que le niveau de la saturation est le même pour les deux maillages :  $2048 \times 32$  et  $4096 \times 64$ . Plus le maillage est fin, plus l'amplification est rapide, mais le régime périodique est le même.

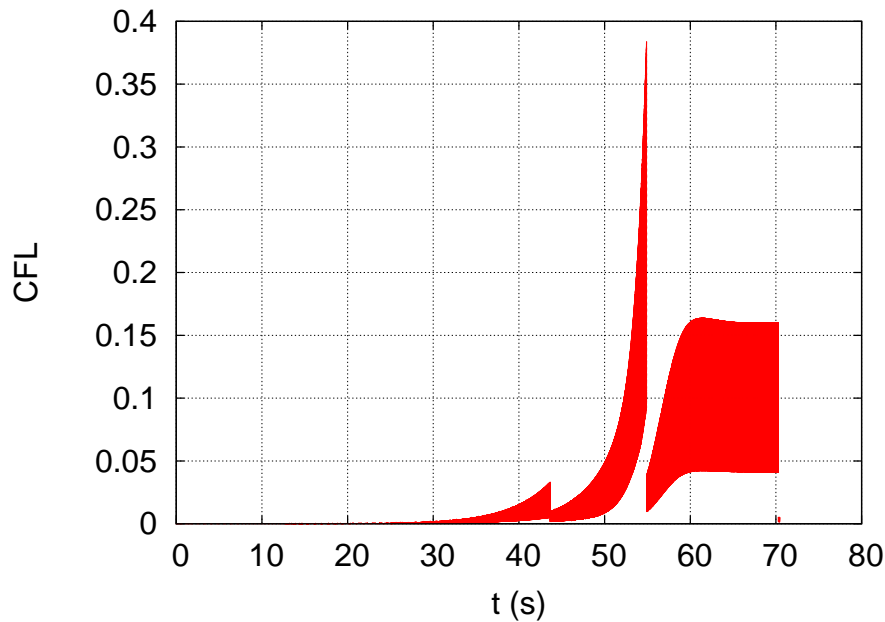


FIGURE 4.16 – Variation temporelle du nombre CFL. Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K. Maillage :  $2048 \times 32$ .

Dans la suite du chapitre, les résultats présentés ont été obtenus à l'aide du maillage  $2048 \times 32$ .

### c. Analyse du régime transitoire

Sur la figure 4.15, on observe que l'amplitude de pression augmente au-delà de l'amplitude finale correspondant au régime périodique. Ce phénomène transitoire a été observé expérimentalement par Arnott [5] dans un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires. Il a été associé à l'observation d'une diminution du gradient de température de long du stack lors du démarrage du moteur. Celle-ci a été attribuée à la modification des échanges de chaleur au sein de la cellule active et notamment au pompage de chaleur thermoacoustique. Karpov et Prosperetti [52, 53] ont trouvé un résultat numérique analogue. La présence de la "bosse" associée à la variation temporelle des températures au niveau des plaques du stack dans le moteur thermoacoustique. Marx [62] a effectué une simulation de l'excitation d'un résonateur vide par une onde stationnaire de fréquence imposée, et a mis en évidence l'apparition d'une "bosse" quand la fréquence d'excitation

est différente de la fréquence de résonance du tube. L'existence de cette "bosse" peut ici être attribuée au fait que le système se cale sur une fréquence de fonctionnement différente de la fréquence de résonance du système sans la cellule active. En effet, on verra ci-dessous que le mode sur lequel se cale le système est le 1er harmonique (du tube en  $\lambda/2$ ). Dans notre modèle, les échangeurs de chaleur thermique sont implicitement pris en compte.

#### d. Analyse du régime périodique

##### d-1. Fréquence de fonctionnement

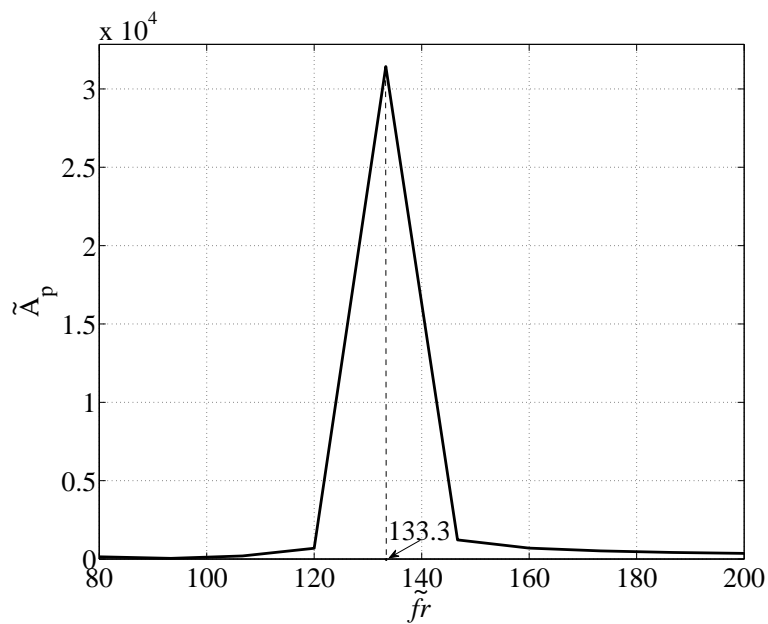


FIGURE 4.17 – FFT sur le signal de la pression acoustique  $\tilde{p}'$ . Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

Sur la figure 4.15, on voit aussi que le signal est bien symétrique ce qui est cohérent avec le fait qu'il n'y ait qu'un seul mode en régime périodique. La figure 4.17 représente une FFT (Fast Fourier Transform) sur le signal de la pression acoustique.  $\tilde{A}_p$  désigne l'amplitude de la pression acoustique, et  $\tilde{f}r$  est la fréquence. On voit que la fréquence dominante est  $\tilde{f}r = 133.3\text{Hz}$  (période  $\approx 0.0075$  s). Elle correspond au 1er harmonique dans un tube fermé aux deux extrémités (tube en  $\lambda/2$ ). Ceci signifie que même si  $Z$  est

proche de  $-1$ , le fait qu'il en soit différent correspond à l'existence d'une charge, même faible, pour ce moteur. Ceci, on l'a vu, a des conséquences notables, puisque la fréquence sur laquelle se cale le système n'est pas proche de celle du mode fondamental.

La figure 4.18 (gauche) montre un autre exemple de l'amplification de la pression acoustique en fonction de temps pour une valeur de  $Z$  encore plus proche de  $-1$ ,  $Z = -0.9985$ . La figure 4.18 (droite) montre un zoom sur la fin du calcul. C'est le mode fondamental ( $\tilde{f}_r = 66.7$  Hz correspondant au tube  $\lambda/2$ ) qui est le plus instable dans ce cas. Cependant nous n'avons pas eu le temps de mener le calcul jusqu'à la saturation.

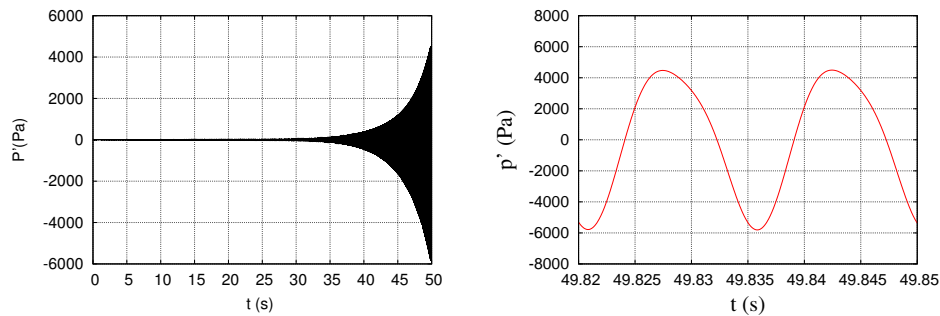


FIGURE 4.18 – (Gauche) : Evolution temporelle de la pression acoustique  $\tilde{p}'$  au niveau de la cellule active; (Droite) : Zoom sur le signal temporel à la fin du calcul. Config. LIMSI,  $Z = -0.9985$ ,  $\tilde{T}_h = 298.86$  K. Maillage :  $2048 \times 32$ .

#### d-2. Reconstruction du champ acoustique 1D dans tout le résonateur

La simulation numérique donne à chaque instant  $t$ , le champ acoustique à la position  $\hat{x} = 0^-$ , soit  $u_L(t)$ ,  $p'(t)$  et à la position  $\hat{x} = 0^+$ , soit  $u_R(t)$ ,  $p'(t)$ . On utilise ces résultats adimensionnés pour reconstruire le champ acoustique dans tout le résonateur à tout instant  $t_0$  choisi ( $u(\hat{x}, t_0)$ , et  $p'(\hat{x}, t_0)$ ). Cette reconstruction est effectuée à l'aide des caractéristiques, en utilisant les notations du chapitre 2, section 2.2.5.



Pour les points situés dans la partie du résonateur à gauche de la cellule active, on trouve :

$$-\hat{l}_L \leq \hat{x} \leq 0^- : \begin{cases} u(\hat{x}, t_0) = \frac{\mathcal{L}_L\left(t_0 + \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_h}}\right) + \mathcal{R}_L\left(t_0 - \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_h}}\right)}{2\sqrt{T_h}} \\ p'(\hat{x}, t_0) = \frac{\mathcal{R}_L\left(t_0 - \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_h}}\right) - \mathcal{L}_L\left(t_0 + \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_h}}\right)}{2\sqrt{T_h}} \end{cases} \quad (4.2)$$

Pour les points situés dans la partie du résonateur à droite de la cellule active, on trouve :

$$0^+ \leq \hat{x} \leq \hat{l}_R : \begin{cases} u(\hat{x}, t_0) = \frac{\mathcal{L}_R\left(t_0 + \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_c}}\right) + \mathcal{R}_R\left(t_0 - \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_c}}\right)}{2\sqrt{T_c}} \\ p'(\hat{x}, t_0) = \frac{\mathcal{R}_R\left(t_0 - \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_c}}\right) - \mathcal{L}_R\left(t_0 + \frac{\hat{x}_0}{\sqrt{T_c}}\right)}{2\sqrt{T_c}} \end{cases} \quad (4.3)$$

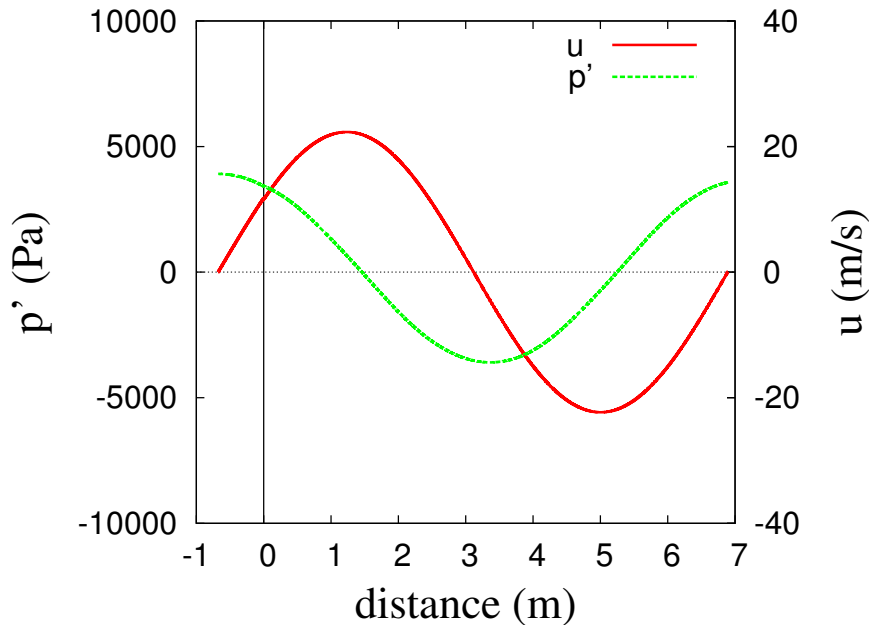


FIGURE 4.19 – Reconstruction du champ acoustique 1D instantané,  $\tilde{p}'(\hat{x})$ ,  $\tilde{u}$ , dans tout le résonateur à un instant quelconque dans le régime périodique. Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K. Maillage :  $2048 \times 32$ .

La figure 4.19 montre un instantané de la reconstruction du champ acoustique 1D dimensionné dans tout le résonateur, pour un instant choisi dans le régime périodique. A

l'extrémité droite, la vitesse est pratiquement nulle et la pression acoustique est maximale. Au niveau de la cellule active, en  $\hat{x} = 0$  ( $\tilde{x} = 0$ ), on remarque à peine la discontinuité de vitesse, qui pourtant est la source de l'établissement de l'onde avec ce modèle. La forme de l'onde est bien similaire à celle du premier harmonique dans un tube en  $\lambda/2$  à température uniforme, sans stack, fermé aux deux extrémités.

### d-3. Bilan énergétique

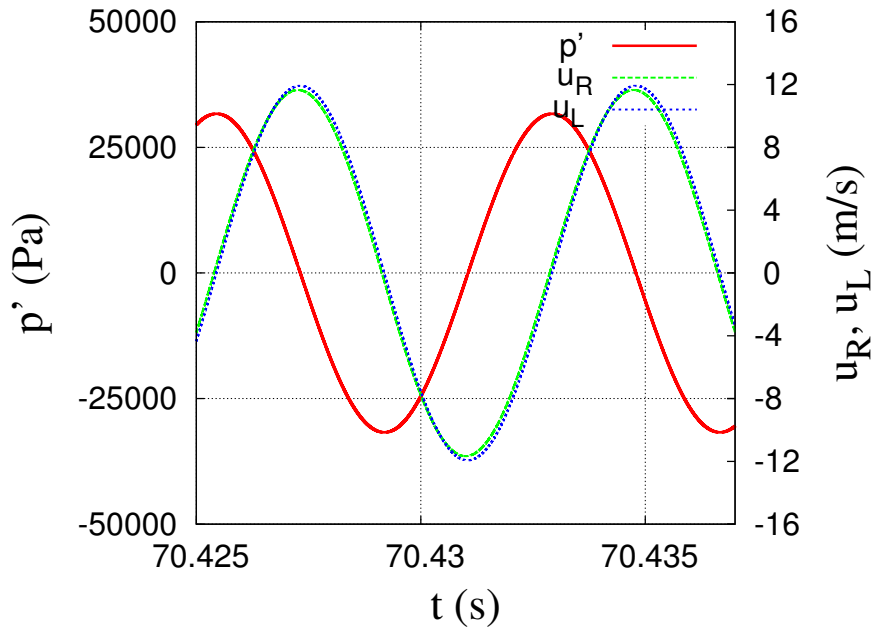


FIGURE 4.20 – Zoom sur le signal temporel à la fin du calcul montrant  $\tilde{p}'$  au niveau de la cellule active,  $\tilde{u}_L$ ,  $\tilde{u}_R$ . Config. LIMSI,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K.

La figure 4.20 montre un zoom sur la pression acoustique  $\tilde{p}'$  (trait rouge) et les vitesses longitudinales ( $\tilde{u}_L$  (trait en pointillé bleu) et  $\tilde{u}_R$  (trait en pointillé vert)) à la fin du calcul. Le déphasage entre  $\tilde{p}'$  et  $\tilde{u}_L$  (ou  $\tilde{u}_R$ ) est très proche de  $\pi/2$ . Si le déphasage était exactement de  $\pi/2$  (cas non chargé) la puissance acoustique serait nulle. On peut utiliser les résultats numériques pour calculer la puissance acoustique disponible en sortie de cellule active, donnée par [93] :

$$\tilde{P}_{ac} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{t}_{ac}} \int_{\tilde{t}_{ac}} \tilde{p}'(\tilde{t}) \tilde{u}_R(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (4.4)$$

avec  $\tilde{S}$  la section totale du résonateur,  $\tilde{t}_{ac}$  la période acoustique,  $\tilde{u}_R$  la vitesse longitudinale et  $\tilde{p}'$  la pression acoustique.

Pour lisser le bruit numérique, la moyenne est calculée sur 10 périodes. La période acoustique étant légèrement différente de 0.0075 s, les 10 périodes sont choisies en détectant les passages par zéro du signal via une interpolation linéaire par morceaux. L'intégrale est ensuite approchée par la méthode des trapèzes composites.

La puissance thermique  $\tilde{Q}_h$  apportée à l'échangeur chaud peut être aussi estimée en utilisant les résultats numériques :

$$\tilde{Q}_h = -\frac{1}{\tilde{t}_{ac}} \int_{\tilde{t}_{ac}} \int_{\tilde{S}_h} \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} d\tilde{S} d\tilde{t} \quad (4.5)$$

où  $\tilde{S}_h$  désigne la surface totale de l'échangeur chaud, et  $n$  le vecteur normal extérieur au solide. A partir du calcul effectué sur la surface de l'échangeur chaud du domaine de simulation, on reconstitue la valeur de  $\tilde{Q}_h$ .

Le rendement  $\eta = \frac{\tilde{P}_{ac}}{\tilde{Q}_h}$  peut être calculé et comparé avec le rendement de Carnot. Le bilan énergétique est présenté dans le tableau 4.2. Il confirme que le cas simulé est un cas de moteur chargé.

$\tilde{L}_{xs}$	$\tilde{P}_{ac}$	$\tilde{Q}_h$	$\eta$	$\eta/\eta_C$
(mm)	(W)	(W)	(%)	(%)
0.77	66.5	3910	1.70	10.1

TABLE 4.2 – Bilan énergétique. Config. LIMSI.  $\tilde{T}_h = 352$  K,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{P}_m = 10$  bar.

## 4.3 Conclusions

Dans ce chapitre, on a souhaité présenter une simulation d'un moteur thermoacoustique idéalisé sans charge, du déclenchement jusqu'à la saturation. En réalité, l'absence de charge correspond aux cas limites fermé/fermé ( $Z = -1$ ) ou fermé/ouvert ( $Z = 1$ ).

---

Pour la valeur exacte  $Z = -1$ , l'amplitude de saturation est telle que la simulation, trop coûteuse, ne peut être effectuée jusqu'au régime périodique. Pour obtenir une amplitude de saturation raisonnable, l'étude numérique a été menée pour la valeur  $Z = -0.96$ , ce qui correspond finalement à une situation de moteur chargé. La convergence en maillage a été vérifiée et les choix de pas d'espace et de temps ont été validés. L'amplification de la perturbation initiale met en évidence l'apparition de plusieurs modes acoustiques. Lors de la saturation, on obtient un signal périodique dont la fréquence est proche de celle du premier harmonique du résonateur (le mode fondamental n'est pas instable). On voit donc que la valeur de la charge influe fortement sur la sélection de la fréquence de fonctionnement de la machine. L'étude systématique de l'influence de la charge sur le démarrage du moteur fait l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre 5

## Stabilité d'un moteur thermoacoustique chargé

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un exemple de simulation numérique d'un moteur thermoacoustique, associé à une configuration expérimentale existante. Dans les applications, le moteur thermoacoustique est couplé avec une charge qui peut être par exemple un réfrigérateur [30, 65], un tube à gaz pulsé [72], un générateur électrique [108] ou un transducteur piézo-électrique [50, 43]. La charge modifie fortement le fonctionnement du moteur et, si elle n'est pas adaptée, le moteur ne démarre pas. Dans la littérature, il y a peu d'études systématiques sur les conditions de déclenchement d'un moteur thermoacoustique chargé.

L'objet de ce chapitre est de proposer une méthode d'analyse des résultats des simulations numériques pour déterminer la température critique du déclenchement de l'instabilité thermoacoustique dans un moteur pour une charge résistive localisée à l'extrémité froide du résonateur. L'étude est menée pour différentes valeurs de charge couvrant toutes les configurations de charge résistive. Les résultats de l'étude sont comparés avec ceux de la théorie linéaire et avec les expériences.

La première partie est consacrée à l'état de l'art des études de stabilité thermoacoustique. La méthodologie utilisée pour déterminer les conditions de déclenchement est

présentée dans la deuxième partie. L'étude basée sur la théorie linéaire pour différentes conditions limites imposées à l'extrémité froide du tube (fermé, ouvert, chargé) fait l'objet de la troisième partie. La quatrième partie est consacrée à la comparaison avec la théorie linéaire. La comparaison avec l'expérience est faite dans la cinquième partie. Le chapitre se termine par une conclusion.

## 5.1 Etat de l'art

Un moteur thermoacoustique est constitué typiquement d'un long tube résonant sous pression, à l'intérieur duquel est placé un empilement de plaques (stack). Ce dernier est en contact avec deux échangeurs, l'un chaud et l'autre froid. Les deux échangeurs sont maintenus aux températures constantes  $T_h$  et  $T_c$ . Lorsque la différence de température  $T_h - T_c$  devient suffisamment importante, la perturbation de pression s'amplifie, et le moteur thermoacoustique démarre via un mécanisme d'instabilité. L'étude du seuil de l'instabilité thermoacoustique permet de déterminer les conditions de déclenchement dans ce type de moteur : pression moyenne, température et fréquence d'oscillation.

Les études de stabilité ont été effectuées d'abord pour des tubes remplis de gaz soumis sur toute leur longueur à des gradients de température [54]. La première étude théorique sur la stabilité thermoacoustique a été effectuée par Kramers [55] dans un tube cylindrique soumis à un gradient de température longitudinal. En supposant que la couche limite de Stokes est petite devant le rayon du tube (hypothèse de tube large), cet auteur a élaboré un modèle linéaire permettant de déterminer la température de déclenchement de l'instabilité. Cependant, son modèle n'a pas pu expliquer les observations de l'expérience de Taconis [95]. En effet, l'hypothèse du tube large n'étant pas satisfaite, la température critique prédite par le modèle de Kramers est très supérieure à celle à laquelle les oscillations de l'hélium sont observées dans le tube de Taconis. En s'inspirant des travaux de Kramers, Rott [75, 76, 79, 80] a établi une théorie linéaire, devenue classique, de la thermoacoustique. Son travail est aussi basé sur l'approximation de couche limite, mais

dans l'hypothèse où la couche limite de Stokes est du même d'ordre de grandeur que le rayon du tube. Les prédictions de son modèle ont été vérifiées par les expériences de Hoffman [47], et Yazaki [115, 116]. L'étude menée par Rott permet d'obtenir les courbes marginales de stabilité (température critique en fonction de l'épaisseur de couche limite, ainsi que les fréquences des modes instables) [36, 38, 94, 118].

La théorie linéaire a été étendue et appliquée aux machines thermoacoustiques réalistes par Wheatley, Swift, Hofler, etc. [92, 107, 108]. Sous l'hypothèse de stack court, Swift [92] a obtenu un gradient de température critique au delà duquel les oscillations du gaz sont amplifiées (fonctionnement moteur) et en dessous duquel le gaz effectue un pompage de chaleur tout au long du stack (fonctionnement réfrigérateur). En s'inspirant des études sur les milieux poreux [87, 98], Arnott a généralisé le modèle linéaire [2, 6, 14] et l'analyse de stabilité [4] à d'autres géométries du moteur : pores de section carrée, circulaire, triangulaire. En se basant sur la formulation d'Arnott, Raspet [73] a développé une méthode d'approximation qui permet de prédire les seuils de stabilité des systèmes thermoacoustiques. Depuis les années 1990, Atchley et son équipe [7, 8, 9, 10, 11, 66] ont effectué plusieurs études analytiques et expérimentales pour déterminer les conditions de déclenchement de l'instabilité dans un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires. Atchley a proposé une méthode originale basée sur le facteur de qualité du résonateur  $Q$  pour décrire le seuil de stabilité. Les conditions marginales pour le mode fondamental et pour 1er harmonique sont bien prédites et confirmées par les expériences [10, 57]. La méthode basée sur l'approximation par éléments a été développée récemment [17, 26, 96, 99, 100, 101]. Ce travail permet de calculer le champ acoustique et la performance d'un système donné en régime périodique établi. Il peut aussi prédire les conditions de déclenchement de l'instabilité (gradient de température critique en fonction de la pression moyenne) pour une géométrie donnée. La température critique prédite pour un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires est en bon accord avec l'expérience. On peut également mentionner les travaux de Sugimoto [88, 89, 90]. Cet auteur a développé un modèle analytique complet, basé aussi sur l'approximation de couche limite,

et qui généralise la théorie linéaire classique. Ce travail lui a permis ensuite de faire une analyse de stabilité thermoacoustique pour des stack placés dans des résonateurs droits [86, 91] ou annulaires, sans utiliser l'approximation par éléments. De Waele [28] a développé un modèle temporel 1D pour un moteur Stirling thermoacoustique pour déterminer les conditions de seuil et décrire aussi le transitoire. Ce modèle peut être aussi appliqué à un moteur à ondes stationnaires [29, 71]. Penelet et son équipe [39, 40] ont développé récemment un modèle, unidimensionnel, basé sur la méthode des matrices de transfert. Ce travail a permis de déterminer les conditions de déclenchement de l'instabilité pour un moteur à ondes stationnaires ou progressives.

Il existe plusieurs travaux expérimentaux dans la littérature concernant l'influence de la charge pour des systèmes thermoacoustiques en régime périodique établi [2, 3, 13, 14, 26, 43, 59, 69, 117], mais il n'y a aucun travail existant dans la littérature qui décrit systématiquement l'influence de la charge sur les conditions de déclenchement de l'instabilité dans le moteur thermoacoustique, que l'on étudiera dans ce chapitre.

## 5.2 Etude de stabilité à partir des résultats numériques

Les simulations numériques sont utilisées ici pour l'étude des conditions de déclenchement d'un moteur thermoacoustique couplé à une charge. Plus précisément, c'est l'analyse du signal temporel de la pression acoustique au niveau de la cellule active qui permet de déceler s'il y a un déclenchement du moteur ou non. Les simulations sont initialisées avec une petite perturbation aléatoire de la vitesse et de la pression acoustique au niveau de la cellule active. Très rapidement, on constate sur le signal temporel de pression acoustique l'émergence d'une ou plusieurs fréquences dominantes. Suivant les conditions physiques fixées pour la simulation (paramètres géométriques du dispositif, différence entre la température imposée à l'échangeur chaud  $T_h$  et celle imposée à l'échangeur froid  $T_c$ , pression moyenne du gaz, valeur de la charge), l'amplitude globale de pression est amplifiée, la perturbation augmente, le moteur démarre. Pour d'autres conditions phy-



siques imposées, l'amplitude de pression diminue, la perturbation s'amortit et le moteur ne peut pas démarrer. Les grandeurs caractérisant le signal de pression sont donc les fréquences dominantes et les taux de croissance associés. Dans un premier temps, nous avons fait varier la température imposée à l'échangeur chaud, toutes les autres conditions étant fixées. Une première estimation du seuil est tout d'abord obtenue par analyse visuelle du signal temporel, pour chaque simulation. Ensuite, nous avons développé un post-traitement global du signal temporel de pression, afin d'extraire la valeur du taux de croissance et la fréquence des modes dominants. Enfin, à partir du taux de croissance du mode le plus instable obtenu en fonction de la température  $T_h$ , on peut déterminer la température critique  $T_{h_{crt}}$  ainsi que la fréquence du mode associée.

Par la suite, nous avons étudié l'influence de la charge sur la température critique et sur la fréquence du mode le plus instable, toutes les autres conditions physiques étant fixées. Nous avons ensuite observé comment les résultats obtenus sont modifiés si la pression moyenne est différente, puis si les paramètres géométriques du système sont modifiés.

Dans tout ce chapitre, les résultats sont présentés sous forme adimensionnée.

### 5.2.1 Traitement numérique du signal en temps

Les conditions du déclenchement sont déterminées à partir des taux de croissance des modes d'instabilité. Cette section présente la procédure utilisée pour extraire numériquement ces informations.

#### Estimation préliminaire des taux de croissance et du seuil d'instabilité

Si l'on s'intéresse seulement aux taux de croissance et fréquences des instabilités, et non à la structure des modes, il est préférable et moins coûteux numériquement d'exploiter uniquement le signal de pression acoustique  $p'(t)$ , et non l'ensemble du champ acoustique dans la cellule active. De plus, ce signal temporel est sauvegardé avec une très bonne définition temporelle. L'estimation du taux de croissance présentée ici est relative au dispositif expérimental 1. La position du stack est  $\hat{l}_L = 0.0893$ . Pour la charge  $Z = -0.96$ ,

on trace l'évolution temporelle de la pression acoustique  $p'(t)$  pour trois valeurs de la température  $T_h$  ( $T_h = 1.16$ ,  $T_h = 1.19$ ,  $T_h = 1.25$ ). Sur la figure 5.1, après un transitoire, les maxima successifs du signal semblent s'aligner, en représentation semi-logarithmique. On approche cette évolution temporelle de la perturbation de pression acoustique par la représentation suivante :

$$p'(t) = \text{Re}[p'(0)\exp(\sigma_{es} + i\omega)t] \quad (5.1)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire, et  $\sigma_{es}$  est le taux de croissance estimé, positif si la perturbation est amplifiée, négatif si la perturbation est amortie, nul si le comportement est critique.  $\sigma_{es}$  est estimé entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$  pour lesquelles le signal est à un maximum :

$$\sigma_{es} = \frac{\ln(p'(t_2)) - \ln(p'(t_1))}{t_2 - t_1} \quad (5.2)$$

Sur les signaux de la figure 5.1, on choisit  $t_1$  et  $t_2$  comme les maxima les plus proches

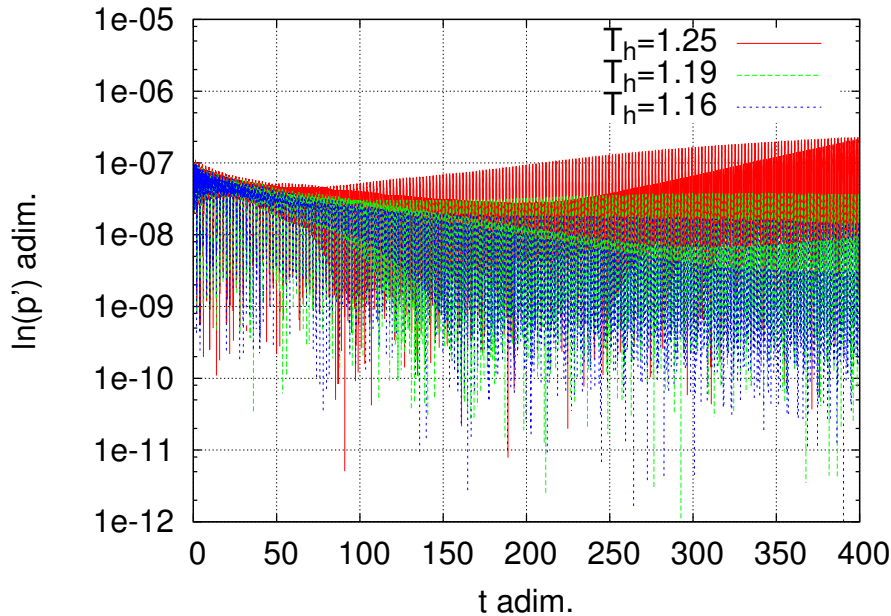


FIGURE 5.1 – Variation temporelle de la pression acoustique  $p'(t)$  en échelle semi-logarithmique. Config. Limsi,  $Z = -0.96$ .

de  $t = 340$  et  $t = 400$  respectivement. On obtient alors  $\sigma_{es} = -0.0016$  pour  $T_h = 1.16$ , ce

qui confirme l'amortissement de l'onde. Pour  $T_h = 1.25$ , on a  $\sigma_{es} = 0.002$ , donc l'onde est instable. Pour  $T_h = 1.19$ , on obtient  $\sigma_{es} = 0.0003$ , ce qui montre que cette température est proche de la température critique.

Sur la figure 5.2 relative au cas  $T_h = 1.19$ , on voit que l'oscillation n'est pas quasi-sinusoïdale : différents modes se superposent et évoluent *a priori* indépendamment en temps. Dans la partie suivante, on présente le traitement numérique appliqué au signal

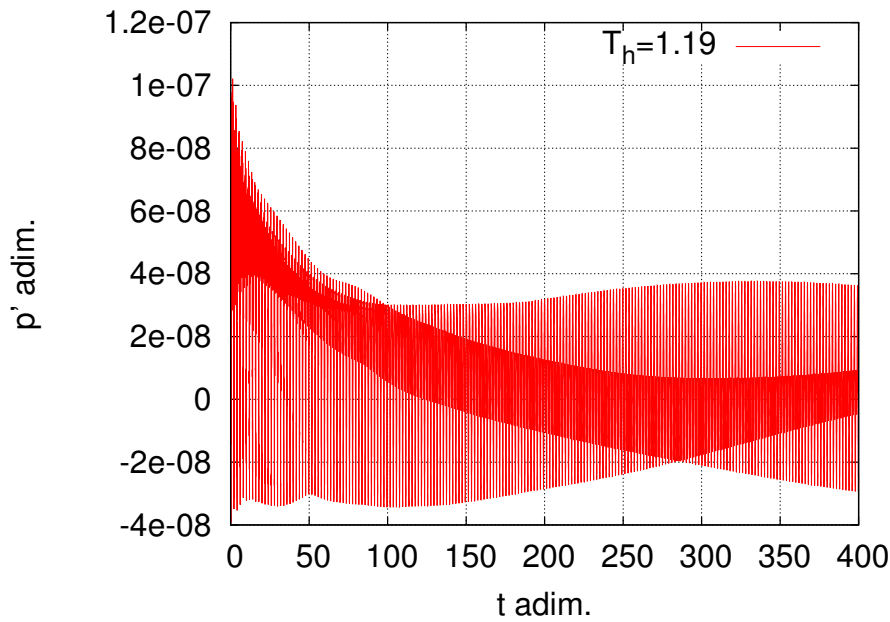


FIGURE 5.2 – Variation temporelle de la pression acoustique  $p'(t)$ . Config. LIMSI.  $Z = -0.96$ ,  $T_h = 1.19$ .

temporel pour déterminer les différents modes qui se superposent, la fréquence et le taux de croissance du plus instable d'entre eux, ainsi que la température critique de déclenchement de l'instabilité.

### Calcul précis du seuil de stabilité et de la fréquence du mode associé

Sachant que le signal temporel obtenu à l'issue de la simulation est multi-fréquentiel (Fig. 5.2), on utilise un programme écrit sous Matlab pour identifier les fréquences  $f_{r_i}$  et calculer le taux de croissance  $\sigma_i$  pour chaque mode  $i$ . Le principe en est le suivant :

une décomposition multimodale est postulée pour le signal et une méthode de moindres carrés est utilisée pour en identifier les paramètres.

### 1. Modèle de reconstruction

Le signal numérique temporel est approché par :

$$\chi(t) = \sum_{i=1}^n [B_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + C_i e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t)] \quad (5.3)$$

où  $B_i = A_i \sin(\varphi_i)$  et  $C_i = A_i \cos(\varphi_i)$ ,

$A_i$  désigne l'amplitude du mode  $i$  ;

$\sigma_i$  désigne le taux de croissance du mode  $i$  ;

$\omega_i$  désigne la fréquence angulaire du mode  $i$ , avec  $fr_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  la fréquence du mode  $i$ .

### 2. Méthode numérique

La détermination des coefficients  $\sigma_i$ ,  $\omega_i$ ,  $B_i$ , et  $C_i$  s'effectue en 2 étapes :

- (a) Méthode de moindres carrés : En minimisant l'erreur entre le signal temporel issu de la simulation et le modèle (5.3), on détermine, en fixant  $(\sigma_i, \omega_i)$ , les valeurs des coefficients  $(B_i, C_i)$ . En prenant l'exemple d'un cas monofréquenciel, le signal numérique temporel modèle s'écrit :

$$\chi(t) = B_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t) + C_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t) \quad (5.4)$$

où  $\sigma_1$  et  $\omega_1$  sont fixés (estimés) dans cette étape.

