



HAL
open science

Méthodes itératives de reconstruction tomographique pour la réduction des artefacts métalliques et de la dose en imagerie dentaire

Long Chen

► **To cite this version:**

Long Chen. Méthodes itératives de reconstruction tomographique pour la réduction des artefacts métalliques et de la dose en imagerie dentaire. Physique Médicale [physics.med-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2015. Français. NNT: 2015PA112015 . tel-01167370

HAL Id: tel-01167370

<https://theses.hal.science/tel-01167370v1>

Submitted on 24 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : Sciences et Technologie de l'Information, des
Télécommunications et des Systèmes

Laboratoire des Signaux et Système, Supélec-CNRS-Université Paris Sud
DISCIPLINE : Physique

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 05/02/2014
par

Long CHEN

Méthodes itératives de reconstruction tomographique pour la réduction des artefacts métalliques et de la dose en imagerie dentaire

Composition du jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Laurent DESBAT Pierre BLEUET	Professeur des universités (Université Joseph Fourier) Ingénieur de recherche, HDR (LETI, CEA Grenoble)
<i>Examineurs :</i>	Sylvie MARCOS Mai NGUYEN-VERGER	Directeur de recherche (CNRS) Professeur des universités (Université de Cergy Pontoise)
<i>Invités :</i>	Colombe MAURY	Ingénieur de recherche (Trophy, Carestream Dental)
Directeur de thèse :	Thomas RODET	Professeur des universités (ENS-Cachan)
Co-encadrant :	Nicolas GAC	Maître de Conférences (Université de Paris Sud)



Thèse préparée au sein du
Laboratoire des Signaux et des Systèmes
SUPELEC-CNRS-Université Paris-Sud, UMR 8506
3, rue de Joliot-Curie
91192, Gif-sur-Yvette, France

en collaboration avec
Trophy, Carestream Dental
4, rue F. Pelloutier-Croissy Beaubourg
77435, Marne la Vallée Cedex 2, France

Remerciements

D'abord, je remercie l'entreprise Trophy, Carestream Dental et le laboratoire des Signaux et des Systèmes (L2S) qui m'ont accueilli et qui m'ont donné deux lieux de travail agréables pendant les trois ans. Je tiens aussi à remercier Trophy, Carestream Dental et ANRT qui ont financé mes travaux de thèse.

Ensuite, je remercie très sincèrement à mon directeur de thèse, Professeur Thomas RODET, qui m'a proposé cette thèse CIFRE suite à mon stage de la fin d'étude dans le cadre de la collaboration entre Trophy et L2S. Il m'a guidé et m'a aidé tout au long de ma thèse non seulement sur la partie théorique mais aussi certaines problèmes pratiques. Son expérience et sa pédagogie m'ont permis d'organiser au mieux mon travail durant ses trois années. Sa patience et sa gentillesse ont rendu nos discussions, la rédaction de manuscrit et la préparation de la soutenance très agréable. Je tiens à remercier également tout particulièrement à ma responsable à Trophy, Carestream Dental, Colombe MAURY, qui m'a donné des présentations détaillées de problèmes concrets et qui m'a aidé lorsque j'ai rencontré des problèmes d'acquisition des données ou des problèmes administratifs à Trophy. Elle a suivi de mes travaux de thèse dans les moindres détails. Ses compétences techniques et sa rigueur m'ont permis d'avancer plus efficacement les travaux d'implémentation des algorithmes développés à Trophy. Je remercie aussi tout particulièrement à mon co-encadrant, Nicolas GAC, maître de conférence et membre du GPI, pour son soutien et son aide tout au long de ma thèse. Son expertise dans le domaine de GPUs m'a aidé d'aborder cette spécialité et d'adapter le projecteur et rétro-projecteur implémentés sur GPUs à de nouveaux systèmes de scanner par rayons X. Il m'a encouragé et m'a aidé de préparer les papiers de conférences et ma soutenance.

De plus, je remercie tous les autres collègues du bureau d'étude de Trophy, Carestream Dental et toutes les autres personnes avec qui j'ai pu parlé lors d'une pause de café, ils ont par leur accueil et leur gentillesse ont rendu les journées de travail plus agréables. Je tiens à remercier particulièrement Vincent LOUSTAUNEAU, chef de projet à Trophy, qui m'a soutenu et m'a donné de bons commentaires et remarques lors de mes présentations régulières à Trophy. Je remercie également en particulier Anna-Sesilia VALCHOMITROU, qui a bien voulu me consacrer une partie de son temps précieux pour apporter son expertise en tomosynthèse et Laurent BOUTTE, qui m'a aidé d'acquérir les données réelles avec un scanner CS 9300.

Je tiens également à remercier tous les autres membres du GPI, notamment Professeur Ali-Mohammad DJAFARI, qui m'a aidé sur la procédure administrative de thèse dans les deux premières années et m'a donné de bons conseils pour préparer ma soutenance. Je remercie tout particulièrement tous les thésards ou post-doc du GPI ce que j'ai croisé (dans l'ordre alphabétique), Caifang, Dorian, Fangchen, Jérôme, Leila, Li, Mircea, Ning, Remi, Sha et Yuling et également tous les stagiaires du GPI. Je remercie aussi tous les

autres amis au L2S et à Supélec et toutes les autres personnes au L2S qui m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions.

Je voudrais aussi remercier tout particulièrement Mme Sylvie MARCOS, qui a accepté d'être président du jury de ma soutenance et les corrections qu'elle a faite sur mon manuscrit m'a permis de fortement l'améliorer. Je tiens également à remercier très sincèrement M. Pierre BLEUET, qui a accepté d'être rapporteur de mon manuscrit et m'a donné tous ses commentaires de correction rapidement avant la soutenance afin que je puisse présenter un bien meilleur document lors de ma soutenance de thèse. Un grand merci à M. Laurent DESBAT, qui a accepté d'être rapporteur de ma thèse, il m'a donné des commentaires très pertinents et des conseils précieux. Ces corrections ont été précieuses. Je remercie aussi particulièrement Mme Mai NGUYEN-VERGER, qui a accepté d'être examinateur du jury et m'a donné des remarques précieuses.

Enfin, je voudrais remercier vivement mes parents, tous les autres membres de ma famille et notamment ma copine Yi pour leur compréhension et leur soutien indispensable. Sans eux, je ne serais pas aller jusqu'au bout de ce travail.

Notations

$*$	convolution
$(\cdot)^t$	transpose d'un vecteur ou une matrice
\sim	Suivant une distribution de la loi probabiliste
$(\cdot) \cdot (\cdot)$	produit interne de deux vecteur (\cdot)
$(\cdot)^{-1}$	inverse
μ	coefficient d'atténuation linéaire
I	intensité de faisceau des rayons X
I_0	intensité de faisceau des rayons X incidents
h	constante de Planck, $h = 6,6261 \times 10^{-20} J \cdot s$
c	vitesse de la lumière à vide, $c = 3,0 \times 10^8 m/s$
\mathcal{R}	transformée de Radon
\mathbb{R}	espace de réelle
\mathcal{S}	espace de Schwartz
$\mathcal{R}^\#$	opérateur de rétro-projection
\mathbf{I}_R	opérateur de filtrage
ρ	fréquence spatiale de domaine de Fourier
\mathbf{x}	vecteur de coordonnée Cartésiennes
\mathbf{g}	vecteur des données d'atténuation
\mathbf{f}	vecteur de l'objet à reconstruire
$\hat{\mathbf{g}}$	transformée de Fourier de \mathbf{g}
$\hat{\mathbf{f}}$	transformée de Fourier de \mathbf{f}
E_c	énergie cinétique d'électron
E_p	énergie des photons X

E_0	énergie d'excitation de l'électron
e_x	variable d'énergie des photons X
f_{KN}	modèle de Klein-Nishina
Z	numéro d'atome
ω	combinaison de spectre de source des rayons X normalisé et la sensibilité spectrale du détecteur
\bar{E}	ensemble des énergies des rayons X
\mathbf{a}	vecteur des données d'atténuation
\mathcal{G}	géométrie de scanner tomodynamométrie
s et \mathbf{s}	variable scalaire et vecteur de la distribution des rayonnements diffusés
$P(A)$	Probabilité d'un événement A
$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^M, \mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]^t$	vecteur aléatoire de comptage des nombres des photons X
\mathbf{y}	vecteur des mesures de \mathbf{Y}
ϵ	vecteur du bruit ou plus d'erreurs de modèle
\mathcal{N}	loi de probabilité normale
$\delta(\cdot)$	distribution de Dirac
$\boldsymbol{\theta}^\perp$	vecteur perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{\theta}$
\mathcal{F}_{1D}	transformée de Fourier de dimension un
\mathcal{F}_{2D}	transformée de Fourier de dimension deux
(x_1, x_2) ou $\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$	coordonnée de la grille cartésienne
(r, ϕ)	coordonnée de la grille polaire
(κ_1, κ_2) ou $\begin{matrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{matrix}$	coordonnée de la grille cartésienne dans l'espace de Fourier
(ρ, ϕ)	coordonnée de la grille polaire dans l'espace de Fourier
\mathcal{H}	transformée de Hilbert
ρ_{max}	fréquence maximale de l'image dans l'espace de Fourier
$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$	matrice de système dans notre modèle direct avec le nombre des mesures M et le nombre des variables inconnues N
$N = N_f \times N_f$	nombre des variables inconnues d'une image carré
M_ϕ	nombre des projections d'une acquisition

M_d	nombre des cellules de détecteur
R	distance entre la source des rayons X et le centre de rotation de scanner
D	distance entre la source des rayons X et le détecteur

Contents

Remerciements	I
Notations	III
List of Figures	XI
List of Tables	XXIII
I Introduction de la tomographie par transmission	1
I.1 Chaîne de mesure	5
I.1.1 Bref historique de l'imagerie médicale à base de rayons X	5
I.2 Approches classiques FBP	10
I.2.1 Modèle simple lié à l'acquisition	12
I.2.2 Inversion de la transformée de Radon par FBP	13
I.3 Principes physiques de la tomographie par transmission	14
I.3.1 Interaction des rayons X avec la matière	15
I.3.2 Modèles physiques liés à l'acquisition	16
I.4 Artefacts métalliques	21
I.4.1 Durcissement	22
I.4.2 Diffusé	22
I.4.3 Bruit	22
I.5 Conclusion	23
II Méthodes de reconstruction tomographique	27
II.1 Les bases de la tomographie	27
II.1.1 Transformée de Radon	28
II.1.2 Transformée divergente	29

II.1.3	Théorème fondamental de la tomographie : le théorème coupe-projection	29
II.2	Méthodes de Reconstruction Analytiques	31
II.2.1	Méthodes de la transformée de Fourier directe	31
II.2.2	Méthodes des rétro-projections filtrées (FBP)	31
II.2.3	Les méthodes FBP en géométrie divergente	35
II.2.4	Les méthodes analytiques de la reconstruction tridimensionnelle	37
II.3	Méthodes de reconstructions itératives	39
II.3.1	Méthodes algébriques	40
II.3.2	Méthodes statistiques	45
II.4	Analyse de complexité des méthodes de reconstruction tomographique	56
II.5	Conclusions	58
III	Méthodes de réduction des artefacts métalliques	61
III.1	Introduction	61
III.2	Description des fantômes numériques utilisés	64
III.3	État de l'art de MAR	66
III.3.1	MARs par remplacement des projections du métal	67
III.3.2	Méthode de correction du durcissement	71
III.3.3	Méthodes de correction du diffusé	85
III.4	Méthodes de MAR proposées	88
III.4.1	Discussion sur les approches de l'état de l'art	89
III.4.2	Méthodes de segmentation automatisée	90
III.4.3	Méthode de correction du durcissement proposée	92
III.4.4	Méthode de correction du diffusé proposée	94
III.4.5	Méthodes de reconstruction tomographique PWLS	100
III.5	Conclusion	109
IV	Méthodes itératives pour la tomographie par rayons X à faible dose	113
IV.1	Reconstruction à partir d'un nombre de projections limité	117
IV.1.1	Reconstruction à partir des données de " Short-scan "	117
IV.1.2	Méthodes reconstructions de super-short-scan	121
IV.1.3	Méthodes de reconstruction tomographique à partir du nombre réduit des projections tronquées	124

IV.2	Reconstruction à partir des acquisitions super-short-scan sur multiples cercles	129
IV.2.1	Les super-short-scans sur deux cercles	130
IV.2.2	Les super-short-scans sur trois cercles	133
IV.2.3	Les algorithmes itératifs de super-short-scan sur multiples cercles	134
IV.2.4	Validation de l'algorithme des super-short-scans sur multiples cercles	137
IV.3	Nouveau mode d'acquisition : échantillonnage non uniforme sur les angles de projections	140
V	Evaluation des méthodes MAR et de réduction de la dose proposées sur les données réelles	149
V.1	Introduction	149
V.2	Choix des fantômes expérimentaux et configuration des systèmes d'acquisition	149
V.2.1	Définition des fantômes expérimentaux	149
V.2.2	Configuration des systèmes de mesure	150
V.3	Méthodes de réduction des artefacts métalliques	151
V.3.1	Méthode de réduction d'artefacts métalliques basée sur la correction du durcissement	152
V.3.2	Méthode de réduction des artefacts métalliques basée sur la correc- tion du rayonnement diffusé	158
V.3.3	Conclusion	168
V.4	Application de l'algorithme super-short-scan dans le cas des acquisitions multiples	171
V.5	Le nouveau mode d'acquisition d'échantillonnage angulaire variant	174
V.5.1	Reconstruction des données réelles du crâne	175
V.5.2	Reconstruction des données réelles du patient	179
V.5.3	Conclusion	183
VI	Conclusions et perspectives	185
VI.1	Bilans et conclusions	185
VI.2	Perspectives	187
VI.2.1	Perspectives à court terme	187
VI.2.2	L'implantation sur les scanners commerciaux	188
VI.2.3	Réduction des autres artefacts	189

A	Algorithme de gradient conjugué préconditionné	191
A.1	Développement de l'algorithme gradient conjugué préconditionné	191
	Bibliographie	195

List of Figures

1.1	Image panoramique de la mâchoire.	2
1.2	Chaîne du système du scanner à rayons X (extrait de [1]).	6
1.3	Spectre d'un scanner avec la tension maximale de générateur des rayons X (KvP, acronyme anglais de Kilovoltage Peak) 150 kV. Les pics représentent la radiation caractéristique.	6
1.4	Illustration des géométries du scanner des rayons X parallèles (a) et du scanner des rayons X divergents (b).	8
1.5	Schéma du scanner de CT hélicoïdal avec le détecteur multi-ligne (a) (extrait de [1]) et du scanner CBCT (b).	9
1.6	Illustration schématique de la tomosynthèse (a) et de la reconstruction des plans de différentes profondeurs par l'algorithme de " shift and add " (b). (a). Les plans de différentes profondeurs (plans 1, 2, et 3) sont représentés respectivement par un triangle, un carré, et un cercle. Le plan 2 est le plan de focalisation du milieu. Nous expliquons les reconstructions des plans de différentes profondeurs avec quatre positions angulaires A, B, C, D. (b). Les coupes 2D peuvent être reconstruites par l'algorithme de " shift and add ", le plan 1 est reconstruit par décalage des projections B-D de droite à gauche et la somme des quatre projections, au contraire, le plan 3 est obtenu par la somme de la projection A et des projections B-D décalées de droite à gauche. La figure est extraite de [2].	10
1.7	Illustration du principe de la tomographie panoramique. (a) Les plans de différentes profondeurs (plan 1, 2 et 3) sont décrits respectivement par un triangle, un carré et un cercle, et le plan 2 est plan de focalisation. (b) Le triangle se déplace de droite à gauche lorsque la source des rayons X tourne de A à B et en sens inverse pour le cercle. La position du carré est fixée entre l'angle A et l'angle B de la source des rayons X. Si nous ajoutons les projections A et B, le carré est net, par contre, le triangle et le cercle deviennent flous. La figure est extraite de [2].	11
1.8	Illustration schématique de la tomographie panoramique dentaire. la focalisation se fait maintenant sur l'arcade des dents dans la mâchoire. Lorsque la source des rayons X tourne sur l'arc parallèle à l'arcade de la mâchoire, le détecteur se déplace dans le sens inverse.	12
1.9	Définition de coefficient d'atténuation linéaire μ	12

1.10	Coefficients d'atténuation linéaire (colonne gauche) et contributions des différentes interactions des photons X avec la matière (colonne droite) en fonction de l'énergie des photon X de 10 à 200 keV. Les courbes (a)-(b), (c)-(d), (e)- (f), (g)-(h) et (i)-(j) correspondent respectivement à l'eau, aux tissus mous, à l'os, à l'aluminium et au titane. Les CALs sont calculés à partir de la base des données XCOM NIST [3].	18
1.11	(a) Phénomène pour un seul diffusé, (b) Artefacts du diffusé dans l'image reconstruite de la mâchoire simulée.	19
1.12	Illustration des artefacts du durcissement. (a) Schéma des faisceaux de rayons X. (b) Courbes des coefficients d'atténuation des os et de l'aluminium (Al) en fonction de l'énergie des rayons X (30-80 KeV). (c) Profil horizontal de milieu du cercle (a).	23
1.13	Illustration d'amplification du bruit. La courbe de intensité normalisée des faisceaux de rayons X mesurée par détecteur (en haut), I/I_0 , et la courbe d'atténuation μ correspondant mesurée (en bas).	24
2.1	Illustration de la transformée de Radon en 2D. (a) espace objet, (b) espace de Radon.	28
2.2	Illustration de la transformée divergente en 2D	30
2.3	Schéma des méthodes de la transformée de Fourier directe.	32
2.4	Illustration du filtre rampe.	33
2.5	Les fenêtres de Hanning ($t=0,5$, courbe bleu pointillé et en pointillés) et Hamming ($t=0,54$, courbe rouge pointillés) (a) et les filtres rampes multipliés par ces fenêtres (b). Les fréquences dans les figures sont normalisées.	35
2.6	Géométries éventails avec détecteur courbe (a) et avec détecteur plat (b).	36
2.7	Illustration de la géométrie de la tomographie à faisceau conique (extrait de [1]).	38
2.8	Illustration du rayon X i traversant l'image discrète de l'objet. Le pixel j est énuméré par $j = (j_2 - 1) * N_f + j_1$	41
2.9	Illustration des projections avec échantillonnages réguliers. Le cercle (en ligne virtuelle) est la zone de reconstruction effective qui contient tout l'objet.	45
2.10	Illustration de l'algorithme de descente de gradient dans le cas de fonction parabole. f^* est la solution qui minimise la fonction $J(f)$	54
3.1	Illustration de l'effet de durcissement de spectre : (a) spectre simulé utilisé pour générer les données, (b) l'image reconstruite en utilisant l'algorithme FBP.	63
3.2	Les images reconstruites par FBP à partir des données: (a) présentant un rayonnement diffusé, (b) bruité illustrant l'amplification du bruit par linéarisation.	63

3.3	Deux fantômes numériques. (a) fantôme 1 : mâchoire 2D simulée composée de deux matériaux, os et trois cercles de cuivre, (b) fantôme 2 : maxillaire-dentaire 2D simulée avec trois matériaux, eau, os et trois cercles de cuivre, en plus, nous ajoutons 16 petits carrés de tissus mous calcifiés permettant d'introduire des composantes très hautes fréquences difficiles à reconstruire.	64
3.4	(a) Profil parabole et (b) évolution sinusoïdale de l'amplitude normalisée en fonction de l'angle de projection.	65
3.5	(a) Sinogramme original du fantôme 1 (voir Fig. 3.3.(a)) ; (b) Image reconstruite par FBP, La fenêtre d'affichage dans (b) est [-0,01 0,04].	68
3.6	Sinogrammes interpolés et images reconstruites: (a) sinogramme interpolé approche MAR-LI (b) sinogramme interpolé approche MAR-NPI, (c) reconstruction FBP approche MAR-LI (d) reconstruction FBP approche MAR-NPI. Les fenêtres d'affichage dans (b) sont le [-0,01 0,04]. Les flèches bleues et rouges indiquent respectivement les nouveaux artefacts introduits et les bords flous autour du métal dans (c) et (d).	69
3.7	(a) profil de sinogramme normalisé par longueur d'intersection de rayons X avec l'objet dans la méthode MAR-NPI et (b) les profils de sinogrammes interpolés (IL) de MAR-LI (voir la figure 3.6.(a)) et MAR-NPI (voir la figure 3.6.(b)) suivant la tracé de la ligne droite jaune dans la figure 3.5.(a).	70
3.8	Schéma de la méthode NMAR, [4]	71
3.9	Sinogramme original (a) de fantôme 2 dans la figure 3.3.(b), et les images reconstruites par FBP à partir de sinogramme original (a), (b) et de sinogramme d'interpolation linéaire (c). Les flèches bleues et rouges indiquent respectivement les nouveaux artefacts introduits et les bords flous de l'objet entourant le métal dans (c).	72
3.10	Comparaison des méthodes MAR-NPI (colonne à gauche) et NMAR (colonne à droite). (a) image binaire de l'objet pour calculer la longueur d'intersection de rayons X avec l'objet, (b) image a priori ; (c) et (d) : les profils de sinogrammes normalisés dans le MAR-NPI et le NMAR respectivement. (e) et (f) : les images reconstruites par FBP dans le MAR-NPI et le NMAR respectives. Les fenêtres d'affichage de (e) et (f) sont de [0 0,05].	73
3.11	Image <i>a priori</i> issue d'une segmentation imparfaite (a) et image reconstruite par NMAR (b) avec l'image <i>a priori</i> (a).	74
3.12	Les fantômes triangle (a) et escalier (b) pour mesurer l'atténuation des faisceaux polychromatiques de rayons X.	75
3.13	Les projections monochromatique estimées (ligne droite) et les projections polychromatiques estimées (courbe) ajustées pour les mesures d'atténuations (en points) dans le cas d'un matériau, extrait de [5].	77
3.14	Illustration du diffusé en fonction de la géométrie d'acquisition. Le rayon X avec l'angle de diffusé plus grande (Traj1) est capté par le détecteur plus proche de l'objet (en points), mais s'échappe au détecteur plus loin de l'objet (en ligne solide).	87

3.15	Illustration de méthode basée sur les projections d'un collimateur.	87
3.16	Schéma de méthode de <i>beam-stops</i> , s_{bs} est le diffusé concerné aux projections de la série de <i>beam-stop</i>	88
3.17	Estimation de la courbe polychromatique par ajustement des données sur l'extrait de contribution de métal dans les données originales \mathbf{g}^{metal}	95
3.18	La courbe monochromatique (en noire) et la courbe polychromatique (en rouge) en fonction de longueur d'intersection de rayons X avec le métal. . .	95
3.19	Images reconstruites par FBP à partir des données originales (a), des données d'interpolation linéaire (b), et des données corrigées par notre méthode BHC (c). La différence de (c-a) est montrée dans (d). Dans la méthode MAR-LI, le métal est collé dans l'image (b). Les fenêtres d'affichage sont le [-0,01 0,04] dans (a)-(c), et le [-0,02 0,02] dans (d).	96
3.20	Profils des images reconstruites suivants le segment de droite jaune dans la figure 3.19.(a).	97
3.21	Différence des données de correction de durcissement et celles originales (a) et profil (b) suivant le segment de droite dans (a).	97
3.22	Illustration de la méthode de correction du diffusé proposée. s_A et s_M sont respectivement le diffusé concerné à rien traverser et au métal.	98
3.23	Illustration de l'estimation de la distribution du diffusé.	99
3.24	La distribution originale du diffusé (a) et celle estimée du diffusé avec notre méthode (b).	100
3.25	Images reconstruites par FBP avec les données originales (a) et par les méthodes de moindres carrés avec les données originales (b), avec les données corrigées (c) et la différence des deux images (d)=(c)-(b). Les (b) et (c) sont les zooms des images dans la zone du rectangle rouge pointillé (voir la figure 3.3.(a)). Les fenêtres d'affichage de (a), (b) et (c) sont dans le cadre de [-0,01 0,1] et [-0,05 0,05] pour (d).	101
3.26	(a) Une fonction empirique Q_3 et (b) un exemple de la matrice W_c avec la fonction Q_3 (a) adaptée aux données simulées du diffusé.	103
3.27	Une fonction empirique Q_3	103
3.28	Images reconstruites avec différentes méthodes à partir des données du durcissement. (a) PLS, reconstruction par la méthode de moindres carrés avec régularisation, (b) PWLS-NSC, reconstruction par la méthode de moindres carrés pondérés avec régularisation à partir des données originales, (c) méthode proposée, reconstruction par la méthode de moindres carrés pondérés avec régularisation avec les données corrigées et (d) NMAR. Toutes les fenêtres d'affichage sont le [-0,01 0,1]. Les flèches bleues indiquent de nouveaux artefacts dans l'image de NMAR (d).	104

3.29	Images reconstruites avec différentes méthodes à partir des données du diffusé. (a) PLS, (b) PWLS-NSC, (c) méthode proposée et (d) NMAR. Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,1]$. Les flèches bleues indiquent de nouveaux artefacts dans l’image de NMAR (d).	105
3.30	Images reconstruites avec différentes méthodes à partir des données du durcissement et diffusé. (a) PLS, (b) PWLS-NSC, (c) méthode proposée et (d) NMAR. Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,1]$. Les flèches bleues indiquent de nouveaux artefacts dans l’image de NMAR (d).	106
3.31	Profils des images reconstruites à partir des données de durcissement sur la ligne droite jaune dans la figure 3.28.(a).	107
3.32	Profils des images reconstruites à partir des données de diffusé sur la ligne droite jaune dans la figure 3.28.(a).	108
3.33	Profils des images reconstruites à partir des données de durcissement et de diffusé sur la ligne droite jaune dans la figure 3.28.(a).	108
3.34	Courbes de la fonction du coût $J(\mathbf{f})$ normalisée de la méthode PWLS en fonction du nombre d’itération. PWLS représente la reconstruction PWLS par gradients conjugués.	109
3.35	Schéma de la méthode proposée de correction de durcissement. H représente le projecteur. Et μ^{metal} est la moyenne des valeurs reconstruites de métal par FBP.	112
4.1	Images reconstruites par FBP à partir des données de la dose normale (a) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 457$ projections), de 50% de la dose (b) ($I_0 = 0,5 \times 10^6$, $M_\phi = 457$) et (c) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 229$). Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,05]$	115
4.2	Images reconstruites par les méthodes itératives moindres carrés avec régularisation à partir de la totalité des données de dose normale (a) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 457$) et celles de 50% de la dose (b) ($I_0 = 0,5 \times 10^6$, $M_\phi = 457$) et (c) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 229$). Les zooms dans le rectangle rouge pointillé sont mis en haut à droite. Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,05]$	115
4.3	Exemples des géométries typiques avec présence des projections tronquées. L’ellipse en ligne solide et le cercle en ligne cassée représentent respectivement le support d’objet Ω et le champ de vue FOV.	118
4.4	Une ligne passant par X mesurée deux fois par les rayons X.	119
4.5	Illustration de “ short scan ” et indications des données redondantes et non-redondantes (extrait de [1]).	120
4.6	Illustration des données redondantes et non-redondantes de “ short scan ” en $\alpha - \gamma$ [6] et [1].	120
4.7	Illustration de mode d’acquisition “ super-short-scan ” pour reconstruire une zone d’intérêt (zone d’ombre).	121

4.8	La géométrie du scanner par rayons divergents avec un détecteur équidistance.	123
4.9	Illustration schématique de la méthode VFB. Différentes géométries virtuelles sont décrites par la ligne solide, la ligne brisée et la ligne gras. Les distances entre la source des rayons X et le centre de rotation des trois géométries virtuelles sont respectivement R_1 , R_2 et R_3 ($R_1 > R_2 > R_3$). Selon la condition suffisante 2, la zone d'intérêt maximale est la zone d'ombre A'.	125
4.10	Réarrangement des données de la géométrie originale à la géométrie virtuelle.	125
4.11	Exemples des projections tronquées aux deux extrémités. Le champ de vue (FOV) se trouve au milieu du support de l'objet <i>Omega</i> . β_1 et β_2 sont l'angle de la diagonale de A et celui d'un tangent commun du support d'objet et le champ de vue respective. Les ROIs maximales de la reconstruction stable et exacte par VFB [7] sont les zones d'ombre en bleu dans (a) $\beta_2 > \beta_1$ et (b) $\beta_2 < \beta_1$. Les trajectoire virtuelles de la source des rayons X sont en lignes gras.	126
4.12	(a) Illustration schématique de la transformée de Hilbert sur les flèches en tomographie par rayons X et (b) la géométrie divergente avec un détecteur équidistance. La ROI maximale est la zone d'ombre dans (a).	128
4.13	Reconstruction d'une ROI dans le cas de Defrise [8] (a) et d'une ROI triangulaire par la méthode VFB (b). Les ROIs maximales de la reconstruction stable et exact sont les zones d'ombre. La trajectoire virtuelle de la source des rayons X est les lignes gras dans (b).	130
4.14	Géométries des systèmes avec la trajectoire de la source de rayons sur deux cercles (a) et trois cercles (b). Dans (a), le support de l'objet (par exemple Shepp-Logan) Ω est un ellipse. Q_1 et Q_2 représentent les deux " full-scan " (360°). O_1 et O_2 sont respectivement les centres de rotation de Q_1 et Q_2 . Le support de l'objet Ω (par exemple la mâchoire) est un triangle équilatéral dans (b), dont les trois sommets sont V_0 , V_1 et V_2 . G est la gravité de le triangle. Les champs de vue sont les cercles virtuels.	131
4.15	Illustration schématique de la méthode VFB. La trajectoire virtuelle est ligne rouge solide.	132
4.16	Illustration schématique des super-short-scans sur deux cercles.	132
4.17	Illustration schématique des short-scans (a) et super-short-scans (b) sur trois cercles. Toutes les projections passant par un point quelconque M dans le domaine d'objet coupe la trajectoire de la source des rayons X ($ \Pi_0(M) + \Pi_1(M) + \Pi_2(M) = \pi$).	135
4.18	Deux fantômes : (a) Shepp-Logan modifié et étiré horizontalement (b) une mâchoire simulée.	137
4.19	Images reconstruites de Shepp-Logan modifié à partir des données sans bruit (colonne gauche) et des données bruitées (colonne droite) par la méthode itérative MC. La fenêtre d'affichage est [0.1 0.3].	139

4.20	Profils des images reconstruites sur la ligne jaune solide dans la figure 4.19.(a) à partir des données sans bruit (a) et des données bruitées (b) de différents modes d'acquisition.	140
4.21	Images reconstruites de la mâchoire simulée à partir des données sans bruit (colonne gauche) et des données bruitées (colonne droite) des différents modes d'acquisition. La fenêtre d'affichage est le [0.01 0.07].	141
4.22	Illustration schématique des projections parallèles dans le domaine d'espace et les échantillons associés dans le domaine de Fourier. Le carré virtuel est la zone des basses fréquences et le carré pointillé indique une zone des hautes fréquences.	141
4.23	(a) Classification des zones d'une image du patient : une zone homogène et moins intéressante (ellipse jaune) et des zones contrastées et plus intéressantes (mâchoire dans l'ellipse rouge) et (b) image simplifiée du patient en deux zones.	142
4.24	La zone homogène (la première ligne) et la zone contrastée (la deuxième ligne) d'image simplifié du patient et leurs transformées de Fourier.	143
4.25	Illustration d'échantillonnage des mesures d'une zone d'intérêt dépendant de la distance entre la source des rayons X et la zone d'intérêt en tomographie par rayons divergents. Les segments en gras indiquent les rayons X passant les cercles virtuels 1 et 2.	144
4.26	(a) Le fantôme 2D de bouche et (b) le log10 de la transformée de Fourier des dents et ellipses contrastes dans le rectangle rouge (a). Les lignes jaunes décrivent les profils utilisés dans la suite dans (a). Les hautes fréquences des dents et ellipses dans le rectangle rouge (voir (a)) sont plus creuses dans les zones angulaires indiquées par les flèches blanches doubles courbes qu'ailleurs dans (b).	145
4.27	Illustration schématique de sous-échantillonnage angulaire uniforme et de sous-échantillonnage angulaire variant pour réduire le nombre des projections. Le pourcentage des projections dans les zones A, B, C et D sont respectivement 150%, 60%,40% et 100% par rapport à l'échantillonnage angulaire uniforme.	145
4.28	Les images reconstruites par la méthode de moindres carrés avec régularisation ($\lambda = 100$) à partir de l'acquisition de sous-échantillonnages angulaires uniformes (229 projections) et de l'acquisition de sous-échantillonnages angulaires variants (165 projections). La fenêtre d'affichage est le [-0,01 0,05]. Les zooms d'image dans les rectangles rouges virtuels sont donnés respectivement en haut et en bas à droite sous la fenêtre d'affichage [0.03 0.05].	146
4.29	Les profils sur les lignes jaunes p1 (a) et p2 (b) dans la figure 4.26.(a).	146

4.30	Illustration schématique de sous-échantillonnage angulaire uniforme et de sous-échantillonnage angulaire variant avec le même nombre des projections pour améliorer la résolution de la zone d'intérêt (ellipse rouge). le première possède 166, 7% des projections dans la zone angulaire intéressante A, 100% des projections dans la zone B et 80% des projections dans les zones angulaires moins sensibles C par rapport au dernier.	147
4.31	Les images reconstruites par la méthode de moindres carrés avec régularisation ($\lambda = 100$) à partir des projections de " full-scan " (a), de très faible nombre des projections (92 soit un cinquième des projections de " full-scan ") (b) de sous-échantillonnages angulaires uniformes et de sous-échantillonnages angulaires variants (c). La fenêtre d'affichage est le [0,01 0,06]. Les zooms d'image dans les rectangles rouges virtuels sont donnés respectivement en haut et en bas à droite sous la fenêtre d'affichage [0.03 0.05].	147
4.32	Les profils sur les lignes jaunes p1 (a) et p2 (b) des images reconstruites (voir les figures 4.31.(a) et .(b)) dans la figure 4.26.(a).	148
5.1	Fantômes expérimentaux un guide maxillaire, la mâchoire et le crâne. . . .	150
5.2	Scanner CS 9300 (a) et schéma d'acquisition CS 9000 (b). Trois acquisitions successives Q_i sont nécessaires pour reconstruire un grand champ de vue avec CS 9000, $i=0, 1$, et 2	151
5.3	Estimation de la courbe polychromatique du métal en fonction de la longueur d'intersection des faisceaux des rayons X avec le métal par ajustement des données de moindres carrés non-linéaire (voir l'eq.3.61).	153
5.4	Images reconstruites par FBP à partir des données originales (a) et celles de correction du durcissement (b) et leurs différence (c). Les zooms (voir la rectangle virtuel rouge (a)) des images sur la première ligne sont présentées sur la deuxième ligne. La fenêtre d'affichage de (a) et (b) est le [-0,01 0,07] et celle de (c) est le [-0,01 0,01].	154
5.5	Images du crâne reconstruites par FBP à partir des données originales (a) et celles avec correction du durcissement (b) et leurs différence (c). Les zooms (voir le rectangle virtuel rouge (a)) des images sur la première ligne sont présentées sur la deuxième ligne. La fenêtre d'affichage de (a) et (b) est le [-0,01 0,07] et celle de (c) est le [-0,02 0,02].	155
5.6	Images de réduction des artefacts métalliques utilisant notre approche de correction (a), utilisant l'approche NMAR (c). Les zooms (voir le grand rectangle virtuel rouge dans la figure 5.4.(a)) des images de la colonne gauche sont présentés dans la colonne droite. Les fenêtres d'affichage de la colonne gauche et droite sont respectivement [-0,01 0,07] et [-0,01 0,09]. . .	156
5.7	Profile p1 des images reconstruites par FBP précédentes voir les figures 5.4 et 5.6. p1 est indiqué en ligne jaune dans la figure 5.4.(a).	157

5.8	Images du crâne de réduction des artefacts métalliques par BHC proposé (a) et par NMAR (c). Les zooms (voir le grand rectangle virtuel rouge dans la figure 5.5.(a)) des images de la colonne gauche sont présentés dans la colonne droite. Les fenêtres d’affichage de la colonne gauche et droite sont le [-0,01 0,07].	158
5.9	Les zooms des images de la mâchoire reconstruites par FBP et PWLS (voir les figures 5.11.(a) et.(e)) avec les données originales (en haut) et celles de correction du durcissement (en bas). La fenêtre d’affichage de toutes les images est le [-0,01 0,09].	159
5.10	Détermination de la matrice de pondération \mathbf{W} (c) dépendante de la variance des mesures Σ_ϵ^{-1} (a) et les erreurs de correction \mathbf{W}_c (b).	160
5.11	Images de la mâchoire reconstruites par PWLS avec les données originales (a), les données issues de NMAR (c) et les données de correction du durcissement (e). Leurs zooms sont donnés dans la colonne à droite. Les fenêtres d’affichages de la colonne de gauche et la colonne de droite sont respectivement le [-0,01 0,07] et [-0,01 0,09].	161
5.12	Profil p1 (voir la figure 5.4.(a)) des images de la mâchoire reconstruites par FBP et PWLS avec différentes données.	162
5.13	Images du crâne obtenu par PLWS en reconstruisant les données originales (c), les données issues de NMAR (e) et les données corrigées du durcissement par notre approche (g). Les images du crâne de référence sont présentées sur la première ligne. Leurs zooms sont donnés dans la colonne à droite. Les fenêtres d’affichages des colonne gauche et droite sont de [-0,01 0,07].	163
5.14	La distribution estimée des photons X diffusés.	164
5.15	Les images reconstruites par FBP : (a) sans correction, (b) avec correction des rayonnements diffusé (b). Les zooms des images (voir le rectangle rouge (a)) sont donnés sur la deuxième ligne : (e) est la différence entre (c) et (d) ((c)-(d)). La fenêtre d’affichage de toutes les images est [-0,01 0,07].	165
5.16	Images du crâne avec deux grosses vis métalliques reconstruites par PWLS avec les données originales (a), celles de correction du durcissement (c) et celles de NMAR (e). Leurs zooms sont donnés dans la colonne de droite.	166
5.17	Image <i>a priori</i> utilisée dans l’approche NMAR. Il y a des tissus mous qui sont vus comme de l’air cette erreur de segmentation cause des artefacts (voir les flèches rouges.)	167
5.18	Estimation de la distribution des nombres de rayons X diffusés.	168
5.19	Images reconstruites de la mâchoire par FBP à partir des données de correction du durcissement (a) et celles de correction du durcissement et du diffusé (b). Leurs zooms (voir la rectangle virtuel rouge (a)) sont présentés sur deuxième ligne. (e) est la différence entre les deux zooms (c) et (d). La fenêtre d’affichage de (a) et (b) est le [-0,01 0,07], [-0,01 0,09] pour (c) et (d) et [-0,01 0,01] pour (e).	169

5.20	Images reconstruites de la mâchoire par PWLS à partir des données de correction du durcissement (a) et celles de correction du durcissement et du diffusé (b). Leurs zooms (voir la rectangle virtuel rouge 5.19.(a)) sont présentés sur deuxième ligne. (e) est la différence de deux zooms (c) et (d). La fenêtre d'affichage de (a) et (b) est le $[-0,01 \ 0,07]$, $[-0,01 \ 0,09]$ pour (c) et (d) et $[-0,01 \ 0,01]$ pour (e).	170
5.21	Illustration schématique de notre super-short-scan Π_0 , Π_1 et Π_2 adaptés à la configuration de système de CS 90000. Les trois centres de rotation des acquisitions Q_0 , Q_1 et Q_2 sont respectivement O_0 , O_1 et O_2 . Le domaine d'objet Ω est l'ensemble des trois champ de vue en cyan.	172
5.22	Les images reconstruites du guide par MC à partir de toutes les projections de full-scan (a), de short-scan (b), de super-short-scan (c), de plus court que super-short-scan (d) et de super-short-scan plus des projections supplémentaires (e). Toutes les images sont affichées dans la fenêtre $[-0,01 \ 0,07]$	173
5.23	Les images reconstruites par l'approche FBP d'un fantôme crâne (a) et d'un patient (b) à partir des projections complètes. Les rectangles rouges indiquent des zones à mesurer dans la suite et les lignes jaunes décrivent les parcours de profils. Les fenêtres d'affichage de (a) et de (b) sont respectivement $[-0,01 \ 0,07]$ et $[-0,01 \ 0,04]$	174
5.24	La zone intéressante \mathbf{f} du crâne (voir la figure 5.23.(a)) (a) et le logarithme décimale de l'amplitude normalisée la transformée de Fourier 2D de la zone intéressante $\log_{10}(\frac{\hat{\mathbf{f}}}{\hat{\mathbf{f}}_{max}})$ (b). La fenêtre d'affichage est le $[-1,6 \ 0]$	175
5.25	Illustration schématique des modes d'acquisition d'échantillonnage angulaire uniforme (en points) et d'échantillonnage angulaire variant (en losange). Le mode de EAV est adapté à la zone intéressante dans la figure 5.24.(a).	176
5.26	Les images reconstruites itérativement en minimisant un critère des moindres carrés avec la régularisation Huber à partir de 225 projections de EAU (a) et 175 projections de EAV (b). La fenêtre d'affichage est $[-0,01 \ 0,07]$	177
5.27	Les zooms (voir la rectangle virtuel rouge dans la figure 5.23.(a)) d'image reconstruite par FBP avec les projections complètes (a) et des images PLS de 5.26.(a) et (b) respective (b) et (c). La fenêtre d'affichage est $[-0,02 \ 0,07]$	177
5.28	Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.27.(a)-(c). les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(a).	178
5.29	Les images reconstruites itérativement par PLS à partir de 75 projections de EAU (a) et de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,01 \ 0,07]$	178
5.30	Les zooms des images reconstruites itérativement par PLS à partir de 75 projections de EAU (a) et de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,02 \ 0,07]$	179
5.31	Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.30.(a) et (c). les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(a).	180

5.32	La zone intéressante \mathbf{f} d'une coupe du patient (voir la figure 5.23.(b)) (a) et le logarithme décimale de l'amplitude normalisée la transformée de Fourier 2D de la zone intéressante $\log_{10}(\frac{\hat{\mathbf{f}}}{\hat{\mathbf{f}}_{max}})$ (b). La fenêtre d'affichage est le $[-1,6 \ 0]$.	180
5.33	Les images reconstruites itérativement d'une coupe du patient par moindres carrés avec régularisation Huber PLS à partir de 225 projections de EAU (a) et 171 projections de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,01 \ 0,04]$.	181
5.34	Les zooms (voir le rectangle virtuel rouge dans la figure 5.23.(b)) d'image reconstruite par FBP avec la totalité des projections (a) et des images PLS de 5.33.(a) et .(b) respective (b) et (c). La fenêtre d'affichage est le $[0,01 \ 0,04]$.	181
5.35	Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.34.(a)-(c). les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(b).	182
5.36	Les images reconstruites itérativement d'une coupe du patient par PLS à partir de 150 projections de EAU (a) et de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,01 \ 0,04]$.	183
5.37	Les zooms (voir le rectangle virtuel rouge dans la figure 5.23.(b)) d'image reconstruite par FBP avec les projections complètes (a) et des images PLS de 5.36.(a) et .(b) respective (b) et (c). La fenêtre d'affichage est le $[0,01 \ 0,04]$.	183
5.38	Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.37.(a)-(c). Les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(b).	184

List of Tables

2.1	Complexité en temps de différentes méthodes de reconstruction tomographique pour mise à jour d'image.	58
3.1	Paramètres de l'acquisition	64
3.2	Complexité en principale opération de différentes méthodes MAR.	82
4.1	Les principaux paramètres géométriques du scanner CS9000 et des deux fantômes simulés.	138
5.1	Caractéristiques techniques important du système CS 9300 et CS 9000. . .	151
5.2	Les coordonnées relatives estimées de deux centres de rotation par rapport à celle de l'acquisition centrée (Q_0)	171
5.3	Les moyennes et écart-types calculés des images reconstruites avec les différentes modes d'acquisition dans les zones de mesure (voir la figure 5.23.(a))	176
5.4	Les moyennes et écart-types calculés des images reconstruites d'une coupe du patient avec les différentes modes d'acquisition dans les zones de mesure (voir la figure 5.23.(b))	182



Introduction de la tomographie par transmission

En dentisterie, certaines anomalies des dents ou des mâchoires sont difficilement décelables à l'oeil nu comme par exemple pour les lésions en derrière des dents postérieures. Par ailleurs, la profondeur de la carie dans une dent ne peut pas être mesurée directement, tout comme le volume de perte d'une dent.

Les chirurgiens-dentistes ont ainsi besoin d'informations complémentaires à celles obtenues par simple contrôle visuel dans le traitement des cas suivants :

- pathologies parodontales affectant les tissus de soutien des dents notamment les gencives,
- pathologies des sinus maxillaires,
- orthopédie dento-faciale suite à un malpositionnement dentaire ou à un décalage des mâchoires,
- implantologie pour le remplacement de dents absentes.

Face à ces difficultés d'observation, les techniques d'imagerie dentaire basées sur les rayons X (radiologie dentaire) se sont développés afin de voir les tissus durs, l'ossature des gencives et les dents. Les implants, les couronnes, les tenons, etc. deviennent alors visibles grâce à leur forte atténuation au rayonnement X.

La radiologie conventionnelle utilise des faisceaux de rayons X qui pénètrent les structures buccales avant de frapper un film ou un capteur. L'intégrale des coefficients d'atténuation des différents matériaux traversés par les rayons X est enregistrée dans les films radiologiques, dits " radiographie ". Nous pouvons alors visualiser les structures internes des dents et distinguer les dents et les tissus mous de soutien des dents car leurs coefficients d'atténuation sont différents.



Figure 1.1 – Image panoramique de la mâchoire.

Différentes modalités de radiologie dentaire sont présentes dans les cabinets dentaires : la radiologie inter-proximale, la radiologie périapicale, et la radiologie panoramique.

Dans les radiographies inter-proximale et périapicale, nous mettons les films dans la bouche qui captent les rayons X traversant une partie de la bouche pour former les radiographies. La radiologie inter-proximale permet de localiser une zone d'intérêt et d'observer simultanément les couronnes des dents supérieures et inférieures pour repérer les caries se trouvant dans les recoins cachés de la bouche ; la radiologie périapicale sert à obtenir une image détaillée d'un groupe de dents supérieures ou inférieures de manière à pouvoir étudier leurs racines et déceler des fractures.

Dans la radiologie panoramique la source de rayons X et le détecteur tournent autour du crâne du patient. Elle permet de visualiser l'ensemble des dents sur un même cliché et de mettre en évidence les lésions des dents et des tissus adjacents et de connaître l'emplacement des dents, la perte osseuse et l'état des gencives. La trajectoire du cliché est déterminée et la fente se déplace devant ce dernier afin d'avoir des structures nettes sur l'arcade dentaire (voir fig. 1.8). L'image panoramique comme par exemple la fig. 1.1 est dite "orthopantomogramme", car les rayons X sont orthoradiaux aux dents pour éviter le chevauchement des dents adjacentes. Suite au développement des technologies à base de semi-conducteurs, les détecteurs de rayons X solides composés de semi-conducteur ont été inventés comme les détecteurs de rayons X CCD (acronyme anglais de Charge-Coupled Device). Grâce à leur haute sensibilité aux rayons X, à leur relativement faible coût de fabrication et à la nature peu écologique par rapport aux films argentiques, les détecteurs numériques ont remplacé les films analogiques.

La radiologie conventionnelle dentaire ne donne que des images à deux dimensions sagittales possédant une imperfection inhérente à l'étalement de l'image sur la surface plane du film et dénuées de profondeur. En effet comme les structures sont intégrées dans les images sagittales, les radiographies ne permettent pas de fournir la profondeur et les mesures quantitatives de la taille d'une structure anormale parallèle au faisceau de rayons X. De plus, la radiologie panoramique est inappropriée lors d'une intervention chirurgicale importante qui nécessite un paramétrage plus précis comme la pose d'implants ou l'extraction d'une dent incluse. Nous avons donc besoin des images axiales de l'organe examiné afin de déceler les anomalies et de voir les informations précises des structures intéressantes. Dans ce cas, nous avons recours à la tomographie CT (acronyme anglais de Computed Tomography), qui consiste à reconstruire la cartographie des coefficients d'atténuation des matériaux à partir de radiographies à différentes positions angulaires.

La première image d'un patient ainsi obtenu à l'aide d'un scanner CT commercial a permis de déceler des tumeurs cérébrales [9]. La tomographie 2D permet de visualiser une coupe axiale de dento-maxillaire sans intervention chirurgicale et d'en extraire les caractéristiques des structures intéressantes, par exemple la taille des tumeurs. Mais elle ne peut pas mesurer la hauteur de la carie dans une dent et le volume d'une dent absente. La reconstruction tomographique tridimensionnelle peut répondre à ces demandes.

Pour la reconstruction 3D, nous pouvons utiliser les scanners CT conventionnels avec un détecteur possédant un capteur mono-dimensionnel ou bien des scanners hélicoïdaux avec des détecteurs multi-lignes (voir la figure 1.5). Le patient se couche sur un lit. Le lit se déplace en translation, en même temps, la paire source-détecteur tourne autour du patient. Il y a beaucoup d'inconvénients avec l'utilisation des scanners conventionnels ou des scanners hélicoïdaux. Premièrement, ils sont chers. Un scanner conventionnel coûte au moins 400,000 euros. Deuxièmement, ils sont très encombrants et suivent une réglementation très encadrée en France. C'est pourquoi, il n'existe de scanners CT conventionnels ou hélicoïdaux uniquement dans les centres de radiologie ou les grands hôpitaux. Ce qui rend impossible du coup, leurs mises à disposition pour les examens dentaires courants.

Au début des années 90, le développement des détecteurs à semi-conducteur ont permis de construire un scanner plus modeste pouvant s'installer dans un cabinet dentaire et permettant de faire de la tomographie 3D. Les détecteurs plats numériques sont tout d'abord apparus permettant aux fabricants de tomographes panoramiques de remplacer le film radio-sensible. En adaptant les appareils et en utilisant ces détecteurs numériques, on peut obtenir une reconstruction 3D de la mâchoire avec un équipement d'un coût abordable pour un cabinet dentaire. Le prix d'un scanner dentaire numérique varie actuellement de 40,000 à 120,000 euros sur le marché des scanners dentaires. L'encombrement de ces scanners est moindre que celui des scanners conventionnels ou hélicoïdaux, permettant ainsi une installation dans les cabinets dentaires. La taille des détecteurs plats numériques a augmenté avec le développement des semi-conducteurs, et a ainsi permis de couvrir le crâne entier avec ces détecteurs. Les faisceaux de rayons X partant de la source ponctuelle vers le plan de détecteurs numérique dessine un cône. C'est pourquoi ces scanners sont appelés CBCT (acronyme anglais de Cone-Beam CT) c'est à dire tomographie à faisceaux de rayons X coniques. La trajectoire de la paire source-détecteur est simplement circulaire, ce qui permet une acquisition plus rapide que celle des scanners conventionnels.

Les principaux avantages du CBCT est de permettre de visualiser à haute résolution spatiale la mâchoire ou les structures dento-maxillaires en 3D et d'apporter des mesures de la quantité osseuse ou de taille volumique de perte dans une dent (facilitant ainsi le choix des implants dentaires adaptés au patient). Par ailleurs, cette technique nous permet de limiter la zone irradiée selon la région d'intérêt avec un collimateur, dans le cas contraire, tout le crâne est exposé aux irradiations comme c'est le cas avec les scanners conventionnels.

Malheureusement, la reconstruction 3D de la mâchoire est une des parties du corps les plus difficiles à acquérir. En effet, il n'est pas rare que les patients possèdent dans la bouche des objets métalliques, par exemple des amalgames, des implants dentaires métalliques, des couronnes métalliques, etc. Les parties métalliques sont très denses et absorbent plus de rayons X que les tissus humains. Les faisceaux des rayons X passant

par ces parties métalliques sont très atténués, donc peu de photons X sont captés par le détecteur. Du fait du faible nombre de photons, il y a une grande sensibilité au bruit de mesure. De plus, les approches classiques de reconstruction tomographique comme FBP (acronyme anglais, Filtered BackProjection) font les hypothèses suivantes : la source de rayons X est monochromatique et il n'y a pas de phénomènes de diffusion dans l'objet. Malheureusement, en pratique ce n'est pas le cas. Or les objets métalliques étant très contrastés, de petites erreurs de modélisation entraînent des artefacts appelés " artefacts métalliques " (AM) qui ont la particularité de contaminer des zones relativement éloignées de leurs sources.

Les hypothèses faites dans les méthodes FBP sont que les faisceaux de rayons X sont monochromatiques, et qu'il n'y a pas de photons X diffusés détectés. L'incohérence entre les hypothèses de FBP et la réalité est très forte dans le cas de présence de métal, ce qui se manifeste par des artefacts visibles de type raies noires et blanches ou tâches noires dans les images reconstruites par FBP. Les causes physiques principales sont le durcissement, le diffusé, le bruit et les effets de bord exponentiels, résumé dans [10]. Les effets de bords exponentiels sont non-linéaires et sont dus à l'intégration de la loi exponentielle d'atténuation des rayons X avec la largeur finie du rayonnement dans le plan traverse des rayons X. Ils peuvent être diminués en réduisant la taille des cellules du détecteur [11]. Le mouvement du patient est aussi une source importante des artefacts métalliques [10] et [12]. Mais, cela peut être évité à l'aide d'un support fixé. Nous nous concentrons donc uniquement sur la réduction des artefacts métalliques dus au durcissement, au diffusé et au bruit.

Une autre préoccupation très importante, c'est que lorsque l'on fait un examen radiologique, on est exposé à un rayonnement ionisant. La sur-exposition à ce rayonnement augmente le risque de cancer. En plus, les femmes et les enfants sont plus sensibles à ces rayonnements ce qui nécessite une meilleure protection. On cherche donc au maximum à réduire la dose de rayons X pour obtenir les images 3D. La dose de radiation déposée au patient peut être diminuée en réduisant le temps d'acquisition ou la puissance de la source de rayons X (nombre de photons ou énergie émise). On peut réduire le nombre de projections afin d'acquérir des données plus rapidement. On peut également abaisser le courant et la tension du générateur pour diminuer le nombre et l'énergie des photons X émis par la source respectivement, dans ce cas là, les mesures de détecteur sont bruitées. Les méthodes FBP sont sensibles au nombre de projections et au bruit des mesures. Les images reconstruites par FBP sont donc très bruitées et ne peuvent pas fournir l'information pour le diagnostique.

Mon travail de thèse dans ce contexte vise à développer de nouveaux algorithmes de reconstruction tomographique pour réduire les artefacts métalliques, tout en réduisant la dose de radiation sans compromettre la qualité d'image reconstruite. Ma thèse s'est déroulée dans le cadre d'une collaboration entre Trophy, Carestream dental, et le Groupe des Problèmes Inverses (GPI), au sein du laboratoire des signaux et systèmes (L2S). Nous avons développé de nouveaux algorithmes de reconstruction tomographique dans le cadre des méthodes bayésiennes, ce qui permet d'intégrer des modèles liés à l'acquisition et des informations *a priori* dans la reconstruction itérative. Les modèles liés à l'acquisition concernent le spectre polychromatique des rayons X et le diffusé de Compton. Les informations *a priori* sont souvent utiles pour compenser les informations absentes, par exemple, le nombre des matériaux.

Mon mémoire est organisé en 6 chapitres. L'introduction générale de la tomographie par transmission et la physique essentielle de l'imagerie médicale sont présentées dans la suite du premier chapitre. Nous exposons les méthode de reconstruction tomographique dans le deuxième chapitre. Les méthodes de réduction des artefacts métalliques sont introduites dans le troisième chapitre. Nous parlons des méthodes de reconstruction avec de faibles doses de radiation dans le quatrième chapitre. Le cinquième chapitre est consacré à l'évaluation des méthodes proposées sur les données expérimentales. Pour terminer, les conclusions et les perspectives à notre travail sont présentées.

I.1 Chaîne de mesure

I.1.1 Bref historique de l'imagerie médicale à base de rayons X

Les rayons X ont été découverts par le physicien autrichien Wilhelm Röntgen en 1895, qui a fait la première radiographie médicale des doigts de sa femme. Depuis lors, grâce à la capacité de pénétration des rayons X dans la matière, on s'en sert pour visualiser la structure interne d'un objet sans le détruire. Dans les années 1970, suite à l'avancement des techniques de micro-électronique, G. N. Hounsfield a inventé le premier scanner CT commercial à rayons X en imagerie médicale chez EMI. Cette invention lui a valu le Prix Nobel avec A. M. Cormack en 1979. De nos jours, le CT est devenu une des principales techniques de diagnostic dans le domaine de l'imagerie médicale.

Le système de scanner de rayons X comprend deux entités : le générateur de rayons X et le détecteur de rayons X (voir la figure 1.2).

I.1.1.1 Le générateur de rayons X

Dans le générateur, il y a 3 composantes principales, un générateur de rayons X, un collimateur et un filtre. Le générateur de rayons X contient une cathode, qui fournit les électrons et une anode comme une cible des électrons. La tension entre la cathode et l'anode doit être suffisamment forte pour générer un champ électrique, où les électrons sont accélérés. Les électrons frappent alors l'anode (souvent en tungstène) à grande vitesse. Il en résulte une production de chaleur (environ 99%) et l'émission de photons X. Les deux principaux mécanismes associés à la générations de rayons X sont décrits ci-dessous :

Spectre Bremsstrahlung : une partie des électrons est ralentie et est déviée par l'attraction du noyau atomique de la cible. La perte d'énergie cinétique des électrons se transforme en énergie des photons de rayons X, dont le spectre est continu (voir la figure 1.3). Ce phénomène s'appelle " Bremsstrahlung ", ce qui signifie en Allemand " rayonnement de freinage ".

Spectre de radiation caractéristique : lorsqu'un électron incident, dont l'énergie dépasse l'énergie d'excitation d'un électron sur la couche inférieure de l'atome de la cible, heurte ce dernier, il dévie de sa trajectoire originale et un électron de la couche supérieure, moins stable, prend la place manquante. Dans ce cas, un photon X est

I.1.1 - Bref historique de l'imagerie médicale à base de rayons X

créé par dé-excitation (voir les pics dans la figure 1.3). Alors l'énergie des photons de rayons X est dépendante du numéro atomique de l'anode, ce qui est nommée, "radiation caractéristique".

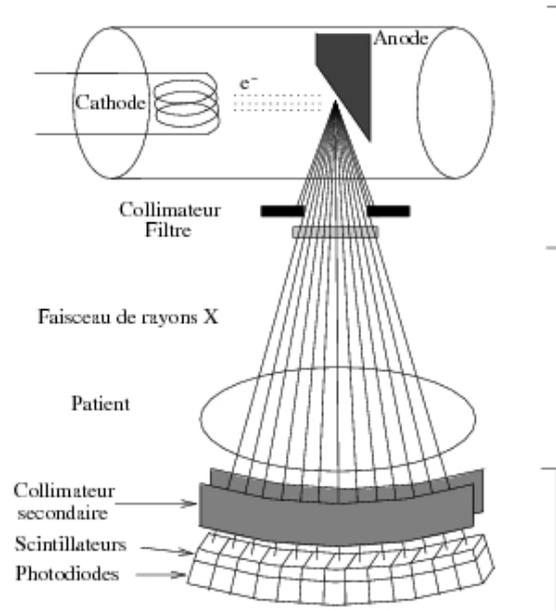


Figure 1.2 – Chaîne du système du scanner à rayons X (extrait de [1]).

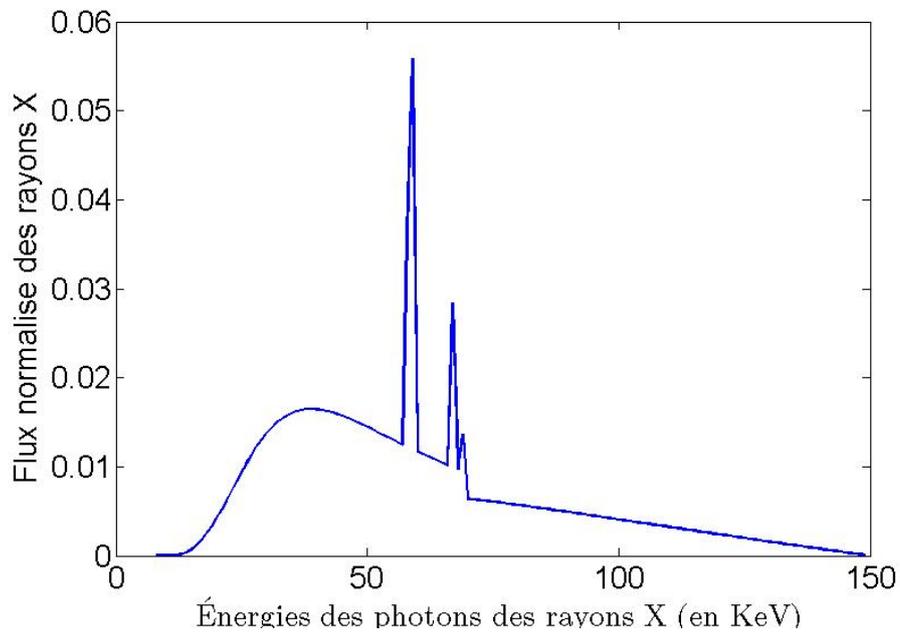


Figure 1.3 – Spectre d'un scanner avec la tension maximale de générateur des rayons X (KvP, acronyme anglais de Kilovoltage Peak) 150 kV. Les pics représentent la radiation caractéristique.

Dans le processus de génération du flux des rayons X, la tension électrique entre la cathode et l'anode détermine le maximum d'énergie des rayons X et le nombre de flux des rayons X est contrôlé par le courant dans la cathode.

En plus, un collimateur permet de faire varier la taille de faisceaux des rayons X et de limiter la zone d'irradiation. Afin d'éviter l'effet d'étalement spatial de la source de rayons X, la taille de la fenêtre du collimateur doit être optimisée. L'ajout d'un filtre en métal (généralement en aluminium ou cuivre) permet de réduire l'étalement du spectre des rayons X. En effet, le filtre élimine les photons X de très faible énergie qui sont peu exploitable en imagerie médicale, qui permet un pré-durcissement du faisceau. Il diminue le durcissement pendant la traversée du patient. Enfin, on peut ajouter un filtre afin de rendre la source des rayons X d'énergie plus élevée.

I.1.1.2 Le détecteur de rayons X

Dans les scanners, le détecteur de rayons X sert à mesurer les rayons X traversant l'objet. Il y a deux types de détecteurs de rayons X selon la technologie de détection : le détecteur indirect de rayons X et le détecteur direct de rayons X. Le détecteur indirect de rayons X se compose principalement d'un scintillateur, d'une photo-diode ou un CCD. Le scintillateur contient un cristal fluorescent de matériau spécial, par exemple NaI (iodure de sodium), permettant d'émettre des photons visibles lorsqu'il absorbe un photon X. Les rayons X sont convertis en lumière visible par le scintillateur, dont l'intensité est proportionnelle à l'intensité des rayons X. Puis les photons de la lumière visible sont transformés en signal électrique par la photo-diode ou le CCD pour former une image numérique. Les détecteurs directs de rayons X sont basés sur les matériaux de semi-conducteur, par exemple CdTe (tellure de cadmium). Les photons X sont convertis directement vers les paires électron-trou dans les détecteurs de semi-conducteur et sont collectés pour former un signal numérique.

En général, les détecteurs indirects de rayons X possèdent un intervalle de détection d'énergie large et bonne efficacité de détection. Les détecteurs plats numériques indirects sont couramment utilisés dans les CBCT en imagerie médicale. Au contraire, les détecteurs directs de rayons X sont meilleurs sur la sélection d'énergie des photons X et la résolution spatiale [13].

I.1.1.3 Différents types de scanners

Différents types de scanners à rayons X ont été développés depuis les années 1970. Les scanners CT de la première génération sont constitués d'une source de rayons X et d'un détecteur. Ils nécessitent de la translation et puis la rotation de la paire source-détecteur pour reconstruire une coupe de l'objet, voir la figure 1.4.(a). Les faisceaux de rayons X sont parallèles dans ces scanners. Le temps de scan par coupe est très important, 4,5 minutes/coupe dans le premier scanner CT, à cause des mouvements complexes de translation et rotation de la paire source-détecteur, et également du très faible nombre des cellules de détecteur (une seule cellule). Ils sont remplacées par les scanners de troisième génération en imagerie médicale, qui n'ont besoin que de rotation, voir la figure 1.4.(b). Ces scanners sont composés d'une source de rayons X et d'un grand nombre de cellules de détecteur (plus de 800 cellules de détecteur), dont la trajectoire de la paire source-détecteur est circulaire [2]. Ils permettent une acquisition beaucoup plus rapide, en entre 0,3 et 0,5 secondes par coupe. Une autre différence avec les scanners de la première génération est que les faisceaux de rayons X sont divergents.

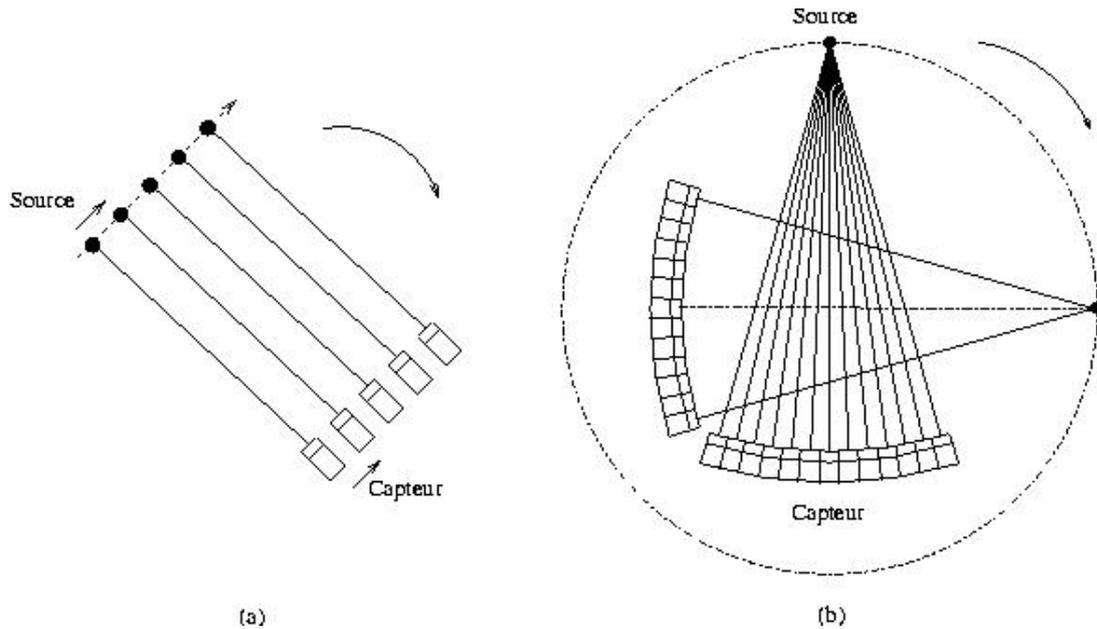


Figure 1.4 – Illustration des géométries du scanner des rayons X parallèles (a) et du scanner des rayons X divergents (b).

En tomographie, une reconstruction tridimensionnelle est considérée comme un empilement de coupes 2D. Elle consiste à reconstruire l'ensemble des images 2D. Les premiers scanners de reconstruction 3D sont des scanners conventionnels avec détecteur d'une coupe. La coupe irradiée du patient se déplace en fonction de la translation du lit où le patient se couche. Afin d'éviter l'inconsistance des données, le lit ne bouge pas lors de la rotation de scanner conventionnel. Par conséquent, le temps d'acquisition 3D est très important. Nous pouvons accélérer l'acquisition 3D en remplaçant le détecteur avec une seule ligne de détection par un détecteur multi-lignes. Mais le temps d'acquisition est encore limité par les mouvements séquentiels de la translation du lit du patient et la rotation de scanner. Pour une acquisition 3D plus rapide, les scanners modernes tournent lors de la translation continue du lit du patient. La trajectoire de la paire source-détecteur est hélicoïdale par rapport au patient, voir la figure 1.5.(a). Les données ne sont pas cohérentes car le plan irradié change lors d'un tour de la paire de source-détecteur. Alors, il nécessite des algorithmes d'interpolation pour réarranger les données dans le plan transverse comme les scanners conventionnels. Les scanners hélicoïdaux avec un détecteur d'une ou plusieurs lignes sont commercialisés depuis des décennies. Le temps d'acquisition 3D diminue avec le nombre de coupes, mais le coût de scanner augmente. En plus, la résolution spatiale s'améliore avec le nombre de coupes. Un compromis entre le coût, le temps d'acquisition et la résolution spatiale doit être fait pour sélectionner un scanner hélicoïdal en fonction du type d'application.

En imagerie dentaire, nous nous intéressons seulement à la mâchoire ou au crâne. Pour cela, un scanner CBCT avec le détecteur plat numérique suffit, 1.5.(b). La trajectoire de la paire source-détecteur est simplement circulaire. Le temps d'acquisition d'un scanner CBCT est comparable avec celui de scanner hélicoïdal avec détecteur multi-ligne. Mais le coût d'un scanner CBCT est beaucoup plus faible que celui d'un scanner hélicoïdal, et reste ainsi abordable pour les dentistes. Par ailleurs, les scanners CBCT sont plus compacts que les scanners hélicoïdaux, qui conviennent mieux pour une installation dans les cabinets des dentistes. Les scanners CBCT sont donc largement utilisés dans les

cabinets des dentistes aujourd'hui.

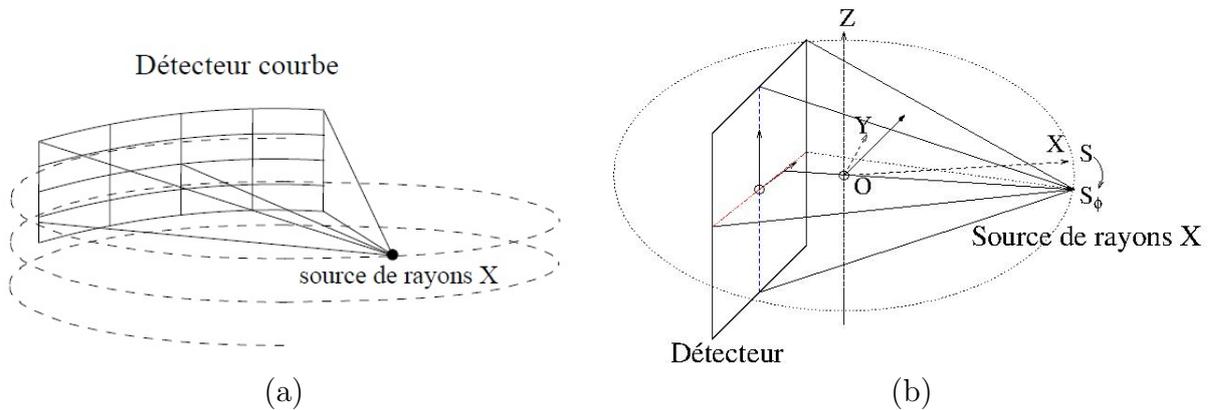


Figure 1.5 – Schéma du scanner de CT hélicoïdal avec le détecteur multi-ligne (a) (extrait de [1]) et du scanner CBCT (b).

Les autres types de scanners sont intéressants en imagerie médicale, notamment les scanners de tomosynthèse numérique et les scanners panoramiques.

La tomosynthèse numérique a un angle de projection limité sur un arc (par exemple 15° - 60°), ce qui est différent avec la CT (balayage sur un demi-tour ou tour entier), voir la figure 1.6. Un faible nombre des projections discrètes de scanner sont acquises. Cela dépend de type d'application et de la sensibilité à la dose de radiation. Les projections de la tomosynthèse sont incomplètes par rapport à la CT. Avec les projections de différents angles de la source, les coupes des différents niveaux sont reconstruites par la méthode " shift and add ", [2]. Dans la figure 1.6, les plans 1 et 3 peuvent être reconstruits en sommant les images décalées, par contre, la reconstruction du plan de focalisation 2 est simplement la somme de toutes les images. Clairement, la somme des différentes images sont floue, des algorithmes de déconvolution sont nécessaires pour améliorer le contraste des images. Nous pouvons aussi reconstruire les images 3D avec des méthodes de reconstruction tomographique en CT, notamment en utilisant les méthodes itératives (voir la section II.3 de chapitre II), qui sont moins sensibles au nombre de projections. L'application majeure de la tomosynthèse numérique est l'imagerie du sein. La mammographie conventionnelle et la mammographie numérique sont les techniques d'imagerie 2D utilisées couramment en imagerie du sein, mais elles ne peuvent pas détecter les tumeurs cachées dans les tissus chevauchés ou dans le cas contraire, se trompent sur une détection d'une tumeur dans les tissus intégrés. La tomosynthèse numérique permet une reconstruction 3D qui ne subit pas de chevauchement des tissus et augmente le taux de réussite de détections des tumeurs, avec l'utilisation d'un peu plus de dose que la mammographie. Elle peut être également appliquée en imagerie dentaire.

En imagerie dentaire, l'imagerie panoramique dentaire permet aux dentistes de connaître l'emplacement des toutes les dents sur une seule image. Comme la tomosynthèse, le plan de focalisation peut être visualisé clairement dans le film, mais le plan au dessus ou dessous est flou à cause du mouvement de sa projection en fonction de déplacement de la source, voir la figure 1.7. Afin de voir clairement toutes les dents, nous pouvons focaliser les images directement sur l'arcade des dents en déplaçant la paire source-détecteur, voir la figure 1.8.

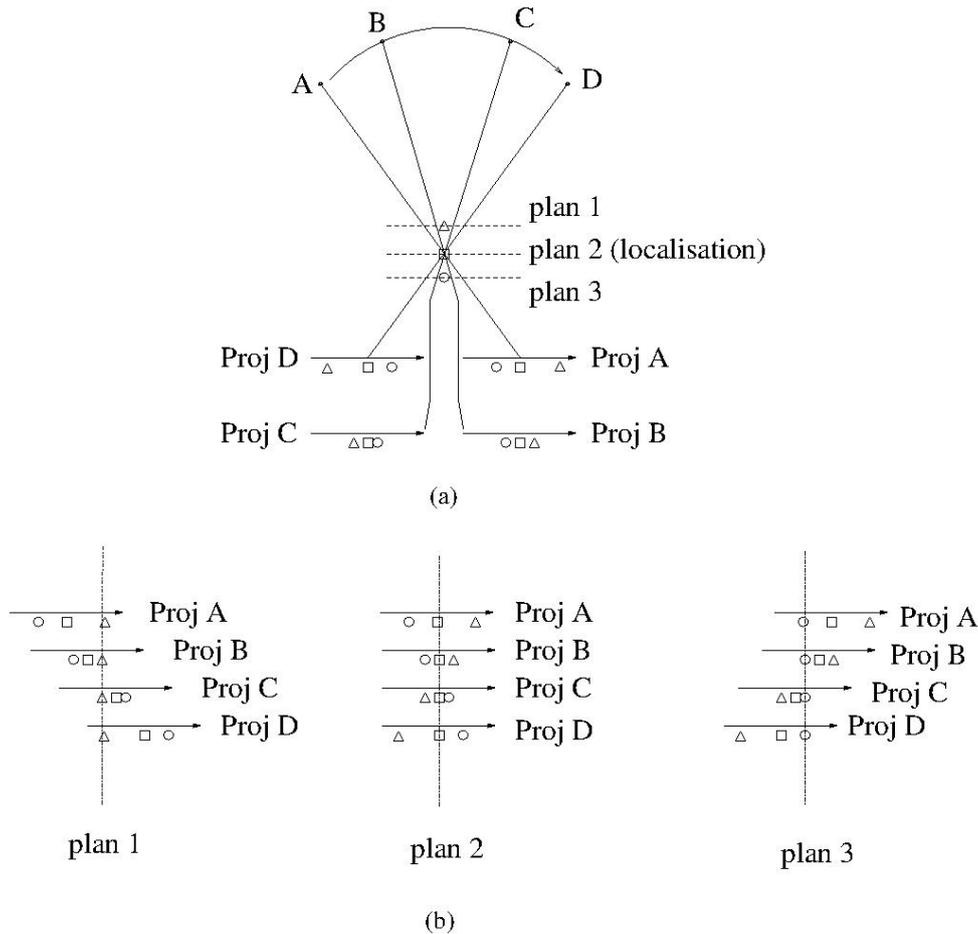


Figure 1.6 – Illustration schématique de la tomosynthèse (a) et de la reconstruction des plans de différentes profondeurs par l’algorithme de “ shift and add ” (b). (a). Les plans de différentes profondeurs (plans 1, 2, et 3) sont représentés respectivement par un triangle, un carré, et un cercle. Le plan 2 est le plan de focalisation du milieu. Nous expliquons les reconstructions des plans de différentes profondeurs avec quatre positions angulaires A, B, C, D. (b). Les coupes 2D peuvent être reconstruites par l’algorithme de “ shift and add ”, le plan 1 est reconstruit par décalage des projections B-D de droite à gauche et la somme des quatre projections, au contraire, le plan 3 est obtenu par la somme de la projection A et des projections B-D décalées de droite à gauche. La figure est extraite de [2].

I.2 Approches classiques FBP

La tomographie par transmission consiste à reconstruire la cartographie des caractéristiques d’atténuation des matériaux contenus dans l’objet inconnu. L’atténuation d’un matériau est décrite par le coefficient d’atténuation linéaire (CAL). Le CAL est défini par la diminution de l’intensité des rayons X par unité de longueur sur l’intensité des rayons X incidents, voir dans la figure 1.9.

$$\mu = -\frac{dI}{I dr} \tag{1.1}$$

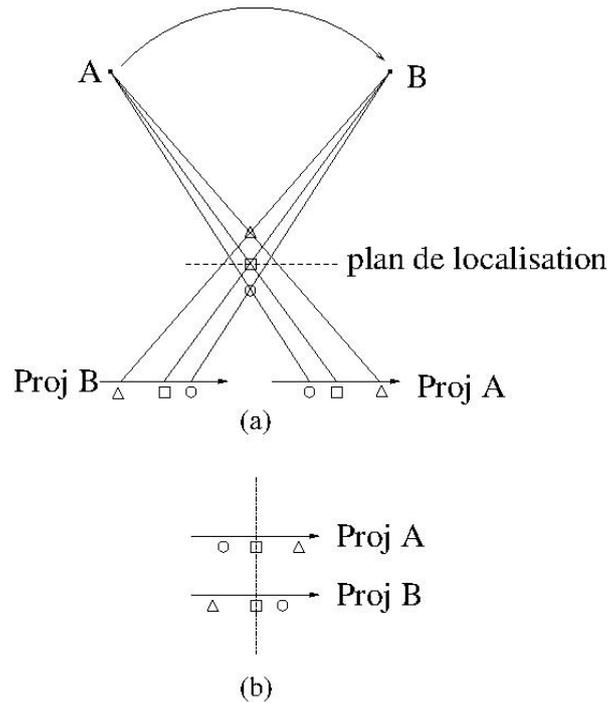


Figure 1.7 – Illustration du principe de la tomographie panoramique. (a) Les plans de différentes profondeurs (plan 1, 2 et 3) sont décrits respectivement par un triangle, un carré et un cercle, et le plan 2 est plan de focalisation. (b) Le triangle se déplace de droite à gauche lorsque la source des rayons X tourne de A à B et en sens inverse pour le cercle. La position du carré est fixée entre l'angle A et l'angle B de la source des rayons X. Si nous ajoutons les projections A et B, le carré est net, par contre, le triangle et le cercle deviennent flous. La figure est extraite de [2].

où I est l'intensité des rayons X incidents, dr est l'épaisseur fini d'un matériau. Le CAL s'exprime généralement en cm^{-1} .

Les approches classiques de reconstruction tomographique de type FBP sont couramment utilisées dans les scanners CT modernes en imagerie médicale et dans le monde industriel. Les méthodes FBP sont basées sur les hypothèses suivantes :

- $H_{1,1}$: Les rayons X passant par l'objet inconnu sont monochromatiques.
- $H_{1,2}$: Il n'y a pas de rayons X diffusés captés par le détecteur.
- $H_{1,3}$: Le bruit des données est i.i.d (anonyme anglaise, independent, identical distribution), après pré-traitement des mesures du détecteur par l'opposé de log.

L'hypothèse $H_{1,1}$ signifie qu'il existe des rayons X d'une seule longueur d'onde. Et l'hypothèse $H_{1,2}$ indique que tous les photons X reçus par le détecteur passent par l'objet sur la trajectoire rectiligne source-détecteur. Autrement dit, il n'y a pas de photons X diffusés, cela signifie que tous les photons X diffusés sont absorbés, que le détecteur est infiniment éloigné de l'objet inconnu, ou alors que tous les photons X s'enfuient du détecteur. Les hypothèses $H_{1,1}$ et $H_{1,2}$ permettent de décrire le processus d'acquisition par la loi Beer-Lambert (voir l'eq.1.2). L'hypothèse $H_{1,3}$ suppose que le bruit du détecteur est

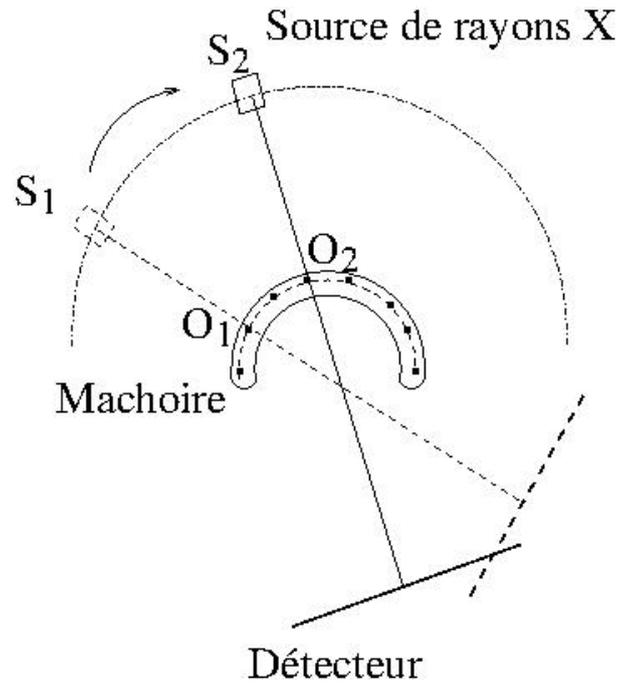


Figure 1.8 – Illustration schématique de la tomographie panoramique dentaire. la focalisation se fait maintenant sur l'arcade des dents dans la mâchoire. Lorsque la source des rayons X tourne sur l'arc parallèle à l'arcade de la mâchoire, le détecteur se déplace dans le sens inverse.

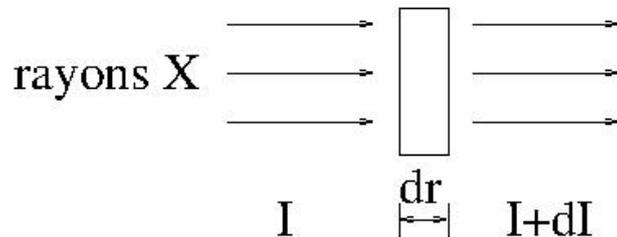


Figure 1.9 – Définition de coefficient d'atténuation linéaire μ .

multiplicatif, i.i.d, et que les rayons X peuvent toujours traverser l'objet inconnu. Basées sur les hypothèses précédentes, nous pouvons établir un modèle simple lié à l'acquisition.

I.2.1 Modèle simple lié à l'acquisition

D'après la définition de CAL (eq.1.1), sous les hypothèses de $H_{1.1}$ et $H_{1.2}$, nous pouvons en déduire de la loi de Beer-Lambert, ci-dessous :

$$I_L = I_0 e^{-\int_L \mu(\mathbf{r}, E_0) d\mathbf{r}} \quad (1.2)$$

où I_0 est l'intensité originale du faisceau des rayons X d'entrée, L est la trajectoire rectiligne du faisceau de rayons X, \mathbf{r} est la coordonnée spatiale de l'objet inconnu, et E_0 représente l'énergie des photons X déterminée par leur longueur d'onde selon l'équation

suivante :

$$E = \frac{hc}{\lambda_{lo}} \quad (1.3)$$

où h est la constante de Planck ($h = 6,6261 \times 10^{-20} Js$), c est la vitesse de la lumière ($c = 3,0 \times 10^8 m/s$) et λ_{lo} est la longueur d'onde des rayons X, exprimée en Ångström ($10^{-10} m$). Typiquement, les énergies des rayons X utilisés dans la radiologie de diagnostic sont comprises entre 30 KeV et 150 KeV avec $1KeV = 1,602 \times 10^{-16} J$.

L'intensité I_L du faisceau des rayons X monochromatiques transmis diminue exponentiellement en fonction de l'intégrale du coefficient d'atténuation du matériau sur la trajectoire rectiligne des rayons X. En mathématique, cette intégrale sur la trajectoire rectiligne est la transformée de Radon (\mathcal{R}) [14], qui est détaillée dans la première section du chapitre II.

$$\int_L \mu(\mathbf{r}, E_0) d\mathbf{r} = \mathcal{R}\mu_L(E_0) \quad (1.4)$$

Si nous traitons les données des mesures du détecteur par l'opposé de log, nous obtenons la relation linéaire entre les CAL des matériaux et les données logarithmiques. Ce pré-traitement des données correspond à une " linéarisation des données " . Il est appliqué avant la reconstruction standard par FBP dans les scanners modernes. Les données logarithmiques représentent l'atténuation des rayons X g sur une trajectoire rectiligne donnée, comme g_L ci-dessous.

$$g_L = -\log \frac{I_L}{I_0} = \mathcal{R}\mu_L(E_0) \quad (1.5)$$

I.2.2 Inversion de la transformée de Radon par FBP

Nous pouvons estimer le CAL μ par inversion de la transformée de Radon. En mathématique, il existe des formules d'inversion de la transformée de Radon, correspondantes aux méthodes de rétro-projections filtrées.

Soit le vecteur d'objet inconnu $\mathbf{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ où \mathcal{S} est l'espace de Schwartz et n est la dimension d'objet, \mathbf{f} est le vecteur de CAL, $\mathcal{R}\mathbf{f}$ est la transformée de Radon de \mathbf{f} qui est acquise avec les scanners par rayons X parallèles (voir l'eq. 1.5). \mathbf{f} est estimé par la formule d'inversion de la transformée de Radon suivante :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathcal{R}^\# \mathbf{I}_R^{1-n} \mathcal{R}\mathbf{f} \quad (1.6)$$

où $\mathcal{R}^\#$ est l'opérateur de rétro-projection qui est opérateur dual de l'opérateur de projection \mathcal{R} associé à la transformée de Radon.

$$\mathcal{R}^\# g = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(\boldsymbol{\delta}) d\boldsymbol{\delta} \quad (1.7)$$

avec $\boldsymbol{\delta}$, le vecteur de position angulaire associé à la trajectoire rectiligne des rayons X et \mathbf{I}_R , l'opérateur de filtrage qui est défini comme ci-dessous :

$$\mathbf{I}_R^k g = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathcal{R}^n} |\boldsymbol{\rho}|^{1-n} \hat{g}(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{x}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} \quad (1.8)$$

1.2.2 - Inversion de la transformée de Radon par FBP

avec \hat{g} la transformée de Fourier de g . La démonstration de la formule de l'inversion de la transformée de Radon (eq.1.6) est détaillée dans [1], page 29.

Les approches classiques de reconstruction tomographique FBP sont basées sur l'inversion analytique de la transformée de Radon (eq.1.6). La reconstruction par FBP est rapide mais elle est sensible au bruit, car les FBPs utilisent le filtre rampe $|\rho|^{1-n}$ qui est un filtre passe-haut. Or le bruit est présent dans toutes les fréquences et notamment dans les hautes fréquences, celui-ci est amplifié par ce filtre rampe lors de la reconstruction. Par ailleurs, les hypothèses faites dans les FBPs ne respectent pas la réalité. En fait, les rayons X incidents dans l'objet ne sont pas monochromatiques. Le spectre de source des rayons X est polychromatique dans les scanners commerciaux. L'étalement de spectre est souvent réduit par un filtre en métal (aluminium ou cuivre) placé derrière la source des rayons dans les scanners, mais les rayons X ne peuvent pas être considérés monochromatiques. Les CALs des matériaux sont également dépendants de l'énergie des photons X. Par conséquent, des artefacts liés au spectre des rayons X apparaissent dans les images reconstruites par FBPs, notamment avec la présence de matériaux très denses dans l'objet, par exemple le métal.

Autre phénomène physique non pris en compte dans les méthodes FBP, les photons X diffusent lors de l'interaction avec les atomes de matériaux rencontrés. Une part des photons X diffusés est alors captée par le détecteur. Cette proportion dépend de la distance entre l'objet et le détecteur mais également des matériaux et de la taille de l'objet. Cela n'étant pas intégré dans les méthodes FBPs, des artefacts peuvent alors apparaître dans les images reconstruites. En outre, l'hypothèse $H_{1.3}$ du FBP n'est pas justifiée dans le cas de la présence de métal, où les faisceaux des rayons X peuvent être absorbés complètement par le métal. Très peu de photons X sont reçus par les cellules du détecteur masquées par le métal. Après linéarisation des mesures par logarithme négatif (voir l'équation 1.5), les atténuations sur les trajectoires rectilignes passant par le métal deviennent infinies ($\ln \frac{1}{0} \rightarrow \infty$). Le bruit des mesures associés au métal est amplifié par rapport au bruit des autres mesures après la linéarisation des mesures, voir la figure 1.13.

Pour comprendre ces artefacts, nous introduisons dans la suite la physique de l'interaction entre les photons X et les atomes des matériaux.

1.3 Principes physiques de la tomographie par transmission

Lors d'une acquisition avec un scanner à rayons X, l'intensité du faisceau de rayons X émis par la source est atténuée par les matériaux de l'objet. Le faisceau de rayons X traversant l'objet est capté par le détecteur au côté opposé de la source de rayons X. Les informations d'atténuation des matériaux de l'objet sont contenues dans les données du détecteur. Les approches classiques FBP permettent de reconstruire la cartographie des CAL des matériaux de l'objet. Mais les hypothèses faites dans les FBPs ne sont pas convenables dans la pratique, notamment avec les matériaux très denses, comme le métal, qui provoquent des artefacts dans les images reconstruites. Afin de comprendre la formation de ces artefacts, nous présentons l'interaction des rayons X avec la matière et les principes mathématiques y correspondant.

I.3.1 Interaction des rayons X avec la matière

L'atténuation n'est pas une grandeur physique, elle est la combinaison de plusieurs phénomènes. Dans la radiologie par rayons X, il y a quatre processus physiques décrivant les interactions des photons de rayons X avec la matière :

Absorption photo-électrique

un photon X heurte un électron de la couche interne d'un atome du matériau, l'électron excité sort dans la même direction que le mouvement du photon. Toute l'énergie du photon est transformée vers l'électron qui ionise son atome et les autres atomes sur la trajectoire de mouvement. ce phénomène est l'absorption photo-électrique. L'énergie cinétique de cet électron (E_c) est la différence de l'énergie du photon X (E_p) et l'énergie d'excitation de l'électron (E_0).

$$E_c = E_p - E_0. \quad (1.9)$$

L'énergie du photon X incident doit être supérieure à celle d'excitation de l'électron pour libérer des électrons.

Diffusé Compton

un photon peut aussi heurter un électron de la couche externe. Dans ce cas là, seulement une partie de son énergie est transférée vers cet électron. Ce dernier et le photon diffusé dévient alors leur trajectoire d'un certain angle par rapport à celle du photon incident. L'angle de direction de l'électron et celui du photon diffusé sont déterminées par la loi de conservation de l'énergie et du moment.

Diffusé de Rayleigh

le diffusé de Rayleigh est plus probable dans les rayons X de faible énergie. Un photon X incident de faible énergie interagit et excite l'atome en entier, l'ensemble des électrons de l'atome oscille en phase, et irradie leurs énergies immédiatement par émission d'un photon secondaire dans une direction peu déviée. Durant cette interaction, aucun électron chargé est libéré. Il n'y a donc pas d'ionisation. Dans l'intervalle d'énergie de la radiologie de diagnostic médicale, la probabilité du diffusé de Rayleigh est très faible. Par exemple, le diffusé de Rayleigh dans le tissu mou compte moins de 5% d'interactions de rayons X au delà de 70 keV et seulement 12% au plus au delà de 30 keV [2].

Production de paire

un photon X de très haute énergie ($\geq 1,022\text{MeV}$) frappe le noyau d'un atome, son énergie est transformée en un couple électron-positon, dont les énergies masse sont 0,511 MeV, selon l'équation fameuse de Einstein $E = mc^2$ (avec m la masse d'un électron et c la vitesse de la lumière). Le reste de l'énergie du photon X (moins 1.022 MeV) est convertie en énergies cinétiques pour l'électron et le positon. Le positon combine avec un électron, il en résulte une annihilation. Durant cette annihilation, deux photons d'énergie 0,511 MeV apparaissent dans les directions opposées de l'un et de l'autre. La production de paire apparaît seulement avec les rayons X de très haute énergies. Dans la radiologie de diagnostic médicale, il n'y a pas de production de paire.

