



Fluctuations dans des modèles de boules aléatoires

Renan Gobard

► To cite this version:

Renan Gobard. Fluctuations dans des modèles de boules aléatoires. Probabilités [math.PR]. Université de Rennes, 2015. Français. NNT : 2015REN1S025 . tel-01167520v2

HAL Id: tel-01167520

<https://theses.hal.science/tel-01167520v2>

Submitted on 15 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

École doctorale Matisse

présentée par

Renan Gobard

Préparée à l'IRMAR – UMR CNRS 6625
Institut de recherche mathématique de Rennes
U.F.R. de mathématiques

Fluctuations dans les modèles de boules aléatoires

**Thèse soutenue à Rennes
le 02 juin 2015**

devant le jury composé de :

Hermine BIERMÉ

Professeure à l'Université de Poitiers / *rapporteuse*

Jean-Christophe BRETON

Professeur à l'Université de Rennes 1 / *directeur de thèse*

Loïc CHAUMONT

Professeur à l'Université d'Angers / *président du jury*

David DEREUDRE

Professeur à l'Université Lille 1 / *rapporteur*

Mihai GRADINARU

Professeur à l'Université de Rennes 1 / *examineur*

Remerciements

Au moment de conclure ces trois années de thèse, je tenais à remercier en premier lieu mon directeur de thèse Jean-Christophe Breton. Il m'a non seulement donné l'opportunité de faire une thèse mais il m'a également remarquablement accompagné tout au long de celle-ci. Ses relectures soigneuses, ses conseils avisés et ses remarques pertinentes ont été autant d'atouts dans mon travail qui ont contribué à la réussite de mes travaux. Sa disponibilité et sa sympathie lors de nos nombreux entretiens, prévus ou improvisés, ont fait de ces trois années un passage agréable de ma vie. Je n'ai sans doute pas été le meilleur thésard, mais il fut un très bon directeur de thèse et, sans aucun doute, le meilleur que je n'ai jamais eu.

Je remercie Hermine Biermé, dont plusieurs de ses travaux m'ont inspiré durant ma thèse, et David Dereudre pour m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce manuscrit. Ils ont relu mes travaux avec attention et, grâce à leur rapport, j'ai pris beaucoup de recul sur mon travail de thèse et j'ai pu le situer dans le contexte de la recherche actuelle.

Je remercie également les deux dernières personnes qui me font le plaisir de venir compléter ce jury : Loïc Chaumont, que j'ai eu la chance de croiser au cours de mon doctorat, et Mihai Gradinaru, qui m'a apporté énormément pendant ces trois dernières années mais également et surtout pendant ma scolarité au magistère de mathématiques de l'antenne de Bretagne de l'ENS Cachan.

J'aimerais remercier toutes les personnes qui m'ont aidé dans mon travail. En premier lieu, il y a bien entendu mes collègues de bureau avec qui il fut agréable d'échanger, sur des mathématiques mais pas seulement. Ces discussions m'ont, à maintes reprises, débloqué dans mes travaux. J'ai dû durant ma thèse appréhender de nouveaux sujets mathématiques, notamment en théorie des opérateurs, et je remercie chaleureusement les personnes qui m'y ont aidé.

J'ai effectué ma thèse au sein de l'IRMAR et j'y ai trouvé un cadre de travail idéal de travail et je tiens à remercier toutes les personnes que j'y ai croisées : chercheurs, doctorants, personnels administratifs et personnels techniques. En premier lieu, je pense aux membres de l'équipe de processus stochastiques et de l'équipe de statistiques qui m'ont réservé le meilleur accueil dès le début de ma thèse. Je pense également à toutes les secrétaires et gestionnaires que j'ai pu embêter avec mes problèmes administratifs et à Olivier Garo pour mes problèmes informatiques. Parce qu'il est important de pouvoir souffler et de se détendre, je remercie aussi toute la troupe de doctorants pour l'ambiance sympathique le midi au restaurant universitaire et pour toutes les parties de coinche, perudo, tarot africain, président, etc. Pour finir, j'ai une pensée pour tous les membres de la fameuse équipe de foot de l'Irmar et pour tous nos matchs du vendredi soir.

J'ai également eu la chance d'effectuer une mission d'enseignement au sein de l'UFR mathématiques de l'université de Rennes 1 pendant mes années de thèses. Ces enseignements ont permis de rythmer mes semaines et j'ai beaucoup apprécié de travailler en

équipe. Je remercie donc toutes les personnes avec qui j'ai partagé ces enseignements et en particulier Bertold Wiest et Stéphane Le Borgne qui m'ont beaucoup appris. Je remercie également l'ENS Bretagne pour les journées d'oraux blancs de modélisation auxquelles j'ai participé.

Il ne faut pas oublier que pour faire une thèse il faut un financement. La mienne fut financée par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche et par le Centre Henri Lebesgue (programme "Investissements d'avenir" — ANR-11-LABX-0020-01) et je les en remercie.

Je souhaite également remercier également tous les professeurs de mathématiques qui, durant mes longues années d'études, m'ont enseigné cette matière. Du lycée jusqu'au Master 2, en passant par les classe préparatoires et l'ENS, chacun dans leur style, ils m'ont transmis leur passion pour les mathématiques mais également leur passion pour l'enseignement.

Il y a énormément de gens qui ont compté pour moi dans mon parcours et il n'est pas aisé de vous remercier tous. Je m'excuse donc, d'ors et déjà, auprès de ceux dont j'ai oublié de citer le nom. Cet oubli est probablement involontaire.

J'ai rencontré durant mes études à l'ENS une troupe de personnes formidables : des bretons, des chanceux, des dégarnis, des docteurs, des ex-supporters du SRFC, des geeks, des grands, des joueurs de binious, des joueurs exclusifs de Hanabi, des juges, des marins, des mécaniciens, des normands, des ouvriers, des papas, des paysans, des petits, des pièces rapportées, des saltimb's, des supporters du FC Nantes, etc. Ensemble nous avons traversé la France de Lille à Toulouse, du massifs du Vercors aux plages de la côte d'émeraude, et même plus loin dans le deep fried brouillard écossais ou au plus profond des piscines d'Espagne, en passant par les hôpitaux les plus glauques de Pologne. Nous avons vécu des épreuves douloureuses (au stade de France notamment), affronté les plus grands dangers (M. Propre entre autres), été retenu sur des îles sans vivre ou vécu sans eau ni électricité pendant plusieurs jours (au moins). Je n'oublie pas bien évidemment les bons moments, toutes ces soirées, ces week-ends, ces vacances, faits de parties de coinche, de jeux de sociétés, de repas, de chansons et de toutes ces choses qu'on ne peut pas lister dans des remerciements de thèse (ma mère va sûrement les lire). À vous tous, gars et filles de l'ENS, je vous dis un grand merci pour tous ces moments qui m'ont tant apporté. Où que vous alliez camarades, j'espère que nos routes se croiseront le plus souvent possible. Pour en revenir à des choses plus sérieuses, je ne saurai jamais comment exprimer ma gratitude à celles et ceux avec qui j'ai passé toutes ces journées à la bibliothèque à travailler le concours de l'agrégation. Grâce à vous je n'en garde que des bons souvenirs (et le fait d'être agrégé ce qui me sera sûrement utile dans la suite de ma carrière).

Je voudrais également dire un grand merci à tous mes (vrais) amis qui ne sont pas de l'ENS mais qui n'en sont pas moins chers à mon cœur. Que l'on se connaisse depuis le collège, le lycée ou la prépa, les moments que je passe avec vous sont essentiels à mon équilibre et vous avez ainsi contribué à la réussite de cette thèse. J'ai bien sûr en mémoire les 400 coups au lycée, les week-ends au bord de la mer, les baignades avec Superman, les soirées foot au bar, les soirées au bar, les soirées, les après-midi plus posées, etc, qui ont forgé notre amitié. Mention spéciale, bien entendu, à ceux qui m'ont accompagné pendant toutes ces années et jusqu'aux derniers instants de ma vie rennaise. Malgré l'éloignement, j'attendrai toujours avec impatience des nouvelles de vous et, avec encore plus d'impatience, de partager de nouveaux moments avec vous.

Je remercie également toute ma famille et ma belle-famille. Je pense en particulier à ma mère et mon père, sans qui je ne serai pas là, indéniablement, pour leur soutien inconditionnel tout au long de mes études et la relecture de ce manuscrit. Je pense également à mes grands-mères qui m'ont suivi pendant toutes ces années. Merci aussi à ma tante, pour son aide et son indéfectible optimisme, à ma sœur et à mon frère.

Enfin, merci à toi Charlotte, pour ce que tu es, ce que je suis et ce que nous sommes.

Table des matières

Introduction	1
1 Comportement macroscopique des modèles de boules aléatoires	5
1.1 Premiers résultats en dimension quelconque	5
1.1.1 Étude asymptotique	6
1.1.2 Propriétés des champs aléatoires limites	10
1.1.3 Pont poissonien	11
1.2 Robustesse du Théorème 1.4	12
1.2.1 Étude microscopique	12
1.2.2 Modèle de boules aléatoires pondérées	13
1.2.3 Convergence fonctionnelle	16
1.2.4 Un mot sur la dimension 1	18
1.3 Présentation des résultats	18
1.3.1 Modèle de boules aléatoires avec dépendance	19
1.3.2 Convergence fonctionnelle infini-dimensionnelle	22
1.3.3 Modèle de boules aléatoires déterminantal	23
2 Modèle de boules aléatoires avec dépendance	31
2.1 Introduction	32
2.2 The weighted random balls model with dependence	32
2.3 Asymptotics	34
2.3.1 Large-balls scaling	38
2.3.2 Intermediate scaling	43
2.3.3 Small-balls scaling	48
2.3.4 Bridging between the large-balls scaling and the small-balls scaling	54
2.4 Zoom-in procedure	56
2.5 Appendix	57
3 Convergence fonctionnelle infini-dimensionnelle	59
3.1 Introduction	60
3.2 Main results	61
3.3 Proofs	63
3.4 Discussion and examples	66
3.4.1 Fading function	66
3.4.2 Discrete configurations	66
3.4.3 Compacity of the configurations	67
3.4.4 Uniform control of the configurations	68
3.4.5 Typical examples	68
3.5 Appendix	68

4	Modèle de boules aléatoires déterminantales	73
4.1	Introduction	74
4.2	Marked Determinantal Point Process	74
4.3	Determinantal Random Balls Model	78
4.3.1	The model	78
4.3.2	Asymptotics	80
4.4	Comments	95
4.4.1	$\mathcal{K}$ -function	95
4.4.2	Zoom-in case	95

Introduction

Ce travail de thèse a pour sujet d'étude les modèles de boules aléatoires. Ce sont des modèles géométriques qui consistent en une agrégation de boules dans $\mathbb{R}^d$ dont les centres et les rayons sont aléatoires. L'influence de la configuration de boules en un point y de l'espace peut être mesurée via le processus :

$$M(y) = \sum_{(X,R) \in \xi} 1_{B(X,R)}(y), \quad (1)$$

où ξ est l'ensemble des couples (centre, rayon) générant le système de boules. Le processus M compte simplement le nombre de boules qui contiennent le point y . On peut également mesurer le poids de la configuration de boules sur un ensemble A mesurable :

$$M(A) = \sum_{(X,R) \in \xi} |A \cap B(X,R)|, \quad (2)$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble. Cette fois, M renvoie la somme des aires des intersections entre chaque boule du modèle et un ensemble A . En généralisant la mesure $|A \cap \cdot|$ à toutes les mesures μ sur notre espace de départ, on mesure l'influence du modèle sur un ensemble de points répartis selon la mesure μ :

$$M(\mu) = \sum_{(X,R) \in \xi} \mu(B(X,R)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x,r)) N_\xi(dx, dr), \quad (3)$$

où N_ξ est la mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ associée à l'ensemble ξ c'est à dire :

$$N_\xi = \sum_{(X,R) \in \xi} \delta_{(X,R)}. \quad (4)$$

La mesure μ peut être vue comme une fenêtre à travers laquelle nous observons la configuration de boules aléatoires. La figure 1 représente un modèle de boules aléatoires vu à travers un carré. Les boules aléatoires ont été générées grâce à une mesure ponctuelle de Poisson. Pour plus de détails sur la simulation des processus ponctuels de Poisson, on pourra consulter le livre de Bercu et Chafaï [1].

Il est courant de marquer les boules du modèle via un poids réel lui aussi aléatoire. Pour cela, on rajoute à chaque couple (X, R) de la configuration une troisième composante m appartenant à $\mathbb{R}$. On redéfinit ξ comme l'ensemble des triplets (X, R, m) générant le système de boules aléatoires pondérées de centre X , de rayon R et de poids m . On mesure alors le poids du système de boules pondérées sur une configuration de points répartis selon une mesure μ grâce au champ aléatoire :

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m \mu(B(x,r)) N_\xi(dx, dr, dm), \quad (5)$$

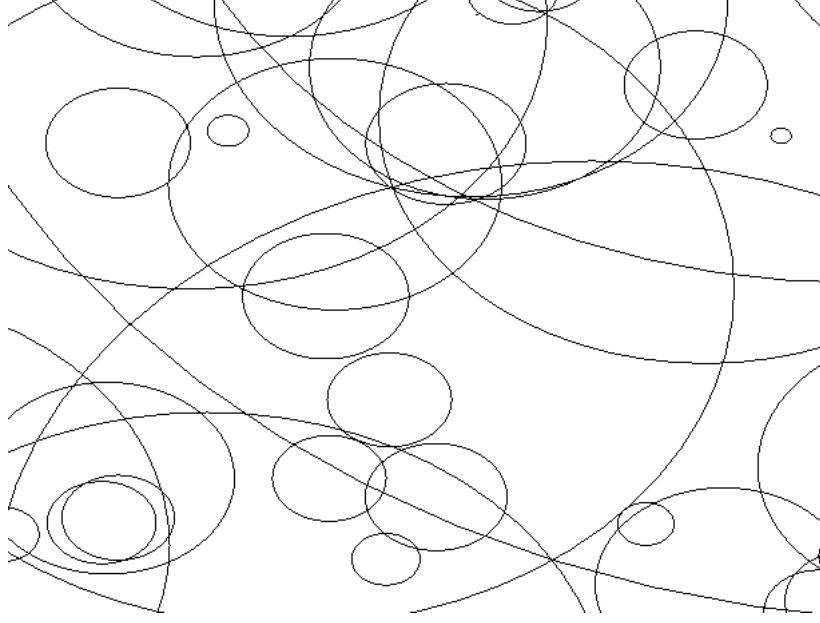


FIGURE 1 – Modèle de boules aléatoires en dimension 2

où N_ξ est la mesure ponctuelle sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ associée à l'ensemble ξ .

Pour travailler avec plus de généralité, on remplacera dans la suite les boules $B(x, r)$ par des grains $x + rC$ où C est un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $|\partial C| = 0$. Le système de boules aléatoires devient alors un système de grains aléatoires et le champ aléatoire M s'écrit :

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) N_\xi(dx, dr), \quad (6)$$

ou

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m\mu(x + rC) N_\xi(dx, dr, dm), \quad (7)$$

si l'on pondère les grains. En choisissant $C = B(0, 1)$, on retrouve le modèle (3) (ou (5)).

Encore plus généralement, on peut remplacer le grain C par une fonction h appelée fonction de forme. Jusqu'alors, un point x du système influait de manière égale sur tous les points situés à une distance r ou inférieure. Désormais, un point x pourra influencer sur tout l'espace et son influence en un point y est donnée par $mh((y - x)/r)$. Ainsi, l'influence du modèle sur une configuration μ est donnée par :

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m\mu[\tau_{x,r}h] N_\xi(dx, dr, dm), \quad (8)$$

où $\mu[\tau_{x,r}h] = \int_{\mathbb{R}^d} h((y - x)/r)\mu(dy)$. Bien entendu, en choisissant $h = 1_{B(0,1)}$ (respectivement $h = 1_C$) on retrouve le modèle sous la forme (5) (respectivement (7)).

Ces modèles ont de multiples applications. Tout d'abord, ils peuvent être vus comme une généralisation des modèles de files d'attente $M/G/\infty$ en dimension 1. Une file d'attente $M/G/\infty$ présente des temps d'arrivée markoviens, des temps de service suivant une loi générale et une infinité de serveurs. Le système de boules aléatoires devient alors un système d'intervalles aléatoires sur $\mathbb{R}$. Avec les notations présentées ci-dessus, le début d'un intervalle x marque le début d'une connection. La longueur r de

l'intervalle représente la durée de connection et le poids m représente le taux de transmission de données. Ce type de files d'attente sert notamment à modéliser des réseaux de télécommunications tels qu'un réseau internet par exemple. C'est le modèle qui est étudié par Mikosch *et al.* dans [40] et par Kaj et Taqqu dans [30] mais on peut également citer les nombreux travaux de Crovella à ce sujet (voir par exemple [13] ou [14]).

En dimension 2, ils modélisent des systèmes d'antennes (les points x) possédant un rayon d'émission r . On peut également y rajouter un poids m correspondant par exemple à l'intensité du signal émis par l'antenne à un instant donné (voir [8]). Dans le cas du modèle (8), en choisissant une fonction de forme radialement décroissante, l'intensité du signal décroît en même temps que la distance à l'antenne augmente (voir [9]). Ces modèles sont également utilisés en radiographie et traitement de l'image. Ils peuvent modéliser des images en noir et blanc. Le nombre de boules couvrant un point y correspond alors au niveau de gris du pixel placé en y . Cette modélisation est présentée dans [2] et [4].

En dimension 3, un modèle de boules aléatoires sert essentiellement à modéliser des milieux poreux ou des matériaux hétérogènes comme cela est développé dans [33] et [53]. Cette idée est également présentée dans [4]. Ils peuvent également rendre compte de la présence de corpuscules, c'est-à-dire d'organes anatomiques de taille réduite, dans les tissus humains ou animaux. C'est la modélisation proposée par Wicksell dans un article de 1925, [56] (voir aussi [57] pour un modèle ellipsoïdal). Toutefois, ce modèle exclut les intersections et ne correspond donc pas au travail de cette thèse. On peut malgré tout se référer à [52], [54] ou [49] pour une étude de ce problème.

Le modèle de boules aléatoires que nous présentons ressemble fortement au modèle booléen défini dans [51]. La différence se trouve dans l'approche de ces modèles. En effet, dans le modèle booléen, on ne tient pas compte du nombre de boules (ou de grains) couvrant un point mais seulement de savoir si le point appartient à l'amas de boules. Une question naturelle émanant de ces modèles est celle de la percolation : sous quelles conditions existe-t-il ou non une composante connexe infinie ? On peut se référer à [39] pour une introduction à ce problème.

Dans les modèles de boules aléatoires, le nombre de boules couvrant un point est pris en compte. On peut le voir comme la masse induite par l'amas de boules en ce point. Dans des travaux de Biermé *et al.* ([3]) et de Privault et Shen ([41]), le modèle de boules aléatoires est étudié pour son comportement fractionnaire sous différentes hypothèses sur la mesure ponctuelle qui génère les boules. La question qui nous motivera plus particulièrement est la suivante : quel est le comportement macroscopique du champ aléatoire M défini en (3) ? Étudier le champ aléatoire au niveau macroscopique, ou lui appliquer un "dézoom", revient mathématiquement à augmenter le nombre de centres par unité de volume tout en diminuant le volume moyen des boules. De même, on peut également étudier son comportement microscopique en zoomant le modèle, c'est-à-dire en augmentant le rayon moyen et en diminuant le nombre moyen de boules par unité de volume. Dans la suite, nous donnons les principaux résultats sur le comportement macroscopique et le comportement microscopique des modèles de boules aléatoires.

Chapitre 1

Comportement macroscopique des modèles de boules aléatoires

1.1 Premiers résultats en dimension quelconque

Un article fondateur sur l'étude macroscopique des modèles de boules aléatoires (ou plus précisément de grains aléatoires) est l'article de Kaj *et al.*, [29]. Le modèle est étudié sous la forme (6). Les hypothèses sur le modèle, après adaptation à nos notations, sont les suivantes :

- Les centres des grains $(X_i)_{i \geq 1}$ sont générés par un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité λdx . Le paramètre λ est l'intensité du processus, c'est-à-dire le nombre moyen de points par unité de volume. Cette densité étant constante, on dit que le processus ponctuel de Poisson est homogène.
- Les rayons $(R_i)_{i \geq 1}$ sont générés indépendamment des centres et indépendamment entre eux suivant une loi de probabilité F . La loi F est telle que le volume moyen d'un grain est égal à 1 (plus généralement fini) i.e. :

$$|C| \int_{\mathbb{R}^+} r^d F(dr) = 1, \quad (1.1)$$

où $|C|$ est le volume du compact C . Dans la suite on supposera $|C| = 1$.

Le fait que le volume moyen d'une boule soit fini nous assure en particulier que l'amas de boules ne recouvre pas tout l'espace (voir Proposition 3.1 dans [39]).

Un résultat classique sur les processus ponctuels de Poisson (voir Lemme 6.4.VI dans [15]) indique que les couples (X_i, R_i) forment un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$, appelé processus ponctuel de Poisson marqué, d'intensité

$$n(dx, dr) = \lambda dx \times F(dr). \quad (1.2)$$

Le fait que la mesure n soit une mesure produit sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ indique l'indépendance entre les centres et les rayons. Appelons N la mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ d'intensité n , on peut alors écrire le champ aléatoire sous la forme (6) pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}^d$ (possiblement signée) de variation totale finie, c'est-à-dire $|\mu|(\mathbb{R}^d) < +\infty$. On notera $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures de variation totale finie. On obtient, pour toute mesure μ dans $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$:

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) N(dx, dr). \quad (1.3)$$

On dit que M est représenté sous la forme d'une intégrale poissonnienne, c'est-à-dire sous la forme de l'intégrale d'une fonction déterministe contre une mesure aléatoire de Poisson.

1.1.1 Étude asymptotique

Pour mener l'étude macroscopique du champ aléatoire M , on fait tendre le paramètre λ vers l'infini tout en compensant cette augmentation en réduisant le rayon moyen d'une boule. Pour cela, on effectue le changement de variable $r \mapsto \rho r$ dans la loi de probabilité F qui devient $F_\rho : r \mapsto F(r/\rho)$ et l'on fait tendre ρ vers 0. Pour bien noter que l'on augmente λ et que l'on diminue ρ simultanément, on notera par la suite $\lambda = \lambda(\rho)$. Le champ aléatoire étudié devient :

$$M_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) N_\rho(dx, dr), \quad (1.4)$$

où N_ρ est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ d'intensité :

$$n_\rho(dx, dr) = \lambda(\rho) dx \times F_\rho(dr). \quad (1.5)$$

La représentation sous forme intégrale permet de calculer aisément l'espérance de $M_\rho(\mu)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_\rho(\mu)] &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) n_\rho(dx, dr) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{x+rC}(y) \mu(dy) \lambda(\rho) dx F_\rho(dr) \\ &= \lambda(\rho) \int_{\mathbb{R}^+} r^d F_\rho(dr) \mu(\mathbb{R}^d) \\ &= \lambda(\rho) \rho^d \mu(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Cette espérance est donc finie pour $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$. On en déduit aisément que :

$$\frac{\mathbb{E}[M_\rho(\mu)]}{\lambda(\rho) \rho^d} \rightarrow \mu(\mathbb{R}^d),$$

quand $\rho \rightarrow 0$ et $\lambda(\rho) \rightarrow +\infty$. On s'intéresse désormais aux fluctuations de M_ρ autour de sa moyenne :

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) N_\rho(dx, dr) - \mathbb{E}[M_\rho(\mu)] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) \widetilde{N}_\rho(dx, dr),$$

avec $\widetilde{N}_\rho(dx, dr) = N_\rho(dx, dr) - n_\rho(dx, dr)$. La mesure $\widetilde{N}_\rho$ est une mesure de Poisson compensée, d'intensité n_ρ .

Par la suite, les résultats obtenus seront des convergences des lois fini-dimensionnelles. Pour un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$, on notera $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ la convergence des lois fini-dimensionnelles sur l'espace $\mathcal{A}$. Plus précisément, $X_\rho \xrightarrow{\mathcal{A}} X$ signifie que pour tout n entier strictement positif et pour tout $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{A}^n$:

$$(X_\rho(\mu_1), \dots, X_\rho(\mu_n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X(\mu_1), \dots, X(\mu_n)), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Le premier résultat asymptotique concernant les variations de M_ρ est obtenu grâce au théorème limite central lorsque la loi des volumes admet une variance finie (i.e. F admet

un moment d'ordre $2d$). Ce résultat est obtenu pour des mesures à densité, $\mu(dx) = \phi(x)dx$ avec $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Par la suite, on notera également $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble de ces mesures.

Théorème 1.1 (Kaj, Leskelä, Norros, Schmidt [29]). *Supposons que la loi de probabilité F admet un moment d'ordre $2d$. Alors, lorsque $\rho \rightarrow 0$ et $\lambda \rightarrow +\infty$,*

$$\frac{\widetilde{M}_\rho(\cdot)}{\sqrt{\lambda\rho^{2d}}} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)} W, \quad (1.6)$$

où W est la fonctionnelle linéaire gaussienne centrée sur L^2 de covariance :

$$\mathbb{E}[W(\phi)W(\psi)] = V^2 \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\psi(x)dx,$$

avec $V^2 = \int_{\mathbb{R}^+} r^{2d}F(dr)$.

On s'intéressera désormais au cas où les volumes sont de variance infinie, c'est-à-dire que la loi des rayons F n'admet pas de moment d'ordre $2d$. On fait alors l'hypothèse suivante sur la queue de distribution de la loi F :

$$\bar{F}(r) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^\beta} \quad (1.7)$$

où $\bar{F}(r) = \mathbb{P}(R > r)$ pour une variable aléatoire R de loi F . Si F admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, la condition devient :

$$f(r) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{C_\beta}{r^{\beta+1}}. \quad (1.8)$$

La condition (1.1) exige directement que $\beta > d$. Pour obtenir une loi de volume de variance infinie, on suppose :

$$d < \beta < 2d. \quad (1.9)$$

Cela implique que la loi des volumes est une loi à queue lourde d'indice β/d .

Avec ces hypothèses, on obtient trois régimes limites différents et donc une plus grande diversité et une plus grande richesse dans les champs aléatoires limites obtenus. Cette trichotomie peut être comprise en regardant le comportement asymptotique du nombre moyen de grains couvrant l'origine avec un rayon suffisamment grand (disons plus grand que 1). Heuristiquement on a :

$$\int_{\{(x,r) : 0 \leq x+rC, r>1\}} \lambda(\rho)dx F_\rho(dr) \sim_{\rho \rightarrow 0} \lambda(\rho)\rho^\beta \int_1^{+\infty} r^{d-\beta-1}dr.$$

Grâce à la condition (1.9), l'intégrale est finie et donc les trois régimes limites dépendent du comportement de $\lambda(\rho)\rho^\beta$:

- Régime grand-rayon $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$,
- Régime intermédiaire $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$,
- Régime petit-rayon $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow 0$.

Dans le régime grand-rayon, la vitesse d'augmentation du nombre de centres $\lambda(\rho)$ est supérieure à la queue de distribution de F_ρ qui est de l'ordre de ρ^β d'après la condition (1.7). Le nombre de grands grains restera suffisamment élevé pour que l'on observe des phénomènes de dépendance à longue portée. Au contraire, dans le cas petit-rayon, l'augmentation du nombre de centres est négligeable devant la vitesse de diminution des rayons. On verra alors apparaître de l'indépendance à longue portée due au caractère très ponctuel du champ aléatoire limite. Le régime intermédiaire représente en quelque sorte un mixte des deux précédents ou plus précisément, comme on le verra dans la section 1.1.3, une étape entre le champ aléatoire de départ et les champs aléatoires limites des régimes grand-rayon et petit-rayon.

Les résultats sont obtenus pour la sous-classe suivante de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$:

Définition 1.2. Soit $\alpha \in (0, 1)$. L'espace $\mathcal{Z}^\alpha$ est l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\mu|(dx)|\mu|(dy)}{|x-y|^{(1-\alpha)d}} < +\infty. \quad (1.10)$$

Ces espaces sont liés à l'énergie de Riesz d'une mesure (voir [36]). Ils permettent à la fois d'obtenir le contrôle nécessaire sur les mesures pour l'acquisition des résultats et d'assurer l'existence des champs aléatoires limites ainsi obtenus. On peut remarquer dans un premier temps que les mesures de dirac δ_y n'appartiennent pas à l'espace $\mathcal{Z}^\alpha$. De ce fait, notre étude ne concerne pas les processus de la forme (1). La proposition suivante détaille les relations d'inclusion entre ces espaces :

Proposition 1.3 (Kaj, Leskelä, Norros, Schmidt [29]). Pour tout $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$,

$$L^1 \cap L^2 \subset \mathcal{Z}^{\alpha_1} \subset \mathcal{Z}^{\alpha_2} \subset \mathcal{Z}.$$

Avec la condition (1.7), on obtient les résultats suivants sur le comportement asymptotique de $\widetilde{M}_\rho$:

Théorème 1.4 (Kaj, Leskelä, Norros, Schmidt [29]). Soit $\alpha \in (0, 2 - \beta)$:

1. (Régime grand-rayon) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$. Soit $n(\rho) = \sqrt{\lambda\rho^\beta}$. Alors,

$$\frac{\widetilde{M}_\rho}{n(\rho)} \xrightarrow{\mathcal{Z}^\alpha} W_\beta,$$

où $W_\beta(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) G_\beta(dx, dr)$ et G_β est une mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ de mesure de contrôle $C_\beta r^{-\beta-1} dx dr$.

2. (Régime intermédiaire) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$ quand $\rho \rightarrow 0$. Alors,

$$\widetilde{M}_\rho \xrightarrow{\mathcal{Z}^\alpha} J_a,$$

où $J_a(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(x + rC) \widetilde{N}_{a,\beta}(dx, dr)$ et $\widetilde{N}_\beta$ est une mesure ponctuelle de Poisson compensée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ d'intensité $C_\beta a r^{-\beta-1} dx dr$.

3. (Régime petit-rayon) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow 0$ quand $\rho \rightarrow 0$. Soit $n(\rho) = (\lambda\rho^\beta)^{d/\beta}$ et $\gamma = \beta/d \in (1, 2)$. Alors,

$$\frac{\widetilde{M}_\rho}{n(\rho)} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)} Z_\gamma,$$

où, pour $\mu(dx) = \phi(x)dx$, $Z_\gamma(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\Lambda_\gamma(dx)$ et Λ_γ est une mesure γ -stable de mesure de contrôle $\sigma_\gamma dx$ pour

$$\sigma_\gamma = \frac{C_\beta}{d} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - \cos(r)}{r^{\gamma+1}} dr,$$

et de paramètre d'asymétrie 1.

Pour rappel, pour $\gamma \in (1, 2)$, si M est une mesure γ -stable sur E de mesure de contrôle m et de fonction d'asymétrie β , l'intégrale $I(f) = \int_E f(x)M(dx)$ est bien définie pour toute fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_E |f(x)|^\gamma m(dx) < +\infty. \quad (1.11)$$

De plus, sous la condition (1.11), $I(f)$ suit une loi stable $S_\gamma(\sigma_f, \beta_f, 0)$ où :

$$\sigma_f = \left(\int_E |f(x)|^\gamma m(dx) \right)^{1/\gamma}$$

et

$$\beta_f = \frac{\int_E |f(x)|^\gamma \text{sign}(f(x))\beta(x)m(dx)}{\int_E |f(x)|^\gamma m(dx)}.$$

Notons que pour tout $a \in (0, +\infty)$ et pour tout $\mu \in \mathcal{Z}^\alpha$, on a :

$$J_a(\mu) \stackrel{\mathcal{L}}{=} J(\mu_a) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu_a(x + rC) \widetilde{N}_\beta(dx, dr)$$

où, pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$, $\mu_a(A) = \mu(a^{-1}A)$ et $\widetilde{N}_\beta = \widetilde{N}_{1,\beta}$ est une mesure aléatoire de Poisson compensée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ d'intensité $C_\beta r^{-\beta-1} dx dr$. Le champ aléatoire J est similaire au processus X du modèle "micro-boules" dans [4] et est une généralisation du Processus Télécom en dimension 1 (voir [30]).

Pour démontrer ces résultats, on utilise la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\widetilde{M}_\rho(\mu)$. Pour une intégrale poissonnienne, la fonction caractéristique est donnée dans [15]. Dans le cas de l'intégrale poissonnienne compensée et renormalisée $\widetilde{M}_\rho(\mu)/n(\rho)$, la fonction caractéristique s'écrit pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} \left[e^{i\theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu)} \right] = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \psi \left(\theta \frac{\mu(x + rC)}{n(\rho)} \right) \lambda(\rho) dx F_\rho(dr) \right),$$

où $\psi(u) = e^{iu} - 1 - iu$. Heuristiquement, dans le cas grand-rayon, l'intégrande est équivalente à $-\frac{1}{2}\theta^2 \frac{\mu(x+rC)^2}{n(\rho)^2}$ alors que la mesure elle est équivalente à $\lambda(\rho)\rho^\beta C_\beta dx r^{-\beta-1} dr$. Ainsi, les termes en ρ se compensent et la fonction caractéristique converge vers

$$\mathbb{E} \left[e^{i\theta W_\beta(\mu)} \right] = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \theta^2 \mu(x + rC)^2 C_\beta dx r^{-\beta-1} dr,$$

ce qui implique la convergence en loi, à μ fixé, de $\widetilde{M}_\rho(\mu)$ vers $W_\beta(\mu)$. Des raisonnements similaires permettent d'obtenir les convergences en loi dans le cas intermédiaire et le cas petit-rayon.

Pour obtenir la convergence des lois fini-dimensionnelles à partir de la convergence en loi uni-dimensionnelle, on utilise le Théorème de Cramér-Wold (voir [7]). En effet, on peut remarquer que les champs aléatoires $\widetilde{M}_\rho$, W_β , J_a et Z_γ sont linéaires. La structure linéaire de l'espace $\mathcal{Z}^\alpha$ (ou de l'espace $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ dans le cas petit-rayon) nous permet d'utiliser ce théorème. Ainsi, la convergence en loi uni-dimensionnelle implique la convergence des lois fini-dimensionnelles.

On peut remarquer que, dans le cas petit-rayon, le paramètre de stabilité γ du champ aléatoire limite Z_γ est l'indice de queue lourde de la loi des volumes. Si la loi des volumes admet une variance finie, ce paramètre vaut 2 et le champ aléatoire Z_γ est alors 2-stable, c'est-à-dire gaussien ce qui fait le lien avec le Théorème 1.1. De plus, la forme du grain initial C n'intervient pas dans le résultat 3. Le caractère très ponctuel de ce champ aléatoire est dû à la très forte décroissance des rayons vers 0. La forme de grain ou de boule n'intervient plus. Ceci nous oblige à nous restreindre à des mesures diffuses.

1.1.2 Propriétés des champs aléatoires limites

Les champs aléatoires limites obtenus au Théorème 1.4 jouissent de propriétés intéressantes. Ils présentent en particulier des comportements radicalement opposés en ce qui concerne la dépendance à longue portée.