Si l'on utilise le signal temporel de la pression acoustique pendant 10 périodes acoustiques  $(p'_m(t), m = 1, \dots, 1000)$ , on peut minimiser l'erreur quadratique relative.

$$\varepsilon^2 = I(B_1, C_1) = \frac{\sum_{m=1}^{1000} (\chi(t_m) - p'(t_m))^2}{\sum_{m=1}^{1000} p'(t_m)^2} \quad (5.5)$$

qui dépend des coefficients  $B_1$  et  $C_1$  de manière quadratique.

Minimiser l'erreur quadratique, revient à résoudre le système

$$\frac{\partial I}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial C_1} = 0$$

qui est linéaire. On obtient ainsi une estimation des coefficients  $B_1$  et  $C_1$ .

- (b) Pour déterminer les  $(\sigma_i, \omega_i)$ , on fait appel à l'algorithme du simplexe de Nelder-Mead [48] : cette méthode est implémentée dans la fonction *fminsearch* de Matlab. Elle permet de minimiser une fonction de  $n$  variables en comparant les valeurs de cette fonction aux  $(n + 1)$  sommets d'un simplexe, et en déformant progressivement le simplexe autour d'un minimum.

### 3. Algorithme

Le programme permet de faire la reconstruction du signal en utilisant la superposition de signal numérique pour les fréquences différentes. La mise en œuvre du fonctionnement de l'algorithme est la suivante :

- (a) Choix initial des  $(\sigma_i, \omega_i)$  et  $(B_i, C_i)$ . ( $i = 1, \dots, n$ ).
- (b) Résolution des systèmes linéaires par la méthode des moindres carrés, permettant d'estimer  $(B_i, C_i)$ .
- (c) Recherche des coefficients  $\sigma_i$  et  $\omega_i$  en utilisant les coefficients linéaires calculés précédemment. Cette étude est effectuée à l'aide de la méthode du simplexe, pour laquelle le choix des valeurs initiales est déterminant.
- (d) Retour à (b).
- (e) Le critère d'arrêt de la fonction *fminsearch* garantit une précision de  $10^{-6}$  sur les coefficients déterminés.

Sur le cas présenté à la section 5.2.1, avec la température  $T_h = 1.19$ , on applique la procédure précédente avec 4 modes différents (fondamental, 1er harmonique, 2ème harmonique et 3ème harmonique). Les paramètres obtenus (amplitude, fréquence, taux de croissance de chaque mode) et la norme de l'erreur  $|\varepsilon|$  à la convergence sont reportés en

table 5.1. On voit dans ce tableau que, pour la température  $T_h = 1.19$ , il n'y a qu'un seul

Coefficients	mode 1	<b>mode 2</b>	mode 3	mode 4
Amplitude du mode $i$ $A_i$	0.0178	<b>0.0188</b>	0.003	0.0001
Taux de croissance du mode $i$ $\sigma_i$	-0.0005	<b>0.0006</b>	-0.0046	-0.0131
Fréquence du mode $i$ $fr_i$	0.502	<b>1.003</b>	1.505	2.010

TABLE 5.1 – Caractéristiques des 4 premiers modes pour le cas  $T_h = 1.19$ ,  $Z = -0.96$ ,  $\hat{l}_L = 0.0893$ ,  $|\varepsilon| = 0.0003$ .

mode, le mode 2, qui a un taux de croissance positif, les trois autres taux de croissance étant négatifs et les modes correspondants amortis. Le 1er harmonique est le mode le plus instable dans ce cas, et c'est le seul mode instable.

### Obtention de la température critique

Pour déterminer la température critique, on applique le traitement précédent aux résultats numériques obtenus pour d'autres températures au voisinage de  $T_h = 1.19$ . On choisit ici 4 valeurs ( $T_h = 1.17, 1.18, 1.20, 1.21$ ) pour lesquelles la simulation numérique fournit le signal temporel de pression. On peut décomposer le signal numérique en somme de  $n = 4$  modes. Les taux de croissance  $\sigma_i$ , les fréquences  $fr_i$  et les amplitudes  $A_i$  sont ensuite obtenus pour  $i = 1$  à 4. En table 5.2, on voit que, pour la température  $T_h = 1.18$ , les taux de croissance de ces 4 modes sont négatifs et le moteur thermoacoustique ne peut pas démarrer. Le seuil d'instabilité se situe donc entre  $T_h = 1.18$  et 1.19, et le mode impliqué est le 1er harmonique du tube en  $\lambda/2$ . Il est intéressant d'examiner ce qui se produit lorsque la température  $T_h$  est augmentée. Pour  $T_h = 1.20$ , la table 5.3 montre que le mode fondamental est instable. Pour  $T_h = 1.23$ , tous les modes sont instables. C'est donc le 1er harmonique qui s'amplifie en premier, étant le plus instable des modes. Ainsi, pour déterminer la température critique, on utilise la variation du taux de croissance du 1er harmonique  $\sigma_2$  en fonction de la température  $T_h$  (Fig. 5.3). On voit que, sur ce petit intervalle de température, le taux de croissance du 1er harmonique  $\sigma_2$  varie linéairement

en fonction de la température  $T_h$ , et peut être ajusté par l'expression suivante :

Coefficients	mode 1 $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$	mode 2	mode 3	mode 4
Amplitude du mode $i$ $A_i$	0.0127	0.0126	0.002	0.0001
Taux de croissance du mode $i$ $\sigma_i$	-0.0014	-0.0005	-0.0055	-0.0004
Fréquence du mode $i$ $f_{r_i}$	0.502	1.003	1.505	2.009

TABLE 5.2 – Caractéristiques des modes dominants pour  $T_h = 1.18$ ,  $Z = -0.96$ ,  $\hat{l}_L = 0.0893$ ,  $|\varepsilon| = 0.0004$

Coefficients	mode 1 $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$	mode 2	mode 3	mode 4
Amplitude du mode $i$ $A_i$	<b>0.0185</b>	<b>0.0366</b>	0.0036	0.0001
Taux de croissance du mode $i$ $\sigma_i$	<b>0.0004</b>	<b>0.0016</b>	-0.0038	-0.0035
Fréquence du mode $i$ $f_{r_i}$	<b>0.503</b>	<b>1.003</b>	1.506	2.010

TABLE 5.3 – Caractéristiques des modes dominants pour  $T_h = 1.20$ ,  $Z = -0.96$ ,  $\hat{l}_L = 0.0893$ ,  $|\varepsilon| = 0.0002$

$$\sigma_2 = 0.105T_h - 0.1244. \quad (5.6)$$

Si l'on pose  $\sigma_2 = 0$ , on obtient la température critique  $T_{h_{crt}} \approx 1.185$ . De plus, si l'on utilise cette température critique pour faire une simulation (avec la charge  $Z = -0.96$ ), le traitement numérique du signal temporel obtenu, on obtient un taux de croissance du 1er harmonique  $\sigma_2$  nul à la précision demandée, les autres restant négatifs, ce qui valide la méthode.

### Convergence en maillage

La convergence en maillage est étudiée ici pour un même cas relatif au dispositif expérimental 1. On fixe la position du stack dans le résonateur  $\hat{l}_L = 0.0893$ , la charge

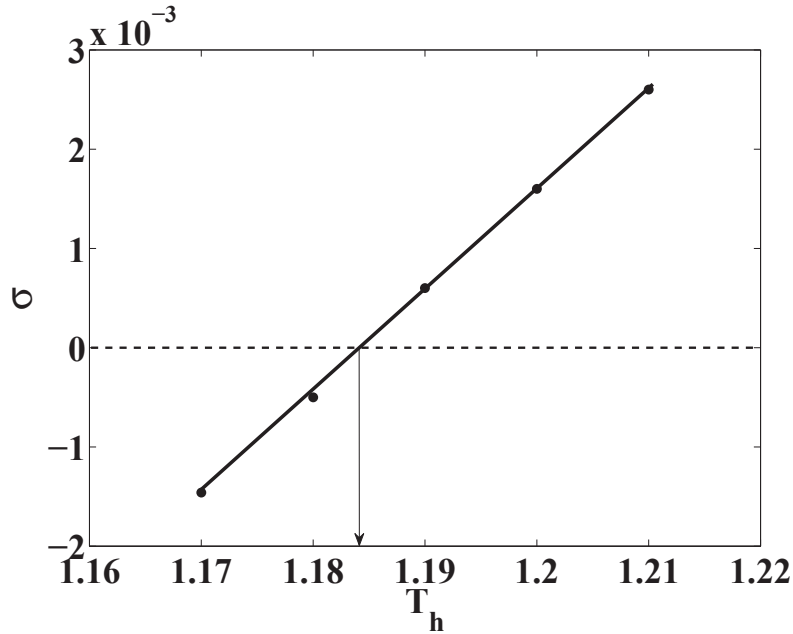


FIGURE 5.3 – Evolution de  $\sigma$  en fonction de  $T_h$  pour le mode le plus instable. Config. Limsi,  $Z = -0.96$  et  $\hat{l}_L = 0.0893$ .

$Z = -0.96$  et la température chaude  $T_h = 1.19$ , et 3 simulations sont effectuées en utilisant 3 maillages différents ( $2048 \times 32$ ,  $4096 \times 64$ ,  $8192 \times 128$ ) sur le même intervalle de temps (400 fois la période acoustique de référence). En analysant les résultats obtenus, on constate que le mode 2 est toujours le mode le plus instable pour certaines simulations. Les résultats du tableau 5.4 montrent les variations du taux de croissance et de la fréquence pour les trois maillages. On peut alors conclure que l'influence de la taille de maillage peut changer la température critique de déclenchement de moins de 5%. Pour économiser le temps de calcul, on utilise le maillage  $2048 \times 32$  dans la suite.

Maillage	$2048 \times 32$	$4096 \times 64$	$8192 \times 128$
Taux de croissance du mode 2 $\sigma_2$	0.0006	0.0035	0.008
Fréquence du mode 2 $fr_2$	1.003	1.003	1.006
$ \varepsilon $	0.0003	0.0003	0.006

TABLE 5.4 – Résultats pour le mode dominant en utilisant 3 maillages différents.  $T_h = 1.19$ ,  $\hat{l}_L = 0.0893$ ,  $Z = -0.96$



### 5.2.2 Résultats

En utilisant la méthodologie présentée précédemment, on étudie ici les conditions du déclenchement dans deux configurations modélisant des configurations expérimentales (Exp. Limsi et Exp. Atchley). On présente tout d'abord, sur la configuration LIMSI, l'influence de la charge sur la température critique de déclenchement, ainsi que celle de la pression moyenne, à géométrie fixée. Dans un deuxième temps, on examine l'influence de paramètres géométriques tels que la distance stack-échangeurs et la position du stack, pour illustrer comment la méthode peut être utilisée à des fins d'optimisation.

#### Géométrie fixée

Dans cette partie, la position du stack est fixée dans le résonateur, avec  $\hat{l}_L = 0.0893$ . Le stack et les échangeurs sont séparés d'une faible distance, fixée ici à la valeur  $L_{xs} = h$  (distance inter-plaques).

**a. Pression moyenne fixée.** On se place d'abord dans la configuration du dispositif expérimental 1. On étudie les effets de la charge sur les conditions de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. La température critique  $T_{h_{crit}}$  et la fréquence du mode le plus instable  $fr \left( = \frac{\omega}{2\pi} \right)$  pour chaque valeur de la charge sont présentées en table 5.5. Notons que la température critique est calculée avec une précision de 0.05. La figure 5.4 montre l'évolution du seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique en fonction du coefficient de transmission acoustique  $Z$  en échelle semi-logarithmique. Dans cette représentation, la température critique prend la forme d'un chapeau chinois, pratiquement symétrique par rapport à  $Z = 0$ .

La figure 5.5 montre l'évolution de  $\frac{\omega}{\omega_{ref}}$  en fonction de  $Z$ . La grandeur  $\omega$  représente la fréquence angulaire du mode le plus instable et  $\omega_{ref} = \pi$  est la fréquence angulaire de référence, c'est à dire celle du mode fondamental  $\lambda/4$  d'un tube à température uniforme, sans stack, fermé à une extrémité et ouvert à l'autre extrémité. Sur la figure 5.5, on voit que cette évolution n'est pas symétrique. Lorsque  $Z = 0$  ( $f = \gamma$ ),  $\omega$  atteint sa valeur

$T_{h_{crt}}$	$\omega/2\pi$	$f$	$Z$	$T_{h_{crt}}$	$\omega/2\pi$	$f$	$Z$
1.01	0.5	0	1	1.17	1	100	-0.967
1.07	0.75	0.01	0.988	1.19	1	90	-0.963
1.1	0.75	0.02	0.976	1.21	1	80	-0.959
1.15	0.75	0.03	0.964	1.24	1	70	-0.953
1.22	0.75	0.04	0.953	1.3	1	60	-0.945
1.3	0.75	0.05	0.942	1.35	1	50	-0.935
1.36	0.75	0.06	0.93	1.42	1	40	-0.919
1.43	0.75	0.07	0.919	1.6	1	30	-0.895
1.5	0.75	0.08	0.908	1.91	1	20	-0.845
1.57	0.75	0.09	0.898	2.3	1	15	-0.8
1.64	0.77	0.1	0.887	3.4	1	10	-0.713
2.5	1.28	0.2	0.787	3.74	1.52	9	-0.686
3.54	1.29	0.3	0.695	4.23	1.54	8	-0.654
5.17	1.8	0.4	0.613	5	1.54	7	-0.614
7.5	1.9	0.5	0.539	6.58	2.01	6	-0.564
10.2	2.33	0.6	0.471	9	2.09	5	-0.499
13.9	2.88	0.682	0.42	15	2.64	4	-0.411
17.2	2.9	0.74	0.386	33.51	4.26	3	-0.284
21	3.5	0.8	0.35	21.6	3.7	3.5	-0.354
44.76	5.06	1	0.251	57.3	5.88	2.6	-0.218
63.4	6.16	1.113	0.2	78.3	6.97	2.3	-0.159
99	7.79	1.3	0.125	121	8.6	2	-0.09
121	8.36	1.4	0.088	138.1	9	1.9	-0.064
165	9.8	1.6	0.021	162	9.6	1.75	-0.023

TABLE 5.5 – Conditions de déclenchement dans le cas du dispositif expérimental 1.  $\tilde{P}_m = 10$  bar,  $\hat{l}_L = 0.0893$  et  $L_{xs} = h$ .

maximum. Lorsque  $Z$  s'éloigne de 0 ( $f$  s'éloigne de  $\gamma$ ),  $\omega$  diminue. La limite  $Z \rightarrow -1$  ( $f \rightarrow \infty$ ) correspond au tube fermé aux deux extrémités : le mode le plus instable est de type demi-onde ( $\lambda/2$ ), donc  $\omega = 2\omega_{ref}$ . La limite  $Z \rightarrow +1$  ( $f \rightarrow 0$ ) correspond au tube fermé à une extrémité, et ouvert à l'autre. Le mode dominant est de type quart d'onde ( $\lambda/4$ ). Mais on note que, rapidement lorsque l'on s'éloigne de la valeur  $Z = +1$  (resp.  $-1$ ), c'est un harmonique  $3\lambda/4$  (resp.  $\lambda$ ) qui se déstabilise.

Sur la figure 5.4, on voit que, lorsque le coefficient de transmission acoustique  $Z$  s'approche de 0, la température critique  $T_{h_{crt}}$  devient très élevée. Les résultats n'ont, dans cette région, qu'une valeur qualitative, car des hypothèses très simplificatrices ont été faites, comme  $k$  et  $\mu$  indépendants de la température. En revanche, quand la température

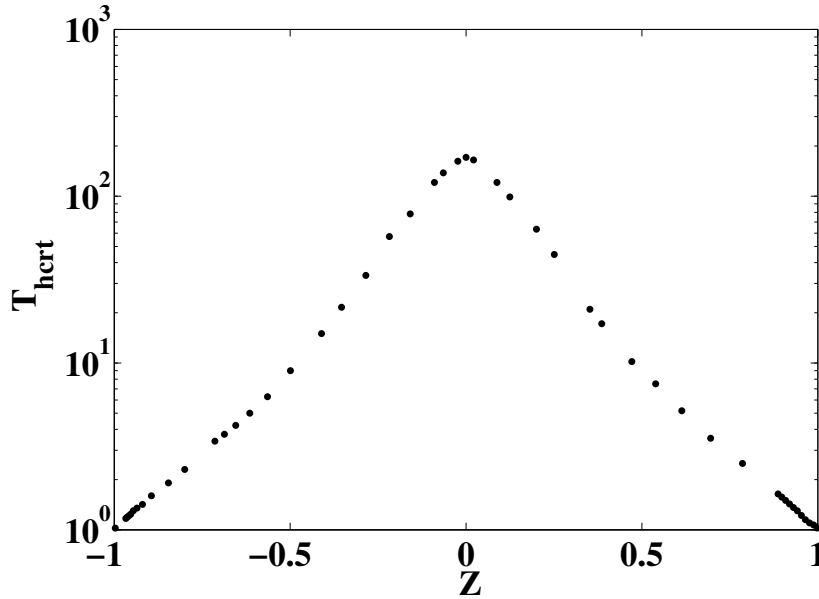


FIGURE 5.4 – Température critique  $T_{hcrt}$  nécessaire au déclenchement de l'instabilité thermoacoustique en fonction de  $Z$ . Config. LIMSI.  $\tilde{P}_m = 10$  bar,  $\hat{l}_L = 0.0893$  et  $L_{xs} = h$ .

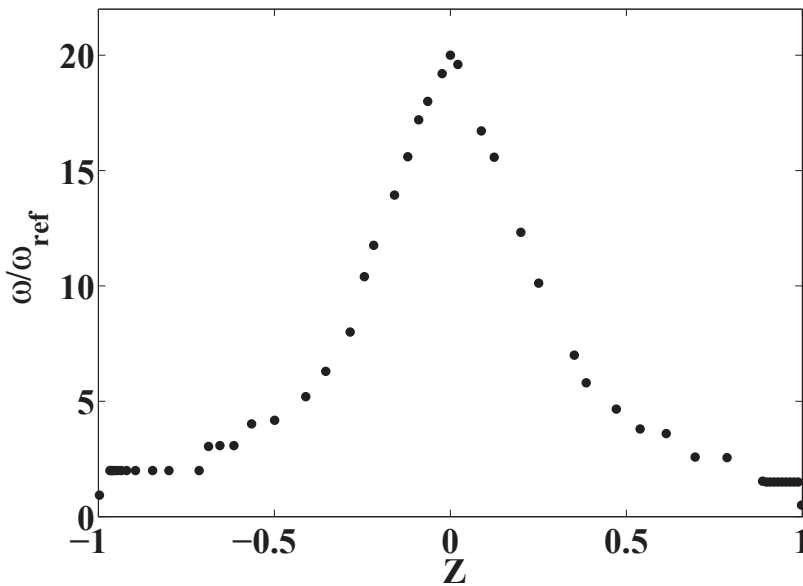


FIGURE 5.5 – Variation de  $\omega/\omega_{ref}$  pour les modes critiques en fonction de  $Z$ . Config. LIMSI.  $\tilde{P}_m = 10$  bar,  $\hat{l}_L = 0.0893$  et  $L_{xs} = h$ .

$T_{hcrt}$  est plus faible, les résultats numériques sont qualitativement corrects (voir section 5.4). La présence d'un maximum de  $T_{hcrt}$  en  $Z = 0$  s'explique par le fait qu'aucune onde n'est réfléchié à l'extrémité du tube dans ces conditions : le démarrage du moteur thermoacoustique devient très difficile.

Dans le modèle hybride, toutes les dissipations dans le résonateur sont concentrées à la position de la cellule active et à l'extrémité chargée. On a présenté précédemment le calcul de la puissance acoustique délivrée au niveau des plaques du stack, on passe maintenant à l'étude de la dissipation créée à l'extrémité chargée. En utilisant les invariants de Riemann, à l'extrémité chargée ( $\tilde{x} = \tilde{l}_R$ ), l'équation de la puissance produite par la charge peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{charge} &= \frac{\tilde{S}}{\tilde{t}_{ac}} \int_{\tilde{t}_{ac}}^{\tilde{S}} \tilde{p}'(\tilde{l}_R, \tilde{t}) \tilde{u}(\tilde{l}_R, \tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \frac{\tilde{S}}{\tilde{t}_{ac}} \int_{\tilde{t}_{ac}}^{\tilde{S}} \frac{\mathcal{R}(\tilde{l}_R, \tilde{t}) - \mathcal{L}(\tilde{l}_R, \tilde{t})}{2\sqrt{\tilde{T}_c}} \frac{\mathcal{R}(\tilde{l}_R, \tilde{t}) + \mathcal{L}(\tilde{l}_R, \tilde{t})}{2\gamma} d\tilde{t} \\ &= \frac{\tilde{S}}{\tilde{t}_{ac}} \int_{\tilde{t}_{ac}}^{\tilde{S}} \frac{\mathcal{R}^2(\tilde{l}_R, \tilde{t}) - \mathcal{L}^2(\tilde{l}_R, \tilde{t})}{4\sqrt{\tilde{T}_c}\gamma} d\tilde{t}\end{aligned}\quad (5.7)$$

$$\boxed{\tilde{E}_{charge} = \frac{\tilde{S}}{\tilde{t}_{ac}} \int_{\tilde{t}_{ac}}^{\tilde{S}} \frac{1 - Z^2}{4\sqrt{\tilde{T}_c}\gamma} \mathcal{R}^2(\tilde{l}_R, \tilde{t}) d\tilde{t}}\quad (5.8)$$

Pour  $Z^2 = 1$  ( $Z = -1$  ou  $Z = 1$ ), la dissipation  $\tilde{E}_{charge}$  est nulle. En revanche, la dissipation est maximale pour  $Z = 0$ , ce qui permet d'expliquer pourquoi le sommet de la courbe marginale présentée à la figure 5.4 se trouve au point  $Z = 0$ . Mais cette équation ne donne aucune interprétation pour l'évolution de la fréquence présentée à la figure 5.5.

**b. Influence de la pression moyenne** On se place ici dans le cas du dispositif expérimental 2, sur lequel Atchley [10] a effectué des mesures expérimentales pour différentes pressions moyennes, mais *a priori* sans charge. On étudie l'influence de la pression moyenne sur les conditions du déclenchement thermaoacoustique. La figure 5.6 illustre l'évolution de la température critique  $T_{hcr}$  en fonction du coefficient de transmission acoustique  $Z$  pour les pressions  $\tilde{P}_m = 4.4$  bar et  $\tilde{P}_m = 1.5$  bar. Ces deux courbes marginales présentent la symétrie par rapport à l'axe vertical  $Z = 0$ . Sur la figure 5.6, on constate que l'augmentation de la pression moyenne élève la température critique sur une configuration donnée. La figure 5.7 montre la variation de la fréquence angulaire du mode le plus instable en fonction du coefficient de transmission acoustique pour ces mêmes

pressions moyennes. On observe que la fréquence angulaire du mode le plus instable ne dépend pratiquement pas de la pression moyenne.

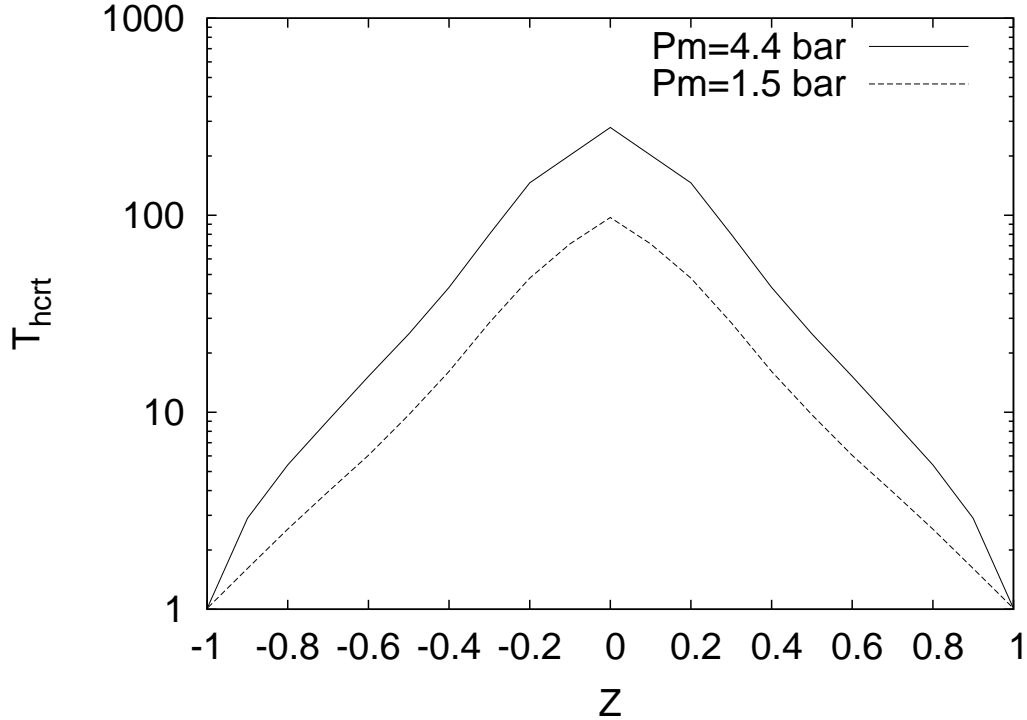


FIGURE 5.6 – Courbe marginale pour  $\tilde{P}_m = 4.4$  bar et  $\tilde{P}_m = 1.5$  bar en échelle semi-logarithmique. Config. Atchley.

### Influence de la géométrie

Dans cette partie, on étudie l'influence de la géométrie sur les conditions de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique dans le cas du dispositif expérimental 1.

**a. Influence de la distance entre stack et échangeurs.** Nous nous intéressons ici à l'influence de la distance entre le stack et les échangeurs  $L_{xs}$  sur le seuil de déclenchement. Deux nouveaux cas ont été considérés ici : stack et échangeurs collés ( $L_{xs} = 0$ ), et stack et échangeurs 'très' espacés ( $L_{xs} = 2h$ ). Sur la figure 5.8, on voit que supprimer l'espacement entre stack et échangeurs diminue significativement la température critique. Lorsque  $L_{xs} = 2h$ , la température critique est plus élevée, mais la différence du seuil de déclenchement entre le cas  $L_{xs} = h$  et  $L_{xs} = 2h$  est infime. De plus, la variation de

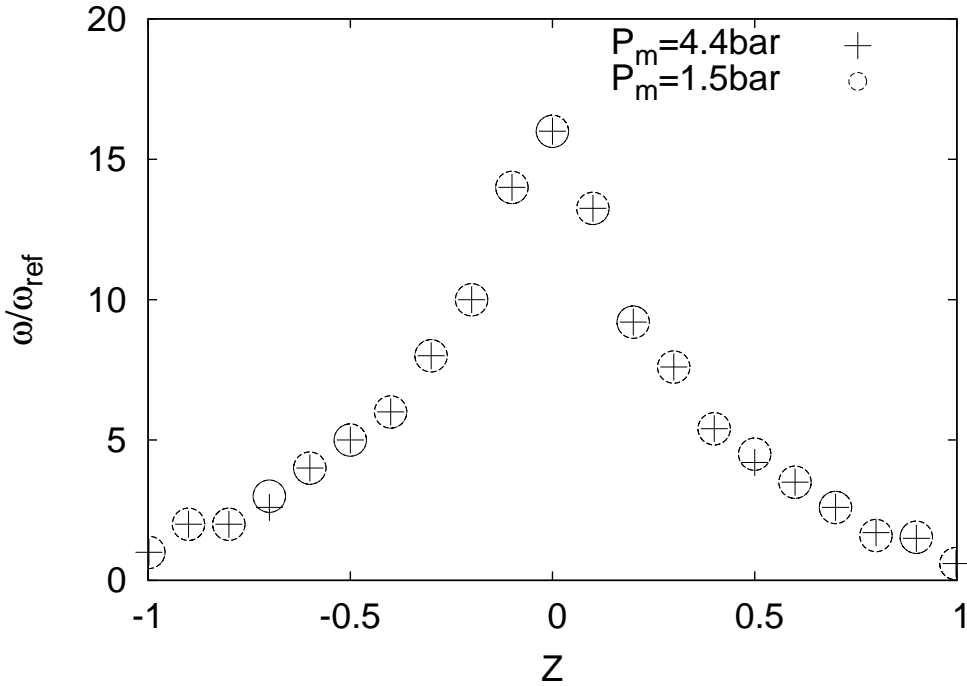


FIGURE 5.7 – Evolution de la fréquence angulaire en fonction de  $Z$  pour  $\tilde{P}_m = 4.4 \text{ bar}$  et  $\tilde{P}_m = 1.5 \text{ bar}$ . Config. Atchley.

distance entre le stack et les échangeurs ne modifie pas la nature des modes impliqués et les fréquences dominantes.

**b. Influence de la position du stack.** Pour une température de l'échangeur chaud et une charge fixées, on peut étudier l'effet de la variation de la position du stack sur le taux de croissance de l'instabilité. Pour  $Z = -0.96$  et  $T_h = 1.2$ , la figure 5.9 montre l'influence de la position du stack  $\hat{l}_L$  sur le taux de croissance  $\sigma$  du mode dominant. On observe que le taux de croissance est positif entre  $\hat{l}_L = 0.083$  et  $\hat{l}_L = 0.43$ , et est négatif pour les autres valeurs. Ceci signifie qu'il existe une région du résonateur où placer le stack permet une amplification thermoacoustique à cette température chaude, les oscillations étant amorties si le stack est placé en dehors de cette région. Ces résultats suggèrent qu'il existe une position optimale du stack pour déclencher un mode d'instabilité.

La figure 5.10 représente la variation de la température critique  $T_{hcr}$  en fonction de la position du stack  $\hat{l}_L$  pour deux valeurs de charges différentes ( $Z = -0.85$  et  $Z = 0.79$ ).

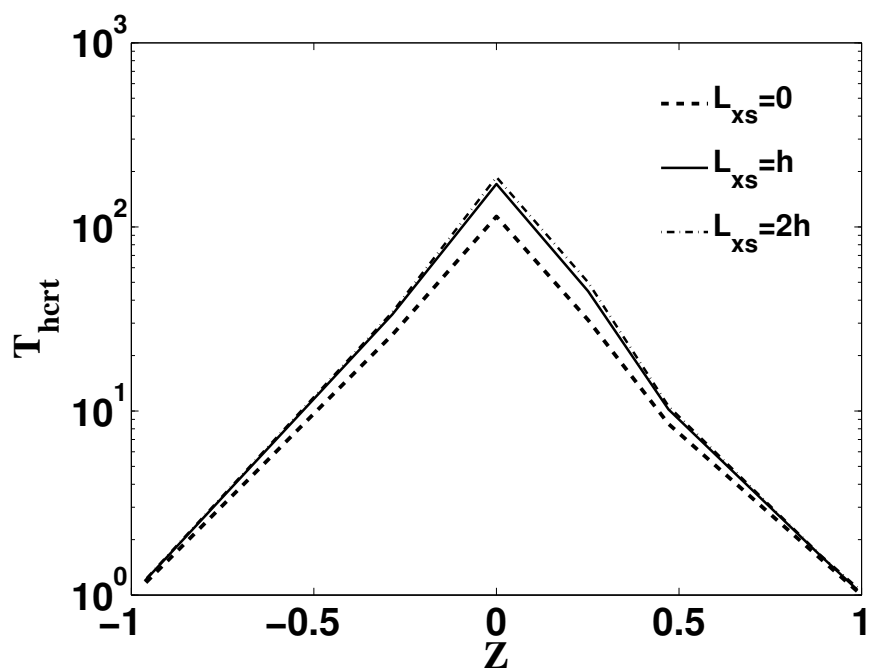


FIGURE 5.8 – Effets de la distance entre stack et échangeurs sur le seuil de stabilité. Config. LIMSI.  $\hat{l}_L = 0.0893$  et  $\tilde{P}_m = 10$  bar.

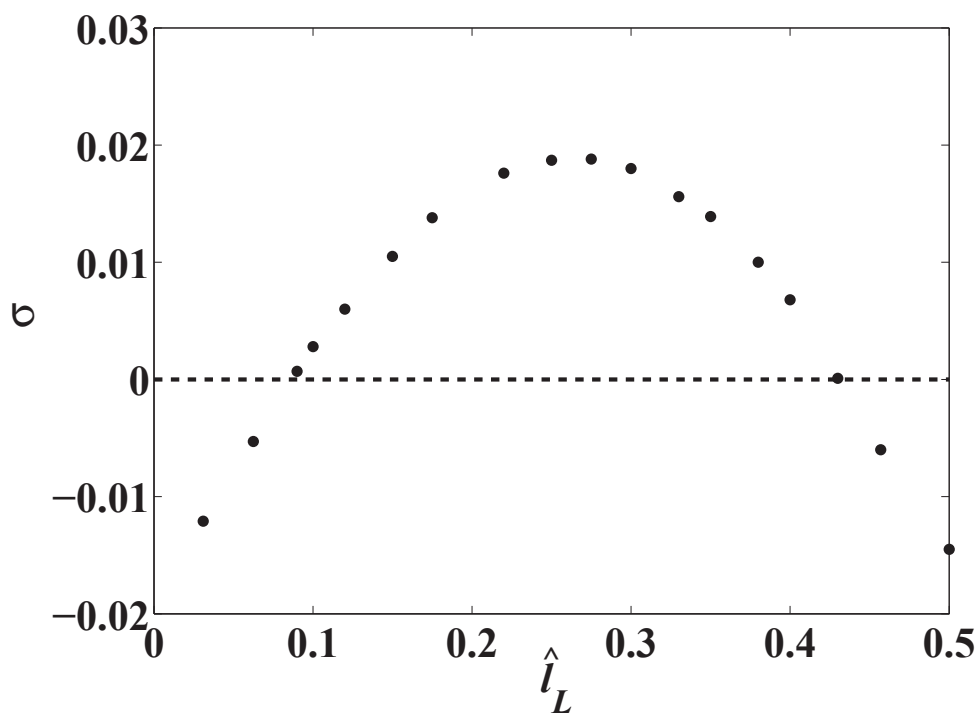


FIGURE 5.9 – Evolution du taux de croissance  $\sigma$  en fonction de la position du stack  $\hat{l}_L$ .  $Z = -0.96$  et  $T_h = 1.2$  sont fixées ici.

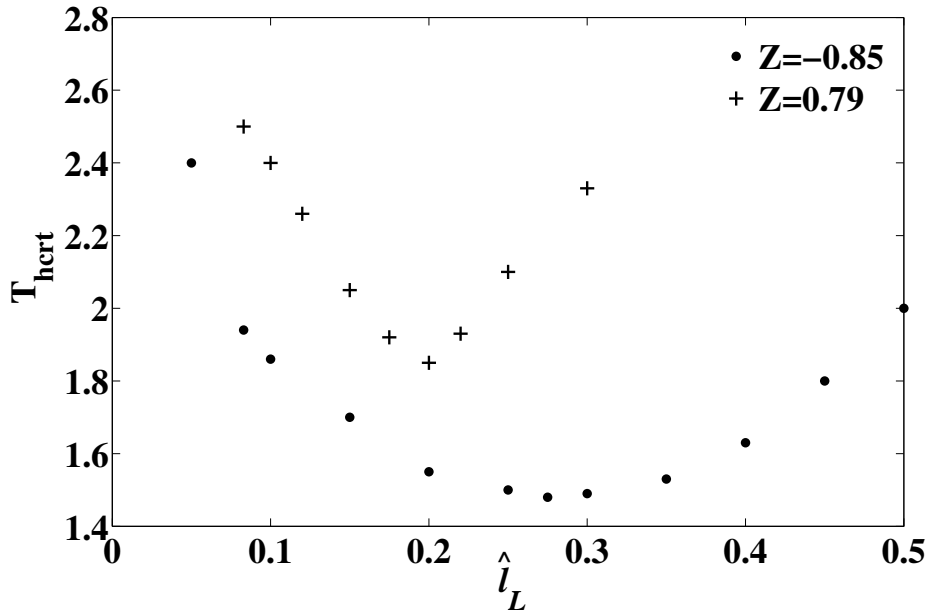


FIGURE 5.10 – Variation de la température critique en fonction de la position du stack. Config. LIMSI.  $Z = -0.85$  et  $Z = 0.79$ .