I.3.2 - Modèles physiques liés à l'acquisition

Le diffusé de Rayleigh est peu probable et négligeable, dans la radiologie de diagnostique médicale (de 30 KeV à 150 KeV), et la contribution de diffusé de Rayleigh au CAL est vue dans la figure 1.10 pour les matériaux courants humains et les métaux (aluminium et titane). L'absorption photo-électrique et le diffusé Compton sont les interactions principales des rayons X avec la matière. La probabilité du premier est proportionnelle à Z^3/E^3 , où Z est le numéro atomique de la matière ou équivalent pour la matière mélangée, et E décrit l'énergie des photons X. L'absorption photo-électrique des matériaux à fort numéro atomique comme l'aluminium ($Z=13$) est plus forte que celle des matériaux à numéro atomique faible comme les tissus mous ($Z=7$). Le diffusé Compton est quant à lui dépendant de la densité des électrons. Plus la densité des électrons est haute, plus il y a de photons X du diffusé Compton. Le diffusé Compton dépend aussi de l'énergie des rayons X. En physique nucléaire, la section efficace est une grandeur physique reliée à la probabilité d'interaction d'une particule pour une réaction donnée. La section efficace du diffusé Compton peut être décrite par un des modèles les plus utilisés, le modèle de Klein-Nishina. La formule de Klein-Nishina qui est utilisé pour la contribution de diffusé Compton à l'atténuation totale [15], [16], est donnée ci-dessous :

$$f_{KN}(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} * \left(\frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{\alpha} \right) + \frac{\ln(1 + 2\alpha)}{\alpha} - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \quad (1.10)$$

où $\alpha = E/511keV$, avec E est l'énergie des rayons X.

Afin de connaître la contribution des différents phénomènes physiques dans l'atténuation des rayons X, nous traçons dans la figure 1.10 les courbes de diffusé de Rayleigh, de l'absorption photo-électrique et de diffusé Compton en fonction de l'énergie des photons X lors de l'interaction de rayons X avec les matériaux humains (eau, tissus mous, et os) et les métaux (aluminium et titane).

Dans la figure 1.10, l'absorption photoélectrique est dominante dans le cas de faibles énergies de photons X et diminue avec l'augmentation de l'énergie des photons X, pour les substances humaines (eau, tissu mou, et os), et les métaux couramment utilisés dans la CT (aluminium et titane). Au contraire, le diffusé domine dans le cas d'énergie de photons X plus élevée. Les deux contribuent à l'atténuation quasiment totale des rayons X avec les matériaux dans la radiologie de diagnostique (environs de 30 à 150 keV) où le diffusé Rayleigh est supposé négligeable. Alors les CALs des matériaux dépendants de l'énergie des photons X sont exprimés par combinaison de l'absorption photo-électrique et du diffusé Compton dans [15], [16].

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que les variations du coefficients d'atténuation en fonction de l'énergie des photons X dans les matériaux plus denses comme l'aluminium et le titane (voir les figures 1.10 g et i) sont bien plus fortes que celles de l'eau et des tissus mous (voir les figures 1.10.(a) et .(c)).

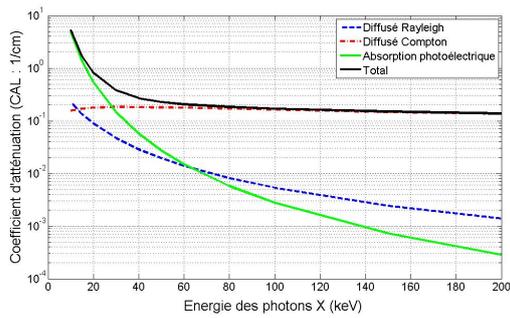
I.3.2 Modèles physiques liés à l'acquisition

Dans la réalité, le spectre de source des rayons X n'est pas monochromatique comme le suppose (hypothèse $H_{1,1}$) les méthodes de type FBP. Ce modèle simple, non valide en pratique, (eq.1.2) ne permet donc pas une reconstruction exacte dans le cas de rayons X polychromatiques. Des artefacts visibles peuvent apparaître dans les images reconstruites à cause du modèle simple non prise en compte de l'effet spectral des rayons X. Nous avons

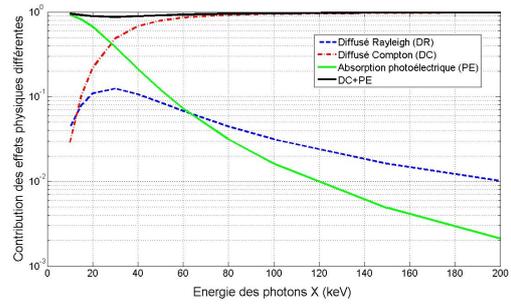
alors besoin d'un modèle qui permet de tenir compte du spectre poly-énergie et des CALs dépendants de l'énergie des photons X. Pour prendre en compte l'interaction des rayons X avec la matière, nous introduisons dans la suite un modèle polychromatique.

Selon l'hypothèse $H_{1.2}$ du FBP, il n'y a pas de photons X diffusés captés par le détecteur. Ceci n'est pas complètement vrai car (i) certains photons X ont une diffusion Compton et (ii) la distance entre l'objet et le détecteur est finie. Le diffusé de Compton de rayons X est souvent important, notamment avec le détecteur plat numérique. Nous exposons un modèle simple du diffusé par la suite.

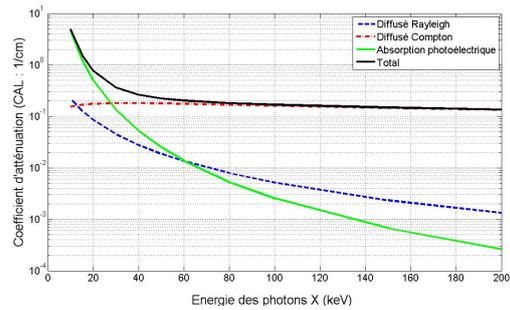
Nous introduisons ensuite un modèle de bruit des mesures du détecteur. Le comptage des photons X par le détecteur suit un processus statistique, qui peut être approché par une loi de Poisson simple. Par ailleurs, lors de la conversion de l'intensité en signal électrique de la lumière visible (détecteur indirect) ou des rayons X (détecteur direct), un bruit électronique est ajouté aux mesures. Ce bruit électronique suit approximativement une loi gaussienne.



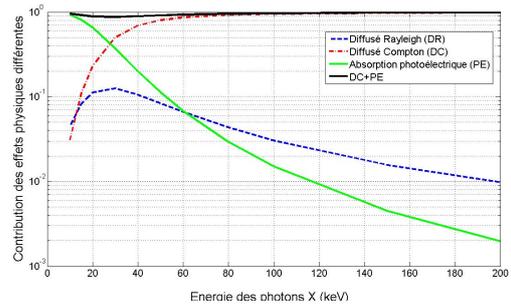
(a) Eau



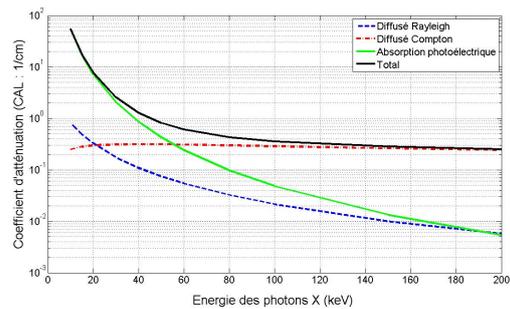
(b) Eau



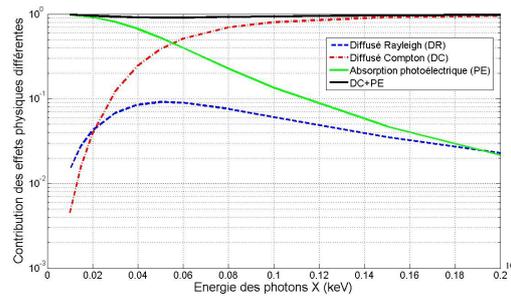
(c) Tissu mou



(d) Tissu mou



(e) Os



(f) Os

I.3.2 - Modèles physiques liés à l'acquisition

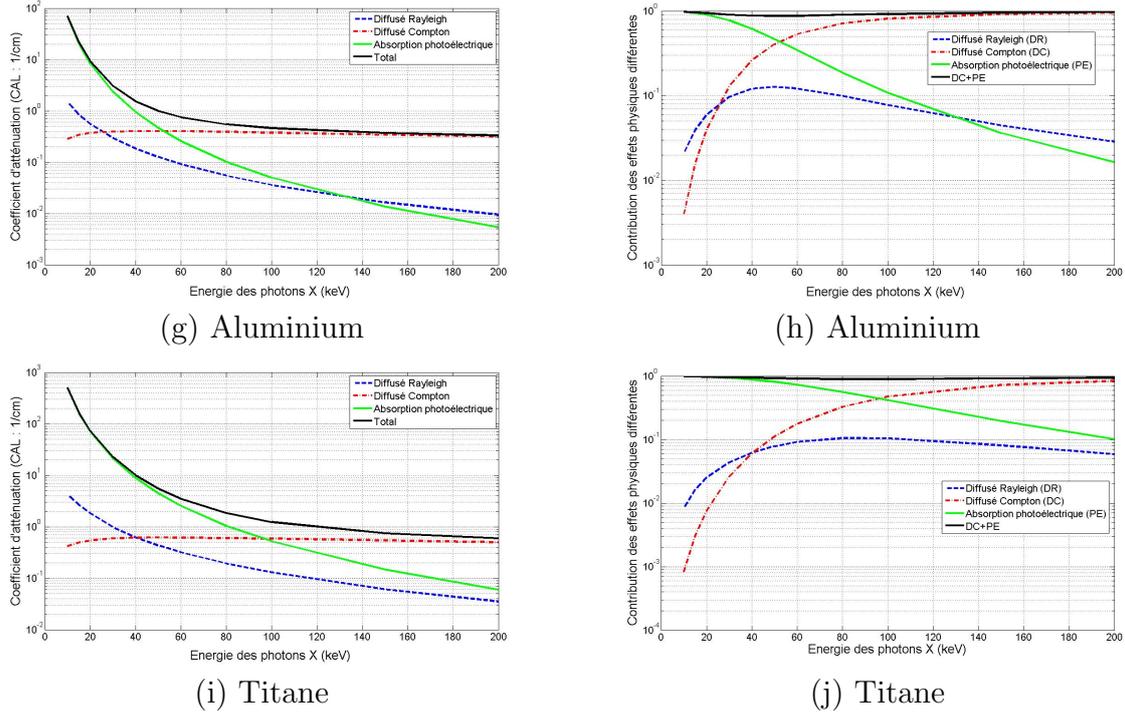


Figure 1.10 – Coefficients d'atténuation linéaire (colonne gauche) et contributions des différentes interactions des photons X avec la matière (colonne droite) en fonction de l'énergie des photon X de 10 à 200 keV. Les courbes (a)-(b), (c)-(d), (e)- (f), (g)-(h) et (i)-(j) correspondent respectivement à l'eau, aux tissus mous, à l'os, à l'aluminium et au titane. Les CALs sont calculés à partir de la base des données XCOM NIST [3].

I.3.2.1 Modèle polychromatique

En supposant que nous connaissons le spectre de la source des rayons X et également les CALs des matériaux de l'objet, nous pouvons établir un modèle polychromatique plus réaliste que le modèle simple (eq.1.2) :

$$I_E = I_0 \int_{\bar{E}} \omega(e_x) e^{-\int_L \mu(\mathbf{r}, e_x) d\mathbf{r}} de_x \quad (1.11)$$

où I_E est l'intensité du faisceau des rayons X poly-chromatiques transmis sur la ligne droite L , \bar{E} représente l'ensemble des énergies des rayons X, $\omega(e_x)$ combine le spectre de source des rayons X normalisé et la sensibilité spectrale du détecteur, e_x est la variable d'énergie des rayons X.

En partant de l'équation (1.5) de linéarisation des données, l'atténuation \mathbf{a}_i polychromatique est décrite de la manière suivante :

$$\mathbf{a} = -\ln(I_E/I_0) = -\ln\left(\int_{\bar{E}} \omega(e_x) e^{-\int_L \mu(\mathbf{r}, e_x) d\mathbf{r}} de_x\right) \quad (1.12)$$

L'atténuation \mathbf{a} n'est plus une fonction linéaire des CALs des matériaux. La non-linéarité contenue dans l'atténuation est due au spectre polychromatique de la source et à la sensibilité du détecteur et également à la dépendance des CALs en fonction de l'énergie des rayons X. Si cette réalité n'est pas prise en compte dans les méthodes de reconstruction,

il en résulte des erreurs quantitatives de reconstruction et des artefacts visibles. Ces artefacts sont appelés, " artefacts du durcissement " et sont détaillés ci-dessous dans la suite.

I.3.2.2 Diffusé Compton

Un autre effet non linéaire lié à l'acquisition est le diffusé Compton. La probabilité du diffusé Compton de photons X est proportionnelle à la densité des électrons des matériaux. En général, plus le matériau d'interaction avec les rayons X est dense, plus les photons X diffusent. Par conséquent, les photons X diffusent plus dans les matériaux denses comme l'aluminium et le titane que dans les matériaux mous, par exemple les os et les tissus mous de même taille. Le nombre des photons X diffusés détectés dépend aussi du format de l'objet et de la distance entre l'objet et le détecteur. Il augmente lorsque la taille de l'objet à scanner augmente [17]. En général, plus la distance entre l'objet et le détecteur est grande, moins les photons X diffusés arrivent au détecteur. Les photons X captés par le détecteur sont constitués de deux parties : les photons X direct qui suivent une trajectoire rectiligne entre la source et une cellule du détecteur et les photons X diffusés (voir la figure 1.11.(a)). Un modèle d'acquisition intégrant le diffusé est donné ci-dessous :

$$I = I_0(e^{-\mathbf{a}} + \mathbf{s}(\mu|\mathcal{G})) \tag{1.13}$$

où \mathbf{a} sont les données d'atténuation dans le cas des rayons X monochromatiques (eq.1.5) ou polychromatiques (eq.1.12) et $\mathbf{s}(\mu|\mathcal{G})$ est la distribution des photons X diffusés normalisée en fonction de la taille de l'objet et de la géométrie du scanner \mathcal{G} .

Les photons X diffusés ne respectent pas l'hypothèse faite avec les méthodes FBP, c'est-à-dire que l'intensité est atténuée exponentiellement suivant une ligne droite. Il peut en résulter des artefacts visibles, dits artefacts du diffusé, une réduction du contraste dans les images reconstruites par FBP et également des erreurs de quantification.

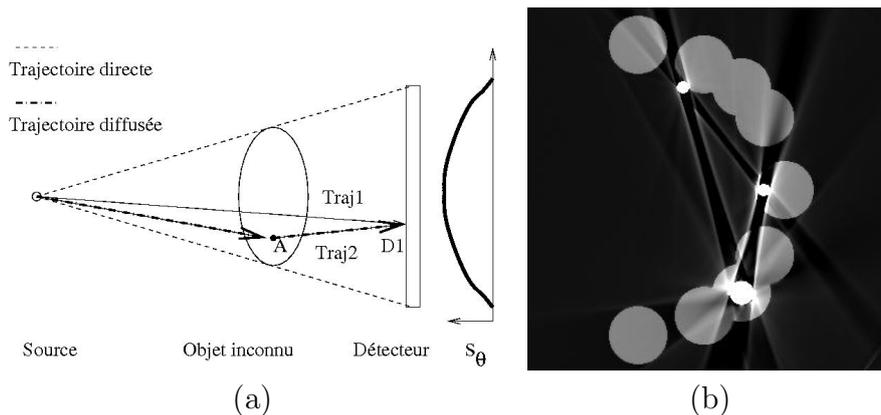


Figure 1.11 – (a) Phénomène pour un seul diffusé, (b) Artefacts du diffusé dans l'image reconstruite de la mâchoire simulée.

Remarque 1. Dans la figure 1.11, nous montrons la diffusion d'un photon X. Pour une estimation très précise des distributions des photons X diffusés, les doubles ou multiples diffusés doivent en toute rigueur est pris en compte. Ces processus plus complexes pouvant par exemple être estimés par des méthodes Monte-Carlo ne seront pas étudiés dans ce mémoire.

I.3.2 - Modèles physiques liés à l'acquisition

I.3.2.3 Bruit

En regardant le processus de détection des photons X, on se rend compte que le bruit de mesures de détecteur de rayons X est la combinaison de plusieurs types de bruit : bruit quantique du comptage de photons X et bruit électronique des photo-diodes ou des CCD lors de la conversion de l'intensité de lumière visible vers le signal électronique. Le bruit quantique du comptage des photons X est souvent approché par la loi de Poisson simple [18], [19], [20], [16]. Soit le vecteur aléatoire du nombre de photons X capté par le détecteur $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]^t$, avec M le nombre total de mesures et les variables aléatoires Y_i correspondants aux mesures des différentes cellules du détecteur, supposées indépendantes mutuellement. Le vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ des mesures du détecteur est une réalisation de \mathbf{Y} , $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_M]$. La probabilité conditionnelle $P(Y_i = y_i | \mathbf{f})$ sachant l'objet \mathbf{f} connu suivant la loi de Poisson est donnée ci-dessous :

$$P(Y_i = y_i | \mathbf{f}) = \frac{e^{-\bar{y}_i} \bar{y}_i^{y_i}}{y_i!} \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, M, \quad (1.14)$$

où \bar{y}_i est le nombre de photons X espéré sur la trajectoire de la ligne droite i . Nous utilisons ici le modèle simple de la loi Beer-Lambert (eq.1.2) pour calculer \bar{y}_i .

$$\bar{y}_i = y_{0,i} e^{-\int_{L_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \quad (1.15)$$

où $y_{0,i}$ est le nombre des photons X de la projection i sans atténuation et L_i est la trajectoire du rayon X i , avec la coordonnée de l'objet $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, en tomographie 2D, $n = 2$, et en tomographie 3D, $n = 3$. $P(Y_i = y_i | \mathbf{f})$ se simplifie en $P(y_i | \mathbf{f})$ par la suite.

En utilisant les équations (2.75) et (2.76), nous calculons le logarithme de $P(y_i | \mathbf{f})$.

$$\ln(P(y_i | \mathbf{f})) = -\bar{y}_i + y_i \ln \bar{y}_i - \ln y_i! \quad (1.16)$$

Nous approchons $\ln(P(y_i | \mathbf{f}))$ par un terme quadratique utilisant l'expansion de l'ordre deux de la série de Taylor comme ci-dessous [19]:

$$\ln(P(y_i | \mathbf{f})) \approx -\left(\frac{y_i}{2}(g_i - \bar{g}_i)^2 + y_i(1 + g_i) + \log(y_i!)\right), \quad (1.17)$$

avec $g_i = \ln \frac{y_{0,i}}{y_i}$ l'atténuation de rayon X i mesurée par le détecteur, et \bar{g}_i l'atténuation vraie de rayons X i ,

$$\bar{g}_i = \int_{L_i} \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.18)$$

Le log de la probabilité conditionnelle $\ln(P(y_i | \mathbf{f}))$ est équivalent à celui de la probabilité conditionnelle $\ln P(g_i | \mathbf{f})$ qui est basée sur un modèle linéaire direct, ce qui est rendu possible après linéarisation des mesures du détecteur comme ci-dessous :

$$g_i = \bar{g}_i + \epsilon_i, \quad (1.19)$$

où ϵ_i est le bruit attaché aux mesures d'atténuation du rayon X i par le détecteur. ϵ_i suit une loi gaussienne, $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, avec $\sigma_i^2 = \frac{1}{y_i}$. Le modèle linéaire direct (eq.1.19) peut s'écrire de manière matricielle comme suite :

$$\mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.20)$$

avec

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon), \quad (1.21)$$

avec la matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon$, $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon = \text{diag}\{\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_M}\}$. Plus le nombre y_i de photons X détecté est grand, plus la variation de mesure d'atténuation est faible. Parce que plus il y a de photons X reçus par le détecteur, moins il y a d'erreurs de comptage des photons X par le détecteur [19] et[21].

Le comportement du bruit électronique peut être décrit par une loi gaussienne. La combinaison d'une loi de Poisson et d'une loi gaussienne n'est pas souvent étudiée dans la littérature. Du fait que la loi gaussienne discrète est une bonne approximation de la loi de Poisson lorsque le nombre de photons X détectés est suffisamment grand, par exemple 100. En plus, la variable aléatoire issue de la somme de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes est encore gaussienne. Une loi gaussienne avec les variances adaptées aux mesures peut donc être utilisée pour modéliser le bruit de mesure de détecteur de rayons X avec le modèle non-linéaire direct [22].

Nous avons présenté dans cette section l'interaction des rayons X avec la matière. Dans les hypothèses du FBP, l'effet spectral des rayons X n'est pas pris en compte et les photons X diffusés détectés sont ignorés. Cette non prise en compte de ces phénomènes physiques provoque des artefacts dans les images reconstruites. Un cas particulier de ces artefacts qualifiés de métalliques dégradant fortement la qualité d'images et pouvant rendre les images inutilisables lors du diagnostic sont introduits dans la section suivante.

I.4 Artefacts métalliques

Lors d'un examen médical, on trouve souvent sur les patients des objets métalliques comme des prothèses de hanche ou des implants dentaires métalliques. Les implants métalliques (souvent en titane) sont largement utilisés comme les implants dentaires en implantologie dentaire. Les couronnes ou les bridges métalliques (typiquement en Nickel-Chrome ou Chrome-Cobalt) sont employés afin de remplacer des dents absentes. Le métal est beaucoup plus dense que les matériaux humains comme les tissus mous et os. Les faisceaux des rayons X ont plus de mal à pénétrer le métal que les matériaux humains et l'atténuation de ceux passant par le métal est beaucoup plus forte que ceux qui passent par les tissus mous et les os. Les rayons X de faible énergie peuvent donc passer à travers les tissus mous et les os mais pas à travers le métal. Dans ce cas là, l'effet spectral des rayons X est important. Le diffusé de photons X est considérable à cause de la forte densité d'électrons dans le métal. Mais l'effet spectral des rayons X et le diffusé des photons X ne sont pas pris en compte dans les méthodes classiques comme FBP. Des artefacts métalliques comme des raies noires et blanches et des taches noire autour de métal apparaissent dans les images reconstruites.

Pour comprendre la formation des artefacts métalliques, nous présentons dans la suite les causes physiques principales des artefacts métalliques : le durcissement, le diffusé, et le bruit ([10]).

I.4.1 Durcissement

Lorsqu'un faisceau de rayons X polychromatique passe par un objet, les rayons X de faible énergie sont préférentiellement absorbés. Le pourcentage de rayons X de haute énergie sortant de l'objet est plus grand que celui de rayons X entrant dans l'objet, le faisceau des rayons X est donc durci. En plus, les CALs des matériaux sont dépendants de l'énergie des photons X, les CALs reconstruits des matériaux varient alors en fonction de l'énergie des photons X reçus par le détecteur. Les CALs reconstruits d'un matériau peuvent être différents et dépendants de la trajectoire suivie de rayons X. En prenant un objet rond et homogène, comme dans la figure 1.12, la longueur de matériau traversé par les rayons X au milieu est plus longue que celle sur les cotés. Les faisceaux de rayons X des énergies faibles sont donc plus atténués au centre de l'objet que sur les bords. La proportion d'énergies des faisceaux sortant de l'objet n'est plus la même. Les CALs d'un même matériau reconstruits par FBP ont varié en fonction de la trajectoire des faisceaux de rayons X. Les artefacts de "coupe" apparaissent, voir la figure 1.12.(c).

Quand les patients portent des implants dentaire métallique, les faisceaux de rayons X passant par le métal sont fortement atténués, l'énergie effective est donc plus élevée que celle des faisceaux des rayons X qui passent par les tissus mous et les os. Alors, la non-linéarité des données dû au durcissement est forte, qui provoque les raies noires et blanches ou taches noires dans les images reconstruites par FBP.

I.4.2 Diffusé

Le diffusé Compton est dépendant de la densité d'électron dans les matériaux et également de l'énergie de photons X. La densité d'électron du métal est grandement supérieure à celle des matériaux relativement mous. Les photons X diffusent plus lors d'interaction avec le métal qu'avec les tissus mous et os. En plus, les photons X ont du mal à pénétrer le métal, le nombre de photons X transmis de métal est faible, dans ce cas là, le pourcentage du nombre de photons X diffusés est important. Les photons X diffusés ne suivent pas la trajectoire rectiligne entre la source et la cellule de détecteur, voir la figure 1.11.(a). Cela n'est pas pris en compte dans les FBP, ce qui produit des artefacts similaires à ceux du durcissement (voir la figure 1.11.(b)), introduit les erreurs de reconstruction car les photons X diffusés causent une sur évaluation de photons X espérés, et réduit le contraste d'image reconstruite.

I.4.3 Bruit

Les faisceaux de rayons X peuvent être absorbés complètement par le métal, notamment lorsqu'il y a plusieurs métaux. Cela signifie une atténuation très forte. Très peu de photons X sont reçus par le détecteur. Après linéarisation des mesures (voir l'eq.1.5), l'atténuation associée au métal tend vers infini, $\ln \frac{1}{0} \rightarrow \infty$ (eq.1.5). Les données correspondantes au métal sont beaucoup plus bruitées que les autres, voir la figure 1.13.(b). Clairement, le bruit est amplifié par le métal. L'hypothèse $H_{1,3}$ du FBP (voir la section I.2) n'est plus valable dans ce cas là. Les artefacts comme des raies noires et blanches ou en étoile apparaissent dans les images reconstruites par FBP.

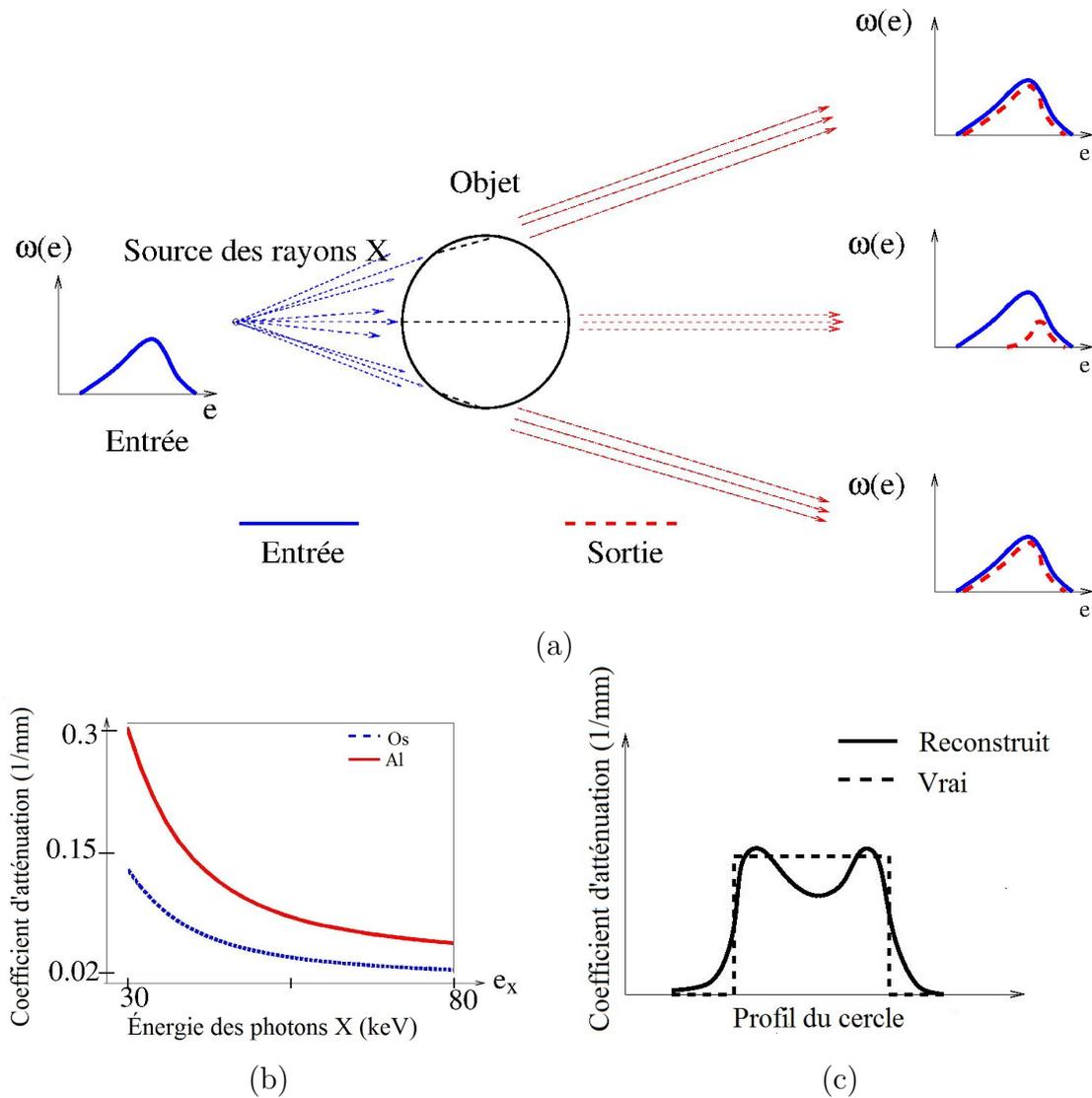


Figure 1.12 – Illustration des artefacts du durcissement. (a) Schéma des faisceaux de rayons X. (b) Courbes des coefficients d'atténuation des os et de l'aluminium (Al) en fonction de l'énergie des rayons X (30-80 KeV). (c) Profil horizontal de milieu du cercle (a).

1.5 Conclusion

Le CT s'est beaucoup développé depuis les années 70. Les premiers scanners CT étaient en géométrie parallèle. Puis ils ont été remplacés par les scanners en géométrie divergente qui permettent des acquisitions plus rapides. Suite aux demandes de reconstruction tridimensionnelle, les scanners hélicoïdaux avec détecteur de multi-coupes se sont développés dans les années 90, ce qui a permis des acquisitions plus rapides qu'avec les scanners conventionnels à détecteur d'une coupe. Mais le coût de ce type de scanners est très important. Ils sont souvent utilisés dans les centres de radiologie ou des grands hôpitaux. Avec le développement des détecteurs numériques, les scanners CBCT à détecteur plat numérique sont devenus une solution pour les cabinets de dentiste. Ils sont aujourd'hui très répandus en imagerie dentaire, car ils permettent une reconstruction 3D de la mâchoire et du crâne en haute résolution.

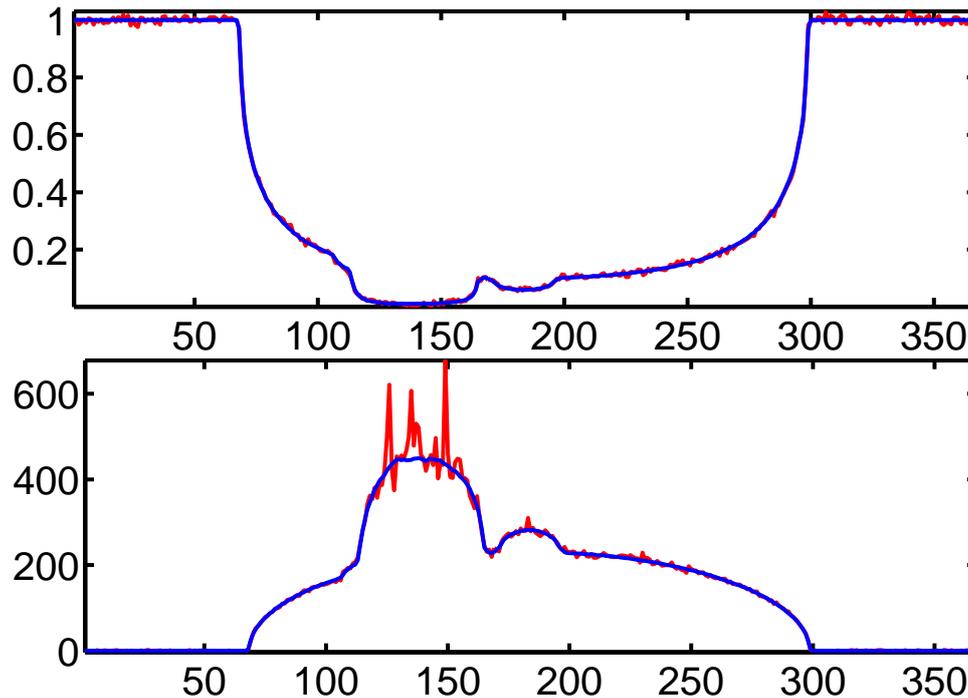


Figure 1.13 – Illustration d’amplification du bruit. La courbe de intensité normalisée des faisceaux de rayons X mesurée par détecteur (en haut), I/I_0 , et la courbe d’atténuation y correspondant mesurée (en bas).

Les méthodes de reconstruction tomographique couramment utilisées dans le CT, le CT hélicoïdal et le CBCT sont des méthodes de type FBP, rétro-projections filtrées. Les trois hypothèses faites dans le FBP sont présentées dans la section I.2. Lorsque ces hypothèses correspondent à peu près à la réalité, le FBP permet une reconstruction rapide et avec une qualité d’image satisfaisante. Mais des artefacts peuvent apparaître dans les images reconstruites par FBP, si la non-linéarité des données due au durcissement ou au diffusé n’est pas négligeable, notamment dans le cas de la présence de métal sur les patients, par exemple les patients portant les implants dentaires métalliques ou plombage. D’après la physique de l’interaction des rayons X avec la matière, le durcissement et le diffusé des photons X dû au métal sont très importants. Le bruit des données peut être également amplifié par le métal, après linéarisation des mesures du détecteur. Par conséquent, les artefacts métalliques apparaissent dans les images reconstruites, car le FBP ne prend pas en compte le spectre de rayons X polychromatique, le diffusé et le bruit. La réduction des artefacts métalliques est un des principaux challenges en imagerie médicale.

Un autre challenge majeur est la réduction des doses de rayonnement. Quand un patient passe un examen radiologique, il est exposé à un rayonnement ionisant. La sur-exposition augment les risques de cancers. Les femmes et enfants sont plus sensibles aux radiations, notamment les femmes enceintes. La radiologie à faible dose est de plus en plus demandée dans les cliniques. Dans le but d’évaluer ces risques, la dose de rayonnement effective est une des mesures des doses de radiation déposées aux patients en radiologie, ce qui est définie par la quantité de dose radiation délivrée dans une unité masse d’un organe humain par unité de temps et la sensibilité biologique de cet organe. Par exemple, le poumon est plus sensible aux radiations que le crâne. La dose de rayonnement effective

donne la probabilité de cancer radio-induit. Des stratégies de réduction de dose sont donc nécessaires pour satisfaire la demande en radio-protection. Le contrôle optimal d'émission de rayons X est déjà installé dans les scanners modernes mais il ne satisfait pas l'exigence de réduction des doses de radiation actuelle.

La réduction des doses de radiation signifie la réduction de l'énergie de rayons X qui ionise le corps du patient, ou le temps d'acquisition plus court. Dans le premier temps, nous pouvons réduire le nombre de projections afin d'acquérir des données plus rapidement. Mais l'angle de projections peut être sous-échantillonné, ce qui provoque des artefacts "aliasing" dans les images reconstruites par FBP. Dans le deuxième temps, nous pouvons diminuer la tension entre la cathode et l'anode de générateur de rayons X ou le courant de la cathode qui contrôle le flux de rayons X pour réduire l'énergie des rayons X. Il n'y a pas de problème de sous-échantillonnage des angles de projection, mais le rapport du signal sur bruit (RSB) diminue. Nous pouvons aussi faire les deux simultanément pour réduire la dose de rayonnement au maximum. Le problème de réduction de dose est très fortement lié aux problèmes de bruit des mesures, de sous-échantillonnage sur les angles de projection et de RSB faible, auxquels les méthodes FBP sont très sensibles.

Nous proposons donc de nouveaux algorithmes itératifs de reconstruction tomographique 3D pour la réduction des artefacts métalliques et la réduction des doses de radiation.



Méthodes de reconstruction tomographique

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux méthodes de reconstruction tomographique. D'abord, nous présentons les bases de la tomographie par rayons X . Ensuite, nous introduisons les méthodes de reconstruction tomographique, divisées en deux groupes :

- Méthodes analytiques : elles sont basées sur l'inversion analytique de la transformée de Radon, par exemple, les méthodes de Fourier ([23], [24], [25],) et les méthodes de rétro-projection filtrée ([26], [27], [28], [29]).
- Méthodes itératives : l'inversion de la transformée de Radon peut être considérée comme une résolution d'équations linéaires, car la transformée de Radon est linéaire. La solution des équations linéaires peut être obtenue par les méthodes algébriques. Nous pouvons donc reconstruire des images en utilisant les méthodes algébriques : ART (acronyme anglais, Algebraic Reconstruction Technique), [30], [9], SIRT (acronyme anglais, Simultaneous Iterative Reconstruction Technique), [31], et SART (acronyme anglais, Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique), [32]. En plus, la nature statistique du comptage du nombre de photons doit être pris en compte lors d'une reconstruction pour réduire des artefacts dues au bruit des mesures, voir la sous-section I.3.2.3. Des modèles statistiques sont donc utilisés pour modéliser le processus d'acquisition des données. Des méthodes statistiques sont proposées pour la reconstruction d'image : les méthodes de maximum de vraisemblance [33], [18], [34], et les méthodes bayésiennes, [35], [19], [36], et [37].

Enfin, nous comparons les deux types de méthodes de reconstruction tomographique.

II.1 Les bases de la tomographie

La principale opération de la tomographie est la transformée de Radon, définie par l'intégrale d'une fonction sur un ensemble de droites [14]. La transformée de Radon

II.1.1 - Transformée de Radon

de l'image est obtenue dans les scanners à rayons X parallèles voir la figure 1.4.(a). Nous définissons les notations utilisées dans la suite de ce mémoire. Elles peuvent être étendues en transformée divergente dans les scanners de troisième génération (voir la figure 1.4.(a)), où les rayons X sont divergents.

II.1.1 Transformée de Radon

Définissons la transformée de Radon (TR), $\mathcal{R}f$, comme l'intégrale d'une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sur les lignes droites dans le cas de 2D comme dans la figure 2.1. La transformée de Radon \mathbf{g} de \mathbf{f} , est décrite comme ci-dessous :

$$\mathbf{g}(r, \phi) = \mathcal{R}f(r, \phi) = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \delta(r - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)) d\mathbf{x} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est la coordonnée cartésienne 2D de \mathbf{f} , $\delta(\cdot)$ est la distribution de Dirac qui est définie comme ci-dessous :

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(t) dt = 1 \text{ et } \delta(t) = 0, \text{ si } t \neq 0 \quad (2.2)$$

Et $\boldsymbol{\theta}(\phi)$ est le vecteur de direction sur la ligne droite avec l'angle ϕ , $\boldsymbol{\theta}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$. r est la distance signée de l'origine à la ligne droite L qui est perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{\theta}$. $\mathbf{g}(r, \boldsymbol{\theta}(\phi))$ est dans l'espace de Radon comme dans la figure 2.1.b.

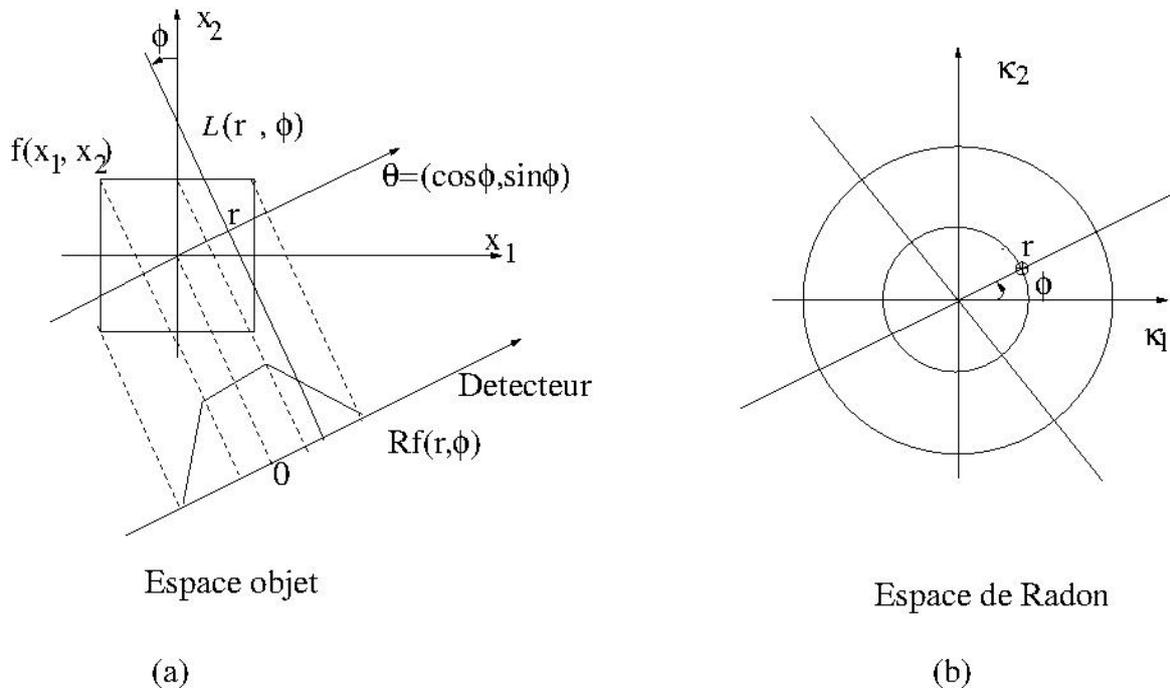


Figure 2.1 – Illustration de la transformée de Radon en 2D. (a) espace objet, (b) espace de Radon.

Les propriétés importantes de la transformée de Radon sont données ci-dessous :

- Elle est périodique en ϕ de 2π car $\boldsymbol{\theta}(\phi + 2\pi) = \boldsymbol{\theta}(\phi)$:

$$\mathbf{g}(r, \phi + 2\pi) = \mathbf{g}(r, \phi) \quad (2.3)$$

- Elle est symétrique en ϕ de π :

$$\mathbf{g}(r, \phi) = \mathbf{g}(-r, \phi \pm \pi) \quad (2.4)$$

II.1.2 Transformée divergente

La transformée divergente (TD) est définie par l'intégrale sur les demi-droites issue d'un point source \mathbf{a} comme dans la figure 2.2.

$$\mathcal{D}\mathbf{f}(\mathbf{a}(\gamma), \alpha) = \int_0^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{a}(\gamma) + t\boldsymbol{\theta}(\gamma + \alpha + \pi/2))dt \quad (2.5)$$

où la trajectoire \mathbf{a} est paramétrée par l'angle de projection γ . Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayons R , on a

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} R \cos(\gamma + \pi/2) \\ R \sin(\gamma + \pi/2) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La source de rayons X se trouve sur la ligne droite $\boldsymbol{\theta}^\perp$ de la distance r . En général, \mathbf{f} est contenu dans un domaine borné comme le cercle intérieur dans la figure 2.2, ils sont nuls en dehors du support borné. La relation entre la TR et la TD est décrite ainsi :

$$\mathcal{R}\mathbf{f}(r, \phi)|_{r=\mathbf{a}(\gamma)\cdot\boldsymbol{\theta}(\phi)} = \mathcal{D}\mathbf{f}(\mathbf{a}, \alpha), \quad (2.7)$$

avec $\phi = \gamma + \alpha$.

II.1.3 Théorème fondamental de la tomographie : le théorème coupe-projection

L'énoncé du théorème

Théorème 1 (coupe-projection). *La transformée de Fourier d'une dimension sur la distance r , $\widehat{\mathcal{R}\mathbf{f}}$, de la transformée de Radon de \mathbf{f} dans la direction $\boldsymbol{\theta}$ est égale à la coupe suivant la même direction de la transformée de Fourier de dimension deux de $\hat{\mathbf{f}}$.*

Soit $\mathbf{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ où \mathcal{S} est l'espace de Schwartz.

$$\widehat{\mathcal{R}\mathbf{f}}(\rho, \phi) = \sqrt{2\pi}\hat{\mathbf{f}}(\rho\boldsymbol{\theta}(\phi)) \quad (2.8)$$

avec $\mathcal{R}\mathbf{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{\theta}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$

II.1.3 - Théorème fondamental de la tomographie : le théorème coupe-projection

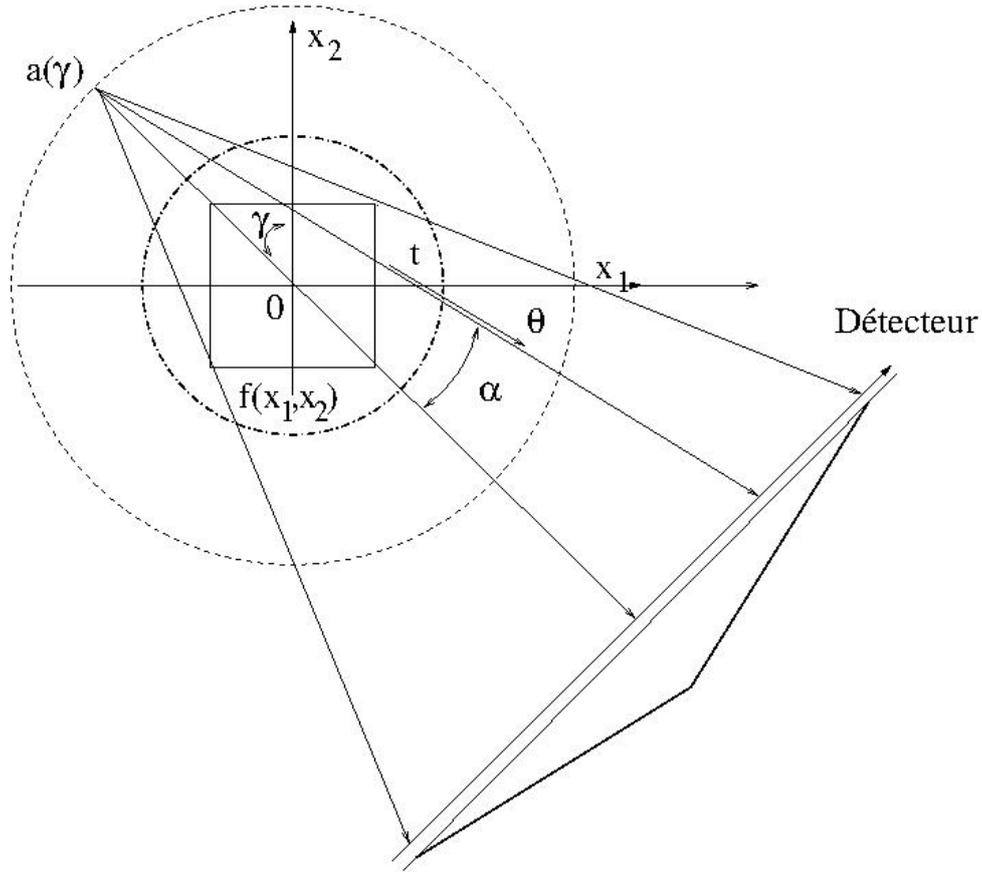


Figure 2.2 – Illustration de la transformée divergente en 2D

Démonstration. Nous partons à partir du coté gauche de l'équation (1) en utilisant l'équation 2.1.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{R}f}(\rho, \phi) &= \mathcal{F}_{1D}\{\mathcal{R}f(r, \phi)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}f(r, \phi) e^{-j\rho r} dr \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \delta(r - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)) d\mathbf{x} e^{-j\rho r} dr \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)) e^{-j\rho r} dr \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) e^{-j\rho \boldsymbol{\theta}(\phi) \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \\
 &= \sqrt{2\pi} \widehat{\mathbf{f}}(\rho \boldsymbol{\theta}(\phi))
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec j est imaginaire, $j = \sqrt{-1}$. □

Remarque 2. Le théorème de coupe-projection établit la relation de la transformée de Fourier d'une dimension de la transformée de Radon $\widehat{\mathcal{R}f}$ et la transformée de Fourier de dimension deux de l'objet. Autrement dit, la transformée de Fourier des données acquises par les scanners est la transformée de Fourier de dimension deux de l'objet.

II.2 Méthodes de Reconstruction Analytiques

Les méthodes analytiques sont basées sur l'inversion analytique de la transformée de Radon. Nous présentons tout d'abord les méthodes de TFD (acronyme de Transformée de Fourier Directe) puis les méthodes de rétro-projections filtrée largement utilisées dans les scanners CT modernes.

II.2.1 Méthodes de la transformée de Fourier directe

D'après le théorème de coupe-projection, nous pouvons reconstruire l'objet inconnu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en utilisant la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse. Les étapes principales des méthodes de la TFD sont présentées (voir la figure 2.3) ci-dessous :

1. Calcul de la transformée de Fourier 1D $\hat{\mathbf{g}}(\rho, \phi)$ de $\mathcal{R}\mathbf{f}(r, \phi)$ sur r où $\hat{\mathbf{g}}(\rho, \phi)$ est décrit en coordonnée polaire (ρ, ϕ) :

$$\hat{\mathbf{g}}(\rho, \phi) = \mathcal{F}_{1D}\{\mathcal{R}\mathbf{f}(r, \phi)\} \quad (2.10)$$

2. Transfert de $\hat{\mathbf{g}}(\rho, \phi)$ de la coordonnée polaire à la coordonnée Cartésienne, $\hat{\mathbf{g}}(\kappa_1, \kappa_2)$, par l'interpolation comme interpolation B-spline [38] avec changement de variable :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \rho \cos \phi, \\ \kappa_2 &= \rho \sin \phi. \end{aligned}$$

3. Reconstruction de l'objet inconnu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ par la transformée de Fourier inverse 2D de $\hat{\mathbf{g}}(\kappa_1, \kappa_2)$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_{2D}^{-1}\{\hat{\mathbf{g}}(\kappa_1, \kappa_2)\} \quad (2.11)$$

Dans l'étape (3), on emploie la transformée de Fourier inverse 2D pour la reconstruction, qui nécessite un transfert du système des coordonnées polaires au système des coordonnées cartésiennes de $\hat{\mathbf{g}}$ par l'interpolation. Les erreurs d'interpolation importantes dégradent fortement la qualité de l'image reconstruite notamment dans les zones hautes fréquences [38]. Afin d'éviter cette interpolation 2D, les TFD avec " linogramme " sont utilisées dans la géométrie particulière " linogramme ", car la transformée de Fourier de linogramme est représentées en grille cartésienne [39], [40] et [41]. Nous pouvons aussi les étendre en 3D avec le plannogramme [42] et [43].

En regardant dans l'espace de Fourier (voir la figure 2.3), il y a plus d'échantillonnages de $\hat{\mathbf{g}}$ dans la zone plus proche de l'origine que celle éloignée de l'origine. Alors les erreurs de l'interpolation augmentent avec la distance ρ par rapport à l'origine. Cela rend les méthodes TFD moins populaires que les méthodes de rétro-projections filtrées (FBP).

II.2.2 Méthodes des rétro-projections filtrées (FBP)

D'abord, la méthode de l'inversion de la transformée de Radon dans le cas continu est présentée par Radon [14], ce qui est connu aujourd'hui comme les méthodes FBP. Les

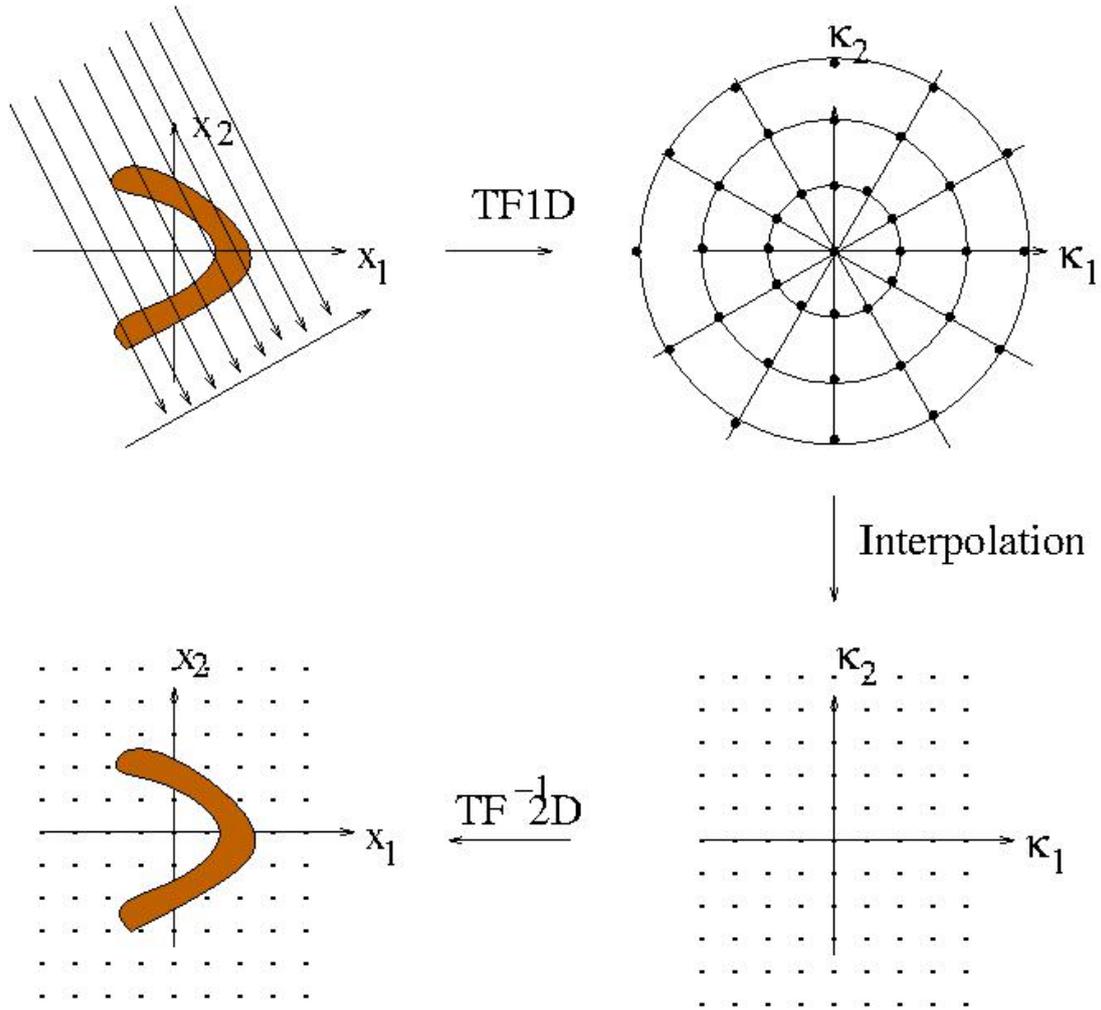


Figure 2.3 – Schéma des méthodes de la transformée de Fourier directe.

méthodes FBP sont introduites en imagerie médicale par Ramachandran et al [27] et Shepp et al [28].

Nous définissons la transformée de Fourier de dimension deux d'objet inconnu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa})$ avec $\boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est calculé par la transformée de Fourier inverse de dimension deux.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^2} \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{j\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\kappa}} d\boldsymbol{\kappa} \quad (2.12)$$

En changeant les coordonnées cartésiennes $\boldsymbol{\kappa}$ en coordonnées polaires (ρ, ϕ) , nous avons $d\kappa_1 d\kappa_2 = |\rho| d\rho d\phi$. L'équation 2.12 devient :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)} |\rho| d\rho d\phi \quad (2.13)$$

D'après la propriété de la transformée de Radon (2.4), nous déduisons :

$$\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)} \rho d\rho d\phi = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)} (-\rho) d\rho d\phi \quad (2.14)$$

L'équation 2.13 se réécrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}(\phi)} |\rho| d\rho d\phi \quad (2.15)$$

Selon le théorème de coupe-projection (1), nous avons,

$$\hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\mathbf{g}}(\rho, \phi) \quad (2.16)$$

Nous avons alors l'inversion de la transformée de Radon :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\phi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\mathcal{R}\mathbf{f}}(\rho, \phi) |\rho| e^{j\rho\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}(\phi)} d\rho \quad (2.17)$$

où $|\rho|$ est le filtre rampe dans le domaine Fourier, aussi dit filtre Ram-Lak après les noms de inventeurs Ramachandran et Lakshminarayanan [27], voir dans la figure(2.4). Dans la pratique, la fréquence maximale d'image qui peut être mesurée par le détecteur est limitée par la taille d'une cellule du détecteur. D'après le théorème d'échantillonnage de Shannon [44], la fréquence maximum ρ_{max} peut être mesurée sans recouvrement dans l'espace fréquence $\frac{1}{2\delta_d}$ avec la largeur d'une cellule δ_d .

Nous réécrivons l'équation (2.15) de la manière suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathbf{g}}(r, \phi) d\phi |_{r=\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\theta}(\phi)} \quad (2.18)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{g}}(r, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{g}}(\rho, \phi) |\rho| e^{j\rho r} d\rho \quad (2.19)$$

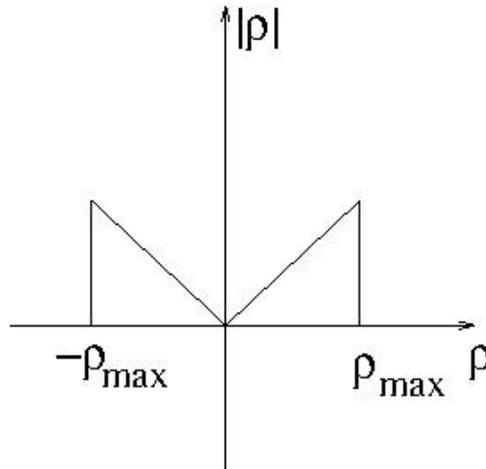


Figure 2.4 – Illustration du filtre rampe.

Les étapes de reconstruction avec les méthodes de rétro-projections filtrées sont les suivantes :

1. Filtrage sur les Projections avec le filtre rampe décrites par l'équation (2.19).

II.2.2 - Méthodes des rétro-projections filtrées (FBP)

2. Rétro-projection (équ.(2.18)).

Nous pouvons aussi calculer $\tilde{\mathbf{g}}$ (équ.(2.19)) par la convolution de \mathbf{g} et la transformée de Fourier inverse $\mathbf{q}(r)$ de $|\rho|$ dans le domaine spatial, car la multiplication dans le domaine Fourier est équivalente à la convolution dans le domaine spatial.

$$\tilde{\mathbf{g}}(r, \phi) = \mathbf{g}(r, \phi) * q(r), \quad (2.20)$$

avec

$$q(r) = \mathcal{F}^{-1}|\rho| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho| e^{j\rho r} d\rho \quad (2.21)$$

Remarque 3. En fait, $|\rho| = \text{sign}(\rho)\rho$, où $\text{sign}(\rho)$ est la fonction de signe qui est définie comme :

$$\text{sign}(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho > 0 \\ -1 & \text{si } \rho < 0 \\ 0 & \text{si } \rho = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Par ailleurs, selon la propriété de la transformée de Fourier et le théorème de coupe-projection (2.16), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} j\rho \hat{\mathbf{g}}(\rho, \phi) e^{j\rho r} d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} j\rho \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho r} d\rho \end{aligned} \quad (2.23)$$

Et la transformée de Hilbert (TH) est définie par la convolution suivante :

$$\mathcal{H}q(t) = v.p\left(\frac{1}{\pi t}\right) * q(t) \quad (2.24)$$

où v.p est la valeur principale de Cauchy. Nous pouvons alors en déduire (voir [1], page 29)

$$\mathcal{H}\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -j \text{sign}(\rho) \hat{\mathbf{f}}(\rho) e^{j\rho t} d\rho \quad (2.25)$$

D'après l'équation (2.23), la transformée de Hilbert de $\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi)$ est décrite dans la suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -j \text{sign}(\rho) \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi)\right) e^{j\rho r} d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho \text{sign}(\rho) \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho r} d\rho \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'équation (2.15) se réécrit comme :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi)\right) d\phi|_{r=\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)} \quad (2.27)$$

Nous pouvons aussi reconstruire \mathbf{f} en utilisant la transformée de Hilbert.

Le filtre rampe est le filtrage global des données dans les méthodes FBP. Toutes les projections sont donc nécessaires pour appliquer l'étape de filtrage (eq.(2.19)) même pour reconstruire une seule zone d'intérêt de l'objet. Les projections doivent aussi être non-tronquées. Nous aborderons les méthodes de reconstruction d'une seule zone d'intérêt avec et sans projections tronquées dans le chapitre IV.

Le filtre rampe est passe-haut. Le bruit des données n'est pas évitable dans la pratique. Le filtre rampe amplifie le bruit des données qui entraîne des artefacts dans les images reconstruites. Pour régler ce problème, nous appliquons les fenêtres de Hanning ou Hamming (voir la figure 2.5.), etc.. La fonction de la famille des fenêtres de Hanning est donnée ci-dessous :

$$H.W(\rho) = \begin{cases} t + (1-t) \cos\left(\frac{\pi\rho}{\rho_{max}}\right) & \text{si } |\rho| < \rho_{max} \\ 0 & \text{si } |\rho| \geq \rho_{max} \end{cases} \quad (2.28)$$

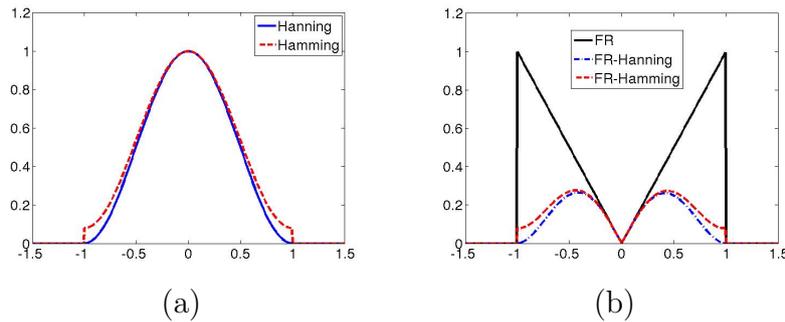


Figure 2.5 – Les fenêtres de Hanning ($t=0,5$, courbe bleu pointillé et en pointillés) et Hamming ($t=0,54$, courbe rouge pointillés) (a) et les filtres rampes multipliés par ces fenêtres (b). Les fréquences dans les figures sont normalisées.

II.2.3 Les méthodes FBP en géométrie divergente

Les méthodes de rétro-projections filtrées en géométrie parallèle ont été présentées dans la section précédente. En imagerie médicale, les scanners modernes à rayons X sont en géométrie divergente, ce qui permet une acquisition des données rapide (voir dans la figure 1.4.(b)). Nous obtenons les méthodes FBP en géométrie divergente en réarrangeant les données générées par les scanners à rayons X divergents en données des rayons parallèles. Il existe deux types de détecteurs, les détecteurs courbes et les détecteurs plats. L'acquisition des données avec un détecteur courbe est l'échantillonnage uniforme en les angles de projections (voir la figure 2.6.(a)) et celle avec un détecteur plat est l'échantillonnage uniforme en espace (voir la figure 2.6.(b)). Nous présentons respectivement les ré-arrangements des données avec les deux types des détecteurs ci-dessous.

II.2.3.1 Cas avec le détecteur courbe

Le vecteur θ est exprimé en fonction du paramétrage de la source $a(\gamma)$ et d'un angle α qui correspond à une cellule du détecteur courbe, voir la figure 2.6.(a).

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos(\gamma + \alpha) \\ \sin(\gamma + \alpha) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

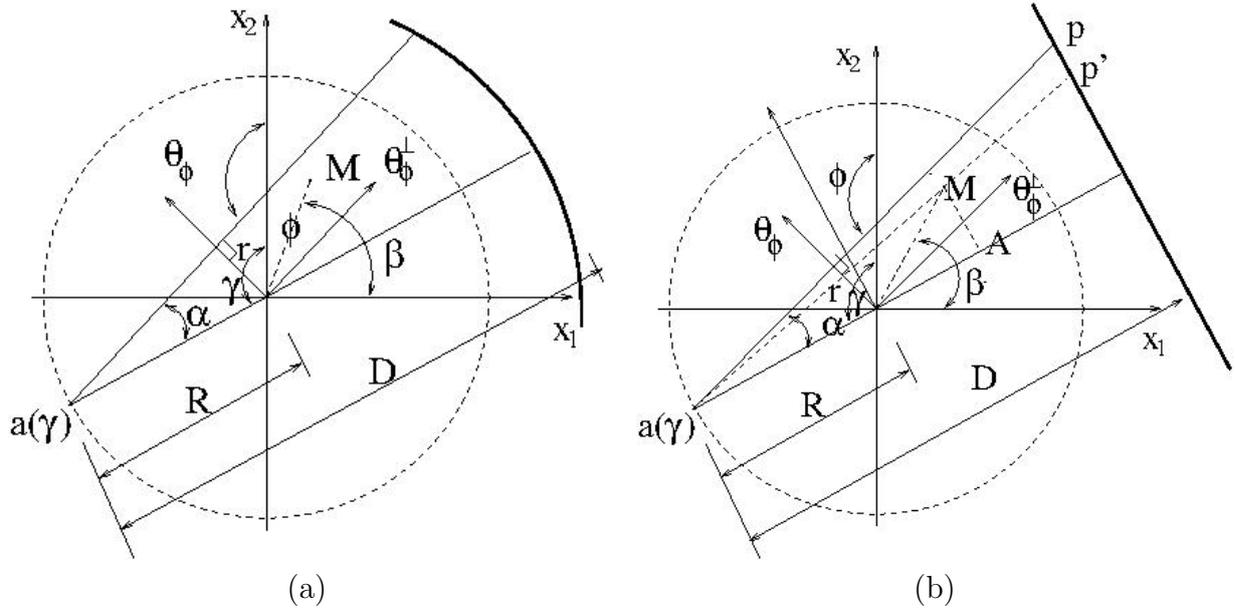


Figure 2.6 – Géométries éventails avec détecteur courbe (a) et avec détecteur plat (b).

avec $\alpha \in [-\alpha_{max}, \alpha_{max}]$, et $0 < \alpha_{max} < \pi/2$, où α_{max} est la moitié de l'angle d'éventail. r est calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} r &= \mathbf{a}(\gamma) \cdot \boldsymbol{\theta} = R(\cos(\gamma + \pi/2) \cos(\gamma + \alpha) + \sin(\gamma + \pi/2) \sin(\gamma + \alpha)) \\ &= R \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.30)$$

Alors les équations de ré-arrangement sont les suivantes :

$$\phi = \gamma + \alpha \quad (2.31)$$

$$r = R \sin \alpha \quad (2.32)$$

En changeant le (r, ϕ) en (γ, α) , nous calculons le déterminant de Jacobi $|detJ|$, $|detJ| = R \cos \alpha$. Alors $drd\phi = R \cos \alpha d\alpha d\gamma$.

D'après les méthodes FBP de la tomographie en géométrie parallèle (les équations (2.18) et (2.19)) et les équations de ré-arrangement des données précédentes, nous dérivons l'équation de l'inversion de la transformée divergente avec la trajectoire de source de rayons X circulaire,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}(\gamma)|^2} \int_{-\alpha_{max}}^{+\alpha_{max}} \mathbf{Df}(\gamma, \alpha) \cos(\alpha) \mathbf{q}'(\alpha' - \alpha) d\alpha d\gamma \quad (2.33)$$

avec

$$\mathbf{q}'(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha}\right)^2 \mathbf{q}(\alpha) \quad (2.34)$$

où q est la transformée de Fourier inverse du filtre rampe $|\rho|$ (voir l'équation (2.21)). Et $\alpha' = \arctan \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\gamma)}{R + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\gamma - \pi/2)}$, avec $\boldsymbol{\theta}(\gamma) = (\cos \gamma \sin \gamma)^t$. Deux démonstrations similaires sont présentées dans [1], annexe B et [45], page 77.

II.2.3.2 Cas avec le détecteur plat

Par analogie, l'angle α est fixé par p et D . p est l'intersection entre le faisceau de rayons X et le détecteur et D est la distance entre la source de rayons X et le détecteur, voir la figure 2.6.(b). Le vecteur $\boldsymbol{\theta}(\phi)$ est alors déterminé par γ et p .

$$\alpha = \arctan\left(\frac{p}{D}\right) \quad (2.35)$$

$$\phi = \alpha + \gamma \quad (2.36)$$

où la distance $p \in [-p_{max}, p_{max}]$. La longueur du détecteur est $2p_{max}$. Nous calculons la distance entre l'origine et le faisceau des rayons X , r ,

$$r = R \sin \alpha = R \frac{p}{\sqrt{D^2 + p^2}}. \quad (2.37)$$

En changeant le (r, ϕ) en (γ, p) , nous calculons le déterminant de Jacobienne, $detJ = \frac{D^2 R}{(D^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$. Alors le changement des variables est $drd\phi = \frac{D^2 R}{(D^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dpd\gamma$.

Grâce aux équations de ré-arrangement précédentes, la méthode FBP en géométrie éventail avec détecteur plat est décrite comme suite :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D^2}{U^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R}{\sqrt{D^2 + p^2}} \mathcal{D}\mathbf{f}(\gamma, \alpha(p)) \mathbf{q}(p' - p) dpd\gamma \quad (2.38)$$

où U est la distance de $\overline{a(\gamma)A}$, ce qui est la projection de $\overline{a(\gamma)M}$ sur le rayon X central. D est la distance entre la source le détecteur. Et p' est la projection de pixel M sur le détecteur,

$$p' = \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\gamma)}{R + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\gamma - \pi/2)} D \quad (2.39)$$

où $\boldsymbol{\theta}(\gamma) = (\cos \gamma \ \sin \gamma)^t$. Nous référons la démonstration de la formule (eq.2.39) dans l'annexe A de [1] et [45], page 87.

II.2.4 Les méthodes analytiques de la reconstruction tridimensionnelle

Les méthodes rétro-projections filtrées peuvent être étendues pour une reconstruction 3D. Nous nous intéressons à la reconstruction topographique 3D à partir des données coniques avec la trajectoire de source circulaire (voir la figure 2.7). Feldkamp et al ont étendu la méthode FBP en géométrie éventail à la tomographie 3D à faisceau conique avec 2D détecteur plat [46]. La formule (2.38) peut être réécrite avec $\cos \alpha(p) = \frac{D}{\sqrt{D^2 + p^2}}$ (voir la figure 2.6.(b)), comme ci-dessous :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{RD}{U^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}\mathbf{f}(\gamma, \alpha) \cos(\alpha(p)) \mathbf{q}(p' - p) dpd\gamma \quad (2.40)$$

La reconstruction 3D peut être considérée comme la reconstruction d'une pile des coupes. La reconstruction de la coupe médiane est égale à la reconstruction tomographique 2D en géométrie éventail, où la source de rayons X se trouve et toutes les projections de cette

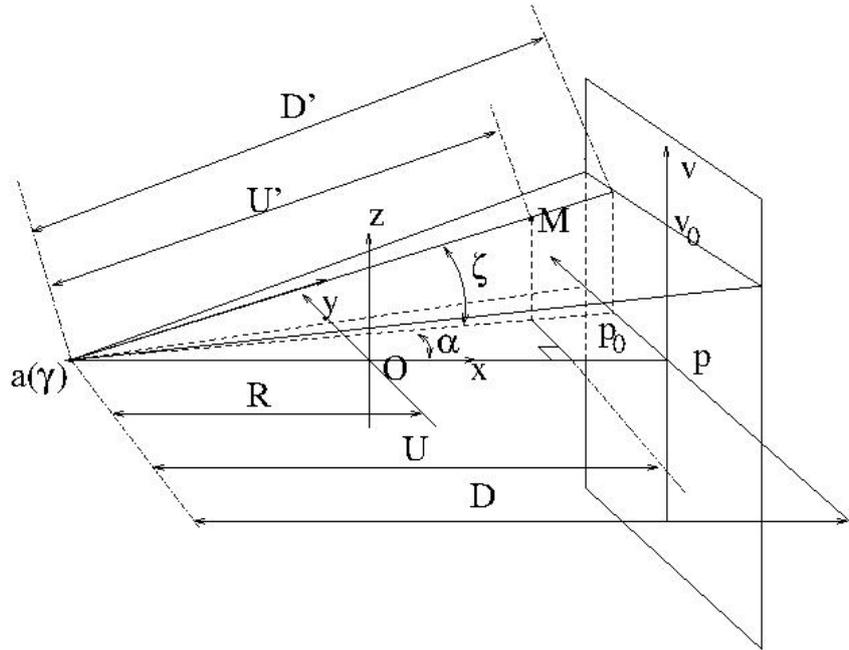


Figure 2.7 – Illustration de la géométrie de la tomographie à faisceau conique (extrait de [1]).

coupe sont toujours sur le même plan. Un voxel en dehors de la coupe médiane se trouve sur les plans obliques en fonction de l'angle de projection. Il peut être reconstruit à partir des profils des plans obliques qui l'intersectent. Nous avons les équations géométriques ci-dessous :

$$\frac{D}{U} = \frac{D'}{U'} \quad (2.41)$$

$$\cos \alpha \cos \zeta = \frac{D}{\sqrt{D^2 + p_0^2 + v_0^2}} \quad (2.42)$$

Nous déduisons des équations (2.38), (2.41) et (2.42) :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D^2}{U^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{D}{\sqrt{D^2 + p_0^2 + v_0^2}} \mathcal{D}\mathbf{f}(a(\gamma), \boldsymbol{\theta}(\gamma, p, v_0)) q(p - p_0) dp d\gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{D^2}{U^2} \int_{\mathbb{R}} \cos \alpha \cos \zeta \mathcal{D}\mathbf{f}(a(\gamma), \boldsymbol{\theta}(\gamma, p, v_0)) q(p - p_0) dp d\gamma \end{aligned} \quad (2.43)$$

En comparant avec l'équation 2.38, 2.43 peut être considéré comme utiliser les projections des plans obliques ($\zeta \neq 0$) sur la plan médian avec terme de $\cos \zeta$. Nous pouvons considérer la méthode de Feldkamp de la manière suivante :

1. les projections des plans obliques sur le plan médian.
2. le filtrage des projections 2D.
3. rétro-projections en volume 3D

La méthode de Feldkamp et al n'est pas une méthode de reconstruction tomographie 3D exacte car la trajectoire circulaire de la source de rayons X n'est pas complète d'après les

conditions de complétude de Tuy fameuse [47]. Tuy énonce les conditions de complétude de la manière suivante :

Condition 1 (Conditions de Tuy). *Le problème de la reconstruction d'une image à partir de projections coniques acquises le long d'une trajectoire bornée admet une solution stable et exacte si tout plan coupant la région d'intérêt d'image rencontre également de façon non tangentielle la trajectoire de la source en au moins un point.*

L'idée de la méthode de Feldkamp et al est de faire une approximation sur le filtrage mais de garder la rétro-projection avec le maximum de précision. Les propriétés de cette méthode qui nous intéressent sont les suivantes [46] et [1], page 47 :

- la reconstruction dans le plan médian est exacte. Les erreurs de reconstruction augmentent lorsque l'angle d'ouverture $\zeta(v)$ augmente.
- les intégrales sur les directions axiales z sont conservées.
- Elle n'introduit pas d'artefacts si l'objet est constant en z .

Pour l'objectif d'une reconstruction 3D exacte, Katsevich a proposé une formule d'inversion de type rétro-projections filtrées permettant reconstruire à partir des données coniques acquises le long d'une trajectoire hélicoïdale [48] et [49]. La trajectoire hélicoïdale est complète car elle satisfait les conditions de Tuy. La démonstration de cette formule d'inversion exacte est détaillée dans [48].

II.3 Méthodes de reconstructions itératives

Les méthodes de reconstruction analytiques présentées ci dessus peuvent se diviser en deux familles : les approches de reconstruction dans le domaine de Fourier et les approches de type rétroprojection filtrée. Les premières approches consistent à appliquer directement le théorème coupe projection (voir l'eq.2.16). Pour ce faire, on calcule la transformée de Fourier mono-dimensionnel de chaque projection puis on fait une interpolation dans le domaine de Fourier permettant de passer d'une grille polaire à une grille cartésienne, enfin on calcule la transformée de Fourier inverse bi-dimensionnelle. Cette approche est très sensible aux erreurs d'interpolation. En conséquence, si on utilise un interpolateur efficace, il y a des artefacts importants sur les reconstructions et si on utilise un interpolateur très précis comme l'interpolateur de Shannon le temps de calculs devient très important. La deuxième famille de méthodes est nettement plus efficace. Ces approches rapides assez robustes au bruit de mesure sont systématiquement implantées sur les scanners commercialisés. Elles possèdent néanmoins les limitations suivantes. L'estimateur obtenu étant linéaire et invariant vis à vis des données, ces performances en terme de robustesse aux bruits sont moindres par rapport aux estimateurs non linéaires (voir figure 4.1) lorsqu'il y a beaucoup de bruit (tomographie à faible dose). De plus la propriété d'invariance nécessite d'avoir un échantillonnage angulaire des projections uniformes et toutes les données doivent être présentes. Par exemple, s'il y a des pixels morts sur le détecteur, l'opération de filtrage entraînera des artefacts important sur les reconstructions.

Les méthodes itératives bien que plus coûteuse en terme de temps de calcul ne possèdent pas ces limitations. Elles permettent de tenir compte d'une grande variété

II.3.1 - Méthodes algébriques

d'informations *a priori* et elles permettent de faire un traitement non invariant des projections. De ce fait, elles résolvent naturellement les problèmes des redondances différentes et de données manquantes.

Nous rassemblons dans ce document sous l'appellation " méthodes itératives " les approches algébriques et les approches statistiques. Historiquement les approches algébriques ont été les premières à être utilisées par Hounsfield dans le cadre de la reconstruction tomographique [9]. Ces approches cherchent à résoudre numériquement un système linéaire de grande dimension avec la méthode de Kaczmarz ([50], [45], et [38]). Les méthodes statistiques ont d'abord été utilisées pour résoudre le problème de la tomographie à émission de position (TEP) [33]. Dans ces travaux, le faible taux de comptage des photons a conduit à utiliser une statistique poissonnienne. Cette approche à ensuite été étendue à la tomographie à rayons X [18]. Notons que dans ce cas le modèle poissonnien n'est pas le plus précis car il y a la présence d'un bruit électronique relativement important qui peut être facilement modélisé par un bruit gaussien. Nous avons donc à faire à la somme d'un processus poissonnien et d'un bruit gaussien [20] et [16]. Nous exposerons donc dans la suite les principales approches algébriques et statistiques.

II.3.1 Méthodes algébriques

Dans le CT, après linéarisation des mesures, nous obtenons les intégrales des coefficients d'atténuations de l'objet sur l'ensemble des lignes droites. Elles sont décrites par les équations linéaires. Du point de vue des méthodes algébriques, le but de la reconstruction tomographique est de trouver les coefficients d'atténuations inconnus en résolvant ces équations linéaires.

Nous définissons un objet \mathbf{f} borné dans un support rectangulaire Ω . \mathbf{f} est discrétisé en N pixels avec $N = N_f \times N_f$ et un pixel est défini par un petit carré, voir la figure 2.8. Il y a M_ϕ projections entre le ϕ_0 et $\phi_0 + \pi$, où ϕ_0 est la position angulaire initiale. Les faisceaux des rayons X traversant l'objet sont mesurés par M_d cellules de détecteur. La discrétisation de la transformée de Radon (eq.2.1) pour la mesure de la cellule i de manière suivante :

$$g_i = \sum_{f_j \text{ sur } L_{i,\phi}} f_j l_{ij} \quad (2.44)$$

où le rayon X sur la ligne droite $L_{i,\phi}$ connecte la source et la cellule i du détecteur, $i = (m_\phi - 1) * M_\phi + m_d$, avec le numéro des projections $m_\phi = 1, 2, \dots, M_\phi$ et le numéro de cellule de détecteur $m_d = 1, 2, \dots, M_d$. l_{ij} est la longueur d'intersection de la ligne $L_{i,\phi}$ avec le pixel j de l'objet, ce qui représente la contribution du pixel j de l'objet sur la mesure de la cellule i du détecteur, voir la figure 2.8.

Pour tout l'objet, les équations peuvent être exprimées sous forme matricielle :

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} \quad (2.45)$$

avec $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^M$ le vecteur des mesures, où M est le nombre des mesures avec $M = M_\phi * M_d$. La matrice de système $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{M \times N}$, où son élément h_{ij} décrit la contribution du pixel j à la mesure i du détecteur avec $h_{ij} = l_{ij}$, $i=1, \dots, M$ et $j=1, \dots, N$.

Si la matrice du système \mathbf{H} est inversible, la reconstruction de l'objet s'écrit comme

$$\mathbf{f} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g} \quad (2.46)$$

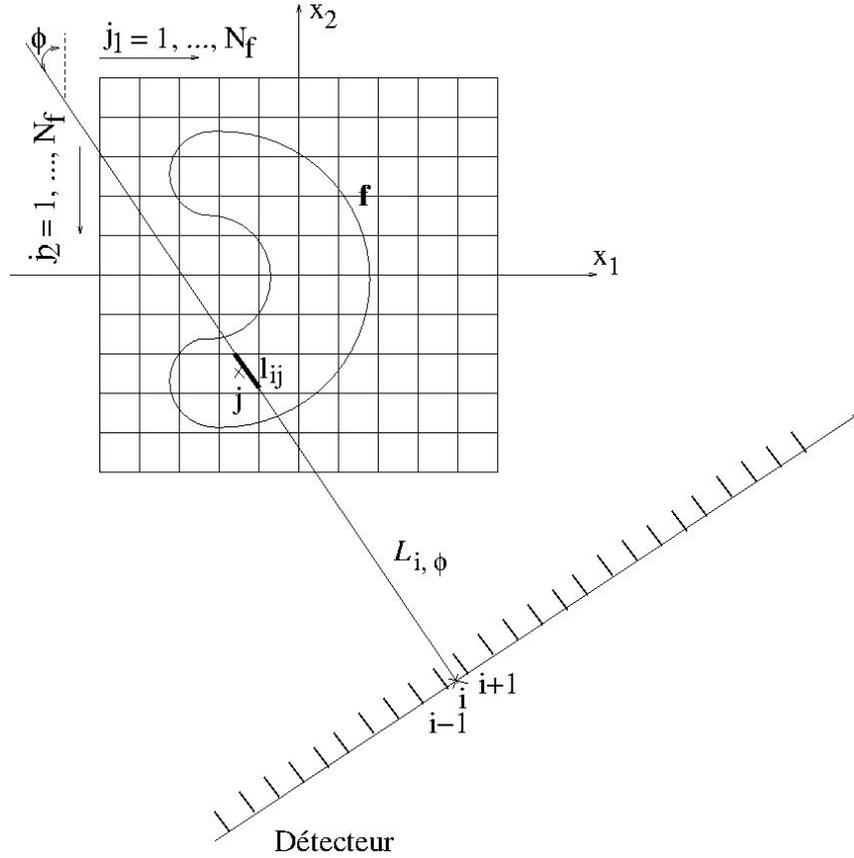


Figure 2.8 – Illustration du rayon X_i traversant l'image discrète de l'objet. Le pixel j est énuméré par $j = (j_2 - 1) * N_f + j_1$.

où \mathbf{H}^{-1} est l'inverse de la matrice du système \mathbf{H} . Mais la matrice \mathbf{H} n'est souvent pas inversible. D'abord, la matrice \mathbf{H} n'est pas une matrice carrée si le nombre d'inconnus de \mathbf{f} N n'est pas égal au nombre des mesures de \mathbf{g} M . Ensuite elle n'est pas non plus inversible numériquement même si N est égal à M avec présence du bruit.

Afin de résoudre cette équation linéaire 2.45, Kaczmarz ([50] et [38]) a proposé une solution itérative. L'estimation de pixel j inconnu en $(k+1)^{\text{ième}}$ est exprimée comme suit, $f_j^{(k+1)}$, $j=1, 2, \dots, N$,

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \frac{g_i - g_i^{(k)}}{\sum_{w=1}^N h_{iw}^2} h_{ij} \quad (2.47)$$

avec

$$g_i^{(k)} = \sum_{w=1}^N f_w^{(k)} h_{iw} \quad (2.48)$$

où $g_i^{(k)}$ est la projection estimée de $\mathbf{f}^{(k)}$ sur la ligne droite L_i . Nous nous intéressons à la différence entre les deux estimations successives δf_j ,

$$\delta f_j^{(k+1)} = f_j^{(k+1)} - f_j^{(k)} = \frac{g_i - g_i^{(k)}}{\sum_{w=1}^N h_{iw}^2} h_{ij} \quad (2.49)$$

Les méthodes algébriques de reconstruction tomographique basées sur la méthode de Kaczmarz consistent à résoudre l'équation linéaire 2.45 de manière itérative. Elles peuvent

II.3.1 - Méthodes algébriques

être décomposées en trois groupes : les méthodes ART [30], [51] et [52], les méthodes SIRT [31], [53] et les méthodes SART [32].

II.3.1.1 ART

Les méthodes ART sont introduites par Gordon et al en tomographie électronique et photographie à rayons X [30]. Gordon et al ont proposé deux algorithmes algébriques de reconstruction tomographique, un algorithme algébrique additif et un algorithme algébrique multiplicatif (MART, acronyme de Multiplicatif Algebraic Reconstruction Technique).

En prenant en compte la contrainte de la positivité des coefficients d'atténuation linéaire, Gordon et al ont réécrit l'étape de mise à jour (2.47) dans leur algorithme additif comme ci-dessous:

$$f_j^{(k+1)} = \max\left\{f_j^{(k)} + \frac{g_i - g_i^{(k)}}{\sum_{w=1}^N h_{iw}^2} h_{ij}, 0\right\} \quad (2.50)$$

le terme de mise à jour de pixel j f_j de MART est donnée dans [30],

$$f_j^{(k+1)} = \frac{g_i}{g_i'} f_j^{(k)} \quad (2.51)$$

où g_i est la mesure du rayon X i et la projection du rayon X i g_i' est estimée par l'éq.2.48.

La contrainte de la positivité est systématiquement satisfaite si l'initialisation de f_j est positive. Une image initiale simple est utilisée pour tous les algorithmes dans [30] avec $\mathbf{f}^{(0)} = \frac{T_c}{N}$, où T_c est la somme des CALs de l'objet. T_c est calculé simplement,

$$T_c = \sum_{i=1}^M g_i \quad (2.52)$$

Une approximation binaire dans la matrice du système \mathbf{H} est utilisée dans [30].

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & f_j \in L_i \cap \Omega \\ 0 & f_j \notin L_i \cap \Omega \end{cases} \quad (2.53)$$

Nous avons alors $\sum_{w=1}^N h_{iw}^2 = N_i$ dans l'équation (2.47), où N_i est le nombre des pixels sur la ligne droite L_i . La différence de pixel j (2.49) dans ART devient

$$\delta f_j^{(k+1)} = \frac{g_i - g_i^{(k)}}{N_i} \quad (2.54)$$

avec $h_{ij} = 1$. L'équation 2.50 est réécrite comme ci-dessous,

$$f_j^{(k+1)} = \max\left\{f_j^{(k)} + \frac{g_i - g_i^{(k)}}{N_i}, 0\right\}. \quad (2.55)$$

L'approximation binaire est l'interpolation du plus proche voisin. Elle est correcte quand l'angle de projection $\phi = 0$, parce que la longueur de l'intersection de la ligne L_ϕ est le nombre des pixels N_i multiplié par la longueur unitaire de pixel. Mais elle n'est plus exacte quand $\phi = 45^\circ$, la longueur de l'intersection devient $\sqrt{2}N_i$ multiplié par unité

de pixel. Cela peut résulter des artefacts avec l'équation (2.54). Nous modifions dans la suite l'équation 2.54 [32] et [45],

$$\delta f_j^{(k+1)} = \frac{g_i}{S_i} - \frac{g_i^{(k)}}{N_i}, \quad (2.56)$$

où S_i est la longueur d'intersection du rayon $X L_i$ avec l'objet.

En plus, les images reconstruites par ART sont de plus en plus bruitées au cours d'itération [31], [32], [45] et [38]. Afin d'avoir une reconstruction moins bruitée, nous pouvons utiliser la méthode de Kaczmarz avec relaxation. D'après les équations 2.47, 2.49 et 2.56, nous mettons à jour de f_j avec relaxation comme suit :

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \varpi \delta f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \varpi \left(\frac{g_i}{S_i} - \frac{g_i^{(k)}}{N_i} \right), \quad (2.57)$$

avec le paramètre de relaxation ϖ , $\varpi < 1$. Les ARTs avec relaxation permettent une reconstruction moins bruitée ([54]) mais au détriment de la vitesse de convergence. Une autre solution de réduction du bruit dans les images reconstruites est de utiliser les méthodes SIRT [31] et [45].

II.3.1.2 SIRT

Dans les méthodes ART, nous mettons à jour un pixel à partir d'une projection pendant une itération. Dans une itération de SIRT, un pixel n'est pas modifié tant que toutes les projections soient utilisées [31]. Les formules additives (eq.2.50) et multiplicatives (eq.2.51) sont réécrites comme suit :

- algorithme additif direct

$$f_j^{(k+1)} = \max \left\{ f_j^{(k)} + \frac{\sum_{i=1}^M g_i}{\sum_{i=1}^M S_i} - \frac{\sum_{i=1}^M g_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^M N_i}, 0 \right\} \quad (2.58)$$

- algorithme multiplicatif direct

$$f_j^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^M g_i \sum_{i=1}^M N_i}{\sum_{i=1}^M S_i \sum_{i=1}^M g_i^{(k)}} f_j^{(k)} \quad (2.59)$$

La mise à jour d'un seul pixel avec toutes les projections permet de réduire l'effet d'inconsistance de certaines projections dans SIRT. Par contre, le temps de calcul est plus long pour les approches SIRT, car la mise à jour d'un seul pixel nécessite toutes les projections. Afin d'obtenir la qualité des images identiques aux approches SIRT tout en ayant un coût calculatoire limité, Andersen et al ont proposé les méthodes SARTs [32] et [45].

II.3.1.3 SART

Les méthodes SARTs combinent les avantages des ARTs et des SIRTs [32], [45]. Pour cela, toutes les projections sont utilisées pour mettre à jour un seul pixel comme SIRT et

II.3.1 - Méthodes algébriques

un modèle de projection plus pertinent est également utilisé, ce qui permet une convergence plus rapide que celle des SIRTs. L'approche consiste à échantillonner régulièrement l'intersection du rayon X avec l'objet. Le pas d'échantillonnage est noté δs , la contribution de l'objet à la projection est calculé par interpolation linéaire en utilisant l'équation ci dessous. Soit $f(s_{in})$ un point d'image et $m^{\text{ième}}$ l'échantillon sur le rayons X i . Cette valeur peut être approchée comme suit :

$$f(s_{in}) = \sum_{j \in \mathcal{V}(f(s_{in}))} d_{ijn} f_j \quad (2.60)$$

où $\mathcal{V}(f(s_{in}))$ est le voisinage du point $f(s_{in})$, d_{ijn} est le coefficient de pondération associé à l'interpolation bilinéaire dépendant de la distance entre le pixel $f(s_{in})$ et ses voisins, n est le numéro de l'échantillon, $n = 1, 2, \dots, N'_i$, (voir la figure 2.9) [55] et [32]. La projection de rayon X i g'_i est alors décrite comme suit :

$$\begin{aligned} g'_i &= \sum_{n=1}^{N'_i} f(s_{in}) \delta s = \sum_{n=1}^{N'_i} \sum_{j \in \mathcal{V}(f(s_{in}))} d_{ijn} f_j \\ &= \sum_{j=1}^N f_j \sum_{n=1}^{N'_i} d'_{ijn} \delta s \end{aligned} \quad (2.61)$$

avec

$$d'_{ijn} = \begin{cases} d_{ijn} & \text{si pixel } j \in \mathcal{V}(f(s_{in})) \\ 0 & \text{si pixel } j \notin \mathcal{V}(f(s_{in})) \end{cases} \quad (2.62)$$

En comparant l'équation 2.48 et l'équation 2.61, nous obtenons h_{ij} :

$$h_{ij} = \sum_{n=1}^{N'_i} d'_{ijn} \delta s \quad (2.63)$$

Nous prenons δs égale à la moitié de la largeur d'un pixel pour ne pas compromettre la résolution de reconstruction tout en ayant un coût de calcul réduit. Le pixel j f_j est mis à jour avec toutes les projections dans les algorithmes de SART comme ci-dessous :

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \frac{\sum_{i=1}^M [h_{ij} \frac{g_i - \sum_{j=1}^N h_{ij} f_j}{\sum_{j=1}^N h_{ij}}]}{\sum_{i=1}^M h_{ij}} \quad (2.64)$$

Les méthodes algébriques (ART, SIRT, SART) considèrent la reconstruction tomographique comme la solution des équations linéaires. Elles sont capables de reconstruire l'objet correctement quand le nombre des projections est limité et sont utiles dans le cas des projection non uniformes, où les méthodes analytiques échouent. Mais les méthodes algébriques ne prennent pas en compte la nature stochastique du comptage des photons X par le détecteur (voir dans la sous-section 1.3.2.3) et de la non-linéarité dû au spectre des rayons X polychromatiques et du diffusé. Pour cela, les méthodes statistiques sont donc proposées et basées sur les modèles statistiques liés à l'acquisition, sur les méthodes de maximum de vraisemblance (MV) [18] et [20] et sur les méthodes bayésiennes [35], [19] et [37].

