HAL
open science

Dualité homologique projective et résolutions catégoriques des singularités

Roland Abuaf

To cite this version:

Roland Abuaf. Dualité homologique projective et résolutions catégoriques des singularités. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2013. Français. NNT : 2013GRENM057 . tel-01167557

HAL Id: tel-01167557

https://theses.hal.science/tel-01167557v1

Submitted on 4 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Roland Abuaf

Thèse dirigée par **Laurent Manivel**

préparée au sein **de l'Institut Fourier (UMR 5582)**
et de **l'école doctorale MSTII**

Dualité projective homologique et résolutions catégoriques des singularités

Présentée publiquement le 1 juillet 2013
devant le jury composé de :

M. Michel Brion
Directeur de Recherches, Institut Fourier, Examinateur
M. Laurent Manivel
Directeur de Recherches, Institut Fourier, Directeur de thèse
M. Daniel Huybrechts
Professeur, Universität Bonn, Rapporteur
M. Stéphane Druel
Chargé de Recherches, Institut Fourier, Examinateur
M. Alexander Kuznetsov
Directeur de Recherches, Matematičeskij Institut im. Steklova, Rapporteur
M. Christian Peskine
Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Examinateur
M. Paolo Stellari
Chargé de Recherches, Università degli Studi di Milano, Examinateur

Dualité projective homologique et résolutions catégoriques des singularités

Roland ABUAF

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Laurent Manivel. Laurent a toujours été présent pour me soutenir et m'encourager lors de ces trois années de thèse. Il m'a souvent proposé des idées ingénieuses lorsque je rencontrais des difficultés et a été d'une très grande générosité scientifique avec moi. Quiconque connaît (même superficiellement) les travaux de Laurent constatera immédiatement l'influence qu'ils ont eu sur ce texte.

Lors de ma formation de 3-ème cycle universitaire, j'étais sur le point d'embrasser une carrière où je n'aurais pas eu à compter les pièces à la fin du mois. Au même moment, j'ai eu la chance d'assister à un cours de géométrie algébrique de Christian Peskine. C'est ce cours qui m'a redonné l'envie de faire des maths. Christian a été d'une disponibilité infinie lors du stage de M2 que j'ai fait sous sa direction.

Durant ce stage, j'ai pu découvrir les beautés "déraisonnables" de la géométrie projective à travers les travaux de Fyodor Zak. Fyodor a lui aussi été d'une très grande disponibilité envers moi. C'est sans aucun doute grâce à Christian et Fyodor que je me suis définitivement orienté vers la géométrie algébrique et je les en remercie.

Je voudrais aussi remercier certains de mes professeurs de premier cycle universitaire et du secondaire qui ont joué un rôle important dans ma formation.
Hélène Benhamou, Jacques Simon et Alain Pommellet, lors mes études en classes préparatoires. Ils ont toujours eu l'exigence de faire un vrai cours de mathématiques et pas seulement de préparer des moutons à un concours. Ils ont en outre cru en mes capacités, ce qui était, pendant ces années difficiles, très réconfortant.
Monsieur Mwaka, mon professeur de 4-ème. Il m'a enseigné les charmes de la géométrie du triangle avec un art consommé.
Denis Roche à l'école primaire. Il m'a fait apprendre les tables de multiplication avec une joie communicative.

Daniel Huybrechts et Sasha Kuznetsov ont été les rapporteurs de mon travail de thèse. Je suis très flatté qu'ils aient accepté cette tâche pénible

et je voudrais les remercier pour les nombreuses suggestions et corrections qu'ils m'ont proposées.

Michel Brion, Stéphane Druel, Christian Peskine et Paolo Stellari me font l'honneur d'être dans mon jury de thèse et je les en remercie. Je voudrais tout particulièrement remercier Michel Brion pour sa lecture minutieuse de mon manuscrit et pour les très nombreuses suggestions qu'il m'a faites.

Je voudrais remercier mes collègues et amis de Grenoble pour leur présence durant ces 3 ans. Je pense tout particulièrement à Mickael B, Monique D, Guenaelle D, Thibaut D, Junyan C, Kevin L, Gunnarbot 1999, 99, Marie M, Marianne P, Clélia P et Ronan T. Je voudrais aussi remercier le personnel de l'Institut Fourier et en particulier Arianne, Boucif, Francesca et Marie-Noëlle.

Un petit clin d'oeil aux parigots (Alexandra, Anto, Claire, Florent, Guillaume, Lionel, Thomas et Vincent...). Un merci tout particulier à Nathalie d'avoir fait le déplacement pour assister à ma soutenance !

Je voudrais remercier Sophie B-M et Janie T. Elles ont joué un rôle très important dans le choix de mon orientation lorsque j'étais en fin de 3-ème cycle.

J'ai participé à quelques conférences en géométrie algébrique. Durant celles-là, j'ai encontré des collègues qui sont devenus des amis. Je pense en particulier à Ada et Michel. Je les remercie pour leur bonne humeur et leur gentillesse à chaque fois que l'on se rencontre.

Un très très grand merci à mes parents (Monique et Niso) et à ma grande soeur (Annie-Claire). Ils m'ont toujours soutenu et encouragé avec ferveur durant ces trois années.

J'ai passé de nombreux week-ends avec Alexandru, Baptiste, Isadora (et Van et Max), Julien et Laura. Ces moments de détente (et parfois de prise de tête !) ont été une source d'air frais durant toute la préparation de cette thèse. Un merci tout particulier à Alexandru et Baptiste d'être venus assister à ma soutenance de thèse.

Finalement, je voudrais remercier La Maya, simplement d'être là !

Perle les nuits, éclatantes d'une langueur rouge,
Étendues dans le ciel qui égorge lentement
Notre désir, soudain, s'écrase chuchotant.
Toutes les traces de toi qui s'égarent mais ne changent.

Élément fou, ton sourire qui recommence,
Xercès, écoute moi, je n'ose pas l'offense :
"A qui sont ces serpents qui sifflent sur vos têtes ?"
Ne les as-tu pas sus, serviles, qui s'apprêtent ?

Rêve de ces absences, parfois si lontaines,
Une vie qui s'écoule, loin des bras chatoyants.
Alors je veux croire, toujours, que ces chaînes,
Luisent d'un silence qui n'est jamais permanent.

Dans ce chemin aux pas chairs et profonds qui nous marquent de leurs traces,
"Reviens !" je chuchote.
Une fois, lentement, dans cette nuit aux éclatantes langueurs de rouge.

Table des matières

Introduction **7**
0.1 Résolutions crépantes 7
0.2 Résultats principaux de la thèse 10
0.3 Méthodes employées 12

1 Résolutions crépantes catégoriques des singularités **14**
1.1 Décompositions semi-orthogonales et décompostions de Lefschetz 15
1.2 Résolutions catégoriques crépantes des singularités 19
1.2.1 Résolutions géométriques crépantes et équivalences de catégories 19
1.2.2 Diverses notions de crépance au niveau catégorique . . 22
1.3 Minimalité des résolutions catégoriques crépantes 27
1.3.1 Composantes connexes d'une catégorie 28
1.3.2 Résolutions catégoriques fortement crépantes 29

2 Résolutions magnifiques des singularités et résolutions catégoriques crépantes **35**
2.1 Résolutions magnifiques des singularités 36
2.1.1 Définitions et quelques exemples 36
2.1.2 Singularités des diviseurs intérmédiaires dans les résolutions magnifiques 40
2.2 Le théorème principal 43
2.2.1 Énoncé et réduction "standard" 43
2.2.2 Quelques lemmes d'annulation 47
2.2.3 Une récurrence 49
2.2.4 Quelques questions 59

3 Categorical crepant resolutions and the Tits-Freudenthal magic square **60**
3.1 Main result 60
3.2 Resolution of singularities and the Tits-Freudenthal magic square 61

3.2.1 Basic description of the magic square 61
3.2.2 Desingularization of the tangent variety of $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ 62
3.2.3 Some (other) vanishing lemmas 74
3.3 Proof of the main theorem 80
3.3.1 Standard reductions (bis repetita) 80
3.3.2 The key proposition 82

Conclusion **88**

A The map $\mu : E \to \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ has infinite Tor-dimension **92**
A.1 Morphisms with finite Tor-dimension 92
A.1.1 Basic facts 92
A.1.2 Growth of infinite free resolutions 93

B Un résultat de $\mathbb{Q}$-factorialité **98**
B.1 Énoncé du résultat et preuve 98
B.2 Applications 100

Introduction

0.1 Résolutions crépantes

Un des résultats fondamentaux de la théorie des singularités complexes est le théorème d'Hironaka. Celui-ci nous apprend que si X est une variété complexe alors il existe un morphisme propre :

$$\pi : \tilde{X} \to X$$

tel que $\tilde{X}$ soit lisse et π soit un isomorphisme au dessus du lieu lisse de X. Il permet, dans une certaine mesure, d'appliquer aux variétés singulières des techniques cohomologiques propres aux variétés lisses (théorèmes d'annulation à la Kodaira [AJ89], théorème d'intersection à la Peskine-Szpiro [Rob80] etc...). Cependant, ce théorème ne prédit absolument pas l'existence d'une résolution "minimale" de la variété étudiée. Étant donnée une singularité X, on aimerait savoir s'il existe une résolution $\pi : \tilde{X} \to X$ qui satisfait une propriété universelle de minimalité : pour toute autre résolution des singularités $\pi' : \tilde{X}' \to X$, il existe un morphisme $\rho : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ avec un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}' \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\pi'"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Notons que si au lieu de la lissité, on s'intéresse simplement à la normalité, alors la normalisation de X satisfait une telle propriété universelle. L'exemple qui suit montre qu'une résolution des singularités minimale ne peut pas toujours exister.

Exemple 0.1.1. Soient V et W deux espaces vectoriels tel que $\dim W > \dim V \geq 2$. On pose :

$$X = \{\phi \in \mathrm{Hom}(V, W), \text{ tel que } \operatorname{rg} \phi \leq 1\}.$$

C'est une variété singulière uniquement en 0 et elle admet deux résolutions naturelles des singularités :

- $\tilde{X}_1 = \{(\phi, L) \in X \times \mathbb{P}(V^*)$, tel que $L \subset \operatorname{Ker}\phi\}$,
- $\tilde{X}_2 = \{(\phi, M) \in X \times \mathbb{P}(W)$, tel que $\operatorname{Im}\phi \subset M\}$.

On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[dr, "\pi_1"] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "\pi_2"'] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

où π_1 et π_2 sont des isomorphismes en dehors de $0 \in X$. Notons que $\operatorname{codim}_{\tilde{X}_1}(\pi_1^{-1}(0)) = \dim W$ et $\operatorname{codim}_{\tilde{X}_2}(\pi_2^{-1}(0)) = \dim V$. Ainsi, les variétés $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$ sont isomorphes en codimension 1 mais ne sont pas isomorphes.

On souhaite savoir s'il existe une résolution $\pi : \tilde{X} \to X$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[dr, "\rho_1"] \arrow[ddr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "\rho_2"'] \arrow[ddl, "\pi_2"] \\
& \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Supposons qu'un tel $\tilde{X}$ existe. Alors $\rho_1 : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}$ est un morphisme birationnel entre variétés lisses et son lieu exceptionnel a codimension supérieure à 2 dans $\tilde{X}_1$: c'est un isomorphisme ([Deb01], 1.40). De même, le morphisme $\rho_2 : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}$ est un isomorphisme. On en déduit donc que $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$ sont isomorphes, contradiction.

On peut dès lors se demander s'il existe une notion plus faible de minimalité. On dira qu'une résolution $\pi : \tilde{X} \to X$ est *faiblement minimale* si pour tout autre résolution des singularités $\pi' : \tilde{X}' \to X$, l'existence d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\pi"'] & \tilde{X}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

implique $\tilde{X} = \tilde{X}'$. En d'autres termes, une résolution $\tilde{X}$ de X est faiblement minimale si il n'existe pas de résolution de X qui soit strictement en dessous de $\tilde{X}$. Cette propriété pourrait s'avérer satisfaisante du point de vue de la minimalité, mais il nous manque un critère effectif pour la caractériser.

Supposons maintenant X normale et de Gorenstein[1] (on notera ω_X le fibré dualisant de X). On dit qu'une résolution des singularités $\pi : \tilde{X} \to X$ est *crépante* si on a :

$$\pi^* \omega_X = \omega_{\tilde{X}}.$$

On peut montrer (et on le fera dans le chapitre 1 de cette thèse !) qu'une résolution crépante est faiblement minimale. On conjecture même que ces résolutions doivent satisfaire une propriété de minimalité catégorique extrêmement forte. Dans la suite, on note $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ (resp. $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$) la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux cohérents sur X (resp. des complexes bornés de fibrés vectoriels sur X). On a la :

Conjecture 0.1.2 (Bondal-Orlov, [BO02])**.** *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution crépante de X. Alors pour tout autre résolution des singularités $\pi' : \tilde{X}' \to X$, il existe un foncteur pleinement fidèle :*

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}').$$

La crépance est une condition relativement simple à vérifier pour montrer qu'une résolution des singularités est faiblement minimale. Malheureusement, les variétés qui admettent des résolutions crépantes sont rares. On peut prouver (et ce sera fait au chapitre 1 de ce texte) que le cône affine au dessus du deuxième plongement de Veronese $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$ n'admet pas de résolution crépante des singularités. C'est ennuyeux car ce cône (qui peut être vu comme une variété déterminantielle de matrices symétriques) est l'une des singularités les plus simples que l'on rencontre en théorie géométrique des représentations. On pourrait cependant se demander si ce cône admet un résolution "non-commutative" crépante.

La théorie des résolutions non-commutatives crépantes (on discutera en détail de ces notions dans la section 1.2 de cette thèse) a été partiellement

1. Pour nous, un anneau local A est de Gorenstein s'il est de Cohen-Macaulay et si A est un A-module dualisant

développée dans [BO02] et [VdB04]. Ces travaux sont très influencés par la conjecture de Bondal-Orlov et ils dégagent essentiellement quelques critères pour démontrer que les catégories dérivées de deux résolutions crépantes d'une même singularité sont équivalentes. Ces critères se basent sur le fait que l'on peut parfois exprimer ces résolutions crépantes comme des résolutions non-commutatives. Le point de vue de Kuznetsov [Kuz08b] est sensiblement différent (on discutera de ce point de vue au chapitre 1). Il définit la notion de résolution catégorique crépante dans le but de produire de nouveaux exemples de résolutions (catégoriques) minimales.

Définition 0.1.3 (Kuznetsov)**.** Soit X une variété de Gorenstein à singularités rationnelles. Une *résolution catégorique faiblement crépante* de X est une catégorie triangulée $\mathscr{T}$ avec un foncteur $\mathbf{R}\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ tel que :

- Il existe une résolution des singularités $\pi : \tilde{X} \to X$ et un foncteur pleinement fidèle $\delta : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ vérifiant $\mathbf{R}\pi_{\mathscr{T}*} = \mathbf{R}\pi_* \circ \delta$,
- $\mathbf{R}\pi_{\mathscr{T}*}$ a des adjoints à gauche et à droite bien définis au dessus de $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$,
- pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a :
$$\mathbf{R}\pi_{\mathscr{T}*}\mathbf{L}\pi^*_{\mathscr{T}}\mathscr{F} \simeq \mathscr{F},$$
où $\mathbf{L}\pi^*_{\mathscr{T}}$ est l'adjoint à gauche de $\mathbf{R}\pi_{\mathscr{T}*}$,
- pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a :
$$\mathbf{L}\pi^*_{\mathscr{T}}\mathscr{F} \simeq \mathbf{L}\pi^!_{\mathscr{T}}\mathscr{F},$$
où $\mathbf{L}\pi^!_{\mathscr{T}}$ est l'adjoint à droite de $\mathbf{R}\pi_{\mathscr{T}*}$.

On vérifie sans peine que si $\tilde{X} \to X$ est une résolution crépante alors $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ est une résolution catégorique faiblement crépante. Si on fait l'hypothèse que $\mathscr{T}$ est géométrique (i.e. $\mathscr{T} = \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$), alors une réciproque à cet énoncé sera exposée au chapitre 1. La démarche de Kuznetsov se révèle très fructeuse et lui permet de montrer, entre autres choses, que le cône affine au dessus de $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$ admet une résolution catégorique crépante. Il démontre également que les variétés de matrices anti-symétriques [2] de rang ≤ 4 (dans un espace vectoriel de dimension ≥ 6) admettent des résolutions catégoriques crépantes. Ce dernier résultat est crucial pour la détermination d'une duale homologique projective à $\mathrm{G}(2,6)$ (voir [Kuz06a]).

0.2 Résultats principaux de la thèse

Un de nos objectifs premiers a été de généraliser l'approche de Kuznetsov afin de trouver des résolutions catégoriques crépantes de toutes les variétés déterminantielles. En fait, Kuznetsov définit une autre notion de crépance

2. appelées aussi *pfaffiennes*

au niveau catégorique, la *crépance forte*. Les résolutions fortement crépantes sont sans aucun doute celles qui possèdent les propriétés de minimalité les plus intéressantes : on démontrera dans le chapitre 1 de ce mémoire qu'elles sont faiblement minimales au sens des résolutions catégoriques. Il semble toutefois beaucoup plus simple de construire des résolutions faiblement crépantes et nous nous bornerons à la construction de telles résolutions dans tout ce texte.

Dans le chapitre 2, nous définirons la notion de *résolution magnifique des singularités* pour une variété Gorenstein. Celles-ci sont modelées sur les exemples standard de compactifications magnifiques de groupes algébriques semi-simples adjoints. Le résultat principal de ce chapitre est le

Théorème I. *Soit X une variété de Gorenstein à singularités rationnelles. Supposons que X admette une résolution magnifique des singularités. Alors X admet une résolution catégorique faiblement crépante.*

En utilisant les travaux de Vainsencher ([Vai84]) et Thaddeus ([Tha99]), on en déduit le

Corollaire I. *Toutes les variétés déterminantielles (carrées, symétriques ou pfaffiennes) de Gorenstein admettent des résolutions catégoriques faiblement crépantes.*

On démontrera aussi que la variété des tangentes (parfois appelée développable) de $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$ n'admet pas de résolution magnifique des singularités. Les méthodes développées au chapitre 2 ne permettent donc pas de construire une résolution catégorique crépante de cette variété tangente. Ce problème est très lié à la détermination d'une duale homologique projective de $\mathrm{G}(3,6)$ (voir la section 3.1 de ce texte). En effet, on s'attend à ce qu'une duale homologique projective de $\mathrm{G}(3,6)$ soit une (bonne !) résolution catégorique crépante d'un recouvrement double de $\mathbb{P}^{19}$ ramifié le long de la développable de $\mathrm{G}(3,6)$. Deliu remarque ([Del11]) qu'il est nécessaire d'améliorer le théorème principal de [Kuz08b] sur les résolutions catégoriques crépantes afin prouver l'existence d'une telle duale pour $\mathrm{G}(3,6)$. Il laisse toutefois le problème en suspens. Dans le chapitre 3 de ce manuscrit nous prouvons le résultat suivant :

Théorème II. *Les développables des variétés suivantes admettent des résolutions catégoriques faiblement crépantes :*
- *la grassmanienne symplectique* $\mathrm{G}_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$,
- *la grassmanienne* $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$,
- *la variété spinorielle* $\mathbb{S}_{12} \subset \mathbb{P}^{31}$,
- *la grassmanienne octonionique* $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{O}^3, \mathbb{O}^6) \subset \mathbb{P}^{55}$.

On se rapportera à [LM01] pour une étude précise de ces variétés. Ce résultat laisse espérer que l'on puisse trouver des duales homologiques pour celles-ci.

0.3 Méthodes employées

Les décompositions semi-orthogonales *de Lefschetz* (introduites par Kuznetsov dans [Kuz07]) sont au coeur des méthodes employées dans cette thèse. Kuznetsov prouve que si $\pi : \tilde{X} \to X$ est une résolution des singularités telle que :

- le diviseur exceptionnel (noté E) de π est intègre,
- $\omega_{\tilde{X}} = \omega_X \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE)$ pour un certain $m \geq 0$,
- $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$ admet une décomposition de Lefschetz par rapport à $\mathscr{O}_E(-E)$ de longueur m,

alors X admet une résolution catégorique faiblement crépante. Dans le chapitre 2 de ce texte, on démontrera que les diviseurs exceptionnels d'une résolution magnifique des singularités admettent tous des décompositions de Lefschetz de la bonne longueur et qui sont compatibles entre elles. On en déduira le théorème I. Le point central de ce chapitre est l'utilisation d'éclatements le long de centres normalement plats. En effet, ces éclatements possèdent d'excellentes propriétés homologiques. En particulier, la projection du diviseur exceptionnel vers le centre de l'éclatement a Tor-dimension finie (car elle est plate). Ces bonnes propriétés combinées aux théorèmes d'annulation de la géométrie birationnelle (Grauert-Riemenschneider, Kawamata-Viehweg etc...) nous permettent d'établir que le diviseur exceptionnel d'un tel éclatement admet une décomposition de Lefschetz de la bonne longueur. C'est la clef de voûte de la preuve du théorème I.

Le chapitre 3 de ce manuscrit est plus technique. Concentrons-nous sur le cas de $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$. Tout d'abord, on démontre que la résolution "traditionnelle" (([LM01], section 7) de sa variété tangente (notée $\tau(\mathrm{G}(3,6))$) n'a pas des propriétés homologiques satisfaisantes : la projection du diviseur exceptionnel de cette résolution sur le lieu singulier de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ a Tor-dimension infinie. Ce résultat n'est pas trivial et pour le démontrer, on utilise toute la force des estimées asymptotiques des nombres de Betti pour les anneaux locaux qui sont intersections complètes ([Avr10], par exemple).

On doit donc exhiber une résolution des singularités de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ qui possède de meilleures propriétés homologiques. On cherche une résolution obtenue par éclatements le long de centres normalement plats. On se rend alors compte que le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ le long de sa strate singulière la plus profonde (qui est $\mathrm{G}(3,6)$) est globalement non-réduit et que le réduit associé à ce diviseur n'est pas de Cartier. Cela nous empêche a priori de comprendre quelles sont les singularités, le long de ce diviseur, de l'éclatement considéré de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$. On va alors introduire un artefact intermédiaire pour prouver que la suite d'éclatements le long des (transformées strictes) des strates invariantes de cette développable sous l'action de SL_6 est une résolution des singularités : ce sont les diviseurs polaires de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$. On montrera que cette suite d'éclatements désingularise

ces diviseurs. On pourra alors en déduire qu'elle est aussi une résolution des singularités pour $\tau(\mathrm{G}(3,6))$.

Une fois que l'on a exhibé une bonne résolution des singularités pour $\tau(\mathrm{G}(3,6))$, on développe des méthodes analogues à celles du chapitre 2 afin de construire une résolution catégorique faiblement crépante de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$. Les décompositions semi-orthogonales de Lefschetz y jouent encore un rôle prépondérant.

Chapitre 1

Résolutions crépantes catégoriques des singularités

Dans tout ce texte on travaille sur $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Par *schéma*, on entendra systématiquement schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$. Une *variété* est un schéma réduit et connexe (mais pas forcément irréductible). Si X est un schéma, nous noterons $\mathrm{D}(X)$ la catégorie dérivée des complexes de faisceaux cohérents sur X. Nous noterons aussi $\mathrm{D}^-(X)$ (respectivement $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$) la catégorie dérivée des complexes de faisceaux cohérents bornés en degré positif (respectivement complexes bornés de faisceaux cohérents et complexes bornés de fibrés vectoriels) sur X. On se réfèrera à [Huy06] pour une introduction au langage des catégories dérivées.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, alors on note $f_* = \mathbf{R}f_* : \mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(Y)$ (respectivement $f^* = \mathbf{L}f^* : \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(Y)$ et $f^! : \mathrm{D}(Y) \to \mathrm{D}(X)$) l'image directe dérivée (respectivement l'image inverse dérivée et l'adjoint à droite de $\mathbf{R}f_*$, s'il existe). On rappelle que si f est propre alors f_* envoie les complexes bornés de faisceaux cohérents sur X vers des complexes bornés de faisceaux cohérents sur Y (voir [Gro61], section 3.2.1). Toujours sous l'hypothèse de propreté pour f, si en plus on suppose X et Y quasi-compacts, on peut montrer l'existence de $f^!$ et pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Y)$, on a :

$$f^!\mathscr{F} = f^*\mathscr{F} \otimes f^!\mathscr{O}_Y,$$

où $\otimes$ désigne le produit tensoriel dérivé. L'objet $f^!\mathscr{O}_Y$ est appelé *complexe dualisant* pour f (voir [Har66] ou [Nee96] pour une approche très élégante). Finalement, nous dirons que f a *Tor-dimension finie* si f^* envoie les complexes bornés de faisceaux cohérents sur Y vers des complexes bornés de faisceaux cohérents sur X.

1.1 Décompositions semi-orthogonales et décompostions de Lefschetz

Dans cette section, on rappelle la notion de décomposition semi-orthogonale. On discutera aussi des décompositions de Lefschetz : ce sont des décompositions semi-orthogonales particulièrement bien adaptées à l'étude d'un (ou plusieurs) fibré en droites prescrit sur le schéma X. Toutes les sous-catégories de $\mathrm{D^b}(X)$ que l'on considère sont triangulées. Si $\delta : \mathscr{A} \hookrightarrow \mathrm{D^b}(X)$ est une sous-catégorie pleine, on dit que $\mathscr{A}$ est *admissible* si δ admet des adjoints à droite et à gauche (que l'on notera alors $\delta^!$ et δ^*). On se réfèrera à [Kuz08b], section 2 pour plus de détails sur les décompositions semi-orthogonales et les décompositions de Lefschetz.

Définition 1.1.1. Soit $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ des sous-catégories pleines de $\mathrm{D^b}(X)$. On dit que l'on a une *décomposition semi-orthogonale* de $\mathrm{D^b}(X)$ par les $\mathscr{A}_i$, que l'on note :

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n \rangle,$$

si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- pour tout $j > i$, pour tout $\mathscr{F} \in \mathscr{A}_i$ et pour tout $\mathscr{G} \in \mathscr{A}_j$ on a $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{F}) = 0$,
- pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D^b}(X)$, il existe une suite longue de triangles :

$$\begin{tikzcd}
0 = \mathscr{F}_n \arrow[rr] & & \mathscr{F}_{n-1} \arrow[dl] & \cdots \mathscr{F}_{k+1} \arrow[rr] & & \mathscr{F}_k \arrow[dl] & \cdots & \mathscr{F}_1 \arrow[rr] & & \mathscr{F}_0 = \mathscr{F} \arrow[dl] \\
& A_n \arrow[ul] & \cdots & & A_{k+1} \arrow[ul] & \cdots & & & A_1 \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

avec $A_k \in \mathscr{A}_k$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

On notera que les A_k sont uniques à quasi-isomorphisme près. Soit $\mathscr{A} \subset \mathrm{D^b}(X)$ une sous-catégorie pleine. On appelle *orthogonal à droite* (respectivement à *gauche*) de $\mathscr{A}$, que l'on note $\mathscr{A}^\perp$ (respectivement ${}^\perp\mathscr{A}$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D^b}(X)$ définie par :

$$\mathscr{A}^\perp = \{\mathscr{F} \in \mathrm{D^b}(X),\ \mathrm{Hom}(A, \mathscr{F}) = 0 \text{ pour tout } A \in \mathscr{A}\},$$

(respectivement ${}^\perp\mathscr{A} = \{\mathscr{F} \in \mathrm{D^b}(X),\ \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, A) = 0 \text{ pour tout } A \in \mathscr{A}\}$).

La proposition suivante fait le lien entre admissibilité pour une sous-catégorie pleine $\mathscr{A} \subset \mathrm{D^b}(X)$ et décompositions semi-orthogonales de $\mathrm{D^b}(X)$ en fonction de $\mathscr{A}$.

Proposition 1.1.2. *Soit $\delta : \mathscr{A} \subset \mathrm{D^b}(X)$ une sous-catégorie pleine de $\mathrm{D^b}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *$\mathscr{A}$ est admissible dans X,*
- *on a les décompositions semi-orthogonales $\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}, {}^\perp\mathscr{A} \rangle$ et $\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}^\perp, \mathscr{A} \rangle$.*

Démonstration. Supposons $\mathscr{A}$ admissible, alors par définition, δ admet des adjoints à gauche et à droite, notés δ^* et $\delta^!$. Soit $\mathscr{F} \in \mathrm{D^b}(X)$, par adjonction, on a une flèche naturelle $\delta\delta^*\mathscr{F} \to \mathscr{F}$. On complète cette flèche en un triangle exact dans $\mathrm{D^b}(X)$:

$$\delta\delta^!\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G}.$$

Mais pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(\delta A, \delta\delta^!\mathscr{F}) \\ =&\mathrm{Hom}(A, \delta^!\mathscr{F}) \\ =&\mathrm{Hom}(\delta A, \mathscr{F}). \end{aligned}$$

En utilisant le triangle exact ci-dessus, on voit que $\mathrm{Hom}(A, \mathscr{G}) = 0$ pour tout $A \in \mathscr{A}$ et donc $\mathscr{G} \in \mathscr{A}^\perp$. D'où la décomposition $\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}^\perp, \mathscr{A} \rangle$. La décomposition $\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}, {}^\perp\mathscr{A} \rangle$ est démontrée de manière analogue.

Suposons maintenant que l'on a des décompositions $\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}, {}^\perp\mathscr{A} \rangle$. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D^b}(X)$, il existe un unique triangle :

$$\mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{G},$$

avec $\mathscr{F}' \in {}^\perp\mathscr{A}$ et $\mathscr{G} \in \mathscr{A}$. Maintenant on vérifie que l'application $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ est un foncteur exact de $\mathrm{D^b}(X)$ vers $\mathscr{A}$ et que c'est un adjoint à gauche pour $\delta : \mathscr{A} \to \mathrm{D^b}(X)$. La construction de l'adjoint à droite pour δ est similaire en utilisant la décomposition $\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}^\perp, \mathscr{A} \rangle$.

□

Remarque 1.1.3. Notons que si $\mathrm{D^b}(X)$ admet un foncteur de Serre (par exemple si X est projective) alors une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}, {}^\perp\mathscr{A} \rangle$$

donne lieu à une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}^\perp, \mathscr{A} \rangle$$

et réciproquement. Ainsi, pour montrer qu'une sous-catégorie pleine $\mathscr{A} \subset \mathrm{D^b}(X)$ est admissible, il suffit de vérifier que l'on a une décomposition $\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}^\perp, \mathscr{A} \rangle$.

Les décompositions semi-orthogonales sont particulièrement utiles si elles peuvent être reliées à des données géométriques sur X. Les *décompositions de Lefschetz* introduites par Kuznetsov ([Kuz07]) satisfont à cette exigence et elle seront donc omniprésentes dans cette thèse.

Définition 1.1.4. Soit L un fibré en droites sur X. Une *décomposition de Lefschetz* de $\mathrm{D^b}(X)$ par rapport à L est une décomposition semi-orthogonale :

$$\langle \mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1 \otimes L \ldots, \mathscr{A}_m \otimes L^{\otimes m} \rangle$$

où les $\mathscr{A}_i$ sont des sous-catégories pleines et admissibles de $\mathrm{D^b}(X)$ satisfaisant $\mathscr{A}_m \subset \ldots \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_0$.

Une *décomposition de Lefschetz duale* de $\mathrm{D^b}(X)$ par rapport à L est une décomposition semi-orthogonale :

$$\langle \mathscr{A}_m \otimes L^{\otimes -m}, \ldots, \mathscr{A}_1 \otimes L^{\otimes -1}, \mathscr{A}_0 \rangle,$$

où les $\mathscr{A}_i$ sont des sous-catégories pleines et admissibles de $\mathrm{D^b}(X)$ satisfaisant $\mathscr{A}_m \subset \ldots \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_0$.

Dans la définition ci-dessus, la notation $\mathscr{A}_i \otimes L^{\otimes i}$ désigne la sous-catégorie pleine et admissible engendrée par les objets $A_i \otimes L^{\otimes i}$, pour $A_i \in \mathscr{A}_i$.

Exemple 1.1.5.