Proposition 1.5 (Kaj, Leskelä, Norros, Schmidt [29]). *Soit β satisfaisant la condition (1.9). Alors, les champs aléatoires W_β et J présentent de la dépendance à longue portée, c'est-à-dire :*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |Cov(W_\beta(1_{B(0,1)}), W_\beta(1_{B(0,r) \setminus B(0,1)}))| = +\infty. \quad (1.12)$$

La dépendance à longue portée caractérisée par (1.12) signifie que ce qui se passe en un point garde une influence très forte sur ce qui se passe dans les zones très éloignées de ce point. Cela est dû au nombre non négligeable de grands grains qui, en couvrant des zones très larges, créent de la dépendance entre des zones très éloignées de l'espace. À la vue du champ aléatoire Z_γ , il est clair que si μ_1 et μ_2 ont des supports disjoints, $Z_\gamma(\mu_1)$ et $Z_\gamma(\mu_2)$ seront des variables aléatoires indépendantes. Cela implique bien entendu de l'indépendance à longue portée. Cette indépendance s'explique par le caractère très ponctuel du champ aléatoire Z_γ dû au nombre négligeable de grands grains à l'échelle macroscopique et engendre également une certaine irrégularité qui nous oblige à évaluer notre champ aléatoire en des mesures plus régulières, à savoir des mesures à densité dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Les champs aléatoires W_β , J et Z_γ présentent également des propriétés géométriques. Les propriétés suivantes sont issues de [29], [6] et de [8] :

Proposition 1.6. *Soit β satisfaisant la condition (1.9), $\gamma = \beta/d$ et soit $\alpha \in (0, 2 - \beta)$. Alors,*

- Le champ aléatoire W_β est stationnaire sur $\mathcal{Z}^\alpha$, c'est-à-dire :

$$\forall \mu \in \mathcal{Z}^\alpha, \forall s \in \mathbb{R}^d, W_\beta(\tau_s \mu) \stackrel{fdd}{=} W_\beta(\mu), \quad (1.13)$$

où $\tau_s \mu(A) = \mu(A - s)$ pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$. Le champ J est également stationnaire sur $\mathcal{Z}^\alpha$ et le champ Z_γ est stationnaire sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

- Si $C = B(0, 1)$, le champ aléatoire W_β est isotrope sur $\mathcal{Z}^\alpha$, c'est-à-dire :

$$\forall \mu \in \mathcal{Z}^\alpha, \forall \Theta \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d), W_\beta(\Theta \mu) \stackrel{fdd}{=} W_\beta(\mu), \quad (1.14)$$

où $\Theta \mu(A) = \mu(\Theta^{-1}A)$ pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$. Le champ J est également isotrope sur $\mathcal{Z}^\alpha$ si $C = 1_{B(0,1)}$ et le champ Z_γ est isotrope sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout C compact de $\mathbb{R}^d$.

- W_β est auto-similaire d'index $(d - \beta)/2$, c'est-à-dire, pour tout $a > 0$, pour tout $\mu \in \mathcal{Z}^{2-\beta/d}$,

$$W_\beta(\mu_a) = a^{(d-\beta)/2} W_\beta(\mu), \quad (1.15)$$

où $\mu_a(A) = \mu(a^{-1}A)$ pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$. Le champ Z_γ est auto-similaire sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ d'index $(\beta - d)/\gamma$.

Les propriétés d'invariance par rotation et translation sont principalement dues à l'invariance par rotation et translation de la mesure de Lebesgue et à l'invariance par rotation d'une boule de $\mathbb{R}^d$. Les champs aléatoires auto-similaires constituent une classe très intéressante de champs aléatoires. Le champ aléatoire W_β fait partie des champs aléatoires gaussiens, stationnaires et auto-similaires caractérisés par Dobrushin dans [18]. Pour une étude des champs aléatoires auto-similaires, non nécessairement gaussiens et non nécessairement stationnaires, on pourra se référer à [46], chapitre 7 ou à [2].

On notera que J n'est pas auto-similaire. Toutefois, il présente une propriété d'agrégé-similarité, c'est-à-dire que, pour tout $\mu \in \mathcal{Z}^\alpha$, pour tout $m \geq 1$:

$$J(\mu_{a_m}) \stackrel{fdd}{=} \sum_{i=1}^m J^i(\mu), \quad (1.16)$$

où les J^i sont des copies indépendantes de J et $a_m = m^{1/(d-\beta)}$. Cette propriété est une généralisation aux champs aléatoires du phénomène du même nom. Ce phénomène est bien connu dans le cadre des processus, voir [27] par exemple.

Comme cela est démontré dans [3], le champ aléatoire J , appelé champ fractionnaire de Poisson, partage de nombreuses propriétés avec le champ fractionnaire brownien, qui est une généralisation du mouvement brownien fractionnaire. Il n'est pas étonnant que le processus J soit fractionnaire. En effet, Mandelbrot a développé l'idée qu'en additionnant une infinité de sources poissoniennes on obtenait des objets fractals, voir [12] par exemple. Le champ aléatoire J joue un rôle particulier que nous détaillerons dans la partie suivante.

1.1.3 Pont poissonien

Le régime intermédiaire, décrit dans la section 1.1.1, semble être un cas à part dans l'étude des fluctuations du champ aléatoire M_ρ . Ainsi, dans le Théorème 1.4, point 2, il n'y a pas de terme de normalisation. De plus, il y a une grande similarité entre le

champ aléatoire J obtenu et le champ aléatoire de départ $\widetilde{M}_\rho$. En effet, ils ne diffèrent seulement que par les mesures de Poisson compensées qui dirigent l'intégrale et encore, les intensités de celles-ci sont semblables. Tout cela suggère que nous ne sommes pas totalement passés à la limite mais seulement restés dans un état intermédiaire. Cette impression est confirmée dans l'étude de Gaigalas dédiée à ce processus en dimension 1, [20]. Il y montre en particulier que, renormalisé correctement, le processus J_a tend, lorsque a tend vers l'infini, vers le processus limite obtenu dans le cas gros-rayon, c'est-à-dire, en dimension 1, un mouvement brownien fractionnaire. De même, lorsque a tend vers 0, le processus J_a tend vers le processus limite obtenu dans le cas petit-rayon qui est en dimension 1 un processus de Lévy stable. Ce résultat se généralise aisément en dimension quelconque et on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.7. *Soient $a \in (0, +\infty)$, β satisfaisant la condition (1.9), $\gamma = \beta/d$ et $\alpha \in (0, 2 - \beta)$. Alors,*

- si $a \rightarrow +\infty$,

$$\frac{J_a}{\sqrt{a}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^\alpha} W_\beta; \quad (1.17)$$

- si $a \rightarrow 0$,

$$\frac{J_a}{a^{\gamma/d}} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)} Z_\gamma. \quad (1.18)$$

Cette propriété a été nommée par Gaigalas une propriété de pont Poissonien car il permet de faire le pont entre deux processus de lois différentes et ce via une intégrale Poissonienne.

1.2 Robustesse du Théorème 1.4

Dans ce travail de thèse, on tâchera de renforcer les résultats du Théorème 1.4 dans plusieurs directions : soit en le généralisant à des hypothèses plus larges (voir chapitres 2 et 4), soit en renforçant la convergence fini-dimensionnelle par de la convergence fonctionnelle (voir chapitre 3). Plusieurs travaux ont déjà été publiés en ce sens et nous les résumons ici.

1.2.1 Étude microscopique

Biermé et Estrade étudient dans [4] le comportement microscopique du champ aléatoire M . Pour étudier le champ aléatoire au niveau macroscopique, on diminue le nombre de centres et on augmente le rayon moyen contrairement à ce qui a été fait dans la Section 1.1.1. Cela revient également à faire un zoom sur le modèle de grains aléatoires. Le champ aléatoire échelonné M_ρ est le même sauf que l'étude se fait lorsque ρ tend vers $+\infty$ et que $\lambda(\rho)$ tend vers 0. Cette fois-ci, on génère directement les couples (centre, rayon) par un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ d'intensité $\lambda dx r^{-\beta-1} 1_{(0,1)}(r) dr$. Les centres sont toujours générés par un processus ponctuel de Poisson homogène mais les rayons ne suivent plus une loi de probabilité. On peut remplacer la fonction $r \mapsto r^{-\beta-1} 1_{(0,1)}(r)$ dans l'intensité par une fonction f sur $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} r^d f(r) dr < +\infty \quad (1.19)$$

et

$$f(r) \sim_{r \rightarrow 0} \frac{C_\beta}{r^{\beta+1}}. \quad (1.20)$$

La condition (1.19) correspond à l'hypothèse (1.1) sur le volume des boules dans le cas macroscopique. Par contre, on remplace la condition (1.8) qui portait sur la queue de la distribution des rayons par une hypothèse sur la concentration autour de 0 de la fonction f . Cette condition implique notamment que f n'est pas intégrable et donc, a fortiori, elle n'est pas une densité de probabilité. En combinant les hypothèses (1.19) et (1.20) on a nécessairement $0 < \beta < d$.

Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus dans le Théorème 1.4 dans le cas macroscopique à ceci près qu'il n'existe pas de résultat sous le régime petit-rayon dans le cadre microscopique. Cette similarité a permis de regrouper l'étude du comportement macroscopique et l'étude du comportement microscopique sous une seule et même étude dans [6] (voir aussi [5]). Cette étude conjointe du cas macroscopique et du cas microscopique sera reprise dans [8] pour l'étude des modèles de boules aléatoires pondérées.

1.2.2 Modèle de boules aléatoires pondérées

Dans le modèle de boules aléatoires pondérées introduit par Breton et Dombry dans [8], on adjoint à chaque boule (ou grain) un poids aléatoire m . Le champ aléatoire M prend alors la forme (5) :

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m \mu(B(x, r)) N(dx, dr, dm),$$

où N est une mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité :

$$n(dx, dr, dm) = \lambda dx \times F(dr) \times G(dm). \quad (1.21)$$

Ici encore, la forme produit de l'intensité indique l'indépendance entre les centres, les rayons et les poids des boules. Les centres sont donc toujours générés selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité λ . La mesure F dirige la distribution des rayons. On suppose que c'est une mesure à densité sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions de volume fini (1.1) et de queue lourde (1.8) (les conditions (1.19) et (1.20) dans le cas microscopique). La nouveauté consiste en l'introduction de la loi G , la loi des poids m . On suppose que G appartient au domaine d'attraction d'une loi α -stable $S_\alpha(\sigma, b, \tau)$ avec $\alpha \in (1, 2]$, c'est-à-dire pour tout $(X_1, \dots, X_n)$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi G :

$$n^{-1/\alpha}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} S_\alpha(\sigma, b, \tau). \quad (1.22)$$

Dans le cas $\alpha = 2$, n'importe quelle loi de variance finie convient. En particulier, si $G = \delta_1$ on recouvre les hypothèses de la Section 1.1.1. Pour $\alpha \in (1, 2)$, on pourra choisir une loi à queue lourde. On applique la procédure de "dézoom" au modèle, c'est-à-dire que l'on effectue le changement de variable $r \mapsto \rho r$ dans l'intensité n puis on fait tendre ρ vers 0 et $\lambda = \lambda(\rho)$ vers l'infini. Le "dézoom" ne s'applique pas à la loi des poids. On étudie alors le comportement asymptotique du champ aléatoire :

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \widetilde{N}_\rho(dx, dr, dm), \quad (1.23)$$

pour tout $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$, où $\tilde{N}_\rho$ est une mesure ponctuelle de Poisson d'intensité :

$$n_\rho(dx, dr, dm) = \lambda(\rho)dx \times f(r/\rho)\frac{dr}{\rho} \times G(dm). \quad (1.24)$$

L'introduction d'un poids aléatoire dans le modèle ne modifie pas les trois régimes limites décrits à la section 1.1.1 à savoir :

- Régime grand-rayon $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$,
- Régime intermédiaire $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$,
- Régime petit-rayon $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow 0$.

L'espace sur lequel les résultats sont obtenus dans [8] diffère de l'espace $\mathcal{Z}^\alpha$ de la Section 1.1.1.

Définition 1.8. Pour $\alpha \in (1, 2]$ et $\beta > 0$, soit $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ telles qu'il existe une constante C et deux réels $0 < p < \beta < q$ tels que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \leq C(r^p \wedge r^q), \quad (1.25)$$

où, pour tous réels a et b , $a \wedge b = \min(a, b)$.

Cet espace est stable par translations, rotations et dilatations et vérifie les propriétés d'emboîtement suivantes :

Proposition 1.9. Soit $\alpha \in (1, 2]$ et $\beta \in (d, \alpha d)$:

$$L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}_{\alpha,\beta} \subset \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d).$$

Les résultats obtenus dans [8] sont donnés ci-dessous pour un grain $C = B(0, 1)$ mais ils se généralisent aisément à toute forme de compact.

Théorème 1.10 (Breton, Dombry [8]). Soit $\alpha \in (1, 2]$ et $\beta \in (d, \alpha d)$:

1. (Régime grand-rayon) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$. Soit $n(\rho) = (\lambda\rho^\beta)^{1/\alpha}$. Alors,

$$\frac{\tilde{M}_\rho}{n(\rho)} \xrightarrow{\mathcal{M}_{\alpha,\beta}} Z_\alpha,$$

où $Z_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) M_\alpha(dx, dr)$ et M_α est une mesure α -stable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ de mesure de contrôle $\sigma^\alpha C_\beta r^{-\beta-1} dx dr$ et de paramètre d'asymétrie b .

2. (Régime intermédiaire) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$ quand $\rho \rightarrow 0$. Alors,

$$\tilde{M}_\rho \xrightarrow{\mathcal{M}_{\alpha,\beta}} J_a,$$

où $J_a(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m \mu(B(x, r)) \tilde{N}_{a,\beta}(dx, dr)$ avec $\tilde{N}_{a,\beta}$ une mesure ponctuelle de Poisson compensée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $C_\beta a r^{-\beta-1} dx dr G(dm)$.

3. (Régime petit-rayon) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow 0$ quand $\rho \rightarrow 0$. Soit $n(\rho) = (\lambda\rho^\beta)^{d/\beta}$ et $\gamma = \beta/d \in (1, 2)$. Alors,

$$\frac{\widetilde{M}_\rho}{n(\rho)} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)} \widetilde{Z}_\gamma,$$

où, pour $\mu(dx) = \phi(x)dx$, $\widetilde{Z}_\gamma(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \Lambda_\gamma(dx)$ et Λ_γ est une mesure γ -stable de mesure de contrôle $\sigma_\gamma dx$ pour

$$\sigma_\gamma = \frac{C_\beta}{d} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - \cos(r)}{r^{\gamma+1}} dr \int_{\mathbb{R}} |m|^\gamma G(dm),$$

et de paramètre d'asymétrie constant :

$$b_\gamma = - \frac{\int_{\mathbb{R}} \epsilon(m) |m|^\gamma G(dm)}{\int_{\mathbb{R}} |m|^\gamma G(dm)}.$$

De même que dans le point 2 du Théorème 1.4, on peut noter que pour tout $a \in (0, +\infty)$ et pour tout $\mu \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta}$:

$$J_a(\mu) = J(\mu_a) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \mu_a(B(x, r)) \widetilde{N}_\beta(dx, dr, dm),$$

où $\widetilde{N}_\beta$ est une mesure ponctuelle de Poisson compensée d'intensité $C_\beta r^{-\beta-1} dx dr G(dm)$.

À l'image du Théorème 1.4, la preuve des résultats du Théorème 1.10 utilise la fonction caractéristique de la variable aléatoire $\frac{\widetilde{M}_\rho(\mu)}{n(\rho)}$. Celle-ci est cette fois donnée pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathbb{E} \left[e^{i\theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu)} \right] = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \psi \left(\theta \frac{m \mu(B(x, r))}{n(\rho)} \right) \lambda(\rho) dx F_\rho(dr) G(dm) \right).$$

La mesure G ne dépendant pas de ρ , on peut réécrire cette fonction :

$$\mathbb{E} \left[e^{i\theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu)} \right] = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \psi_G \left(\theta \frac{\mu(B(x, r))}{n(\rho)} \right) \lambda(\rho) dx F_\rho(dr) \right),$$

où $\psi_G(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(mu) G(dm)$. Ici encore, on étudie la convergence de cette fonction caractéristique, ce qui nous donne la convergence en loi μ par μ . Pour obtenir la convergence des lois fini-dimensionnelles, on utilise des arguments de linéarité et le théorème de Cramér-Wold.

Ici encore, c'est l'indice de queue lourde de la loi des volumes qui donne le paramètre de stabilité du champ aléatoire limite dans le cas petit-rayon. Avec l'introduction des poids de loi G , il apparaît que le paramètre de stabilité du champ aléatoire limite du cas grand-rayon est le paramètre de stabilité de la loi G . Bien entendu, ces résultats recouvrent en tous points le Théorème 1.4 lorsque $G = \delta_1$. De même que pour le Théorème 1.4, il existe une version microscopique du Théorème 1.10 dans les cas grand-rayon et intermédiaire (voir [8]).

Les champs aléatoires limites obtenus dans le Théorème 1.10 jouissent de propriétés similaires à celles des champs aléatoires limites obtenus dans le Théorème 1.4. En effet, ils sont stationnaires et isotropes. De plus, Z_α est auto-similaire d'indice $(d - \beta)/\alpha$, $\widetilde{Z}_\gamma$

est auto-similaire d'indice $(d - \beta)/\gamma$ et J présente une propriété d'agrégé-similarité. On peut également montrer que le champ aléatoire J_a du point 2 réalise un pont poissonien entre le champ aléatoire Z_α du point 1 et le champ aléatoire $\tilde{Z}_\gamma$ du point 3.

Les mêmes auteurs, dans [9], ont étendu les résultats du Théorème 1.10 lorsque le modèle est écrit sous la forme (8). Les hypothèses sur la mesure N (et donc sur les mesures F et G) restent inchangées. On choisira une fonction h continue presque-partout telle que :

$$h^*(x) := \sup \{|h(rx)| : r \geq 1\} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d). \quad (1.26)$$

En particulier, $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Les résultats sont obtenus uniquement sous les régimes grand-rayon et intermédiaire et pour des mesures à densité dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$. En dehors de ces deux points, ils sont en tout point similaires à ceux du Théorème 1.10. Avec les notations du Théorème 1.10 on obtient :

Théorème 1.11 (Breton, Dombry [9]). *Soit $\alpha \in (1, 2]$ et $\beta \in (d, \alpha d)$:*

1. (Régime grand-rayon) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$. Soit $n(\rho) = (\lambda\rho^\beta)^{1/\alpha}$. Alors,

$$\frac{\widetilde{M}_\rho}{n(\rho)} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)} Z_\alpha,$$

où $Z_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu[\tau_{x,r}h] M_\alpha(dx, dr)$ et M_α est une mesure α -stable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ de mesure de contrôle $\sigma^\alpha C_\beta r^{-\beta-1} dx dr$ et de paramètre d'asymétrie b .

2. (Régime intermédiaire) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$ quand $\rho \rightarrow 0$. Alors,

$$\widetilde{M}_\rho \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)} J_a,$$

où $J_a(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m\mu[\tau_{x,r}h] \tilde{N}_\beta(dx, dr, dm)$ avec $\tilde{N}_\beta$ une mesure ponctuelle de Poisson compensée sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $C_\beta a r^{-\beta-1} dx dr G(dm)$.

1.2.3 Convergence fonctionnelle

Dans cette section, nous rappelons les travaux qui ont permis d'améliorer le Théorème 1.4 en passant d'une convergence des lois fini-dimensionnelles à une convergence fonctionnelle. La convergence fonctionnelle est obtenue à partir d'une convergence des lois fini-dimensionnelles en y ajoutant de la tension. Ainsi, il faut pour l'obtenir trouver une sous-classe de mesures $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ pour laquelle la suite $(M_\rho(\mu))_{\mu \in \mathcal{A}}$ est tendue. Dans [9], Breton et Dombry montrent que de la tension peut être obtenue pour une sous-famille paramétrique de mesures $\mu_t(dy) = \phi_t(y)dy$, $t \in \mathbb{R}^p$.

Pour construire la famille $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^p}$ on introduit les notations suivantes. Pour un couple $(s, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ tel que $\forall 1 \leq i \leq p; s_i \leq t_i$, on définit le pavé $[s, t] = \prod_{i=1}^p [s_i, t_i]$. La dimension du pavé $[s, t]$ est donnée par le nombre de i tels que $s_i < t_i$. Un p -uplet de $\mathbb{R}^p$ est adapté au pavé $[s, t]$ si $a_i = 0$ lorsque $s_i = t_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$. On peut alors définir les accroissements d'une mesure μ_t de densité ϕ_t sur un bloc $[s, t]$ par :

$$\phi_{[s,t]} = \sum_{\epsilon} (-1)^{p - \sum_{i=1}^p \epsilon_i} \phi_{s_1 + \epsilon_1(t_1 - s_1), \dots, s_p + \epsilon_p(t_p - s_p)} \quad (1.27)$$

où la somme porte sur tous les $\epsilon \in \{0, 1\}^p$, adaptés à $[s, t]$. La condition suivante nous donne un contrôle sur de tels accroissements qui permettra par la suite d'obtenir une convergence fonctionnelle. On dit qu'une famille $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^p}$ satisfait la condition (P_γ) pour $\gamma \geq 1$ si pour tout $T > 0$, il existe une constante $C_T > 0$ tel que, pour tout $[s, t] \subset [-T, T]^p$,

$$\|\phi_{[s,t]}\|_\gamma^\gamma \leq C_T \prod_{i: s_i < t_i} |t_i - s_i|. \quad (P_\gamma)$$

Les deux exemples suivants, proposés par Breton et Dombry dans [9], montrent que cette condition est naturelle :

Exemple 1.12 (Breton, Dombry [9]). *Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on définit*

$$\phi_t = \text{sign}(t_1) \dots \text{sign}(t_p) 1_{[0,t]}.$$

Ainsi, $\mu_t(dy) = \phi_t(y)dy$ est la mesure uniforme sur le pavé $[0, t]$. En particulier, on vérifie que pour tout pavé $[s, t]$ non dégénéré (i.e. $s_i < t_i$, pour tout i), $\phi_{[s,t]} = 1_{[s,t]}$. Ainsi,

$$\|\phi_{[s,t]}\|_\gamma^\gamma = \prod_{i=1}^p |t_i - s_i|.$$

Dans le cas d'un pavé dégénéré $[s, t] \subset [-T, T]^p$, on a

$$\|\phi_{[s,t]}\|_\gamma^\gamma = \prod_{i: s_i = t_i} |s_i| \prod_{i: s_i < t_i} |t_i - s_i| \leq C_T \prod_{i: s_i < t_i} |t_i - s_i|,$$

où $C_T = \max(1, T)^p$. Ceci montre que la famille $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}^p}$ vérifie la propriété (P_γ) pour tout $\gamma \geq 1$.

Exemple 1.13 (Breton, Dombry [9]). *Soit $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}^p}$ une famille de mesures de densités ϕ_t telles que pour tout $I \subset \{1, \dots, p\}$ et pour tout $T > 0$,*

$$C_T = \left\| \sup_{t \in [-T, T]^p} \partial_I \phi_t(y) \right\|_\gamma^\gamma < +\infty, \quad (1.28)$$

où ∂_I est l'opérateur différentiel défini pour $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ par $\partial_I = \partial^k / \partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_k}$. On a alors :

$$\|\phi_{[s,t]}\|_\gamma^\gamma \leq C_T \prod_{i: s_i < t_i} |t_i - s_i|^\gamma,$$

ce qui implique la condition (P_γ) .

Grâce à la condition (P_γ) , Breton et Dombry établissent des résultats de convergence fonctionnelle pour M_ρ sur l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}^p)$. Ces résultats sont établis dans les cas grand-rayon et intermédiaire. En effet, le champ aléatoire limite obtenu dans le cas petit-rayon est trop irrégulier pour que la convergence fini-dimensionnelle soit renforcée en convergence fonctionnelle. La convergence fonctionnelle sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^p)$ est désignée par $\xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^p)}$. Avec les notations du Théorème 1.11, on a :

Théorème 1.14 (Breton, Dombry [9]). Soit $\mu_t(dy) = \phi_t(y)dy$, $t \in \mathbb{R}^p$, une famille de mesures de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ vérifiant la condition (P_γ) pour $\gamma = 1$ et $\gamma = \alpha$.

1. (Régime grand-rayon) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$ quand $\rho \rightarrow 0$. Soit $n(\rho) = (\lambda\rho^\beta)^{1/\alpha}$. Alors,

$$\left(\frac{\widetilde{M}_\rho(\mu_t)}{n(\rho)} \right)_{t \in \mathbb{R}^p} \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^p)} (Z_\alpha(\mu_t))_{t \in \mathbb{R}^p}.$$

2. (Régime intermédiaire) Supposons $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$ quand $\rho \rightarrow 0$. Alors,

$$\left(\widetilde{M}_\rho(\mu_t) \right)_{t \in \mathbb{R}^p} \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^p)} (J_a(\mu_t))_{t \in \mathbb{R}^p}.$$

1.2.4 Un mot sur la dimension 1

En dimension 1, les modèles de boules aléatoires sont en fait des files d'attente $M/G/\infty$, ou modèle de Poisson avec infinité de sources, c'est-à-dire des files d'attente avec des temps d'arrivée markovien, des durées de service de loi générale et une infinité de serveur. Les files d'attente $M/G/\infty$ modélisent le trafic d'un réseau et ont été largement étudiées. On peut citer notamment Gaigalas et Kaj [21], Jelenković et Lazar [26], Klüppelberg et Mikosch [32], Konstantopoulos et Lin [34], Kurtz, [35], Likhanov *et al.* [37], Resnick et Rootzén [43] ou encore Resnick et Samorodnitsky [44].

Mais les deux travaux qui nous intéressent plus particulièrement sont celui de Mikosch *et al.*, [40], et celui de Kaj et Taqqu, [30]. En effet, les Théorèmes 1.10 et 1.14 généralisent des résultats déjà obtenus en dimension 1 dans ces travaux. Le modèle "infinite Poisson" présenté dans [40] et le modèle "continuous flow reward" introduit dans [30] correspondent au modèle de boules aléatoires pondérées (5) en dimension 1 avec les hypothèses de la Section 1.2.2. Plus précisément, ils étudient le champ aléatoire $(M(\mu_t))_{t \in \mathbb{R}}$ où $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est la famille de mesures décrites dans l'Exemple 1.12 de la Section 1.2.3.

L'article de Kaj et Taqqu, [30], est particulièrement intéressant pour nous car ils y utilisent la représentation intégrale, introduite par Kurtz dans [35], pour l'étude macroscopique des files d'attente $M/G/\infty$, c'est-à-dire une représentation du processus sous la forme d'une intégrale contre une mesure aléatoire et plus particulièrement une mesure aléatoire de Poisson. C'est cette même représentation intégrale qui est utilisée pour l'étude macroscopique et microscopique des modèles de boules aléatoires ([29], [4], [6], [8], etc) et qui permet ainsi de faire le lien entre la dimension 1 et les dimensions supérieures.

Le cas petit-rayon en dimension 1 débouche sur un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^+$. Celui-ci étant discontinu, il n'y a aucune chance d'obtenir une convergence fonctionnelle sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ à l'image du Théorème 1.14. Ce constat reste valable en dimension supérieure et de ce fait, il n'y a aucun résultat de convergence fonctionnelle dans le cas petit-rayon dans aucune dimension. Il faudrait pour cela regarder sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, l'espace des fonctions continues à gauche avec limite à droite.

1.3 Présentation des résultats

Les travaux présentés dans cette thèse s'articulent autour de trois directions. La première consiste à introduire de la dépendance entre les rayons et les centres dans les modèles de

boules aléatoires poissonniens de la Section 1.2.2. Dans un deuxième temps, on tâchera d'améliorer les résultats de la Section 1.2.3 en établissant la tension de familles de mesures infini-dimensionnelles. Dans le dernier travail, on généralise le Théorème 1.4 à des modèles de boules aléatoires déterminantaux, c'est-à-dire des modèles de boules aléatoires dont les centres sont engendrés par un processus ponctuel déterminantal et non plus par un processus ponctuel de Poisson.

1.3.1 Modèle de boules aléatoires avec dépendance

Dans tous les modèles présentés ci-dessus, il y a indépendance entre les centres et les rayons associés. Cette indépendance est soulignée par la forme produit de l'intensité de la mesure ponctuelle de Poisson (1.2) (ou (1.21) dans le cas pondéré). Dans le Chapitre 2, on introduit de la dépendance entre les centres et les rayons en s'affranchissant de cette forme produit de l'intensité.

Plus précisément, le modèle de boules aléatoires pondérées avec dépendance présenté dans le Chapitre 2 est un système de boules pondérées associées à des triplets (x, r, m) (i.e. (centre, rayon, poids)) engendrés par un processus ponctuel de Poisson d'intensité :

$$n(dx, dr, dm) = f(x, r) dx dr G(dm). \quad (1.29)$$

La fonction f dirige la distribution des centres et des rayons. Si à x fixé, $r \mapsto f(x, r)$ est une densité de probabilité, alors le rayon associé à une boule centrée en x sera une variable aléatoire de loi de densité $f(x, \cdot)$. En prenant f à variables séparées en x et r , on obtient de l'indépendance entre la loi des rayons et le processus ponctuel qui engendre les centres. Typiquement, avec $f(x, r) = \lambda f(r)$, on retrouve les hypothèses de [8] présentées dans la Section 1.2.2. Les hypothèses faites sur la fonction f dans le Chapitre 2 sont les suivantes :

$$r \mapsto \|f(\cdot, r)\|_\infty \text{ est continue,} \quad (1.30)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} r^d \|f(\cdot, r)\|_\infty dr < +\infty \quad (1.31)$$

et

$$f(x, r) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}} \quad (1.32)$$

uniformément en x , où les fonctions g et β sont positives sur $\mathbb{R}^d$.

L'hypothèse (1.31) correspond à l'hypothèse de volume fini (1.1) présente dans tous les modèles précédemment cités. Elle est indispensable pour obtenir un champ aléatoire bien défini. L'hypothèse (1.32) correspond à l'hypothèse (1.8) sur la queue de distribution de la loi des rayons. Elle fait apparaître deux nouvelles fonctions paramètres g et β . L'inhomogénéité de la répartition des centres est principalement due à la fonction g . Typiquement, si $g = 1_A$, on n'aura (asymptotiquement) pas de centre en dehors de l'ensemble A , comme illustré sur la Figure 1.1. Les conditions (1.30) et (1.32) impliquent directement que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

La dépendance entre les centres et les rayons est concentrée quant à elle dans la fonction β . La fonction β représente l'indice de queue lourde de la loi des rayons. On suppose que $\beta_1 \leq \beta(x) \leq \beta_2$. Les conditions (1.31) et (1.32) impliquent nécessairement $d < \beta_1$. Un exemple typique pour une telle fonction est : $\beta = \beta_1 1_{B_1} + \beta_2 1_{B_2}$, avec $B_1 \sqcup B_2 = \mathbb{R}^d$. Ainsi, les rayons ont deux comportements différents sur B_1 et B_2 . La probabilité d'avoir de très grandes boules sera plus importante sur B_1 car l'indice de queue lourde y est plus faible que sur B_2 . C'est ce qui est illustré par la Figure 1.2 où les boules dont

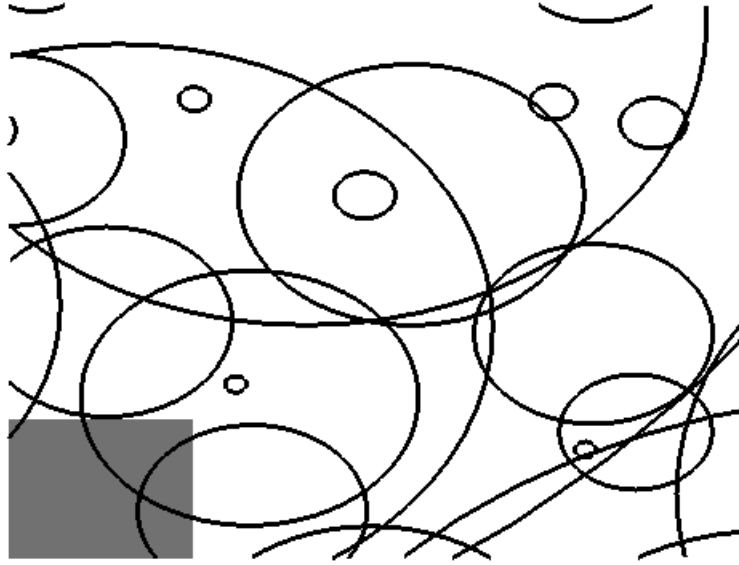


FIGURE 1.1 – Illustration du modèle avec $g = 1_{\blacksquare^c}$ et β constant.

les centres sont dans la zone gris clair (cercles fins) ont des rayons stochastiquement plus petits que les rayons des autres boules (cercles épais). La loi G satisfait des hypothèses identiques à celles données dans [8] et les poids restent indépendants des centres et des rayons.

Après avoir appliqué l'échelonnage classique, les trois régimes limites qui apparaissent ne dépendent que de λ et de β_1 , la valeur minimale d'indice de queue lourde pour la loi des rayons. De même, à la vue des champs aléatoires limites obtenus dans les Théorèmes 2.11, 2.17 et 2.21, il apparaît que le passage à l'échelle macroscopique occulte totalement les rayons dont la loi a un indice de queue lourde strictement supérieur à β_1 . En effet, la normalisation ne tient compte que des plus grandes boules et effacent les autres. La contribution des boules dont les centres appartiennent à $B_1 = \{x; \beta(x) = \beta_1\}$ donne des résultats similaires à ceux obtenus dans le Théorème 1.10 par Breton et Dombry. Les boules dont les centres sont situés en dehors de B_1 n'interviennent pas dans les résultats limites. La justification de ces résultats s'inspirent de la démonstration du Théorème 1.10. Les principales nouvelles difficultés à contourner viennent du fait que la mesure intensité n'est plus à variables séparées en x et r . L'introduction de la fonction d'inhomogénéité g , bien qu'apportant un réel intérêt en terme de modélisation, n'apporte pas de difficulté particulière dans la démonstration des résultats. De plus, une lecture attentive des preuves montre que l'on peut remplacer la forme de boule par un grain C de forme quelconque à l'image du modèle (7).

Comme cela est le cas pour le Théorème 1.4 et le Théorème 1.10, les champs aléatoires limites jouissent de propriétés intéressantes d'invariance et de similarité données par les Propositions 2.13, 2.19 et 2.23. Cependant ces propriétés nécessitent des conditions supplémentaires sur l'ensemble B_1 et la fonction g . De même, on établit dans la Section

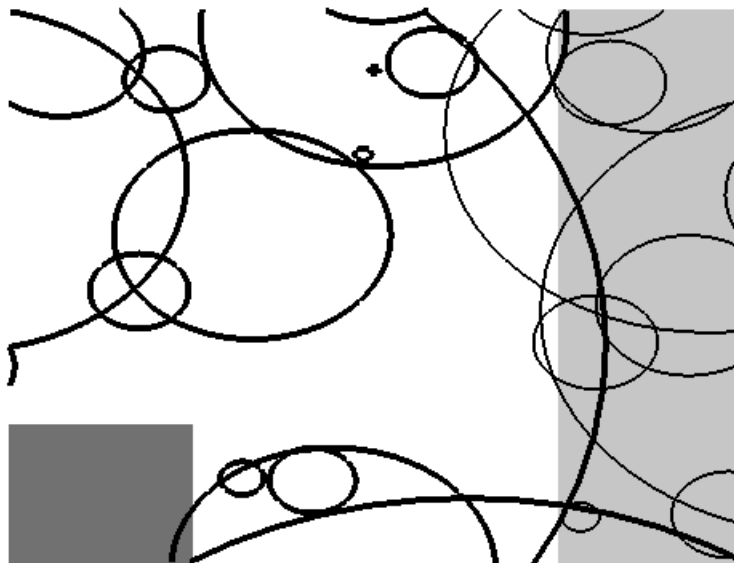


FIGURE 1.2 – Illustration du modèle avec $g = 1_{\blacksquare^c}$ et $\beta = \beta_1 1_{\blacksquare^c} + \beta_2 1_{\blacksquare}$.

2.3.4 que le champ aléatoire J_ℓ obtenu dans le cas intermédiaire réalise un pont poissonien entre les champs aléatoires Z du régime grand-rayon et $\tilde{Z}$ du régime petit-rayon.

La Section 2.4 comporte quant à elle une version microscopique des Théorèmes 2.11 (régime grand-rayon) et 2.17 (régime intermédiaire). Dans ce cas, on remarque que, en toute logique, ce sont les rayons de paramètres β_2 qui gouvernent les résultats finaux. En d'autres termes, la normalisation ne tient compte que des boules avec une forte concentration en 0, et négligent les autres.

Une première amélioration à apporter à ce travail serait de regarder le modèle de boules aléatoires avec dépendance sous la forme (8). Sous de bonnes hypothèses sur la fonction h , il devrait être possible d'adapter simplement les preuves du Chapitre 2 pour généraliser le Théorème 1.11 au cas où la loi des rayons dépendrait de l'emplacement de la boule.

Pour aller encore plus loin, on pourrait imaginer faire dépendre la loi des poids de la localisation de la boule. En effet, il serait intéressant de se demander ce qui se passerait si l'indice de stabilité de la loi du poids m d'une boule dépendait du centre x de celle-ci. Dans le cas d'un réseau d'antennes, cela permettrait de modéliser le fait que dans certaines régions l'intensité des signaux est en moyenne plus forte qu'ailleurs. Toutefois, mathématiquement, cela obligerait à repenser l'approche classique du problème qui est en partie fondée sur le fait que l'intensité soit à variables séparées en (x, r) et m .