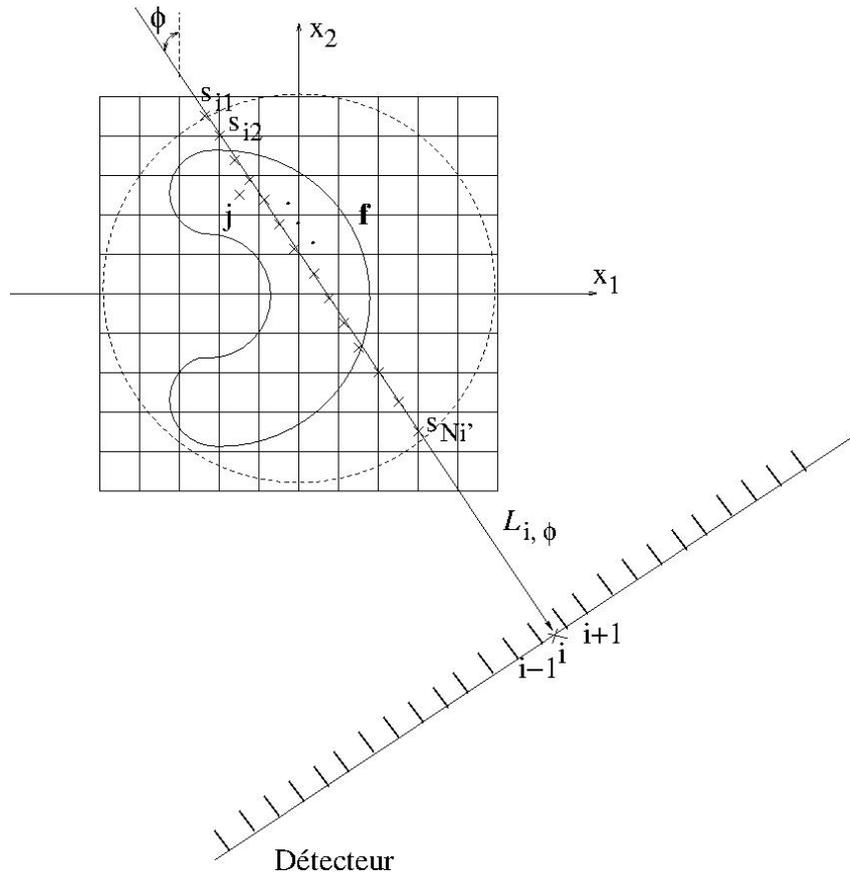


Figure 2.9 – Illustration des projections avec échantillonnages réguliers. Le cercle (en ligne virtuelle) est la zone de reconstruction effective qui contient tout l'objet.

II.3.2 Méthodes statistiques

Les méthodes de MV consistent à estimer l'objet inconnu qui permet de régénérer les projections, les plus proches possibles des mesures du détecteur. Les méthodes bayésiennes non seulement utilisent les mesures des détecteurs mais aussi tiennent compte des informations raisonnables *a priori* correspondantes à l'objet.

II.3.2.1 Méthodes de maximum de vraisemblance

Les méthodes de maximum de vraisemblance sont utilisées pour traiter les problèmes de données incomplètes via l'algorithme EM, [56]. Elles ont été introduites en PET [33], [18]) et CT ([37], ce qui permet d'utiliser les modèles statistiques liés aux acquisitions des données.

On considère ici que les mesures sont discrétisées, de plus nous allons supposer que $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]^t$, est un vecteur aléatoire. Nous procédons de même pour l'objet discrétisé $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$. Le vecteur des mesures, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^t$, est considéré comme une réalisation du vecteur aléatoire \mathbf{Y} .

L'estimation de MV est obtenue en maximisant la probabilité conditionnelle $P(\mathbf{Y}|\mathbf{f})$:

$$\hat{\mathbf{f}}_{MV} = \arg \max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}) \quad (2.65)$$

$P(\mathbf{Y}|\mathbf{f})$ représente la vraisemblance ce qui implique la similarité entre les projections générées connaissant \mathbf{f} et les mesures des détecteurs. La fonction log est une fonction strictement croissante. Le maximum de vraisemblance est alors équivalent au maximum de log de vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$, ce qui est défini comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{MV} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \ln P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}), \\ &= \arg \max_{\mathbf{f}} L_v(\mathbf{f}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Afin de calculer ce maximum de vraisemblance, nous devons utiliser des algorithmes d'optimisation. Dans le cas d'une vraisemblance poissonnienne, cette optimisation n'est pas triviale. Il faut donc utiliser des approches exactes de types EM ([33] et [18]). Une autre alternative consiste à approcher chaque point du critère issu de la vraisemblance poissonnienne par une fonction quadratique ([34] et [20]). Dans ce cas, on utilise un algorithme de type gradient. La dernière alternative consiste à approcher la vraisemblance poissonnienne par une vraisemblance gaussienne dont la variance dépend de la mesure. Dans ce cas là, on peut aussi utiliser des approches classiques de type descente de gradient.

II.3.2.1.1 Algorithmes EM

Une introduction générale des algorithmes EM est donnée dans [56]. Ils sont très utiles pour traiter les problèmes de données incomplètes, ou pour l'estimation des hyperparamètres des modèles probabilistes. En PET, le nombre des projections est très faible pour une reconstruction satisfaisante. Les algorithmes EM permettent de générer les données non mesurées et améliorer la qualité des images reconstruites [33] et [18].

Soit $\mathbf{f}^{(k)}$ la k -ième estimation de l'objet \mathbf{f} , nous introduisons une variable cachée \mathbf{v} qui permet de compléter les données \mathbf{Y} , comme en PET. Nous réécrivons la probabilité conditionnelle $P(\mathbf{Y}|\mathbf{f})$ en ajoutant la variable cachée \mathbf{v} ,

$$P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}) = \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f}) \quad (2.67)$$

avec $P(\mathbf{v}|\mathbf{f})$ la densité de probabilité de la variable cachée \mathbf{v} . Nous avons $P(\mathbf{v}|\mathbf{f}) \geq 0$ et $\sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{f}) = 1$. Avant la déduction des algorithmes EM, nous introduisons l'inégalité de Jensen.

Théorème 2. (*inégalité de Jensen*) Soit f une fonction convexe définie dans l'intervalle D , si $x_i \in D$, et $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, en plus, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \quad (2.68)$$

Écrivons $L_v(\mathbf{f})$ en fonction de $\mathbf{f}^{(k)}$ estimé en $k^{\text{ième}}$ itération,

$$\begin{aligned}
 L_v(\mathbf{f}) &= L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \ln P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}) - \ln P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}^{(k)}) \\
 &= L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \ln \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f}) - \ln P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}^{(k)}) \\
 &= L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \ln \left(\sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f}) \frac{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})} \right) - \ln P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}^{(k)}) \\
 &\geq L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln \frac{P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})} - \ln P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}^{(k)}) \\
 &= L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln \frac{P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})} - \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}^{(k)}) \\
 &= L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln \frac{P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}^{(k)})} \\
 &= L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \Delta(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)}) &= \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln \frac{P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})P(\mathbf{Y}|\mathbf{f}^{(k)})} \\
 &= \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln \frac{P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f})}{P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f}^{(k)})}
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

En passant de la troisième ligne à la quatrième dans l'équation (2.69), nous obtenons ci-dessous, en utilisant l'inégalité de Jensen car la fonction $-\ln$ est convexe :

$$\ln \left(\sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f}) \frac{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})} \right) \geq \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln \frac{P(\mathbf{Y}|\mathbf{v}, \mathbf{f})P(\mathbf{v}|\mathbf{f})}{P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)})}$$

Nous définissons la fonction alternative $l_v(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$ comme suit :

$$l_v(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)}) = L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \Delta(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)}) \tag{2.71}$$

Nous en déduisons,

$$\begin{aligned}
 l_v(\mathbf{f}^{(k+1)}|\mathbf{f}^{(k)}) &= L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \sum_{\mathbf{v}} \ln \frac{P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f}^{(k)})}{P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f}^{(k)})} \\
 &= L_v(\mathbf{f}^{(k)})
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Lorsque l'estimation suivante $\mathbf{f}^{(k+1)}$ augmente la fonction alternative $l_v(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$, soit $l_v(\mathbf{f}^{(k+1)}|\mathbf{f}^{(k)}) > l_v(\mathbf{f}^{(k)}|\mathbf{f}^{(k)})$, elle aussi augmente la log-vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$.

$$L_v(\mathbf{f}^{(k+1)}) \geq l_v(\mathbf{f}^{(k+1)}|\mathbf{f}^{(k)}) > l_v(\mathbf{f}^{(k)}|\mathbf{f}^{(k)}) = L_v(\mathbf{f}^{(k)}) \tag{2.73}$$

Le maximum de la log-vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$ est alors équivalent au maximum de $l_v(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$. L'estimation $k + 1^{\text{ième}}$ est obtenue en maximisant $l_v(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^{(k+1)} &= \arg \max_{\mathbf{f}} l_v(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)}) = \arg \max_{\mathbf{f}} \left\{ L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln \frac{P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f})}{P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f}^{(k)})} \right\} \\
 &= \arg \max_{\mathbf{f}} \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}|\mathbf{Y}, \mathbf{f}^{(k)}) \ln P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f}) \\
 &= \arg \max_{\mathbf{f}} E_{\mathbf{v}}[\ln P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f})]
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

II.3.2 - Méthodes statistiques

Alors les algorithmes EM se déroulent en deux étapes, étape-E et étape-M.

étape-E Calcul d'espérance de la probabilité conditionnelle, $E_{\mathbf{v}}[\ln P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f})]$

étape-M Estimation de $\mathbf{f}^{(k+1)}$ en maximisant $E_{\mathbf{v}}[\ln P(\mathbf{Y}, \mathbf{v}|\mathbf{f})]$.

La probabilité de nombre de photons X mesuré $P(Y_i = y_i|\mathbf{f})$, est décrite dans la suite par une loi de Poisson [18], [20] et [16] :

$$P(Y_i = y_i) = \frac{e^{-\bar{y}_i} \bar{y}_i^{y_i}}{y_i!}, \text{ avec } i = 1, 2, \dots, M, \quad (2.75)$$

où y_i est une réalisation de Y_i et \bar{y}_i est le nombre espéré des photons X. Pour simplification, nous utilisons la loi Beer-Lambert afin de calculer \bar{y}_i .

$$\bar{y}_i = y_{0,i} e^{-\sum_{j=1}^N l_{ij} f_j} \quad (2.76)$$

où $y_{0,i}$ est le nombre des photons X de la projection i sans atténuation et l_{ij} est la longueur d'intersection de pixel j avec rayon i . En supposant que les mesures des différentes cellules du détecteur sont indépendantes, la probabilité conditionnelle $P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}|\mathbf{f})$ sachant \mathbf{f} est donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}|\mathbf{f}) &= \prod_{i=1}^M P(Y_i = y_i|\mathbf{f}), \\ &= \prod_{i=1}^M \frac{e^{-\bar{y}_i} \bar{y}_i^{y_i}}{y_i!}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

La log-vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$ (eq.2.66) devient,

$$L_v(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^M (-\bar{y}_j + y_j \ln \bar{y}_j - \ln y_j!) \quad (2.78)$$

Nous pouvons étendre $L_v(\mathbf{f})$ en $k^{\text{ième}}$ estimation $\mathbf{f}^{(k)}$ comme 2.71. Après E-étape, nous obtenons la fonction $\Delta(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$ [18] et [37],

$$\Delta(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)}) = \sum_i^M \sum_j^N [-Y_{ij}^S l_{ij} + (Y_{ij}^E - Y_{ij}^S) \ln(1 - e^{-l_{ij} f_j})] \quad (2.79)$$

avec

$$Y_{ij}^E = y_i + y_{0,i} e^{-\sum_{f_n \in L_{S,f_j}} l_{in} f_n^k} - y_{0,i} e^{-\sum_{n=1}^N l_{in} f_n} \quad (2.80)$$

$$Y_{ij}^S = y_i + y_{0,i} e^{-\sum_{f_n \in L_{S,f_j} \cup f_j} l_{in} f_n^k} - y_{0,i} e^{-\sum_{n=1}^N l_{in} f_n} \quad (2.81)$$

où Y_{ij}^E et Y_{ij}^S sont respectivement les nombres espérés de photons X entrant et sortant le pixel j sur la projection i et L_{S,f_j} est le sous-groupe des pixels entre la source de rayons X et le pixel f_j sur la ligne droite de rayon X i.

La M-étape consiste à maximiser $l_v(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$ sur \mathbf{f} , autrement dit maximiser $\Delta(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$ sur \mathbf{f} . La dérivée partielle de $\Delta(\mathbf{f}|\mathbf{f}^{(k)})$ sur f_j est égale à 0 et nous en déduisons :

$$\sum_i^M -Y_{ij}^S l_{ij} + \sum_i \frac{(Y_{ij}^E - Y_{ij}^S) l_{ij}}{e^{l_{ij} f_j} - 1} = 0. \quad (2.82)$$

Lange et al [18] ont donné une approximation de la solution de l'équation 2.82 en supposant que $l_{ij} f_j^{(k+1)}$ est petit,

$$f_j^{(k+1)} = \frac{\sum_i (Y_{ij}^E - Y_{ij}^S)}{\sum_i \frac{Y_{ij}^E + Y_{ij}^S}{2} l_{ij}}. \quad (2.83)$$

L'estimation de MV (eq.2.83) est multiplicative qui est similaire avec celle de MART (eq.2.51) [30] et [33].

II.3.2.1.2 Algorithmes basés sur le gradient

En raison d'un grand nombre d'exponentielles dans les algorithmes EM (eqs.2.80) [56], [18], [37], ils ne sont pas efficaces en terme de complexité de calcul. Pour une reconstruction plus rapide, les algorithmes basés sur le gradient de MV sont développés par Lange et al ([34]) et De Man et al ([16]) en CT et Nuyts et al ([20]) en CT hélicoïdal.

La log-vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$ (éq.2.78) peut être étendue en $\mathbf{f}^{(k)}$ à l'aide du développement à l'ordre deux de la série de Taylor [20] et [16],

$$L_v(\mathbf{f}) \approx L_v(\mathbf{f}^{(k)}) + \sum_j^N \frac{\partial L_v}{\partial f_j} (f_j - f_j^{(k)}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 L_v}{\partial f_j \partial f_n} \Big|_{f_j^{(k)}} (f_j - f_j^{(k)})^2. \quad (2.84)$$

La dérivée partielle de $L_v(\mathbf{f})$ sur f_j est égale à 0, $j=1,2, \dots, N$. Nous obtenons la nouvelle estimation $f_j^{(k+1)}$,

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} - \frac{\frac{\partial L_v}{\partial f_j}}{\sum_{n=1}^N \frac{\partial^2 L_v}{\partial f_j \partial f_n}}, \quad (2.85)$$

avec $\frac{\partial L_v}{\partial f_j}$ la dérivée partielle de premier ordre et $\frac{\partial^2 L_v}{\partial f_j \partial f_n}$ la dérivée partielle de second ordre,

$$\frac{\partial L_v}{\partial f_j} = \sum_{i=1}^M l_{ij} (\bar{y}_i - y_i), \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial^2 L_v}{\partial f_j \partial f_n} = - \sum_{i=1}^M l_{ij} l_{in} \bar{y}_i, \quad (2.87)$$

où \bar{y}_i est le nombre espéré de photons X de la projection i.

II.3.2.1.3 Algorithmes de WLS (acronyme anglais de Weighted Least-Squares)

II.3.2 - Méthodes statistiques

Afin de converger plus vite, nous pouvons utiliser un modèle linéaire direct (voir l'éq.1.20) après linéarisation des mesures du détecteur par l'opposé de log. D'après les équations 1.20 et 2.45, nous réécrivons le modèle linéaire direct comme suit :

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.88)$$

où le vecteur aléatoire $\boldsymbol{\epsilon}$ représente les erreurs de discrétisation et les erreurs de mesures, $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M]^t$. D'après le modèle de bruit (éq.1.21), son élément ϵ_i est supposé indépendant mutuellement qui suit la loi gaussienne, $i = 1, 2, \dots, M$.

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon), \quad (2.89)$$

avec $\mathbf{0}$ le vecteur de zéros et $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon$ la matrice de covariance, $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2\}$. Nous pouvons alors en déduire la probabilité conditionnelle $P(\mathbf{g}|\mathbf{f})$,

$$\mathbf{g}|\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{f}, \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon) \quad (2.90)$$

La log-vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$ devient

$$\begin{aligned} L_v(\mathbf{f}) &= \ln P(\mathbf{g}|\mathbf{f}) \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f})^t \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}) \end{aligned} \quad (2.91)$$

L'estimation de MV est donc équivalent au minimum de la fonction de moindres carrés pondérés $J(\mathbf{f})$ ci-dessous,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{MV} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \ln P(\mathbf{g}|\mathbf{f}), \\ &= \arg \min_{\mathbf{f}} J(\mathbf{f}), \end{aligned} \quad (2.92)$$

avec

$$J(\mathbf{f}) = (\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f})^t \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}), \quad (2.93)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \frac{(g_i - \sum_{j=1}^N l_{ij} f_j)^2}{\sigma_i^2}, \quad (2.94)$$

avec $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^t$. Nous pouvons minimiser la fonction de moindres carrés pondérés avec les algorithmes de la descente de gradient. La $k + 1$ ^{ième} estimation $\mathbf{f}^{(k+1)}$ est obtenue de façon suivante, $j=1, 2, \dots, N$.

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} - \hat{\nu} \frac{\partial}{\partial f_j} J(\mathbf{f}^{(k)}), \quad (2.95)$$

avec $\frac{\partial}{\partial f_j} J(\mathbf{f}^{(k)})$ le gradient,

$$\frac{\partial}{\partial f_j} J(\mathbf{f}) = - \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2} (g_i - \sum_{j=1}^N l_{ij} f_j^{(k)}) l_{ij}, \quad (2.96)$$

et le pas optimal $\hat{\nu}$, ce qui est estimé dans la suite par minimiser la fonction $J(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \mathbf{f}^{(k+1)})$:

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{j=1}^N (\frac{\partial}{\partial f_j} J(\mathbf{f}^{(k)}))^2}{\sum_{i=1}^M \frac{1}{\sigma_i^2} (\sum_{j=1}^N l_{ij} \frac{\partial}{\partial f_j} J(\mathbf{f}^{(k)}))^2} \quad (2.97)$$

En comparant les équations (2.95) et (3.39), l'algorithme de WLS par descente de gradient est similaire à celui basé sur le gradient, ce qui suppose que le comptage de photons X est Poisson. Mais le pas de descente est différent. Par rapport au dernier, la fonction de moindres carrés pondérés du premier est convexe, ce qui permet de garantir la convergence vers un minimum global.

D'après la déduction des algorithmes EM, l'estimation de \mathbf{f} de chaque itération augmente la log-vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$. Si $L_v(\mathbf{f})$ est croissante strictement, les estimations $\mathbf{f}^{(k)}$ des algorithmes EM convergent vers un maximum global. Mais les algorithmes basés sur le gradient ne garantissent pas la croissance de la log-vraisemblance $L_v(\mathbf{f})$ de chaque itération car ils sont déduits par l'approximation de $L_v(\mathbf{f})$ en $\mathbf{f}^{(k)}$, ce qui n'assure pas que $\mathbf{f}^{(k+1)}$ de l'éq.3.39 augmente tout le temps $L_v(\mathbf{f})$. En plus, s'il existe plusieurs points stationnaires de la log-vraisemblance, les algorithmes de MV peuvent converger vers un maximum local [56], [33] et [18].

Grâce aux modèles statistiques du comptage du nombre de photons X , les méthodes de MV permettent de produire des meilleures images que celles des méthodes analytiques, par exemple FBP, mais au détriment du temps de reconstruction. La reconstruction de MV est une reconstruction itérative au lieu d'une étape reconstruction comme les méthodes FBP. La vitesse de convergence des méthodes MV via les algorithmes EM est lente car nous estimons les mesures non observées et calculons l'espérance des données complètes dans l'étape-E. Les algorithmes gradient-basé convergent relativement rapidement, mais le temps de reconstruction est encore plus coûteux que celui de FBP. L'accélération de la reconstruction de MV est nécessaire pour atteindre le temps de reconstruction acceptable dans les applications cliniques. Hudson et al ont proposé une stratégie d'accélération efficace des algorithmes EM utilisant les sous-ensembles ordonnés des projections en PET, dite " OS-EM " (acronyme anglais, Ordered Subsets Expectation Maximazation) [57]. Elle peut être appliquée dans les autres algorithmes comme OSC [58] (acronyme anglais, Ordered Subsets Convex algorithm). Une autre stratégie d'accélération des méthodes de MV est l'introduction des informations *a priori* de l'objet, [56] et [19]. Ces types des méthodes sont connues comme les méthodes bayésiennes [35], [19] et [36], qui combinent le terme de vraisemblance et le modèle *a priori*.

II.3.2.2 Méthodes Bayésiennes

Nous pouvons aussi estimer \mathbf{f} en maximisant la probabilité conditionnelle $P(\mathbf{f}|\mathbf{Y})$. Autrement dit, nous cherchons une estimation de \mathbf{f} qui est la solution plus probable avec des mesures actuelles \mathbf{Y} . Cette estimation est appelée, l'estimation de maximum *a posteriori* (MAP), $\hat{\mathbf{f}}_{MAP}$. D'après la formule de Bayes, $P(\mathbf{f}|\mathbf{Y})$ est dérivé par

$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}|\mathbf{Y}) &= \frac{P(\mathbf{f}, \mathbf{Y})}{P(\mathbf{Y})}, \\ &= \frac{P(\mathbf{Y}|\mathbf{f})P(\mathbf{f})}{P(\mathbf{Y})}, \end{aligned} \tag{2.98}$$

II.3.2 - Méthodes statistiques

où $P(\mathbf{f}, \mathbf{Y})$ est la probabilité conjointe de \mathbf{f} et \mathbf{Y} et $P(\mathbf{f})$ représente la fonction de la densité de probabilité de l'objet inconnu. L'estimation de MAP est décrite comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f}|\mathbf{Y}), \\ &= \arg \max_{\mathbf{f}} \frac{P(\mathbf{Y}|\mathbf{f})P(\mathbf{f})}{P(\mathbf{Y})}, \\ &= \arg \max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{Y}|\mathbf{f})P(\mathbf{f}),\end{aligned}\tag{2.99}$$

car $P(\mathbf{Y})$ est indépendant de \mathbf{f} . Comme l'estimation de MV, l'estimation de MAP est aussi équivalente à celle suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \ln P(\mathbf{f}|\mathbf{Y}), \\ &= \arg \max_{\mathbf{f}} \ln(P(\mathbf{Y}|\mathbf{f})P(\mathbf{f})), \\ &= \arg \max_{\mathbf{f}} L_v(\mathbf{f}) + \ln P(\mathbf{f}),\end{aligned}\tag{2.100}$$

où $L_v(\mathbf{f})$ est la vraisemblance et $\ln P(\mathbf{f})$ est interprété par les informations *a priori*.

L'estimateur de MAP consiste à maximiser la probabilité *a posteriori*, voir l'équation 2.100). Afin de simplifier la complexité de calcul et éviter les calculs exponentiels comme dans les algorithmes de WLS, nous utilisons un modèle linéaire direct avec le bruit gaussien (voir l'équation 2.88). $L_v(\mathbf{f})$ est alors la fonction de moindres carrés pondérés, voir l'équation 2.93.

Le modèle *a priori* dans la log-a posteriori (voir l'eq.2.100) est correspondant aux connaissances de l'objet. En imagerie dentaire, les matériaux de la mâchoire humaine sont déjà connus dans les études biomédicales, les os, les tissus mous, les dents, etc.. La distribution des CALs dans un matériau, par exemple les tissus mous, peut être décrite par une loi gaussienne. En plus, les CALs de différents matériaux sont non corrélés. Nous attribuons donc une loi exponentielle définie comme ci-dessous :

$$P(\mathbf{f}) = C_{\mathbf{f}}^{-1} e^{-\lambda \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f})}\tag{2.101}$$

où $C_{\mathbf{f}}$ est la constante de normalisation, $C_{\mathbf{f}}^{-1} = \int_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} e^{-\lambda \Phi_h(\mathbf{D}\mathbf{f})} d\mathbf{f}$. λ est le paramètre d'échelle et Φ représente une fonction potentielle [59] avec la matrice des différences finies \mathbf{D} . Nous utilisons dans la suite la fonction Huber comme la fonction potentielle Φ , ce qui permet de décrire l'homogénéité au sein d'un matériau et de garder la variété entre deux matériaux proches. La fonction de Huber est définie comme ci-dessous :

$$\Phi(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } |t| \leq \delta_h, \\ 2\delta_h|t| - \delta_h^2 & \text{si } |t| > \delta_h, \end{cases}\tag{2.102}$$

avec δ_h le seuil de la fonction Huber. Les autres modèles *a priori* peuvent être aussi appliqués en CT, par exemple, Gibbs ([37]), TV (acronyme anglais de Total Variation [60]) et le champ aléatoire Markovien [19].

En remplaçant les équations 2.91 et 2.101 dans l'équation 2.100 et en négligeant le

terme indépendant de \mathbf{f} , nous obtenons l'estimation MAP,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{f}}_{MAP} &= \arg \max_{\mathbf{f}} \left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f})^t \Sigma_{\epsilon}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}) - \lambda\Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f})^t \Sigma_{\epsilon}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}) + \lambda\Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) \right\}\end{aligned}\quad (2.103)$$

La reconstruction peut être considérée comme un problème d'optimisation avec la fonction de coût $J(\mathbf{f})$ comme suit :

$$J(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f})^t \Sigma_{\epsilon}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}) + \lambda\Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) \quad (2.104)$$

L'estimation par MAP est obtenue par minimisation de la fonction d'optimisation $J(\mathbf{f})$, qui est aussi connue comme la solution des moindres carrés pondérés avec régularisation ou PWLS (acronyme anglais de Penalized Weighted Least-Squares) [36], [61] et [62].

Nous utilisons la fonction Huber (voir l'eq.2.102) comme $\Phi(\cdot)$. $J(\mathbf{f})$ est alors convexe. Nous présentons dans la suite les algorithmes d'optimisation convexe.

II.3.2.2.1 Algorithmes d'optimisation

Nous commençons par l'algorithme d'optimisation le plus simple, descente de gradient (DG). Mais il converge assez lentement, afin d'accélérer la convergence, les algorithmes de gradient conjugué (GC) utilisent les vecteurs de direction qui sont conjugués mutuellement [63].

a) Descente de gradient

Dans l'optimisation convexe, en particulier optimisation quadratique, le gradient $\nabla J(\mathbf{f})$ de la fonction d'optimisation $J(\mathbf{f})$ indique la direction où $J(\mathbf{f})$ augmente le plus localement. L'idée naïve de minimisation de $J(\mathbf{f})$ est de chercher un \mathbf{f} dans le sens contraire du gradient $\nabla J(\mathbf{f})$, voir dans la figure 2.10. Le gradient $\nabla J(\mathbf{f})$ est donné ci-dessous,

$$\nabla J(\mathbf{f}) = -\mathbf{H}^t \Sigma_{\epsilon}^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}) + \lambda \nabla \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) \quad (2.105)$$

avec $\nabla \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \mathbf{D}\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}\mathbf{f}} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) = \mathbf{D}^t \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}\mathbf{f}} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f})$.

La mise à jour de \mathbf{f} de $(k+1)$ ^{ème} itération est décrite comme suit :

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} - \nu^{(k)} \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}) \quad (2.106)$$

où $\nu^{(k)}$ est le pas d'avancement de k ^{ème} itération. $\nu^{(k)}$ peut être déterminé par les algorithmes de recherche linéaire, ce qui minimise la fonction $J(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))$, ou simplement attribué par une constante, [63]. Dans notre algorithme de DG, nous utilisons le pas optimal, ce qui minimise aussi $J(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))$. Nous en déduisons une expression explicite de pas d'avancement au lieu d'utilisation des algorithmes de recherche sur ligne, ce qui prend du temps supplémentaire.

$$\nu^{(k)} = \arg \min_{\nu} J(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})). \quad (2.107)$$

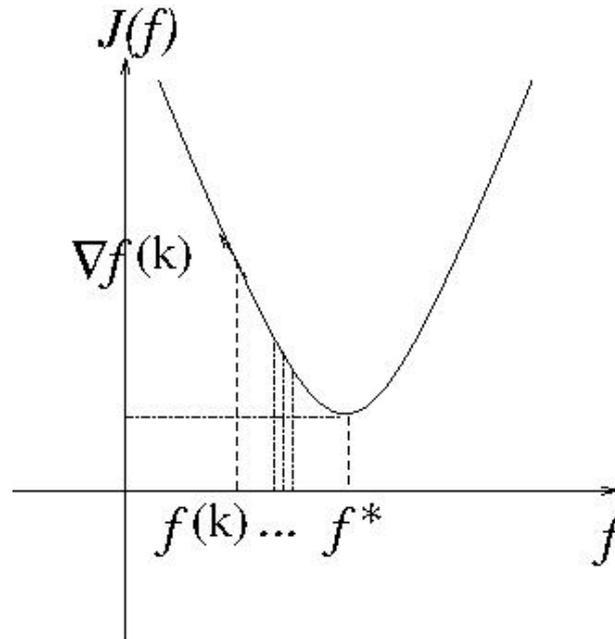


Figure 2.10 – Illustration de l'algorithme de descente de gradient dans le cas de fonction parabolique. f^* est la solution qui minimise la fonction $J(f)$.

Alors,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})) = 0, \quad (2.108)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} J(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})) = & (\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}^{(k)})^t \mathbf{H} \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}) + \nu (\mathbf{H} \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))^t \mathbf{H} \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}) + \\ & \lambda \frac{\partial \mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D}(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))), \end{aligned} \quad (2.109)$$

où $\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D}(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})))$ peut être approché par expansion de l'ordre un de la série de Taylor,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D}(\mathbf{f}^{(k)} - \nu \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))) \approx \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}) - \nu \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})^t \partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}) \quad (2.110)$$

En remplaçant les équations 2.110 et 2.109 dans l'équation 2.108, nous obtenons le pas optimal $\hat{\nu}$,

$$\hat{\nu} = \frac{\|\nabla J(\mathbf{f}^{(k)})\|^2}{(\nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))^t (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})^t \partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}) \mathbf{D}) \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})}, \quad (2.111)$$

où $\|\cdot\|^2$ est la norme euclidienne de l'ordre deux.

b) Algorithmes de gradient conjugué

Le sens contraire de gradient n'est souvent pas une bonne direction de recherche [63]. Un meilleur choix est d'utiliser les vecteurs de direction conjugués. Les vecteurs de direction conjugués sont définis comme suit :

$$\mathbf{d}^i \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{f}^t \partial \mathbf{f}} J(\mathbf{f}) \mathbf{d}^j = 0, \text{ si } i \neq j \quad (2.112)$$

où \mathbf{d}^i et \mathbf{d}^j sont $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ vecteur de direction respectives. Et la différentielle de l'ordre 2 de $J(\mathbf{f})$ (voir l'équation 2.104) est considérée comme la matrice caractéristique, ce qui est donné ci-dessous :

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{f}^t \partial \mathbf{f}} J(\mathbf{f}) = \mathbf{H}^t \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{f}^t \partial \mathbf{f}} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) \mathbf{D} \quad (2.113)$$

$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{f}^t \partial \mathbf{f}} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f})$ n'est pas nul lorsque nous choisissons la fonction potentielle qui est différentielle de l'ordre 2 ou plus, par exemple la fonction de Huber. Les algorithmes de GC sont décrits par

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \nu^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \quad (2.114)$$

avec $\nu^{(k)}$ le pas d'avancement, ce qui est calculé de manière analytique comme l'expression (2.111) dans les algorithmes de DG,

$$\nu^{(k)} = - \frac{(\mathbf{d}^{(k)})^t \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})}{(\mathbf{d}^{(k)})^t (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})^t \partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}) \mathbf{D}) \mathbf{d}^{(k)}} \quad (2.115)$$

et $\mathbf{d}^{(k)}$ le vecteur de direction

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\nabla J(\mathbf{f}^{(k)}) + \tau^{(k)} \mathbf{d}^{(k-1)} \quad (2.116)$$

où le coefficient $\tau^{(k)}$ est déterminé par les directeurs de direction conjugués $\mathbf{d}^{(k-1)}$ et $\mathbf{d}^{(k)}$ qui satisfont la condition (2.112).

$$\tau^{(k)} = \frac{(\nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))^t (\nabla J(\mathbf{f}^{(k)}) - \nabla J(\mathbf{f}^{(k-1)}))}{\|\nabla J(\mathbf{f}^{(k-1)})\|^2} \quad (2.117)$$

Toutes les étapes d'un algorithme GC sont présentées dans 1. $r_{\delta \mathbf{f}}^{(k)}$ est défini par la différence normalisée de deux estimations de \mathbf{f} successives et ϵ_c est une petite constante, par exemple $\epsilon_c = 10^{-4}$, ce qui permet d'assurer une reconstruction convergente. K_{max} est le nombre d'itérations maximal prédéfini, par exemple $K_{max} = 10^4$.

Les algorithmes de GC convergent finalement vers un minimum global lorsque la fonction de coût (voir l'eq.2.104) est convexe. La vitesse de convergence des algorithmes de GC dépend des valeurs propres de la matrice caractéristique (voir l'eq.2.113) et leurs distribution. Plus les valeurs propres sont concentrées, plus vite les algorithmes de GC convergent vers la solution finale. Nous référons l'ouvrage de Nocedal [63] pour plus de détails.

Nous pouvons accélérer les algorithmes de GC par pré-conditionnement, ce qui permet de transformer la matrice caractéristique en celle avec les valeurs propres plus concentrées. Nous transformons le vecteur inconnu \mathbf{f} en le vecteur $\check{\mathbf{f}}$ avec la matrice de pré-conditionnement $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$,

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}\check{\mathbf{f}} \quad (2.118)$$

II.3.2 - Méthodes statistiques

Algorithme 1 Notre algorithme de gradient conjugué.

Initialisation :

$\mathbf{f}^0, \mathbf{d}^0 = -\nabla J(\mathbf{f}^0);$

$k \leftarrow 0;$

$r_{\delta\mathbf{f}}^{(k)} = 1;$

while $r_{\delta\mathbf{f}}^{(k)} > \epsilon_c \& k < K_{max}$ **do**

 Calculer $\nu^{(k)}$ avec l'équation (2.115) ;

$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \nu^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} ;$

 Évaluer $\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)})$ utilisant l'équation (2.105);

$\tau^{(k+1)} = \frac{(\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}))^t (\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))}{\|\nabla J(\mathbf{f}^{(k)})\|^2} ;$

$\mathbf{d}^{(k+1)} = -\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) + \tau^{(k+1)} \mathbf{d}^{(k)} ;$

 Évaluer $r_{\delta\mathbf{f}}^{(k+1)}, r_{\delta\mathbf{f}}^{(k+1)} = \frac{\|J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - J(\mathbf{f}^{(k)})\|}{\|J(\mathbf{f}^{(k)})\|}$

$k \leftarrow k + 1 ;$

end while

La fonction d'optimisation $J(\mathbf{f})$ (2.104) devient comme suit :

$$J(\check{\mathbf{f}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}})^t \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}) + \lambda \Phi(\mathbf{D}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}) \quad (2.119)$$

Le choix de la matrice de pré-conditionnement \mathbf{C} est dépendant de l'application. Notre algorithme de GC pré-conditionné est détaillé en annexe A1.

Remarque 4. Dans ces algorithmes précédents basés sur le gradient, tous les pixels de l'image sont simultanément mis à jour, ils sont alors faciles à paralléliser sur les GPUs (acronyme anglais, Graphics Processing Units) ou multi-CPU, et bénéficie ainsi d'accélération de facteur d'ordre de magnitude 1 ou 2.

II.4 Analyse de complexité des méthodes de reconstruction tomographique

Les différentes méthodes de reconstruction tomographique sont exposées ci-dessus. Nous nous intéressons à l'analyse de la complexité en temps des différentes méthodes de reconstruction tomographique, ce qui permet d'estimer le temps de reconstruction. Les méthodes analytiques peuvent être considérées comme les reconstructions d'une seule itération. Le temps de calculs de méthodes itératives dépend non seulement la complexité en temps d'une itération, mais aussi le nombre d'itération nécessaire pour une reconstruction convergente. Nous n'exposons pas ci-dessous d'analyse de convergence théorique de différentes méthodes itératives. Le résultat de comparaison des vitesses de convergence de méthodes itératives peut changer en fonction de cas d'étude en pratique. Nous comparons donc dans la suite les opérations principales des différentes méthodes lors d'une seule itération.

Nous considérons une reconstruction d'une image 2D $N_f \times N_f$ pixels, à partir des M_ϕ projections sur le détecteur avec M_d cellules dans la tomographie 2D en géométrie divergente. Afin de réduire les artefacts liés à l'échantillonnage spatial et angulaire des mesures, nous prenons $M_\phi \approx 2N_f$ et $M_d = N_f$ [64].

Dans les méthodes TFD, les complexités du temps de la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse sont $O(N_f^2 \log_2 N_f)$ par FFT (acronyme anglais, Fast Fourier Transform) et IFFT (acronyme anglais, Inverse Fast Fourier Transform). $O(\cdot)$ indique l'échelle du nombre des opérations élémentaires. En plus, l'interpolation nécessite $O(N_f^2)$ opérations lors de la conversion de la grille polaire en grille cartésienne (voir la figure 2.3). La complexité des méthodes TFD est donc $O(N_f^2 \log_2 N_f)$. Les méthodes FBP contiennent deux étapes : le filtrage et la retro-projection. Le filtrage sur les projections est souvent fait dans le domaine de Fourier, alors sa complexité est $O(N_f^2 \log_2 N_f)$ comme les méthodes de TFD. La rétro-projection nécessite $2N_f^3$ opérations pour reconstruire l'image de taille N_f^2 à partir des $2N_f$ projections, par contre, nous négligeons la différence de calcul entre les zéros et les non zéros. La complexité des méthodes FBP est donc $O(N_f^3)$.

Quant aux méthodes itératives, les calculs majeurs sont la projection et la rétro-projection. La projection a besoin de $O(N_f^3)$ opérations comme la rétro-projection. En plus, la convolution pour l'opérateur \mathbf{D} est aussi coûteuse en temps de calcul dans les méthodes bayésiennes. Elle nécessite $N_c * N_f^2$ opérations, où N_c est dépendant de la taille de noyau de convolution. Nous ne comparons donc que le nombre des projections, des rétro-projections et des convolutions dans les algorithmes itératifs. Nous comptons les opérations nécessaires par différentes méthodes itératives pour mettre à jour tous les pixels. D'après des équations de ART (2.50) et (2.51), il y a deux projections dans l'algorithme additif, et une seule projection dans l'algorithme multiplicatif (MART). En plus, les pixels sont mis à jour par projection dans les algorithmes ART. Lorsque toutes les projections sont utilisées, c'est équivalent à une rétro-projection. Il faut donc deux projections et une rétro-projection pour l'algorithme additif et une projection et une rétro-projection pour MART. Les méthodes SIRT nécessitent deux projections et quatre rétro-projections (voir les équations 2.58 et 2.59). Il y a deux projections et deux rétro-projections dans les méthodes SART (voir l'eq.2.64).

Dans les méthodes statistiques, les méthodes de maximum de vraisemblance via l'algorithme basé sur le gradient a besoin d'une projection et de deux rétro-projections selon l'équation 3.39 et les algorithmes WLS basés sur la descente de gradient (eq.2.95) nécessitent une projection et une rétro-projection pour le calcul du gradient (eq.2.96) et également la même opération pour l'estimation du pas optimal (eq.2.97). Quant aux méthodes bayésiennes, les algorithmes de gradient conjugué nécessitent le même nombre de projections, de rétro-projections et de convolutions que les algorithmes de descente de gradient, ce qui faut deux projections, deux rétro-projections et quatre convolutions. Les résultats d'analyse de la complexité en temps de différentes méthodes de reconstruction sont résumés dans le tableau 2.1.

\mathbf{H} et \mathbf{H}^t représentent respectivement la projection et la rétro-projection, *Conv* est la convolution et *MUL* et *ADD* signifient respectivement les opérations élémentaires : la multiplication et l'addition, dans le tableau 2.1.

Dans les méthodes analytiques, les méthodes de TFD ($O(N_f^2 \log_2 N_f)$) sont plus efficaces que les méthodes FBPs ($O(N_f^3) + O(N_f^2 \log_2 N_f)$) en complexité de calcul. Mais elles ont besoin de l'interpolation lors de la conversion de la grille polaire à la grille cartésienne et les erreurs de l'interpolation causent des artefacts. Les TFDs sont moins populaires que les FBPs dans la pratique, car les images reconstruites par TFDs sont moins bonnes que celles par FBP.

II.3.2 - Méthodes statistiques

Méthode de reconstruction	Complexité en temps	Commentaires
TFD	$O(N_f^2 \log_2 N_f)$	
FBP	$O(N_f^2 \log_2 N_f) + O(N_f^3)$	filtrage+ \mathbf{H}^t
ART	$3O(N_f^3)$	$2 \times \mathbf{H} + \mathbf{H}^t$
MART	$2O(N_f^3)$	$\mathbf{H} + \mathbf{H}^t$
SIRT	$6O(N_f^3)$	$2 \times \mathbf{H} + 4 \times \mathbf{H}^t$
SART	$4O(N_f^3)$	$2 \times \mathbf{H} + 2 \times \mathbf{H}^t$
MV-Gradient	$3O(N_f^3)$	$\mathbf{H} + 2 \times \mathbf{H}^t$
PWLS-DG	$4O(N_f^3) + 4O(N_c * N_f^2)$	$2 \times \mathbf{H} + 2 \times \mathbf{H}^t + 4Conv$
PWLS-GC	$4O(N_f^3) + 4O(N_c * N_f^2)$	$2 \times \mathbf{H} + 2 \times \mathbf{H}^t + 4Conv$ $+ 3N_f^2 MUL + 3N_f^2 ADD$

Tableau 2.1 – Complexité en temps de différentes méthodes de reconstruction tomographique pour mise à jour d’image.

Pour mettre à jour tous les pixels, les méthodes MART nécessitent le moins d’opérations élémentaires, les méthodes SIRT permettent les images reconstruites moins bruitées que celles par ARTs et MARTs, au prix de la complexité de temps. Nous constatons que la complexité des méthodes SARTs est raisonnable entre celle des SIRTs et celle des ARTs, qui sont considérées comme la combinaison de ces deux méthodes.

Dans les méthodes bayésiennes, les algorithmes PWLS-GC nécessitent le même nombre de projections, de rétro-projections et de convolutions que les algorithmes PWLS-DG, mais le premier a besoin en plus de $3N_f^2$ multiplications et de $3N_f^2$ d’additions pour calculer $\mathbf{d}^{(k+1)}$ et $\tau^{(k+1)}$. En plus, le stockage nécessaire est doublé dans les algorithmes GC par rapport au celui des algorithmes DG, car il y a deux vecteurs importants de plus $\mathbf{d}^{(k+1)}$ et $\nabla J(\mathbf{f}^{(k)})$ dans le premier. Néanmoins, les algorithmes de gradient conjugué convergent souvent plus vite que ceux de descente de gradient.

II.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes analytiques et les méthodes itératives en tomographie. Les méthodes FBP sont couramment utilisées dans les scanners CT car les temps de reconstruction sont faibles et la qualité des images reconstruites est acceptable. Par contre, les hypothèses ($H_{1.1}$, $H_{1.2}$, et $H_{1.3}$) faites dans ces approches ne correspondent pas à la réalité du processus d’acquisition, en particulier lorsqu’on reconstruit des objets fortement contrastés (objets métalliques). On voit donc apparaître des artefacts notamment autour des zones métalliques. De plus, les approches de type FBP sont sensibles au bruit des mesures à cause du filtre de reconstruction qui est un passe haut. On peut aussi noter que la qualité des images se dégrade lorsqu’on réduit le nombre de projections ou lorsqu’on est en présence d’un échantillonnage irrégulier.

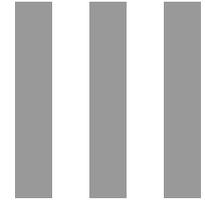
Dans le contexte de la reconstruction à faible dose, la qualité des images produites par les approches FBP ne sont plus suffisantes pour avoir une bonne exploitation médicale. Il faut alors se tourner vers les approches itératives pour obtenir de meilleurs résultats. Les méthodes algébriques étaient déjà appliquées dans les premiers scanners CT [9], car

le nombre des projections était très faible à l'époque. La principale limitation de ces approches algébriques est due au mauvais conditionnement de la matrice de projection ce qui conduit à une augmentation du bruit présent dans les données. De plus, ces approches font l'hypothèse que le bruit de mesure est gaussien iid. Comme le processus de mesure de flux de photons est souvent basé sur un processus de comptage, la statistique du bruit est souvent poissonnienne. Enfin, pour tenir compte du fait que la source de rayons X est polychromatique, nous avons un modèle direct qui devient non linéaire. Dans ce cas, les méthodes algébriques ne permettent pas d'inverser ce type de problèmes. Les méthodes statistiques permettent de s'affranchir de ces limitations. Elles sont basées sur les modèles probabilistes liés à l'acquisition des données et aux informations *a priori* que l'on possède sur l'objet.

Nous avons vu dans ce chapitre des approches permettant de déterminer le maximum de vraisemblance dans le cas d'une vraisemblance poissonnienne. Les deux principales limitations de ces approches sont le temps de calcul et l'amplification du bruit de mesure. Il existe des approches sous optimales pour résoudre ce type de problèmes. Pour ce qui est du temps de calcul, l'approche la plus populaire qui est implantée sur les scanners TEP consiste à faire des mises à jour uniquement avec une sous partie des données ([57] et [58]). Pour ce qui est de l'amplification du bruit, on utilise un post filtrage gaussien. Cette dernière approche n'est souvent pas satisfaisante. On préférera utiliser une approche bayésienne où l'on modélise l'information que l'on possède *a priori* sur l'objet à l'aide d'une loi de probabilité. L'avantage de ces approches c'est qu'elles sont très robustes au bruit car le manque d'information présent dans les données est pallié par l'information *a priori* [19], [36] et [37].

Le principal verrou qui limite l'application des approches statistiques à l'imagerie médicale, c'est le temps de calcul qui est trop important. Au delà des accélérations logicielles, c'est les accélérations matérielles qui ont permis de réduire le plus drastiquement le temps de calcul. Par exemple le calcul parallèle sur des cartes graphiques GPU, permettent d'avoir des facteurs d'accélération entre 50 et 100 pour un coût matériel très faible (moins d'un kilo euros). C'est pourquoi, des méthodes statistiques sont implantées dans les scanners de GE depuis 2008 afin de réduire de la dose de radiation transmise au patient [65]. Suite au développement des GPUs, le temps de reconstruction sera encore réduit, ce qui permettra à ces approches d'être utilisées couramment dans les scanners commerciaux dans un futur proche.

Dans les chapitres suivants nous verrons comment nous arrivons à faire le compromis en qualité de reconstruction et temps calculs afin d'avoir une méthode efficace et possédant de bonnes propriétés.



Méthodes de réduction des artefacts métalliques

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux méthodes de réduction des artefacts métalliques, MAR (acronyme anglaise, Metal Artifact Reduction). Dans un premier temps, nous présentons brièvement les difficultés liées à la présence de métal. Puis nous exposons les méthodes MAR tirées de l'état de l'art : méthodes basées sur l'interpolation, méthodes statistiques avec les modèles physiques liés à l'acquisition, et méthodes de correction du durcissement BHC (acronyme anglais, Beam-Hardening Correction) et de correction du diffusé SC (acronyme anglais, Scatter Correction). Ensuite, nous introduisons les méthodes MAR proposées, qui comportent deux étapes : la correction des données par les méthodes proposées de réduction du durcissement et de réduction du diffusé respectivement puis la reconstruction itérative par la méthode des moindres carrés pondérés (PWLS acronyme anglais). Nos méthodes MAR seront évaluées sur des données expérimentales dans le chapitre V.

III.1 Introduction

Derrière le terme d'artefact métallique se cache plusieurs sources d'erreurs de reconstruction. Premièrement, lorsqu'on place du métal dans les tissus possédant une atténuation bien plus faible, on exacerbe les problèmes. Une petite erreur sur l'atténuation du métal provoque des artefacts importants relativement à la valeur des structures environnantes. Deuxièmement, la nature des artefacts métalliques est due aux approximations présentes dans les modèles physiques utilisés pour l'interaction rayonnement matière. Ces principaux phénomènes physiques qui sont généralement négligés dans les modèles standards de reconstruction tomographique sont les suivants :

- le durcissement :

Dans les systèmes médicaux, le spectre de la source de rayons X est polychromatique. Lorsque les faisceaux de rayons X multi-énergétiques traversent l'objet, les faisceaux de faible énergie sont quasiment tous absorbés par le matériau très atténuant comme le métal ce qui n'est pas le cas pour les faisceaux de plus haute énergie. L'énergie moyenne après avoir traversée le métal est donc beaucoup plus élevée (on dit que le faisceau est durci). Par contre, lorsqu'un faisceau traverse un matériau de faible numéro atomique (ex : eau), il n'est pratiquement pas durci. De plus, les CALs de matériaux sont fonction de l'énergie de photons X (voir la figure 1.10). La mesure de l'atténuation d'une même partie de l'objet peut alors être différente selon l'existence ou non d'une partie métallique sur la trajectoire du faisceau. L'atténuation est sous estimée lorsqu'on est en présence de durcissement. C'est l'incohérence des mesures qui provoque les artefacts. On voit apparaître des raies noires et blanches dans les images reconstruites, voir la figure 3.1.(b).

- le diffusé :
Dû à l'interaction avec les atomes des matériaux rencontrés (voir la figure 1.11), certains photons X dévient de leurs trajectoires. L'hypothèse centrale de la reconstruction tomographique issue des travaux de J. Radon, c'est que l'on mesure l'intégrale selon des lignes de la propriété recherchée. Sous cette hypothèse, la part des photons X diffusés détectés est alors traitée comme les photons directs. Ils introduisent donc des erreurs de reconstruction. Ces erreurs peuvent être négligeables si la proportion de photons X diffusés est faible par rapport au nombre total de photons X détectés. Malheureusement en présence de métal le nombre de photons X direct est faible à cause de la forte atténuation du métal. De plus, lorsqu'on fait de la tomographie 3D à partir d'un détecteur plan qui est proche du patient (ce qui est notre cas en tomographie dentaire), la fraction de rayonnement diffusée est importante. Il n'est pas rare que pour les rayons traversant le plus de métal le nombre de photons diffusés détectés soit supérieur au nombre de photons directs. Ces photons supplémentaires entraînent une sous estimation de l'atténuation. De plus cette sous estimation est extrêmement variable en fonction de la distance de métal traversée qui modifie le nombre de photons directs et aussi en fonction de la disposition des objets les uns par rapport aux autres dans la scène qui modifie la proportion de diffusée détectée. Encore une fois c'est l'incohérence des mesures d'atténuation d'un même objet qui provoque les artefacts en forme de raies noires et blanches, que l'on peut voir sur la figure 3.2.(a).
- l'amplification du bruit (linéarisation du modèle direct) :
La transformée de Radon consiste à intégrer l'objet suivant des droites. Cette opération d'intégration est linéaire. En pratique nous mesurons la quantité de photons X qui frappent le détecteur. Cette quantité est liée à l'intégrale de l'exponentielle de l'atténuation sur une ligne. C'est pourquoi, les approches classiques commencent par appliquer un prétraitement en calculant le log du rapport des photons reçus afin d'obtenir une atténuation et d'inverser un problème linéaire. La conséquence de ce prétraitement non linéaire, c'est qu'il change la statistique du bruit qui était présent sur les données. Si on considérait que le bruit sur les données est iid, le bruit sur les données prétraitées n'est plus identiquement distribué il dépend du nombre de photons reçus. Dans les cas où le nombre de photons détectés est faible, la variances du bruit sur les données prétraitées est fortement amplifiée. Par exemple dans le cas où le faisceau de rayons X traverse deux pièces

métalliques alignées, il y a une très forte atténuation et très peu de photons X sont alors détectés. Dans ce cas, une variation d'un faible nombre de photons provoque une grande variation sur l'atténuation obtenue après prétraitement. Le bruit de mesure est donc amplifié (voir la figure 1.13). Cette variabilité de la variance du bruit de mesure n'est pas prise en compte dans les approches classiques comme FBP ce qui provoque les stries noires et blanches dans les images reconstruites voir figure 3.2.(b).

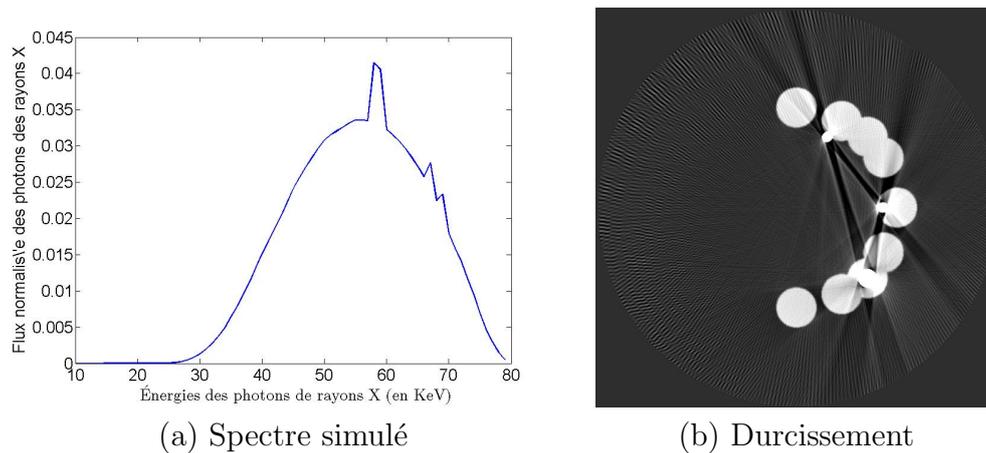


Figure 3.1 – Illustration de l'effet de durcissement de spectre : (a) spectre simulé utilisé pour générer les données, (b) l'image reconstruite en utilisant l'algorithme FBP.

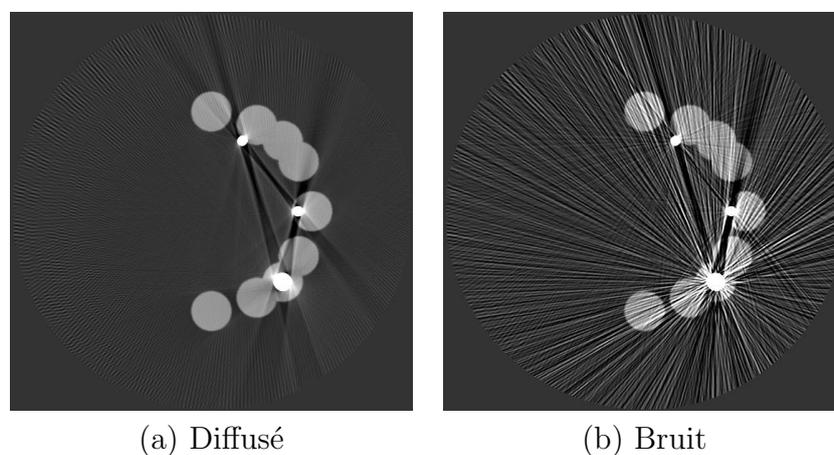


Figure 3.2 – Les images reconstruites par FBP à partir des données: (a) présentant un rayonnement diffusé, (b) bruité illustrant l'amplification du bruit par linéarisation.

Comme on peut le voir sur les figures ci-dessus, l'algorithme FBP qui est très performant lorsqu'on est dans de bonnes conditions (beaucoup de photons mesurés) présente des artéfacts sévères en présence de métal. Ces moins bonnes performances s'expliquent par le fait que les hypothèses faites dans les méthodes analytiques comme FBP ne sont plus réalistes : la source de rayons X n'est pas monochromatique, la fraction de rayons diffusés qui ne suivent pas une ligne droite, n'est plus négligeable et le bruit de mesure après linéarisation n'est plus iid.

CHAPTER III. MÉTHODES DE RÉDUCTION DES ARTEFACTS MÉTALLIQUES

Des artefacts métalliques apparaissent dans les images reconstruites par les FBP. Afin de réduire les artefacts métalliques, nous avons besoin de modèles plus précis qui correspondent à la réalité de notre système d'acquisition.

III.2 Description des fantômes numériques utilisés

Nous utilisons deux fantômes ci-dessous pour évaluer les méthodes MAR dans ce chapitre. La configuration de notre scanner est décrite comme suit :

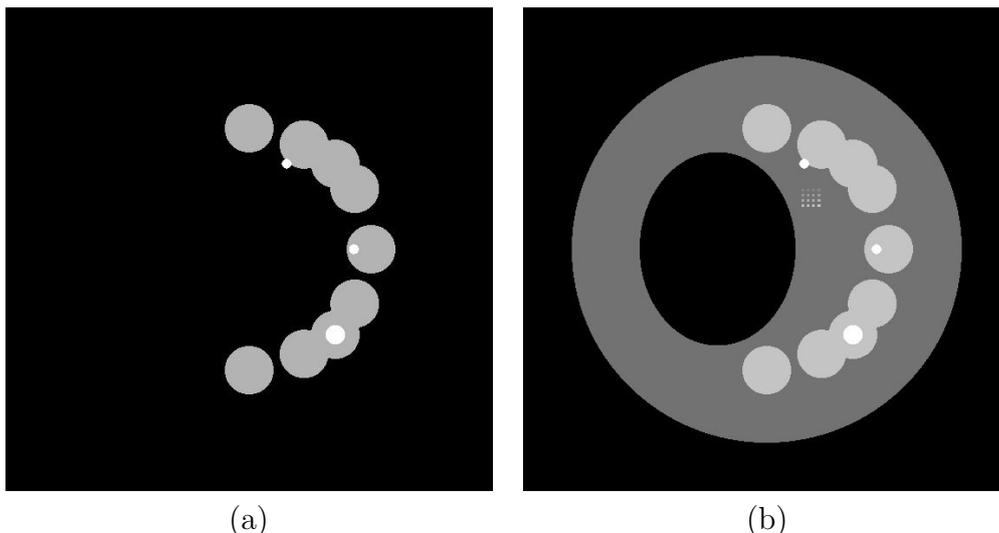


Figure 3.3 – Deux fantômes numériques. (a) fantôme 1 : mâchoire 2D simulée composée de deux matériaux, os et trois cercles de cuivre, (b) fantôme 2 : maxillaire-dentaire 2D simulée avec trois matériaux, eau, os et trois cercles de cuivre, en plus, nous ajoutons 16 petits carrés de tissus mous calcifiés permettant d'introduire des composantes très hautes fréquences difficiles à reconstruire.

Angle des projections	360°
Nombre de projections	457
Produit du courant de générateur et le temps d'exposition	4 mAs
Tension maximale de générateur de rayons X (KvP)	80 KeV
Taille des pixels détecteurs	0.254 mm
Dimension des détecteurs (nombre de projection x nombre de pixels)	560x336
Distance de la source au centre de rotation	435 mm
Distance de la source au détecteur	618 mm
Taille des voxels reconstruits	0.179 mm
Dimension du champ de vue (FOV)	560x560

Tableau 3.1 – Paramètres de l'acquisition

Pour générer les données simulées, nous discrétisons d'abord l'objet en pixel et puis nous utilisons un modèle direct d'acquisition (voir l'eq.2.45) dont \mathbf{H} est l'opérateur de projection de ray-driven (échantillonnage régulier sur les rayons traversant l'objet) [66].

D'après la géométrie du scanner définie dans le tableau 3.1, il calcule l'intersection des faisceaux des rayons X avec le volume à reconstruire et l'échantillonne régulièrement avec interpolation bilinéaire avec les pixels voisins.

Nous prenons en compte dans la suite le durcissement, le diffusé et le bruit pour la réduction des artefacts métalliques. Les principes physiques du durcissement et du diffusé sont différents, alors nous les séparons ci-dessous.

Afin de générer les données polychromatiques, dans un premier temps, nous discrétisons le spectre de source des rayons en 70 énergies ce qui est estimé selon la configuration du scanner ci-dessus (KvP, mAs, matériau de filtre, épaisseur de filtre, ...). Puis nous faisons une projection pour chaque matériau et calculons l'intensité des faisceaux des rayons X pour chaque énergie en utilisant les CALs des matériaux (eau, os, tissus mous et cuivre) dépendant de l'énergie des photons X dans la base des données de NIST [3]. Enfin nous sommes l'intensité des faisceaux des rayons X sur 70 énergies d'après le modèle polychromatique (voir l'eq.1.11).

Nous supposons que la distribution des photons X diffusés détectés est régulière, c'est à dire que cela correspond à une image relativement basse fréquence. Elle dépend également de la taille et du format de l'objet et la distance entre l'objet et le détecteur. Elle peut donc évoluer en fonction de l'angle de projection. Nous la simulons simplement dans la suite par une image lisse dont l'intensité est sinusoidale en fonction de l'angle de projection voir les figures 3.4 et 3.24.(a). Quant au bruit de mesure, nous utilisons un bruit gaussien

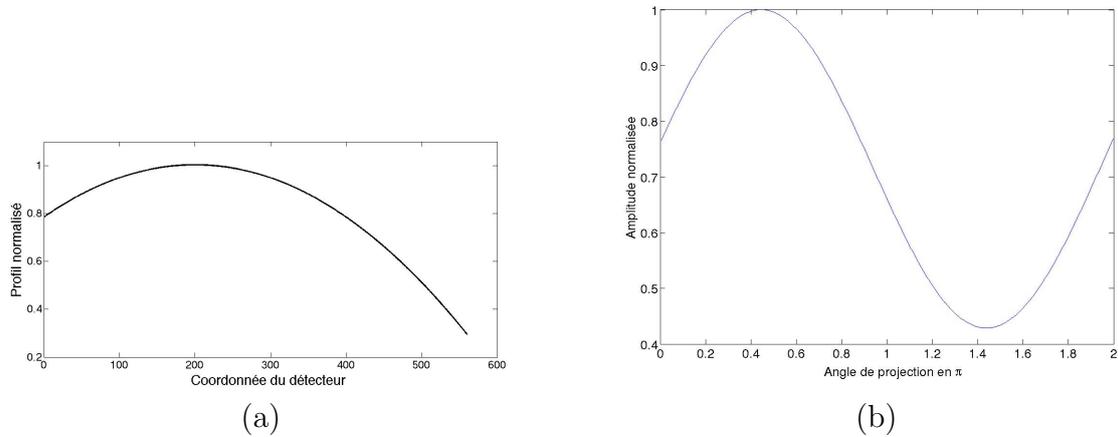


Figure 3.4 – (a) Profil parabolique et (b) évolution sinusoidale de l'amplitude normalisée en fonction de l'angle de projection.

additif dont l'écart-type est proportionnel au nombre des photons X reçus par le détecteur pour combiner le bruit poisson du comptage des photons X et le bruit électronique de détecteur. Il est exprimé de manière suivante :

$$Y_i = \bar{Y}_i + \epsilon_{Y_i}, \quad (3.1)$$

où le nombre espéré des photons X détectés par la cellule i de détecteur est calculé avec le modèle physique utilisé lié à l'acquisition et le bruit de mesure des nombres de photons X ϵ_{Y_i} est ,

$$\epsilon_{Y_i} \sim \mathcal{N}(0, c_\epsilon \bar{Y}_i), \quad (3.2)$$

avec $c_\epsilon = 0,01 \sim 0,05$ dans nos expérimentations numériques.

III.3 État de l'art de MAR

La réduction des artefacts métalliques est un des principaux challenges en tomographie. Un grand nombre des méthodes de MAR sont proposées depuis les dernières décennies, [12], [67], [68], [69], [70], [16], [71], [72], [73], [74], [75], [4], [76], [77],[78], [79], [80]. L'essentiel des travaux vise à modifier les données afin d'utiliser des reconstructions analytiques de type FBP qui sont très performantes en terme de temps de calcul. Ces méthodes peuvent être divisées en deux principaux groupes, les méthodes par remplacement des projections et les méthodes basées sur la correction des données. Il existe aussi des méthodes statistiques qui consistent à modéliser les effets physiques comme le durcissement en introduisant une modèle direct non linéaire. Ces méthodes donnent de bons résultats mais souffrent d'un temps de calculs important.

Les premières approches de remplacement des données considèrent que les projections du métal sont contaminées et provoquent les artefacts métalliques. Ils les remplacent en utilisant l'interpolation linéaire ([67], [4]) ou polynomiale ([12], [71], [75]) sur les projections voisines du métal non dégradées. Ils emploient aussi les projections d'une image *a priori* qui est basée sur les segmentations de matériaux [72] et [74]. Cette image modèle est définie en remplissant les zones des différents matériaux avec la moyenne des valeurs reconstruites de chacun des matériaux. La zone correspondant au métal est également remplacée par le matériau qui l'entoure,[72] et [74]. Mais en éliminant les projections du métal, on perd des informations importantes sur les structures voisines du métal, il en résulte des images avec les bords flous dans la zone du métal. En plus, l'interpolation parfaite n'existe pas, et l'image modèle peut être mal définie à cause des artefacts métalliques (les petits carrés cachés dans les stries noires sont considérés comme de l'air, voir la figure 3.9.(b)), l'introduction des inconsistances et des discontinuités est inévitable quand nous mélangeons les projections originales et les projections interpolées ou les projections d'image modèle. Elles entraînent l'introduction de nouveaux artefacts.

La deuxième famille de méthodes fait le constat que des informations utiles sont encore contenues dans les projections du métal. L'effet spectral des rayons X, le diffusé et le bruit sont les sources les plus importantes d'artefacts métalliques [10]. Les non-linéarités des données dues à ces effets provoquent les artefacts métalliques, si elles ne sont pas prises en compte dans les méthodes de reconstruction tomographique. Nous pouvons utiliser des modèles plus réalistes liés à l'acquisition pour intégrer l'effet spectral des rayons X ([16]) et le diffusé ([81], [17]) dans les méthodes de reconstruction qui permettent de réduire les artefacts métalliques.

Le spectre de la source des rayons X n'est généralement pas disponible en pratique. Nous pouvons l'estimer avec un modèle semi-empirique [82] selon les paramètres des générateurs des rayons X comme matériau et angle de cible. Mais cette estimation n'est pas précise. Le spectre peut être également estimé à partir des mesures des rayons X transmis avec un fantôme connu (matériau et l'épaisseur de matériau) [83]. Par conséquent, il faut des expérimentations complexes supplémentaires pour estimer le spectre de la source en fonction de la configuration des paramètres de l'acquisition (KvP et le courant de générateur des rayons X). La méthode d'estimation de spectre de la source des rayons X précise et sans besoin d'expérimentation complexe, c'est la méthode basée sur simulation Monte Carlo [84]. Mais elle est très coûteuse en temps de calcul ce qui n'est pas compatible avec le temps de traitement clinique. Par ailleurs dans la pratique, le spectre de

source évolue au cours du temps d'utilisation dû à l'usure du générateur de rayons X et des détecteurs.

Afin de compter le nombre des photons X diffusés détectés, nous pouvons utiliser des matériaux très atténuants comme le plomb, dits “ beam-stop ” [85]. Ces derniers peuvent stopper le faisceau direct des rayons X, seul le faisceau de diffusés est alors mesuré sur les détecteurs en dehors de la trajectoire direct du beam-stop .

Nous séparons dans la suite la correction du durcissement et du diffusé car les physiques sont différentes.

III.3.1 MARs par remplacement des projections du métal

Le remplacement des projections traversant les parties métalliques permet de réduire les artefacts de raies (noires et blanches). En effet, ces projections du métal sont altérées comme nous l'avons exposé en introduction, [12], [67]. La méthode la plus simple de remplacement des projections est l'interpolation linéaire à partir des projections voisines, [67].

III.3.1.1 Méthode d'interpolation linéaire

Nous appelons cette méthode MAR-LI. Ses principales étapes sont donnés ci-dessous :

1. reconstruction initiale par FBP \mathbf{f}_{ini} (voir la figure 3.5.(b)) à partir des données originales \mathbf{g} (voir la figure 3.5.(a)).
2. segmentation des parties métalliques \mathbf{B}_M par seuillage. La valeur du seuil s_M est définie de manière empirique.
3. projection de l'image segmentée du métal pour obtenir l'empreinte du métal dans le sinogramme, \mathbf{HB}_M .
4. interpolation linéaire à partir des projections adjacentes entourant le métal. Les projections des parties métalliques de l'objet sont donc remplacées par des données interpolées, \mathbf{g}_{IL} .
5. reconstruction finale $\hat{\mathbf{f}}$ à partir des données interpolées.

Les inconvénients de cette approche sont que les projections passant par les parties métalliques sont ignorées. De plus, le seuillage est délicat au niveau des frontières des objets métalliques. Il en résulte que les bords des objets métalliques sont flous et implique la persistance de certains artefacts.

III.3.1.2 Interpolation avec normalisation de la longueur d'intersection

Afin de conserver les informations de bords, Müller et al ont proposé une méthode de MAR d'interpolation avec la normalisation par longueur d'intersection de faisceaux de rayons X avec les matériaux, [86], [87]. Nous appellerons cette approche MAR-NPI. Ses

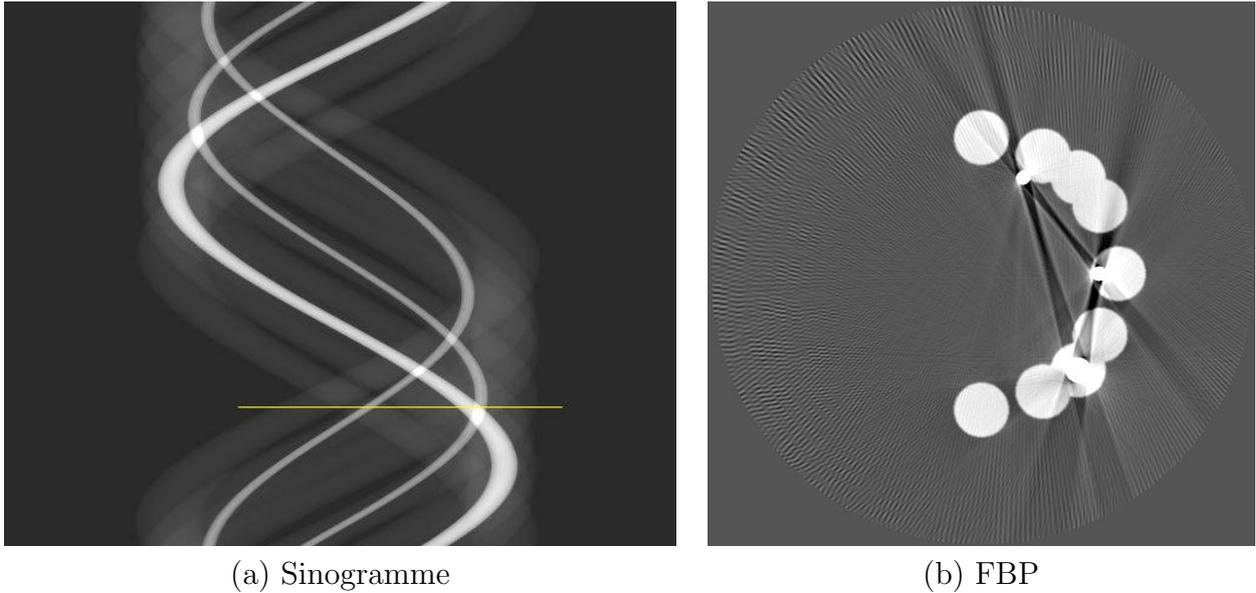


Figure 3.5 – (a) Sinogramme original du fantôme 1 (voir Fig. 3.3.(a)) ; (b) Image reconstruite par FBP, La fenêtre d’affichage dans (b) est $[-0,01 \ 0,04]$.

principales étapes sont décrites ci-dessous dans le cas de deux matériaux, os et métal (voir la figure 3.3.(a)) :

1. segmentation du métal et segmentation binaire par seuillage qui sépare l’objet (tissu et métal) et l’air, à partir d’une reconstruction préliminaire (FBP) ;
2. projection d’image métal et calcul de la longueur d’intersection de chaque faisceau de rayons X avec l’objet ;
3. normalisation du sinogramme original par division de la longueur d’intersection de chaque faisceau de rayons X avec l’objet ;
4. interpolation linéaire ou polynomiale sur la partie des projections du métal dans le sinogramme normalisé ;
5. reconstruction des images.

Certaines informations sur les bords os-air sont conservées dans le sinogramme normalisé. Ces meilleurs résultats s’expliquent car le sinogramme normalisé est plus plat que le sinogramme original autour des projections du métal et l’interpolation est meilleure dans la zone plate (voir la figure 3.7.(a)). Cette méthode réduit la plupart des artefacts dans le cas des deux matériaux et donne de meilleurs résultats que les méthodes d’interpolation standard MAR-LI ([67]) (voir la figure 3.6). Mais elle est limitée dans le cas de multiples matériaux, car le sinogramme normalisé par division de la longueur d’intersection n’est plus assez plat dans ce cas (3.10.(c)).

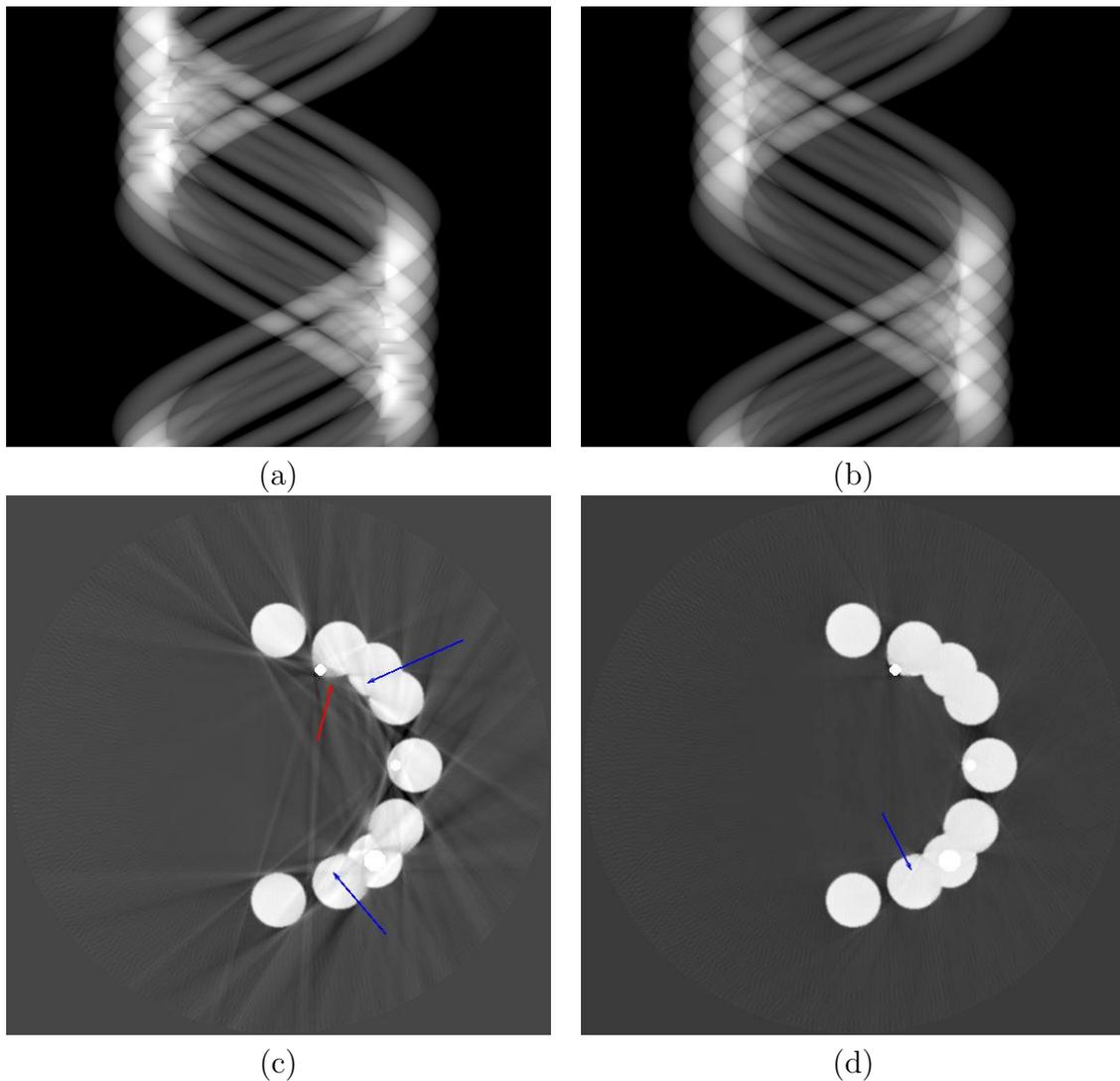
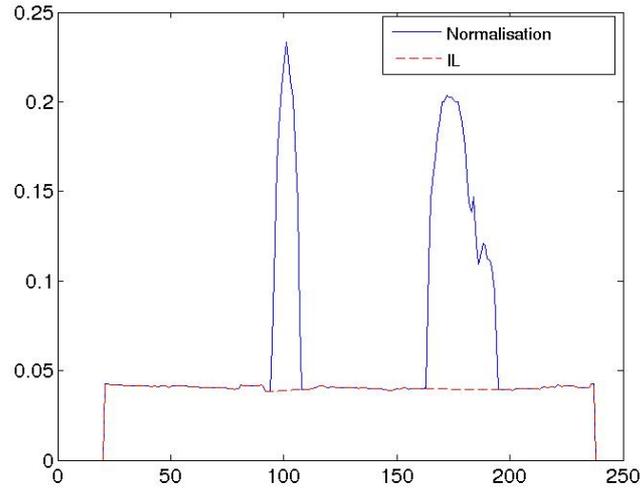


Figure 3.6 – Sinogrammes interpolés et images reconstruites: (a) sinogramme interpolé approche MAR-LI (b) sinogramme interpolé approche MAR-NPI, (c) reconstruction FBP approche MAR-LI (d) reconstruction FBP approche MAR-NPI. Les fenêtres d'affichage dans (b) sont le $[-0,01 \ 0,04]$. Les flèches bleues et rouges indiquent respectivement les nouveaux artefacts introduits et les bords flous autour du métal dans (c) et (d).

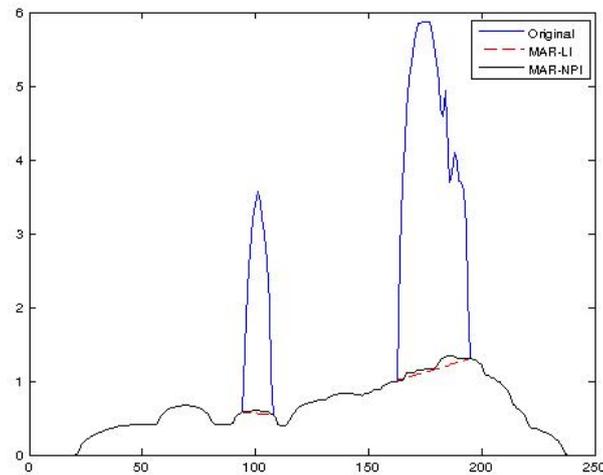
III.3.1.3 Approche NMAR

Afin de s'affranchir de cette limitation, Meyer et al ont pris en compte différents matériaux dans leur méthode NMAR (acronyme anglais, Normalized Metal Artifact Reduction), [4]. Ils ont créé une image *a priori* sans artefacts métalliques qui permet de conserver les informations ayant de hautes fréquences spatiales. L'image *a priori* est déterminée à partir d'une reconstruction préliminaire ou d'une image de référence, qui doit être plus proche possible de l'image vraie. Les principales étapes de l'approche NMAR sont décrites comme suit :

1. reconstruction initiale, \mathbf{f}_{ini} , à partir du sinogramme original \mathbf{g} ;
2. segmentation du métal, \mathbf{f}_M , par seuillage, puis projection de l'image de métal $\mathbf{H}\mathbf{f}_M$



(a)



(b)

Figure 3.7 – (a) profil de sinogramme normalisé par longueur d'intersection de rayons X avec l'objet dans la méthode MAR-NPI et (b) les profils de sinogrammes interpolés (IL) de MAR-LI (voir la figure 3.6.(a)) et MAR-NPI (voir la figure 3.6.(b)) suivant la tracé de la ligne droite jaune dans la figure 3.5.(a).

;

3. création d'une image *a priori* sans artefacts métalliques, \mathbf{f}_{prior} à partir de la reconstruction préliminaire par les méthodes de MAR avec interpolation linéaire, et projection de l'image *a priori*, \mathbf{Hf}_{prior} ;
4. normalisation du sinogramme original par division de la projection d'image *a priori*, $\mathbf{g}_N = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{Hf}_{prior}}$, puis l'interpolation à partir des projections voisines du métal \mathbf{g}_{int} ;
5. dé-normalisation du sinogramme interpolé par multiplication des projections d'image *a priori*, $\mathbf{g}' = \mathbf{g}_{int} \cdot \mathbf{Hf}_{prior}$, puis reconstruction de \mathbf{g}' et réinsertion du métal dans l'image reconstruite.

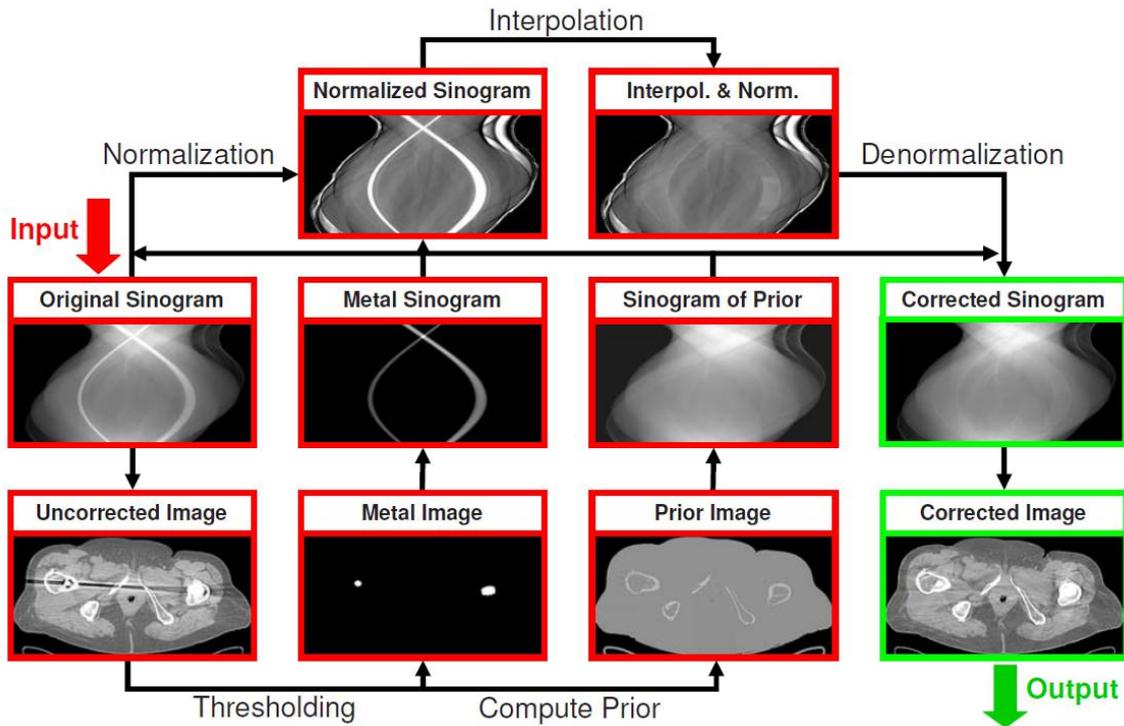


Figure 3.8 – Schéma de la méthode NMAR, [4]

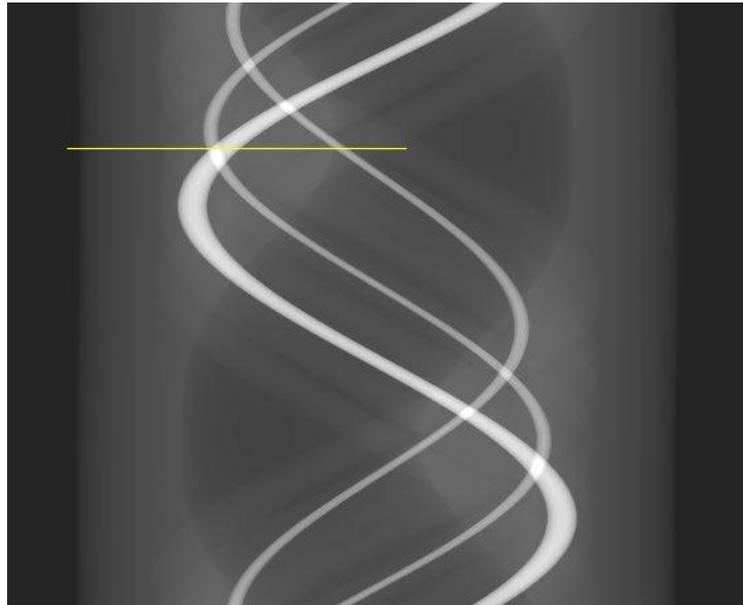
Le processus schématique est donné dans la figure 3.8 ([4]).

Dans le NMAR, l'interpolation dans le sinogramme normalisé réduit la discontinuité possible introduite par l'interpolation, [67], [4], [79], qui cause les nouveaux artefacts, raies noires et blanches sur les bords du métal (voir les figures 3.9.(c) et 3.10.(e)) ; En plus, les informations des bords de l'objet peuvent être conservées dans l'image *a priori*, elles servent à reconstruire les matériaux autour du métal sans trop lisser les bords (voir la zone indiquée par les flèches rouges dans les figures 3.9.(c), 3.10.(e) et 3.10.(f)). Comme toutes les méthodes de MAR basées sur les interpolations, il est sensible au résultat de segmentation des images, les erreurs de segmentation introduisent les nouveaux artefacts (voir les figures 3.11.(a) et (b)) et peuvent faire disparaître les petites structures [79]. L'utilisation des méthodes avancées de segmentation ([88] et [89]) permet d'améliorer la qualité des images de NMAR.

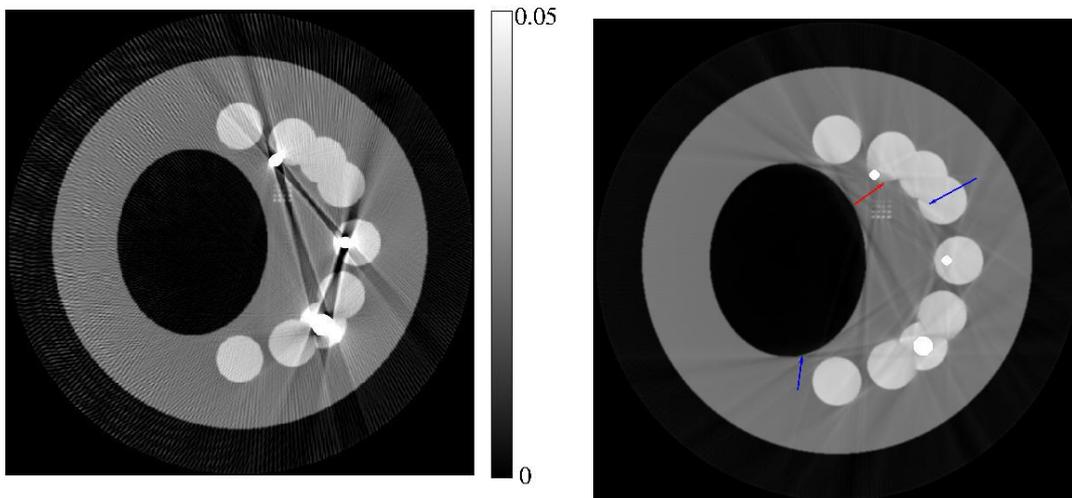
Les méthodes que nous venons de voir résolvent tous les problèmes des artefacts métalliques en une seule étape car elles visent à supprimer la composante due au métal. D'autres familles d'approches consistent à faire des corrections des phénomènes physiques qui provoquent les artefacts métalliques. Nous allons tout d'abord présenter les méthodes permettant de corriger le durcissement de spectre.

III.3.2 Méthode de correction du durcissement

En fait, le spectre de source de rayons X des scanners est polychromatique. La mesure de l'énergie déposée sur le détecteur est donc la moyenne des énergies des différents photons X voir l'équation 1.11. De plus, les (Coefficients d'Atténuation Linéaire) CALs



(a) Sinogramme original



(b) FBP

(c) MAR-LI

Figure 3.9 – Sinogramme original (a) de fantôme 2 dans la figure 3.3.(b), et les images reconstruites par FBP à partir de sinogramme original (a), (b) et de sinogramme d’interpolation linéaire (c). Les flèches bleues et rouges indiquent respectivement les nouveaux artefacts introduits et les bords flous de l’objet entourant le métal dans (c).

des matériaux sont dépendants de l’énergie des photons X, voir la figure 1.10. Enfin, l’atténuation est une fonction non-linéaire de longueur d’intersection des matériaux avec les rayons X (voir l’équation 1.12), au lieu de la fonction linéaire (voir l’eq.1.18) qui est utilisée dans les méthodes analytiques et les méthodes algébriques. Nous pouvons approcher cette fonction non-linéaire par une fonction polynomiale (voir l’équation 3.3). Dans le cas d’un matériau, la fonction polynomiale permet de corriger les artefacts du durcissement comme les artefacts en forme de “ coupe ” dans un cercle (voir la figure

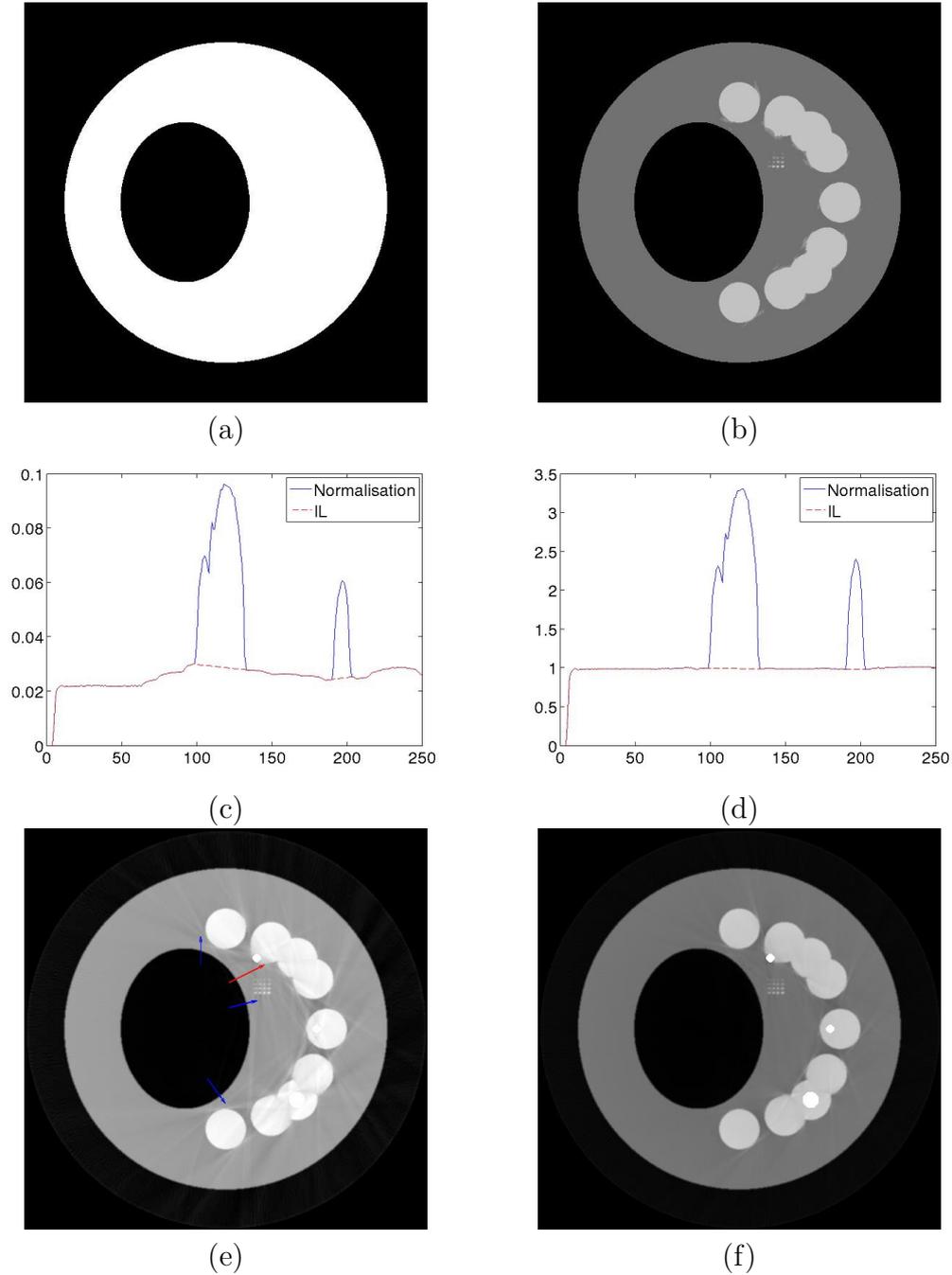


Figure 3.10 – Comparaison des méthodes MAR-NPI (colonne à gauche) et NMAR (colonne à droite). (a) image binaire de l'objet pour calculer la longueur d'intersection de rayons X avec l'objet, (b) image a priori ; (c) et (d) : les profils de sinogrammes normalisés dans le MAR-NPI et le NMAR respectivement. (e) et (f) : les images reconstruites par FBP dans le MAR-NPI et le NMAR respectives. Les fenêtres d'affichage de (e) et (f) sont de $[0, 0,05]$.