Sur la figure 5.10, on voit qu’il existe une position optimale du stack qui minimise la température critique, et que cette position varie en fonction de la charge.

### 5.3 Etude de stabilité à partir de la théorie linéaire

Dans cette section, on présente les outils classiques qui permettent, dans le cadre monodimensionnel, de prédire les propriétés de stabilité linéaire, pour les comparer aux résultats précédents. Notre travail, basé sur les travaux de Rott [76, 79, 80, 81], consiste à établir la relation de dispersion des ondes d’instabilité dans une configuration qui modélise le moteur chargé, avec un gradient de température constant dans la région du stack. Les prévisions de ce modèle seront ensuite confrontées aux résultats numériques. D’autres configurations, plus simples, ont été également étudiées. Les relations de dispersion correspondantes sont dérivées en annexe A.



### 5.3.1 Equations de Rott

Pour commencer, on rappelle ici le modèle de Rott [75] en canal plan. Le canal, de longueur  $\tilde{L}_{res}$  et de hauteur  $\tilde{h} = 2\tilde{y}_0$ , telle que  $\tilde{h} \ll \tilde{L}_{res}$ , est rempli d'un gaz considéré parfait, sous pression  $\tilde{p}_0$ , initialement au repos. La distribution spatiale de température moyenne est  $\tilde{T}_m(\tilde{x})$ .

Les équations de la théorie linéaire sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes compressibles, dans une approximation de petites perturbations, dont on recherche une solution harmonique de couche limite, intégrée suivant la hauteur du canal. On suppose que la couche limite visqueuse a une épaisseur  $\tilde{\delta}_\nu$  petite par rapport à  $\tilde{y}_0$ . De plus, ces deux tailles sont beaucoup plus petites que la longueur du résonateur  $\tilde{L}_{res}$  ( $\tilde{\delta}_\nu < \tilde{y}_0 \ll \tilde{L}_{res}$ ). Toutes les variables acoustiques oscillent en temps avec une pulsation complexe  $\tilde{\omega}$  ( $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_r + i\tilde{\omega}_i$ ). Par exemple, la pression acoustique s'exprime comme  $\tilde{p}'(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{p}_1(\tilde{x}) \exp[i\tilde{\omega}\tilde{t}]$ , où l'on a introduit  $\tilde{p}_1$  qui représente l'amplitude complexe.

Les équations de Rott s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\tilde{\omega}\tilde{\rho}_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}(\tilde{\rho}_m\tilde{u}_1) + \tilde{\rho}_m \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{y}} = 0 \\ i\tilde{\omega}\tilde{\rho}_m\tilde{u}_1 = -\frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}^2} \\ \tilde{\rho}_m\tilde{c}_p \left( i\tilde{\omega}\tilde{T}_1 + \tilde{u}_1 \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}} \right) - i\tilde{\omega}\tilde{\beta}\tilde{T}_m\tilde{p}_1 = \tilde{k} \frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \tilde{y}^2} \\ \tilde{\rho}_1 = -\tilde{\rho}_m\tilde{\beta}\tilde{T}_1 + (\gamma/\tilde{c}^2)\tilde{p}_1 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

où  $\tilde{\rho}_1$  est la fluctuation de la masse volumique du gaz,  $\tilde{T}_1$  la fluctuation de la température,  $\tilde{\rho}_m$  la masse volumique moyenne du gaz,  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{v}_1$  les composantes longitudinale et transverse de la vitesse,  $\tilde{p}_1$  la pression acoustique,  $\tilde{\omega}$  la pulsation complexe,  $\tilde{\mu}$  la viscosité dynamique,  $\tilde{\nu}$  la viscosité cinématique,  $\tilde{c}_p$  la chaleur massique à pression constante,  $\tilde{c}_v$  la chaleur massique à volume constant,  $\gamma$  le rapport des chaleurs massiques,  $\tilde{k}$  la conductivité thermique,  $\tilde{r}$  la constante du gaz.

Des manipulations sur le système (5.9) conduisent, après l'intégration selon une section transverse du canal plan, à l'équation différentielle en  $\tilde{p}_1$  :

$$\left(\frac{\tilde{c}}{\tilde{\omega}}\right)^2 \tilde{\rho}_m \frac{d}{d\tilde{x}} \left( \frac{1 - \tilde{f}_\nu}{\tilde{\rho}_m} \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \right) - \left(\frac{\tilde{c}}{\tilde{\omega}}\right)^2 \frac{\tilde{f}_\kappa - \tilde{f}_\nu}{1 - P_r} \tilde{\theta} \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} + (1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_\kappa)\tilde{p}_1 = 0 \quad (5.10)$$

Dans cette équation,

—  $\tilde{\theta}$  est une fonction de  $\tilde{x}$  définie par :

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{\tilde{T}_m} \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}} \quad (5.11)$$

qui peut être singulière si  $\tilde{T}_m$  est une fonction constante par morceaux ; elle a alors les caractéristiques de la distribution  $\delta$  de Dirac.

—  $\tilde{f}_\nu$  désigne un facteur de forme visqueuse d'expression :

$$\tilde{f}_\nu = \frac{1}{\tilde{y}_0 \sqrt{\left(\frac{i\tilde{\omega}}{\tilde{\nu}}\right)}} \tanh \left[ \tilde{y}_0 \sqrt{\left(\frac{i\tilde{\omega}}{\tilde{\nu}}\right)} \right] \quad (5.12)$$

—  $\tilde{f}_\kappa$  désigne un facteur de forme thermique d'expression :

$$\tilde{f}_\kappa = \frac{1}{\tilde{y}_0 \sqrt{\left(\frac{i\tilde{\omega}}{\tilde{\kappa}}\right)}} \tanh \left[ \tilde{y}_0 \sqrt{\left(\frac{i\tilde{\omega}}{\tilde{\kappa}}\right)} \right] \quad (5.13)$$

Une écriture plus compacte est :

$$\tilde{g}_1 \tilde{p}_1 + \frac{d}{d\tilde{x}} \left[ \tilde{g}_2 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \right] + \tilde{g}_3 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} = 0 \quad (5.14)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{g}_1 = 1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_\kappa \\ \tilde{g}_2 = \left(\frac{c}{\tilde{\omega}}\right)^2 (1 - \tilde{f}_\nu) \\ \tilde{g}_3 = \left(\frac{c}{\tilde{\omega}}\right)^2 \frac{\tilde{f}_\nu - \tilde{f}_\kappa \tilde{\theta}}{1 - P_r} \end{cases} \quad (5.15)$$

On peut éliminer le terme de dérivée première de  $\tilde{p}_1$  en utilisant la méthode suivante.

On introduit une fonction  $\tilde{E}$  en facteur de l'équation de propagation :

$$\tilde{E} \left\{ \tilde{g}_1 \tilde{p}_1 + \frac{d}{d\tilde{x}} \left[ \tilde{g}_2 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \right] + \tilde{g}_3 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \right\} = 0 \quad (5.16)$$

$$\Rightarrow \tilde{E} \tilde{g}_1 \tilde{p}_1 + \tilde{E} \frac{d}{d\tilde{x}} \left[ \tilde{g}_2 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \right] + \tilde{E} \tilde{g}_3 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} = 0 \quad (5.17)$$

On introduit une fonction régulière  $\tilde{g}_3^*$  telle que  $\tilde{g}_3 = \tilde{g}_3^* \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}}$ , et on exprime les variables en fonction de  $\tilde{T}_m$  :

$$\Rightarrow \tilde{E} \tilde{g}_1 \tilde{p}_1 + \left( \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}} \right)^2 \left\{ \tilde{E} \frac{d}{d\tilde{T}_m} \left[ \tilde{g}_2 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{T}_m} \right] + \tilde{E} \tilde{g}_3^* \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{T}_m} \right\} = 0 \quad (5.18)$$

On peut récrire cette équation sous la forme

$$\tilde{E} \tilde{g}_1 \tilde{p}_1 + \left( \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}} \right)^2 \frac{d}{d\tilde{T}_m} \left[ \tilde{E} \tilde{g}_2 \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{T}_m} \right] = 0 \quad (5.19)$$

identique à (5.18), si l'on choisit la fonction  $E$  telle que

$$\tilde{g}_2 \frac{d\tilde{E}}{d\tilde{T}_m} = \tilde{E} \tilde{g}_3^*, \quad (5.20)$$

relation qui s'intègre en :

$$\tilde{E} = C_3 \exp \int \frac{\tilde{g}_3^*}{\tilde{g}_2} d\tilde{T}_m = C_3 \exp \int \frac{\tilde{g}_3}{\tilde{g}_2} d\tilde{x}. \quad (5.21)$$

L'équation de propagation de Rott prend alors la forme :

$$\boxed{\tilde{E} \tilde{g}_1 \tilde{p}_1 + \frac{d}{d\tilde{x}} \left[ \tilde{g}_2 \tilde{E} \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \right]} = 0. \quad (5.22)$$

En annexe A, on dérive les relations de dispersion à partir de l'équation (5.22) pour différentes configurations. Dans la suite, la dérivation est faite dans le cadre d'un modèle proche des configurations étudiées numériquement.

### 5.3.2 Modèle de canal incluant une région avec gradient de température constant

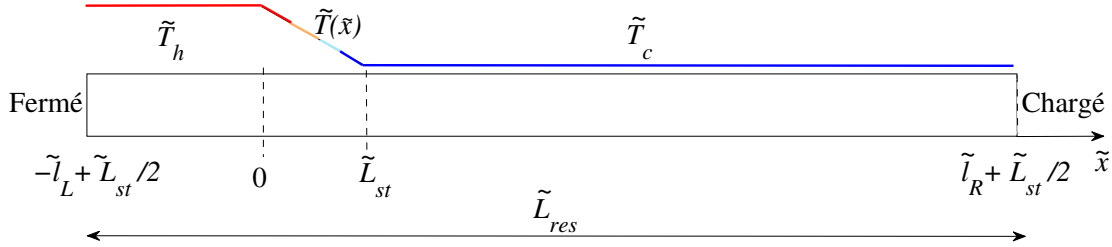


FIGURE 5.11 – Canal incluant une région avec gradient de température constant.

Le modèle considéré ici correspond à un tube de longueur  $\tilde{L}_{res} = \tilde{l}_L + \tilde{l}_R$ , fermé à l'extrémité gauche, chargé à l'extrémité droite (Fig. 5.11). Le canal s'étend de  $\tilde{x} = -\tilde{l}_L + \tilde{L}_{st}/2$  à  $\tilde{x} = \tilde{l}_R + \tilde{L}_{st}/2$ , avec  $\tilde{T} = \tilde{T}_h$  sur  $-\tilde{l}_L + \tilde{L}_{st}/2 \leq \tilde{x} \leq 0$ , et  $\tilde{T} = \tilde{T}_c$  sur  $\tilde{L}_{st} \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R + \tilde{L}_{st}/2$ . Dans la région du stack ( $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{L}_{st}$ ), on impose un gradient de température constant. On suppose que toutes les dissipations sont concentrées dans le stack et à l'extrémité chargée. Dans les parties du canal à température constante, il n'y a aucune dissipation ( $\tilde{f}_\nu = 0$ ,  $\tilde{f}_\kappa = 0$ ). La longueur des portions non dissipatives est donc  $\tilde{L}_{res} - \tilde{L}_{st}$ . On introduit ici  $\tilde{u}_1(\tilde{x})$  la vitesse débitante reliée à la pression acoustique par les équations d'Euler 1D pour les écoulements non visqueux, écrites dans la section 2.2, avec la prise en compte de la dépendance harmonique en temps des variables.

**a. Partie chaude :** Sur  $-\tilde{l}_L + \tilde{L}_{st}/2 \leq \tilde{x} \leq 0$ , le canal est maintenu à la température constante  $\tilde{T}_h$ , et l'écoulement est non dissipatif, on a donc :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{1h} &= -\tilde{U}_h \tilde{\rho}_h \tilde{c}_h \left\{ \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{x} + \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] + \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{x} + \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\} \\ \tilde{u}_{1h} &= \tilde{U}_h \left\{ \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{x} + \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] - \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{x} + \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

**b. Partie froide :** Sur  $\tilde{L}_{st} \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R + \tilde{L}_{st}/2$ , le canal est maintenu à la température constante  $\tilde{T}_c$ , l'écoulement est non dissipatif, on a donc :

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{1c} &= -\tilde{U}_c \tilde{\rho}_c \tilde{c}_c \left\{ \left( -1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( \tilde{x} - \tilde{l}_R - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. \left( 1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( \tilde{x} - \tilde{l}_R - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\} \\
\tilde{u}_{1c} &= \tilde{U}_c \left\{ \left( -1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( \tilde{x} - \tilde{l}_R - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. \left( 1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( \tilde{x} - \tilde{l}_R - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

**c. Stack :** Dans le stack, un gradient de température constant  $d\tilde{T}_m/d\tilde{x}$  est imposé. L'équation pour la vitesse débitante  $\tilde{u}_{1st}$  dans le stack s'écrit :

$$\frac{d\tilde{u}_{1st}}{d\tilde{x}} - C(\tilde{x})\tilde{u}_{1st} = -B(\tilde{x}) \tag{5.25}$$

avec

$$\begin{cases} B(\tilde{x}) = \frac{i\tilde{\omega}}{\gamma\tilde{P}_m} \left[ 1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_\kappa \right] \tilde{p}_{1st} \\ C(\tilde{x}) = \left[ \frac{\tilde{f}_\kappa - \tilde{f}_\nu}{(1 - \tilde{f}_\nu)(1 - P_r)} \right] \frac{1}{\tilde{T}_m} \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}} \end{cases} \tag{5.26}$$

On fait l'hypothèse (cohérente avec la simulation numérique) que le stack est acoustiquement compact, et que la pression acoustique  $\tilde{p}_{1st}$  y est uniforme. Grâce à cette hypothèse, on peut obtenir une expression pour  $\tilde{u}_{1st}(\tilde{x})$ .

L'équation (5.25) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients variables avec second membre

— solution de l'équation homogène

$$\tilde{u}_{1st}^H = A \exp \left( \int_0^{\tilde{x}} C(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 \right) \tag{5.27}$$

— solution particulière

$$\tilde{u}_{1st}^P = K(\tilde{x}) \exp \left( \int_0^{\tilde{x}} C(\tilde{x}_1) d\tilde{x}_1 \right). \tag{5.28}$$

En injectant la solution particulière dans l'équation (5.25), on obtient :

$$K'(\tilde{x}) = -B(\tilde{x})\exp\left(-\int_0^{\tilde{x}} C(\tilde{x}_1)d\tilde{x}_1\right). \quad (5.29)$$

La fonction  $K(\tilde{x})$  peut donc s'écrire

$$K(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} \left[-B(\tilde{x}_1)\exp\left(-\int_0^{\tilde{x}_1} C(\tilde{x}_2)d\tilde{x}_2\right)\right] d\tilde{x}_1 \quad (5.30)$$

La solution de (5.25) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1st}(\tilde{x}) &= \left\{ A + \int_0^{\tilde{x}} \left[-B(\tilde{x}_1)\exp\left(-\int_0^{\tilde{x}_1} C(\tilde{x}_2)d\tilde{x}_2\right)\right] d\tilde{x}_1 \right\} \exp\left(\int_0^{\tilde{x}} C(\tilde{x}_1)d\tilde{x}_1\right) \\ &= \exp\left[\int_0^{\tilde{x}} \frac{\tilde{f}_\kappa(\tilde{x}_1) - \tilde{f}_\nu(\tilde{x}_1)}{(1 - \tilde{f}_\nu(\tilde{x}_1))} \frac{1}{(1 - P_r)} \frac{d\tilde{T}}{\tilde{T}(\tilde{x}_1)} d\tilde{x}_1\right] \times \\ &\left\{ A - \int_0^{\tilde{x}} \frac{i\tilde{\omega}}{\gamma\tilde{P}_m} \left[1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_\kappa(\tilde{x}_1)\right] \tilde{p}_{1st} \exp\left[-\int_0^{\tilde{x}_1} \frac{\tilde{f}_\kappa(\tilde{x}_2) - \tilde{f}_\nu(\tilde{x}_2)}{(1 - \tilde{f}_\nu(\tilde{x}_2))} \frac{1}{(1 - P_r)} \frac{d\tilde{T}}{\tilde{T}(\tilde{x}_2)} d\tilde{x}_2\right] d\tilde{x}_1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

On peut récrire cette relation à l'aide d'intégrales sur la température :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1st}(\tilde{x}) &= \exp\left[-\int_{\tilde{T}(\tilde{x})}^{\tilde{T}_h} \frac{\tilde{f}_\kappa(\theta) - \tilde{f}_\nu(\theta)}{(1 - \tilde{f}_\nu(\theta))} \frac{1}{\theta} d\theta\right] \times \\ &\left\{ A + \int_{\tilde{T}(\tilde{x})}^{\tilde{T}_h} \frac{i\tilde{\omega}}{\gamma\tilde{P}_m} \left[1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_\kappa(\theta)\right] \tilde{p}_{1st} \exp\left[\int_{\theta}^{\tilde{T}_h} \frac{\tilde{f}_\kappa(\theta^*) - \tilde{f}_\nu(\theta^*)}{(1 - \tilde{f}_\nu(\theta^*))} \frac{1}{\theta^*} d\theta^*\right] \frac{\tilde{L}_{st}}{\tilde{T}_c - \tilde{T}_h} d\theta \right\}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

### Equation de dispersion

La pression acoustique est continue aux bornes du stack, donc

$$\tilde{p}_{1h}(\tilde{x} = 0) = \tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{L}_{st}) = \tilde{p}_{1st}. \quad (5.33)$$

La vitesse débitante  $y$  est également continue :

$$\tilde{u}_{1st}(\tilde{x} = 0) = \tilde{u}_{1h}(\tilde{x} = 0) \quad (5.34)$$

et

$$\tilde{u}_{1st}(\tilde{x} = \tilde{L}_{st}) = \tilde{u}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{L}_{st}). \quad (5.35)$$

En explicitant la condition aux limites (5.33), on obtient :

$$\begin{aligned} & -\tilde{U}_h \tilde{\rho}_h \tilde{c}_h \left\{ \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] + \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\} = \\ & -\tilde{U}_c \tilde{\rho}_c \tilde{c}_c \left\{ \left( -1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] + \left( 1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

En explicitant la condition aux limites (5.34), on obtient :

$$A = \tilde{U}_h \left\{ \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] - \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\}. \quad (5.37)$$

En explicitant la condition aux limites (5.35), on obtient :

$$\begin{aligned} & \exp \left[ - \int_{\tilde{T}(\tilde{x})}^{\tilde{T}_h} \frac{\tilde{f}_\kappa(\theta) - \tilde{f}_\nu(\theta)}{(1 - \tilde{f}_\nu(\theta))(1 - P_r)} \frac{1}{\theta} d\theta \right] \left\{ A + \int_{\tilde{T}(\tilde{x})}^{\tilde{T}_h} \frac{i\tilde{\omega}}{\gamma \tilde{P}_m} \left[ 1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_\kappa(\theta) \right] \tilde{p}_{1st} \right. \\ & \left. \exp \left[ \int_{\theta}^{\tilde{T}_h} \frac{\tilde{f}_\kappa(\theta^*) - \tilde{f}_\nu(\theta^*)}{(1 - \tilde{f}_\nu(\theta^*)) (1 - P_r)} \frac{1}{\theta^*} d\theta^* \right] \frac{\tilde{L}_{st}}{\tilde{T}_c - \tilde{T}_h} d\theta \right\} = \\ & \tilde{U}_c \left\{ \left( -1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] - \left( 1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c \tilde{c}_c} \right) \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

En utilisant les équations (5.36), (5.37) et (5.38), on peut éliminer  $A$  et se ramener à un système homogène pour les amplitudes  $\tilde{U}_h$  et  $\tilde{U}_c$  :

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{U}_h \\ \tilde{U}_c \end{pmatrix} = 0 \quad (5.39)$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{11} &= \exp \left[ \int_{\tilde{T}_c}^{\tilde{T}_h} \frac{\tilde{f}_\nu(\tilde{\theta}) - \tilde{f}_\kappa(\tilde{\theta})}{(1 - \tilde{f}_\nu(\tilde{\theta})) (1 - P_r)} \frac{1}{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} \right] \times \left\{ \left[ \exp \left( i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right) - \right. \right. \\
&\exp \left( -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right) \left. \right] - \int_{\tilde{T}_c}^{\tilde{T}_h} \frac{i\tilde{\omega}\tilde{\rho}_h\tilde{c}_h}{\gamma\tilde{P}_m} [1 + \tilde{f}_\kappa(\tilde{\theta})(\gamma - 1)] \left[ \exp \left( i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right) + \right. \\
&\exp \left( -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right) \left. \right] \times \exp \left( \int_{\tilde{\theta}}^{\tilde{T}_h} \frac{\tilde{f}_\kappa(\tilde{\theta}^*) - \tilde{f}_\nu(\tilde{\theta}^*)}{(1 - \tilde{f}_\nu(\tilde{\theta}^*)) (1 - P_r)} \frac{1}{\tilde{\theta}^*} d\tilde{\theta}^* \right) \frac{\tilde{L}_{st}}{\tilde{T}_c - \tilde{T}_h} d\tilde{\theta} \left. \right\} \\
\tilde{d}_{12} &= - \left\{ \left( -1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c\tilde{c}_c} \right) \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] - \left( 1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c\tilde{c}_c} \right) \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\} \\
\tilde{d}_{21} &= -\tilde{\rho}_h\tilde{c}_h \left\{ \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] + \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \left( \tilde{l}_L - \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\} \\
\tilde{d}_{22} &= \tilde{\rho}_c\tilde{c}_c \left\{ \left( -1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c\tilde{c}_c} \right) \exp \left[ i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] + \left( 1 + \frac{\tilde{f}}{\tilde{\rho}_c\tilde{c}_c} \right) \exp \left[ -i \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \left( -\tilde{l}_R + \frac{\tilde{L}_{st}}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

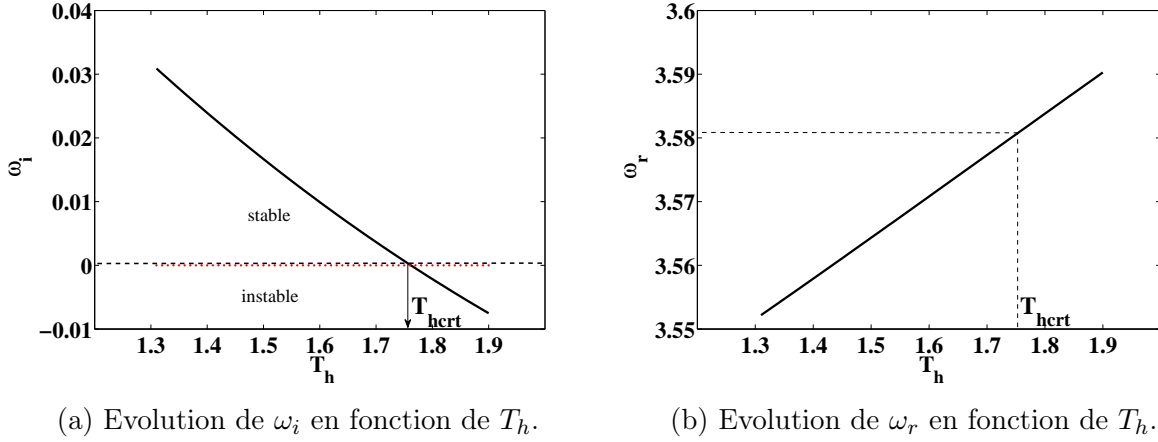
Ce système n'admet de solution non triviale que si son déterminant est nul :

$$\boxed{\tilde{d}_{11}\tilde{d}_{22} - \tilde{d}_{12}\tilde{d}_{21} = 0} \tag{5.41}$$

Cette relation constitue la relation de dispersion des ondes. L'équation de dispersion (5.41) est adimensionnée avec les mêmes grandeurs de référence que la simulation numérique, puis elle est résolue pour obtenir la fréquence angulaire complexe  $\tilde{\omega}$  en utilisant un algorithme de recherche de racine avec une erreur de l'ordre de  $10^{-12}$ . Les valeurs numériques des parties intégrales sont calculées par la méthode *global adaptative quadrature (integral)*. Le processus nécessite une *guess value* pour la fréquence angulaire : on prend la valeur obtenue par simulation numérique pour  $\omega_r$ , avec  $\omega_i = 0$ . Après changement incrémental de la température chaude ( $\Delta T = 0.01$ ), on se sert de la valeur de  $\omega$  obtenue précédemment pour calculer la nouvelle valeur de  $\omega$ . Lorsque  $\omega_i = 0$ , on obtient la température critique, ainsi que le gradient de température critique dans le stack.

La figure 5.12 illustre ce processus pour une charge  $Z = 0.887$ . On voit sur les graphes des figures 5.12a et 5.12b les variations de  $\omega_i$  et  $\omega_r$  quand on fait varier  $T_h$ . La pulsation



FIGURE 5.12 – Config. LIMSI.  $Z = 0.887$ .

$\omega_r$  dépend très peu de  $T_h$ . Lorsque  $T_h = 1.76$ , on obtient  $\omega_i = 0$ , ce qui détermine le seuil entre le régime stable ( $\omega_i > 0$ ) et instable ( $\omega_i < 0$ ). Dans ce cas, la température critique est  $T_{hcrit} = 1.76$  et la fréquence angulaire associée  $\omega_r = 3.58$  (correspondant au tube en  $\lambda/4$ ).

### Résultats de la théorie linéaire

Dans l'étude de stabilité par simulation numérique, les paramètres géométriques diffèrent légèrement de ceux utilisés par la théorie linéaire. En particulier, les échangeurs modélisés dans la simulation sont absents et on se demande si la dissipation associée à leur présence peut être négligée ou bien doit être prise en compte en augmentant la taille de stack dans le cas de la théorie linéaire. Cette étude est effectuée dans le cas du dispositif expérimental 1, pour  $0.4 < |Z| < 1$ . La figure 5.13 illustre l'influence de  $\tilde{L}_{st}$  sur le seuil de déclenchement. Lorsque  $\tilde{L}_{st} = 15\text{cm}$ , c'est à dire lorsque la longueur de la cellule active de la théorie linéaire est égale à la longueur du stack de la simulation numérique, on obtient la courbe en traits discontinus. Lorsque  $\tilde{L}_{st}$  est égale à la longueur du stack augmentée de celle des échangeurs et vaut  $\tilde{L}_{st} = 17\text{cm}$ , on obtient les données représentées par les points noirs. Pour illustrer la sensibilité à la longueur du stack, on montre aussi en pointillés les gradients de température critiques pour  $\tilde{L}_{st} = 8.5\text{cm}$ . Augmenter la longueur du stack et la longueur des échangeurs change significativement le seuil. On

adoptera dans la suite pour la théorie linéaire la longueur du stack expérimental, sans l'augmenter de celle des échangeurs. D'autre part, la figure 5.14 montre que la fréquence d'oscillation des modes critiques est très peu affectée par ce paramètre.

## 5.4 Comparaison entre résultats numériques et théorie linéaire

En utilisant la méthode présentée en section 5.3.2, on calcule la température critique et la fréquence angulaire en fonction de la charge  $Z$  qu'on se donne dans les intervalles  $0.4 < |Z| < 1$  pour le cas du dispositif expérimental 2. Les figures 5.15, 5.16 présentent la comparaison avec les résultats numériques. Sur ces figures, on constate que les résultats numériques sont en bon accord avec la théorie linéaire. La figure 5.15 montre que les températures critiques obtenues par la théorie linéaire sont également plus élevées que celles obtenues par la simulation numérique. Par exemple, lorsque  $Z = -0.997$ , la température critique donnée par la simulation numérique est égale à 1.024 tandis que celle donnée par la théorie linéaire est  $T_{hcrit} = 1.14$ . De même, lorsque  $Z = 0.998$ , le résultat numérique est  $T_{hcrit} = 1.025$  tandis que la théorie linéaire donne  $T_{hcrit} = 1.13$ . Les seuils sont légèrement différents par la théorie linéaire, ce qui vient probablement du fait que la longueur du tube sans pertes ( $L_{res} - L_{st}$ ) y est plus petite que dans la simulation numérique.

En faisant l'hypothèse de l'approximation de couche limite, on place une seule plaque de longueur  $L_{st}$  en présence d'une onde acoustique dans le fluide parfait. On suppose la plaque maintenue à un gradient de température constante  $\nabla T$ . On suppose aussi que  $k$  et  $\mu$  pour le fluide sont indépendants de la température. On peut obtenir un gradient critique permettant de différencier entre fonctionnement moteur et réfrigérateur :

$$(\nabla T)_{crit} = \frac{c^2}{c_p} \frac{2\pi}{\lambda} \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (5.42)$$

où  $x$  désigne la position de la plaque dans le résonateur de longueur  $\lambda/2$ . Cette équation peut se réduire à

$$\left(\frac{T_{hcrt} - 1}{L_{st}}\right) \approx (\gamma - 1) \frac{\pi}{L_{res}} \text{ ou encore } T_{hcrt} \approx 1 + (\gamma - 1)\pi M. \quad (5.43)$$

En prenant les paramètres du dispositif expérimental 1, à l'aide de l'équation (5.43) on aura  $T_{hcrt} \approx 1.01$ , ce qui est très proche du résultat obtenu par simulation ( $T_{hcrt} = 1.025$  pour  $Z = -0.997$ ).

La figure 5.16 montre la fréquence des modes critiques obtenue par simulation numérique et par la théorie linéaire pour  $0.4 < |Z| < 1$ . La fréquence angulaire  $\omega$  est rapportée à la fréquence angulaire de référence  $\omega_{ref} = \pi$ . Les résultats obtenus par les deux méthodes sont très proches. Lorsque  $|Z| < 0.4$ , les résultats numériques et ceux de la théorie linéaire s'écartent significativement. Lorsque  $|Z| \rightarrow 0$ , la théorie linéaire donne  $T_{hcrt} \rightarrow \infty$  ainsi que  $\omega \rightarrow \infty$ . Ceci est naturel, la condition  $Z = 0$  ( $f = \gamma$ ) correspondant à l'absence d'onde réfléchie à l'extrémité chargée. Dans ces conditions, la simulation numérique donne des valeurs finies de  $T_{hcrt}$ , mais très élevées. De telles températures n'ont de toute manière pas de pertinence pour l'utilisation du moteur thermoacoustique.

## 5.5 Comparaison entre résultats numérique et expérimentaux

Dans les années 90, Atchley *et al.* [10, 11] ont publié plusieurs études expérimentales sur les conditions de déclenchement de l'instabilité dans un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires. L'objectif de cette partie est de confronter les résultats numériques obtenus avec des paramètres géométriques reproduisant l'expérience de Atchley (Config. 2), aux résultats expérimentaux. On présente dans le premier temps les résultats expérimentaux sur le seuil de l'instabilité thermoacoustique. Dans un deuxième temps, on se

sert de la comparaison pour donner une interprétation de la charge que nous utilisons dans le modèle numérique.

La figure 5.17 est une représentation, dans le plan (température chaude  $\tilde{T}_h$ , pression moyenne  $\tilde{P}_m$ ), des régions qui présentent des régimes de fonctionnement différents : dans la région I, le mode fondamental  $\lambda/2$  est observé ; dans la région II, c'est le premier harmonique ; dans la région III, les deux modes sont présents. Les frontières de ces régions sont données par les seuils d'instabilité. On note de plus que si la pression moyenne  $\tilde{P}_m$  est très faible, il faut imposer un gradient de température très important pour démarrer le moteur, et c'est le premier harmonique qui apparaît alors.

La figure 5.17 montre que pour  $\tilde{P}_m = 2.4$  bar, lorsque  $\tilde{T}_h = 653$  K ( $\Delta\tilde{T} = 360$  K), seul le mode fondamental  $\lambda/2$  est amplifié. Et lorsque  $\tilde{T}_h = 730$  K ( $\Delta\tilde{T} = 437$  K), le premier harmonique devient à son tour instable. Après avoir effectué plusieurs simulations numériques, on observe que la valeur de charge  $Z = -0.89$  (correspondant à la résistance  $\tilde{R} = 6.003$  MPa.s/m<sup>3</sup>) rend bien compte des valeurs des seuils obtenus expérimentalement. Pour  $\tilde{P}_m = 4.4$  bar, lorsque  $\tilde{T}_h = 660$  K ( $\Delta\tilde{T} = 367$  K), on obtient que le mode fondamental  $\lambda/2$  devient amplifié, et si l'on augmente la température jusqu'à  $\tilde{T}_h = 821$  K ( $\Delta\tilde{T} = 528$  K), le premier harmonique  $\lambda$  devient également instable. C'est la charge  $Z = -0.928$  qui permet d'obtenir la même température critique  $\tilde{T}_{hert} = 660$  K que celle obtenue par l'expérience. Cette valeur de la charge correspond à la résistance  $\tilde{R} = 17.1$  MPa.s/m<sup>3</sup>. Les fréquences angulaires des modes critiques sont aussi en bon accord.

Notons tout d'abord que la valeur de la résistance dimensionnée se déduit de la valeur de  $Z$  :

$$\tilde{R} = \gamma \frac{1 - Z M \tilde{P}_m}{1 + Z \tilde{S} \tilde{U}_{ref}} \quad (5.44)$$

où  $M = 0.035$  est le nombre de Mach,  $\tilde{U}_{ref} = 35$  m/s est la vitesse de référence,  $\tilde{P}_m$  désigne la pression moyenne et  $\tilde{S} = \pi \times (\tilde{d}/2)^2 = 0.00115\text{m}^2$  représente l'aire du résonateur avec  $\tilde{d}$  le diamètre du résonateur. La figure 5.18 montre l'évolution de  $\tilde{R}$  en fonction de  $\tilde{P}_m$ .

Sur cette figure, on voit que  $\tilde{R}$  déterminée pour quelque valeurs de  $\tilde{P}_m$  (table 5.6) de telle manière à obtenir un accord entre les seuils numériques et expérimentaux.

$\tilde{P}_m$ (bar)	1.5	2.0	2.4	3.0	3.5	4.0	4.4
$\tilde{T}_{hcrt}$ (K)	718	670	729	648	656	659	662
$Z$	-0.812	-0.867	-0.890	-0.905	-0.914	-0.922	-0.928
$\tilde{R}$ (MPa · s/m <sup>3</sup> )	2.09	4.07	6.00	8.67	11.21	14.20	17.14

TABLE 5.6 – Température critique  $\tilde{T}_{hcrt}$ , charge  $Z$  et résistance correspondante  $\tilde{R}$  déterminée par simulation de manière à obtenir l'accord avec les seuils expérimentaux [10], en fonction de la pression moyenne  $\tilde{P}_m$ .

Dans le modèle hybride, le résonateur sans perte est connecté à une charge purement résistive qui joue essentiellement le rôle d'une résistance thermique. Dans l'expérience, cette résistance peut être estimée par l'expression suivante [93] :

$$\tilde{R}_\kappa = \frac{2\gamma\tilde{P}_m}{\tilde{\omega}(\gamma - 1)\tilde{S}_s\tilde{\delta}_\kappa} \quad (5.45)$$

où  $\tilde{S}_s = \pi d\tilde{L}_{res}$  est la surface latérale du résonateur. Cette loi est reportée à la figure 5.18. On observe que les résultats numériques sont en accord qualitatif avec les résultats expérimentaux. Ceci donne une indication sur la manière dont, à l'aide du modèle hybride avec charge résistive localisée, on peut rendre compte du fonctionnement d'une machine réelle où les dissipations sont réparties dans tout le résonateur.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la méthode utilisée pour extraire du signal de pression acoustique dans la cellule active les propriétés d'instabilité d'une configuration donnée. Cette méthode a été utilisée pour déterminer la température critique de déclenchement pour différentes valeurs de la charge localisée à l'extrémité froide du résonateur, ce qui couvre un éventail de situations allant du tube en configuration fermé/fermé au tube

fermé/ouvert. Les résultats ont été confrontés à la théorie linéaire, avec un bon accord. La comparaison avec des résultats expérimentaux a montré que la charge localisée à l'extrémité du résonateur peut rendre compte des dissipations présentes dans l'expérience, mais de manière répartie sur tout le résonateur. Le chapitre 6 suivant concerne l'étude des régimes transitoire et périodique qui suivent le déclenchement de l'instabilité.