– Soit $X = \mathrm{G}(2, n)$ la grassmannienne des plans dans un espace vectoriel de dimension n. On note $\mathscr{R}$ le fibré tautologique de rang 2 sur X et $\mathscr{O}_X(1)$ le fibré très ample du plongement de Plücker. Alors on une décomposition de Lefschetz de $\mathrm{D^b}(X)$ par rapport à $\mathscr{O}_X(1)$ ([Kuz06a], section 2.4) :

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_X(1) \ldots \mathscr{A}_{n-1} \otimes \mathscr{O}_X(n-1) \rangle,$$

avec

$$\begin{aligned}
&\mathscr{A}_0 = \ldots = \mathscr{A}_{n-1} = \langle S^{k-1}\mathscr{R}, \ldots, \mathscr{R}, \mathscr{O}_X \rangle \text{ si } n = 2k+1,\\
&\mathscr{A}_0 = \ldots \mathscr{A}_{k-1} = \langle S^{k-1}\mathscr{R}, \ldots, \mathscr{R}, \mathscr{O}_X \rangle \text{ et}\\
&\mathscr{A}_k = \ldots = \mathscr{A}_{2k-1} = \langle S^{k-2}\mathscr{R}, \ldots, \mathscr{R}, \mathscr{O}_X \rangle \text{ si } n = 2k.
\end{aligned}$$

– Soit $X = \mathrm{E}_6/\mathrm{P}_1 \subset \mathbb{P}^{26}$ le plan de Cayley et soit $\mathscr{O}_X(1)$ le fibré très ample du plongement dans $\mathbb{P}^{26}$. Alors on a une décomposition de Lefschetz de $\mathrm{D^b}(X)$ par rapport à $\mathscr{O}_X(1)$ ([FM12]) :

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle \mathscr{A}, \mathscr{A}(1), \mathscr{A}(2), \mathscr{B}(3), \mathscr{B}(4), \ldots, \mathscr{B}(11) \rangle$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \{\mathscr{E}^*_{2\omega_6}, \mathscr{E}^*_{\omega_6}, \mathscr{O}_X\}\\
\mathscr{B} &= \{\mathscr{E}^*_{\omega_6}, \mathscr{O}_X\},
\end{aligned}$$

où $\mathscr{E}_{2\omega_6}$ et $\mathscr{E}_{\omega_6}$ sont les fibrés vectoriels homogènes sur X associés aux poids dominants $2\omega_6$ et ω_6 du système de racines E_6 (on se rapportera à [FM12] pour des définitions précises).

Si on connaît une décomposition de Lefschetz (duale) sur un diviseur de Cartier de X par rapport à son fibré normal, alors une partie non-triviale de cette décomposition se transfère dans $\mathrm{D^b}(X)$. On peut voir ce résultat comme un analogue catégorique du Théorème faible de Lefschetz pour la cohomologie à coefficients entiers d'une variété projective lisse.

Proposition 1.1.6. *Soit X une variété telle que $\mathrm{D^b}(X)$ admet un foncteur de Serre et soit $i : E \hookrightarrow X$ un diviseur de Cartier. Supposons que l'on ait une décomposition de Lefschetz duale de $\mathrm{D^b}(E)$ par rapport à $\mathscr{O}_E(-E)$:*

$$\mathrm{D^b}(E) = \langle \mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE), \ldots, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E), \mathscr{A}_0 \rangle.$$

Alors on a une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D^b}(X) = \langle i_*(\mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE)), \ldots, i_*(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E)), \mathscr{D}_X \rangle,$$

où $\mathscr{D}_X = \{\mathscr{F} \in \mathrm{D^b}(X), i^*\mathscr{F} \in \mathscr{A}_0\}$ est une sous-catégorie admissible de $\mathrm{D^b}(X)$.

Démonstration. Le foncteur $i_* : \mathrm{D^b}(E) \to \mathrm{D^b}(X)$ n'est pas pleinement fidèle, mais on va montrer que sa restriction aux sous-catégories $\mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE)$ est pleinement fidèle pour $1 \leq k \leq m$. On rappelle que pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D^b}(E)$, on a un triangle exact ([Huy06], Corollary 11.4) :

$$i^* i_* \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_E(-E)[2].$$

Dès lors, soit $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE)$, pour $1 \leq k \leq m$. On a :

$$\mathrm{Hom}(i_*\mathscr{F}, i_*\mathscr{G}) = \mathrm{Hom}(i^* i_* \mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

Mais par hypothèse $\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_E(-E)[2] \in \mathscr{A}_{k-1} \otimes \mathscr{O}_E((k-1)E)$, donc $\mathrm{Hom}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_E(-E)[2], \mathscr{G}) = 0$. Le triangle exact ci-dessus évoqué permet donc de conclure que :

$$\mathrm{Hom}(i_*\mathscr{F}, i_*\mathscr{G}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

Ceci prouve que pour tout $1 \leq k \leq m$, les catégories $i_*(\mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE))$ sont des sous-catégories pleines de $\mathrm{D^b}(X)$. De plus, les catégories $\mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE)$ sont admissibles dans $\mathrm{D^b}(E)$ et i_* admet des adjoints à gauche et à doite, donc les $i_*(\mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE))$ sont admissibles dans $\mathrm{D^b}(X)$.

Un raisonnement similaire montre que l'on a :

$$\mathrm{Hom}(i_*\mathscr{F}, i_*\mathscr{G}) = 0,$$

pour $\mathscr{F} \in \mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE)$, $\mathscr{G} \in \mathscr{A}_l \otimes \mathscr{O}_E(lE)$ et $1 \leq k < l \leq m$. On en conclut que pour $1 \leq k \leq m$, les $i_*(\mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE))$ sont orthogonales les unes aux autres. Si on définit :

$$\mathscr{D}_X = {}^{\perp}\langle i_*(\mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE)), \ldots, i_*(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E)) \rangle,$$

alors d'après la proposition 1.1.2, on a une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) = \langle i_*(\mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE)), \ldots, i_*(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E)), \mathscr{D}_X \rangle.$$

Il reste à vérifier que $\mathscr{D}_X = \{\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X),\, i^*\mathscr{F} \in \mathscr{A}_0\}$ et que $\mathscr{D}_X$ est admissible dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$. L'égalité $\mathscr{D}_X = \{\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X),\, i^*\mathscr{F} \in \mathscr{A}_0\}$ est une conséquence évidente de la décomposition :

$$\mathscr{A}_0 = {}^{\perp}\langle \mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE), \ldots, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E) \rangle,$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$. Finalement, la sous-catégorie $\mathscr{D}_X$ est bien admissible, car $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ possède un foncteur de Serre. □

1.2 Résolutions catégoriques crépantes des singularités

1.2.1 Résolutions géométriques crépantes et équivalences de catégories

Si X est une variété singulière, la théorème de Hironaka ([Hir64]) assure l'existence d'un modèle lisse de X. Malheureusement, on ne sait pas construire de résolution "minimale" de X. Si X est de Gorenstein et normale alors il existe une notion de minimalité liée aux coefficients qui apparaissent devant les diviseurs exceptionnels de la résolution dans la formule de transformation du fibré dualisant.

Notation 1.2.1. Pour une variété X normale et Gorenstein, on notera ω_X son fibré dualisant.

Définition 1.2.2. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X. On dit que π est *crépante* si $\pi^*\omega_X = \omega_{\tilde{X}}$.

La proposition suivante montre que les résolutions crépantes sont intéressantes du point de vue de la minimalité :

Proposition 1.2.3. *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution crépante. Soit $\pi' : \tilde{X} \to X$ une autre résolution telle qu'il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\pi"'] & \tilde{X}' \arrow[d, "\pi'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Alors on a $\tilde{X} \simeq \tilde{X}'$.

Démonstration. Comme le diagramme commute, on a $q^*\pi'^*\omega_X = \pi^*\omega_X = \omega_{\tilde{X}}$. La résolution $\tilde{X} \to X$ est crépante, donc la variété X a des singularités canoniques ([Deb01], section 7.14). On en déduit qu'il existe des entiers positifs ou nuls $a_1, \ldots, a_m$, tels que :

$$\omega_{\tilde{X}'} = \pi'^*\omega_X \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}'}(\sum_{i=1}^{m} a_i E'_i),$$

où les E'_i sont les diviseurs exceptionnels (réduits) de π'. De même, comme $\tilde{X}$ est lisse, il existe des entiers strictement positifs $b_1, \ldots, b_l$ tels que :

$$\omega_{\tilde{X}} = q^*\omega_{\tilde{X}'} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(\sum_{i=1}^{l} b_i F_i),$$

où les F_i sont les diviseurs exceptionnels (réduits) de q. On a donc :

$$\omega_{\tilde{X}} = q^*\pi'^*\omega_X \otimes q^*\mathscr{O}_{\tilde{X}'}(\sum_{i=1}^{m} a_i E_i) \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(\sum_{i=1}^{l} b_i F_i).$$

Mais les b_i sont strictement positifs et par hypothèse $q^*\pi'^*\omega_X = \omega_{\tilde{X}}$, ainsi les F_i sont tous nuls. Le lieu exceptionnel de q est donc de codimension supérieure ou égale à 2, mais comme $\tilde{X}'$ est lisse, cela implique que q est un isomorphisme ([Deb01], 1.40).

□

Les résolutions crépantes de X sont donc minimales dans un sens faible : elles sont isomorphes à toutes les résolutions de X qu'elles dominent. Bondal et Orlov conjecturent ([BO02]) que les résolutions crépantes sont minimales dans un sens très fort :

Conjecture 1.2.4 (Bondal-Orlov)**.** *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution crépante de X. Alors pour toute autre résolution $\tilde{X}' \to X$, il existe un plongement pleinement fidèle :*

$$\mathrm{D^b}(\tilde{X}) \hookrightarrow \mathrm{D^b}(\tilde{X}').$$

Le point difficile dans cette conjecture est d'identifier un foncteur qui donne un tel plongement. Un cas particulier d'icelle concerne la situation où les deux résolutions sont crépantes :

Conjecture 1.2.5 (Bondal-Orlov)**.** *Soient $\pi_1 : \tilde{X}_1 \to X$ et $\pi_2 : \tilde{X}_2 \to X$ deux résolutions crépantes de X. Alors il existe une équivalence de catégories :*

$$\mathrm{D^b}(\tilde{X}_1) \simeq \mathrm{D^b}(\tilde{X}_2).$$

Encore une fois, le point crucial est d'identifier un foncteur qui donne une telle équivalence. Dans des cas très simples (flops de Mukai et flops d'Atiyah, [Nam03]), le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\
\tilde{X}_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

donne bien lieu à une équivalence $\mathbf{R}p_*\mathbf{L}q^* : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}_1) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}_2)$. Malheureusement, ce foncteur n'est pas toujours pleinement fidèle, même si les catégories $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}_1)$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}_2)$ sont équivalentes. ([Nam04], [Kaw06]).

Bien qu'aucun résultat vraiment éclairant n'ait été obtenu pour cette conjecure au delà de la dimension 3 (voir [Bri02] pour la dimension 3), les résolutions crépantes semblent posséder des propriétés catégoriques de minimalité très intéressantes. L'expérience montre cependant que les résolutions crépantes sont rares.

Proposition 1.2.6. *Soit X le cône affine au dessus de $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$. Alors X n'admet pas de résolution crépante.*

On notera qu'un cône au dessus de $v_2(\mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^m)$ est Gorenstein si et seulement si m est impair ([Wey03], corollaire 6.3.7).

Démonstration. Le cône X est à singularités rationnelles par [Wey03], corollaire 6.3.7. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X en son sommet et soit $E \simeq \mathbb{P}^3$ le diviseur exceptionnel. On a :

$$\omega_{\tilde{X}} = \pi^*\omega_X \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE),$$

pour un certain $m \in \mathbb{Z}$. On notera que $\mathscr{O}_E(-E) \simeq \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$. En appliquant la formule d'adjonction à E, on trouve :

$$\omega_{\mathbb{P}^3} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2m-2).$$

On en déduit que $m = 1$ et donc que X a des singularités terminales ([Deb01], 7.14). Ainsi, pour trouver une résolution crépante de X, il faut trouver une résolution de X dont le lieu exceptionnel a codimension supérieure ou égale

à 2. On va prouver que c'est impossible en démontrant que X est normale et $\mathbb{Q}$-factorielle ([Deb01], 1.40).

On sait déjà que X est normale car elle est à singularités rationnelles. Il reste à prouver qu'elle est $\mathbb{Q}$-factorielle. Or, on peut voir X comme le quotient de $\mathbb{C}^4$ par $\{id, -id\}$, elle est donc $\mathbb{Q}$-factorielle (voir [KM98], 5.15). $\square$

1.2.2 Diverses notions de crépance au niveau catégorique

Nous voilà donc confronté à un problème intéressant : l'une des singularités les plus simples que l'on rencontre en théorie des représentations (un cône au dessus de $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$ peut se voir comme la variété des endomorphismes symétriques de $\mathbb{C}^4$ qui ont rang inférieur ou égal à 1) n'admet pas de résolution crépante.

On peut alors essayer de trouver une résolution "minimale" de X parmi les résolutions non-commutatives de X. La notion de résolution *non-commutative* apparait dans [VdB04] et [BO02]. Nous ne rappellerons pas ici les définitions données dans ces travaux car nous ne nous en servirons pas. Plus récemment, Kuznetsov a formalisé la notion de résolution catégorique et de résolution catégorique crépante [Kuz08b]. C'est celles-ci que nous utiliserons tout le long de cette thèse.

Mise en garde 1.2.7. A partir de maintenant, on supposera systématiquement que X est de Gorenstein à singularités rationnelles.

Définition 1.2.8. Une *résolution catégorique des singularités* de X est une catégorie triangulée $\mathscr{T}$ avec un foncteur $\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ vérifiant les points suivants :

- il existe une résolution des singularités $\pi : \tilde{X} \to X$ et un foncteur pleinement fidèle $\delta : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ tel que $\pi_{\mathscr{T}*} = \pi_* \circ \delta$,
- il existe des foncteurs $\pi^*_{\mathscr{T}} : \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \to \mathscr{T}$ et $\pi^!_{\mathscr{T}} : \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \to \mathscr{T}$ qui sont respectivement adjoints à gauche et à droite pour $\pi_{\mathscr{T}*}$,
- pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a :

$$\pi_{\mathscr{T}*}\pi^*_{\mathscr{T}}\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}.$$

Si de plus, on a un quasi-isomorphisme :

$$\pi^*_{\mathscr{T}}\mathscr{F} \simeq \pi^!_{\mathscr{T}}\mathscr{F},$$

pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ (où $\pi^!_{\mathscr{T}}$ est l'adjoint à droite de $\pi_{\mathscr{T}*}$), alors on dira que $\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ est une *resolution catégorique faiblement crépante.*

Kuznetsov ([Kuz08b]) a aussi développé une notion de résolution catégorique fortement crépante. Nous la présentons dans le cas où X est projective. Nous avons tout d'abord besoin de la notion de *catégorie module.*

Définition 1.2.9. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés et soit $\delta : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ une sous-catégorie admissible. On dit que $\mathscr{T}$ est une *catégorie module* au-dessus de X, si pour tout $\mathscr{F} \in \mathscr{T}$ et pour tout $\mathscr{G} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a $(\delta\mathscr{F}) \otimes f^*\mathscr{G} \in \delta(\mathscr{T})$.

Définition 1.2.10. Supposons X projective. Une *résolution catégorique fortement crépante des singularités* de X est une résolution catégorique des singularités $\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ telle que :

- il existe une résolution des singularités $\pi : \tilde{X} \to X$ et un foncteur $\delta : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ tels que $\pi_{\mathscr{T}*} = \pi_* \circ \delta$ et que $\mathscr{T}$ soit une catégorie module au-dessus X,
- pour tout $\mathscr{F} \in \mathscr{T}$, on a :

$$\delta S_{\mathscr{T}}(\mathscr{F}) \simeq \delta\mathscr{F} \otimes \pi^*\omega_X[\dim X],$$

  où $S_{\mathscr{T}}$ est un foncteur de Serre pour $\mathscr{T}$.

On rappelle que si $\mathscr{T}$ est une sous-catégorie admissible d'une catégorie munie d'un foncteur de Serre alors $\mathscr{T}$ admet aussi un foncteur de Serre. Notons aussi que si $\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ est une résolution catégorique fortement crépante alors c'est une résolution faiblement crépante. La réciproque est fausse ([Kuz08b], section 7).

Dans la suite, nous étudierons principalement la notion de résolution catégorique faiblement crépante. Il semble en effet beaucoup plus facile de construire des résolutions catégoriques faiblement crépantes que des résolutions catégoriques fortement crépantes. On se reportera notamment à [Kuz08b], section 8. Des résolutions catégoriques faiblement crépantes y sont construites pour les variétés de matrices anti-symétriques de rang ≤ 4 dans un espace vectoriel V de rang ≥ 6. L'existence de résolutions fortement crépantes pour de telles pfaffiennes semble toutefois dépendre de la parité de $\dim V$. Nous reviendrons un peu plus tard sur les résolutions catégoriques fortement crépantes des singularités car elles présentent des propriétés de minimalité tout à fait analogues aux résolutions géométriques crépantes. Ces propriétés ne se manifestent malheureusement pas pour des résolutions faiblement crépantes quelconques.

Mise en garde 1.2.11. Dans la suite, nous appellerons *résolution catégorique crépante* une résolution catégorique faiblement crépante.

Notons que la définition de résolution catégorique crépante est assez robuste, comme le montre la proposition suivante ([Abu], proposition 1.1.3).

Proposition 1.2.12. *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution crépante des singularités. Alors $\pi_* : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ est une résolution catégorique crépante des singularités.*

Réciproquement, soit $\pi : \tilde{X} \to X$ un morphisme propre de variétés algébriques de Gorenstein. Supposons que $\pi_* : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ est une résolution catégorique crépante, alors $\pi : \tilde{X} \to X$ est une résolution crépante des singularités.

Démonstration. Supposons que $\pi : \tilde{X} \to X$ est une résolution crépante de X. Alors on a $\omega_{\tilde{X}} = \pi^*\omega_X$. Ceci implique :

$$\pi^!\mathscr{F} \simeq \pi^*\mathscr{F},$$

pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. De plus, X a des singularités rationnelles par hypothèse, donc :

$$\pi_*\pi^*\mathscr{F} \simeq \mathscr{F},$$

pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Enfin $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ est lisse car $\tilde{X}$ est lisse.

Passons à la réciproque. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ un morphisme propre et supposons que $\pi_* : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ est une résolution catégorique crépante de X. Notons tout d'abord que $\tilde{X}$ est lisse car $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ est Ext-bornée (d'après la définition 1.2.8). De plus, pour tout x dans le lieu lisse de X on a :

$$\pi_*\pi^*\mathbb{C}[x] \simeq \mathbb{C}[x],$$

où $\mathbb{C}[x]$ est le faisceau structural du point $x \in X$. Ceci implique que π est dominant. Mais π est propre, il est donc surjectif.

Comme X et $\tilde{X}$ sont de Gorenstein et π est propre, on a ([Nee96]) :

$$\pi^!\mathscr{F} = \pi^*\mathscr{F} \otimes \omega_{\tilde{X}} \otimes \pi^*(\omega_X)^{-1}[\dim \tilde{X} - \dim X].$$

Ainsi $\omega_{\tilde{X}} = \pi^*\omega_X$ et $\dim \tilde{X} = \dim X$. Le morphisme π est surjectif, donc l'égalité $\dim \tilde{X} = \dim X$ impose que π est génériquement fini. De plus on a $\pi_*\mathscr{O}_{\tilde{X}} = \mathscr{O}_X$ et X est normale donc c'est un morphisme birationnel. On a bien prouvé que $\pi : \tilde{X} \to X$ est une résolution crépante des singularités.

□

Le résultat suivant donne un procédé très concret pour construire des résolutions catégoriques crépantes. C'est probablement le résultat principal de [Kuz08b].

Théorème 1.2.13. *Soit X une variété projective de Gorenstein à singularités rationnelles et soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X. Soit E le diviseur exceptionnel schématique de π. Supposons qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $\omega_{\tilde{X}} = \pi^*\omega_X \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE)$. Supposons de plus que $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$ admette une décomposition de Lefschetz duale par rapport à $\mathscr{O}_E(-E)$:*

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E) = \langle \mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE), \ldots, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E), \mathscr{A}_0 \rangle,$$

telle que $\tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Z) \subset \mathscr{A}_m$*, où* Z *est l'image directe schématique de* E *par* Z *et* $\tilde{\pi}$ *la restriction de* π *à* E*. Alors* X *admet une résolution catégorique crépante.*

Si en outre $\mathscr{A}_m$ *est une catégorie module pour* Z *et la décomposition de* $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$ *est rectangulaire (c'est à dire* $\mathscr{A}_m = \ldots = \mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_0$*), alors* X *admet une résolution catégorique fortement crépante.*

L'objectif premier de cette thèse est d'obtenir des généralisations de ce résultat. Elle seront énoncées et démontrées dans les chapitres 2 et 3 de ce texte. Nous présentons ici la preuve de Kuznetsov ([Kuz08b]) du théorème 1.2.13 : cela nous donnera un aperçu des méthodes que nous utiliserons aux chapitres 2 et 3.

Démonstration. Le diagramme commutatif ci-dessous résume les notations dont nous aurons besoin :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, hook, "j"] & X \end{tikzcd}$$

Supposons que $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$ admette une décomposition de Lefschetz :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E) = \langle \mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE), \ldots, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E), \mathscr{A}_0 \rangle,$$

avec $\tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Z) \subset \mathscr{A}_m$. Alors d'après la proposition 1.1.6, on a une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) = \langle i_*(\mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE)), \ldots, i_*(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E)), \mathscr{D}_{\tilde{X}} \rangle,$$

où $\mathscr{D}_{\tilde{X}} = \{\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}),\, i^*\mathscr{F} \in \mathscr{A}_0\}$ est une sous-catégorie admissible de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$. Notons $\delta : \mathscr{D}_{\tilde{X}} \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ le plongement, $\delta^*, \delta^!$ ses adjoints à gauche et à droite et $\pi_{\mathscr{D}*} = \pi_* \circ \delta : \mathscr{D}_{\tilde{X}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$. On va montrer que $\pi_{\mathscr{D}*} : \mathscr{D}_{\tilde{X}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ est une résolution catégorique crépante des singularités pour X.

Tout d'abord, la sous-catégorie $\delta : \mathscr{D}_{\tilde{X}} \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ est admissible et $\tilde{X}$ est une résolution des singularités de X. Le premier point de la définition 1.2.8 est donc vérifié.

Ensuite, pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a $i^*\pi^*\mathscr{F} = \tilde{\pi}^*j^*\mathscr{F} \subset \tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Z)$. Mais par hypothèse $\tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Z) \subset \mathscr{A}_m \subset \mathscr{A}_0$, donc pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$

on a $\pi^*\mathscr{F} \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}$. Dès lors, d'après la proposition 1.1.2, on a $\delta\delta^*\pi^*\mathscr{F} = \pi^*\mathscr{F}$ pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Or X est à singularités rationnelles, d'où $\pi_*\pi^*\mathscr{F} = \mathscr{F}$ pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ et on en déduit :

$$\pi_{\mathscr{D}*}\pi^*_{\mathscr{D}}\mathscr{F} = \mathscr{F}.$$

Il rete donc à démontrer que $\pi^*_{\mathscr{D}}\mathscr{F} = \pi^!_{\mathscr{D}}\mathscr{F}$, pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. On va montrer que :

$$\delta\delta^!\pi^!\mathscr{F} = \pi^*\mathscr{F},$$

c'est à dire :

$$\delta\delta^!\left(\pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE)\right) = \pi^*\mathscr{F}.$$

Pour tout $1 \leq k \leq m$, on a des suites exactes :

$$0 \to \mathscr{O}_{\tilde{X}}((k-1)E) \to \mathscr{O}_{\tilde{X}}(kE) \to i_*\mathscr{O}_E(kE) \to 0.$$

En tensorisant ces suites exactes par $\pi^*\mathscr{F}$, on obtient des triangles exacts :

$$\mathscr{O}_{\tilde{X}}((k-1)E) \otimes \pi^*\mathscr{F} \to \mathscr{O}_{\tilde{X}}(kE) \otimes \pi^*\mathscr{F} \to i_*\left(\mathscr{O}_E(kE) \otimes i^*\pi^*\mathscr{F}\right).$$

En composant ces triangles, on obtient une suite longue de triangles exacts :

$$\begin{tikzcd}
\pi^*(\mathscr{F}) \arrow[rr] & & \alpha_1 \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \alpha_k \arrow[rr] & & \alpha_{k+1} \arrow[dl] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \alpha_{m-1} \arrow[rr] & & \alpha_m \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul] & \cdots & & A_{k+1} \arrow[ul] & \cdots & & & A_m \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

avec $\alpha_k = \mathscr{O}_{\tilde{X}}(kE) \otimes \pi^*\mathscr{F}$ et $A_k = i_*\left(\mathscr{O}_E(kE) \otimes i^*\pi^*\mathscr{F}\right)$. Notons que $A_k \in i_*(\mathscr{A}_k \otimes \mathscr{O}_E(kE)$, car $i^*\pi^*\mathscr{F} = \tilde{\pi}^*j^*\mathscr{F} \in \tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Z) \subset \mathscr{A}_k$. La suite longue de triangles ci-dessus nous permet donc de conclure que $\pi^*\mathscr{F}$ est la $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$-composante de $\pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE)$ dans la décomposition :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) = \langle i_*(\mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE)), \ldots, i_*(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E)), \mathscr{D}_{\tilde{X}}\rangle.$$

D'après la proposition 1.1.2, on a donc :

$$\delta\delta^!\left(\pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE)\right) = \pi^*\mathscr{F}.$$

Passons au second point du théorème. On veut prouver que si $\mathscr{A}_m$ est une catégorie module pour Z et si $\mathscr{A}_0 = \cdots = \mathscr{A}_m$ alors $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$ est une résolution catégorique fortement crépante de X. On va tout d'abord montrer que $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$ a une structure de catégorie module pour X. Soient $\mathscr{F} \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}$ et $\mathscr{G} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. On a $i^*(\mathscr{F} \otimes \pi^*\mathscr{G}) = i^*\mathscr{F} \otimes \tilde{\pi}^*j^*\mathscr{G}$. Ainsi $i^*(\mathscr{F} \otimes \pi^*\mathscr{G}) \in \mathscr{A}_0$ car $i^*\mathscr{F} \in \mathscr{A}_0$ et $\mathscr{A}_0$ a une structure de catégorie module pour Z.

Soit $S_{\mathscr{D}}$ le foncteur de Serre de $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$. Montrons que :

$$\delta S_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}) = \delta(\mathscr{F}) \otimes \pi^*\omega_X[\dim X],$$

pour tout $\mathscr{F} \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}$. On sait que $S_{\tilde{X}}(\bullet) = \bullet \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE) \otimes \pi^*\omega_X[\dim X]$ est le foncteur de Serre de $\mathrm{D^b}(\tilde{X})$, donc $\delta^! S_{\tilde{X}}\delta(\bullet) = S_{\mathscr{D}}(\bullet)$ (voir [Kuz08b], proposition 4.7). Soit $\mathscr{F} \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}$, on a :

$$S_{\mathscr{D}}(\mathscr{F}) = \delta^! S_{\tilde{X}}\delta(\mathscr{F}) = \delta^!\left(\delta(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE) \otimes \pi^*\omega_X[\dim X]\right).$$

Mais $\mathscr{A}_0 = \ldots \mathscr{A}_m$, donc $i^*\delta\mathscr{F} \in \mathscr{A}_k$ pour tout $1 \leq k \leq m$. Ainsi le même raisonnement que dans la preuve de la crépance de $\mathscr{D}_{\tilde{X}}$ montre que :

$$\delta(S_{\mathscr{D}}(\mathscr{F})) = \delta\delta^!\left(\delta(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(mE) \otimes \pi^*\omega_X[\dim X]\right) = \delta(\mathscr{F}) \otimes \pi^*\omega_X[\dim X],$$

ce qui conclut la preuve de ce théorème.

□

Voici un corollaire marquant de 1.2.13 :

Corollaire 1.2.14. *Soit X le cône (projectif) au dessus de $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$. La variété X admet une résolution catégorique fortement crépante.*

Démonstration. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X en son sommet et soit E le diviseur exceptionnel de cet éclatement. On a vu que $\omega_{\tilde{X}} = \pi^*\omega_X \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(E)$. D'après le Théorème 1.2.13, il suffit donc de démontrer que $\mathrm{D^b}(E)$ admet une décomposition de Lefschetz duale rectangulaire de longueur $m = 1$ par rapport à $\mathscr{O}_E(-E)$. Mais $E \simeq \mathbb{P}^3$ et $\mathscr{O}_E(-E) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$. Or on sait ([Beĭ84]) que $\mathrm{D^b}(\mathbb{P}^3)$ admet une décomposition de Lefschetz duale :

$$\mathrm{D^b}(\mathbb{P}^3) = \langle \mathscr{A} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2), \mathscr{A} \rangle,$$

avec $\mathscr{A} = \langle \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \rangle$. Ceci conclut la preuve du corollaire. □

Une preuve tout à fait similaire montre en fait que pour tout n impair supérieur ou égal à 3, le cône projectif au dessus de $v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^{n+1})$ admet un résolution catégorique fortement crépante.

1.3 Minimalité des résolutions catégoriques crépantes

Dans cette section, on discute d'éventuelles propriétés de minimalité des résolutions catégoriques crépantes.

1.3.1 Composantes connexes d'une catégorie

On va commencer par quelques notions de décomposition en composantes connexes d'une catégorie triangulée.

Définition 1.3.1. Soit $f : Y \to X$ un morphisme propre de variétés algébriques. Soit $\mathscr{T} \subset \mathrm{D^b}(Y)$ une sous-catégorie admissible ayant une structure de catégorie module au-dessus de X. On dit que $\mathscr{T}$ est *connexe par rapport à* X, si pour toute décomposition totalement orthogonale :

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_1 \oplus \mathscr{T}_2,$$

avec $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ des catégories modules au-dessus de X, on a $\mathscr{T}_1 = 0$ ou $\mathscr{T}_2 = 0$.

Une *décomposition en composantes connexes par rapport à* X est une décomposition :

$$\mathscr{T} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{T}_i,$$

où les $\mathscr{T}_i$ sont des catégories non nulles connexes par rapport à X.

Le résultat de finitude ci-dessous nous sera fort utile.

Proposition 1.3.2. *Soit Y une variété projective et lisse et soit $\mathscr{T} \subset \mathrm{D^b}(Y)$ une sous-catégorie admissible. Alors toute décomposition :*

$$\mathscr{T} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{T}_i,$$

où $\mathscr{T}_i \neq 0$ pour tout i porte nécessairement sur un ensemble I qui est fini.

Démonstration. Comme Y est projective et lisse, la category $\mathrm{D^b}(Y)$ admet un objet generateur, disons P (voir [Orl09]). Soit

$$P = \oplus_{i \in I} P_i$$

la décomposition de P selon les $\mathscr{T}_i$. Comme P est générateur pour $\mathrm{D^b}(Y)$, l'objet P_i est générateur pour $\mathscr{T}_i$, pour tout $i \in I$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathscr{H}^k(P) = \oplus_{i \in I} \mathscr{H}^k(P_i),$$

où $\mathscr{H}^k(\bullet)$ est le k-ième faisceau de cohomologie. Or $\mathscr{H}^k(P)$ est cohérent, donc il existe un nombre fini de $i \in I$ tel que $\mathscr{H}^k(P_i)$ soit non nul. De plus, $P \in \mathrm{D^b}(Y)$, donc il existe un nombre fini de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathscr{H}^k(P)$ soit non nul. On en déduit qu'il existe un nombre fini de $i \in I$ tel que P_i ne soit pas acyclique, c'est à dire que $\mathscr{T}_i$ soit non triviale. L'ensemble I est donc fini. $\square$

Soit $f : Y \to X$, avec Y projective lisse. La proposition ci-dessus nous permet de déduire l'existence (mais certainement pas l'unicité !) d'une décomposition finie en composantes connexes par rapport à X pour toute sous-catégorie admissible $\mathscr{T}$ de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ munie d'une structure de module sur X. En effet, si $\mathscr{T}$ est connexe par rapport à X, alors on a notre décomposition. Sinon, $\mathscr{T}$ se décompose :

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_1 \oplus \mathscr{T}_2,$$

où $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sont des sous-catégories admissibles non nulles de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ munies d'une structure de module sur X. Si $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ sont connexes par rapport à X, alors on a notre décomposition. Sinon on recommence et on décompose celle de $\mathscr{T}_1$ ou $\mathscr{T}_2$ qui est non-connexe (ou les deux). La proposition 1.3.2 nous dit que ce processus s'arrête et l'on obtient donc une décomposition en composantes connexes par rapport à X :

$$\mathscr{T} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{T}_i,$$

avec I fini.