1.11), [35].

$$a(\phi, r) = Q(T) = b_0 + b_1 fT + b_2 (fT)^2 + \dots + b_n (fT)^n, \quad (3.3)$$

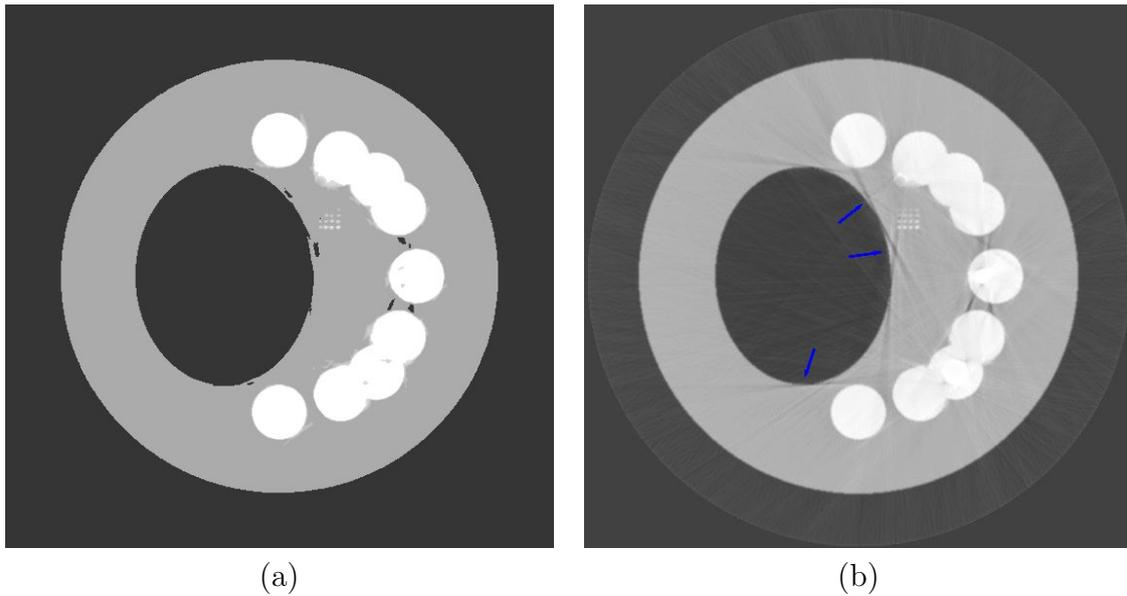


Figure 3.11 – Image *a priori* issue d’une segmentation imparfaite (a) et image reconstruite par NMAR (b) avec l’image *a priori* (a).

où l’atténuation $a(\phi, r)$ est mesurée sur la ligne droite $L(\phi, r)$, f et T sont le CAL du matériau et la longueur d’intersection de matériau avec le faisceau de rayons X sur la ligne droite $L(\phi, r)$, respectivement. n est l’ordre de la fonction polynomiale. Pratiquement, un faible n suffit dans le cas d’un matériau, [35]. $Q(T)$ peut être déterminé par les expérimentations avec un des fantômes de la figure 3.12 ou par simulation. Mais dans le cas de deux matériaux ou plus, les solutions des longueurs d’intersection des différents matériaux ne sont pas uniques. Cette méthode simple est souvent utilisée comme pré-correction de matériau de l’eau ou tissus mous en imagerie médicale.

Dans le cas de deux matériaux, les méthodes de réduction des artefacts du durcissement ont été proposées par Joseph et al ([90]) et Herman et al [91], et elles sont détaillées ci-dessous. Le principe de ces approches est le suivant. On commence par faire une première reconstruction sans correction. On segmente cette reconstruction en deux matériaux par exemple tissus mous et os. On calcule l’atténuation moyenne des tissus mous, puis on fait une image où toutes les valeurs non nulles de l’objet sont considérées comme du tissu mou avec une atténuation moyenne. On fait ensuite la différence entre la première reconstruction et cette image puis on applique la méthode de correction de durcissement pour le matériau os - tissus mous. On arrive comme cela à corriger les objets composés de deux matériaux [92].

Une autre famille de méthodes de réduction du durcissement introduite dans les années 80s est la tomographie à deux énergies. Selon l’interaction des photons X avec les matières, l’atténuation est dominée principalement par l’effet photo-électrique et le diffusé Compton dans la radiologie diagnostique (de 30 à 150 KeV), voir la figure 1.10. Alors les CALs peuvent être exprimés en combinaison linéaire de deux composants, l’effet photo-électrique $\Psi(e_x)$ et le diffusé Compton $\Theta(e_x)$, comme ci-dessous, [15], [92], [16],

$$f_j(e_x) = b_\psi(f_j)\Psi(e_x) + b_\theta(f_j)\Theta(e_x), \quad (3.4)$$

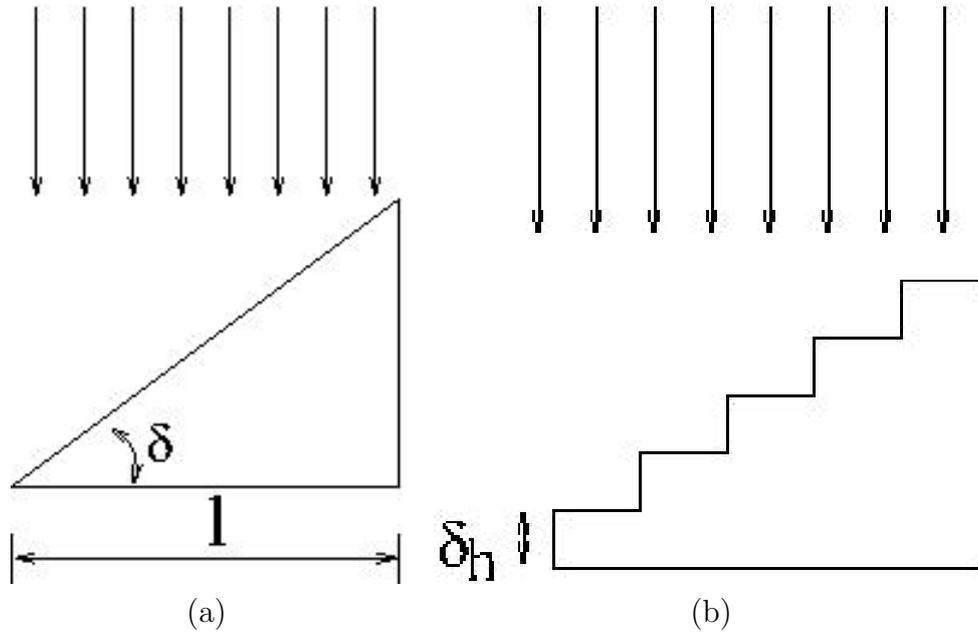


Figure 3.12 – Les fantômes triangle (a) et escalier (b) pour mesurer l'atténuation des faisceaux polychromatiques de rayons X.

où l'effet photo-électrique $\Psi(e_x)$ peut être approché par

$$\Psi(e_x) = 1/e_x^3 \quad (3.5)$$

et le diffusé de Compton est décrite par la fonction de Klein-Nishina (voir la fonction 1.10),

$$\Theta(e_x) = f_{KN}(e_x). \quad (3.6)$$

Nous faisons deux acquisitions en deux tensions distinctes, une basse tension et une haute tension, pour que les deux spectres soient suffisamment différents, [15], [92]. L'acquisition à basse tension représente la contribution de l'effet photo-électrique, par contre celle à haute tension mesure la contribution du diffusé de Compton. Les deux acquisitions faites avec des spectres différentes permettent d'estimer les coefficients de modèle de décomposition, $b_\psi(f)$ et $b_\theta(f)$ (voir l'équation (3.4)). Un autre modèle de décomposition des CAL utilisé dans la tomographie à deux énergies consiste à utiliser la combinaison linéaire de plusieurs matériaux de base. Il faut donc en chaque point estimer l'abondance de ces matériaux références, [61] et [22].

$$f_j(e_x) = \sum_{n=1}^{N_m} b'_{j,n}(f) f_n(e_x), \quad (3.7)$$

où $b'_{j,n}$ est la fraction de matériau n de pixel j . Les matériaux références sont souvent choisis parmi les matériaux les plus présents dans l'objet. L'os et l'eau (équivalents aux tissus mous) sont souvent utilisés comme base de décomposition en imagerie médicale. Cette modélisation et son inversion permettent de réduire les artefacts de durcissement de spectre [93]. Cette approche ne mesure plus l'atténuation mais des paramètres plus intéressants d'un point de vue morphologique qui sont l'abondance d'eau et d'os (os pur). Ces grandeurs sont très intéressantes à mesurer en particulier pour le suivi de l'ostéoporose

[22]. Par contre, cette approche nécessite deux acquisitions. En plus du doublement de la dose de rayonnement et du temps de reconstruction qui augmente s'ajoute le problème du mouvement du patient entre les deux acquisitions qui peuvent gravement limiter la qualité des images. De plus, elle nécessite un équipement plus complexe pour changer la tension du générateur de rayons X avec les autres conditions inchangées.

Au lieu de deux acquisitions dans la tomographie à deux énergies, DeMan et al ont proposé une méthode pour calculer les coefficients avec les courbes $b_\psi - f(e_0)$, et $b_\theta - f(e_0)$ de la base des matériaux couramment utilisés, avec l'énergie effective e_0 du spectre de rayons X, par exemple $e_0 = 70KeV$, [16]. Les courbes $b_\psi - f(e_0)$ et $b_\theta - f(e_0)$ de la base des matériaux qui nous intéressent, peuvent être tracées avec la base des données de NIST, [3]. Dans le modèle de décomposition (l'eq.3.4), les coefficients b_ψ et b_θ sont dépendants du matériau, [15] et [92].

$$b_\psi(f_j) \approx K1 \frac{m(f_j)}{A_j} Z_j^4, \quad (3.8)$$

$$b_\theta(f_j) \approx K2 \frac{m(f_j)}{A_j} Z_j, \quad (3.9)$$

où $K1$ et $K2$ sont constantes indépendants du matériau, m est la densité de masse, A_j est la masse atomique de matériau en pixel j , et Z_j est le numéro atomique de matériau en pixel j . DeMan et al ont réécrits le modèle de décomposition (l'eq.3.4) dans la formulation (3.32) afin de réduire le nombre d'inconnus. Afin de réduire les artefacts du durcissement, DeMan et al ont proposé une méthode statistique tenant compte du spectre des rayons X avec ce modèle [16].

La limitation commune des méthodes post-reconstruction et des méthodes statistiques présentées ci-dessus est la connaissance du spectre des rayons X émis *a priori*. En pratique, le spectre de source des rayons X n'est pas toujours connu *a priori*. Le spectre peut être estimé avec les mesures, mais la précision n'est pas suffisante pour éviter l'introduction d'erreurs importantes, car les CALs reconstruits sont sensibles à la précision du spectre estimé. Une sous-estimation ou une sur-estimation du spectre implique une sous-estimation ou une sur-estimation des CALs des matériaux, [93].

Lors de ce travail de thèse nous avons envisagé de développer une méthode d'estimation conjointe du spectre du générateur et de l'atténuation de l'objet. Cette estimation est très difficile à mettre en œuvre car le critère à optimiser est non convexe. Il faut alors se tourner vers des approches de type recuit simulé ou de type MCMC (acronyme anglais, Monte Carlo Markov Chain) pour résoudre ce problème inverse. Comme ses approches sont extrêmement coûteuses en temps de calcul, nous n'avons pas continué dans cette voie. En effet, ce type d'approche sur une problématique 3D n'a pas de chance d'avoir une application clinique à moyen terme.

En plus, les méthodes de réduction des artefacts du durcissement qui n'ont pas besoin de connaissances de spectre sont proposés dans la littérature ([5], [80]). Krumm et al ont proposé une méthode de réduction des artefacts du durcissement avec interpolation surfacique. Comme la méthode de post-reconstruction, les données corrigées \mathbf{I}_c sont les données originales plus la différence entre les données monochromatiques estimées et les données polychromatiques estimées.

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_E + e^{-\mathbf{g}e_0} - e^{-\mathbf{g}E}, \quad (3.10)$$

où \mathbf{g}_{e_0} sont les projections monochromatiques, et \mathbf{g}_E sont les projections polychromatiques estimées. Dans le cas d'un matériau, \mathbf{g}_{e_0} est estimé par la moyenne des pentes des lignes entre les points de mesures et l'origine, et \mathbf{g}_E est estimé par l'ajustement des données avec une fonction polynomiale, voir la figure 3.13. Dans le cas de multi-matériaux, Krumm et al ont utilisé l'interpolation surfacique pour estimer les projections polychromatiques. Comme dans le cas d'un matériau, Verburg et al estiment la contribution polychromatiques du métal uniquement par ajustement des données, et les soustraient dans les données originales, pour la correction des artefacts métalliques.

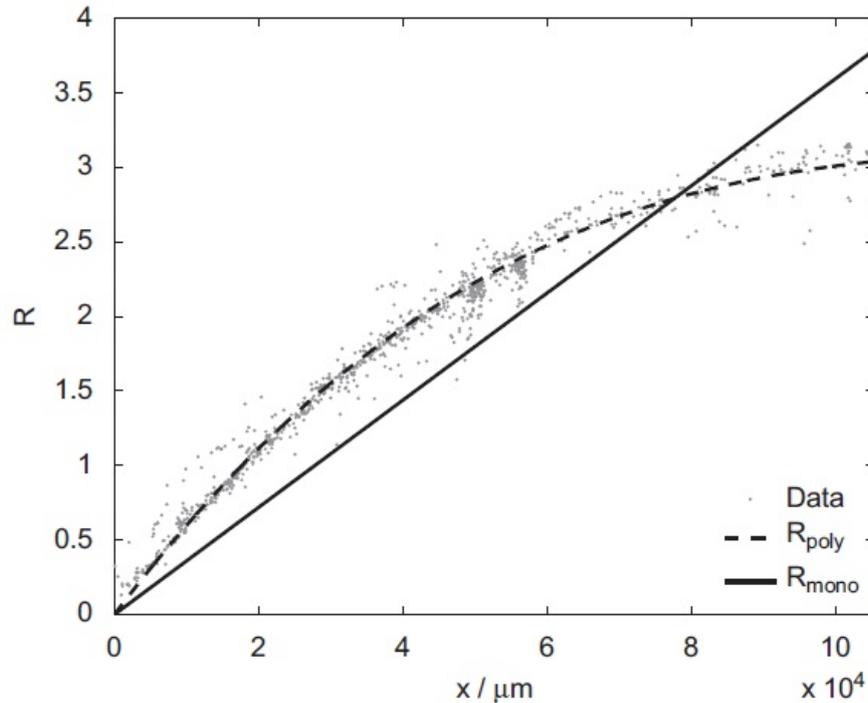


Fig. 1. Propagation path length vs. ray sum plot of a real specimen. The path lengths were measured in the reconstructed CT image and assigned to corresponding intensities. This data point cloud is fitted by a polynomial to estimate the polychromatic characteristic. The monochromatic fit is a first degree polynomial. Both fits cross the point of origin.

Figure 3.13 – Les projections monochromatique estimées (ligne droite) et les projections polychromatiques estimées (courbe) ajustées pour les mesures d'atténuations (en points) dans le cas d'un matériau, extrait de [5].

Nous allons maintenant aborder les approches utilisant des post traitements afin de corriger les artefacts.

III.3.2.1 Méthode de post-reconstruction

Le principe de cette approche est la linéarisation du processus non-linéaire présent lors de la mesure. Pour procéder à cette linéarisation, on procède de la façon suivante :

- reconstruction des données avec une hypothèse monochromatique ;

III.3.2 - Méthode de correction du durcissement

- simulation des données issues de la première reconstruction en monochromatique et en polychromatique ;
- correction des données en ajoutant l'écart entre les données simulées en mono et poly chromatiques.

$$\begin{aligned} g_i^* &\approx g_i^c, \\ g_i^c &= g_i + \hat{g}_{e_0,i} - \hat{g}_{E,i}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où g_i^c sont les données corrigées du durcissement sur le rayon i , $\hat{g}_{e_0,i}$ est la projection monochromatique estimée sur le rayon i avec l'énergie effective du spectre de source connu, e_0 , et $\hat{g}_{E,i}$ est la projection polychromatique estimée sur le rayon i avec le spectre de source connu, $i = 1, 2, \dots, M$. M est le nombre de mesures.

Dans le cas d'un matériau, les projections monochromatiques estimées $\hat{g}_{e_0,i}$, $i = 1, 2, \dots, M$, sont simplement le produit du CAL du matériau et de la longueur de l'intersection du matériau avec les rayons X,

$$\hat{g}_{e_0,i} = f * T_i \quad (3.12)$$

avec

$$T_i = \sum_{j=1}^N B_j h_{ij} \quad (3.13)$$

où \mathbf{B} est la segmentation du matériau,

$$B_j = \begin{cases} 1 & \text{si pixel } j \text{ appartient au matériau,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.14)$$

$h_{i,j}$ est définie comme la longueur d'intersection du pixel j avec le rayon i , voir la figure 2.8. Les projections polychromatiques estimées sont calculées par la fonction polynomiale eq.3.3. Les coefficients de la fonction polynomiale peuvent être déterminés par expérimentation numérique ([35]).

Dans le cas de deux matériaux, l'estimation de la fonction polynomiale en fonction de deux variables est compliquée. Les différentes méthodes sont proposées, avec les connaissances du spectre de source et les CALs de matériaux dépendant d'énergie, [90], [91].

En fait, le CAL est dépendant non seulement de l'énergie des rayons X, mais aussi dépend de la densité du matériau, nous pouvons exprimer le CAL en deux variables séparables,

$$f_j(e_x) = \mu_M(e_x) m_j \quad (3.15)$$

où $\mu_M(e_x)$ est le coefficient d'atténuation masse (CAM) de matériau dépendant de l'énergie des photons X e_x , et m_j représente la densité de matériau en pixel j . Nous présentons les principes des méthodes de Joseph et al ci-dessous, [90], [94]. Nous considérons les deux matériaux courants, eau et os, en imagerie médicale. Les connaissances de spectre de source et de coefficient d'atténuation masse de l'eau μ_M^{eau} sont nécessaires. Les notations utilisées dans les méthodes de Joseph et al sont rappelées ici :

densités m :

m^{eau} (eau), m^{os} (os), et la densité effective m^e qui est définie par

$$m^e = f * m^{eau} / f^{eau} \quad (3.16)$$

Intégrale de densité et sur la ligne droite L_i de rayon X i de matériau mat , Γ_i^{mat} :

$$\Gamma_i^{mat} = \int_{L_i} m^{mat}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.17)$$

où \mathbf{r} est la coordonnée de pixel dans le domaine d'objet.

Facteur d'équivalence en eau ξ de matériau n

$$\xi(e_x) = \frac{f^n(e_x)/m^n}{f^{eau}(e_x)/m^{eau}}, \quad (3.18)$$

où e_x est l'énergie des photons X .

Dans les méthodes de Joseph et al, les CAMs sont utilisés. Nous définissons une fonction polynomiale $Q_2(\Gamma)$ comme l'équation (3.3),

$$Q_2(\Gamma_i^{eau}) = \int_{\bar{E}, L_i} I_0 * \omega(e_x) * e^{-\mu_M^{eau}(e_x)\Gamma_i^{eau}} de_x, \quad (3.19)$$

avec le rayon i , $i = 1, 2, \dots, M$.

Les étapes de la méthode de Joseph et al sont données ci-dessous pour la correction de durcissement de l'eau et de l'os :

1. reconstruction préliminaire \mathbf{f}_0 avec correction de durcissement de l'eau (ou eau-équivalent) avec la fonction polynomiale de l'ordre faible (eq.3.3) et l'équation (3.17), $i = 1, 2, \dots, M$, avec le nombre des mesures M ,

$$\Gamma_i^e = Q_2^{-1}(g_i) = \Gamma_i^{eau} + \xi_{E,i} * \Gamma_i^{os}, \quad (3.20)$$

où ξ_E est dépendant de l'énergie, soit il est dépendant de la trajectoire du faisceau de rayons X , ce qui cause les artefacts du durcissement dû à l'os.

2. segmentation de l'image d'os par seuillage, \mathbf{B}^{eau} , et \mathbf{B}^{os} , le seuil peut être choisi par $1.1m^{eau}$ [90], ou de 40% supérieur à la densité reconstruite de tissu, [91]. La densité effective dans les zones de l'os m^e dans la reconstruction préliminaire est décrite par

$$m^e \simeq \xi m^{os} \quad (3.21)$$

Le facteur ξ est fixée à ξ_0 après plusieurs acquisitions. Alors la densité de l'os est déterminée comme suit,

$$\hat{m}^{os} \approx \frac{m^e}{\xi_0}. \quad (3.22)$$

\hat{m}^{os} est la valeur reconstruite de l'os dans l'image de correction.

3. évaluation de la quantité totale de Γ^{eau} et Γ^{os} . Nous calculons les projections de l'image d'eau et de l'os :

$$\Gamma_i^{eau} = \int_{L_i} m^{eau}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.23)$$

$$\Gamma_i^{os} = \int_{L_i} \hat{m}^{os}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.24)$$

4. estimation du facteur d'équivalence de l'os ξ_i en résolvant l'équation suivante.

$$Q_2(\Gamma_i^{eau} + \xi\Gamma_i^{os}) = \int_{\bar{E}, L_i} I_0 * \omega(e_x) * e^{-(\mu_M^{eau}(e_x)\Gamma_i^{eau} + \mu_M^{os}(e_x)\Gamma_i^{os})} de_x. \quad (3.25)$$

ξ_i peut être déterminé par recherche dans un tableau rempli par pré-calcul pour des valeurs particulières (Γ^e, Γ^{os}). Ce tableau est calculé seulement une fois avec les connaissances du spectre de source et les CAMs de l'eau et de l'os, [90], ou nous pouvons utiliser les méthodes de Newton pour résoudre l'équation non-linéaire (3.25).

5. correction des données Γ_i^c

$$\Gamma_i^c = \Gamma_i^{eau} + (\xi_0 - \xi_i)\Gamma_i^{os} = \Gamma_i^{eau} + \xi_0\Gamma_i^{os} \quad (3.26)$$

où ξ_0 est indépendant de la trajectoire du faisceau des rayons X, alors les artefacts du durcissement dû à l'os sont éliminés.

6. reconstruction d'image de densité sur les données corrigées.

S'il existe un autre matériau plus dense que l'os, par exemple l'iode dans l'os calcifié, l'équation (3.25) doit se réécrire comme ci-dessous :

$$Q_2(\Gamma_i^{eau} + \xi^{os}\Gamma_i^{os} + \xi^{iode}\Gamma_i^{iode}) = \int_{\bar{E}, L_i} I_0 * \omega(e_x) * e^{-(\mu_M^{eau}(e_x)\Gamma_i^{eau} + \mu_M^{os}(e_x)\Gamma_i^{os} + \mu_M^{iode}(e_x)\Gamma_i^{iode})} de_x = g_i, \quad (3.27)$$

où ξ_i^{iode} est le facteur d'équivalent en eau de l'iode sur le rayon i , et Γ_i^{iode} est l'intégrale de la densité de l'iode sur le rayon i . ξ_i^{os} et ξ_i^{iode} sont difficiles à déterminer indépendamment. Mais nous considérons l'os et l'iode ensemble, et réécrivons l'équation (3.27) comme suit,

$$Q_2(\Gamma_i^{eau} + \Delta) = \int_{\bar{E}, L_i} I_0 * \omega(e_x) * e^{-(\mu_M^{eau}(e_x)\Gamma_i^{eau} + \mu_M^{os}(e_x)\Gamma_i^{os} + \mu_M^{iode}(e_x)\Gamma_i^{iode})} de_x. \quad (3.28)$$

Δ peut être estimé en résolvant l'équation (3.28) avec la méthode de Newton comme ξ_i dans l'équation (3.25). Les données sont corrigées de la façon suivante,

$$\Gamma_i^c = \Gamma_i^e + \hat{\xi}^{os}\Gamma_i^{os} + \hat{\xi}^{iode}\Gamma_i^{iode} - \Delta, \quad (3.29)$$

où $\hat{\xi}^{os}$ et $\hat{\xi}^{iode}$ sont choisis comme ξ_0 dans l'équation (3.26) par expérimentation.

D'après les données de correction (voir les équations 3.26 et 3.29), le stockage des données originales n'est pas nécessaire dans le processus de correction du durcissement. Soit $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{\Gamma})$ est la reconstruction de $\mathbf{\Gamma}$ et \mathbf{R}^{-1} est une opération linéaire. La reconstruction des données corrigées \mathbf{f}_c est égale à la reconstruction préliminaire \mathbf{f}_{ini} plus l'image de différence $\delta\mathbf{f}$, car

$$\mathbf{f}_{ini} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{\Gamma}^e) \quad (3.30)$$

$$\delta\mathbf{f} = \mathbf{R}^{-1}(\hat{\xi}^{os}\mathbf{\Gamma}^{os} + \hat{\xi}^{iode}\mathbf{\Gamma}^{iode} - \mathbf{\Delta}) \quad (3.31)$$

Les connaissances du spectre de source et les CAMs de l'eau en fonction d'énergie sont nécessaires dans les méthodes de Joseph et al. Le résultat de réduction des artefacts est dépendant de la précision des informations du spectre de source. En plus, la segmentation des matériaux est cruciale dans les méthodes de Joseph et al, car les calculs de $\mathbf{\Gamma}$ nécessitent les distributions de différents matériaux. La qualité de la segmentation influence l'efficacité de réduction des artefacts du durcissement.

III.3.2.2 Méthode statistique

Un des principaux avantages des méthodes statistiques est l'intégration des modèles plus proche de la réalité que ceux des méthodes analytiques. En pratique, le spectre de source des rayons X est polychromatique. Nous avons un modèle polychromatique afin de tenir en compte de l'effet spectral des rayons X, qui permet de réduire les artefacts du durcissement. DeMan et al ont proposé une méthode statistique avec un modèle polychromatique (comme l'équation (1.11)), dits "IMPACT" dans [16]. Le modèle de décomposition des CALs des matériaux basées sur l'absorption photo-électrique et le diffusé de Compton [15], est utilisé dans ce modèle polychromatique, qui sont dépendants de l'énergie, voir l'équation 3.4. Car b_ψ et b_θ sont indépendants de l'énergie, DeMan et al les ont modifiés dans l'équation 3.4 afin de réduire le degré de liberté dans ce modèle de décomposition de CAL,

$$f_j(e_x) = b_\psi(f_j(e_0))\Psi(e_x, e_0) + b_\theta(f_j(e_0)) * \Theta(e_x, e_0) \quad (3.32)$$

avec

$$\Psi(e_x, e_0) = \frac{1/e_x^3}{1/e_0^3}, \quad (3.33)$$

et

$$\Theta(e_x, e_0) = \frac{f_{KN}(e_x)}{f_{KN}(e_0)} \quad (3.34)$$

où e_0 est l'énergie effective du spectre de source, par exemple 70 KeV, [16]. Et f_{KN} est la fonction de Klein-Nishina, voir l'équation 1.10. DeMan et al supposent que les coefficients de tous les matériaux peuvent être déterminés selon les courbes $b_\psi - f(e_0)$ et $b_\theta - f(e_0)$, et les coefficients d'un autre matériau peuvent être calculés par combinaison linéaire entre deux matériaux adjacents dans ces deux courbes.

DeMan et al ont utilisé la méthode de maximum de vraisemblance via l'algorithme basé sur le gradient (voir l'algorithme II.3.2.1.2) pour reconstruire une image. La statistique de comptage des photons X par le détecteur est approchée par la loi de Poisson. Pour la mesure selon le rayon i , y_i , voir l'équation 2.75,

$$P(Y_i = y_i | \mathbf{f}) = \frac{\bar{y}_i^{y_i} e^{-\bar{y}_i}}{y_i!} \quad (3.35)$$

où \bar{y}_i est le nombre de photons X moyen sur le rayon i . Dans le cas de rayons X polychromatiques,

$$\bar{y}_i = y_{0,i} \sum_{n=1}^{N_E} \omega(e_x(n)) * e^{(-\sum_{j=1}^N l_{ij} f_j(e_x(n)))} \quad (3.36)$$

où le spectre ω est discrétisé en N_E énergies. En remplaçant le modèle de décomposition de CAL (eq.3.32) dans l'équation 3.36, nous obtenons

$$\bar{y}_i = y_{0,i} \sum_{n=1}^{N_E} \omega(e_x(n)) * e^{(-(\Psi(e_x(n)) \sum_{j=1}^N l_{ij} b_\psi(f_j(e_0)) + \Theta(e_x(n)) \sum_{j=1}^N l_{ij} b_\theta(f_j(e_0))))} \quad (3.37)$$

La reconstruction d'image consiste à maximiser la log-vraisemblance L_v , voir l'équation 2.78,

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} L_v \mathbf{f} = \arg \max_{\mathbf{f}} \sum_{i=1}^M (y_i \ln(\bar{y}_i) - \bar{y}_i), \quad (3.38)$$

III.3.2 - Méthode de correction du durcissement

Méthode MAR	Complexité en opération principale
MAR-LI	$2 \times (\textit{filtrage} + \mathbf{H}^t)$
NMAR	$3 \times (\textit{filtrage} + \mathbf{H}^t)$
MV-Gradient avec modèle polychromatique [16]	$(4 \times \mathbf{H} + 4 \times \mathbf{H}^t)/\textit{itération}$
MV-Gradient modèle simple	$(\mathbf{H} + 2 \times \mathbf{H})/\textit{itération}$
PWLS-GC avec modèle linéaire directe	$(2 \times \mathbf{H} + 2 \times \mathbf{H}^t + 4\textit{Conv})/\textit{itération}$

Tableau 3.2 – Complexité en principale opération de différentes méthodes MAR.

où M est le nombre des mesures. L’algorithme de DeMan et al est décrit comme ci-dessous, la $k + 1^{\text{ième}}$ estimation, $\mathbf{f}^{(k+1)}$, voir l’équation 3.39,

$$f_{j_1}^{(k+1)} = f_{j_1}^{(k)} - \frac{\frac{\partial L_v(\mathbf{f}^k)}{\partial f_{j_1}}}{\sum_{j_2=1}^N \frac{\partial^2 L_v(\mathbf{f}^k)}{\partial f_{j_1} \partial f_{j_2}}} \quad (3.39)$$

avec $j_1 = 1, 2, \dots, M$, et la dérivé partielle de premier ordre $\frac{\partial L_v}{\partial f_{j_1}}$ et la dérivée partielle de second ordre $\frac{\partial^2 L_v}{\partial f_{j_1} \partial f_{j_2}}$, détaillés dans [16].

Une itération de la méthode de MV avec le modèle polychromatique précédent nécessite quatre projections et quatre rétro-projections [16]. Évidemment, la reconstruction de MV avec le modèle polychromatique est beaucoup plus compliquée que celle de MV avec le modèle simple, qui a besoin d’une projection et deux rétro-projections, voir le tableau 2.1. De plus, on a pu observer que le critère étant non quadratique mais simplement convexe, le nombre d’itérations nécessaires à la convergence de l’algorithme est plus important. Il en résulte un temps de reconstruction qui est beaucoup plus important qu’un algorithme de minimisation d’un critère des moindres carrés régularisés. Le temps de reconstruction de ces approches est tellement important qu’il n’est pas compatible avec une application clinique, où le temps de reconstruction ne doit pas dépasser quelques minutes voir le tableau 3.2. Le temps de calcul des principales opérations comme \mathbf{H} et \mathbf{H}^t est détaillé (voir le tableau 2.1) dans la section II.4 Chapitre II.

En plus, la segmentation des différents matériaux est importante afin d’appliquer ce modèle polychromatique. En effet, plus les erreurs de la segmentation sont importantes, moins la réduction des artefacts est efficace. C’est la même difficulté que pour les méthodes de post-reconstruction. Par contre, les méthodes statistiques avec les modèles polychromatiques sont plus robustes aux erreurs de segmentation que les méthodes de post-reconstruction, notamment avec les matériaux plus denses comme le métal, car les méthodes de post-reconstruction sont plus sensibles au bruit de reconstruction et les erreurs de segmentation en début peuvent être corrigées au cours d’itération des méthodes statistiques.

Dans le modèle de décomposition de CAL ci-dessus, les coefficients b_ψ et b_θ d’un matériau ne peuvent pas être estimés par la combinaison linéaire de ses deux voisins dans les courbes $b_\psi - f(e_0)$ et $b_\theta - f(e_0)$, dans certain cas, notamment les matériaux métalliques, [93]. Afin d’éviter ce problème, le modèle mélangé de matériaux de référence (eq.3.7) peut être utilisé, par exemple deux matériaux, eau (ou eau-équivalent, tissus mous) et os, [61], [93], [22]. Le modèle mélange de deux matériaux de référence, eau et os, est donné ci-dessous, [93], [22].

$$f_j(e_x) = b_j^{\text{eau}} f^{\text{eau}}(e_x) + b_j^{\text{os}} f^{\text{os}}(e_x), \quad (3.40)$$

où les fractions de matériau b_j^{eau} et b_j^{os} sont en fonction de la valeur reconstruite et les CALs de matériaux de référence, [93], qui permettent une reconstruction itérative sans segmentation.

Les méthodes statistiques avec les modèles polychromatiques (les équations 3.37 et 3.40) permettent d'éliminer les artefacts du durcissement si le spectre de source est connu suffisamment précisément et si les CALs des matériaux reconstruits dépendant de l'énergie sont connus *a priori*. En pratique, le spectre de source n'est pas souvent connu avant la reconstruction, ou l'estimation du spectre n'est pas suffisamment précise, ce qui ne permet pas de réduire les artefacts du durcissement complètement et introduit des erreurs de reconstruction. Les méthodes de correction du durcissement ne nécessitant pas de connaissances du spectre semblent plus convenables aux conditions réelles. Nous présentons ces méthodes ci-dessous.

III.3.2.3 Méthodes de correction du durcissement sans connaissances de spectre de source

Dans cette partie, nous présenterons d'abord l'approche lorsqu'il n'y a qu'un matériau dans le scène puis nous présenterons la généralisation de cette approche lorsqu'il y a plusieurs matériaux, enfin nous présenterons une méthode dédiée aux artefacts métalliques qui exploite la première approche uniquement sur la composante métallique de l'objet.

III.3.2.3.1 Méthode de correction dans le cas d'un matériau

Dans le cas d'un matériau, la non-linéarité de l'atténuation en fonction de la longueur de matériau avec les rayons X peut être décrite par une fonction polynomiale (eq.3.3) sans connaissances de spectre de source. Nous pouvons estimer cette fonction polynomiale par ajustement des données d'atténuation 1D en fonction de la longueur parcourue des rayons X traversant le matériau.

Afin de réduire les artefacts du durcissement, nous reconstruisons d'abord ce matériau à partir des données originales par FBP et segmentons les matériaux par seuillage. Puis nous calculons la longueur d'intersection des rayons X avec ce matériau en utilisant l'opérateur de projection (voir l'eq.2.45) et estimons la fonction polynomiale par ajustement des données de moindres carrés. Ensuite nous simulons les projections polychromatique à travers la fonction polynomiale et les projections monochromatiques en multipliant la longueur parcourue de rayons X traversant le matériau par la moyenne des valeurs reconstruites de matériau. Enfin nous corrigeons les données (voir l'eq.3.10) et le reconstruisons par FBP.

III.3.2.3.2 Méthode de correction en présence de plusieurs matériaux

La méthode précédente ne convient pas dans le cas de deux matériaux ou plus, car deux longueurs d'intersection de deux matériaux différents ne peuvent pas être déterminées indépendamment. On ne peut donc pas estimer les deux courbes modélisant les non-linéarités séparément. Afin de résoudre ce problème Krumm et al ont proposé une méthode basée sur l'interpolation surfacique [5]. Tout d'abord, il a noté qu'ils ont proposé d'appliquer leur approche sur des données issues de problème de contrôle non destructif.

III.3.2 - Méthode de correction du durcissement

En effet, les matériaux dans ce contexte ont une très faible variabilité contrairement à l'imagerie médicale (l'atténuation des os du corps sont très variables en fonction du type d'os). Le principe de cette approche consiste à segmenter les N_m matériaux présents dans l'objet. Puis on calcule chaque distance traversée dans chaque matériau. Ensuite on place dans un espace de dimension $N_m + 1$ les points associés aux rayons traversant au moins un matériau. Les points dans l'espace des différentes distances traversées et l'atténuation devrait former un hyperplan de l'espace s'il n'y avait pas de durcissement de spectre (comportement linéaire). La non-linéarité s'exprime par une hyper-surface dans cet espace. C'est tout simplement une généralisation de l'estimation de la courbe lorsque nous avons un seul matériau [95] et [5].

Les étapes de méthode de Krumm et al sont données ci-dessous :

1. Reconstruction initiale \mathbf{f}_{ini} avec les données originales ;
2. Segmentation des différents matériaux par multi-seuillage ;
3. Calculs des longueurs d'intersection entre les faisceaux de rayons X et chaque matériau par projections de l'image segmentée ;
4. Détermination d'un nuage de points dans l'espace de dimension $N_m + 1$ (chaque point est repéré par les distances traversées par le rayon X dans chaque matériau et son atténuation) ;
5. Détermination de l'hyperplan le plus proche du nuage de points au sens des moindres carrés, et utilisation de cet hyperplan pour déterminer les projections de l'objet si la source était monochromatique \mathbf{g}_{mono} ;
6. Détermination de l'hyper-surface de dimension N_m la plus proche du nuage de points et estimation des projections polychromatiques \mathbf{g}_E ;
7. Correction des données d'intensité \mathbf{I}_c ;

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I} + I_0 * e^{-\mathbf{g}_{mono}} - I_0 * e^{-\mathbf{g}_E} \quad (3.41)$$

8. Reconstruction finale $\hat{\mathbf{f}}$ avec les données de correction \mathbf{I}_c ;

Les étapes peuvent être répétées pour améliorer l'image reconstruite comme les méthodes de post-reconstruction.

III.3.2.3.3 Application de ce type d'approches en imagerie médicale

Dans la méthode de Krumm et al, l'interpolation surfacique devient compliquée lorsque le nombre de matériaux est grand, par exemple 4, [96]. En imagerie dentaire, il existe des zones de contraste dont la variation de densité des matériaux est importante. Il apparaît que cette méthode n'est pas convenable en imagerie dentaire. Mais dans le cadre de réduction des AMs, la source physique majeure est le durcissement du métal, le durcissement des autres matériaux peut être souvent négligeable devant celui du métal. Nous pouvons alors procéder à la correction du durcissement du métal (seul matériau) comme le cas d'un matériau. Verburg et al ont utilisé une méthode de correction du durcissement métal avec l'ajustement des données [80]. Il est important d'extraire la contribution du métal unique à partir des mesures. Les principes sont donnés ci-dessous :

1. Reconstruction initiale par FBP, \mathbf{f}_{ini} à partir des données originales \mathbf{g} , et segmentation du métal par seuillage \mathbf{B}^{metal} , et projections du métal, \mathbf{HB}^{metal} .
2. Remplacement de la trace du métal par interpolation laplacienne sur les voisins autour de la trace du métal dans les données originales, \mathbf{g}_{int} .
3. Reconstruction préliminaire d'image de réduction des AMs, \mathbf{f}_{MARIL} , et projections de la zone du métal, \mathbf{Hf}_{interm} , l'image intermédiaire \mathbf{f}_{interm} est définie comme ci-dessous :

$$f_{interm,j} = \begin{cases} f_{MARIL,j} & \text{si } B_j^{metal} = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.42)$$

4. Extrait de la contribution du métal uniquement, \mathbf{g}^{metal} .

$$\mathbf{g}^{metal} = \mathbf{g}_{int} - \mathbf{Hf}_{interm} - \mathbf{g}, \quad (3.43)$$

La courbe polychromatique en fonction de la longueur d'intersection du métal avec les rayons X est estimée par ajustement des données \mathbf{g}^{metal} basé sur une méthode des moindres carrés avec la fonction cubique ci-dessous.

$$\mathcal{C}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, \quad (3.44)$$

où a, b, c et d sont les coefficients de fonction cubique. Nous estimons les projections polychromatiques du métal \mathbf{g}_{poly} avec la courbe polychromatique. Les données de correction \mathbf{g}_c est calculées par soustraction des projections polychromatiques du métal dans les données originales.

$$\mathbf{g}_c = \mathbf{g} - \mathbf{g}_{poly}. \quad (3.45)$$

L'image du métal est recollée dans l'image reconstruite avec les données corrigées.

Nous remarquons les raies noires et blanches dans l'image reconstruite de correction du durcissement, [80]. Ces artefacts sont dus à la discontinuité présente dans les données corrigées. Cette discontinuité peut être causée par l'interpolation des données, la soustraction de la contribution du métal, et le diffusé. Elle est amplifiée par le filtre rampe dans les méthodes FBPs, qui produit les artefacts visibles. Dans la suite, nous nous intéressons aux méthodes de correction du diffusé.

III.3.3 Méthodes de correction du diffusé

Les artefacts causés par le rayonnement diffusé sont similaires à ceux du durcissement ([10]). En plus, le diffusé Compton des rayons X introduit une incertitude sur la quantité de photons mesurés ayant un parcours rectiligne. En effet, les rayons X diffusés violent l'hypothèse faite dans les méthodes de reconstruction tomographique qui suppose que les rayons X se déplace suivant une ligne droite. Ce rayonnement réduit également le contraste de l'image reconstruite car les photons X diffusés sont ajoutés dans les photons X directs, voir la figure 1.11. Selon la physique des interactions rayonnement-matière, le diffusé de Compton est un processus aléatoire. La probabilité de diffusé Compton dépend de la densité d'électrons du matériau, ainsi que de l'énergie du rayons X. La contribution du diffusé de Compton augmente dans l'atténuation des rayons X avec l'énergie de photons X, voir la figure 1.10. En plus, le diffusé mesuré est dépendant de la géométrie du scanner.

III.3.3 - Méthodes de correction du diffusé

En effet, plus la distance entre l'objet scanné et le détecteur est grande, moins il y a de photons X diffusés arrivant sur le détecteur. En CBCT avec des détecteurs plats, les photons diffusés sont plus nombreux que dans le cas de la reconstruction 2D. En effet, dans le cas la tomographie divergente 2D, on place un collimateur qui supprime le diffusé qui provient des autres plans du volume.

Le développement des méthodes de correction du diffusé est toujours un domaine actif depuis décennies. La première technique possible de réduction du diffusé est l'augmentation la distance entre l'objet et le détecteur, voir la figure 3.14, mais le champs de vue est réduit lorsque la taille de détecteur fixée. La géométrie optimale de scanner avec un détecteur plat est proposée dans le papier [97]. La deuxième solution matérielle est le collimateur sur les cellules du détecteur qui utilise le métal très dense (par exemple plomb) comme les murs bloquant les rayons X diffusés, mais il fait augmenter la dose de radiation délivré aux patients afin d'avoir un nombre de photons X suffisant pour être détectés. Les autres méthodes de correction du diffusé de Compton peuvent être divisées en deux familles principales, les méthodes basées sur les mesures [98] et les méthodes basées sur les modèles. Les premières utilisent une grille de " beam-stop " (BS) 1D ou 2D ou un collimateur [98] qui bloquent le faisceau de rayons X. Le BS se constitue du métal très dense, par exemple plomb. Une hypothèse faite dans les premières est que la distribution du diffusé est sur le détecteur est lisse. Cette hypothèse est d'autant plus vrai que le détecteur est loin de l'objet. En effet, les discontinuité dans le rayonnement diffusé est principalement du à sa ré-atténuation variable en fonction de l'objet. Les cellules du détecteur sous le BS ou le collimateur mesurent uniquement les photons X diffusés car l'accès direct des rayons X est bloqué, voir les figures 3.15 et 3.16. Puis nous estimons la distribution du diffusé non mesuré par interpolation linéaire ou polynomiale. La deuxième famille de méthodes consistent à établir un modèle physique ou mathématique concerné à la probabilité du diffusé de l'objet qui nous permet d'approcher le diffusé réel. Nous pouvons utiliser des méthodes analytiques ou méthodes statistiques (MCMC) [99] pour estimer la distribution du diffusé de Compton. Les méthodes analytiques avec un modèle mathématique simple donnent une estimation rapide mais non précise. Par contre, les méthodes MCMC peuvent estimer la distribution du diffusé suffisamment précise, mais l'estimation est très coûteuse en temps de calcul, qui ne satisfait pas la limite de temps de calcul de quelques minutes dans les applications cliniques.

Dans la suite, nous nous intéressons aux méthodes basées sur les mesures qui sont plus faciles à implémenter et donnent une estimation de la distribution du diffusé acceptable et rapide.

III.3.3.1 Méthodes basées sur les mesures

Siewerdsen et al ont proposé une méthode basée sur les projections d'un collimateur qui peut bloquer les faisceaux de rayons X au bord du détecteur [97]. Puis la distribution du diffusé au milieu est estimée par interpolation polynomiale. Les principes de cette méthode sont présentées ci-dessous :

1. Détermination des zones effectives des mesures du diffusé dans les cellules de détecteur couvert par le collimateur ;
2. Estimation de la distribution du diffusé au milieu du détecteur par interpolation

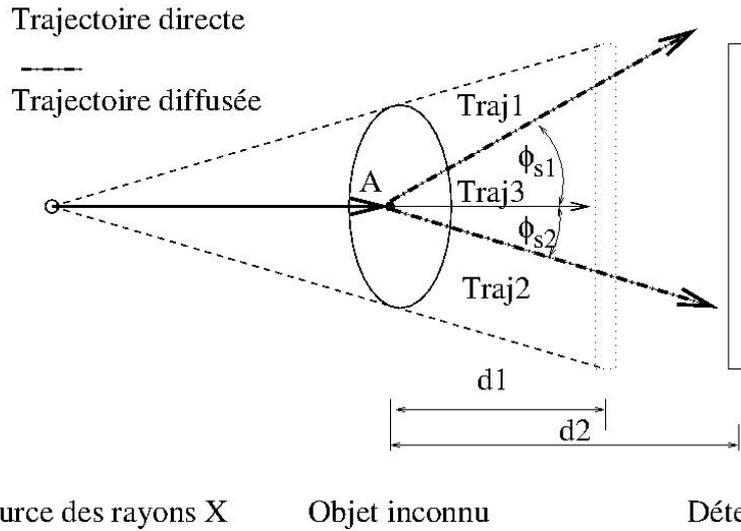


Figure 3.14 – Illustration du diffusé en fonction de la géométrie d’acquisition. Le rayon X avec l’angle de diffusé plus grande (Traj1) est capté par le détecteur plus proche de l’objet (en points), mais s’échappe au détecteur plus loin de l’objet (en ligne solide).

polynomiale sur colonnes (Fig.3.15) ;

3. Lissage de la distribution du diffusé sur les lignes de détecteur projection par projection et filtrage récursive causale avec le coefficient de pondération ϕ_{filtre} sur les angles des projections ;

$$g_{\phi,i} = \phi_{filtre}g_{\phi,i} + (1 - \phi_{filtre})g_{\phi-1,i}, \quad (3.46)$$

où $g_{n_{\phi}-1,i}$ et $g_{n_{\phi},i}$ sont les $n_{\phi} - 1$ ^{ième} et n_{ϕ} ^{ième} projections.

4. Soustraction de la distribution du diffusé estimée dans les données originales et reconstruction d’image.

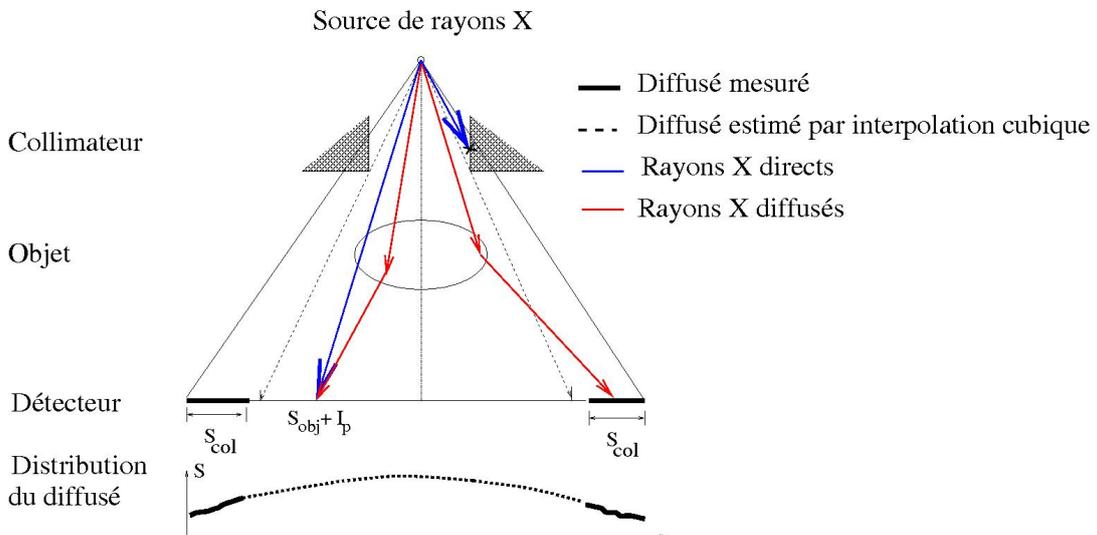


Figure 3.15 – Illustration de méthode basée sur les projections d’un collimateur.

III.3.3 - Méthodes de correction du diffusé

Cette méthode est simple à appliquer en pratique. Elle est indépendante de la géométrie du scanner, et robuste au mouvement de l'objet. Par contre, les cellules du bord du détecteur sont uniquement consacrées aux mesures du diffusé. Par conséquent pour une taille de détecteur fixée, le champ de vue est réduit ainsi que le volume reconstruit. De plus, au milieu de la projection le diffusé est estimé par interpolation à partir des mesures au bord. L'erreur d'interpolation est d'autant plus importante que l'on est loin des bords de la projection. Ce qui fait qu'au centre de l'objet, on a une très mauvaise estimation du diffusé ce qui peut limiter les bienfaits de cette correction [99].

Une autre méthode intéressante est d'utiliser une grille de BS ([85]). Elle est installée entre la source de rayons X et l'objet comme dans la figure 3.16. Similaire à la méthode de Siewerdsen et al, le diffusé où les cellules de détecteur se trouvent sous la grille de BS est mesuré directement, et puis le reste de la distribution du diffusé est estimée par interpolation 2D (linéaire ou cubique). L'illustration de cette méthode est montrée dans la figure 3.16.

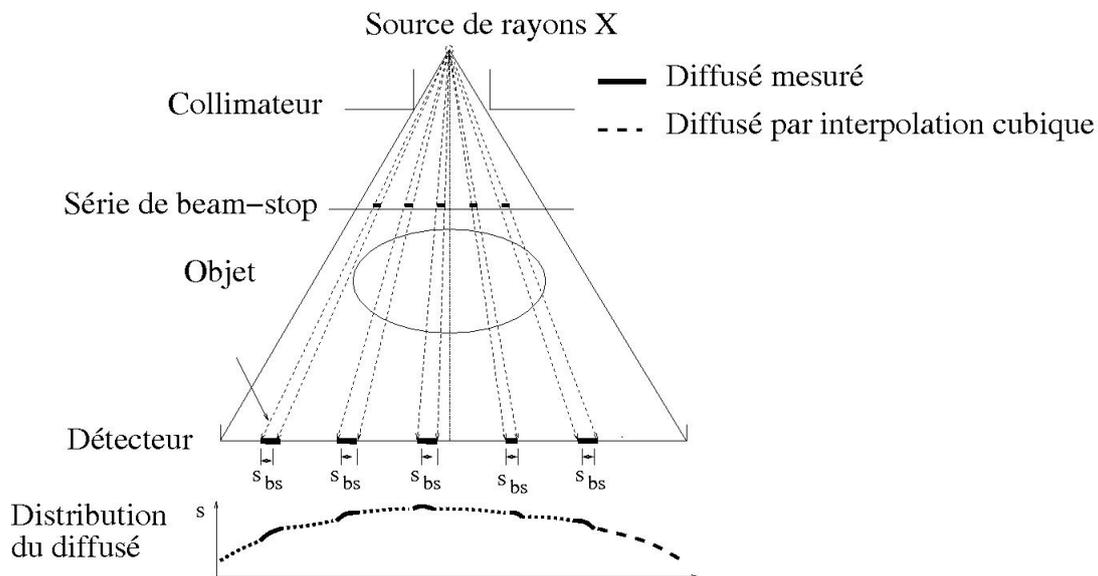


Figure 3.16 – Schéma de méthode de *beam-stops*, s_{bs} est le diffusé concerné aux projections de la série de *beam-stop*.

Les positions du diffusé mesuré sont déterminées par l'emplacement de la grille de *beam-stop*. Plus on utilise d'éléments de BS, plus on aura de mesures de diffusés réparties régulièrement sur la projection et plus on réduira les erreurs d'interpolation. Par contre, le diffusé causé par les BSs est ignoré, une acquisition additionnelle est nécessaire ([99], [85]) si nous utilisons les méthodes analytiques par exemple FBP, car les atténuations sur les faisceaux de rayons X passant la grille de BS ne sont pas mesurées. Mais nous pouvons reconstruire les images utilisant les méthodes itératives sans une acquisition supplémentaire.

III.4 Méthodes de MAR proposées

Notre objectif est de développer des méthodes de réduction d'artefacts métalliques (MAR) efficaces et robustes au bruit de mesure. En effet, nous voulons avoir des approches qui

sont efficaces en terme de temps de calculs pour avoir des retombées cliniques relativement rapides. De plus, nous voulons avoir des approches qui sont robustes au bruit pour que l'on puisse réduire la dose de rayons X transmise au patient.

Pour ce faire, nous allons présenter, une critique de l'état de l'art exposé dans la partie précédente, puis nous détaillerons les principales étapes de notre approche : segmentation, correction du durcissement de spectre, correction du rayonnement diffusé, reconstruction par moindres carrés pondérés avec régularisation.

III.4.1 Discussion sur les approches de l'état de l'art

Les méthodes MAR par remplacement des projections traversant des parties métalliques permettent de réduire les artefacts sans modélisation physique des différents problèmes dus au métal. Les avantages de cette approche sont que nous n'avons pas besoin de connaître le spectre de source et les différents CALs de matériaux en fonction de l'énergie des photons X. Enfin, elles sont faciles à implémenter. Par contre, ces approches éliminent les projections qui traversent le métal. Cela entraîne, que les bords des objets métalliques sont flous et il y a d'autres artefacts qui sont introduits par l'étape d'interpolation utilisée pour remplacer les projections des parties métalliques. Comme nous l'avons vu précédemment, c'est l'approche NMAR qui donne les images de meilleure qualité dans cette famille. Pour cela, cette approche utilise une image *a priori* qu'il faut déterminer avec suffisamment de précision si on veut obtenir de bons résultats. En conséquence, on obtient des images bonnes qualités en particulier avec des parties métalliques possédant des contours nets uniquement si l'objet est très contrasté [79].

En ce qui concerne les approches statistiques, elles permettent de prendre en compte des modèles physiques très évolués en particulier pour résoudre les problèmes de durcissement de spectre. L'avantage de ces approches par rapport aux méthodes de remplacement, c'est qu'elles permettent d'obtenir des résultats de meilleure qualité et qu'elles permettent de corriger les effets du durcissement de spectre sur l'ensemble de la reconstruction [16], [93] et [79]. Notons que l'on peut de manière conjointe réduire le durcissement de spectre et estimer la composition d'un objet en utilisant de la tomographie à deux énergies [22].

Par contre ces approches statistiques avec les modèles complexes sont très coûteuses en temps de calcul. Et les accélérations algorithmiques de type " Order of Subset " (OS) [57], ou " patch work ", [79] ne permettent pas une accélération suffisante pour avoir des applications cliniques à court terme sur des reconstructions tridimensionnelles. Il en est de même pour les accélérations matérielles comme les GPUs. Leurs applications nécessiteraient de améliorations significatives algorithmique et matérielle. De plus, comme dans les approches de correction des données, ces approches nécessitent la connaissance relativement précise des CALs de matériaux en fonction de l'énergie et du spectre de la source de rayons X [93]. En pratique, dans le cas de l'imagerie dentaire, la variété de matériaux utilisés dans les implants et dans les amalgames pose un réel problème d'identifiabilité de matériaux métalliques présents dans les reconstructions. De plus, Il est souvent difficile de connaître avec une précision suffisante le spectre de la source de rayons X des systèmes médicaux. L'estimation du spectre de source par les méthodes analytiques avec les modèles simples ne permet pas d'obtenir un résultat suffisamment précis. L'obtention d'un tel spectre nécessite de procéder à une série de mesure de calibration difficile à mettre en œuvre (construction d'un fantôme dédié).

Alors, afin d'atteindre nos objectifs, nous proposons une stratégie de réduction des AMs en deux étapes : la correction des données et puis la reconstruction statistique PWLS avec le modèle direct linéaire. Le durcissement et le diffusé sont connus comme deux sources importantes de AMs, [10]. Pour la correction du durcissement, nous proposons une méthode basée sur l'ajustement des données, similaire à la méthode de Krumm et al, [5]. Afin de réduire les artefacts du diffusé, nous proposons une méthode basée sur les mesures, avec hypothèse que le métal présent dans l'objet peut bloquer les faisceaux de rayons X comme le " beam-stop " et la distribution du diffusé est douce en espace [100]. Nous reconstruisons les données corrigées utilisant les méthodes PWLS, qui permettent d'intégrer les informations *a priori* concernant les matériaux connus dans l'objet, par exemple tissus mous et os.

Nous prenons ensuite en compte le fait que la correction des données n'est pas parfaite. Par exemple les erreurs de correction sont souvent plus importantes sur les bords des objets métalliques. On définit donc une matrice de pondération d'un moindre carrés pondérés permettant de tenir compte de la variation des erreurs de correction de données. La reconstruction PWLS est plus robuste au bruit des mesures notamment dans la condition de faible dose, et également adaptée aux données acquises à partir d'un échantillonnage angulaire non uniforme ou les autres modes d'acquisition [101]. Enfin, nous pouvons accélérer la reconstruction PWLS par la méthode de pré-conditionnement [100] et l'implantation sur les cartes graphique.

Avant de présenter nos méthodes de correction du durcissement et correction du diffusé, nous exposons deux méthodes de segmentations automatisées, qui sont utilisées pour la segmentation de métal dans nos méthodes de correction du durcissement.

III.4.2 Méthodes de segmentation automatisée

La segmentation des matériaux est indispensable dans la plupart de méthodes MAR : – les approches par remplacement des projections traversant le métal [12], [67], [72], [74], et [4], – les approches de correction des données [90], [91], [94]. En imagerie médicale, le métal est segmenté simplement par seuillage [12], [67], [72], [74], [4], car le métal est beaucoup plus dense que les matériaux humains, par exemple tissus mous et os. Dans beaucoup d'approches la valeur du seuil est déterminée de manière empirique.

Comme en pratique, les implants métalliques sont souvent inconnus, une mauvaise valeur de seuil entraîne une mauvaise segmentation. De plus, les méthodes MAR sont sensibles aux erreurs de segmentation. Par conséquent, nous nous intéressons aux méthodes de segmentation automatisée. Nous introduisons deux méthodes : méthode d'Otsu ([102]) et méthode de K-means, par la suite.

III.4.2.1 Méthode d'Otsu

Otsu propose une méthode de segmentation non supervisée basée sur l'histogramme de valeurs gris d'image. Le seuil optimal est sélectionné en maximisant la fonction de critère qui signifie la séparabilité de différentes classes.

Soit une image I avec N_I pixels, et l'ensemble de tous les niveaux de gris d'image, $\mathbf{G} = 1, 2, 3, \dots, N_G$, avec le nombre de niveaux de gris N_G . Considérons qu'il y a deux

classes dans l'image, le fond et l'objet, qui sont définis en fonction de niveaux de gris i ,

- contexte (classe **A**) :

$$\mathbf{A} = \{f_i | i = 1, 2, 3, \dots, s\}. \quad (3.47)$$

- objet (classe **B**) :

$$\mathbf{B} = \{f_i | i = s + 1, s + 2, s + 3, \dots, N_G\}, \quad (3.48)$$

avec le seuil s . La probabilité d'un pixel dans $i^{\text{ième}}$ niveau de gris est calculée de manière suivante,

$$p_i = \frac{n_i}{N_I}, \quad (3.49)$$

où n_i est le nombre de pixel de $i^{\text{ième}}$ niveau de gris. Alors, les probabilités de pixel qui appartient aux classes **A** et **B** sont donnée ci-dessous, p_A et p_B , respectivement :

$$p_A = \sum_{i=1}^s p_i \quad (3.50)$$

$$p_B = \sum_{i=s+1}^{N_G} p_i \quad (3.51)$$

Les moyennes de niveau de gris de classes **A**, **B** et d'image totale sont facilement calculées comme suit :

$$\bar{f}_A = \sum_{i=1}^s i \frac{p_i}{p_A}, \quad (3.52)$$

$$\bar{f}_B = \sum_{i=s+1}^{N_G} i \frac{p_i}{p_B}, \quad (3.53)$$

$$\bar{f}_I = \sum_{i=1}^{N_G} i p_i \quad (3.54)$$

Otsu définit une fonction de discrimination de différentes classes basée sur la variance d'interclasse comme ci-dessous :

$$\sigma_{ic}^2 = p_A(\bar{f}_A - \bar{f}_I)^2 + p_B(\bar{f}_B - \bar{f}_I)^2 = p_A p_B (\bar{f}_A - \bar{f}_B)^2. \quad (3.55)$$

Le seuil optimal est obtenu en maximisant la variance de interclasse σ_{ic}^2 .

$$\hat{s} = \arg \max_s \sigma_{ic}^2. \quad (3.56)$$

Cette méthode de segmentation non supervisée peut être étendue dans le cas de segmentation de multi-classes, [102], [103]. La segmentation par la méthode d'Otsu est rapide, et le temps de segmentation est négligeable comparé avec le temps de reconstruction tomographique. Nous séparons le métal avec les autres matériaux en utilisant la méthode d'Otsu par la suite.

III.4.3 - Méthode de correction du durcissement proposée

III.4.2.2 Méthode de K-means

Un autre algorithme de segmentation qui est souvent utilisé dans le domaine de traitement des images est K-means. Il consiste à diviser les pixels en K partitions dans lesquelles chaque pixel appartient à la partition avec la moyenne la plus proche. Les K ensembles, $\mathbf{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_K\}$ sont obtenus en minimisant la distance entre les points à l'intérieur de chaque partition Δ .

$$\hat{\mathbf{G}} = \arg \min_{\mathbf{G}} \sum_{i=1}^K \sum_{f_j \in G_i} \Delta(f_j, \bar{f}_{G_i}), \quad (3.57)$$

où \bar{f}_{G_i} est la moyenne de la partition G_i . Si la distance est définie en distance euclidienne, $\Delta(f_j, \bar{f}_{G_i}) = \|f_j - \bar{f}_{G_i}\|^2$. L'algorithme de K-means est présenté ci-dessous : La condition

Algorithme 2 Algorithme de K-means

Initialisation : choisir K points comme les positions moyennes des partitions initiales, $\bar{f}_1^0, \dots, \bar{f}_K^0$.

k=1;

while La condition de convergence n'est pas satisfaite **do**

Classifier chaque pixel à la partition la plus proche :

$$G_i^{(k)} = \{f_j : \Delta(f_j, \bar{f}_{G_i}^{(k-1)}) \leq \Delta(f_j, \bar{f}_{G_{i'}}^{(k-1)}) \forall i' = 1, \dots, K\}.$$

Mettre à jour des moyennes de chaque partition :

$$\bar{f}_{G_i}^k = \frac{1}{|G_i^{(k)}|} \sum_{f_j \in G_i^{(k)}} f_j.$$

k=k+1.

end while

d'arrêt est qu'il n'y a plus de point à changer de partition. L'algorithme K-means peut converger vers un minimum local (voir l'eq.3.57), qui est dépendant des points de départ. Le nombre de classes doit être précisé avant la segmentation, et il influence le résultat de la segmentation, voir la figure M-6. En plus, le coût de segmentation par algorithme de K-means est dépendant du nombre de pixels et de nombre de classes. En imagerie dentaire, le nombre de matériaux peut être connu *a priori*, car les dentistes connaissent clairement les classifications de matériaux de la mâchoire et le nombre d'implants dentaires métalliques que le patient porte. L'algorithme de K-means est utilisé lors de la segmentation de multiple matériaux dans nos méthodes MAR, notamment avec utilisation de modèle polychromatique.

III.4.3 Méthode de correction du durcissement proposée

Dans le contexte de l'imagerie dentaire, la principale contribution du durcissement de spectre vient des objets métalliques si le métal est présent. Si nous comparons les courbes de CAL de Titane et les tissus mous et l'os en fonction de l'énergie de photon X dans la figure 1.10, le durcissement dû aux matériaux moins denses peut être négligeable devant celui du métal de la même épaisseur. Alors, la réduction des AMs dû au durcissement est équivalente à la correction du durcissement uniquement pour les projections passant par du métal. La correction du durcissement se simplifie en une correction mono matériau.

La difficulté réside maintenant dans l'extraction de contribution du métal dans chaque projection. Pour ce faire, on procède à une première reconstruction de l'objet sans métal en utilisant une méthode MAR.LI linéaire. Puis on détermine, la contribution du métal par soustraction. Nous utilisons ensuite la méthode de Verburg et al pour déterminer la non-linéarité associé à la présence du métal [80]. Remarquons que nous n'avons pas besoin de connaître la nature du métal présent ni le spectre de la source de rayons X, par contre nous supposons que nous sommes en présence uniquement d'un type de métal. Afin d'estimer la courbe polychromatique du métal à partir des mesures d'atténuation, nous appliquons une méthode d'ajustement de courbes aux données en utilisant des fonctions logarithmiques. D'après l'expression d'atténuation polychromatique (eq.1.12), les atténuations polychromatiques du métal peuvent être estimées par les fonctions logarithmiques.

$$a_E = -\ln\left(\sum_{n=1}^{N_E} w_n e^{-c_n T}\right), \quad (3.58)$$

avec les coefficients $0 < w_n < e^{(c_{max} T_{max} - a_{E,min})}$, et $0 < c_n < c_{max}$, $n = 1, 2, \dots, N_E$. c_{max} est le CAL maximum de matériaux dans l'intervalle d'énergie en radiologie diagnostique (de 30 à 150 KeV), par exemple 20 cm^{-1} et T_{max} représente le maximum de longueur d'intersection de rayons X avec le métal. A nos expériences, un faible nombre de N_E suffit d'estimer la courbe polychromatique du métal correctement, par exemple $N_E = 2$.

Les principes de notre méthode de correction du durcissement sont introduits dans la suite :

1. Reconstruction initiale \mathbf{f}_{ini} par FBP (eq.2.38) sur les données originales \mathbf{g} , voir la figure 3.19.(a).
2. Segmentation du métal \mathbf{B}^{metal} par la méthode d'Otsu (eq.3.56), les matériaux dans l'objet sont classifiés en deux familles, métal et non métal (eau, tissus mous, os, etc.). Et calcul des longueurs d'intersection du métal par projections de l'image du métal \mathbf{HB}^{metal} .
3. Remplacement des projections de métal dans les données originales par interpolation linéaire \mathbf{g}_{LI} , et reconstruction préliminaire par FBP à partir de \mathbf{g}_{LI} , \mathbf{f}_{LI} , voir la figure 3.19.(b).
4. Extrait des projections du métal \mathbf{g}^{metal} comme [80], dans les données originales,

$$\mathbf{g}^{metal} = \mathbf{g} - (\mathbf{g}_{LI} - \mathbf{H}\mathbf{f}_1) \quad (3.59)$$

où $\mathbf{H}\mathbf{f}_1$ sont les projections de la zone de métal d'image préliminaire \mathbf{f}_{LI} , avec \mathbf{f}_1 ,

$$f_{1,j} = \begin{cases} f_{LI,j} & \text{si } b_j^{metal} == 1 \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3.60)$$

où b_j^{metal} est l'élément j de segmentation du métal \mathbf{B}^{metal} . En plus, \mathbf{g}^{metal} est zéro où les faisceaux de rayons X ne passent pas par le métal.

5. Estimation de la fonction non-linéaire d'atténuation du métal en fonction de la longueur traversée du métal \mathbf{HB}^{metal} par ajustement des données de moindres carrés

III.4.4 - Méthode de correction du diffusé proposée

avec les fonction logarithmiques (eq.3.58), voir la figure 3.17.

$$(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{N_E}; \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{N_E}) = \arg \min_{w_n, c_n, n=1, \dots, N_E} \sum_{i=1}^M \left\| a - \ln \left(\sum_{n=1}^{N_E} w_n e^{-c_n T_i} \right) - g_i^{metal} \right\|^2, \quad (3.61)$$

avec la composante constante de mesures $|a| < c_{max} T_{max}$ et la longueur d'intersection de rayons X avec le métal T_i ,

$$T_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} b_j^{metal}. \quad (3.62)$$

Les paramètres estimés avec $N_E = 2$ sont les $a = 0,008$, $w_1 = 0,287$, $c_1 = 0,885$, et $w_2 = 2,026$, $c_2 = 1,998$, dans la figure 3.17.

Les projections polychromatiques estimées sont générées par la fonction non-linéaire, \mathbf{g}_E^{metal} . Et les projections monochromatiques estimées $\mathbf{g}_{mono}^{metal}$ sont faites par projections d'image du métal où les pixels du métal sont égaux à la moyenne des valeurs reconstruites du métal dans l'image initiale, voir la figure 3.18.

$$\mathbf{g}_{mono}^{metal} = \bar{f}^{metal} \mathbf{HB}^{metal}, \quad (3.63)$$

avec

$$\bar{f}^{metal} = \frac{\sum_{j=1}^N b_j^{metal} f_{init,j}}{\sum_{j=1}^N b_j^{metal}}. \quad (3.64)$$

6. Correction du durcissement, \mathbf{g}_c .

$$\mathbf{g}_c = \mathbf{g} + \mathbf{g}_{mono}^{metal} - \mathbf{g}_E^{metal}. \quad (3.65)$$

Une illustration schématique de notre méthode de correction de durcissement est donnée dans la figure 3.35. Les stries noires d'alignement liant les métaux sont effectivement réduites par notre méthode BHC, voir les figures 3.19.(c) et .(d). Le bord d'os à coté de la boule métallique est reconstruit nettement (voir la figure 3.19.(c)), par contre, il est mal reconstruit par le MAR-LI (voir la figure 3.19.(b)), car l'information de bord est perdue due à l'interpolation linéaire, voir la figure 3.20. En plus, il reste des petits trous noirs autour de métal dans l'image de BHC proposé (voir la figure 3.19.(c)), comparée avec l'image de MAR-LI (voir la figure 3.6.(c)), mais notre méthode BHC n'introduit pas de nouveaux artefacts. La résistance de ces trous noirs peut être à cause d'erreur de correction. Nous montrons la différence des données originales et celles corrigées par la suite, nous constatons que la discontinuité de la différence sur le bord de métal est très importante dû aux erreurs de correction, qui peut générer les trous noirs. Par conséquence, les erreurs de correction doivent être prise en compte dans la reconstruction.

III.4.4 Méthode de correction du diffusé proposée

Le métal dans l'objet peut bloquer les faisceaux de rayons X comme le " beam-stop ", notamment avec de multiple implants métalliques, en imagerie médicale, car il y a de l'atténuation très forte dans les directions où deux ou plus implants métalliques sont alignés, voir la figure 3.3. Alors nous supposons que les métaux dans l'objet bloquent

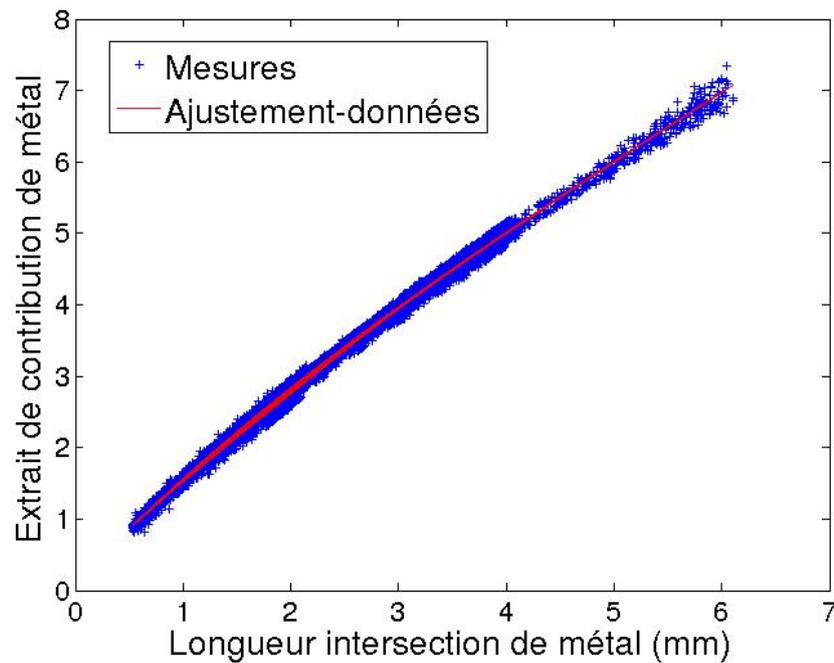


Figure 3.17 – Estimation de la courbe polychromatique par ajustement des données sur l'extrait de contribution de métal dans les données originales \mathbf{g}^{metal} .

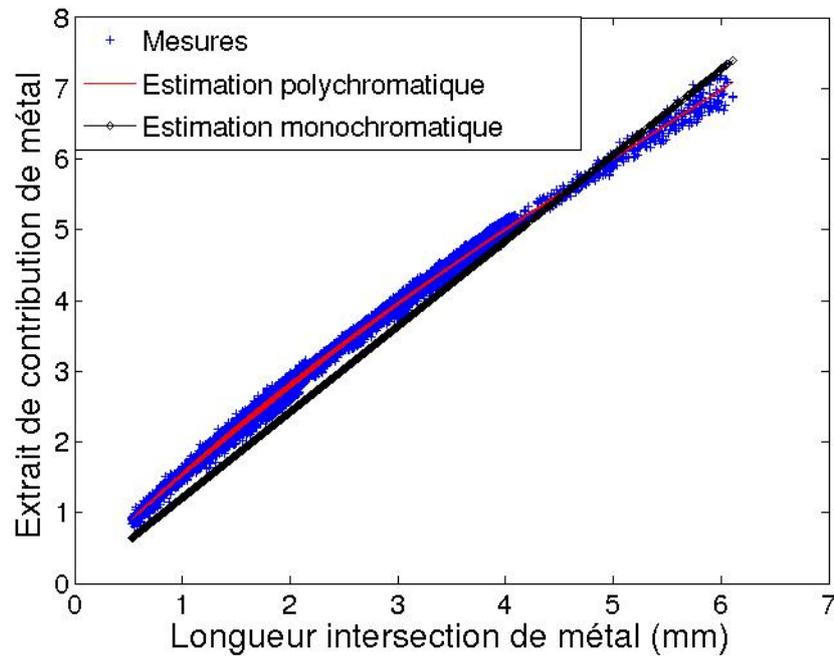


Figure 3.18 – La courbe monochromatique (en noire) et la courbe polychromatique (en rouge) en fonction de longueur d'intersection de rayons X avec le métal.

totalément les faisceaux de rayons X qui les traversent. Cette hypothèse peut être validée lorsqu'on travail à faible dose, ou lorsque l'énergie de photons X ne peut être pas suffisam-

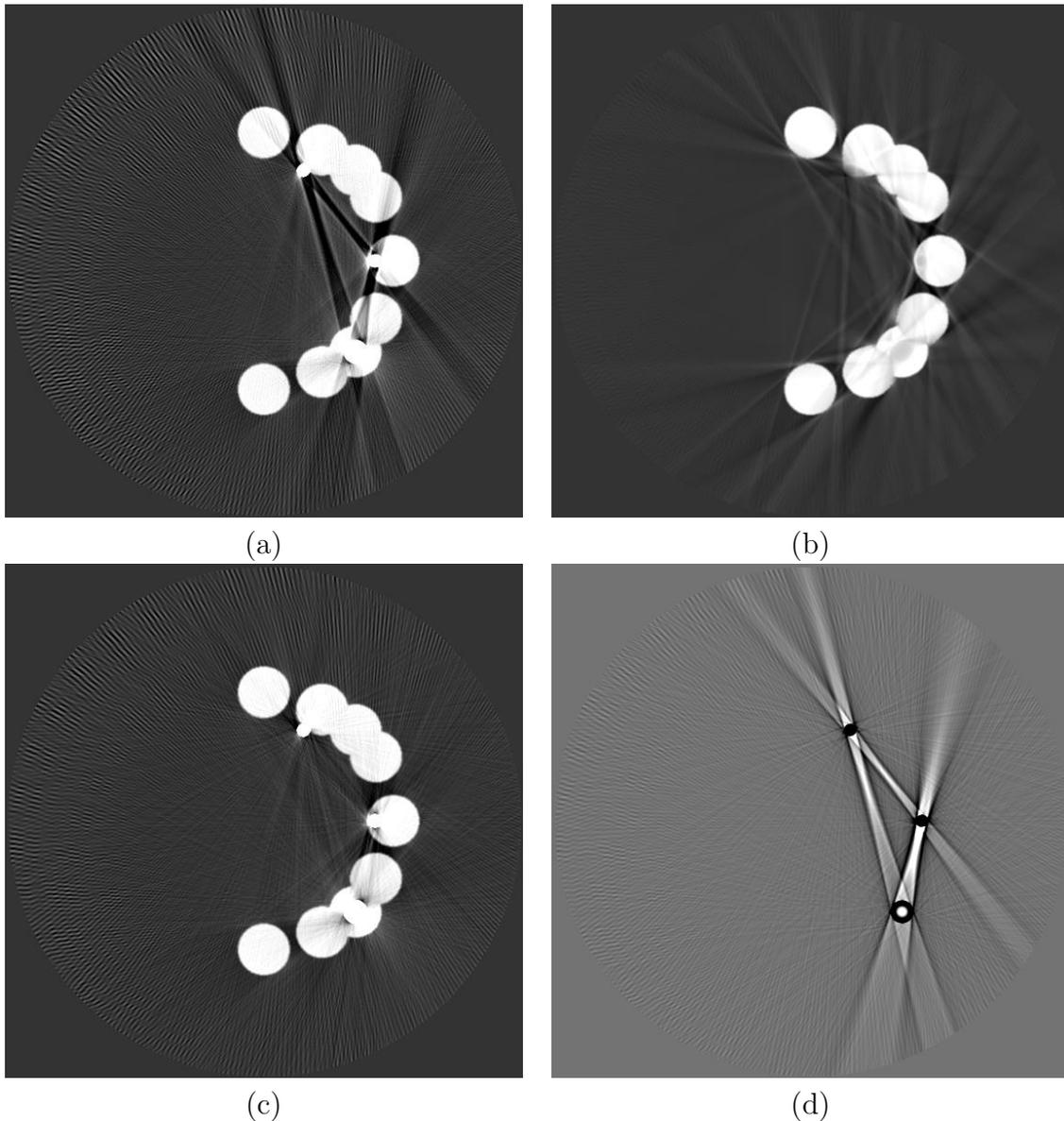


Figure 3.19 – Images reconstruites par FBP à partir des données originales (a), des données d’interpolation linéaire (b), et des données corrigées par notre méthode BHC (c). La différence de (c-a) est montrée dans (d). Dans la méthode MAR-LI, le métal est collé dans l’image (b). Les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,04]$ dans (a)-(c), et le $[-0,02 \ 0,02]$ dans (d).

ment forte pour traverser le métal configuration où la tension du générateur de rayons X est faible. De plus nous supposons que la composante du rayonnement diffusé est très basse fréquence. Cette hypothèse est valide lorsque la distance entre l’objet et le détecteur est suffisamment grande. Nous exposons les hypothèses faites dans notre méthode de correction du diffusé ci-dessous :

- $H_{3,1}$: les métaux dans l’objet peuvent stopper les faisceaux de rayons X concernés comme les “ beam-stop ”.
- $H_{3,2}$: la distribution de diffusé est lisse en espace de mesure.

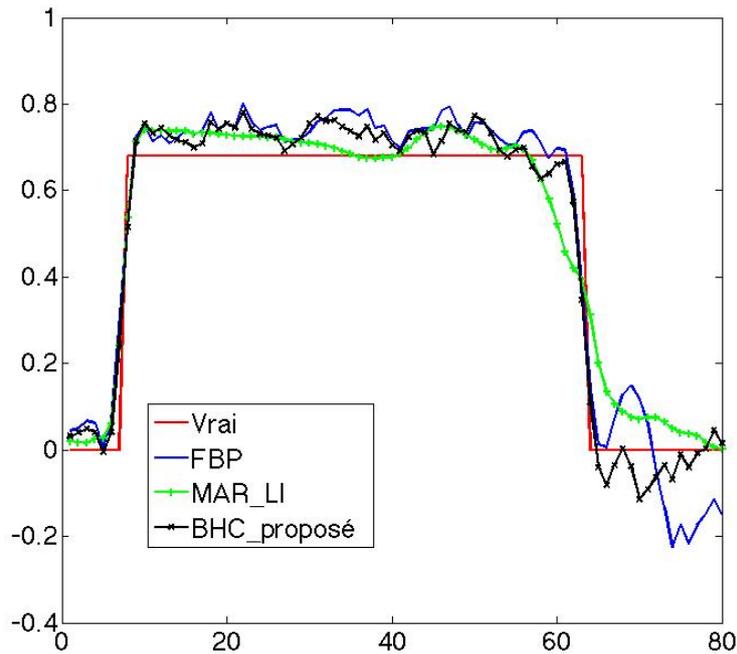


Figure 3.20 – Profils des images reconstruites suivant le segment de droite jaune dans la figure 3.19.(a).

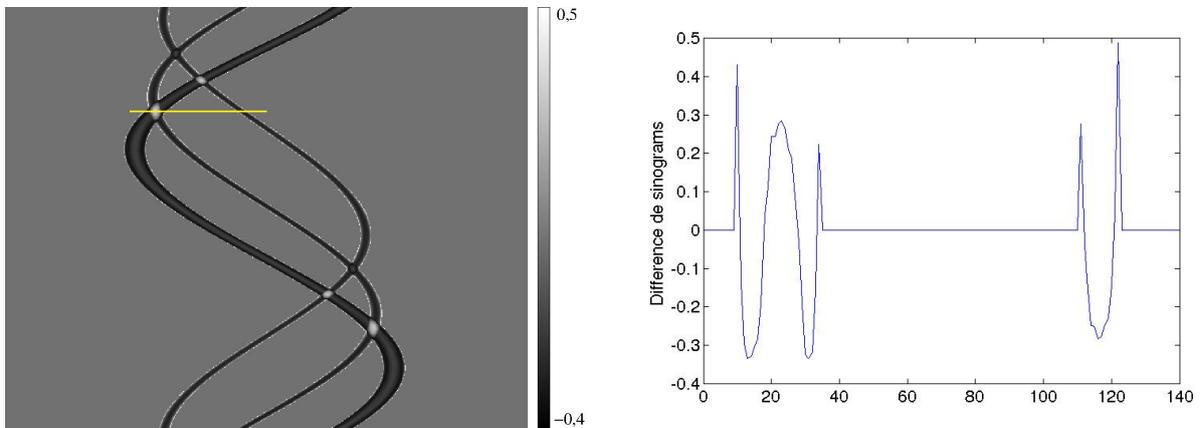


Figure 3.21 – Différence des données de correction de durcissement et celles originales (a) et profil (b) suivant le segment de droite dans (a).

De plus, si l'objet à scanner est plus petit que le champ de vue, le rayonnement sur les bords du détecteur ne passe pas par l'objet. Dans cette partie du détecteur, la mesure est la somme de l'intensité des faisceaux de rayons X directs et diffusés. Nous pouvons estimer le diffusé sur le bord du détecteur avec les connaissances de l'intensité des rayons X émis. L'intensité des rayons X est facilement mesurable en utilisant l'image de blanc (acquisition sans objet). Une fois le diffusé du bord de l'objet est mesuré, il est considéré comme une constante pour la même classe de l'objet. Dans les traitements cliniques, nous pouvons répéter les mesures du diffusé du bord en utilisant un fantôme de crâne

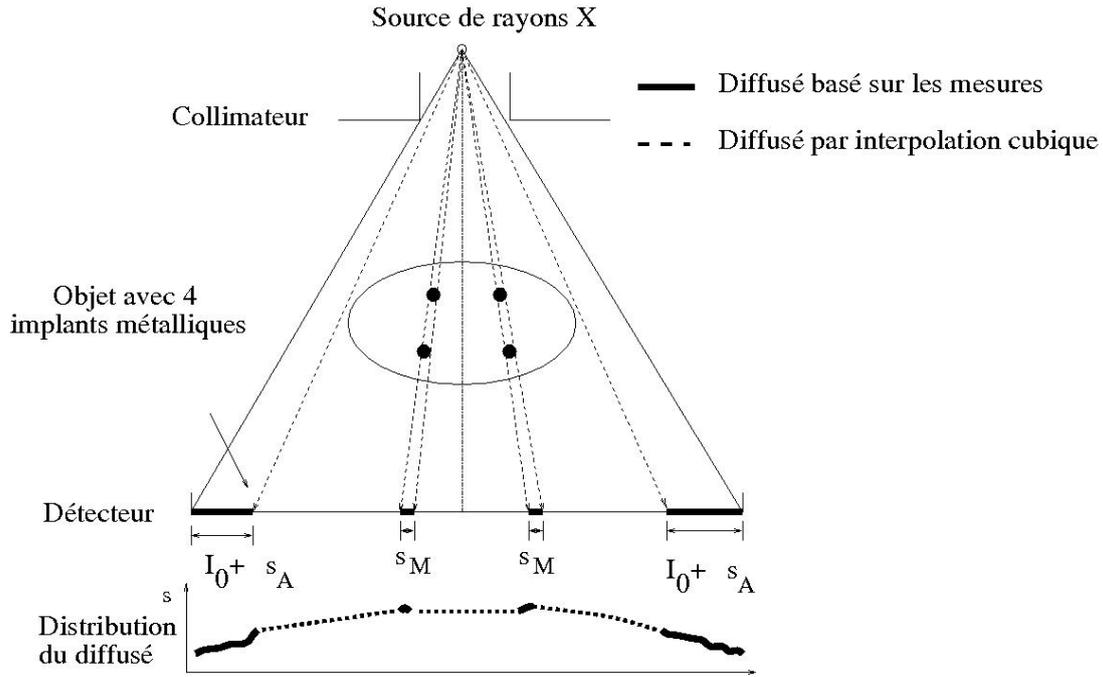


Figure 3.22 – Illustration de la méthode de correction du diffusé proposée. s_A et s_M sont respectivement le diffusé concerné à rien traverser et au métal.

masculin standard dans les tests pour approcher le diffusé du bord du patient homme, car la variation du niveau du diffusé du bord des crânes parmi les patients différents est relativement faible. Nous pouvons aussi faire la même chose pour les enfants et les femmes.

Un modèle direct simple avec le diffusé est donné ci-dessous :

$$\mathbf{I} = I_0(e^{-\mathbf{H}\mathbf{f}} + \mathbf{s}(\mathbf{f}|\mathcal{G})) + \mathbf{I}_\epsilon, \quad (3.66)$$

où $\mathbf{s}(\mathbf{f}|\mathcal{G})$ est la distribution du diffusé normalisée, qui est dépendant de l'objet \mathbf{f} et de la géométrie de système de scanner \mathcal{G} , et il se simplifie en \mathbf{s} ci-après. Et \mathbf{I}_ϵ est le bruit de mesures.

En pratique, I_0 est mesuré en faisant une acquisition sans objet. Pour estimer le diffusé où les faisceaux de rayons X n'ont rien traversé, on a $e^{-\mathbf{H}\mathbf{f}} \approx \mathbf{1}_N$, et le diffusé est alors estimé de manière suivante pour qu'il soit positif :

$$\hat{\mathbf{s}} = \left\| \frac{\mathbf{I}}{I_0} - \mathbf{1}_N \right\|_1, \quad (3.67)$$

où $\|\cdot\|_1$ est le \mathcal{L}_1 norme.

Les principes de notre méthode sont présentés ci-dessous voir la figure 3.22 :

1. Reconstruction initiale \mathbf{f}_{ini} par FBP, voir la figure 3.25.(a) ;
2. Segmentation du métal \mathbf{B}^{metal} et projections de l'image du métal $\mathbf{H}\mathbf{B}^{metal}$ comme dans notre méthode de correction du durcissement ;
3. Extrait des mesures du diffusé où les rayons X sont bloqués par le métal et calcul de la distribution de diffusé où les faisceaux de rayons X n'ont pas traversé avec l'équation 3.67 ;

4. Estimation de la distribution du diffusé dans l'étape précédente en ligne par ajustement des données, voir la figure 3.23 ;
5. Estimation du reste de la distribution de diffusé par interpolation spline cubique d'après la hypothèse $H_{3,2}$, voir les figures 3.22 et 3.23 ;
6. Filtrage gaussienne de la distribution estimée du diffusé en fonction des angles des projections. Nous choisissons la longueur du noyau gaussien à 3 pixels ;
7. Soustraction du nombre estimé de photons X diffusés détectés dans les mesures originales.

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I} - \mathbf{I}_0 \hat{\mathbf{s}} \quad (3.68)$$

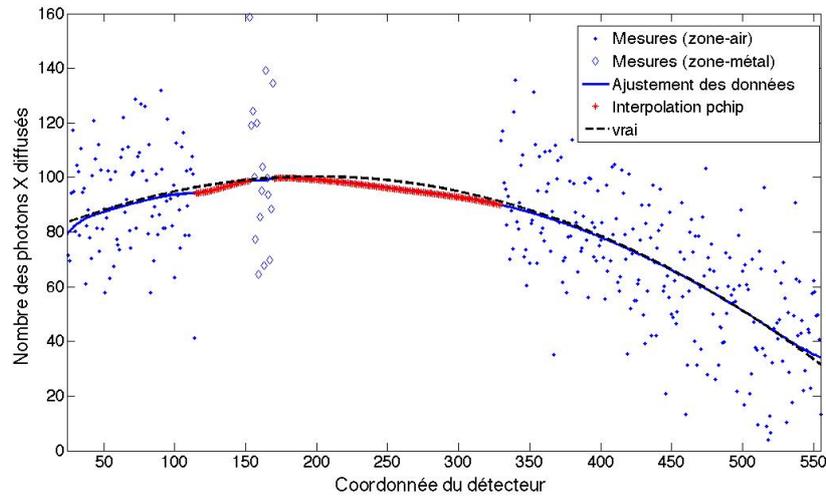


Figure 3.23 – Illustration de l'estimation de la distribution du diffusé.

Afin d'évaluer notre méthode de correction du diffusé, nous faisons une simulation avec le fantôme 1, la mâchoire de deux matériaux (les os et le cuivre). Nous faisons les simulations en supposant un générateur monochromatique afin de bien analyser la contribution des différents problèmes qui dégradent les reconstructions. Nous ajoutons ensuite un rayonnement diffusé simulé basse fréquence (voir la figure 3.24.(a)) et un bruit gaussien additif dont la variance σ_i^2 est dépendante du nombre de photons X y_i , $\sigma_i = 0,01 * y_i$, $i=1,2, \dots, M$.