D'autre part, les rayons, bien que dépendants de l'emplacement de la boule, sont indépendants entre eux. Il serait intéressant de mener une étude asymptotique d'un modèle dont les rayons seraient dépendants les uns des autres à l'image du modèle étudié dans [41].

1.3.2 Convergence fonctionnelle infini-dimensionnelle

Dans [9], on obtient de la convergence fonctionnelle dans le Théorème 1.14. Pour obtenir cette convergence fonctionnelle, on cherche une classe de mesures $\mathcal{A}$ sur laquelle le champ aléatoire $(M(\mu))_{\mu \in \mathcal{A}}$ est tendu. En combinant la tension avec la convergence finie-dimensionnelle du Théorème 1.11, on établit les résultats de convergence fonctionnelle. Les classes de mesures obtenues dans [9] sont de dimension finie p . L'idée du Chapitre 3 est d'obtenir de la tension pour M dans une classe de mesures infini-dimensionnelles.

Grâce au théorème de Prohorov (voir [7]), montrer la tension de la famille $(M(\mu))_{\mu \in \mathcal{A}}$ revient à montrer qu'elle est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ pour la topologie de la variation totale. Afin d'appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ que nous recherchons doit tout d'abord être compact pour la topologie de la variation totale. Ensuite, pour obtenir un contrôle sur le module de continuité uniforme, on introduit la condition suivante : on suppose qu'il existe une mesure μ^* de densité $\phi^* \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ et $p \geq 1$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{A}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{y-x}{r} \right) \right|^p |\mu|(dy) \right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{y-x}{r} \right) \right|^p \phi^*(y) dy. \quad (C_p)$$

Soit $\gamma \in (1, \alpha)$, alors, pour une famille $\mathcal{A}$ compact dans $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant les conditions (C_1) et (C_γ) , $(M(\mu))_{\mu \in \mathcal{A}}$ est tendue. De plus, si h est bornée, la condition (C_1) suffit.

Ceci débouche sur la Proposition 3.1 qui renforce la convergence finie-dimensionnelle du Théorème 1.11 en une convergence fonctionnelle sur $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dans la Proposition 3.2, on obtient également la convergence fonctionnelle dans un résultat de type pont poissonien.

Pour mieux comprendre l'hypothèse (C_p) , regardons ce qu'elle devient lorsque $h = 1_{B(0,1)}$:

$$\forall \mu \in \mathcal{A}, \forall (x, r) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, |\mu(B(x, r))| \leq \mu^*(B(x, r)),$$

où μ^* est une mesure de densité $\phi^* \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi le contrôle demandé sur la famille de mesures $\mathcal{A}$ est un contrôle uniforme par une certaine mesure à densité.

Bien que l'on soit tenté de voir la Proposition 3.1 comme une généralisation du Théorème 1.14, il n'y a pas de lien évident entre la condition (P_γ) de [9] (voir section 1.2.3) et la condition (C_p) du Chapitre 3. En particulier, rien ne semble indiquer que l'une soit plus forte que l'autre. Toutefois certains exemples vérifient les deux conditions. C'est le cas des mesures uniformes dont les supports sont inclus dans un seul et même ensemble borné (c.f. Exemple 1.12). D'une manière plus générale, la condition (C_p) est obtenue pour des mesures à densité lorsque $\sup_{\mu \in \mathcal{A}} \phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

La condition (C_p) est également obtenue si pour tout $\mu \in \mathcal{A}$, il existe une mesure μ^* telle que pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$, $|\mu|(A) \leq \mu^*(A)$. On remarquera que, la mesure μ^* devant être à densité, l'ensemble $\mathcal{A}$ n'est composé que de mesures à densité. Avec des hypothèses supplémentaires sur h , la condition (C_p) peut découler d'un ordre stochastique particulier associé à h . Si on suppose par exemple h positive et convexe, alors la condition (C_p) est vérifiée pour des mesures μ dominées par μ^* pour l'ordre convexe positif. Pour rappel, l'ordre convexe positif, noté $\preceq$, est donné par (voir [47]) :

$$\mu \preceq \nu \iff \forall h \text{ convexe positive, } \int h d\mu \leq \int h d\nu.$$

En plus de vérifier la condition (C_p) , l'ensemble $\mathcal{A}$ doit avant-tout être compact. Grâce au théorème de Fréchet-Kolmogorov (ou Riesz-Fréchet-Kolmogorov, voir [10]), on

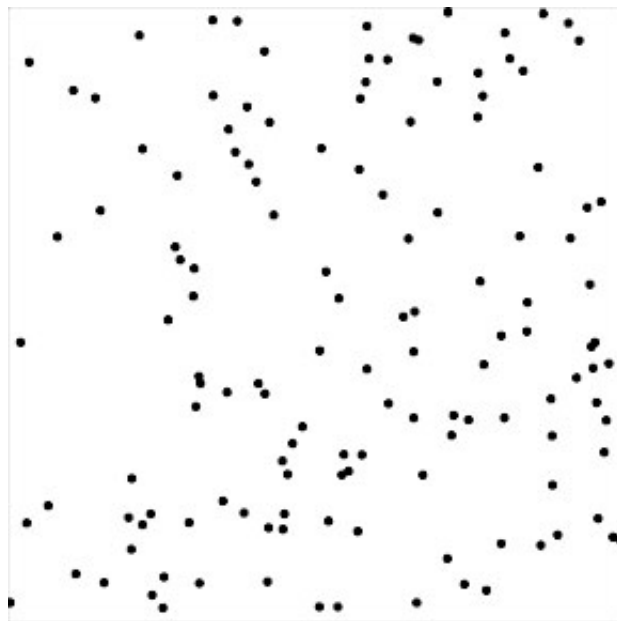


FIGURE 1.3 – Processus ponctuel de Poisson ([24])

caractérise aisément les compacts de L^p . Ainsi, on est capable de donner des exemples de familles de mesures, à support non nécessairement compact, de dimension infinie et satisfaisant la condition (C_p) tout en étant compacts (voir les exemples (3.28) et (3.29) du Chapitre 3). Malheureusement le peu de résultats concrets sur la compacité dans $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ ne nous permet pas de donner des exemples plus généraux.

On peut maintenant déduire de ces résultats de convergence fonctionnelle des résultats de convergence pour des fonctionnelles continues sur $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Les premières fonctionnelles auxquelles nous pouvons penser sont le supremum et le minimum. Il serait intéressant d'établir des fonctionnelles sur $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ adaptées à la modélisation pour exploiter au mieux les résultats de convergence fonctionnelle établis dans le Chapitre 3.

L'hypothèse (C_p) , qui permet d'obtenir un contrôle sur la famille de mesures, est plus une hypothèse de nature technique qui n'est vraisemblablement pas nécessaire. Une question légitime est d'affaiblir cette hypothèse.

1.3.3 Modèle de boules aléatoires déterminantal

Le but du Chapitre 4 est d'étendre les résultats du Théorème 1.4 à des modèles de boules aléatoires dont la structure sous-jacente n'est plus un processus ponctuel de Poisson mais un processus déterminantal. Pour rappel, les processus ponctuels déterminantaux sont des processus ponctuels qui présentent des phénomènes de répulsion entre les points, contrairement aux processus poissoniens qui eux présentent une répartition des points homogène (voir figures 1.3 et 1.4). D'un point de vue modélisation, cela permet de couvrir des problèmes qui font apparaître ce type de phénomène. Par exemple dans [17], Deng, Zhou et Haenggi montrent qu'une famille particulière de processus déterminantaux, les processus de Ginibre, est capable de modéliser différents types de réseaux d'antennes.

Les processus déterminantaux sont caractérisés par leurs intensités jointes. Les intensités jointes d'un processus ponctuel ξ d'intensité μ sur un espace E , si elles existent, sont

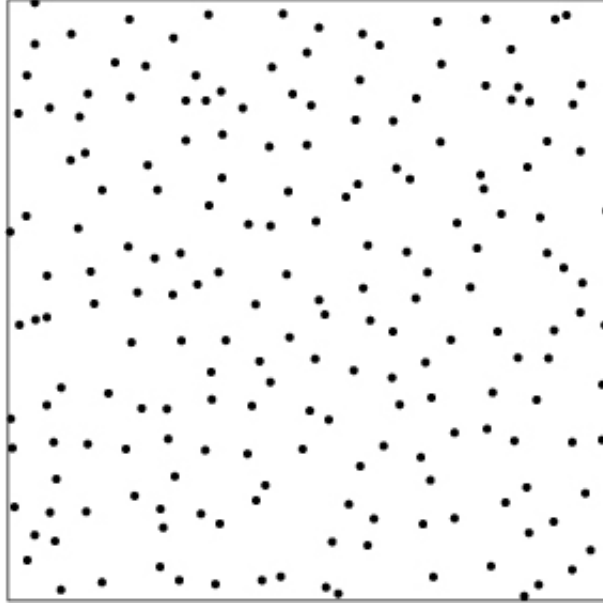


FIGURE 1.4 – Processus ponctuel déterminantal de Ginibre ([59])

les fonctions $(\rho_k)_{k \geq 1}$, telles que, pour toute famille de sous-ensembles disjoints $D_1, \dots, D_k$ de E :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \xi(D_i) \right] = \int_{\prod_i D_i} \rho_k(x_1, \dots, x_k) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_k).$$

Dans le cas des processus déterminantaux, ces fonctions existent pour tout $k \geq 1$ et s'écrivent sous la forme d'un déterminant, d'où le nom donné à ces processus.

Définition 1.15. *Un processus ponctuel ξ sur E est un processus déterminantal de noyau K s'il est simple et que ses intensités jointes sont données par :*

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det (K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k},$$

pour tout $k \geq 1$ et $x_1, \dots, x_k \in E$.

On peut expliquer la répulsion heuristiquement en regardant l'intensité jointe de second ordre : $\rho_2(x, y) = K(x, x) \times K(y, y) - K(x, y)^2$. En effet, cette intensité tend vers 0 lorsque y tend vers x ce qui rend moins probable le fait d'avoir un point en x et un en y lorsque ceux-ci sont proches que lorsqu'ils sont plus éloignés.

Dans la suite, on restreint précisément l'étude au cas du processus de Ginibre, qui est un processus ponctuel déterminantal en dimension 2. Ce choix se justifie par la modélisation comme expliqué ci-dessus mais c'est également un choix simplificateur qui permet de mettre en œuvre une méthode traitant des processus non poissoniens. En effet, les processus déterminantaux sont caractérisés par leur noyau. Celui du processus de Ginibre est bien connu et a une forme explicite qui nous permet d'appliquer au modèle la procédure de dézoom appliqué précédemment dans le cas poissonien. De plus, ce type bien particulier de processus déterminantal présente tout de même une certaine flexibilité.

L'analyse des processus ponctuels déterminantaux est beaucoup plus récente que les processus ponctuels de Poisson et les outils pour les étudier sont donc moins développés.

C'est encore plus vrai pour les intégrales contre des mesures ponctuelles déterminantales que nous appellerons dans la suite intégrales déterminantales. C'est pourquoi nous généralisons dans la Section 4.2 du Chapitre 4 des résultats sur les processus ponctuels de Poisson marqués aux processus déterminantaux.

Une fois que nous avons construit des processus ponctuels déterminantaux marqués, nous pouvons construire un modèle de boules aléatoires déterminantales à l'image du modèle poissonien de la Section 1.1. Pour cela, on se donne un processus de Ginibre standard ϕ sur $\mathbb{C}$ c'est-à-dire un processus déterminantal sur $\mathbb{C}$ de noyau :

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2}} e^{x\bar{y}} \quad (1.33)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons qu'il existe une version amincie ϕ^α du processus ϕ de noyau :

$$K^\alpha(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2\alpha}} e^{\frac{x\bar{y}}{\alpha}}, \quad (1.34)$$

avec $0 < \alpha \leq 1$. Le processus ϕ^α est obtenu en enlevant indépendamment chaque point du processus ϕ avec une probabilité $1 - \alpha$ puis en le renormalisant afin de conserver le nombre moyen de points par unité de volume, c'est-à-dire $\frac{1}{\pi}$. Choisir ϕ ou ϕ^α , pour $0 < \alpha < 1$, ne change pas fondamentalement les résultats de la Section 4.3.2. On travaillera donc avec ϕ pour alléger les notations. Ce processus engendrera les centres des boules. Ensuite, on marque chaque point du processus ϕ par un rayon de loi de probabilité F sur $\mathbb{R}^+$ que l'on suppose à densité f . D'après les résultats de la Section 4.2, les couples (centre, rayon) sont distribués selon un processus ponctuel déterminantal Φ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ de noyau :

$$\widehat{K}((x, r), (y, s)) = \sqrt{f(r)} K(x, y) \sqrt{f(s)}, \quad (1.35)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour mesurer l'influence de Φ sur une configuration μ , on étudie un champ aléatoire sur $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ de la forme (3) :

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu((B(x, r)) N(dx, dr), \quad (1.36)$$

où N est la mesure ponctuelle associée à Φ .

Une fois le modèle posé, on souhaite l'étudier au niveau macroscopique en diminuant le rayon moyen des boules et en compensant cette diminution par l'augmentation du nombre moyen de boules par unité de volume. Pour cela, on introduit une version échelonnée ϕ_c de ϕ . C'est un processus déterminantal sur $\mathbb{C}$ de noyau :

$$K_c(x, y) = \frac{c}{\pi} e^{-\frac{c}{2}(|x|^2 + |y|^2)} e^{cx\bar{y}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Si le processus de Ginibre ϕ avait une intensité de $\frac{1}{\pi}$, le nombre moyen de points de ϕ_c par unité de volume est de $\frac{c}{\pi}$. Ainsi, en augmentant c , on augmente la densité ce qui nous permet de compenser la diminution du rayon moyen. Cette diminution se traduit mathématiquement par un changement de variable $r \mapsto \rho r$ dans la loi de probabilité des rayons. On obtient alors un nouveau processus déterminantal Φ_ρ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ de noyau :

$$\widehat{K}_\rho((x, r), (y, s)) = \sqrt{\frac{f(r/\rho)}{\rho}} K_c(x, y) \sqrt{\frac{f(s/\rho)}{\rho}},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Le paramètre ρ représente le rayon moyen des boules alors que le paramètre c mesure la densité des boules. Dans l'étude asymptotique, on fait tendre ρ vers 0 et on considère c comme une fonction de ρ , $c = c(\rho)$, qui tend (a priori) vers l'infini lorsque ρ tend vers 0. Soit N_ρ la mesure aléatoire ponctuelle associée à Φ_ρ , le champ aléatoire étudié devient :

$$M_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) N_\rho(dx, dr).$$

Grâce à la forme intégrale du champ aléatoire M_ρ , on calcule aisément son espérance :

$$\mathbb{E}[M_\rho(\mu)] = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \widehat{K}_\rho((x, r), (x, r)) dx dr.$$

On remarque que, comme $\widehat{K}_\rho((x, r), (x, r)) = \frac{c}{\pi} \frac{f(r/\rho)}{\rho}$, l'espérance de $M_\rho(\mu)$ est similaire à celle du modèle poissonien de [29] :

$$\mathbb{E}[M_\rho(\mu)] = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \frac{c}{\pi} \frac{f(r/\rho)}{\rho} dx dr.$$

Pour assurer que cette espérance soit finie, et ainsi assurer que $\widetilde{M}_\rho(\mu)$ soit bien définie et finie presque-sûrement, on suppose que la densité de probabilité f admet un moment d'ordre 2,

$$V = \int_{\mathbb{R}^+} r^2 f(r) dr < +\infty.$$

Cette hypothèse assure que le volume moyen des boules V est fini et est toujours d'usage dans les modèles de boules aléatoires précédemment cités. Avec cette hypothèse, le calcul de l'espérance de $M_\rho(\mu)$ pour toute mesure μ de $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ est identique à celui de l'espérance dans le modèle poissonien de [29] donnée dans la Section 1.1. On obtient :

$$\mathbb{E}[M_\rho(\mu)] = \frac{c\rho^2}{\pi} V \mu(\mathbb{C}).$$

On s'intéresse ensuite aux fluctuations de M_ρ en considérant :

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \widetilde{N}_\rho(dx, dr), \quad (1.37)$$

pour toute mesure μ de $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ où $\widetilde{N}_\rho$ est la mesure ponctuelle aléatoire compensée associée à N_ρ . Afin d'étudier le champ aléatoire $\widetilde{M}_\rho$, on fait une hypothèse sur la queue de la loi F . Encore une fois cette hypothèse est similaire à celle donnée dans la Section 1.1 :

$$f(r) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^{\beta+1}}, \quad (1.38)$$

où $2 < \beta < 4$. L'étude asymptotique, lorsque $\rho \rightarrow 0$ et $c = c(\rho) \rightarrow +\infty$, débouche sur les trois régimes limites précédemment exposés :

- Régime grand-rayon $c\rho^\beta \rightarrow +\infty$,
- Régime intermédiaire $c\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$,
- Régime petit-rayon $c\rho^\beta \rightarrow 0$.

À l'image des intégrales poissoniennes, l'outil principal pour l'étude des intégrales déterminantales est leur fonction caractéristique. Celle-ci est donnée dans [48] pour des intégrandes positives et à support compact et des processus déterminantaux dont les noyaux satisfont les hypothèses 4.6. Nous devons alors contourner deux problèmes. Tout d'abord, la fonction $(x, r) \mapsto \mu(B(x, r))$ n'est pas positive à support compact. Ensuite, le noyau K_c ne satisfait pas les hypothèses 4.6 et donc à fortiori $\widehat{K}$ non plus.

Pour contourner le premier problème, nous nous restreignons aux mesures sur $\mathbb{C}$ positives, à support compact et de variation totale finie. Nous notons $\mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$ leur ensemble. Cela n'est cependant pas encore suffisant, c'est pourquoi nous tronquons l'intégrande avec l'indicatrice $\mathbf{1}_{r < R}$ de façon que $(x, r) \mapsto \mu(B(x, r)) \mathbf{1}_{r < R}$ soit bien à support compact. Le champ aléatoire tronqué est donné par :

$$M_\rho^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \mathbf{1}_{\{r < R\}} N_\rho(dx, dr), \quad (1.39)$$

et converge en loi μ par μ , pour tout $\mu \in \mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$, vers $M_\rho(\mu)$ lorsque $R \rightarrow +\infty$. C'est le sens de la Proposition 4.13 qui précise en plus que cette convergence est uniforme en ρ dans les cas intermédiaire et petit-rayon. L'uniformité est cruciale pour intervertir dans un deuxième temps les limites en R et en ρ .

La deuxième difficulté n'est plus qu'une formalité maintenant que l'on s'est affranchi de la première. En effet, le processus ϕ_c conditionné à n'avoir que des points dans un certain compact satisfait les hypothèses 4.6. On choisit alors de considérer sa restriction au support de la fonction $x \mapsto \mu(B(x, R))$, ϕ_c^μ . On le marque comme précédemment par des rayons de loi F et on obtient un processus ponctuel Φ_ρ^μ dont le noyau vérifie les hypothèses 4.6 d'après la Proposition 4.7. Le point clé est que les points de Φ_ρ qui n'appartiennent pas à Φ_ρ^μ n'interfèrent pas sur la configuration μ puisqu'ils n'appartiennent pas au support de la fonction $(x, r) \mapsto \mu(B(x, r)) \mathbf{1}_{r < R}$. Ainsi, si on note N_ρ^μ la mesure ponctuelle sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ associée à Φ_ρ^μ , on a :

$$M_\rho^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \mathbf{1}_{\{r < R\}} N_\rho(dx, dr) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \mathbf{1}_{\{r < R\}} N_\rho^\mu(dx, dr). \quad (1.40)$$

Ainsi, pour toute mesure μ de $\mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$, on a une formule pour la fonction caractéristique de $M_\rho^R(\mu)$ et donc de ses variations $\widetilde{M}_\rho^R(\mu) = M_\rho^R(\mu) - \mathbb{E}[M_\rho^R(\mu)]$. On peut ainsi étudier le comportement asymptotique de $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ sous les différents régimes limites. Comme dans les travaux effectués dans le cadre poissonien, les résultats sont obtenus dans des sous-espaces de $\mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$. Dans le régime petit-rayon, le résultat est obtenu dans $L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$ alors que dans les deux autres régimes, grand-rayon et intermédiaire, les résultats sont obtenus sur un espace similaire à l'espace $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ de [8] ou $\mathcal{M}$ du Chapitre 2 :

Définition 1.16. *L'ensemble $\mathcal{M}_\beta$ est l'ensemble des mesures μ de $\mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$ telles qu'il existe une constante C et deux nombres réels p et q , avec $0 < p < \beta < q$, tels que :*

$$\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r))^2 dx \leq C_\mu (r^p \wedge r^q), \quad (1.41)$$

où $a \wedge b = \min(a, b)$.

Les résultats principaux du Chapitre 4 sont donnés par les Théorèmes 4.20, 4.24 et 4.27. Ils établissent la convergence de $\widetilde{M}_\rho$ dans les trois différents régimes. On remarque

alors que les trois champs aléatoires obtenus sont les mêmes que ceux obtenus dans [29] dans le cas Poissonien de la Section 1.1. Ceci peut s'expliquer heuristiquement par le fait que, en augmentant le nombre moyen de points par unité de volume du processus de Ginibre, on diminue la répulsion entre les points et l'on tend donc à s'approcher d'un processus ponctuel sans interaction, typiquement un processus ponctuel de Poisson. Ce phénomène peut être caractérisé par la notion de $\mathcal{K}$ -fonction. En effet, la $\mathcal{K}$ -fonction d'un processus caractérise la loi des distances entre deux points d'un processus ponctuel (voir [45]), celle du processus ϕ_c est donnée dans [17] par :

$$\mathcal{K}_c(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{c} \left(1 - e^{-cr^2}\right). \quad (1.42)$$

On constate aisément qu'elle converge vers πr^2 lorsque $c \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire la $\mathcal{K}$ -fonction d'un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{C}$ d'intensité $\frac{1}{\pi}dx$. Ainsi, pour des c très grands, le modèle déterminantal du Chapitre 4 devient proche du modèle poissonien de [29].

La preuve de chacun des théorèmes précédemment cités se décompose de la manière suivante. On étudie dans un premier temps, dans les Propositions 4.17, 4.22 et 4.26, la convergence à R fixé de $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ lorsque ρ tend vers 0. On obtient une certaine variable aléatoire pour tout μ . Dans les cas grand-rayon et intermédiaire, cette variable aléatoire dépend de R . Il faut donc étudier ensuite sa limite lorsque R tend vers l'infini. C'est l'objet des Propositions 4.19 et 4.23. Dans le régime petit-rayon, la limite ne dépend pas de R et on obtient directement la variable aléatoire limite.

Tout ceci nous donne des convergences uni-dimensionnelles en loi. Pour obtenir la convergence des distributions fini-dimensionnelles, il suffit de remarquer que tous les champs aléatoires obtenus, ainsi que l'espace $\mathcal{M}_\beta$, sont linéaires. Grâce à cette structure linéaire et au théorème de Cramér-Wold, la convergence en loi uni-dimensionnelle implique la convergence des distributions fini-dimensionnelles.

La majeure partie du travail se trouve dans la convergence de $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ lorsque ρ tend vers 0, c'est-à-dire dans les preuves des Propositions 4.17, 4.22 et 4.26. La fonction caractéristique de cette variable aléatoire peut se décomposer en un produit de deux termes. Le premier est égal à la fonction caractéristique du processus du modèle poissonien de [29]. De ce fait, on connaît déjà la limite de ce terme et de là vient que les résultats sont identiques au cas poissonien car on montre que le second terme tend vers 1. Ce terme présente de nouvelles difficultés à traiter dues au caractère déterminantal du processus sous-jacent. Il exige en particulier de calculer et de dominer des traces d'itérés d'opérateurs intégraux. Ces notions de théorie des opérateurs sont nouvelles dans le cadre des modèles de boules aléatoires.

Ce travail est la première étude macroscopique de modèles de boules aléatoires engendrées par un processus déterminantal. C'est en partie la raison pour laquelle nous avons choisi les hypothèses les plus simples sur le modèle afin de bien mettre en évidence les difficultés nouvelles apportées par ce changement de processus ponctuel sous-jacent. En particulier nous avons choisi F comme une mesure de probabilité et on peut se demander pour quelles hypothèses sur une mesure F à densité f , il existe un processus ponctuel déterminantal sur $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ de noyau :

$$\widehat{K}((x, r), (y, s)) = \sqrt{f(r)}K(x, y)\sqrt{f(s)}, \quad (1.43)$$

où K est le noyau d'un processus de Ginibre. La question de l'existence des processus déterminantaux n'est pas triviale. Il est démontré, par Macchi dans [38] et Soshnikov

dans [50], qu'un noyau $\widehat{K}$ définit un processus déterminantal si et seulement si l'opérateur intégral associé est trace-classe avec toutes ses valeurs propres comprises entre 0 et 1. On trouve une preuve probabiliste de ce fait dans [24]. D'après la Remarque 4.8, pour une fonction intégrable f , les valeurs propres de l'opérateur intégral associé au noyau 1.43 sont comprises entre 0 et $\|f\|_1^{-1}$. Ainsi, le noyau (1.43) définit bien un processus déterminantal si et seulement si l'intégrale de f est supérieure ou égale à 1. Ceci nous permet de généraliser le modèle en engendrant directement les boules avec le noyau (1.43) sans obliger f à être une densité de probabilité.

Une autre direction pour améliorer ce travail consisterait à étendre les résultats à des mesures signées et dont le support n'est pas nécessairement compact. Il faudrait pour cela étendre la formule de la fonction caractéristique des intégrales déterminantales à des fonctions signées et pas nécessairement à support compact. Pour rappel la formule de la fonction caractéristique que nous utilisons a été introduite pour l'étude du processus déterminantal en lui même. En effet, tout processus ponctuel ξ est caractérisé par l'application $f \mapsto \mathbb{E} \left[e^{i \int f d\xi} \right]$ où f est positive à support compact. Pour l'étude des intégrales déterminantales, qui nous intéressent plus particulièrement, il est nécessaire de considérer cette application pour des fonction f plus générales.

Bien que le travail présenté ci-dessus se concentre sur le processus (marqué) de Ginibre, il existe toute une panoplie de processus déterminantaux que l'on aurait pu utiliser pour construire notre modèle de boules aléatoires déterminantales. Nombre d'entre eux sont présentés dans [25] avec leur noyau. De même, on aurait également pu construire un modèle de boules aléatoires permanentales ou α -déterminantales, pour $\alpha \in (-1, 1)$. En effet, pour tous ces processus, la formule de la fonction caractéristique donnée par [48] se généralise. Pour rappel, un processus -1 -déterminantal est un processus déterminantal alors qu'un processus 1 -déterminantal est un processus permanental. Au contraire des processus déterminantaux, les processus ponctuels permanentaux font apparaître des phénomènes d'attraction entre les points. On peut alors se poser deux questions :

La première concerne la modélisation : quel choix de processus déterminantal, permanental ou α -déterminantal se justifie par une application concrète du modèle de boules aléatoires associé ? Si l'article [17] justifiait le choix du processus de Ginibre par la modélisation d'un réseau d'antennes, il n'y a pas, à notre connaissance, de travaux en ce sens pour les autres processus ponctuels cités ci-dessus.

La deuxième question est de nature plus technique : comment appliqué la procédure de "dézoom" au noyau d'un processus déterminantal donné ? La forme du noyau du processus de Ginibre se prêtait bien à l'échelonnage et donc ce processus était bien adapté à une étude macroscopique. Choisir un autre processus déterminantal pour effectuer une étude similaire exigerait de pouvoir lui appliquer une procédure de "dézoom".

Il est possible d'étudier un modèle de boules aléatoires marquées, à l'image du modèle de [8] (voir Section 1.2.2), mais engendrées par un processus ponctuel déterminantal. De même, on peut étendre ces résultats à un modèle de type (8) pour une certaine fonction h radialement décroissante.

La question de la convergence fonctionnelle serait également intéressante. Lorsque l'on cherche à obtenir de l'équicontinuité dans le cas poissonien dans le Chapitre 3, les bornes utilisées pour contrôler le module de continuité dépendent de la fonction caractéristique d'une intégrale poissonnienne. Dans le cadre déterminantal, on conjecture que ce sera le cas également, ce qui impliquerait de nouvelles difficultés étant donnée la forme de la fonction caractéristique d'une intégrale déterminantale.

Chapitre 2

Modèle de boules aléatoires avec dépendance

RÉSUMÉ : Dans cet article, on considère une configuration de boules aléatoires pondérées dans $\mathbb{R}^d$ engendrées par un processus ponctuel de Poisson. Le modèle que nous proposons présente de l'inhomogénéité, ainsi que de la dépendance entre les centres et les rayons et des phénomènes de queues lourdes. Nous étudions le comportement asymptotique de la masse totale de la configuration de boules à un niveau macroscopique. Trois régimes différents apparaissent selon la densité du nombre de points et le facteur de zoom. Parmi les trois champs limites, deux sont stables alors que le troisième est une intégrale de Poisson qui fait le pont entre les deux champs stables. Pour des choix particuliers de la fonction d'inhomogénéité, les champs limites présentent des propriétés d'isotropie et d'auto-similarité.

Ce chapitre a été publié dans
Journal of Mathematical Analysis and Applications
Volume 423 (2015), no. 2, Pages 1284–1310.

ABSTRACT : In this article, we consider a configuration of weighted random balls in $\mathbb{R}^d$ generated according to a Poisson point process. The model investigated exhibits inhomogeneity, as well as dependence between the centers and the radii and heavy tails phenomena. We investigate the asymptotic behavior of the total mass of the configuration of the balls at a macroscopic level. Three different regimes appear depending on the intensity parameters and the zooming factor. Among the three limiting fields, two are stable while the third one is a Poisson integral bridging between the two stable regimes. For some particular choices of the inhomogeneity function, the limiting fields exhibit isotropy or self-similarity.

This chapter was published in
Journal of Mathematical Analysis and Applications
Volume 423 (2015), no. 2, Pages 1284–1310.

2.1 Introduction

In this work, we generalize the weighted random balls model introduced in [30] and [8] into an inhomogeneous weighted random balls model including dependence. This model is an aggregation of weighted random balls whose centers and radii are distributed, as a couple (x, r) , according to a Poisson point process. The weight of a ball is independent of its center and radius. On this model we consider the field that, at each point, is the sum of the weights of the balls containing the point. We investigate macroscopic behavior of such a quantity, that is the convergence of the model while performing a zoom-out. As it is common in such models (see [6], [8], [29] and [30]), suitable scalings and normalizations allow us to exhibit three different limit fields: a stable field with dependence, a Poissonian field and a stable field with independence.

The differences between this model and the weighted random balls model in [8] rely on two points:

- the dependence between the radii and the centers that lies in the tail index of the radii,
- the inhomogeneity that comes first from the dependence but that is also reinforced by the introduction of an inhomogeneous intensity for the Poisson point process.

By relaxing the dependence with a constant radius tail index, we recover as a particular model one with inhomogeneous random balls whose radius is independent of the center. We distribute the weights in the same way as in [8], that is in the domain of attraction of an α -stable distribution.

We briefly discuss the models investigated so far. In [30], weighted random balls models are studied in dimension 1. In [4], a random balls model (with weight constant equal to 1) is studied under a zoom-in scaling, whereas it is investigated under a zoom-out scaling in [29]. Both approaches are gathered in [6], which gives a general framework to allow both zoom-in and zoom-out procedures. This framework is then used in [8], to study the so-called weighted random balls model. The process arising under the intermediate regime in [30] (which corresponds to the Poissonian field in our study), is deeply studied in [20] and seen as a bridge between the two other processes obtained (the two stable fields in our case).

The main contribution of this paper is the introduction of dependence and inhomogeneity in such models. Although it brings in many technical difficulties, this is very interesting from a modeling point of view. In dimension 1, where those models recover queuing problems like packet networks computer traffic (see [30]), it models rates of connection and lengths of connection that depend of the time. Random balls models also apply in dimension 2 to imagery (see [4]) or to wireless network (see [29]). In that latter example, the inhomogeneity takes into account that the number of antennas as well as the radius of emission is different from a region to another. In higher dimension, it models porous or heterogeneous media (see [4] again).

We describe the setting in Section 2.2. Our main results are stated, discussed and proved in Section 2.3. In the last section, we briefly discuss about the asymptotic behavior of the model at a microscopic level.

2.2 The weighted random balls model with dependence

We are interested in a weighted random balls model where the triplets (x, r, m) (i.e. center, radius and weight) are generated according to a Poisson random measure

$N(dx, dr, dm)$ with intensity $f(x, r)dxdrG(dm)$, where f is a positive function defined on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ and G is a probability measure on $\mathbb{R}$.

The absolutely continuous measure $f(x, r)dxdr = F_x(dr)dx$ drives the distribution of the centers and the radii. All along, we make the assumption that

$$\begin{aligned} r \mapsto \|f(\cdot, r)\|_\infty \text{ is continuous,} \\ \int_{\mathbb{R}^+} r^d \|f(\cdot, r)\|_\infty dr < +\infty. \end{aligned} \quad (2.1) \quad (2.2)$$

We need also to know the behavior of f for large radii. In that purpose, we suppose that :

$$f(x, r) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}}, \quad (2.3)$$

uniformly in $x \in \mathbb{R}^d$, where g and β are positive functions on $\mathbb{R}^d$.

Roughly speaking, the dependence between the centers and the radii lies in the function β whereas the inhomogeneity mostly lies in the function g . Note that conditions (2.1) and (2.3) imply $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. We suppose that there exist two constants β_1 and β_2 such that

$$d < \beta_1 \leq \beta(x) \leq \beta_2. \quad (2.4)$$

Typically, taking $\beta = \beta_1 1_{B_1} + \beta_2 1_{B_2}$, with $B_1 \sqcup B_2 = \mathbb{R}^d$, means that the radii have two typical different behaviors on B_1 and B_2 . General choices of functions β satisfying (2.4) give continuous mixtures of these behaviors. Choosing β as a constant function gives us an inhomogeneous model with (asymptotically) no dependence. Note that conditions (2.2) and (2.3) require $d < \beta_1$. Moreover the parameter β_2 is a technical parameter and do not appear in the final results.

We suppose that the probability measure G belongs to the domain of attraction of the α -stable distribution $S_\alpha(\sigma, b, \tau)$ (using the terminology from [46]) with $\alpha \in (1, 2]$. Taking $\alpha = 2$ implies that G is any finite variance distribution and recovers the typical weight of [30]. When $\alpha \in (1, 2)$, a typical choice could be a heavy tailed distribution.

Remark 2.1. *The choice $f(x, r) = f(r)$ (and thus $g=1$ and β is a constant function) recovers the setting of [8].*

Let $y \in \mathbb{R}^d$, the algebraic weights of all the balls containing y is given by

$$\sum M_i \delta_y(B(X_i, R_i)) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} m \delta_y(B(x, r)) N(dx, dr, dm) = M(\delta_y),$$

where (X_i, R_i, M_i) are generated according to the Poisson measure N . To study the mass generated by the model, we generalize the random field M to all signed measures μ on $\mathbb{R}^d$ with a finite total variation (whose set is denoted by $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$):

$$\forall \mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d), M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} m \mu(B(x, r)) N(dx, dr, dm).$$

The above stochastic integral is well defined and has a finite expectation, according to the following proposition.