On peut en déduire le fait suivant :

Corollaire 1.3.3. *Soit $f : Y \to X$ un morphisme avec Y projective lisse. Soit $\mathscr{T} \subset \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ une sous-catégorie admissible munie d'une structure de module sur X et telle que $\mathscr{O}_Y \in \mathscr{T}$. Alors il existe une composante connexe par rapport à X de $\mathscr{T}$ qui contient $f^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{T} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{T}_i$ une décomposition (finie) en composantes connexes par rapport à X. On considère la décomposition correspondante de $\mathscr{O}_Y$:

$$\mathscr{O}_Y = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{O}_Y^{(i)}.$$

Il existe un seul indice $i_0 \in I$ tel que $\mathscr{O}_Y^{(i_0)} \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, la variété Y ne serait pas connexe (voir la preuve de la proposition 3.10 dans [Huy06]), ce qui est impossible par définition (pour nous) d'une variété. Dès lors, on a $\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{T}_{i_0}$ et comme $\mathscr{T}_{i_0}$ est munie d'une structure de catégorie module sur X, on a $f^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathscr{T}_{i_0}$, ce qui conclut la preuve. □

1.3.2 Résolutions catégoriques fortement crépantes

Kuznetsov propose la conjecture suivante ([Kuz08b], conjecture 4.10).

Conjecture 1.3.4. *Soit X une variété projective de Gorenstein à singularités rationnelles et soit $\mathscr{T}$ une résolution fortement crépante de X, connexe par rapport à X. Alors pour toute autre résolution catégorique $\mathscr{T}'$ de X, il existe un plongement pleinement fidèle :*

$$\mathscr{T} \hookrightarrow \mathscr{T}'.$$

Cette conjecture implique la conjecture de Bondal-Orlov dans le cas projectif. En effet, d'après la proposition 1.2.12, si $\pi : \tilde{X} \to X$ est une résolution crépante d'une variété projective de Gorenstein à singularités rationnelles, alors $\pi_* : \mathrm{D^b}(\tilde{X}) \to \mathrm{D^b}(X)$ est une résolution catégorique fortement crépante et connexe par rapport à X. Elle semble toutefois tout aussi mystérieuse qu'icelle car elle ne prédit absolument pas comment le foncteur $\mathscr{T} \hookrightarrow \mathscr{T}'$ doit être construit.

Il existe toutefois un point de vue (entraperçu dans la propostion 1.2.3) légèrement différent sur la minimalité pour une résolution des singularités. Il a été discuté pour les résolutions catégoriques dans [Abu12].

Définition 1.3.5. Soit X une variété Gorenstein à singularités rationnelles et soient :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}_1 *}"'] & \mathrm{D^b}(X_1) \arrow[d, "\pi_{1*}"] \\ & \mathrm{D^b}(X) \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_2 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}_2 *}"'] & \mathrm{D^b}(X_2) \arrow[d, "\pi_{2*}"] \\ & \mathrm{D^b}(X) \end{tikzcd}$$

deux résolutions catégoriques de X. On dit que $\mathscr{T}_2$ est *inférieure* à $\mathscr{T}_1$ (que l'on note $\mathscr{T}_2 \preceq \mathscr{T}_1$) si il existe un X-morphisme $\pi_{1,2} : X_2 \to X_1$, un foncteur $\pi_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2 *} : \mathscr{T}_1 \to \mathscr{T}_2$ tel que $\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}$ (l'adjoint à gauche de $\pi_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2 *}$) soit pleinement fidèle et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D^b}(X_1) \arrow[rrr, "\pi_{1,2*}"] \arrow[dr, hook, "\delta_1"] \arrow[ddrr, bend right, "\pi_{1*}"'] & & & \mathrm{D^b}(X_2) \arrow[dl, "\delta_2^!"'] \arrow[ddll, bend left, "\pi_{2*}"] \\
& \mathscr{T}_1 \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2*}"] \arrow[dd, "\pi_{\mathscr{T}_1*}"] & & \\
& & \mathscr{T}_2 \arrow[dl, "\pi_{\mathscr{T}_2*}"] & \\
& \mathrm{D^b}(X) & &
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.3.6. Notons que si X_1 et X_2 sont des résolutions de X avec un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "\pi_{1,2}"] \arrow[dd, "\pi_1"'] & \\
& X_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

alors on a évidemment $\mathrm{D^b}(X_2) \preceq \mathrm{D^b}(X_1)$.

Définition 1.3.7. Soit X une variété de Gorenstein à singularités rationnelles et soit :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}_1 \arrow[r, hook, "\delta_1"] \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}_1*}"'] & \mathrm{D^b}(X_1) \arrow[d, "\pi_{1*}"] \\
& \mathrm{D^b}(X)
\end{tikzcd}$$

une résolution catégorique de X. On dit que $\mathscr{T}_1$ est *faiblement minimale* si

pour toute autre résolution catégorique de X :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_2 \arrow[r, hook, "\delta_2"] \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}_2 *}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2) \arrow[d, "\pi_{2*}"] \\ & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \end{tikzcd}$$

qui a une structure de catégorie module au-dessus de X, on a :

$$\mathscr{T}_2 \preceq \mathscr{T}_1 \Rightarrow \mathscr{T}_2 = \mathscr{T}_1.$$

Proposition 1.3.8. *Soit X une variété projective de Gorenstein à singularités rationnelles et soit $\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ une résolution catégorique fortement crépante de X. Supposons $\mathscr{T}$ connexe par rapport à X, alors $\mathscr{T}$ est faiblement minimale.*

Ce résultat est un analogue catégorique de la proposition 1.2.3 et donne une raison très concrète de croire à la conjecture 1.3.4.

Démonstration. Soit :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_2 \arrow[r, hook, "\delta_2"] \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}_2 *}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2) \arrow[d, "\pi_{2*}"] \\ & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \end{tikzcd}$$

une résolution catégorique de X telle que $\mathscr{T}_2 \preceq \mathscr{T}_1$. Supposons en outre que $\mathscr{T}_2$ soit une catégorie module au-dessus de X. Le foncteur ${\pi_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}}^*$ est pleinement fidèle et possède des ajoints à gauche et à droite, on a donc une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathscr{T}_1 = \langle (\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}\mathscr{T}_2)^{\perp}, \pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}\mathscr{T}_2 \rangle.$$

Comme $\mathscr{T}_2$ a une structure de catégorie module au-dessus de X, on montre aisément que c'est le cas pour $\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}\mathscr{T}_2$. D'après [Kuz06b], Lemma 2.35, la catégorie $(\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}\mathscr{T}_2)^{\perp}$ a aussi une structure de module au-dessus de X.

Par hypothèse $\mathscr{T}_1$ est connexe par rapport à X, il suffit donc de démontrer que la décomposition semi-orthogonale ci-dessus est en fait une décomposition totalement orthogonale. On va donc prouver que pour tout $a \in (\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}\mathscr{T}_2)^{\perp}$ et pour tout $b \in \pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2}\mathscr{T}_2$ on a :

$$\mathrm{Hom}(a, \pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2} b) = 0.$$

Mais

$\mathrm{Hom}(a, \pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2} b)$
$= \mathrm{Hom}(\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2} b, S_{\mathscr{T}_1}(a))^\vee$, où $S_{\mathscr{T}_1}$ est un foncteur de Serre pour $\mathscr{T}_1$,
$= \mathrm{Hom}(\delta_1^* \pi_{12}^* \delta_2 b, S_{\mathscr{T}_1}(a))^\vee$, par définition de $\pi_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2 *}$,
$= \mathrm{Hom}(\pi_{12}^* \delta_2 b, \delta_1 S_{\mathscr{T}_1}(a))^\vee$, par adjonction,
$= \mathrm{Hom}(\pi_{12}^* \delta_2 b, \pi_1^* \omega_X[\dim X] \otimes \delta_1 a)^\vee$, car $\mathscr{T}_1$ est une résolution fortement crépante de X,
$= \mathrm{Hom}(\pi_{12}^* \delta_2 b \otimes \pi_{12}^* \pi_2^* (\omega_X^{-1})[-\dim X], \delta_1 a)^\vee$,
$= \mathrm{Hom}(\pi_{12}^* \delta_2 b', \delta_1 a)^\vee$, avec $b' \in \mathscr{T}_2$, puisque $\mathscr{T}_2$ a une structure de catégorie module au-dessus de X,
$= \mathrm{Hom}(\delta_1^* \pi_{12}^* \delta_2 b', a)^\vee$, par adjonction,
$= \mathrm{Hom}(\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2} b', a)^\vee$
$= 0$, car $a \in (\pi^*_{\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2} \mathscr{T}_2)^\perp$.

□

En fait l'hypothèse de connexité n'est pas du tout limitante dans les applications, car on a le lemme suivant :

Lemme 1.3.9. *Soit X une variété projective de Gorenstein à singularités rationnelles et supposons que X admette une résolution catégorique fortement crépante. Alors X admet une résolution catégorique fortement crépante qui est connexe par rapport à X.*

Démonstration. Soit :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, hook, "\delta"] \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}*}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) \arrow[d, "\pi_*"] \\ & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \end{tikzcd}$$

une résolution catégorique fortement crépante de X. Comme $\tilde{X}$ est projective lisse, il existe, d'après le corollaire 1.3.3, une composante connexe par rapport à X de $\mathscr{T}$ qui contient $\pi^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Notons $\mathscr{T}'$ cette composante et soit $\delta' : \mathscr{T}' \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ la composée de $\mathscr{T}' \hookrightarrow \mathscr{T}$ et $\delta : \mathscr{T} \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$.

Par définition de composante connexe par rapport à X, on voit que $\delta' : \mathscr{T}' \hookrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$ est une sous-catégorie admissible qui possède une structure de

catégorie module au-dessus de X. Soit $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a $\pi^*\mathscr{F} \in \mathscr{T}'$ donc $\delta'(\delta'^*\pi^*\mathscr{F}) = \mathscr{F}$. Ceci implique :

$$\pi_{\mathscr{T}'*}\pi^*_{\mathscr{T}'}\mathscr{F} = \mathscr{F},$$

pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Finalement, comme $\mathscr{T}'$ a une structure de catégorie module au-dessus de X, on a $\delta' T \otimes \pi^*\omega_X[\dim X] \in \mathscr{T}'$ pour tout $T \in \mathscr{T}'$. Ceci montre que $\delta' S_{\mathscr{T}'}(T) = \delta' T \otimes \pi^*\omega_X[\dim X]$ où $S_{\mathscr{T}'}$ est le foncteur de Serre de $\mathscr{T}'$. On en déduit donc que $\mathscr{T}'$ est une résolution catégorique fortement crépante de X qui est connexe par rapport à X.

□

Corollaire 1.3.10. *Soit X le cône projectif au dessus de $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$. La variété X admet une résolution catégorique des singularités faiblement minimale.*

On termine donc cette partie sur une note très optimiste. On sait que le cône projectif au dessus de $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$ n'a pas de résolution géométrique crépante. Mais on a réussi à montrer que ce cône admet une résolution catégorique des singularités qui possède des propriétés de minimalité tout à fait analogues à celles des résolutions géométriques crépantes.

Chapitre 2

Résolutions magnifiques des singularités et résolutions catégoriques crépantes

Dans ce chapitre nous allons définir la notion de *résolution magnifique des singularités*. C'est, grosso-modo, une désingularisation obtenue comme suite d'éclatements le long de centres lisses tels chaque centre intersecte transversalement tous les diviseurs exceptionnels des éclatements précédents. La définition précise est modelée sur la construction de compactifications magnifiques de certains groupes algébriques linéaires.

Nous verrons que lorsque l'on dispose d'une résolution magnifique d'une singularité, on peut obtenir une décompostion semi-orthogonale très agréable de la catégorie dérivée de sa résolution. On en déduira alors le résultat principal de ce chapitre :

Théorème I. *Soit X une variété projective Gorenstein à singularités rationnelles. Supposons que X admette une résolution magnifique des singularités. Alors X admet une résolution catégorique crépante.*

Ceci nous permet de montrer :

Corollaire I. *Toutes les variétés déterminantielles (carrées, symétriques ou pfaffiennes) qui sont Gorenstein admettent des résolutions catégoriques crépantes.*

L'étude de résolutions "non-commutatives" crépantes pour les variétés déterminantielles a été menée avec un point de vue différent du nôtre dans [BLVdB10], [BLVdB11] et [WZ12]. Celle-ci semble avoir certaines applications à la conjecture de Bondal-Orlov ([VdB04], [BLVdB10]). Malheureusement, dans tous ces travaux, les auteurs exhibent des résolutions "non-commutatives" crépantes uniquement quand la variété déterminantielle concernée admet déjà une résolution géométrique crépante.

2.1 Résolutions magnifiques des singularités

Dans cette section on définit la notion de résolution magnifique des singularités et on collecte les principales propriétés géométriques de ces résolutions.

2.1.1 Définitions et quelques exemples

Dans toute la suite, X est une variété projective Gorenstein.

Définition 2.1.1. Soit $Y \subset X$ une sous-variété (connexe) lisse fermée de X et soit E le diviseur exceptionnel de l'éclatement de Y dans X. On dit que Y est *un centre normalement plat* dans X si Y est lisse et la projection naturelle $E \to Y$ est plate.

Le théorème de Hironaka ([Hir64]) affirme que toute variété peut être désingularisée par une suite finie d'éclatements le long de centres normalement plats.

Exemple 2.1.2. Soit W un espace vectoriel de dimension au moins 6 et soit $X = \mathbb{P}(\{\omega \in \bigwedge^2 W, \operatorname{rang}(\omega) \leq 4\}$ la pfaffiennne de rang ≤ 4 dans $\bigwedge^2 W$. Alors X est exactement singulière le long de $\mathrm{Gr}(2, W) = \mathbb{P}(\{\omega \in \bigwedge^2 W, \operatorname{rang}(\omega) \leq 2\}$. La sous-variété $\mathrm{Gr}(2, W) \subset X$ est un centre normalement plat. En effet, si E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de X le long de $\mathrm{Gr}(2, W)$, alors on peut voir E comme la variété de drapeaux $\mathrm{Fl}(2, 4, W)$ et la projection naturelle vers $\mathrm{Gr}(2, W)$ est plate. On peut aussi montrer que l'éclatement de X le long de $\mathrm{Gr}(2, W)$ est lisse. On se rapportera à [Kuz08b], section 8 pour plus de détails sur cet exemple.

Soit G un groupe algébrique linéaire semi-simple. Il est souvent très utile (si l'on a le goût des calculs énumératifs) de connaître une compactification équivariante de G. Les compactifications dont le diviseur exceptionnel est à croisements normaux et possède une unique orbite fermée pour G sont appelées *magnifiques* dans la littérature (voir [DCP83] ou [Hur11], chapitre 3). Les compactifications magnifiques les plus élémentaires sont obtenues de la manière suivante. Soit $\overline{\mathrm{G}}$ une compactification naïve de G. Le diviseur frontière de cette compactification naïve est souvent irréductible mais très singulier. On trouve alors une résolution de ce diviseur par une modification birationnelle de $\overline{\mathrm{G}}$. On demande que son modèle lisse soit à croisements normaux simples avec les diviseurs exceptionnels de la modification de $\overline{\mathrm{G}}$. Cette dernière est obtenue comme une suite d'éclatements le long de centres lisses qui intersectent transversalement les diviseurs exceptionnels des éclatements précédents. La définition suivante capture les caractéristiques essentielles de cette suite d'éclatements.

Définition 2.1.3 (Résolutions magnifiques)**.** Pour tout $n \geq 1$ on définit de manière récursive une *n-résolution magnifique des singularités* de X

– Une 1-résolution magifique est un éclatement le long d'un centre normalement plat $Y \subset X$:
$$\pi : \tilde{X} \to X,$$
tel que $\tilde{X}$ et le diviseur exceptionnel $E \subset \tilde{X}$ soient lisses.
– Pour $n \geq 2$, une n-résolution magnifique de X est une suite d'éclatements le long de centres normalement plats $Y_{k+1} \subset X_k$:
$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X$$
telle que :
1. tous les X_k sont à de Gorenstein,
2. le morphisme $\pi_2 \cdots \pi_n : X_n \to X_1$ est une $(n-1)$-résolution magnifique de X_1,
3. pour tout $2 \leq k \leq n-1$, l'intersection de Y_{k+1} avec la transformée totale par $\pi_2 \cdots \pi_k$ du diviseur exceptionnel de π_1 (que l'on note $E_1^{(k)}$) est lisse, connexe et de codimension 1 dans Y_{k+1},
4. le morphisme $\pi_2 \cdots \pi_n|_{E_1^{(n)}} : E_1^{(n)} \to E_1$ est une $(n-1)$-résolution magnifique de E_1.

Il me semble que l'expression *résolution magnifique* a été utilisée pour la première fois dans [CF07] afin de décrire une résolution des indéterminées de certains flops de Mukai.

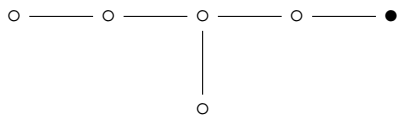
Exemple 2.1.4 (Variétés déterminantielles)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 4$. Soit $3 \leq r \leq n-1$ un entier et soit $Z^{(r)}$ la sous-variété de $\mathbb{P}(\mathrm{End}(E))$ définie par l'annulation des mineurs de taille $r+1$. On sait que $X = Z^{(r)}$ est Gorenstein à singularités rationnelles ([Wey03], corollaire 6.1.5). Soit $Y_1 = Z^{(1)}$ et soit :
$$\pi_1 : X_1 \to X,$$
l'éclatement de X le long de Y_1. Pour $2 \leq k \leq r-1$, on définit Y_k comme la transformée stricte de $Z^{(k)}$ le long de $\pi_1 \ldots \pi_{k-1}$ et on pose :
$$\pi_k : X_k \to X_{k-1},$$
l'éclatement de X_{k-1} le long de Y_k.

Le théorème 1 de [Vai84] nous assure que X_{r-1} est lisse ainsi que tous les Y_k pour $1 \leq k \leq r-1$. En outre le théorème 2.4 de [Vai84] montre que les $Y_k \subset X_{k-1}$ sont des centres normalement plats et que la résolution de X :
$$X_{r-1} \xrightarrow{\pi_{r-1}} \cdots \to X_1 \xrightarrow{\pi_1} X$$

satisfait les items 1, 2, 3 et 4 de la definition 2.1.3. Ainsi la variété X est Gorenstein à singularités rationnelles et admet une résolution magnifique des singularités.

Soit $X_r^{[sym]} \subset \mathbb{P}(\mathrm{S}^2(E))$ (resp. $X_r^{[skew]} \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2(E))$ la variétés des matrices symétriques (rep. anti-symétriques) de rang $\leq r$. Si $n-r$ est pair (resp. pas de condition), alors [Wey03], corollaire 6.3.7 (resp. proposition 6.4.3) montre que $X_r^{[sym]}$ (resp. $X_r^{[skew]}$) est Gorenstein à singularités rationnelles. En outre, les appendices 10 et 11 de [Tha99] construisent des résolutions magnifiques pour $X_r^{[sym]}$ et $X_r^{[skew]}$. Ces résolutions sont obtenues de manière tout à fait analogue au cas des matrices carrées quelconques : on éclate successivement les (transformées strictes) des strates des matrices par ordre de rang croissant.

Exemple 2.1.5 (Variétés de sécantes de $\mathbb{OP}^2$)**.** Soit $X = \mathbb{OP}^2 = \mathrm{E}_6/\mathrm{P}_{\alpha_6} \subset \mathbb{P}(V_{\omega_6})$ le plan de Cayley dans son plongement de plus haut poids. Ici P_{α_6} est le parabolique maximal associé à la racine α_6 du système de racines de type E_6 :



Le plan de Cayley peut aussi se voir comme le schéma défini par les mineurs 2×2 de la matrice générique hermitienne 3×3 à coefficients dans les octonions complexifiés (notés $\mathbb{O}$) :

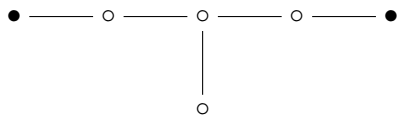
$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \overline{a_2} & a_4 & a_5 \\ \overline{a_3} & \overline{a_5} & a_6 \end{pmatrix}, \text{avec } a_i \in \mathbb{O} \text{ et telle que } {}^t\overline{M} = M,$$

où $\overline{a_i}$ est le conjugué de $a_i \in \mathbb{O}$.

Soit $S(X)$ la variété de sécantes de X dans $\mathbb{P}(V_{\omega_6})$: elle est définie par le déterminant de la matrice M ci-dessus. Même si l'algèbre $\mathbb{O}$ n'est pas associative, il est quand même possible de définir le déterminant de telles matrices (voir l'appendice de [Rob88]). La variété $S(X)$ est une hypersurface cubique (donc elle est de Gorenstein) qui est exactement singulière le long de $\mathbb{OP}^2$. On considère l'éclatement de $S(X)$ le long de X :

$$\pi : \widetilde{S(X)} \to S(X).$$

La variété $\widetilde{S(X)}$ est lisse et le diviseur exceptionnel $\tilde{\pi} : E \to X$ de cet éclatement est isomorphe à $\mathrm{E}_6/\mathrm{P}_{\alpha_6,\alpha_1} \to \mathrm{E}_6/\mathrm{P}_{\alpha_6}$, où $\mathrm{P}_{\alpha_6,\alpha_1}$ est le parabolique associé aux racines α_6 et α_1 :



Le morphisme $\tilde{\pi} : E \to X$ est une fibration en quadriques lisses de dimension 8 au dessus de X. Ainsi, le morphisme $\pi : \widetilde{S(X)} \to S(X)$ est une résolution magnifique des singularités. On notera également que $S(X)$ est à singularités rationnelles. En effet, la formule d'adjonction montre que :

$$\omega_{\widetilde{S(X)}} = \pi^* \omega_{S(X)} \otimes \mathscr{O}_X(7E).$$

La fibration $\tilde{\pi} : E \to X$ possède deux fibrés spineurs relatifs $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ qui se spécialisent en les fibrés spineurs d'une quadrique lisse de dimension 8 sur chaque fibre de $\tilde{\pi}$. On a donc une décomposition semi-orthogonale ([Kuz08a]) :

$$\begin{aligned}&\mathrm{D^b}(E) = \langle \mathscr{O}_E(7E) \otimes \tilde{\pi}^* \mathrm{D^b}(X), \ldots, \mathscr{O}_E(E) \otimes \tilde{\pi}^* \mathrm{D^b}(X),\\ &\langle \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \mathscr{O}_E \rangle \otimes \tilde{\pi}^* \mathrm{D^b}(X) \rangle.\end{aligned}$$

Supposons que $\mathscr{S}_1 \oplus \mathscr{S}_2$ est la restriction sur E d'un fibré défini sur $\widetilde{S(X)}$, disons S et tel que :

$$\mathrm{R^i}\pi_* \mathscr{E}nd(S \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{S(X)}}) = 0,$$

pour $i > 0$. Posons $\mathscr{A} = \mathscr{E}nd(S \oplus \mathscr{O}_{\widetilde{S(X)}})$. Alors le théorème 5.2 de [Kuz07] montre que $\mathrm{D^b}(S(X), \pi_* \mathscr{A})$ est une résolution catégorique crépante de $S(X)$. On consultera [Zak93] ch. III et [FM12], [Man11] pour plus de détails sur les aspects géométriques et catégoriques du plan de Cayley.

Les deux exemples précédents s'insèrent parfaitement dans la théorie des *espaces préhomogènes*. Un *espace préhomogène* est un couple (G, V) constitué d'un groupe algébrique G et d'un espace vectoriel de dimension finie V tel que G opère linéairement sur V avec une orbite dense. Les couples $(\mathrm{GL_n} \times \mathrm{GL_n}, \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ (resp. $(\mathrm{GL_n}, \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^n)$ et $(\mathrm{GL_n}, \bigwedge^2 \mathbb{C}^n)$ sont des espaces préhomogènes. Les orbites sont les variétés déterminantielles de matrices carrées (resp. symétriques et anti-symétriques). Le plan de Cayley $\mathbb{OP}^2 = \mathrm{E_6}/\mathrm{P}_{\alpha_6}$ et sa variété de sécantes sont les projectivisations des fermetures d'orbites non denses pour l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathrm{E_6}$ sur V_{ω_6}. La question suivante est donc légitime :

Question 2.1.6. *Soit* (G, V) *un espace préhomogène et soit* $Z \subset V$ *la fermeture d'une orbite pour l'action de* G. *Dans quels cas la variété* $\mathbb{P}(Z)$ *admet-elle une résolution magnifique des singularités ?*

L'exemple suivant montre que la réponse à la question précédente ne peut pas être "dans tous les cas".

Exemple 2.1.7. Soit $G = \mathrm{SL}_6$ et $V = \bigwedge^3 \mathbb{C}^6$. D'après [LM01] par exemple, le diagramme orbital de l'action de G sur $\mathbb{P}(V)$ est le suivant :

$$\mathrm{G}(3,6) \subset \sigma_+(\mathrm{G}(3,6)) \subset \tau(\mathrm{G}(3,6)) \subset \mathbb{P}(V),$$

où $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ désigne la variété des tangentes à $\mathrm{G}(3,6)$ et $\sigma_+(\mathrm{G}(3,6))$ est la fermeture des droites dans $\mathbb{P}(V)$ qui joignent deux points de $\mathrm{G}(3,6)$ tels que les $\mathbb{C}^3$ correspondants se rencontrent le long d'une droite dans $\mathbb{C}^6$. La variété $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ est une hypersurface quartique exactement singulière le long de $\sigma_+(\mathrm{G}(3,6))$, tandis que $\sigma_+(\mathrm{G}(3,6))$ est une variété de dimension 14 qui est exactement singulière le long de $\mathrm{G}(3,6)$.

On veut trouver une résolution magnifique de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$. Au vu de la définition 2.1.3, le premier éclatement est nécessairement [1] l'éclatement de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ le long de $\mathrm{G}(3,6)$. Mais un calcul local montre que le cône tangent à $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ est le lieu d'annulation d'une section de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{19}}(2)$ à support dans un hyperplan. Ainsi le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ le long de $\mathrm{G}(3,6)$ est globalement non réduit. Il n'existe pas d'éclatement qui désingularise un diviseur non réduit, on en déduit donc que $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ n'admet pas de résolution magnifique des singularités. Nous reviendrons plus en détails sur cet exemple dans le dernier chapitre 3 de cette thèse : il est consacré aux résolutions catégoriques crépantes pour les développables [2] des variétés qui apparaissent dans la troisième ligne du carré magique de Freudenthal (dont fait partie $\mathrm{G}(3,6)$).

2.1.2 Singularités des diviseurs intérmédiaires dans les résolutions magnifiques

L'exemple 2.1.4 suggère que les diviseurs exceptionnels qui apparaissent dans une résolution magnifique ont des singularités très contraintes. Les trois propositions qui suivent montrent en fait qu'elles sont très proches des singularités de X.

Ainsi, la proposition 2.1.8 montre que si X est à singularités rationnelles, alors les X_k et les diviseurs $E_1^{(k)}$ sont aussi à singularités rationnelles, pour tout $k \geq 1$.

Les propositions 2.1.9 et 2.1.10 vont de pair. La proposition 2.1.9 prouve que si X est à singularités rationnelles, alors les E_k sont irréductibles, pour tout $k \geq 1$. Cela nous permet d'en déduire une relation simple entre les fibrés en droites $\omega_{X_k}, \pi_k^*\omega_{X_{k-1}}$ et $\mathscr{O}_{X_k}(E_k)$. Le coefficient positif qui apparait devant E_k dans cette expression de ω_{X_k} peut être interprété comme une multiplicité de X_{k-1} le long de Y_k. La proposition 2.1.10 nous enseigne alors

1. Une "bonne" resolution de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ devant aussi être équivariante, il faut donc éclater la fermeture d'une orbite.

2. Communément appellées variétés tangente

que la multiplicité de X_k le long de Y_{k+1} est égale à la multiplicité de $E_1^{(k)}$ le long de $Y_{k+1} \cap E_1^{(k)}$, pour tout $k \geq 1$.

Proposition 2.1.8. *Supposons X à singularités rationnelles et soit*

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X$$

une résolution magnifique de X. Alors, pour tout $1 \leq k \leq n$, les variétés X_k et les diviseurs $E_1^{(k)}$ sont Gorenstein à singularités rationnelles.

Démonstration. Les X_k sont de Gorenstein par définition d'une résolution magnifique.

Notons que X etant de Gorenstein à singularités rationnelles, elle est à singularités canoniques ([Kol97], corollaire 11.13). Soit $E_{l,\alpha_{l,1}}^{(n)}, \ldots, E_{l,\alpha_{l,r_l}}^{(n)}$ les composantes irréductibles du diviseur $E_l^{(n)}$ (qui est la transformée totale du diviseur exceptionnel de $\pi_l : X_l \to X_{l-1}$ par $\pi_{l+1} \ldots \pi_n$). Comme X est à singularités canoniques, dans la formule donnant ω_{X_n} en fonction de $\pi_n^* \ldots \pi_1^* \omega_X$ et des $E_{l,\alpha_{l,j}}^{(n)}$ pour $1 \leq l \leq n$ et $1 \leq j \leq r_k$, tous les coefficients qui apparaissent devant les $E_{l,\alpha_{l,j}}^{(n)}$ sont positifs. Donc dans la formule donnant ω_{X_n} en fonction de $\pi_n^* \ldots \pi_{k+1}^* \omega_{X_k}$ et des $E_{l,\alpha_{l,j}}^{(n)}$ pour $k+1 \leq l \leq n$, tous les coefficients qui apparaissent devant les $E_{l,\alpha_{l,j}}^{(n)}$ sont positifs. Ainsi, les X_k sont à singularités canoniques pour $1 \leq k \leq n$ et donc à singularités rationnelles ([Kol97], corollaire 11.13).

Les diviseurs $E_1^{(k)}$ sont Gorenstein car ce sont des diviseurs de Cartier dans des variétés Gorenstein. Le point central de cette proposition est donc de montrer que les $E_1^{(k)}$ sont à singularités rationnelles pour tout $k \geq 1$.

Le point 3 de la définition 2.1.3 implique que pour tout $k \geq 2$, le morphisme

$$\pi_k|_{E_1^{(k)}} : E_1^{(k)} \to E_1^{(k-1)}$$

est l'éclatement de $E_1^{(k-1)}$ le long de $Y_k \cap E_1^{(k-1)}$. Ainsi, le point 4 de 2.1.3 nous permet de déduire que pour tout $k \geq 1$, le morphisme :

$$\Pi_k = \pi_{k+1} \ldots \pi_n|_{E_1^{(n)}} : E_1^{(n)} \to E_1^{(k)}$$

est une résolutions des singularités. Dès lors, il suffit de montrer que l'on a l'égalité $(\Pi_k)_* \mathscr{O}_{E_1^{(n)}} = \mathscr{O}_{E_1^{(k)}}$ (on rappelle que, par convention fixée au début de cette thèse, $(\Pi_k)_*$ désigne l'image directe dérivée de Π_k).

Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} E_1^{(n)} \arrow[r, "i_1^{(n)}"] \arrow[d, "\Pi_k"'] & X_n \arrow[d, "\pi_{k+1}\dots\pi_n"] \\ E_1^{(k)} \arrow[r, "i_1^{(k)}"] & X_k \end{tikzcd}$$

Les morphismes $i_1^{(n)}$ et $i_1^{(k)}$ sont des immersions localement intersections complètes et la codimension de $E_1^{(k)}$ dans X_k est égale à la codimension de $E_1^{(n)}$ dans X_n. On a donc la relation de commutation ([Kuz06b], corollaire 2.27) :

$$(i_1^{(k)})^*(\pi_{q+1}\dots\pi_n)_*\mathscr{O}_{X_n} = (\Pi_k)_*(i_1^{(n)})^*\mathscr{O}_{X_n},$$

c'est-à-dire :

$$(\Pi_k)_*\mathscr{O}_{E_1^{(n)}} = \mathscr{O}_{E_1^{(k)}}.$$

□

Le résultat qui suit va nous permettre d'établir une formule simple pour l'expression de ω_{X_k} en fonction de $\pi_k^*\omega_{X_k}$ et du diviseur exceptionnel de π_k.

Proposition 2.1.9. *Supposons X à singularités rationnelles et soit*

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \to \dots \to X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X$$

une résolution magnifique de X. Alors le diviseur exceptionnel E_1 de π_1 : $X_1 \to X_0$ est irréductible.