Le diffusé estimé par notre méthode de correction est présenté dans la figure 3.24.(b). On observe sur cette figure que nous obtenons une bonne approximation du diffusé original (voir la figure 3.24.(a)). Nous observons aussi qu'il y a une grande variabilité des mesures du diffusé. On peut expliquer ce phénomène sur le bord par la statistique du bruit poissonnienne. Pour ce qui est de la partie centrale lorsque la distance de métal traversée est trop faible, on sur-estime le nombre de photons diffusés. Nous utilisons la méthode de moindres carrés LS (acronyme anglais de Least-Squares) pour reconstruire car le nombre des photons X sur l'alignement du métal après la correction du diffusé est très faible. De plus, nous prenons pas en compte les données qui sont très bruitées à cause du pré-traitement logarithmique des données. En comparant les figures 3.25.(a) et .(b), la plupart

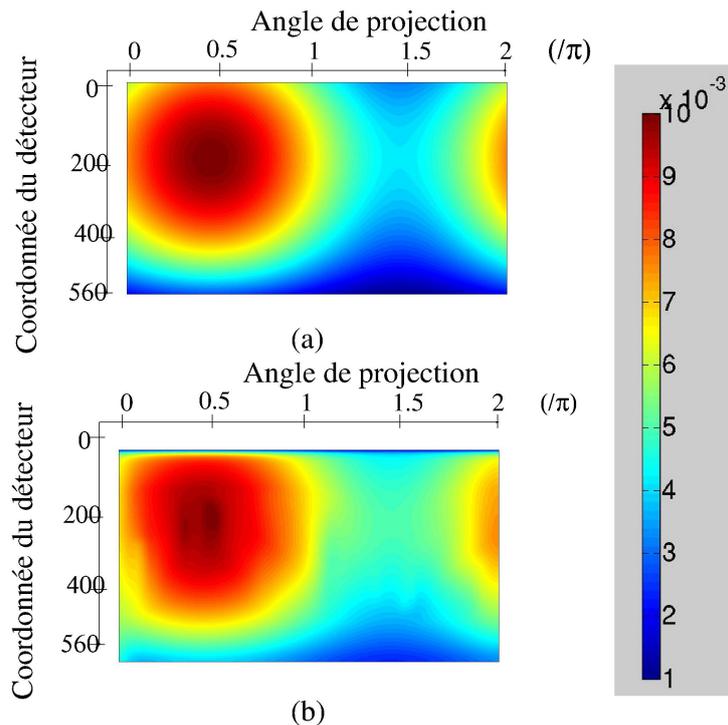


Figure 3.24 – La distribution originale du diffusé (a) et celle estimée du diffusé avec notre méthode (b).

des artefacts d’alignement dû au diffusé sont réduits par notre méthode de correction du diffusé (voir la figure 3.25.(c)) mais il reste certain nombre de stries noires et blanches.

III.4.5 Méthodes de reconstruction tomographique PWLS

Rappelons ici la philosophie de notre approche permettant d’avoir une très bonne qualité d’image tout en ayant un coût de calcul compatible avec une application clinique. Pour ce faire, comme nous venons de l’exposer nous procédons à des corrections sur les données puis nous faisons une reconstruction avec un modèle linéaire pour garantir un temps de calcul assez faible. Afin d’améliorer les résultats de reconstruction nous allons tenir compte des éventuelles erreurs lors de la correction des données. Nous introduisons une confiance variable en fonction des données et l’importance des corrections effectuées. Cette confiance est prise en compte mathématiquement en minimisant un critère des moindres carrés pondérés et pénalisés (PWLS) dont on a défini la matrice de pondération de manière adéquate.

Les performances de nos méthodes de correction de durcissement et correction du diffusé ont été montrées dans la partie précédente. En comparant les images reconstruites par une approche de type FBP en utilisant soit les données originales, soit les données corrigées, nous pouvons voir sur les figures (3.19) et (3.25) que les artefacts provenant d’alignement d’objets métalliques sont effectivement réduits. De plus, ces corrections n’introduisent pas de nouveaux artefacts, contrairement aux méthodes basées sur le remplacement des projections traversant le métal (voir les figures 3.6, 3.10 et 3.11). Mais, on observe que des artefacts persistent dues aux erreurs de correction. Il peut exister des

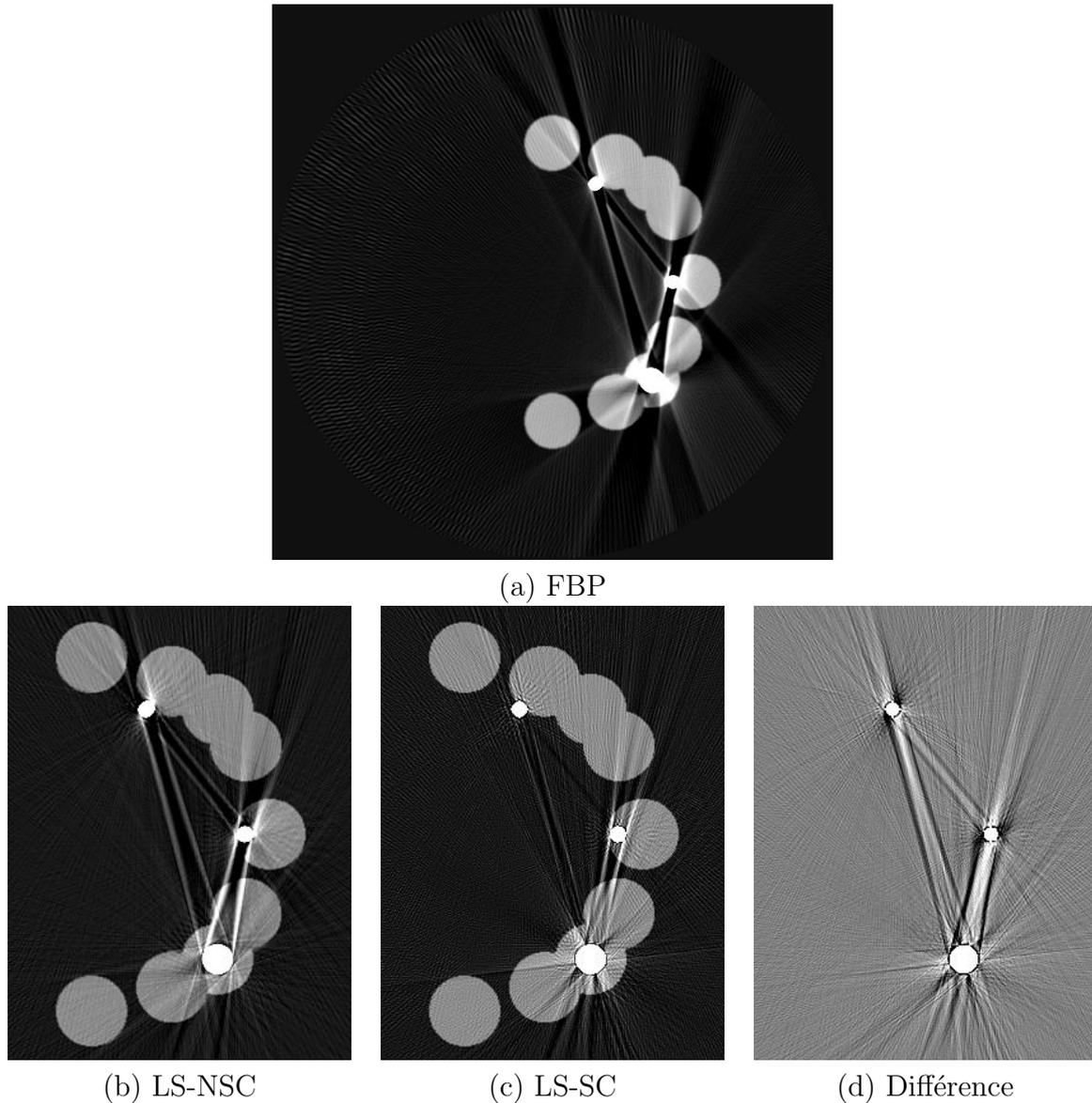


Figure 3.25 – Images reconstruites par FBP avec les données originales (a) et par les méthodes de moindres carrés avec les données originales (b), avec les données corrigées (c) et la différence des deux images (d)=(c)-(b). Les (b) et (c) sont les zooms des images dans la zone du rectangle rouge pointillé (voir la figure 3.3.(a)). Les fenêtres d’affichage de (a), (b) et (c) sont dans le cadre de $[-0,01 \ 0,1]$ et $[-0,05 \ 0,05]$ pour (d).

discontinuités au niveau des frontières des objets métalliques (voir la figure 3.21), ce qui peut provoquer des taches noires autour du métal et des stries noires et blanches (voir les figures 3.19.(c) et (d)). Ces erreurs de corrections sont souvent dues aux erreurs de segmentation qui peuvent fortement modifier par exemple la distance de métal traversé dans l’approche de correction du durcissement. Nous devons donc tenir compte de ces erreurs de correction dans la matrice de pondération lors d’une reconstruction.

III.4.5.1 Détermination de la matrice de pondération \mathbf{W}

La matrice de pondération de la fonction du coût PWLS (voir l'eq. 2.104) est déterminée par les nombres des photons X reçus par le détecteur [19] et [36]. En effet, dans cette approche, le but est de modéliser une vraisemblance poissonnienne à l'aide d'une vraisemblance implicite gaussienne qui revient à minimiser une fonction de coût quadratique (moindres carrés). Les variances des mesures de l'atténuation ϵ sont inversement proportionnelles au nombre de photons X [19] et [104].

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{y_i}. \quad (3.69)$$

Cela permet de pondérer l'effet de l'amplification du bruit par le métal (voir la figure 1.13), car le nombre des photons X à travers le métal est faible et les projections du métal sont pondérées avec les faibles coefficients. En comparant les images des méthodes de moindres carrés avec régularisation PLS (acronyme anglais de Penalized Least-Squares) et PWLS (voir les figures 3.29.(a) et .(b)), la méthode PWLS permet de réduire les artefacts d'alignement du métal en pondérant les projections du métal.

Après la correction du durcissement ou du diffusé, la non-linéarité des données associée est réduite. Mais il y a des erreurs de correction, car notre correction du durcissement ou diffusé n'est pas parfaite ou les hypothèses faites dans nos méthodes ne sont pas complètement vérifiées. Elles peuvent empêcher de réduire des artefacts métalliques comme les taches noires autour du métal (voir les figures 3.19.(c) et .(d)). Nous prenons donc en compte ces erreurs de correction lors de notre reconstruction itérative. En général, les erreurs de correction sont importantes sur les alignements des objets métalliques, car il y a une non-linéarité forte dû au durcissement, au diffusé ou au bruit. Elles sont aussi importantes sur la frontière entre les projections du métal et des autres matériaux (voir la figure 3.21). Plus les erreurs de correction sont importantes, moins les données corrigées y correspondant sont sûres [100]. La matrice de pondération est donc multipliée par une matrice \mathbf{W}_c pour prendre en compte l'incertitude de la correction des données.

$$\mathbf{W} = \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{W}_c, \quad (3.70)$$

avec Σ_ϵ la matrice des variances des mesures et \mathbf{W}_c la matrice adaptée à la correction des données. Nous réécrivons dans la suite la fonction du coût PWLS (voir l'eq.2.104) :

$$J(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{Hf})^t \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{Hf}) + \lambda \Phi(\mathbf{Df}). \quad (3.71)$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{W}_c sont égaux à 1 sauf les places des projections du métal, inférieurs à 1, voir la figure 3.26.(b). Ceux associés au métal w_{ij}^m sont en fonction de la longueur d'intersection l^m des rayons X avec le métal.

$$w_{ij}^m = Q_3(l^m), \quad (3.72)$$

avec Q_3 la fonction empirique. Elle est continue pour éviter une discontinuité artificielle. Nous donnons dans la suite deux exemples de Q_3 , voir les figures 3.26.(a) et 3.27.

$$Q_3(l^m) = ae^{-5\frac{l^m}{l_{max}^m}} + b, \quad (3.73)$$

avec l_{max}^m la longueur d'intersection des rayons X avec le métal. Nous choisissons $a = 0,99$ et $b = 0,01$ pour que les coefficients de \mathbf{W}_c sont égaux à 1 pour les projections des autre

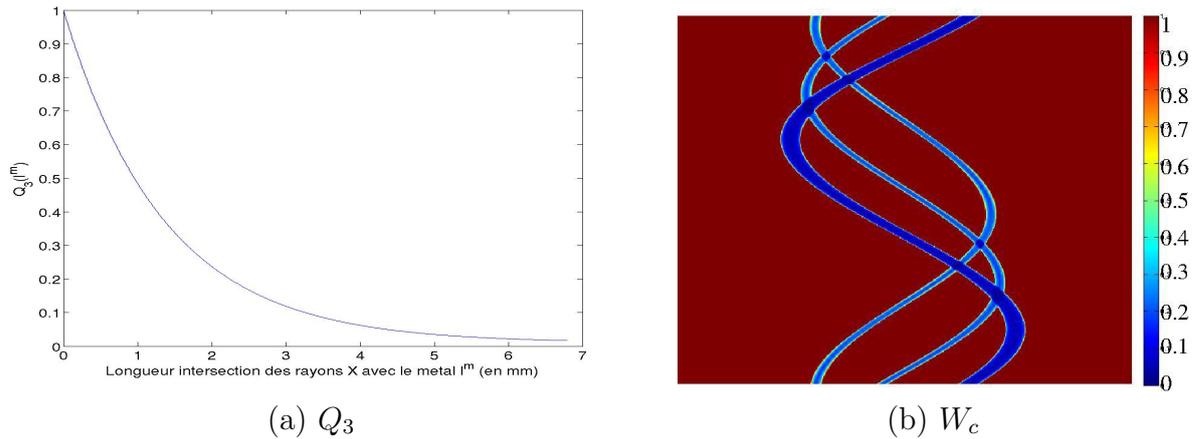


Figure 3.26 – (a) Une fonction empirique Q_3 et (b) un exemple de la matrice W_c avec la fonction Q_3 (a) adaptée aux données simulées du diffusé.

matériaux et descendent à 0,01 pour les rayons X les plus atténués. Une autre fonction Q_3 est décrite dans la figure 3.27 pour prendre en compte des erreurs de correction importants sur le bord des projections du métal (voir la figure 3.21). Cela nécessite un filtrage afin de réduire la discontinuité de la matrice de W_c .

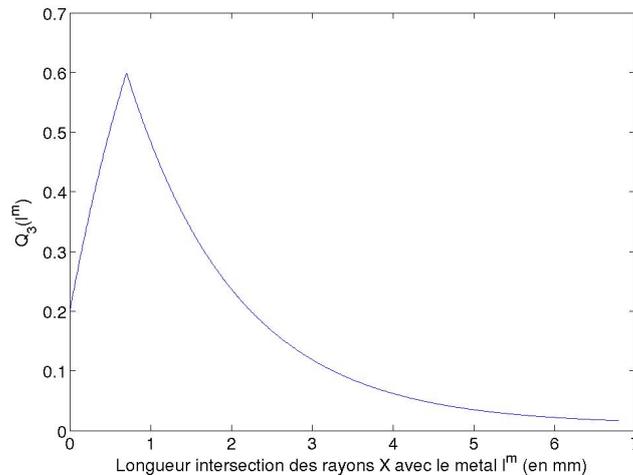


Figure 3.27 – Une fonction empirique Q_3 .

III.4.5.2 Résultats de réduction des artefacts métalliques

Afin de montrer la performance de nos méthodes MAR, nous procédons dans la suite trois jeux des données de simulation : les données de durcissement seulement ci-dessous, les données de diffusé plus du bruit gaussien additif précédentes et les données plus réalistes du durcissement et diffusé plus le bruit gaussien additif dont la variance est dépendant du nombre de photons X comme les données du diffusé. Nous exposons dans la suite les images reconstruites en utilisant les différentes méthodes. En comparant les images

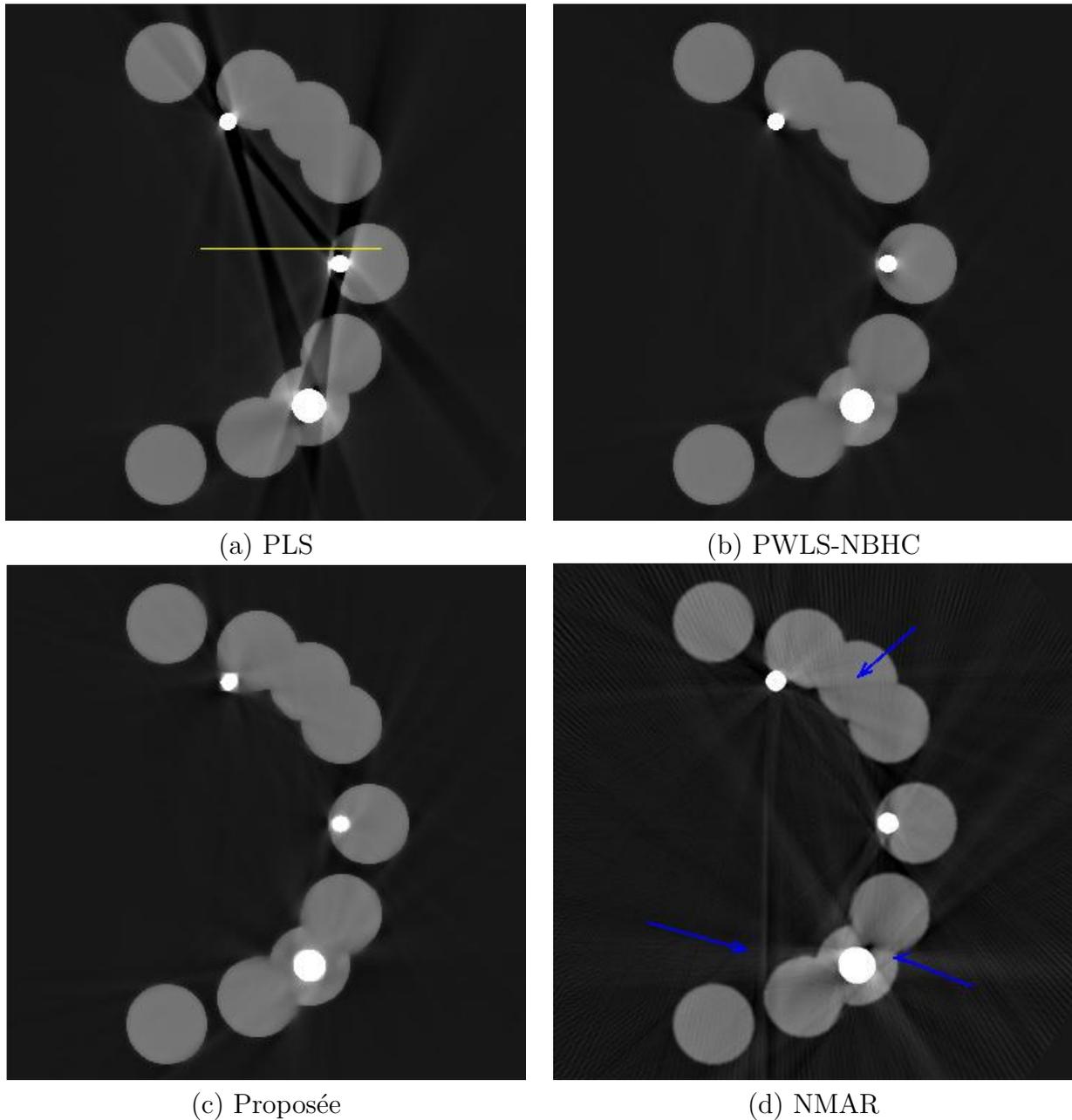


Figure 3.28 – Images reconstruites avec différentes méthodes à partir des données du durcissement. (a) PLS, reconstruction par la méthode de moindres carrés avec régularisation, (b) PWLS-NSC, reconstruction par la méthode de moindres carrés pondérés avec régularisation à partir des données originales, (c) méthode proposée, reconstruction par la méthode de moindres carrés pondérés avec régularisation avec les données corrigées et (d) NMAR. Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,1]$. Les flèches bleues indiquent de nouveaux artefacts dans l’image de NMAR (d).

PLS et celles PWLS avec les données sans correction, notre méthode de reconstruction tomographique PWLS permet de réduire les stries noires d’alignement liant les métaux lorsque les métaux sont distantes. Grâce à nos méthodes de correction du durcissement et du diffusé, les taches noires autour des métaux sont supprimées dans le cas des données du durcissement et celles du diffusé, en comparant les figures 3.28.(b), 3.29.(b) et 3.28.(c),

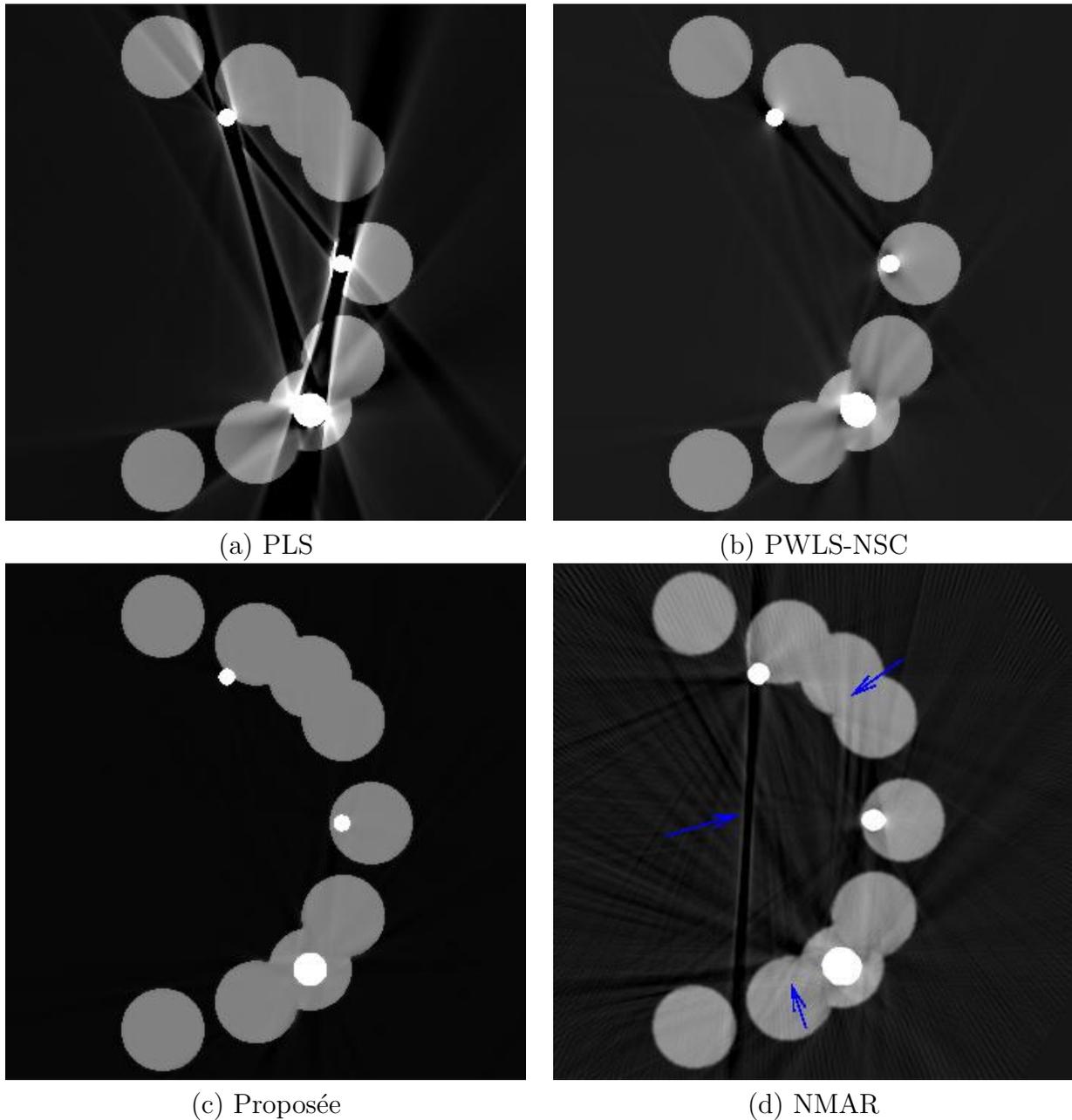


Figure 3.29 – Images reconstruites avec différentes méthodes à partir des données du diffusé. (a) PLS, (b) PWLS-NSC, (c) méthode proposée et (d) NMAR. Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,1]$. Les flèches bleues indiquent de nouveaux artefacts dans l’image de NMAR (d).

3.29.(c). Même dans le pire cas des données de durcissement et diffusé, elles sont réduites au minimum. En fait, on ne peut pas distinguer l’effet du durcissement et celui du diffusé, l’une peut perturber la correction de l’autre. C’est pourquoi la correction des données du durcissement et diffusé est moins bien que celle des données où on ne prend en compte qu’une seule phénomène physique.

En comparant nos méthodes MAR avec NMAR, les artefacts métalliques sont éliminés par nos méthodes MAR même les taches noires autour des métaux, au contraire il ex-

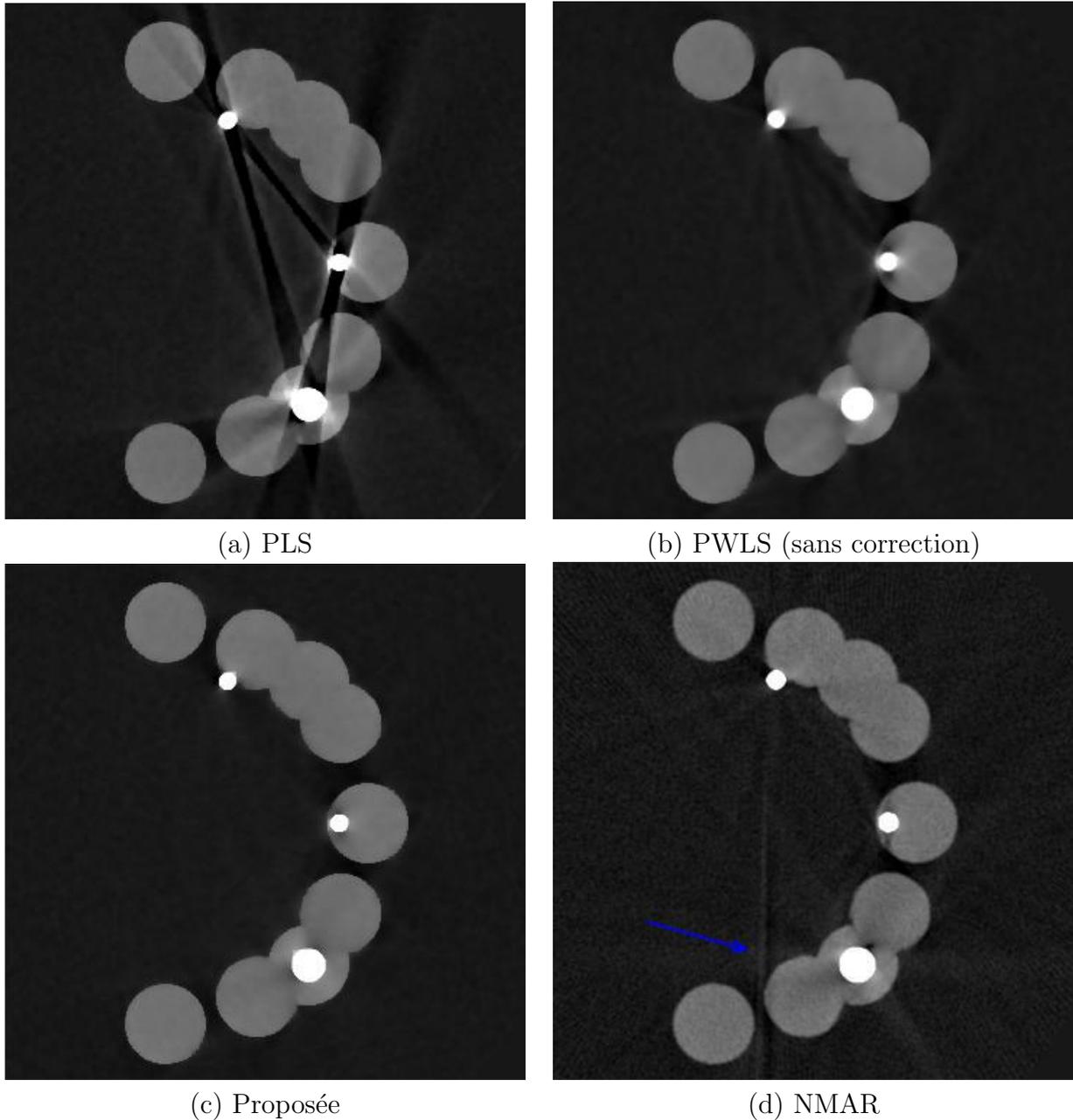


Figure 3.30 – Images reconstruites avec différentes méthodes à partir des données du durcissement et diffusé. (a) PLS, (b) PWLS-NSC, (c) méthode proposée et (d) NMAR. Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,1]$. Les flèches bleues indiquent de nouveaux artefacts dans l’image de NMAR (d).

iste des stries et des taches noires près des métaux dus aux erreurs de segmentation. Le NMAR introduit de nouveaux artefacts à cause de la discontinuité et de l’inconsistance des données dû à l’interpolation, mais il n’y a pas de nouveaux artefacts dans les images reconstruites par nos méthodes. La qualité de toutes images reconstruites par nos méthodes est supérieure à celle des images par les autres méthodes voir les figures 3.28, 3.29 et 3.30. Plus clairement nous le voyons lorsque nous traçons le profil sur la ligne droite jaune dans la figure 3.25.(a), voir la figure 3.32.

Nous nous intéressons aussi à comparer le temps de calcul parmi les différentes méthodes. Le NMAR est plus rapide car il utilise la méthode FBP pour la reconstruction. Nos méthodes MAR reposent sur la méthode itérative de reconstruction tomographique PWLS. Nous prenons l'exemple des données de durcissement, pour reconstruire une image 560x560 à partir de 457 projections 1D avec 560 mesures, nos méthodes PWLS nécessite 30 itérations pour converger voir la figure 3.28.(a) avec une bonne initialisation ce qui est l'image préliminaire de réduction des artefacts métalliques par MAR-LI. Il faut 523,104 seconds environs 30 fois plus de temps que le NMAR (17,256 seconds). Afin de réduire le temps de calcul, nous présentons dans la suite une méthode d'accélération de gradient conjugué préconditionné.

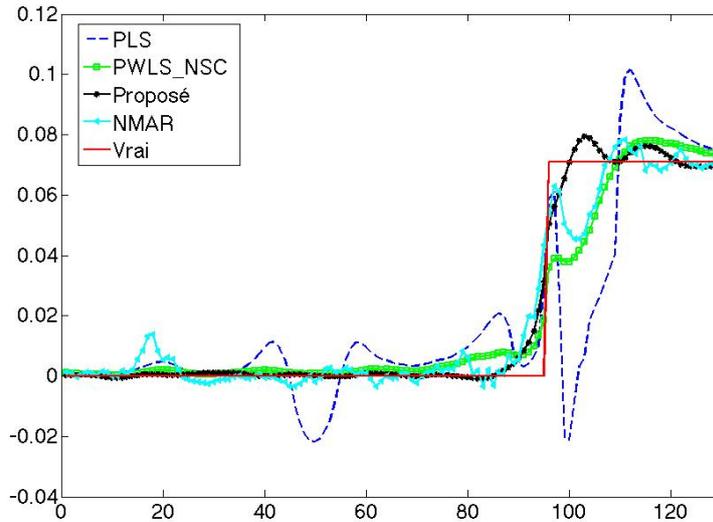


Figure 3.31 – Profils des images reconstruites à partir des données de durcissement sur la ligne droite jaune dans la figure 3.28.(a).

III.4.5.3 Accélération de la reconstruction PWLS par le pré-conditionnement

Nos méthodes PWLS basées sur la correction des données (le durcissement et le diffusé) sont capables d'éliminer les artefacts métalliques sans introduction de nouveaux artefacts lorsque nos conditions et hypothèses sont satisfaites. Mais la reconstruction PWLS est relativement lente, ce qui converge généralement moins rapidement que PLS car les données sont pondérées. La vitesse de la convergence avec les algorithmes des gradients conjugués est dépendante de la distribution des valeurs propres de la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{H}^t \mathbf{W} \mathbf{H}$. La pondération des données résulte de la déconcentration de ces valeurs propres. Le temps de reconstruction PWLS est important, ce qui limite son application dans les cas cliniques.

Afin d'accélérer la reconstruction PWLS, nous employons les méthodes des gradients conjugués avec pré-conditionnement [63]. Nous transformons l'image originale \mathbf{f} vers une image plus facile à reconstruire $\check{\mathbf{f}}$ avec une matrice de pré-conditionnement \mathbf{C} (voir l'eq.(2.118)). D'après les équations 2.118 et 3.71, la fonction du coût PWLS devient :

$$J(\check{\mathbf{f}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}})^t \mathbf{W}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}) + \lambda\Phi(\mathbf{D}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}). \quad (3.74)$$

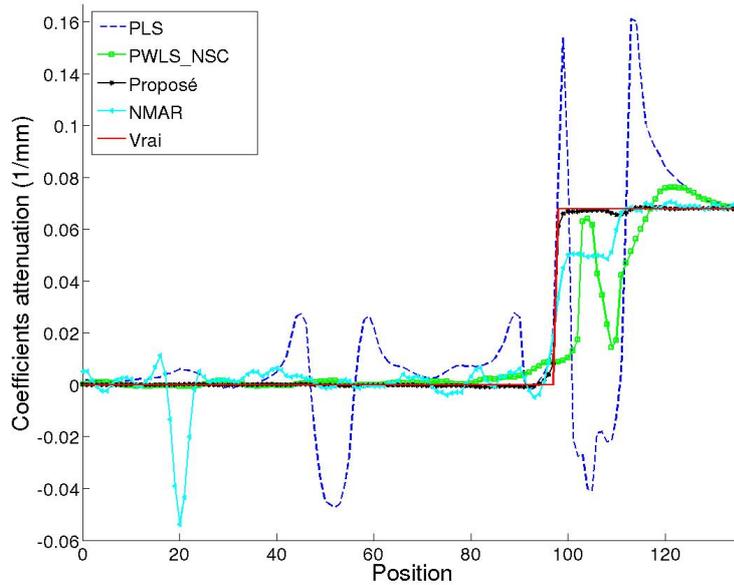


Figure 3.32 – Profils des images reconstruites à partir des données de diffusé sur la ligne droite jaune dans la figure 3.28.(a).

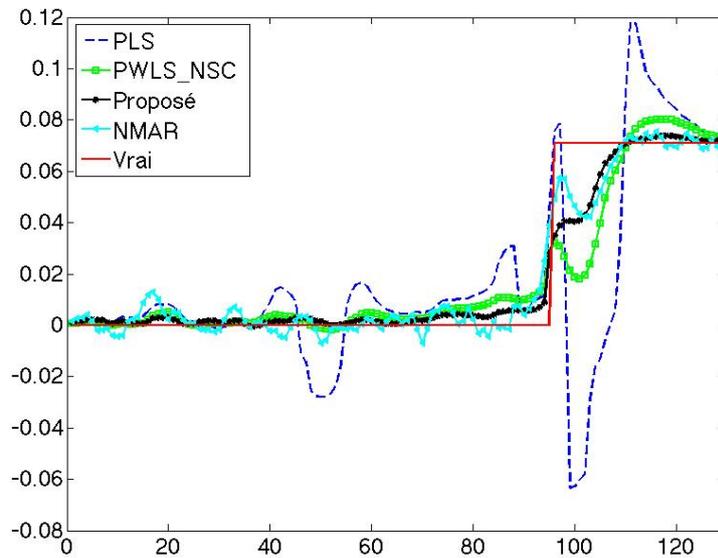


Figure 3.33 – Profils des images reconstruites à partir des données de durcissement et de diffusé sur la ligne droite jaune dans la figure 3.28.(a).

Nous choisissons la matrice de pré-conditionnement \mathbf{C} pour que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^t \mathbf{H}^t \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{C}$ soient plus uniforme (il y a moins d'écart entre le plus grande et la plus petite valeur propre) Nous pouvons estimer la nouvelle image $\hat{\mathbf{f}}$ en utilisant les algorithmes des gradients conjugués, voir l'annexe A1. D'après l'équation (2.118), nous obtenons dans la suite l'algorithme rapide de PWLS pré-conditionné, dit "PWLS-PCG

”, voir l’algorithme 3. Il nécessite de connaître \mathbf{CC}^t . Les coefficients de \mathbf{CC}^t sont calculés de manière suivante :

$$c_{ii} = \begin{cases} \bar{f}^m / \bar{f}^{nm} & \text{si le pixel } f_i \in \text{m\u00e9tal}, i = 1, 2, \dots, N, \\ 1 & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (3.75)$$

o\u00f9 \bar{f}^m est la moyenne des valeurs reconstruites du m\u00e9tal de l’image initiale par FBP (voir la figure 3.25.(a)) et \bar{f}^{nm} est la moyenne des valeurs reconstruites des autres mat\u00e9riaux. Afin d’\u00e9liminer les artefacts m\u00e9talliques (voir la figure 3.29.(c)), la reconstruction PWLS

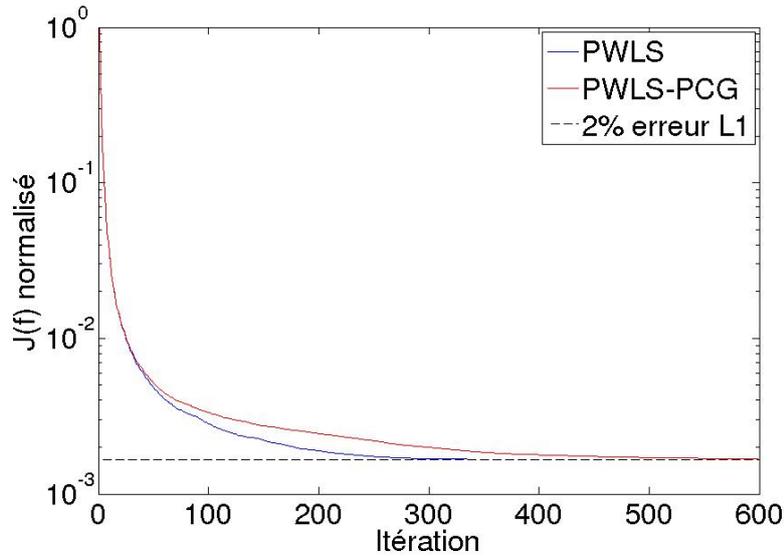


Figure 3.34 – Courbes de la fonction du co\u00fbt $J(\mathbf{f})$ normalis\u00e9e de la m\u00e9thode PWLS en fonction du nombre d’it\u00e9ration. PWLS repr\u00e9sente la reconstruction PWLS par gradients conjugu\u00e9s.

par l’algorithme du gradient conjugu\u00e9 nécessite 600 it\u00e9rations, mais le nombre d’it\u00e9rations est divis\u00e9 par deux pour l’algorithme du gradient conjugu\u00e9 avec pr\u00e9-conditionnement voir la figure 3.34. Toutes les reconstructions PWLS et PWLS-PCG partent de z\u00e9ros. Le crit\u00e8re de 20% des erreurs L1 garantit une reconstruction satisfaisante (voir la figure 3.29.(c)) dans la figure 3.34. L’erreur L1 est d\u00e9fini comme ci-dessous :

$$\epsilon_f = \frac{\|\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}, \quad (3.76)$$

o\u00f9 \mathbf{f} est l’image vraie ou l’image de r\u00e9f\u00e9rence.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pr\u00e9sent\u00e9 les m\u00e9thodes de l’\u00e9tat de l’art et les m\u00e9thodes propos\u00e9es pour la r\u00e9duction des artefacts m\u00e9talliques. Les m\u00e9thodes MAR par remplacement des projections du m\u00e9tal permet de r\u00e9duire effectivement des artefacts m\u00e9talliques. Mais les bords des mat\u00e9riaux reconstruits sont flous dans la zone du m\u00e9tal (voir les figures 3.6.(c) et (d) et 3.9.(c) .etc.), car les informations utiles perdues ne peuvent pas \u00eatre

Algorithme 3 Notre algorithme itératif PWLS-PCG pour la réduction des artefacts métalliques.

1 Correction des données \mathbf{g}_c :

la correction du durcissement (eq.3.65, voir la sous-section III.4.3) ou/et
la correction du diffusé (eq.3.68, voir la sous-section III.4.4),

2 Reconstruction PWLS :

Initialisation :

reconstruction préliminaire \mathbf{f}_{LI} par MAR basée sur l'interpolation linéaire,

détermination de la matrice $\mathbf{C}\mathbf{C}^t$ (eq.3.75),

$\mathbf{f}^0 = \mathbf{f}_{LI}$, $\mathbf{d}^0 = -\mathbf{C}\mathbf{C}^t\nabla J(\mathbf{f}^0)$ avec $\nabla J(\cdot)$ (eq.(2.105));

$k \leftarrow 0$;

$r_{\delta\mathbf{f}}^{(k)} = 1$;

while $r_{\delta\mathbf{f}}^{(k)} > \epsilon_c \& k < K_{max}$ **do**

calculer $\nu^{(k)}$ avec l'équation suivante :

$$\nu^{(k)} = -\frac{(\mathbf{d}^{(k)})^t \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})}{(\mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)})^t (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})^t \partial (\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)})} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}) \mathbf{D}) \mathbf{d}^{(k)}} \quad (3.77)$$

mettre à jour $\mathbf{f}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \nu^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}. \quad (3.78)$$

évaluer $\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)})$ utilisant l'équation (2.105),

évaluer $\tau^{(k+1)}$

$$\tau^{(k+1)} = \frac{(\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}))^t \mathbf{C}\mathbf{C}^t (\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))}{(\nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))^t \mathbf{C}\mathbf{C}^t \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})}. \quad (3.79)$$

mettre à jour $\mathbf{d}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{C}\mathbf{C}^t \nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) + \tau^{(k+1)} \mathbf{d}^{(k)}. \quad (3.80)$$

évaluer $r_{\delta\mathbf{f}}^{(k+1)}$,

$$r_{\delta\mathbf{f}}^{(k+1)} = \frac{\|J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - J(\mathbf{f}^{(k)})\|}{\|J(\mathbf{f}^{(k)})\|} \quad (3.81)$$

$k \leftarrow k + 1$;

end while

restaurées correctement par l'interpolation ou les projections d'image *a priori* à cause de l'abandon des projections du métal. Elles introduisent également de nouveaux artefacts (voir les figures 3.6.(c) et (d), 3.10.(e) et 3.11.(b)). La méthode NMAR ([4]) peut reconstruire partiellement les bords des matériaux nets dans la zone du métal, car certaines hautes fréquences associées aux bords sont conservées dans l'image *a priori* (3.10.(f)). Mais elle est sensible aux erreurs de segmentation lors de la création d'une image *a priori* comme les autres méthodes MAR par remplacement des projections du métal, ce qui provoque de nouveaux artefacts (voir la figure 3.11.(b)).

Nous avons également présenté les méthodes de correction du durcissement et les méthodes de correction du diffusé, car le durcissement et le diffusé sont deux sources physiques majeures des artefacts métalliques [10]. Pour la correction du durcissement, les méthodes post-reconstruction consistent à réduire la non-linéarité des données polychromatiques avec une fonction polynomiale, elles sont principalement appliquées dans le cas de faible nombre de matériaux (2 ou 3). Les méthodes statistiques utilisent des modèles polychromatiques en prenant en compte le spectre des rayons X poly-énergies. On suppose que les CALs des matériaux dépendant de l'énergie des photons X soient connus. Les méthodes statistiques permettent une meilleure reconstruction que les méthodes post-reconstruction avec un modèle polychromatique approprié ([16], [93], [61] et [22]), mais elles sont très coûteuses en temps de reconstruction. Cela limite leurs applications dans les cas cliniques. En plus, les deux types des méthodes supposent connus le spectre des rayons polychromatiques et les CALs de la base des matériaux dépendants de l'énergie des photons X. Or ce n'est pas toujours le cas. Les méthodes de correction du durcissement sans connaissance du spectre des rayons polychromatiques ont été proposées [5] et [80]. Pour la correction du durcissement, les méthodes basées sur les mesures sont plus faciles à implémenter dans la pratique [98] et [85].

Nos méthodes proposées pour la réduction des artefacts métalliques sont constituées de deux étapes : la correction des données (durcissement et diffusé) et la reconstruction rapide PWLS-PCG avec un modèle linéaire direct. Notre méthode de correction du durcissement du métal combine les méthodes de post-reconstruction et la méthode de Verburg [80]. Quant à notre méthode de correction du diffusé, elle suppose que le métal présent dans l'objet peut bloquer les rayons X comme les "beam-stop". Nous pouvons également extraire les photons X diffusés lorsque les rayons X n'ont rien à traverser (voir l'éq.(3.67)). En comparant avec la méthode NMAR, nos méthodes n'introduisent pas de nouveaux artefacts car les projections du métal ne sont pas abandonnées et les erreurs de correction sont prises en compte dans la reconstruction PWLS, voir la figure 3.29.(c) et (d). La reconstruction PWLS avec le modèle linéaire direct est plus rapide que celles des méthodes statistiques avec les modèles non-linéaires polychromatiques [16], [93] et [22]. Mais elle est encore plus lente que celles des méthodes MAR par remplacement des projections du métal. Nous allons utiliser l'algorithme du gradient conjugué pré-conditionné pour l'accélérer. Nous pouvons aussi appliquer les méthodes de OS et implémenter la paire projecteur-rétro-projecteur sur GPU pour une reconstruction PWLS compatible avec le temps acceptable dans les cas cliniques.

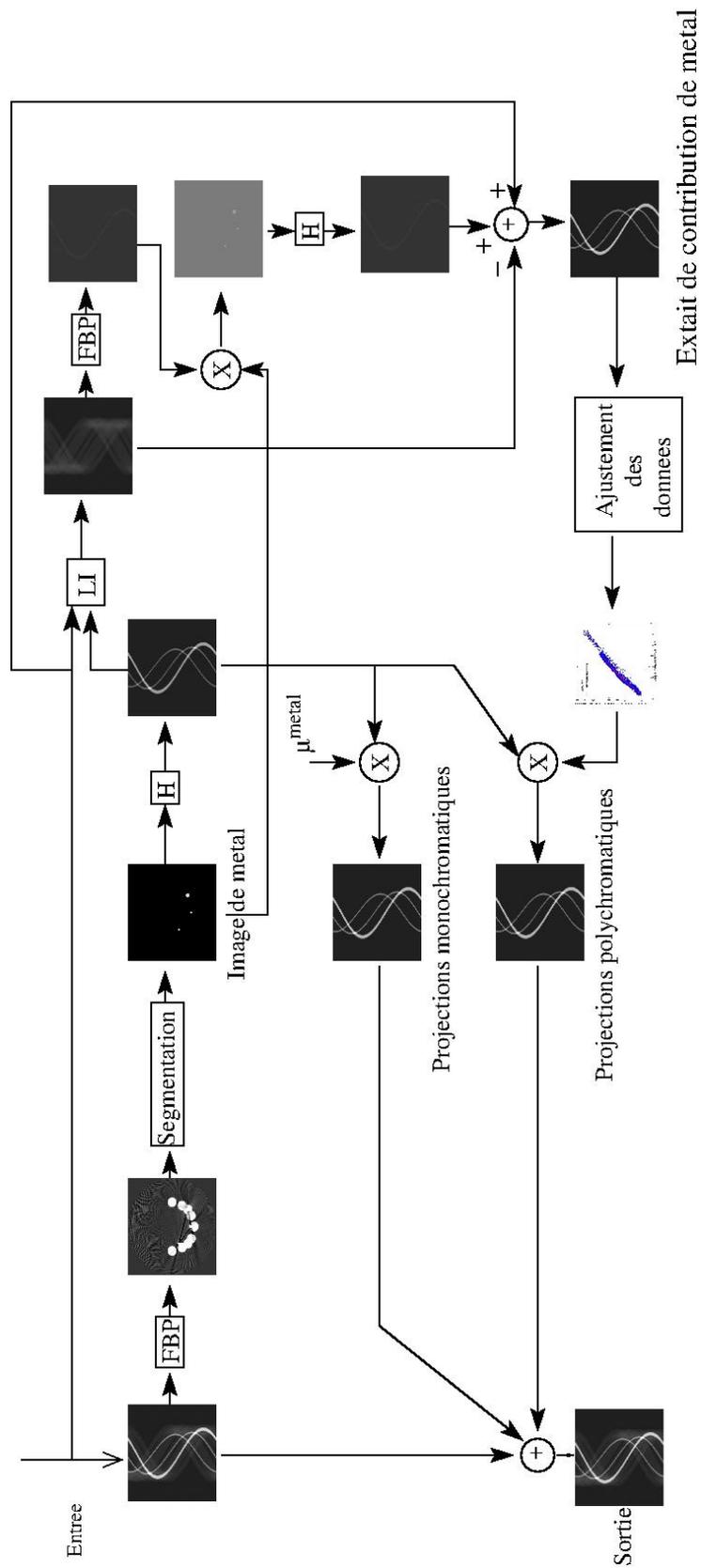


Figure 3.35 – Schéma de la méthode proposée de correction de durcissement. H représente le projecteur. Et μ^{metal} est la moyenne des valeurs reconstruites de métal par FBP.

IV

Méthodes itératives pour la tomographie par rayons X à faible dose

Aujourd'hui, les scanners à rayons X sont l'une des modalités majeures de l'imagerie médicale. Cet examen est rapide et précis, il est utilisé aussi bien pour le diagnostique que pour la planification d'intervention chirurgicale. Le principal inconvénient de cet examen c'est qu'il expose le patient à des rayonnements ionisants, comme dans tout examen radiologique. La sur-exposition ou l'exposition non nécessaire augmente les risques de cancer. Les femmes enceintes et enfants sont plus sensibles que les hommes à la dose de radiation, de plus certaines zones du corps sont plus sensibles que d'autres (par exemple le nerf optique, les testicules ...). Elles nécessitent donc une meilleure protection. Actuellement, la sécurité radiologique est de plus en plus étudiée avec attention. Les méthodes d'optimisation de la dose délivrée au patient sont intégrées dans les scanners CT modernes. On peut citer la modulation de courant de tube de rayons X et le contrôle optimal d'exposition AEC (acronyme anglais de Automatic Exposure Control) [105] et [2] page 225 . En pratique, la dose d'un examen radiologique nécessaire est dépendante du type de diagnostique et des caractéristiques du patient (age, taille .etc), elle doit respecter les principes ALARA (acronyme anglais de As Low As Reasonably Achievable).

Les trois facteurs majeurs de la dose délivrée au patient sont l'énergie des faisceaux des rayons X, le courant de la tube des rayons X et le temps d'exposition. L'énergie du faisceau de rayons X est réglée par la tension de générateur de rayons X, plus la tension est forte, plus les photons X ont une énergie élevée. Afin de réduire la dose transmise au patient on utilise tout d'abord des masques afin de ne pas irradier des zones qui ne sont pas étudiées. Pour aller plus loin il y a principalement trois approches utilisées :

- L'optimisation de l'énergie des rayons X en ajustant la tension du tube. Généralement, lorsque le nombre des photons X passant par le patient est fixé, plus la tension du tube est faible, moins il y a d'énergie déposée dans le patient.
- La réduction de flux de photons X en réduisant le courant dans le générateur de

CHAPTER IV. MÉTHODES ITÉRATIVES POUR LA TOMOGRAPHIE PAR RAYONS X À FAIBLE DOSE

rayons X ou en limitant la durée d'exposition (utilisation de source pulsée).

- Limiter le nombre de projections permettant de reconstruire la zone d'intérêt.

Intéressons nous tout d'abord à la réduction de la dose en limitant la tension du générateur. La contre partie de cette approche c'est que les rayons sont plus atténués, il y a donc moins de photons détectés. par conséquent cela fait augmenter le bruit sur les mesures, ce qui dégrade fortement les images reconstruites lorsqu'on utilise des approches standards type FBP, qui sont très sensibles au bruit des mesures. Ces images dégradées réduisent la possibilité de faire un bon diagnostic voir la figure 4.1.(b). Dans ce cas-là, les méthodes statistiques sont plus intéressantes car elles prennent en compte la statistique du bruit de mesures utilisant des modèles probabilistes (voir les eqs. 2.75 et 2.89 dans la section II.3.2). Elles permettent de reconstruire des images de qualité acceptable avec des mesures bruitées [62].

La deuxième alternative est de réduire le courant dans le tube à rayons X ou le temps d'exposition (en radiologie on utilise le produit entre courant et le temps d'exposition exprimée en mA·s ou mAs). La conséquence est la même que dans le cas précédant, le nombre de photons mesurés sur le détecteur baisse. L'avantage de cette approche par rapport à la précédente c'est que l'on maîtrise mieux cette baisse, elle est en effet proportionnelle à la variation des mAs. Par conséquent, le bruit de quantification et associé au bruit de comptage des photons X augmente. Alors le rapport du signal sur le bruit diminue. Les images reconstruites par FBP sont bruitées. C'est ce que nous avons illustré sur la figure 4.1. Nous avons augmenté le bruit de mesure correspondant à une diminution de 50%, on représente sur la figure 4.1.(b) la reconstruction FBP où l'on choisit la fréquence de découpage du filtre qui est égale à la moitié de la fréquence spatiale du détecteur. On observe bien dans ce cas une dégradation importante de la qualité de l'image.

La dernière alternative est de maintenir le même rapport du signal sur le bruit par projection tout en réduisant le temps total d'exposition afin de diminuer la dose. Nous diminuons alors le nombre des projections pour réduire le temps total d'exposition. Mais les méthodes FBP sont très sensibles au nombre de projections [64]. Les artefacts liés au sous-échantillonnage angulaire des projections apparaissent lorsque le nombre de projections est réduit, par exemple les artefacts " aliasing " voir la figure 4.1.(c). Du fait de leur flexibilité à introduire de l'information *a priori* les méthodes statistiques sont plus robustes au nombre des projections limités. Elle permettent de compenser des informations incomplètes provenant des mesures par des information *a priori* . En comparant les images 4.1.(b) et (c) avec celles 4.2.(a) et (b), on peut facilement conclure que les approches de type FBP bien que très efficaces ont du mal à donner des reconstructions de bonne qualité dans la tomographie à faible dose. Nous verrons par la suite que ce n'est pas le cas pour les approches statistiques, elles peuvent produire des images satisfaisantes pour le diagnostique médical à dose réduite.

Nous allons donc dans ce chapitre nous intéresser aux approches statistiques, mais une question demeure faut-il réduire la dose de rayons par projection ou bien le nombre de projections ? La réponse à cette question n'était pas facile, nous avons fait la comparaison de ces deux approches en utilisant le même algorithme de reconstruction avec les mêmes valeurs de paramètre (voir figure 4.2). Nous avons réduit les mAs de 50 % sur la figure 4.2.(b) et réduit le nombre de projection 50 % sur la figure 4.2.(c). On observe que la zone

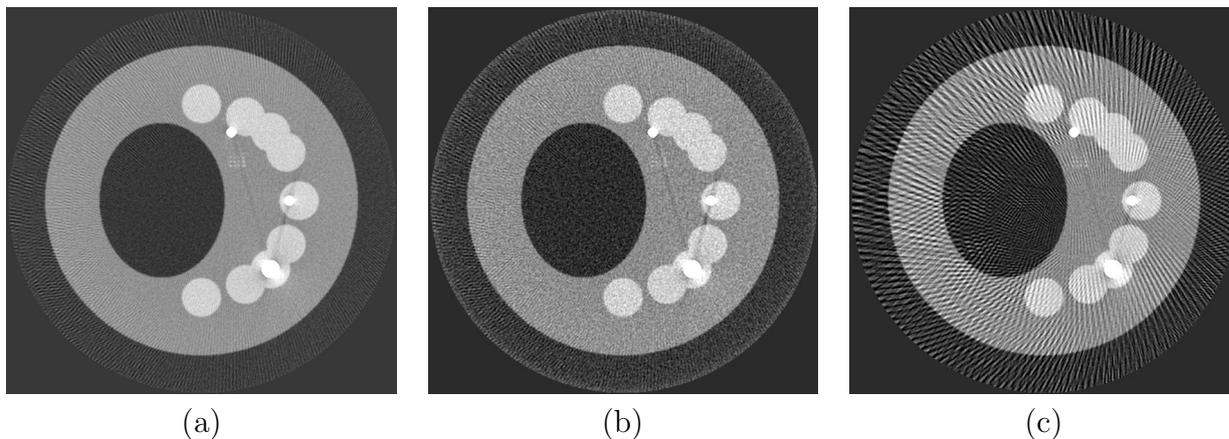


Figure 4.1 – Images reconstruites par FBP à partir des données de la dose normale (a) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 457$ projections), de 50% de la dose (b) ($I_0 = 0,5 \times 10^6$, $M_\phi = 457$) et (c) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 229$). Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,05]$.

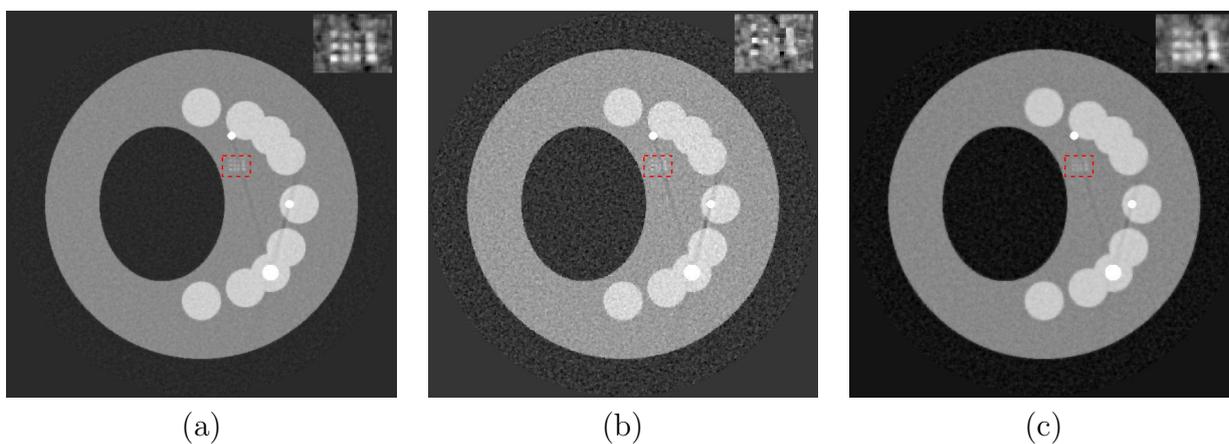


Figure 4.2 – Images reconstruites par les méthodes itératives moindres carrés avec régularisation à partir de la totalité des données de dose normale (a) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 457$) et celles de 50% de la dose (b) ($I_0 = 0,5 \times 10^6$, $M_\phi = 457$) et (c) ($I_0 = 1 \times 10^6$, $M_\phi = 229$). Les zooms dans le rectangle rouge pointillé sont mis en haut à droite. Toutes les fenêtres d’affichage sont le $[-0,01 \ 0,05]$.

CHAPTER IV. MÉTHODES ITÉRATIVES POUR LA TOMOGRAPHIE PAR RAYONS X À FAIBLE DOSE

de faible contraste (dans le rectangle rouge pointillé) est moins bien reconstruite dans la figure 4.2.(b) que dans la figure 4.2.(c). Le bruit augmente plus fortement dans la première approche il est donc plus difficile de distinguer les deux matériaux adjacents dont on a fait un zoom en haut à droite de chaque image. Dans la suite nous nous focaliserons donc davantage sur les méthodes de réduction de dose de radiation basées sur la diminution du nombre de projections.

Il existe encore d'autres voies pour réduire la dose de rayons X en réduisant le nombre de projections. En effet, lorsque l'on s'intéresse uniquement à une région d'intérêt dans un objet (c'est notre cas en imagerie dentaire, nous nous intéressons uniquement à la mâchoire et non la totalité de la tête), on peut réduire le débattement angulaire nécessaire à la reconstruction. Dans le cas de la reconstruction tomographique 2D on utilise une trajectoire circulaire de la source des rayons X [106] et [6]. Son débattement angulaire est π plus l'angle d'éventail $2\alpha_{max}$ voir la figure 4.5, configuration appelée "short-scan". Lorsqu'on s'intéresse uniquement à une zone d'intérêt on peut obtenir un débattement angulaire plus faible en utilisant la condition suffisante de Noo [107]. Les projections nécessaires sont dépendantes de la zone d'intérêt (ROI, acronyme anglais de Region Of Interest) et de la géométrie du scanner CT. La trajectoire minimale de la source des rayons X est inférieure à celle du "short-scan", elle est appelée "super-short-scan" [107, 108].

Les résultats précédents supposent que les projections mesurées ne sont pas tronquées c'est à dire que l'on mesure l'ensemble des droites issues de la source de rayons X qui passent par l'objet. Malheureusement, nous ne sommes pas dans cette configuration. Tout d'abord, il y a souvent une petite partie de l'arrière du crâne qui n'est pas mesurée. Cette troncature entraîne des artéfacts, mais ils sont limités à un voisinage du bord de l'objet qui est relativement loin de notre zone d'intérêt. Par contre, en imagerie dentaire les dentistes sont intéressés par des petites zones (quatre ou cinq dents) reconstruites avec une très forte résolution. Cela implique des détecteurs de petite taille possédant un nombre important de pixels. Comme les systèmes d'imagerie dentaire doivent être d'un coup limités, il faut à partir de ce système possédant un faible champ de vue pouvoir reconstruire toute la mâchoire. Pour ce faire, on utilise une acquisition multiple basée sur la mesure suivant trois trajectoires circulaires décalées les unes par rapport aux autres. La problématique dans ce cas est que nous sommes en présence de données fortement tronquées dans la zone où nous devons faire le diagnostic médical. Nous allons donc déterminer les paramètres d'échantillonnage permettant de réduire au maximum le nombre de projections nécessaires en utilisant cette géométrie d'acquisition formée par trois cercles.

Par ailleurs, nous allons essayer d'exploiter au maximum les spécificités de l'objet que nous allons reconstruire. En effet, l'information qui nous intéresse est localisée sur l'arc dentaire. Nous allons en utilisant des informations *a priori* déterminer un échantillonnage non uniforme adapté à notre problème.

L'organisation du reste de ce chapitre est la suivante : nous présentons dans une première partie les méthodes de reconstruction à partir du nombre de projections réduit. Nous présentons ensuite les approches super-short-scans. Dans une deuxième partie nous présentons notre contribution sur la détermination des trajectoires super-short-scans en utilisant des acquisitions circulaires multiples. Nous exposons notre seconde contribution, qui consiste à la définition d'un nouveau mode d'acquisition d'échantillonnage angulaire non-uniforme des projections. Cet échantillonnage est adapté aux différentes zones (zone homogène et zone contrastée) de l'objet.

IV.1 Reconstruction à partir d'un nombre de projections limité

En tomographie 2D par rayons X divergents, les approches de reconstruction analytique conduisent à des algorithmes de type filtrage rétroprojection. Le filtre dans ces approches n'a pas une réponse impulsionnelle finie (voir l'éq. 2.33 et 2.38). Pour que cette opération soit exacte toutes les projections de l'objet sont indispensables même pour la reconstruction d'une seule zone d'intérêt. Lorsque les projections ne sont pas tronquées et que l'on veut reconstruire l'objet tout entier, on a besoin de projection entre $[0, \pi]$ en géométrie parallèle. Dans le cas de la géométrie divergente, Parker a proposé une trajectoire circulaire de la source plus courte qu'un tour complet pour reconstruire l'objet entier, qui est connue sous le nom de "short-scan" [6]. Le débattement angulaire "short scan" est π plus l'angle d'éventail ($2\alpha_{max}$), voir la figure 4.5. Ce mode d'acquisition est largement utilisé dans les scanners CT modernes.

Le "short-scan" était considéré comme le déplacement nécessaire de la paire source-projecteur même si on veut reconstruire une région d'intérêt bien plus petite que l'objet. Noo et al [107] ont donné une nouvelle condition suffisante pour la reconstruction stable et exacte d'une ROI. Elle est similaire à la condition de Tuy [47] en tomographie 3D à faisceau conique. Toutes les projections doivent être non tronquées et il suffit que tous les rayons passant par la région d'intérêt coupent au moins une fois la trajectoire. On s'intéressera ensuite dans cette partie au cas où les projections sont tronquées. Pour cela nous présenterons les travaux de Clackdoyle et al [7]. Ils ont utilisé une méthode basée sur la définition d'une trajectoire virtuelle VFB (acronyme anglais de Virtual FanBeam) qui permet de transformer les projections tronquées en projections non tronquées dans la géométrie divergente virtuelle voir la figure 4.3.(a). De plus, des algorithmes analytiques permettant de reconstruire des données issues de ces nouvelles trajectoires ont été proposés. Ils sont basés sur la rétro-projection de la dérivée (selon l'abscisse curviligne de la trajectoire) de la transformée de Hilbert des projections, dit "DBP avec filtrage de Hilbert" [109], [110], [8] et [111]. Ce type d'approche est pertinent pour notre problématique de reconstruction de la mâchoire car la zone d'intérêt est au bord de l'objet. On est donc dans une configuration où les approches précédentes permettent de réduire le débattement angulaire.

Nous exposons dans la suite "short-scan" [6] pour une reconstruction d'un objet entier. Ensuite nous introduisons les méthodes de reconstruction d'une ROI avec les projections non tronquées [107] et [108]. Enfin nous présentons les méthodes de reconstruction d'une ROI avec les projections tronquées dans certains cas [7], [109] et [8] voir la figure 4.3.(a)-(c).

IV.1.1 Reconstruction à partir des données de "Short-scan"

En tomographie 2D par rayons X parallèles, les projections doivent être uniformément échantillonnées sur 0 à π pour obtenir une reconstruction exacte d'un objet (voir l'éq.(2.17)). D'après les équations de ré-arrangement des projections divergentes vers les projections parallèles (voir l'éq. 2.31), nous trouvons que le débattement angulaire minimal des projections divergentes est celui du "short-scan" (π plus l'angle d'éventail

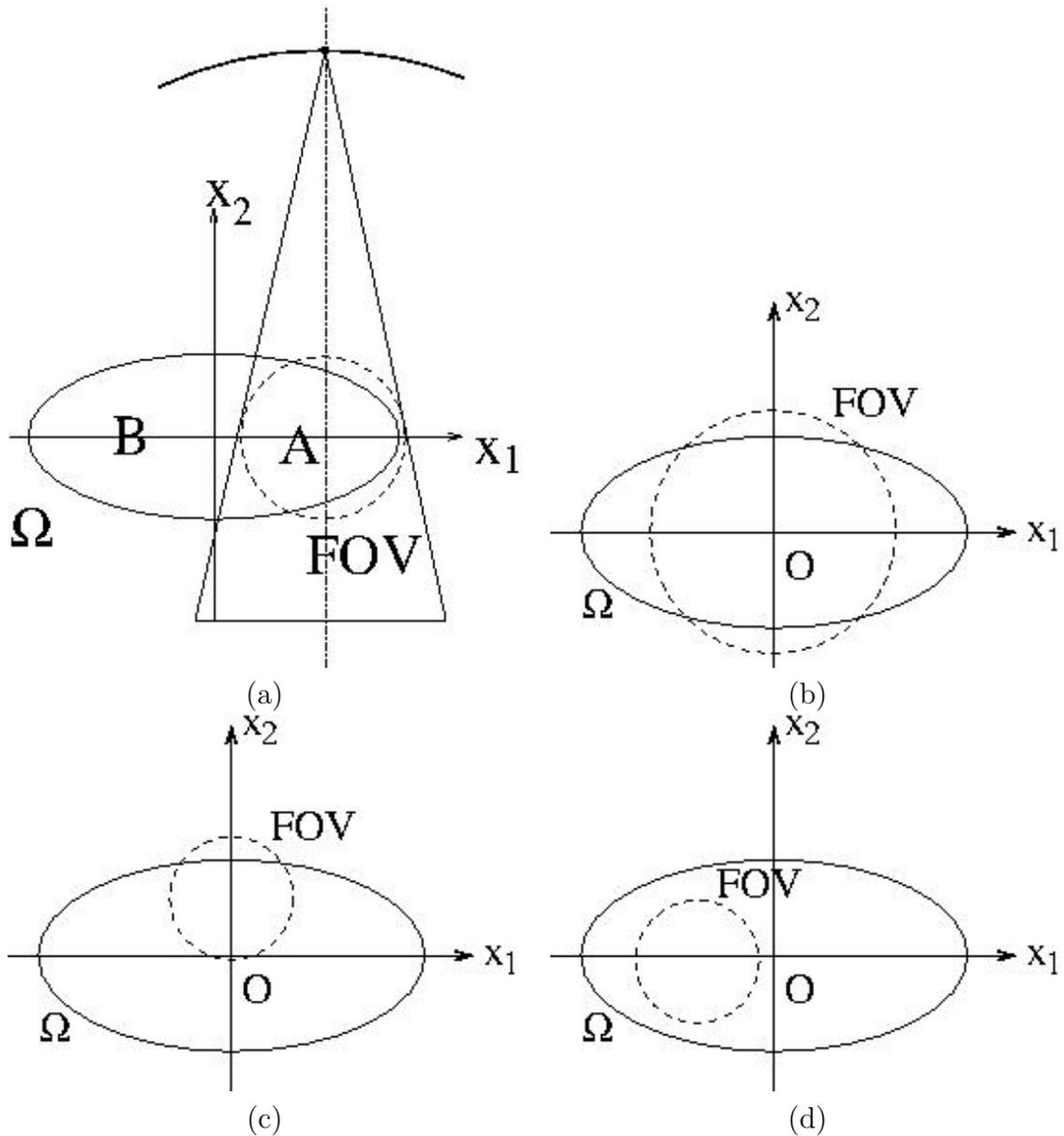


Figure 4.3 – Exemples des géométries typiques avec présence des projections tronquées. L'ellipse en ligne solide et le cercle en ligne cassée représentent respectivement le support d'objet Ω et le champ de vue FOV.

$2\alpha_{max}$) [6], voir la figure 4.5. Une simple démonstration est donnée ci-dessous :

D'après le ré-arrangement des données de rayons X parallèles (2.31), nous avons

$$\phi = \gamma + \alpha, \quad (4.1)$$

où ϕ et γ sont respectives l'angle de projection en géométrie parallèle et divergente (voir les figures 2.1 et 2.2) et α est l'angle divergent d'un rayon donné par rapport à celui centré voir la figure 2.2. avec $-\alpha_{max} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ et $0 \leq \phi \leq \pi$, alors l'intervalle angulaire des projections divergentes γ (voir γ_1 et γ_2 dans la figure 4.4) est

$$-\alpha_{max} \leq \gamma \leq \pi + \alpha_{max}. \quad (4.2)$$

L'information de l'intégrale suivant les lignes peut être mesurée une ou deux fois par les rayons X divergents (voir la figure 4.4) dans le "short-scan" lorsque les deux angles sont décrits comme ci-dessous :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \pi - 2\gamma \quad (4.3)$$

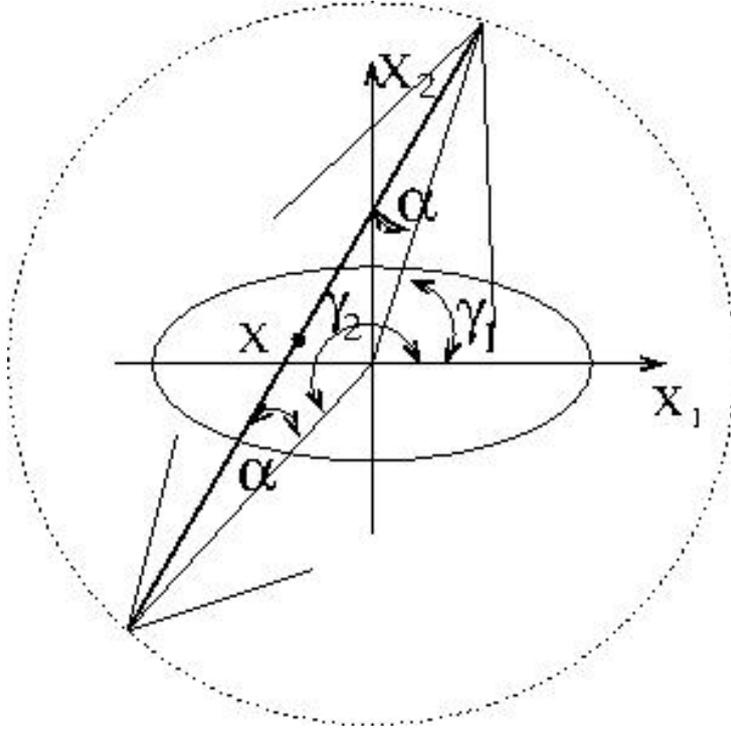


Figure 4.4 – Une ligne passant par X mesurée deux fois par les rayons X.

Les données dans les zones de deux triangles sont mesurées deux fois et celles dans la zone parallèle en milieu sont présentes une seule fois, voir la figure 4.6. Il nécessite alors une pondération afin de prendre en compte la redondance des données. Une pondération simple est définie comme ci-dessous :

$$\omega_s(\gamma, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -\alpha_{max} < \gamma < \alpha_{max} - 2\alpha \\ 1 & \alpha_{max} - 2\alpha < \gamma < \pi - \alpha_{max} - 2\alpha \\ \frac{1}{2} & \pi - \alpha_{max} - 2\alpha < \gamma < \pi + \alpha_{max} \end{cases} \quad (4.4)$$

Mais cette pondération introduit une discontinuité dans les mesures, ce qui représente des hautes fréquences. Elles sont amplifiées lors du filtrage par le filtre rampe des approches de type FBP. Cela génère donc des artefacts directionnels dans les images reconstruites [106]. Parker a proposé une pondération ne possédant pas de discontinuité qui permettent de s'affranchir de ce problème[6].

$$\omega_s(\gamma, \alpha) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{\gamma + \alpha_{max}}{\alpha_{max} - \alpha}\right) & -\alpha_{max} < \gamma < \alpha_{max} - 2\alpha \\ 1 & \alpha_{max} - 2\alpha < \gamma < \pi - \alpha_{max} - 2\alpha \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \frac{\pi - \gamma + \alpha_{max}}{\alpha_{max} + \alpha}\right) & \pi - \alpha_{max} - 2\alpha < \gamma < \pi + \alpha_{max} \end{cases} \quad (4.5)$$

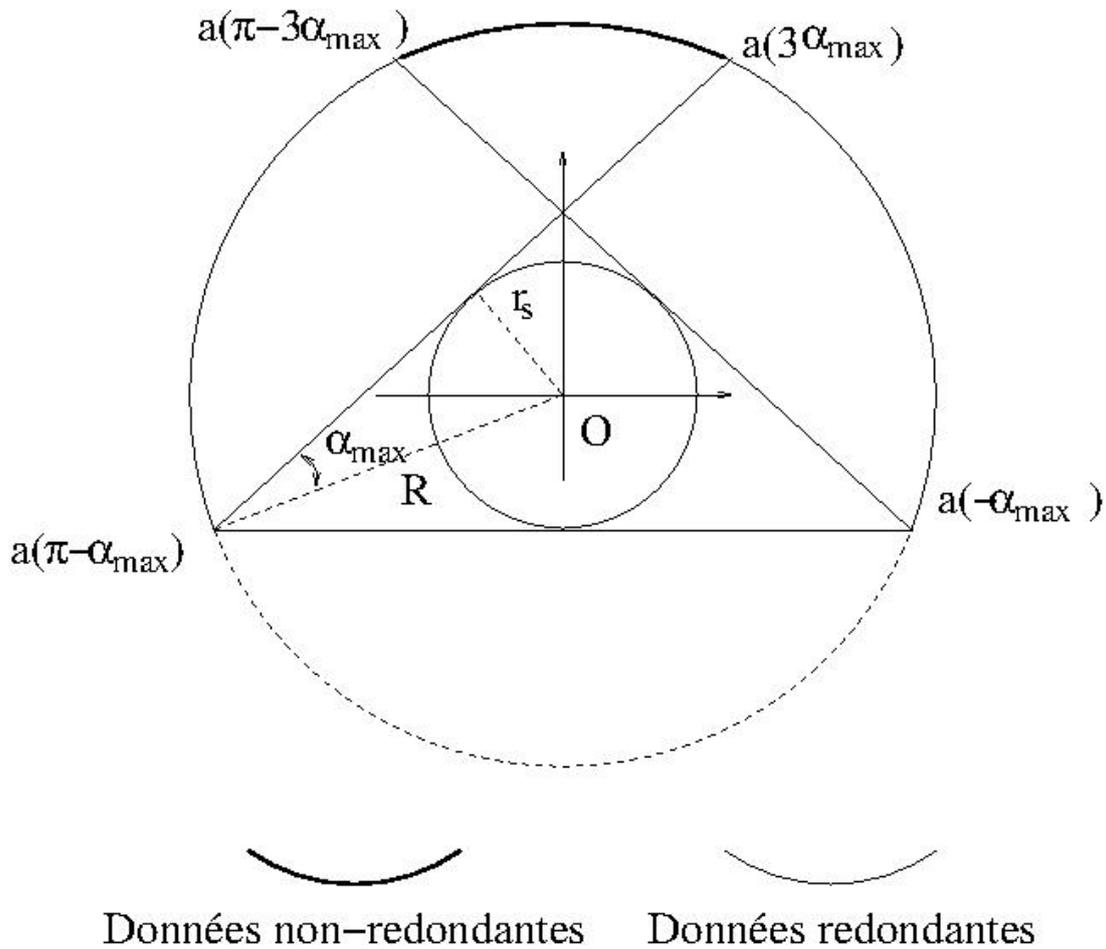


Figure 4.5 – Illustration de " short scan " et indications des données redondantes et non-redondantes (extrait de [1]).

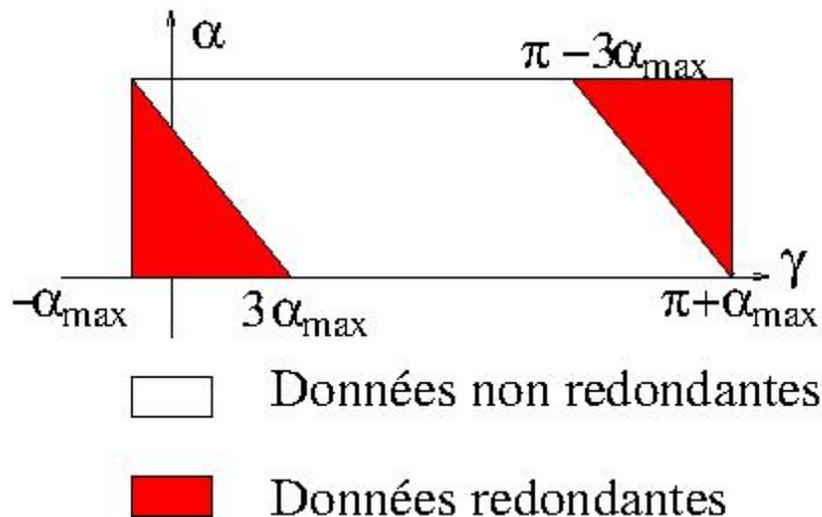


Figure 4.6 – Illustration des données redondantes et non-redondantes de " short scan " en $\alpha - \gamma$ [6] et [1].

La qualité des images reconstruites à partir des données “ short-scan ” avec la pondération de Parker (voir l'eq.4.5) sont très légèrement inférieures à celles de l'acquisition d'un tour complet (2π) [6]. En effet, comme on utilise moins de données le rapport signal sur bruit est plus mauvais. Mais comme le “ short-scan ” permet d'avoir un débattement angulaire plus faible, le temps d'acquisition est plus faible, la dose transmise au patient est plus faible. Comme le temps d'acquisition est réduit, cette approche est plus robuste au mouvement du patient. C'est pourquoi c'est l'un des modes d'acquisition utilisés couramment dans les scanners modernes.

En imagerie dentaire, nous nous intéressons souvent à une seule zone d'intérêt, par exemple plusieurs dents anormales. Dans ce cas là, le “ short-scan ” n'est plus optimal. Noo et al [107] ont proposé de nouveaux algorithmes analytiques, qui permettent une reconstruction stable et exacte d'une seule zone d'intérêt avec le déplacement de la paire source-détecteur inférieur à “ short-scan ” voir la figure 4.7.

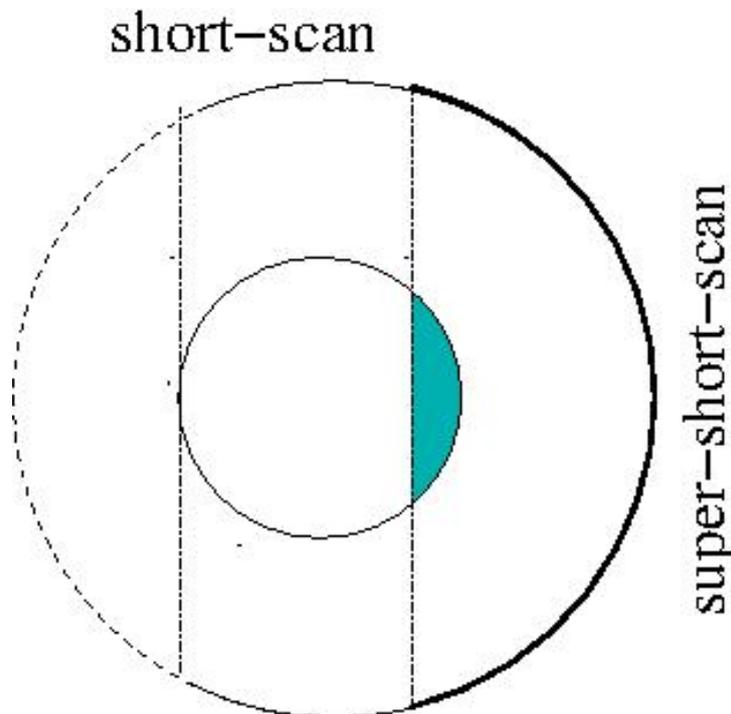


Figure 4.7 – Illustration de mode d'acquisition “ super-short-scan ” pour reconstruire une zone d'intérêt (zone d'ombre).

IV.1.2 Méthodes reconstructions de super-short-scan

Noo et al ont proposé une nouvelle condition de la totalité des données pour reconstruction de la zone d'intérêt en tomographie 2D par rayons X divergents [107]. Elle peut être considérée comme une transposition de la condition de Tuy en tomographie 2D par rayons X divergents.

Condition 2 (Condition de Noo). *Une zone d'intérêt peut être reconstruite exactement à condition que toutes les projections non tronquées passant par un voisinage de cette zone d'intérêt frappent au moins une fois la trajectoire de la source.*

IV.1.2 - Méthodes reconstructions de super-short-scan

En comparant les équations de FBP 2.18 et 2.27, les projections filtrées par le filtre rampe sont égales à la transformée de Hilbert de la dérivée des projections sur r en géométrie parallèle. En effet, la valeur absolue de la variable de Fourier est égale à la fonction signe fois la variable, la transformée de Fourier de la fonction signe correspond à la transformée de Hilbert :

$$\tilde{\mathbf{g}}(r, \phi) = \mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{g}(r, \phi)\right). \quad (4.6)$$

D'après l'équation 2.25, nous faisons la dérivée après la transformée de Hilbert dans l'équation 4.6,

$$\tilde{\mathbf{g}}(r, \phi) = \frac{\partial}{\partial r}\mathcal{H}(\mathbf{g}(r, \phi)) = \frac{\partial}{\partial r}\tilde{\mathbf{g}}_H(r, \phi), \quad (4.7)$$

Notons la transformée de Hilbert par $\tilde{\mathbf{g}}_H(r, \phi)$, la transformée de Hilbert est aussi exprimée par la convolution suivante en r ,

$$\tilde{\mathbf{g}}_H(r, \phi) = \mathbf{g}(r, \phi) * q_H(r), \quad (4.8)$$

avec

$$q_H(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} j\text{sign}(\rho)e^{j\rho r}d\rho. \quad (4.9)$$

En tomographie 2D par rayons X parallèles, il nécessite tous les rayons X parallèles au rayon X (r, ϕ) pour $\tilde{\mathbf{g}}(r, \phi)$, car ni le filtre rampe (eqs. 2.19 et 2.21) et ni la transformée de Hilbert (eq. 2.25) ne sont une opération locale. Mais la transformée de Hilbert en géométrie parallèle \mathbf{g} peut être évaluée à partir de la transformée de Hilbert en géométrie divergente $\mathcal{D}\mathbf{f}$ [107].

$$\tilde{\mathbf{g}}_H(r, \phi)|_{r=\mathbf{a}(\gamma)\cdot\boldsymbol{\theta}(\phi)} = \widetilde{\mathcal{D}\mathbf{f}}_H(\mathbf{a}(\gamma), \alpha), \quad (4.10)$$

Une démonstration de l'équation 4.10 est détaillée dans [112]. Avec $\mathbf{a}(\gamma)$ (voir l'eq. 2.6) la coordonnée de la source de rayons X et $\boldsymbol{\theta}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)^t$ le vecteur de direction. $\widetilde{\mathcal{D}\mathbf{f}}(\mathbf{a}(\gamma), \alpha)$ est défini comme ci-dessous voir la figure 4.8,

$$\widetilde{\mathcal{D}\mathbf{f}}_H(\mathbf{a}(\gamma), \alpha) = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q_H(\boldsymbol{\theta}(\phi) \cdot \boldsymbol{\eta}(\alpha))\mathcal{D}\mathbf{f}(\mathbf{a}(\gamma), \alpha)d\alpha. \quad (4.11)$$

D'après les équations (4.7) et (4.8), nous définissons les projections divergentes filtrées $\widetilde{\mathcal{D}\mathbf{f}}$ comme suit,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{D}\mathbf{f}}(\mathbf{a}(\gamma), \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \gamma}\widetilde{\mathcal{D}\mathbf{f}}_H(\mathbf{a}(\gamma), \alpha) \\ &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q_H(\boldsymbol{\theta}(\phi) \cdot \boldsymbol{\eta}(\alpha))\frac{\partial}{\partial \gamma}\mathcal{D}\mathbf{f}(\mathbf{a}(\gamma), \alpha)d\alpha. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Noo et al ont proposé deux nouveaux algorithmes de reconstruction tomographique en tomographie 2D par rayons X divergents [107]. Nous nous intéressons ici à l'algorithme analytique de type-FBP dans le cas de détecteur plat, voir la figure 4.8.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda} \frac{1}{R + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\eta}} [\omega_s(\gamma, p)\widetilde{\mathcal{D}\mathbf{f}}(\gamma, p)]|_{p=p'(\gamma, \mathbf{x})}, \quad (4.13)$$

où Λ est la trajectoire de la source. avec

$$\widetilde{\mathcal{D}}\mathbf{f}(\gamma, p) = \int_{-p_M}^{p_M} \frac{D}{\sqrt{D^2 + p^2}} q_H(p - p) \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{D^2 + p^2}{D} \frac{\partial}{\partial p} \right) \mathcal{D}\mathbf{f}(\gamma, p) dp \quad (4.14)$$

avec $2p_M$ la longueur de détecteur.

$$p'(\gamma, \mathbf{x}) = D \tan \alpha'(\mathbf{x}) = \frac{D\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp(\gamma)}{R + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\gamma)} \quad (4.15)$$

Le coefficient de pondération $\omega_s(\gamma, p)$ est donné ci-dessous avec la trajectoire de source

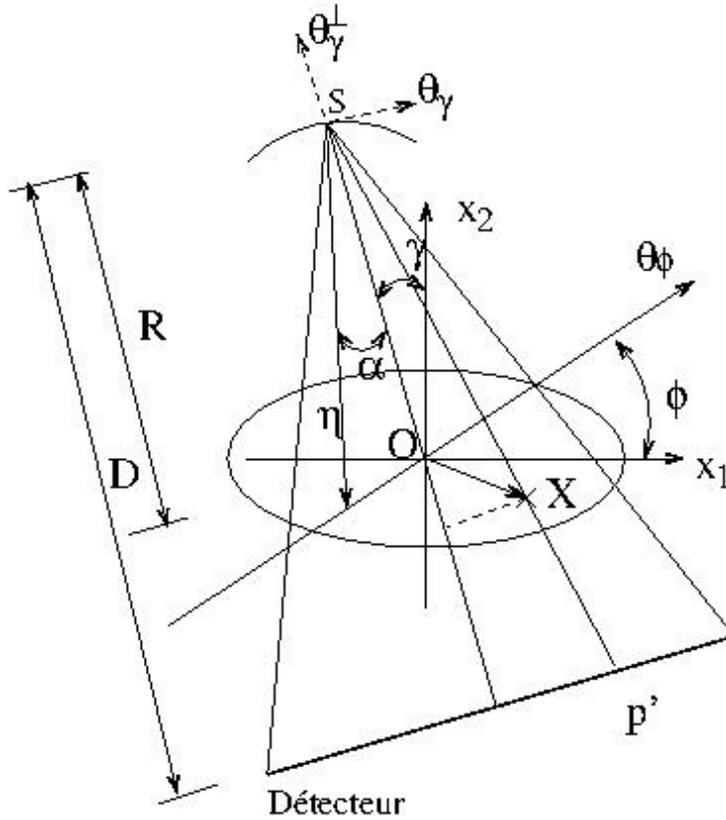


Figure 4.8 – La géométrie du scanner par rayons divergents avec un détecteur équidistance.

de rayons X circulaire.

$$\omega_s(\gamma, \phi) = \frac{c(\gamma)}{c(\gamma) + c(\gamma + \pi - 2 \arctan(p/D))}, \quad (4.16)$$

où la fonction lisse $c(\gamma)$ est similaire à la fonction de pondération de Parker [6]. Un autre algorithme de reconstruction de la zone d'intérêt est présenté dans [108]. Selon la condition précédente afin de la reconstruction d'une zone d'intérêt, toutes les projections passant la zone d'intérêt doivent être non tronquées. Ces méthodes sont très intéressantes lorsque la zone d'intérêt est au bord de l'objet. Heureusement nous sommes dans cette configuration. Par contre nous ne possédons pas des données non tronquées, c'est pourquoi nous allons étudier les approches essayant de résoudre ce problème dans la partie suivante.

IV.1.3 - Méthodes de reconstruction tomographique à partir du nombre réduit des projections tronquées

IV.1.3 Méthodes de reconstruction tomographique à partir du nombre réduit des projections tronquées

Lorsque le détecteur est trop petit, c'est à dire que le champ de vue ne peut pas contenir tout l'objet, alors les projections sont tronquées et l'équation 4.10 n'est plus valable. Clackdoyle et al ont proposé une méthode basée sur une trajectoire virtuelle VFB qui permet de réarranger les données tronquées pour former des projections non tronquées en géométrie divergente virtuelle dans certains cas voir la figure 4.9. Une nouvelle classe des algorithmes analytiques " DBP avec filtrage de Hilbert " est également développée pour une reconstruction stable et exacte d'une zone d'intérêt dans les cas des projections tronquées [109], [110], [8] et [111].

IV.1.3.1 Méthode utilisant une trajectoire virtuelle (VFB)

Sans perte de généralité, nous supposons que le domaine de l'objet Ω est une ellipse. On peut voir sur la figure 4.9 un exemple de vue tronquée dans le cas de la tomographie par rayons X divergents avec la trajectoire de source circulaire. Le champ de vue de l'appareil FOV (cercle en pointillé) n'est pas suffisamment grand pour couvrir l'objet entier. Le support de l'objet peut être divisé en deux zones A et B. A est la zone d'intersection entre FOV et Ω ($A = \text{FOV} \cap \Omega$) et B est la zone complémentaire de A par rapport au support de l'objet ($B = \Omega/A$). Les projections non tronquées sont contenues dans l'éventail d'angle $2\gamma_c$, avec

$$\gamma_c = \arcsin \frac{R_0}{R} + \beta_0, \text{ si } R > R_0, \quad (4.17)$$

où R_0 et R sont respectivement le rayon du champ de vue et le rayon de la trajectoire de la source circulaire. Et β_0 est l'angle l'horizontale et la droite tangente à la fois au support elliptique de l'objet et au cercle représentant le champ de vue. γ_c augmente lorsque R diminue (de R_1 à R_3). Alors la zone d'intérêt agrandit. Cette zone peut être reconstruite exactement d'après la condition suffisante 2. La méthode VFB consiste à trouver une trajectoire de la source virtuelle qui permet de maximiser le γ_c . En plus, la trajectoire de la source ne doit pas être dans le support de l'objet, car ce n'est pas réaliste et la mesure d'atténuation sur un rayon X ne peut pas être séparée en deux rayons se dirigeant dans les deux sens contraires sur la même ligne. Nous avons alors la zone d'intérêt maximale $A' \subseteq A$ ce qui peut être reconstruite exactement au sens de condition suffisante de Noo lorsque R approche vers R_0 voir la figure 4.9. Une fois la géométrie divergente virtuelle déterminée, nous réarrangeons les données originales en la géométrie divergente virtuelle de manière suivante voir la figure 4.10 :

$$\alpha' + \gamma' = \alpha + \gamma, \quad (4.18)$$

$$R' \sin \alpha' = R \sin \alpha, \quad (4.19)$$

où le R (R') est la distance entre la source (virtuelle) et le centre de rotation et les γ et γ' sont respectivement les angles des projections suivants les géométries originale et virtuelle. Nous pouvons utiliser l'algorithme de type-FBP (voir l'eq. 4.13) ou les algorithmes itératifs comme PLS pour la reconstruction. En plus, les algorithmes itératifs permettent de reconstruire le champ de vue FOV au lieu de la zone d'intérêt maximale A' [7] et [101]. Lorsque le centre du champ de vue (FOV) coïncide avec le centre de

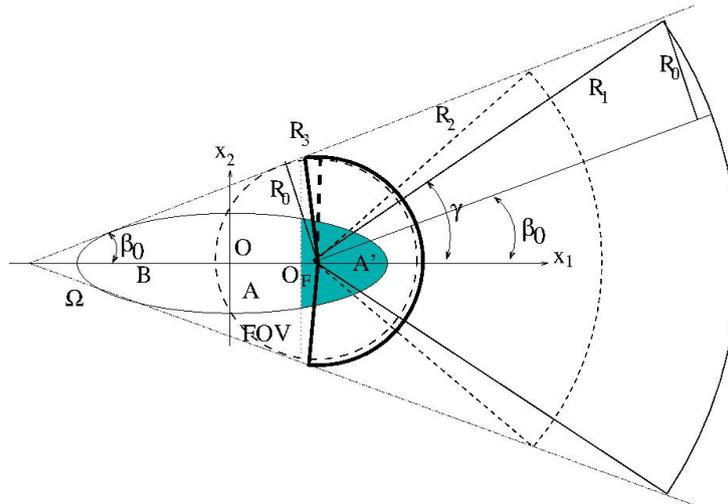


Figure 4.9 – Illustration schématique de la méthode VFB. Différentes géométries virtuelles sont décrites par la ligne solide, la ligne brisée et la ligne gras. Les distances entre la source des rayons X et le centre de rotation des trois géométries virtuelles sont respectivement R_1 , R_2 et R_3 ($R_1 > R_2 > R_3$). Selon la condition suffisante 2, la zone d'intérêt maximale est la zone d'ombre A' .