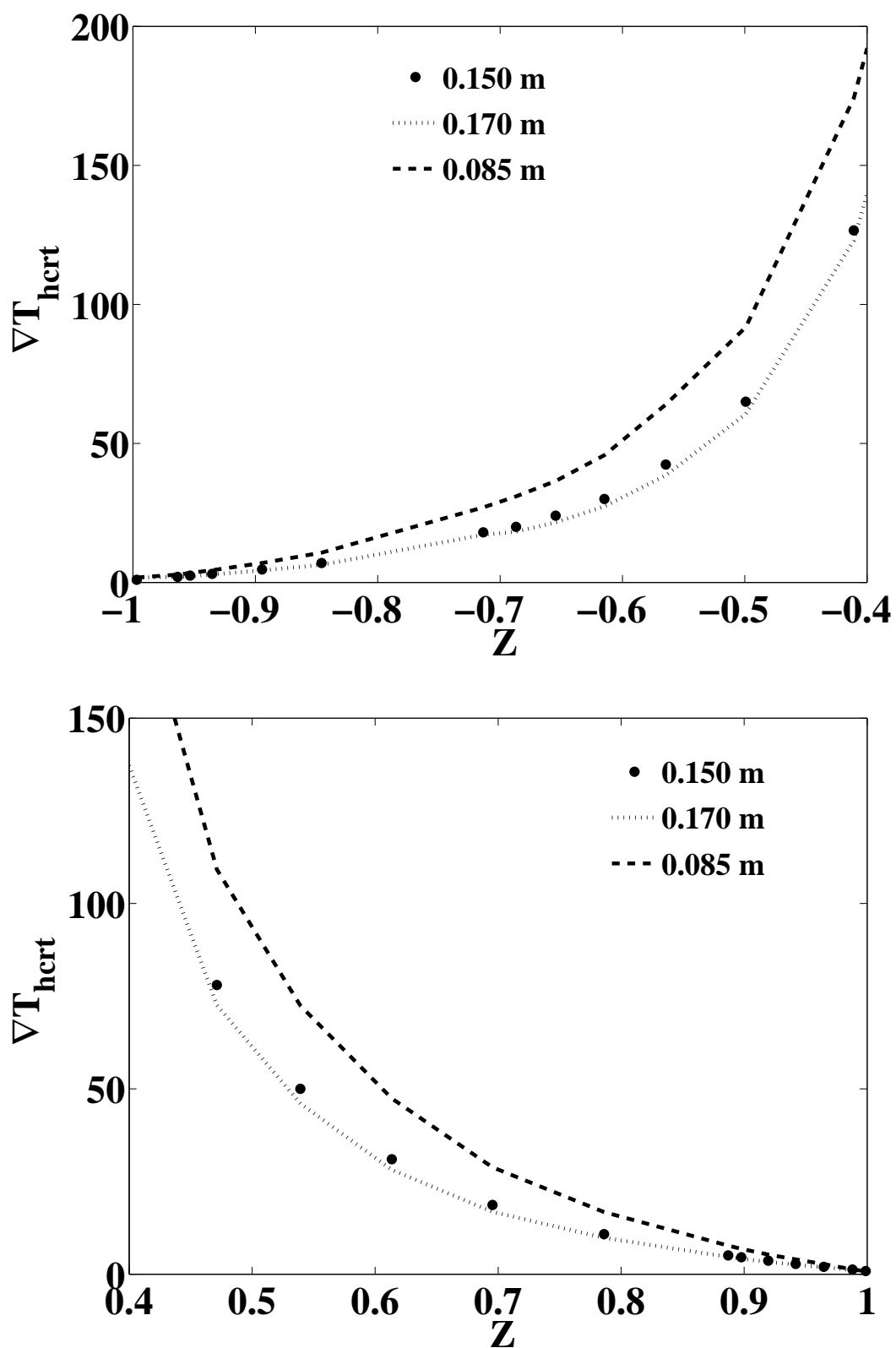


FIGURE 5.13 – Influence de  $\tilde{L}_{st}$  sur le gradient de température critique de l'instabilité de déclenchement thermoacoustique. Config. LIMSI. (en haut) :  $-1 < Z < -0.40$ ; (en bas)  $0.40 < Z < 1$ .

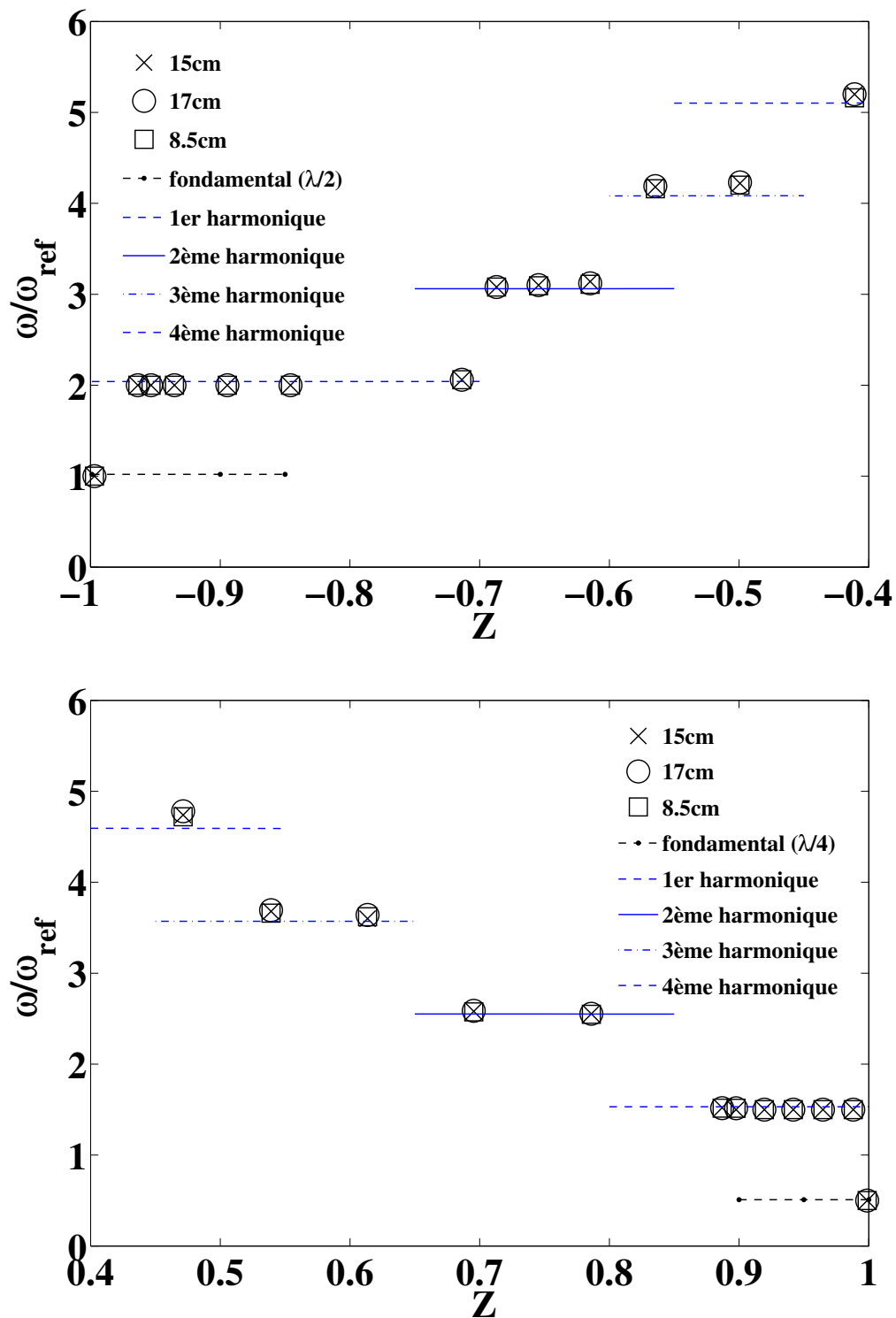


FIGURE 5.14 – Evolution de la fréquence angulaire correspondant aux situations marginales. Config. LIMSI. (en haut) :  $-1 < Z < -0.4$ ; (en bas)  $0.4 < Z < 1$ .



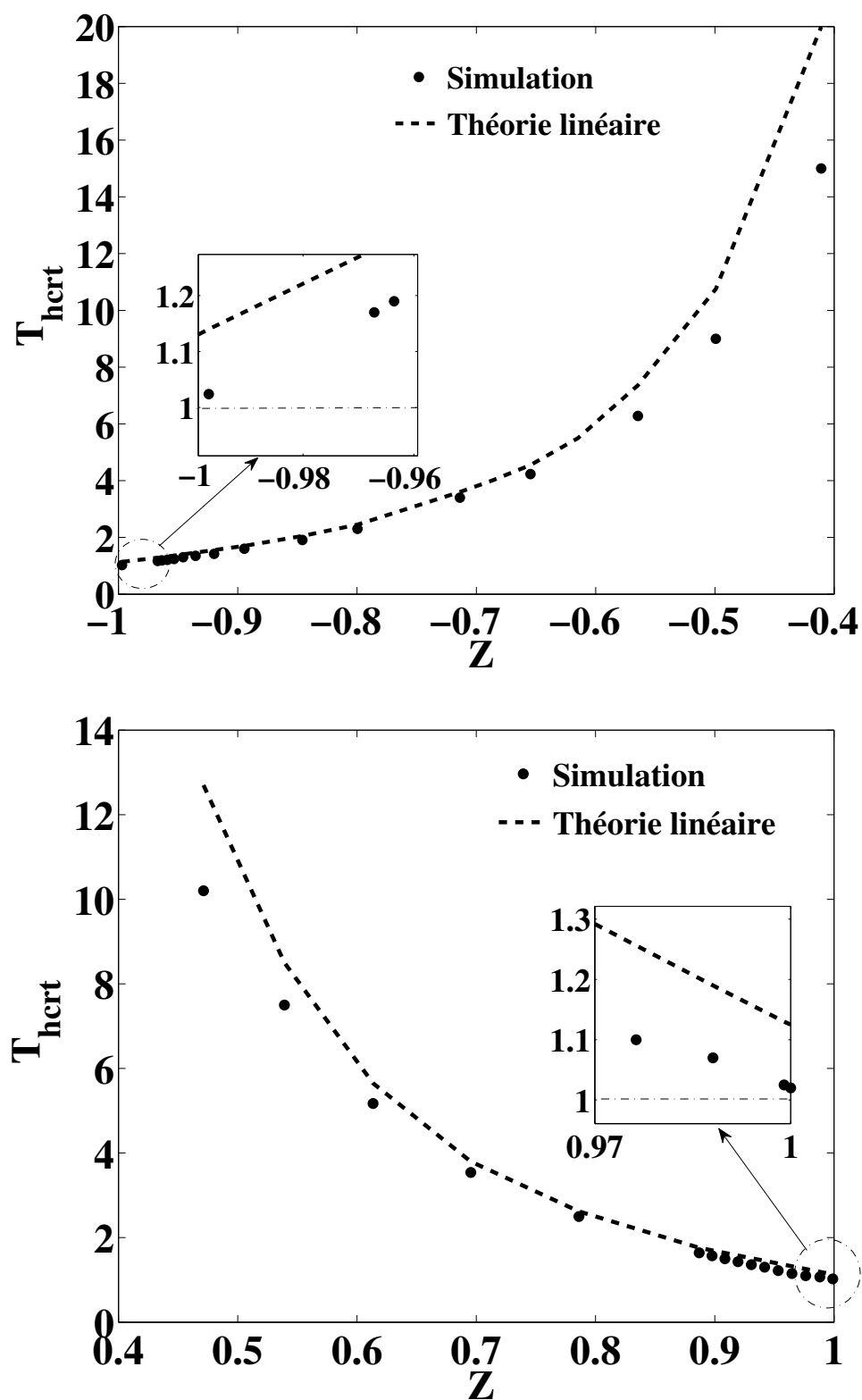


FIGURE 5.15 – Evolution de la température critique en fonction de  $Z$ . (en haut) :  $-1 < Z < -0.40$ ; (en bas)  $0.40 < Z < 1$ . Simulation numérique et théorie linéaire, Config. LIMSI

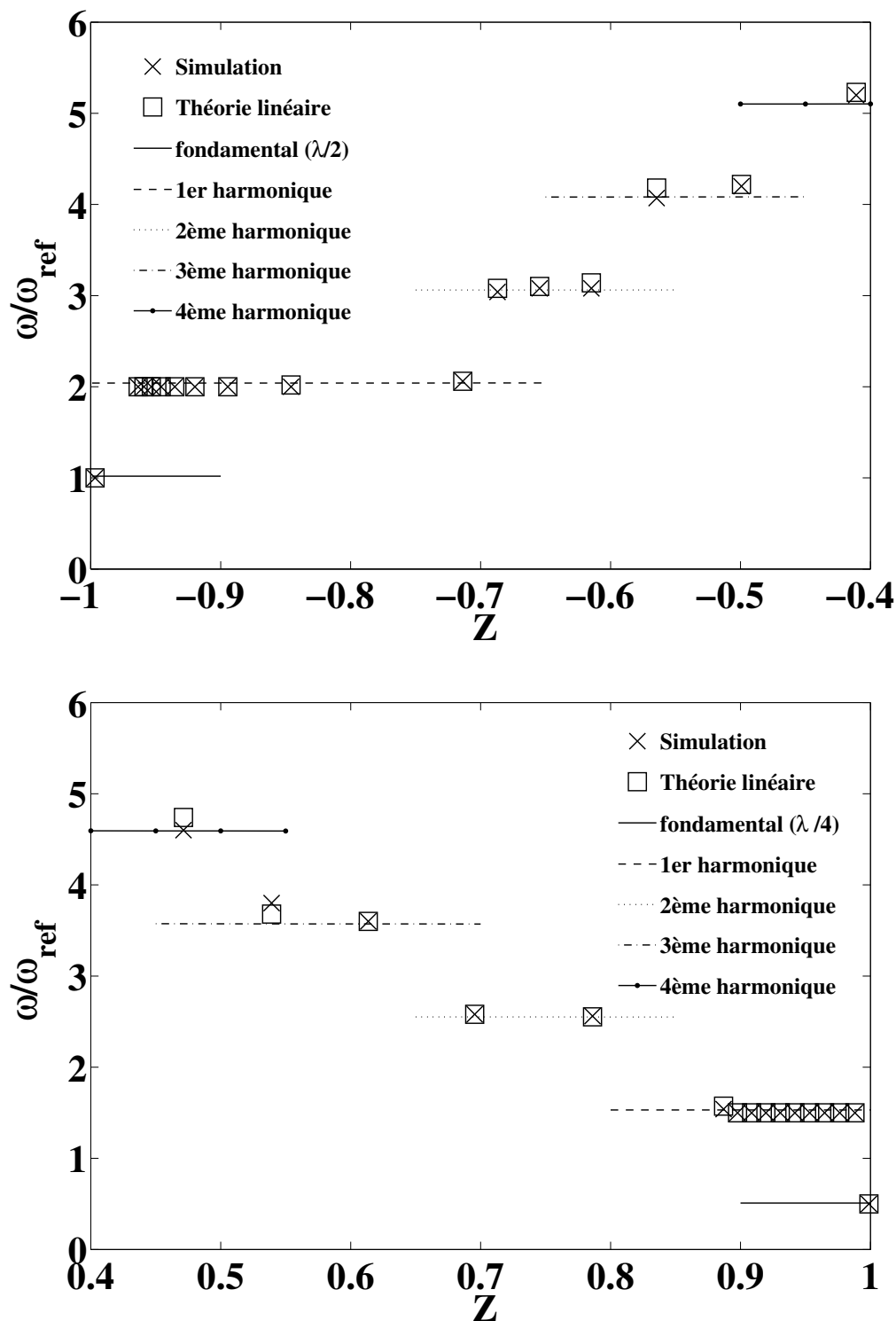


FIGURE 5.16 – Evolution de la fréquence angulaire en fonction de  $Z$ . (en haut) :  $-1 < Z < -0.4$ ; (en bas)  $0.4 < Z < 1$ . Ces valeurs de référence sont calculées par la théorie linéaire en imposant  $T_h = T_c = 1$ . Simulation numérique et théorie linéaire, Config. LIMSI

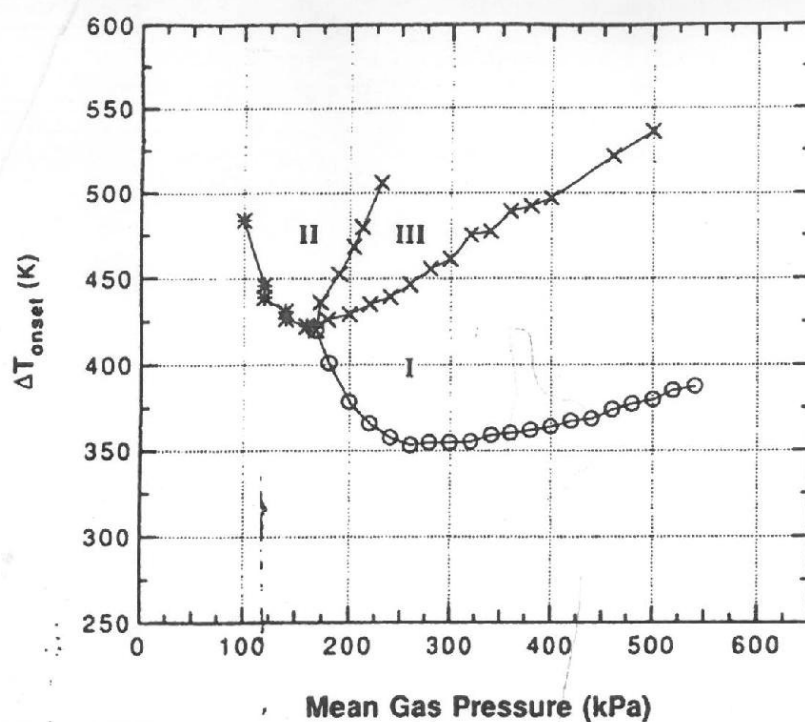


FIGURE 5.17 – Diagramme de stabilité de [10], dispositif expérimental 2. Courbes marginales des modes 1 et 2.

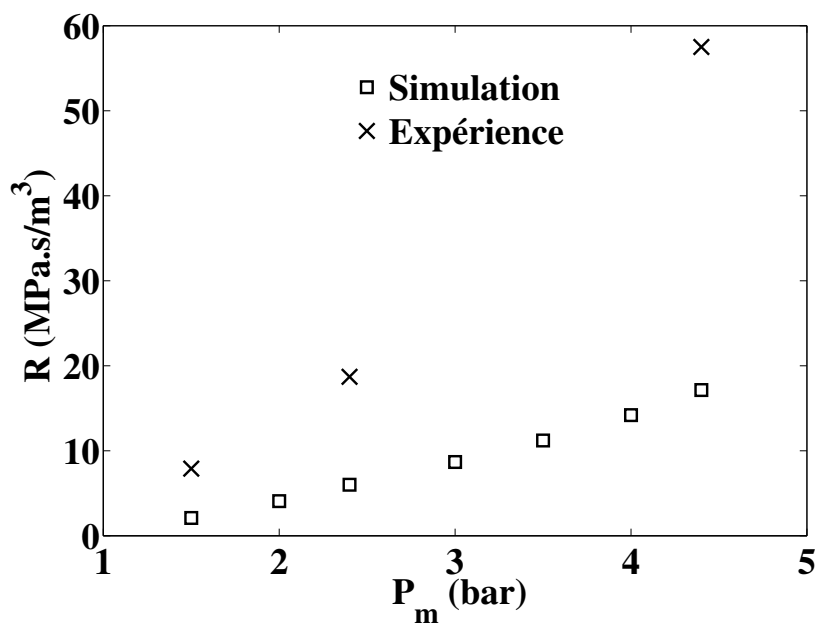


FIGURE 5.18 – Evolution de la résistance  $\tilde{R}$  utilisée dans les simulations numériques permettant de reproduire les résultats expérimentaux de Atchley [10], en fonction de  $\tilde{P}_m$ .

# Chapitre 6

## Analyse du régime périodique

### 6.1 Introduction

Jusqu'à présent, les simulations menées avec le modèle hybride nous ont permis de décrire l'exemple du démarrage complet d'un moteur thermoacoustique couplé à une charge jusqu'à l'établissement du régime périodique (chapitre 4) ainsi que l'influence de la charge sur la phase de démarrage initial du moteur (chapitre 5).

Ce chapitre est consacré à l'étude du régime périodique. Les simulations permettent de caractériser le champ acoustique 1D qui s'établit dans le résonateur (contenu fréquentiel, amplitude, puissance acoustique générée). Elles permettent également de connaître l'écoulement bidimensionnel au sein de la cellule active, et donc de pouvoir en étudier la dynamique et les échanges thermiques. Cette étude permet une vision nouvelle sur la sélection des modes acoustiques et sur la dynamique locale.

La première partie de ce chapitre concerne une présentation des cas de simulation. La deuxième partie est consacrée à l'obtention de la saturation du moteur. La troisième partie concerne les aspects locaux de l'écoulement dans la cellule active en régime périodique : dynamique et thermique. On discutera la formation de tourbillons et leur dynamique.

## 6.2 Cas de simulation

Dans ce chapitre les dispositifs expérimentaux 1 et 2 présentés au chapitre 2 ont servi de base pour définir des cas simplifiés de moteurs thermoacoustiques, selon l'exemple développé au chapitre 4, section 4.1.

Les maillages utilisés pour les simulations sont :  $2048 \times 32$  et  $4096 \times 64$ . Dans le cas du dispositif expérimental 1, pour le maillage régulier  $2048 \times 32$  (respectivement  $4096 \times 64$ ), il y a 4 points de maillage (respectivement 8 points) dans chaque demi-épaisseur des plaques du stack et des échangeurs. Dans le cas du dispositif expérimental 2, pour le maillage régulier  $2048 \times 32$  (respectivement  $4096 \times 64$ ), il y a 4 points de maillage (respectivement 8 points) dans chaque demi-épaisseur des plaques du stack et 5 points de maillage (respectivement 10 points) dans chaque demi-épaisseur des plaques des échangeurs.

Pour le début du calcul, on a utilisé le pas de temps adimensionné  $10^{-2}$ . Avec l'augmentation de l'amplitude de la vitesse, on a diminué le pas de temps jusqu'à  $10^{-4}$  pour assurer la condition CFL. Le calcul a été effectué dans une machine INTEL XEON. Il faut environ 100 heures de calcul pour obtenir la saturation en utilisant le maillage régulier  $2048 \times 32$ . Si l'on choisit le maillage régulier  $4096 \times 64$ , il faut environ 360 heures de calcul pour atteindre la saturation du moteur.

On calcule le champ de conduction stationnaire qui sert d'initialisation pour la simulation de l'amplification thermoacoustique. Dans le cas du dispositif expérimental 1, le champ de conduction est calculé avec  $\tilde{T}_h = 352\text{K}$  ( $T_h = 1.2$ ). Dans le cas du dispositif expérimental 2, la température imposée à l'échangeur chaud est  $\tilde{T}_h = 555.2\text{ K}$  ( $T_h = 1.895$ ). Si la température imposée est différente des valeurs choisies pour ces calculs, on utilisera la linéarité du problème de conduction pour calculer le champ de température initial correct.

Les paramètres des cas de simulation présentés dans ce chapitre sont reportés dans les tableaux 6.1 et 6.2. Les tableaux sont partagés en plusieurs sous tableaux, correspondant chacun à la variation d'un paramètre, qui est représenté en gras.

Cas	$Z$	$\tilde{T}_h$ (K)	$\tilde{L}_{xs}$ (mm)
1	0.990	<b>316.4</b>	0.77
2	0.990	<b>319.4</b>	0.77
3	0.990	<b>352.0</b>	0.77
4	-0.963	352.0	<b>0.00</b>
5	-0.963	352.0	<b>0.77</b>
6	-0.963	352.0	<b>1.54</b>

TABLE 6.1 – Cas de simulation. Config. LIMSI.  $\tilde{P}_m = 10$  bar,  $\tilde{T}_c = 293$  K. Maillage :  $2048 \times 32$ .

Cas	$Z$	$\tilde{T}_h$ (K)	$\tilde{L}_{xs}$ (mm)	Maillage
7	<b>-0.990</b>	352.0	0.78	$4096 \times 64$
8	<b>-0.933</b>	555.2	0.78	$2048 \times 32$
9	<b>-0.935</b>	555.2	0.78	$2048 \times 32$

TABLE 6.2 – Cas de simulation. Config. Atchley [10].  $\tilde{P}_m = 4.4$ bar,  $\tilde{T}_c = 293$  K.

## 6.3 Obtention de la saturation

On a vu dans le chapitre 4 un exemple de simulation numérique du démarrage jusqu'à la saturation d'un moteur (le cas traité était le cas 5 du tableau 6.1). Un tel calcul prend environ 100 h de calcul. Cela semble relativement court si l'on compare aux résultats de même type rapportés dans la littérature, et effectués à partir de logiciels commerciaux (Fluent, CFX) [59, 117] (un ou deux cas rapportés dans chaque publication, avec plusieurs mois de calcul). Les principales difficultés des simulations numériques sont liées aux différences entre les échelles d'espace et de temps dans les systèmes thermoacoustiques. Il est difficile d'obtenir des résolutions suffisamment fines, sur des temps suffisamment longs utilisant des ressources de calcul raisonnables.

Même ici, l'usage du modèle hybride pour une analyse paramétrique étendue en vue par exemple d'optimiser la conception d'une machine reste coûteuse. En effet, on va voir dans cette partie que la gamme de paramètres pour lesquels il est possible de simuler le démarrage du moteur jusqu'à sa saturation en un temps de calcul raisonnable est finalement assez restreinte. Pour que le moteur démarre, la température imposée à l'échangeur chaud doit être supérieure à la température critique  $\tilde{T}_{hert}$ . Il est donc nécessaire, pour chaque configuration traitée, d'avoir au préalable calculé cette température, c'est-à-dire, avoir mené une étude du type de celle présentée au chapitre 5 (section 5.2). Comme dans le chapitre 5, les facteurs dont on étudiera l'influence sont la charge du moteur et les paramètres géométriques. Ici, il existe un facteur supplémentaire, qui est la valeur de la température imposée à l'échangeur chaud. Le régime périodique ne peut être obtenu que si l'on s'écarte du seuil, du côté où le système est instable.

On présente ci-dessous l'influence de la variation des paramètres autour du seuil de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. On montre que des petites variations peuvent engendrer de grandes variations à la fois du contenu fréquentiel, de la forme du transitoire et de l'amplitude de l'onde (caractérisée par le drive ratio  $Dr$  et la puissance acoustique  $\tilde{P}_{ac}$  en sortie de cellule active).

### a. Influence de la température imposée à l'échangeur chaud

Les cas de simulation considérés sont les cas 1, 2 et 3 du tableau 6.1, pour lesquels seule la température de l'échangeur chaud  $\tilde{T}_h$  varie (elle augmente du cas 1 au cas 3). Les figures 6.1 montrent l'évolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active pour ces trois cas et les caractéristiques des régimes périodiques obtenus sont regroupées dans le tableau 6.3. On remarque que la forme du transitoire est différente pour chacun des 3 cas. On observe une "bosse" sur les deux premiers cas mais pas sur le dernier. Plus  $\tilde{T}_h$  est élevée, plus l'amplification est rapide.

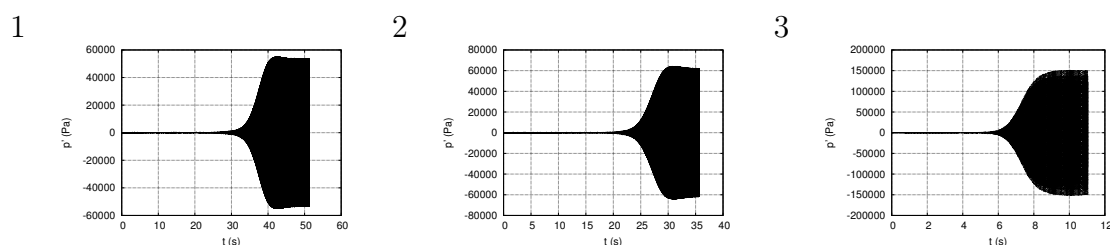


FIGURE 6.1 – Evolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active pour les cas 1, 2, 3 du tableau 6.1. Config. LIMSI. La température  $\tilde{T}_h$  augmente du cas 1 au cas 3.

cas	$\tilde{T}_h$ (K)	$\max(\tilde{u}_L)$ (m/s)	$\max(\tilde{u}_R)$ (m/s)	$Dr$ (%)	$\tilde{f}r$ (Hz)
1	316.4	14.5	14.2	5.3	99.9
2	319.4	16.7	16.4	6.1	99.8
3	352.0	41.0	40.2	15.	33 et 99.9

TABLE 6.3 – Caractéristiques des régimes périodiques obtenus pour les cas 1, 2, 3 du tableau 6.1. Config. LIMSI.

La simulation du démarrage jusqu'à la saturation a nécessité un nombre d'heures CPU sur la machine INTEL XEON égale à 90 h (cas 1), 110 h (cas 2), 190 h (cas 3). Plus la température augmente, plus le calcul est coûteux. Le coût du calcul est lié à l'amplitude de vitesse qui augmente lorsque la température  $\tilde{T}_h$  augmente. Le drive ratio  $Dr$  augmente avec la valeur de  $\tilde{T}_h$ .

Le contenu fréquentiel de l'onde en régime périodique augmente avec la température  $\tilde{T}_h$ . Pour les cas 1 et 2, seul un mode proche du premier harmonique dans la configuration



en  $\lambda/4$  (fermé-ouvert) est présent. Pour le cas 3, le mode proche du fondamental en  $\lambda/4$  est aussi excité. On remarque que ce cas 3 correspond à celui pour lequel la "bosse" est très atténuée.

En résumé, les petites variations de  $\tilde{T}_h$  engendrent des conséquences importantes sur le contenu fréquentiel, la forme du transitoire et l'amplitude de l'onde. Comme on a remarqué que la saturation est obtenue en un temps CPU plus court lorsque la température  $\tilde{T}_h$  est plus petite, on a choisi des cas de calcul avec  $\tilde{T}_h$  relativement proche de la température critique.

### b. Influence de la charge

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, la charge joue un rôle important pour le déclenchement de l'instabilité thermoacoustique. Le changement de charge modifie la température de déclenchement et le mode instable. Comme on l'a vu dans la partie (a), plus la température  $\tilde{T}_h$  est grande, plus le calcul est coûteux. On utilise donc surtout des cas où  $|Z|$  est proche de 1, c'est-à-dire où l'on s'approche des cas non-chargés, pour lesquels la température critique est proche de la température froide. Les cas de simulation considérés sont les cas 8 et 9 du tableau 6.2, pour lesquels seule la valeur de la charge varie (cas 8 :  $Z = -0.933$ ; cas 9 :  $Z = -0.935$ ). La température de l'échangeur chaud  $\tilde{T}_h = 555.2$  K, est légèrement supérieure à la valeur critique correspondant à  $Z = -0.933$  ( $\tilde{T}_{hcr} = 550$  K.) Cela revient à se déplacer horizontalement sur la figure 5.6.

Le temps CPU sur la machine INTEL XEON, pour la simulation complète du démarrage à la saturation, est de 200 heures (cas 8) et 230 heures (cas 9). Les figures 6.2 (haut) montrent l'évolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active pour ces deux charges. On voit que la "bosse" est très atténuée. Plus le coefficient de transmission  $Z$  se rapproche de -1, plus l'amplification est rapide. Les figures 6.2 (bas) illustrent les détails du signal à la fin de chaque calcul. On voit bien la différence entre  $\tilde{u}_L$  et  $\tilde{u}_R$ . C'est le mode fondamental en  $\lambda/2$ , correspondant au tube fermé aux deux extrémités qui est sélectionné, ( $\tilde{f}r = 499\text{Hz}$ , période  $\approx 0.002$  s). Les caractéristiques des

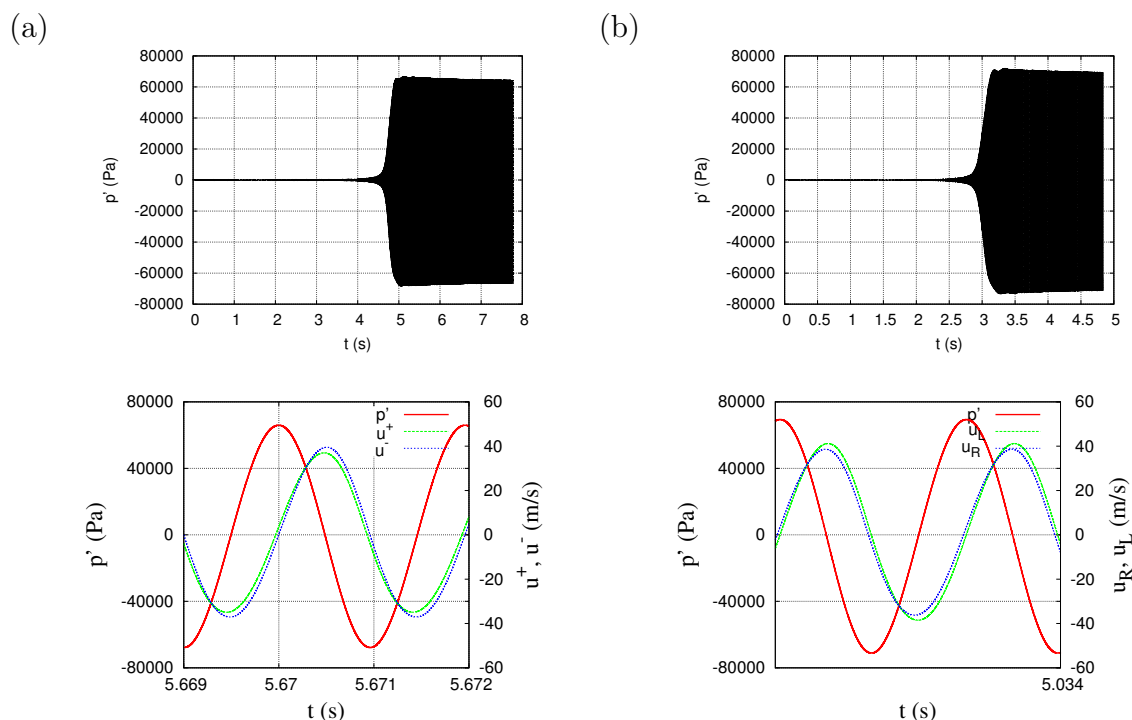


FIGURE 6.2 – (Haut) : Evolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active. (a) cas 8 et (b) cas 9 du tableau 6.2; (Bas) : Agrandi de la fin de calcul correspondant. Config. Atchley.

régimes périodiques obtenus sont regroupées dans le tableau 6.4 et le bilan énergétique des régimes périodiques calculé comme au chapitre 4 (section 4.2) est reporté dans le tableau 6.5. Le cas 9 (coefficient de transmission  $Z$  plus proche de -1) correspond à un

cas	$Z$ (K)	$\max(\tilde{u}_L)$ (m/s)	$\max(\tilde{u}_R)$ (m/s)	$\Delta\tilde{u}$ (m/s)	$Dr$ (%)	$\tilde{f}r$ (Hz)
8	-0.933	41.0	38	3.3	15.0	499
9	-0.935	43.5	39	4.5	15.9	500

TABLE 6.4 – Caractéristiques des régimes périodiques obtenues pour deux valeurs de la charge différentes. Cas 8 et 9 du tableau 6.2. Config. Atchley.