Proposition 2.2. For all $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$, we have $\mathbb{E}[|M(\mu)|] < +\infty$ and

$$\mathbb{E}[M(\mu)] = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} m\mu(Bx, r) f(x, r) dx dr G(dm). \quad (2.5)$$

Proof. We aim at proving that for all $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M(\mu)|] &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} |m\mu(B(x, r))| f(x, r) dx dr G(dm) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |m| G(dm) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x, r))| f(x, r) dx dr < +\infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Since G has a finite expectation due to $\alpha > 1$, we focus on the second integral. Using Conditions (2.1) and (2.2) we have with Fubini Theorem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x, r))| f(x, r) dx dr &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B(y, r)}(x) f(x, r) dx dr \right) |\mu|(dy) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B(y, r)}(x) dx \|f(\cdot, r)\|_{\infty} dr \right) |\mu|(dy) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} c_d \int_{\mathbb{R}_+} r^d \|f(\cdot, r)\|_{\infty} dr |\mu|(dy) \\ &\leq |\mu|(\mathbb{R}^d) c_d \int_{\mathbb{R}_+} r^d \|f(\cdot, r)\|_{\infty} dr < +\infty, \end{aligned}$$

where c_d is the volume of the unit Euclidean ball of $\mathbb{R}^d$. This proves (2.6) and ensures $M(\mu)$ has the finite expectation given in (2.5). $\square$

2.3 Asymptotics

We analyse the model at a macroscopic level by performing a zoom-out. Heuristically, we introduce a parameter ρ , representing the rate of zoom-out: it reduces the mean radius. Accordingly we need to increase the number of centers to obtain something significant at the limit. Indeed, if we just make the change of variable $r \mapsto \rho r$ in the density, using (2.3) we would have

$$f(x, r/\rho) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}} \rho^{\beta(x)+1} \rightarrow_{\rho \rightarrow 0} 0, \quad (2.7)$$

and asymptotics would just vanish. As a consequence, in order to compensate this convergence to 0, we use a scaled version f_{ρ} of f such that:

$$f_{\rho}(x, r/\rho) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{g_{\rho}(x)}{r^{\beta(x)+1}} \rho^{\beta(x)+1} \quad (2.8)$$

and we suppose that $g_{\rho}(x) \sim_{\rho \rightarrow 0} \lambda(\rho) g(x)$ and $\lambda(\rho) \rightarrow +\infty$ when $\rho \rightarrow 0$. Of course we cannot chain these two latter equivalences so instead we replace (2.3) and (2.8) by

$$f_{\rho}(x, r) \sim_{r \rightarrow +\infty} \lambda(\rho) \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}}, \quad (2.9)$$

uniformly both in x and ρ . For technical purpose, we also suppose that, for any $\rho > 0$,

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \|f_\rho(\cdot, r)\|_\infty \leq \lambda(\rho) \|f(\cdot, r)\|_\infty. \quad (2.10)$$

The parameter $\lambda(\rho)$ plays a role in the density of centers in the sense that:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{c_d r^d} \int_{B(0, r)} g_\rho(x) dx \sim \lambda(\rho) \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{c_d r^d} \int_{B(0, r)} g(x) dx.$$

Thus, when $\lambda(\rho)$ increases, the mean number of balls increases accordingly which compensates the decreasing of the volume of the balls.

Remark 2.3. *With these notations, the settings of [8] is recovered with $f_\rho(x, r) = \lambda(\rho) f(r)$.*

Our study focuses on the weight random functional given by

$$M_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} m \mu(B(x, r)) N_\rho(dx, dr, dm)$$

when $\rho \rightarrow 0$, where N_ρ stands for the Poisson random measure with the intensity obtained by the scaling $r \rightarrow \rho r$

$$\rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr G(dm). \quad (2.11)$$

To investigate the fluctuations of the process, we need to center it and exhibit a normalization factor $n(\rho)$:

$$n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu) = \frac{M_\rho(\mu) - \mathbb{E}[M_\rho(\mu)]}{n(\rho)} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} n(\rho)^{-1} m \mu(B(x, r)) \widetilde{N}_\rho(dx, dr, dm),$$

where $\widetilde{N}_\rho$ stands for the compensated Poisson random measure with intensity (2.11). The characteristic function is well known and its exponent is given by

$$\begin{aligned} \log \left(\varphi_{n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu)}(\theta) \right) &= \log \left(\mathbb{E} \left[e^{i \theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu)} \right] \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \psi \left(\theta n(\rho)^{-1} m \mu(B(x, r)) \right) \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr G(dm) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) \right) \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr, \end{aligned} \quad (2.12)$$

where $\psi_G(u) = \int_{\mathbb{R}} \psi(mu) G(dm)$ and $\psi(u) = e^{iu} - 1 - iu$. Note that the function ψ_G is Lipschitzian with constant $2 \int_{\mathbb{R}} |m| G(dm)$. Indeed, for $u, v \in \mathbb{R}$, we have:

$$|\psi_G(u) - \psi_G(v)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi(mu) - \psi(mv)| G(dm) \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |m| G(dm) \right) |u - v|.$$

The asymptotic results depend on three scaling regimes that one can understand by looking at the mean of the number of balls that cover the origin and with a radius large

enough. Heuristically, we have from (2.9)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\#\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}] &= \int \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr G(dm) \\ &= \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr \\ &\sim_{\rho \rightarrow 0} \lambda(\rho) \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{\rho^{\beta(x)} g(x)}{r^{\beta(x)+1}} dx dr.\end{aligned}$$

Set $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \beta(x) = \beta_1\}$. Under condition (2.4), for ρ small enough:

$$\begin{aligned}\lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{g(x) 1_{B_1}(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr \\ \leq \lambda(\rho) \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{\rho^{\beta(x)} g(x)}{r^{\beta(x)+1}} dx dr \\ \leq \lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr.\end{aligned}$$

Since $\int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr < +\infty$, if the set B_1 is non negligible, three regimes appear:

- small-balls scaling: $\lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rightarrow 0$,
- intermediate scaling: $\lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rightarrow \ell \in (0, +\infty)$,
- large-balls scaling: $\lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rightarrow +\infty$.

Note that the scaling regimes do not depend on the value β_2 or even other intermediate value of β but only on β_1 . This can be understood as follows, when we reduce the mean radius by ρ , the normalization will only compensate the decreasing of the biggest radii, that is the radii with the smallest tail-index β_1 , and the contribution of the other balls will be negligible.

To ensure asymptotics make sense, it is necessary to consider configuration μ for which the limit processes are well defined. To that purpose, we introduce the following subset of $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$.

Definition 2.4. *Let $1 < \alpha \leq 2$ and $0 < \beta_1 \leq \beta_2$. The set $\mathcal{M}_{\alpha, \beta_1, \beta_2}$ ($\mathcal{M}$ when there is no ambiguity) consists of (signed) measures $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ such that there exist two real numbers s and t with $0 < s < \beta_1 \leq \beta_2 < t$ and a positive constant C such that:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \leq C (r^s \wedge r^t),$$

where $a \wedge b = \min(a, b)$.

This definition is reminiscent of $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ in [8]. The next proposition gathers some elementary properties that are easily generalized from that of $\mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ in [8] (see the proof in the Appendix).

Proposition 2.5.

1. The set $\mathcal{M}$ is a linear subspace. Furthermore, if $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ and β is a real-valued function on $\mathbb{R}^d$ such that $\forall x \in \mathbb{R}^d, \beta_1 \leq \beta(x) \leq \beta_2$, then:

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) r^{-\beta(x)-1} dx dr < +\infty. \quad (2.13)$$

2. When $\alpha \leq \alpha'$, $\mathcal{M}_{\alpha, \beta_1, \beta_2} \subset \mathcal{M}_{\alpha', \beta_1, \beta_2}$.
3. When $\beta_1 \leq \beta'_1 \leq \beta'_2 \leq \beta_2$, $\mathcal{M}_{\alpha, \beta_1, \beta_2} \subset \mathcal{M}_{\alpha, \beta'_1, \beta'_2}$.
4. When $\alpha \leq \alpha'$ and $\beta_1 \leq \beta'_1 \leq \beta'_2 \leq \beta_2$, $\mathcal{M}_{\alpha, \beta_1, \beta_2} \subset \mathcal{M}_{\alpha', \beta'_1, \beta'_2}$.
5. When $\beta_1 > d$, $\mathcal{M}$ is included in the of subspace of diffuse measures.

The next proposition is a direct application of Proposition 2.2 in [8] and gives some elegant properties of spaces $\mathcal{M}$:

Proposition 2.6.

1. The set $\mathcal{M}$ is closed under rotations, i.e. $\forall \mu \in \mathcal{M}, \forall \Theta \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d), \Theta\mu \in \mathcal{M}$ where, for any Borelian set A of $\mathbb{R}^d$, $\Theta\mu(A) = \mu(\Theta^{-1}A)$.
2. $\mathcal{M}$ is closed under dilatations, i.e. when $\mu \in \mathcal{M}$, for any $a \in \mathbb{R}^+$, $\mu_a \in \mathcal{M}$ where, for any Borelian subset A of $\mathbb{R}^d$, $\mu_a(A) = \mu(a^{-1}A)$.

Observe that Dirac measures δ_y , when $y \in \text{Supp}(g)$, are not in $\mathcal{M}$. Absolutely continuous measures (with respect to the Lebesgue measure) $\mu(dx) = \phi(x)dx$ with $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ will play a crucial role in the small-balls scaling described below. For such μ , we shall abusively note $\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$. As a direct application of Proposition 2.3 in [8] we have:

Proposition 2.7. When $d < \beta_1 \leq \beta_2 < \alpha d$, any measure $\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ belongs to $\mathcal{M}$.

The following elementary lemma will be useful at several instance. It is proved in the Appendix.

Lemma 2.8. Let $t > d$. For any $A > 0$:

$$\int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr < +\infty.$$

We also recall Lemma 3.1 of [8] which gives an estimate of the characteristic function of distribution in the domain of attraction of a stable law.

Lemma 2.9. *Suppose X is in the domain of attraction of an α -stable law $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ for some $\alpha > 1$. Then*

$$\phi_X(\theta) - 1 - i\theta\mathbb{E}[X] \sim_0 -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha (1 - i\epsilon(\theta)\tan(\pi\alpha/2)b).$$

Furthermore, there is some $C > 0$ such that for any $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|\phi_X(\theta) - 1 - i\theta\mathbb{E}[X]| \leq K|\theta|^\alpha.$$

Remark 2.10. *In the following sections, the convergences obtained are finite-dimensional convergences and $\xrightarrow{\mathcal{A}}$ denotes the finite-dimensional convergence in a subspace $\mathcal{A}$ of $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$, i.e. $M_\rho \xrightarrow{\mathcal{A}} M$ means*

$$\forall n, \forall \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathcal{A}, \mathcal{L}(M_\rho(\mu_1), \dots, M_\rho(\mu_n)) \rightarrow \mathcal{L}(M(\mu_1), \dots, M(\mu_n)).$$

2.3.1 Large-balls scaling

In this section, we study the fluctuations of M_ρ under the large-balls scaling, that is when $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \rightarrow +\infty$, $\rho \rightarrow 0$. The limiting field obtained expresses as an α -stable integral.

Theorem 2.11. *Suppose that $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \rightarrow +\infty$ when $\rho \rightarrow 0$. Let $n(\rho) = \lambda(\rho)^{1/\alpha}\rho^{\beta_1/\alpha}$ and suppose that $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \beta(x) = \beta_1\}$ has a non-zero Lebesgue measure, then we have:*

$$n(\rho)^{-1}\widetilde{M}_\rho(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{M}} Z(\cdot),$$

where $Z(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \mu(B(x, r)) M_\alpha(dx, dr)$ is a stable integral with respect to the α -stable measure M_α with control measure $\sigma^\alpha g(x) 1_{B_1}(x) r^{-\beta_1-1} dx dr$ and constant skewness function b depending on G .

Remark 2.12. *The stochastic integral $Z(\mu)$ is well defined for $\mu \in \mathcal{M}$ since*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) 1_{B_1}(x) r^{-\beta_1-1} dx dr < +\infty,$$

see [46].

Proof. Our aim is to show that the log-characteristic function of $n(\rho)^{-1}\widetilde{M}_\rho(\mu)$ given in (2.12) converges when $\rho \rightarrow 0$ to the log-characteristic function of the random variable $Z(\mu)$:

$$\begin{aligned} \log(\varphi_{Z(\mu)}(\theta)) = \\ -\sigma^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\theta \mu(B(x, r))|^\alpha (1 - i\epsilon(\theta \mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b) g(x) \frac{1_{B_1}(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr, \end{aligned} \quad (2.14)$$

where $\epsilon(u) = +1$ if $u > 0$, $\epsilon(u) = -1$ if $u < 0$ and $\epsilon(0) = 0$ (see [46]). Since by hypothesis, $n(\rho) \rightarrow +\infty$, we apply Lemma (2.9) which yields:

$$\lambda(\rho)\psi_G(\theta n(\rho)^{-1}\mu(B(x, r))) \sim -\sigma^\alpha \rho^{-\beta_1} |\theta\mu(B(x, r))|^\alpha \left(1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b\right). \quad (2.15)$$

Since $|\theta n(\rho)^{-1}\mu(B(x, r))| \leq \theta n(\rho)^{-1}|\mu|(\mathbb{R}^d)$, the equivalence (2.15) is uniform both in x and r and can be integrated to obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G(n^{-1}(\rho)\theta\mu(B(x, r))) \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr \\ & \sim -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x, r))|^\alpha (1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b) \frac{f_\rho(x, r/\rho)}{\rho n(\rho)^\alpha} dx dr, \end{aligned} \quad (2.16)$$

when $\rho \rightarrow 0$.

We now check that the right-hand side of (2.16) is equivalent as ρ goes to 0 to the log-characteristic function (2.14) of $Z(\mu)$. But from (2.9) and by definition of $n(\rho)$, for all $x \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{f_\rho(x, r/\rho)}{\rho n(\rho)^\alpha} \sim \rho^{\beta(x)-\beta_1} \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}} \rightarrow \frac{g(x)1_{B_1}(x)}{r^{\beta_1+1}}, \quad \rho \rightarrow 0$$

and we have to consider two cases apart: $x \in B_1$ and $x \notin B_1$.

First, we focus on the case $x \in B_1$. For big radii, we are able to replace the measure $\frac{f_\rho(x, r/\rho)}{\rho n(\rho)^\alpha} dx dr$ by its equivalent. Indeed, condition (2.9) can be written:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall r > A, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \rho > 0, \left| \frac{f_\rho(x, r)}{\lambda(\rho)} - \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} \right| \leq \varepsilon \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}}. \quad (2.17)$$

A change of variable allows us to rewrite (2.17) as follows

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall \rho > 0, \forall r > A\rho, \forall x \in B_1, \left| \frac{f_\rho(x, r/\rho)}{\rho n(\rho)^\alpha} - \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} \right| \leq \varepsilon \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}}. \quad (2.18)$$

Integrating (2.18) over B_1 yields

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall \rho > 0, \forall r > A\rho, \\ & |F_1(r, \rho) - F_2(r)| \leq \varepsilon (1 - \tan(\pi\alpha/2)b) \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx, \end{aligned} \quad (2.19)$$

where

$$\begin{aligned} F_1(r, \rho) &= \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha (1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b) \frac{f_\rho(x, r/\rho)}{\rho n(\rho)^\alpha} dx, \\ F_2(r) &= \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha (1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b) \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx \end{aligned}$$

and

$$F_3(r) = (1 - \tan(\pi\alpha/2)b) \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx.$$

Since $\mu \in \mathcal{M}$ and $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, using point 1 of Proposition 2.5 with $\beta(x) = \beta_1$:

$$\int_{\mathbb{R}^+} |F_2(r)| dr \leq \int_{\mathbb{R}^+} |F_3(r)| dr < +\infty. \quad (2.20)$$

From (2.19) and (2.20), we deduce:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall \rho > 0, \int_{A\rho}^{+\infty} |F_1(r, \rho) - F_2(r)| dr \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+} |F_3(r)| dr. \quad (2.21)$$

We show now that the integral over small radii is negligible. Let $\varepsilon > 0$ and let $\rho > 0$ such that $A\rho < 1$ (where A is given by (2.19)). Since $\mu \in \mathcal{M}$, there exist $t > \beta_1$ and a constant C such that:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{A\rho} F_1(r, \rho) dr \right| &\leq (1 - b \tan(\pi\alpha/2)) \int_0^{A\rho} \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha \frac{f_\rho(x, r/\rho)}{\rho n(\rho)^\alpha} dx dr \\ &\leq \frac{(1 - b \tan(\pi\alpha/2))}{\rho n(\rho)^\alpha} \int_0^{A\rho} \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \|f_\rho(\cdot, r/\rho)\|_\infty dr \\ &\leq \frac{(1 - b \tan(\pi\alpha/2))}{\rho^{\beta_1+1} \lambda(\rho)} C \int_0^{A\rho} r^t \lambda(\rho) \|f(\cdot, r/\rho)\|_\infty dr \\ &\leq (1 - b \tan(\pi\alpha/2)) C \rho^{t-\beta_1} \int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\longrightarrow 0 \quad (2.23)$$

when $\rho \rightarrow 0$ using Lemma 2.8 and (2.10).

Thus, using (2.20), (2.21) and (2.23), we have

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} F_1(r, \rho) dr - \int_{\mathbb{R}} F_2(r) dr \right| &\leq \int_{A\rho}^{+\infty} |F_1(r, \rho) - F_2(r)| dr \\ &\quad + \left| \int_0^{A\rho} F_1(r, \rho) dr \right| + \left| \int_0^{A\rho} F_2(r) dr \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+} |F_3(r)| dr + \left| \int_0^{A\rho} F_1(r, \rho) dr \right| + \left| \int_0^{A\rho} F_2(r) dr \right| \\ &\leq K\varepsilon, \end{aligned}$$

for ρ small enough. To conclude we have shown so far that:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} F_1(r, \rho) dr = \int_{\mathbb{R}^+} F_2(r) dr.$$

We deal now with the case $x \notin B_1$ but apply the same arguments with slight changes. Set

$$\tilde{F}_1(r, \rho) = \int_{B_1^c} |\mu(B(x, r))|^\alpha \left(1 - i\varepsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b \right) \frac{f_\rho(x, r/\rho)}{\rho n(\rho)^\alpha} dx,$$

$$\tilde{F}_2(r, \rho) = \int_{B_1^c} |\mu(B(x, r))|^\alpha \left(1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b\right) \frac{g(x)\rho^{\beta(x)-\beta_1}}{r^{\beta(x)+1}} dx$$

and

$$\tilde{F}_3(r, \rho) = (1 - b \tan(\pi\alpha/2)) \int_{B_1^c} |\mu(B(x, r))|^\alpha \frac{g(x)\rho^{\beta(x)-\beta_1}}{r^{\beta(x)+1}} dx$$

For $\rho < 1$, we have:

$$\left| \tilde{F}_2(r, \rho) \right| \leq \left| \tilde{F}_3(r, \rho) \right| \leq (1 - b \tan(\pi\alpha/2)) \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) r^{-\beta(x)-1} dx \quad (2.24)$$

and then, since $\mu \in \mathcal{M}$, using again point 1 of Proposition 2.5,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} |\tilde{F}_2(r, \rho)| dr &\leq \int_{\mathbb{R}^+} |\tilde{F}_3(r, \rho)| dr \\ &\leq (1 - b \tan(\pi\alpha/2)) \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) r^{-\beta(x)-1} dx dr < +\infty. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Using condition (2.9) with a change of variable and integrating over $[A\rho, +\infty[\times B_1^c$, we obtain:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall \rho > 0, \int_{A\rho}^{+\infty} \left| \tilde{F}_1(r, \rho) - \tilde{F}_2(r, \rho) \right| dr \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+} |\tilde{F}_3(r, \rho)| dr.$$

Let $\varepsilon > 0$ and let $\rho > 0$ such that $A\rho < 1$. Like in (2.22) above for F_1 , we obtain

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{A\rho} \tilde{F}_1(r, \rho) dr \right| &\leq (1 - b \tan(\pi\alpha/2)) C \rho^{t-\beta_1} \int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr \\ &\longrightarrow 0, \rho \rightarrow 0 \end{aligned}$$

using Lemma 2.8. This shows that the integral over small radii is negligible.

Thus:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}_1(r, \rho) dr - \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}_2(r, \rho) dr \right| \\ &\leq \int_{A\rho}^{+\infty} \left| \tilde{F}_1(r, \rho) - \tilde{F}_2(r, \rho) \right| dr + \left| \int_0^{A\rho} \tilde{F}_1(r, \rho) dr \right| + \left| \int_0^{A\rho} \tilde{F}_2(r, \rho) dr \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+} |\tilde{F}_3(r, \rho)| dr + \left| \int_0^{A\rho} \tilde{F}_1(r, \rho) dr \right| + \left| \int_0^{A\rho} \tilde{F}_2(r, \rho) dr \right| \\ &\leq K\varepsilon, \end{aligned}$$

for ρ small enough. As a consequence, $\int_{\mathbb{R}^+} \tilde{F}_1(r, \rho) dr$ and $\int_{\mathbb{R}^+} \tilde{F}_2(r, \rho) dr$ have the same limit when $\rho \rightarrow 0$ and we show now that this limit is 0. Since $x \in B_1^c$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |\mu(B(x, r))|^\alpha \left(1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b\right) g(x) \frac{\rho^{\beta(x)-\beta_1}}{r^{\beta(x)+1}} = 0.$$

Moreover, for $\rho < 1$

$$\begin{aligned} |\mu(B(x, r))|^\alpha \left(1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) b \tan(\pi\alpha/2)\right) g(x) \frac{\rho^{\beta(x)-\beta_1}}{r^{\beta(x)+1}} \\ \leq (1 - b \tan(\pi\alpha/2)) |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) r^{-\beta(x)-1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

But for $\mu \in \mathcal{M}$, point (1) of Proposition 2.5 ensures that the right-hand side in (2.26) is integrable over $\mathbb{R}^+ \times B_1^c$. Dominated convergence Theorem entails

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1^c} |\mu(B(x, r))|^\alpha (1 - i\epsilon(\theta\mu(B(x, r))) \tan(\pi\alpha/2)b) g(x) \frac{\rho^{\beta(x)-\beta_1}}{r^{\beta(x)+1}} dx dr = 0.$$

Combining it all, we have proved that the log-characteristic function of $n(\rho)^{-1}\widetilde{M}_\rho(\mu)$ converges to the log-characteristic function of $Z(\mu)$ given in (2.14).

We now use the Cramér-Wold device and the linearity of the fields M_ρ and Z to derive the convergence of the finite-dimensional distributions from the one dimensional convergence. □

In the next proposition, we give properties of the limit field Z for particular choices of g and β . They are deduced from the invariance by rotation of the Lebesgue measure, the self-similarity of stable integral, the global invariance of the balls and Proposition 2.6.

Proposition 2.13.

1. When g is radial (i.e. $g(x) = g(\|x\|)$) and B_1 is invariant by rotation, the field Z is isometric, i.e.:

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \forall \Theta \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d), Z(\Theta\mu) \stackrel{fdd}{=} Z(\mu).$$

2. Suppose there exists $H \in \mathbb{R}$ such that, for any $a \in \mathbb{R}^+$ and $x \in \mathbb{R}^d$, $g(ax) = a^H g(x)$ and suppose B_1 is invariant by dilatation (i.e. $\{x \in \mathbb{R}^d, ax \in B_1\} = B_1$). Then, the random field Z is self-similar on $\mathcal{M}$ with index $(H + d - \beta_1)/\alpha$.

Proof.

1. The proof comes directly from the invariance by rotation of $g(x)1_{B_1}(x)dx$ which is the projection of the control measure of M_α on $\mathbb{R}^d$.
2. The proof consists in a change of variable in (2.14). □

Remark 2.14.

- The only way to have B_1 invariant by rotation and by dilatation is to take $B_1 = \mathbb{R}^d$ (i.e. to take β a constant function).
- Let g be a radial function and such that, for any $a \in \mathbb{R}^+$, for any $x \in \mathbb{R}^d$, $g(ax) = a^H g(x)$, then $g(x) = \|x\|^H g(1)$. Unfortunately, $g_H : x \mapsto \|x\|^H$ belongs to L^∞ implies $H = 0$ (i.e. g is a constant function). In that case, we recover the settings of [8].

Remark 2.15. To study the spatial dependence structure of the process Z , we use the covariation which is a generalization of the covariance to the stable framework (see [46]). Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$, the covariation of $Z(\mu_1)$ and $Z(\mu_2)$ is given by:

$$\begin{aligned} & [Z(\mu_1), Z(\mu_2)]_\alpha \\ &= \sigma^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \mu_1(B(x, r)) \epsilon(\mu_2(B(x, r))) |\mu_2(B(x, r))|^{\alpha-1} g(x) 1_{B_1}(x) r^{-\beta_1-1} dx dr. \end{aligned}$$

The integral above is well defined by Hölder's inequality. Since, even when μ_1 and μ_2 have disjoint supports, we have $[Z(\mu_1), Z(\mu_2)]_\alpha \neq 0$, this indicates that $Z(\mu_1)$ and $Z(\mu_2)$ are stable-dependent.

Remark 2.16. When β is a constant function and $g = 1$, the field Z coincides with the stable random field obtained in Theorem 2.4 in [8]. Therefore, referring to Remarks 2.8 and 2.1 in [8], it generalizes the Telecom Process obtained in [30], a Gaussian limit field obtained in [6] and the large-grain limit in [29].

2.3.2 Intermediate scaling

In this section, we investigate the intermediate scaling, that is when $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1}$ has a finite non-zero limit ℓ when $\rho \rightarrow 0$. In this case, the field obtained at the limit is a compensated Poisson integral.

Theorem 2.17. Suppose $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \rightarrow \ell \in]0, +\infty[$ when $\rho \rightarrow 0$ and suppose again the set $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \beta(x) = \beta_1\}$ has a non-zero Lebesgue measure, then we have:

$$\widetilde{M}_\rho(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{M}} J_\ell(\cdot),$$

where $J_\ell(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} m\mu(B(x, r)) \widetilde{\Pi}_\ell(dx, dr, dm)$ and $\widetilde{\Pi}_\ell$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ with intensity $\ell g(x) 1_{B_1}(x) dx r^{-\beta_1-1} dr G(dm)$.

Remark 2.18. In that particular case, the normalization factor $n(\rho)$ is 1 and, roughly speaking, J is obtained by taking the limit in the intensity measure.

Proof. We first prove that the compensated Poisson integral $J_\ell(\mu)$ is well defined for $\mu \in \mathcal{M}$. This is the case when

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left(|m\mu(B(x, r))| \wedge (m\mu(B(x, r)))^2 \right) g(x) 1_{B_1}(x) dx r^{-\beta_1-1} dr G(dm) < +\infty, \quad (2.27)$$

see Lemma 12.13 in [31]. Condition (2.27) can be splitted into:

$$\int_{|m\mu(B(x, r))| \leq 1} (m\mu(B(x, r)))^2 g(x) 1_{B_1}(x) dx r^{-\beta_1-1} dr G(dm) < +\infty \quad (2.28)$$

and

$$\int_{|m\mu(B(x,r))|\geq 1} |m\mu(B(x,r))|g(x)1_{B_1}(x)dxr^{-\beta_1-1}drG(dm) < +\infty. \quad (2.29)$$

To prove (2.28) and (2.29), we use the following bounds for truncated moment of G :

$$\int_{|m|\geq x} |m|G(dm) \leq C_1x^{1-\alpha}$$

and

$$\int_{-x}^x m^2G(dm) \leq C_2x^{2-\alpha},$$

for all $x \geq 0$ and for some constants C_1 and C_2 , see Lemma 3.4 in [8]. Therefore, for (2.28) we have:

$$\begin{aligned} & \int_{|m\mu(B(x,r))|\leq 1} (m\mu(B(x,r)))^2g(x)1_{B_1}(x)dxr^{-\beta_1-1}drG(dm) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{-1/|\mu(B(x,r))|}^{1/|\mu(B(x,r))|} m^2G(dm) \right) |\mu(B(x,r))|^2g(x)1_{B_1}(x)dxr^{-\beta_1-1}dr \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x,r))|^\alpha g(x)r^{-\beta_1-1}dxdr \end{aligned}$$

which is finite when $\mu \in \mathcal{M}$ thank to Proposition 2.5. Similarly, for (2.29) we have:

$$\begin{aligned} & \int_{|m\mu(B(x,r))|\geq 1} |m\mu(B(x,r))|g(x)1_{B_1}(x)dxr^{-\beta_1-1}drG(dm) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{|m|\geq 1/|\mu(B(x,r))|} |m|G(dm) \right) |\mu(B(x,r))|g(x)1_{B_1}(x)dxr^{-\beta_1-1}dr \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x,r))|^\alpha g(x)r^{-\beta_1-1}dxdr < +\infty. \end{aligned}$$

We prove now Theorem 2.17 using a very similar reasoning as the one used for Theorem 2.11. Condition (2.9) implies that $\rho^{-1}f_\rho(x, r/\rho) \sim \lambda(\rho)g(x)\rho^{\beta(x)}r^{-\beta(x)-1}$ when $\rho \rightarrow 0$. Since $\lambda(\rho)\rho^{\beta(x)}r^{-\beta(x)-1} \rightarrow \ell r^{-\beta_1-1}1_{B_1}(x)$ when $\rho \rightarrow 0$, we consider two cases: $x \in B_1$ and $x \notin B_1$.

First, we focus on the case $x \in B_1$. Set

$$G_1(r, \rho) = \int_{B_1} \psi_G(\theta\mu(B(x, r)))\rho^{-1}f_\rho(x, r/\rho)dx,$$

$$G_2(r) = \ell \int_{B_1} \psi_G(\theta\mu(B(x, r)))g(x)r^{-\beta_1-1}dx$$

and

$$G_3(r) = \ell \int_{B_1} |\psi_G(\theta\mu(B(x, r)))|g(x)r^{-\beta_1-1}dx.$$

A change of variable in (2.17) entails

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall \rho > 0, \int_{A\rho}^{+\infty} |G_1(r, \rho) - G_2(r)|dr \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}_+} |G_3(r)|dr. \quad (2.30)$$

We use the fact that $|\psi_G(\theta\mu(B(x, r)))| \leq K|\theta\mu(B(x, r))|^\alpha$ (Lemma (2.9)) to derive that:

$$|G_2(r)| \leq |G_3(r)| \leq \ell K |\theta|^\alpha \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) dx r^{-\beta_1-1} \quad (2.31)$$

and, since $\mu \in \mathcal{M}$, Proposition 2.5 ensures

$$\int_{\mathbb{R}^+} |G_2(r)| dr \leq \int_{\mathbb{R}^+} |G_3(r)| dr \leq K \ell |\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) dx r^{-\beta_1-1} dr < +\infty. \quad (2.32)$$

On the other hand, let ρ such that $A\rho < 1$. Then, using (2.10), since $\mu \in \mathcal{M}$, there exist $t > \beta_1$ and a constant C such that:

$$\begin{aligned} \int_0^{A\rho} |G_1(r, \rho)| dr &\leq \rho^{-1} |\theta|^\alpha \int_0^{A\rho} \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) dx \|f_\rho(\cdot, r/\rho)\|_\infty dr \\ &\leq C \lambda(\rho) \rho^{-1} |\theta|^\alpha \int_0^{A\rho} r^t \|f(\cdot, r/\rho)\|_\infty dr \\ &\leq C \lambda(\rho) \rho^t |\theta|^\alpha \int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr \\ &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

because $\int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr$ comes from Lemma 2.8 and $\lambda(\rho) \rho^t = \lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rho^{-\beta_1+t} \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$ since $\lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rightarrow \ell$. In conclusion, (2.30), (2.32) and (2.33) entail

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} G_1(r, \rho) dr - \int_{\mathbb{R}} G_2(r) dr \right| &\leq \int_{A\rho}^{+\infty} |G_1(r, \rho) - G_2(r)| dr \\ &\quad + \left| \int_0^{A\rho} G_1(r, \rho) dr \right| + \left| \int_0^{A\rho} G_2(r) dr \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^+} |G_3(r)| dr + \left| \int_0^{A\rho} G_1(r, \rho) dr \right| + \left| \int_0^{A\rho} G_2(r) dr \right| \\ &\leq K \varepsilon, \end{aligned}$$

for ρ small enough.

We are now interested in the case $x \in B_1^c$. Set

$$\tilde{G}_1(r, \rho) = \int_{B_1^c} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx$$

,

$$\tilde{G}_2(r, \rho) = \int_{B_1^c} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) g(x) \frac{\lambda(\rho) \rho^{\beta(x)}}{r^{\beta(x)+1}} dx$$

and

$$\tilde{G}_3(r, \rho) = \int_{B_1^c} |\psi_G(\theta\mu(B(x, r)))| g(x) \frac{\lambda(\rho) \rho^{\beta(x)}}{r^{\beta(x)+1}} dx.$$

Note that, $\forall x \in B_1^c$, $\lambda(\rho) \rho^{\beta(x)} \leq \lambda(\rho) \rho^{\beta_1}$ when $\rho \leq 1$ and $\lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rightarrow \ell$ when $\rho \rightarrow 0$. Therefore, there exists $0 < \delta \leq 1$ such that $\forall \rho < \delta$, $\lambda(\rho) \rho^{\beta(x)} < 2\ell$. Let $\rho < \delta$. Using the

fact that $|\psi_G(\theta\mu(B(x, r)))| \leq K|\theta\mu(B(x, r))|^\alpha$ and Proposition 2.5 we have:

$$\begin{aligned} \left| \int_{A\rho}^{+\infty} \tilde{G}_2(r, \rho) dr \right| &\leq \left| \int_{A\rho}^{+\infty} \tilde{G}_3(r, \rho) dr \right| \\ &\leq 2\ell K|\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1^c} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) dx r^{-\beta(x)-1} dr < +\infty. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Then using condition (2.9) with a change of variable we deduce:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall \rho > 0, \int_{A\rho}^{+\infty} |\tilde{G}_1(r, \rho) - \tilde{G}_2(r, \rho)| dr \leq \varepsilon \int_{A\rho}^{+\infty} |\tilde{G}_3(r, \rho)| dr. \quad (2.35)$$

In the mean time, there exist $t > \beta_1$ and a constant C such that, using the same computations we used for G_1 :

$$\left| \int_0^{A\rho} \tilde{G}_1(r, \rho) dr \right| \leq K|\theta|^\alpha \lambda(\rho) \rho^t C \int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr \longrightarrow 0, \quad (2.36)$$

when $\rho \rightarrow 0$ using Lemma 2.8. Using (2.34), (2.35) and (2.36), we have

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}_1(r, \rho) dr - \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}_2(r, \rho) dr \right| \\ &\leq \int_{A\rho}^{+\infty} |\tilde{G}_1(r, \rho) - \tilde{G}_2(r, \rho)| dr + \left| \int_0^{A\rho} \tilde{G}_1(r, \rho) dr \right| + \left| \int_0^{A\rho} \tilde{G}_2(r, \rho) dr \right| \\ &\leq K\varepsilon, \end{aligned}$$

for ρ small enough. Thus

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1^c} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr$$

has the same limit as

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1^c} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) g(x) \lambda(\rho) \rho^{\beta(x)} r^{-\beta(x)-1} dx dr$$

when $\rho \rightarrow 0$. We now show that this limit is 0. Since $x \in B_1^c$,

$$\psi_G(\theta\mu(B(x, r))) g(x) \lambda(\rho) \rho^{\beta(x)} r^{-\beta(x)-1} \rightarrow 0,$$

when $\rho \rightarrow 0$ because $\lambda(\rho) \rho^{\beta(x)} = \lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rho^{\beta(x)-\beta_1}$ and $\lambda(\rho) \rho^{\beta_1} \rightarrow \ell$. Moreover, for $\rho < \delta$:

$$\left| \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) g(x) \lambda(\rho) \rho^{\beta(x)} r^{-\beta(x)-1} \right| \leq 2\ell K|\theta|^\alpha |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) r^{-\beta(x)-1},$$

which is integrable on $\mathbb{R}^+ \times B_1^c$ according to Proposition 2.5. Thus by the dominated convergence theorem:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1^c} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) g(x) \lambda(\rho) \rho^{\beta(x)} r^{-\beta(x)-1} dx dr = 0,$$

which implies that:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1^c} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr = 0.$$

This proves that the log-characteristic function of $\widetilde{M}_\rho(\mu)$ converges to

$$\ell \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G(\theta\mu(B((x, r)))) \frac{g(x)1_{B_1}(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr$$

which is the log-characteristic function of $J_\ell(\mu)$. Once again, using the Cramér-Wold device, this one-dimensional convergence is enough to prove the finite-dimensional distributions convergence of the process. $\square$

We give now some remarkable properties of the limit field J_ℓ for particular choices of g and β .

Proposition 2.19.

1. When g is radial and B_1 is invariant by rotation, the field J_ℓ is isotropic.
2. When g is such that there exists a constant $H > 0$, such that for any $a \in \mathbb{R}^+$ and for any $x \in \mathbb{R}^d$, $g(ax) = a^H g(x)$, and B_1 is invariant by dilatation, $J_\ell(\mu)$ is equal in finite-dimensional law to $J'(\mu_{\ell'})$ where $\ell' = \ell^{1/(d+H-\beta_1)}$ and, for any $\mu \in \mathcal{M}$:

$$J'(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} m\mu(Bx, r) \widetilde{\Pi}(dx, dr, dm),$$

where $\widetilde{\Pi}$ is a compensated Poisson process with intensity $g(x)1_{B_1}(x)dx \frac{dr}{r^{\beta_1+1}} G(dm)$. In that particular case, J' is aggregate-similar that is, for any $\mu \in \mathcal{M}$, for any $m \geq 1$:

$$J'(\mu_{a_m}) \stackrel{fdd}{=} \sum_{i=1}^m J'_i(\mu)$$

where J'_i , $1 \leq i \leq m$ are independent copies of J' and $a_m = m^{1/(d-\beta_1-H)}$.