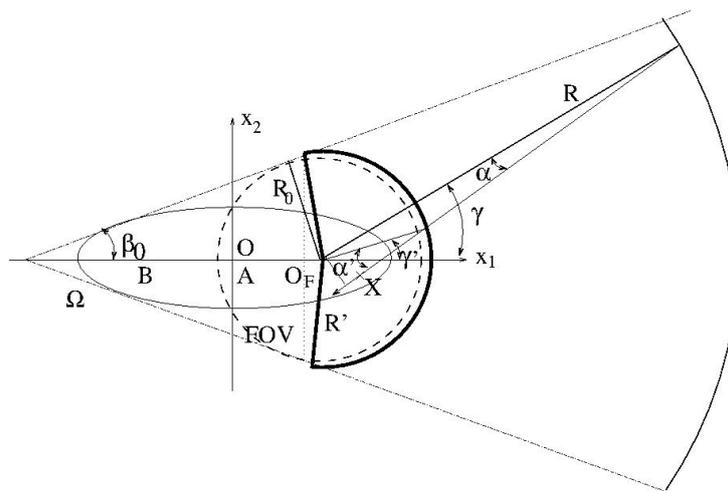


Figure 4.10 – Réarrangement des données de la géométrie originale à la géométrie virtuelle.

support de l'objet Ω voir la figure 4.11, les projections sont tronquées des deux côtés du FOV. Lorsque l'angle β_1 entre l'horizontale et la droite reliant les extrémités opposées de la trajectoire virtuelle est inférieur à l'angle β_2 entre l'horizontale et la droite tangente au champ de vue et au support de l'objet, nous pouvons reconstruire exactement la zone en bleu de la figure 4.11.(a) par l'algorithme analytique de type-FBP (eq.4.13) en utilisant la trajectoire virtuelle de la source de rayons X sur la ligne en gras de la figure 4.11.(a) [7]. Par contre lorsque β_1 est supérieur à β_2 , d'après la condition de Noo 2, il ne reste que les arcs supérieur et inférieur (voir la figure 4.11.(b)), qui peuvent être reconstruits exactement par l'algorithme de type-FBP. Mais d'autres méthodes basées sur la transformée de Hilbert permettent une reconstruction stable et exacte de la zone d'ombre totale de la figure 4.11.(a) dans ce cas là [109] et [111]. Nous présentons dans la

IV.1.3 - Méthodes de reconstruction tomographique à partir du nombre réduit des projections tronquées

suite les méthodes DBP avec le filtrage de Hilbert.

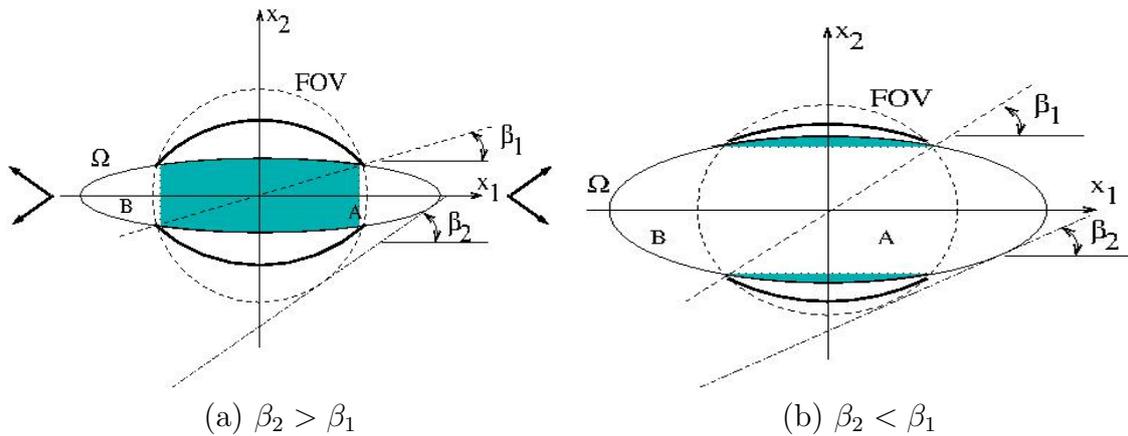


Figure 4.11 – Exemples des projections tronquées aux deux extrémités. Le champ de vue (FOV) se trouve au milieu du support de l'objet Ω . β_1 et β_2 sont l'angle de la diagonale de A et celui d'un tangent commun du support d'objet et le champ de vue respective. Les ROIs maximales de la reconstruction stable et exacte par VFB [7] sont les zones d'ombre en bleu dans (a) $\beta_2 > \beta_1$ et (b) $\beta_2 < \beta_1$. Les trajectoire virtuelle de la source des rayons X sont en lignes gras.

IV.1.3.2 Méthodes DBP avec le filtrage de Hilbert

Rappelons tout d'abord la problématique de la reconstruction avec des données tronquées. Lorsqu'on utilise une approche classique de type FBP, on utilise un filtre rampe. Ce filtre n'a pas un support fini ce qui entraîne des artefacts si les données sont tronquées. Nous allons voir en quoi les approches de type DBP peuvent s'affranchir partiellement de ce problème.

Afin de bien comprendre les bases théorique de cette approche, nous allons commencer par étudier le cas de projections parallèles. Comme nous l'avons présentés dans le chapitre II, nous pouvons utiliser la transformée de Hilbert pour inverser la transformée de Radon (voir l'éq. 2.27). Dans l'équation 2.27 nous avons simplement inversé l'ordre entre la rétro-projection et la transformée de Hilbert :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{H} \left\{ \int_0^\pi \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi) \right) d\phi \Big|_{r=\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)} \right\} \quad (4.20)$$

La transformée de Hilbert est une opération globale comme le filtrage par le filtre rampe. Par contre l'opération de dérivation $\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi)$ des projections sur r est locale.

Démontrons l'équation ci-dessus dans le cas de rayons X parallèles et notons \mathbf{b}_ϕ la rétro-projection de la dérivé des projections sur r :

$$\mathbf{b}_\phi(\mathbf{x}) = \int_\phi^{\phi+\pi} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{g}(r, \phi) d\phi \Big|_{r=\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)}. \quad (4.21)$$

Selon les équations (2.23) et (2.25) , la rétro-projection \mathbf{b}_ϕ est réécrite :

$$\mathbf{b}_\phi(\mathbf{x}) = \int_\phi^{\phi+\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\rho \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho r} d\rho \Big|_{r=\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)} \quad (4.22)$$

D'après la définition de la transformée de Hilbert (2.24) et la relation entre la transformée de Hilbert et la transformée de Fourier, la transformée de Hilbert de l'image \mathbf{f} sur la ligne $\boldsymbol{\theta}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)^t$ est calculée de manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\phi \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + (t - t')\boldsymbol{\theta}^\perp(\phi))}{\pi t'} dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} -j \text{sign}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp(\phi)) \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\kappa}) e^{j\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}} d\boldsymbol{\kappa}\end{aligned}\quad (4.23)$$

En utilisant le changement de coordonnées cartésiennes $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)^t$ en coordonnées polaires (ρ, ϕ) avec $d\boldsymbol{\kappa} = |\rho| d\rho d\phi$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\phi \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\phi^{\phi+2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -j \text{sign}(\rho \boldsymbol{\theta}^\perp(\phi) \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp(\phi)) \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) |\rho| e^{j\rho \boldsymbol{\theta}^\perp(\phi) \cdot \mathbf{x}} d\rho d\phi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\phi^{\phi+\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\rho \hat{\mathbf{f}}(\rho, \phi) e^{j\rho \boldsymbol{\theta}^\perp(\phi) \cdot \mathbf{x}} d\rho d\phi\end{aligned}\quad (4.24)$$

car $|\rho| = \rho \text{sign}(\rho)$ et $\text{sign}(\rho)^2 = 1$ si $\rho \neq 0$. D'après les équations (4.22) et (4.24), Nous avons alors la relation suivante :

$$\mathbf{b}_\phi(\mathbf{x}) = -\sqrt{2\pi} \mathcal{H}_\phi \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

En remplaçant l'équation 4.25 dans le coté droite de l'équation 4.20, nous trouvons

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{H}\{\mathbf{b}_\phi(\mathbf{x})\} = -\mathcal{H}\mathcal{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.26)$$

car $\mathcal{H}\mathcal{H}q(t) = -q(t)$ d'après la propriété de la transformée de Hilbert.

La démonstration de l'équation 4.20 ne permet pas de résoudre notre problème de données tronquées. En effet, le calcul la rétro-projection de la dérivé des projections $\mathbf{b}_\phi(\mathbf{x})$ nécessite seulement des opérations locales. Par contre, le calcul de la transformée de Hilbert elle, n'est pas une opération locale à l'instar du filtre rampe.

C'est pourquoi, les travaux de [109] et [113] ont proposé quasi simultanément l'utilisation d'une transformée de Hilbert directionnelle permettant de résoudre le problème de données tronquées dans la configuration de la figure 4.11 (a). L'idée est d'appliquer une série de transformée de Hilbert monodimensionnelle, dans l'exemple de la figure 4.12 (a) en prenant la transformée de Hilbert suivant des lignes verticales on arrive a reconstruire l'image de l'objet de la zone bleu.

Soit $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est borné dans le support Ω et la transformée de Hilbert $\mathcal{H}_\phi \mathbf{f}$ est connue dans l'intervalle $[Z_{I,k}, Z_{S,k}]$ sur la ligne L_k avec $\mathbf{L} = \{L_k | k = 1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des lignes droites parallèles, voir la figure 4.12.(a). $[Z_{I,k}, Z_{S,k}]$ est le segment d'intersection entre la ligne L_k et le FOV. Il existe ϵ_k pour que \mathbf{f} est zéro dehors l'intervalle $[Z_{I,k} + \epsilon_k, Z_{S,k} - \epsilon_k]$, qui est positif et faible voir la figure 4.12.(a).

D'après l'inversion de la transformée de Hilbert fini [114], \mathbf{f} est obtenue dans la suite sur l'intervalle :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t\boldsymbol{\theta}(\phi) + s\boldsymbol{\theta}^\perp(\phi)) &= -\frac{1}{\sqrt{(s - Z_{I,k})(Z_{S,k} - s)}} \left(\int_{Z_{I,k} + \epsilon_k}^{Z_{S,k} - \epsilon_k} \sqrt{(s' - Z_{I,k})(Z_{S,k} - s')} \right. \\ &\quad \left. \frac{\mathcal{H}_\phi \mathbf{f}(t\boldsymbol{\theta}(\phi) + s'\boldsymbol{\theta}^\perp(\phi))}{\pi(s - s')} ds' + C_k \right),\end{aligned}\quad (4.27)$$

IV.1.3 - Méthodes de reconstruction tomographique à partir du nombre réduit des projections tronquées

avec

$$C_k = - \int_{Z_{I,k}}^{Z_{S,k}} \sqrt{(s' - Z_{I,k})(Z_{S,k} - s')} \frac{\mathcal{H}_\phi \mathbf{f}(t\boldsymbol{\theta}(\phi) + s'\boldsymbol{\theta}^\perp(\phi))}{\pi(s_0 - s')} ds', \quad (4.28)$$

où $\mathbf{f}(t\boldsymbol{\theta}(\phi) + s_0\boldsymbol{\theta}^\perp(\phi)) = 0$ pour $s_0 \in (Z_{I,k}, Z_{I,k} + \epsilon_k) \cup (Z_{S,k} - \epsilon_k, Z_{S,k})$

La méthode de reconstruction tomographique basée sur la transformée de Hilbert ci-dessus se déroule en deux étapes :

1. la rétro-projection de la dérivé des projections par rapport à r (voir l'eq. 4.22 en tomographie par rayons X parallèles) pour générer l'image de Hilbert $\mathcal{H}\mathbf{f}$.
2. la reconstruction par inversion de la transformée de Hilbert (voir l'eq. 4.27).

Grâce a cette approche on peut définir une nouvelle condition pour reconstruire une région d'intérêt de manière exacte et stable en utilisant des données tronquées.

Condition 3. *Pour reconstruire une région d'intérêt (ROI) contenue dans la zone A, il faut que l'ensemble des lignes $\mathbf{L} = \{L_k | k = 1, 2, \dots, n\}$ passant par la ROI ne frappent pas la région B voir la figure 4.12.(a).*

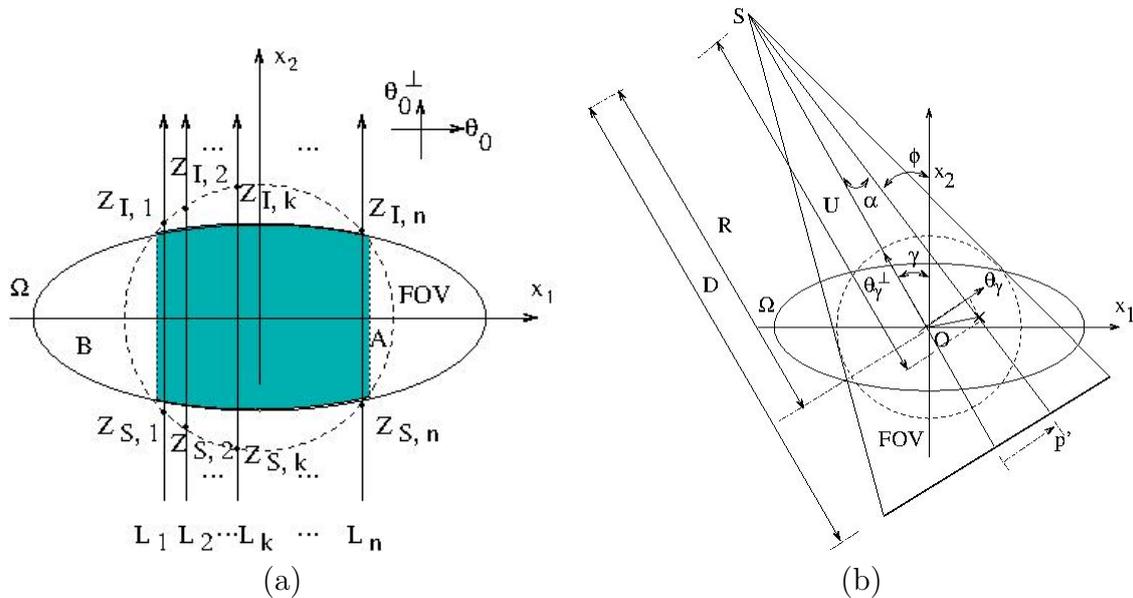


Figure 4.12 – (a) Illustration schématique de la transformée de Hilbert sur les flèches en tomographie par rayons X et (b) la géométrie divergente avec un détecteur équidistance. La ROI maximale est la zone d'ombre dans (a).

Présentons maintenant, les formules permettant d'utiliser la théorie ci-dessus dans la cas projection en géométrie divergente (voir figure 4.12.(b)). Nous pouvons calculer la rétro-projection de la dérivé des projections $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ en tomographie par rayons divergents avec un détecteur équidistance en utilisant les équations de réarrangement ci dessous :

$$\phi = \gamma + \arctan(p/D) \quad (4.29)$$

$$r = Rp/\sqrt{p^2 + D^2} \quad (4.30)$$

Pour simplifier, nous considérons que le jeu des données est acquis sur $]0, 2\pi]$, alors en effectuant un changement de variable ci dessus dans l'équation (4.21), on obtient :

$$\mathbf{b}_\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{RD}{U^2} \frac{d}{dp} \frac{D}{\sqrt{D^2 + p^2}} \mathcal{D}\mathbf{f}(\gamma, \alpha(p)) \text{sign}(\sin(\gamma + \arctan \frac{p}{D} - \phi)) d\gamma|_{p=p'}, \quad (4.31)$$

avec U et p'

$$U = R - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}^\perp(\gamma) \quad (4.32)$$

$$p' = \frac{D(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\gamma))}{R - \boldsymbol{\theta}^\perp(\gamma)} \quad (4.33)$$

Pour implémenter en pratique la formule 4.31 nous vous conseillons de consulter [109]. Afin de reconstruire la zone d'intérêt (voir la zone bleu dans la figure 4.12.(a)), il faut pour respecter la condition 3 il faut au moins acquérir les données sur un "short-scan".

L'approche DBP avec filtrage de Hilbert permet de reconstruire des données tronquées. Mais il y a certaines configurations (par exemple celle de la figure 4.3), ou la zone en bleu peut être reconstruit au sens de Tuy. Par contre, ces configurations ne respectent pas la condition 3. Defrise et al ont donc proposés une méthode s'appuyant sur la transformée de Hilbert tronquée pour reconstruire ce type de zone d'intérêt [8]. Nous avons choisi de ne pas exposer de manière détaillé cette approche qui repose sur la transformée de Hilbert suivant une demie droite, car elle est difficilement abordable et que sa mise en œuvre nécessite la résolution des problème de discrétisation non triviaux.

Cette nouvelle approche permet définir une nouvelle condition moins restrictive que la précédente pour reconstruire une région d'intérêt de manière exacte et stable en utilisant des données tronquées.

Condition 4. *Le pixel de \mathbf{f} en \mathbf{x}_0 peut être reconstruit exactement si on peut trouver un vecteur unité $\boldsymbol{\theta}^\perp(\phi) = (-\sin \phi, \cos \phi)^t$ et un segment $L_k \subset L$ avec la ligne droite L en \mathbf{x}_0 suivant la direction $\boldsymbol{\theta}^\perp(\phi)$ telle que :*

1. *le segment L_k possède au moins une des extrémités à l'extérieure du domaine d'objet Ω ,*
2. *toutes les projections parallèles $\mathbf{g}(r, \phi)$ sont connues dans le voisinage $r = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\theta}(\phi)$ de pour $\phi \in [\phi \ \phi + \pi]$ et $\forall \mathbf{x} \in L_k$.*

Toutes les méthodes de reconstruction tomographique admettant des projections tronquées ci-dessus sont intéressantes pour réduire la dose, car nous pouvons limiter le champ irradié correspondant à une zone d'intérêt avec le collimateur pour éviter la radiation non nécessaire.

IV.2 Reconstruction à partir des acquisitions super-short-scan sur multiples cercles

En imagerie dentaire, la taille du champ de vue du détecteur varie en fonction du besoin du chirurgien. Par exemple, un petit champ de vue suffit pour la reconstruction d'une seule

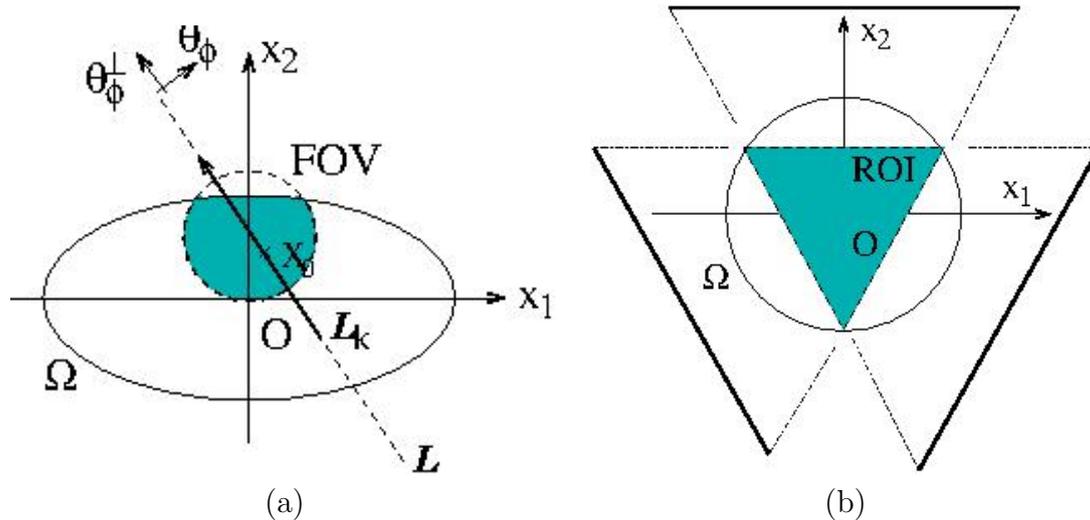


Figure 4.13 – Reconstruction d’une ROI dans le cas de Defrise [8] (a) et d’une ROI triangulaire par la méthode VFB (b). Les ROIs maximales de la reconstruction stable et exact sont les zones d’ombre. La trajectoire virtuelle de la source des rayons X est les lignes gras dans (b).

zone d’intérêt ou pour reconstruire un radio panoramique classique. Mais un grand champ de vue est nécessaire pour les imageries maxillo-faciale et céphalométrique. La taille du champ de vue est déterminée par celle du détecteur lorsque la géométrie d’un scanner est fixée. On peut utiliser un grand détecteur dans les scanners pour satisfaire les besoins de tous types d’imagerie dentaire. Mais le coût d’un détecteur augmente fortement avec la taille du détecteur. Cela coûte très cher pour des dentistes qui utilisent principalement les images à petit champ de vue. On s’intéresse donc aux méthodes reconstruction d’un grand champ de vue avec un plus petit détecteur. Dans ce cas là, plusieurs balayages sont nécessaires car le champ de vue est inférieur au volume d’intérêt. Par conséquent, la dose délivrée au patient augmente car il faut un temps d’exposition plus important. Nous proposons ici d’utiliser le mode de super-short-scan pour minimiser le temps d’exposition. Le mouvement de la source de rayons X doit être le plus simple possible pour réduire la difficulté de conception d’un système mécanique effectuant de multiples balayages. La source de rayons X se déplace en translation et rotation dans le plan. Nous présentons dans la suite les trajectoires super-short-scans composées deux cercles (voir la figure 4.16) et trois cercles (voir la figure 4.17.(b)) selon la taille du volume. Par simplifier la présentation, les trajectoires super-short-scans sur des multiples cercles sont exposés en tomographie 2D en géométrie divergente ce qui peuvent être facilement étendus en tomographie 3D à faisceaux coniques [108].

IV.2.1 Les super-short-scans sur deux cercles

Pour reconstruire un objet avec deux balayages, on peut procéder de la façon suivante. Dans le premier temps, nous reconstruisons la première moitié de l’objet à l’aide du premier jeu de mesures, puis nous reconstruisons la deuxième moitié en utilisant le deuxième jeu de données. La reconstruction complète de l’objet est alors équivalente à la reconstruction deux zones d’intérêt disjointes avec des projections tronquées (voir la figure

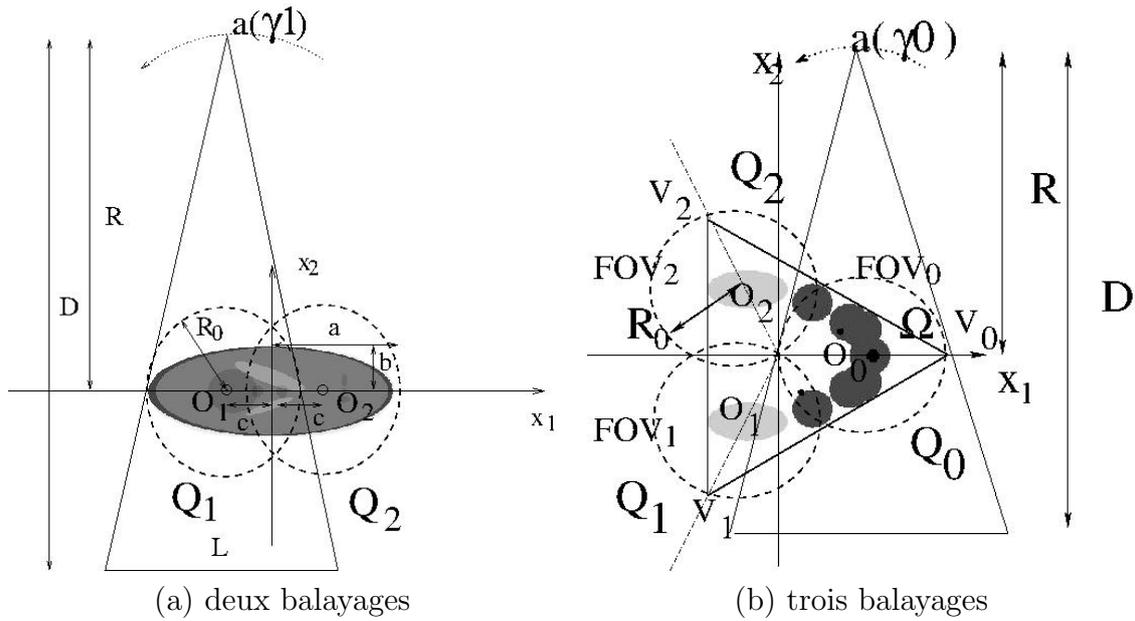


Figure 4.14 – Géométries des systèmes avec la trajectoire de la source de rayons sur deux cercles (a) et trois cercles (b). Dans (a), le support de l’objet (par exemple Shepp-Logan) Ω est un ellipse. Q_1 et Q_2 représentent les deux “ full-scan ” (360°). O_1 et O_2 sont respectivement les centres de rotation de Q_1 et Q_2 . Le support de l’objet Ω (par exemple la mâchoire) est un triangle équilatéral dans (b), dont les trois sommets sont V_0 , V_1 et V_2 . G est la gravité de le triangle. Les champs de vue sont les cercles virtuels.

4.3.(a)). Notons que le détecteur est trop petit pour mesurer l’ensemble des projections de l’objet. Dans ce cas là, la trajectoire circulaire “optimale” de la source des rayons X est celle qui est déterminée par la méthode VFB (ligne solide rouge dans la figure 4.15). Le débattement angulaire de la trajectoire VFB de chaque balayage (Π_1 ou Π_2) est facilement calculable :

$$|\Pi_1| = |\Pi_2| = \pi + 2\alpha_1, \quad (4.34)$$

avec $\alpha_1 = c/R$, où c est la distance entre le centre de l’objet et le centre de rotation d’une acquisition et R est la distance en la source et le centre de rotation. Cette trajectoire ainsi obtenue est plus petite que celle que l’on utiliserait si on faisait un “ short-scan” sur l’ensemble de l’objet : $\pi + 2\alpha_{max}$ avec α_{max} (voir la figure 4.5) car $c < R_0$. Une autre alternative consiste à reconstruire l’ensemble de l’objet à partir des deux trajectoires. Dans ce cas, on s’aperçoit qu’il y a une certaine redondance dans les données. Par exemple la ligne de la figure 4.15 passant le pixel M est mesurée deux fois. Nous avons mis en évidence la redondance présente dans les données par les courbes en gras noire et bleu sur la figure 4.15. Afin de réduire cette redondance, nous proposons de définir deux trajectoires de type super-short-scans Π_{ss1} et Π_{ss2} voir la figure 4.16.

Les positions initiales de la source $a(\gamma_{1s})$ et $a(\gamma_{2s})$ se trouvent sur la tangente au domaine d’objet. Nous calculons dans la suite les débattements angulaires $\Pi_{ss1} = [\gamma_{1s} \gamma_{1e}]$

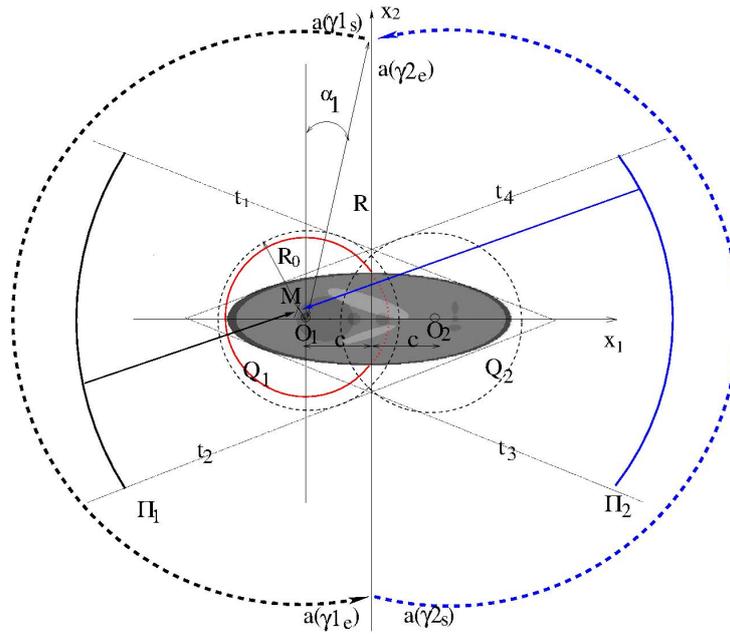


Figure 4.15 – Illustration schématique de la méthode VFB. La trajectoire virtuelle est ligne rouge solide.

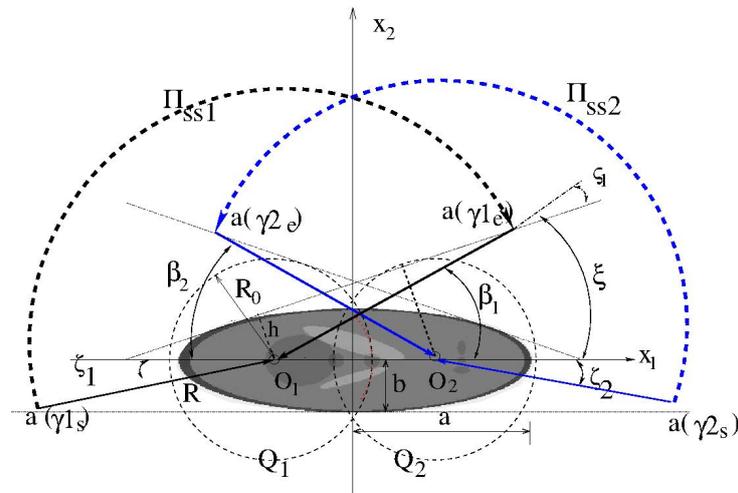


Figure 4.16 – Illustration schématique des super-short-scans sur deux cercles.

et $\Pi_{ss2} = [\gamma_{2s} \ \gamma_{2e}]$ voir la figure 4.16,

$$\gamma_{1s} = \pi + \zeta_1, \quad (4.35)$$

$$\gamma_{1e} = \beta_1, \quad (4.36)$$

$$\gamma_{2s} = -\zeta_2, \quad (4.37)$$

$$\gamma_{2e} = \pi - \beta_2, \quad (4.38)$$

avec

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \arcsin(b/R), \quad (4.39)$$

$$\varsigma_1 = \arcsin(h/R) = \arcsin\left(\frac{R_0 - 2c \sin \xi}{R}\right), \quad (4.40)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \xi + \varsigma_1, \quad (4.41)$$

où R_0 est le rayon de champ de vue qui est fixé comme ci-dessous par la taille du détecteur (le nombre des cellules M_d et la taille de pixel δ_d) lorsque la géométrie du scanner (R et D) est donnée :

$$R_0 = \frac{R}{D} M_d \delta_d \quad (4.42)$$

et ξ est l'angle de la tangente commune au domaine d'objet et le champ de vue voir la figure 4.16, qui est exprimé ci-dessous :

$$\xi = \arctan\left(1/\sqrt{\left(\frac{R_0 c + \sqrt{(a^2 - b^2)(R_0^2 - b^2) + b^2 c^2}}{R_0^2 - b^2}\right)^2 - 1}\right). \quad (4.43)$$

Nous comparons les projections de “ R-scan ” et celles de super-short-scan. L'angle des projections réduite par notre super-short-scan par rapport à “ R-scan ” est Δ_Π ,

$$\begin{aligned} \Delta_\Pi &= |\Pi_1| - |\Pi_{ss1}| = \pi + 2\alpha_1 - |\gamma_{1e} - \gamma_{1s}| \\ &= 2\alpha_1 + \xi + \varsigma_1 - \zeta_1. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Lorsque l'objet à reconstruire est plus grand, nous avons besoin de faire plus d'acquisition. Nous introduisons alors une trajectoire trois cercles qui est particulièrement bien adaptée à la reconstruction de la mâchoire en imagerie dentaire.

IV.2.2 Les super-short-scans sur trois cercles

Les objets qui nous intéressent ici sont les mâchoires. Ces objets ne sont pas allongés comme dans le cas précédent. Par contre, la zone d'intérêt est incluse dans un triangle équilatéral (voir figure 4.17).

Dans la suite, nous noterons par Ω le domaine triangulaire associé à objet voir la figure 4.17. Comme dans la partie précédente, nous pouvons reconstruire un tiers de l'objet par acquisition. Cela est similaire au cas que traite Michel Defrise dans [8] voir la figure 4.3.(c). Il n'existe pas de trajectoire de la source des rayons X plus courte que celle de “ short-scan ” qui satisfait la condition suffisante de la transformée de Hilbert tronquées (Condition 4). Le “ short-scan ” est alors un bon choix pour reconstruire individuellement trois zones $Q_i \cap \Omega, i = 0, 1, 2$. Mais ici aussi apparaît clairement de la redondance dans les données voir figure 4.17 (a). Il est donc très intéressant d'utiliser une reconstruction conjointe en utilisant trois trajectoires super-short-scans voir figure 4.17.(b). Les intervalles angulaires de trois super-short-scans sont respectivement $\Pi_{ss0} = [\gamma_{0s} \gamma_{0e}]$, $\Pi_{ss1} = [\gamma_{1s} \gamma_{1e}]$ et $\Pi_{ss2} = [\gamma_{2s} \gamma_{2e}]$. D'après la géométrie voir la figure 4.17.(b), nous obtenons les positions angulaires initiales et finales de trois super-short-scans ci-dessous :

$$\gamma_{0s} = \pi + \beta_1, \quad (4.45)$$

$$\gamma_{0e} = 2\pi - \beta_2, \quad (4.46)$$

et

$$\gamma_{1_s} = \frac{\pi}{2} + \angle O_2 O_1 a(\gamma_{1_s}) \quad (4.47)$$

$$\gamma_{1_e} = \frac{3\pi}{2} - \beta_3 \quad (4.48)$$

et

$$\gamma_{2_s} = -\frac{\pi}{2} + \angle O_1 O_2 a(\gamma_{2_s}), \quad (4.49)$$

$$\gamma_{2_e} = \frac{\pi}{2} + \zeta_3, \quad (4.50)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \angle O_0 V_0 a(\gamma_{0_s}) + \zeta_1, \\ \beta_2 &= \angle V_2 V_0 O_0 - \zeta_2, \\ \angle O_2 O_1 a(\gamma_{1_s}) &= \zeta_3 = \arcsin h/R, \\ \beta_3 &= \pi/3 - \arcsin(h/R), \\ \angle O_1 O_2 a(\gamma_{2_s}) &= \pi/3 + \arcsin(h/R), \end{aligned}$$

avec $h = r \sin(\angle O_0 V_0 a(\gamma_{0_s})) = r/2$ et $\zeta_1 = \zeta_2 = \arcsin(h/R)$. D'après les équations précédentes (4.45-4.50), nous calculons dans la suite la longueur angulaire de chaque super-short-scan :

$$|\gamma_{i_e} - \gamma_{i_s}| = 2/3\pi, \text{ avec } i = 0, 1, 2. \quad (4.51)$$

Elle est inférieure à celle de “ short-scan ” ($\pi + 2\alpha_{max}$) voir la figure 4.17.(a). Nous réduisons le débatement angulaire Δ_{Π} de la source des rayons X en utilisant le super-short-scan par rapport au “ short-scan ” voir la figure 4.17.

$$\Delta_{\Pi} = \pi + 2\alpha_{max} - 2/3\pi = \pi/3 + 2\alpha_{max}. \quad (4.52)$$

Nous vérifions que toutes les rayons X ($\Pi_0(M)$, $\Pi_1(M)$ et $\Pi_2(M)$) passant par un point quelconque M dans le domaine d'objet coupent la trajectoire de la source des rayons X (Π_{ss0} , Π_{ss1} et Π_{ss2}) voir la figure 4.17.(b). Les projections nécessaires pour reconstruire le point M comme la condition de Noo (voir la condition 2) sont acquises. Afin de réduire la redondance des données, nous prenons en compte toutes les projections ensemble des deux ou trois acquisitions. Autrement dit, les projections manquantes dans une acquisition sont acquises dans une autre. Afin d'appliquer les algorithmes analytiques (voir l'eq.4.13) s'appuyant sur la transformée de Hilbert, il faut réarranger les projections d'une acquisition à l'autre. C'est compliqué en pratique et cela entraîne certaines erreurs d'interpolation. Un autre moyen plus simple est d'utiliser des algorithmes itératifs. Nous exposons dans la suite les algorithmes itératifs de moindres carrés (MC). C'est aussi un moyen naturel de traiter la redondance résiduelle présente dans les données.

IV.2.3 Les algorithmes itératifs de super-short-scan sur multiples cercles

Nous considérons la reconstruction comme un problème d'optimisation et nous utilisons un modèle direct linéaire (voir l'eq.2.88) en tomographie 2D en géométrie éventail

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (4.53)$$

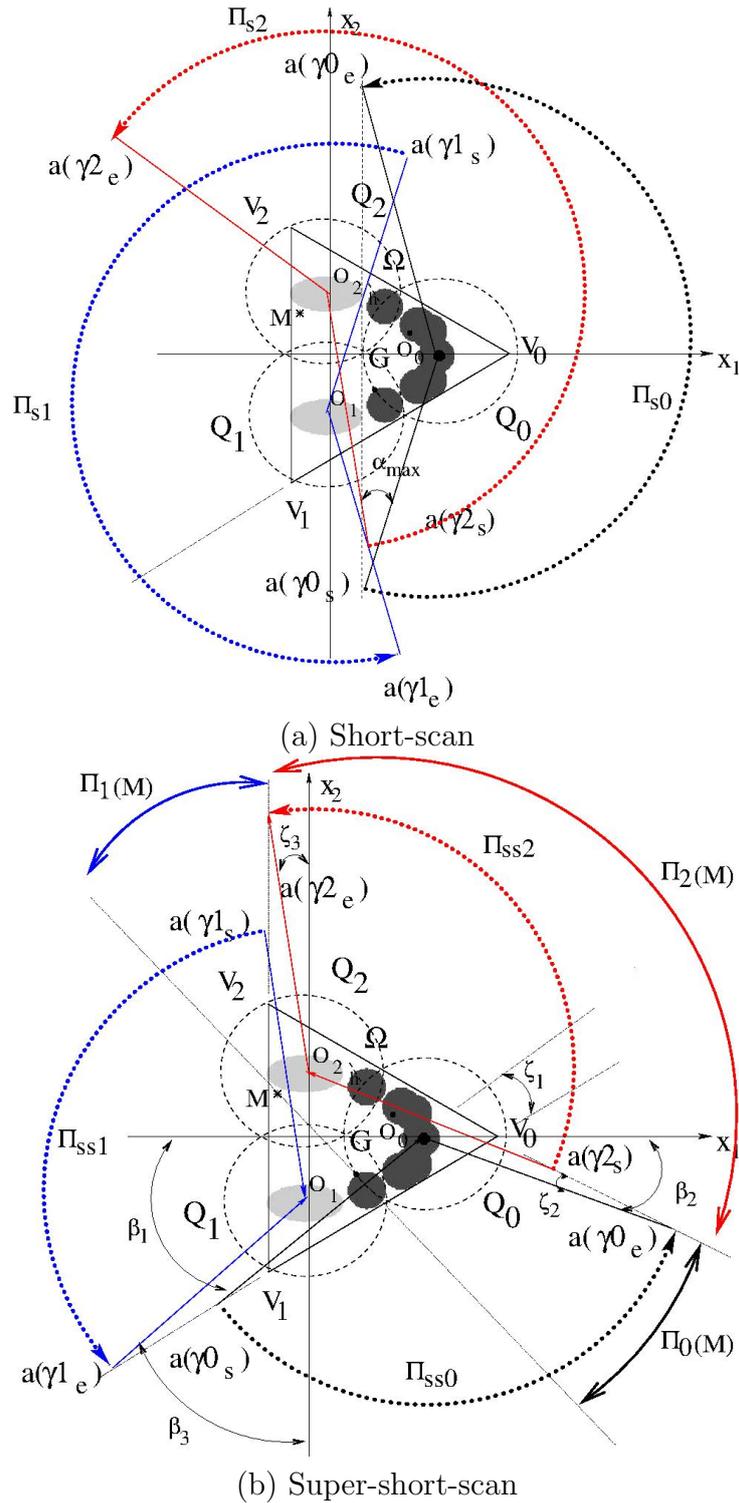


Figure 4.17 – Illustration schématique des short-scans (a) et super-short-scans (b) sur trois cercles. Toutes les projections passant par un point quelconque M dans le domaine d'objet coupe la trajectoire de la source des rayons X ($|\Pi_0(M)| + |\Pi_1(M)| + |\Pi_2(M)| = \pi$).

où les matrices du système \mathbf{H} sont décrites respectivement dans la suite pour deux ou trois balayages,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \text{ ou } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

IV.2.3 - Les algorithmes itératifs de super-short-scan sur multiples cercles

avec \mathbf{H}_0 la matrice du système de l'acquisition Q_1 , \mathbf{H}_1 pour Q_2 dans le cas de deux balayages voir figure 4.16 et \mathbf{H}_0 la matrice du système de l'acquisition Q_0 , \mathbf{H}_1 pour Q_1 et \mathbf{H}_2 pour Q_2 dans l'acquisition utilisant trois balayages décrits sur la figure 4.17. La reconstruction de l'image \mathbf{f} est obtenue dans la suite en minimisant la fonction de coût $J(\mathbf{f})$ qui est définie ci-dessous :

$$J(\mathbf{f}) = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2/2, \quad (4.55)$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} J(\mathbf{f}). \quad (4.56)$$

Le critère étant quadratique de grande taille, nous utilisons un simple algorithme de descente selon des directions basés sur le gradient afin de trouver le minimum du critère ci-dessus. Le choix d'un simple critère des moindres carrés non régularisés vient du fait que le niveau de bruit est très faible et que le nombre de projection est relativement important. L'image \mathbf{f} est estimée ci-dessous par un algorithme de gradient conjugué. Le gradient $\nabla J(\mathbf{f})$ de la fonction de coût $J(\mathbf{f})$ est calculé de la manière suivante :

$$\nabla J(\mathbf{f}) = \sum_{j \in \mathbf{J}} \mathbf{H}_j^t (\mathbf{H}_j \mathbf{f} - \mathbf{g}_j), \quad (4.57)$$

où $\mathbf{J} = 1, 2$ pour deux jeux des données et $\mathbf{J} = 0, 1, 2$ pour trois jeux des données. \mathbf{g}_j est le jeux des données de Q_j , $j=0, 1$ et 2 . ϵ_c et K_{max} sont définis comme l'algorithme 1.

Algorithme 4 L'algorithme de gradient conjugué pour une reconstruction avec les projections sur multiples cercles.

Initialisation :

$\mathbf{f}^0, \mathbf{d}^0 = -\nabla J(\mathbf{f}^0)$ (voir l'eq.4.57);

$k \leftarrow 0$;

$r_{\delta \mathbf{f}}^{(k)} = 1$;

while $r_{\delta \mathbf{f}}^{(k)} > \epsilon_c \& k < K_{max}$ **do**

calculer $\nu^{(k)}$ en utilisant l'eq.4.54 :

$$\nu^{(k)} = -\frac{(\mathbf{d}^{(k)})^t \nabla J(\mathbf{f}^{(k)})}{(\mathbf{d}^{(k)})^t \mathbf{H}^t \mathbf{H} \mathbf{d}^{(k)}}, \quad (4.58)$$

mettre à jour $\mathbf{f}^{(k+1)} : \mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \nu^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}$,

évaluer $\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)})$ utilisant l'équation (4.57),

évaluer $\tau^{(k+1)} : \tau^{(k+1)} = \frac{(\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}))^t (\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))}{\|\nabla J(\mathbf{f}^{(k)})\|^2}$,

mettre à jour $\mathbf{d}^{(k+1)} : \mathbf{d}^{(k+1)} = -\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) + \tau^{(k+1)} \mathbf{d}^{(k)}$,

évaluer $r_{\delta \mathbf{f}}^{(k+1)}, r_{\delta \mathbf{f}}^{(k+1)} = \frac{\|J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - J(\mathbf{f}^{(k)})\|}{\|J(\mathbf{f}^{(k)})\|}$

$k \leftarrow k + 1$.

end while

Afin de valider les super-short-scans proposés sur deux et trois cercles, nous montrons dans la suite des images reconstruites à partir des données simulées.

IV.2.4 Validation de l'algorithme des super-short-scans sur multiples cercles

Afin d'avoir des données simulées les plus proches des données réelles que nous présenterons dans le chapitre V, nous utilisons la même géométrie d'acquisition que celle du scanner à rayons X divergents dentaire CS 9000 de Carestream Dental. Nous générons les données en utilisant notre modèle direct décrit dans l'eq.2.45. De plus nous avons ajouté un bruit gaussien additif dont la variance σ_i^2 est dépendante du nombre des photons X reçus y_i , $\sigma_i = 0,01 * y_i$, $i=1, 2, \dots, M$. De cette manière, on approche une statistique de bruit poissonnienne. Deux fantômes (Shepp-Logan étiré horizontalement et une mâchoire simulée) sont utilisés dans nos simulations voir la figure 4.18. La liste des paramètres d'acquisition est donnée dans le tableau 4.1.

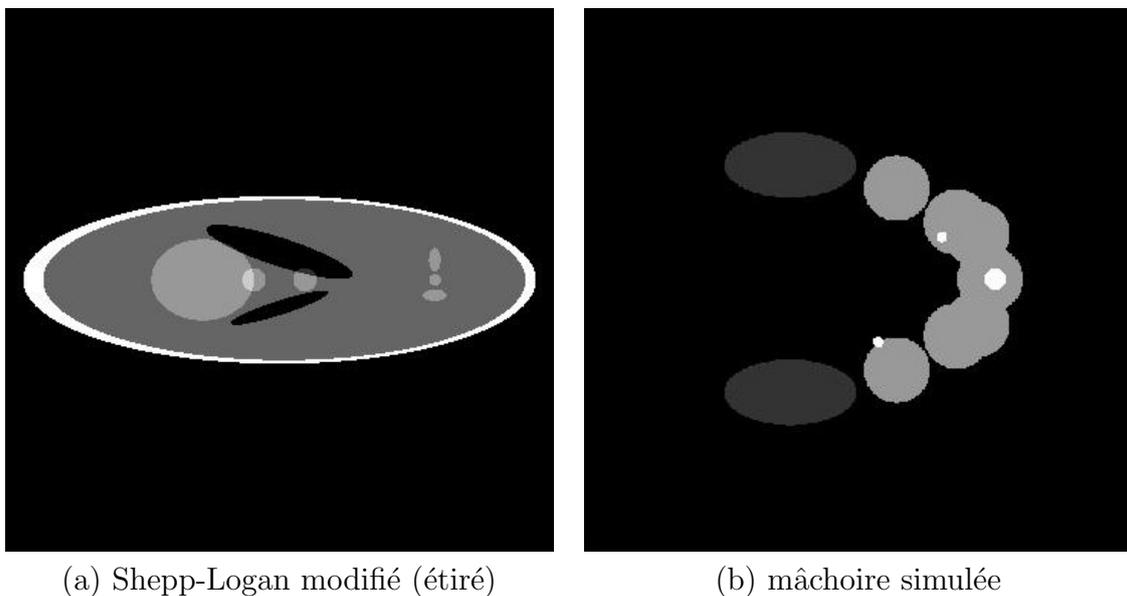


Figure 4.18 – Deux fantômes : (a) Shepp-Logan modifié et étiré horizontalement (b) une mâchoire simulée.

Le fantôme de la mâchoire est composé de trois matériaux : les tissus, les dents et les implants dentaires métalliques, dont les CALs sont respectivement 0,02, 0,06 et 0,3 mm^{-1} voir la figure 4.18.(b).

Nous appliquons un projecteur pour générer les données simulées sans bruit. Afin de tester si la reconstruction est stable à partir des projections des super-short-scans, nous ajoutons un bruit gaussien dans les données simulées. Pour voir les limitations de la réduction du nombre de projections, nous avons choisi de reconstruire avec des données plus petites que les conditions données par le super short scan $|\Pi_{ssi}| - 2\epsilon, i = 1, 2$ ou $0, 1, 2$ pour voir si une reconstruction relativement stable est obtenue. ϵ représente ici un très petit angle (angle entre deux projections successives). Les super-short-scans “tronquées” sont appelés dans la suite “SS⁻scans”. Nous exposons dans la suite les images reconstruites par notre algorithme de gradient conjugué à partir des données de différents modes d'acquisition.

Le fantôme Shepp-Logan ne peut pas être reconstruit avec les projections d'une seule

IV.2.4 - Validation de l'algorithme des super-short-scans sur multiples cercles

Tableau 4.1 – Les principaux paramètres géométriques du scanner CS9000 et des deux fantômes simulés.

Paramètres	
Distance source-centre de rotation R	440 mm
Distance source-détecteur D	690 mm
Nombre de projections (360 ° “ full-scan ”)	360
Nombre de cellules détectrices	680
Taille d'une cellule détectrice	120 μm
Champ de vue (FOV)	52 \times 52 mm ²
Fantômes	
Shepp-Logan	
Définition	fantôme (fonction Matlab)
Domaine d'objet Ω	ellipse
Taille	72 \times 24 mm ²
Taille de voxel	200 μm
Dimension d'image	384 \times 384
Mâchoire simulée	
Définition	voir la figure 4.18
Domaine d'objet Ω	triangle équilatéral
Taille d'un coté du triangle	90 mm
Taille de voxel	200 μm
Dimension d'image	540 \times 540

acquisition Q_1 ou Q_2 . D'après la méthode VFB et la méthode de DBP avec filtrage de Hilbert, la zone d'intérêt maximale est délimitée par une ligne pointillée jaune. Cette zone est théoriquement reconstruite de manière exacte par les algorithmes analytiques (voir les eqs.4.13, 4.27 et 4.31). Mais nous pouvons reconstruire les zones d'intersection du champ de vue et du domaine d'objet de la qualité comparable avec la zone d'intérêt (voir les lignes pointillées rouges sur les figures 4.19.(a)-(d)) avec la méthode itérative MC comme la méthode OS-EM [7]. Le mode d'acquisition de VFB et nos super-short-scan sur deux cercles nous permettent tous d'obtenir une reconstruction stable et exacte de Shepp-Logan voir les figures 4.19.(e)-(h). Mais nos super-short-scans sont plus courts que ceux de VFB. En effet, le débatement angulaire de l'approche VFB est 184° contre 154° pour notre trajectoire soit une réduction de 16,8%. Nous observons expérimentalement que nos super-short-scans correspondent aux trajectoires minimales de la source des rayons X permettant de reconstruire le fantôme Shepp-Logan exactement voir les figures 4.19.(g) et (h). Des artefacts sur les bords du fantôme apparaissent lorsque l'on réduit le nombre de projections au-delà des conditions de reconstruction (approche SS⁻-scan voire les figures 4.19.(i) et (j)). Les erreurs de reconstruction sont vues plus clairement lorsque on trace le profil suivant la ligne jaune dans la figure 4.19.(a) voir la figure 4.20.

Dans le cas de la mâchoire simulée, les super-short-scans proposés sur trois cercles permettent de reconstruire exactement la mâchoire entière comme les “ short-scans ” voir les figures 4.21.(a)-(d). Mais ils nécessitent beaucoup moins de projections que les “ short-scan ”. Grâce aux super-short-scans, le nombre des projections des “ short-scan ” peut être réduit de 35,8%. Des artefacts directionnels apparaissent lorsque on

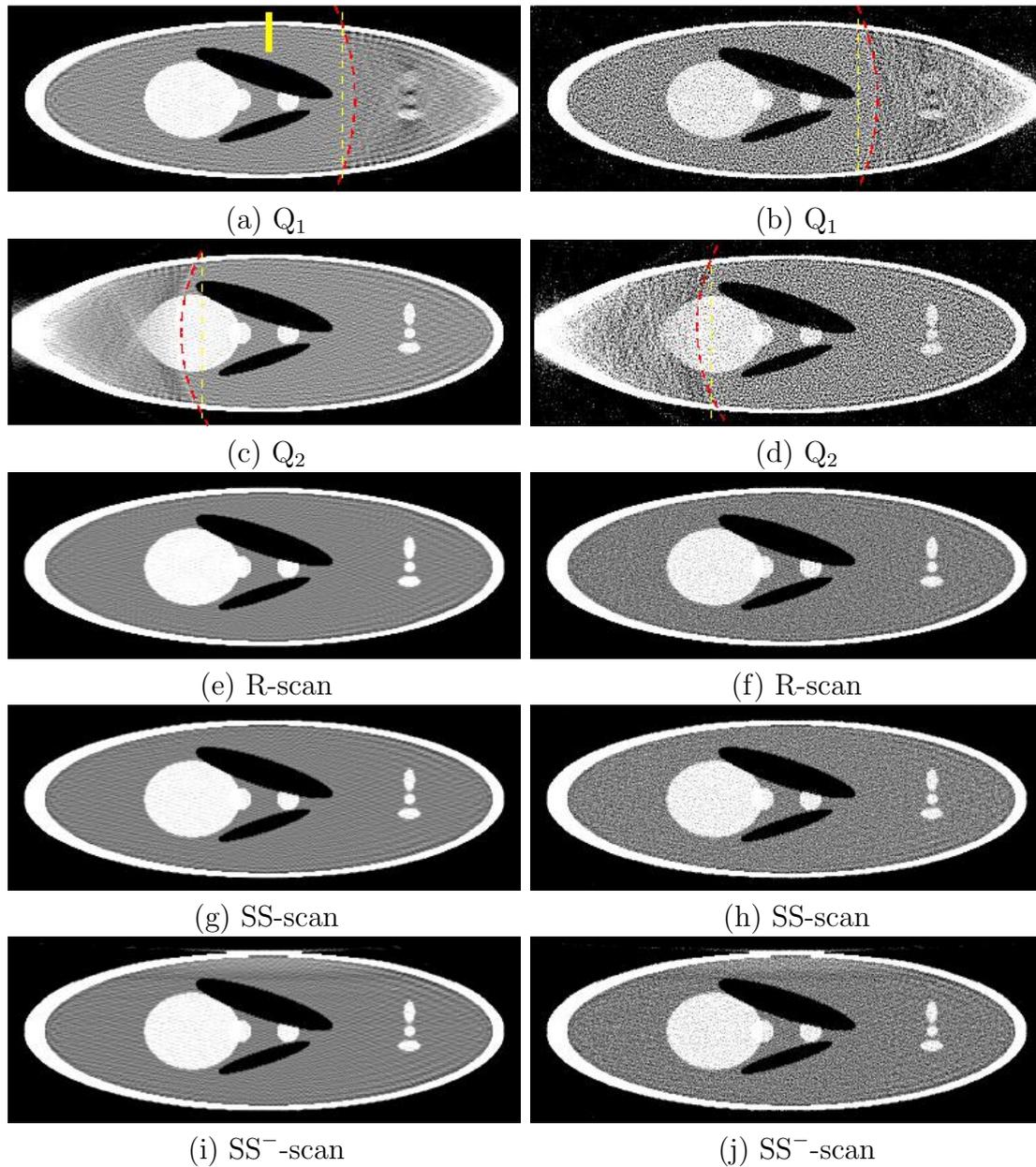


Figure 4.19 – Images reconstruites de Shepp-Logan modifié à partir des données sans bruit (colonne gauche) et des données bruitées (colonne droite) par la méthode itérative MC. La fenêtre d’affichage est $[0.1 \ 0.3]$.

diminue même très faiblement le nombre des projections voir les figure 4.21.(e) et (f). On remarque encore une fois que la présence d’objets métallique exacerbe les artefacts dans les reconstructions. Comme on pouvait le prévoir, il n’est pas possible de réduire les trajectoires super-short-scans sans introduire des artefacts.

IV.2.4 - Validation de l'algorithme des super-short-scans sur multiples cercles

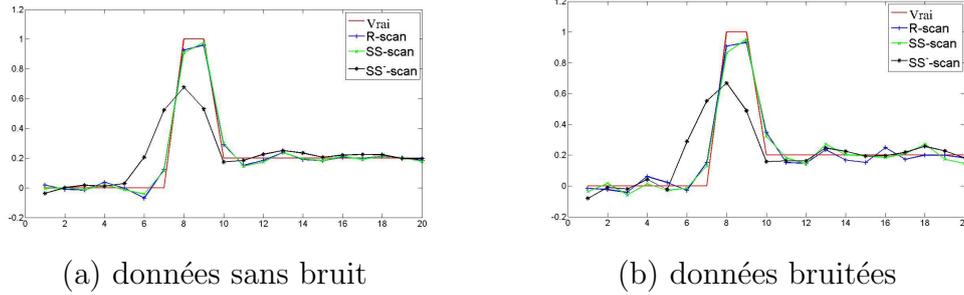
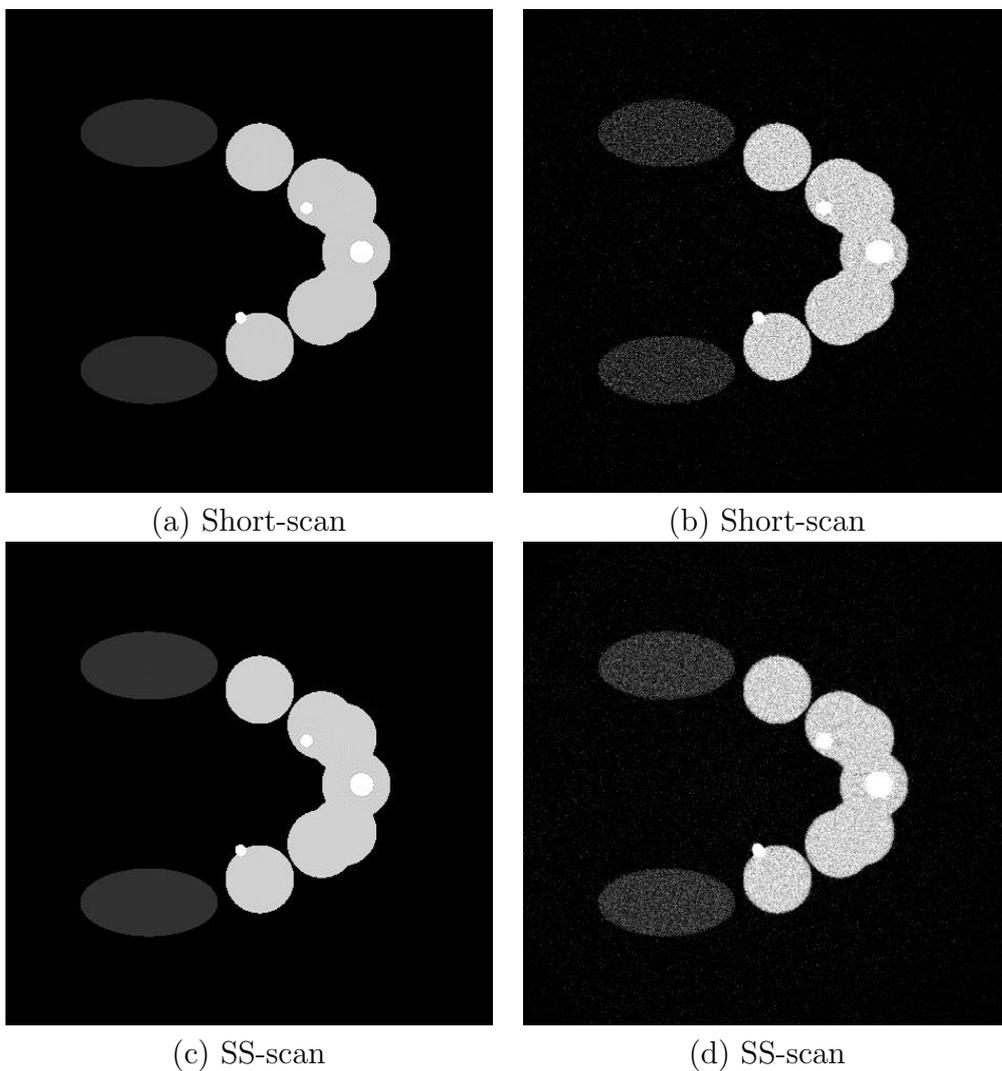


Figure 4.20 – Profils des images reconstruites sur la ligne jaune solide dans la figure 4.19.(a) à partir des données sans bruit (a) et des données bruitées (b) de différents modes d'acquisition.



IV.3 Nouveau mode d'acquisition : échantillonnage non uniforme sur les angles de projections

Nous avons présenté les modes d'acquisition super-short-scan qui sont adaptés à une zone d'intérêt (voir la figure 4.7). De manière analytique, nous devons respecter des conditions

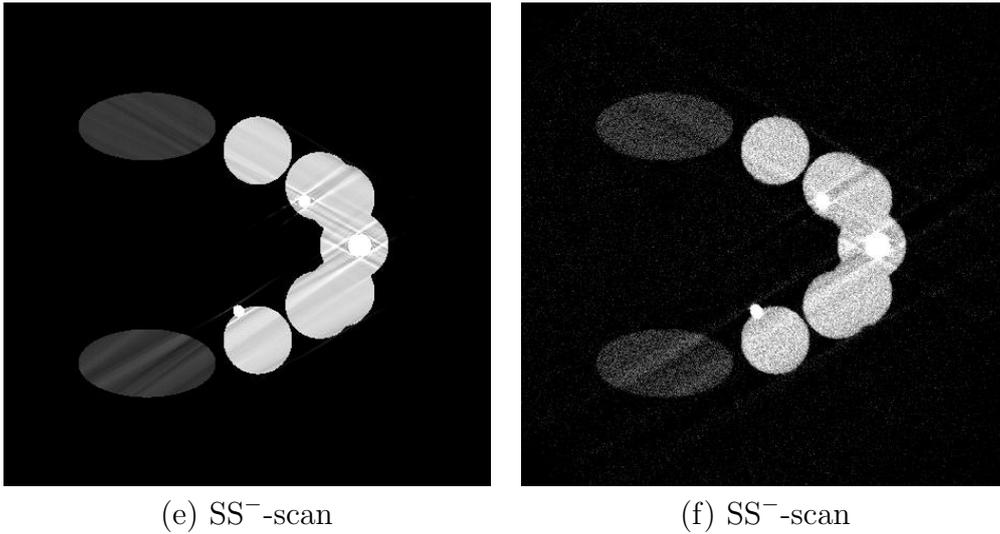


Figure 4.21 – Images reconstruites de la mâchoire simulée à partir des données sans bruit (colonne gauche) et des données bruitées (colonne droite) des différents modes d'acquisition. La fenêtre d'affichage est le $[0.01 \ 0.07]$.

d'échantillonnages drastiques pour reconstruire correctement les images. Dans le cadre de reconstruction en utilisant des approches bayésiennes nous avons plus de souplesse. Par exemple, quand nous avons une large zone homogène dans l'image, elle ne contient pas beaucoup d'information. Elle est représentée uniquement par des basses fréquences dans le domaine de Fourier. On peut donc dans ce cas avoir un échantillonnage qui ne respecte plus les critères classiques sans détériorer fortement la qualité des reconstructions.

Par contre, une zone fortement contrastée contient toutes les fréquences. Elle nécessite plus de projections pour obtenir une même qualité d'image qu'une zone homogène. En effet, en géométrie parallèle l'échantillonnage est plus dense dans la zone des basses fréquences que dans la zone des hautes fréquences voir la figure 4.22. Nous proposons donc un nouveau mode d'acquisition avec la trajectoire adaptée aux différentes zones d'objet (les zones homogènes et les zones contrastes).

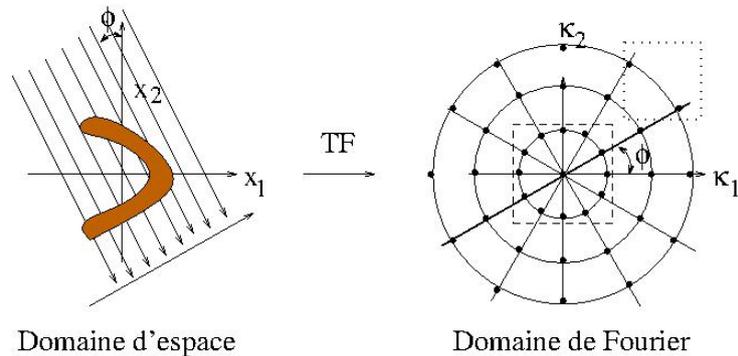


Figure 4.22 – Illustration schématique des projections parallèles dans le domaine d'espace et les échantillons associés dans le domaine de Fourier. Le carré virtuel est la zone des basses fréquences et le carré pointillé indique une zone des hautes fréquences.

En imagerie dentaire, nous trouvons des zones homogènes, par exemple la cavité orale

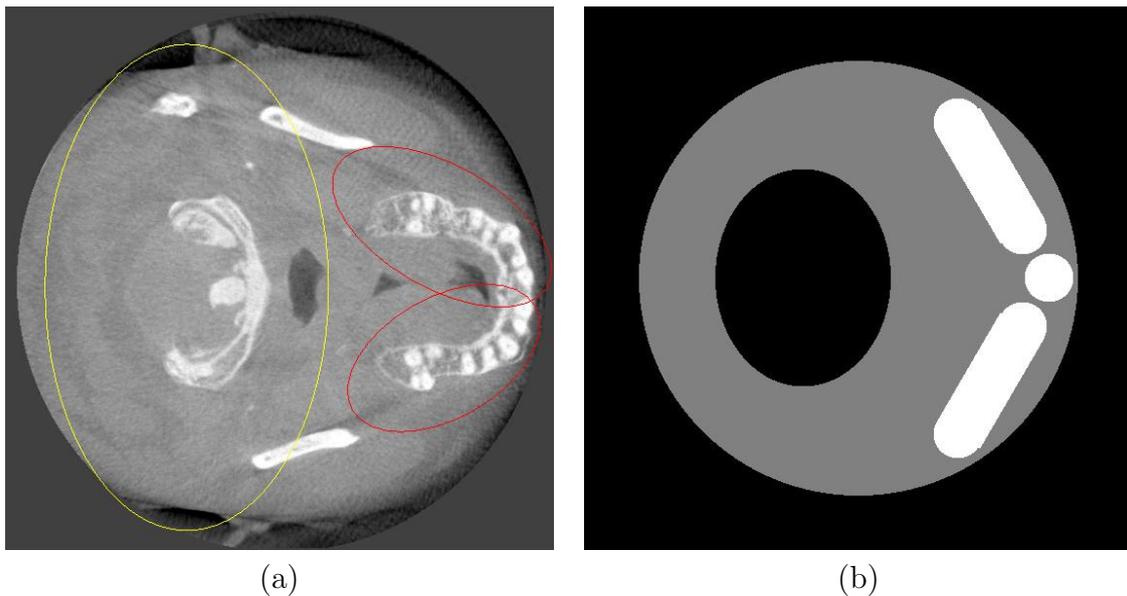


Figure 4.23 – (a) Classification des zones d’une image du patient : une zone homogène et moins intéressante (ellipse jaune) et des zones contrastées et plus intéressantes (mâchoire dans l’ellipse rouge) et (b) image simplifiée du patient en deux zones.

(voir l’ellipse noire dans la figure 4.1.(a)). Et les zones d’intérêts contrastés correspondent aux dents. La zone derrière la cavité orale est moins intéressante par rapport à la mâchoire car nous nous intéressons à l’état des dents et les tissus autour des dents voir la figure 4.23.(a). Nous pouvons avoir dans ces zones une résolution effective moins importante. Nous classifions alors des images dentaires en deux zones : une zone homogène ou moins intéressante et une zone contraste ou plus intéressant voir la figure 4.23.(b).

Dans le domaine de Fourier, la fréquence de la zone homogène est uniforme et indépendant de la position angulaire voir la figure 4.24.(b). Par contre, la transformée de Fourier d’une mâchoire simplifiée montre que le contenu fréquentiel est anisotrope. L’énergie est plus importante pour les coefficients verticaux par rapport au coefficient horizontaux voir la figure 4.24.(d). D’après la relation de domaine spatial et le domaine de Radon (voir la figure 2.1) et le théorème de coupe de projection (voir le théorème 1), nous devons échantillonner plus finement autour de l’axe horizontal qu’autour de l’axe vertical.

Les considérations ci-dessus sont valides uniquement pour la géométrie parallèle, dans le cas de la géométrie en éventail, il faut aussi tenir compte du grossissement. La figure 4.25 illustre ce phénomène : il y a trois rayons X passant par le cercle 1 plus proche de la source des rayons X et un seule rayon X traversant le cercle 2 de la même taille. Il faut alors plus de projections lorsque la source est proche à la zone d’intérêt pour avoir plus de mesures de la zone d’intérêt.

Nous proposons donc un nouveau mode d’acquisition d’échantillonnage angulaire variant ce qui est adapté à différentes zones d’image (voir la figure 4.23.(b)). Nous faisons 1,1 ~ 2 fois plus de projections dans la zone des fréquences plus denses et des zones intéressantes (zone ‘+’), 40% ~ 60% de projections dans la zone des fréquences parcimonieuses (zone ‘-’) et la même de projections pour les zones restantes par rapport à

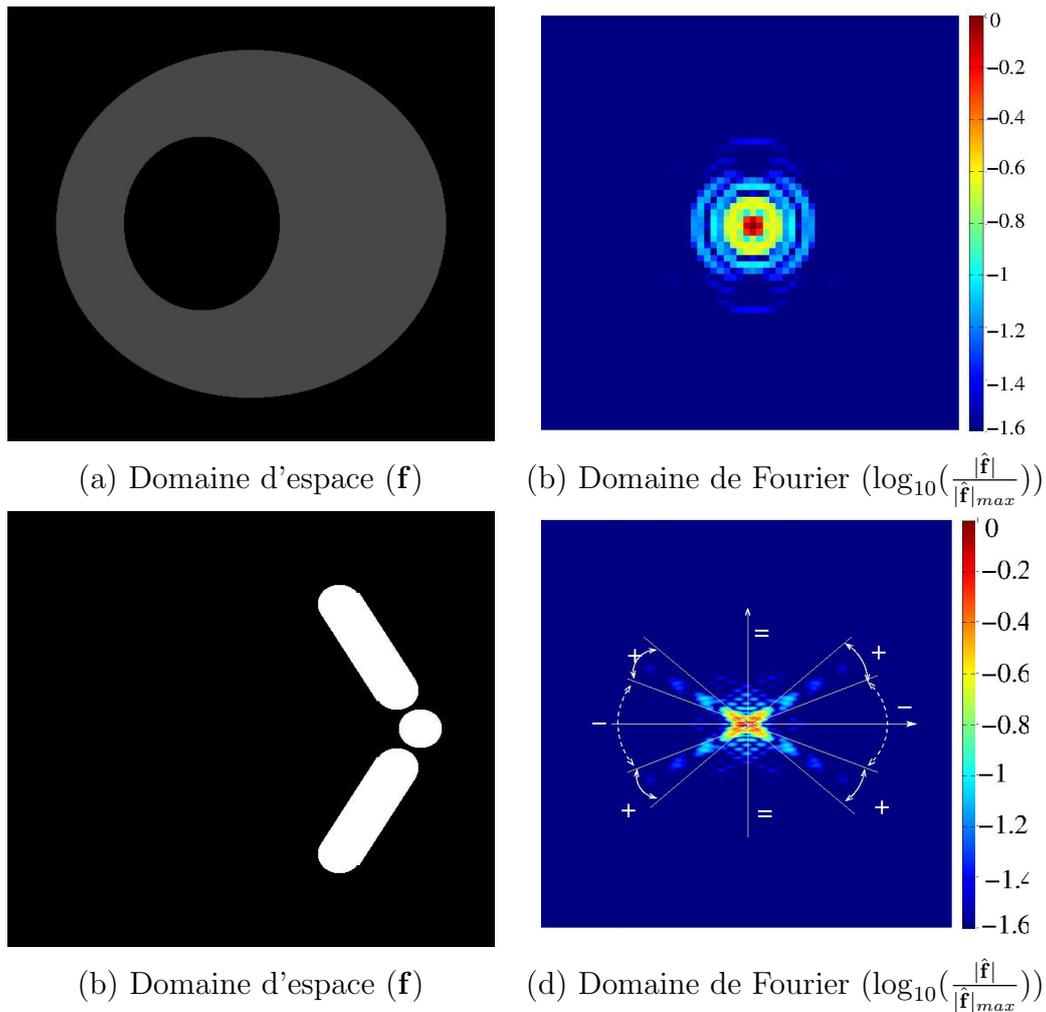


Figure 4.24 – La zone homogène (la première ligne) et la zone contrastée (la deuxième ligne) d'image simplifié du patient et leurs transformées de Fourier.

l'échantillonnage angulaire uniforme voir la figure 4.24.(d). Il permet de non seulement réduire le nombre des projections lors de la source des rayons X proche des zone homogènes et moins intéressantes sans perte de la résolution des zones contrastes et plus intéressantes (voir la figure 4.27), mais aussi améliorer la résolution des zones intéressantes en fixant le nombre des projections (voir la figure 4.30).

Nous utilisons dans la suite un fantôme 2D de bouche auquel nous avons ajouter des ellipses parallèles (voir la figure 4.26.(a)). Ces ellipses permettent d'ajouter des détails plus hautes fréquences dans notre fantôme afin de mieux évaluer notre approche. Lorsque l'on calcule la transformée de Fourier 2D de la zone d'intérêt inscrit dans le rectangle rouge de la figure 4.26.(a) on obtient l'image de la figure 4.26.(b). On observe sur cette figure qu'il y a des zones où les valeurs de la transformée de Fourier sont très faibles (zones indiquées par des doubles flèches blanches voir la figure 4.26.(b)). Nous appelons ces zones " les zones moins sensibles ". Les zones basses fréquences sont plus échantillonnées que celles hautes fréquences dans le domaine de Fourier, voir la figure 4.22. Nous pouvons donc réduire le nombre des projections correspondantes aux zones indiquée (voir la figure 4.26.(b)) en gardant un échantillonnage suffisant dans les zones basses fréquences, voir la figure 4.27.

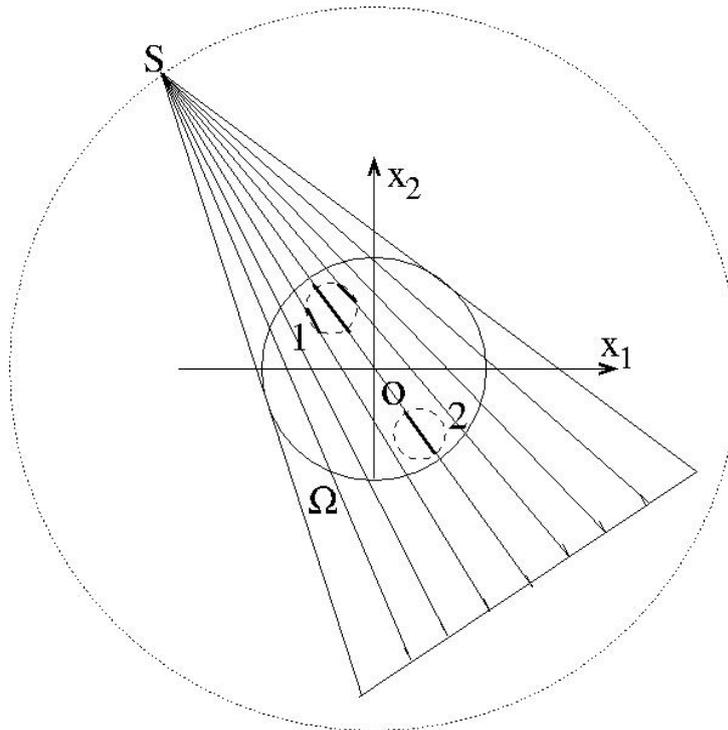


Figure 4.25 – Illustration d'échantillonnage des mesures d'une zone d'intérêt dépendant de la distance entre la source des rayons X et la zone d'intérêt en tomographie par rayons divergents. Les segments en gras indiquent les rayons X passant les cercles virtuels 1 et 2.

Nous employons dans la suite la méthode de moindres carrés avec régularisation dans le cadre bayésien pour la reconstruction d'image décrite dans la partie III.4.5. Les positions angulaires de la source de rayons X proche de la zone homogène peuvent être aussi réduites car les informations *a priori* utilisées peuvent compenser le manque d'informations présent dans les projections.

La configuration du système de scanner utilisé est donnée dans le tableau 3.1. Pour réduire le nombre de projections, nous appliquons dans la suite deux modes d'acquisition : sous-échantillonnage angulaire uniforme (moitié des projections de "full-scan") et sous-échantillonnage angulaire variant voir la figure 4.27. La qualité de l'image reconstruite à droite est comparable avec celle de gauche (voir les figures 4.28.(a) et (b) et 4.29.(a) et .(b)). La reconstruction avec un échantillonnage non uniforme a été réalisé avec 28% de projections en moins (64/229).

Alors le mode d'acquisition utilisant un sous échantillonnage adaptatif permet de reconstruire des images qualités similaires en réduisant le nombre de projections (28% de moins). On peut aussi à nombre de projections fixé améliorer la résolution de l'image. Pour cela, nous augmentons le nombre des projections correspondant aux zones sensibles dans le domaine de Fourier et le diminuons dans les zones moins sensibles voir la figure 4.30. En imagerie dentaire, les dentistes s'intéressent souvent seulement à la zone des dents malades. Cette zone doit être reconstruite de bonne résolution, par contre, la basse résolution des autres zones peut être acceptée. Donc nous considérons dans la suite une zone intéressante voir ellipse rouge de la figure 4.30. Un schéma d'échantillonnage

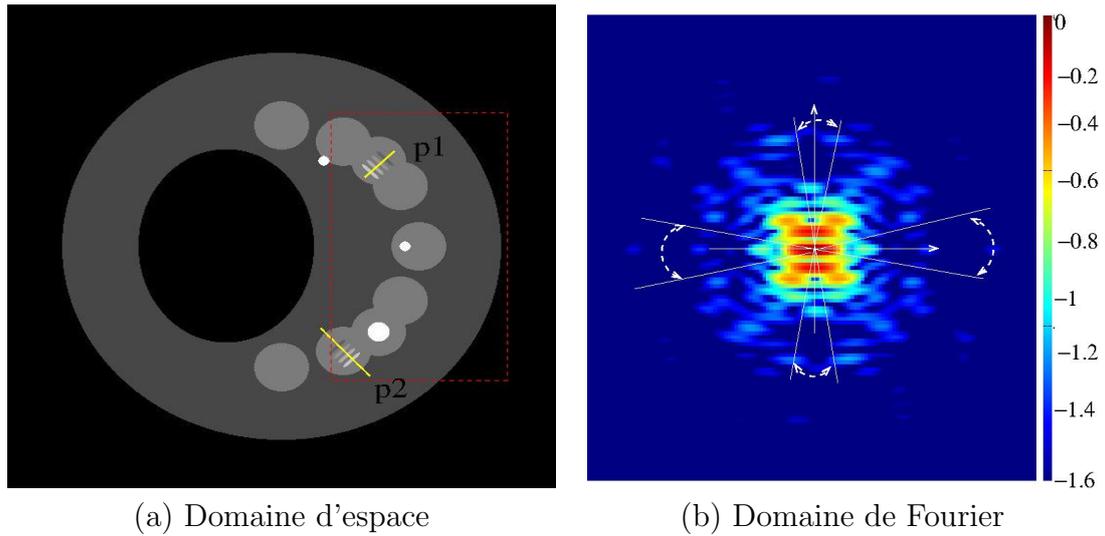


Figure 4.26 – (a) Le fantôme 2D de bouche et (b) le \log_{10} de la transformée de Fourier des dents et ellipses contrastes dans le rectangle rouge (a). Les lignes jaunes décrivent les profils utilisés dans la suite dans (a). Les hautes fréquences des dents et ellipses dans le rectangle rouge (voir (a)) sont plus creuses dans les zones angulaires indiquées par les flèches blanches doubles courbes qu'ailleurs dans (b).

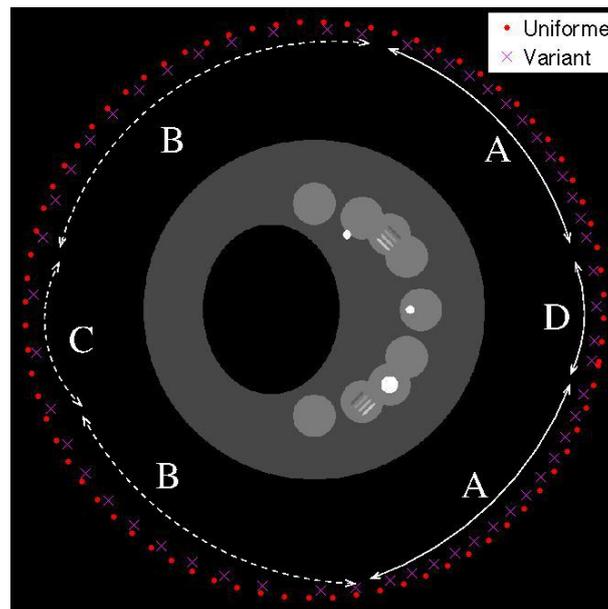


Figure 4.27 – Illustration schématique de sous-échantillonnage angulaire uniforme et de sous-échantillonnage angulaire variant pour réduire le nombre des projections. Le pourcentage des projections dans les zones A, B, C et D sont respectivement 150%, 60%, 40% et 100% par rapport à l'échantillonnage angulaire uniforme.

angulaire adaptatif à la zone intéressante est présenté dans la figure 4.30. Nous comparons ci-dessous les deux modes d'acquisition dans le cas de très faible nombre des projections (un cinquième des projections de " full-scan "). Les ellipses dans la zone intéressante sont mieux contrastées, dans le cas de sous-échantillonnage angulaire non-uniforme voir

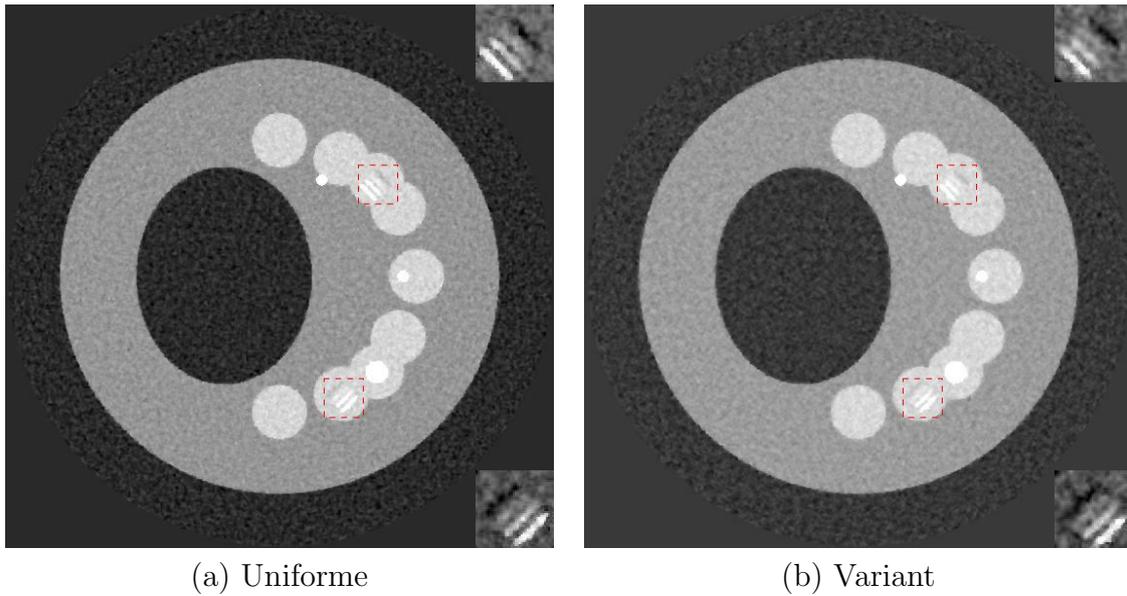


Figure 4.28 – Les images reconstruites par la méthode de moindres carrés avec régularisation ($\lambda = 100$) à partir de l'acquisition de sous-échantillonnages angulaires uniformes (229 projections) et de l'acquisition de sous-échantillonnages angulaires variants (165 projections). La fenêtre d'affichage est le $[-0,01 \ 0,05]$. Les zooms d'image dans les rectangles rouges virtuels sont donnés respectivement en haut et en bas à droite sous la fenêtre d'affichage $[0,03 \ 0,05]$.

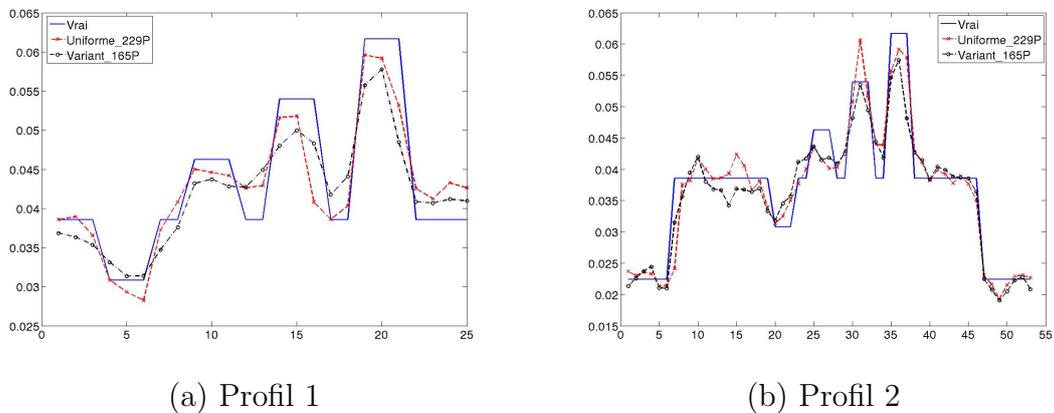


Figure 4.29 – Les profils sur les lignes jaunes p1 (a) et p2 (b) dans la figure 4.26.(a).

les figures 4.31.(b) et 4.31.(a). Lorsque nous traçons les profils p1 et p2 (voir la figure 4.26.(a)), nous constatons que la variation entre les ellipses et inter-ellipses dans la zone intéressante est plus importante relativement dans le cas de sous-échantillonnage angulaire adaptatif que celui uniforme voir la figure 4.32.(a) et ceux sur p2 de deux modes sont similaires voir la figure 4.32.(b).

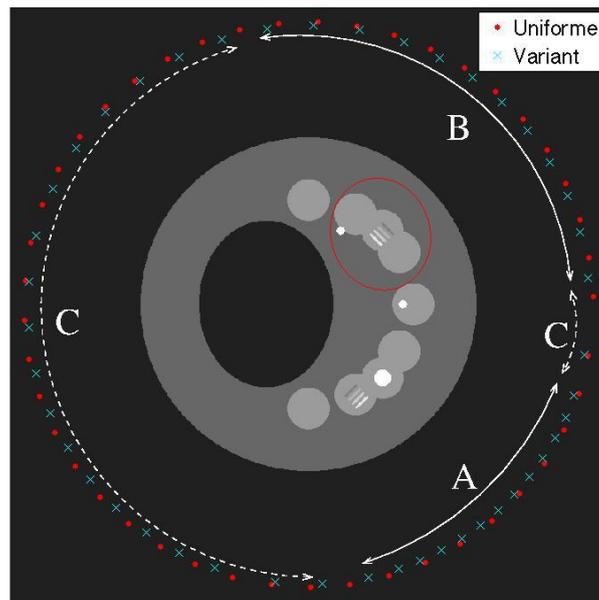


Figure 4.30 – Illustration schématique de sous-échantillonnage angulaire uniforme et de sous-échantillonnage angulaire variant avec le même nombre des projections pour améliorer la résolution de la zone d'intérêt (ellipse rouge). le première possède 166,7% des projections dans la zone angulaire intéressante A, 100% des projections dans la zone B et 80% des projections dans les zones angulaires moins sensibles C par rapport au dernier.

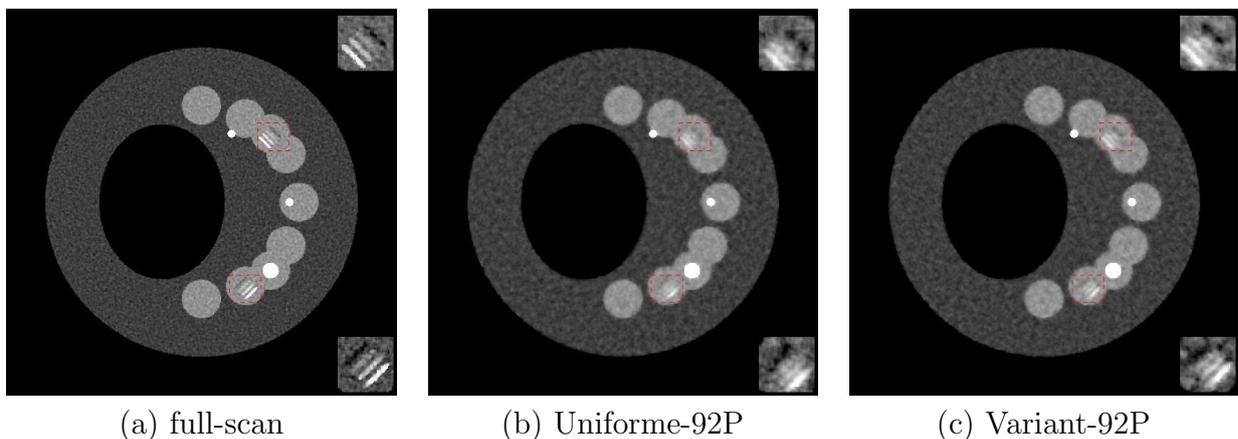
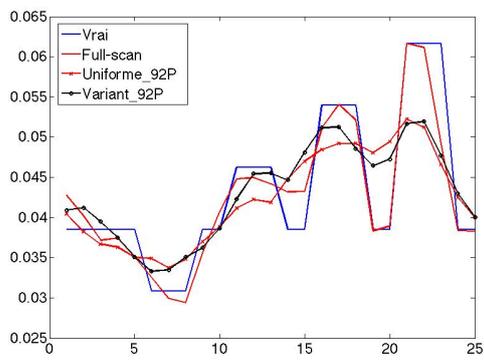
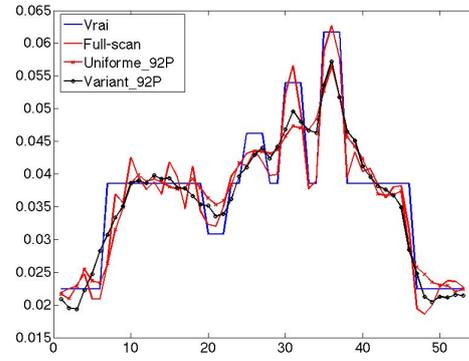


Figure 4.31 – Les images reconstruites par la méthode de moindres carrés avec régularisation ($\lambda = 100$) à partir des projections de “ full-scan ” (a), de très faible nombre des projections (92 soit un cinquième des projections de “ full-scan ”) (b) de sous-échantillonnages angulaires uniformes et de sous-échantillonnages angulaires variants (c). La fenêtre d'affichage est le $[0,01 \ 0,06]$. Les zooms d'image dans les rectangles rouges virtuels sont donnés respectivement en haut et en bas à droite sous la fenêtre d'affichage $[0.03 \ 0.05]$.



(a) Profil 1



(b) Profil 2

Figure 4.32 – Les profils sur les lignes jaunes p1 (a) et p2 (b) des images reconstruites (voir les figures 4.31.(a) et .(b)) dans la figure 4.26.(a).



Evaluation des méthodes MAR et de réduction de la dose proposées sur les données réelles

V.1 Introduction

La confrontation des résultats sur données réelles nous ont fréquemment guidé lors de notre travail. Par conséquent, nous avons choisi dans cette thèse d'accorder une place importante aux résultats expérimentaux. Nous allons voir en quoi les approches que nous avons proposées que ce soit sur la réduction des artefacts métalliques ou sur la réduction de la dose transmise aux patients, sont pertinentes sur données réelles.