Cas	$Z$	$\tilde{P}_{ac}$ (W)	$\tilde{Q}_h$ (W)	$\eta$ (%)	$\eta/\eta_C$ (%)
8	-0.933	348	12400	2.80	6.0
9	-0.935	378	12403	3.04	6.4

TABLE 6.5 – Bilan énergétique, cas 8 et 9 du tableau 6.2. Config. Atchley.

drive ratio  $Dr$  et une puissance acoustique plus grands que le cas 8. Les résultats sont cohérents avec le fait que à  $\tilde{T}_h$  fixée, plus  $Z \rightarrow -1$ , plus on s'éloigne de la température du seuil. En effet, l'amplitude de vitesse est plus grande et l'amplification de l'onde est plus rapide (voir la partie (a) précédente).

Ici la petite variation de  $Z$  n'a pas engendré de grandes conséquences sur l'amplitude de l'onde. Une fois la saturation obtenue, il est aussi possible de modifier la valeur de la charge, ce qui permet d'obtenir rapidement une nouvelle saturation.

### c. Influence de la distance entre stack/échangeurs

Dans cette partie on s'intéresse à l'influence des facteurs géométriques. On a ici étudié l'influence de la distance entre le stack et les échangeurs. Intuitivement, on pourrait penser que le meilleur échange entre le stack et les échangeurs est réalisé quand les deux sont en contact ou le plus proche possible. Cependant, certaines études de la littérature montrent que dans le cas d'un réfrigérateur il y a une distance optimale pour maximiser les performances du système [22, 41, 63].

Nous avons effectué cette étude sur les deux dispositifs de référence. Pour le dispositif 1, le cas 4 correspond au cas des échangeurs collés au stack, le cas 5 à  $\tilde{L}_{xs} = 0.77$  mm et le cas 6 à  $\tilde{L}_{xs} = 1.54$  mm. Les trois cas correspondent à une charge  $Z = -0.963$  (tube en  $\frac{\lambda}{2}$ ),  $\tilde{T}_h = 352$  K ( $\tilde{T}_{hcr} \approx 347$  K). Comme nous l'avons vu au chapitre 5, plus  $\tilde{L}_{xs} \rightarrow 0$ , plus la température de déclenchement est petite. La figure 6.3 illustre l'évolution temporelle

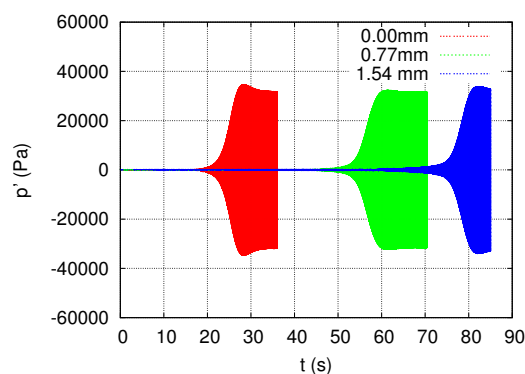


FIGURE 6.3 – Evolution temporelle de la pression acoustique au niveau de la cellule active, cas 4-5-6 (variation de la distance stack/échangeurs). Config. LIMSI.

de la pression acoustique au niveau de la cellule active pour les trois cas. Plus  $\tilde{L}_{xs} \rightarrow 0$ , plus l'amplification thermoacoustique est rapide. La variation de  $\tilde{L}_{xs}$  influence aussi la forme du régime transitoire. Quand  $\tilde{L}_{xs} \rightarrow 0$ , la bosse devient plus grande. De plus,

Cas	$\tilde{L}_{xs}$ (mm)	$\tilde{P}_{ac}$ (W)	$\tilde{Q}_h$ (W)	$\eta$ (%)	$\eta/\eta_C$ (%)
4	0.00	68.0	3910	1.74	10.4
5	0.77	66.5	3910	1.70	10.1
6	1.54	66.0	3910	1.68	10.0

TABLE 6.6 – Bilan énergétique. Config. LIMSI.  $\tilde{T}_h = 352\text{K}$ ,  $Z = -0.96$ ,  $\tilde{P}_m = 10\text{bar}$ . Maillage :  $2048 \times 32$ .

l'augmentation de  $\tilde{L}_{xs}$  conduit à une augmentation significative de la dissipation dans le moteur, jusqu'à empêcher parfois le démarrage.

#### d. Discussion

Une analyse simple de la "bosse" a été présentée au chapitre 4 (cas 5 du tableau 6.1). On a constaté que l'existence de la "bosse" provient du décalage entre la fréquence de fonctionnement et la fréquence fondamentale du système, lié à la modification du champ de température dans la cellule active et notamment à la mise en place du pompage de chaleur thermoacoustique. Ceci est confirmé sur les autres cas que nous avons présentés ici.

Pour obtenir la saturation du moteur, le choix de paramètres de contrôle ( $\tilde{T}_h$ ,  $Z$ ) nécessite de respecter les seuils de stabilité présenté au chapitre 5, sinon le moteur ne peut pas démarrer. En pratique, pour obtenir la saturation plus rapidement, il faut imposer la température à l'échangeur chaud légèrement supérieure à la température critique  $\tilde{T}_{hcrt}$ , et également la température imposée ne peut pas s'éloigner trop de la température froide. Sinon, en raison de l'augmentation de l'amplitude de vitesse, le temps de calcul deviendra coûteux. Pour cela, la plupart de nos calculs sont autour de  $|Z| \rightarrow 1$  pour que  $\tilde{T}_{hcrt}$  s'approche de  $\tilde{T}_c$ . Pour approcher des valeurs de coefficients de transmission différents

de  $\pm 1$ , il existe trois méthodes qui permettent d'économiser le temps de calcul. Une fois la saturation (le régime périodique) obtenu, on modifie soit la valeur du coefficient de transmission, soit la température de l'échangeur chaud, soit les deux, ce qui permet d'obtenir une nouvelle saturation du moteur avec un temps de calcul court. Ces méthodes permettent de beaucoup diminuer le temps de calcul (50% – 90% de temps de calcul économisé par rapport au cas où on effectue le calcul du déclenchement de l'instabilité à la saturation du moteur). Ces méthodes seront très utiles pour étudier systématiquement l'influence de la charge sur la performance du moteur en régime périodique.

## 6.4 Effets nonlinéaires hydrodynamiques locaux

### 6.4.1 Introduction

Les effets hydrodynamiques nonlinéaires ont été surtout étudiés, dans la littérature, au voisinage des plaques du stack dans les réfrigérateurs thermoacoustiques. D'un point de vue des études expérimentales, ce choix est lié à la difficulté de ce type de mesures dans les stacks moteurs en raison des grands gradients de température présents. La présence de vortex autour des extrémités des plaques du stack a été observée expérimentalement [1, 18, 19, 31, 49, 60, 61, 82, 83, 84, 85, 105, 106] et aussi dans les simulations [20, 62, 110]. Ces modifications de l'écoulement (champ de vitesse et champ de température) affectent les performances du système thermoacoustique.

Worlikar et al [110] ont calculé numériquement, dans l'approximation faible Mach, pour la première fois, le champ de vorticité créé aux bords du stack dans un réfrigérateur thermoacoustique. Plus tard, Besnoin [20] et Blanc-Benon et al. [22] ont effectué des simulations numériques avec le même modèle numérique pour étudier systématiquement l'écoulement du fluide autour des plaques du stack et des échangeurs. Il a été montré l'existence de deux régimes de dynamique tourbillonnaire. Pour de faibles amplitudes ( $Dr$  faible), les tourbillons qui se forment en bord de plaques restent symétriques et attachés aux couches limites, tandis que pour de fortes amplitudes ( $Dr$  fort) il y a une

brisure de symétrie : un détachement alterné depuis la face inférieure/supérieure de la plaque se produit, créant une allée de tourbillons alternés de type von Kármán. Dans un ensemble stack-échangeur les champs de vitesse et de vorticité et le champ de température sont fortement couplés, les tourbillons influençant fortement le transfert de chaleur entre le stack et l'échangeur.

Wetzel et Herman [105, 106] ont observé expérimentalement des tourbillons créés aux extrémités des plaques du stack par interférométrie holographique. Ils ont montré l'apparition périodique des tourbillons en extrémité de plaque du stack, mais la fréquence d'acquisition très basse n'en a pas permis une étude détaillée. Duffourd [31] a également observé les tourbillons aux extrémités des plaques du stack par vélocimétrie par images de particules PIV (Particule Image Velocimetry). Le stack est placé dans un champ acoustique et le résonateur est rempli d'air à pression atmosphérique. L'influence de la géométrie des plaques du stack et du drive ratio sur le champ de vorticité a été étudiée par rapport aux deux configurations différentes (épaisseur et espacement entre les plaques différents).

Les expériences de Duffourd [31] ont été comparées aux simulations numériques de Besnoin [20], Blanc-Benon [22] et Marx [62]. Marx [62, 63] a effectué des simulations 2D compressibles de l'écoulement autour d'une plaque placée dans un champ acoustique à l'intérieur d'un résonateur rectangulaire. Il a montré qu'à certains moments de l'oscillation, de la vorticité est créée en aval ou en amont de la plaque conduisant à l'apparition de tourbillons qui grandissent et disparaissent à d'autres instants de l'oscillation, étant aspirés dans l'espace inter-plaques. Les tourbillons influencent fortement les transferts de chaleur entre la plaque et le fluide, notamment pour des grandes valeurs du drive ratio.

Plus récemment, Berson et Blanc-Benon [18] ont étudié expérimentalement l'écoulement autour des extrémités des plaques d'un stack seul ou dans un couple stack-échangeur (notamment à l'intérieur de l'espacement entre le stack et l'échangeur) par la PIV. Leur étude a confirmé les prédictions des simulations numériques déjà citées. Dans le cas d'un stack seul, pour des grandes valeurs du forçage acoustique ( $Dr > 4\%$ ) une allée de tour-

billons alternés se forme derrière les plaques du stack. Pour l'écoulement entre un stack et un échangeur on observe le même phénomène que précédemment : une allée de tourbillons est présente à  $Dr = 5\%$  qui rend l'écoulement non périodique.

On s'intéresse ici aux effets non linéaires hydrodynamiques locaux dans un moteur thermoacoustique idéalisé. Du point de vue de la mécanique des fluides, les effets hydrodynamiques locaux autour des plaques du stack dans un moteur thermoacoustique, comme dans un réfrigérateur, proviennent d'une part des changements de section de la veine fluide, ce qui peut provoquer des décollements, et d'autre part de l'écoulement oscillant autour des plaques stack-échangeurs qui se comportent comme des corps non profilés.

Les deux cas de simulation que nous étudions dans cette partie sont les cas 7 et 8 du tableau 6.2. Le cas 7 ( $Z = -0.99$ ,  $\tilde{T}_h = 352$  K) a été résolu avec un maillage fin ( $4096 \times 64$ ). Le drive ratio obtenu en régime périodique est de 3.4%. La fréquence est de 500 Hz, qui correspond au mode fondamental en  $\lambda/2$ .

Le cas 8 ( $Z = -0.933$ ,  $\tilde{T}_h = 555.2$  K) a été résolu avec un maillage plus grossier ( $2048 \times 32$ ). Le drive ratio obtenu en régime périodique est de 15%. La fréquence est la même que pour le cas 7 (soit 500 Hz).

Pour interpréter les dynamiques observées par rapport aux résultats de la littérature, on peut estimer plusieurs paramètres sans dimension. Tout d'abord, on calcule le nombre de Reynolds construit sur l'épaisseur de couche limite [64] :

$$Re_{\tilde{\delta}_\nu} = \frac{\max(\tilde{u})\tilde{\delta}_\nu}{\tilde{\nu}} \quad (6.1)$$

Dans le cas de nos simulations, la viscosité ne dépend pas de la température. On trouve  $\tilde{\delta}_\nu = 0.165$  mm, soit  $Re_{\tilde{\delta}_\nu} = 58$  pour le cas 7, et  $Re_{\tilde{\delta}_\nu} = 323$  pour le cas 8. En comparant à la valeur critique  $Re_{crit} \approx 286$  [64], le cas 7 correspond à un régime oscillant laminaire, tandis que le cas 8 se trouve dans le domaine de la transition à la turbulence.

Le nombre de Reynolds à lui seul ne permettant pas de séparer les régimes d'écoulement [49], on est conduit à introduire d'autres paramètres sans dimension.

On peut ainsi estimer le coefficient d'obstruction (blockage ratio),  $BR = \frac{\tilde{h}}{\tilde{H}} \simeq 0.74$ , et le nombre de Keulegan-Carpenter [56] défini par

$$KC = \frac{\max(\tilde{u})}{\tilde{\omega}\tilde{d}_e} = \frac{\max(\tilde{\xi}_d)}{\tilde{d}_e} \quad (6.2)$$

où  $\tilde{\xi}_d$  est le déplacement acoustique, et  $\tilde{d}_e$  est l'épaisseur des plaques (de l'échangeur chaud). On obtient  $KC = 17$  (cas 7) et  $KC = 97$  (cas 8). Shi et al. [84] ont montré que tous ces nombres influencent la dynamique de l'écoulement. Ils ont cartographié les régions laminaire et transitoire dans le plan  $(Re, KC)$  pour différentes géométries (différents  $BR$ ). Les valeurs de ces nombres calculées pour nos simulations sont rappelées dans le tableau 6.7. Quelques cas de la littérature sont également donnés dans le tableau 6.8.

Cas	$Z$	$Dr$ (%)	$\tilde{T}_h$ K	$Re_{\tilde{\delta}_v}$	$BR$	$KC$
7	-0.99	3.4	352.0	58	0.74	17
8	-0.933	15	555.2	323	0.74	97

TABLE 6.7 – Caractéristiques de l'écoulement périodique obtenus pour les cas 7 et 8 du tableau 6.2. Config. Atchley

Expérience	$\tilde{d}_s$ (mm)	$\tilde{h}$ (mm)	$\tilde{u}_m$ (m/s)	$\tilde{f}r$ (Hz)	$Dr$ %	$Re_{\tilde{d}_s}$	$KC$	$BR_{st}$
Blanc-Benon 1 [22]	1	2	1.71	200	1	119	1.4	0.67
Blanc-Benon 2 [22]	0.15	1	2.57	200	1.5	18	14	0.87
Mao 1 [49]	1.1	5	0.84	13.1	0.3	62	9.3	0.82
Mao 2 [49]	5.	10	1.71	13.1	0.3	317	2,3	0.67
Berson [18]	1	1	0.94	214	1	61	0.7	0.5

TABLE 6.8 – Quelques cas de la littérature [22, 49, 18].

Dans le tableau 6.8, la vitesse acoustique au sein du réfrigérateur  $\tilde{u}_m$  est mesurée au point situé au milieu de la section verticale de l'extrémité droite des plaques du stack,  $\tilde{d}_s$  est l'épaisseur des plaques du stack, et  $Re_{\tilde{d}_s}$  est le nombre de Reynolds correspondant.

En comparant les deux tableaux, on observe que le cas Blanc-Benon 2 [22] (tableau 6.8) présente un nombre de  $KC$ , de  $Re_{\tilde{d}_s}$  et un  $BR_{st}$  proches de ceux du cas 7. On utilisera



donc ce cas pour faire une comparaison qualitative avec les résultats du cas 7 (faible drive ratio).

### 6.4.2 Faible $Dr = 3.4\%$

On présente tout d'abord la phénoménologie de l'écoulement dans le cas 7 à faible drive ratio  $Dr = 3.4\%$ . Le schéma de la figure 6.4 illustre la formation des recirculations et des vortex au voisinage des plaques et des échangeurs, en quatre instants régulièrement répartis sur la période. Dans la suite, on précise ces phénomènes en présentant les champs de vorticité et de température dans différentes régions de la cellule active, obtenus par simulation numérique. On se place vers la fin du transitoire.

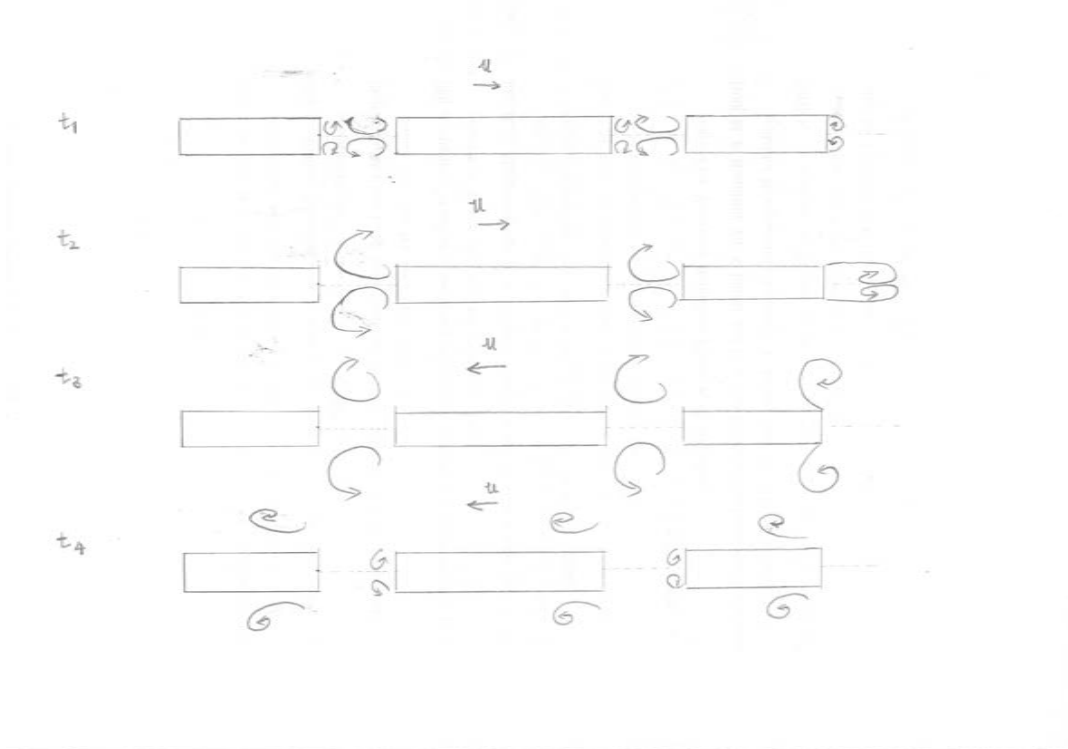


FIGURE 6.4 – Formation des recirculations au voisinage d'une plaque du stack ou des échangeurs pour le drive ratio faible en quatre instants régulièrement répartis sur la période.

La période acoustique  $\tau$  est échantillonnée sur 20 dates régulièrement espacées. Ces dates sont représentées sur la figure 6.5 avec les valeurs de la vitesse et de l'accélération, afin de les situer dans la période acoustique.

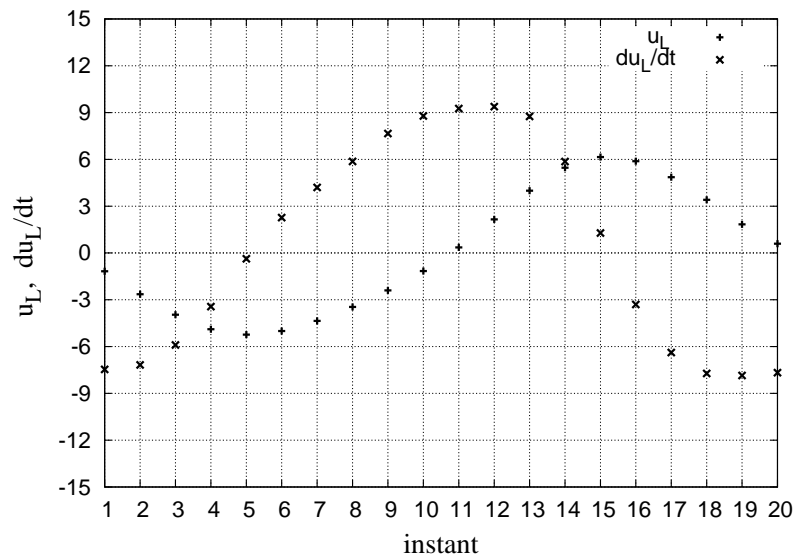


FIGURE 6.5 – Evolution temporelle de l'accélération et de la vitesse horizontale adimensionnée à l'entrée de cellule active. Config. Atchley,  $\tilde{L}_{xs} = 0.78\text{mm}$ ,  $\tilde{T}_h = 352\text{K}$ ,  $\tilde{P}_m = 4.4\text{bar}$ . Maillage :  $4096 \times 64$ .

La figure 6.6 montre le code couleur du champ de vorticité adimensionnel pour les figures suivantes.

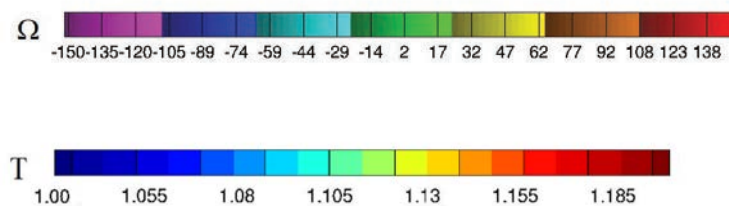


FIGURE 6.6 – Code couleurs du champ de vorticité et du champ de température sans dimension.

**a. Champ de vorticité à la sortie de l'échangeur froid**

On présente ici l'évolution du champ de vorticité à proximité de la sortie de l'échangeur froid. Les figures 6.7 et 6.8 montrent les isocontours du champ de vorticité instantanée. Les tourbillons présents en dehors de l'espace inter-plaques proviennent de l'éjection, au cours du cycle précédent, de la vorticité des couches limites à la surface des échangeurs. On observe qu'en début de cycle,  $u_L < 0$  et les tourbillons sont "aspirés" entre les plaques (instants 1 à 5). Une petite zone de décollement se forme en bout d'échangeur (instants 1 à 8). La deuxième demi-période (instants 10 à 20) montre l'éjection des couches limites et leur enroulement en deux vortex contra-rotatifs dont on a parlé en début de cycle, qui se détachent de la couche limite (instants 17 à 19).

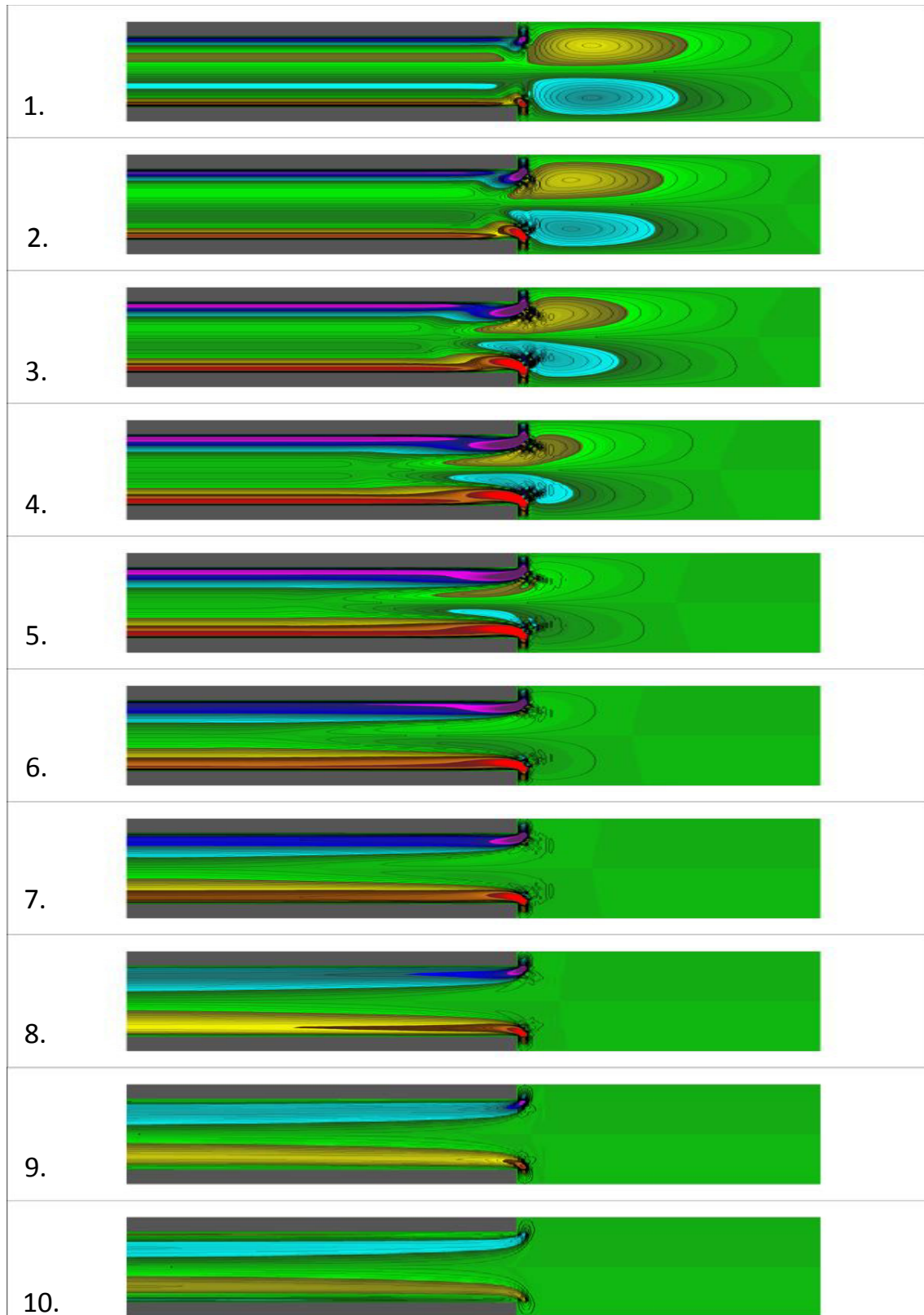


FIGURE 6.7 – Champ instantané de vorticité à la sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique, instants 1-10. Config. Atchley.  $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 10 mm. Code couleurs de la figure 6.6.

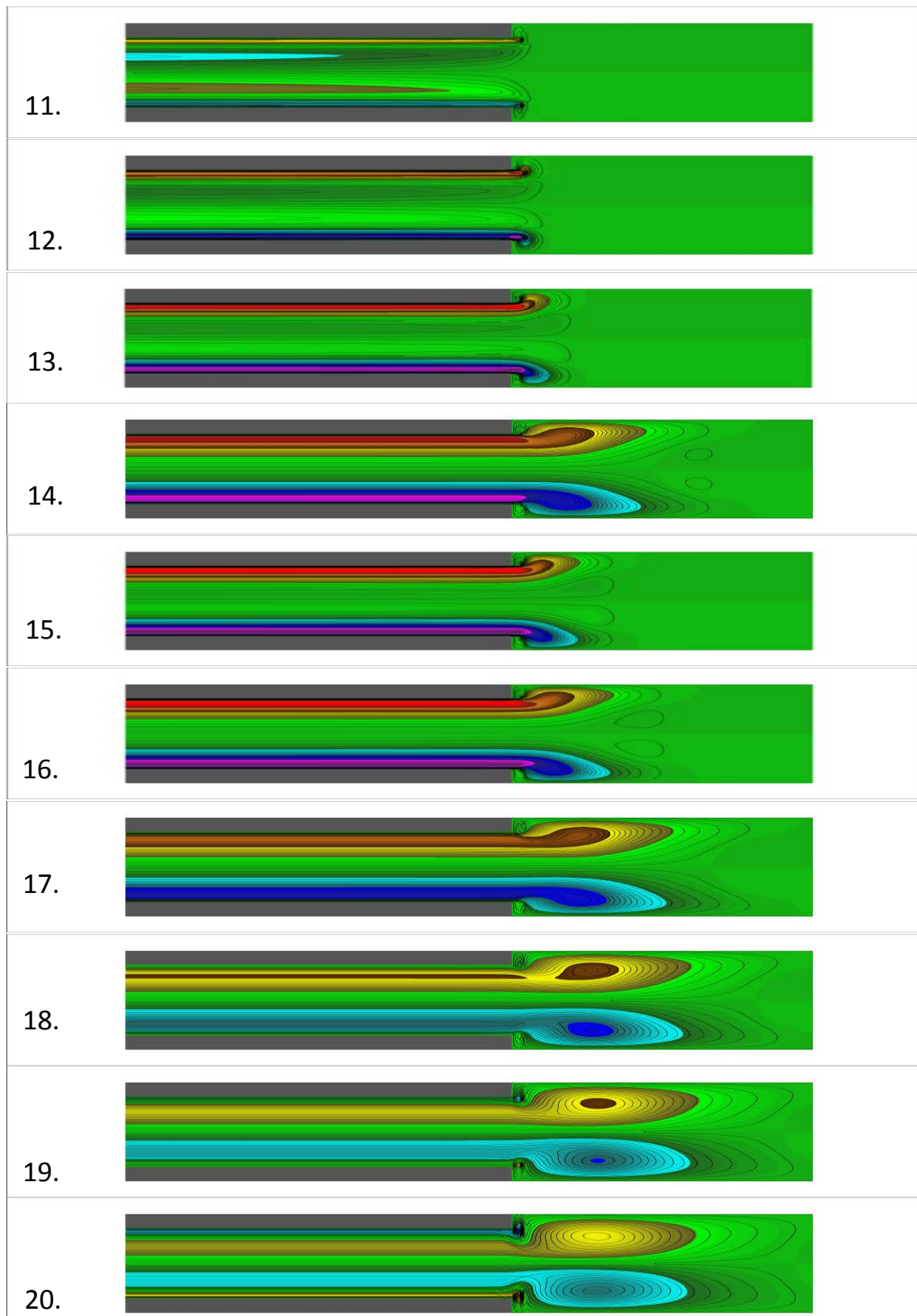


FIGURE 6.8 – Champ instantané de vorticité à la sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique, instants 11-20. Config. Atchley.  $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 10 mm. Code couleurs de la figure 6.6.

Ces résultats sont très similaires aux résultats expérimentaux de Blanc Benon [22] reproduits dans la figure 6.9.

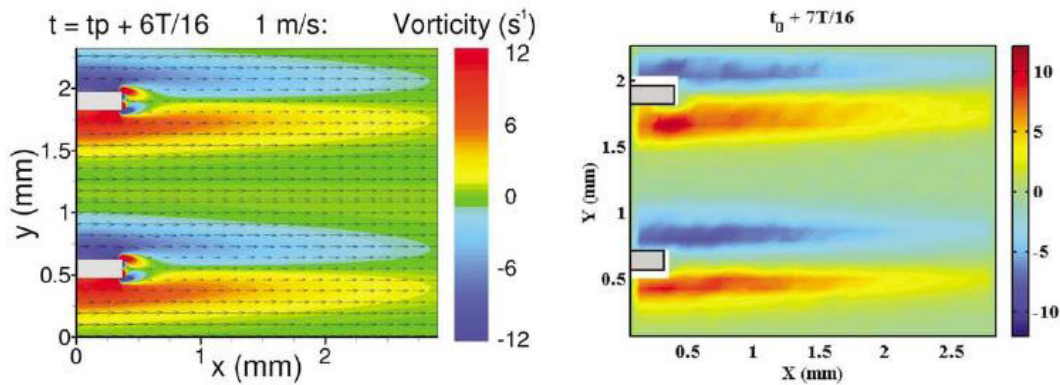


FIGURE 6.9 – Champ instantané de vitesse (vecteurs) et de vorticité (couleurs) aux extrémités froides des plaques du stack. Expérience de Blanc-Benon et al. [22]

#### b. Champ de vorticité au niveau des cavités situées entre stack/échangeurs

Dans les cavités qui se trouvent entre le stack et les échangeurs, on observe aussi l'apparition des tourbillons, ce qui est spécifique à notre configuration moteur. Les figures 6.10 et 6.11 montrent le champ de vorticité instantané au niveau des cavités situées entre le stack et l'échangeur froid pendant un cycle acoustique. Le décollement de la couche cisillée provoque l'apparition des tourbillons dans les cavités situées entre le stack et l'échangeur froid. Ces tourbillons s'intensifient (instants 4 à 10). Au début du retournement de vitesse, le tourbillon quitte la cavité et est "aspiré" dans l'espace interplaques (instants 13 à 15) alors qu'un nouveau tourbillon de sens opposé est en formation dans la cavité.

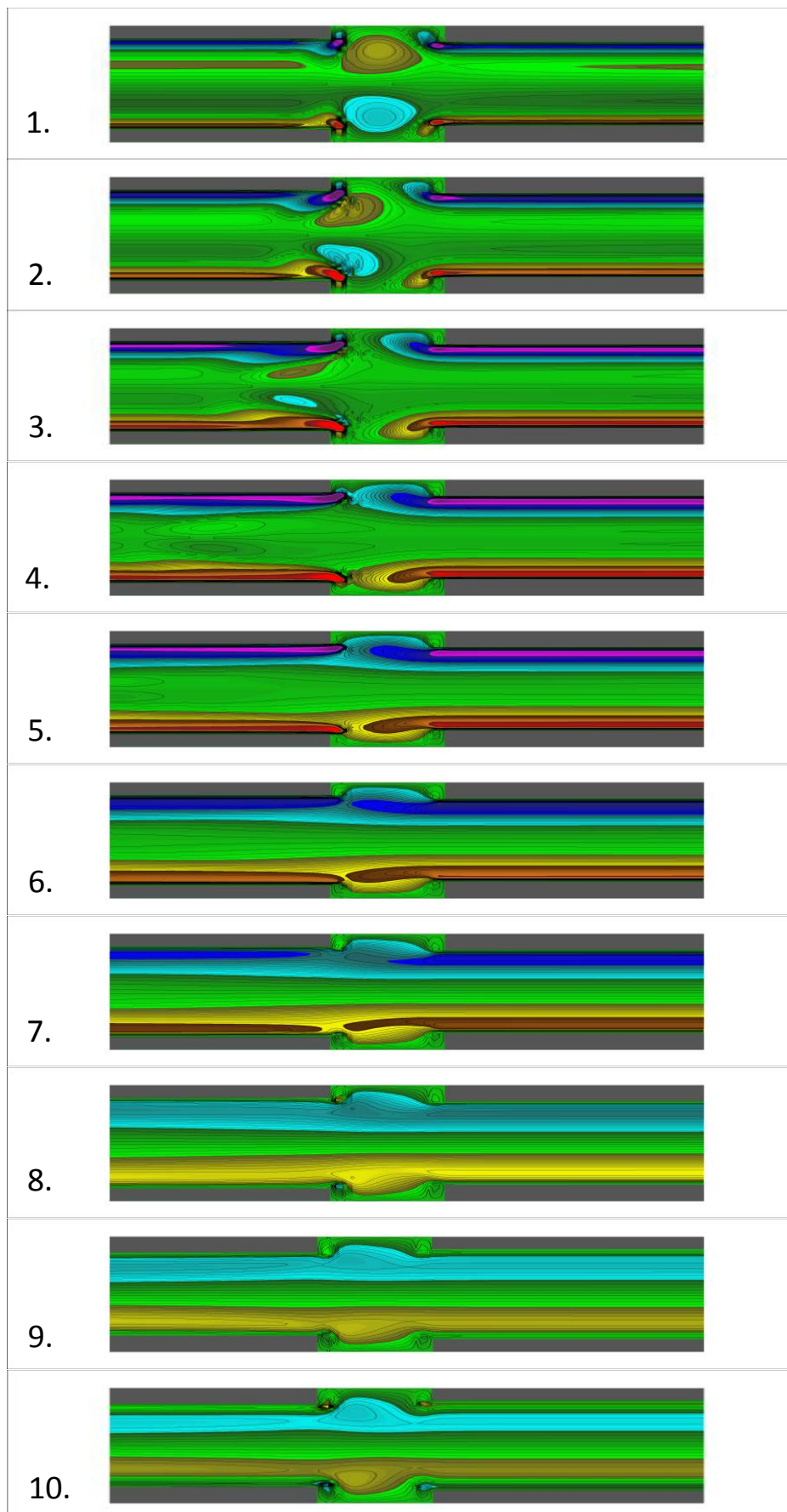


FIGURE 6.10 – Champ instantané de vorticité entre stack et échangeur froid pendant une période acoustique, instants 1-10. Config. Atchley.  $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 6 mm. Code couleurs de la figure 6.6.