Proof.

1. The proof comes directly from the invariance by rotation of $g(x)1_{B_1}(x)dx$ which is the projection on $\mathbb{R}^d$ of the control measure of Π_ℓ .
2. Let $\mu \in \mathcal{M}$ and $\theta \in \mathbb{R}$, using conditions on g and B_1 we have:

$$\begin{aligned} \log \left(\mathbb{E} \left[e^{i\theta J'(\mu_{\ell'})} \right] \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G(\theta\mu(B(\ell'^{-1}x, \ell'^{-1}r))) g(x)1_{B_1}(x) dx r^{-\beta_1-1} dr \\ &= \ell'^{d-\beta_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) g(\ell'x)1_{B_1}(\ell'x) dx r^{-\beta_1-1} dr \\ &= \ell'^{d+H-\beta_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G(\theta\mu(B(x, r))) g(x)1_{B_1}(x) dx r^{-\beta_1-1} dr \\ &= \log \left(\mathbb{E} \left[e^{i\theta J(\mu)} \right] \right). \end{aligned}$$

This proves the identity in law of $(J(\mu))_\mu$ and $(J'(\mu_{\ell'}))_\mu$. If we take now $\ell' = m^{1/(d-\beta_1-H)}$, where m is a positive integer, in the previous computation (which means taking $\ell = m$ a positive integer), we get the aggregate-similarity property.

□

Remark 2.20. As in Remark 2.16, the process J_ℓ defined in Theorem 2.17 recovers the process J of Theorem 2.11 in [8] when $g = 1$ and β is a constant function.

2.3.3 Small-balls scaling

In this section, we investigate the asymptotic behavior of M under the small-balls scaling, that is $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$. In that case, we obtain at the limit a stable-field that exhibits independence.

Theorem 2.21. Let $n(\rho) = (\lambda(\rho)^{1/\beta_1}\rho)^d$ and $\gamma = \beta_1/d \in]1, \alpha[$. Suppose $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$, $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \beta(x) = \beta_1\}$ has a non-zero Lebesgue measure and $\beta_2 < \alpha d$, then:

$$n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\cdot) \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)} \widetilde{Z}(\cdot),$$

where, for $\mu(dx) = \phi(x)dx$, $\widetilde{Z}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) M_\gamma(dx)$ is a stable integral with respect to the γ -stable measure M_γ with control measure $\sigma_\gamma^\gamma 1_{B_1}(x)g(x)dx$ for

$$\sigma_\gamma^\gamma = \frac{c_d^\gamma}{d} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - \cos(r)}{r^{\gamma+1}} dr \int_{\mathbb{R}} |m|^\gamma G(dm)$$

and with constant skewness function equals to

$$b_\gamma = - \frac{\int_{\mathbb{R}} \epsilon(m) |m|^\gamma G(dm)}{\int_{\mathbb{R}} |m|^\gamma G(dm)}. \quad (2.37)$$

Remark 2.22. The limiting field $\widetilde{Z}$ is well defined since $d < \beta_1 < \alpha d$ (see [46]). The condition $\beta_2 < \alpha d$ implies that the volumes of the balls have an infinite variance. In other words, we need some balls to be big enough in order to obtain something significant at the limit.

Proof. Here again, we only prove the one-dimensional convergence. Indeed, combined with the linearity of our processes and the linear structure of $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, it implies the finite-dimensional convergence.

We make the change of variable $r \mapsto n(\rho)^{1/d}r$ in the log-characteristic function of $\frac{\widetilde{M}_\rho(\mu)}{n(\rho)}$ which gives us:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) \right) \frac{n(\rho)^{1/d}}{\rho} f_\rho \left(x, \frac{n(\rho)^{1/d}}{\rho} r \right) dx dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) \right) \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho \left(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r \right) dx dr. \end{aligned}$$

Note that under the assumption $\lambda(\rho)\rho^{\beta_1} \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$ and condition (2.4), $n(\rho) \rightarrow 0$ and $n(\rho)^{1/d}/\rho = \lambda(\rho)^{1/\beta_1} \rightarrow +\infty$ when $\rho \rightarrow 0$. Let $\mu(dz) = \phi(z)dz$ with $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, then from Lemma 4 in [29], when $n(\rho) \rightarrow 0$,

$$\left| c_d^{-1} r^{-d} n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r)) - \phi(x) \right| \rightarrow 0 \quad (2.38)$$

dx -almost everywhere and $\phi^* \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ where

$$\phi^*(x) = \sup_{v>0} \left(c_d^{-1} v^{-d} |\mu|(B(x, v)) \right). \quad (2.39)$$

Using the Lipschitzian property of ψ_G we have:

$$\left| \psi_G \left(\theta \frac{\mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r))}{n(\rho)} \right) - \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \leq L |\theta| \left| \frac{\mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r))}{n(\rho)} - \phi(x) c_d r^d \right|, \quad (2.40)$$

where $L = 2 \int_{\mathbb{R}} |m| G(dm)$, and thus $|\psi_G(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r))) - \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d)|$ converges to 0 when $\rho \rightarrow 0$. We also have from (2.9) that:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho \left(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r \right) = \frac{g(x) 1_{B_1}(x)}{r^{\beta(x)+1}}.$$

Thus:

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r)) \right) \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho \left(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r \right) \\ &= \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \frac{g(x) 1_{B_1}(x)}{r^{\beta(x)+1}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

We want to show that we can exchange the limit (2.41) with the integration over $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. To see this, we write, $\forall r \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} & \left| \psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r)) \right) \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho \left(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r \right) \right. \\ & \quad \left. - \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \frac{g(x) 1_{B_1}(x)}{r^{\beta(x)+1}} \right| \\ & \leq H_1(x, r, \rho) + H_2(x, r, \rho), \end{aligned} \quad (2.42)$$

where

$$\begin{aligned} H_1(x, r, \rho) = & \left| \psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r)) \right) - \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \left| \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r) \right| \end{aligned}$$

and

$$H_2(x, r, \rho) = \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \left| \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho \left(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r \right) - \frac{g(x) 1_{B_1}(x)}{r^{\beta(x)+1}} \right|.$$

First, let us focus on H_1 . Let $\rho > 0$ large enough such that $\lambda(\rho) > 1$, then, using (2.40)

and the bound induced by condition (2.9), $\forall r > A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} H_1(x, r, \rho) &\leq L|\theta| \left| n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) - \phi(x) c_d r^d \right| 2g(x) \frac{\lambda(\rho)^{1-\beta(x)/\beta_1}}{r^{\beta(x)+1}} \\ &\leq 2L|\theta| c_d r^d \left| c_d^{-1} r^{-d} n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) - \phi(x) \right| g(x) \left(r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

where $a \vee b = \max(a, b)$.

Moreover, $\forall r \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \left| c_d^{-1} r^{-d} n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) - \phi(x) \right| g(x) dx \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left| c_d^{-1} r^{-d} n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) - \phi(x) \right| dx. \end{aligned}$$

The integrand $\left| c_d^{-1} r^{-d} n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) - \phi(x) \right|$ converges to 0 dx -almost everywhere (see (2.38)). Since its L^α -norm is bounded by $\|\phi^*\|_{L^\alpha} + \|\phi\|_{L^\alpha}$, it is uniformly integrable in r and ρ and as a consequence:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left| c_d^{-1} r^{-d} n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) - \phi(x) \right| dx = 0.$$

In particular,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \exists \rho_0 > 0, \forall \rho < \rho_0, \forall r > A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}, \\ &\int_{\mathbb{R}^d} \left| c_d^{-1} r^{-d} n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) - \phi(x) \right| g(x) dx < \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Let $\varepsilon > 0$ and $\rho < \rho_0$ such that $\lambda(\rho) > 1$, we have:

$$\begin{aligned} &\int_{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} H_1(x, r, \rho) dx dr \\ &\leq 2L|\theta| c_d \int_{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}}^{+\infty} \left(r^{d-\beta_1-1} \vee r^{d-\beta_2-1} \right) \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r))}{c_d r^d n(\rho)} - \phi(x) \right| g(x) dx dr \\ &\leq 2\varepsilon L|\theta| c_d \left(\int_{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1} \wedge 1}^1 r^{d-\beta_2-1} dr + \int_{1 \vee A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}}^{+\infty} r^{d-\beta_1-1} dr \right) < +\infty \end{aligned} \quad (2.45)$$

since $\beta_1 - d + 1 > 1$.

On the other hand, since $|\psi_G(v)| \leq K|v|^\alpha$

$$\begin{aligned} &|\psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r)) \right) - \psi_G \left(\theta \phi(x) c_d r^d \right)| \\ &\leq K|\theta|^\alpha c_d^\alpha r^{\alpha d} \left(\frac{|\mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r))|^\alpha}{(c_d r^d n(\rho))^\alpha} + |\phi(x)|^\alpha \right) \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} H_1(x, r, \rho) &\leq K|\theta|^\alpha c_d^\alpha r^{\alpha d} \left(\frac{|\mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r))|^\alpha}{(c_d r^d n(\rho))^\alpha} + |\phi(x)|^\alpha \right) \lambda(\rho)^{1/\beta_1} \|f_\rho(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1}r)\|_\infty \\ &\leq K|\theta|^\alpha c_d^\alpha r^{\alpha d} \left(\frac{|\mu(B(x, n(\rho)^{1/d}r))|^\alpha}{(c_d r^d n(\rho))^\alpha} + |\phi(x)|^\alpha \right) \lambda(\rho)^{1+\frac{1}{\beta_1}} \|f(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1}r)\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Then by integration,

$$\begin{aligned} & \int_0^{A/\lambda(\rho)^{1/\beta_1}} \int_{\mathbb{R}^d} H_1(x, r, \rho) dx dr \\ & \leq K |\theta|^\alpha c_d^\alpha \lambda(\rho)^{1+1/\beta_1} \\ & \quad \times \int_0^{A/\lambda(\rho)^{1/\beta_1}} r^{\alpha d} \|f(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|\mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r))|^\alpha}{(c_d r^d n(\rho))^\alpha} + |\phi(x)|^\alpha \right) dx dr. \end{aligned}$$

But,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|\mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r))|^\alpha}{(c_d r^d n(\rho))^\alpha} + |\phi(x)|^\alpha \right) dx \leq \|\phi^*\|_\alpha^\alpha + \|\phi\|_\alpha^\alpha.$$

So finally,

$$\begin{aligned} & \int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} \int_{\mathbb{R}^d} H_1(x, r, \rho) dx dr \\ & \leq K |\theta|^\alpha c_d^\alpha (\|\phi^*\|_\alpha^\alpha + \|\phi\|_\alpha^\alpha) \lambda(\rho)^{1+\frac{1}{\beta_1}} \int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} r^{\alpha d} \|f(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r)\|_\infty dr \\ & \leq K |\theta|^\alpha c_d^\alpha (\|\phi^*\|_\alpha^\alpha + \|\phi\|_\alpha^\alpha) \lambda(\rho)^{1-(\alpha d)/\beta_1} \int_0^A r^{\alpha d} \|f(\cdot, r)\|_\infty dr \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

when $\rho \rightarrow 0$ (i.e. $\lambda(\rho) \rightarrow +\infty$) using Lemma 2.8 and $\beta_1 < \alpha d$.

Thus (2.45) and (2.47) entail together

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} H_1(x, r, \rho) dx dr = 0. \quad (2.48)$$

We focus now on H_2 . We treat two cases apart: $x \in B_1$ and $x \in B_1^c$. First, we consider $x \in B_1$. In that case,

$$H_2(x, r, \rho) = \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \left| \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho \left(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r \right) - \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} \right|.$$

Performing a change of variable in (2.17) and integrating we obtain:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall \rho > 0,$$

$$\int_{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}}^{+\infty} \int_{B_1} H_2(x, r, \rho) dx dr \leq \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{B_1} \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr. \quad (2.49)$$

Using the facts that $|\psi_G(u)| \leq K \min(|u|, |u|^\alpha)$ (see [8]), $\phi \in L^q \cap L^{\alpha q}$ and Hölder's inequality we have, $\forall r \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} & \int_{B_1} \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx \\ & \leq K \int_{\mathbb{R}^d} \min \left(|\theta \phi(x)| c_d r^d, |\theta \phi(x)|^\alpha c_d^\alpha r^{\alpha d} \right) g(x) dx r^{-\beta_1-1} \\ & \leq K \|g\|_\infty \min \left(|\theta| c_d r^d \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)| dx, |\theta|^\alpha c_d^\alpha r^{\alpha d} \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^\alpha dx \right) r^{-\beta_1-1} \\ & \leq K \|g\|_\infty \max \left(|\theta| c_d \|\phi\|_1, |\theta|^\alpha c_d^\alpha \|\phi\|_\alpha^\alpha \right) \left(r^{d-\beta_1-1} \wedge r^{\alpha d-\beta_1-1} \right). \end{aligned}$$

Note that $(r^{d-\beta_1-1} \wedge r^{\alpha d-\beta_1-1}) = r^{d-\beta_1-1}$ when $r \geq 1$ and $(r^{d-\beta_1-1} \wedge r^{\alpha d-\beta_1-1}) = r^{\alpha d-\beta_1-1}$ when $r \leq 1$. Using condition (2.4), $\beta_1 - \alpha d + 1 < 1 < \beta_1 - d + 1$, and thus $(r^{d-\beta_1-1} \wedge r^{\alpha d-\beta_1-1})$ is integrable over $\mathbb{R}^+$. Consequently

$$\int_0^{+\infty} \int_{B_1} \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr < +\infty.$$

On the other hand, $\forall x \in B_1, \forall r \in \mathbb{R}^+$:

$$H_2(x, r, \rho) \leq K |\theta|^\alpha c_d^\alpha |\phi(x)|^\alpha r^{\alpha d} \left(\lambda(\rho)^{1+1/\beta_1} \|f(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r)\|_\infty + \|g\|_\infty r^{-\beta_1-1} \right).$$

Since $\|\phi\|_\alpha^\alpha < +\infty$, we are only interested in the integral

$$\begin{aligned} & \int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} r^{\alpha d} \left(\lambda(\rho)^{1+1/\beta_1} \|f(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r)\|_\infty + \|g\|_\infty r^{-\beta_1-1} \right) dr \\ &= \lambda(\rho)^{1-(\alpha d)/\beta_1} \int_0^A r^{\alpha d} \|f(\cdot, r)\|_\infty dr + \|g\|_\infty \int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} r^{\alpha d-\beta_1-1} dr. \end{aligned}$$

Note that, since $\alpha d - \beta_1 - 1 > -1$, $r^{\alpha d-\beta_1-1}$ is integrable in 0 and

$$\int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} r^{\alpha d-\beta_1-1} dr \rightarrow 0$$

when $\rho \rightarrow 0$. Since $\int_0^A r^{\alpha d} \|f(\cdot, r)\|_\infty dr$ is finite (using Lemma 2.8), we obtain finally that:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} \int_{B_1} H_2(x, r, \rho) dr = 0. \quad (2.50)$$

Combining (2.49) and (2.50), we obtain that:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1} H_2(x, r, \rho) dx dr = 0. \quad (2.51)$$

We deal now with the case $x \in B_1^c$. In that case

$$H_2(x, r, \rho) = \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \left| \lambda(\rho)^{1/\beta_1} f_\rho \left(x, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r \right) \right|.$$

Let ρ_1 be such that, $\forall \rho > \rho_1, \lambda(\rho) > 1$. From Condition (2.9), we deduce:

$$\begin{aligned} & \exists A > 0, \forall \rho > \rho_1, \forall r > A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}, \forall x \in B_1^c, \\ & H_2(x, r, \rho) \leq 2 \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \|g\|_\infty \left(r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1} \right). \end{aligned}$$

Using $|\psi_G(u)| \leq K \min(|u|, |u|^\alpha)$ and $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ we have:

$$\begin{aligned} & \int_{B_1^c} \left| \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \right| \|g\|_\infty \left(r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1} \right) dx \\ & \leq K \|g\|_\infty \max(|\theta| c_d \|\phi\|_1, |\theta|^\alpha c_d^\alpha \|\phi\|_\alpha) \left(r^d \wedge r^{\alpha d} \right) \left(r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1} \right). \end{aligned}$$

Under condition (2.4) and since $\beta_2 < \alpha d$, $(r^d \wedge r^{\alpha d}) (r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1})$ is integrable over $\mathbb{R}^+$ and consequently

$$\int_0^{+\infty} \int_{B_1^c} \left| \psi_G(\theta\phi(x)c_d r^d) \right| g(x) \left(r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1} \right) dx dr < +\infty.$$

Then by the dominated convergence theorem:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}}^{+\infty} \int_{B_1^c} H_2(x, r, \rho) dx dr = 0. \quad (2.52)$$

On the other hand, for $\rho > \rho_1$ (i.e. $\lambda(\rho) > 1$), $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in B_1^c$:

$$H_2(x, r, \rho) \leq K |\theta|^\alpha c_d^\alpha |\phi(x)|^\alpha r^{\alpha d} \lambda(\rho)^{1+1/\beta_1} \|f(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r)\|_\infty.$$

Since $\|\phi\|_\alpha^\alpha < +\infty$ and

$$\int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} r^{\alpha d} \lambda(\rho)^{1+1/\beta_1} \|f(\cdot, \lambda(\rho)^{1/\beta_1} r)\|_\infty dr = \lambda(\rho)^{1-(\alpha d)/\beta_1} \int_0^A r^{\alpha d} \|f(\cdot, r)\|_\infty dr \rightarrow 0,$$

when $\rho \rightarrow 0$ using Lemma 2.8, we obtain:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{A\lambda(\rho)^{-1/\beta_1}} \int_{B_1^c} H_2(x, r, \rho) dr = 0. \quad (2.53)$$

Combining (2.52) and (2.53) we obtain that:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1^c} H_2(x, r, \rho) dx dr = 0, \quad (2.54)$$

which, combined now with (2.51) yields that:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} H_2(x, r, \rho) dx dr = 0. \quad (2.55)$$

From (2.42), (2.48) and (2.55), we obtain:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, n(\rho)^{1/d} r)) \right) \frac{n(\rho)^{1/d}}{\rho} f_\rho \left(x, \frac{n(\rho)^{1/d}}{\rho} r \right) dx dr \\ = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{B_1} \psi_G \left(\theta \phi(x) c_d r^d \right) g(x) r^{-\beta_1-1} dr dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

We conclude the proof by proving that the right-hand side in (2.56) is the log-characteristic function of $\tilde{Z}(\mu)$. Let us split the integration over B_1 into $\{x \in B_1 : \theta\phi(x) \geq 0\}$ and $\{x \in B_1 : \theta\phi(x) < 0\}$ and perform a change of variable. We obtain:

$$\int_{B_1} \psi_G \left(\theta \phi(x) c_d r^d \right) g(x) r^{-\beta_1-1} dr dx = D \int_{B_1} (\theta \phi(x))_+^\gamma g(x) dx + \bar{D} \int_{B_1} (\theta \phi(x))_-^\gamma g(x) dx,$$

where $D = \frac{c_d^\gamma}{d} \int_{\mathbb{R}^+} \psi_G(r) r^{-\gamma-1} dr$ and $\bar{D}$ denotes its complex conjugate. We deduce:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \log \left(\varphi_{n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu)}(\theta) \right) = -\sigma_\phi^\gamma |\theta|^\gamma \left(1 + i B_\phi \epsilon(\theta) \tan \left(\frac{\pi\gamma}{2} \right) \right),$$

where:

$$\sigma_\phi^\gamma = \sigma_\gamma^\gamma \int_{B_2} |\phi(x)|^\gamma g(x) dx,$$

and, since $\gamma \in]1, 2[$,

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{\int_{\mathbb{R}^+} (r - \sin(r)) r^{-\gamma-1} dr}{\tan(\pi\gamma/2) \int_{\mathbb{R}^+} (1 - \cos(r)) r^{-\gamma-1} dr} \frac{\int_{\mathbb{R}} \epsilon(m) |m|^\gamma G(dm)}{\int_{\mathbb{R}} |m|^\gamma G(dm)} \frac{\int_{B_1} \epsilon(\phi(x)) |\phi(x)|^\gamma g(x) dx}{\int_{B_1} |\phi(x)|^\gamma g(x) dx} \\ &= b_\gamma \frac{\int_{B_1} \epsilon(\phi(x)) |\phi(x)|^\gamma g(x) dx}{\int_{B_1} |\phi(x)|^\gamma g(x) dx}, \end{aligned}$$

because of the following identity, see [[19], Lemma 2].

$$\int_{\mathbb{R}^+} (r - \sin(r)) r^{-\gamma-1} dr = -\tan(\pi\gamma/2) \int_{\mathbb{R}^+} (1 - \cos(r)) r^{-\gamma-1} dr.$$

This achieves the proof of Theorem 2.21. □

The limiting field $\widetilde{Z}$ enjoys similar properties as Z and J .

Proposition 2.23.

1. When g is radial and B_1 is closed under rotation, the field $\widetilde{Z}$ is isotropic.
2. Suppose there exists $H \in \mathbb{R}$ such that, for any $a \in \mathbb{R}^+$, for any $x \in \mathbb{R}^d$, $g(ax) = a^H g(x)$. If B_1 is closed under dilatation, $\widetilde{Z}$ is self-similar with index $(H + d - \beta_1)/\gamma$.

Remark 2.24. As in Remarks 2.16 and 2.20, Theorem 2.21 recovers Theorem 2.16 in [8] when $g = 1$ and β is a constant function.

2.3.4 Bridging between the large-balls scaling and the small-balls scaling

In this section, we show that the intermediate process J_ℓ obtained in the intermediate scaling in Theorem 2.17 can be seen as a bridge between the process Z obtained in the large-balls scaling in Theorem 2.11 and the process $\widetilde{Z}$ obtained in the small-balls scaling in Theorem 2.21. Such bridging behavior has been evidenced for the Telecom Process in [20].

Theorem 2.25. Suppose B_1 has a non-zero Lebesgue measure, then:

1. When $\ell \rightarrow +\infty$

$$\frac{J_\ell(\cdot)}{\ell^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{M}} Z(\cdot);$$

2. When $\ell \rightarrow 0$

$$\frac{J_\ell(\cdot)}{\ell^{d/\beta_1}} \xrightarrow{L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)} \tilde{Z}(\cdot).$$

Remark 2.26. In dimension one, when $f(x, r) = f(r)$, Theorem 2.25 recovers Proposition 1 and Proposition 2 in [20]. Point 1 in Theorem 2.25 also recovers Proposition 2.13 in [8] when $f(x, r) = f(r)$ (in any dimension).

Proof. The proof of both convergences follows the proofs of Theorem 2.11 and Theorem 2.21.

1. Let $\mu \in \mathcal{M}$. We first recall the log-characteristic function of $\frac{J_\ell(\mu)}{\ell^{1/\alpha}}$:

$$\log \left(\varphi_{\frac{J_\ell(\mu)}{\ell^{1/\alpha}}}(\theta) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G \left(l^{-1/\alpha} \theta \mu(B(x, r)) \right) \ell \frac{g(x) 1_{B_1}(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr.$$

When $l \rightarrow +\infty$, we have that

$$\ell \psi_G \left(\ell^{-1/\alpha} \theta \mu(B(x, r)) \right) \rightarrow -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha |\mu(B(x, r))|^\alpha (1 - i\epsilon(\theta \mu(B(x, r))) b \tan(\pi\alpha/2)),$$

Since this convergence is uniform both in x and r (see (2.15) and (2.16)), it can be integrated:

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \log \left(\varphi_{\frac{J_\ell(\mu)}{\ell^{1/\alpha}}}(\theta) \right) \\ = -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}_+} \int_{B_1} |\mu(B(x, r))|^\alpha \left(1 - i\epsilon(\theta \mu(B(x, r))) b \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr, \end{aligned}$$

which is the log-characteristic function of $Z(\mu)$.

2. Let $\mu(dx) = \phi(x)dx$ with $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$. We make the change of variable $r \mapsto \ell^{1/\beta_1} r$ in the log-characteristic function of $\frac{J_\ell(\mu)}{\ell^{d/\beta_1}}$

$$\log \left(\varphi_{\frac{J_\ell(\mu)}{\ell^{d/\beta_1}}}(\theta) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \psi_G \left(\theta \frac{\mu(B(x, \ell^{1/\beta_1} r))}{\ell^{d/\beta_1}} \right) \frac{g(x) 1_{B_1}(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr.$$

We know that

$$\psi_G \left(\theta \frac{\mu(B(x, \ell^{1/\beta_1} r))}{\ell^{d/\beta_1}} \right) \rightarrow \psi_G \left(\theta \phi(x) c_d r^d \right)$$

when $\ell \rightarrow 0$ and that we can invert this limit with the integration over $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ using the same arguments we used to obtain (2.56) thus:

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left(\varphi_{\frac{J_\ell(\mu)}{\ell^{d/\beta_1}}}(\theta) \right) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{B_1} \psi_G(\theta \phi(x) c_d r^d) \frac{g(x)}{r^{\beta_1+1}} dx dr,$$

when $\ell \rightarrow 0$. Using the computations of Theorem 2.21, we identify the right-hand side with the log-characteristic function of $\tilde{Z}(\mu)$.

□

2.4 Zoom-in procedure

In the foregoing, we have dealt with the zoom-out case ($\rho \rightarrow 0$). In this section, we indicate how to adapt our previous results to the zoom-in case when $\rho \rightarrow +\infty$. In that purpose, we replace Condition (2.9) by

$$f_\rho(x, r) \sim_{\rho \rightarrow 0} \lambda(\rho) \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}}. \quad (2.57)$$

Combined with Conditions (2.2) and (2.10), it requires $\beta_2 < d$. The function β is no more interpreted as a tail-index but rather as a concentration index around 0.

The three new scaling regimes can be heuristically obtained by looking at the mean number of balls with a radius large enough, that cover the origin:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\# \{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}] &= \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \rho^{-1} f_\rho(x, r/\rho) dx dr \\ &\sim_{\rho \rightarrow +\infty} \lambda(\rho) \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{\rho^{\beta(x)} g(x)}{r^{\beta(x)+1}} dx dr. \end{aligned}$$

Set $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) = \beta_2\}$. Under condition (2.4), for ρ large enough:

$$\begin{aligned} \lambda(\rho) \rho^{\beta_2} \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{g(x) 1_{B_2}(x)}{r^{\beta(x)+1}} dx dr \\ \leq \lambda(\rho) \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{\rho^{\beta(x)} g(x)}{r^{\beta(x)+1}} dx dr \\ \leq \lambda(\rho) \rho^{\beta_2} \int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}} dx dr. \end{aligned}$$

Since $\int \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{g(x)}{r^{\beta(x)+1}} dx dr < +\infty$, if B_2 is non-negligible, three regimes appear when $\rho \rightarrow +\infty$:

- large-balls scaling: $\lambda(\rho) \rho^{\beta_2} \rightarrow 0$,
- intermediate scaling: $\lambda(\rho) \rho^{\beta_2} \rightarrow \ell \in (0, +\infty)$,
- small-balls scaling: $\lambda(\rho) \rho^{\beta_2} \rightarrow +\infty$.

We observe the opposite phenomenon to that observed in the zoom-out case. When the mean radius increases, the biggest radii are those with the biggest concentration index around 0, i.e. β_2 . The normalization will compensate the increasing of the balls with the biggest radius and the other balls will get negligible. Note that $\lambda(\rho)$ is no longer going to $+\infty$ when $\rho \rightarrow +\infty$ except (possibly) in the small-balls scaling. As it was the case in [6] and [8], no limit process are obtained in the large-balls scaling with the zoom-in procedure. Indeed to compensate the increasing of the radii, we need to reduce the density of balls so much that nothing remains at the limit. In the small-balls scaling and in the intermediate scaling, we obtain the following analogues of Theorems 2.11 and 2.17:

Theorem 2.27. *Suppose that $\lambda(\rho) \rho^{\beta_2} \rightarrow +\infty$ when $\rho \rightarrow +\infty$. Let $n(\rho) = \lambda(\rho)^{1/\alpha} \rho^{\beta_2/\alpha}$ and suppose that $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) = \beta_2\}$ has a non-zero Lebesgue measure, then we have:*

$$n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{M}} Z_2(\cdot),$$

where $Z_2(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \mu(B(x, r)) M'_\alpha(dx, dr)$ is a stable integral with respect to the α -stable measure M'_α with control measure $\sigma^\alpha g(x) 1_{B_2}(x) r^{-\beta_2-1} dx dr$ and constant skewness function b given by G .

Theorem 2.28. Suppose $\lambda(\rho) \rho^{\beta_2} \rightarrow \ell \in]0, +\infty[$ when $\rho \rightarrow +\infty$ and suppose again B_2 has a non-zero Lebesgue measure, then we have:

$$\widetilde{M}_\rho(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{M}} J_\ell(\cdot),$$

where $J_\ell(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} m \mu(B(x, r)) \tilde{\Pi}'_\ell(dx, dr, dm)$ and $\tilde{\Pi}'_\ell$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ with intensity $\ell g(x) 1_{B_2}(x) dx r^{-\beta_2-1} dr G(dm)$.

Since the proofs are adaptations of the proofs of section 2.3, we skip them.

2.5 Appendix

We prove Proposition 2.5.

Proof. In what follows, we note $a \vee b = \max(a, b)$.

1. Let μ_1 and $\mu_2 \in \mathcal{M}$ and $k \in \mathbb{R}$. Let s_1, t_1, C_1 and s_2, t_2, C_2 associated respectively to μ_1 and μ_2 according to the definition of $\mathcal{M}$. Set $s = s_1 \vee s_2 < \beta_1 \leq \beta_2 < t = t_1 \wedge t_2$ and $C = C_1 \vee C_2$ then, since $\alpha > 1$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mu_1 + k\mu_2)(B(x, r))|^\alpha dx \\ \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mu_1(B(x, r))|^\alpha dx + k^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |\mu_2(B(x, r))|^\alpha dx \right) 2^{\alpha-1} \\ \leq (C_1(r^{s_1} \wedge r^{t_1}) + k^\alpha C_2(r^{s_2} \wedge r^{t_2})) 2^{\alpha-1} \\ \leq (1 + k^\alpha) C 2^{\alpha-1} (r^s \wedge r^t). \end{aligned}$$

Thus $\mu_1 + k\mu_2 \in \mathcal{M}$ and $\mathcal{M}$ is indeed a linear space.

Let $\mu \in \mathcal{M}$ and s, t, C associated to μ , then:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}_+} |\mu(B(x, r))|^\alpha g(x) r^{-\beta(x)-1} dx dr \\ \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \left(r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1} \right) dr \\ \leq C \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}_+} (r^s \wedge r^t) \left(r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1} \right) dr. \end{aligned}$$

Note that $(r^t \wedge r^s) (r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1}) = r^{t-\beta_2-1}$ when $r \leq 1$ and $(r^t \wedge r^s) (r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1}) = r^{s-\beta_1-1}$ when $r > 1$. Since $\beta_2 - t + 1 < 1$ and $\beta_1 - s + 1 > 1$, $(r^t \wedge r^s) (r^{-\beta_1-1} \vee r^{-\beta_2-1})$ is integrable over $\mathbb{R}^+$ which proves (2.13).

2. Let $\mu \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta_1, \beta_2}$ and $\alpha \leq \alpha'$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^{\alpha'} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^{\alpha' - \alpha} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \\ &\leq |\mu|(\mathbb{R}^d)^{\alpha' - \alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \\ &\leq C'(r^s \wedge r^t), \end{aligned}$$

where $C' = |\mu|(\mathbb{R}^d)^{\alpha' - \alpha} C$, which proves $\mu \in \mathcal{M}_{\alpha', \beta_1, \beta_2}$.

3. Let $\mu \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta_1, \beta_2}$. Then there exist a constant C and $s < \beta_1 \leq \beta_2 < t$ satisfying the definition. Necessarily, $s < \beta'_1 \leq \beta'_2 < t$ which entails $\mu \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta'_1, \beta'_2}$.
4. Let $\mu \in \mathcal{M}$ and suppose that μ has an atom in $a \in \mathbb{R}^d$. Let $\varepsilon > 0$ be such that

$$||\mu|(B(a, \varepsilon)) - |\mu|(a)| \leq |\mu|(a)/2.$$

Then for every $r < \varepsilon/2$ and $x \in B(a, r)$, $|\mu(B(x, r))| \geq |\mu|(a)/2$. Integrating on $x \in B(a, r)$ we get:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx &\geq \int_{B(a, r)} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \\ &\geq (|\mu|(a)/2)^\alpha \int_{B(a, r)} dx \\ &\geq (|\mu|(a)/2)^\alpha c_d r^d. \end{aligned}$$

This is in contradiction with $\mu \in \mathcal{M}$ which requires

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mu(B(x, r))|^\alpha dx \leq C r^t$$

for $t > \beta_1 > d$ when r is small enough.

□

We prove Lemma 2.8.

Proof. Let $A > 0$ and $t > d$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr &\leq \int_0^{1 \wedge A} r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr + \int_{1 \wedge A}^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr \\ &\leq \int_0^{1 \wedge A} r^d \|f(\cdot, r)\|_\infty dr + \int_{1 \wedge A}^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr. \end{aligned}$$

The first integral above is finite because of Condition (2.2). The integral is finite second because, using condition (2.1), $r \mapsto r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty$ is continuous on the bounded interval $[1 \wedge A, A]$. Thus we obtain

$$\int_0^A r^t \|f(\cdot, r)\|_\infty dr < +\infty.$$

□

Chapitre 3

Convergence fonctionnelle infini-dimensionnelle

RÉSUMÉ : Nous considérons un modèle de boules aléatoires pondérées engendrées par une mesure de Poisson. Le comportement macroscopique de la masse totale du modèle sur une configuration a récemment reçu un certain intérêt. Dans ce papier, nous complétons les résultats précédents sur la distribution fini-dimensionnelle des fluctuations et nous proposons de la convergence fonctionnelle pour de telles fonctionnelles sur l'ensemble des configurations.

Key words : auto-similarité, champs aléatoires généralisés, convergence fonctionnelle, processus ponctuel de Poisson.

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Jean-Christophe Breton.

Il a été soumis dans
ESAIM : Probability and Statistics.

ABSTRACT : We consider a weighted random ball model generated by a Poisson measure. The macroscopic behaviour of the weight amassed on this model by a configuration has recently received attention. In this paper, we complement the previous finite dimensional distribution fluctuation results and propose functional convergences of such functionals on the set of configurations.

Key words : self-similarity, generalized random fields, functional convergence, Poisson point process.

AMS Subject classification. Primary : 60F17, *Secondary :* 60G60, 60G18, 60H05.

This chapter has been written in collaboration with Jean-Christophe Breton.

It is under review in
ESAIM : Probability and Statistics.

3.1 Introduction

We consider a generalized random balls model in $\mathbb{R}^d$ generated by a Poisson point process N_λ on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ with intensity

$$n_\lambda(d\mathbf{x}, dr, dm) = \lambda d\mathbf{x} F(dr) G(dm), \quad (3.1)$$

where $\lambda \in \mathbb{R}_+$ and F, G are probability measures on $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}$. The most natural way to deal with the triplets $(\mathbf{x}, r, m)$ is to see them as weighted random balls with center $\mathbf{x}$, radius r and weight m . The parameter λ stands for the intensity of the number of ball since the mean number of balls in, say, a measurable bounded set A with Lebesgue measure 1 is $\mathbb{E}[N_\lambda(A \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})] = \lambda$. Random balls models of this type are typically used to represent spatial communication networks where the centers $\mathbf{x}$ are antennas transmitting a signal with a range of emission r . The weight m then represents the intensity of the signal (see [28] and [58]). From a modeling standpoint, it is natural to consider that the signal fades out when it goes away from its emitting station $\mathbf{x}$. Representing such a fading effect by a shape function h , the signal of intensity m emitted in $\mathbf{x}$ is received in some $\mathbf{y}$ with intensity $mh\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{r}\right)$, in this picture the quantity r plays now the role of the rate of the fading. If we assume that no interference occurs between the different stations, the quantity of signal received in some $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ is then given by

$$M_\lambda(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} mh\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{r}\right) N_\lambda(d\mathbf{x}, dr, dm). \quad (3.2)$$

We now extend the quantity defined in (3.2) for a configuration represented by a measure μ :

$$\begin{aligned} M_\lambda(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^d} M_\lambda(\mathbf{y}) \mu(d\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} m \mu[\tau_{\mathbf{x}, r} h] N_\lambda(d\mathbf{x}, dr, dm) \end{aligned} \quad (3.3)$$

where we set $\tau_{\mathbf{x}, r} h(\mathbf{y}) = h((\mathbf{x} - \mathbf{y})/r)$ and $\mu[f] = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \mu(d\mathbf{y})$, see [9]. Since there is no restriction to consider only positive measures, we consider configurations μ in the set $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ of signed measures on $\mathbb{R}^d$ with finite total variation. Recall that the total variation $\|\mu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A)|$ defines a distance on $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ and that equipped with this distance, $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ is a Banach space. This model is the one studied in [9]. When $h = \mathbf{1}_{B(\mathbf{0}, 1)}$, we recover the setting of [6, 8, 40].