D'abord, nous évaluons les méthodes MAR proposées basées sur correction du durcissement et du diffusé. Ensuite nous validerons les performances des algorithmes itératifs de super-short-scans en utilisant des trajectoires circulaires multiples (trois cercles). Enfin, nous testons le nouveau mode d'acquisition d'échantillonnage angulaire adapté sur les données expérimentales d'un crâne et sur des données patient.

V.2 Choix des fantômes expérimentaux et configuration des systèmes d'acquisition

V.2.1 Définition des fantômes expérimentaux

Afin de valider nos méthode, nous avons décidé de tester nos approches sur des fantômes de complexité croissante. Tout d'abord nous allons imager un guide dentaire placé dans cylindre d'eau afin de simuler le diffusé causé par la tête du patient. Il faut noter que la

V.2.2 - Configuration des systèmes de mesure

reconstruction des guides à un intérêt clinique. En effet, les guides sont fabriqués à l'aide d'une empreinte de la mâchoire. Il faut ensuite faire une reconstruction tomographique du guide seul. On fait enfin une acquisition du guide dans la bouche du patient pour définir son positionnement adéquat.

Le deuxième fantôme est composé d'une mâchoire synthétique où nous avons pu ajouter des parties métalliques afin de simuler les implants métalliques causant des artefacts.

Enfin le dernier fantôme est un crâne anthropomorphique. Ces données se rapprochent d'un patient car le crâne sec a été rempli de matière plastique simulant les tissus mous présents dans un patient. Afin de provoquer des artefacts métalliques, nous avons collé à la surface du fantôme des pièces métalliques.

V.2.2 Configuration des systèmes de mesure

Nous avons effectué des mesures à l'aide de systèmes commerciaux, les scanners CS 9300 et CS 9000. Le système CS 9300 est la tomodensitométrie à faisceaux coniques. Il est multimodalité en combinant l'imagerie 3D sur champs d'examen multiple : la panoramique, un module céphalométrique et surtout le grand champ de vue voir la figure 5.2.(a). Il nous permet d'acquérir des projections 2D de grand champ de vue comme la mâchoire et le crâne. De plus l'acquisition peut se faire sur 360° avec un détecteur numérique plat voir la figure 5.2.(b).

Le système CS 9000 nous permet de reconstruire un champ d'examen 3D focalisé de haute résolution (jusqu'à 75 microns) et la panoramique avec un capteur dédié. Le champ de vue de CS 9000 est moins grand que celui de CS 9300, afin de reconstruire un guide entier plus grand que le champ de vue, il nécessite trois acquisitions successives. Nous montrons dans la suite un schéma d'acquisition de CS 9000 voir la figure 5.2.(b).

Des caractéristiques techniques importantes des systèmes CS 9300 et CS 9000 sont rassemblées dans le tableau 5.1.

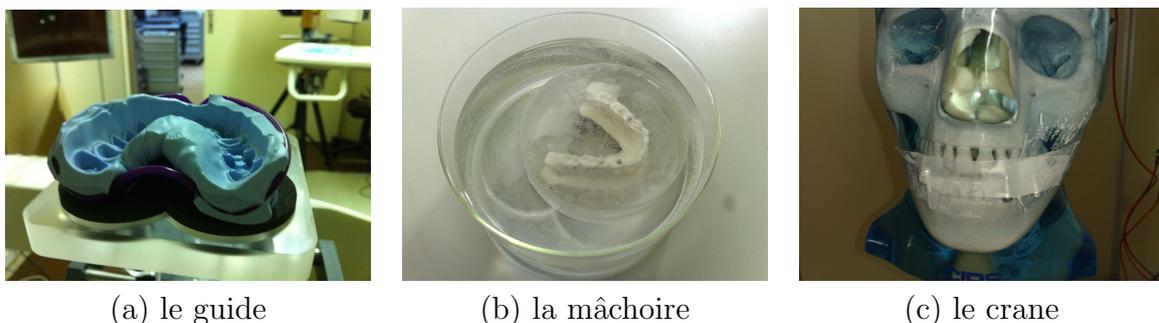


Figure 5.1 – Fantômes expérimentaux un guide maxillaire, la mâchoire et le crâne.

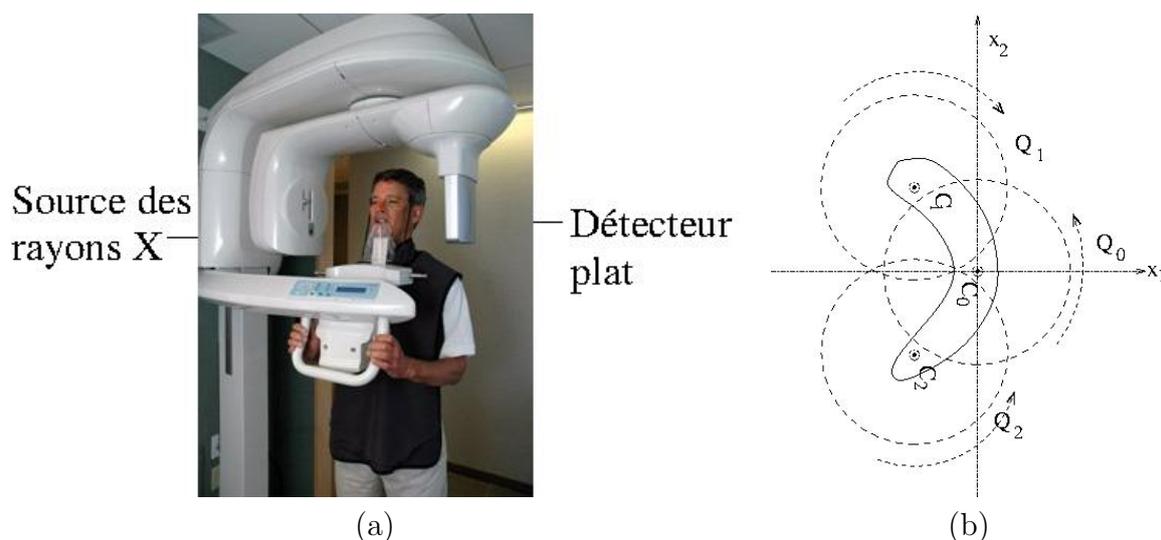


Figure 5.2 – Scanner CS 9300 (a) et schéma d'acquisition CS 9000 (b). Trois acquisitions successives Q_i sont nécessaires pour reconstruire un grand champ de vue avec CS 9000, $i=0, 1$, et 2 .

Spécification	CS 9300	CS 9000
Champ de vue	ajustable de $5 \times 5 \text{ cm}^2$ à $17 \times 13,5 \text{ cm}^2$	$5 \times 3,75 \text{ cm}^2$
Mode de générateur des rayons X	continu et pulsé	pulsé
Durée d'acquisition	12-20 s, 28 s (mode pulsé)	10,8s
Distance source-centre de rotation	43,5 cm	44,0 cm
Distance source-détecteur	61,7 cm	69,0 cm
Taille de voxel	90, 180, 200, 300 et $500 \mu\text{m}$	76 à $200 \mu\text{m}$
Tension du tube	60-90 kV	60-90 kV
Intensité du tube	2-15 mA	2-15 mA

Tableau 5.1 – Caractéristiques techniques important du système CS 9300 et CS 9000.

V.3 Méthodes de réduction des artefacts métalliques

Dans cette partie, nous allons évaluer les performances de nos approches. On commencera par les approches de correction de durcissement de spectre, puis nous évaluerons les approches de correction de diffusé. Nous allons comparer nos approches avec l'algorithme NMAR. Cette approche n'utilise pas de notions physique, mais elle donne de très bon résultats sur données réelles. En effet, comme elle n'introduit pas de modélisation physique, elle est très robuste à la complexité de la physique que l'on trouve dans les données réelles.

En ce qui concerne l'évaluation de la réduction des artefacts métalliques, nous allons nous affranchir des problèmes de données tronquées en utilisant le système d'acquisition grand champ CS 9300. De plus nous allons utiliser les fantômes mâchoire et crâne qui possèdent des parties métalliques.

Nous exposons dans la suite les méthodes MAR basées sur la correction du durcissement et du diffusé.

V.3.1 - Méthode de réduction d'artefacts métalliques basée sur la correction du durcissement

V.3.1 Méthode de réduction d'artefacts métalliques basée sur la correction du durcissement

Notre méthode MAR basée sur la correction du durcissement se décompose en deux étapes : la correction du durcissement sur les données, puis la reconstruction tomographique en utilisant une approche des moindres carrés pondérés.

V.3.1.1 Correction du durcissement

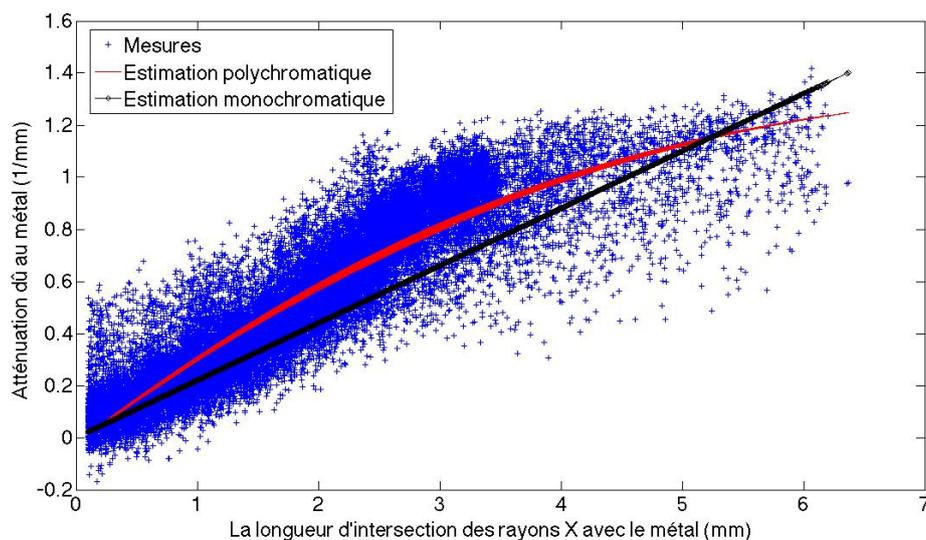
Nous avons appliqués notre approche de corrections (voir la sous-section III.4.3 dans le chapitre III) sur les données réelles de la mâchoire et du crâne.

Rappelons tout d'abord les principales étapes de notre approche voir la figure 3.35.

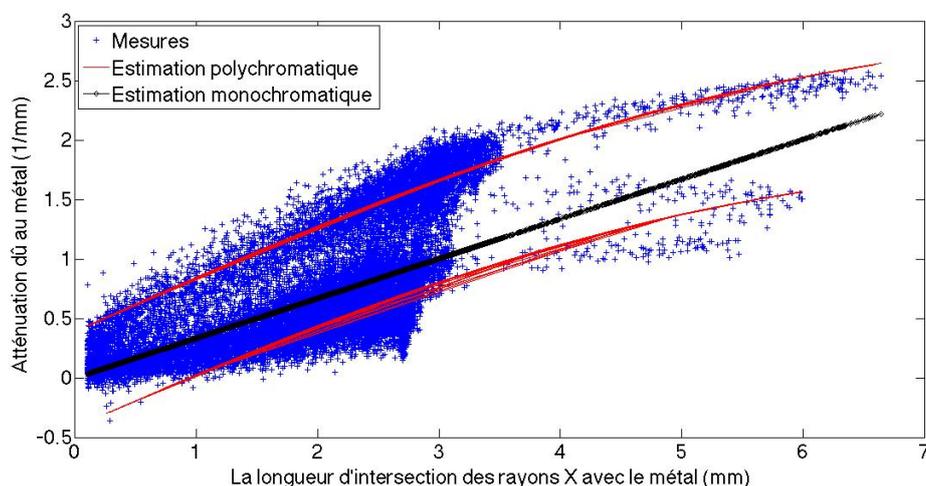
1. Première reconstruction analytique (algorithme FBP), on obtient ainsi un premier estimateur $\hat{\mathbf{f}}^0$. On peut voir les résultats sur les fantômes mâchoire et crâne sur les figures 5.4.(a) et 5.5.(a).
2. Segmentation de la première reconstruction avec la méthode d'Otsu [102] et [103] afin d'identifier le support du métal \mathbf{B}^{metal} .
3. Calcul de la longueur de métal traversé en utilisant notre projecteur \mathbf{HB}^{metal} .
4. Estimation de la non-linéarité du au durcissement de spectre voir la figure 5.3.
5. Correction des données en utilisant l'eq.3.65.
6. Reconstruction des données corrigées en minimisant un moindre carrés pondérés avec régularisation dont la fonction de coût est donnée par l'eq.3.71.

Pour ce qui est de l'identification de la non linéarité introduite par le métal, le cas du crâne est particulièrement difficile. En effet, nous avons ajoutés des vis creuses à la surface du crâne. Le problème est que le trou au milieu des vis est difficile à segmenter à cause des artefacts de durcissement de spectre. On peut voir sur la figure 5.3.(b) que cette mauvaise segmentation implique que les points se sépare en deux nuages. Les points sur le nuage inférieur correspondent aux faisceaux des rayons X traversant le milieu de la vis (passant par le trou de la vis) et ceux du nuage supérieur correspondent aux rayon traversant uniquement du métal. Nous séparons alors les points de mesures en deux groupes suivant la droite dont la pente est la moyenne des valeurs reconstruites du métal. Les points de mesures proches de cette ligne ne sont pas pris en compte pour estimer la courbe polychromatique. Puis nous estimons deux courbes polychromatiques voir la figure 5.3.(b). Nous avons bien sûr utilisés la courbe de la partie supérieure pour effectuer notre correction.

Dans un premier temps, afin d'identifier l'apport de notre approche de correction nous avons reconstruit les données corrigées avec une approche analytique de type FBP (voir figs 5.4 5.5). En comparant les images FBP de la mâchoire 5.4.(a) et 5.4.(b) et également celles du crâne 5.5.(a) et 5.5.(b), nous voyons que les artefacts métalliques d'alignement sont réduits. En effet, la non-linéarité dû au durcissement est partiellement corrigée par



(a) Mâchoire



(b) crâne

Figure 5.3 – Estimation de la courbe polychromatique du métal en fonction de la longueur d'intersection des faisceaux des rayons X avec le métal par ajustement des données de moindres carrés non-linéaire (voir l'eq.3.61).

notre méthode de correction du durcissement. De plus, les autres phénomènes de diffusé et de volume partiel ne sont pas pris en compte ce qui peut expliquer la présence d'artefacts résiduels. Enfin, la correction n'est pas parfaite et peut même introduire de nouveaux artefacts.

Nous comparons aussi ces résultats avec ceux de correction et reconstruction par un algorithme FBP avec l'algorithme NMAR qui est très performant dans ce contexte (voir les figures 5.6 et 5.8). On observe que la plupart des artefacts métalliques sont éliminés par l'approche NMAR, par contre la qualité des images issues de notre approche est moins bonne, il reste des certaines stries noires et blanches voir les figures 5.6 et 5.8. On remarque aussi que l'approche NMAR introduit de nouvel artefact ce qui est clairement visible sur le profil p1 (voir la figure de la mâchoire 5.7). De plus il fait disparaître certaines

V.3.1 - Méthode de réduction d'artefacts métalliques basée sur la correction du durcissement

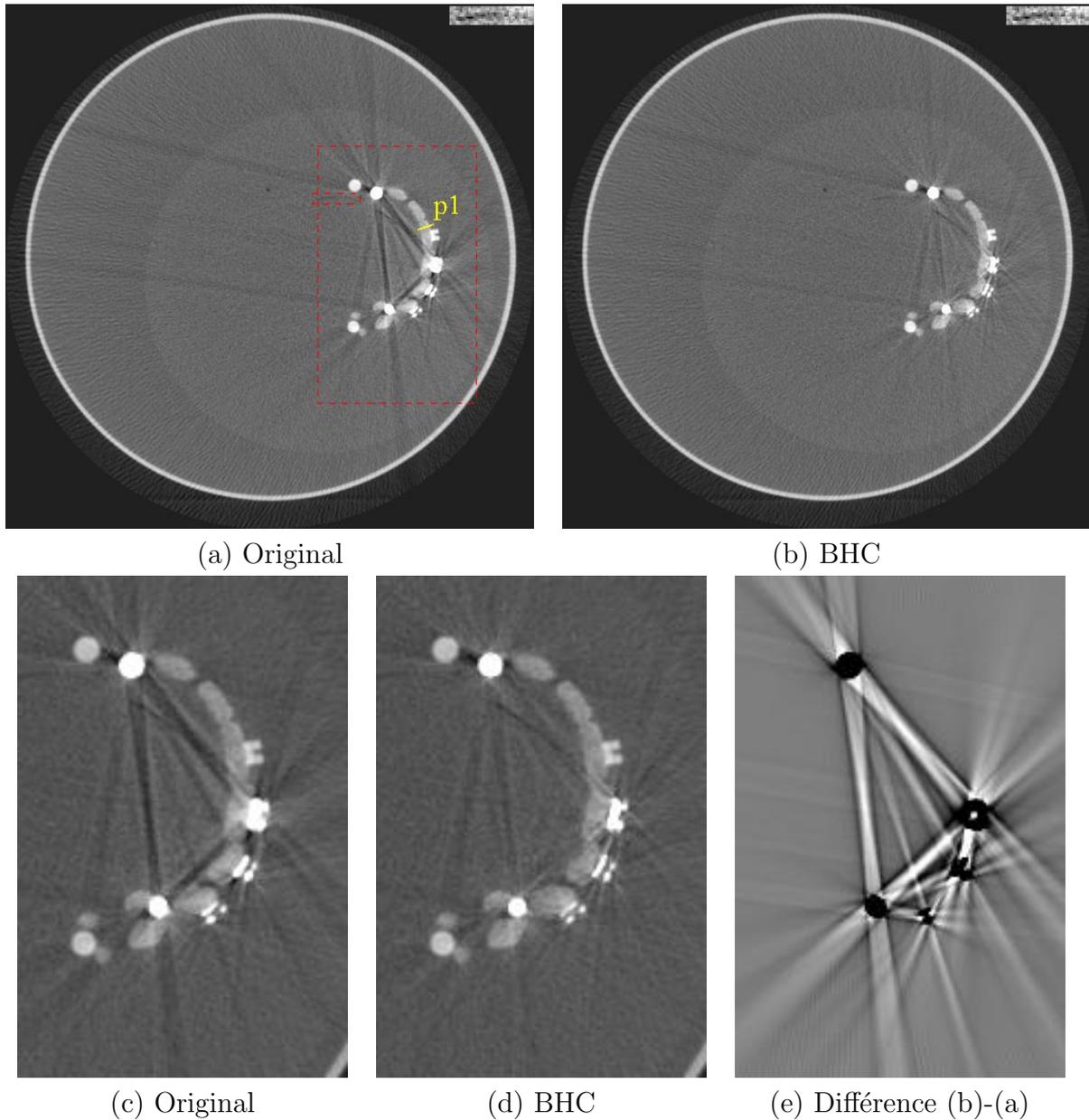


Figure 5.4 – Images reconstruites par FBP à partir des données originales (a) et celles de correction du durcissement (b) et leurs différence (c). Les zooms (voir la rectangle virtuel rouge (a)) des images sur la première ligne sont présentées sur la deuxième ligne. La fenêtre d’affichage de (a) et (b) est le $[-0,01 \ 0,07]$ et celle de (c) est le $[-0,01 \ 0,01]$.

structures fines comme la petite fissure (voir les coins droits en haut des images de la mâchoire 5.4.(a) et 5.6.(a) et .(b).). L’approche NMAR permet de tenir compte de tous les phénomènes physique, comme elle remplace les projections, par contre l’interpolation peut introduire de nouveaux artefacts et peut limiter la résolution de certaines structures de l’image proches des zones métalliques. Nous faisons le même type d’observation sur le bord maxillaire dans l’image du crâne 5.8.(c) et .(d). Ce type de défaut n’est pas présent dans notre approche mais le niveau d’artefacts est plus important dans notre approche. Dans notre approche, les stries noires et blanches restants dans l’image de BHC sont dus aux erreurs de correction importantes et la discontinuité des données corrigées. Comme

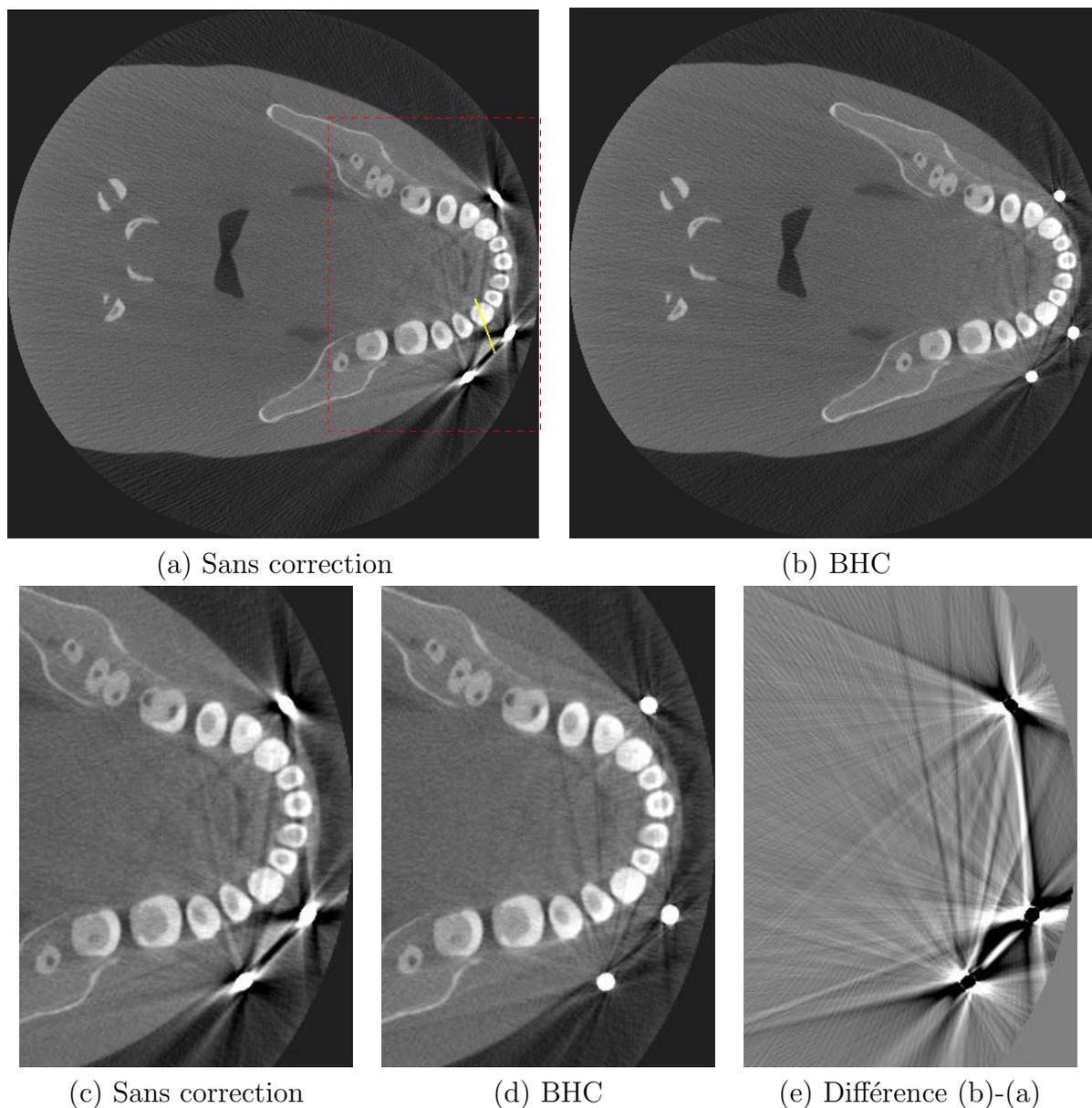


Figure 5.5 – Images du crâne reconstruites par FBP à partir des données originales (a) et celles avec correction du durcissement (b) et leurs différence (c). Les zooms (voir le rectangle virtuel rouge (a)) des images sur la première ligne sont présentées sur la deuxième ligne. La fenêtre d’affichage de (a) et (b) est le $[-0,01 \ 0,07]$ et celle de (c) est le $[-0,02 \ 0,02]$.

il y a des erreurs de correction du durcissement et que nous savons que ces erreurs sont souvent dues à des erreurs de segmentation, nous avons pris en compte ces informations au travers d’une matrice de pondération décrite dans la partie III.4.5.1 Chapitre III. Cette matrice permet de réduire le poids des données qui ont été corrigées, de plus nous avons attribué une confiance moins forte aux données passant par le bord des objets métalliques. Cette approche permet de réduire les artefacts résiduels voir la figure 5.9.

Nous présentons dans la suite les résultats de reconstruction PWLS sur les données de la mâchoire et du crâne.

V.3.1 - Méthode de réduction d'artefacts métalliques basée sur la correction du durcissement

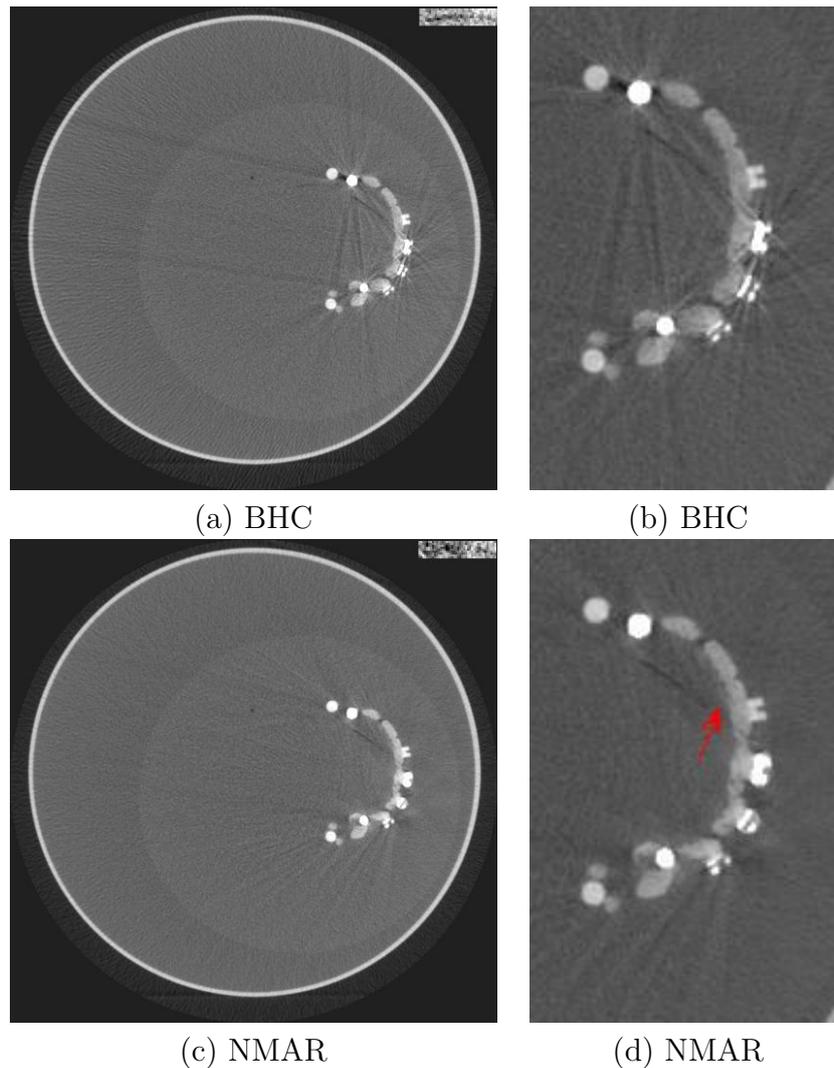


Figure 5.6 – Images de réduction des artefacts métalliques utilisant notre approche de correction (a), utilisant l'approche NMAR (c). Les zooms (voir le grand rectangle virtuel rouge dans la figure 5.4.(a)) des images de la colonne gauche sont présentés dans la colonne droite. Les fenêtres d'affichage de la colonne gauche et droite sont respectivement $[-0,01 \ 0,07]$ et $[-0,01 \ 0,09]$.

V.3.1.2 Reconstruction PWLS

Afin de réduire des stries noires et blanches dans l'image reconstruite par FBP après correction du durcissement du métal voir la figure 5.4, nous prenons en compte les erreurs de correction relativement importantes dans la matrice de pondération. Elle est déterminée par la variance des mesures (voir la figure 5.10.(a)) et les erreurs de pondération (voir l'eq.3.70).

Nous constatons que les erreurs importantes de correction se trouvent principalement sur la frontière entre le métal et les autres matériaux et les endroits les plus atténués. Nous calculons une matrice liée aux erreurs de correction sur les données corrigées de la mâchoire voir la figure 5.10.(b) en utilisant une fonction empirique (voir la figure 3.27) et obtenons ci-dessous la matrice de pondération \mathbf{W} voir la figure 5.10.(c). En comparant

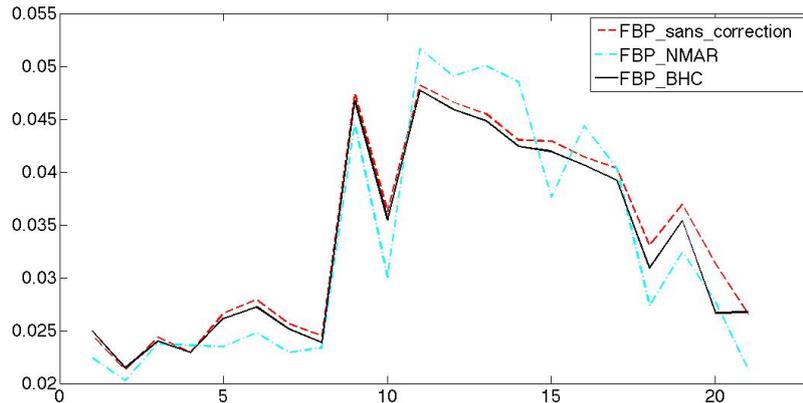


Figure 5.7 – Profil p1 des images reconstruites par FBP précédentes voir les figures 5.4 et 5.6. p1 est indiqué en ligne jaune dans la figure 5.4.(a).

les images de la mâchoire reconstruites par FBP et PWLS voir les figures 5.9.(a)-(d), la méthode PWLS permet de réduire les artefacts métalliques d’alignement car l’influence des projections traversant le métal est minorée par la pondération. Elle peut également lisser le nouvel artefact introduit par NMAR voir les profils sur p1 5.7 et 5.12. Mais elle ne peut pas reconstruire correctement la fine fissure comme FBP car les informations de cette fine fissure sont perdues dues à l’interpolation de NMAR. La reconstruction PWLS des données de correction du durcissement permet d’éliminer les stries noires et blanches restants dans l’image FBP voir la figure 5.6.(a) et .(b).

Dans le cas de la mâchoire, l’approche NMAR réussit à éliminer quasiment tous les artefacts métalliques notamment les taches noires autour du métal, mais il introduit de nouveaux artefacts et fait disparaître certaines structures très fines. Cela peut être gênant pour une application en imagerie médicale notamment pour du diagnostique. Notre méthode MAR basée sur la correction du durcissement permet d’éliminer toutes les artefacts métalliques sauf une tache noire. Par contre elle n’introduit pas de nouveaux artefacts et préserve mieux les structures fines voir 5.11.(e) et .(f). La tache noire restante entre deux petits cercles très proches peut être expliquée par le durcissement des matériaux non métalliques qui n’est pas corrigée dans notre approche ou par la non prise en compte du rayonnement diffusé. Nous exposons dans la suite la méthode MAR permettant de corriger le rayonnement diffusé.

Pour ce qui des images du crâne nous avons comparé les reconstructions en utilisant l’approche PWLS avec la même matrice de pondération pour les données non corrigées, pour les données corrigées avec la méthode NMAR et pour des données corrigées avec notre approche, afin d’avoir une image de référence facilement comparable, nous avons reconstruit le fantôme du crâne sans éléments métalliques auquel nous avons rajoutés artificiellement la segmentation du métal (voir les figures 5.13 (a) et (b)). Nous obtenons sur ce fantôme les mêmes conclusions que sur la mâchoire. L’approche NMAR donne de bon résultats mais introduit de nouveaux artefacts voir la flèche rouge et le bord maxillaire sur la figure 5.13.(f). Notre méthode n’introduit pas ces erreurs mais on observe des taches noires résiduelles.

Nous présentons dans la suite les images de réduction des artefacts métalliques as-

V.3.2 - Méthode de réduction des artefacts métalliques basée sur la correction du rayonnement diffusé

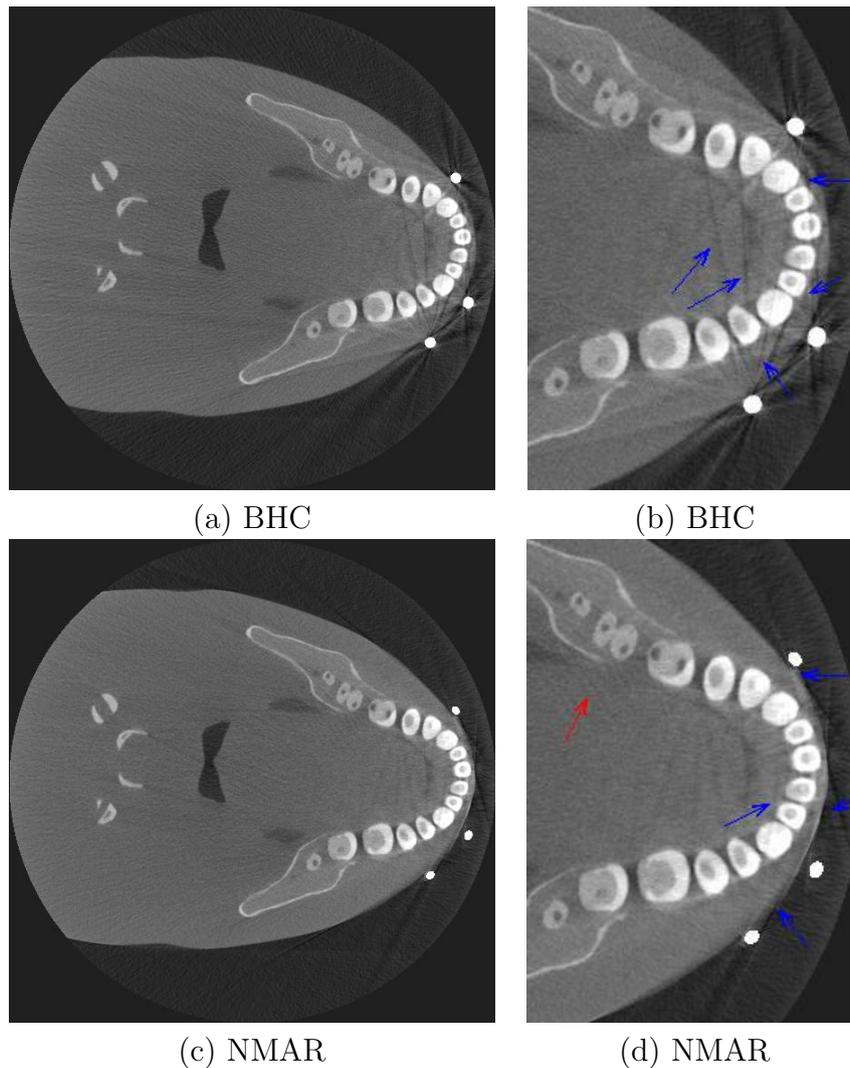


Figure 5.8 – Images du crâne de réduction des artefacts métalliques par BHC proposé (a) et par NMAR (c). Les zooms (voir le grand rectangle virtuel rouge dans la figure 5.5.(a)) des images de la colonne gauche sont présentés dans la colonne droite. Les fenêtres d’affichage de la colonne gauche et droite sont le $[-0,01 \ 0,07]$.

sociées à la correction de rayonnement diffusé ce qui est un de deux facteurs physiques majeurs provoquant des artefacts métalliques.

V.3.2 Méthode de réduction des artefacts métalliques basée sur la correction du rayonnement diffusé

Comme nous l’avons vu dans le chapitre III, nous avons réussi à développer une approche permettant de réduire les artefacts métalliques liés à la présence de rayonnement diffusé. Dans les simulations du chapitre III, nous avons pris en compte uniquement le rayonnement diffusé sans tenir compte de l’effet de durcissement de spectre. Évidemment, ces deux phénomènes sont présents dans les données réelles, nous avons donc un problème supplémentaire à résoudre, c’est de séparer leurs contributions respectives. Ce problème

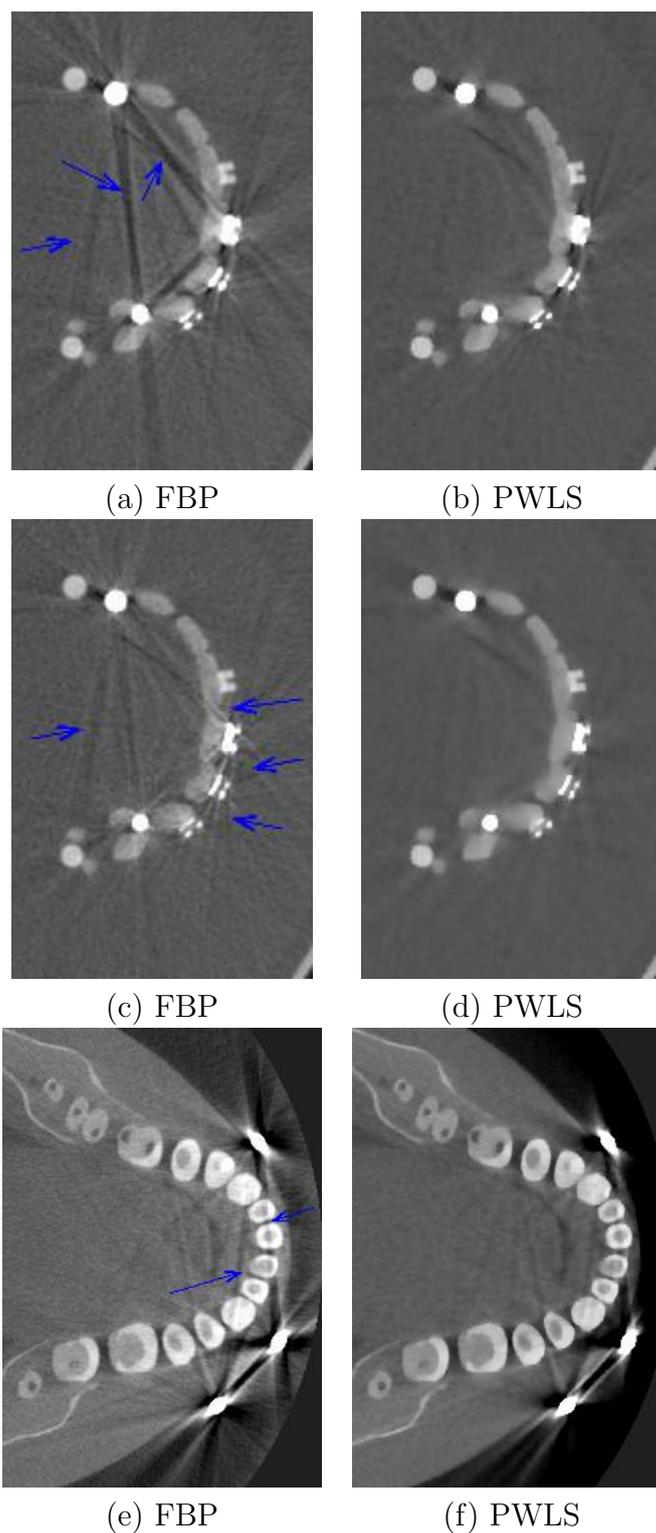


Figure 5.9 – Les zooms des images de la mâchoire reconstruites par FBP et PWLS (voir les figures 5.11.(a) et.(e)) avec les données originales (en haut) et celles de correction du durcissement (en bas). La fenêtre d’affichage de toutes les images est le $[-0,01 \ 0,09]$.

de séparation est très difficile car les deux phénomènes entraînent la même cause, c’est à dire la sous-estimation de l’atténuation.

V.3.2 - Méthode de réduction des artefacts métalliques basée sur la correction du rayonnement diffusé

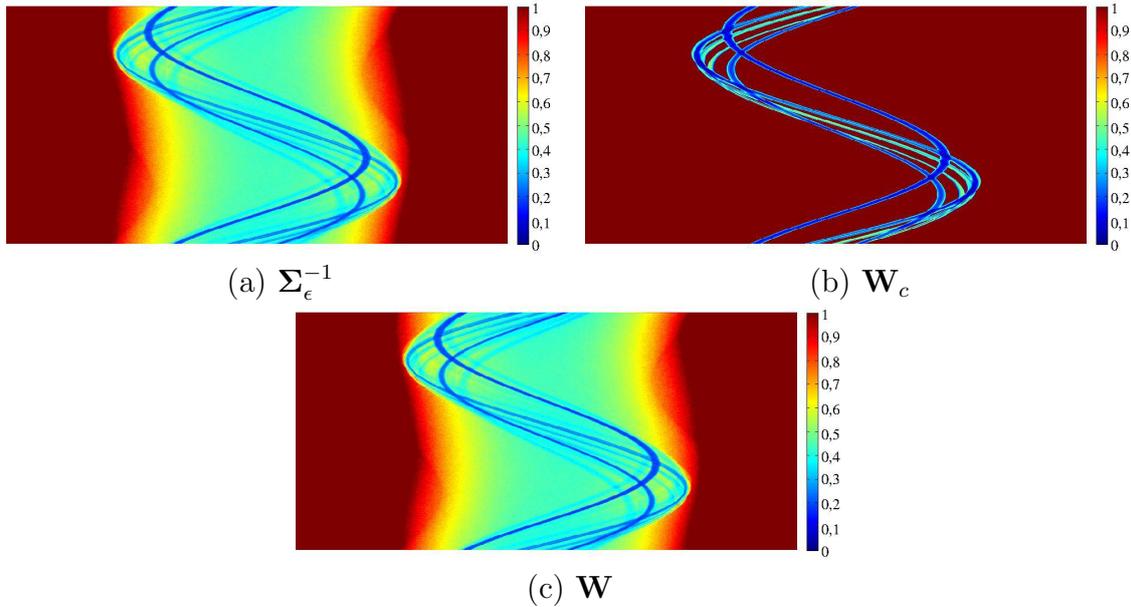


Figure 5.10 – Détermination de la matrice de pondération \mathbf{W} (c) dépendante de la variance des mesures Σ_ϵ^{-1} (a) et les erreurs de correction \mathbf{W}_c (b).

Rappelons que notre approche repose sur l'estimation de rayonnement diffusé à partir des mesures ne passant pas par l'objet et les rayons intégralement stoppés par une atténuation trop forte de l'objet, en particulier lorsqu'il y a des alignements de parties métalliques. Dans un premier temps, nous avons utilisé la procédure suivante pour déterminer quand le niveau de photons détectés est uniquement dû au rayonnement diffusé (c'est à dire que tout le rayonnement direct a été atténué).

1. Reconstruction initiale par la méthode FBP et segmentation du métal \mathbf{B}^{metal} et projection du métal \mathbf{HB}^{metal} .
2. Interpolation linéaire sur la trace du métal pour remplacer les projections du métal.
3. Extraction de la contribution du métal dans les mesures \mathbf{g}^{metal} (voir l'eq.3.59) comme pour la méthode de correction du durcissement.
4. Calcul de la corrélation $corr(\mathbf{g}^{metal}, \mathbf{HB}^{metal})$ entre la contribution du métal \mathbf{g}^{metal} et la longueur parcourue du métal \mathbf{HB}^{metal} sur les mesures ou un très faible nombres de photons X sont détectés.

Lorsque cette corrélation est très faible (proche de zéro), les mesures concernées sont indépendantes de la longueur parcourue dans le métal. Les photons X détectés donc viennent principalement des rayonnements diffusés. Dans ce cas-là, nous appliquons directement notre méthode de correction.

Par contre, dans certains cas, nous avons une corrélation importante entre la longueur de métal traversé et le nombre de photons mesurés. Dans ce cas nous devons séparer les deux types des contributions pour retenir uniquement celles qui proviennent du rayonnement diffusé. Nous avons mis en place une approche heuristique pour essayer de

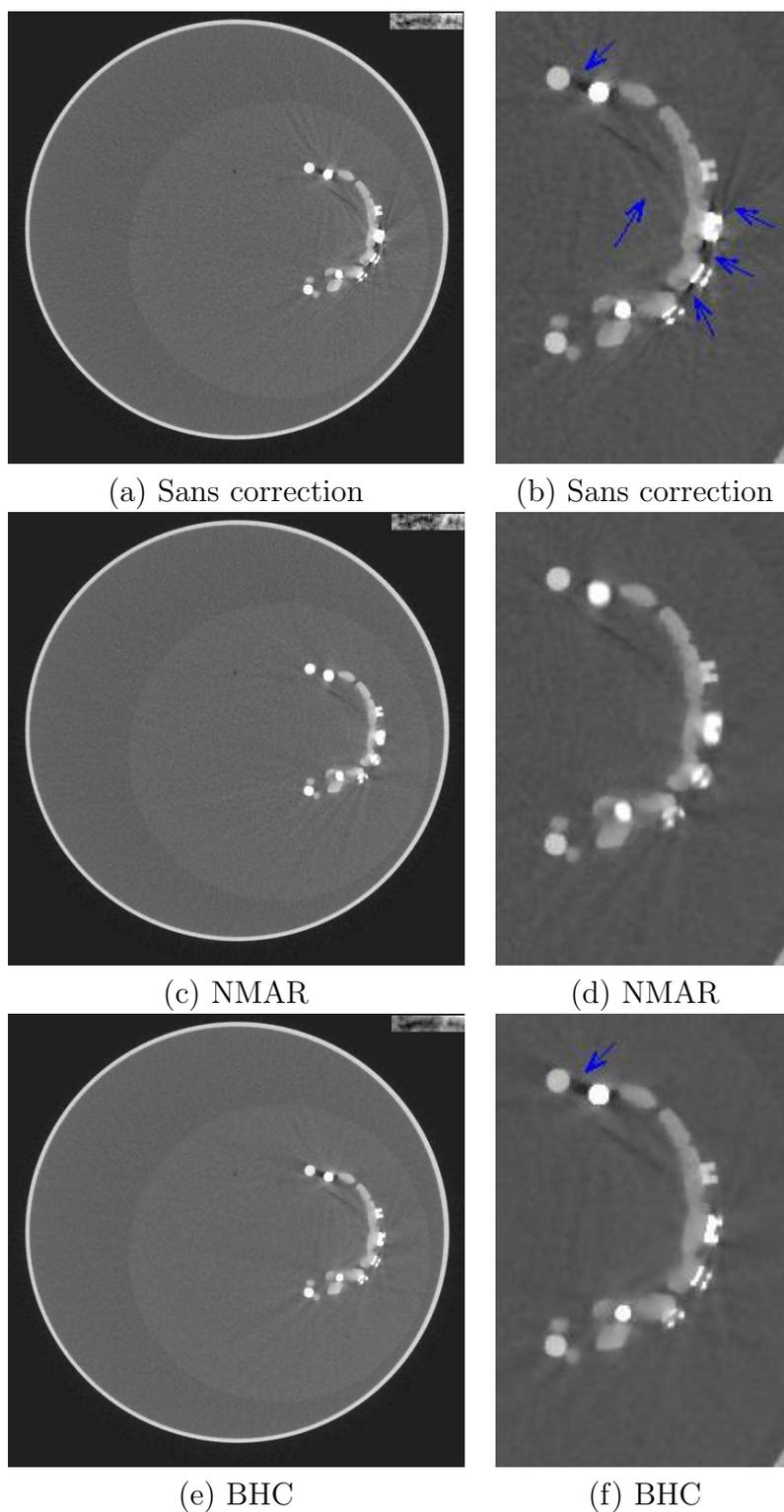


Figure 5.11 – Images de la mâchoire reconstruites par PWLS avec les données originales (a), les données issues de NMAR (c) et les données de correction du durcissement (e). Leurs zooms sont donnés dans la colonne à droite. Les fenêtres d’affichage de la colonne de gauche et la colonne de droite sont respectivement le $[-0,01 \ 0,07]$ et $[-0,01 \ 0,09]$.

résoudre partiellement ce problème extrêmement complexe.

$$\mathbf{y}_d = (1 - \text{corr}(\mathbf{g}^{\text{metal}}, \mathbf{HB}^{\text{metal}})) \cdot \mathbf{y} \quad (5.1)$$

V.3.2 - Méthode de réduction des artefacts métalliques basée sur la correction du rayonnement diffusé

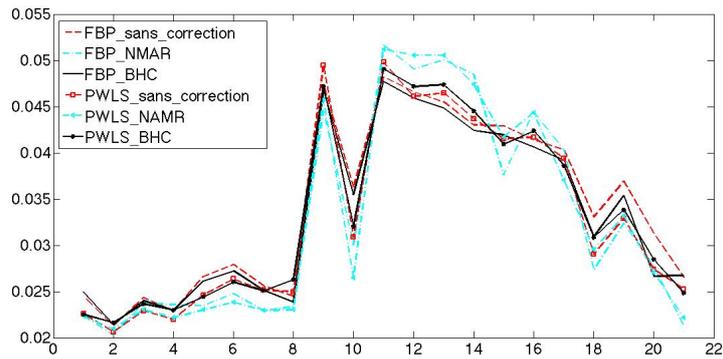


Figure 5.12 – Profil p1 (voir la figure 5.4.(a)) des images de la mâchoire reconstruites par FBP et PWLS avec différentes données.

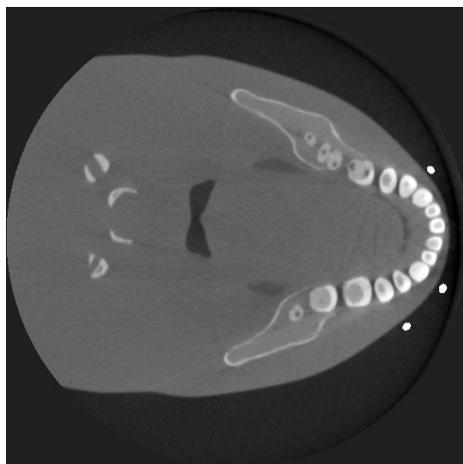
où \mathbf{y} est le vecteur des nombres des photons X détectés par les pixels traités et \mathbf{y}_d représente le vecteur des nombres des photons X diffusés estimés reçus par les pixels traités. L'avantage de cette approche c'est quand il n'y a pas de corrélation, cela revient au cas précédent.

Nous étudions dans la suite deux cas typiques : le crâne avec deux grosses vis en métal, où les rayonnements X sont bloqués dans les trajectoires les plus atténuées et la mâchoire où aucun rayonnement X direct n'est complètement bloqué.

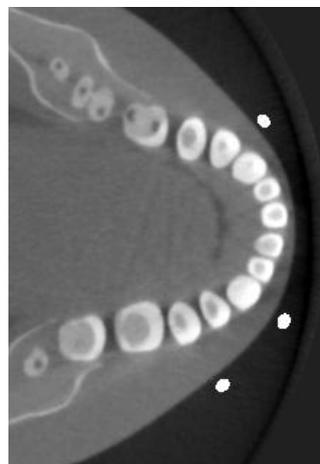
V.3.2.1 Cas de la reconstruction du crâne

Nous collons deux grosses vis métalliques près de la mâchoire du fantôme crâne et diminuons la tension du tube (75 kV valeur de tension du tube inférieure à la valeur nominale de 85 kV) pour que les faisceaux des rayons X soient moins durs et puissent être plus facilement stoppés par le métal. Les données réelles sont acquises avec un scanner du système CS 9300.

Afin de réduire l'influence de durcissement, nous corrigeons d'abord le durcissement dû



(a) Référence



(b) Référence

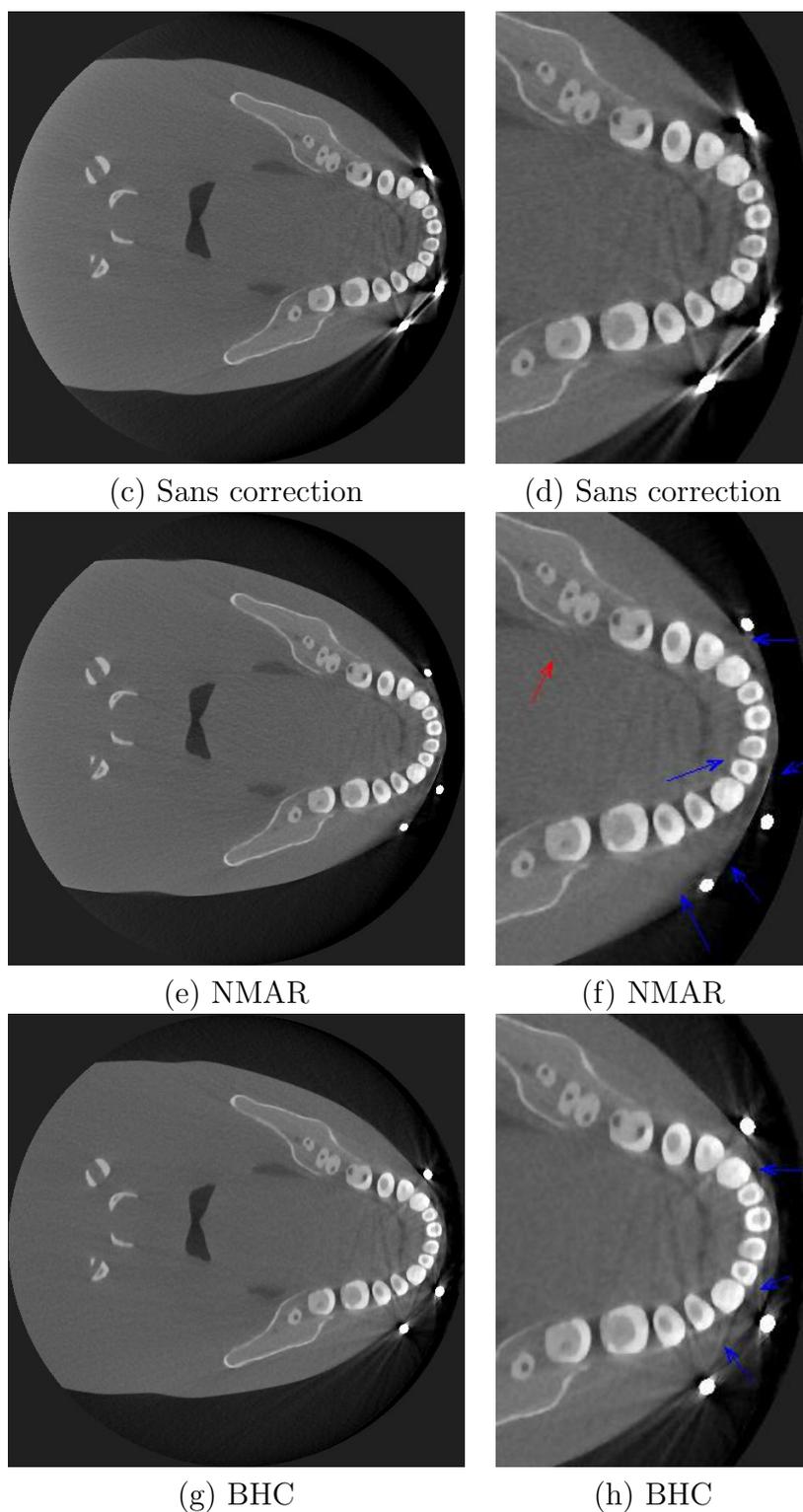


Figure 5.13 – Images du crâne obtenu par PLWS en reconstruisant les données originales (c), les données issues de NMAR (e) et les données corrigées du durcissement par notre approche (g). Les images du crâne de référence sont présentées sur la première ligne. Leurs zooms sont donnés dans la colonne à droite. Les fenêtres d’affichage des colonne gauche et droite sont de $[-0,01 \ 0,07]$.

V.3.2 - Méthode de réduction des artefacts métalliques basée sur la correction du rayonnement diffusé

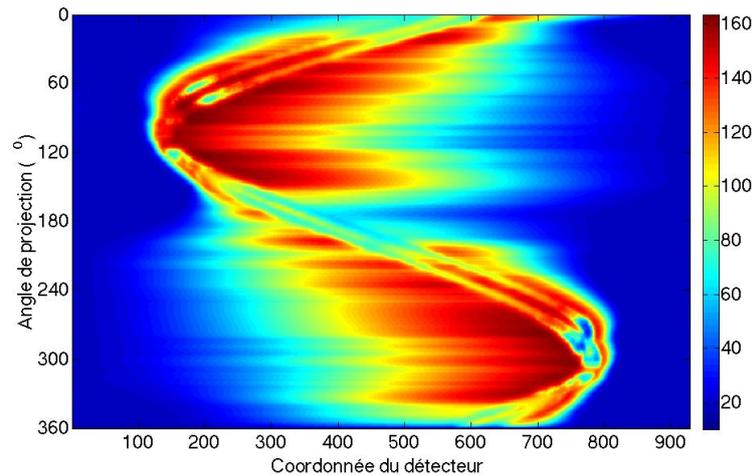


Figure 5.14 – La distribution estimée des photons X diffusés.

au métal en utilisant la méthode de correction précédente car les faisceaux des rayons X sont polychromatiques. Nous appliquons l’approche exposée ci dessus afin d’identifier les points de mesures où le rayonnement direct a été entièrement atténué. Pour cela nous testons que la mesure d’atténuation du métal est décorrélée de la longueur d’intersection des rayons X avec le métal ($corr(\mathbf{g}^{metal}, \mathbf{HB}^{metal}) = 0,01$). Ce test est uniquement effectué lorsque le nombre des photons X reçus par le détecteur est très faible (≤ 200).

De plus, nous estimons le nombre de photons X diffusés sur le bord de détecteur en utilisant l’équation 3.67 où les faisceaux de rayons X n’ont rien traversé. Les flux des rayons X incidents I_0 peuvent être estimés en utilisant une image de blanc (sans objet donc “sans” rayonnement diffusé). Nous déterminons la distribution des rayonnements diffusés en tous points en supposant qu’il est très basse fréquence. Pour se faire, nous utilisons une interpolation cubique morceau par morceau (interpolation “pchip” en Matlab). L’image estimée des photons X diffusés est représentée sur la figure 5.14. En comparant les images reconstruites par FBP sans correction et la correction du durcissement, notre méthode de correction du diffusé permet de réduire partiellement les artefacts métalliques voir la figure 5.15. Notons que cette configuration avec une tension de tube faible amplifie d’autant plus les artefacts métalliques. Il apparaît qu’il y a des stries noires et blanches à cause d’erreurs de correction importantes voir 5.15.(d). Il reste des taches noires qui peuvent être provoquées par le durcissement de spectre non corrigé. En effet, lorsque les rayons X traversent beaucoup de tissus ou beaucoup de dents et os, il y a de durcissement de spectre que nous ne corrigeons pas avec notre approche (correction du durcissement uniquement du au métal) voir la figure 5.15.(b).

Dans la seconde étape de notre méthode MAR, nous reconstruisons les données corrigées des rayonnements diffusés en utilisant la méthode PWLS. Les erreurs de correction sont pris en compte dans la reconstruction PWLS. Le déroulement de la méthode PWLS est le même que celui de notre méthode MAR basée sur la correction du durcissement. Nous montrons alors les images reconstruites PWLS sans correction, avec correction du durcissement et du diffusé et l’approche NMAR. Les stries noires et blanches dans les images FBP sont éliminées dans la reconstruction PWLS voir les figures 5.15.(d) et 5.16.(d).

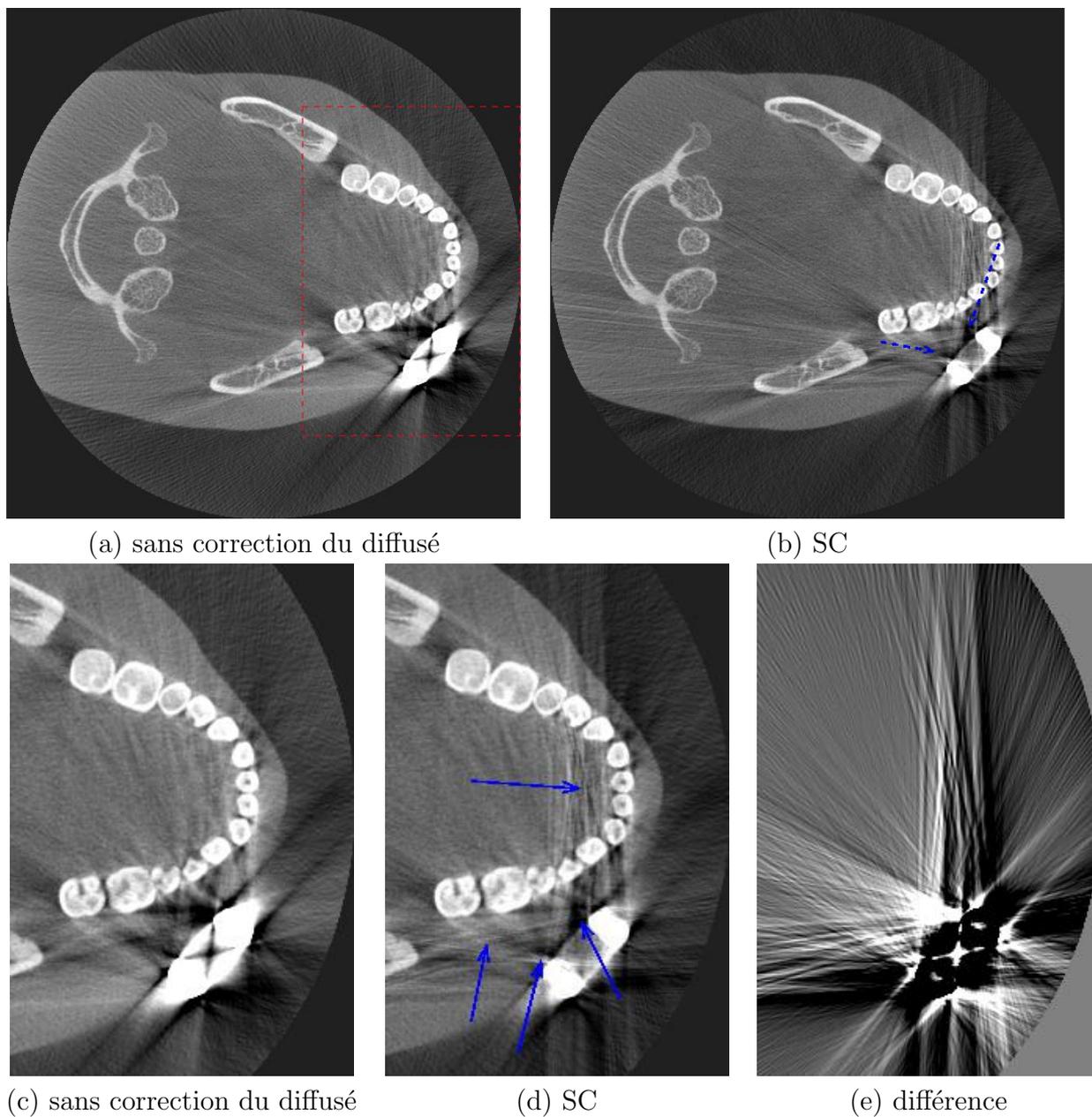


Figure 5.15 – Les images reconstruites par FBP : (a) sans correction, (b) avec correction des rayonnements diffusé (b). Les zooms des images (voir le rectangle rouge (a)) sont donnés sur la deuxième ligne : (e) est la différence entre (c) et (d) ((c)-(d)). La fenêtre d’affichage de toutes les images est $[-0,01 \ 0,07]$.

V.3.2 - Méthode de réduction des artefacts métalliques basée sur la correction du rayonnement diffusé

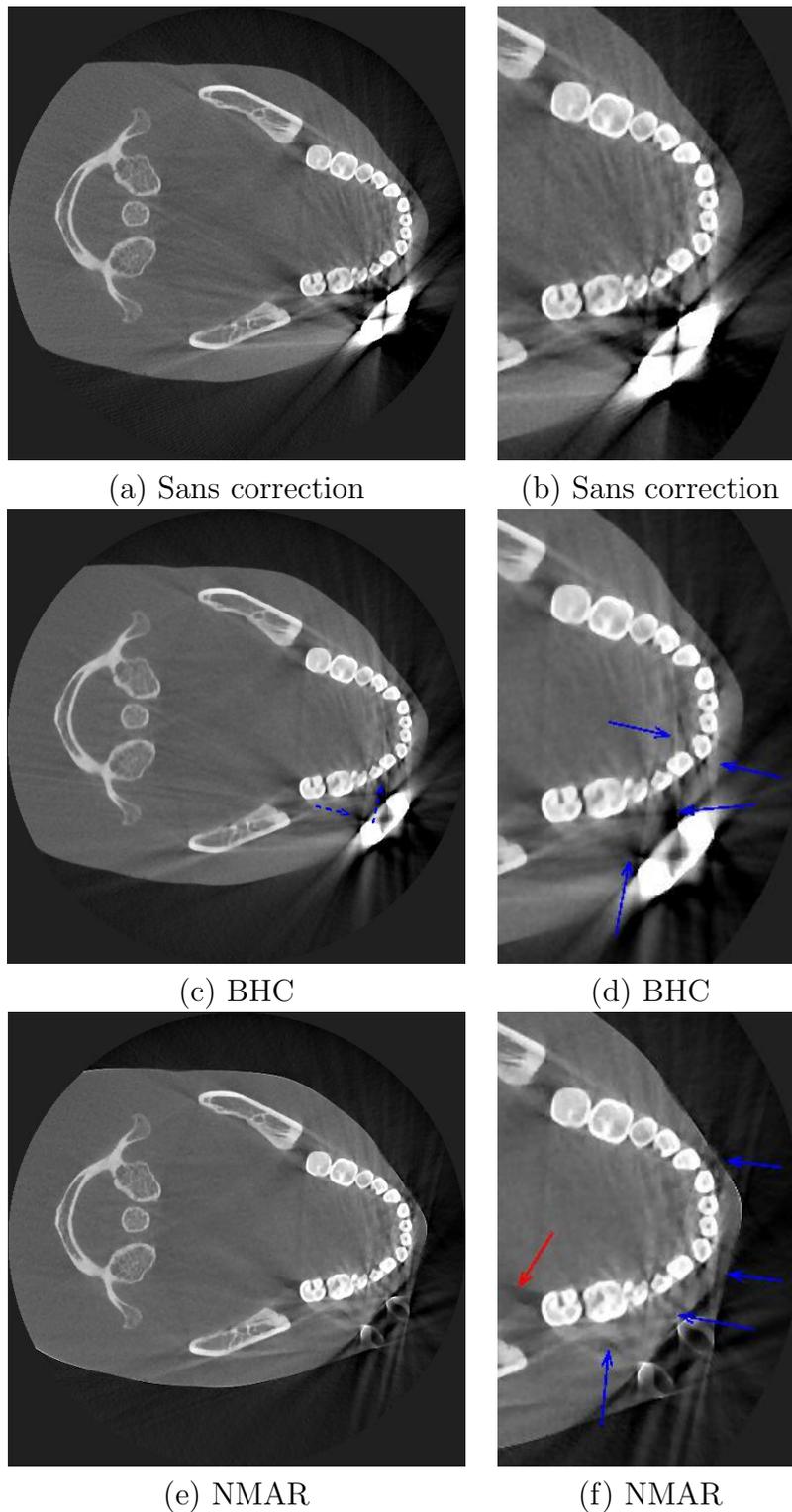


Figure 5.16 – Images du crâne avec deux grosses vis métalliques reconstruites par PWLS avec les données originales (a), celles de correction du durcissement (c) et celles de NMAR (e). Leurs zooms sont donnés dans la colonne de droite.

Les taches noires sont également minimisées dans la reconstruction PWLS. En comparant les images de PWLS avec correction du diffusé et celles de NMAR, le NMAR introduit de

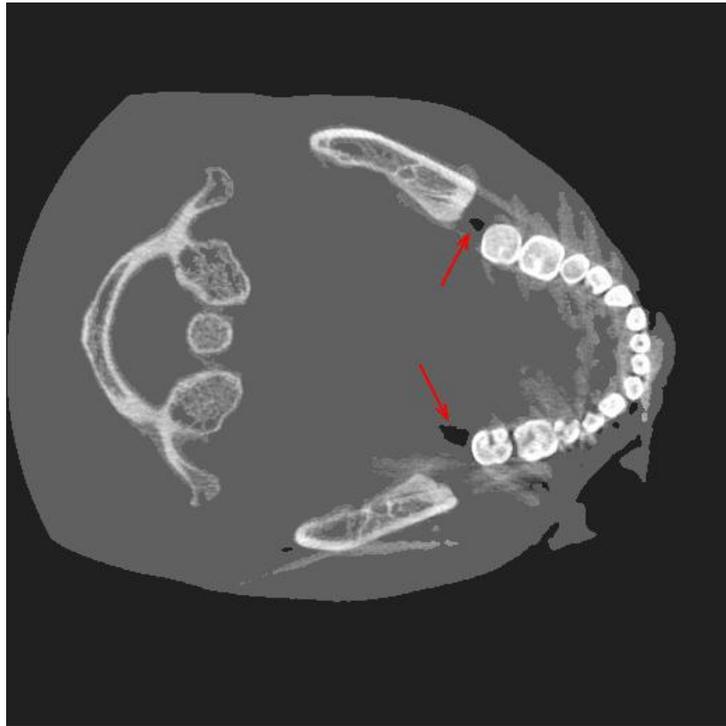


Figure 5.17 – Image *a priori* utilisée dans l’approche NMAR. Il y a des tissus mous qui sont vus comme de l’air cette erreur de segmentation cause des artefacts (voir les flèches rouges.)

nouveaux artefacts (voir la flèche rouge) car elle est sensible aux erreurs de segmentation (voir la figure 5.17) et l’interpolation utilisée perd des informations utiles. Mais notre MAR méthode qui repose sur la correction du diffusé n’entraîne pas ou peu d’artefacts supplémentaires. Par contre, il reste des taches noires près du métal ce qui peuvent être produites par le durcissement des tissus très épais et des dents ou par l’effet de volume partiel non-linéaire. Malgré nos efforts, on peut conclure que notre approche produit des résultats de qualité inférieure à l’approche NMAR. Mais sur un problème très difficile comme celui-ci nous ne sommes plus très loin. Il faudrait mettre en place une stratégie plus robuste de séparation de composantes de durcissement et diffusé. En particulier, on pourrait mettre en place une procédure faiblement itérative qui permettrait de mieux estimer le rayonnement diffusé. Il y a en effet de grande chance que ce rayonnement soit sous estimé car il est partiellement corrigé dans l’étape de correction du durcissement de spectre.

V.3.2.2 Cas de la reconstruction de la mâchoire

Dans ce cas, l’estimation du rayonnement diffusé est très compliqué car le rayonnement direct n’est jamais totalement bloqué. Lorsque le métal présent dans l’objet est de petite taille comme c’est le cas dans la mâchoire, les faisceaux de rayons X ne sont pas complètement bloqués par le métal. Nous nous intéressons actuellement à la robustesse de notre approche lorsque l’hypothèse de “ beam-stop ” n’est jamais satisfaite.

Nous reprenons les données réelles de la mâchoire acquises avec le scanner CS 9300. La

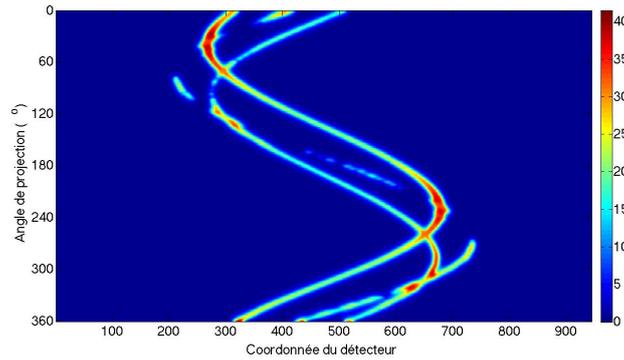


Figure 5.18 – Estimation de la distribution des nombres de rayons X diffusés.

corrélation entre la mesure d’atténuation du métal et la longueur parcourue des rayons X sur le métal est importante ($corr(\mathbf{g}^{metal}, \mathbf{HB}^{metal}) = 0,81$). Nous estimons le nombre de photons X diffusés de manière empirique (voir l’eq.5.1). Nous considérons que le nombre de photons X diffusés estimés sont relatives aux nombres des photons X diffusés autour du métal voir la figure 5.18 et les retranchons aux nombres des photons X trouvés après la correction du durcissement.

Nous comparons dans la suite les images reconstruites FBP sans correction et la correction du diffusé. Les artefacts métalliques d’alignement et la tache noire autour du métal sont réduits grâce à la correction du diffusé voir la figure 5.19.(e). Comme pour les images reconstruites par FBP, les images de la mâchoire reconstruites par PWLS avec correction du diffusé sont légèrement supérieures à celle sans correction de diffusé voir les images 5.20, notamment la tache entre deux cercles (voir la flèche bleue). Nous constatons que le rayonnement diffusé estimé n’est pas très important. Comme la mâchoire est plongé dans un cylindre d’eau et que nous avons un détecteur plan sans grille anti-diffusé, il y a de grande chance que notre estimation du diffusé soit largement sous évaluée. Les raisons de cette sous évaluation sont sans doute qu’une grosse partie du diffusé est corrigé par l’approche de correction du durcissement de spectre. La tache noire entre deux cercles peut être dominée par le durcissement des deux cercles conjointement mais celui du cercle (non métal) n’est pas pris en compte dans notre méthode de correction du durcissement.

V.3.3 Conclusion

Nous avons évalué notre méthode MAR reposant sur la correction du durcissement et du diffusé sur les données réelles de la mâchoire et du crâne. Notre méthode de correction du durcissement permet de réduire les artefacts du au durcissement du métal sans connaissances de spectre de source des rayons X et les CALs des matériaux en fonction de l’énergie des photons X. Elle est très utile lorsque ces connaissances *a priori* ne sont pas disponibles ou très difficiles à avoir de manière précise. Sa limitation importante est non prise en compte du durcissement des autres matériaux qui est souvent négligeable relativement par rapport au celui du métal. Mais dans certain cas, il n’est pas négligeable comme le crâne avec deux grosses vis.

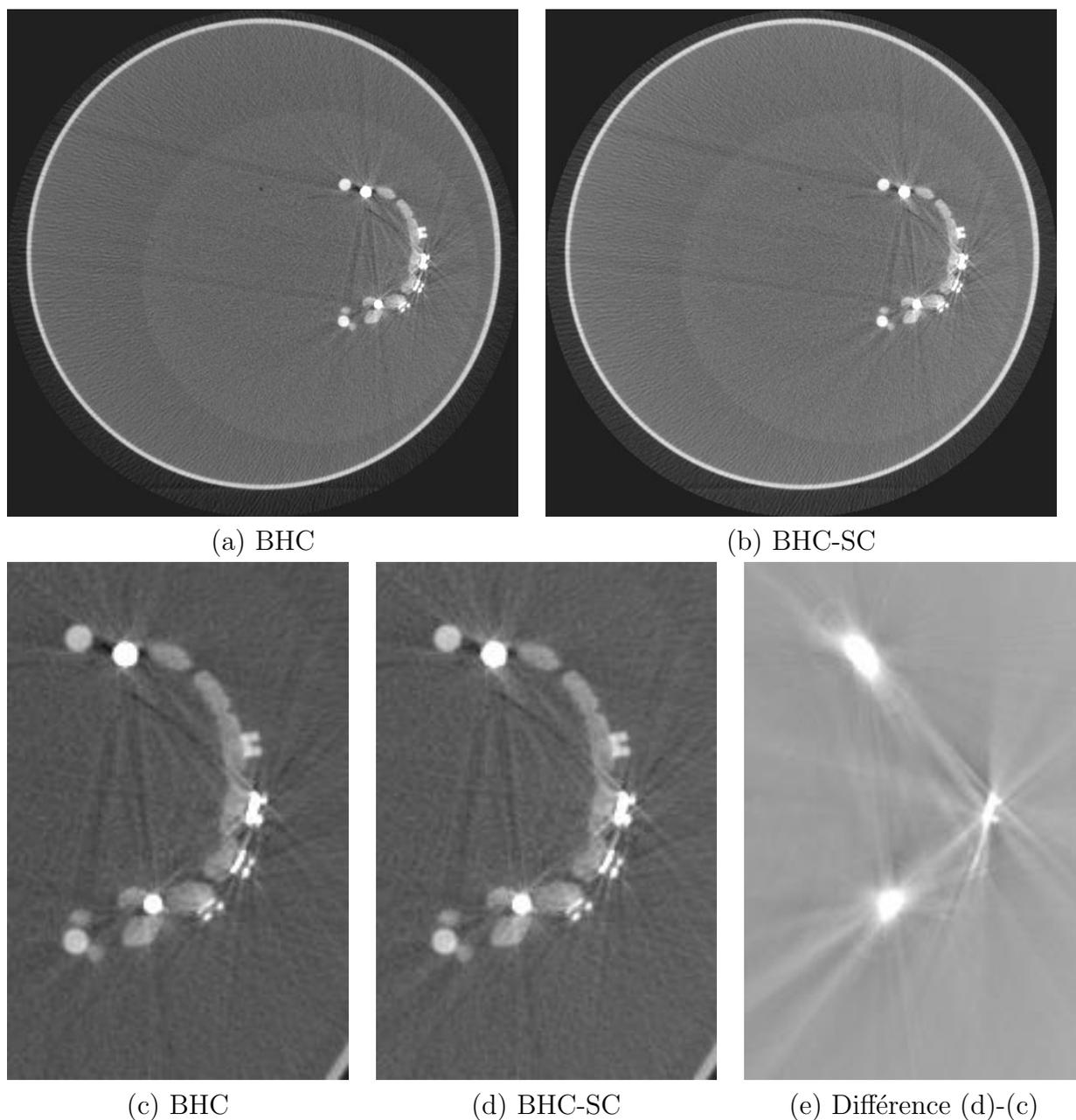


Figure 5.19 – Images reconstruites de la mâchoire par FBP à partir des données de correction du durcissement (a) et celles de correction du durcissement et du diffusé (b). Leurs zooms (voir la rectangle virtuel rouge (a)) sont présentés sur deuxième ligne. (e) est la différence entre les deux zooms (c) et (d). La fenêtre d’affichage de (a) et (b) est le $[-0,01\ 0,07]$, $[-0,01\ 0,09]$ pour (c) et (d) et $[-0,01\ 0,01]$ pour (e).

Notre méthode de correction du diffusé repose sur les mesures des nombres des photons X où le rayonnement direct ne pouvant pas passer à travers le métal. Nous le testons dans le cas du crâne avec deux grosses vis métalliques. Après soustraction des nombres de photons X diffusés, les projections du métal sont très bruitées, ce qui entraînent des stries noires et blanches. Les résultats de notre correction du diffusé ne sont pas spectaculaires comme ceux de notre méthode de correction du durcissement. En plus, Notre hypothèse de “ beam-stop ” n’est pas toujours satisfaite lorsque le métal est de petite taille comme

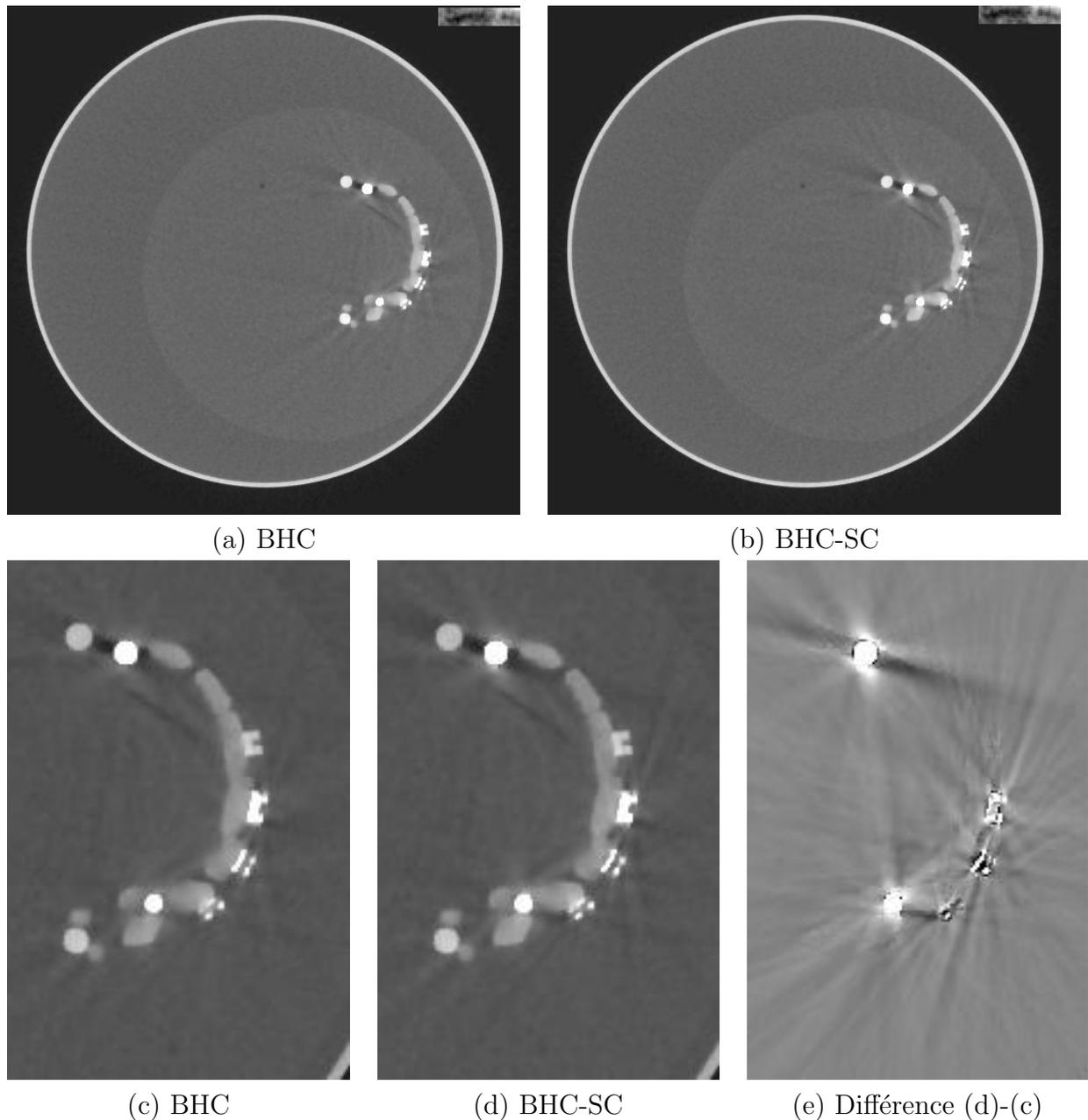


Figure 5.20 – Images reconstruites de la mâchoire par PWLS à partir des données de correction du durcissement (a) et celles de correction du durcissement et du diffusé (b). Leurs zooms (voir la rectangle virtuel rouge 5.19.(a)) sont présentés sur deuxième ligne. (e) est la différence de deux zooms (c) et (d). La fenêtre d’affichage de (a) et (b) est le $[-0,01 \ 0,07]$, $[-0,01 \ 0,09]$ pour (c) et (d) et $[-0,01 \ 0,01]$ pour (e).

l’exemple de la mâchoire. Dans ce cas nous avons proposé une méthode empirique pour estimer le nombre des photons X diffusé, mais qui n’est pas encore très satisfaisante.

De plus, notre méthode PWLS permet de prendre en compte des erreurs de correction ce qui peuvent entraîner des stries noires et blanches et réduire le bruit des images reconstruites. En comparant nos méthodes MAR proposée associées avec le NMAR, l’avantage principal est de ne pas introduire de nouveaux artefacts et sans perte des information

utiles du bord ce qui sont inévitables dans le NMAR.

V.4 Application de l’algorithme super-short-scan dans le cas des acquisitions multiples

Nous avons un scanner avec un détecteur de taille modérée comme le scanner CS 9000. Dans ce cas là, les projections sont tronquées. Pour s’affranchir de ce problème de tomographie local et afin de reconstruire un plus grand champ de vue avec un détecteur de taille modeste, nous faisons des acquisitions multiples suivant trois trajectoires circulaires.

Afin de réduire la dose délivrée au patient, nous avons adapté le mode de super-short-scan [107] et [108] sur les acquisitions multiples et vérifié que la condition suffisante de Noo (voir la condition 2) est satisfaite pour cette trajectoire particulière avec des projections tronquées voir la section IV.2. L’étude des algorithmes de super-short-scan sur deux et trois cercles a été menée sur les données simulées dans la section IV.2 chapitre IV. Nous évaluons ici l’algorithme de super-short-scan sur le fantôme du guide. Nous avons choisi ce fantôme car il ne possède pas de partie métallique provoquant des artefacts métalliques qui font compliquer ce problème.

En pratique, les coordonnées de trois centres de rotation de l’acquisition ne sont pas connus parfaitement. Nous estimons donc les coordonnées des trois centres de rotation avant de faire la reconstruction. Nous proposons une méthode d’estimation de déplacement des centres de rotation appuyant sur la corrélation des données de deux acquisitions [115]. De plus, un outil d’estimation des centres de rotation a aussi été développé chez Carestream Dental. Contrairement à notre approche où l’on compare directement les données, l’approche de Carestream consiste à faire une première reconstruction puis de décaler les images en utilisant la valeur théorique de déplacement, et enfin de déterminer le meilleur décalage subpixellique en maximisant la corrélation. Nous comparons ci-dessous les coordonnées estimées de deux centres de rotation par rapport à celle de l’acquisition centrée (Q_0 voir la figure 5.21) avec notre méthode et avec celles développée par Carestream Dental. Nous voyons dans le tableau que les approches

Coordonnée estimée (en pixel)	Notre méthode [115]	Carestream Dental
Acquisition Q_1		
x1	-100,75	-100,237
x2	-100	-100,777
Acquisition Q_2		
x1	-100,75	-100,811
x2	99,5	99,461

Tableau 5.2 – Les coordonnées relatives estimées de deux centres de rotation par rapport à celle de l’acquisition centrée (Q_0)

bien que très différentes donnent des résultats très similaires ce qui est rassurant sur la justesse des valeurs obtenues. Afin de limiter au maximum les erreurs sur ces paramètres géométrique, nous avons pris la moyenne de ces valeurs pour faire les reconstructions.

D’après l’estimation de configuration géométrique de scanner CS 90000, nous con-

cevons un schéma de super-short-scan qui est similaire au schéma (voir la figure 4.17.(b)) traité dans le chapitre précédent voir la figure 5.21. Les débattements angulaires Π_0 , Π_1

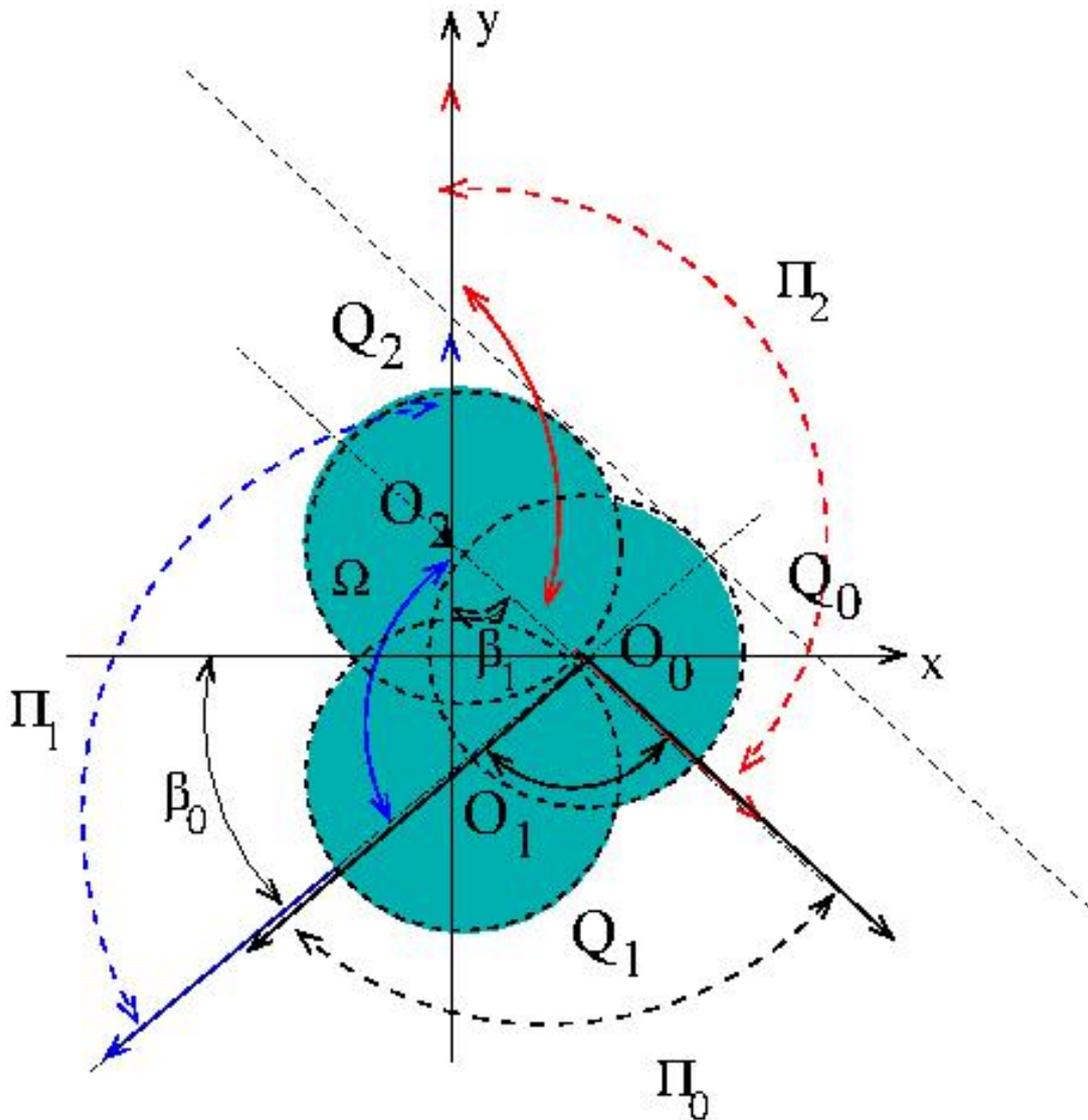


Figure 5.21 – Illustration schématique de notre super-short-scan Π_0 , Π_1 et Π_2 adaptés à la configuration de système de CS 90000. Les trois centres de rotation des acquisitions Q_0 , Q_1 et Q_2 sont respectivement O_0 , O_1 et O_2 . Le domaine d'objet Ω est l'ensemble des trois champ de vue en cyan.

et Π_2 de trois acquisitions Q_0 , Q_1 et Q_2 sont calculés ci-dessous d'après le schéma de la figure 5.21 :

$$\Pi_0 = [3\pi/2 + \beta_1 \quad \pi + \beta_0], \quad (5.2)$$

$$\Pi_1 = [\pi + \beta_0 \quad \pi/2], \quad (5.3)$$

$$\Pi_2 = [\pi/2 \quad -(\pi/2 - \beta_1)], \quad (5.4)$$

avec $\beta_0 = \arcsin \frac{|y_{O_1}|}{|O_0 O_2|}$ et $\beta_1 = \arcsin \frac{|x_{O_0}|}{|O_0 O_1|}$. Le débattement angulaire total est de 2π , nous avons besoin que d'un tiers projection par acquisition.