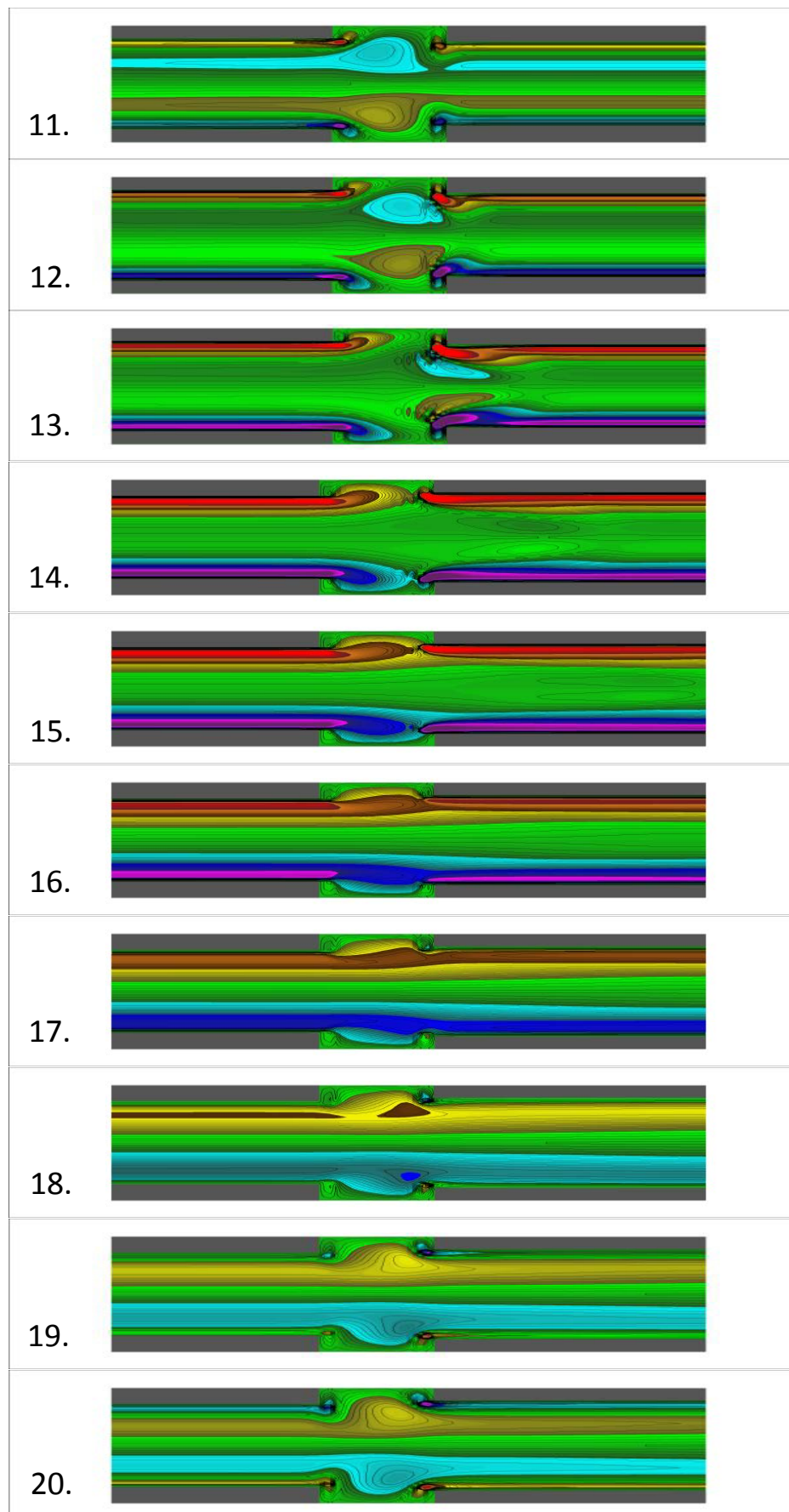


FIGURE 6.11 – Champ instantané de vorticité entre stack et échangeur froid pendant une période acoustique, instants 11-20. Config. Atchley.  $Dr = 3.4\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 6 mm. Code couleurs de la figure 6.6.



### c. Champ de température

On présente d'abord le champ de température instantanée dans le cas 7. La figure 6.12 montre l'évolution temporelle du champ de température au niveau du stack et des échangeurs pendant un cycle acoustique. Sur ces figures, on voit que la déformation du champ de température est esclave de l'écoulement du fluide, et est relativement faible. Ceci est bien visible sur le zoom sur la cavité entre l'échangeur chaud et le stack. La figure 6.13 montre l'effet des tourbillons cavitaires qui entraînent le fluide chaud de l'échangeur chaud vers le stack et le fluide froid de l'espace interplaques vers l'échangeur chaud. Cette dynamique donne la forme particulière observée à l'instant 13, avant que l'écoulement ne se retourne et que les tourbillons ne soient emportés.

Ce phénomène est l'analogue, dans la cavité entre échangeur et stack, du tourbillon de bout de plaque. D. Marx [62] a montré dans ce dernier cas que le tourbillon était à l'origine d'une augmentation du transfert de chaleur. On peut donc penser qu'un espacement entre stack et échangeur de l'ordre d'une épaisseur de plaque sera favorable à ce transfert de chaleur.

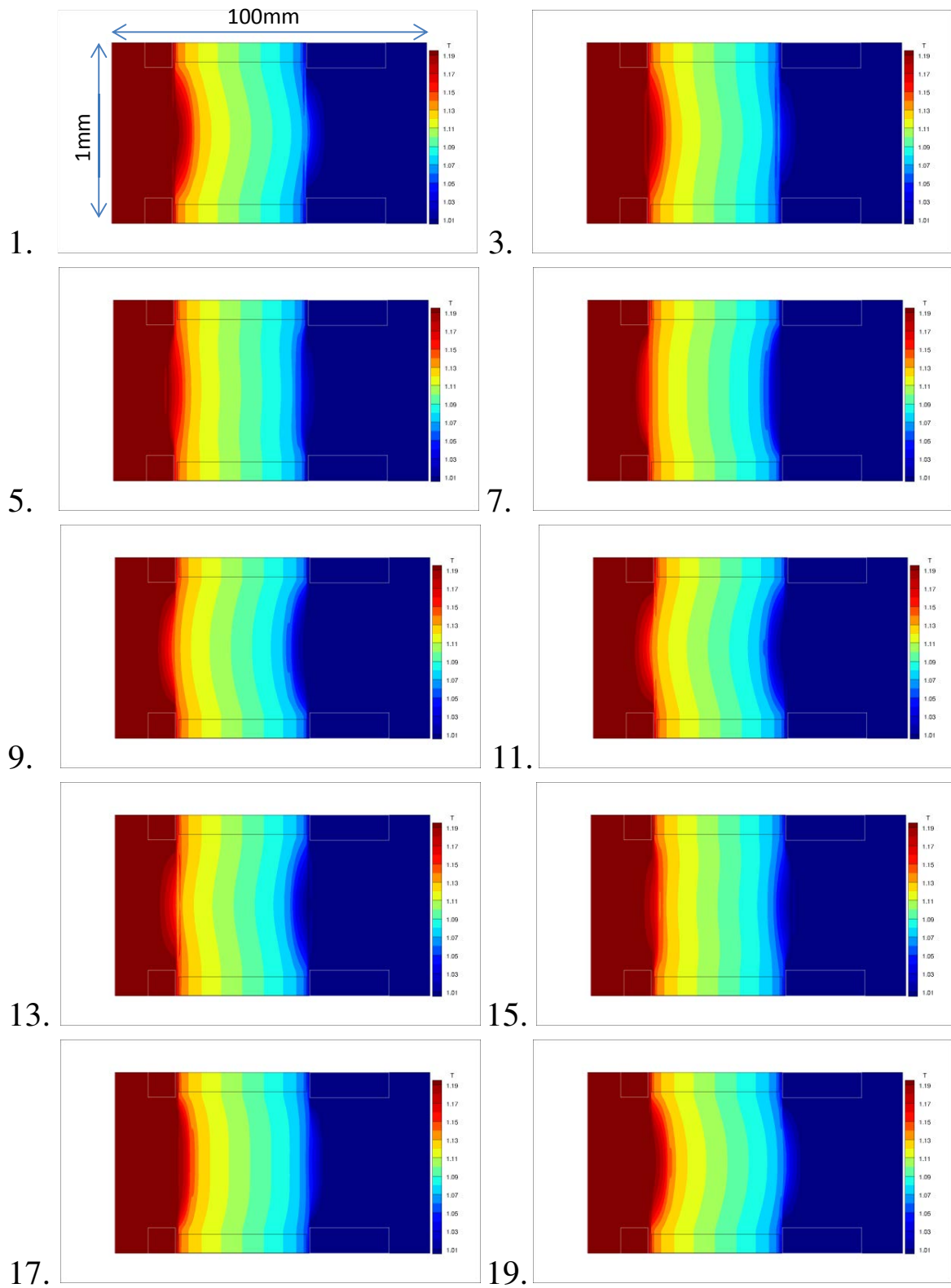


FIGURE 6.12 – Champ instantané de température au niveau du stack et des échangeurs pendant un cycle acoustique. Config. Atchley.  $Dr = 3.4\%$ . Code couleurs de la figure 6.6.

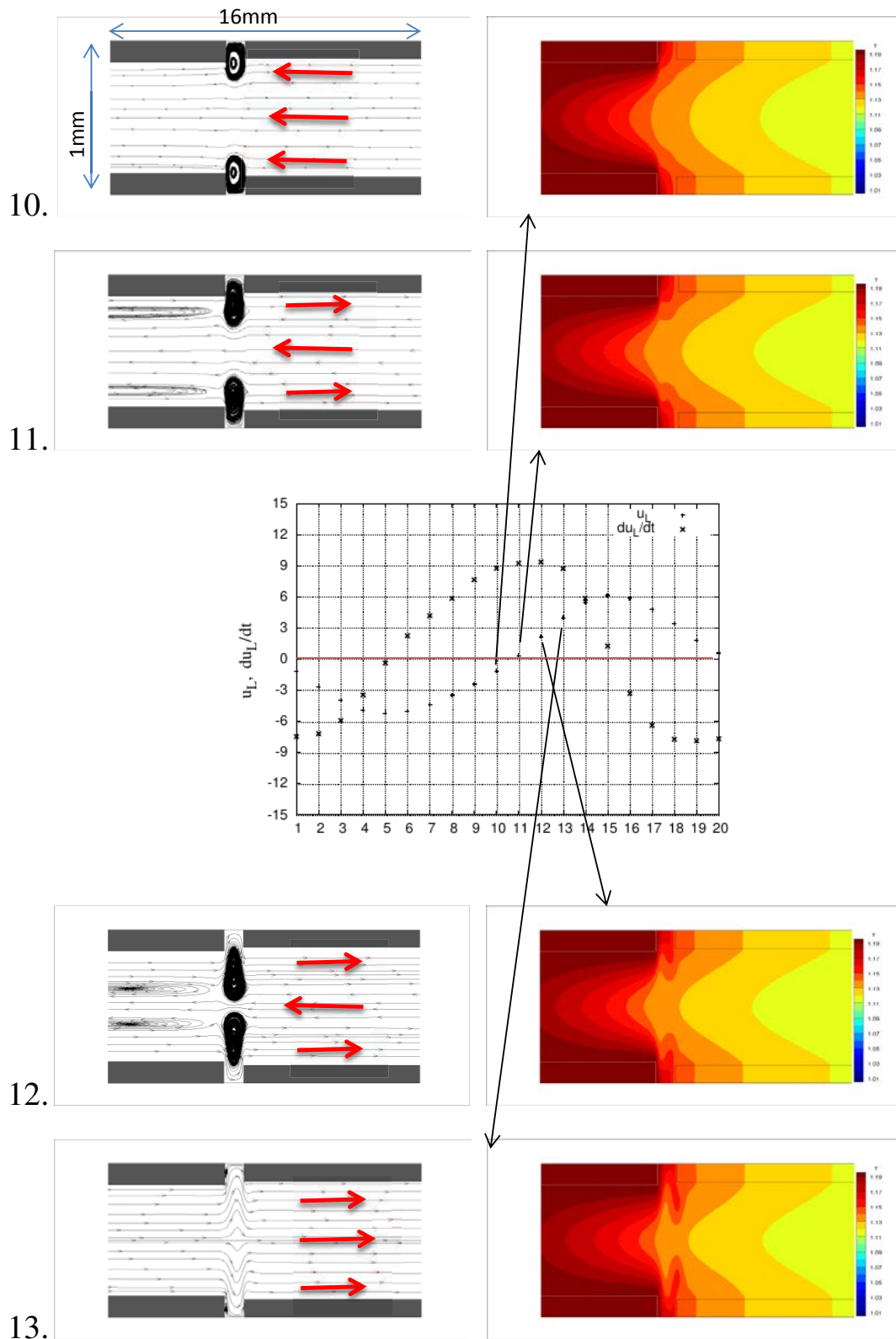


FIGURE 6.13 – (Centre) : Variation temporelle de la vitesse  $u_L$  et accélération correspondante pendant un cycle acoustique ; (Gauche) : Lignes de courant aux instants choisis (10, 11, 12, 13). (Droite) : Champ instantané de température entre échangeur chaud et le stack. Config. Atchley.  $Dr = 3.4\%$ . Code couleurs de la figure 6.6.

### 6.4.3 Fort $Dr = 15\%$

Dans cette partie, on montre des simulations préliminaires dans une situation de plus grand drive ratio  $Dr = 15\%$ . On observe le déclenchement d'une instabilité et des brisures de symétrie. Il est à noter que les conditions aux limites imposent la même symétrie que précédemment, et que les résultats de cette partie satisfont donc cette contrainte.

On utilise le cas de simulation 8, et la période acoustique  $\tau$  est échantillonnée en 20 instants (figure 6.14).

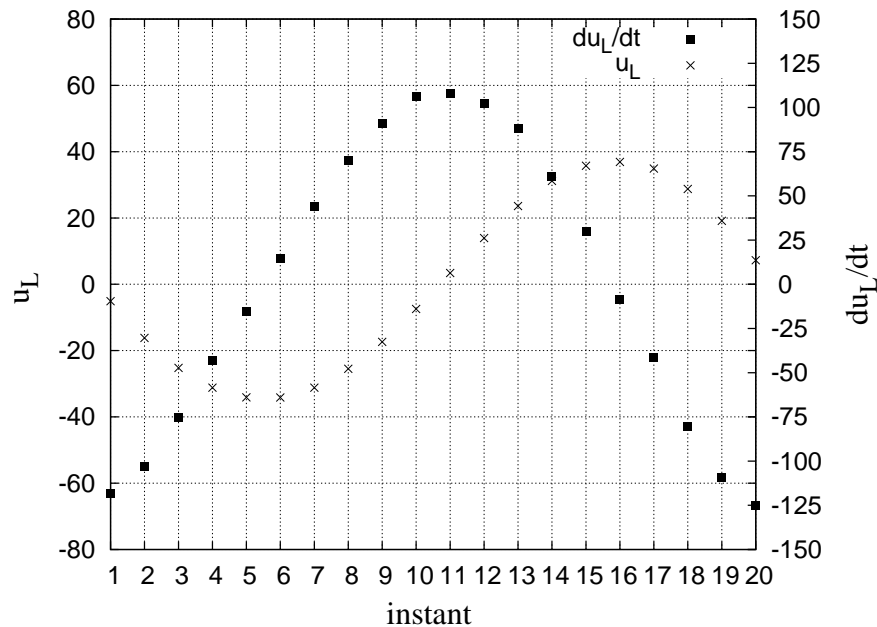


FIGURE 6.14 – Evolution temporelle de l'accélération et de la vitesse horizontale à l'entrée de cellule active. Config. Atchley,  $\tilde{L}_{xs} = 0.78\text{mm}$ ,  $\tilde{T}_h = 552\text{K}$ ,  $\tilde{P}_m = 4.4\text{bar}$ . Maillage :  $2048 \times 32$ .

La figure 6.15 montre le code couleur du champ de vorticité adimensionnel pour les figures suivantes (Fig. 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 6.23), représentant le champ instantané de vorticité et de température pendant une période acoustique en différentes régions de la cellule active.

On peut lister les différences que l'on observe par rapport au cas à petit drive ratio :

- Instabilités de la couche limite de l'échangeur froid (figure 6.16) : une bouffée turbulente apparaît. Son développement correspond aux phases de la période acous-

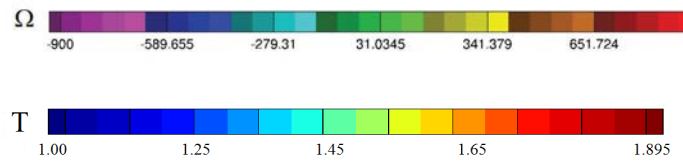


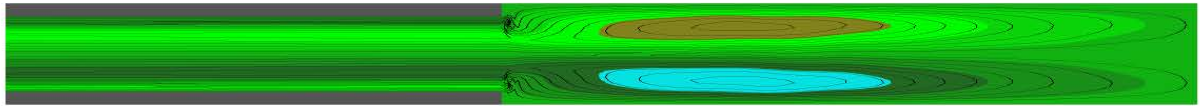
FIGURE 6.15 – Code couleurs du champ de vorticité et du champ de température sans dimension.

tique où la vitesse négative est la plus forte (instants 3 à 7). Une sorte de relaminarisation se produit (instants 7 à 11) quand la vitesse négative du fluide devient moins forte. On n’observe pas de turbulence sur les instants 11 à 20.

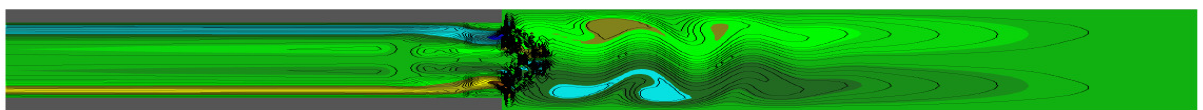
- longueur des tourbillons éjectés en sortie d’échangeur froid (figure 6.17, instant 19) ou chaud (figure 6.18, instant 9) : cette longueur est plus grande mais ne semble pas être proportionnelle à  $Dr$  comme attendu.
- déformation du champ de température beaucoup plus importante près de l’échangeur chaud (figures 6.18 et 6.19) et dans les cavités échangeurs/stack (figure 6.20, instant 1 et figure 6.23, instant 11). Cette déformation peut toujours être interprétée par l’advection sous l’action des tourbillons ici plus intenses (figure 6.24).

En revanche, des instabilités de type von Kármán n’ont pas été observées comme dans Besnoin [20] pour les forts drive ratios. Ceci est probablement dû aux conditions de symétrie imposées numériquement, qui "tuent" l’instabilité.

1.



3.



5.



7.

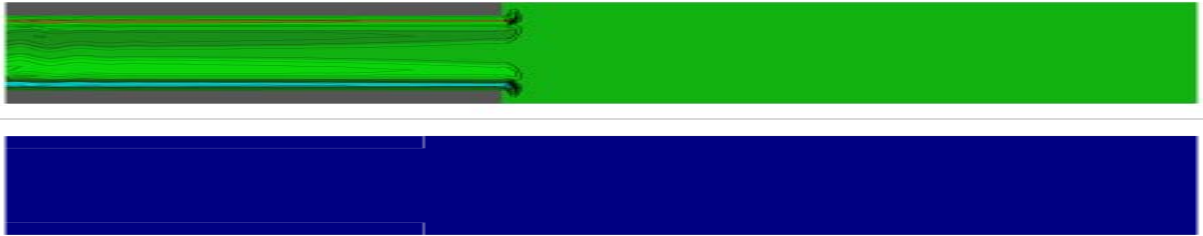


9.

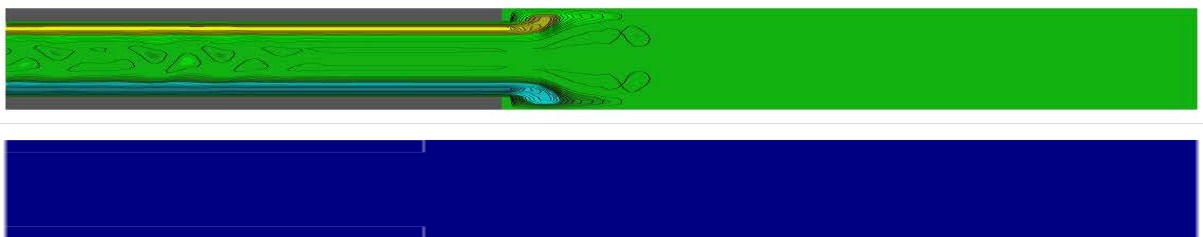


FIGURE 6.16 – Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 10 mm. Code couleurs de la figure 6.15.

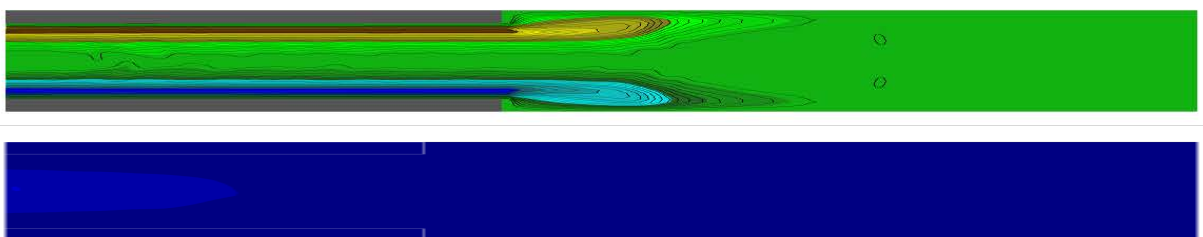
11.



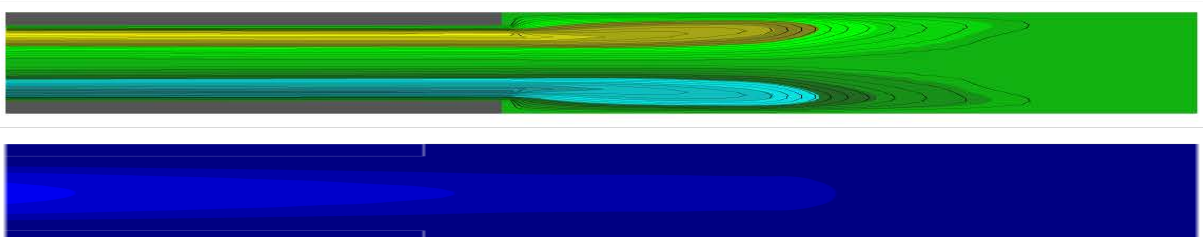
13.



15.



17.



19.

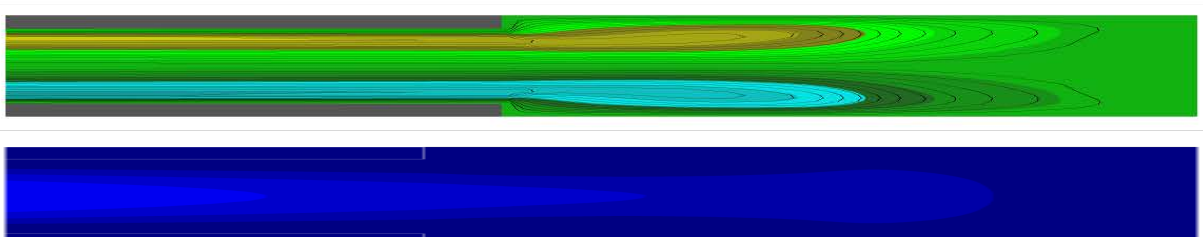
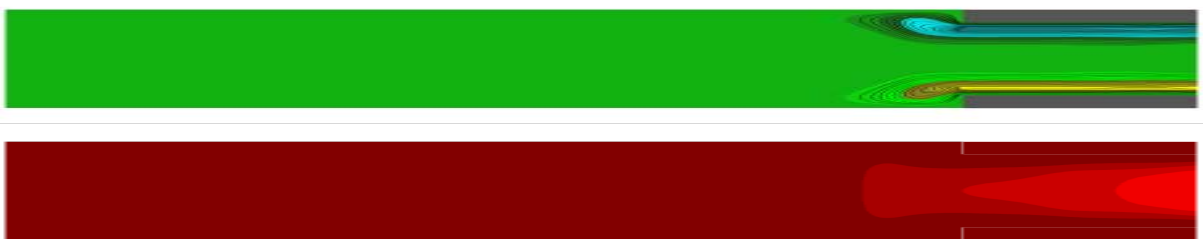


FIGURE 6.17 – Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en sortie de l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 12 mm. Code couleurs de la figure 6.15.

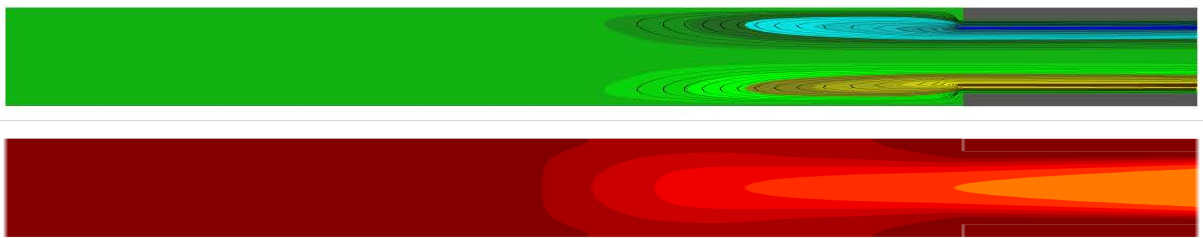
1.



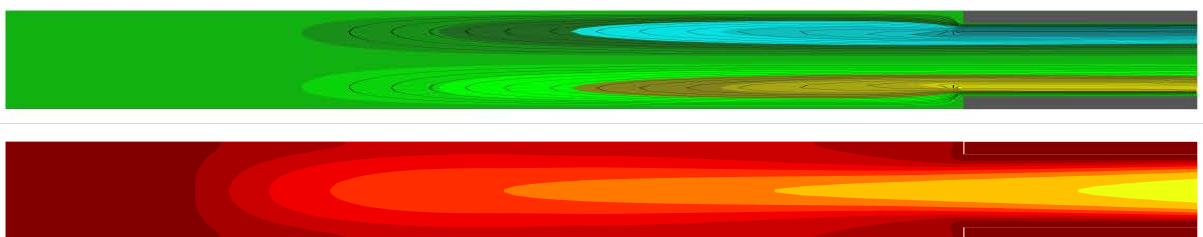
3.



5.



7.



9.

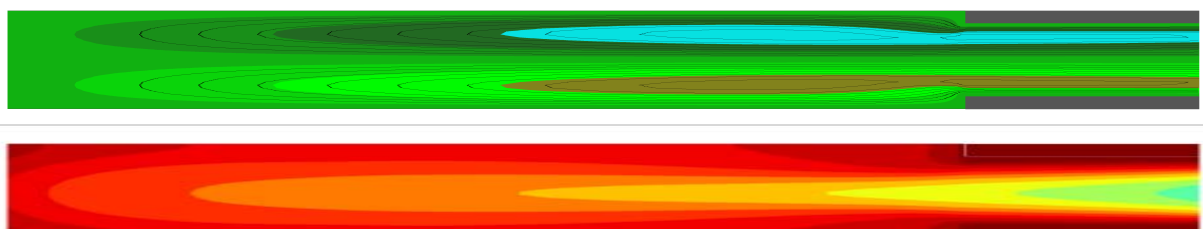
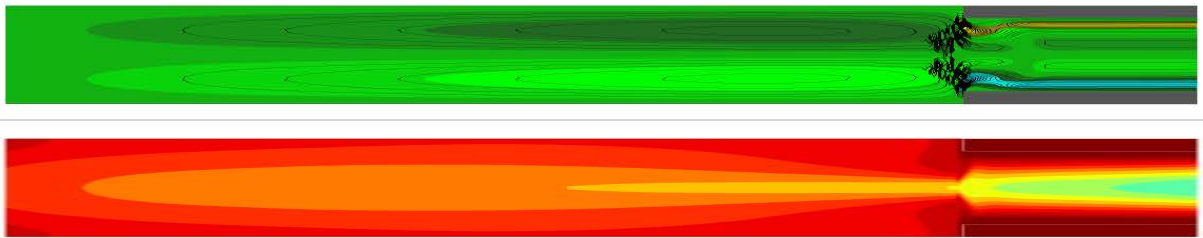


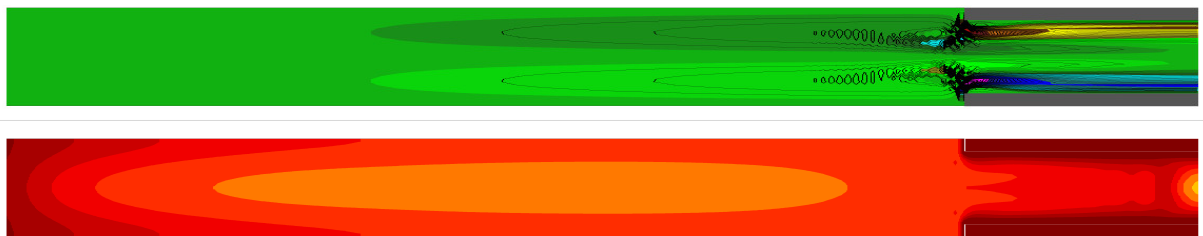
FIGURE 6.18 – Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en entrée de l'échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 12 mm.



11.



13.



15.



7.



9.

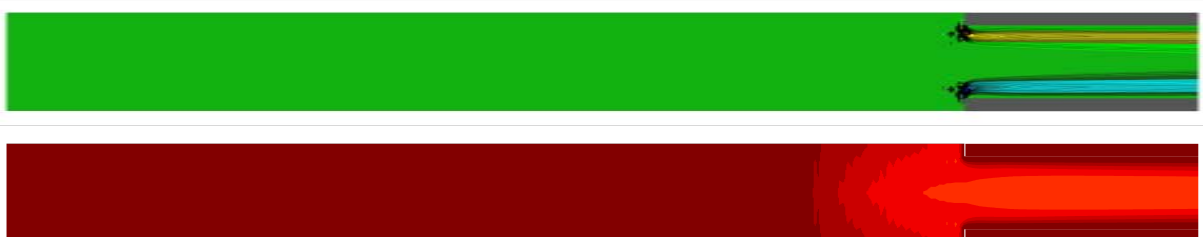


FIGURE 6.19 – Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) en entrée de l'échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 12 mm. Code couleurs de la figure 6.15.

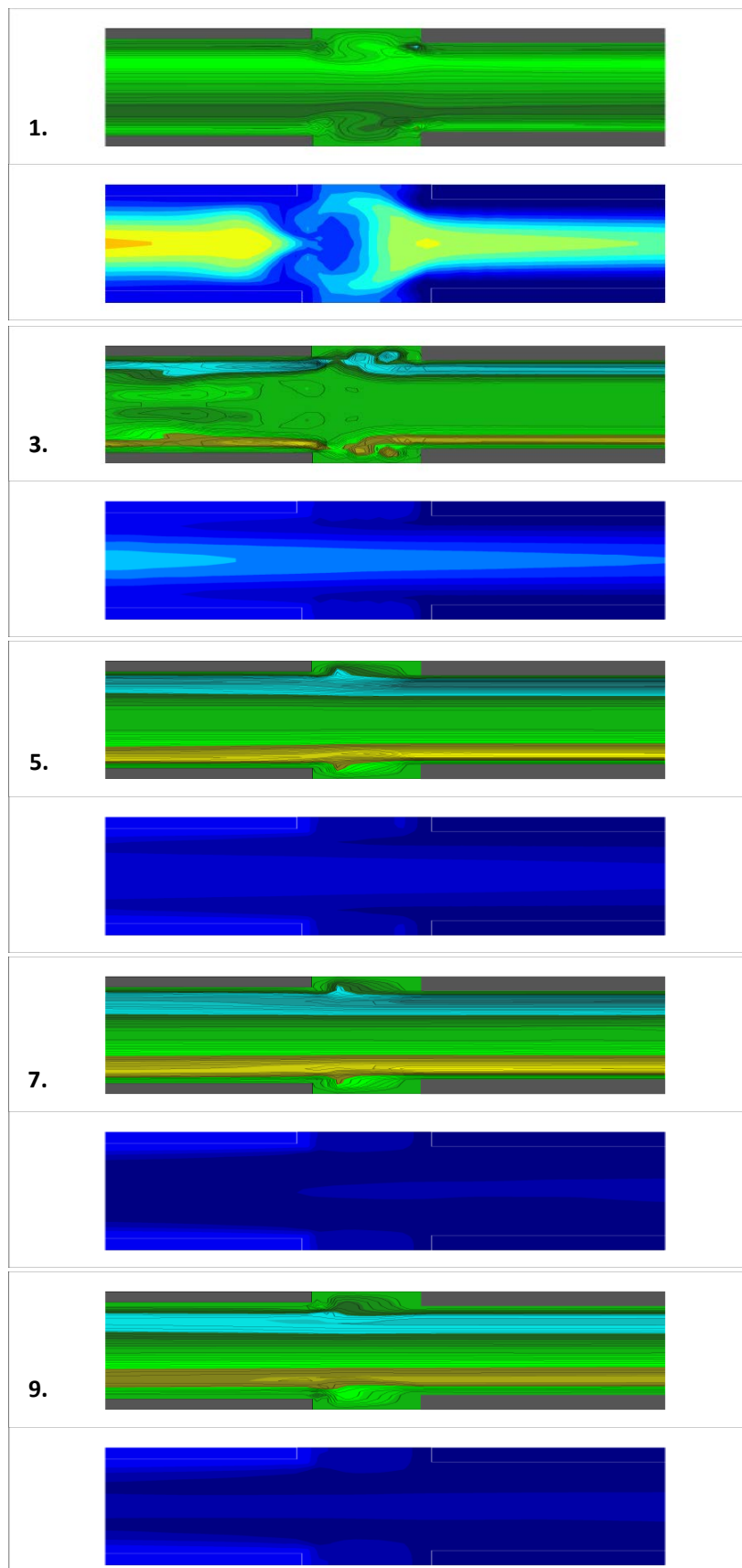


FIGURE 6.20 – Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) entre le stack et l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15.