We specify now the hypotheses on G, F and h . The measure G drives the behaviour of the weights, it is assumed to be in the domain of attraction of an α -stable law with $\alpha \in (1, 2]$, see [46]. According to [19, XVII.5], this is equivalent to the following estimate on the characteristic function φ_G of G :

$$\varphi_G(\theta) = 1 + i\theta\tau - \sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 + i b \varepsilon(\theta) \tan(\pi\alpha/2)) + o(|\theta|^\alpha) \quad \text{as } \theta \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

In the case $\alpha \in (1, 2)$, a typical choice for G is an heavy-tailed distribution while for $\alpha = 2$, G may be any distribution with finite variance. Observe that since we consider $\alpha > 1$, the measure G has a finite moment of order 1. The probability measure F drives the behaviour of the radius r (actually the fading rate in the model described above); we assume F has a regularly varying tail with index $\beta \in (d, \alpha d)$, that is :

$$\overline{F}(r) = \int_r^{+\infty} F(du) \sim_{r \rightarrow +\infty} C_\beta r^{-\beta}. \quad (3.5)$$

The condition (3.5) ensures that the mean volume of the random balls is finite and so is the expectation of $M_\lambda(\mu)$ for every μ with a finite total variation, see [9]. On the contrary, $\beta < 2d$ implies that the variance of the law of the volume is infinite.

Since in our interpretation, the shape function h represents a fading effect, it is natural to consider that h is radial and (radially) decreasing. The function h thus generalizes the range of the emission. As discussed above, the choice $h = \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},1)}$ recovers the classical setting of random ball $B(\mathbf{x}, r)$ with weight m as investigated in [6, 8, 40]. However, from a mathematical standpoint, it is not required to assume that h is decreasing or radial and more complex interfering phenomena can thus be investigated.

In what follows, we are interested in the macroscopic analysis of such model. It consists in investigating the behaviour of $M_\lambda(\mu)$ when a zooming-out is performed, ie. apply the change $r \mapsto \rho r$ in the model and consider the resulting changed field

$$M_{\lambda,\rho}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} m \mu[\tau_{\mathbf{x},r} h] N_{\lambda,\rho}(d\mathbf{x}, dr, dm), \quad (3.6)$$

where $N_{\lambda,\rho}$ is the Poisson random measure with intensity $n_{\lambda,\rho} = \lambda dx F_\rho(dr) G(dm)$ and F_ρ is the image measure of F by $r \mapsto \rho r$. When the intensity $\lambda(\rho)$ is adapted accordingly to the rate ρ of zooming-out, [9] describes two limiting behaviours obtained when a centering and a suitable normalization $n(\rho)$ are applied to $M_{\lambda(\rho),\rho}(\mu)$. Actually, due to the linear structure of $M_{\lambda(\rho),\rho}(\mu)$ in μ , the limits are obtained in the finite dimensional distributions (*fdd*) sense (see Section 3.2 for precise conditions). For the two scaling regimes, functional convergences are also obtained in [9] but only for a finite dimensional subfamily of configurations μ . The goal of the present note is to complete the results of [9] for configuration in an infinite dimensional family $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d)$ and to provide functional convergences in the space $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ of continuous function in $\mathcal{A}$. Since *fdd* convergences are already proved in [9], the present note really focuses on tightness and to that purpose we will assume that

$$\mathcal{A} \text{ is a compact subset in } \mathcal{Z}(\mathbb{R}^d) \text{ for the } \|\cdot\|_{TV} \text{ topology.} \quad (C0)$$

The note is organized as follows: Section 3.2 contains our main conditions and results. The proof is given in Section 3.3 and discussions on our hypotheses are provided in Section 3.4 with examples. Technical results are postponed in the Appendix 3.5.

3.2 Main results

First, we recall the *fdd* results obtained in [9]. The shape function h is assumed to be continuous almost everywhere and such that

$$h^*(\mathbf{x}) := \sup\{|h(r\mathbf{x})| : r \geq 1\} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d). \quad (H)$$

Note that this implies that $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ and that if h is radially non-increasing, then $h^* = h$. For smooth configurations μ (ie. $\mu(d\mathbf{y}) = \phi_\mu(\mathbf{y})d\mathbf{y}$), Proposition 2.1 in [9] gives the limiting behaviour of

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) = n(\rho)^{-1} \left(M_{\lambda(\rho),\rho}(\mu) - \mathbb{E}[M_{\lambda(\rho),\rho}(\mu)] \right)$$

when $\rho \rightarrow 0$:

1. (Large regime) If $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$, then, setting $n(\rho) = (\lambda(\rho)\rho^\beta)^{1/\alpha}$, we have:

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) \xrightarrow{fdd} Z_\alpha(\mu), \quad \phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d) \quad (3.7)$$

when $\rho \rightarrow 0$ and where Z_α is the stable field

$$Z_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \mu[\tau_{\mathbf{x},r}h] M_\alpha(d\mathbf{x}, dr)$$

with respect to the α -stable measure M_α with control measure $\sigma^\alpha C_\beta r^{-1-\beta} d\mathbf{x}dr$ and constant skewness function b , where σ and b are related to G by (3.4).

2. (Intermediate regime) If $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a$ for some $a \in (0, +\infty)$, then, setting $n(\rho) = 1$, we have:

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) \xrightarrow{fdd} J_a(\mu), \quad \phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d) \quad (3.8)$$

when $\rho \rightarrow 0$ and where J_a is the compensated Poisson integral

$$J_a(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} m\mu[\tau_{\mathbf{x},r}h] \widetilde{N}_{\beta,a}(d\mathbf{x}, dr, dm)$$

with respect to the compensated Poisson random measure $\widetilde{N}_{\beta,a}$ with intensity $aC_\beta r^{-\beta-1} d\mathbf{x}drG(dm)$.

In order to reinforce (3.7) and (3.8) into functional convergences in $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, we shall assume an uniform control of the measures $\mu \in \mathcal{A}$ by some measure $\mu^*(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. This control is of the form:

$$\sup_{\mu \in \mathcal{A}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}\right) \right|^p |\mu|(d\mathbf{y}) \right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| h\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}\right) \right|^p \phi^*(\mathbf{y})(d\mathbf{y}) \quad (C_p)$$

for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ and all $r > 0$, with $\phi^* \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ and $p \geq 1$. A discussion on (C_p) is given in Section 3.4. More precisely, we assume below that (C_p) holds true for $p = 1$ and for p equal to some (arbitrary) $\gamma \in (1, \alpha)$.

Our main result states as follows:

Proposition 3.1. *Assume that the family $\mathcal{A}$ of measures satisfies (C0) and (C_p) for $p \in \{1, \gamma\}$ for some $1 < \gamma < \alpha$ and that the shape function h satisfies (H).*

1. (Large regime) If $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow +\infty$, then, when $\rho \rightarrow 0$:

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathcal{A})} Z_\alpha(\mu), \quad \phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d). \quad (3.9)$$

2. (Intermediate regime) If $\lambda(\rho)\rho^\beta \rightarrow a$ for some $a \in (0, +\infty)$, then, when $\rho \rightarrow 0$:

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathcal{A})} J_a(\mu), \quad \phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d). \quad (3.10)$$

Another interesting finite-dimensional result is Proposition 2.13 in [8] which states that when $a \rightarrow +\infty$, we have

$$\frac{J_a(\mu)}{a^{1/\alpha}} \xrightarrow{fdd} Z_\alpha(\mu), \quad \phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d), \quad (3.11)$$

(recall $\mu(d\mathbf{y}) = \phi_\mu(\mathbf{y})d\mathbf{y}$). We can again reinforce (3.11) into functional convergence:

Proposition 3.2. *Under the same hypotheses as in Proposition 3.1, when $a \rightarrow +\infty$, we have:*

$$\frac{J_a(\mu)}{a^{1/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathcal{A})} Z_\alpha(\mu), \quad \phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d). \quad (3.12)$$

Remark 3.3. When the shape function h is bounded (which is typically the case when h is radially non-increasing), we can assume condition (C_p) only for $p = 1$ in Propositions 3.1 and 3.2 (no (C_γ) for some $\gamma \in (1, \alpha)$ required). To see this, observe that in the proof below (Section 3.3), (C_γ) is used only in the proof of 1) in Lemma 3.5 which can be replaced by 2) in Lemma 3.5 when h is bounded.

As a consequence of our results, for all continuous functional f on $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, we have

$$f(\widetilde{M}_\rho(\mu)) \implies f(Z_\alpha(\mu)) \quad (3.13)$$

or

$$f(\widetilde{M}_\rho(\mu)) \implies f(J_a(\mu)) \quad (3.14)$$

when $\rho \rightarrow 0$ depending on the regime considered. For instance, with the functional $f(x) = \sup_{\mu \in \mathcal{A}} |x(\mu)|$ we can use (3.13) and (3.14) to detect excessive fluctuations in the model.

3.3 Proofs

Proof of Proposition 3.1. It is well known that the functional convergence is equivalent to the combination of the *fdd* convergences and tightness. Since the *fdd* convergences is known (cf. (3.7) and (3.8)), it remains to prove the tightness of $(M_\rho(\mu))_{\mu \in \mathcal{A}}$. Thank to Prohorov's theorem, this is equivalent to relative compactity and this will be obtained, using Arzelà-Ascoli's theorem for $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, by showing the following control of the uniform modulus of continuity (see [31, Section 14]):

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\rho > 0} \mathbb{P} \left(\sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} |\widetilde{M}_\rho(\mu_1) - \widetilde{M}_\rho(\mu_2)| > \varepsilon \right) = 0. \quad (3.15)$$

We derive (3.15) with Markov inequality by proving that for $1 < \gamma < \alpha$ given in Proposition 3.1:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\rho > 0} \mathbb{E} \left[\sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} |\widetilde{M}_\rho(\mu_1) - \widetilde{M}_\rho(\mu_2)|^\gamma \right] = 0. \quad (3.16)$$

Our argument to prove (3.16) exploits moment bounds obtained in [9] for such random field $(M_{\lambda, \rho}(\mu))_\mu$. We use in particular the following expression of a fractional moment from [55]: if X is a random variable with characteristic function $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$, then for $1 < \gamma < 2$

$$\mathbb{E}[|X|^\gamma] = A(\gamma) \int_0^{+\infty} (1 - |\varphi_X(\theta)|^2) \theta^{-1-\gamma} d\theta \quad (3.17)$$

where

$$A(\gamma) = \left(\int_0^{+\infty} (1 - \cos(x)) x^{-1-\gamma} d\mathbf{x} \right)^{-1} < +\infty.$$

In order to be in position to exploit (3.17) for the fractional moment in (3.16) we need to specify the corresponding characteristic function. To that purpose, we first bound $\sup_{\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}} \|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \left| \widetilde{M}_\rho(\mu_1) - \widetilde{M}_\rho(\mu_2) \right|$ as follows:

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| \widetilde{M}_\rho(\mu_1) - \widetilde{M}_\rho(\mu_2) \right| \\ & \leq \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| M_{\lambda, \rho}(n(\rho)^{-1}(\mu_1 - \mu_2)) - \mathbb{E} \left[M_{\lambda, \rho}(n(\rho)^{-1}(\mu_1 - \mu_2)) \right] \right| \\ & \leq \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| M_{\lambda, \rho}(n(\rho)^{-1}(\mu_1 - \mu_2)) \right| \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| M_{\lambda, \rho}(n(\rho)^{-1}(\mu_1 - \mu_2)) \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Since for $\gamma \geq 1$

$$\mathbb{E} \left[(|X| + \mathbb{E}[|X|])^\gamma \right] \leq 2^\gamma \mathbb{E}[|X|^\gamma], \quad (3.19)$$

we shall establish (3.16) by applying (3.17) to

$$X = \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| M_{\lambda, \rho}(n(\rho)^{-1}(\mu_1 - \mu_2)) \right|. \quad (3.20)$$

We have

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| M_{\lambda, \rho}(n(\rho)^{-1}(\mu_1 - \mu_2)) \right| \\ & = \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| \int m \, n(\rho)^{-1}(\mu_1 - \mu_2) [\tau_{\mathbf{x}, r} h] \, N_{\lambda(\rho), \rho}(d\mathbf{x}, dr, dm) \right| \\ & \leq \widehat{M}_\rho(n(\rho)^{-1} \mathbf{m}_\delta) := \int |m| \, n(\rho)^{-1} \mathbf{m}_\delta [\tau_{\mathbf{x}, r} |h|] N_{\lambda(\rho), \rho}(d\mathbf{x}, dr, dm) \end{aligned}$$

where

$$\mathbf{m}_\delta [\tau_{\mathbf{x}, r} |h|] = \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} |\mu_1 - \mu_2| [\tau_{\mathbf{x}, r} |h|] \quad (3.21)$$

(observe that $\mathbf{m}_\delta$ is not a measure *a priori*). Since $\widehat{M}_\rho(n(\rho)^{-1} \mathbf{m}_\delta)$ is a (non centered) Poisson integral, its characteristic function is given by

$$\varphi_{\widehat{M}_\rho(n(\rho)^{-1} \mathbf{m}_\delta)}(\theta) = \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi_G(n(\rho)^{-1} \theta \mathbf{m}_\delta [\tau_{\mathbf{x}, r} |h|]) \, \lambda(\rho) d\mathbf{x} F_\rho(dr) \right)$$

with $\psi_G(u) = \int_{\mathbb{R}} (e^{iu|m|} - 1)G(dm)$. Note also $\Psi_G(u) = \int_{\mathbb{R}} (e^{iu|m|} - 1 - iu|m|)G(dm)$ and observe that $\text{Re}(\Psi_G) = \text{Re}(\psi_G)$ (to be used below in (3.22)). Hence,

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_{\widehat{M}_\rho(n(\rho)^{-1}\mathbf{m}_\delta)}(\theta)|^2 &= 1 - \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} 2\text{Re}\left(\psi_G\left(n(\rho)^{-1}\theta\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]\right)\right) \lambda(\rho)d\mathbf{x}F_\rho(dr)\right) \\ &= 1 - \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} 2\text{Re}\left(\Psi_G\left(n(\rho)^{-1}\theta\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]\right)\right) \lambda(\rho)d\mathbf{x}F_\rho(dr)\right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &\leq 1 - \exp\left(-2 \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} |\Psi_G\left(n(\rho)^{-1}\theta\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]\right)| \lambda(\rho)d\mathbf{x}F_\rho(dr)\right) \\ &\leq 1 - \exp\left(-2C(G)n(\rho)^{-\alpha}\lambda(\rho)|\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} |\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]|^\alpha d\mathbf{x}F_\rho(dr)\right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

using the local behaviour (3.4) of Ψ_G in 0. Using Lemma 3.7 in the Appendix with $\nu := \alpha > \beta/d$ therein, we have

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} |\mu[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]|^\alpha d\mathbf{x}F_\rho(dr) \leq C(\phi^*)\rho^\beta \delta^{\frac{\alpha d - \beta}{d}} \quad (3.24)$$

where

$$C(\phi^*) = 2^{\frac{\alpha d - \beta}{(\alpha - 1)d}} \frac{(\alpha - 1)d}{(\beta - d)(\alpha d - \beta)} (\|\phi^*\|_\alpha \|h\|_1)^{\frac{\alpha(\beta - d)}{(\alpha - 1)d}} (\|\phi^*\|_1^{1/\alpha} \|h\|_\alpha)^{\frac{(\alpha d - \beta)\alpha}{(\alpha - 1)d}}.$$

Plugging the bounds (3.23) and (3.24) into (3.17) with X as in (3.20) and combining with (3.18) and (3.19), we obtain

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| \widetilde{M}_\rho\left(n(\rho)^{-1}\mu_1\right) - \widetilde{M}_\rho\left(n(\rho)^{-1}\mu_2\right) \right| \right|^\gamma \right] \\ &\leq A(\gamma) \int_0^{+\infty} \left(1 - \exp\left(-2C(G)n(\rho)^{-\alpha}\lambda(\rho)\rho^\beta|\theta|^\alpha C(\phi^*)\delta^{\frac{\alpha d - \beta}{d}}\right)\right) \theta^{-1-\gamma} d\theta \\ &= A(\gamma)A(\alpha, \gamma) \left(\frac{\lambda(\rho)\rho^\beta}{n(\rho)^\alpha}\right)^{\gamma/\alpha} (2C(G)C(\phi^*))^{\gamma/\alpha} \delta^{\frac{(\alpha d - \beta)\gamma}{\alpha d}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

with a straightforward change of variables to derive (3.25) and

$$A(\alpha, \gamma) = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-\theta^\alpha)) \theta^{-1-\gamma} d\theta$$

which is finite for $\gamma < \alpha$.

In the large regime $n(\rho) = (\lambda(\rho)\rho^\beta)^{1/\alpha}$ and the bound (3.25) entails (3.16) while in the Intermediate Regime $\frac{\lambda(\rho)\rho^\beta}{n(\rho)^\alpha} = \lambda(\rho)\rho^\beta$ is bounded so that (3.25) still entails (3.16). In both cases, this concludes the proof of Proposition 3.1. $\square$

Proof of Proposition 3.2. In order to prove Proposition 3.2, we follow the same lines of reasoning as in the previous proof. Set

$$I_a(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} a^{-1/\alpha} m\mu[\tau_{\mathbf{x},r}h] N_{\beta,a}(d\mathbf{x}, dr, dm),$$

where $N_{\beta,a}$ is the Poisson random measure with intensity $aC_\beta r^{-\beta-1} d\mathbf{x} dr G(dm)$, and

$$\tilde{I}_a(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} a^{-1/\alpha} m \mu[\tau_{\mathbf{x},r} h] \tilde{N}_{\beta,a}(d\mathbf{x}, dr, dm).$$

We obtain:

$$\sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| I_a(\mu_1 - \mu_2) \right| \leq \hat{I}_a(\mathbf{m}_\delta) := \int |m| a^{-1/\alpha} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r} |h|] N_{\beta,a}(d\mathbf{x}, dr, dm)$$

and

$$1 - |\varphi_{\hat{I}_a(\mathbf{m}_\delta)}(\theta)|^2 \leq 1 - \exp \left(-2C(G)C_\beta |\theta|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} |\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r} |h|]|^\alpha d\mathbf{x} r^{-\beta-1} dr \right). \quad (3.26)$$

Using Lemma 3.7 with $\gamma := \alpha$ and plugging it with (3.26) into (3.17) with

$$X = \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| I_a(\mu_1 - \mu_2) \right|,$$

we obtain

$$\mathbb{E} \left[\left| \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left| \tilde{I}_a(\mu_1) - \tilde{I}_a(\mu_2) \right| \right|^\gamma \right] \leq A(\gamma) A(\alpha, \gamma) (2C(G)C_\beta C'(\phi^*))^{\gamma/\alpha} \delta^{\frac{(\alpha d - \beta)\gamma}{\alpha d}}. \quad (3.27)$$

This allow to conclude the proof of Proposition 3.2 like previously for Proposition 3.1. $\square$

3.4 Discussion and examples

3.4.1 Fading function

In this section, we shortly discuss the choice of the fading function h satisfying (H). Note that from a modeling point of view, it is natural to consider that the fading function h is radial and non-increasing. In this case, h is bounded and condition (C_γ) for some $\gamma \in (1, \alpha)$ can be removed from our main result as explained in Remark 3.3. This is typically the case for the fading function $h = \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},1)}$ which recovers the classical setting investigated in [6, 8, 29]. A general discussion of such fading effect is given in [28].

3.4.2 Discrete configurations

Our main results Propositions 3.1 and 3.2 are stated only for smooth configuration. Actually, when the configurations considered are discrete, typically $\mu = \delta_{\mathbf{y}}$, there is no hope to obtain functional convergence. Heuristically, the dependence between $M_\rho(\delta_{\mathbf{y}_1})$ and $M_\rho(\delta_{\mathbf{y}_2})$, $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$, is given by the sum of the weights of the balls containing both points $\mathbf{y}_1$ and $\mathbf{y}_2$ using the so-called covariation, see [46]. But at the limit when $\rho \rightarrow 0$ (in the so-called zoom-out case), the rescaled balls turn to be very small and typically no ball contains simultaneously $\mathbf{y}_1$ and $\mathbf{y}_2$. This provides independence at the limit and we have:

$$n_0(\rho)^{-1} (M_\rho(\delta_{\mathbf{y}}) - \mathbb{E}[M_\rho(\delta_{\mathbf{y}})]) \xrightarrow{fdd} W_\alpha(\delta_{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,$$

where $W_\alpha(\delta_{\mathbf{y}}), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, are iid $S_\alpha(\sigma V^{1/\alpha}, b, 0)$ -distributed. Since the field $(W_\alpha(\delta_{\mathbf{y}}))_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d}$ consists of independent marginals, there is no hope for functional regularity. A similar remark can be fomulated when the configuration lives in the space of measures μ with finite support. From a more technical point of view, the Remark 3.6 below indicates that our strategy, indeed, can not encompass discrete configurations.

3.4.3 Compacity of the configurations

In this section, we discuss the condition (C0). Since Propositions 3.1 and 3.2 are valid only for smooth configurations $\mu(d\mathbf{y}) = \phi_\mu(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ with $\phi_\mu \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ the compacity of set $\mathcal{A}$ of such configuration is characterized by the Fréchet-Kolmogorov theorem (see [10]):

Theorem 3.4 (Fréchet-Kolmogorov). *Let $p \in [1, +\infty[$ and $\mathcal{S}$ be a subset of $L^p(\mathbb{R}^d)$. $\mathcal{S}$ is relatively compact if and only if:*

1. $\mathcal{S}$ is bounded,
2. $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\|\mathbf{x}\| > r} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = 0$ uniformly on $\mathcal{S}$,
3. and $\lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \|\tau_{\mathbf{a}}f - f\|_p = 0$ uniformly on $\mathcal{S}$, where $\tau_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$.

A typical example is a family of uniform configurations on balls included in some fixed bounded ball $B \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{A}_B = \{\mu(d\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{B(\mathbf{y}, r)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} : B(\mathbf{y}, r) \subset B\}. \quad (3.28)$$

The compacity in $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ comes from the Fréchet-Kolmogorov theorem since $\mathbf{1}_{B(\mathbf{y}, r)} \leq \mathbf{1}_B$ and $\mathbf{1}_B \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ ensures (1) and (2) therein and (3) comes from that for all $B(\mathbf{y}, r) \subset B$, and $p = 1, \alpha$,

$$\begin{aligned} \|\tau_{\mathbf{a}}\mathbf{1}_{B(\mathbf{y}, r)} - \mathbf{1}_{B(\mathbf{y}, r)}\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{1}_{B(\mathbf{y}+\mathbf{a}, r)}(\mathbf{x}) - \mathbf{1}_{B(\mathbf{y}, r)}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \\ &= |B(\mathbf{y} + \mathbf{a}, r) \Delta B(\mathbf{y}, r)| = 2|(B + \mathbf{a}) \setminus B| \longrightarrow 0, \mathbf{a} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Another example with unbounded support configurations is

$$\mathcal{A}_\Lambda = \{\mu(d\mathbf{x}) = e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|}d\mathbf{x} : \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]\} \quad (3.29)$$

with $0 < \underline{\lambda} < \bar{\lambda} < +\infty$. The compacity in $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ comes from the Fréchet-Kolmogorov theorem 3.4. Indeed, $e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|} \leq e^{-\underline{\lambda}\|\mathbf{x}\|} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ ensures (1) and (2) in Theorem 3.4 and (3) therein comes for $p = 1, \alpha$, from

$$\begin{aligned} \|\tau_{\mathbf{a}}e^{-\lambda\|\cdot\|} - e^{-\lambda\|\cdot\|}\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-\lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} - e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|}|^p d\mathbf{x} \\ &= \int_{\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} (e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|} - e^{-\lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|})^p d\mathbf{x} + \int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x}\|} (e^{-\lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} - e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|})^p d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\|x\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} (e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|} - e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|-\lambda\|\mathbf{a}\|})^p d\mathbf{x} + \int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x}\|} (e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|+\lambda\|\mathbf{a}\|} - e^{-\lambda\|\mathbf{x}\|})^p d\mathbf{x} \\ &\leq (e^{\bar{\lambda}\|\mathbf{a}\|} - 1)^p \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\bar{\lambda}p\|\mathbf{x}\|} d\mathbf{x} = \frac{(d-1)!}{(\bar{\lambda}p)^d} |B_d(\mathbf{0}, 1)| (e^{\bar{\lambda}\|\mathbf{a}\|} - 1)^p \longrightarrow 0, \mathbf{a} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

for all $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ since $(1 - e^{-\lambda\|\mathbf{a}\|}) \leq (e^{\lambda\|\mathbf{a}\|} - 1) \leq (e^{\bar{\lambda}\|\mathbf{a}\|} - 1)$.

3.4.4 Uniform control of the configurations

In this section, we discuss the uniform control encapsulated into (C_p) , $p = 1, \gamma$ for some $\gamma \in (1, \alpha)$. Several sets of sufficient conditions allow to satisfy (C_p) easily. First, here are some examples of measures μ for which the conditions (C_1) and (C_γ) are met:

In the standard case, we have $h = \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},1)}$ (see [8, 29]), and (C_p) rewrites $|\mu|(B(\mathbf{x}, r)) \leq \mu^*(B(\mathbf{x}, r))$ for all ball $B(\mathbf{x}, r)$ and $\mu \in \mathcal{A}$.

More generally, (C_p) derives from $|\mu|(A) \leq \mu^*(A)$ for all Borelian set $A \subset \mathbb{R}^d$ by approximating $|h(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{r})|^p$ by positive simple functions $\sum_i a_i \mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{y})$ with $a_i > 0$.

If the densities ϕ_μ of the measures μ satisfy $\sup_{\mu \in \mathcal{A}} |\phi_\mu| \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ then (C_p) hold true. For instance, the conditions are satisfied if the measures μ are uniform measures with all their supports in a fixed bounded set. This covers Example 2.1 in [9].

The condition (C_p) can also derive from a domination for a particular order associated to h : for instance if h is positive and convex, (C_p) is obtained if all $\mu \in \mathcal{A}$ are dominated by μ^* for the convex-positive order.

3.4.5 Typical examples

Typical examples where all the conditions are met are the following:

- $h = \mathbf{1}_{B(\mathbf{0},1)}$ recovers the setting of [6, 8, 29].
- h is bounded and the set $\mathcal{A}$ of configurations is made of uniform measure on balls all included in a fixed bounded set, cf. (3.28).
- h is bounded and the set $\mathcal{A}$ of configurations is given by (3.29).

3.5 Appendix

In this section, we prove technical bounds for $\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]$ in terms of δ under different sets of condition. These bounds are the key point to derive the tightness of our processes. All along, we assume (C_0) and (C_1) and we assume also (C_γ) for some $1 < \gamma < \alpha$ unless h is bounded in which case (C_γ) is relaxed. Recall that $\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]$ is defined in (3.21).

Lemma 3.5. *Let $\gamma \geq 1$.*

1. *Assume the family $\mathcal{A}$ satisfies (C_γ) and $h \in L^\gamma(\mathbb{R}^d)$. Then*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\gamma d\mathbf{x} \leq 2\delta^{\gamma-1} r^d \|h\|_\gamma^\gamma \mu^*(\mathbb{R}^d). \quad (3.30)$$

2. *Assume the family $\mathcal{A}$ satisfies (C_1) and $h \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Then*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\gamma d\mathbf{x} \leq 2\delta^{\gamma-1} r^d \|h\|_\infty^{\gamma-1} \|h\|_1 \mu^*(\mathbb{R}^d). \quad (3.31)$$

3. *Assume the family $\mathcal{A}$ satisfies (C_1) and $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\phi^* \in L^\gamma(\mathbb{R}^d)$. Then*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\gamma d\mathbf{x} \leq r^{\gamma d} \|\phi^*\|_\gamma^\gamma \|h\|_1^\gamma. \quad (3.32)$$

Proof: First, for 1): using below the Hölder's inequality, Condition (C_1) in (3.34) and the Fubini theorem in (3.35), we have:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\gamma d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right| (|\mu_1 - \mu_2|)(d\mathbf{y}) \right)^\gamma d\mathbf{x} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right|^\gamma (|\mu_1 - \mu_2|)(d\mathbf{y}) \right) (|\mu_1 - \mu_2|)(\mathbb{R}^d)^{\gamma-1} \right) d\mathbf{x} \\
&\leq 2\delta^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\mu \in \mathcal{A}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right|^\gamma |\mu|(d\mathbf{y}) \right) d\mathbf{x} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$\leq 2\delta^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right|^\gamma \mu^*(d\mathbf{y}) \right) d\mathbf{x} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\delta^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right|^\gamma d\mathbf{x} \mu^*(d\mathbf{y}) \tag{3.35} \\
&= 2\delta^{\gamma-1} r^d \|h\|_\gamma^\gamma \mu^*(\mathbb{R}^d)
\end{aligned}$$

which is 1) in the lemma. The proof of 2) follows the same lines using

$$\left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right|^\gamma \leq \|h\|_\infty^{\gamma-1} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right|$$

to replace, using (C_1) , (3.33) by

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\gamma d\mathbf{x} \leq 2\delta^{\gamma-1} \|h\|_\infty^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right| d\mathbf{x} \mu^*(d\mathbf{y}).$$

For 3), still using below Hölder's inequality but with $\phi \in L^\gamma(\mathbb{R}^d)$ and $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, and using (C_1) in (3.36), we have:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\gamma d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{\substack{\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV} \leq \delta \\ \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{A}}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right| (|\mu_1 - \mu_2|)(d\mathbf{y}) \right)^\gamma d\mathbf{x} \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \right) \right| \mu^*(d\mathbf{y}) \right)^\gamma d\mathbf{x} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2r^{\gamma d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} h(\mathbf{y}) \phi^*(r\mathbf{y} + \mathbf{x}) d\mathbf{y} \right|^\gamma d\mathbf{x} \\
&\leq 2r^{\gamma d} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^d} |h(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right)^{\gamma-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\phi^*(r\mathbf{y} + \mathbf{x})|^\gamma |h(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \right\} d\mathbf{x} \\
&= 2r^{\gamma d} \|\phi^*\|_\gamma^\gamma \|h\|_1^\gamma \tag{3.37}
\end{aligned}$$

with the Fubini theorem to derive the last equality. $\square$

Remark 3.6. The measure μ^* is assumed to be smooth. A carefull reading of the previous proof indicates that this is used only to derive the bound $O(r^{\gamma d})$ in (3.32). However, this bound fails if μ^* is no longer smooth: indeed, in the proof above, the bound

$O(r^{\gamma d})$ in (3.37) derives from (3.36) only if μ^* does not have atom: since if $\mu^*(\mathbf{y}_0) > 0$, then (3.36) is bounded below by

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| h \left(\frac{\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}}{r} \right) \right|^\gamma \mu^*(\mathbf{y}_0)^\gamma d\mathbf{x} = r^d \mu^*(\mathbf{y}_0)^\gamma \int_{\mathbb{R}^d} |h(\mathbf{x})|^\gamma d\mathbf{x}$$

and there is no hope to obtain a bound in $r^{\gamma d}$ for small r .

Lemma 3.7. *Let $\nu > \beta/d$ and assume $\mu^*(d\mathbf{y}) = \phi^*(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ with $\phi^* \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\nu(\mathbb{R}^d)$. Assume moreover either (C_1) , (C_ν) and $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\nu(\mathbb{R}^d)$ or only (C_1) when $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Then, for any $\rho > 0$,*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\nu d\mathbf{x} F_\rho(dr) \\ & \leq \rho^\beta \delta^{\frac{\nu d - \beta}{d}} \frac{(\nu - 1)d}{(\beta - d)(\nu d - \beta)} 2^{\frac{\nu d - \beta}{(\nu - 1)d}} (\|\phi^*\|_\nu \|h\|_1)^{\frac{\nu(\beta - d)}{(\nu - 1)d}} (C(\phi^*))^{\frac{(\nu d - \beta)\nu}{(\nu - 1)d}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

where the constant $C(\phi^*)$ depends on the hypothesis in force, ie.

$$C(\phi^*) = \begin{cases} \|\phi^*\|_1^{1/\nu} \|h\|_\nu & \text{when } (C_1) \text{ and } (C_\nu) \text{ are satisfied,} \\ \|\phi^*\|_1^{1/\nu} \|h\|_1^{1-1/\nu} \|h\|_\infty^{1/\nu} & \text{when } (C_1) \text{ is satisfied and } h \in L^\infty(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (3.39)$$

Proof. Assume (C_1) and (C_ν) are satisfied. Then, using (3.30) in Lemma 3.5, we have:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\nu d\mathbf{x} F_\rho(dr) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}_+} \left(2\delta^{\nu-1} r^d \|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1 \right) \wedge \left(r^{\nu d} \|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu \right) F_\rho(dr) \\ & = \int_{\mathbb{R}_+} \left(2\delta^{\nu-1} \rho^d r^d \|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1 \right) \wedge \left(\rho^{\nu d} r^{\nu d} \|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu \right) F(dr) \\ & = \rho^{\nu d} \|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu \int_0^{\delta^{1/d} c / \rho} r^{\nu d} F(dr) + 2\delta^{\nu-1} \rho^d \|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1 \int_{\delta^{1/d} c / \rho}^{+\infty} r^d F(dr) \end{aligned}$$

with

$$c = \left(\frac{2\|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1}{\|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu} \right)^{1/((\nu-1)d)}. \quad (3.40)$$

Using now the bound on the truncated moments of F given below in Lemma 3.9 with $\delta := \nu d > \beta$ in (3.43) and $\delta := d$ in (3.44), we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]^\nu d\mathbf{x} F_\rho(dr) \\ & \leq \rho^\beta \left[\|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu \frac{\beta}{\nu d - \beta} C_\beta c^{\nu d - \beta} + 2\delta^{\nu-1} \|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1 \frac{\beta}{\beta - d} C_\beta c^{d - \beta} \right] \end{aligned}$$

from which (3.38) comes after cancellation when c is reported from (3.40).

When only (C_1) is satisfied and $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, the proof is similar using (3.31) from Lemma 3.5 in place of (3.30). $\square$

Lemma 3.8. *Let $\nu < \beta < \nu d$ and assume $\mu^*(d\mathbf{y}) = \phi^*(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ with $\phi^* \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\nu(\mathbb{R}^d)$. Assume moreover either (C_1) , (C_ν) and $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\nu(\mathbb{R}^d)$ or only (C_1) when $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Then,*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} |\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]|^\nu d\mathbf{x} r^{-\beta-1} dr \\ & \leq \delta^{\frac{\nu d - \beta}{d}} \frac{(\nu - 1)d}{(\beta - d)(\nu d - \beta)} 2^{\frac{\nu d - \beta}{(\nu - 1)d}} (\|\phi^*\|_\nu \|h\|_1)^{\frac{\nu(\beta - d)}{(\nu - 1)d}} (C(\phi^*))^{\frac{(\nu d - \beta)\nu}{(\nu - 1)d}}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

where the constant $C(\phi^*)$ is given like in Lemma 3.7 in (3.39).