Démonstration. On note $\rho : \mathscr{C}_{Y_1}(X) \to Y_1$ le cône tangent à X le long de Y_1 et $\mathscr{C}_y(X)$ le cône tangent à X en y pour $y \in Y_1$. Comme Y_1 est un centre normalement plat dans X, le théorème 2, p.195 de [Hir64], nous assure que $\mathscr{C}_y(X)$ est un cône de sommet $T_{Y_1,y}$ au dessus de $\rho_{Y_1}^{-1}(y)$. Mais X est Cohen-Macaulay, donc le cône $\mathscr{C}_y(X)$ est connexe en codimension 1 (ce qui signifie qu'il faut lui soustraire une sous-variété de codimension 1 pour le déconnecter) d'après le résultat principal de [Sch77]. Ainsi la fibre $\rho_{Y_1}^{-1}(y)$ est connexe en codimension 1 (et de dimension ≥ 2) pour tout $y \in Y$. La projection ρ_{Y_1} étant plate et Y_1 étant irréductible, on en déduit que $E_1 = \mathbb{P}(\mathscr{C}_{Y_1}(X))$ est connexe en codimension 1.

Supposons dès lors que E_1 est réductible. Comme E_1 est connexe en codimension 1, toutes les composantes irréductibles de E_1 se rencontrent en codimension 1. Ceci implique que E_1 n'est pas normal, ce qui contredit alors le fait qu'il est à singularités rationnelles (proposition 2.1.8). □

Dans la suite de ce chapitre, pour $2 \leq k \leq n$, l'intersection de $E_1^{(k)}$ avec E_k sera notée $E_{1k}^{(k)}$. Le point 3 de la définition 2.1.3, montre que $E_{1k}^{(k)}$ est aussi le diviseur exceptionnel de l'éclatement $E_1^{(k)} \to E_1^{(k-1)}$.

Proposition 2.1.10. *Soit $2 \leq k \leq n$. Si m_k est l'unique entier positif tel que $\omega_{X_k} = \pi_k^* \omega_{X_{k-1}} \otimes \mathscr{O}_{X_k}(m_k E_k)$, alors on a :*

$$\omega_{E_1^{(k)}} = \pi_k|_{E_1^{(k)}}^* \omega_{E_1^{(k-1)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(k)}}(m_k E_{1k}^{(k)}).$$

L'entier m_k est bien défini car le diviseur exceptionnel de l'éclatement $X_k \to X_{k-1}$ est intègre et X_k est de Gorenstein (voir Definition 2.22 de [KM98]). Il est en outre positif ou nul car X_{k-1} est Gorenstein à singularités rationnelles donc à singularités canoniques d'après [Kol97], Corollary 11.13.

Démonstration. D'après la formule d'adjonction on a :

$$\omega_{E_1^{(k)}} = \omega_{X_k}|_{E_1^{(k)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(k)}}(E_1^{(k)})$$

et

$$\omega_{E_1^{(k-1)}} = \omega_{X_{k-1}}|_{E_1^{(k-1)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(k-1)}}(E_1^{(k-1)}).$$

On tensorise par $\mathscr{O}_{E_1^{(k)}}$ l'égalité :

$$\omega_{X_k} = \pi_k^* \omega_{X_{k-1}} \otimes \mathscr{O}_{X_k}(m_k E_k),$$

et prenant en compte le fait que $E_k|_{E_1^{(k)}} = E_{1k}^k$ et que

$$\pi_k|_{E_1^{(k)}}^* \mathscr{O}_{E_1^{(k-1)}}(E_1^{(k-1)}) = \mathscr{O}_{E_1^{(k)}}(E_1^{(k)}),$$

on obtient la formule annoncée. □

2.2 Le théorème principal

2.2.1 Énoncé et réduction "standard"

On rappelle le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 2.2.1 (Existence de résolutions catégoriques crépantes)**.** *Soit X une variété projective Gorenstein à singularités rationnelles. Supposons que X admette une résolution magnifique des singularités. Alors X admet une résolution catégorique crépante des singularités.*

Le corollaire qui suit est donc l'application de ce théorème à l'exemple 2.1.4.

Corollaire 2.2.2. *Toutes les variétés déterminantielles (carrées, symétriques ou pfaffiennes) qui sont Gorenstein admettent des résolutions catégoriques crépantes.*

On a vu dans le chapitre 1 de ce texte que Kuznetsov a démontré 2.2.1 dans le cas d'une 1-résolution magnifique sous l'hypothèse d'existence d'une bonne décomposition de Lefschetz sur le diviseur exceptionnel de cette résolution. On va démontrer que cette décomposition existe toujours dans le cas d'une n-résolution magnifique pour n quelconque. On en déduira par un argument standard (essentiellement dû à Kuznetsov) l'existence d'une résolution catégorique crépante pour n'importe quelle singularité Gorenstein et rationnelle qui admet une résolution magnifique.

Afin d'énoncer le résultat technique qui va nous servir de clef de voûte pour la démonstration du théorème 2.2.1, nous introduisons quelques notations. Soit

$$X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X,$$

une résolution magnifique de X, qui est une succession d'éclatements le long de centres normalement plats $Y_t \subset X_{t-1}$, avec $t = 1 \dots n$. Pour un tel t, on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} E_t^{(n)} \arrow[r, "i_t^{(n)}"] \arrow[d, "q_t"'] & X_n \arrow[d, "\pi_t \cdots \pi_n"] \\ Y_t \arrow[r] & X_{t-1} \end{tikzcd}$$

On rapelle que $E_t^{(n)}$ est la transformée totale du diviseur $E_t \subset X_t$ par le morphisme $\pi_{t+1} \dots \pi_n$ et que q_t est la composition d'un morphisme plat avec une suite d'éclatement le long de centres normalement plats. On a les formules $\omega_{X_t} = \pi_t^* \omega_{X_{t-1}} \otimes \mathscr{O}_{X_t}(m_t E_t)$. Pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $0 \leq k_j \leq m_j - 1$, on définit les sous-catégories de $\mathrm{D^b}(X_n)$:

$$\mathscr{A}_{j,k_j} = (i_j^{(n)})_* \left[q_j^* \mathrm{D^b}(Y_j) \otimes \mathscr{O}_{E_j^{(n)}} \left((m_j - k_j) E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)} \right) \right].$$

Proposition 2.2.3. *Avec les notations ci-dessus, on a une décomposition semi-orthogonale :*

$$\mathrm{D^b}(X_n) = \langle \mathscr{A}_{1,0}, \dots, \mathscr{A}_{1,m_1-1}, \dots, \mathscr{A}_{j,k_j}, \dots, \mathscr{A}_{n,m_n-1}, \mathscr{D}_{X_n} \rangle,$$

où $\mathscr{D}_{X_n}$ est l'orthogonale à gauche de la sous-catégorie pleine et admissible engendrée par les $\mathscr{A}_{j,k_j}$. On a en outre une inclusion :

$$(\pi_1 \dots \pi_n)^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathscr{D}_{X_n}.$$

On démontrera cette proposition dans la section suivante de ce chapitre mais on va tout de suite voir qu'elle implique le théorème 2.2.1. L'argument qui suit est une généralisation aisée de la preuve du théorème 1.2.13.

Démonstration du théorème 2.2.1. Soit $\delta : \mathscr{D}_{X_n} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_n)$ le foncteur d'inclusion, π la résolution $X_n \to X$ et $\pi_{\mathscr{D}*} : \mathscr{D}_{X_n} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ la composée $\pi_* \circ \delta$. On sait que $\pi_*\pi^*\mathscr{F} = \mathscr{F}$ pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ et que $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathscr{D}_{X_n}$. Ceci implique que $\pi_{\mathscr{D}*}\pi^*_{\mathscr{D}}\mathscr{F} = \mathscr{F}$ pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Ainsi on doit juste vérifier que :

$$\pi^*_{\mathscr{D}}\mathscr{F} = \pi^!_{\mathscr{D}}\mathscr{F},$$

pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. C'est à dire :

$$\delta^*\pi^*(\mathscr{F}) = \delta^!\pi^!(\mathscr{F}),$$

pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. On rapelle que l'on a l'équation :

$$\pi^!(\mathscr{F}) = \pi^*(\mathscr{F}) \otimes \pi^*({\omega_X}^{-1}) \otimes \omega_{X_n} = \pi^*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{X_n}(\sum_{t=1}^{n} m_t E_t^{(n)}).$$

Or le foncteur δ est pleinement fidèle, donc l'égalité :

$$\delta^*\pi^*(\mathscr{F}) = \delta^!\pi^!(\mathscr{F})$$

est équivalente à :

$$\delta(\delta^*\pi^*(\mathscr{F})) = \delta(\delta^!\pi^!(\mathscr{F})).$$

Mais on a l'inclusion $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathscr{D}_{X_n}$, donc $\delta(\delta^*\pi^*(\mathscr{F})) = \pi^*(\mathscr{F})$, d'après la proposition 1.1.2. On va montrer que :

$$\delta(\delta^!\pi^!(\mathscr{F})) = \pi^*(\mathscr{F}).$$

Pour tous $1 \leq j \leq n$ et $0 \leq k_j \leq m_j - 1$, on a des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{X_n}\left((m_j - k_j - 1)E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)}\right) \longrightarrow$$

$$\mathscr{O}_{X_n}\left((m_j - k_j)E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)}\right) \longrightarrow$$

$$(i_j^{(n)})_*\mathscr{O}_{E_j^{(n)}}\left((m_j - k_j)E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)}\right) \longrightarrow 0.$$

En les tensorisant par $\pi^*\mathscr{F}$ et en les composant successivement, on déduit une suite longue de triangles exacts :

$$\begin{tikzcd}
\pi^*(\mathscr{F}) \arrow[rr] & & F_{n,m_n-1} \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[rr] & & F_{j,k_j} \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & F_{1,1} \arrow[rr] & & F_{1,0} \arrow[dl] \\
& \mathscr{F}_{n,m_n-1} \arrow[ul] & \cdots & & \mathscr{F}_{j,k_j} \arrow[ul] & \cdots & & & \mathscr{F}_{1,0} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

où l'on a noté :

$$F_{j,k_j} = \pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{X_n}\left((m_j - k_j)E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)}\right),$$

et

$$\mathscr{F}_{j,k_j} = (i_j^{(n)})_*(i_j^{(n)})^*\left[\pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{X_n}\left((m_j - k_j)E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)}\right)\right],$$

pour tous $0 \leq k_j \leq m_j - 1$ et $1 \leq j \leq n$.

La proposition 1.1.2 montre que $\delta(\delta^!\pi^!(\mathscr{F}))$ est la $\mathscr{D}_{X_n}$-composante de $\pi^!(\mathscr{F}) = \pi^*(\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{X_n}(\sum_{t=1}^{n} m_t E_t^{(n)})$ dans la décomposition semi-orthogonale de $\mathrm{D^b}(X_n)$ donnée par la proposition 2.2.3. On considère maintenant le diagrame cartésien :

$$\begin{tikzcd}
E_j^{(n)} \arrow[r, "i_j^{(n)}"] \arrow[d, "q_j"'] & X_n \arrow[d, "\pi_j \cdots \pi_n"] \arrow[dd, bend left, "\pi"] \\
Y_j \arrow[r, "i_j"] & X_{j-1} \arrow[d, "\pi_1 \cdots \pi_{j-1}"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

On a l'égalité :

$$(i_j^{(n)})^*(\pi^*(\mathscr{F})) = q_j^*((\pi_1 \cdots \pi_{j-1} i_j)^*(\mathscr{F})) \in q_j^*(\mathrm{D^b}(Y_j)),$$

d'où on déduit que $\mathscr{F}_{j,k_j} \in \mathscr{A}_{j,k_j}$, pour tout $1 \leq j \leq n$ et $0 \leq k_j \leq m_j - 1$. Ainsi, la suite de triangles ci-dessus montre que $\pi^*(\mathscr{F})$ est la $\mathscr{D}_{X_n}$-composante de $\pi^!(\mathscr{F})$ dans la décomposition de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_n)$ donnée par la proposition 2.2.3. En conséquence :

$$\delta(\delta^!\pi^!(\mathscr{F})) = \pi^*(\mathscr{F}),$$

ce que l'on voulait démontrer. □

2.2.2 Quelques lemmes d'annulation

Nous aurons besoin des lemmes qui suivent dans la preuve de la proposition 2.2.3.

Lemme 2.2.4. *Soit $f : Z \to S$ un morphisme plat et projectif avec Z et S de Gorenstein, Z à singularités rationnelles et $\dim Z > \dim S$. Supposons qu'il existe un diviseur relativement anti-ample $E \subset Z$, un fibré en droites F sur S et un entier positif $r \geq 1$ tel que :*

$$\omega_Z = f^*F \otimes \mathscr{O}_Z((r+1)E).$$

Alors on a les annulations :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_Z(kE) = 0,$$

pour tout $i > 0$ et $k \leq r$ et pour tout $i < \dim Z - \dim S$ et $k \geq 1$. Pour tout fibré vectoriel A sur S, on en déduit :

$$\mathrm{H}^{\mathrm{i}}(Z, f^*A \otimes \mathscr{O}_X(kE)) = 0,$$

pour tout $i > 0$ si $1 \leq k \leq r$.

Démonstration. Par hypothèse, on a $\omega_Z = f^*F \otimes \mathscr{O}_Z((r+1)E)$, la variété Z est de Gorenstein à singularités rationnelles et E est relativement anti-ample, donc par le théorème de Kawamata-Viehweg ([KMM87], théorème 1.2.5), on a :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_Z(kE) = \mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_*(\mathscr{O}_Z((k-r-1)E) \otimes \omega_Z \otimes (f^*F)^{-1}) = 0,$$

pour tout $i > 0$ et $k \leq r$.

On sait aussi que f est plat, donc toutes les fibres de f sont des schémas de Gorenstein de dimension pure $d = \dim Z - \dim S$. On peut alors appliquer la dualité de Grothendieck pour un morphisme plat à fibres de Cohen-Macaulay ([Kle80], Theorem 21) et on trouve :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_*(\mathscr{O}_Z(-kE) \otimes \omega_{Z/S}) = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathrm{R}^{\mathrm{d-i}} f_* \mathscr{O}_Z(kE), \mathscr{O}_S),$$

c'est à dire :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_*(\mathscr{O}_Z(-kE) \otimes \mathscr{O}_Z((r+1)E) \otimes f^*(F \otimes \omega_S^{-1})) = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\mathrm{R}^{\mathrm{d-i}} f_* \mathscr{O}_Z(kE), \mathscr{O}_S),$$

Or $\mathrm{R}^{\mathrm{d-i}} f_* \mathscr{O}_Z(kE) = 0$ pour tout $i < d$ et pour tout $k \leq r$. Ainsi on a :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_*(\mathscr{O}_Z(-kE) \otimes \mathscr{O}_Z((r+1)E)) = 0,$$

pour tout $i < d$ et $k \leq r$, d'où :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_Z(kE) = 0,$$

pour tout $i < d$ et $k \geq 1$.

Pour tout fibré vectoriel A sur S, l'annulation :

$$\mathrm{H}^{\mathrm{i}}(z, f^* A \otimes \mathscr{O}_X(kE)) = 0,$$

pour tout $i > 0$ si $1 \leq k \leq r$ est alors une conséquence immédiate de la suite spectrale de Leray et de la formule de projection. □

Le corollaire ci dessous nous sera très utile :

Corollaire 2.2.5. *Soit X une variété normale Gorenstein et soit $f : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X le long d'un centre normalement plat $Y \subset X$. Supposons que le diviseur exceptionnel E de cet éclatement soit de Gorenstein à singularités rationnelles et que $\omega_{\tilde{X}} = f^* \omega_X \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}(rE)$ pour un entier positif r. Alors on a :*

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_{\tilde{X}}(kE) = 0$$

pour tout $i > 0$ si $k \leq r$ et

$$\mathrm{R}^0 f_* \mathscr{O}_{\tilde{X}}(kE) = \mathscr{O}_X$$

pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. D'après la formule d'ajonction on a :

$$\omega_E = f^* F \otimes \mathscr{O}_{\tilde{X}}((r+1)E),$$

où $F = \omega_X \otimes \mathscr{O}_Y$. Or E est relativement anti-ample, donc d'après le lemme 2.2.4 on a $\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_E(kE) = 0$ pour tout $i > 0$ et $k \leq r$. Maintenant on a une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{O}_X((k-1)E) \to \mathscr{O}_X(kE) \to \mathscr{O}_E(kE) \to 0.$$

Mais E est relativement anti-ample, donc $\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_X((k-1)E) = 0$ pour $i > 0$ et $k \ll 0$. En utilisant la suite exacte longue associée à la suite exacte courte ci-dessus et le fait que $\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_E(kE) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout $k \leq r$, on déduit :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}} f_* \mathscr{O}_X(kE) = 0,$$

pour $i > 0$ et $k \leq r$.

La variété X est normale et le morphisme f est birationnel, donc d'après le Main Theorem de Zariski, on a :

$$\mathrm{R}^0 f_* \mathscr{O}_{\tilde{X}} = \mathscr{O}_X.$$

En utilisant la suite exacte ci-dessus et le lemme 2.2.4, on montre par récurrence que :

$$\mathrm{R}^0 f_* \mathscr{O}_{\tilde{X}}(kE) = \mathscr{O}_X$$

pour tout $k \geq 0$. □

2.2.3 Une récurrence

On va prouver la proposition 2.2.3 par récurrence. Pour ce faire, on va en fait démontrer un énoncé beaucoup plus précis. Introduisons quelques notations supplémentaires. Soit

$$X_n \overset{\pi_n}{\to} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \overset{\pi_1}{\to} X_0 = X,$$

une résolution magnifique de X. On considère les sous-catégories de $\mathrm{D^b}(X_n)$:

$$\mathscr{A}_{j,k_j} = {i_j^{(n)}}_* \left[q_j^* \mathrm{D^b}(Y_j) \otimes \mathscr{O}_{E_j^{(n)}} \left((m_j - k_j) E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)} \right) \right],$$

pour tous $0 \leq k_j \leq m_j - 1$ et $1 \leq j \leq n$.

Soit $1 \leq k \leq n$ et $k+1 \leq p \leq n$. On note $j_{k,p}^{(n)} : E_{k,p}^{(n)} \hookrightarrow E_k^{(n)}$ l'immersion de l'intersection $E_{k,p}^{(n)} = E_p^{(n)} \cap E_k^{(n)}$ qui est aussi la transformée totale de $E_{k,p}^{(p)} = E_p \cap E_k^{(p)}$ par $\pi_{p+1} \ldots \pi_n$ (voir les points 3 et 4 de la définition 2.1.3). Ainsi on a un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
E_{k,p}^{(n)} = E_p^{(n)} \cap E_k^{(n)} \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[d, "\pi_{p+1} \ldots \pi_n"] \\
E_{k,p}^{(p)} = E_p \cap E_k^{(p)} \arrow[r] & X_k
\end{tikzcd}$$

Si $Y_{k,p}$ est l'intersection $Y_p \cap E_k^{(p-1)}$ alors on appelle $q_{k,p}$ la projection plate $E_{k,p}^{(n)} \to Y_{k,p}$. De nouveau, les points 3 et 4 de la définition 2.1.3 impliquent

que l'intersection $E_p \cap E_k^{(p)}$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $E_k^{(p-1)}$ le long de $Y_{k,p}$. On a donc un autre diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
 & E_{k,p}^{(n)} \arrow[r, "j_{k,p}^{(n)}"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "q_{k,p}"'] & E_k^{(n)} \arrow[d, "\pi_{p+1}\dots\pi_n|_{E_k^{(n)}}"] \\
 & E_{k,p}^{(p)} \arrow[r, "j_{k,p}^{(p)}"] \arrow[d] & E_k^{(p)} \arrow[d, "\pi_p|_{E_k^{(p)}}"] \\
Y_{k,p} = Y_p \cap E_k^{(p-1)} \arrow[r] & {} \arrow[r] & E_k^{(p-1)}
\end{tikzcd}$$

Pour $k+1 \leq p \leq n$, soit m_p l'entier positif tel que $\omega_{X_p} = \pi_p^* \omega_{X_{p-1}} \otimes \mathscr{O}_{X_p}(m_p E_p)$. D'après la proposition 2.1.10, on a aussi :

$$\omega_{E_k^{(p)}} = \pi_p^*|_{E_k^{(p)}} \omega_{E_k^{(p-1)}} \otimes \mathscr{O}_{E_k^{(p)}}(m_p E_{k,p}^{(p)}). \tag{2.1}$$

On définit :

$$\mathscr{B}_{p,k_p}^k = j_{k,p\,*}^{(n)} \left[q_{k,p}^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{k,p}) \otimes \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}} \left((m_p - k_p) E_{k,p}^{(n)} + \sum_{i=p+1}^{n} m_i E_{k,i}^{(n)} \right) \right]$$
$$\subset \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)}),$$

pour tout $0 \leq k_p \leq m_p - 1$. Finalement, on pose :

$$\mathscr{C}_{k,r_k}^k = q_k^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k) \otimes \mathscr{O}_{E_k^{(n)}} \left((m_k - r_k) E_k^{(n)} + \sum_{i=k+1}^{n} m_i E_i^{(n)} \right) \subset \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)}),$$

pour tout $0 \leq r_k \leq m_k - 1$.

L'énoncé qui suit est un raffinement de 2.2.3 et c'est lui que nous allons prouver par récurrence :

Proposition 2.2.6. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a une décomposition semi-orthogonale :*

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_n) = \langle \mathscr{A}_{1,0}, \dots, \mathscr{A}_{1,m_1-1}, \dots, \mathscr{A}_{j,k_j}, \dots, \mathscr{A}_{n,m_n-1}, \mathscr{D}_{X_n} \rangle,$$

où $\mathscr{D}_{X_n}$ est l'orthogonale à gauche de la sous-catégorie pleine et admissible engendrée par les $\mathscr{A}_{j,k_j}$. On a en outre l'inclusion :

$$(\pi_1 \dots \pi_n)^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathscr{D}_{X_n}.$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a également les décompositions semi-orthogonales :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)}) = \langle \mathscr{C}^k_{k,0}, \dots, \mathscr{C}^k_{k,m_k-1}, \mathscr{B}^k_{k+1,0}, \dots, \mathscr{B}^k_{p,k_p}, \dots, \mathscr{B}^k_{n,m_n-1}, \mathscr{D}_{E_k^{(n)}} \rangle,$$

où $\mathscr{D}_{E_k^{(n)}}$ est l'orthogonale à gauche de la sous-catégorie pleine et admissible engendrée par les $\mathscr{C}^k_{k,r_k}$ et les $\mathscr{B}^k_{p,k_p}$. On a en outre l'inclusion :

$$q_k^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k) \subset \mathscr{D}_{E_k^{(n)}}.$$

Démonstration. Supposons que $n = 1$. Le morphisme $\pi_1 : X_1 \to X$ est l'éclatement de X le long de Y_1. D'après la définition 2.1.3, le diviseur exceptionnel E_1 et la variété X_1 sont lisses, le morphisme $\pi_1 : E_1 \to Y_1$ est plat et Y_1 est lisse. De plus, la formule d'adjonction donne :

$$\omega_{E_1} = q_1^* \omega_X|_{Y_1} \otimes \mathscr{O}_{E_1}((m_1+1)E_1).$$

Ainis, d'après le lemme 2.2.4, les fibrés en droites $\mathscr{O}_{E_1}(kE_1)$ sont tous relativement exceptionnels pour le foncteur $q_{1*} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_1)$. Or q_1 a Tor-dimension finie (car il est plat), donc les catégories $\mathscr{O}_{E_1}(kE_1) \otimes q_1^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_1) = \mathscr{C}^1_{1,m_1-k}$ sont des sous-catégories admissibles et pleines de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ ([Kuz08b], lemma 2.4). De plus, le lemme 2.2.4 et la formule de projection nous montrent que l'on a une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1) = \langle \mathscr{C}^1_{1,0}, \dots \mathscr{C}^1_{1,m_1-1}, \mathscr{D}_{E_1} \rangle,$$

et que l'on a l'inclusion $q_1^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_1) \subset \mathscr{D}_{E_1}$.

On peut à présent appliquer la proposition 1.1.6 à l'immersion $i_1 : E_1 \hookrightarrow X_1$, et on trouve une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_1) = \langle \mathscr{A}_{1,0}, \dots, \mathscr{A}_{1,m_1-1}, \mathscr{D}_{X_1} \rangle,$$

avec $\mathscr{D}_{X_1} = \{F \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X),\ i_1^* F \in \mathscr{D}_{E_1}\}$. Soit $G \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a $(\pi_1 i_1)^* G = q_1^*(G|_{Y_1})$. Mais $G|_{Y_1} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_1)$, d'où on tire $q_1^*(G|_{Y_1}) \in \mathscr{D}_{E_1}$, c'est-à-dire $i_1^*(\pi_1^* G) \in \mathscr{D}_{E_1}$. Ainsi on a montré que $\pi_1^*(\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)) \subset \mathscr{D}_{X_1}$, ce qui conclut la preuve de la proposition dans le cas $n = 1$.

Soit $n \geq 2$ et supposons que la proposition soit vraie au rang $n-1$. On va montrer que la proposition est vraie au rang n. En effet, soit X une variété Gorenstein à singularités rationnelles et soit :

$$X_n \overset{\pi_n}{\to} X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \overset{\pi_1}{\to} X_0 = X,$$

une n-résolution magnifique de X. Soit $1 \leq k \leq n$, d'après les points 2 et 4 de la définition 2.1.3, on sait que E_k admet une $(n-k)$-résolution magnifique :

$$E_k^{(n)} \overset{\Pi_{n,n-1}}{\to} \cdots \to E_k^{(k+1)} \overset{\Pi_{k+1,k}}{\to} E_k^{(k)} = E_k.$$

C'est la succession d'éclatements le long des centres $Y_{k,k+1}, \ldots Y_{k,n}$. Par hypothèse de récurrence et par l'équation 2.1, on a une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)}) = \langle \mathscr{B}^k_{k+1,0}, \ldots, \mathscr{B}^k_{k+1,m_{k+1}-1}, \ldots, \mathscr{B}^k_{p,k_p}, \ldots, \mathscr{B}^k_{n,m_n-1}, \widetilde{\mathscr{D}_{E_k^{(n)}}} \rangle,$$

avec l'inclusion :

$$(\Pi_{k+1,k} \ldots \Pi_{n,n-1})^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(E_k) \subset \widetilde{\mathscr{D}_{E_k^{(n)}}}.$$

$\boxed{\textbf{Étape 1}}$.

On va prouver le fait suivant :

Assertion 1. *Pour $0 \leq r_k \leq m_k - 1$, les catégories :*

$$\mathscr{C}^k_{k,r_k} = q_k^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k) \otimes \mathscr{O}_{E_k^{(n)}} \left((m_k - r_k) E_k^{(n)} + \sum_{i=k+1}^{n} m_i E_i^{(n)} \right)$$

sont des sous-catégories pleines et admissibles de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)})$. Elles sont orthogonales à droite les unes aux autres et elle sont également orthogonales à droite aux sous-catégories $\mathscr{B}^k_{p,k_p}$ pour $k+1 \leq p \leq n$ et $0 \leq k_p \leq m_p - 1$. En outre, la catégorie $q_k^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k)$ est orthogonale à gauche aux sous-catégories $\mathscr{C}^k_{r_k,k}$ et $\mathscr{B}^k_{p,k_p}$.

Une simple variation autour de la preuve du cas $n = 1$ de la proposition montre que les catégories $\mathscr{C}^k_{k,r_k}$ sont des sous-catégories pleines et admissibles de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)})$ qui sont orthogonales à droite les unes aux autres. Les détails sont laissés au lecteur consciencieux. Ainsi, pour démontrer l'assertion 1, il nous reste à prouver (avec un abus de notation évident) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathscr{B}^k_{p,k_p}, \mathscr{C}^k_{k,r_k}) &= 0, \\ \mathrm{Hom}(q_k^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k), \mathscr{C}^k_{k,r_k}) &= 0, \\ \mathrm{Hom}(q_k^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k), \mathscr{B}^k_{p,k_p}) &= 0. \end{aligned}$$

On commence avec la première équation, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Hom}\Bigg(j^{(n)}_{k,p\,*}(q^*_{k,p}\mathrm{D^b}(Y_{k,p})\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_{k,p}}((m_p-k_p)E^{(n)}_{k,p}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE^{(n)}_{k,i})),$$
$$q^*_k\mathrm{D^b}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}((m_k-r_k)E^{(n)}_k+\sum_{i=k+1}^{n}m_iE^{(n)}_i)\Bigg)=0.$$

D'après l'équation 2.1 et la formule d'adjonction, on a :

$$\omega_{E^{(n)}_k}=\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}\left((m_k+1)E^{(n)}_k+\sum_{i=k+1}^{n}m_iE^{(n)}_{k,i}\right)\otimes q^*_{k,n}\omega_{X_k}|_{Y_{k+1}}.$$

D'où, par la dualité de Serre (notons que $\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}(E^{(n)}_i)=\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}(E^{(n)}_{k,i})$ car les intersections sont propres) :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}\Bigg(j^{(n)}_{k,p\,*}(q^*_{k,p}\mathrm{D^b}(Y_{k,p})\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_{k,p}}((m_p-k_p)E^{(n)}_{k,p}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE^{(n)}_{k,i})),\\&\quad q^*_k\mathrm{D^b}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}((m_k-r_k)E^{(n)}_k+\sum_{i=k+1}^{n}m_iE^{(n)}_i)\Bigg)\\=&\mathrm{Hom}\Bigg(q^*_k\mathrm{D^b}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}((-1-r_k)E^{(n)}_k),\\&\quad j^{(n)}_{k,p\,*}(q^*_{k,p}\mathrm{D^b}(Y_{k,p})\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_{k,p}}((m_p-k_p)E^{(n)}_{k,p}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE^{(n)}_{k,i}))\Bigg)^\vee.\end{aligned}$$

On a utilisé la formule :

$$\begin{aligned}&q^*_k\mathrm{D^b}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}\left((m_k-r_k)E^{(n)}_k+\sum_{i=k+1}^{n}m_iE^{(n)}_i\right)\\=\;&q^*_k\mathrm{D^b}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E^{(n)}_k}((-1-r_k)E^{(n)}_k)\otimes\omega_{E^{(n)}_k}\end{aligned}$$

dans l'égalité précédente. Par adjonction, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\Bigg(q_k^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E_k^{(n)}}((-1-r_k)E_k^{(n)}),\\
&\qquad j_{k,p\,*}^{(n)}(q_{k,p}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{k,p})\otimes\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}((m_p-k_p)E_{k,p}^{(n)}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE_{k,i}^{(n)}))\Bigg)\\
=&\mathrm{Hom}\Bigg((j_{k,p}^{(n)})^*(q_k^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E_k^{(n)}}((-1-r_k)E_k^{(n)})),\\
&\qquad q_{k,p}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{k,p})\otimes\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}((m_p-k_p)E_{k,p}^{(n)}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE_{k,i}^{(n)})\Bigg).
\end{aligned}$$

Mais $(j_{k,p}^{(n)})^*(q_k^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k))\subset q_{k,p}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{k,p})$ et $j_p^*\mathscr{O}_{E_k^{(n)}}(E_k^{(n)})=q_{k,p}^*\mathscr{O}_{Y_{k,p}}(E_k^{(p-1)})$ car on a un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
E_{k,p}^{(n)} \arrow[r, "j_{k,p}^{(n)}"] \arrow[d, "q_{k,p}"'] & E_k^{(n)} \arrow[d, "\pi_p\ldots\pi_n|_{E_k^{(n)}}"] \\
Y_{k,p} \arrow[r] & E_k^{(p-1)}
\end{tikzcd}$$

Dès lors, pour montrer que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\Bigg((j_{k,p}^{(n)})^*(q_k^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k)\otimes\mathscr{O}_{E_k^{(n)}}((-1-r_k)E_k^{(n)})),\\
&q_{k,p}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{k,p})\otimes\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}((m_p-k_p)E_{k,p}^{(n)}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE_{k,i}^{(n)})\Bigg)=0,
\end{aligned}$$

il suffit de prouver que :

$$q_{k,p_*}\left(\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}((m_p-k_p)E_{k,p}^{(n)}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE_{k,i}^{(n)})\right)=0. \tag{2.2}$$

Le morphisme $q_{k,p}:E_{k,p}^{(n)}\to Y_{k,p}$ se factorise par $\theta_{k,p}^n:E_{k,p}^{(n)}\to E_{k,p}^{(p)}$ suivi de la projection $\Pi_{p,p-1}:E_{k,p}^{(p)}\to Y_{k,p}$. Mais l'application $\theta_{k,p}^n$ est la suite d'éclatements le long des centres normalement plats $Y_i\cap E_{k,p}^{(i-1)}$, dont

les diviseurs exceptionnels dans $E_{k,p}^{(n)}$ sont les $E_{k,i}^{(n)}|_{E_{k,p}^{(n)}}$, pour $i = p+1 \dots n$. En outre, les points 3 et 4 de la définition 2.1.3 la proposition 2.1.10 nous assurent que :

$$\omega_{E_{k,p}^{(n)}} = (\theta_{k,p}^n)^* \omega_{E_{k,p}^{(p)}} \otimes \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}(\sum_{i=p+1}^{n} m_i E_{k,i}^{(n)}).$$

On applique alors le corollaire 2.2.5 au morphisme $\theta_{k,p}^n : E_{k,p}^{(n)} \to E_{k,p}^{(p)}$ et on obtient :

$$\theta_{k,p*}^n \left(\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}((m_p - k_p)E_{k,p}^{(n)} + \sum_{i=p+1}^{n} m_i E_{k,i}^{(n)}) \right) = \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(p)}}((m_p - k_p)E_{k,p}^{(p)}),$$

de telle sorte que :

$$q_{k,p*} \left(\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}((m_p - k_p)E_{k,p}^{(n)} + \sum_{i=p+1}^{n} m_i E_{k,i}^{(n)}) \right) = \widetilde{\Pi_{p,p-1}}_* \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(p)}}((m_p - k_p)E_{k,p}^{(p)}).$$

Ainsi, grâce à l'équation 2.1 et à la formule d'adjonction, on trouve :

$$\omega_{E_{k,p}^{(p)}} = \widetilde{\Pi_{p,p-1}}^* \omega_{E_k^{(p-1)}}|_{Y_{k,p}} \otimes \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(p)}}((m_p + 1)E_{k,p}^{(p)}).$$

Or, d'après le lemme 2.2.4, on a l'annulation :

$$\widetilde{\Pi_{p,p-1}}_* \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(p)}}((m_p - k_p)E_{k,p}^{(p)}) = 0,$$

pour tout $0 \leq k_p \leq m_p - 1$, ce qui est précisément ce que l'on voulait établir.