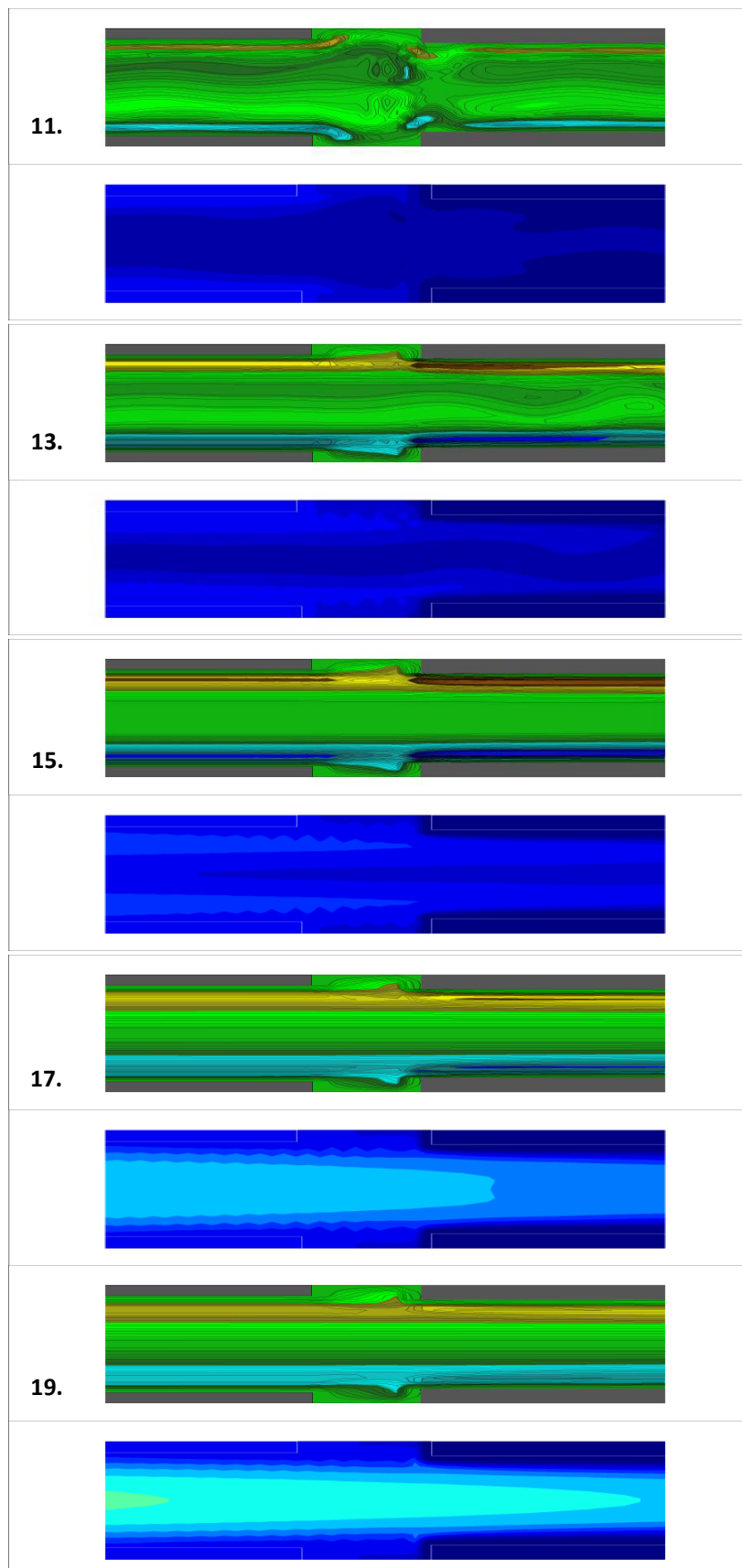


FIGURE 6.21 – Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) entre le stack et l'échangeur froid pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15.

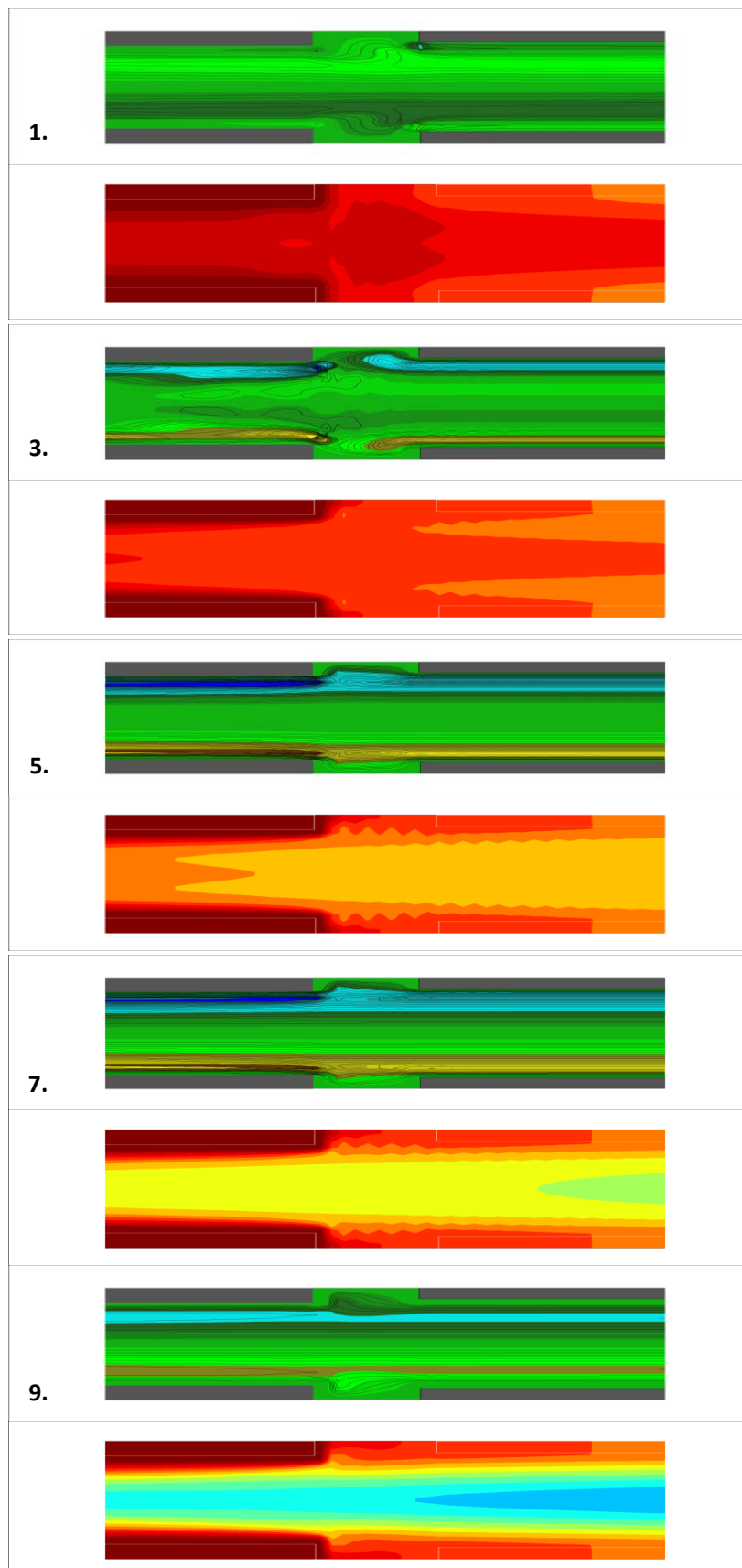


FIGURE 6.22 – Champ instantané de vorticité (haut) et de température (bas) entre le stack et l’échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 1-9. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15.

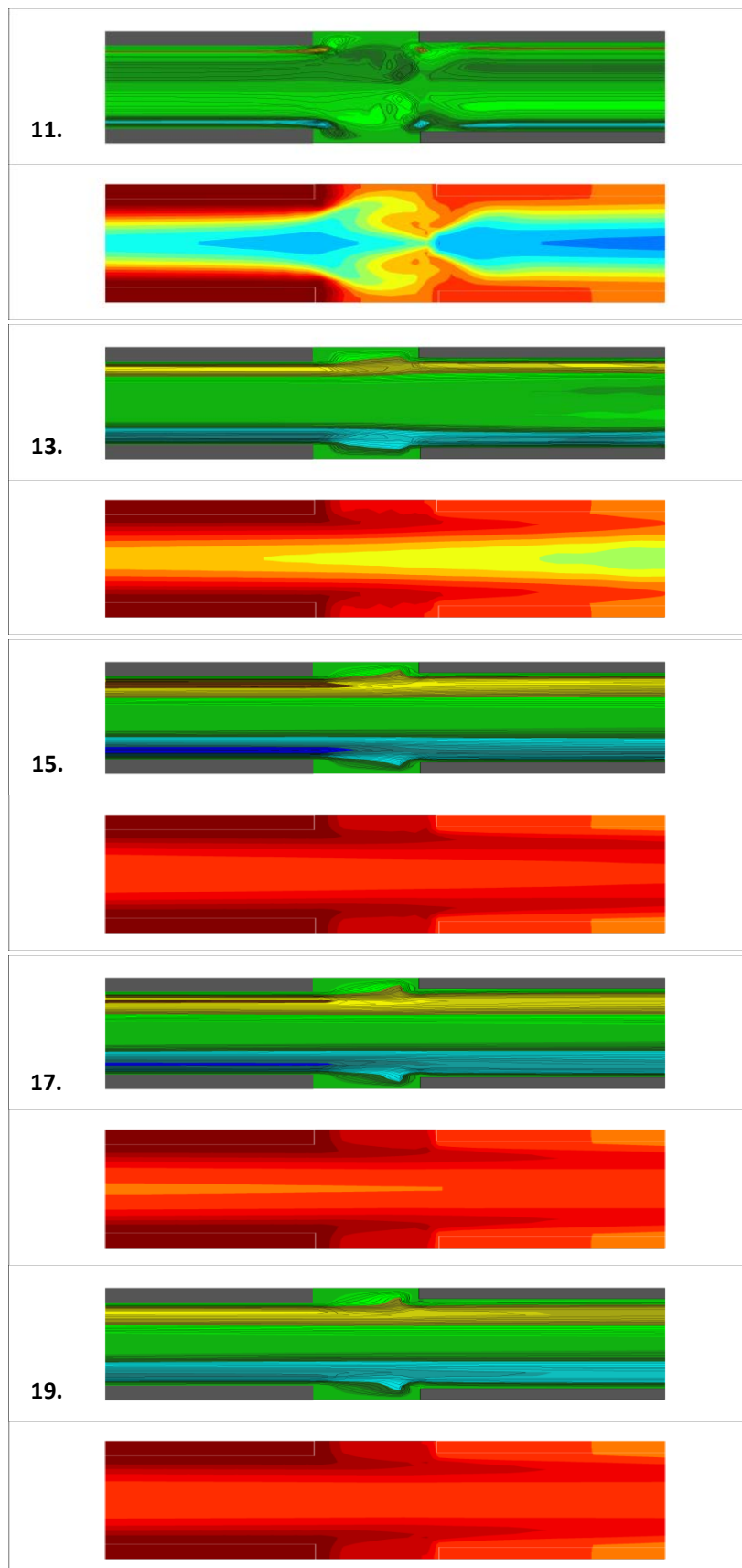


FIGURE 6.23 – Champ de vorticité instantanée (haut) et de température (bas) entre le stack et l'échangeur chaud pendant une période acoustique. Instants 11-19. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 5 mm. Code couleurs de la figure 6.15.

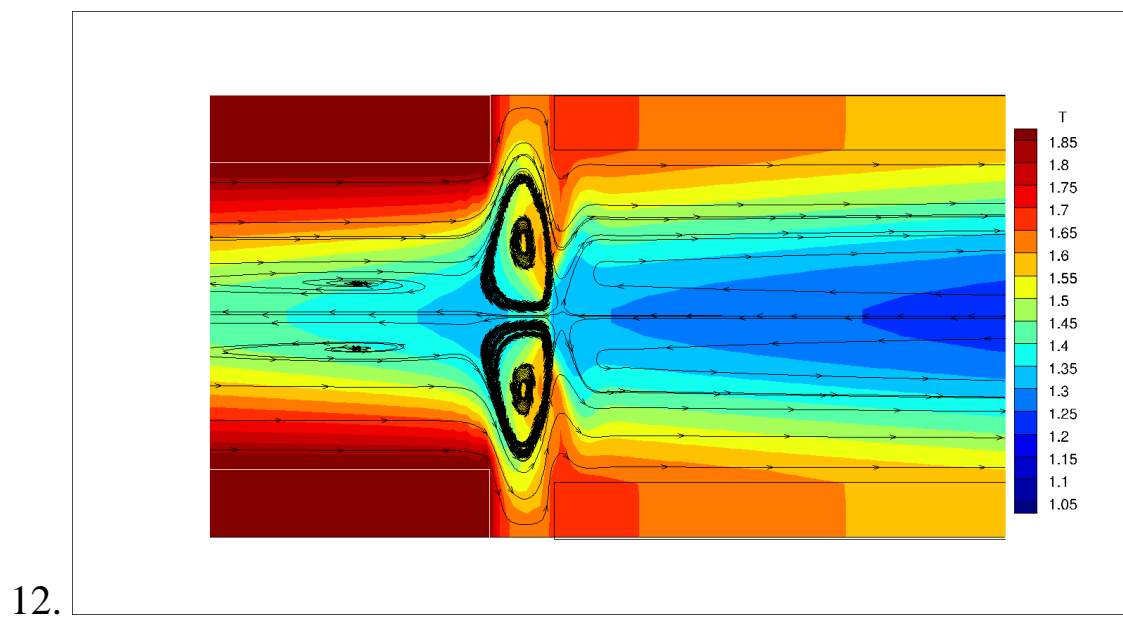
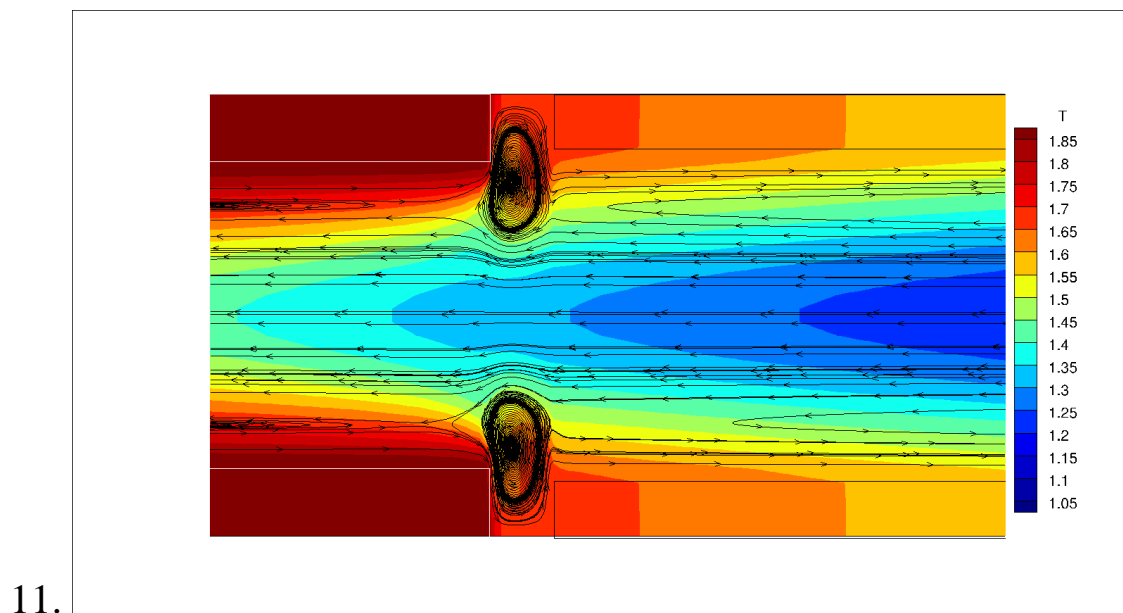


FIGURE 6.24 – Champ instantané de température et lignes de courant entre l'échangeur chaud et le stack, instants 10 et 11. Config. Atchley.  $Dr = 15\%$ . Le domaine représenté couvre une distance de 11 mm.

## 6.5 Conclusion

Dans cette section, on a étudié les résultats donnés par la simulation numérique de régimes périodiques pour deux cas de drive ratio : un cas de "petit" drive ratio ( $Dr = 3.4\%$ ) et un cas de "grand" drive ratio ( $Dr = 15\%$ ).

Dans les deux cas, une dynamique tourbillonnaire se produit en sortie d'échangeur et dans les espaces échangeur/stack. A petit  $Dr$ , ces dynamiques sont très régulières, alors qu'à grand  $Dr$ , des instabilités sont susceptibles de se déclencher : dans la couche limite et à la sortie des échangeurs où l'on s'attend à des tourbillons alternés de von Kármán. Ces tourbillons n'ont pas été observés ici à cause des conditions de symétrie imposées numériquement.

# Chapitre 7

## Conclusion et perspectives

### 7.1 Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse concernent la simulation numérique du démarrage et de la saturation de moteurs thermoacoustiques, couplés à une charge résistive. Pour prendre en compte les effets non linéaires des équations ainsi que les aspects multidimensionnels liés aux géométries particulières des cellules actives (stack et échangeurs de chaleur), un modèle hybride a été utilisé. Dans ce modèle, on couple deux sous-systèmes : le résonateur et la cellule active. Le résonateur est traité dans le cadre de l'acoustique linéaire monodimensionnelle, à l'aide de la théorie des caractéristiques. La cellule active est décrite dans le cadre général, multidimensionnel, par des équations de thermique dans les parties solides (plaques et échangeurs) et par les équations de Navier-Stokes dans l'approximation faible Mach pour le fluide environnant, considéré comme un gaz parfait. Ceci suppose que la cellule soit compacte dans le champ acoustique global, c'est-à-dire que l'on puisse négliger la propagation de l'onde acoustique à travers la cellule. Le couplage entre les deux sous-systèmes est obtenu par raccordement de ces différentes solutions dans la limite asymptotique de nombre de Mach zéro. Il se traduit par des conditions aux limites instationnaires en pression et vitesse aux bornes de la cellule active.



La simulation numérique de la cellule active est réalisée par volumes finis, pour différentes géométries et différents paramètres physiques (pression moyenne, température des échangeurs). Plusieurs comportements sont observés : dans certains cas, la perturbation introduite dans les conditions initiales est amortie, dans d'autres, elle est amplifiée. Le système sélectionne ainsi naturellement les modes acoustiques instables. L'analyse du signal temporel de pression issu de la simulation numérique permet de calculer les taux de croissance des modes en fonction de la température de l'échangeur chaud et de la pression moyenne. On peut ainsi déterminer la température critique qui permet au moteur de démarrer.

À l'aide de nombreuses simulations, on a examiné l'influence d'une charge résistive quelconque placée en bout de résonateur. Les résultats obtenus ont montré une élévation rapide de la température critique de déclenchement quand on s'éloigne des deux configurations limites résonateur fermé/fermé (facteur de transmission  $Z = -1$ ) et résonateur fermé/ouvert ( $Z = 1$ ). Ils ont été confrontés avec succès à la théorie linéaire. Une comparaison avec les résultats expérimentaux d'Atchley a montré qu'une telle charge localisée en bout de résonateur peut rendre compte de l'ensemble des dissipations présentes dans un résonateur tout en utilisant un modèle d'acoustique non dissipative.

Pour certains cas, les simulations ont été menées jusqu'au début du régime périodique. On observe que l'amplitude à saturation croît avec l'écart des paramètres (géométrie, température chaude, pression moyenne, valeur de la charge) aux valeurs seuil. En conséquence, seul un choix de valeurs proches du seuil garantit une amplitude de saturation (drive ratio) modérée et permet de mener à terme la simulation. On a montré que l'espacement entre le stack et les échangeurs modifie les performances du moteur, et que les rapprocher semble favorable.

Enfin, deux simulations en régime périodique sont détaillées dans le but d'analyser la dynamique de l'écoulement au voisinage des extrémités des plaques du stack et échangeurs. Le premier cas correspond à un faible drive ratio. On observe, comme dans les études précédentes sur les stacks de réfrigérateur [62], la formation de paires de tour-

billons en sortie d'échangeur sur la partie du cycle acoustique pour laquelle le fluide est sortant, alors que ces tourbillons sont aspirés dans l'espace inter-plaques lors du demi-cycle suivant et qu'une autre paire se forme en sortie de l'échangeur opposé. La spécificité de la cellule active du moteur est qu'il existe un interstice entre le stack et chacun des échangeurs. Pendant un demi-cycle, il s'y forme principalement un tourbillon de cavité ; quand la vitesse acoustique s'annule, ce tourbillon sort et est emporté dans l'espace inter-plaques. Durant le demi-cycle suivant, il se forme un autre tourbillon de sens opposé dans la cavité. La présence de ces tourbillons affecte le transfert thermique, ce que l'on observe au niveau qualitatif.

Le second cas, qui correspond à un drive ratio plus important (15%), présente certaines différences : comme attendu, plus de vorticité est éjectée en sortie d'échangeur, les tourbillons de cavité sont plus intenses, avec un impact marqué sur le champ de température. Il est à noter dans ce cas que les conditions aux limites de symétrie imposées numériquement empêchent vraisemblablement le développement d'une allée de type von Karman en sortie d'échangeurs. Pour cette valeur importante du drive ratio, une bouffée turbulente apparaît dans la couche limite de l'échangeur froid. Son développement correspond aux phases de la période acoustique où la vitesse négative est la plus forte. Aucune bouffée n'est ici observée lors du demi-cycle suivant. Aucune bouffée n'est observée à l'échangeur chaud. Ces observations préliminaires doivent cependant être confirmées.

## 7.2 Perspectives

Une perspective immédiate est de continuer et finaliser l'étude des phénomènes hydrodynamiques, en particulier pour les fortes valeurs du drive ratio  $Dr$ . D'autres cas de simulation, effectués avec des maillages suffisamment raffinés, doivent être considérés dans le but de déterminer les conditions d'apparition de la turbulence. L'influence des conditions aux limites sur les frontières horizontales (symétrie/périodicité) sur la dynamique tourbillonnaire et sur l'apparition de la turbulence doit être examinée. L'effet de cette

dynamique nonlinéaire sur les performances de la machine reste à quantifier : dissipation, flux de chaleur.

Cette analyse hydrodynamique du stack peut être complétée par le calcul des champs moyennés en temps dans le but d'estimer les écoulements de vent acoustique (streaming) à l'intérieur de la cellule active.

Le modèle utilisé dans cette étude repose sur plusieurs approximations : le modèle de charge est purement résistif, l'acoustique du résonateur est linéaire, et le modèle pour la cellule active est basé sur l'hypothèse de stack court. On pourrait se rapprocher d'une description plus réaliste du système en considérant un modèle de charge complexe, une acoustique monodimensionnelle nonlinéaire et, pour la cellule active, on pourrait enrichir l'approximation avec les termes d'ordre supérieur du développement asymptotique en nombre de Mach.

Enfin, ce type d'étude peut être appliqué à des configurations de type moteur à ondes progressives, dont les performances sont supérieures. Ceci nécessite une adaptation de la résolution de l'acoustique dans le résonateur, ce qui pourrait se faire assez facilement.

# Annexe A

## Stabilité d'un moteur

### thermoacoustique chargé

Les relations de dispersion obtenues par la théorie linéaire pour des configurations simples sont dérivées ici à partir des équations écrites en section 5.3.1. Ces configurations ont servi de préliminaires à la construction du modèle proche des configurations étudiées numériquement, et présentées en section 5.3.2.

#### A.1 Canal ouvert/fermé

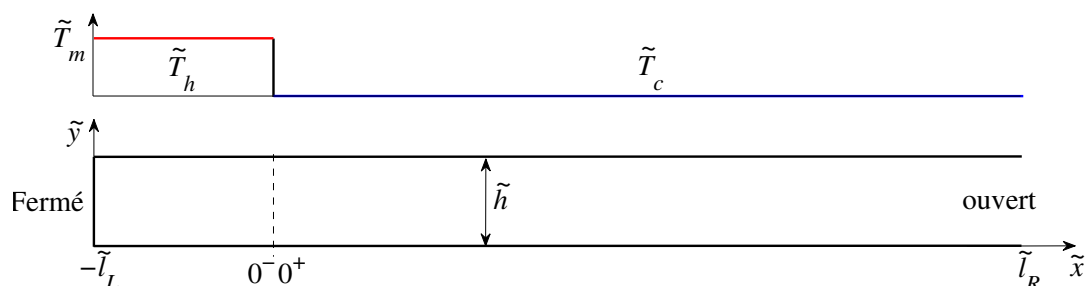


FIGURE A.1 – Tube soumis à une discontinuité de température [75].

On considère un canal fermé à l'extrémité gauche ( $\tilde{x} = -\tilde{l}_L$ ), et ouvert à l'extrémité droite ( $\tilde{x} = \tilde{l}_R$ ) (Fig. A.1). Le canal, de longueur  $\tilde{L}_{res}$  et de hauteur  $\tilde{h} = 2\tilde{y}_0$ , telle que  $\tilde{h} \ll \tilde{L}_{res}$ , est rempli d'un gaz considéré parfait, sous pression  $\tilde{p}_0$ , initialement au repos.

La distribution spatiale de température moyenne est  $\tilde{T}_m(\tilde{x})$ . Ici, la partie  $-\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0$  est à la température chaude  $T_h$ , et le reste du résonateur est à la température froide  $T_c = 1$ . Une discontinuité de température est donc présente en  $\tilde{x} = 0$ . On peut résoudre l'équation (5.22) par morceaux :

**a. Partie chaude :** Dans la partie chaude ( $-\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0$ ), la solution de l'équation (5.22) est de la forme :

$$\tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = B_h \sin \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] + C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] \quad (\text{A.1})$$

où  $\tilde{k}_h$  est le nombre d'onde dans la partie chaude du canal, tel que

$$\tilde{k}_h^2 = \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} = \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h} \tilde{h}_h \right)^2 \quad \text{avec} \quad \tilde{h}_h = \left( \frac{1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_{\kappa_h}}{1 - \tilde{f}_{\nu_h}} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.2})$$

où  $\tilde{f}_{\nu_h}$  et  $\tilde{f}_{\kappa_h}$  sont les facteurs de forme visqueux et thermique à la température chaude. En particulier, si l'écoulement est non dissipatif ( $\tilde{f}_{\kappa_h} = 0$ ,  $\tilde{f}_{\nu_h} = 0$ ), on a  $\tilde{h}_h = 1$  et  $\tilde{k}_h = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_h}$ .

En utilisant la condition aux limites  $\frac{d\tilde{p}_{1_h}}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=-\tilde{l}_L} = 0$ , on obtient :

$$\frac{d\tilde{p}_{1_h}}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=0} = \tilde{k}_h B_h = 0 \Rightarrow B_h = 0 \quad (\text{A.3})$$

La solution de l'équation (5.22) dans la partie chaude du canal devient :

$$\boxed{\tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right]} \quad (\text{A.4})$$

**b. Partie froide :** Sur la partie froide ( $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R$ ), la solution de l'équation 5.22 dans le canal maintenu à une température froide est de la forme :

$$\tilde{p}_{1_c}(\tilde{x}) = B_c \sin \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) + C_c \cos \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \quad (\text{A.5})$$

où  $\tilde{k}_c$  peut être interprété comme un nombre d'onde dans la partie froide du canal.

$$\tilde{k}_c^2 = \frac{\tilde{g}_1}{\tilde{g}_2} = \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c} \tilde{h}_c \right)^2 \quad \text{avec} \quad \tilde{h}_c = \left( \frac{1 + (\gamma - 1)\tilde{f}_{\kappa_c}}{1 - \tilde{f}_{\nu_c}} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.6})$$

où  $\tilde{f}_{\nu_c}$  et  $\tilde{f}_{\kappa_c}$  sont les facteurs de forme visqueux et thermique à la température froide. En particulier, si l'écoulement est non dissipatif ( $\tilde{f}_{\kappa_c} = 0$ ,  $\tilde{f}_{\nu_c} = 0$ ), on a  $\tilde{h}_c = 1$  et  $\tilde{k}_c = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{c}_c}$ .

En utilisant la condition aux limites  $\tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R) = 0$ , on obtient :

$$\tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R) = C_c = 0. \quad (\text{A.7})$$

La solution de l'équation (5.22) dans la partie froide du canal devient :

$$\boxed{\tilde{p}_{1c}(\tilde{x}) = B_c \sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]}. \quad (\text{A.8})$$

### c. Discontinuité de température :

1. La 1ère condition en  $\tilde{x} = 0$  est la continuité de  $\tilde{p}_1$  :

$$\tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^+) = \tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^-) \quad (\text{A.9})$$

c'est-à-dire

$$-B_c \sin \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right) = C_h \cos \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right),$$

d'où

$$B_c = -C_h \frac{\cos \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right)}{\sin \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right)}. \quad (\text{A.10})$$

En injectant cette équation dans la solution (A.8), la solution générale pour les deux parties du canal s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] & -\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0 \\ \tilde{p}_{1_c}(\tilde{x}) = -C_h \frac{\cos(\tilde{k}_h \tilde{l}_L) \sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]}{\sin(\tilde{k}_c \tilde{l}_R)} & 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Si l'on introduit  $A_1 = C_h \cos(\tilde{k}_h \tilde{l}_L)$ , la solution générale (A.11) se met sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = A_1 \frac{\cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right]}{\cos(\tilde{k}_h \tilde{l}_L)} & -\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0 \\ \tilde{p}_{1_c}(\tilde{x}) = -A_1 \frac{\sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]}{\sin(\tilde{k}_c \tilde{l}_R)} & 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

2. La 2ème condition en  $\tilde{x} = 0$ .

Une fois qu'on obtient la solution générale (A.12), on pourra déduire l'équation de dispersion en utilisant une autre condition de jonction en  $\tilde{x} = 0$ . Tout d'abord, l'équation de propagation (5.22) peut se réécrire sous forme d'un système de deux équations différentielles ordinaires d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi} = \tilde{g}_2 \tilde{E} \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \\ \frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{x}} = -\tilde{E} \tilde{g}_1 \tilde{p}_1 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

On introduit la fonction  $\tilde{G}$  suivante :

$$\tilde{G}(\tilde{x}) = \tilde{g}_1 \tilde{E} = [1 + (\gamma - 1) \tilde{f}_\kappa] \exp \left( \int_{\tilde{T}(\tilde{x})}^{\tilde{T}_c} \frac{\tilde{f}_\kappa - \tilde{f}_\nu}{(1 - Pr)(1 - \tilde{f}_\nu) \tilde{T}_m} d\tilde{T}_m \right). \quad (\text{A.14})$$

On note que, pour une discontinuité de température constante par morceaux, la fonction  $\tilde{G}$  est constante par morceaux.

A l'aide de (A.2) et (A.6), on exprime  $\tilde{g}_2 \tilde{E} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{k}^2}$ , de telle sorte que :

$$\tilde{\Psi} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{k}^2} \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}}. \quad (\text{A.15})$$

Dans le système (A.13),  $\tilde{\Psi}$  doit être continue en  $\tilde{x} = 0$ . La continuité de  $\tilde{\Psi}$  fournit donc une deuxième condition :

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x} = 0^+) = \tilde{\Psi}(\tilde{x} = 0^-), \quad (\text{A.16})$$

soit :

$$\frac{\tilde{G}_c}{\tilde{k}_c^2} \frac{d\tilde{p}_{1c}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0^+} = \frac{\tilde{G}_h}{\tilde{k}_h^2} \frac{d\tilde{p}_{1h}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0^-}$$

où  $\tilde{G}_c$  et  $\tilde{G}_h$  sont les valeurs prises par  $\tilde{G}_h$  dans la partie froide et chaude respectivement.

A l'aide de l'équation (A.12), on obtient la relation de dispersion :

$$\boxed{\frac{\tilde{G}_c \cotan(\tilde{k}_c \tilde{l}_R)}{\tilde{k}_c} = \frac{\tilde{G}_h \tan(\tilde{k}_h \tilde{l}_L)}{\tilde{k}_h}} \quad (\text{A.17})$$

La résolution de l'équation (A.17) permet de déterminer la ou les fréquences angulaires complexes  $\tilde{\omega}$ . Si la partie imaginaire de  $\tilde{\omega}$  est positive, nulle, ou négative, l'onde est amortie, neutre, ou amplifiée.

En l'absence de dissipation ( $\tilde{f}_\nu = 0$ ,  $\tilde{f}_\kappa = 0$ ), l'équation (A.17) devient :

$$\frac{\cotan \tilde{\lambda}_c}{\xi \tilde{\lambda}_c} = \frac{\tan \tilde{\lambda}_h}{\tilde{\lambda}_h} \quad (\text{A.18})$$

avec

$$\tilde{\lambda}_c = \frac{\tilde{\omega} \tilde{l}_R}{\tilde{c}_c}, \quad \tilde{\lambda}_h = \frac{\tilde{\omega} \tilde{l}_L}{\tilde{c}_h} = \tilde{\lambda}_c \xi T_h^{-1/2} \quad \text{où } \xi = \frac{\tilde{l}_L}{\tilde{l}_R} \quad (\text{A.19})$$

$$\Rightarrow \tan \tilde{\lambda}_h \tan \tilde{\lambda}_c = \frac{\tilde{\lambda}_h}{\xi \tilde{\lambda}_c} = T_h^{-1/2} \quad (\text{A.20})$$



Dans ce cas, la partie imaginaire de  $\tilde{\omega}$  est toujours nulle, c'est à dire que le système est neutralement stable.

## A.2 Canal fermé des deux côtés

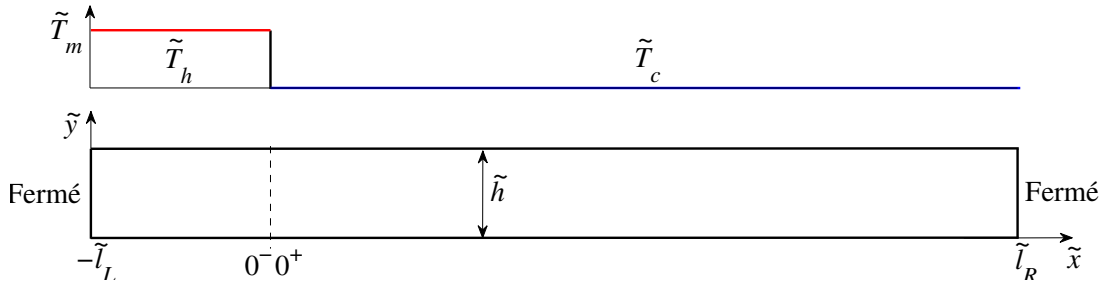


FIGURE A.2 – Tube fermé des deux côtés et soumis à une discontinuité de température.

Dans cette partie, on détermine la relation de dispersion dans le cas du même canal que dans la section précédente, fermé aux deux extrémités ( $\tilde{x} = -\tilde{l}_L$  et  $\tilde{x} = \tilde{l}_R$ ). Le canal comprend une partie chaude  $-\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0$  pour laquelle  $\tilde{T} = \tilde{T}_h$ , et une partie froide  $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R$  (Fig. A.2).