Proof. Assume (C_1) and (C_ν) are in force. Then, using (3.30) and (3.32) in Lemma 3.5, we have

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} |\mathbf{m}_\delta[\tau_{\mathbf{x},r}|h|]|^\nu d\mathbf{x} r^{-\beta-1} dr \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(2\delta^{\nu-1} \|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1 r^d \right) \wedge \left(\|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu r^{\nu d} \right) r^{-\beta-1} dr \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \left(2\delta^{\nu-1} \|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1 r^{d-\beta-1} \right) \wedge \left(\|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu r^{\nu d - \beta - 1} \right) dr \\ & = \|\phi^*\|_\nu^\nu \|h\|_1^\nu \int_0^{\delta^{1/d_c}} r^{\nu d - \beta - 1} dr + 2\delta^{\nu-1} \|h\|_\nu^\nu \|\phi^*\|_1 \int_{\delta^{1/d_c}}^{+\infty} r^{d - \beta - 1} dr, \end{aligned} \quad (3.42)$$

where c is given in (3.40). Computing the integral, we obtain (3.41) after cancellation. When (C_1) is in force with h bounded, similar computations yields (3.41) with now (3.31) and (3.32) in Lemma 3.5. $\square$

The following bounds are easily computed (see [9] for details):

Lemma 3.9. *For $\delta > 0$, when $u \rightarrow +\infty$, we have:*

$$\int_0^u r^\delta F(dr) \sim \begin{cases} C & \text{if } \delta < \beta \\ \beta C_\beta \ln u & \text{if } \delta = \beta \\ \frac{\beta}{\delta - \beta} C_\beta u^{\delta - \beta} & \text{if } \delta > \beta \end{cases} \quad (3.43)$$

where C is a constant, and for $0 < \delta < \beta$, when $u \rightarrow +\infty$, we have:

$$\int_u^{+\infty} r^\delta F(dr) \sim \frac{\beta}{\beta - \delta} C_\beta u^{\delta - \beta}. \quad (3.44)$$

Moreover when $\delta > \beta$, we have the global bound

$$\int_0^u r^\delta F(dr) \leq C u^{\delta - \beta}. \quad (3.45)$$

Chapitre 4

Modèle de boules aléatoires déterminantales

RÉSUMÉ : Dans ce travail, nous proposons un modèle de boules aléatoires sur $\mathbb{C}$ engendrées par un processus ponctuel déterminantal. Nous utilisons un processus de Ginibre pour engendrer les centres des boules et ainsi nous introduisons des phénomènes de répulsion entre les boules. L'étude macroscopique de ce modèle permet d'étendre les résultats obtenus dans le cadre des modèles de boules aléatoires engendrées par un processus ponctuel de Poisson. En effet, nous obtenons trois différents champs limites : le premier est une intégrale gaussienne, le deuxième une intégrale stable et le troisième est une intégrale poissonnienne qui fait le pont entre les deux champs précédents.

ABSTRACT : In this work, we propose a random balls model on $\mathbb{C}$ generated by a determinantal point process. We use a Ginibre point process to generate the centers of the balls and thus we introduce repulsion phenomena between the balls. Studying the model at a macroscopic level allows us to extend the results obtained for random balls models generated by a Poisson point process. Indeed, we obtain three different limit fields : the first one is a Gaussian integral, the second one is a stable integral and the last one is a Poissonian integral that bridges between the two previous ones.

4.1 Introduction

In this work, we extend the random balls model generated by a Poisson point process presented in [29] to a random balls model generated by a determinantal point process in dimension 2. In other words, we introduce a random balls model in $\mathbb{C}$, that is an aggregation of balls in $\mathbb{C}$, whose centers are generated according to a Ginibre determinantal point process and whose radii are independently and identically distributed according to a law of probability. We consider the field that measures the mass of the system of balls on a configuration of points. We investigate the asymptotic behavior of such a quantity while performing a zoom-out. In [29], after using suitable scalings and normalization, three different limit fields are exhibited: a Gaussian field, a stable field and an intermediate field.

A random balls model in dimension 2 can be seen as a wireless network. The centers of the balls x are locations of antennas emitting a signal at a range r , the radius of the balls. This point of view was developed in [28] for Poisson generated random balls and generated in [8] for instance, adding a weight to each balls that corresponds to the power of emission of each antennas. Generating antennas according to a determinantal point process allow us to introduce repulsion between antennas. Such an idea was investigated in [17]. They demonstrate that a thinned Ginibre point process is capable of modeling all the actual cellular networks.

Random balls model in dimension 2 are also very useful in imagery as it is pointed by [4]. In that case, the number of balls covering a point represents the grey level of a pixel in a black and white picture. A zoom-out in such models allows us to obtain a better approximation of the real image. Once again it is studied in [4] for Poisson generated random balls. We extend this study using a Ginibre point process to generate the balls. It allows us to apply this model to images exhibiting repulsion between darkest zones.

In the first part of the document, we give results on marked determinantal point process. Roughly speaking, we show that if we mark every point of a determinantal point process with i.i.d. random variables, we obtain a new determinantal point process on a product space. This result will simplify our study of the asymptotic behavior of our process that we introduce in the second part. The third and last part of the document contains some comments on the proposed results.

4.2 Marked Determinantal Point Process

Determinantal point processes are a special class of point processes that exhibit repulsion. Point processes are, in most cases, characterized by their joint intensities.

Definition 4.1. *The joint intensities of a point process χ on a Polish space E with respect to μ are functions (if any exists) $\rho_k : E \mapsto [0, +\infty)$ for $k \geq 1$, such that for any family of mutually disjoint subsets $D_1, \dots, D_k$ of E ,*

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \chi(D_i) \right] = \int_{\prod_i D_i} \rho_k(x_1, \dots, x_k) d\mu(x_1) \dots d\mu(x_k).$$

The joint intensities of a determinantal point process are given by a certain determinant, hence its name.

Definition 4.2. A point process χ on E is said to be a determinantal process with kernel K if it is simple and its joint intensities satisfy:

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det (K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k},$$

for every $k \geq 1$ and $x_1, \dots, x_k \in E$.

We can read the repulsion on the joint intensity of second order for instance. Indeed, if x and y are two points of E , the more they will be close to each other, the more the determinant of $(K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq 2}$ we be close to 0. Thus, $\rho_2(x, y) \rightarrow 0$ when $y \rightarrow x$ which implies that, if there is a point of the process in x , the probability that there is a point close to x is weaker. We recall that for a Poisson point process, the points are allocated independently.

In this section, we extend the following classical result about Poisson point processes (see for instance Lemma 6.4.VI in [15]):

Proposition 4.3. Let $\xi = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ be a Poisson point process on a Polish space E with intensity λ and let $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ be a family of i.i.d. random variables of distribution F on $\mathbb{R}^+$. Then $\xi' = (X_i, R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ is a Poisson point process on $E \times \mathbb{R}^+$ with intensity $\lambda \times F$.

The above result is given with much larger hypothesis that will not be useful to our study. Our determinantal version of Proposition 4.3 is the following:

Proposition 4.4. Let $\phi = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ be a determinantal point process on a Polish space E with kernel K , with respect to a Radon measure λ , and let $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ be a family of i.i.d. random variables on $\mathbb{R}^+$, independent of $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, with density f . Let $\Phi = ((X_i, R_i))_{i \in \mathbb{N}}$. Then, Φ is a determinantal process on $E \times \mathbb{R}^+$ with kernel

$$\widehat{K} : ((x, r), (y, s)) \mapsto \sqrt{f(r)}K(x, y)\sqrt{f(s)}, \quad (4.1)$$

with respect to the measure $\lambda(dx)dr$.

Proof. To prove that Φ is a determinantal point process with kernel $\widehat{K}$, we show that its joint intensities can be written as follows (see [24]):

$$\hat{\rho}_n((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) = \det(\widehat{K}((x_i, r_i), (x_j, r_j))_{i, j \in \{1, \dots, n\}}. \quad (4.2)$$

For all $n \in \mathbb{N}$ and all set A , the symbol

$$\sum_{\substack{\neq \\ a_1, \dots, a_n \in A}}$$

stands for the sum over all n -uplets $(a_1, \dots, a_n) \in A$ with $a_i \neq a_j$ for $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. Let $n \in \mathbb{N}$ and a Borel function $h : (E \times \mathbb{R}^+)^n \mapsto \mathbb{R}^+$. We have :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\sum_{(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n) \in \Phi}^{\neq} h((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \phi}^{\neq} h((x_1, R_1), \dots, (x_n, R_n)) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \phi}^{\neq} h((x_1, R_1), \dots, (x_n, R_n)) \middle| \phi \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_{(\mathbb{R}^+)^n} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \phi}^{\neq} h((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) \prod_{i \leq n} f(r_i) dr_i \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \phi}^{\neq} \int_{(\mathbb{R}^+)^n} h((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) \prod_{i \leq n} f(r_i) dr_i \right] \\
&= \int_{(E \times \mathbb{R}^+)^n} h((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) \prod_{i \leq n} f(r_i) dr_i \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n),
\end{aligned}$$

where $\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Det}[K](x_1, \dots, x_n)$ is the joint intensity of order n of ϕ . We now remark that

$$\prod_{i \leq n} f(r_i) \text{Det}[K](x_1, \dots, x_n) = \text{Det}[\widehat{K}]((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)),$$

where $\widehat{K}((x_i, r_i), (x_j, r_j)) = \sqrt{f(r_i)} K(x_i, x_j) \sqrt{f(r_j)}$. Then

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\sum_{(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n) \in \Phi}^{\neq} h((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) \right] = \\
& \int_{(E \times \mathbb{R}^+)^n} h((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) \text{Det}[\widehat{K}]((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) \prod_{i \leq n} \lambda(dx_i) dr_i, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

and Φ is a determinantal point process on $E \times \mathbb{R}^+$ with kernel $\widehat{K}$ with respect to the measure $\lambda(dx)dr$. $\square$

Remark 4.5. We can notice that in the proof of Proposition 4.4 above we do not use the fact that the marks are in $\mathbb{R}^+$. This result is in fact valuable for every Polish space but it is much common to use positive real marks.

An important class of determinantal processes is the class of those whose kernel satisfies the following hypothesis that we recall from [24]:

Hypothesis 4.6. The Polish space E is equipped with a Radon measure λ . The map K is an Hilbert-Schmidt operator from $L^2(E, \lambda)$ into $L^2(E, \lambda)$ satisfying the following conditions:

1. K is a bounded symmetric integral operator on $L^2(E, \lambda)$ with kernel K , i.e., for any $x \in E$ and any $f \in L^2(E, \lambda)$,

$$Kf(x) = \int_E K(x, y)f(y)d\lambda(y).$$

2. The spectrum of K is included in $[0, 1[$.
3. The map K is locally trace class, i.e., for all compact $\Lambda \in E$, the restriction K_Λ of K on $L^2(\Lambda, \lambda)$ is of trace class.

In the case where K satisfies Hypothesis 4.6, $\hat{K}$ defined as in (4.1) inherits those properties.

Proposition 4.7. *Let K be an Hilbert-Schmidt operator on $L^2(E, \lambda)$ satisfying Hypothesis 4.6 and let $\hat{K}$ be the integral operator with kernel :*

$$\hat{K} : ((x, r), (y, s)) \mapsto \sqrt{f(r)}K(x, y)\sqrt{f(s)},$$

where f is a density of probability. Then, $\hat{K}$ satisfies Hypothesis 4.6.

Proof. We first prove that $\hat{K}$ is an Hilbert-Schmidt operator. Using Theorem VI.23 in [42], this is the case when the kernel $\hat{K}$ belongs to $L^2((E \times \mathbb{R}^+) \times (E \times \mathbb{R}^+), (\lambda(dx)dr) \otimes (\lambda(dy)ds))$. Yet,

$$\begin{aligned} \|\hat{K}\|_2^2 &= \int_{(E \times \mathbb{R}^+)^2} |\hat{K}((x, r), (y, s))|^2 \lambda(dx)dr \lambda(dy)ds \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^+} f(r)dr \right)^2 \int |K(x, y)|^2 \lambda(dx)\lambda(dy) \\ &= \|K\|_2^2 < +\infty, \end{aligned}$$

since K is an Hilbert-Schmidt operator. We continue the proof point by point.

1. $\hat{K}$ is obviously a symmetric integral operator and it is bounded since it is an Hilbert-Schmidt operator.
2. Let γ be in the spectrum of $\hat{K}$ and g_γ an associated eigenfunction. Then :

$$\begin{aligned} \gamma g_\gamma(x, r) &= \int_{E \times \mathbb{R}^+} \sqrt{f(r)}K(x, y)\sqrt{f(s)}g_\gamma(y, s)\lambda(dy)ds \\ &= \sqrt{f(r)} \int_E K(x, y) \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{f(s)}g_\gamma(y, s)ds \lambda(dy) \\ &= \sqrt{f(r)}K \left(\int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{f(s)}g_\gamma(\cdot, s)ds \right) (x). \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \gamma \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{f(r)}g_\gamma(x, r)dr &= \int_{\mathbb{R}^+} f(r)K \left(\int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{f(s)}g_\gamma(\cdot, s)ds \right) (x)dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} f(r)dr K \left(\int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{f(s)}g_\gamma(\cdot, s)ds \right) (x) \\ &= K \left(\int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{f(s)}g_\gamma(\cdot, s)ds \right) (x). \end{aligned}$$

It shows that γ is in the spectrum of K (associated to the eigenfunction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{f(r)} g_\gamma(x, r) dr$) and consequently $\gamma \in [0, 1[$.

3. Let $\Lambda = \Lambda_E \times \Lambda_{\mathbb{R}^+}$ a compact set of $E \times \mathbb{R}^+$ and $\widehat{K}_\Lambda$ the restriction of $\widehat{K}$ on Λ . To compute the trace of $\widehat{K}_\Lambda$ we use a complete orthogonal basis (CONB for short) of $L^2(\Lambda, \lambda(dx)dr)$. Let $(e_n)_{n \geq 1}$ be a CONB of $L^2(\Lambda_E, \lambda)$ and $(b_n)_{n \geq 1}$ a CONB of $L^2(\Lambda_{\mathbb{R}^+}, dr)$. Then $(h_{n,k})_{n,k \geq 1}$, where $h_{n,k}(x, r) = e_n(x)b_k(r)$ is a CONB of $L^2(\Lambda, \lambda(dx)dr)$ (see [42]) and

$$Tr(\widehat{K}_\Lambda) = \sum_{n,k \geq 1} \left(\widehat{K}_\Lambda h_{n,k}, h_{n,k} \right)_{L^2(\Lambda, \lambda(dx)dr)},$$

with for $n, k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \left(\widehat{K}_\Lambda h_{n,k}, h_{n,k} \right)_{L^2(\Lambda, \lambda(dx)dr)} &= \int_{\Lambda^2} h_{n,k}(x, r) \sqrt{f(r)} K(x, y) \sqrt{f(s)} h_{n,k}(y, s) \\ &\quad \times \lambda(dx)dr \lambda(dy)ds \\ &= \left(\int_{\Lambda_{\mathbb{R}^+}} \sqrt{f(r)} b_k(r) dr \right)^2 (K e_n, e_n)_{L^2(\Lambda_E)} \\ &\leq (K e_n, e_n)_{L^2(\Lambda_E)}. \end{aligned}$$

since $\left(\int_{\Lambda_{\mathbb{R}^+}} \sqrt{f(r)} b_k(r) dr \right)^2 \leq 1$ by Cauchy-Schwarz. As a consequence:

$$Tr(\widehat{K}_\Lambda) \leq Tr(K_{\Lambda_E}) < +\infty,$$

and $\widehat{K}_\Lambda$ is locally trace class. Note that it is still true for subset Λ of the form $\Lambda_E \times \mathbb{R}^+$.

□

Remark 4.8. Straight forwardly Proposition 4.7 is still true for $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ but with point 2 replaced by :

2'. The spectrum of $\widehat{K}$ is included in $[0, \|f\|_1^{-1}[$.

4.3 Determinantal Random Balls Model

4.3.1 The model

We are interested in a random balls model where the couple (center, radius) is generated by a marked determinantal point process Φ on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$. We first define a Ginibre point process ϕ , that is a determinantal point process on $\mathbb{C}$ with kernel:

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2}} e^{x\bar{y}} \quad (4.4)$$

with respect to the Lebesgue measure. The point process ϕ generates the centers of the balls. To construct our marked determinantal point process Φ , we mark ϕ with i.i.d.

random variables on $\mathbb{R}^+$ with law F . With suppose that F admits a density f according to the Lebesgue measure, that is $F(dr) = f(r)dr$. The law F drives the distribution of the radius. We make the following hypothesis:

$$\int_{\mathbb{R}^+} r^2 f(r) dr < +\infty \quad (4.5)$$

and, for $2 < \beta < 4$

$$f(r) \sim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^{\beta+1}}. \quad (4.6)$$

Condition (4.5) implies that the mean volume of a ball is finite. Combining it with (4.6), it implies that $\beta > 2$. The fact that $\beta < 4$ implies that F does not admit a moment of order 4. In other words, we suppose that the law of the volume does not admit a second moment. Conditions (4.5) and (4.6) are of constant use in the following.

According to Proposition 4.4, Φ is a determinantal point process on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with kernel

$$\widehat{K}((x, r), (y, s)) = \sqrt{f(r)} K(x, y) \sqrt{f(s)}, \quad (4.7)$$

with respect to the Lebesgue measure. We call N the associated random measure. For any point y of $\mathbb{C}$, the number of balls containing y is given by:

$$M(y) = \sum_{(X_i, R_i) \in \Phi} 1_{B(X_i, R_i)}(y) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \delta_y(B(x, r)) N(dx, dr), \quad (4.8)$$

where, for any Borelian set A , $\delta_y(A) = 1_A(y)$. Identifying y with δ_y and replacing δ_y by any measure μ on $\mathbb{C}$ we extend the process M to the field:

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) N(dx, dr). \quad (4.9)$$

To insure the integral (4.9) to be finite, we restrain to measure μ with finite total variation, i.e. $|\mu|(\mathbb{C}) < +\infty$. Indeed, denoting $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ the set of measure on $\mathbb{C}$ with finite total variation, we have:

Proposition 4.9. *For all $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{C})$, $\mathbb{E}[|M(\mu)|] < +\infty$ and*

$$\mathbb{E}[M(\mu)] = \frac{1}{\pi} V \mu(\mathbb{C}), \quad (4.10)$$

where $V = \pi \int_{\mathbb{R}^+} r^2 f(r) dr$ is the mean volume of a ball.

Before proving Proposition 4.9, we give the following corollary:

Corollary 4.10. *For all $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{C})$, the integral (4.9) is well defined and is finite with probability 1.*

We now prove Proposition 4.9.

Proof. Using properties of functionals of random measures (see section 9.5 in [16]), we have:

$$\mathbb{E}[M(\mu)] = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \widehat{K}((x, r), (x, r)) dx dr.$$

Since $\widehat{K}((x, r), (x, r)) = \frac{1}{\pi} f(r)$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M(\mu)] &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{C}} 1_{B(x, r)}(y) \mu(dy) \frac{1}{\pi} f(r) dx dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{C}} 1_{B(y, r)}(x) dx f(r) dr \mu(dy) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \pi r^2 f(r) dr \right) \mu(dy) \\ &= \frac{V}{\pi} \mu(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

This concludes the proof since V is finite due to condition (4.5). $\square$

Remark 4.11. *Instead of using the standard Ginibre point process ϕ defined in (4.4), we could have chosen to use the thinned and re-scaled Ginibre point process ϕ_α (or α -Ginibre point process). It is a determinantal point process on $\mathbb{C}$ with kernel:*

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{|x|^2 + |y|^2}{2\alpha}} e^{\frac{x\bar{y}}{\alpha}}, \quad (4.11)$$

where $0 < \alpha \leq 1$ (see [23] or [17]). It is obtained by retaining independently each point of the Ginibre point process with probability α and then applying a scaling to conserve the density (mean number of points by volume unit) of the initial Ginibre point process. The 1-Ginibre point process corresponds to the standard Ginibre point process and the α -Ginibre point process converges in law to the Poisson point process of intensity $\frac{1}{\pi} dx$ on $\mathbb{C}$ when α goes to 0. Thus, the α -Ginibre point process bridges smoothly between the Ginibre point process and the Poisson point process. Since the density is preserved, Proposition 4.9 is still valid using a α -Ginibre point process. We will see in the following that introducing this parameter does not change our main result.

4.3.2 Asymptotics

We now perform a zoom-out on the model. It consists in two steps. First we increase the mean number of point by volume unit. In that purpose we introduce a scaled version of the Ginibre point process (see [23] for instance). Let ϕ_c be a scaled Ginibre point process i.e. a determinantal point process on $\mathbb{C}$ with kernel:

$$K_c(x, y) = \frac{c}{\pi} e^{-\frac{c}{2}(|x|^2 + |y|^2)} e^{cx\bar{y}} \quad (4.12)$$

with respect to the Lebesgue measure. The density of ϕ_c , that is the mean number of point by volume unit, is $\frac{c}{\pi}$. We will thus make c goes to infinity to increase the density. The second step is to reduce the mean radius to compensate the augmentation of the number of balls. In that purpose, we make the change of variable $r \mapsto \rho r$ in the

distribution F and let ρ goes to 0. The parameter ρ is interpreted as the mean radii of a ball. We obtain a new determinantal process Φ_ρ on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with kernel:

$$\widehat{K}_\rho((x, r), (y, s)) = \sqrt{\frac{f(r/\rho)}{\rho}} K_c(x, y) \sqrt{\frac{f(s/\rho)}{\rho}}, \quad (4.13)$$

with respect to the Lebesgue measure. In the following, we set $c = c(\rho)$ and let $c \rightarrow +\infty$ when $\rho \rightarrow 0$ to reduce the radii and increase the number of balls simultaneously.

The scaled version of $M(\mu)$ is the field:

$$M_\rho(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) N_\rho(dx, dr) \quad (4.14)$$

where N_ρ is the random measure associated to Φ_ρ and its expectation becomes:

$$\mathbb{E}[M_\rho(\mu)] = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \frac{c}{\pi} \frac{f(r/\rho)}{\rho} dx dr = \frac{V\mu(\mathbb{C})c\rho^2}{\pi}. \quad (4.15)$$

We deduce directly from (4.15) the following property:

Proposition 4.12. *For all $\mu \in \mathcal{Z}(\mathbb{C})$, for all $\rho > 0$,*

$$\frac{\mathbb{E}[M_\rho(\mu)]}{c\rho^2} = \frac{V\mu(\mathbb{C})}{\pi}.$$

In the sequel, we are interested in the fluctuations of $M_\rho(\mu)$ and we introduce

$$\widetilde{M}_\rho(\mu) = M_\rho(\mu) - \mathbb{E}[M_\rho(\mu)] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \widetilde{N}_\rho(dx, dr), \quad (4.16)$$

where $\widetilde{N}_\rho$ is the compensated random measure associated to N_ρ . The behavior of $\widetilde{M}_\rho(\mu)$ when $\rho \rightarrow 0$ and $c(\rho) \rightarrow +\infty$ accordingly depends on three scaling regimes that one can understand looking at the number of balls containing the origin with a radius large enough. Heuristically we have:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\#\{(x, r) \in \Phi_\rho : 0 \in B(x, r), r > 1\}] &= \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \widehat{K}_\rho((x, r), (x, r)) dx dr \\ &= \int_{\{(x, r) : 0 \in B(x, r), r > 1\}} \frac{c}{\pi} \frac{f(r/\rho)}{\rho} dx dr \\ &= c \int_1^{+\infty} r^2 \frac{f(r/\rho)}{\rho} dx dr \\ &\sim c\rho^\beta \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\beta-1}} dx dr, \end{aligned} \quad (4.17)$$

using (4.6) together with a change of variable. Since $\beta > 2$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\beta-1}} dx dr < +\infty$, and we obtain the three following scaling regimes when $\rho \rightarrow 0$:

- Large-ball scaling: $c\rho^\beta \rightarrow +\infty$,
- Intermediate scaling: $c\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$,

- Small-ball scaling: $c\rho^\beta \rightarrow 0$.

The main tool to study a determinantal integral (integral with respect to a determinantal random measure) is the Laplace transform given by Theorem 1.2 in [48]. In order to use this theorem for $M_\rho(\mu)$, we have to overcome two issues: $\widehat{K}_\rho$ does not satisfy Hypothesis 4.6 and $(x, r) \mapsto \mu(B(x, r))$ is not positive and compactly supported. As a consequence, we consider the auxiliary truncated process :

$$M_\rho^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} N_\rho(dx, dr), \quad (4.18)$$

and the associated compensated determinantal integral $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$. Note that, for a positive compactly supported measure μ , $(x, r) \mapsto \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}$ is a compactly supported function. In the following, we restrain $\mathcal{Z}(\mathbb{C})$ to $\mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$ the set of positive compactly supported measures on $\mathbb{C}$ with finite total variation. The relevance in introducing this auxiliary process lies in the following result:

Proposition 4.13. *For all $\mu \in \mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$ and for all $\rho > 0$, $M_\rho^R(\mu)$ converges in law to $M_\rho(\mu)$ when $R \rightarrow +\infty$. Moreover, in the intermediate and the small-ball scalings, there exists a constant ρ_1 , independent of R , such that this convergence is uniform in ρ for ρ in the interval $(0, \rho_1)$.*

Proof. Let $\mu \in \mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$. We have:

$$M_\rho(\mu) - M_\rho^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} N_\rho(dx, dr).$$

Thus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} N_\rho(dx, dr) \right] &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} \widehat{K}_\rho((x, r), (x, r)) dx dr \\ &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} \frac{c}{\rho\pi} f(r/\rho) dx dr. \end{aligned}$$

From (4.6), $f(r)r^{\beta+1}$ converges to 1 almost surely, when $r \rightarrow +\infty$, and there exists a constant C_f such that for all r :

$$f(r) \leq \frac{C_f}{r^{\beta+1}}. \quad (4.19)$$

With a change of variable, it implies that, for all r and for all $\rho > 0$

$$\frac{f(r/\rho)}{\rho} \leq C_f \frac{\rho^\beta}{r^{\beta+1}}. \quad (4.20)$$

Then,

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} N_\rho(dx, dr) \right] \leq \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} \frac{c}{\pi} \frac{C_f \rho^\beta}{r^{\beta+1}} dx dr. \quad (4.21)$$

Moreover,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} \frac{1}{r^{\beta+1}} dx dr &= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} 1_{B(y, r)}(x) dx 1_{\{r \geq R\}} \frac{1}{r^{\beta+1}} dr \mu(dy) \\
&= \pi \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}^+} 1_{\{r \geq R\}} \frac{1}{r^{\beta-1}} dr \mu(dy) \\
&= \frac{\pi \mu(\mathbb{C})}{\beta - 2} \frac{1}{R^{\beta-2}} < +\infty.
\end{aligned}$$

Finally we have, $\forall \varepsilon > 0, \forall R > 1/\varepsilon, \forall \rho$:

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} N_\rho(dx, dr) \right] \leq \frac{c \rho^\beta C_f \mu(\mathbb{C})}{\beta - 2} \varepsilon^{\beta-2}. \quad (4.22)$$

Thus $\mathbb{E}[|M_\rho(\mu) - M_\rho^R(\mu)|]$ converges to 0 and consequently, $(M_\rho^R(\mu))$ converges in law to $M_\rho(\mu)$. Under the intermediate scaling (and the small-ball scaling), since $c \rho^\beta \rightarrow a \in [0, +\infty)$ when $\rho \rightarrow 0$, there exists a ρ_1 such that, for all $\rho < \rho_1$, $c \rho^\beta < 2 \max(a, 1)$. Obviously, ρ_1 does not depend on R . Thus, using (4.22), $\forall \varepsilon > 0, \forall R > 1/\varepsilon, \forall \rho < \rho_1$:

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} N_\rho(dx, dr) \right] \leq \frac{2 \max(a, 1) C_f \mu(\mathbb{C})}{\beta - 2} \varepsilon^{\beta-2}. \quad (4.23)$$

It proves that the convergence is uniform in $\rho < \rho_1$. $\square$

This uniform convergence is crucial in order to invert the limit in ρ and the limit in R whenever $\lim_{\rho \rightarrow 0} \widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ exists:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \widetilde{M}_\rho(\mu) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} \widetilde{M}_\rho^R(\mu) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \widetilde{M}_\rho^R(\mu). \quad (4.24)$$

This interversion is still valuable if the convergence of $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ when $\rho \rightarrow 0$ is uniform in R . It will indeed be the case in the large-ball scaling. The next step is precisely to investigate the convergence of $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ when $\rho \rightarrow 0$. This convergence will be obtained on a restricted class of measures μ .

Definition 4.14. *The set $\mathcal{M}_\beta$ consists of positive measures $\mu \in \mathcal{Z}_c^+(\mathbb{C})$ such that there exist two real numbers p and q with $0 < p < \beta < q$ and a positive constant C_μ such that:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu(B(x, r))^2 dx \leq C_\mu (r^p \wedge r^q),$$

where $a \wedge b = \min(a, b)$.

This definition is reminiscent of $\mathcal{M}_{2, \beta}$ in [8]. We will need the following property on $\mathcal{M}_\beta$ that we recall from [8]:

Proposition 4.15. *The set $\mathcal{M}_\beta$ is a linear subspace on which*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_\beta, \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r))^2 r^{-\beta-1} dx dr < +\infty. \quad (4.25)$$

It is immediate that Dirac measures do not belong to $\mathcal{M}_\beta$. However absolutely continuous measures with respect to the Lebesgue measure, with density $\varphi \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$, do belong to $\mathcal{M}_\beta$ and will play an important role in the small-ball scaling. In that case we shall abusively note $\mu \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$. We recall the following result from [8]:

Proposition 4.16. *If $2 < \beta < 4$, then $L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_\beta$ and for all $\mu \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mu(B(x, r))^2 dx \leq C_\mu (r^2 \wedge r^4). \quad (4.26)$$

Large-ball scaling

In this section, we first investigate the behavior of $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ under the large-ball scaling when $\rho \rightarrow 0$. The increasing of the density is more important than the decreasing of the volume and we obtain at the limit a Gaussian process W^R . Then, we let $R \rightarrow +\infty$ to obtain the asymptotic behavior of $\widetilde{M}_\rho(\mu)$. The field obtained is a Gaussian integral very similar to the Gaussian field obtained in Theorem 2 in [29] under the large-grain scaling.

Proposition 4.17. *Suppose $c\rho^\beta \rightarrow +\infty$ when $\rho \rightarrow 0$ and let $n(\rho) = \sqrt{c\rho^\beta}$. Then, for all fixed $R > 0$ and for all $\mu \in \mathcal{M}_\beta$, $n(\rho)^{-1}\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ converges in law to*

$$W^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} M(dx, dr), \quad (4.27)$$

uniformly in R when $\rho \rightarrow 0$, where M is a centered Gaussian random measure with control measure $\frac{1}{\pi} r^{-\beta-1} dx dr$.

Proof. To study the convergence of $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ on $\mathcal{M}_\beta$, we use its Laplace transform:

$$\mathbb{E} \left[e^{-\theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho^R(\mu)} \right] = \exp \left(\theta \mathbb{E} [n(\rho)^{-1} M_\rho^R(\mu)] \right) \mathbb{E} \left[e^{-\theta n(\rho)^{-1} M_\rho^R(\mu)} \right]. \quad (4.28)$$

The Laplace transform of a determinantal integral is given by Theorem 1.2 in [48] for a compactly supported integrand but only for a determinantal measure with kernel satisfying Hypothesis 4.6. Unfortunately, K_c is not a Hilbert-Schmidt operator and therefore there is no reason that $\widehat{K}_\rho$ is a Hilbert-Schmidt operator. To overcome this difficulty we will restrain K_c on a compact support. The support of the function $(x, r) \mapsto \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}$ is included in a compact of the form $B(0, R_\mu + R) \times [0, R]$ where

$$R_\mu = \sup_{x \in \text{supp}(\mu)} |x|. \quad (4.29)$$

Note that R_μ is finite since μ is compactly supported. In the sequel, note $B_m^R = B(0, R_\mu + R)$ and $\Lambda_\mu^R = B_\mu^R \times [0, R]$. Let ϕ_c^μ be the restriction of ϕ_c on $B(0, R_\mu + R)$. It is a determinantal point process on $\mathbb{C}$ with kernel:

$$K_c^\mu(x, y) = \frac{c}{\pi} e^{-\frac{c}{2}(|x|^2 + |y|^2)} e^{cx\bar{y}} 1_{B_\mu^R(x)} 1_{B_\mu^R(y)}, \quad (4.30)$$

with respect to the Lebesgue measure. Note that K_c^μ (the integral operator with kernel K_c^μ) satisfies Hypothesis 4.6. Let Φ_ρ^μ be a determinantal point process on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with kernel :

$$\widehat{K}_\rho^\mu((x, r), (y, s)) = \sqrt{\frac{f(r/\rho)}{\rho}} K_c^\mu(x, y) \sqrt{\frac{f(s/\rho)}{\rho}}, \quad (4.31)$$

with respect to the Lebesgue measure. According to Proposition 4.7, the kernel $\widehat{K}_\rho^\mu$ satisfies Hypothesis 4.6. Let N_ρ^μ the associated random measure. Since no point $x \in \phi_c \setminus B_\mu^R$ interferes in the integral (4.18), we have:

$$M_\rho^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} N_\rho(dx, dr) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} N_\rho^\mu(dx, dr). \quad (4.32)$$

In order to lighten the notations, we note $g_\mu^R(x, r) = \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}$. Using Theorem 2 in [11], we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\theta n(\rho)^{-1} M_\rho^R(\mu)} \right] &= \text{Det} \left(I - \widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right] \right) \\ &= \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right) \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

where $\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]$ is the bounded operator of $L^2(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)$ with kernel :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right] \right) ((x, r), (y, s)) &= \\ \sqrt{1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x, r)}} \widehat{K}_\rho^\mu((x, r), (y, s)) \sqrt{1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(y, s)}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

We recall the following result (Theorem 3 in [11]) which is obtained by differentiation into the Laplace transform:

Proposition 4.18. *Let ξ be a determinantal process on a Polish space E with kernel K satisfying Hypothesis 4.6 with respect to a measure λ on E . For any compact set Λ of E and any non-negative function f defined on E , we have*

$$\mathbb{E} \left[\int_\Lambda f d\xi \right] = \int_\Lambda f(x) K(x, x) d\lambda(x) = \text{Tr} (K_\Lambda [f]).$$

In order to compute $\text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right] \right)$, we apply Proposition 4.18 with the determinantal process of kernel $\widehat{K}_\rho^\mu$ on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ restrained on the compact Λ_μ^R and the function $1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}$:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right] \right) &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} (1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}) N_\rho^\mu(dx, dr) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} (1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}) N_\rho(dx, dr) \right] \\ &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} (1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}}) \frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr, \end{aligned}$$

since $K_c(x, x) = \frac{c}{\pi}$. With $\psi(u) = e^{-u} - 1 + u$, we can rewrite the Laplace transform of $\widetilde{M}_\rho^R$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho^R(\mu)} \right] &= \exp \left(\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi(\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R) N_\rho(dx, dr) \right] \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right) \right) \\ &= \exp \left(- \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}) \frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right) \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

The first exponential is the Laplace transform of $n(\rho)^{-1} \widetilde{P}_\rho^R(\mu)$ with

$$\widetilde{P}_\rho^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \widetilde{\Pi}_\rho(dx, dr), \quad (4.36)$$

where $\widetilde{\Pi}_\rho$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with intensity

$$\frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr.$$

It converges in law to $W^R(\mu)$ under the large-ball scaling when $\rho \rightarrow 0$ according to Theorem 2 in [29]. To prove that this convergence is actually uniform in R , we look at the log-Laplace transform of $(n(\rho)^{-1} \widetilde{P}_\rho^R(\mu) - W^R(\mu))$:

$$\begin{aligned} &\left| \log \left(\mathbb{E} \left[\exp \left(n(\rho)^{-1} \widetilde{P}_\rho^R(\mu) - W^R(\mu) \right) \right] \right) \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi(n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}) \frac{cf(r/\rho)}{\pi \rho} - \frac{\mu(B(x, r))^2}{2} 1_{\{r < R\}} \frac{1}{\pi r^{\beta+1}} dx dr \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \left| \psi(n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}) \frac{cf(r/\rho)}{\pi \rho} - \frac{\mu(B(x, r))^2}{2} \frac{1}{\pi r^{\beta+1}} \right| dx dr. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Recall that $\psi(u) \sim \frac{u^2}{2}$ when $u \rightarrow 0$ thus, since $n(\rho)^{-1} \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$, using (4.6):

$$\begin{aligned} \psi \left(n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \right) \frac{cf(r/\rho)}{\pi \rho} &\sim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))^2}{2n(\rho)^2} \frac{c\rho^\beta}{\pi r^{\beta+1}} \\ &= \frac{\mu(B(x, r))^2}{2} \frac{1}{\pi r^{\beta+1}}. \end{aligned}$$

It proves that the integrand in (4.37) converges to 0. Moreover, using (4.20), for all r and for all $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} &\left| \psi \left(n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \right) \frac{cf(r/\rho)}{\pi \rho} - \frac{\mu(B(x, r))^2}{2} \frac{1}{\pi r^{\beta+1}} \right| \\ &\leq \frac{\mu(B(x, r))^2}{2n(\rho)^2} \frac{cf(r/\rho)}{\pi \rho} + \frac{\mu(B(x, r))^2}{2} \frac{1}{\pi r^{\beta+1}} \\ &\leq (C_f + 1) \frac{\mu(B(x, r))^2}{2\pi r^{\beta+1}} \end{aligned}$$

which is integrable over $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ according to Proposition 4.15. Then, using the dominated convergence Theorem, the integral (4.37) converges to 0 when $\rho \rightarrow 0$. Since it does not depend on R , it proves that the convergence of $n(\rho)^{-1} \tilde{P}_\rho^R(\mu)$ to $W^R(\mu)$ is uniform in R .