Pour conclure l'étape 1, on doit démontrer les inclusions :

$$q_k^* \mathrm{D^b}(Y_k) \subset {}^{\perp}\mathscr{C}_{k,r_k} \text{ et } q_k^* \mathrm{D^b}(Y_k) \subset {}^{\perp}\mathscr{B}_{p,k_p}^k$$

pour tout $k+1 \leq p \leq n$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left[q_k^* \mathrm{D^b}(Y_k), (j_{k,p}^{(n)})_* \left(q_{k,p}^* \mathrm{D^b}(Y_{k,p}) \otimes \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}((m_p - k_p)E_{k,p}^{(n)} + \sum_{i=p+1}^{n} m_i E_{k,i}^{(n)}) \right) \right] \\
&= \mathrm{Hom}\left[(j_{k,p}^{(n)})^* q_k^* \mathrm{D^b}(Y_k), q_{k,p}^* \mathrm{D^b}(Y_{k,p}) \otimes \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}} \left((m_p - k_p)E_{k,p}^{(n)} + \sum_{i=p+1}^{n} m_i E_{k,i}^{(n)} \right) \right], \\
&\subset \mathrm{Hom}\left[q_{k,p}^* \mathrm{D^b}(Y_{k,p}), q_{k,p}^* \mathrm{D^b}(Y_{k,p}) \otimes \mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}} \left((m_p - k_p)E_{k,p}^{(n)} + \sum_{i=p+1}^{n} m_i E_{k,i}^{(n)} \right) \right],
\end{aligned}$$

puisque $(j_{k,p}^{(n)})^* q_k^* \mathrm{D^b}(Y_k) \subset q_{k,p}^* \mathrm{D^b}(Y_{k,p})$.

Mais on a déjà montré dans la formule 2.2 que :

$$q_{k,p*}\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}\left((m_p-k_p)E_{k,p}^{(n)}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE_{k,i}^{(n)}\right)=0,$$

d'où :

$$\mathrm{Hom}\left[q_{k,p}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{k,p}),q_{k,p}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{k,p})\otimes\mathscr{O}_{E_{k,p}^{(n)}}\left((m_p-k_p)E_{k,p}^{(n)}+\sum_{i=p+1}^{n}m_iE_{k,i}^{(n)}\right)\right]$$
$$=0.$$

Ceci montre que $q_k^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k)\subset{}^{\perp}\mathscr{B}_{p,k_p}^k$, pour tout $k+1\leq p\leq n$. L'inclusion $q_k^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k)\subset{}^{\perp}\mathscr{C}_{k,r_k}$ est prouvée de la même façon. L'étape 1 est donc complète, c'est-à-dire que l'on a une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)})=\langle\mathscr{C}_{k,0}^k,\ldots,\mathscr{C}_{k,m_k-1}^k,\mathscr{B}_{k+1,0}^k,\ldots,\mathscr{B}_{p,k_p}^k,\ldots,\mathscr{B}_{n,m_n-1}^k,\mathscr{D}_{E_k^{(n)}}\rangle,$$

avec l'inclusion :

$$q_k^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k)\subset\mathscr{D}_{E_k^{(n)}}.$$

Étape 2

On veut utiliser les décompositions semi-orthogonales des $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_k^{(n)})$ en vue d'obtenir une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_n)=\langle\mathscr{A}_{1,0},\ldots,\mathscr{A}_{1,m_1-1},\ldots,\mathscr{A}_{j,k_j},\ldots,\mathscr{A}_{n,m_n-1},\,\mathscr{D}_{X_n}\rangle,$$

avec l'inclusion :

$$(\pi_1\ldots\pi_n)^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)\subset\mathscr{D}_{X_n},$$

où $\mathscr{D}_{X_n}$ est l'orthogonale à gauche de la sous-catégorie pleine et admissible engendrée par les $\mathscr{A}_{j,k_j}$.

Soit $j\in[1,\ldots,n]$. On rappelle que $\mathscr{A}_{j,k_j}=(i_j^{(n)})_*\mathscr{C}_{j,k_j}^j$. On applique le lemme 1.1.6 aux décompositions semi-orthogonales de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_j^{(n)})$ pour $0\leq k_j\leq m_j-1$, et on trouve que les $\mathscr{A}_{j,k_j}$ sont des sous-catégories admissibles et pleines de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_n)$ qui sont orthogonales à gauche les unes aux autres.

Ainis, il nous reste à démontrer que pour $1\leq j<p\leq n$, pour $0\leq k_j\leq m_j-1$ et pour $0\leq k_p\leq m_p-1$, on a :

$$\mathrm{Hom}\Bigg(i_p^{(n)}{}_*(q_p^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_p)\otimes\mathscr{O}_{E_p^{(n)}}((m_p-k_p)E_p^{(n)}+\sum_{t=p+1}^{n}m_tE_t^{(n)})),$$
$$i_j^{(n)}{}_*(q_j^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_j)\otimes\mathscr{O}_{E_j^{(n)}}((m_j-k_j)E_j^{(n)}+\sum_{t=j+1}^{n}m_tE_t^{(n)}))\Bigg)=0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{Hom}\Bigg(i_j^{(n)*}i_p^{(n)}{}_*(q_p^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_p)\otimes\mathscr{O}_{E_p^{(n)}}((m_p-k_p)E_p^{(n)}+\sum_{t=p+1}^{n}m_tE_t^{(n)})),$$
$$q_j^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_j)\otimes\mathscr{O}_{E_j^{(n)}}((m_j-k_j)E_j^{(n)}+\sum_{t=j+1}^{n}m_tE_t^{(n)})\Bigg)=0.$$

Cela donne avec nos notations :

$$\mathrm{Hom}\left[i_j^{(n)*}i_p^{(n)}{}_*\left(q_p^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_p)\otimes\mathscr{O}_{E_p^{(n)}}((m_p-k_p)E_p^{(n)}+\sum_{t=p+1}^{n}m_tE_t^{(n)})\right),\mathscr{C}_{j,k_j}^{j}\right]=0.$$

Mais on a un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd}
E_{j,p}^{(n)} \arrow[r, "j_{j,p}^{(n)}"] \arrow[d, "j_{p,j}^{(n)}"'] & E_j^{(n)} \arrow[d, "i_j^{(n)}"] \\
E_p^{(n)} \arrow[r, "i_p^{(n)}"] & X_n
\end{tikzcd}$$

L'intersection $E_j^{(n)}\cap E_p^{(n)}=E_{j,p}^{(n)}$ est propre et toutes les variétés de ce diagramme sont lisses donc ce carré est Tor-neutre ([Kuz06b], corollaire 2.27), d'où :

$$i_j^{(n)*}i_p^{(n)}{}_*(\mathscr{F})=j_{j,p}^{(n)}{}_*j_{p,j}^{(n)*}(\mathscr{F}),$$

pour tout $\mathscr{F}\in\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_p^{(n)})$. On en tire les égalités :

$$
\begin{aligned}
& i_j^{(n)*} i_p^{(n)}{}_* \left(q_p^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_p) \otimes \mathscr{O}_{E_p^{(n)}}((m_p - k_p)E_p^{(n)} + \sum_{t=p+1}^{n} m_t E_t^{(n)}) \right) \\
& = j_{j,p}^{(n)}{}_* j_{p,j}^{(n)*} \left(q_p^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_p) \otimes \mathscr{O}_{E_p^{(n)}}((m_p - k_p)E_p^{(n)} + \sum_{t=p+1}^{n} m_t E_t^{(n)}) \right) \\
& = j_{j,p}^{(n)}{}_* \left(q_{j,p}^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_{j,p}) \otimes \mathscr{O}_{E_{j,p}^{(n)}}((m_p - k_p)E_{j,p}^{(n)} + \sum_{t=p+1}^{n} m_t E_{j,t}^{(n)}) \right) \\
& = \mathscr{B}_{p,k_p}^j .
\end{aligned}
$$

Les décompositions semi-orthogonales que l'on a trouvées pour les $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_j^{(n)})$ dans l'Étape 1 de cette preuve montrent que pour $1 \leq j < p \leq n$, pour $0 \leq k_j \leq m_j - 1$ et pour $0 \leq k_p \leq m_p - 1$ on a :

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{B}_{p,k_p}^j, \mathscr{C}_{j,k_j}^j) = 0,$$

ce qui est précisément l'annulation que l'on voulait démontrer. Dès lors, on a bien une décomposition semi-orthogonale :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_n) = \langle \mathscr{A}_{1,0}, \ldots, \mathscr{A}_{1,m_1-1}, \ldots, \mathscr{A}_{j,k_j}, \ldots, \mathscr{A}_{n,m_n-1}, \mathscr{D}_{X_n} \rangle.$$

L'inclusion :

$$(\pi_1 \ldots \pi_n)^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathscr{D}_{X_n}$$

est aisément démontrée si l'on remarque que pour $1 \leq j \leq n$, on a :

$$i_j^{(n)*} \left((\pi_1 \ldots \pi_n)^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \right) \subset q_j^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_k),$$

et que pour $0 \leq k_j \leq m_j - 1$:

$$\mathrm{Hom} \left[q_j^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_j), q_j^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_j) \otimes \mathscr{O}_{E_j^{(n)}} \left((m_j - k_j)E_j^{(n)} + \sum_{t=j+1}^{n} m_t E_t^{(n)} \right) \right] = 0,$$

car $q_j^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y_j) \subset \mathscr{D}_{E_j^{(n)}}$. Ceci conclut la preuve de l'Étape 2 et donc aussi la preuve de la proposition 2.2.6. □

2.2.4 Quelques questions

Dans cette section, on présente deux questions qui se sont posées au cours de ce chapitre. On a vu dans l'exemple 2.1.7 que la variété tangente à $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$ n'admet pas de résolution magnifique des singularités. On ne peut donc pas appliquer le théorème 2.2.1 pour trouver une résolution catégorique crépante de cette développable.

Question 2.2.7. *La variété tangente à* $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$ *admet-elle une résolution catégorique crépante ?*

Dans le chapitre 1 de cette thèse, on a vu que les résolutions catégoriques fortement crépantes admettent des bonnes propriétés de minimalité. Or notre résultat principal nous permet seulement de démontrer que les variétés déterminantielles Gorenstein admettent des résolutions catégoriques crépantes. On peut dès lors se demander :

Question 2.2.8. *Quelles sont les variétés déterminantielles qui admettent des résolutions catégoriques fortement crépantes ?*

On notera que les variétés déterminantielles carrées admettent des petites résolutions ([ACGH85], section 2.2), qui sont donc des résolutions catégoriques fortement crépantes. La question ci-dessus n'est donc pertinente que pour les variétés déterminantielles symétriques et pfaffiennes. Kuznetsov montre que les variétés pfaffiennes de rang ≤ 4 dans un espace V de dimension impaire admettent des résolutions catégoriques fortement crépantes ([Kuz08b], section 8).

Ces deux questions me semblent intéressantes et sont intimement liées à la construction de duales homologiques projectives pour les grassmanniennes $\mathrm{G}(2,\mathrm{n})$ ([Kuz06a]) et $\mathrm{G}(3,6)$ [3] ([Del11]). On s'intéressera plus particulièrement à la question 2.2.7. Dans le dernier chapitre de cette thèse, on démontrera que toutes les développables des variétés qui apparaissent dans la troisième ligne du carré magique de Freudenthal admettent une résolution catégorique crépante. En particulier, le résultat suivant donne une réponse à la question 2.2.7 :

Théorème 2.2.9. *La variété tangente à* $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$ *admet une résolution catégorique crépante.*

3. Une duale homologique de $\mathrm{G}(3,6)$ devrait être une resolution categorique crépante d'un recouvrement double de $\mathbb{P}^{19}$ ramifié le long de la variété tangente de $\mathrm{G}(3,6)$. Les singularités dudit recouvrement sont sans aucun doute très proches des singularités de cette variété tangente.

Chapitre 3

Categorical crepant resolutions and the Tits-Freudenthal magic square

3.1 Main result

The main result of this chapter is the following :

Theorem II. *The tangent developables of the following embedded varieties admit categorical crepant resolutions of singularities :*
- *The symplectic Grassmannian* $\mathrm{G}_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$,
- *The Grassmannian* $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$,
- *The spinor variety* $\mathbb{S}_{12} \subset \mathbb{P}^{31}$,
- *The octonionic Grassmannian :* $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{O}^3, \mathbb{O}^6) \subset \mathbb{P}^{55}$.

These four varieties have a uniform description in terms of complex composition algebras (this will be discussed in section 2). They are the "symplectic Grassmannians" of $\mathbb{A}^3 \subset \mathbb{A}^6$ for $\mathbb{A}$ the complexification of $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ or $\mathbb{O}$ and they appear as the varieties in the third row of the Tits-Freudenthal magic square (see [LM01]).

In chapter 2 of this thesis, we define the notion of *wonderful resolution of singularities* (see Definition 2.1.3) and we prove the following (see Theorem 2.2.1) :

Theorem 3.1.1. *Let X be a Gorenstein variety with rational singularities. Assume that X admits a wonderful resolution of singularities, then X admits a categorical crepant resolution of singularities.*

As a corollary of this result, we obtain (see Corollary 2.2.2) :

Corollary 3.1.2. *All Gorenstein determinantal varieties (square, symmetric or skew-symmetric) admit categorical crepant resolutions of singularities.*

In Example 2.1.7, we observed that the tangent developable of $\mathrm{G}(3,6)$ does not admit a wonderful resolution of singularities. So the construction of a categorical crepant resolution of singularities for the tangent variety of $\mathrm{G}(3,6)$ was still an open question. We solve this problem in the present chapter. Note that the construction of such a categorical resolution of singularities could also be useful for the (still conjectural) determination of a homological projective dual to $\mathrm{G}(3,6)$ (see [Del11]).

3.2 Resolution of singularities and the Tits-Freudenthal magic square

3.2.1 Basic description of the magic square

One incarnation of the Tits-Freudenthal magic square is a table of 16 varieties which are linked to each other by very interesting geometric and representation-theoretic properties (see [LM01] for a detailed study of the magic square) :

$$\begin{array}{cccc} v_2(Q_1) & \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}) & \mathrm{G}_\omega(2,6) & \mathbb{OP}^2_0 \\ v_2(\mathbb{P}^2) & \mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2 & \mathrm{G}(2,6) & \mathbb{OP}^2 \\ \mathrm{G}_\omega(3,6) & \mathrm{G}(3,6) & \mathbb{S}_{12} & \mathrm{E}_7/\mathrm{P}_7 \\ \mathrm{F}_4^{\mathrm{ad}} & \mathrm{E}_6^{\mathrm{ad}} & \mathrm{E}_7^{\mathrm{ad}} & \mathrm{E}_8^{\mathrm{ad}} \end{array}$$

The second row of this table enumerates the Severi varieties. Recall that a Severi variety is a smooth variety $X\subset\mathbb{P}^N$ such that $\frac{3}{2}\dim X+2=N$ and the secant variety of X does not fill $\mathbb{P}^N$ (see [Zak93] for the classification of the Severi varieties). The varieties in the first row are hyperplane sections of the Severi varieties. The ones in the last row are the closed orbits of the adjoint representations of the exceptional groups $\mathrm{F}_4,\mathrm{E}_6,\mathrm{E}_7$ and E_8, while the third row gives the varieties of lines through a point of the corresponding adjoint varieties.

One can also describe these varieties in terms of complex composition algebras. Let $\mathbb{A}$ denotes the complexification of one of the four real division algebra ($\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ and $\mathbb{O}$). Let $W_{\mathbb{A}}$ be the space of 3×3 Hermitian matrices over $\mathbb{A}$. The varieties of the second row can be seen as the varieties of matrices of rank 1 in $\mathbb{P}(W_{\mathbb{A}})$, thus they are Veronese embeddings of the projective planes over $\mathbb{A}$ (we will denote them by $\mathbb{AP}^2$). The varieties in the first row are the traceless matrices of rank 1 in $\mathbb{P}(W_{\mathbb{A}})$: they are hyperplane sections of the previous ones. The varieties in the third row can be described as $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$, the isotropic Grassmannians of $\mathbb{A}^3$ in $\mathbb{A}^6$. The varieties in the last row are the so-called *F-symplecta*, which we denote by $E(\mathbb{A})^{ad}$. We refer to [LM01] for more details on the description of the magic square in terms of complex composition algebras. In the following, we let $m_{\mathbb{A}}=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{A}$ and $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ denotes the groups : Sp_6, SL_6, Spin_{12} and E_7. We summarize our notations :

$\mathbb{A}$	$\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$	$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$	$\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$	$\mathbb{O}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$
$\mathbb{AP}^2_0$	$v_2(Q_1)$	$\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$	$\mathrm{G}_\omega(2,6)$	$\mathbb{OP}^2_0$
$\mathbb{AP}^2$	$v_2(\mathbb{P}^2)$	$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$	$\mathrm{G}(2,6)$	$\mathbb{OP}^2$
$\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$	$\mathrm{G}_\omega(3,6)$	$\mathrm{G}(3,6)$	$\mathbb{S}_{12}$	$\mathrm{E}_7/\mathrm{P}_7$
$E(\mathbb{A})^{ad}$	$\mathrm{F}_4^{\mathrm{ad}}$	$\mathrm{E}_6^{\mathrm{ad}}$	$\mathrm{E}_7^{\mathrm{ad}}$	$\mathrm{E}_8^{\mathrm{ad}}$

We are especially interested in the varieties in the third row. Let us give another description of these varieties which is more concrete and which will be useful for further computations. The space $W_{\mathbb{A}}$ is naturally endowed with a cubic form : the determinant. We will denote it by C. Thus, C is a linear form $S^3W_{\mathbb{A}}\to\mathbb{C}$ and can also be considered as a linear map $S^2W_{\mathbb{A}}\to W^*_{\mathbb{A}}$. We denote by $V_{\mathbb{A}}$ the space $\mathbb{C}\oplus W_{\mathbb{A}}\oplus W^*_{\mathbb{A}}\oplus\mathbb{C}^*$, which coordinates are (α,A,B,β). Denote by ϕ the rational map :

$$\phi:\mathbb{P}(\mathbb{C}\oplus W_{\mathbb{A}})\dashrightarrow\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})$$

$$[\alpha:A]\longrightarrow[\tfrac{1}{6}\alpha^3:\alpha^2A:\alpha C(A^{\otimes 2}):\tfrac{1}{3}C(A^{\otimes 3})]$$

and denote by $\mathscr{Q}$ the quartic defined on $V_{\mathbb{A}}$ by :

$$\mathscr{Q}(\alpha,A,B,\beta)=(3\alpha\beta-\frac{1}{2}\langle A,B\rangle)^2+\frac{1}{3}\big(\beta C(A^{\otimes 3})+\alpha C^*(B^{\otimes 3})\big)$$
$$-\frac{1}{6}\langle C^*(B^{\otimes 2}),C(A^{\otimes 2})\rangle,$$

where $\langle,\rangle$ is the natural pairing between $W_{\mathbb{A}}$ and $W^*_{\mathbb{A}}$ and C^* denotes the determinant on $W^*_{\mathbb{A}}$. The equation of the secant variety to $\mathbb{AP}^2\subset\mathbb{P}(W_{\mathbb{A}})$ is $\{C(A^{\otimes 3})=0\}$. The following result is proved in [LM01] :

Theorem 3.2.1. *The variety $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)\subset\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})$ is the image of the rational map ϕ. The quartic $\mathscr{Q}$ is an $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$-invariant form on $V_{\mathbb{A}}$ and the hypersurface $\mathscr{Q}=0$ is the tangent variety of $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ in $\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})$.*

3.2.2 Desingularization of the tangent variety of $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$

The orbit stratification of the action of $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ on $\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})$ is given as follows (in the upper parentheses, we let the dimension of the corresponding orbit) :

$$\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)^{(3m_{\mathbb{A}}+3)}\subset\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))^{(5m_{\mathbb{A}}+4)}\subset\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))^{(6m_{\mathbb{A}}+6)}\subset\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}}),$$

where $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is the variety of stationary bisecants to $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ and $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is the tangent variety to $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. The singular locus of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ and the singular locus of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. We refer to [LM01] for more details. One should however note

that there is a slight mistake in prop 5.10 of [LM01]. Indeed, $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is not the triple locus of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. One can check by a simple Taylor expansion of the equation of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ that the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at any point of $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ (for instance $[1:0:0:0]$) is a double hyperplane (this will be done explicitly in the proof of Theorem 3.2.5). Landsberg and Manivel also provide explicit desingularizations of the varieties $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ and $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. The following propositions are proved in Section 7 of [LM01] :

Proposition 3.2.2. *There is a natural diagram :*

$$\begin{tikzcd}
F = \tilde{Q}^{\dim\mathbb{A}+2} \arrow[r, "q"] \arrow[d, hook] & \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6) \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}(\mathscr{S}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\theta"] & \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) \\
{\mathrm{Sp}_6}^{ad}(\mathbb{A}) &
\end{tikzcd}$$

where the map $p:\mathbb{P}(\mathscr{S})\to\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is a resolution of singularities.

Here ${\mathrm{Sp}_6}^{ad}(\mathbb{A})$ is the closed orbit of the adjoint representation of $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$. The bundle $\mathscr{S}$ is a homogeneous vector bundle on ${\mathrm{Sp}_6}^{ad}(\mathbb{A})$. The map θ makes the exceptional divisor F of p a fibration into smooth quadrics of dimension $\dim\mathbb{A}+2$ over ${\mathrm{Sp}_6}^{ad}(\mathbb{A})$, while the map q makes it a fibration into $\mathbb{AP}^2$ over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. Note that the variety $\mathbb{P}(\mathscr{S})$ is the blow-up of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$.

The orbit closure $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ can also be desingularized in a similar way :

Proposition 3.2.3. *Let $\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ be the projective bundle of embedded tangent spaces to $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)\subset\mathbb{P}(V_\mathbb{A})$. There is a natural diagram :*

$$\begin{tikzcd}
E = \widetilde{\sigma(\mathbb{AP}^2)} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, hook] & \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) \arrow[d, hook] \\
\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"] & \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) \\
\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6) &
\end{tikzcd}$$

where $\pi:\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)\to\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is a resolution of singularities.

The map $\rho:\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)\to\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is the projective bundle whose fiber over $x\in\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is the embedded projective tangent space to

$\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ at x. This map makes the exceptional divisor E a fibration over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ whose fibers are secant varieties of $\mathbb{AP}^2 \subset \mathbb{P}(W_\mathbb{A})$. We denote it by $E = \widetilde{\sigma(\mathbb{AP}^2)}$.

The map $\mu : E \to \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is not flat. Its fiber over $p \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a cone over $\mathbb{AP}^2$, while its fiber over $p \in \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a smooth quadric of dimension $\dim \mathbb{A} + 1$. The map $\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6) \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is the blow-up of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$.

The restriction of ρ to the singular locus of the exceptional divisor E makes it a fibration in $\mathbb{AP}^2$ over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. We denote it by $E_{sing} = \widetilde{\mathbb{AP}^2} \subset \widetilde{\sigma(\mathbb{AP}^2)}$. The divisor E can be desingularized by blowing up its singular locus and the desingularization is also the projectivization of a homogeneous bundle. One also notices that $\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is the blow-up of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. Since μ is smooth outside $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$, we have $E_{sing} \subset \mu^{-1}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. But a simple count of dimension shows that this inclusion is an equality. We refer to [LM01], section 7 for more details on this desingularization.

Remark 3.2.4. Though this resolution of singularities of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is quite simple and very explicit, it will not be useful in order to find a categorical crepant resolution of singularities of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. Indeed, one of the key points in order to construct such a categorical resolution would be to find a semi-orthogonal decomposition :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E) =&\langle \mu^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_E(r_\mathbb{A}E), \dots, \mu^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))) \\ &\otimes \mathscr{O}_E(E), \mathscr{D}\rangle,\end{aligned}$$

where E is the exceptional divisor of the resolution :

$$\pi : \tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6) \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),$$

$r_\mathbb{A}$ is the unique integer (well-defined since E is integral) such that :

$$K_{\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)} = \pi^* K_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{T}\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)}(r_\mathbb{A}E)$$

and $\mathscr{D}$ is the left orthognal to the subcategory generated by the :

$$\mu^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_E(kE),$$

for $1 \leq k \leq r_\mathbb{A}$. Unfortunately the map :

$$\mu : E \to \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$$

is not flat and $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is singular, thus $\mu^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$ lies a priori in $\mathrm{D}^-(E)$ and not in $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$ (we prove in the Appendix that μ has infinite Tor-dimension, so that $\mu^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$ really lies in $\mathrm{D}^-(E)$

and not in $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$). Though $\mu^*\mathrm{D}^-(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$ is an admissible subcategory of $\mathrm{D}^-(E)$, it is very unlikely (at least I am not able to prove it) that it is the negative completion of an admissible subcategory of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$.

At this point, one could argue that the definition of a categorical crepant resolution should be somehow modified and everything should be considered over $\mathrm{D}^-(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$. Thus, a categorical resolution of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ would be a triangulated category $\mathscr{T}$, with a natural functor :

$$\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^-(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))),$$

such that $\mathscr{T}$ is an admissible subcategory of $\mathrm{D}^-(Y)$, for some "geometric" resolution of singularities $\pi : Y \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. We should again have :

$$\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))) \subset \mathscr{T}$$

and crepancy would be described as before :

$$\pi^*_{\mathscr{T}}(\mathscr{F}) = \pi^!_{\mathscr{T}}(\mathscr{F}),$$

for all $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$, where $\pi^*_{\mathscr{T}}$ and $\pi^!_{\mathscr{T}}$ are the left and right adjoint of $\pi_{\mathscr{T}*}$. However, this definition is not meaningful if one does not require that $\mathscr{T}$ comes from an admissible subcategory of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$. Otherwise, the theorem of Grauert-Riemenschneider would show that for any resolution of singularities $\pi : Y \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$, the category $\pi^*\mathrm{D}^-(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$ is always a categorical crepant resolution of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. This is something we want to avoid, since we cannot consider $\pi^*\mathrm{D}^-(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$ as a "smooth" triangulated category.

Hence, we see that we have to find another resolution of singularities of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$, which would allow us to work over $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$.

Theorem 3.2.5. *Let $\pi_1 : X_1 \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ be the blow-up of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ and let $\pi_2 : X_2 \to X_1$ be the blow-up of X_1 along the strict transform of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ through π_1. The variety X_2 is a resolution of singularities of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$.*

Note that the strict transform of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ through π_1 (which we denote by $\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$) is the blow-up of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ and it is smooth by proposition 3.2.2. As a consequence, the sequence of blow-ups $\pi_1 : X_1 \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ and $\pi_2 : X_2 \to X_1$ only consists of blow-ups along smooth centers (which we will later prove to be normally flat). In such a case, the projection of any exceptional divisor to the corresponding center of blow-up has finite Tor-dimension, which will be very convenient for us.

Unfortunately, we are not able to describe this resolution as the total space of a projective bundle over a flag variety. In fact, I believe that there is no projective bundle over a flag variety whose total space coincide with X_2.

Thus, we have to check locally that this sequence of blow-ups really produces a resolution of singularities. We recall the equation of the tangent variety of $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)\subset\mathbb{P}(V_\mathbb{A})$:

$$\mathscr{Q}(\alpha,A,B,\beta)=(3\alpha\beta-\frac{1}{2}\langle A,B\rangle)^2+\frac{1}{3}\big(\beta C(A^{\otimes 3})+\alpha C^*(B^{\otimes 3})\big)$$
$$-\frac{1}{6}\langle C^*(B^{\otimes 2}),C(A^{\otimes 2})\rangle,$$

where (α,A,B,β) is a system of coordinates for $V_\mathbb{A}=\mathbb{C}\oplus W_\mathbb{A}\oplus W_\mathbb{A}^*\oplus\mathbb{C}$. In the following we denote by E_1 the exceptional divisor of π_1, E_2 the exceptional divisor for π_2 and $E_1^{(2)}$ the strict transform of E_1 through π_2. Before diving into the proof of theorem 3.2.5, we introduce some more notations in the diagrams below :

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[rr, hook, bend left] \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] & E_1^{(2)} \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_2 \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[ddl, bend left, "\pi"] \\
Y_2=\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) \arrow[rr, hook, bend left] \arrow[d] & E_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) \arrow[rr, hook, bend right] & Y_1=\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6) \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] & E_{1,2}:=E_1^{(2)}\cap E_2 \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{\pi}_{1,2}"] & E_1^{(2)} \arrow[d] \arrow[ddl, bend left, "\tilde{\pi}"] \\
\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) & \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\cap E_1 \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] & E_1 \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"] \\
 & & \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)
\end{tikzcd}$$

Proof. The proof of this result will be divided into several steps.

Step 1 : Tangent cones to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along its different orbits.

We are going to compute the tangent cones to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at points of its different strata. By $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$-equivariance, the hypersurface $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is normally flat along the orbit $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. So, proposition 3.2.3 shows that the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at any point $x\in\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a cone over a smooth quadric of dimension $m_{\mathbb{A}}+1$ with vertex $T_{\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),x}$ (where $T_{\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),x}$ is the embedded tangent space to $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at x).

We also compute the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at $x\in\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. Since $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is invariant under the action of $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ and $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a closed orbit in $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$, we only need to compute the tangent cone at any given point in $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$, say $x_0=(1,0,0,0)$. The first partial derivatives of $\mathscr{Q}$ all vanish at x_0 (because we know that $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is the singular locus of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. Furthermore, the polynomials $C(A^{\otimes 3})$ and $C^*(B^{\otimes 3})$ are homogeneous cubic polynomials in the variables A and B, thus we have (with a slight abuse of notations) :

$$\frac{\partial^2 C(A^{\otimes 3})}{\partial A^2}(1,0,0,0)=\frac{\partial^2 C^*(B^{\otimes 3})}{\partial B^2}(1,0,0,0)=0.$$

The polynomial $C(A^{\otimes 2})$ and $C^*(B^{\otimes 2})$ are homogeneous of degree 2, thus we have :

$$\frac{\partial^2\langle C^*(B^{\otimes 2}),C(A^{\otimes 2})\rangle}{\partial A^2}(1,0,0,0)=\frac{\partial^2\langle C^*(B^{\otimes 2}),C(A^{\otimes 2})\rangle}{\partial B^2}(1,0,0,0)=0.$$

The same type of arguments show that the only second partial derivative of Q which does not vanish at $(1,0,0,0)$ is $\frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta^2}(1,0,0,0)=18$. Thus the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at x_0 is given by the equation $18\beta^2=0$, this is a double hyperplane. This means that E_1, the exceptional divisor of $\pi_1:X_1\to\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$, is a fibration into doubled $\mathbb{P}^{3m_{\mathbb{A}}+2}$ over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. Suppose that $|E_1|_{red}$ is a Cartier divisor on X_1. Then X_1 is smooth along $|E_1|_{red}$ because $|E_1|_{red}$ is smooth. But $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is singular along $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$, so that X_1 is singular along $\pi_1^{-1}(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ (because π_1 is an isomorphism outside $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$). By semi-continuity of the multiplicity, X_1 is singular along the Zariski closure :

$$\overline{\pi_1^{-1}(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))}=\pi_1^*(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)).$$

But $E_1\cap\pi_1^*(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$ is not empty since it is the exceptional divisor of the blow-up of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. This is a contradiction and shows that $|E_1|_{red}$ is not Cartier on X_1.