**a. Partie chaude :** Sur la partie chaude ( $-\tilde{l}_L \leq x \leq 0$ ), la solution de l'équation (5.22) s'écrit

$$\tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = B_h \sin \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] + C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right]. \quad (\text{A.21})$$

En utilisant la condition aux limites  $\frac{d\tilde{p}_{1_h}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=-\tilde{l}_L} = 0$ , on obtient

$$\frac{d\tilde{p}_{1_h}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=-\tilde{l}_L} = \tilde{k}_h B_h = 0 \Rightarrow B_h = 0. \quad (\text{A.22})$$

La solution dans le canal maintenu à une température chaude s'écrit donc

$$\tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right]. \quad (\text{A.23})$$

**b. Partie froide :** Sur la partie froide ( $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R$ ), la solution de l'équation (5.22) est de la forme :

$$\tilde{p}_{1c}(\tilde{x}) = B_c \sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right] + C_c \cos \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]. \quad (\text{A.24})$$

En utilisant la condition aux limites  $\frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=\tilde{l}_R} = 0$ , on obtient

$$\frac{d\tilde{p}_{1c}}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=\tilde{l}_R} = \tilde{k}_c B_c = 0 \Rightarrow B_c = 0. \quad (\text{A.25})$$

La solution dans le canal maintenu à une température froide s'écrit donc

$$\boxed{\tilde{p}_{1c}(\tilde{x}) = C_c \cos \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]}. \quad (\text{A.26})$$

**c. Discontinuité de température :**

1. La 1ère condition de jonction en  $\tilde{x} = 0$  est la continuité de  $\tilde{p}_1$  :

$$\tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^+) = \tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^-) \quad (\text{A.27})$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^+) = \tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^-) \Rightarrow C_c \cos \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right) = C_h \cos \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right)$$

$$\Rightarrow C_c = C_h \frac{\cos \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right)}{\cos \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right)} \quad (\text{A.28})$$

En injectant cette relation dans la solution (A.26), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{p}_{1h}(\tilde{x}) = C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] & -\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0 \\ \tilde{p}_{1c}(\tilde{x}) = C_h \frac{\cos \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right) \cos \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]}{\cos \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right)} & 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R \end{array} \right. \quad (\text{A.29})$$

Si l'on introduit  $A_2 = C_h \cos(\tilde{k}_h \tilde{l}_L)$ , cette équation s'écrit plus simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = A_2 \frac{\cos[\tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L)]}{\cos(\tilde{k}_h \tilde{l}_L)} \quad -\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0 \\ \tilde{p}_{1_c}(\tilde{x}) = A_2 \frac{\cos[\tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R)]}{\cos(\tilde{k}_c \tilde{l}_R)} \quad 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R \end{array} \right. \quad (\text{A.30})$$

2. La 2ème condition de jonction en  $\tilde{x} = 0$  est la continuité de  $\tilde{\Psi}$ , on a :

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x} = 0^+) = \tilde{\Psi}(\tilde{x} = 0^-) \quad (\text{A.31})$$

En injectant la solution générale (A.30) dans l'équation (A.31), on obtient :

$$\frac{\tilde{G}_c}{k_c^2} \frac{d\tilde{p}_{1_c}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0^+} = \frac{\tilde{G}_h}{k_h^2} \frac{d\tilde{p}_{1_h}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=0^-}.$$

La relation de dispersion est :

$$\boxed{-\frac{\tilde{G}_c \tan(\tilde{k}_c \tilde{l}_R)}{\tilde{k}_c} = \frac{\tilde{G}_h \tan(\tilde{k}_h \tilde{l}_L)}{\tilde{k}_h}} \quad (\text{A.32})$$

En particulier, s'il n'y a pas de dissipation ( $\tilde{f}_\nu = 0$ ,  $\tilde{f}_\kappa = 0$ ), l'équation (A.32) devient :

$$-\frac{\tan \tilde{\lambda}_c}{\xi \tilde{\lambda}_c} = \frac{\tan \tilde{\lambda}_h}{\tilde{\lambda}_h} \quad (\text{A.33})$$

avec

$$\tilde{\lambda}_c = \frac{\tilde{\omega} \tilde{l}_R}{\tilde{c}_c}, \quad \tilde{\lambda}_h = \frac{\tilde{\omega} \tilde{l}_L}{\tilde{c}_h} = \tilde{\lambda}_c \xi T_h^{-1/2} \quad \text{où } \xi = \frac{\tilde{l}_L}{\tilde{l}_R} \quad (\text{A.34})$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \tilde{\lambda}_c}{\tan \tilde{\lambda}_h} = -\frac{\xi \tilde{\lambda}_c}{\tilde{\lambda}_h} = -T_h^{1/2} \quad (\text{A.35})$$

Dans ce cas, la partie imaginaire de  $\tilde{\omega}$  est toujours nulle, c'est à dire que le système est neutralement stable.

### A.3 Tube dissipatif chargé

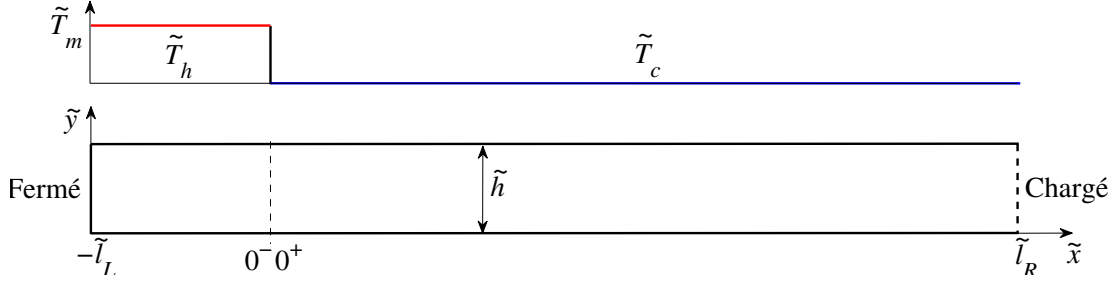


FIGURE A.3 – Tube chargé et soumis à une discontinuité de température.

On reprend ici le même système que précédemment, mais en changeant la condition en  $\tilde{x} = \tilde{l}_R$ . Le canal s'étend de  $\tilde{x} = -\tilde{l}_L$  à  $\tilde{x} = \tilde{l}_R$  ( $\tilde{L}_{res} = \tilde{l}_L + \tilde{l}_R$ ), avec  $\tilde{T} = \tilde{T}_h$  sur  $-\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0$ , et  $\tilde{T} = \tilde{T}_c$  sur  $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R$ . En  $\tilde{x} = -\tilde{l}_L$ , l'extrémité est fermée, alors qu'en  $\tilde{x} = \tilde{l}_R$ , on impose la relation

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R)}{\tilde{u}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R)} \quad (\text{A.36})$$

où  $\tilde{f}$  est la charge complexe,  $\tilde{u}_{1c}$  désigne la vitesse débitante (moyennée suivant la section transverse du tube) dans la région froide, et  $\tilde{p}_{1c}$  la pression acoustique associée (Fig. A.3). En injectant la solution  $\tilde{u}_1 = \frac{i}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} (1 - \tilde{f}_\nu)$  [93] dans l'expression de la charge (A.36), on a alors :

$$\tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R) = \tilde{f} \frac{i}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} \frac{d\tilde{p}_{1c}}{d\tilde{x}} (1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \quad (\text{A.37})$$

La résolution du problème reprend la même méthodologie que précédemment.

**a. Partie chaude :** Sur la partie chaude ( $-\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0$ ), la solution de l'équation (5.22) s'écrit :

$$\tilde{p}_{1h}(\tilde{x}) = B_h \sin \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] + C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right]. \quad (\text{A.38})$$

En utilisant la condition aux limites  $\frac{d\tilde{p}_{1h}}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=-\tilde{l}_L} = 0$ , on obtient :

$$\frac{d\tilde{p}_{1h}}{d\tilde{x}}|_{\tilde{x}=-\tilde{l}_L} = \frac{d}{d\tilde{x}} \left\{ B_h \sin \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] + C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] \right\}|_{\tilde{x}=-\tilde{l}_L} = 0 \quad (\text{A.39})$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{p}_{1h}}{d\tilde{x}} \Big|_{\tilde{x}=-\tilde{l}_L} = B_h \tilde{k}_h = 0. \quad (\text{A.40})$$

La solution dans le canal maintenu à la température chaude s'écrit donc

$$\boxed{\tilde{p}_{1h}(\tilde{x}) = C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right]}. \quad (\text{A.41})$$

**b. Partie froide :** Sur la partie froide ( $0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R$ ), la solution de l'équation (5.22) est de la forme :

$$\tilde{p}_{1c}(\tilde{x}) = B_c \sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right] + C_c \cos \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]. \quad (\text{A.42})$$

En utilisant la condition aux limites  $\tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R) = \tilde{f}\tilde{u}_1(\tilde{x} = \tilde{l}_R)$ , on obtient :

$$\tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R) = \tilde{f}\tilde{u}_1(\tilde{x} = \tilde{l}_R) = \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_m} \frac{d\tilde{p}_{1c}}{d\tilde{x}} (1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \Big|_{\tilde{x}=\tilde{l}_R} = \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} B_c \tilde{k}_c (1 - \tilde{f}_{\nu_c}) = C_c \quad (\text{A.43})$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_{1c}(\tilde{x} = \tilde{l}_R) = \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} B_c \tilde{k}_c (1 - \tilde{f}_{\nu_c}) = C_c \quad (\text{A.44})$$

La solution dans le canal maintenu à la température froide devient :

$$\boxed{\tilde{p}_{1c}(\tilde{x}) = B_c \left\{ \sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right] + \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} \tilde{k}_c (1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \cos \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right] \right\}} \quad (\text{A.45})$$

**c. Discontinuité de température :**

1. La 1ère condition en  $\tilde{x} = 0$  est la continuité de  $\tilde{p}_1$  :

$$\tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^+) = \tilde{p}_1(\tilde{x} = 0^-) \quad (\text{A.46})$$

$$\Rightarrow B_c = C_h \frac{\cos(\tilde{k}_h \tilde{l}_L)}{-\sin(\tilde{k}_c \tilde{l}_R) + \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} \tilde{k}_c (1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \cos(\tilde{k}_c \tilde{l}_R)} \quad (\text{A.47})$$

En injectant cette relation dans la solution (A.45), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = C_h \cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right] \quad -\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0 \\ \tilde{p}_{1_c}(\tilde{x}) = C_h \cos \tilde{k}_h \tilde{l}_L \frac{\sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right] + \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} \tilde{k}_c(1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \cos \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]}{-\sin \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right) + \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} \tilde{k}_c(1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \cos \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right)} \quad 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R \end{array} \right. \quad (\text{A.48})$$

Si l'on pose  $A_3 = C_h \cos \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right)$ , l'expression précédente s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_{1_h}(\tilde{x}) = A_3 \frac{\cos \left[ \tilde{k}_h(\tilde{x} + \tilde{l}_L) \right]}{\cos \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right)} \quad -\tilde{l}_L \leq \tilde{x} \leq 0 \\ \tilde{p}_{1_c}(\tilde{x}) = A_3 \frac{\sin \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right] + \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} \tilde{k}_c(1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \cos \left[ \tilde{k}_c(\tilde{x} - \tilde{l}_R) \right]}{-\sin \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right) + \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_c} \tilde{k}_c(1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \cos \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right)} \quad 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{l}_R \end{array} \right. \quad (\text{A.49})$$

2. La 2ème condition en  $\tilde{x} = 0$  est la continuité de  $\tilde{\Psi}$  :

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x} = 0^+) = \tilde{\Psi}(\tilde{x} = 0^-) \quad (\text{A.50})$$

Rappelons que  $\tilde{\Psi}$  est définie par la relation suivante :

$$\tilde{\Psi} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{k}^2} \frac{d\tilde{p}_1}{d\tilde{x}} \quad (\text{A.51})$$

$$\text{où } \tilde{G}(\tilde{x}) = \left[ 1 + (\gamma - 1) \tilde{f}_\kappa(\tilde{x}) \right] \exp \left( \int_{-\tilde{l}_R}^{\tilde{x}} \frac{\tilde{f}_\kappa(\tilde{x}') - \tilde{f}_\nu(\tilde{x}')}{(1 - P_r)(1 - \tilde{f}_\nu(\tilde{x}'))} \frac{1}{\tilde{T}_m} \frac{d\tilde{T}_m}{d\tilde{x}'} d\tilde{x}' \right)$$

En injectant la solution générale (A.49) dans l'équation (A.50), on obtient :

$$\frac{\tilde{G}_c}{\tilde{k}_c} \left[ \frac{-\cos \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right) - \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_m} \tilde{k}_c(1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \sin \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right)}{-\sin \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right) + \frac{i\tilde{f}}{\tilde{\omega}\tilde{\rho}_m} \tilde{k}_c(1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \cos \left( \tilde{k}_c \tilde{l}_R \right)} \right] = \frac{\tilde{G}_h}{\tilde{k}_h} \tan \left( \tilde{k}_h \tilde{l}_L \right) \quad (\text{A.52})$$

Cette équation représente la relation de dispersion des ondes du tube chargé. Les indices  $h$  et  $c$  pour  $\tilde{G}$  et  $\tilde{k}$  correspondent respectivement à la partie chaude et à la partie froide.

Lorsque  $\tilde{f} \rightarrow 0$ , l'équation (A.52) se ramène à :

$$\frac{\tilde{G}_c}{\tilde{k}_c} \cotan(\tilde{k}_c \tilde{l}_R) = \frac{\tilde{G}_h}{\tilde{k}_h} \tan(\tilde{k}_h \tilde{l}_L), \quad (\text{A.53})$$

tandis que lorsque  $\tilde{f} \rightarrow \infty$ , elle se ramène à :

$$-\frac{\tilde{G}_c}{\tilde{k}_c} \tan(\tilde{k}_c \tilde{l}_R) = \frac{\tilde{G}_h}{\tilde{k}_h} \tan(\tilde{k}_h \tilde{l}_L). \quad (\text{A.54})$$

On retrouve bien les équations (A.17) et (A.32) pour un tube ouvert/fermé et fermé/fermé respectivement.

Si l'on suppose que  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\mu}$  sont indépendants de la température, l'équation (A.52) se met sous la forme :

$$\boxed{-\frac{\tilde{G}_c}{\tilde{k}_c} + \frac{\tilde{G}_h}{\tilde{k}_h} \tan(\tilde{k}_h \tilde{l}_L) \tan(\tilde{k}_c \tilde{l}_R) - i \frac{\tilde{f}}{\tilde{\omega} \tilde{\rho}_c} \tilde{k}_c (1 - \tilde{f}_{\nu_c}) \times \left[ \frac{\tilde{G}_c}{\tilde{k}_c} \tan(\tilde{k}_c \tilde{l}_R) + \frac{\tilde{G}_h}{\tilde{k}_h} \tan(\tilde{k}_h \tilde{l}_L) \right]} = 0. \quad (\text{A.55})$$

Cette relation de dispersion donne des résultats qui correspondent qualitativement aux résultats issus de la simulation numérique. Etant donné que l'accord quantitatif n'est pas obtenu, on ne présente pas ici les résultats.

# Bibliographie

- [1] ABEN, P. C. H., BLOEMEN, P. R., AND ZEEGERS, J. C. 2-D PIV measurements of oscillatory flow around parallel plates. *Experimental Fluids* **46** (2009), 631–641.
- [2] ARNOTT, W. P., BASS, H. E., AND RASPET, R. General formulation of thermoacoustics for stacks having arbitrarily shaped pore cross section. *J. Acoust. Soc. Am.* **90** (1991), 3228–3237.
- [3] ARNOTT, W. P., BASS, H. E., AND RASPET, R. Specific acoustic impedance measurements of an air filled prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **92** (1992), 3432–3434.
- [4] ARNOTT, W. P., BELCHER, J. R., RASPET, R., AND BASS, H. E. Stability analysis of a helium-filled thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **96** (1994), 370–375.
- [5] ARNOTT, W. P., RASPET, R., AND BASS, H. E. Thermoacoustic engines. *Ultrasonics Symposium* (1991), 995–1003.
- [6] ARNOTT, W. P., SABATIER, J. M., AND RASPET, R. Sound propagation in capillary-tube-type porous media with small pores in the capillary walls. *J. Acoust. Soc. Am.* **90** (1991), 3299–3306.
- [7] ATCHLEY, A. A. Standing wave analysis of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.* **92** (1992), 2907–2914.
- [8] ATCHLEY, A. A. Analysis of the initial buildup of oscillations in a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **95** (1993), 1661–1664.



- [9] ATCHLEY, A. A., AND KUO, F. M. Acoustically generated temperature gradients in short plate. *J. Acoust. Soc. Am.* **88** (1990), 1401–1404.
- [10] ATCHLEY, A. A., AND KUO, F. M. Stability curves for a thermoacoustic prime mover. *J. Acoust. Soc. Am.* **95** (1993), 1401–1404.
- [11] ATCHLEY, A. A., BASS, H. E., HOFLEER, T. J., AND LIN, H. T. Study of a thermoacoustic prime mover below onset of self-oscillation. *J. Acoust. Soc. Am.* **91** (1992), 734–743.
- [12] BACKHAUS, S., AND SWIFT, G. W. A thermoacoustic-stirling heat engine : detailed study. *J. Acoust. Soc. Am.* **107** (2000), 3148–3166.
- [13] BAO, R., CHEN, G. B., TANG, K., JIA, Z. Z., AND CAO, W. H. Effect of rc load on performance of thermoacoustic engine. *Cryogenics* **46** (2006), 666–671.
- [14] BASS, H. E., RASPET, R., BELCHER, J. R., AND BREWSTER, J. *A study of element interactions in thermoacoustic engines*. Final report, The University of Mississippi, 1996.
- [15] BECKER, R., AND BRAACK, M. Solution of a stationary benchmark problem for natural convection with high temperature difference. *Int. J. Thermal Sci.* **41** (2002), 428–439.
- [16] BECKER, R., BRAACK, M., AND RANNACHER, R. Numerical simulation of laminar flames at low Mach number with adaptive finite elements. *Combustion Theory and Modelling* **3** (1999), 503–534.
- [17] BENAVIDES, E. M. An analytical model of self-starting thermoacoustic engines. *J. Appl. Phys.* **99**(11) (2006), 114905.
- [18] BERSON, A., AND BLANC-BENON, PH. Nonperiodicity of the flow within the gap of a thermoacoustic couple at high amplitudes. *J. Acoust. Soc. Am.* **122**(4) (2007), EL122–EL127.

- [19] BERSON, A., MICHARD, M., AND BLANC-BENON, PH. Measurement of acoustic velocity in the stack of a thermoacoustic refrigerator using particle image velocimetry. *Heat and Mass Transfer* **4**(8) (2008), 1015–1023.
- [20] BESNOIN, E. *Numerical study of thermoacoustic heat exchangers*. Thèse de doctorat, Johns Hopkins University, 2001.
- [21] BEYER, R. T. *Sounds of Our Times : Two Hundred Years of Acoustics*. édition 1999th. Springer, 1999.
- [22] BLANC-BENON, PH., BESNOIN, E., AND KNIO, O. Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack. *C. R. Mécanique* **331** (2003), 17–24.
- [23] BRETAGNE, E. *Générateur d'ondes et instabilités thermoacoustiques. Application à la conversion d'énergie*. Thèse de doctorat, université Pierre et Marie Curie, 2001.
- [24] BRIGGS, W. *A multigrid tutorial*. second edition. SIAM publication, Philadelphia, USA, 1987.
- [25] CAO, N., OLSON, J. R., SWIFT, G. W., AND CHEN, S. Energy flux density in a thermoacoustic couple. *J. Acoust. Soc. Am.* **99** (1996), 3456–3464.
- [26] CHEN, G. B., JIANG, J. P., SHI, J. L., JIN, T., TANG, K., JIANG, Y. L., JIANG, N., AND HUANG, Y. H. Influence of buffer on resonance frequency of thermoacoustic engine. *Cryogenics* **42** (2002), 223–227.
- [27] CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.* **22** (1968), 745–762.
- [28] DE WAELE, A. T. A. M. Basic treatment of onset conditions and transient effects in thermoacoustic Stirling engines. *J. Sound. Vib.* **325** (2009), 974–988.
- [29] DE WAELE, A. T. A. M. Basic operation of cryocoolers and related thermal machines. *J. Low. Temp. Phys.* **164** (2011), 179–236.
- [30] DEBESSE, P., BALTEAN-CARLÈS, D., AND LUSSEYRAN, F. Experimental analysis of nonlinear phenomena in a thermoacoustic system, nonlinear acoustics fundamen-

- tals and applications. In *Proc. 18th ISNA Stockholm SWEDEN 1022, 07-10 July* (2008), pp. 355–358.
- [31] DUFFOURD, S. *Réfrigérateur Thermoacoustique : Etudes analytiques et expérimentales en vue d'une miniaturisation*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [32] DUTHIL, P., BALTEAN-CARLÈS, D., BÉTRANCOURT, A., FRANÇOIS., M. -X., YU, Z. B., AND THERMEAU, J. P. Experiments and valve modeling in thermoacoustic device. *Adv. Cryogen. Eng.* **51 B** (2006), 1095–1102.
- [33] FELDMAN, K. T. Review of literature on Rijke thermoacoustic phenomena. *J. Sound. Vib.* **7** (1968), 83–89.
- [34] FELDMAN, K. T. Review of literature on Sondhauss thermoacoustic phenomena. *J. Sound. Vib.* **7** (1968), 71–82.
- [35] FONTAINE, A., CHARRIER-MOJTABI, M. C., AND GIBIAT, V. Simulation de l'effet thermoacoustique dans un réfrigérateur à l'aide d'un modèle de fluide compressible. In *10ème Congrès Français d'Acoustique* (2010).
- [36] GARY, J. M. A numerical method for acoustic oscillations in tubes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **8** (1988), 81–90.
- [37] GILLMAN, B. J. *A study of coupled thermoacoustic engines*. Thèse de doctorat, Dept. of Physics, University of Utah, 2009.
- [38] GU, Y. F., AND TIMMERHAUS, K. D. Thermal acoustic oscillations in triple point liquid hydrogen systems. *Int. J. Refrig.* **14** (1991), 282–291.
- [39] GUEDRA, M., PENELET, G., AND LOTTON, P. Experimental and theoretical study of the dynamics of self-sustained oscillation in a standing wave thermoacoustic engine. *J. Appl. Phys.* **115** (2014), 0245041–0245047.
- [40] GUEDRA, M., PENELET, G., LOTTON, P., AND DALMONT, J. P. Theoretical prediction of the onset of thermoacoustic instability from experimental transfer matrix of a thermoacoustic core. *J. Acoust. Soc. Am.* **130** (2011), 145–152.

- [41] GUSEV, V., LOTTON, P., BAILLET, H., JOB, S., AND BRUNEAU, M. Relaxation-time approximation for analytical evolution of temperature field in a thermoacoustic stack. *J. Sound. Vib.* **235** (2000), 711–726.
- [42] HAMILTON, M. F., ILINSKI, Y. A., AND ZABOLOTSKAYA, E. A. Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **111** (2002), 2076–2086.
- [43] HATORI, H., BIWA, T., AND YAZAKI, T. How to build a loaded thermoacoustic engine. *J. Appl. Phys.* **111** (2012), 074905.
- [44] HIRECHE, O. *Analyse Faible Mach et Etude Numérique d'un Système Thermoacoustique*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, 2010.
- [45] HIRECHE, O., WEISMAN, C., BALTEAN-CARLÈS, D., LE QUÉRÉ, P., AND BAUWENS, L. Low mach number analysis of idealized thermoacoustic engines with numerical solution. *J. Acoust. Soc. Am.* **128**(6) (2010), 3438–3448.
- [46] HIRECHE, O., WEISMAN, C., BALTEAN-CARLÈS, D., LE QUÉRÉ, P., FRANÇOIS, M. -X., AND BAUWENS, L. Numerical model of a thermoacoustic engine. *C. R. Mécanique* **338** (2010), 18–23.
- [47] HOFFMANN, T. VON, LIENERT, U., AND QUACK, H. Experiments on thermally driven gas oscillations. *Cryogenics* **13** (1973), 490–492.
- [48] INC., T. M. Optimizing nonlinear functions. *Documentation Center* (1994-2013).
- [49] JAWORSKI, A. J., MAO, X. A., MAO, X. R., AND YU, Z. B. Entrance effects in the channels of the parallel plate stack in oscillatory flow conditions. *Experimental Thermal and Fluid Science* **33** (2009), 495–502.
- [50] JENSEN, C., AND RASPET, R. Thermoacoustic power conversion using piezoelectric transducer. *J. Acoust. Soc. Am.* **128** (2010), 98–103.
- [51] KARPOV, S., AND PROSPERETTI, A. Linear thermoacoustic instability in the time domain. *J. Acoust. Soc. Am.* **103** (1998), 3309–3317.

- [52] KARPOV, S., AND PROSPERETTI, A. Nonlinear saturation of the thermoacoustic instability. *J. Acoust. Soc. Am.* **107** (2000), 3130–3147.
- [53] KARPOV, S., AND PROSPERETTI, A. A nonlinear model of thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.* **112** (2002), 1431–1444.
- [54] KIRCHHOFF, G. über den einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Pogg. Ann.* (1868), 134–177.
- [55] KRAMERS, H. A. Vibrations of a gas column. *Physica* **15**(11-12) (1949), 971–984.
- [56] KUNDU, P. K. *Fluid Mechanics*. 5 edition. Academic Press, 2011.
- [57] KUO, F. M. *Stability curves for a thermoacoustic prime mover*. Master’s thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, California, USA, 1993.
- [58] LE QUÉRE, P., WEISMAN, C., PAILLÈRE, H., VIERENDEELS, J., DICK, E., BECKER, R., BRAACK, M., AND LOCKE, J. Modelling of natural convection flows with large temperature differences : A benchmark problem for low Mach number solvers. Part 1. Reference Solutions. *M2AN, Math. Modell. Numer. Anal.* **39** (2005), 609–616.
- [59] LYCKLAMA À NIJEHOLT, J. A. , TIJANI, M. E. H., AND SPOELSTRA, S. Simulation of a traveling-wave thermoacoustic engine using Computational Fluid Dynamics. *J. Acoust. Soc. Am.* **118** (2005), 2265–2270.
- [60] MAO, X. A., AND JAWORSKI, A. J. Application of particle image velocimetry measurement techniques to study turbulence characteristics of oscillatory flow around parallel-plate structures in thermoacoustic devices. *Mesurement Science and Technology* **21**(3) (2010), 035403.
- [61] MAO, X. A., YU, Z. B., JAWORSKI, A. J., AND MARX, D. PIV studies of coherent structures generated at the end of stack of parallel plates in a standing wave acoustic wave. *Experimental Fluids* **45** (2008), 833–846.
- [62] MARX, D. *Simulation numérique d’un réfrigérateur thermoacoustique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2003.

- [63] MARX, D. Numerical simulation of stack-heat exchangers coupling in a thermoacoustic refrigerator. *J. AIAA* **42** (2004), 1338–1347.
- [64] MERKLI, P., AND THOMANN, H. Transition to turbulence in oscillating pipe flow. *J. Fluid Mech.* **68**(3) (1975), 567–575.
- [65] MIGLORI, A., AND SWIFT, G. W. Liquid sodium thermoacoustic engine. *Appl. Phys. Lett.* **53** (1988), 355–357.
- [66] MUEHLEISEN, R. T., AND ATCHLEY, A. A. Simple model for temperature gradient formation in a short stack. In *Proc. 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting Acoust. Soc. Am., Seattle, Washington, USA, 25-26 June* (1998).
- [67] MULLER, B. Low-mach-number asymptotics of the navier-stokes equations. *J. Engrg. Math.* **34** (1998), 97–109.
- [68] MULLER, U., AND ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations, Part VI : Excitation and power. *Z. Angew. Math. Phys.* **34** (1983), 609–626.
- [69] OLSON, J. R., AND SWIFT, G. W. A loaded thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **98** (1995), 2690–2693.
- [70] PAOLUCCI, P. *On the filtering of sound from the Navier-Stokes equations*. Report no. sand82-8257, Sandia National Laboratories, 1982.
- [71] QIU, L. M., LAI, B. H., LI, Y. F., AND SUN, D. M. Numerical simulation of the onset characteristics in a standing wave thermoacoustic engine based on thermodynamic analysis. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **55** (2012), 2200–2203.
- [72] RADEBAUGH, R. A review of pulse tube refrigerators. *Adv. Cryogen. Eng.* **35** (1990), 1191–1205.
- [73] RASPET, R., BREWSTER, J., AND BASS, H. E. A new approximation method for thermoacoustic calculations. *J. Acoust. Soc. Am.* **103** (1998), 2395–2402.
- [74] RAYLEIGH, L. *Theory of sound*. Second Edition. 1894.

- [75] ROTT, N. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Z. Angew. Math. Phys.* **20** (1969), 230–243.
- [76] ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations, Part II : Stability limit for helium. *Z. Angew. Math. Phys.* **24** (1973), 54–72.
- [77] ROTT, N. The influence of heat conduction on acoustic streaming. *Z. Angew. Math. Phys.* **25** (1974), 417–421.
- [78] ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations, Part III : Second-order heat flux. *Z. Angew. Math. Phys.* **26** (1975), 43–49.
- [79] ROTT, N. Thermoacoustics. *Advances In Applied Mechanics* **20** (1980), 135–243.
- [80] ROTT, N. Linear thermoacoustics. In *Proc. of 1st International Workshop on Thermoacoustics, Hertogenbosch, Netherlands, April* (2011), pp. 22–25.
- [81] ROTT, N., AND ZOUZOULAS, G. Thermally driven acoustic oscillations, Part IV : Tubes with variable cross-section. *Z. Angew. Math. Phys.* **27** (1976), 195–224.
- [82] SHI, L., YU, Z. B., AND JAWORSKI, A. J. Vortex formation at the end of the parallel-plate stack in the standing-wave thermoacoustic device. In *The Sixteenth International Congress on Sound and Vibration, Krakow, Poland, 5-9 July* (2009).
- [83] SHI, L., YU, Z. B., AND JAWORSKI, A. J. Application of laser-based instrumentation for measurement of time-resolved temperature and velocity fields in the thermoacoustic system. *International Journal of Thermal Science* **49**(9) (2010), 1688–1701.
- [84] SHI, L., YU, Z. B., AND JAWORSKI, A. J. Vortex shedding flow patterns and their transitions in oscillatory flow past parallel-plate thermoacoustic stacks. *Experimental Thermal and Fluid Science* **34** (2010), 954–965.
- [85] SHI, L., YU, Z. B., JAWORSKI, A. J., AND ABDULJALIL, A. S. Vortex shedding at the end of parallel-plate thermoacoustic stack in the oscillatory flow condition. *Engineering and Technology* **37** (2009), 766–773.

- [86] SHIMIZU, D., AND SUGIMOTO, N. Marginal conditions of thermoacoustic Taconis oscillations revisited. In *Proc. of 20th International Congress on Acoustics, ICA 2010, Sydney, Australia, 23-27 August* (2010).
- [87] STINSON, M. R. The propagation of plane sound waves in narrow and wide circular tubes, and generalization to uniform tubes of arbitrary cross-sectional shape. *J. Acoust. Soc. Am.* **89** (1991), 550–558.
- [88] SUGIMOTO, N. Thermoacoustic-wave equations for gas in a channel and a tube subject to temperature gradient. *J. Fluid. Mech.* **658** (2010), 89–116.
- [89] SUGIMOTO, N., AND SHIMIZU, D. Boundary-layer theory for Taconis oscillations in a helium-filled tube. *Phys. Fluid.* **20** (2008), 104102.
- [90] SUGIMOTO, N., AND TAKEUCHI, R. Amplification of energy flux of nonlinear acoustic waves in a gas-filled tube under an axial temperature gradient. *J. Fluid. Mech.* **456** (2002), 377–409.
- [91] SUGIMOTO, N., AND YOSHIDA, M. Marginal conditions for the onset of thermoacoustic oscillations of a gas in a tube. *Phys. Fluid.* **19** (2007), 074101.
- [92] SWIFT, G. W. Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.* **84** (1988), 1145–1180.
- [93] SWIFT, G. W. *Thermoacoustics : A unifying perspective for some engines and refrigerators*. Fifth draft. La-ur 99-895, 2001.
- [94] SYSOEV, V. A., GORBACHEV, S. P., AND MATYUSHCHENKOV, V. K. A numerical method of calculating the boundary of stability of thermally induced acoustic oscillations. *J. of Eng. Phys.* **50** (1986), 355–358.
- [95] TACONIS, K. W., NIER, A. O., AND ALDRICH, L. T. Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of  $He^3$  in  $He^4$ . *Physica* **15** (1949), 733–739.
- [96] TANG, K., TIAN, L., DE WAELE, A. T. A. M., AND JIN, T. Basic analysis on a thermoacoustic engine with gas and liquid. *Phys. of Appl. Fluid* **109** (2011), 074907.



- [97] TEMAM, R. Une méthode d'approximation des solutions des équations Navier-Stokes. *Bull. Soc. Math. France* **98** (1968), 115–152.
- [98] TIJDEMAN, H. On the propagation of sound waves in cylindrical tubes. *J. Sound. Vib.* **39** (1975), 1–33.
- [99] TU, Q., LI, Q., WU, F., AND GUO, F. Z. Network model approach for calculating oscillating frequency of thermoacoustic prime mover. *Cryogenics* **43** (2003), 351–357.
- [100] TU, Q., WU, C., LI, Q., WU, F., AND GUO, F. Z. Influence of temperature gradient on acoustic characteristic parameters of stack in tae. *International Journal of Engineering and Applied Sciences* **41** (2003), 1337–1349.
- [101] UEDA, Y., AND KATO, C. Stability analysis of thermally induced spontaneous gas oscillations in straight and looped tubes. *J. Acoust. Soc. Am.* **124** (2008), 851–858.
- [102] VERSTEEG, H. K., AND MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics : The Finite Volume Method.* second edition. Pearson Education Limited, England, 2007.
- [103] VIERENDEELS, J., RIEMSLAGH, K., AND DICK, E. A Multigrid semi-implicit line methode for viscous incompressible and low-Mach number flows on high aspect ratio grids. *J. Comput. Phys.* **154** (1999), 310–341.
- [104] WATANABE, M., PROSPERETTI, A., AND YUAN, H. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. Part I. Model and linear theory. *J. Acoust. Soc. Am.* **102** (1997), 3484–3496.
- [105] WETZEL, M., AND HERMAN, C. Experimental study of thermoacoustic effects on a single plate Part II : Heat transfer. *Heat and Mass Transfer* **35** (1999), 433–441.
- [106] WETZEL, M., AND HERMAN, C. Experimental study of thermoacoustic effects on a single plate Part I : Temperature fields. *Heat and Mass Transfer* **36** (2000), 7–20.
- [107] WHEATLEY, J., HOFER, T., SWIFT, G. W., AND MIGLIORI, A. An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.* **74** (1983), 074101.

- [108] WHEATLEY, J., SWIFT, G. W., AND MIGLIORI, A. The natural heat engine. *LOS ALAMOS SCIENCE* (1986).
- [109] WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. Reprint. Pure and Applied Mathematics : A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 1999.
- [110] WORLIKAR, A. S. *Numerical simulation of thermoacoustic refrigerators*. Thèse de doctorat, Johns Hopkins University, 1997.
- [111] WORLIKAR, A. S., AND KNIO, O. M. Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. I : Unsteady adiabatic flow around a thermoacoustic refrigerator. *J. Comput. Phys.* **127** (1996), 424–451.
- [112] WORLIKAR, A. S., AND KNIO, O. M. Numerical study of oscillatory flow and heat transfer in a loaded thermoacoustic stack. *Numerical Heat Transfer* **35** (1999), 49–65.
- [113] WORLIKAR, A. S., KNIO, O. M., AND KLEIN, R. Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. II : stratified flow around the stack. *J. of Comput. Fluid.* **144** (1998), 299–324.
- [114] YAZAKI, T., IWATA, A., AND MAEKEWA, T. AND TOMINAGA, A. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Review Letters* **81**(15) (1998), 3128–3131.
- [115] YAZAKI, T., TOMINAGA, A., AND NARAHARA, Y. Stability limit for thermally driven acoustic oscillation. *Cryogenics* **19** (1979), 25–28.
- [116] YAZAKI, T., TOMINAGA, A., AND NARAHARA, Y. Experiments on thermally driven acoustic oscillations of gaseous helium. *J. Low Temp. Phys.* **41** (1980), 45–60.
- [117] YU, G. Y., LUO, E. C., DAI, W., AND HU, J. Y. Study of nonlinear processes of a large experimental thermoacoustic-stirling heat engine by using computational fluid dynamics. *J. Appl. Phys.* **102** (2007), 074901–074907.

- 
- [118] YU, Z. B., JAWORSKI, A. J., AND ABDULJALIL, A. S. Impact of viscous and heat relaxation loss on the critical temperature gradients of thermoacoustic stacks. *International Journal of Engineering and Applied Sciences* **5**(3) (2009), 152–156.
- [119] YUAN, H., KARPOV, S., AND PROSPERETTI, A. A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. Part II. Nonlinear oscillations. *J. Acoust. Soc. Am.* **102** (1997), 3497–3506.
- [120] ZOUZOULAS, G., AND ROTT, N. Thermally driven acoustic oscillations, Part V : Gaz-liquid oscillations. *Z. Angew. Math. Phys.* **27** (1976), 325–334.