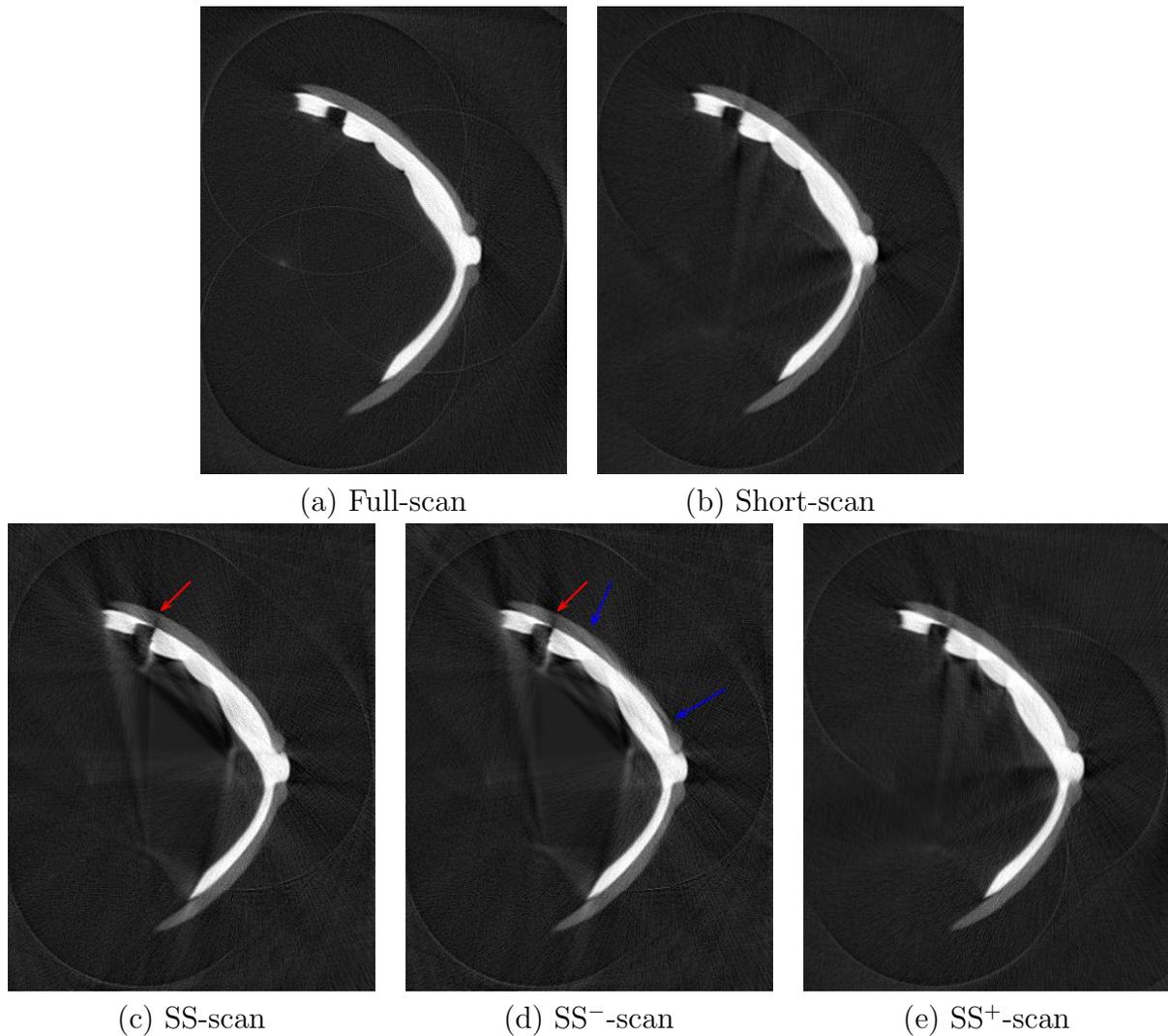


Figure 5.22 – Les images reconstruites du guide par MC à partir de toutes les projections de full-scan (a), de short-scan (b), de super-short-scan (c), de plus court que super-short-scan (d) et de super-short-scan plus des projections supplémentaires (e). Toutes les images sont affichées dans la fenêtre $[-0,01 \ 0,07]$.

Nous comparons à présent les images reconstruites à partir des toutes les projections (3 full scan), les projections de “ short-scan ” et les projections de notre super-short-scan. Nous utilisons simplement la méthode de reconstruction tomographique 3D itérative de moindres carrés car les projections de notre super-short-scan sont suffisantes pour obtenir une reconstruction stable. Nous présentons dans la suite uniquement une coupe horizontale du volume qui est proche du plan médian et qui passe par la source de rayons X. L'image de “ short-scan ” (200 projections par acquisition) a une qualité comparable avec celle de full-scan (360 projections par acquisition). L'image de notre super-short-scan est légèrement dégradée par rapport à celle du “ short-scan ”, mais cette reconstruction nécessite seulement 120 projections en moyenne par acquisition. Le nombre de projections est donc diminué de 40% par rapport au “ short-scan ” et de 66,7% par rapport au “full-scan”. Enfin, nous avons effectué des reconstructions avec quelques projections en moins que le super Short Scan (noté dans la suite “ SS⁻-scan ”), afin d'observer em-

piriquement que la condition de Noo était bien une condition limite. Nous avons aussi fait des reconstructions avec quelques projections en plus (noté dans la suite “SS⁺-scan”). On remarque qu’il y a des artefacts (voir les flèches bleues 5.22.(d)) qui apparaissent lorsque nous réduisons un peu de nombre de projections par rapport au super-short-scan. Cela confirme bien expérimentalement à un petit artefact de sous estimation près que la condition de Noo est bien une condition limite. De même, lorsqu’on compare le super short scan et SS⁺-scan, on s’aperçoit qu’il y a une petite zone (voir la flèche rouge 5.22.(c)) qui est sous-estimée dans l’image de super-short-scan. En fait, la tension et le courant du générateur de rayons X ne sont pas stables entre deux acquisition, il y a donc une fluctuation relativement importante qui peut expliquer ces artefacts.

V.5 Le nouveau mode d’acquisition d’échantillonnage angulaire variant

Dans cette partie, nous n’utiliserons pas de fantômes possédant des parties métalliques. En effet, l’analyse de la qualité de reconstruction est plus délicate dans ce cas et une plus forte redondance dans les données est souvent souhaitable pour réduire l’effet des artefacts métalliques. Nous évaluerons notre approche sur des données du crâne mais sans pièce métallique et sur des données acquises sur un patient.

Nous représentons sur les figures 5.23.(a) et (b) deux images reconstruites par une approche FBP d’une coupe du crâne et du patient à partir des projections complètes full scan. Nous les utilisons ces images comme référence. Nous exposons dans la suite des im-

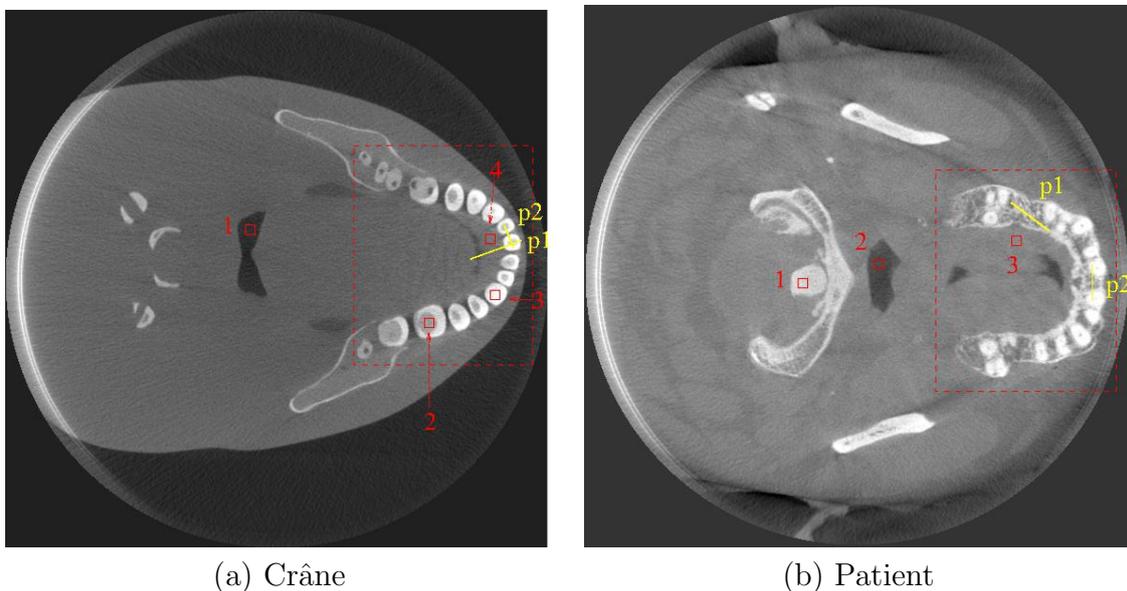


Figure 5.23 – Les images reconstruites par l’approche FBP d’un fantôme crâne (a) et d’un patient (b) à partir des projections complètes. Les rectangles rouges indiquent des zones à mesurer dans la suite et les lignes jaunes décrivent les parcours de profils. Les fenêtres d’affichage de (a) et de (b) sont respectivement $[-0,01 \ 0,07]$ et $[-0,01 \ 0,04]$.

ages reconstruites itérativement de moindres carrés régularisés PLS (acronyme anglais de

Penalized Least-Squares) utilisant des données possédant différents échantillonnages angulaires. Tout d'abord un échantillonnage angulaire uniforme (EAU) et un échantillonnage angulaire variant (EAV) se décrivent dans le chapitre IV partie IV.3.

V.5.1 Reconstruction des données réelles du crâne

En imagerie dentaire, la zone plus intéressante pour les dentistes est celle des dents voir la figure 5.24.(a). Lorsqu'on applique la transformée de Fourier uniquement à l'image des dents, on s'aperçoit que l'énergie des coefficients de Fourier est moins importante autour de l'axe vertical, voir la figure 5.24.(b). Cette zone n'a pas nécessairement besoin du même nombre d'échantillons qu'ailleurs. Nous augmentons donc le pas angulaire d'échantillonnage qui correspond à la zone autour de l'axe vertical dans le domaine de Fourier. De plus, les échantillons des mesures de la zone intéressante sont plus fines lorsque la source des rayons X est plus proche de cette zone (voir la figure 4.25). Nous proposons alors un nouveau mode d'acquisition d'échantillonnage angulaire variant qui est adapté à la zone d'intérêt voir la figure 5.25.

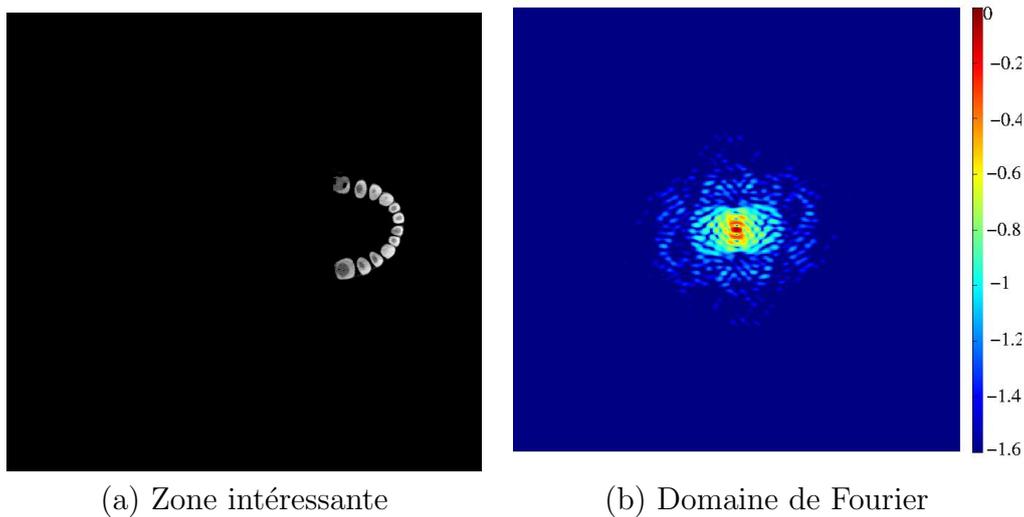


Figure 5.24 – La zone intéressante \mathbf{f} du crâne (voir la figure 5.23.(a)) (a) et le logarithme décimale de l'amplitude normalisée la transformée de Fourier 2D de la zone intéressante $\log_{10}(|\frac{\hat{\mathbf{f}}}{\hat{\mathbf{f}}_{max}}|)$ (b). La fenêtre d'affichage est le $[-1,6 \ 0]$.

Nous avons fait une première expérience où on utilise l'échantillonnage adapté à la scène afin de réduire le nombre de projection tout en gardant une qualité d'image comparable. L'estimation obtenue avec le mode d'acquisition d'échantillonnage angulaire variant est qualitativement identique à l'échantillonnage uniforme (voir les figures 5.26 et 5.27). Nous avons aussi résumé des résultats quantitatifs sur ces reconstructions (voir le tableau 5.3). La qualité des images sont comparables mais notre approche nécessite un échantillonnage angulaire non-uniforme qui utilise 22% de projections de moins que celui uniforme (175 projections contre 225 projections). De plus, la reconstruction de la zone d'intérêt avec 175 projections de EAV est clairement supérieure à celle avec 225 projections de EAU selon les profils p1 et p2 voir la figure 5.28 car il y a plus de projections de EAV lors de la source des rayons X proche à la zone intéressante que celles de EAU.

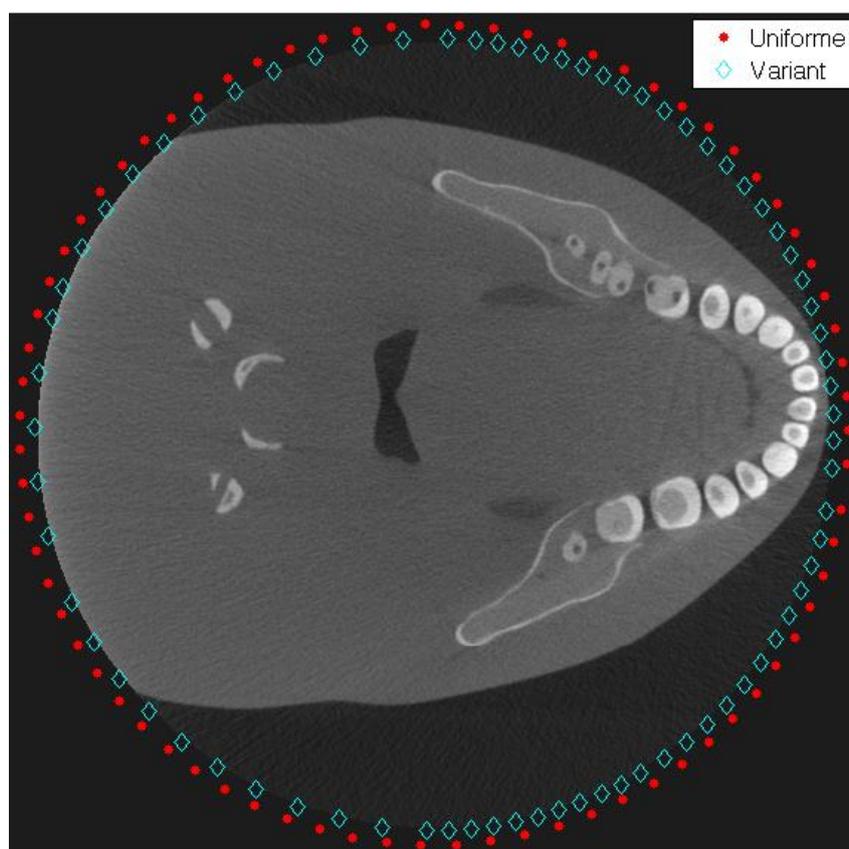


Figure 5.25 – Illustration schématique des modes d’acquisition d’échantillonnage angulaire uniforme (en points) et d’échantillonnage angulaire variant (en losange). Le mode de EAV est adapté à la zone intéressante dans la figure 5.24.(a).

Tableau 5.3 – Les moyennes et écart-types calculés des images reconstruites avec les différents modes d’acquisition dans les zones de mesure (voir la figure 5.23.(a))

Reconstruction/mode	Moyenne/écart-type (mm^{-1})			
	1	2	3	4
FBP/full-scan	0,0052/0,0015	0,0388/0,0022	0,0657/0,0041	0,0260/0,0017
PLS/EAU_225P	0,0051/0,0008	0,0348/0,0015	0,0585/0,0028	0,0206/0,001
PLS/EAV_175P	0,0048/0,0010	0,0355/0,0018	0,0599/0,0035	0,0227/0,001
PLS/EAU_75P	0,0050/0,0015	0,0347/0,0010	0,0565/0,0045	0,0207/0,0007
PLS/EAV_75P	0,0046/0,0005	0,0352/0,0005	0,0583/0,0037	0,0211/0,0017

Dans le cas d’un faible nombre des projections, par exemple lorsqu’on veut reconstruire uniquement avec 75 projections, soit un cinquième des projections de l’acquisition full-scan (450 projections), le mode d’acquisition EAV permet une meilleure résolution de la zone intéressante que le mode d’acquisition EAU voir les images 5.29 et 5.30. Les structures des dents sont plus nettes avec EAV que celles reconstruites avec EAU (voir les flèches virtuelles rouges) voir les figures 5.30.(a) et .(b). Ce résultat est plus clairement visible sur les profils p1 et p2 de la figure 5.31.

Intéressons maintenant à des critères plus quantitatif. Nous avons comparé les moyennes et l’écart-type des valeurs reconstruites de CAL des rectangles 1-4 (voir la

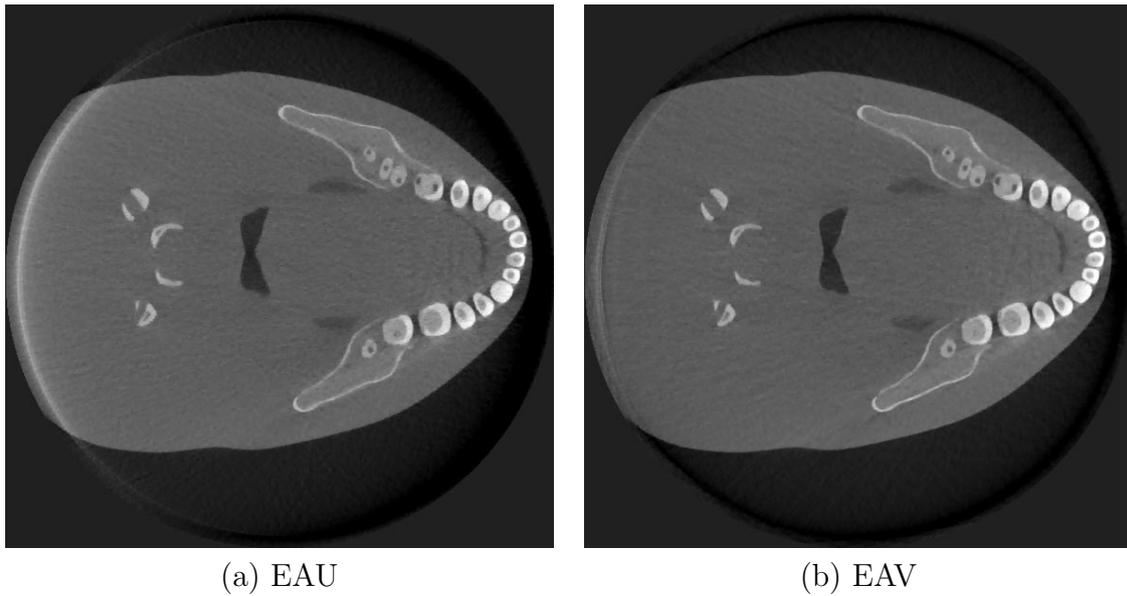


Figure 5.26 – Les images reconstruites itérativement en minimisant un critère des moindres carrés avec la régularisation Huber à partir de 225 projections de EAU (a) et 175 projections de EAV (b). La fenêtre d'affichage est $[-0,01 \ 0,07]$.

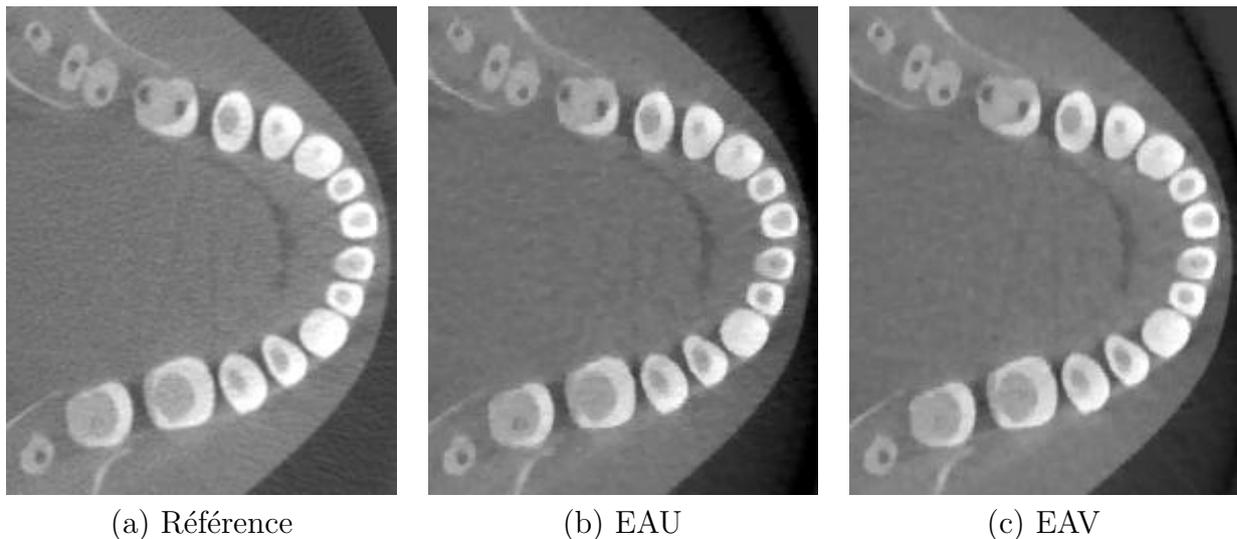
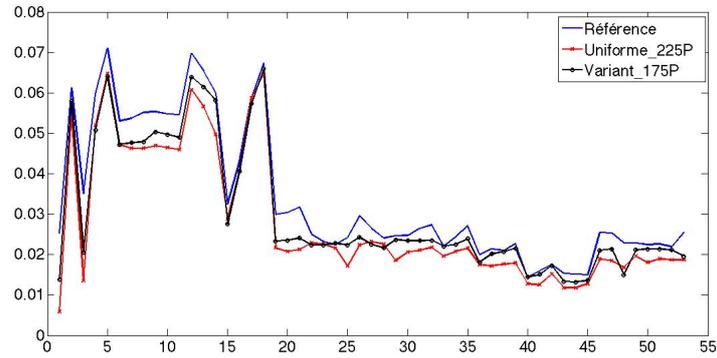
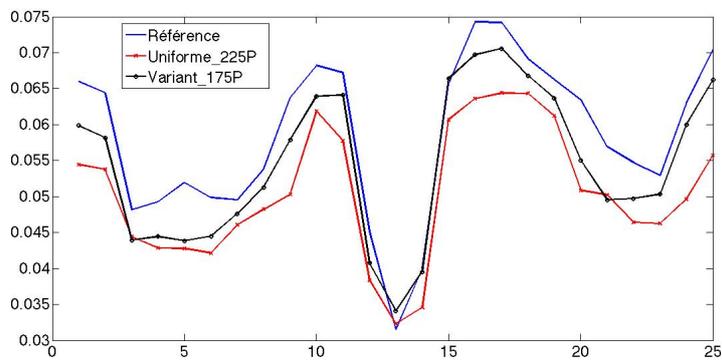


Figure 5.27 – Les zooms (voir la rectangle virtuel rouge dans la figure 5.23.(a)) d'image reconstruite par FBP avec les projections complètes (a) et des images PLS de 5.26.(a) et .(b) respective (b) et (c). La fenêtre d'affichage est $[-0,02 \ 0,07]$.

figure 5.23.(a)). Ces résultats sont rassemblés dans le tableau 5.3. On observe que les résultats de la zone homogène 1 avec l'EAV sont moins bons que ceux obtenus avec l'EAU. Mais cette première zone n'est pas dans une zone d'intérêt, de plus faibles performances n'ont pas d'impact sur le diagnostic clinique. Par contre on observe dans les zones 2-4 qui appartiennent au zone d'intérêt du thérapeute que les résultats de l'EAV sont systématiquement meilleurs que ceux obtenus avec l'EAU. C'est logique car nous redistribuons plus de projections ce qui favorise la reconstruction de la zone intéressante et

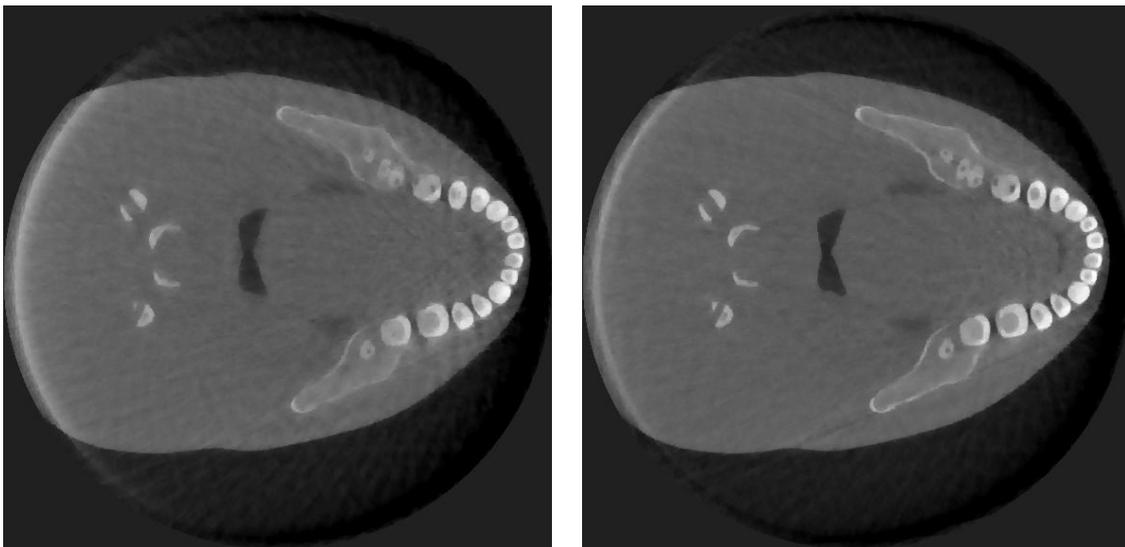


(a) Profil p1



(b) Profil p2

Figure 5.28 – Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.27.(a)-(c). les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(a).



(a) EAU

(b) EAV

Figure 5.29 – Les images reconstruites itérativement par PLS à partir de 75 projections de EAU (a) et de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,01 \ 0,07]$.

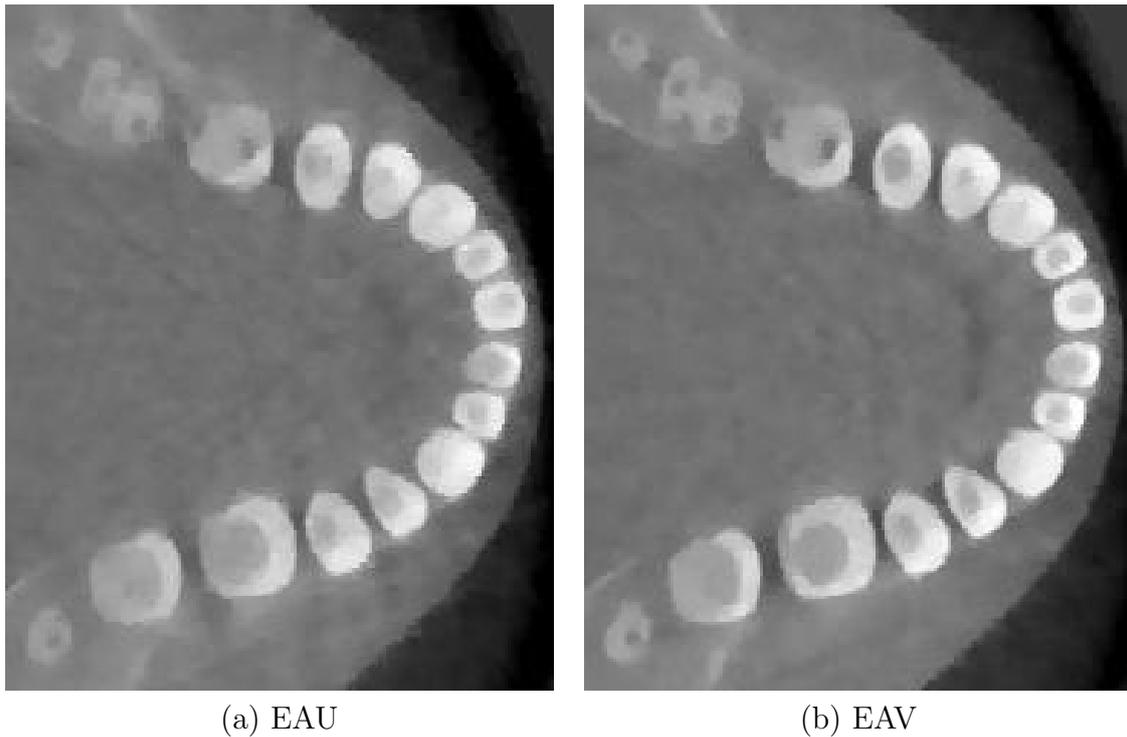


Figure 5.30 – Les zooms des images reconstruites itérativement par PLS à partir de 75 projections de EAU (a) et de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,02 \ 0,07]$.

contrairement moins de projections lors de la source des rayons plus proche de la zone homogène ou moins intéressante.

Le mode d'acquisition proposé d'échantillonnage angulaire variant est maintenant validé sur les données réelles du fantôme crâne. Nous l'évaluons dans la suite sur les données cliniques d'un patient.

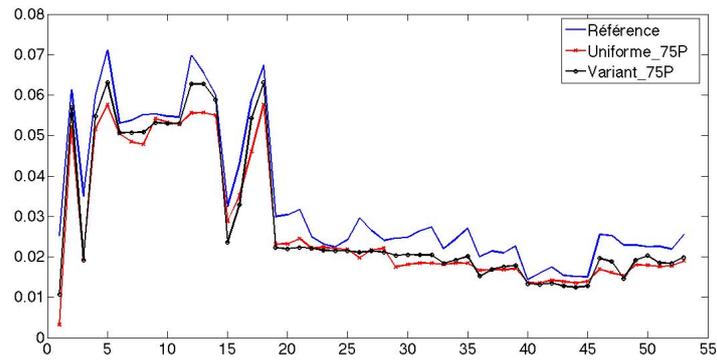
V.5.2 Reconstruction des données réelles du patient

Les données cliniques du patient sont acquises avec le même système de CS9300.

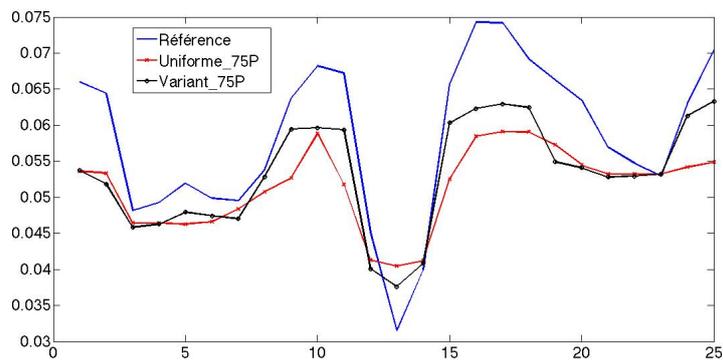
Comme dans le cas précédent, nous définissons une zone plus intéressante voir la figure 5.33. Nous prenons la transformée de Fourier afin d'identifier des coefficients de Fourier plus faible dans certaine direction. Comme dans le cas précédent, on remarque une énergie plus faible des coefficients qui sont proches de l'axe vertical voir la figure 5.24.(b) voir la figure 5.33.(b). Afin de réduire le nombre de projections en limitant la perte de qualité d'image, nous concevons alors un schéma d'échantillonnage angulaire variant similaire à la figure 4.27 voir la figure 5.25.

Dans un premier temps, nous voulons savoir que nous pouvons reconstruire en utilisant le mode d'acquisition de l'EAV avec moins de projections que celui de l'EAU tout en conservant une qualité d'image similaire. Nous reconstruisons respectivement dans la suite une coupe du patient avec 225 projections (moitié des projections de full-scan) avec l'EAU et avec 171 projections en utilisant l'EAV. Il y a pas de différence visuelle entre l'image reconstruite itérativement PLS avec 225 projections de EAU et celle avec 171

V.5.2 - Reconstruction des données réelles du patient

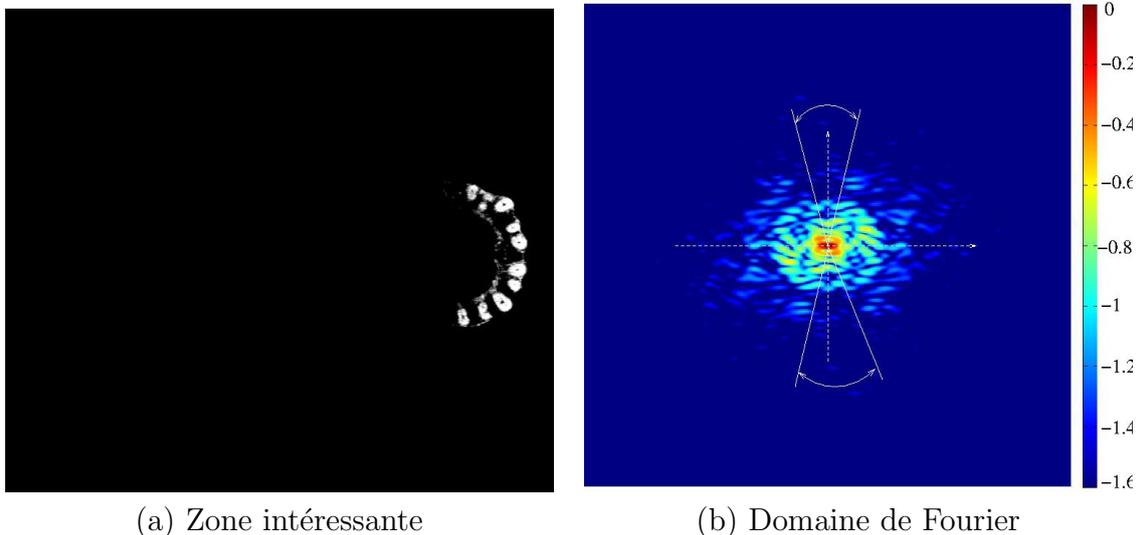


(a) Profil p1



(b) Profil p2

Figure 5.31 – Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.30.(a) et .(c). les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(a).



(a) Zone intéressante

(b) Domaine de Fourier

Figure 5.32 – La zone intéressante f d'une coupe du patient (voir la figure 5.23.(b)) (a) et le logarithme décimale de l'amplitude normalisée la transformée de Fourier 2D de la zone intéressante $\log_{10}(|\frac{\hat{f}}{\hat{f}_{max}}|)$ (b). La fenêtre d'affichage est le $[-1,6 \ 0]$.

projections de EAV. Plus précisément, les moyennes et écart-types des trois rectangles (voir la figure 5.23.(b)) de deux images sont proches d'un à l'autre (voir le tableau 5.4) et les profils p1 et p2 de deux images sont aussi similaires (voir la figure 5.35).

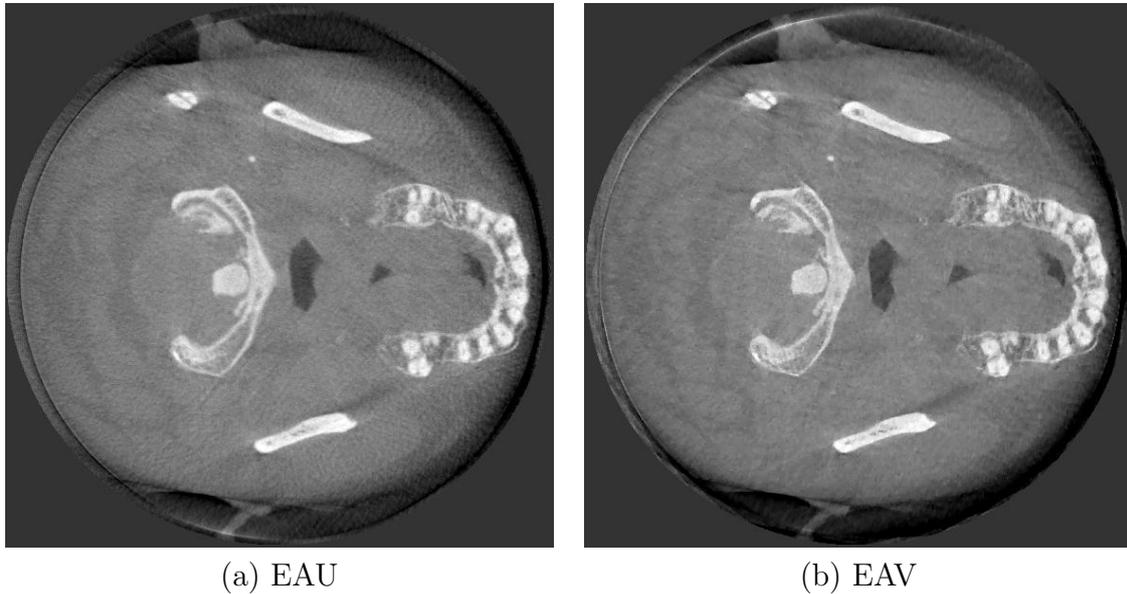


Figure 5.33 – Les images reconstruites itérativement d'une coupe du patient par moindres carrés avec régularisation Huber PLS à partir de 225 projections de EAU (a) et 171 projections de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,01 \ 0,04]$.

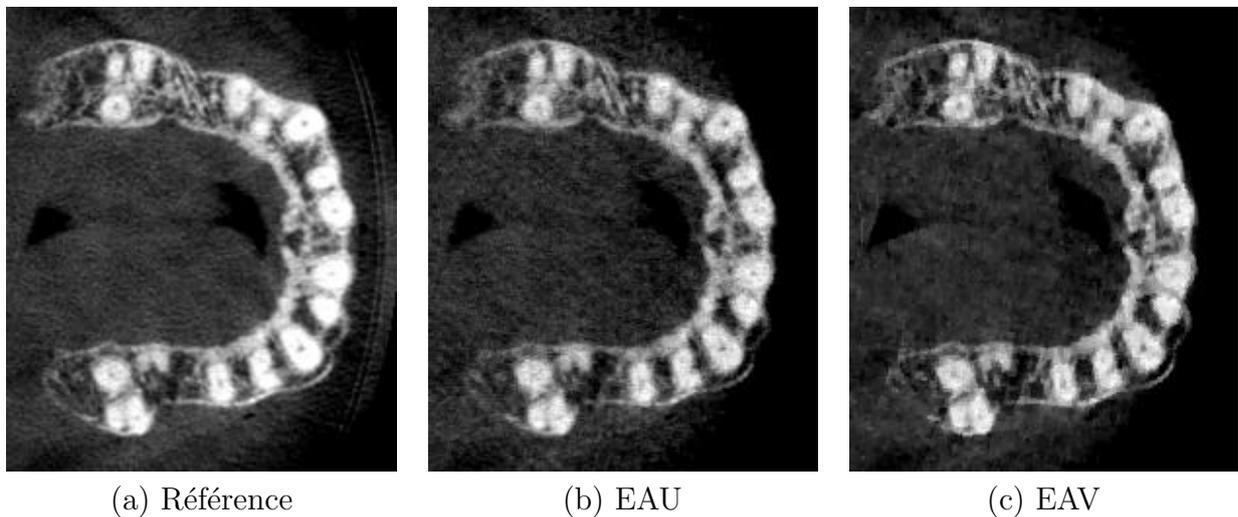
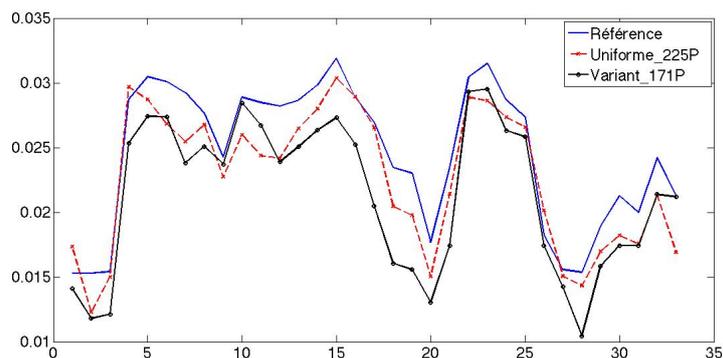


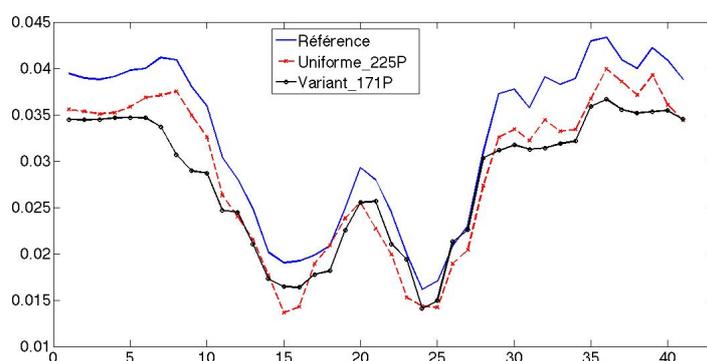
Figure 5.34 – Les zooms (voir le rectangle virtuel rouge dans la figure 5.23.(b)) d'image reconstruite par FBP avec la totalité des projections (a) et des images PLS de 5.33.(a) et .(b) respective (b) et (c). La fenêtre d'affichage est le $[0,01 \ 0,04]$.

Dans un deuxième temps, nous testons le mode d'acquisition dans un cas où on réduit fortement le nombre des projections. Nous utilisons seulement 150 projections soit un tiers des projections du full-scan. L'image reconstruite itérativement avec les projections de

V.5.2 - Reconstruction des données réelles du patient



(a) Profil p1



(b) Profil p2

Figure 5.35 – Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.34.(a)-(c). les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(b).

Tableau 5.4 – Les moyennes et écart-types calculés des images reconstruites d'une coupe du patient avec les différentes modes d'acquisition dans les zones de mesure (voir la figure 5.23.(b))

Reconstruction/mode	Moyenne/écart-type (mm^{-1})		
	1	2	3
FBP/full-scan	0,031/0,0016	0,0051/0,001	0,0167/0,0011
PLS/EAV_225P	0,0308/0,0017	0,0051/0,0012	0,0151/0,0015
PLS/EAV_171P	0,0305/0,0015	0,0046/0,0009	0,0153/0,0011
PLS/EAV_150P	0,0308/0,0014	0,005/0,0010	0,0149/0,0013
PLS/EAV_150P	0,0306/0,0019	0,005/0,0015	0,0151/0,0017

l'EAV (voir la figure 5.36.(b)) est généralement plus nette que celle utilisant l'EAU (voir la figure 5.36.(a)). Cette observation est plus clairement visible sur les zooms respectifs 5.37.(c) et 5.37.(b).

Lorsque nous traçons les profils p1 et p2, ceux de EAV suivent mieux ceux de référence (reconstruction FBP avec les projections totales) en terme de la variété que ceux de EAU notamment entre 25 et 30 de profile p1 (voir la figure 5.38.(a)) et entre 20 et 30 de profile p2 (voir la figure 5.38.(b)). L'image de EAV est plus nette que celle de EAU. Nous conservons donc plus de hautes fréquences qui sont très informatives pour les dentistes.

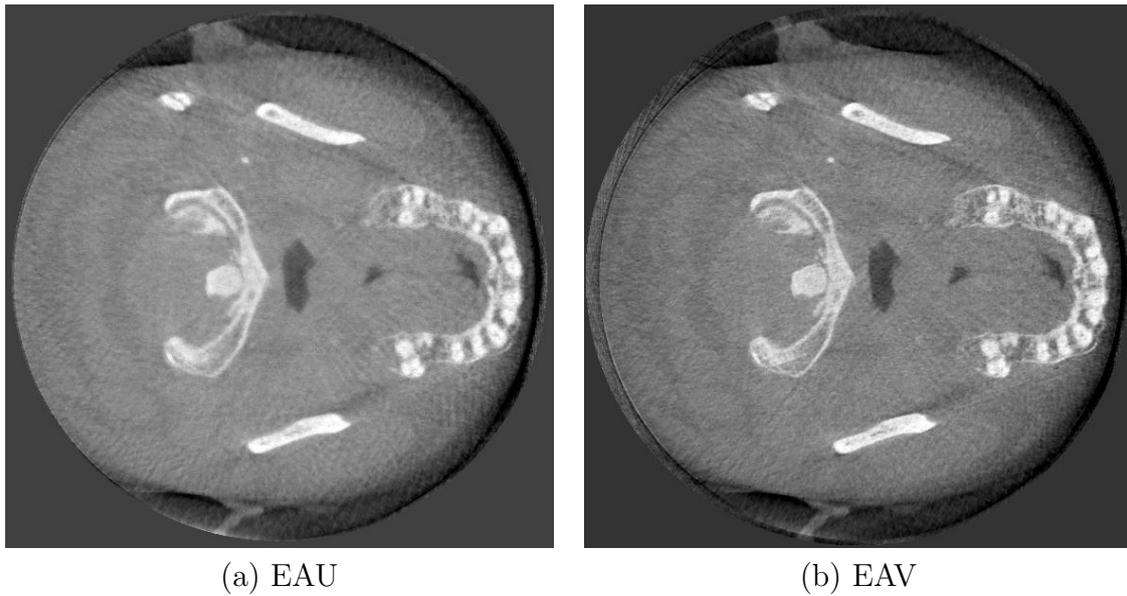


Figure 5.36 – Les images reconstruites itérativement d'une coupe du patient par PLS à partir de 150 projections de EAU (a) et de EAV (b). La fenêtre d'affichage est le $[-0,01 \ 0,04]$.

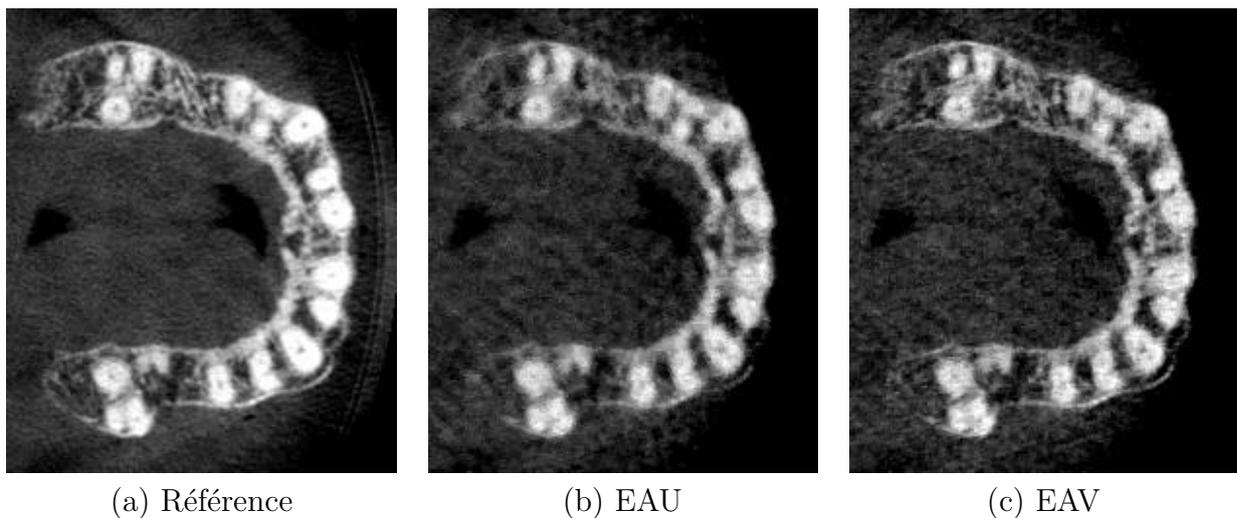
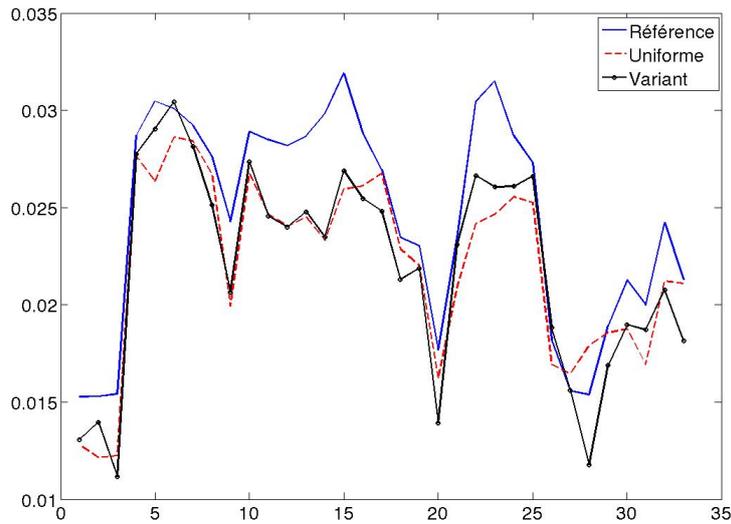


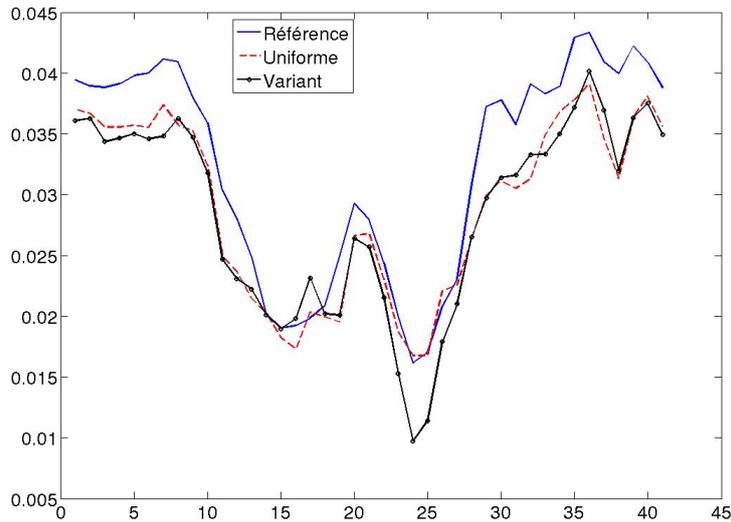
Figure 5.37 – Les zooms (voir le rectangle virtuel rouge dans la figure 5.23.(b)) d'image reconstruite par FBP avec les projections complètes (a) et des images PLS de 5.36.(a) et .(b) respective (b) et (c). La fenêtre d'affichage est le $[0,01 \ 0,04]$.

V.5.3 Conclusion

Le nouveau mode d'acquisition proposé d'échantillonnage angulaire variant permet de maximiser l'information apportée par les projections pour une zone d'intérêt spécifique. Il permet aussi d'améliorer la qualité d'image de la zone intéressante, lorsque le nombre de projections est fixé notamment avec faible nombre des projections. Cela est validé ci-dessus sur les données réelles du crâne et des données cliniques. Ce nouveau mode d'acquisition permet de réduire largement la dose sans perte de la qualité d'image. Il



(a) Profil p1



(b) Profil p2

Figure 5.38 – Les profils p1 (a) et p2 (b) des images 5.37.(a)-(c). Les lignes droites p1 et p2 sont indiqués dans la figure 5.23.(b).

nécessite seulement 175 projections pour le crâne et 171 projections pour le patient afin d’avoir une bonne qualité d’image voir les figures 5.26.(b) et 5.33.(b), soit il réduit 61–62% de projections. Autrement dit, il peut réduire la dose de 61 – 62% sans compromettre fortement la qualité des images. Afin d’avoir une image de qualité acceptable, il a nécessairement besoin de 90 projections pour le crâne et 150 projections pour le patient, soit la dose est respectivement réduit de 80% et 66, 7% lorsque toutes les autres conditions ne changent pas. En plus, ce nouveau mode d’acquisition n’est pas difficile à implanter dans les scanners commerciaux, il suffit d’utiliser un moteur qui permet un pas angulaire variable, ou bien d’avoir une source de rayon X pulsée.

VI

Conclusions et perspectives

VI.1 Bilans et conclusions

Dans ce mémoire, nos études concernent deux principaux challenges en imagerie médicale par tomographie à rayons X : la réduction des artefacts métalliques et la réduction de la dose. Ces challenges sont encore plus importants dans le cadre de l'imagerie dentaire, où la présence de métal dans les images est fréquente.

Dans la première partie, nous avons introduit ces deux challenges : la réduction des artefacts métalliques et la réduction de la dose d'irradiation délivrée au patient. Et nous avons montré en quoi les objets métalliques exacerbent les phénomènes physiques, le durcissement et le diffusé causant les artefacts. Nous avons ensuite montré en quoi la protection radiologique devient de plus en plus importante dans les modalités utilisant des rayons X. En effet, la sur-exposition et l'exposition non nécessaire du patient aux rayonnements ionisants peuvent augmenter le risque de cancers radio-induits.

Puis nous avons présenté les bases théoriques de la tomographie : les méthodes de reconstruction analytiques ou itératives. Les méthodes analytiques de type filtrage rétroprojection (FBP) sont largement utilisées dans les systèmes d'imagerie médicale elles permettent d'avoir des reconstructions rapides possédant une qualité acceptable. Par contre, elles sont sensibles au bruit de mesures et au nombre de projections. Elles ont tendance à amplifier le bruit de mesure à faible dose. Les méthodes itératives en particulier les méthodes algébriques (ART, SIRT et SART) ont été proposées au début du développement de la tomodensitométrie car l'acquisition des données était très lente et le nombre de projections était faible. Elles redeviennent de plus en plus intéressante aujourd'hui notamment pour la tomographie à faible dose.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté une synthèse des méthodes de réduction d'artefacts métallique (MAR) : les méthodes basées sur l'interpolation linéaire ou polynomiale pour remplacer les projections traversant une partie métallique de l'objet

(MAR-LI [67], MAR-NPI [86] et [87] et NMAR [4]) et les méthodes statistiques basées sur des modèles sophistiqués liés à l'acquisition (IMPACT [16] et [116]). Toutes les méthodes ne sont pas pleinement satisfaisantes pour les applications cliniques de la tomographie dentaire. Les premières permettent de réduire la plupart des artefacts métalliques notamment les taches noires autour du métal mais uniquement si la segmentation du métal est pertinente. En effet, elles sont très sensibles à la qualité de la segmentation du métal. De plus, on peut observer des pertes d'informations en remplaçant les projections du métal par interpolation. Certains détails hautes fréquences dans les reconstructions peuvent être perdus. De plus, il apparaît de nouveaux artefacts à cause de segmentation non pertinente et l'interpolation inappropriée. Elles font également disparaître certaines structures fines. Par contre, les méthodes statistiques sont plus robustes aux erreurs de segmentation et au bruit des mesures. Elles permettent de produire des images de qualité supérieure aux méthodes basées sur l'interpolation. Néanmoins, elles nécessitent la connaissance du spectre de la source de rayons X et des coefficients d'atténuation pour chaque longueur d'onde des matériaux qui composent l'objet [16]. Cela est très difficile à obtenir en pratique à cause de la variabilité de matériaux utilisés dans les applications cliniques. De plus l'estimation précise du spectre de la source de rayons X est un problème qui reste ouvert dans un contexte clinique. Un autre inconvénient majeur des méthodes statistiques leur besoin très important en terme de temps de calcul. En effet, le problème direct étant non linéaire, la vitesse de convergence est relativement lente lorsqu'on utilise un modèle sophistiqué [16] et [93].

Nous avons donc proposés des méthodes MAR itératives basées sur la correction des données associées à des approches itératives résolvant le problème linéaire. On obtient ainsi un résultat de meilleure qualité que les approches de correction pour un coût de calcul raisonnable pour une application clinique. Nous nous focalisons sur la correction du durcissement et du rayonnement diffusé. Nos méthodes procèdent en deux étapes : la correction des données et la reconstruction itérative au travers d'optimisation des moindres carrés pondérés avec régularisation utilisant un modèle direct linéaire. Une de nos principales contributions est de combiner les méthodes de correction du durcissement et du diffusé proposées et la méthode reconstruction tomographique PWLS. Cette reconstruction permet de prendre en compte les erreurs de correction lors de la reconstruction itérative. Une des difficultés des méthodes qui nécessitent la connaissance du spectre de la source de rayons X est son estimation suffisamment précise en temps suffisamment court (quelques minutes). Notre méthode de correction du durcissement est utile en pratique car elle n'a pas besoin de la connaissance du spectre de la source des rayons X ni des matériaux. La seule hypothèse qui est faite c'est qu'on est présence d'un seul type de matériau métallique. Pour ce qui est de notre méthode de correction du diffusé, elle est similaire à la méthode de "beam-stop". Nous faisons l'hypothèse que le métal peut bloquer entièrement le rayonnement direct. Du fait que la correction des données n'existe pas parfaite. Nous prenons alors en compte les erreurs de correction que nous avons réussi à identifier dans la matrice de pondération de PWLS. Cette approche permet d'éliminer les stries noires et blanches dus aux erreurs de correction. Par contre, l'introduction de cette matrice de pondération entraîne un temps de convergence plus important. Afin d'accélérer cette reconstruction, nous avons appliqué la méthode de gradient conjugué préconditionné PCG. Le préconditionnement nous a permis de diviser par deux le nombre d'itérations. La performance de nos méthodes MAR a été évaluée sur des données simulées d'une "mâchoire" dans le chapitre III. Nous avons comparés nos méthodes avec une méthode de l'état de l'art NMAR qui donne les meilleurs résultats des approches

basées sur l'interpolation des données. Lors des validations sur données réelles qui sont présentées dans le chapitre V, on observe que nos approches n'arrivent pas à enlever tous les artefacts métalliques, par exemple il reste encore des taches noires autour du métal. En effet, une des limitations de nos méthodes MAR associées à la correction du durcissement est la non prise en compte du durcissement des faisceaux rayons X dû aux matériaux non métallique comme les tissus épais et les dents. Par ailleurs le coût de temps de calcul de notre méthode PWLS est relativement important par rapport à NMAR, 30 fois plus que celui de NMAR. Mais le principal avantage de nos méthodes en comparaison avec NMAR s'est qu'elles n'introduisent pas de nouveaux artefacts et qu'elles permettent de déceler des structures fines qui disparaissent dans les approches NMAR à cause de l'interpolation.

Une autre contribution de cette thèse est d'étendre l'algorithme de super-short-scan sur une trajectoire de la source en multiple cercles. Notre algorithme de super-short-scan sur multiple cercles permet de reconstruire un plus grand volume que le champ de vue du détecteur tout en minimisant le nombre de projections. Dans le cas de deux cercles, nous avons réduit 16,7% le nombre de projections. Dans le cas de trois cercles notre algorithme permet une réduction 36,8% du nombre de projections.

Nous avons aussi défini un nouveau mode d'acquisition échantillonnage angulaire adaptatif dédié à la reconstruction à faible dose. Le mode d'acquisition actuel utilise un échantillonnage angulaire uniforme et ne prend pas en compte les différentes propriétés des différentes zones du patient, en particulier l'intérêt plus ou moins important de certaines zones pour les dentistes. Nous avons alors proposé un nouveau mode d'acquisition d'échantillonnage angulaire adaptatif favorisant les zones les plus intéressantes.

Premièrement, il y a des zones relativement homogènes et des zones contrastées. Les premières sont principalement constituées de basses fréquences spatiales dans le domaine de Fourier et elles peuvent être compensées par les informations *a priori*. Elles nécessitent donc moins de projections que les zones de forts contrastes.

Deuxièmement les dentistes sont plus intéressés par les zones contenant les dents et ses alentours que la zone arrière contenant les vertèbres ou le maxillaire. Nous pouvons attribuer plus de projections aux zones intéressantes et moins de projections aux zones moins importantes pour avoir une résolution supérieure localisée. Le bénéfice de ce nouveau mode d'acquisition est indéniable. Il permet de reconstruire les zones contrastées et celles plus intéressantes avec une qualité similaire en utilisant moins de projections. Par exemple moins 22 ~ 28% de projections sur les données simulées du crâne et celles réelles du crâne et du patient. Il peut également améliorer la résolution des zones intéressantes localisée avec le même nombre de projections que le mode d'acquisition classique voir les figures 4.31, 5.30 et 5.36.

VI.2 Perspectives

VI.2.1 Perspectives à court terme

Suite à la présentation de mes travaux de thèse ci-dessus, nous donnons dans la suite plusieurs perspectives à court terme :

1. Extension de nos méthodes MAR en tomographie 3D, nos méthodes de correction du durcissement et correction du diffusé sont appliquées en tomographie 2D dans ce mémoire, elles peuvent être facilement étendues à la tomographie 3D. Il ne devrait pas y avoir de problèmes méthodologiques, par contre il faudrait travailler sur l'implantation efficace sur des calculateurs parallèles de type GPU.
2. Extension du nouveau mode d'acquisition adaptatif en tomographie 3D. Le lien entre l'angle de projection et la transformée de Fourier de l'objet 3D est différent de celui de la tomographie 2D. Il faut donc le prendre en compte en concevant le schéma d'échantillonnage angulaire adaptatif. De plus en fonction des applications, il faut pouvoir gérer correctement la zone d'ombre.
3. Optimisation de l'implantation de nos algorithmes sur GPU ou l'implantation de nos algorithmes sur multi-GPUs. Notre reconstruction itérative PWLS est plus coûteuse que les approches de type FBP. L'implantation actuelle de nos algorithmes sur GPU n'est pas optimale. Pour bénéficier au maximum de la performance de GPU, il nécessite d'optimiser la gestion de mémoire locale, constante et global. En plus, afin d'affranchir la limite de mémoire d'une carte graphique, nous pouvons utiliser multi-GPUs [66] pour reconstruire un volume de très grande dimension (par exemple 1024^3).
4. Accélération de la reconstruction PWLS par les méthodes OS (acronyme anglais, ordered sets) [57] et [58] et les méthodes "patch-work" [117] et [79]. Les méthodes OS consistent à réorganiser les projections en sous-groupes ordonnées par exemple avec des projections parallèles. Cela permet d'accélérer la reconstruction de facteur de nombre de sous-groupe [58] lorsque les sous-groupes ordonnées sont optimaux. Quant à la méthode "patchwork", elle utilise différents modèles adaptés à la zone reconstruite. Par exemple pour réduire des artefacts métalliques dus au durcissement, nous pouvons appliquer un modèle polychromatique sophistiqué sur le métal et un modèle linéaire simple sur les autres matériaux.
5. Amélioration de la séparation en prenant en compte les effets provenant du durcissement de spectre de les effets liés au diffusé. On pourrait envisager une procédure itérative afin de mieux identifier la composante du diffusé.

VI.2.2 L'implantation sur les scanners commerciaux

Les résultats de nos méthodes MAR sont prometteurs notamment celui associé à la correction du durcissement car elles permettent de réduire la plupart des artefacts métalliques, n'introduisent pas de nouveaux artefacts et également elles ne font pas disparaître des structures fines. Grâce aux méthodes d'accélération performantes et le développement de GPU en cours, le temps de reconstruction PWLS peut être réduit en quelques minutes ce qui est acceptable dans les applications cliniques. L'application de nos méthodes MAR basées sur la correction des données est faisable dans le future proche.

De plus, nos algorithmes super-short-scan sur une trajectoire de source en multiple cercles répondent à la demande de développement des scanners de coût plus abordable, ce qui peuvent reconstruire un plus grand volume que le champ de vue de détecteur avec une dose d'irradiation minimisée en réduisant le nombre des projections. En effet, le

cout des scanners en imagerie dentaire provient en grande partie du cout des détecteurs numériques. Le cout de ces détecteurs est proportionnel au nombre de pixel du détecteur. Nous avons introduit un nouveau mode d'acquisition basé sur un échantillonnage angulaire adaptatif. Nous avons vu que cette procédure était supérieure au schéma actuel échantillonnage angulaire uniforme en terme de dose transmise au patient. Par contre l'un des inconvénients, c'est qu'on ne peut pas développer un algorithme de type FBP avec cette échantillonnage. L'idée serait de voir si on peut avoir une première reconstruction légèrement dégradée avec un algorithme FBP dont le filtre serait adapté. Cette image serait ensuite raffinée avec un faible nombre itération d'un algorithme statistique.

VI.2.3 Réduction des autres artefacts

Le volume partiel non-linéaire et le mouvement du patient pendant l'acquisition sont deux autres phénomènes physiques qui contribuent aux artefacts métalliques [10] et [12] que nous n'avons pas eu le temps de traiter dans cette thèse. Le volume partiel non-linéaire n'est pas négligeable, lorsque les objets métalliques sont très contrasté. Des artefacts tangents aux bords des matériaux relativement denses apparaissent par exemple les parties métalliques. Nous pouvons réduire la taille de voxel pour réduire l'effet de volume partiel non-linéaire. Mais ça ne suffit pas. Un modèle associé au volume partiel non-linéaire peut être utile [10]. La prise en compte du volume partiel non-linéaire peut être apporté dans nos méthodes MAR.

En pratique, le patient peut bouger lors d'une acquisition. Le mouvement important du patient entraîne des artefacts stries noires et blanches. Une nouvelle méthode appuyant sur la condition de consistance en géométrie divergente 2D est récemment proposée [118] pour détection du mouvement de l'objet connu. Cela nous permet d'estimer le mouvement du patient à partir des mesures. Nous pouvons compenser les données avec le mouvement estimé pour réduire les artefacts dû au bougé du patient.

A

Algorithme de gradient conjugué préconditionné

A.1 Développement de l'algorithme gradient conjugué préconditionné

Dans ce document, nous nous référons souvent l'algorithme de gradient conjugué preconditionné. Nous proposons dans cet annexe d'en développer cet algorithme.

Considérons ci-dessous une fonction de critère $J(\mathbf{f})$ de moindres carrés pondérés avec régularisation (voir l'eq.2.104). \mathbf{f} est le vecteur de l'objet inconnu et \mathbf{g} est notre vecteur des mesures. \mathbf{H} et Σ_ϵ^{-1} sont respectivement la matrice de système de la tomographie et la matrice de pondération lié aux mesures qui est diagonale. λ est le paramètre de régularisation et Φ représente la fonction de régularisation avec l'opérateur de différentiel fini \mathbf{D} .

$$J(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f})^t \Sigma_\epsilon^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}) + \lambda\Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}) \quad (1.1)$$

Nous estimons \mathbf{f} en minimisant $J(\mathbf{f})$. Pour cela, nous nous intéressons à l'algorithme de gradient conjugué. La vitesse de convergence est dépendante de la distribution des valeurs propres du hessien du critère $\mathbf{H}^t \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{H}$ [63]. Plus les valeurs propres sont concentrée, plus rapide il converge. Afin d'avoir les valeurs propres plus proches, nous pouvons transformons le système en changeant le vecteur inconnu \mathbf{f} en un nouveau vecteur $\check{\mathbf{f}}$ à l'aide d'une matrice \mathbf{C} .

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}\check{\mathbf{f}} \quad (1.2)$$

Nous réécrivons ci-dessous la fonction de critère $J(\mathbf{f})$:

$$J(\check{\mathbf{f}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}})^t \Sigma_\epsilon^{-1}(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}) + \lambda\Phi(\mathbf{D}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}) \quad (1.3)$$

APPENDIX A. ALGORITHME DE GRADIENT CONJUGUÉ PRÉCONDITIONNÉ

Le hessien du critère devient $\mathbf{C}^t \mathbf{H}^t \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{H} \mathbf{C}$. Nous utilisons l'algorithme de gradient conjugué pour minimiser $J(\check{\mathbf{f}})$. En détaillant le gradient de $J(\check{\mathbf{f}})$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla J(\check{\mathbf{f}}) &= \frac{\partial}{\partial \check{\mathbf{f}}} J(\check{\mathbf{f}}) \\ &= -\mathbf{C}^t \mathbf{H}^t \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}) + \lambda \mathbf{C}^t \mathbf{D}^t \frac{\partial}{\partial \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Les vecteurs de direction de l'algorithme sont orthogonales les une par rapport aux autres. L'orthogonalité dans ce cas est défini par rapport au produit scalaire associé au hessien du critère. Ils s'en déduisent par concurrence en fonction du vecteur de direction précédent et l'opposé du gradient actuel. Nous allons utiliser l'approximation de Polak & Ribière à la $k^{\text{ième}}$ itération, $k > 0$ et $k \in \mathcal{N}$:

$$\mathbf{d}^k = -\nabla J(\check{\mathbf{f}}^{(k)}) + \tau^{(k)} \mathbf{d}^{(k-1)}, \quad (1.5)$$

avec

$$\tau^{(k)} = \frac{\nabla J^t(\check{\mathbf{f}}^{(k)}) (\nabla J(\check{\mathbf{f}}^{(k)}) - \nabla J(\check{\mathbf{f}}^{(k-1)}))}{\nabla J^t(\check{\mathbf{f}}^{(k-1)}) \nabla J(\check{\mathbf{f}}^{(k-1)})} \quad (1.6)$$

et $\mathbf{d}^0 = -\nabla J^t(\check{\mathbf{f}}^0)$. Quant le pas d'avancement, nous utilisons le pas d'optimum $\hat{\nu}$ qui est défini comme ci-dessous :

$$\hat{\nu}^{(k)} = \arg \min_{\nu} J(\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)}) \quad (1.7)$$

Le différentiel partielle de $J(\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)})$ sur ν s'annule pour obtenir ν .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} J(\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)}) &= -(\mathbf{d}^{(k)})^t \mathbf{C}^t \mathbf{H}^t \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}) + \nu (\mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{d}^{(k)})^t \mathbf{H} \mathbf{C} \mathbf{d}^{(k)} + \lambda \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} (\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)})) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

D'après le règle de chaine de dérivé, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} (\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)})) = \frac{\partial}{\partial \nu} \mathbf{D} \mathbf{C} (\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{D} \mathbf{C} (\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)})} \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} &\Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} (\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)})) \\ &= (\mathbf{d}^{(k)})^t \mathbf{C}^t \mathbf{D}^t \frac{\partial}{\partial \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} (\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)})) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nous développons la dérivé de l'eq.1.9 par série de Taylor de l'ordre deux en supposant sa dérivée de l'ordre deux existe.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} (\check{\mathbf{f}}^{(k)} + \nu \mathbf{d}^{(k)})) &\approx \frac{\partial}{\partial \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}) + \nu \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)})^t \partial \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}) \\ &\quad \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{d}^{(k)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

En fait, nous utilisons dans ce mémoire la fonction Huber (voir l'eq.X-1) comme la fonction de régularisation. Sa dérivée de l'ordre deux existe. En remplaçant les équations 1.11 et 1.9 dans l'eq.1.8 et en utilisant l'eq.1.4, nous obtenons

$$\hat{\nu}^{(k)} = \frac{-(\mathbf{d}^{(k)})^t \nabla J \check{\mathbf{f}}^{(k)}}{(\mathbf{C} \mathbf{d}^{(k)})^t (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)})^t \partial \mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D} \mathbf{C} \check{\mathbf{f}}^{(k)}) \mathbf{D}) \mathbf{C} \mathbf{d}^{(k)}} \quad (1.12)$$

Et le vecteur inconnu $\mathbf{f}^{(k)}$ est mis à jour à la $k^{\text{ième}}$ de manière suivante

$$\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{C}\check{\mathbf{f}}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1)} + \hat{\nu}^{(k)} \mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)}. \quad (1.13)$$

En remplaçant $\mathbf{f} = \mathbf{C}\check{\mathbf{f}}$ et l'eq.2.105 dans $\mathbf{C}\nabla J(\check{\mathbf{f}}^k)$ et $\hat{\nu}^{(k)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\nabla J(\check{\mathbf{f}}^k) &= -\mathbf{C}\mathbf{C}^t \mathbf{H}^t \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}^{(k)}) + \lambda \mathbf{C}^t \mathbf{D}^t \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{C}^t \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

et

$$\hat{\nu}^{(k)} = \frac{-(\mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)})^t \nabla J \mathbf{f}^{(k)}}{(\mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)})^t (\mathbf{H}^t \mathbf{H} + \lambda \mathbf{D}^t \frac{\partial^2}{\partial (\mathbf{D}\mathbf{C}\check{\mathbf{f}}^{(k)})^t \partial \mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}} \Phi(\mathbf{D}\mathbf{f}^{(k)}) \mathbf{D}) \mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)}} \quad (1.15)$$

. En remplaçant les équations 1.13, 1.14 et 1.15 dans l'algorithme de gradient conjugué, nous obtenons alors l'algorithme de gradient conjugué préconditionné. ça suffit de con-

Algorithme 5 Notre algorithme de gradient conjugué préconditionné.

Initialisation :

$\mathbf{f}^0, \mathbf{C}\mathbf{d}^0 = -\mathbf{C}\mathbf{C}^t \nabla J(\mathbf{f}^0);$

$k \leftarrow 0;$

$r_{\delta \mathbf{f}}^{(k)} = 1;$

while $r_{\delta \mathbf{f}}^{(k)} > \epsilon_c \& k < K_{max}$ **do**

Calculer $\nu^{(k)}$ avec l'équation (1.15) ;

$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} + \nu^{(k)} \mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)} ;$

Evaluer $\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)})$ utilisant l'équation (2.105);

$\tau^{(k+1)} = \frac{(\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}))^t (\nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - \nabla J(\mathbf{f}^{(k)}))}{\|\nabla J(\mathbf{f}^{(k)})\|^2} ;$

$\mathbf{C}\mathbf{d}^{(k+1)} = -\mathbf{C}\mathbf{C}^t \nabla J(\mathbf{f}^{(k+1)}) + \tau^{(k+1)} \mathbf{C}\mathbf{d}^{(k)} ;$

Evaluer $r_{\delta \mathbf{f}}^{(k+1)}, r_{\delta \mathbf{f}}^{(k+1)} = \frac{\|J(\mathbf{f}^{(k+1)}) - J(\mathbf{f}^{(k)})\|}{\|J(\mathbf{f}^{(k)})\|}$

$k \leftarrow k + 1 ;$

end while

naitre le produit $\mathbf{C}\mathbf{C}^t$ sans besoin de détails de la matrice de changement \mathbf{C} . Il n'y a pas d'une expression générale de la matrice $\mathbf{C}\mathbf{C}^t$, nous avons proposés une méthode de détermination de $\mathbf{C}\mathbf{C}^t$ (voir l'eq.3.75) dans nos applications en imagerie dentaire.

Bibliographie

- [1] T. Rodet. *Algorithmes rapides de reconstruction en tomographie par compression des calculs et application à la tomofluoroscopie 3D*. PhD thesis, 2002.
- [2] J. T. Bushberg, J. A. Seibert, JR. E. M. Leidholdt, and J. M. Boone. *The essential physics of medical imaging (the second edition)*. 2002.
- [3] S.M. Seltzer J. Chang J.S. Coursey R. Sukumar D.S. Zucker M.J. Berger, J.H. Hubbell and K. Olsen. Xcom: Photon cross sections database, 2010. URL <http://physics.nist.gov/PhysRefData/Xcom/html/xcom1.html>.
- [4] E. Meyer, R. Raupach, M. Lell., B. Schmidt., and M. Kachelrieß. Normalized metal artifact reduction (nmar) in computed tomography. *Med. Phys.*, 37(9):5482, 2010.
- [5] M. Krumm, S. Kasperl, and M. Franz. Reducing non-linear artifacts of multi-material objects in industrial 3d computed tomography. *NDT&E International*, 41.
- [6] Dennis L. Parker. Optimal short scan convolution reconstruction for fan beam ct. *Medical Physics*, 9(2):254–257, 1982.
- [7] R. Clackdoyle, F. Noo, Junyu Guo, and J.A. Roberts. Quantitative reconstruction from truncated projections in classical tomography. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 51(5):2570–2578, Oct 2004.
- [8] M. Defrise, F. Noo, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Truncated hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data. *Inverse Problems*, 22(3):1037, 2006.
- [9] G. N. Hounsfield. A method of and apparatus for examination of a body by radiation such as x-ray or gamma radiation, 1972.
- [10] B. De Man, J. Nuyts, P. Dupont, G. Marchal, and P. Suetens. Metal streak artifacts in x-ray computed tomography: A simulation study. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 46(3):691–696, 1999.
- [11] P. M. Joseph and R. D. Spital. The exponential edge-gradient effect in x-ray computed tomography. 26(3):473, 1981.
- [12] H. G. Glover and N. J. Pelc. An algorithm for the reduction of metal clip artifacts in ct reconstructions. *Medical Physics*, 8(6):799–807, 1981.
- [13] Caifang Cai. *Bayesian Multi-Energy Computed Tomography reconstruction approaches based on decomposition models*. PhD thesis, Université de Paris Sud, 2013.

- [14] J. Radon. über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten. *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys.*, 69:262–267, 1917.
- [15] R E Alvarez and A Macovski. Energy-selective reconstructions in x-ray computerised tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 21(5):733, 1976.
- [16] B. De-Man, J. Nuyts, P. Dupont, G. Marchal, and P. Suetens. An iterative maximum-likelihood polychromatic algorithm for CT. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 20(10):999–1008, 2001.
- [17] P. M. Joseph and R. D. Spital. The effects of scatter in x-ray computed tomography. *Medical Physics*, 1982.
- [18] K. Lange and R. Carson. Em reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 8(2):306–316, 1984.
- [19] K. Sauer and C. Bouman. A local update strategy for iterative reconstruction from projections. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(2):534–548, Feb 1993.
- [20] J. Nuyts, B. De Man, P. Dupont, M. Defrise, P. Suetens, and L. Mortelmans. Iterative reconstruction for helical ct: a simulation study. *Physics in Medicine and Biology*, 43(4):729, 1998.
- [21] J. Wang, H. Lu, Z. Liang, D. Eremina, G. Zhang, S. Wang, J. Chen, and J. Manzione. An experimental study on the noise properties of x-ray ct sinogram data in radon space. *Physics in Medicine and Biology*, 53(12):3327, 2008.
- [22] C. Cai, T. Rodet, S. Legoupil, and A. Mohammad-Djafari. A full-spectral bayesian reconstruction approach based on the material decomposition model applied in dual-energy computed tomography. *Medical Physics*, 40(11):–, 2013.
- [23] R. N. Bracewell. Strip integration in radio astronomy. *Australian Journal of Physics*, 9:198–217, 1956.
- [24] D. J. DE ROSIER and A. KLUG. Reconstruction of three dimensional structures from electron micrographs. *Nature*, 217(5124):130–134, 1968.
- [25] H. Stark, J. W. Woods, I. Paul, and R. Hingorani. Direct fourier reconstruction in computer tomography. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 29(2):237–245, Apr 1981.
- [26] R. N. Bracewell and A. C. Riddle. Inversion of fan-beam scans in radio astronomy. *The Astrophysical Journal*, 150:427, November 1967.
- [27] G. N. Ramachandran and A. V. Lakshminarayanan. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of fourier transforms. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 68(9):2236–2240, sep 1971.
- [28] L.A. Shepp and B.F. Logan. The fourier reconstruction of a head section. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 21(3):21–43, June 1974.

- [29] G. T. Herman and A. Naparstek. Fast image reconstruction based on a radon inversion formula appropriate for rapidly collected data. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 33(3):511–533, 1977.
- [30] R. Gordon, R. Bender, and G. T. Herman. Algebraic reconstruction techniques (art) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29(3):471 – 481, 1970.
- [31] Peter Gilbert. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *Journal of Theoretical Biology*, 36(1):105 – 117, 1972.
- [32] A.H. Andersen and A.C. Kak. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm. *Ultrasonic Imaging*, 6 (1):81 – 94, 1984.
- [33] L. A. Shepp and Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 1:113–122, 1982.
- [34] K. Lange, M. Bahn, and R. Little. A theoretical study of some maximum likelihood algorithms for emission and transmission tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 6(2):106–114, June 1987.
- [35] G T Herman. Correction for beam hardening in computed tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 24(1):81, 1979.
- [36] Jeffrey A. Fessler. Penalized weighted least-squares image reconstruction for positron emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 13(2):290–300, 1994.
- [37] K. Lange and J. A. Fessler. Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 4(10):1430–1438, Oct 1995.
- [38] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Siam, Philadelphia, 2001.
- [39] P.R. Edholm and G.T. Herman. Linograms in image reconstruction from projections. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 6(4):301–307, Dec 1987.
- [40] M. Magnusson and P.R. Edholm. The linogram method for image reconstruction from projections applied to fan-beam projection data. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference, 1992., Conference Record of the 1992 IEEE*, pages 1195–1197 vol.2, Oct 1992.
- [41] Maria Magnusson. *Linogram and Other Direct Fourier Method for Tomographic Reconstruction*. PhD thesis, Linköping University, 1993.
- [42] D. Brasse, P.E. Kinahan, R. Clackdoyle, C. Comtat, M. Defrise, and D.W. Townsend. Fast fully 3d image reconstruction using planograms. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2000 IEEE*, volume 2, pages 15/239–15/243 vol.2, 2000.
- [43] T. Rodet, J. Nuyts, M. Defrise, and C. Michel. A study of data sampling in pet with planar detectors. In *Medical Imaging Conference, 2003 IEEE*, 2003.

- [44] A.J. Jerri. The shannon sampling theorem ; its various extensions and applications: A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11):1565–1596, Nov 1977.
- [45] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988.
- [46] L.A Feldkamp, L.C. Davis, and J.W. Kress. Practical cone-beam algorithm. *J. Opt. Soc.Am*, 1:612–619, 1984.
- [47] Heang K Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(3):546–552, 1983.
- [48] Alexander Katsevich. Theoretically exact filtered backprojection-type inversion algorithm for spiral ct. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 62(6):2012–2026, 2002.
- [49] Alexander Katsevich. Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone-beam ct. *Physics in medicine and biology*, 47(15):2583, 2002.
- [50] S. Kaczmarz. Angenaherte auflosung von systemen. *Bull. Acad. Pol. Sci. Lett. A*, 6-8A:355–357, 1937.
- [51] G. T. Herman and S. Rowland. Resolution in art: An experimental investigation of the resolving power of an algebraic picture reconstruction technique. *Journal of Theoretical Biology*, 33(1):213 – 223, 1971.
- [52] G. T. Herman, A. Lent, and S. W. Rowland. Art: Mathematics and applications: A report on the mathematical foundations and on the applicability to real data of the algebraic reconstruction techniques. *Journal of Theoretical Biology*, 42(1):1 – 32, 1973.
- [53] B.E. Oppenheim. *Reconstruction tomography from incomplete projections*. Jan 1975.
- [54] R. Gordon. A tutorial on art (algebraic reconstruction techniques). *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 21(3):78–93, June 1974.
- [55] A.H. Andersen and A.C. Kak. Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 72(5), 1982.
- [56] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Serie B (Methodological)*, 39(1):1–38, 1977.
- [57] H.M. Hudson and R.S. Larkin. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 13(4):601–609, Dec 1994.
- [58] C. Kamphuis and F. J. Beekman. Accelerated iterative transmission ct reconstruction using an ordered subsets convex algorithm. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 17(6):1101–1105, Dec 1998.
- [59] J. F. Giovannelli. Unsupervised bayesian convex deconvolution based on a field with an explicit partition function. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 17(1):16–26, Jan 2008.

- [60] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1–4):259 – 268, 1992.
- [61] P. Sukovic and N.H. Clinthorne. Penalized weighted least-squares image reconstruction for dual energy x-ray transmission tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 19(11):1075–1081, Nov 2000.
- [62] J. Wang, T. Li, H. Lu, and Z. Liang. Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose x-ray computed tomography. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 25(10):1272–1283, Oct 2006.
- [63] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng. Springer, New York, 2006.
- [64] P. M. Joseph and R. A. Schulz. View sampling requirements in fan beam computed tomography. *Medical Physics*, 7(6):692–702, 1980.
- [65] M. Beister, D. Kolditz, and W. A. Kalender. Iterative reconstruction methods in x-ray ct. *Physica Medica*, 28:94–108.
- [66] N. Gac, A. Vabre, A. M. Djafari, A. Rabanal, and F. Buyens. Gpu implementation of a 3d bayesian ct algorithm and its application on real foam reconstruction. In *The 1st CT Meeting Proceedings*, pages 151–155, Salte Lake City, United States, Jun 2010.
- [67] Robert Hebel W A Kalender and Johannes Ebersberger. Reduction of ct artifacts caused by metallic implants. *Radiology*, 164:576–577, 1987.
- [68] Ge Wang. Iterative deblurring for ct metal artifact reduction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15(5), 1996.
- [69] Chye Hwang Yan, R.T. Whalen, G.S. Beaupre, S.Y. Yen, and S. Napel. Reconstruction algorithm for polychromatic ct imaging: application to beam hardening correction. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 19(1):1–11, Jan 2000.
- [70] B. De Man, J. Nuyts, P. Dupont, G. Marchal, and P. Suetens. Reduction of metal streak artifacts in x-ray computed tomography using a transmission maximum a posteriori algorithm. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 47(3):977–981, Jun 2000.
- [71] J. Wei, L. Chen, G. A Sandison, Y. Liang, and L. X Xu. X-ray ct high-density artefact suppression in the presence of bones. *Physics in Medicine and Biology*, 49(24):5407, 2004.
- [72] M. Bal and L. Spies. Metal artifact reduction in ct using tissue-class modeling and adaptive prefiltering. *Medical Physics*, 33(8):2852–2859, 2006.
- [73] M. Kachelrieß, K. Sourbelle, and W. A. Kalender. Empirical cupping correction : A first-order raw data pre-correction for cone-beam computed tomography. *Med Phys*, 33(5), 2006.
- [74] Daniel Prell, Yiannis Kyriakou, Marcel Beister, and Willi A Kalender. A novel forward projection-based metal artifact reduction method for flat-detector computed tomography. *Phys.Med.Biol*, 54(21), 2009.

- [75] C. Lemmens, D. Faul, and J. Nuyts. Suppression of metal artifacts in ct using a reconstruction procedure that combines map and projection completion. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 28(2):250–260, Feb 2009.
- [76] Y. Kyriakou, E. Meyer, D. Prell, and K. Marc. Empirical beam hardening correction (ebhc) for ct. *Medical Physics*, 37(10):5179–5187, 2010.
- [77] Y. Zheng, C. Cai, and T. Rodet. Joint reduce of metal and beam hardening artifacts using multi-energy map approach in x-ray computed tomography. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*, pages 737 – 740, 2011.
- [78] E. Meyer, and M. Lell R. Raupach, B. Schmidt, and M. Kachelrieß. Frequency split metal artifact reduction (fsmar) in computed tomography. *Medical Physics*, 39(4):1904–1916, 2012.
- [79] K. V. Slambrouck and J. Nuyts. Metal artifact reduction in computed tomography using local models in an image block-iterative scheme. *Medical Physics*, 39(11):7080–7093, 2012.
- [80] J. M Verburg and J. Seco. Ct metal artifact reduction method correcting for beam hardening and missing projections. *Phy. Med. Biol.*, 57(9):2803–2818, 2012.
- [81] G.H. Glover. Compton scatter effects in ct reconstructions. *Med Phys*, 9(6):860–867, 1982.
- [82] D. M. Tucker, G. T. Barnes, and D. P. Chakraborty. Semiempirical model for generating tungsten target x-ray spectra. *Medical Physics*, 18(2):211–218, 1991.
- [83] C. Ruth and P. M. Joseph. Estimation of a photon energy spectrum for a computed tomography scanner. *Med Phys*, 24(5):695–702, 1997.
- [84] M. R. Ay, M. Shahriari, S. Sarkar, M. Adib, and H. Zaidi. Monte carlo simulation of x-ray spectra in diagnostic radiology and mammography using mcnp4c. *Physics in medicine and biology*, 49(21):4897, 2004.
- [85] R. Ning, X. Tang, and D. Conover. X-ray scatter correction algorithm for cone beam ct imaging. *Medical Physics*, 31(5):1195–1202, 2004.
- [86] J. Müller and T. M. Buzug. *Intersection line Length Normalization in CT Projection Data*, pages 77–81. Springer Berlin, 2008.
- [87] J. Müller and T. M. Buzug. Spurious structures created by interpolation-based ct metal artifact reduction.
- [88] K.J. Batenburg and J. Sijbers. Optimal threshold selection for tomogram segmentation by projection distance minimization. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 28(5):676–686, May 2009.
- [89] Y. Chen, Y. Li, H. Guo, Y. Hu, L. Luo, X. Yin, J. Gu, and C. Toumoulin. Ct metal artifact reduction method based on improved image segmentation and sinogram in-painting. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 2012.

- [90] P. M. Joseph and R. D. Spital. A method for correcting bone induced artifacts in computed tomography scanners. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 2, 1978.
- [91] G. T. Herman and S. S. Trivedi. A comparative study of two postreconstruction beam hardening correction methods. *IEEE Trans on Med Imaging*, MI-2, 1983.
- [92] J. P. Stonestrom, R. E. Alvarez, and A. Macovski. A framework for spectral artifact corrections in x-ray ct. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 1981.
- [93] I. A. Elbakri and J. A. Fessler. Segmentation-free statistical image reconstruction for polyenergetic x-ray computed tomography with experimental validation. *Physics in Medicine and Biology*, 48(15):2453, 2003. URL <http://stacks.iop.org/0031-9155/48/i=15/a=314>.
- [94] P. M. Joseph and C. Ruth. A method for simultaneous correction of spectrum hardening artifacts in CT images containing both bone and iodine. *Med Phys*, 24:1629–1634, 1997.
- [95] J.C. Carr, W. Fright, and R.K. Beatson. Surface interpolation with radial basis functions for medical imaging. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 16(1):96–107, Feb 1997.
- [96] G. Van Gompel, K. Van Slambrouck, M. Defrise, K. J. Batenburg, J. de Mey, J. Sijbers, and J. Nuyts. Iterative correction of beam hardening artifacts in ct. *Medical Physics*, 38 Suppl 1:S36, May 2011.
- [97] J. H. Siewerdsen and D. A. Jaffray. Cone-beam computed tomography with a flat-panel imager: Magnitude and effects of x-ray scatter. *Med Phys*, 28:220–231, 2001.
- [98] J. H. Siewerdsen, MJ. Daly, B. Bakhtiar, DJ. Moseley, S. Richard, H. Keller, and DA. Jaffray. A simple, direct method for x-ray scatter estimation and correction in digital radiography and cone-beam ct. *Med. Phys.*, 33(1):187–197, 2006.
- [99] E. P. Ruhrnschopf and Klaus Klingensbeck. A general framework and review of scatter correction methods in cone beam CT. part 2: Scatter estimation approaches. *Med. Phys.*, 38(9):5186–5199, 2011.
- [100] L. Chen, T. Rodet, and N. Gac. A penalized weighted least-squares image reconstruction based on scatter correction methods for x-ray ct. In *Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC), 2013 IEEE*, pages 1–3, Oct 2013.
- [101] L. Chen, T. Rodet, and N. Gac. A simple and efficient super-short-scan algorithm of fan-beam reconstruction for multiple circular trajectories: solution towards the truncated data. In *Proceedings of CT Metting*, pages 212–215, 2014.
- [102] N. Otsu. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, SMC-9(1):62–66, 1979.
- [103] P. Liao, T. Chen, and P. Chung. A fast algorithm for multilevel thresholding. *Journal of Information Science and Engineering*, 17:713–727, 2001.

- [104] J. Wang, T. Li, H. Lu, and Z. Liang. Penalized weighted least-squares approach for low-dose x-ray computed tomography. In *Proceeding of SPIE*, 2006.
- [105] C. H. McCollough, A. N. Primak, N. Braun, J. Kofler, L. Yu, and J. Christner. Strategies for reducing radiation dose in ct. *Radiologic Clinics of North America*, 47(1):27–40, 2009.
- [106] Abraham Naparstek. Short-scan fan-beam algorithms for CT. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 27(3):1112–1120, June 1980.
- [107] F. Noo, M. Defrise, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan. (14):2525, 2002.
- [108] H. Kudo, F. Noo, M. Defrise, and R. Clackdoyle. New super-short-scan algorithms for fan-beam and cone-beam reconstruction. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2002 IEEE*, volume 2, pages 902–906 vol.2, Nov 2002.
- [109] F. Noo, R. Clackdoyle, and J. D. Pack. A two-step hilbert transform method for 2d image reconstruction. *Physics in Medicine and Biology*, 49(17):3903, 2004.
- [110] Y. Zou and X. Pan. Exact image reconstruction on pi-lines from minimum data in helical cone-beam ct. *Physics in Medicine and Biology*, 49(6):941, 2004.
- [111] R. Clackdoyle and M. Defrise. Tomographic reconstruction in the 21st century. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 27(4):60–80, 2010.
- [112] C. Hamaker, K. T. Smith, D. C. Solmon, and S. L. Wagner. The divergent beam x-ray transform. *JOURNAL OF MATHEMATICS*, 10(1), 1980.
- [113] Y. Zou, X. Pan, and E. Y. Sidky. Image reconstruction in regions-of-interest from truncated projections in a reduced fan-beam scan. *Physics in Medicine and Biology*, 2004.
- [114] I. M. Gel’fand and M. I. Graev. Crofton’s function and inversion formulas in real integral geometry. *Functional Analysis and Its Applications*, 25(1):1–5, 1991.
- [115] L.Chen, T.Rodet, N. GAC, C. Maury, and A. M. Djafari. Rapport d’algorithme itératif. Technical report, Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec-CNRS-Université Paris Sud, 03 2012.
- [116] B. De Man. *Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography*. PhD thesis, University of Leuven, KU Leuven, 2001.
- [117] K.V. Slambrouck and J. Nuyts. A patchwork (back)projector to accelerate artifact reduction in ct reconstruction. In *Nuclear Science Symposium Conference Record (NSS/MIC), 2010 IEEE*, pages 2625–2629, 2010.
- [118] R. Clackdoyle, S. Rit, J. Hoskovec, and L. Desbat. Fanbeam data consistency conditions for applications to motion detection. In *Proceedings of CT Metting*, pages 324–328, 2014.