The fact that $|E_1|_{red}$ is not Cartier on X_1 is a source of troubles. Indeed, we cannot discuss the smothness of X_1 along $E_1 \backslash E_1 \cap \pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$. So we have to introduce an intermediate device which enables us to prove the smoothness of X_2.

Note that we proved that all tangent cones to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ are at most quadratic, so that there is no point of multiplicity strictly bigger than two in $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$.

Step 2 : Resolution and polar divisors.

Step 2.1 : Strategy of the proof.

Let $p = (p_0, P_1, P_2, p_3) \in \mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})$ be a general point and let $P(\mathscr{Q}, p)$ be the polar to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ with respect to p, that is :

$$P(\mathscr{Q}, p) = \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \cap \{\mathscr{H}_p = 0\},$$

where $\mathscr{H}_p = p_0 \frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial \alpha} + P_1 \frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial A} + P_2 \frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial B} + p_3 \frac{\partial \mathscr{Q}}{\partial \beta} = 0$. It is clear that $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) = \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))_{sing} \subset P(\mathscr{Q}, p)$. Before going any further, we summarize the situation in the following diagram :

$$\begin{tikzcd}
P^{(2)}(\mathscr{Q}, p) \arrow[d, "q_2"] & E_1'^{(2)} = E_1^{(2)} \cap P^{(2)}(\mathscr{Q}, p) \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & E_1^{(2)} \subset X_2 \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[ddd, bend left, "\pi"] \\
P^{(1)}(\mathscr{Q}, p) \arrow[d, "q_1"] & E_1' = E_1 \cap P^{(1)}(\mathscr{Q}, p) \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d] & E_1 \subset X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
P(\mathscr{Q}, p) \arrow[rr, hook] & & \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))
\end{tikzcd}$$

Our goal is to show that the strict transform of $P(\mathscr{Q}, p)$ through $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ (which we denote by $P^{(2)}(\mathscr{Q}, p)$) is smooth. Indeed, if we do so, we get that X_2 is smooth along $P^{(2)}(\mathscr{Q}, p)$ (because $P^{(2)}(\mathscr{Q}, p)$ is a Cartier divisor on X_2). Moreover, if we can prove that X_2 is smooth along E_2 and along

$$E_1^{(2)} \backslash \left((P^{(2)}(\mathscr{Q}, p) \cup E_2) \cap E_1^{(2)} \right) = E_1^{(2)} \backslash \left(E_1'^{(2)} \cup E_{1,2} \right),$$

then we have won. Indeed, we already know that $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is smooth outside $P(\mathscr{Q}, p)$ so that X_2 is also smooth outside

$$P^{(2)}(\mathscr{Q}, p) \cup E_2 \cup \left(E_1^{(2)} \backslash \left(E_1'^{(2)} \cup E_{1,2} \right) \right)$$

because π is an isomorphism outside this locus and we have :

$$\pi\left(P^{(2)}(\mathscr{Q},p)\cup E_2\cup E_1^{(2)}\right)\subset P(\mathscr{Q},p).$$

Step 2.1 : Smoothness along $P(\mathscr{Q},p)^{(2)}$.
Step 2.2.a : Tangent cones to the polar divisors.

First, we show that $\{\mathscr{H}_p=0\}$ is a smooth cubic hypersurface. Indeed, let $y\in\{\mathscr{H}_p=0\}$ such that :

$$\frac{\partial\mathscr{H}_p}{\partial\alpha}(y)=\frac{\partial\mathscr{H}_p}{\partial A}(y)=\frac{\partial\mathscr{H}_p}{\partial B}(y)=\frac{\partial\mathscr{H}_p}{\partial\beta}(y)=0.$$

Since p is a general point, the above equalities imply that all second partial derivatives of $\mathscr{Q}$ vanish at y. But $\mathscr{Q}$ is a homogeneous polynomial, so that $\mathscr{Q}$ and all its first partial derivatives also vanish at y. As a consequence, y is a point of multiplicity 3 in $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$, which is impossible by hypothesis.

Let us also prove that the tangent cone to $P(\mathscr{Q},p)$ at any point $x\in\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a cone over a smooth quadric of dimension $m_{\mathbb{A}}$ with vertex $T_{\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),x}$.

Let $x\in\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$, the tangent space to $\{\mathscr{H}_p=0\}$ at x is given by the equation :

$$^t(\alpha,A,B,\beta)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha^2}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha\partial A}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha\partial B}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha\partial\beta}(x)\\ \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A\partial\alpha}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A^2}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A\partial B}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A\partial\beta}(x)\\ \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B\partial\alpha}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B\partial A}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B^2}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B\partial\beta}(x)\\ \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta\partial\alpha}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta\partial A}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta\partial B}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta^2}(x)\end{pmatrix}(p_0,P_1,P_2,p_3)=0$$

and the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at x is given by :

$$^t(\alpha,A,B,\beta)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha^2}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha\partial A}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha\partial B}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\alpha\partial\beta}(x)\\ \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A\partial\alpha}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A^2}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A\partial B}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial A\partial\beta}(x)\\ \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B\partial\alpha}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B\partial A}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B^2}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial B\partial\beta}(x)\\ \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta\partial\alpha}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta\partial A}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta\partial B}(x) & \frac{\partial^2\mathscr{Q}}{\partial\beta^2}(x)\end{pmatrix}(\alpha,A,B,\beta)=0.$$

But we already showed that the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ at any $x\in\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a cone with vertex $T_{\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),x}$ over a smooth quadric of dimension $m_{\mathbb{A}}+1$. From this we deduce two facts :

- the projective dual of this tangent cone is a smooth quadric in $T^\perp_{\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),x}$,
- the image of the Hessian matrix of $\mathscr{Q}$ (seen as a map $\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})\to\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})^*$) is the whole $T^\perp_{\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),x}$.

As a consequence, since p is general in $\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})$, the point :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \alpha^2}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \alpha \partial A}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \alpha \partial B}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \alpha \partial \beta}(x) \\ \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial A \partial \alpha}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial A^2}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial A \partial B}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial A \partial \beta}(x) \\ \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial B \partial \alpha}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial B \partial A}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial B^2}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial B \partial \beta}(x) \\ \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \beta \partial \alpha}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \beta \partial A}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \beta \partial B}(x) & \frac{\partial^2 \mathscr{Q}}{\partial \beta^2}(x) \end{pmatrix} (p_0, P_1, P_2, p_3)$$

does not lie in the projective dual to the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ at x. This amounts to say that the intersection of $T_{\{\mathscr{H}_p=0\},x}$ with the tangent cone to $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ at x is transverse. Hence, the tangent cone to $P(\mathscr{Q}, p)$ at x is a cone over a smooth quadric of dimension $m_{\mathbb{A}}$ with vertex $T_{\{\mathscr{H}_p=0\},x}$.

Now, we are interested in the tangent cone to $P(\mathscr{Q}, p)$ at $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$. We will compute it at $x_0 = (1, 0, 0, 0)$ for simplicity. The Taylor expansion of $\mathscr{Q}$ at x_0 is :

$$\mathscr{Q}(\alpha, A, B, \beta) = 9\beta^2 + \frac{1}{3}.C^*(B^{\otimes 3}) - 3\beta\langle A, B\rangle + \text{ terms of order 4},$$

and the expansion of $\mathscr{H}_p$ at x_0 is :

$$\mathscr{H}_p(\alpha, A, B, \beta) = 18p_3\beta + \text{ terms of order 2}.$$

The tangent cone to $P(\mathscr{Q}, p)$ is defined by the ideal generated by all the leading forms of the equations in the ideal generated by $\mathscr{Q}$ and $\mathscr{H}_p$. Let $f = 2p_3\mathscr{Q} - (\beta + \frac{\langle A,B\rangle}{3p_3})\mathscr{H}_p$. Then one checks that the Taylor expansion of f at x_0 is :

$$f(\alpha, A, B, \beta) = \frac{2p_3}{3}.C^*(B^{\otimes^3}) + \beta.(\text{ terms of order 2 }) + \text{ terms of order 4}.$$

As a consequence, the tangent cone to $P(\mathscr{Q}, p)$ at x_0 (which we denote by $\mathscr{C}_{P(\mathscr{Q},p),x_0}$) is given by the equation $\{\beta = 0\}$ and $\{C^*(B^{\otimes 3}) = 0\}$. This is the cone over the secant variety to $\mathbb{AP}^2 \subset \mathbb{P}(V_{\mathbb{A}}) = |\tilde{\pi_1}^{-1}(x_0)|_{red}$ with vertex $T_{\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6),x_0}$. Notice that this tangent cone does not depend on the general point p choosen to define the polar $P(\mathscr{Q}, p)$. Hence, by $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$-equivariance, this is true for all $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$. Thus, for all $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$, the tangent cone $\mathscr{C}_{P(\mathscr{Q},p),x}$ is the cone over the secant variety $\mathbb{AP}^2 \subset \mathbb{P}(V_{\mathbb{A}}) = |\tilde{\pi}_1^{-1}(x)|_{red}$ with vertex $T_{\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6),x}$.

Step 2.2.b : Explicit resolution of the polar divisors.

Let $q_1 : P(\mathscr{Q}, p)^{(1)} \to P(\mathscr{Q}, p)$ be the blow-up of $P(\mathscr{Q}, p)$ along $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ ($P(\mathscr{Q}, p)^{(1)}$ is also the strict transform of $P(\mathscr{Q}, p)$ along π_1) and denote by E_1' the exceptional divisor of that blow-up. The above description of

the tangent cones of $P(\mathscr{Q},p)$ at any $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ shows that the map $q_1 : E_1' \to \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a fibration into secant varieties to $\mathbb{AP}^2 \subset |\pi_1^{-1}(x)|_{red}$, for $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. Since $\mathbb{AP}^2 \subset \mathbb{P}(V_\mathbb{A})$ is exactly the singular locus of its secant variety, the singular locus of E_1' is a fibration into $\mathbb{AP}^2$ over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. Moreover, by Proposition 3.2.2, the fiber over $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ of the exceptional divisor of the blow-up of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ along $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is the secant variety to $\mathbb{AP}^2 \subset \mathbb{P}(V_\mathbb{A}) = |\tilde{\pi_1}^{-1}(x)|_{red}$. Therefore, we have :

$$E_{1sing}' = E_1' \cap \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) = E_1 \cap \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)).$$

Note that $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ is smooth along $E_1'\backslash E_{1sing}'$, because E_1' is a Cartier divisor on $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$. We discussed the tangent cones to $P(\mathscr{Q},p)$ at points in $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$: these are cones over smooth quadrics of dimension $m_\mathbb{A}$ with vertex $T_{\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))}$. Thus for any x in

$$\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash\left(E_1' \cap \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\right),$$

the tangent cone to $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ at x is again a cone over a smooth quadric of dimension $m_\mathbb{A}$ with vertex $T_{\pi_1^*(\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))),x}$.

Let us compute the tangent cone to $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ at any point $x \in E_{1sing}'$. We know that E_1' is a fibration into secant varieties of $\mathbb{AP}^2$ over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$. But the tangent cone to this secant variety at any point $x \in \mathbb{AP}^2$ is a cone over a smooth quadric of dimension $m_\mathbb{A}$ with vertex $T_{\mathbb{AP}^2,x}$. Hence, the tangent cone to E_1' at $x \in E_{1sing}'$ is a cone over a smooth quadric of dimension $m_\mathbb{A}$ with vertex $T_{E_{1sing}',x}$. Since E_1' is a Cartier divisor in $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$, we have :

$$\mathrm{mult}\mathscr{O}_{P(\mathscr{Q},p)^{(1)},x} \leq \mathrm{mult}\mathscr{O}_{E_1',x} = 2,$$

for any $x \in E_{1sing}'$. Moreover, we know that $\mathrm{mult}\mathscr{O}_{P(\mathscr{Q},p)^{(1)},y} = 2$ for all $y \in \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\backslash E_{1sing}'$. Thus, by semi-continuity of the multiplicity, we have :

$$\mathrm{mult}\mathscr{O}_{P(\mathscr{Q},p)^{(1)},x} = 2,$$

for all $x \in E_{1sing}'$. Since the tangent cone to E_1' at $x \in E_{1sing}'$ is a cone over a smooth quadric of dimension $m_\mathbb{A}$ with vertex $T_{E_{1sing}',x}$, we deduce that the tangent cone to $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ at x is a cone over the same smooth quadric of dimension $m_\mathbb{A}$, but with vertex $T_{\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)),x}$ (recall that $\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is smooth by proposition 3.2.2).

Let $q_2 : P(\mathscr{Q},p)^{(2)} \to P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ be the blow-up of $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ along $\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ ($P(\mathscr{Q},p)^{(2)}$ is the strict transform of $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ along π_2) and denote by E_2' be the exceptional divisor of that blow-up. The above description of the tangent cones to $P(\mathscr{Q},p)^{(1)}$ at any $x \in \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$

shows that the map $q_2 : E_2' \to \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is a fibration into smooth quadrics of dimension $m_{\mathbb{A}}$. This implies that E_2' is smooth, from which we deduce that $P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}$ is smooth along E_2'. Moreover, we proved that $P(\mathscr{Q}, p)^{(1)}$ is smooth along $E_1' \backslash (E_1' \cap \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$. As a consequence, $P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}$ is also smooth along ${E_1'}^{(2)}$, the total transform of E_1' through q_2. Since $P(\mathscr{Q}, p)$ is smooth outside $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, we get that $P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}$ is also smooth outside $E_2' \cup {E_1'}^{(2)}$ and this completes the proof of the smoothness of $P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}$.

Finally $\mathscr{O}_{X_2}(P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}) = \pi^*\mathscr{O}_{X_2}(P(\mathscr{Q}, p)) \otimes \mathscr{O}_{X_2}(k_1 E_1^{(2)} + k_2 E_2)$, where k_1 and k_2 are some integers. We deduce that $P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}$ is a Cartier divisor in X_2. Hence the smoothness of $P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}$ implies the smoothness of X_2 along $P(\mathscr{Q}, p)^{(2)}$.

Step 2.3 : Smoothness along E_2

The Cartier divisor $E_2 \subset X_2$ is a fibration into smooth quadrics of dimension $m_{\mathbb{A}} + 1$ over $\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, from which we deduce that it is smooth. As a consequence, the variety X_2 is also smooth along E_2.

Step 2.4 : "Final step" : smoothness along $E_1^{(2)} \backslash \left((P(\mathscr{Q}, p)^{(2)} \cup E_2) \cap E_1^{(2)}\right)$

In the following, we denote by $\mathrm{SL}_3(\mathbb{A})$, the groups : SL_3, $\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3$, SL_6 and E_6.

We finally show that X_2 is smooth. The only fact left to demonstrate is that X_2 is smooth along :

$$E_1^{(2)} \backslash \left((P(\mathscr{Q}, p)^{(2)} \cup E_2) \cap E_1^{(2)}\right) = E_1^{(2)} \backslash \left({E_1'}^{(2)} \cup E_{1,2}\right).$$

To do so, we need to exploit the action of $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ on $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$. The universal property of the blow-up implies that the stabilizer of x in $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ acts on $\pi_1^{-1}(x)$. The reductive part of this stabilizer is $\mathrm{SL}_3(\mathbb{A})$ (see [LM01]). Any non-trivial orbit closure of the action of this stabilizer on $|\pi_1^{-1}(x)|_{red}$ is an orbit closure for the action of $\mathrm{SL}_3(\mathbb{A})$ on $\mathbb{P}(W_{\mathbb{A}})$. Hence, the orbit diagram of the action on $|\pi_1^{-1}(x)|_{red}$ of the stabilizer of x in $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ is :

$$\mathbb{AP}^2 \subset \sigma(\mathbb{AP}^2) \subset \mathbb{P}(W_{\mathbb{A}}) = |\pi_1^{-1}(x)|_{red}.$$

The group $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ acts on X_1 and E_1 is stable under this action. The above description of the action on $|\pi_1^{-1}(x)|_{red}$ of the stabilizer of x in $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ shows that the dense orbit in $|E_1|_{red}$ is the complement of $P(\mathscr{Q}, p)^{(1)} \cap E_1 = E_1'$. The group $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{A})$ also acts on X_2 and $E_1^{(2)}$ is the stable for this action. The dense orbit inside $|E_1^{(2)}|_{red}$ is the complement in $|E_1^{(2)}|_{red}$ of ${E_1'}^{(2)} \cup E_{1,2}$. As

a consequence, the multiplicity of X_2 along $|E_1^{(2)}|_{red} \setminus \left({E'_1}^{(2)} \cup E_{1,2} \right)$ is less than the multiplicity of X_2 along $E_{1,2}$. But we know that X_2 is smooth along E_2, so that X_2 is smooth along $E_1^{(2)} \setminus \left({E'_1}^{(2)} \cup E_{1,2} \right)$ and we are done! $\square$

In fact, we believe that a much more general statement than Theorem 3.2.5 holds. To state our conjecture, we need some recollections on prehomogeneous vector spaces (we refer to [Kim03] for a detailed treatment of prehomogeneous spaces).

Definition 3.2.6. A *strongly prehomogeneous vector space* is the data (G, V) of an algebraic group G acting linearly on a finite dimensional vector space V with a finite number of orbits.
Let us denote by $V_{\mathrm{G}}^0, \ldots, V_{\mathrm{G}}^m$ the orbits of G on V. We say that the orbit diagram of (G, V) is *linear* if $V_{\mathrm{G}}^0 = \{0\}$ and up to a reordering, we have :

$$V_{\mathrm{G}}^i \subset \overline{V_{\mathrm{G}}^{i+1}},$$

for all $i \geq 0$, where $\overline{V_{\mathrm{G}}^{i+1}}$ denotes the Zariski closure of V_{G}^{i+1}.

Example 3.2.7.
- The square determinantal varieties of size n are the orbits of the action of $\mathrm{GL_n} \times \mathrm{GL_n}$ on $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Their orbit diagram is linear.
- The symmetric (resp. skew-symmetric) determinantal varieties of size n are the orbits of the action of $\mathrm{GL_n}$ (resp. $\mathrm{GL_n}$) on $S^2\mathbb{C}^n$ (resp. $\bigwedge^2 \mathbb{C}^n$). Their orbit diagram is also linear.
- The pair $(\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_6(\mathbb{A}), V_{\mathbb{A}})$ is a strongly prehomogeneous vector space whose orbit diagram is again linear.
- The pair $(\mathrm{GL}_8, \bigwedge^3 \mathbb{C}^8)$ is a strongly prehomogeneous space whose orbit diagram is not linear (see [Hol11]).
- The pair $(\mathrm{GL}_9, \bigwedge^3 \mathbb{C}^9)$ is not a prehomogeneous space (see [Hol11]).

We can now state our conjecture :

Conjecture 3.2.8. *Let (G, V) be a strongly prehomogenous vector space whose orbit diagram $\{V_{\mathrm{G}}^0, \ldots, V_{\mathrm{G}}^m\}$ is linear and let $X = \mathbb{P}(\overline{V_{\mathrm{G}}^i})$ be the projectivization of the closure of any orbit. Consider the sequence :*

$$X_i \xrightarrow{\pi_i} X_{i-1} \to \cdots \to X_2 \xrightarrow{\pi_2} X_1 = X,$$

where $\pi_k : X_k \to X_{k-1}$ is the blow-up of the strict transform of $\mathbb{P}(\overline{V_{\mathrm{G}}^{k-1}})$ through $\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_{k-1}$. Then X_i is smooth.

This conjecture is well-known for all square, symmetric and skew-symmetric determinantal varieties (see Chapter 2 of this thesis, Example 2.1.4). Theorem 3.2.5 and Proposition 3.2.2 show that the conjecture holds for the pair $(\mathbb{C}^* \times \mathrm{Sp}_6(\mathbb{A}), V_{\mathbb{A}})$.

3.2.3 Some (other) vanishing lemmas

In this section, we state the vanishing lemmas we will need for the proof of our main theorem. Recall that E_1, the exceptional divisor of the map $\pi_1 : X_1 \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, is a fibration into doubled $\mathbb{P}^{3m_{\mathbb{A}}+2}$ over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$. As for E_2, the exceptional divisor of the map $\pi_2 : X_2 \to X_1$, it is a fibration in smooth quadrics of dimension $m_{\mathbb{A}} + 1$ over the strict transform of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ through π_1.

We also recall some notations we used in the proof of Theorem 3.2.5. $E_1^{(2)}$ denotes the total transform of E_1 through π_2. Since the intersection of the proper transform of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ through π_1 (which we denote by $\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ with E_1 is proper, the divisor $E_1^{(2)}$ is also the blow-up of E_1 along $\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \cap E_1$. The divisor $E_{1,2}$ the intersection $E_1^{(2)} \cap E_2$, which is also the exceptional divisor of the blow-up of E_1 along $\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \cap E_1$. The morphism π is the composition $\pi_1 \circ \pi_2$ and $\pi_{1,2}$ is the restriction of π_2 to $E_1^{(2)}$. Finally, we denote by $\tilde{\pi}_1$ (resp. $\tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}$ and $\tilde{\pi}_{1,2}$) the restriction of π_1 (resp. π_2, π and $\pi_{1,2}$) to E_1 (resp. $E_2, E_1^{(2)}$ and $E_{1,2}$). We summarize these notations in the following diagrams (which already appeared in the proof of 3.2.5 :

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] & X_2 \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dd, bend left, "\pi"] \\
\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \arrow[r, hook, "j_2"] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] & E_{1,2} \arrow[l, hook', "i_{2,1}"'] \arrow[r, hook, "i_{1,2}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_{1,2}"] & E_1^{(2)} \arrow[d, "\pi_{1,2}"] \arrow[ddl, bend left, "\tilde{\pi}"] \\
\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) & \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) \cap E_1 \arrow[l, hook', "j_2"'] \arrow[r, hook, "\kappa_1"] & E_1 \arrow[d, "\tilde{\pi}_1"] \\
 & & \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)
\end{tikzcd}$$

We start with transformation formulas for the canonical bundle through the maps π_1 and π_2.

Lemma 3.2.9. *We have the formulas :*

$$\omega_{X_1} = \pi_1^*\omega_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))} \otimes \mathscr{O}_{X_1}((3m_{\mathbb{A}}+1)E_1),$$

and

$$\omega_{X_2} = \pi_2^*\omega_{X_1} \otimes \mathscr{O}_{X_2}(m_{\mathbb{A}}E_2).$$

The existence of an integer p such that $\omega_{X_2} = \pi_2^*\omega_{X_1} \otimes \mathscr{O}_{X_2}(pE_2)$ is trivial as E_2, the scheme-theoretic exceptional locus of π_2, is an integral divisor on X_2. The existence of such a formula for ω_{X_1} is less obvious. Indeed, since E_1 is not reduced, one could imagine an equality $\omega_{X_1} = \pi_1^*\omega_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))} \otimes \mathscr{O}_{X_1}(qE_1')$, where E_1' is a Cartier divisor on X_1 with $|E_1|_{red} = |E_1'|_{red}$, but such that qE_1' is not a multiple of E_1.

Proof. We start with the formula for ω_{X_1}. We divide the proof of this formula into two steps :

- we prove that the blow-up $\pi_1 : X_1 \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is the contraction of a negative extremal ray (see [KM98], section 3),
- we prove that the bundle $\omega_{X_1} \otimes \pi_1^*\omega^{-1}_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))} \otimes \mathscr{O}_{X_1}((-3m_{\mathbb{A}}-1)E_1)$ is trivial.

Step 1 : The blow-up $X_1 \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ is a Mori contraction.

Let $\widetilde{\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})}$ be the blow-up of $\mathbb{P}(V_{\mathbb{A}})$ along $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ and denote by H_1 the exceptional divisor of that blow-up. We have $E_1 = H_1|_{X_1}$. The map $q_1 : H_1 \to \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ is a projective bundle of relative dimension $3m_{\mathbb{A}}+3$ over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)$ and the restriction of H_1 to any fiber $q_1^{-1}(x) = \mathbb{P}^{3m_{\mathbb{A}}+3}$ is $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{3m_{\mathbb{A}}+3}}(1)$. As a consequence, we have the equality :

$$E_1|_{\pi_1^{-1}(x)} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{3m_{\mathbb{A}}+3}}(1)|_{\pi_1^{-1}(x)},$$

for all $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$. We will denote this last bundle by $\mathscr{O}_{\pi_1^{-1}(x)}(1)$. Recall that the proof of Theorem 3.2.5 shows that $\pi_1^{-1}(x)$ is a doubled $\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}$ in $q_1^{-1}(x)$. Thus we have :

$$\omega_{\pi_1^{-1}(x)} = \mathscr{O}_{\pi_1^{-1}}(-3m_\mathbb{A} - 2).$$

By the adjunction formula we have $\omega_{E_1} = \omega_{X_1} \otimes \mathscr{O}_{E_1}(E_1)$. The morphism $\tilde{\pi}_1 : E_1 \to \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ is flat and $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ is smooth so that the normal bundle $N_{\tilde{\pi}_1^{-1}(x)/E_1}$ is trivial. By the adjunction formula, we get :

$$\omega_{E_1}|_{\tilde{\pi}_1^{-1}(x)} = \omega_{\tilde{\pi}_1^{-1}(x)} = \mathscr{O}_{\tilde{\pi}_1^{-1}(x)}(-3m_\mathbb{A} - 2)$$

Let $NE_{\pi_1}(X)$ be the cone of effective 1-cycles in X contracted by π_1 and let $R \in NE_{\pi_1}(X)$ be the numerical class of a line in $\pi_1^{-1}(x)$. The above formula shows that :

$$\omega_{X_1}.R < 0,$$

so that R is a negative ray for X_1 with respect to π_1. Let us prove that $NE_{\pi_1}(X) = \langle R \rangle$. We have an exact sequence :

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}}(-1) \to \mathscr{O}_{2\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}} \to 0,$$

where $\mathscr{O}_{2\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}}$ is the structure sheaf of a doubled $\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}$ in a $\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+3}$. Note that $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}}(-1)$ consists of nilpotent elements of $\mathscr{O}_{2\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}}$, so we can lift the above exact sequence to an exact sequence of groups sheaves (see [Gro], Exposé XI, section 1) :

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}}(-1) \to \mathscr{O}^\times_{2\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}} \to \mathscr{O}^\times_{\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}} \to 1,$$

where $\mathscr{O}_X^\times$ is the sheaf of units of the scheme X. Taking the long exact sequence of cohomology, we find that :

$$H^1(2\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}, \mathscr{O}^\times_{2\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}}) = H^1(\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}, \mathscr{O}^\times_{\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}}),$$

that is :

$$\mathrm{Pic}(2\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}) = \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^{3m_\mathbb{A}+2}) = \mathbb{Z}.$$

Thus, we see that the cone of effective 1-cycles (modulo numerical equivalence) on $\pi_1^{-1}(x)$ is of dimension 1. Since the morphism $\tilde{\pi}_1 : E_1 \to \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is flat, the cone $NE_{\pi_1}(X)$ is also of dimension 1. Hence, we have :

$$NE_{\pi_1}(X) = \langle R \rangle,$$

so that R is a negative extremal ray for $NE_{\pi_1}(X)$. As X_1 is Gorenstein with rational singularities (hence canonical singularities, by [Kol97] proposition 11.13), we can apply the relative Cone theorem to X_1 and R (see [KM98], Theorem 3.25) and we find a commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) & \end{tikzcd}$$

where p is the contraction of the extremal ray R. We know that $NE_{\pi_1}(X) = \langle R \rangle$. Therefore, for all $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$, all the curves lying in $\pi_1^{-1}(x)$ are contracted by p.

We want to demonstrate that q is an isomorphism. Let $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ and assume that $\dim p(\pi_1^{-1}(x)) > 0$. We can find two curves $C \in p(\pi_1^{-1}(x))$ and $C' \subset \pi_1^{-1}(x)$ such that $p(C') = C$. But this is a contradiction since all curves lying in $\pi_1^{-1}(x)$ are contracted by p. As a consequence, for all $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$, the scheme $p(\pi_1^{-1}(x))$ is a point. We deduce that $q : Y \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is a birational finite morphism such that $\mathbf{R}q_*\mathscr{O}_Y = \mathscr{O}_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))}$. The variety $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is normal, so by the Main Theorem of Zariski, the morphism q is an isomorphism. We deduce that $\pi_1 : X_1 \to \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is the contraction of the extremal ray generated by R.

Step 2 : The bundle $\omega_{X_1} \otimes \pi_1^*\omega^{-1}_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))} \otimes \mathscr{O}_{X_1}((-3m_{\mathbb{A}} - 1)E_1)$ is trivial.

Let $L = \omega_{X_1} \otimes \mathscr{O}_{X_1}((-3m_{\mathbb{A}} - 1)E_1)$. The formulae for the restrictions of ω_{X_1} to E_1 and ω_{E_1} to $\pi_1^{-1}(x)$ show that $L_{\pi_1^{-1}(x)} = \mathscr{O}_{\pi_1^{-1}(x)}$, for any $x \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$. Thus, we can apply again the relative Cone Theorem and we get $L = \pi_1^* L'$ for some line bundle L' on $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$.

Let us prove that $L' = \omega_{\tau\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)}$. Since $\mathbf{R}\pi_{1*}\mathscr{O}_{X_1} = \mathscr{O}_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))}$ and $\dim X_1 = \dim \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, Grothendieck duality shows that the complex $\mathbf{R}\pi_{1*}\omega_{X_1}[\dim X_1]$ is a dualizing complex for $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$. We apply the Grauert-Riemenschneider theorem to π_1 and we get $\mathrm{R}^i\pi_{1*}\omega_{X_1} = 0$ for $i > 0$. As a consequence, we have $\pi_{1*}\omega_{X_1} = \omega_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))}$. Moreover, the divisor E_1 is effective and contracted by π_1. The variety $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ being normal and π_1 being birational, the sheaf $\pi_*\mathscr{O}_{X_1}((3m_{\mathbb{A}} + 2)E_1)$ is trivial. Finally, we apply π_{1*} on both sides of the equality :

$$\omega_{X_1} = \pi_1^*(L') \otimes \mathscr{O}_{X_1}(3m_{\mathbb{A}} + 1),$$

and the projection formula gives :

$$\pi_{1*}\omega_{X_1} = L'.$$

As we showed that $\pi_{1*}\omega_{X_1} = \omega_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))}$, this concludes the proof that :

$$\omega_{X_1} = \pi_1^*\omega_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))} \otimes \mathscr{O}_{X_1}((3m_{\mathbb{A}} + 1)E_1).$$

The formula for ω_{X_2} is proved in a similar fashion, but is much easier. Indeed, as E_2 is the scheme-theoretic exceptional locus of π_2 and is an integral divisor on X_2, there exists an integer p such that $\omega_{X_2} = \pi_2^*\omega_{X_1} \otimes \mathscr{O}_{X_2}(pE_2)$. We determine the integer p by restricting this equality to the fibers of $\pi_2|_{E_2} : E_2 \to \pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$. The adjunction formula shows again that

$$\omega_{X_2} \otimes \mathscr{O}_{E_2}(E_2) \otimes \mathscr{O}_{\tilde{\pi_2}^{-1}(x)} = \omega_{\tilde{\pi_2}^{-1}(x)}$$

and we conclude using the fact that $\tilde{\pi_2}^{-1}(x)$ is a smooth quadric of dimension $m_{\mathbb{A}} + 1$. □

Proposition 3.2.10. *We have the vanishings :*
- $\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\tilde{\pi}_{2*}\mathscr{O}_{E_2}(kE_2) = 0$, *for all* $i \geq 0$ *and for all* $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$,
- $\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\tilde{\pi}_{*}\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(kE_1^{(2)}) = 0$, *for all* $i \geq 0$ *and all* $1 \leq k \leq 3m_{\mathbb{A}} + 1$,
- $\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\tilde{\pi}_{1,2*}\mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})$, *for all* $i \geq 0$ *and for all* $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$.

Proof. The three points are more or less direct consequences of the Kawamata-Viehweg relative vanishing theorem and of the Grauert-Riemenschneider vanishing theorem.

For the first point, we have $\omega_{X_2} = \pi_2^*\omega_{X_1} \otimes \mathscr{O}_{X_2}(m_{\mathbb{A}}E_2)$ and $-E_2$ is relatively ample with respect to π_2. Since X_2 is Gorenstein with rational singularities (in fact it is smooth), we apply the Kawamata-Viehweg relative vanishing theorem and we get :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\pi_{2*}\mathscr{O}_{X_2}(kE_2) = 0,$$

for all $i > 0$ and for all $k < m_{\mathbb{A}}$. The vanishing :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\pi_{2*}\mathscr{O}_{X_2}(m_{\mathbb{A}}E_2) = 0,$$

for all $i > 0$, is a consequence of the theorem of Grauert-Riemenschneider.