Next we aim to show that the second exponential in (4.35) converges to 1 and in that purpose we show that for all $n \geq 2$,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \text{Tr} \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right) = 0.$$

Consider first $n = 2$. The operator $\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2$ is an integral operator with kernel

$$\begin{aligned} \hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 ((x, r), (y, s)) = \\ \sqrt{1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x, r)}} \sqrt{\frac{f(r/\rho)}{\rho}} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(z, t)} \right) \frac{f(t/\rho)}{\rho} K_c^\mu(x, z) K_c^\mu(z, y) dz dt \\ \times \sqrt{1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(y, s)}} \sqrt{\frac{f(s/\rho)}{\rho}}. \end{aligned}$$

Thus its trace is given by:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right) &= \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 ((x, r), (x, r)) dx dr \\ &= \int_{(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)^2} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x, r)} \right) \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(z, t)} \right) \\ &\quad \times \frac{f(r/\rho)}{\rho} \frac{f(t/\rho)}{\rho} |K_c^\mu(x, z)|^2 dx dz dr dt. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Note that $|K_c^\mu(x, z)|^2 = \frac{c^2}{\pi^2} e^{-c|x-z|^2} 1_{B_\mu^R}(x) 1_{B_\mu^R}(z)$ and that the integrand in (4.38) is a positive valued compactly supported function.

We first study the integral over $\mathbb{C}^2$. Using Cauchy-Schwarz inequality we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^2} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x, r)} \right) \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(z, t)} \right) e^{-c|x-z|^2} 1_{B_\mu^R}(x) 1_{B_\mu^R}(z) dx dz \\ \leq \left(\int_{\mathbb{C}^2} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x, r)} \right)^2 e^{-c|x-z|^2} dx dz \right)^{1/2} \\ \times \left(\int_{\mathbb{C}^2} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(z, t)} \right)^2 e^{-c|x-z|^2} dx dz \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

We shall use

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-c|x-z|^2} dz = \frac{\pi}{c} \left(\frac{2c}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-c|x-z|^2} dz \right) = \frac{\pi}{c}. \quad (4.40)$$

Next, since $1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x, r)} \leq \theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}}$ and $\mu \in \mathcal{M}_\beta$, there exist a constant C_μ and two real numbers $0 < p < \beta < q$ such that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x, r)} \right)^2 dx &\leq \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\theta}{n(\rho)} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \right)^2 dx \\ &\leq \left(\frac{\theta}{n(\rho)} \right)^2 C_\mu (r^p \wedge r^q) 1_{\{r < R\}}. \end{aligned}$$

Thus we have:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{C}^2} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x,r)} \right)^2 e^{-c|x-z|^2} dx dz \right)^{1/2} &= \left(\frac{\pi}{c} \int_{\mathbb{C}} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x,r)} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\theta}{n(\rho)} \sqrt{\frac{\pi C_\mu}{c}} \left(r^{p/2} \wedge r^{q/2} \right) 1_{\{r < R\}} \\
&\leq \frac{\theta}{n(\rho)} \sqrt{\frac{\pi C_\mu}{c}} r^{q/2} 1_{\{r < R\}}, \tag{4.41}
\end{aligned}$$

and similarly:

$$\left(\int_{\mathbb{C}^2} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(z,t)} \right)^2 e^{-c|x-z|^2} dx dz \right)^{1/2} \leq \frac{\theta}{n(\rho)} \sqrt{\frac{\pi C_\mu}{c}} t^{q/2} 1_{\{t < R\}}. \tag{4.42}$$

Using both (4.41) and (4.42), we have:

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)^2} \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(x,r)} \right) \left(1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R(z,t)} \right) \frac{f(r/\rho)}{\rho} \frac{f(t/\rho)}{\rho} |K_c^\mu(x, z)|^2 dx dz dr dt \\
&\leq \frac{c^2}{\pi^2} \frac{\theta^2 \pi C_\mu}{n(\rho)^2 c} \left(\int_0^R r^{q/2} \frac{f(r/\rho)}{\rho} dr \right)^2 \\
&\leq \frac{\rho^{q-\beta}}{\pi} \theta^2 C_\mu \left(\int_0^{R/\rho} r^{q/2} f(r) dr \right)^2. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Using (4.5), the function f is the density of probability of a law admitting a finite second order moment. It implies that all its moments of order less than 2 are finite. In particular,

$$\int_0^{R/\rho} r^{q/2} f(r) dr \leq \int_{\mathbb{R}^+} f(r) r^{q/2} dr < +\infty. \tag{4.44}$$

Moreover, since $q > \beta$, $\rho^{q-\beta} \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$. Consequently, using (4.44), the bound (4.43) converges to 0 when $\rho \rightarrow 0$ uniformly in R . This concludes the proof of the convergence to 0 of (4.38).

Next we deal with $Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right)$ for all $n \geq 3$. Using Lemma 2.1 in [48],

$$\begin{aligned}
Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right) &\leq \left\| \widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right] \right\|^{n-2} Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right) \\
&\leq \left\| \widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right] \right\|_2^{n-2} Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right),
\end{aligned}$$

since for all trace-class operator T , $\|T\| \leq \|T\|_2$ where $\|\cdot\|$ stands for the operator norm and $\|\cdot\|_2$ stands for the Hilbert-Schmidt norm (see [42] for details). Moreover, for every trace-class operator T and every positive compactly supported function g , we have:

$$\begin{aligned}
\|T[g]\|_2^2 &= \int_{(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)^2} |T[g]((x, r), (y, s))|^2 dx dy dr ds \\
&= \int_{(\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+)^2} g(x, r) T((x, r), (y, s))^2 g(y, s) dx dy dr ds \\
&= Tr \left(T[g]^2 \right).
\end{aligned}$$

In particular,

$$\|\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]\|_2^2 = \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]^2 \right).$$

and thus, we obtain, for every $n \geq 2$:

$$\text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]^n \right) \leq \left(\sqrt{\text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]^2 \right)} \right)^n.$$

Consequently,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]^n \right) \right| &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{\left(\sqrt{\text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]^2 \right)} \right)^n}{n} \\ &= -\ln \left(1 - \sqrt{\text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]^2 \right)} \right) \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

when $\rho \rightarrow 0$ and

$$\exp \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu [1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R}]^n \right) \right) \rightarrow 1,$$

when $\rho \rightarrow 0$ so that finally with (4.35)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \mathbb{E}[e^{-\theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho^R(\mu)}] = \mathbb{E}[e^{-\theta W^R(\mu)}]. \quad (4.45)$$

□

Since the convergence in ρ in Proposition 4.17 is uniform in R , (4.24) applies and we obtain:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\mu) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow +\infty} n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho^R(\mu) = \lim_{R \rightarrow +\infty} W^R(\mu) \quad (4.46)$$

and it remains to identify $\lim_{R \rightarrow +\infty} W^R(\mu)$:

Proposition 4.19. *For all $\mu \in \mathcal{M}_\beta$, $W^R(\mu)$ converges in law to*

$$W(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) M(dx, dr), \quad (4.47)$$

when $R \rightarrow +\infty$.

Proof. Since $W^R(\mu)$ and $W(\mu)$ are both integral with respect to the same Gaussian measure, we have:

$$W(\mu) - W^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} M(dx, dr) \quad (4.48)$$

and the log-Laplace transform of the difference is:

$$\log \left(\mathbb{E} \left[e^{W(\mu) - W^R(\mu)} \right] \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r))^2 1_{\{r \geq R\}} \frac{r^{-\beta-1}}{\pi} dx dr. \quad (4.49)$$

The integrand in (4.49) converges to 0 when $R \rightarrow +\infty$ and is bounded by

$$\mu(B(x, r))^2 \frac{r^{-\beta-1}}{\pi}$$

which is integrable for $\mu \in \mathcal{M}_\beta$ thanks to Proposition 4.15. Then, using the dominated convergence Theorem, the bound (4.49) converges to 0 which proves Proposition 4.19. $\square$

Finally, combining (4.24) with Proposition 4.13, Proposition 4.17 and Proposition 4.19 leads to the main result of this section:

Theorem 4.20. *Suppose $c\rho^\beta \rightarrow +\infty$ when $\rho \rightarrow 0$, then the field $n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho(\cdot)$ converges in finite-dimensional convergence to $W(\cdot)$ in the space $\mathcal{M}_\beta$.*

Proof. The one-dimensional convergence is obtained by the combination of (4.24) with Proposition 4.13, Proposition 4.17 and Proposition 4.19. We now remark that the fields $\widetilde{M}_\rho$ and W are linear on $\mathcal{M}_\beta$. Thus, using the Cramér-Wold device and the linear structure of M_ρ , we derive the convergence of the finite-dimensional distributions from the one-dimensional convergence. $\square$

Remark 4.21. *The scaled version of the α -Ginibre point process mentioned in Remark 4.11, is the determinantal point process on $\mathbb{C}$ with kernel:*

$$K_c(x, y) = \frac{c}{\pi} e^{-\frac{c}{2\alpha}(|x|^2 + |y|^2)} e^{\frac{cx\bar{y}}{\alpha}}. \quad (4.50)$$

We remark that if we had made this choice in (4.12) it would not have change the final result in Theorem 4.20. Indeed, the exponential term of the kernel, where the parameter α lies, only matters in the proof of Proposition 4.17 where the bound of

$Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right)$ given in (4.56) would become:

$$\alpha \frac{\rho^{q-\beta}}{\pi} \theta^2 C_\mu \left(\int_{\mathbb{R}^+} r^{q/2} f(r) dr \right)^2$$

which still converges to 0 when $\rho \rightarrow 0$ allowing to conclude the proof similarly.

Intermediate scaling

This section is dedicated to the intermediate scaling. We first investigate the asymptotic behavior of $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ when the decreasing of the radii is comparable to the increasing of the density. Next, we let $R \rightarrow +\infty$ in the limiting field obtained. Like in the Poissonian case (see Theorem 2 in [29]), roughly speaking, the limit corresponds to take the limit in the intensity of the underlying random measure.

We obtain the following proposition:

Proposition 4.22. *Suppose $c\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$ when $\rho \rightarrow 0$. Then, for all $\mu \in \mathcal{M}_\beta$ and $R > 0$, $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ converges in law to*

$$\widetilde{P}^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \widetilde{\Pi}(dx, dr), \quad (4.51)$$

where $\widetilde{\Pi}$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with intensity $\frac{a}{\pi} r^{-\beta-1} dx dr$.

Proof. The proof follows the same scheme as Proposition 4.17. The Laplace transform of $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ is given by (4.35) with $n(\rho) = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\theta \widetilde{M}_\rho^R(\mu)} \right] &= \exp \left(- \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi \left(\theta \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \right) \frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta g_\mu^R} \right]^n \right) \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

The first exponential in (4.52) is the Laplace transform of :

$$\widetilde{P}_\rho^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \widetilde{\Pi}_\rho(dx, dr), \quad (4.53)$$

where $\widetilde{\Pi}_\rho$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with intensity

$$\frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr.$$

It is shown in [29], Theorem 2, that this process converges under Conditions (4.6) and (4.5) when $c\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$ to:

$$\widetilde{P}^R(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \widetilde{\Pi}(dx, dr), \quad (4.54)$$

where $\widetilde{\Pi}$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with intensity $\frac{a}{\pi} r^{-\beta-1} dx dr$.

In particular we have :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \exp \left(\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi \left(\theta \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \right) \frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr \right) = \mathbb{E} \left[\exp \left(-\theta \widetilde{P}^R(\mu) \right) \right]. \quad (4.55)$$

We want to show that the second exponential in (4.52) converges to 1. To do so, we first estimate $Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta g_\mu^R} \right]^2 \right)$ using similar reasoning as in Proposition 4.17 and we obtain:

$$Tr \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta g_\mu^R} \right]^2 \right) \leq \frac{c\rho^q}{\pi} \theta^2 C_\mu \left(\int_0^{R/\rho} r^{q/2} f(r) dr \right)^2. \quad (4.56)$$

Note that $c\rho^q = c\rho^\beta \times \rho^{q-\beta} \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$ since $q > \beta$. Thus $\text{Tr} \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta g_\mu^R} \right]^2 \right)$ converges to 0 when $\rho \rightarrow 0$. Using the exact same reasoning as in the proof of Proposition 4.17, for every $n \geq 2$:

$$\text{Tr} \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta g_\mu^R} \right]^n \right) \leq \left(\sqrt{\text{Tr} \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta g_\mu^R} \right]^2 \right)} \right)^n.$$

We conclude that the second exponential in (4.52) converges to 1 and it concludes the proof of Proposition 4.22. $\square$

Combining Proposition 4.22 with (4.24) we have:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \widetilde{M}_\rho(\mu) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \widetilde{M}_\rho^R(\mu) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \widetilde{P}^R(\mu) \quad (4.57)$$

and it remains next to identify the limit of $\widetilde{P}^R(\mu)$:

Proposition 4.23. *For all $\mu \in \mathcal{M}_\beta$, $\widetilde{P}^R(\mu)$ converges in law when $R \rightarrow +\infty$ to*

$$\widetilde{P}(\mu) = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) \widetilde{\Pi}(dx, dr), \quad (4.58)$$

where $\widetilde{\Pi}$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with intensity $\frac{a}{\pi} r^{-\beta-1} dx dr$.

Proof. We have:

$$\left| \widetilde{P}^R(\mu) - \widetilde{P}(\mu) \right| = \left| \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} \widetilde{\Pi}(dx, dr) \right|$$

where $\widetilde{\Pi}$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with intensity

$$\frac{a}{\pi} r^{-\beta-1} dx dr.$$

Thus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \widetilde{P}^R(\mu) - \widetilde{P}(\mu) \right| \right] &\leq 2 \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r \geq R\}} \frac{a}{\pi} r^{-\beta-1} dx dr \\ &= 2a\mu(\mathbb{C}) \int_R^{+\infty} r^{1-\beta} dr \\ &= \frac{2a\mu(\mathbb{C})}{(\beta-2)R^{\beta-2}} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.59)$$

$\square$

Finally, combining (4.24) with Proposition 4.13, Proposition 4.22 and Proposition 4.23 leads to main result of this section.

Theorem 4.24. *Suppose $c\rho^\beta \rightarrow a \in (0, +\infty)$ when $\rho \rightarrow 0$, then the finite-dimensional distributions of $\widetilde{M}_\rho(\cdot)$ converges to those of $\widetilde{P}(\cdot)$ in the space $\mathcal{M}_\beta$.*

Proof. The one-dimensional convergence is obtained by the combination of (4.24) with Proposition 4.13, Proposition 4.22 and Proposition 4.23. We now remark that the fields $\widetilde{M}_\rho$ and $\widetilde{P}$ are linear on the linear space $\mathcal{M}_\beta$. Thus, using the Cramér-Wold device, we derive the convergence of the finite-dimensional distributions from the one-dimensional convergence. $\square$

Remark 4.25. A comment as in remark 4.21 applies : If we had made the choice (4.50) instead of (4.12) it would not have change the final result of Theorem 4.24. Indeed, the exponential term of the kernel, where the parameter α lies, only matters in the proof of Proposition 4.22. The bound of $\text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta g_\mu^R} \right]^2 \right)$ given in (4.56) would become:

$$\alpha \frac{c\rho^q}{\pi} \theta^2 C_\mu \left(\int_0^{R/\rho} r^{q/2} f(r) dr \right)^2$$

which still converges to 0 when $\rho \rightarrow 0$ and allows to conclude the proof similarly.

Small-ball scaling

In the small-ball scaling, i.e. $c\rho^\beta \rightarrow 0$, the decreasing of the radii take precedence on the increasing of the number of points by volume unit. Once again, we first obtain the limit in ρ of $\widetilde{M}_\rho^R(\mu)$. We remark that this limit does not depend on R which is due to the fast decreasing of the radii. The limiting field obtained is a stable integral similar to the one obtained under the small-grain scaling in Theorem 2 in [29].

Proposition 4.26. Suppose $c\rho^\beta \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$ and set $n(\rho) = (c\rho^\beta)^{2/\beta}$ and $\gamma = \beta/2 > 1$. Then, for all $R > 0$ and for all $\mu \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$, $n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho^R(\mu)$ converges in the finite-dimensional distributions sense to

$$Z(\mu) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(x) M_\gamma(dx), \quad (4.60)$$

where $\mu(dx) = \varphi(x)dx$ and M_γ is a γ -stable measure with control measure $\sigma_\gamma dx$ where

$$\sigma_\gamma = \frac{\pi^{\gamma-1}}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - \cos(r)}{r^{1+\gamma}} dr \quad (4.61)$$

and constant unit skewness.

Proof. The Laplace transform is given in (4.35):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-\theta n(\rho)^{-1} \widetilde{M}_\rho^R(\mu)} \right] &= \exp \left(- \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \right) \frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr \right) \\ &\quad \times \exp \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr} \left(\widehat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right) \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

The first exponential is the Laplace transform of

$$n(\rho)^{-1} \tilde{P}_\rho(\mu) = n(\rho)^{-1} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \mu(B(x, r)) 1_{\{r < R\}} \tilde{\Pi}_\rho(dx, dr), \quad (4.63)$$

where $\tilde{\Pi}_\rho$ is a compensated Poisson random measure on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with intensity

$$\frac{c}{\pi \rho} f(r/\rho) dx dr.$$

We make the change of variable $r \mapsto n(\rho)^{1/d} r$ and the log-Laplace transform becomes:

$$- \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu \left(B(x, n(\rho)^{1/d} r) \right) 1_{\{r < n(\rho)^{-1/d} R\}} \right) \frac{cn(\rho)^{1/d}}{\pi \rho} f(rn(\rho)^{1/d}/\rho) dx dr. \quad (4.64)$$

Let $\mu(dx) = \varphi(x) dx$ with $\varphi \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$, then, using Lemma 4 in [29],

$$\theta n(\rho)^{-1} \mu \left(B(x, n(\rho)^{1/d} r) \right) 1_{\{r < n(\rho)^{-1/d} R\}} \rightarrow \theta \varphi(x) \pi r^2,$$

when $c\rho^\beta \rightarrow 0$ (and thus $n(\rho) \rightarrow 0$) dx -almost everywhere and

$$x \mapsto \sup_{r>0} \left(\frac{\mu(B(x, r))}{\pi r^d} \right) \in L^2(\mathbb{C}). \quad (4.65)$$

Thus, using the reasoning developed in the proof of Theorem 2 in [29] (see also the proof of Theorem 2.16 in [8] or Theorem 3 in [22]):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi \left(\theta n(\rho)^{-1} \mu \left(B(x, n(\rho)^{1/d} r) \right) 1_{\{r < n(\rho)^{-1/d} R\}} \right) \frac{cn(\rho)^{1/d}}{\pi \rho} f(rn(\rho)^{1/d}/\rho) dx dr \\ & \sim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+} \psi \left(\theta \varphi(x) \pi r^2 \right) \frac{cn(\rho)^{1/d}}{\pi \rho} f(rn(\rho)^{1/d}/\rho) dx dr. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Moreover, using the proof of Theorem 2 under the small-ball scaling in [29], the right-hand side in (4.66) converges to the Laplace transform of $Z(\mu)$. It implies that the random variable $n(\rho)^{-1} \tilde{P}_\rho(\mu)$ converges to $Z(\mu)$. We aim to show that the second exponential in (4.64) converges to 1. We start by proving that $Tr \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right)$ converges to 0. Since $\mu \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$, using Proposition 4.16, we can apply (4.43) with $q = 4$ (and $p = 2$) to have:

$$Tr \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right) \leq \frac{c\rho^4}{\pi n(\rho)^2} \theta^2 C_\mu \left(\int_0^{\mathbb{R}^+} r^2 f(r) dr \right)^2. \quad (4.67)$$

Since $\frac{c\rho^4}{\pi n(\rho)^2} = c^{(\beta-4)/\beta} \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$ (and thus $c \rightarrow +\infty$), we have

$$Tr \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right) \rightarrow 0$$

and the second exponential in (4.64) converges to 1 since for every $n \geq 2$:

$$Tr \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^n \right) \leq \left(\sqrt{Tr \left(\hat{K}_\rho^\mu \left[1 - e^{-\theta n(\rho)^{-1} g_\mu^R} \right]^2 \right)} \right)^n.$$

□

As we did in the large-ball scaling and the intermediate scaling, we combine Proposition 4.13 and Proposition 4.26 and apply the inversion (4.24) to obtain the finite-dimensional convergence of $\widetilde{M}_\rho(\cdot)$:

Theorem 4.27. *Suppose $c\rho^\beta \rightarrow 0$ when $\rho \rightarrow 0$ and set $n(\rho) = (c\rho^\beta)^{2/\beta}$. Then, the field $n(\rho)^{-1}\widetilde{M}_\rho(\cdot)$ converges in the sense of finite-dimensional distributions to $Z(\mu)$ in $L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$.*

The proof is absolutely similar to the proof of Theorem 4.20 and Theorem 4.24 and we skip it.

Remark 4.28. *A similar remark as in remark 4.21 and remark 4.25 can be formulated: choosing the kernel (4.50) instead of (4.12) do not change the final result.*

4.4 Comments

4.4.1 $\mathcal{K}$ -function

The limiting fields obtained in Theorem 4.20, Theorem 4.24 and Theorem 4.27 are similar to those obtained in the Poissonian case (see [29]). This is not surprising given the fact that we choose at the beginning a scaled Ginibre point process. Indeed, this process converges in law to a Poisson point process. This phenomena is also observed for the so-called $\mathcal{K}$ -function which measures the distribution of the inter-points distances (see [45]). For the scaled Ginibre point process ϕ_c , the $\mathcal{K}$ -function is given by (see [17]):

$$\mathcal{K}_c(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{c} \left(1 - e^{-cr^2}\right). \quad (4.68)$$

It is easy to see that $\mathcal{K}_c(r) \rightarrow \pi r^2$ as $c \rightarrow +\infty$, which is the $\mathcal{K}$ -function of a Poisson point process on $\mathbb{C}$. From a modeling point of view, it seems relevant to decrease the inter-points distances while increasing the mean number of points. For the Ginibre point process, decreasing the inter-points distance is equivalent to release the repulsion and thus it converges to a Poisson point process.

4.4.2 Zoom-in case

We recall that for Poisson random balls models, the study of the microscopic fluctuations done in [4] leads to very similar results to those obtained in the macroscopic behavior in [29] under the large-ball scaling and the intermediate scaling. This similarity allows to introduce a common approach of the two behaviors in [6] which was used for weighted random balls models in [8] or [22].

In the microscopic point of view, we are no more interested in the queue of the distribution of the radii but in the concentration around zero of the function that drives the distribution of the radii. The hypothesis made on this function in [6] is:

$$f(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{r^{\beta+1}}. \quad (4.69)$$

In particular, it implies that this function is not a density of probability and, more important, that it is not even integrable. Consequently, we can not study a determinantal random balls model under a zoom-in procedure. Indeed, even if we succeed in building a determinantal point process on $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ with kernel:

$$\widehat{K}((x, r), (y, s)) = \sqrt{f(r)}K(x, y)\sqrt{f(s)} \quad (4.70)$$

with K a Ginibre point process on $\mathbb{C}$ and f a function on $\mathbb{R}^+$ satisfying condition 4.70, this determinantal point process has no chance to satisfy hypothesis 4.6 since f is not integrable.

Bibliographie

- [1] Bernard Bercu and Djalil Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation-Cours et applications*. Dunod, 2007.
- [2] Hermine Biermé. *Champs aléatoires : autosimilarité, anisotropie et étude directionnelle*. PhD thesis, Université de Paris, 2005.
- [3] Hermine Biermé, Yann Demichel, and Anne Estrade. Fractional Poisson field and fractional Brownian field : why are they resembling but different ? *Electron. Commun. Probab.*, 18 :no. 11, 13, 2013.
- [4] Hermine Biermé and Anne Estrade. Poisson random balls : self-similarity and x-ray images. *Adv. in Appl. Probab.*, 38(4) :853–872, 2006.
- [5] Hermine Biermé, Anne Estrade, and Ingemar Kaj. About scaling behavior of random balls models. In *Proceed. 6th Int. Conf. on Stereology, Spatial Statistics and Stochastic Geometry, Prague*, 2006.
- [6] Hermine Biermé, Anne Estrade, and Ingemar Kaj. Self-similar random fields and rescaled random balls models. *J. Theoret. Probab.*, 23(4) :1110–1141, 2010.
- [7] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.
- [8] Jean-Christophe Breton and Clément Dombry. Rescaled weighted random ball models and stable self-similar random fields. *Stochastic Process. Appl.*, 119(10) :3633–3652, 2009.
- [9] Jean-Christophe Breton and Clément Dombry. Functional macroscopic behavior of weighted random ball model. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 8 :177–196, 2011.
- [10] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [11] Isabelle Camilier and Laurent Decreusefond. Quasi-invariance and integration by parts for determinantal and permanental processes. *J. Funct. Anal.*, 259(1) :268–300, 2010.
- [12] Renata Cioczek-Georges and Benoît B. Mandelbrot. A class of micropulses and antipersistent fractional Brownian motion. *Stochastic Process. Appl.*, 60(1) :1–18, 1995.

- [13] Mark E Crovella and Azer Bestavros. Self-similarity in world wide web traffic : evidence and possible causes. *Networking, IEEE/ACM Transactions on*, 5(6) :835–846, 1997.
- [14] Mark E Crovella, Murad S Taqqu, and Azer Bestavros. Heavy-tailed probability distributions in the world wide web. *A practical guide to heavy tails*, 1 :3–26, 1998.
- [15] Daryl J. Daley and David Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes. Vol. I.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Elementary theory and methods.
- [16] Daryl J. Daley and David Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes. Vol. II.* Probability and its Applications (New York). Springer, New York, second edition, 2008. General theory and structure.
- [17] Na Deng, Wuyang Zhou, and Martin Haenggi. The ginibre point process as a model for wireless networks with repulsion. arXiv :1401.3677.
- [18] Roland L. Dobrushin. Gaussian and their subordinated self-similar random generalized fields. *Ann. Probab.*, 7(1) :1–28, 1979.
- [19] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.
- [20] Raimundas Gaigalas. A Poisson bridge between fractional Brownian motion and stable Lévy motion. *Stochastic Process. Appl.*, 116(3) :447–462, 2006.
- [21] Raimundas Gaigalas and Ingemar Kaj. Convergence of scaled renewal processes and a packet arrival model. *Bernoulli*, 9(4) :671–703, 2003.
- [22] Renan Gobard. Random balls model with dependence. *J. Math. Anal. Appl.*, 423(2) :1284–1310, 2015.
- [23] André Goldman. The Palm measure and the Voronoi tessellation for the Ginibre process. *Ann. Appl. Probab.*, 20(1) :90–128, 2010.
- [24] J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, and Bálint Virág. Determinantal processes and independence. *Probab. Surv.*, 3 :206–229, 2006.
- [25] J. Ben Hough, Manjunath Krishnapur, Yuval Peres, and Bálint Virág. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, volume 51 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [26] Predrag R Jelenković, Aurel A Lazar, et al. Asymptotic results for multiplexing subexponential on-off processes. *Advances in Applied Probability*, 31(2) :394–421, 1999.
- [27] Ingemar Kaj. Limiting fractal random processes in heavy-tailed systems. pages 199–217, 2005.
- [28] Ingemar Kaj. Aspects of wireless network modeling based on poisson point processes. *Fields Institute Workshop on Applied Probability, Carleton University*, 2006.
- [29] Ingemar Kaj, Lasse Leskelä, Ilkka Norros, and Volker Schmidt. Scaling limits for random fields with long-range dependence. *Ann. Probab.*, 35(2) :528–550, 2007.

- [30] Ingemar Kaj and Murad S. Taqqu. Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process : the integral representation approach. In *In and out of equilibrium. 2*, volume 60 of *Progr. Probab.*, pages 383–427. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [31] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.
- [32] Claudia Klüppelberg and Thomas Mikosch. Explosive poisson shot noise processes with applications to risk reserves. *Bernoulli*, pages 125–147, 1995.
- [33] Mark Knackstedt and Anthony P. Roberts. Structure-property correlations in model composite materials. *Physical Review E*, 54(3) :2313, 1996.
- [34] Takis Konstantopoulos and Si-Jian Lin. Macroscopic models for long-range dependent network traffic. *Queueing Systems*, 28(1-3) :215–243, 1998.
- [35] Thomas G Kurtz. Limit theorems for workload input models. *Stochastic Networks : Theory and Applications*. Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [36] Naum S. Landkof. *Foundations of modern potential theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 180.
- [37] Nikolai Likhanov, Boris Tsybakov, and Nicolas D Georganas. Analysis of an atm buffer with self-similar (“fractal”) input traffic. In *INFOCOM’95. Fourteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Bringing Information to People. Proceedings. IEEE*, pages 985–992. IEEE, 1995.
- [38] Odile Macchi. The coincidence approach to stochastic point processes. *Advances in Appl. Probability*, 7 :83–122, 1975.
- [39] Ronald Meester and Rahul Roy. *Continuum percolation*, volume 119 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [40] Thomas Mikosch, Sidney Resnick, Holger Rootzén, and Alwin Stegeman. Is network traffic approximated by stable Lévy motion or fractional Brownian motion? *Ann. Appl. Probab.*, 12(1) :23–68, 2002.
- [41] Nicolas Privaut and Jie Shen. Poisson sphere counting processes with random interacting radii. Preprint, 2012.
- [42] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1972.
- [43] Sidney Resnick and Holger Rootzén. Self-similar communication models and very heavy tails. *Annals of Applied Probability*, pages 753–778, 2000.
- [44] Sidney Resnick and Gennady Samorodnitsky. Activity periods of an infinite server queue and performance of certain heavy tailed fluid queues. *Queueing Systems*, 33(1-3) :43–71, 1999.
- [45] Brian D. Ripley. The second-order analysis of stationary point processes. *J. Appl. Probability*, 13(2) :255–266, 1976.

- [46] Gennady Samorodnitsky and Murad S. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York, 1994. Stochastic models with infinite variance.
- [47] Moshe Shaked and J. George Shanthikumar. *Stochastic orders and their applications*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.
- [48] Tomoyuki Shirai and Yoichiro Takahashi. Random point fields associated with certain Fredholm determinants. I. Fermion, Poisson and boson point processes. *J. Funct. Anal.*, 205(2) :414–463, 2003.
- [49] M Sibuya. Wicksell’s corpuscle problem. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, 1999.
- [50] Alexander Soshnikov. Determinantal random point fields. *Russian Math. Surveys*, 55(5(335)) :107–160, 2000.
- [51] Dietrich Stoyan, Wilfrid S. Kendall, and Joseph Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1987. With a foreword by D. G. Kendall.
- [52] Rinya Takahashi and Masaaki Sibuya. Prediction of the maximum size in wicksell’s corpuscle problem. *Annals of the institute of Statistical Mathematics*, 50(2) :361–377, 1998.
- [53] Salvatore Torquato. Random heterogeneous media : microstructure and improved bounds on effective properties. *AMR*, 44(2) :37–76, 1991.
- [54] Bert Van Es and Adriaan Hoogendoorn. Kernel estimation in wicksell’s corpuscle problem. *Biometrika*, 77(1) :139–145, 1990.
- [55] Bengt von Bahr and Carl-Gustav Esseen. Inequalities for the r th absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. *Ann. Math. Statist.*, 36 :299–303, 1965.
- [56] Sven Dag Wicksell. The corpuscle problem : a mathematical study of a biometric problem. *Biometrika*, pages 84–99, 1925.
- [57] Sven Dag Wicksell. The corpuscle problem : second memoir : case of ellipsoidal corpuscles. *Biometrika*, pages 151–172, 1926.
- [58] Xueshi Yang and Athina P. Petropulu. Co-channel interference modeling and analysis in a Poisson field of interferers in wireless communications. *IEEE Trans. Signal Process.*, 51(1) :64–76, 2003.
- [59] Chase E Zachary and Salvatore Torquato. Hyperuniformity in point patterns and two-phase random heterogeneous media. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2009(12) :P12015, 2009.

Résumé : Dans ce travail de thèse, nous étudions les fluctuations macroscopiques dans un modèle de boules aléatoires. Un modèle de boules aléatoires est une agrégation de boules dans $\mathbb{R}^d$ dont les centres et les rayons sont aléatoires. On marque également chaque boule par un poids aléatoire. On considère la masse induite par le système de boules pondérées sur une configuration μ de $\mathbb{R}^d$ via le champ aléatoire :

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m\mu(B(x, r)) N(dx, dr, dm),$$

où N est la mesure ponctuelle aléatoire qui engendre les triplets (centre, rayon, poids). Pour réaliser l'étude macroscopique des fluctuations de M , on réalise un "dézoom" sur la configuration de boules. Mathématiquement cela revient à diminuer le rayon moyen tout en augmentant le nombre moyen de centres par unité de volume.

La question a déjà été étudiée lorsque les composantes des triplets (centre, rayon, poids) sont indépendantes et que ces triplets sont engendrés selon un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. On observe alors trois comportements distincts selon le rapport de force entre la vitesse de diminution des rayons et la vitesse d'augmentation de la densité des boules. Nous proposons de généraliser ces résultats dans trois directions distinctes.

La première partie de ce travail de thèse consiste à introduire de la dépendance entre les centres et les rayons et de l'inhomogénéité dans la répartition des centres. Dans le modèle que nous proposons, le comportement stochastique des rayons dépend de l'emplacement de la boule.

Dans les travaux précédents, les convergences obtenues pour les fluctuations de M sont au mieux des convergences fonctionnelles en dimension finie. Nous obtenons, dans la deuxième partie de ce travail, de la convergence fonctionnelle sur un ensemble de configurations μ de dimension infinie.

Dans une troisième et dernière partie, nous étudions un modèle de boules aléatoires (non pondérées) sur $\mathbb{C}$ dont les couples (centre, rayon) sont engendrés par un processus ponctuel déterminantal. Contrairement au processus ponctuel de Poisson, le processus ponctuel déterminantal présente des phénomènes de répulsion entre ses points ce qui permet de modéliser davantage de problèmes physiques.

Abstract: In this thesis, we study the macroscopic fluctuations in random balls models. A random balls model is an aggregation of balls in $\mathbb{R}^d$ whose centers and radii are random. We also mark each balls with a random weight. We consider the mass induced by the system of weighted balls on a configuration μ of $\mathbb{R}^d$ through the random field:

$$M(\mu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} m\mu(B(x, r)) N(dx, dr, dm),$$

where N is the random point measure that generate the triplets (center, radius, weight). In order to investigate the macroscopic fluctuations of M , we realize a zoom-out on the configuration of balls. Mathematically, we reduce the mean radius while increasing the mean number of centers by volume unit.

The question has already been studied when the centers, the radii and the weights are independent and the triplets (center, radius, weight) are generated according to a Poisson point process on $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Then, we observe three different behaviors depending on the comparison between the speed of the decreasing of the radii and the speed of the increasing of the density of centers. We propose to generalize these results in three different directions.

The first part of this thesis consists in introducing dependence between the radii and the centers and inhomogeneity in the distribution of the centers. In the model we propose, the stochastic behavior of the radii depends on the location of the ball.

In the previous works, the convergences obtained for the fluctuations of M are at best functional convergences in finite dimension. In the second part of this work, we obtain functional convergence on an infinite dimensional set of configurations μ .

In the third and last part, we study a random balls model (non-weighted) on $\mathbb{C}$ where the couples (center, radius) are generated according to determinantal point process. Unlike to the Poisson point process, the determinantal point process exhibits repulsion phenomena between its points which allows us to model more physical problems.