Now, for all $k \in \mathbb{Z}$, we have an exact sequence :

$$0 \to \mathscr{O}_{X_2}((k-1)E_2) \to \mathscr{O}_{X_2}(kE_2) \to \mathscr{O}_{E_2}(kE_2) \to 0.$$

We take the long exact sequence associated to the functor $\mathbf{R}\pi_{2*}$ and taking into account the above vanishing, we find :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\tilde{\pi}_{2*}\mathscr{O}_{E_2}(kE_2) = 0,$$

for all $i > 0$ and for all $k \leq m_{\mathbb{A}}$.

Finally,we want to prove some vanishing for $\tilde{\pi}_{2*}\mathscr{O}_{E_2}(kE_2)$. Notice first that E_2 si an effective divisor contracted by the birationnal morphism π_2. The variety X_1 being normal, we have :

$$\pi_{2*}\mathscr{O}_{X_2}(kE_2) = \mathscr{O}_{X_1},$$

for all $k \geq 0$. Thus, the long exact sequence associated to the above short exact sequence and the vanishing results already proved imply :

$$\tilde{\pi}_{2*}\mathscr{O}_{E_2}(kE_2) = 0,$$

for all $k \geq 1$. This concludes the first point.

The second point is proved in the same manner with the following observation. We have $\mathbf{R}\pi_{2*}\mathscr{O}_{X_2}(E_1^{(2)}) = \mathscr{O}_{X_1}(E_1)$ by the projection formula. Thus, to prove the vanishing result for $\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\tilde{\pi}_*\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(kE_1^{(2)})$, it is sufficient to prove it for $\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\tilde{\pi}_{1*}\mathscr{O}_{E_1}(kE_1)$. This is done exactly in the same way as for the first point of the proposition.

The third point needs a slightly more involved argument. The intersection $E_1^{(2)} \cap E_2 = E_{1,2}$ is proper, so we have a resolution :

$$0 \to \mathscr{O}_{X_2}(-E_1^{(2)} - E_2) \to \mathscr{O}_{X_2}(-E_1^{(2)}) \oplus \mathscr{O}_{X_2}(-E_2) \to \mathscr{O}_{X_2} \to \mathscr{O}_{E_{1,2}} \to 0.$$

We tensor this resolution by $\mathscr{O}_{X_2}(kE_2)$, for any integer k, and we get :

$$0 \to \mathscr{O}_{X_2}(-E_1^{(2)} + (k-1)E_2) \to \mathscr{O}_{X_2}(-E_1^{(2)}) \oplus \mathscr{O}_{X_2}((k-1)E_2) \to \mathscr{O}_{X_2}(kE_2)$$
$$\to \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2}) \to 0$$

Recall that the Kawamata-Viehweg relative vanishing theorem and the Grauert-Riemenschneider vanishing theorem imply that

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\pi_{2*}\mathscr{O}_{X_2}(kE_2) = 0,$$

for all $i > 0$ and all $k \leq m_{\mathbb{A}}$. Finally, we chop the above resolution into two shorts exact sequences. We take the long exact sequences associated to the functor $\mathbf{R}\pi_{2*}$ for these two short exact sequences and we find :

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}}\tilde{\pi}_{1,2_*}\mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2}) = 0,$$

for all $i > 0$ and all $k \leq m_{\mathbb{A}}$.

The vanishing :

$$\tilde{\pi}_{1,2*}\mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2}) = 0,$$

for all $k \geq 1$ is proved as for the first point of the proposition. Indeed, we have :

$$\pi_{2*}\mathscr{O}_{X_2}(kE_2) = \mathscr{O}_{X_1},$$

for all $k \geq 0$. We again chop the above long exact sequence into two short exact sequences and we go on as in the proof of the first point of the proposition.

□

3.3 Proof of the main theorem

In this section we are going to prove our main result :

Theorem 3.3.1. *The variety $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$ admits a categorical crepant resolution of singularities.*

3.3.1 Standard reductions (bis repetita)

Denote by $i_1 : E_1^{(2)} \hookrightarrow X_2$ and $i_2 : E_2 \hookrightarrow X_2$ the embeddings of the exceptional divisors. We define the following subcategories of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2)$:

$$\mathscr{B}_k = i_{2*}\left(\tilde{\pi}_2^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))\otimes\mathscr{O}_{E_2}(kE_2)\right),$$

for all $1\leq k\leq m_{\mathbb{A}}$ and :

$$\mathscr{A}_l = i_{1*}\left(\tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))\otimes\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)}+m_{\mathbb{A}}E_2)\right),$$

for all $1\leq l\leq 3m_{\mathbb{A}}+1$. Our key proposition is the following :

Proposition 3.3.2. *We have a semi-orthogonal decomposition :*

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2) = \langle\mathscr{A}_{3m_{\mathbb{A}}+1},\dots,\mathscr{A}_1,\mathscr{B}_{m_{\mathbb{A}}},\dots,\mathscr{B}_1,\mathscr{D}_{X_2}\rangle,$$

where $\mathscr{D}_{X_2}$ is the left orthogonal to the full admissible subcategory generated by the $\mathscr{A}_l$ and $\mathscr{B}_k$. Moreover we have the property :

$$\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))\subset\mathscr{D}_{X_2}.$$

Before diving into the proof of Proposition 3.3.2, we explain how it implies our main result. We will prove that $\mathscr{D}_{X_2}$ is a categorical crepant resolution of singularities of $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))$. The following argument follows closely the one we use in the proof of theorem 2.2.1.

Proof of theorem 3.3.1. First note that $\mathscr{D}_{X_2}$ is an admissible subcategory of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2)$ and that $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))\subset\mathscr{D}_{X_2}$. Thus, we only have to prove that for all $\mathscr{F}\in\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$, we have :

$$\pi_{\mathscr{D}}^*(\mathscr{F})\simeq\pi_{\mathscr{D}}^!(\mathscr{F}),$$

where $\pi_{\mathscr{D}}^*$ and $\pi_{\mathscr{D}}^!$ are the left and right adjoints to the functor

$$\pi_{\mathscr{D}} : \mathscr{D}_{X_2}\to\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))).$$

Let $\delta : \mathscr{D}_{X_2}\hookrightarrow\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2)$ be the fully faithful admissible embedding. We must prove that $\delta^*\pi^*(\mathscr{F}) = \delta^!\pi^!(\mathscr{F})$, for all $\mathscr{F}\in\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)))$. Recall that

$$\pi^!(\mathscr{F}) = \pi^*(\mathscr{F})\otimes\pi^*(\omega^{-1}_{\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))})\otimes\omega_{X_2} = \pi^*(\mathscr{F})\otimes\mathscr{O}_{X_2}(m_{\mathbb{A}}E_2+(3m_{\mathbb{A}}+1)E_1^{(2)}).$$

Now, since the functor δ is fully faithful, the equality $\delta^*\pi^*(\mathscr{F}) = \delta^!\pi^!(\mathscr{F})$ is equivalent to $\delta(\delta^*\pi^*(\mathscr{F})) = \delta(\delta^!\pi^!(\mathscr{F}))$. As $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))) \subset \mathscr{D}_{X_2}$, we have $\delta(\delta^*\pi^*(\mathscr{F})) = \pi^*(\mathscr{F})$. We are going to show that $\delta(\delta^!\pi^!(\mathscr{F})) = \pi^*(\mathscr{F})$.

For $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$ and for $1 \leq l \leq 3m_{\mathbb{A}}+1$, we have exact sequences :

$$0 \to \mathscr{O}_{X_2}((k-1)E_2) \to \mathscr{O}_{X_2}(kE_2) \to i_{2*}\mathscr{O}_{E_2}(kE_2) \to 0,$$
$$0 \to \mathscr{O}_{X_2}((l-1)E_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2) \to \mathscr{O}_{X_2}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2) \to i_{1*}\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2) \to 0.$$

Tensoring the above exact sequences with $\pi^*\mathscr{F}$, we get exact triangles :

$$\mathscr{O}_{X_2}((k-1)E_2) \otimes \pi^*\mathscr{F} \to \mathscr{O}_{X_2}(kE_2) \otimes \pi^*\mathscr{F} \to i_{2*}\mathscr{O}_{E_2}(kE_2) \otimes \pi^*\mathscr{F},$$
$$\mathscr{O}_{X_2}((l-1)E_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2) \otimes \pi^*\mathscr{F} \to \mathscr{O}_{X_2}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2) \otimes \pi^*\mathscr{F}$$
$$\to i_{1*}\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2) \otimes \pi^*\mathscr{F}.$$

We deduce a long sequence of triangles :

$$\begin{tikzcd}
\pi^*(\mathscr{F}) \arrow[rr] & & F_1^{(2)} \arrow[dl] \to \dots F_{m_{\mathbb{A}}}^{(2)} \arrow[rr] & & F_1^{(1)} \arrow[dl] \to \cdots \to F_{3m_{\mathbb{A}}}^{(1)} \arrow[rr] & & F_{3m_{\mathbb{A}}+1}^{(1)} \arrow[dl] \\
& \mathscr{F}_1^{(2)} \arrow[ul] & \dots & \mathscr{F}_1^{(1)} \arrow[ul] & \dots & \mathscr{F}_{3m_{\mathbb{A}}+1}^{(1)} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

where $F_k^{(2)} = \pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{X_2}(kE_2)$, $\mathscr{F}_k^{(2)} = i_{2*}\left(\mathscr{O}_{E_2}(kE_2) \otimes i_2^*\pi^*\mathscr{F}\right)$, $F_l^{(1)} = \pi^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{X_2}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2)$ and $\mathscr{F}_l^{(1)} = i_{1*}\left(\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2) \otimes i_1^*\pi^*F\right)$. But we have commutative diagrams :

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] & X_2 \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[ddl, bend left, "\pi"] \\
\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6)) \arrow[r, "j_2"] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
& \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))
\end{tikzcd}$$

and

$$\begin{tikzcd} E_1^{(2)} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] & X_2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6) \arrow[r, "j_1"] & \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \end{tikzcd}$$

so that

$$i_2^*\pi^*\mathscr{F} = \tilde{\pi_2}^* j_2^* \pi_1^* \mathscr{F} \subset \tilde{\pi_2}^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$$

and

$$i_1^*\pi^*\mathscr{F} = \tilde{\pi}^* j_1^* \mathscr{F} \subset \tilde{\pi}^* \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)).$$

Thus, $\pi^*\mathscr{F}$ is the $\mathscr{D}_{X_2}$-component of $F^{(1)}_{3m_{\mathbb{A}}+1} = \pi^!(\mathscr{F})$ in the semi-orthogonal decomposition of proposition 3.3.2. As a consequence, we have $\pi^*\mathscr{F} = \delta\delta^!(\pi^!(\mathscr{F}))$, which is what we wanted to prove.

□

3.3.2 The key proposition

In this section we prove Proposition 3.3.2. We first recall the statement of Proposition 1.1.6

Proposition 3.3.3 (Kuznetsov's Lefschetz decomposition)**.** *Let E be a Cartier divisor on a variety X. Assume that there is a semi-orthogonal decomposition :*

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E) = \langle \mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE), \ldots, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E), \mathscr{A}_0 \rangle,$$

with $\mathscr{A}_m \subset \ldots \subset \mathscr{A}_0$ admissible subcategories of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E)$. Then there is a semi-orthogonal decomposition :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) = \langle i_*(\mathscr{A}_m \otimes \mathscr{O}_E(mE)), \ldots, i_*(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{O}_E(E)), \mathscr{D} \rangle,$$

where $i : E \hookrightarrow X$ is the natural inclusion and $\mathscr{D} = \{\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X),\ i^*\mathscr{F} \in \mathscr{A}_0\}$.

As in the proof of Proposition 2.2.3, this result will be very useful to deduce semi-orthogonal decompositions on X_2, starting from semi-orthogonal decompositions on E_2 and $E_1^{(2)}$. To prove 3.3.2, we need the following lemma :

Lemma 3.3.4. *We have the following semi-orthogonal decomposition :*

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_2) = \langle (T_{E_2} \otimes \mathscr{O}_{E_2}(m_{\mathbb{A}} E_2)), \ldots, (T_{E_2} \otimes \mathscr{O}_{E_2}(E_2)), \mathscr{E}_2 \rangle,$$

where $T_{E_2} = \tilde{\pi}_2^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ and $\mathscr{E}_2$ is the left orthogonal to the subcategory generated by the $T_{E_2} \otimes \mathscr{O}_{E_2}(kE_2)$, for $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$. Moreover, we have the inclusion :

$$\tilde{\pi}_2^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \subset \mathscr{E}_2.$$

We also have the semi-orthogonal decomposition :

$$\begin{aligned}\mathrm{D^b}(E_1^{(2)}) =&\langle T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}((3m_{\mathbb{A}}+1)E_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2), \dots, T_{E_1^{(2)}} \otimes \\ &\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(E_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2), i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(m_{\mathbb{A}}E_{1,2})\right), \dots, \\ &i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(E_{1,2})\right), \mathscr{E}_1^2\rangle,\end{aligned}$$

with $T_{E_1^{(2)}} = \tilde{\pi}^*\mathrm{D^b}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, $T_{E_{1,2}} = \tilde{\pi}_{1,2}^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \cap E_1)$ *and* $\mathscr{E}_1^2$ *is the left orthogonal to the subcategory generated by the* $T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(kE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2)$ *and the* $i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(lE_{1,2})\right)$, *for* $1 \leq k \leq 3m_{\mathbb{A}}+1$ *and* $1 \leq l \leq m_{\mathbb{A}}$. *Moreover we have the inclusion :*

$$T_{E_1^{(2)}} \subset \mathscr{E}_1^2.$$

Proof. We start with the proof of the first point. By Proposition 3.2.10, we have :

$$\tilde{\pi}_{2*}\mathscr{H}om(\mathscr{O}_{E_2}(kE_2), \mathscr{O}_{E_2}(kE_2)) = \mathscr{O}_{\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3,\mathbb{A}^6))},$$

for all $k \in \mathbb{Z}$. This implies that the subcategories $\tilde{\pi}_2^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_E(kE)$ are full admissible subcategories of $\mathrm{D^b}(E_2)$, for all $k \in \mathbb{Z}$. Let $1 \leq k < l \leq m_{\mathbb{A}} + 1$ be integers. We have :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}\left(\mathscr{O}_E(kE) \otimes \tilde{\pi}_2^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))), \mathscr{O}_E(lE) \otimes \tilde{\pi}_2^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))\right) \\ =&\mathrm{Hom}\left(\tilde{\pi_2}^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))), \mathscr{O}_E((l-k)E) \otimes \tilde{\pi_2}^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))\right) \\ =&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))), \tilde{\pi_2}_*\left(\mathscr{O}_E((l-k)E)\right) \otimes \mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))\right) \\ =&0,\end{aligned}$$

where the last equality holds by Proposition 3.2.10 because $1 \leq l - k \leq m_{\mathbb{A}}$. As a consequence, we have a semi-orthogonal decomposition :

$$\mathrm{D^b}(E_2) = \langle (T_{E_2} \otimes \mathscr{O}_{E_2}(m_{\mathbb{A}}E_2)), \dots, (T_{E_2} \otimes \mathscr{O}_{E_2}(E_2)), \mathscr{E}_2\rangle,$$

with $T_{E_2} = \tilde{\pi}_2^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ and $\mathscr{E}_2$ is the left orthogonal to the admissible subcategory generated by the $\mathscr{O}_E(kE) \otimes \mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ for $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$. It only remains to show that :

$$\tilde{\pi}_2^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \subset \mathscr{E}_1^2.$$

Equivalently, we need to prove that the subcategory $\tilde{\pi_2}^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ is left orthogonal to the admissible subcategory generated by the $\mathscr{O}_E(kE) \otimes \tilde{\pi}_2^*\mathrm{D^b}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ for $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$. As before, this is a consequence of Proposition 3.2.10.

For the second point, we first note that the same proof as for the first point yields the following semi-orthogonal decomposition :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_{1,2}) = \langle T_{1,2} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(m_{\mathbb{A}} E_{1,2}), \dots T_{1,2} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(E_{1,2}), \mathscr{E}_{1,2} \rangle,$$

with $T_{1,2} = \tilde{\pi}_{1,2}^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \cap E_1)$ and $T_{1,2} \subset \mathscr{E}_{1,2}$. So by Proposition 3.3.3, the categories

$$i_{1,2_*}\left(\mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2}) \otimes \tilde{\pi}_{1,2}^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \cap E_1)\right),$$

are full admissible subcategories of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)})$ which are left orthogonal to each other, for $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$.

Using again Proposition 3.2.10, we prove that the subcategories :

$$\tilde{\pi}^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}} E_2)$$

are full admissible subcategories of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)})$ which are left orthogonal to each other, for $1 \leq l \leq 3m_{\mathbb{A}} + 1$. The adjunction formula shows that $\omega_{E_1^{(2)}} = \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(m_{\mathbb{A}} E_2) \otimes$ for some $\in T_{E_1^{(2)}}$. Then, by Serre duality, we have :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}\left(i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right), T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}} E_2)\right) \\ =&\mathrm{Hom}\left(T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)}), i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right)\right)^*, \end{aligned}$$

for $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$ and $1 \leq l \leq 3m_{\mathbb{A}} + 1$. Recall that $T_{E_1^{(2)}} = \pi_{1,2}^* T_{E_1}$, with $T_{E_1} = \tilde{\pi}_1^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ and that $\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(E_1^{(2)}) = \pi_{1,2}^* \mathscr{O}_{E_1}(E_1)$. Thus, the adjunction formula for $\pi_{1,2}$ gives :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}\left(T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)}), i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right)\right) \\ =&\mathrm{Hom}\left(T_{E_1} \otimes \mathscr{O}_{E_1}(lE_1), \pi_{1,2*}\left(i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right)\right)\right). \end{aligned}$$

But we have a commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} E_{1,2} \arrow[r, hook, "i_{1,2}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_{1,2}"] & E_1^{(2)} \arrow[d, "\pi_{1,2}"] \\ E_1 \cap \pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \arrow[r, hook, "\kappa_1"] & E_1 \end{tikzcd}$$

so that :

$$\pi_{1,2_*}\left(i_{1,2_*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right)\right) = \kappa_{1*}\left(\tilde{\pi}_{1,2*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right)\right)$$

and by Proposition 3.2.10, we have $\tilde{\pi}_{1,2*}\left(\mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right) = 0$ for all $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$.

As a consequence, we have proved that we have a semi-orthogonal decomposition :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)}) =&\langle T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}((3m_{\mathbb{A}}+1)E_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2), \ldots, T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(E_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2),\\ &i_{1,2*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(m_{\mathbb{A}}E_{1,2})\right), \ldots, i_{1,2*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(E_{1,2})\right), \mathscr{E}_1^2\rangle,\end{aligned}$$

with $T_{E_1^{(2)}} = \tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, $T_{E_{1,2}} = \tilde{\pi}_{1,2}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \cap E_1)$ and $\mathscr{E}_1^2$ is the left orthogonal to the admissible subcategory generated by the $T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2)$ and $i_{1,2*}\left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_{1,2}}(kE_{1,2})\right)$ for $1 \leq l \leq 3m_{\mathbb{A}} + 1$ and $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$.

It remains to prove that $T_{E_1^{(2)}} \subset \mathscr{E}_1^{(2)}$. This is done as before using Proposition 3.2.10. We leave the proof to the reader.

□

Using this lemma, we can finish the proof of proposition 3.3.2.

Proof of Proposition 3.3.2. By Proposition 3.3.3, we know that the categories

$$\mathscr{A}_l = i_{1*}\left(\tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2)\right)$$

and

$$\mathscr{B}_k = i_{2*}\left(\tilde{\pi}_2^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_{E_2}(kE_2)\right)$$

are full admissible subcategories of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2)$ for $1 \leq l \leq 3m_{\mathbb{A}} + 1$ and $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$. Moreover, again by Proposition 3.3.3, the $\mathscr{A}_l$ are left orthogonal to each other for $1 \leq l \leq 3m_{\mathbb{A}} + 1$, while the $\mathscr{B}_k$ are left orthogonal to each other for $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$. We start by proving that the $\mathscr{B}_k$ are left orthogonal to the $\mathscr{A}_l$. We have :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(\mathscr{B}_k, \mathscr{A}_l)\\ =&\mathrm{Hom}(i_{2*}\left(\tilde{\pi}_2^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_{E_2}(kE_2)\right),\\ &\quad i_{1*}\left(\tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2)\right))\\ =&\mathrm{Hom}(i_1^*\left[i_{2*}\left(\tilde{\pi_2}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_{E_2}(kE_2)\right)\right],\\ &\quad \tilde{\pi}^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}}E_2)).\end{aligned}$$

But we have a cartesian square :

$$\begin{tikzcd} E_{1,2} \arrow[r, "i_{1,2}"] \arrow[d, "i_{2,1}"] & E_1^{(2)} \arrow[d, "i_1"] \\ E_2 \arrow[r, "i_2"] & X_2 \end{tikzcd},$$

with $\dim E_{1,2} = \dim E_2 + \dim E_1^{(2)} - \dim X_2$ and i_1, i_2 are locally complete intersection embeddings. Thus, this diagram is Tor-neutral (see [Kuz06b], Corollary 2.27) and we have :

$$i_1^* i_{2*} \mathscr{F} = i_{1,2_*} i_{2,1}^* \mathscr{F},$$

for all $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^-(E_2)$. So we have :

$$\begin{aligned} & i_1^* \left[i_{2*} \left(\tilde{\pi}_2^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_{E_2}(kE_2) \right) \right] \\ = & i_{1,2_*} \left[i_{2,1}^* \left(\tilde{\pi}_2^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \otimes \mathscr{O}_{E_2}(kE_2) \right) \right]. \end{aligned}$$

The commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} E_{1,2} \arrow[r, hook, "i_{2,1}"] \arrow[d, "\pi_{\tilde{2},1}"] & E_2 \arrow[d, "\tilde{\pi_2}"] \\ E_1 \cap \pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \arrow[r, hook, "j_2"] & \pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \end{tikzcd},$$

shows that :

$$i_{2,1}^* \left(\tilde{\pi}_2^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \right) = \tilde{\pi_{2,1}}^* \left(j_{2*} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \right).$$

As $\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is smooth, we have the inclusion :

$$\tilde{\pi}_{1,2}^* \left(j_{2*} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \right) \subset T_{E_{1,2}}.$$

Hence, to prove that $\mathrm{Hom}(\mathscr{B}_k, \mathscr{A}_l) = 0$, it is sufficient to prove that :

$$\mathrm{Hom}(i_{1,2_*} \left(T_{E_{1,2}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(kE_2) \right), T_{E_1^{(2)}} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(lE_1^{(2)} + m_{\mathbb{A}} E_2)) = 0.$$

Since $\mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(E_2) = \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}(E_{1,2})$, this last vanishing comes from the semi-orthogonal decomposition of $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1)$ found in Lemma 3.3.4. As a consequence, we have proved that we have a semi-orthogonal decomposition :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2) = \langle \mathscr{A}_{3m_{\mathbb{A}}+1}, \ldots, \mathscr{A}_1, \mathscr{B}_{m_{\mathbb{A}}}, \ldots, \mathscr{B}_1, \mathscr{D}_{X_2} \rangle,$$

where $\mathscr{D}_{X_2}$ is the left orthogonal to the admissible subcategory generated by the $\mathscr{A}_l$'s and the $\mathscr{B}_k$'s. The only fact left to complete the proof of Proposition 3.3.2 is the inclusion $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \subset \mathscr{D}_{X_2}$. Equivalently, we have to prove that $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ is left orthogonal to the $\mathscr{A}_l$'s and the $\mathscr{B}_k$'s. By Proposition 3.3.3, the left orthogonal to the $\mathscr{B}_k$'s is :

$$\{\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2),\ i_2^*\mathscr{F} \in \mathscr{E}_2\}$$

and we know (Proposition 3.3.4) that $\tilde{\pi}_2^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \subset \mathscr{E}_2$. Moreover the commutative diagram :

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_2"] & X_2 \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[ddd, bend left, "\pi"] \\
\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)) \arrow[r, "j_2"] & X_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))
\end{tikzcd}$$

shows that $i_2^*\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))) \subset \tilde{\pi}_2^*\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^*\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$, which implies that $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ is left orthogonal to the $\mathscr{B}_k$'s, for $1 \leq k \leq m_{\mathbb{A}}$. We prove in the same fashion that $\pi^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)))$ is left orthogonal to the $\mathscr{A}_l$'s for $1 \leq l \leq 3m_{\mathbb{A}}+1$. This concludes the proof of Proposition 3.3.2.

$\square$

Conclusion

On a développé dans cette thèse des méthodes pour construire des résolutions catégoriques crépantes de diverses variétés issues de la théorie géométrique des représentations. On aussi vu que les résolutions catégoriques fortement crépantes sont celles qui possèdent les meilleures propriétés de minimalité. Malheureusement, il semble beaucoup plus difficile de construire des résolutions catégoriques fortement crépantes que des résolutions catégoriques crépantes. Ainsi, nous savons que toutes les variétés déterminantielles Gorenstein admettent des résolutions catégoriques crépantes (corollaire I du chapitre 2). La question des résolutions fortement crépantes pour de telles variétés demeure toutefois complètement ouverte :

Question I. *Quelles sont les variétés déterminantielles qui admettent des résolutions catégoriques fortement crépantes ?*

On a déjà noté, à la fin du chapitre 1 de ce manuscrit, que cette question n'était en fait pertinente que pour les variétés déterminantielles symétriques et pfafiennes.

Explicitons quelques obstructions à la construction de résolutions fortement crépantes. Soit X une variété projective Gorenstein à singularités rationnelles et soit :

$$\pi_{\mathscr{T}*} : \mathscr{T} \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X),$$

une résolution catégorique crépante de X qui a une structure de catégorie module au dessus X. Si $S_{\mathscr{T}}$ est un foncteur de Serre pour $\mathscr{T}$, alors, pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$, on a :

$$S_{\mathscr{T}}(\pi_{\mathscr{T}}^*\mathscr{F}) = \pi_{\mathscr{T}}^*\mathscr{F} \otimes \pi_{\mathscr{T}}^*\omega_X[\dim X],$$

où $\pi_{\mathscr{T}}^*$ est l'adjoint à gauche de $\pi_{\mathscr{T}*}$ Pour que $\mathscr{T}$ soit fortement crépante, il faut que :

$$S_{\mathscr{T}}(T) = T \otimes \pi_{\mathscr{T}}^*\omega_X[\dim X],$$

pour tout $T \in \mathscr{T}$. Si $\mathscr{T} \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ pour une certaine variété Y, alors le foncteur de Serre de $\mathscr{T}$ agit par produit tensoriel avec le complexe dualisant de Y. La faible crépance catégorique implique dans ce cas que le complexe dualisant de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ est $\pi_{\mathscr{T}}^*\omega_X[\dim X]$. Mais si $\mathscr{T}$ n'est pas d'origine géométrique,

on ne peut rien dire a priori sur le comportement de son foncteur de Serre sur les objets qui ne sont pas dans $\pi_{\mathscr{T}}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Kuznetsov donne des exemples de résolutions catégoriques crépantes qui ne sont pas fortement crépantes ([Kuz08b]). En particulier, le foncteur de Serre n'agit pas de la même manière sur tous les objets de ces catégories. Si l'on souhaite construire des résolutions catégoriques fortement crépantes, il semble nécessaire de décrire de manière approfondie les objets $T \in \mathscr{T}$ tels que $S_{\mathscr{T}}(T) \neq T \otimes \pi_{\mathscr{T}}^*\omega_X[\dim X]$. Cela revient, peu ou prou, à étudier plus en détail les résolutions catégoriques crépantes. Une réponse à la question suivante serait très utile :

Question II. *Soit X une variété Gorenstein à singularités rationnelles. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités et*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T} \arrow[r, hook, "\delta"] \arrow[d, "\pi_{\mathscr{T}*}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) \arrow[dl, "\pi_*"] \\ \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) & \end{tikzcd}$$

une résolution catégorique crépante de X. Quand $\mathscr{T}$ peut-elle s'écrire comme la catégorie dérivée d'un espace de modules (non commutatif) d'objets de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$?

Notons que l'idée de relier une composante non triviale d'une décomposition de Lefschetz de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ (pour Y lisse) à un espace de modules d'objets dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ n'est pas nouvelle (voir [Kuz04], [Kuz09]). Elle a été exploitée avec un certain succès dans [BMMS12].

Supposons que $\mathscr{T}$ soit effectivement la catégorie dérivée d'un espace de modules (commutatif pour simplifier). Alors on a un scindage $\mathscr{T} = \bigoplus_{i\in I} \mathscr{T}_i$, où les $\mathscr{T}_i$ sont les catégories dérivées des composantes connexes de l'espace de modules en question. On suppose, pour simplifier, que c'est une décomposition en catégories modules au dessus de X. On a vu dans la section 3 du chapitre 1 que si l'on a une telle décomposition de $\mathscr{T}$, alors $\pi_{\mathscr{T}}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ est nécessairement incluse dans un des $\mathscr{T}_i$. Mais comme ces $\mathscr{T}_i$ sont des catégories dérivées de schémas, on sait que leurs foncteurs de Serre agissent tous par produit tensoriel avec un complexe donné. En outre, le foncteur de Serre de $\mathscr{T}$ agit par produit tensoriel avec $\pi_{\mathscr{T}}^*\omega_X[\dim X]$ sur $\pi_{\mathscr{T}}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$. Comme tous les $\mathscr{T}_i$ sont des catégories modules au-dessus de X, on en déduit qu'il existe $i_0 \in I$ tel que :

– la catégorie $\mathscr{T}_{i_0}$ est une sous-catégorie admissible et pleine de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X})$,
– on a l'inclusion $\pi_{\mathscr{T}}^*\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \subset \mathscr{T}_{i_0}$,
– le foncteur de Serre de $\mathscr{T}_{i_0}$ agit par produit tensoriel avec $\pi_{\mathscr{T}}^*\omega_X[\dim X]$.

La catégorie $\mathscr{T}_{i_0}$ est donc une résolution catégorique fortement crépante de X.

Revenons finalement au cas de $\mathrm{G}(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$. On a démontré dans le chapitre 3 de ce texte que la variété tangente de $\mathrm{G}(3,6)$ admet une résolution catégorique crépante. On souhaite savoir si cette résolution est *non-commutative*, plus précisément :

Question III. *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_{X_2} \arrow[r, hook, "\delta"] \arrow[dr, "\pi_{\mathscr{T}*}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2) \arrow[d, "\pi_*"] \\ & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tau(\mathrm{G}(3,6))) \end{tikzcd}$$

la résolution catégorique crépante de la variété tangente de $\mathrm{G}(3,6)$ *construite au chapitre* 3. *Existe-t-il un faisceau d'algèbres*[1] $\mathscr{A}_{\tau(\mathrm{G}(3,6))}$ *sur* $\tau(\mathrm{G}(3,6))$ *ayant dimension homologique finie tel que :*

$$\mathscr{D}_{X_2} \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\tau(\mathrm{G}(3,6)), \mathscr{A}_{\tau(\mathrm{G}(3,6))}) \ ?$$

Le théorème 5.2 de [Kuz08b] suggère que pour fabriquer un tel faisceau d'algèbres $\mathscr{A}_{\tau(\mathrm{G}(3,6))}$, il est suffisant de trouver de "très bonnes" décompositions semi-orthogonales des diviseurs exceptionnels de la résolution X_2. Dans notre situation, il suffit d'exhiber une paire de fibrés vectoriels $\{\mathscr{V}, \mathscr{W}\}$ sur X_2, qui soit exceptionnelle relativement à π, et telle que :

$$\mathscr{E}_2 = \langle \mathscr{V}|_{E_2} \otimes \tilde{\pi}_2^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}(3,6))) \rangle$$

et

$$\mathscr{E}_1^2 = \langle \mathscr{W}|_{E_1^{(2)}} \otimes \tilde{\pi}^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}(3,6)) \rangle,$$

où $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_1^2$ sont les catégories définies au lemme 3.3.4.

La projection naturelle $\tilde{\pi_2} : E_2 \to \pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}(3,6)))$ est une fibration en quadriques lisses. Il semble donc possible de trouver des fibrés sur X_2 qui se spécialisent en les fibrés spineurs relatifs une fois restreints à E_2. Cela règlerait le cas de $\mathscr{E}_2$. La situation pour $\mathscr{E}_1^{(2)}$ est beaucoup plus délicate. En effet, la projection $\tilde{\pi}_1 : E_1 \to \mathrm{G}(3,6)$ est une fibration en $\mathbb{P}^8$ doublé. Le diviseur E_1 est donc génériquement non réduit, ce qui implique que le diviseur $E_1^{(2)}$ est aussi génériquement non réduit. L'existence d'un fibré $\mathscr{W}$ sur X_2 tel que :

$$\mathscr{E}_1^{(2)} = \langle \mathscr{W}|_{E_2} \otimes \tilde{\pi}_2^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\pi_1^* \sigma_+(\mathrm{G}(3,6))) \rangle$$

1. Un esprit aventureux ne se restreindrait pas aux seules algèbres et considèrerait aussi les *DG-algèbres*, voire même les A_∞*-algèbres...*

impliquerait que $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)})$ a dimension homologique finie : c'est impossible. On peut toutefois espérer que le théorème 5.2 de [Kuz08b] puisse être amélioré de la façon suivante : il suffit de trouver un faisceau d'algèbres $\mathscr{A}_{X_2}$ sur X_2 ayant dimension homologique finie tel que $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)}, \mathscr{A}_{X_2} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}})$ admette une "très bonne" décomposition semi-orthogonale (au sens du théorème 5.2 de [Kuz08b]) et que l'application naturelle :

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)}, \mathscr{A}_{X_2} \otimes \mathscr{O}_{E_1^{(2)}}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)}),$$

soit une résolution catégorique des singularités. Heureusement, une partie de ce programme est déjà réalisée dans [KL12]. En effet, le théorème 5.23 de cet article nous permet de construire un faisceau d'algèbres $\mathscr{A}_{E_1}$ sur E_1 telle que :

- l'aplication naturelle $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1, \mathscr{A}_{E_1}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1)$ est une résolution catégorique des singularités,
- on a une décomposition semi-orthogonale :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1, \mathscr{A}_{E_1}) =& \langle\langle \mathscr{O}^{\alpha}_{|E_1|_{red}}(-8) \otimes \tilde{\pi}_1^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}(3,6)), \dots \mathscr{O}^{\alpha}_{|E_1|_{red}} \otimes \tilde{\pi}_1^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}(3,6)\rangle, \\ & \langle \mathscr{O}^{\beta}_{|E_1|_{red}}(-8) \otimes \tilde{\pi}_1^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}(3,6)), \dots \mathscr{O}^{\beta}_{|E_1|_{red}} \otimes \tilde{\pi}_1^* \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{G}(3,6)\rangle\rangle,\end{aligned}$$

  où $\mathscr{O}^{\alpha}_{[E_1[_{red}}(1)$ et $\mathscr{O}^{\beta}_{|E_1|_{red}}(1)$ sont des faisceaux de $\mathscr{A}_{E_1}$-modules qui s'identifient au générateur relativement très ample du groupe de Picard relatif du fibré projectif :

$$|E_1|_{red} \to \mathrm{G}(3,6),$$

  lorsqu'on les restreint à $|E_1|_{red}$, l'espace réduit sous-jacent à E_1.

Il reste, en définitive, de nombreux points à vérifier afin de construire une résolution non commutative crépante de $\tau(\mathrm{G}(3,6))$:

- trouver un faisceau d'algèbres $\mathscr{A}_{E_1^{(2)}}$ sur $E_1^{(2)}$ tel que $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)}, \mathscr{A}_{E_1^{(2)}})$ admette une décomposition analogue à celle de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1, \mathscr{A}_{E_1})$,
- montrer que le faisceau d'algèbres $\mathscr{A}_{E_1^{(2)}}$ est la restriction à $E_1^{(2)}$ d'un faisceau d'algèbres $\mathscr{A}_{X_2}$ sur X_2,
- prouver que l'application naturelle :

$$r_* : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2, \mathscr{A}_{X_2}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X_2),$$

  satisfait $r_* r^* = \mathrm{id}$,
- démontrer que la catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_2, \mathscr{A}_{X_2} \otimes \mathscr{O}_{E_2})$ admet toujours une "très bonne" décomposition semi-orthogonale (au sens du théorème 5.2 de [Kuz08b]) qui est compatible avec la décomposition de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(E_1^{(2)}, \mathscr{A}_{E_1^{(2)}})$.

Le premier point de ce programme est sans doute le plus simple à réaliser car $E_1^{(2)}$ est l'éclatement de E_1 le long d'un sous-schéma lisse qui intersecte transversalement toutes les fibres de $\tilde{\pi}_1 : E_1 \to \mathrm{G}(3,6)$.

Annexe A

The map $\mu : E \to \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ has infinite Tor-dimension

A.1 Morphisms with finite Tor-dimension

I am very grateful to Laurent Gruson and Christian Peskine for many helpful discussions related to this Appendix.

A.1.1 Basic facts

We recall the following definition :

Definition A.1.1. Let $f : X \to Y$ be a morphism of schemes of finite type over an algebraically closed field k. We say that f has finite *Tor-dimension* if $\mathscr{O}_X$ has a finite projective resolution as a $\mathscr{O}_Y$-module.

The following are the best known examples of morphism with finite Tor-dimension :
- morphisms $f : X \to Y$, with Y smooth,
- flat morphisms,
- locally complete intersection morphisms,
- any composition of the three above examples.

The result below implies that any resolution of singularities has infinite Tor-dimension :

Proposition A.1.2. *Let $f : X \to Y$ a proper morphism of varieties over an algebraically closed field k. Let $y \in Y_{sing}$ and assume that $f^{-1}(y)$ is not included in the singular locus of X. Then f has infinite Tor-dimension.*

As I was not able to find any proper reference for this standard fact, I provide a proof of it.

Proof. Since f takes closed point to closed points, this question can be localized at the neighborhood of any point in X. Thus, we have to prove the following : Let $f : A \to B$ be a morphism of local Noetherian rings whose residue fields are k and with B regular. Assume that f has finite Tor-dimension. Then A is also regular.

We first consider a finite free resolution of k as a B-module :

$$0 \to M_r \to \cdots \to M_p \to \cdots \to M_0 \to k \to 0.$$

Then let :

$$\cdots \to N_{q,p} \to \cdots \to N_{0,p} \to M_p \to 0$$

be a (possibly infinite) resolution of M_p by free A-modules. Since all $N_{q,p}$ are free A-modules, the map $M_p \to M_{p-1}$ lifts to a map $N_{q,p} \to N_{q,p-1}$ for all $0 \leq p \leq r$ and $q \geq 0$. Thus, we get an infinite double complex of free A-modules whose terms are the $N_{q,p}$ for $0 \leq p \leq r$ and $q \geq 0$.

The ring B has finite Tor-dimension (say t) on A, so that the kernel $K_{t+1,p}$ of $N_{t,p} \to N_{t-1,p}$ is flat for all $0 \leq p \leq r$. Since all squares appearing in the double complex $N_{p,q}$ commute, we can lift the map $N_{t,p} \to N_{t,p-1}$ to a map $K_{t+1,p} \to K_{t+1,p-1}$. As a consequence, we get a finite double complex $G_{\bullet,\bullet}$ of flat A-modules, where $G_{q,p} = N_{q,p}$ for $0 \leq q \leq t$, $G_{t+1,p} = K_{t+1,p}$ and $G_{q,p} = 0$ for $q > t+1$.

By the Cartan-Eilenberg resolution, the simple complex associated to the double complex $G_{\bullet,\bullet}$ is quasi-isomorphic to the complex $M_\bullet$. Hence k admits a finite resolution by flat A-modules, so that A is regular (see [Mat86], Theorem 19.2).

□

A.1.2 Growth of infinite free resolutions

In this section, we come back to the case of the morphism $\mu : E \to \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ and we prove the following :

Proposition A.1.3. *The morphism $\mu : E \to \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ has infinite Tor-dimension.*

Note that this result is not completely obvious. Indeed, the singular locus of E is precisely the inverse image by μ of the singular locus of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, so that we cannot apply Proposition A.1.2 to prove the statement. However we will stick to the following principle :

If $f : X \to Y$ has finite Tor-dimension, then the singularities of Y can't be much worse than the singularities of X.

We will make this idea precise using the theory of growth of Betti numbers for infinite free resolutions. We refer to [Avr10] for a nice exposition of this theory.

Definition A.1.4. Let B be a local noetherian ring with residue field k, an algebraically closed field of char 0. Let $\mathscr{F}$ be a module of finite type on B and let :

$$\cdots \to M_n \to M_{n-1} \to \cdots \to M_1 \to \mathscr{F} \to 0,$$

be a (possibly infinite) minimal resolution of $\mathscr{F}$ by free B-modules. The *n-th Betti number* of $\mathscr{F}$, which we denote by $\beta^n(\mathscr{F})$, is the rank of M_n.

Note that $\beta^n(\mathscr{F})$ is also equal to the dimension of $Tor_B^n(\mathscr{F}, k)$.

Definition A.1.5. With the same hypothesis as above, we define the *complexity* of $\mathscr{F}$ to be :

$$\mathrm{cp}(\mathscr{F}) = \min\{d,\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ such that } \beta^n(\mathscr{F}) \leq \alpha.n^{d-1} \text{ for all } n >> 0\}.$$

The following result characterizes locally complete intersection in terms of complexity (see [Avr10] remark 8.1.3).

Theorem A.1.6. *Let B be a local notherian ring whose residue field is k. Assume that* $\mathrm{cp}(k) < +\infty$. *Then B is a complete intersection in a regular local ring. Moreover, assume that B is Cohen-Macaulay and that* $\mathrm{cp}(k) \leq 1$, *then B is a hypersurface ring in a regular local ring.*

The converse of the above theorem holds and is much easier. In the case of hypersurfaces, there is even a more precise result. We start with a definition :

Definition A.1.7. Let B be a notherian local ring with residue field k. Let $\mathscr{F}_\bullet$ be an unbounded from below complex of modules over B. We say that $\mathscr{F}_\bullet$ is *periodic at infinity of period* $p > 0$, if there exists an integer m such that for all $i < m$, we have :

$$\mathscr{F}_{i-p} = \mathscr{F}_i$$

and a commutative diagram :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_{i-p+1} \arrow[r, "\partial_{i-p+1}"] \arrow[d, equal] & \mathscr{F}_{i-p} \arrow[d, equal] \\
\mathscr{F}_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & \mathscr{F}_i
\end{tikzcd}$$

The following is one of the fundamental results in the theory of matrix factorizations (see [Avr10], construction 5.1.2) :

Theorem A.1.8. *Let B be a notherian local ring which is a hypersurface ring in some local regular ring. Then, any module of finite type $\mathscr{F}$ over B admits a resolution by a complex $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet$ of finite free B-modules, periodic at infinity of period* 2.

We can now prove the main result of this section :

Theorem A.1.9. *Let $f : A \to B$ be a local morphism of noetherian local rings with residue field k and with A Cohen-Macaulay. Assume that B is a hypersurface ring in a regular local ring and that f has finite Tor-dimension. Then A is also a hypersurface ring in a regular local ring.*

This result (and its proof) is somehow similar to its analogue A.1.2.

Proof. We start with a periodic resolution of k by finite free B-modules :

$$\cdots M_p \xrightarrow{\partial_p^B} M_{p-1} \to \cdots \xrightarrow{\partial_1^B} M_0 \to k \to 0,$$

with

$$M_{i-2} = M_i$$

and a commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} M_{i-1} \arrow[r, "\partial_{i-1}^M"] \arrow[d, equal] & M_{i-2} \arrow[d, equal] \\ M_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}^M"] & M_i \end{tikzcd}$$

for all $i \ll 0$.

Since f has finite Tor-dimension, the same argument as in the proof of proposition A.1.2 shows that we can find a double complex $N_{\bullet,\bullet}$ of flat A-modules, such that $N_{\bullet,p}$ is a finite resolution of M_p by flat A-modules. Since the complex $M_\bullet$ is periodic at infinity of period 2, we get :

$$N_{\bullet,i-2} = N_{\bullet,i}$$

and

$$\begin{tikzcd} N_{\bullet,i-1} \arrow[r, "\partial_{\bullet,i-1}^N"] \arrow[d, equal] & N_{\bullet,i-2} \arrow[d, equal] \\ N_{\bullet,i+1} \arrow[r, "\partial_{\bullet,i+1}^N"] & N_{\bullet,i} \end{tikzcd}$$

for $i << 0$. Let $G_\bullet$ be the Cartan-Eilenberg resolution of $N_{\bullet,\bullet}$. This is an unbounded from below, periodic at infinity, complex of flat A-modules which is quasi-isomorphic to k. Since all the G_q are flat A-modules, the $Tor_A^n(k,k)$ are

the homology groups of the complex $G_\bullet \otimes_A k$. But the very definition of periodicity at infinity implies that the sequence of homology groups $\mathscr{H}_i(G_\bullet \otimes_A M)$ is periodic for all A-modules M and $i \ll 0$. As a consequence, the $Tor_A^n(k,k)$ are periodic for $n >> 0$. But the ring A is Cohen-Macaulay, so by Proposition A.1.6, the ring A is a hypersurface in a regular local ring. $\square$

Now we can prove that the map $\mu : E \to \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ has infinite Tor-dimension. We proceed by contradiction. Assume that μ has finite Tor-dimension. Since E is a Cartier divisor in a smooth variety and $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ is Cohen-Macaulay, we can apply Theorem A.1.9 and we find that for any $x \in \sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$, there exists an open subset U_x of $\sigma_+(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ containing x such that U_x is a hypersurface in a smooth scheme, say V_x. Let $\kappa : \tilde{V_x} \to V_x$ be the blow-up of V_x along $U_x \cap \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ and denote by E_V the exceptional divisor. The strict transform of U_x by κ is the blow-up of U_x along $U_x \cap \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$, whose exceptional divisor E_U is a fibration into $\mathbb{AP}^2$ over U_x (see Proposition 3.2.2). Since U_x is a hypersurface in V_x, the fibers of E_U over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ are hypersurfaces in the fibers of E_V over $\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$. As a consequence $\mathbb{AP}^2$ is a hypersurface in some projective space. We will show that it is impossible.

Indeed, let us first consider the case $\mathbb{A} = \mathbb{R}$. Then $\mathbb{AP}^2 = \mathbb{P}^2$. All embeddings of $\mathbb{P}^2$ in projective spaces are given by powers of $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ followed by linear projections. The only embedding of $\mathbb{P}^2$ as a hypersurface is thus the embedding in $\mathbb{P}^3$ as a hyperplane. But if the tangent cone of U_x at $y \in \mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6)$ is a hyperplane in the tangent space to V_x at y, then U_x is smooth at y which is a contradiction.

For $\mathbb{A} = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, or $\mathbb{O}$, we use a topological argument to get a contradiction. We recall that in the cases $\mathbb{A} = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, and $\mathbb{O}$, the Severi varieties are $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, $\mathrm{Gr}(2,6)$ and $\mathbb{OP}^2$. The first integer cohomology groups of these varieties are described in the following table :

$\mathbb{AP}^2$	$\dim \mathbb{AP}^2$	$H^0(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$	$H^2(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$	$H^4(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	4	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\mathrm{Gr}(2,6)$	8	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\mathbb{OP}^2$	16	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

$H^6(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$	$H^8(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$	$H^{10}(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$	$H^{12}(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$	$H^{14}(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z})$
$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

To fill this table we need :

- the Künneth formula for $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$,
- the fact that the Schubert classes form a basis of the integral cohomology of the Grassmannian (see [Man98]) for $\mathrm{Gr}(2,6)$,
- the beginning of section 3 of [IM05] for $\mathbb{OP}^2$.

Assume that $\mathbb{AP}^2$ is embedded in $\mathbb{P}^{2m_{\mathbb{A}}+1}$ as a hypersurface. Then, by Lefschetz hyperplane theorem, we have :

$$H^{2k}(\mathbb{AP}^2, \mathbb{Z}) = H^{2k}(\mathbb{P}^{2m_{\mathbb{A}}+1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

for all $0 \leq k \leq m_{\mathbb{A}} - 1$. The above array shows that it is impossible.

Annexe B

Un résultat de $\mathbb{Q}$-factorialité

B.1 Énoncé du résultat et preuve

Soit X une variété singulière. On observe dans la pratique qu'il est souvent possible de dire si X est normale, Cohen-Macaulay, de Gorenstein, à singularités terminales ou rationnelles (voir [KW12] et [KW13] pour des listes concernant certains espaces préhomogènes). Toutefois la $\mathbb{Q}$-factorialité semble beaucoup plus difficile à décrire. Ainsi, dans [KW12] et [KW13], la $\mathbb{Q}$-factorialité n'est jamais abordée. Dans cet appendice, on dégage un critère (que l'on a implicitement mis en lumière dans la preuve du lemme 3.2.9) pour déterminer la $\mathbb{Q}$-factorialité d'une variété Gorenstein à singularités rationnelles et on l'appliquera à des exemples concrets. On notera que ce résultat est assez proche du lemme 1.1.1 de [Nam09].

Proposition B.1.1. *Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme propre, birationnel avec X et Y de Gorenstein à singularités rationnelles. Supposons que le lieu exceptionnel de π (noté E) soit un diviseur de Cartier dans Y et que :*
- *(i) toutes les fibres schématiques de π ont rang de Picard égal à 1,*
- *(ii) ω_Y est relativement anti-ample pour π.*
- *(iii) $\pi(E)$ est irréductible.*

Alors on a l'implication :

$$Y \text{ est } \mathbb{Q}\text{-factorielle} \Rightarrow X \text{ est } \mathbb{Q}\text{-factorielle.}$$

On notera qu'on n'impose pas que les fibres exceptionnelles de π soit réduites. On vérifie également que si X est de Gorenstein à singularités terminales et que :

$$X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 = X$$

est une résolution des singularités constituée d'éclatements le long de centres normalement plats, alors tous les morphismes $X_i \to X_{i-1}$ vérifient les conditions (ii) et (iii). (voir section 1.2.1 du chapitre 1). Ainsi, si l'on souhaite

appliquer la proposition B.1.1 dans le cadre d'une telle résolution des singularités, la seule condition non triviale à vérifier est la condition (i).

Démonstration de la proposition B.1.1. On va tout d'abord montrer que

$$\dim NE(\pi) = 1.$$

Soit $x_0 \in \pi(E)$ un point général. On va prouver que pour tout $x \in \pi(E)$, il existe deux courbes $C_0 \subset \pi^{-1}(x_0)$ et $C \subset \pi^{-1}(x)$ telles que C_0 et C sont numériquement équivalentes.

D'après l'hypothèse (iii), la variété $\pi(E)$ est irréductible. Dès lors, notons Γ une courbe de $\pi(E)$ passant par x_0 et x. Soit $\Gamma' \to \Gamma$ la normalisation de Γ et $p : \Gamma' \to X$ le morphisme induit. On considère le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} Y' = Y \times_\Gamma \Gamma' \arrow[r, "f_{\Gamma'}"] \arrow[d, "p'"] & \Gamma' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

On note d la dimension de $f^{-1}(x_0)$. Soit $Z \subset Y'$, le lieu d'annulation de $d-1$ sections générales de $\mathscr{O}_{Y'/\Gamma'}(m)$ pour $m \gg 0$, où $\mathscr{O}_{Y'/\Gamma}(1)$ est un fibré relativement ample pour $f_{V'}$. Notons $f_Z : Z \to V'$ le morphisme obtenu par restriction de $f_{V'}$, alors ${f_Z}^{-1}(x_0)$ est de dimension 1. Soit Z_0 l'espace réduit sous-jacent à une composante irréductible de Z qui domine V'. Comme V' est lisse et Z_0 intègre, on en déduit que la restriction $f_{Z_0} : Z_0 \to V'$ est plate. La fibre $f_{Z_0}^{-1}(x)$ est donc de dimension 1. Finalement, le morphisme $p' : Y' \to Y$ étant fini sur son image, on conclut que $p'(f_{Z_0}^{-1}(x))$ et $p'(f_{Z_0}^{-1}(x_0))$ sont deux courbes numériquement équivalentes (dans Y) respectivement incluses dans $\pi^{-1}(x)$ et $\pi^{-1}(x_0)$.

On peut maintenant prouver que $\dim NE(\pi) = 1$. Pour cela, il suffit de démontrer pout tout $x \in \pi(E)$, si C et C_0 sont deux courbes contenues respectivement dans $\pi^{-1}(x)$ et $\pi^{-1}(x_0)$, alors C et C_0 sont numériquement proportionnelles. Mais le rang de Picard de $\pi^{-1}(x)$ est 1, donc toutes les courbes de $\pi^{-1}(x)$ sont numériquement proportionnelles entre elles. Or, on sait qu'il existe deux courbes respecivement incluses dans $\pi^{-1}(x)$ et $\pi^{-1}(x_0)$ qui sont numériquement équivalentes. On en déduit que toutes les courbes de $\pi^{-1}(x)$ sont numériquement proportionnelles à toutes les courbes de $\pi^{-1}(x_0)$.

Soit $x \in \pi(E)$ et C une courbe dans $\pi^{-1}(x)$. D'après la condition (ii) dans l'énoncé de B.1.1, on a :

$$\omega_X|_{\pi^{-1}(x)}.C < 0.$$

La classe de C engendre un rayon négatif dans $NE(\pi)$. Mais $\dim NE(\pi) = 1$, c'est donc une arrête négative. Ainsi, en appliquant le théorème du cône (voir le théorème 7.51 de [Deb01]), on trouve un diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "c_R"] \arrow[dr, "\pi"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd}$$

où c_R est la contraction saillante de Mori pour le rayon $R = \mathbb{R}^+.[C]$.

Soit $x \in \pi(E)$. Supposons que $\dim c_R(\pi^{-1}(x)) > 0$. Alors on peut trouver deux courbes $C \subset c_R(E)$ et $C' \subset \pi^{-1}(x)$ telles que $c_R(C') = C$. Mais comme $\dim NE(\pi) = 1$, toutes les courbes de $\pi^{-1}(x)$ sont contractées par c_R (voir théorème 7.51 de [Deb01]), c'est une contradiction. Ainsi q est un morphisme fini tel que $\mathbf{R}q_*\mathscr{O}_Z = \mathscr{O}_X$. Sachant que X est normale, le Main Theorem de Zariski implique que q est un isomorphisme. Finalement, on sait que Y est $\mathbb{Q}$-factorielle, la proposition 7.44 de [Deb01] nous permet de déduire que X est aussi $\mathbb{Q}$-factorielle.

□

B.2 Applications

On applique la proposition B.1.1 à quelques exemples étudiés dans cette thèse.

Corollaire B.2.1. *Toutes les variétés pfaffiennes sont $\mathbb{Q}$-factorielles.*

Ce résultat est sans doute bien connu des experts, mais la seule référence (implicite) que j'ai trouvée dans la littérature est le lemme 1.1.1 de [Nam09].

Démonstration. Soit V un espace vectoriel de dimension n et p un entier tel que $2p < n$. On note :

$$Z^{(p)} = \mathbb{P}\{A \in \bigwedge^2 V, \mathrm{rg} A \leq 2p\}$$

la variété pfaffienne de rang $2p$ dans un espace de dimension n. On considère la désingularisation $\pi : \tilde{Z}^{(p)} \to Z^{(p)}$ où

$$\tilde{Z}^{(p)} = \{(A, M) \in Z^{(p)} \times \mathrm{Gr}(2p, V), \text{ tel que } Im(A) \subset M\}.$$

Pour tout k, La variété $\tilde{Z}^{(k)}$ est une fibration en espaces projectifs au dessus de $\mathrm{Gr}(2k, V)$, elle est donc irréductible. Le lieu exceptionnel de la

résolution $\pi : \tilde{Z}^{(p)} \to Z^{(p)}$ est un diviseur de Cartier intègre, notons le E. Son image dans $Z^{(p)}$ est exactement $Z^{(p-1)}$. On en déduit que la condition (iii) de B.1.1 est vérifiée.

Montrons que $Z^{(p)}$ est à singularités terminales. . Sachant que $Z^{(p)}$ est de Gorenstein (voir l'exemple 2.1.4 du chapitre 1), il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega_{\tilde{Z}^{(p)}} = \pi^*\omega_{Z^{(p)}} \otimes \mathscr{O}_{\tilde{Z}^{(p)}}(mE)$ (voir la définition 2.22 de [KM98]). D'après la formule d'adjonction, on a :

$$\omega_E = \pi^*\omega_{Z^{(p)}} \otimes \mathscr{O}_E((m+1)E).$$

Or, l'application $\pi : E \to \pi(E)$ est génériquement plate, donc toujours d'après la formule d'adjonction, on a :

$$\omega_{\pi^{-1}(x)} = \mathscr{O}_E((m+1)E)|_{\pi^{-1}(x)},$$

pour $x \in \pi(E)$ générique. En outre, on sait que $\mathscr{O}_E(E)|_{\pi^{-1}(x)} = \mathscr{O}_{\pi^{-1}(x)}(-1)$ et que la fibre générique de $\pi : E \to \pi(E)$ est isomorphe à $\mathrm{Gr}(2, \mathbb{C}^{n-2p+2})$. Ainsi, pour $x \in \pi(E)$ générique, on a $\omega_{\pi^{-1}(x)} = \mathscr{O}_E((n-2p+2)E)|_{\pi^{-1}(x)}$. Sachant que $2p < n$, on en déduit que $m > 1$. La conditions (ii) de B.1.1 est alors satisfaite.

En outre, pour tout $A \in Z^{(p)}$, la fibre de π au dessus de A est isomorphe à $\mathrm{Gr}(2p - \mathrm{rg}(A), V/\mathrm{Im}(A))$: elle a rang de Picard 1. On peut appliquer la proposition B.1.1 au morphisme π et on trouve que $Z^{(p)}$ est $\mathbb{Q}$-factorielle.

□

Un autre corollaire de la proposition B.1.1 est le suivant :

Corollaire B.2.2. *L'hypersurface $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ est $\mathbb{Q}$-factorielle.*

Dans le cas où $\mathbb{A} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, l'hypersurface $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ est lisse en codimension 3. Le théorème de factorialité de Grothendieck ([Gro], Exposé XI, corollaire 3.14) montre alors que $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ est factorielle. Dans le cas où $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, le lieu singulier de $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ a exactement codimension 3 dans $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$. On ne peut donc pas appliquer le résultat de Grothendieck.

Démonstration. D'après le théorème 3.2.5 du chapitre 3, on a une suite d'éclatements :

$$X_2 \xrightarrow{\pi_2} X_1 \xrightarrow{\pi_1} X = \tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$$

telle que X_2 est lisse et les morphismes π_1 et π_2 satisfont les items (i) et (iii) de la proposition B.1.1. En outre, d'après le lemme 3.2.9, ces morphismes vérifient aussi la condition (ii) de B.1.1. On peut donc applique cette proposition aux morphismes sus-mentionnés et on trouve que $\tau(\mathrm{G}_\omega(\mathbb{A}^3, \mathbb{A}^6))$ est $\mathbb{Q}$-factorielle. □

Bibliographie

[Abu] Roland Abuaf. Categorical crepant resolutions of singularities and Freudenthal's magic square. En préparation.

[Abu12] Roland Abuaf. Lefschetz decompositions and categorical resolution of singularities II : The wonderful resolutions. arXiv :1209.1564, 2012.

[ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[AJ89] Donu Arapura and David B. Jaffe. On Kodaira vanishing for singular varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 105(4) :911–916, 1989.

[Avr10] Luchezar L. Avramov. Infinite free resolutions. In *Six lectures on commutative algebra*, Mod. Birkhäuser Class., pages 1–118. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[Beĭ84] A. A. Beĭlinson. The derived category of coherent sheaves on $\mathbf{P}^n$. *Selecta Math. Soviet.*, 3(3) :233–237, 1983/84. Selected translations.

[BLVdB10] Ragnar-Olaf Buchweitz, Graham J. Leuschke, and Michel Van den Bergh. Non-commutative desingularization of determinantal varieties I. *Invent. Math.*, 182(1) :47–115, 2010.

[BLVdB11] Ragnar-Olaf Buchweitz, Graham J. Leuschke, and Michel Van den Bergh. Non-commutative desingularization of determinantal varieties II. arXiv :1106.1833v1, 2011.

[BMMS12] Marcello Bernardara, Emanuele Macrì, Sukhendu Mehrotra, and Paolo Stellari. A categorical invariant for cubic threefolds. *Adv. Math.*, 229(2) :770–803, 2012.

[BO02] A. Bondal and D. Orlov. Derived categories of coherent sheaves. Li, Ta Tsien (ed.) et al., Proceedings of the International Congress of Mathematicians, ICM 2002, Beijing, China, August 20-28, 2002. Vol. II : Invited lectures. Beijing : Higher Education Press. 47-56 (2002)., 2002.

[Bri02] Tom Bridgeland. Flops and derived categories. *Invent. Math.*, 147(3) :613–632, 2002.

[CF07] Pierre-Emmanuel Chaput and Baohua Fu. On stratified Mukai flops. *Math. Res. Lett.*, 14(6) :1055–1067, 2007.

[DCP83] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. In *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, volume 996 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–44. Springer, Berlin, 1983.

[Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Del11] Dragos Deliu. Homological Projective Duality for Gr(3,6). Dissertation for the degree of Doctor in Philosophy at the University of Pennsylvania. Available at http ://repository.upenn.edu/dissertations/AAI3463052, 2011.

[FM12] Daniele Faenzi and Laurent Manivel. On the derived category of the Cayley plane II. arXiv :1201.6327v1, 2012.

[Gro] Alexander Grothendieck. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2).* Documents Mathématiques (Paris), 4. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962, Augmenté d'un exposé de Michèle Raynaud.

[Gro61] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11) :167, 1961.

[Har66] Robin Hartshorne. *Residues and duality.* Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Hir64] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; ibid. (2)*, 79 :205–326, 1964.

[Hol11] Frédéric Holweck. Singularities of duals of Grassmannians. *J. Algebra*, 337 :369–384, 2011.

[Hur11] Mathieu Huruguen. Compactification d'espaces homogènes sphériques sur un corps quelconque. Thèse pour le grade de Docteur es Sciences de l'Université de Grenoble. Available at http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00716402, 2011.

[Huy06] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.

[IM05] Atanas Iliev and Laurent Manivel. The Chow ring of the Cayley plane. *Compos. Math.*, 141(1) :146–160, 2005.

[Kaw06] Yujiro Kawamata. Derived equivalence for stratified Mukai flop on $G(2,4)$. In *Mirror symmetry. V*, volume 38 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 285–294. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[Kim03] Tatsuo Kimura. *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, volume 215 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. Translated from the 1998 Japanese original by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author.

[KL12] Alexander Kuznetsov and Valery Lunts. Categorical resolutions of irrational singularities. 2012. arXiv :1212.6170.

[Kle80] Steven L. Kleiman. Relative duality for quasi-coherent sheaves. *Compos. Math.*, 41 :39–60, 1980.

[KM98] János Kollár and Shigefumi Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.

[KMM87] Yujiro Kawamata, Katsumi Matsuda, and Kenji Matsuki. Introduction to the minimal model problem. Algebraic geometry, Proc. Symp., Sendai/Jap. 1985, Adv. Stud. Pure Math. 10, 283-360 (1987)., 1987.

[Kol97] János Kollár. Singularities of pairs. Kollár, János (ed.) et al., Algebraic geometry. Proceedings of the Summer Research Institute, Santa Cruz, CA, USA, July 9–29, 1995. Providence, RI : American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 62(pt.1), 221-287, 1997.

[Kuz04] Alexander Kuznetsov. Derived category of a cubic threefold and the variety V_{14}. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 246(Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh.) :183–207, 2004.

[Kuz06a] Alexander Kuznetsov. Homological projective duality for Grassmannians of lines. arXiv :math/0610957, 2006.

[Kuz06b] Alexander Kuznetsov. Hyperplane sections and derived categories. *Izv. Math.*, 70(3) :447–547, 2006.

[Kuz07] Alexander Kuznetsov. Homological projective duality. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105) :157–220, 2007.

[Kuz08a] Alexander Kuznetsov. Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics. *Adv. Math.*, 218(5) :1340–1369, 2008.

[Kuz08b] Alexander Kuznetsov. Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities. *Selecta Math. (N.S.)*, 13(4) :661–696, 2008.

[Kuz09] Alexander Kuznetsov. Derived categories of Fano threefolds. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 264(Mnogomernaya Algebraicheskaya Geometriya) :116–128, 2009.

[KW12] Witold Kraskiewicz and Jerzy Weyman. Geometry of orbit closures for the representations associated to gradings of Lie algebras of types E_6, F_4 and G_2. 2012. arXiv :1201.1102.

[KW13] Witold Kraskiewicz and Jerzy Weyman. Geometry of orbit closures for the representations associated to gradings of Lie algebras of types E_7. 2013. arXiv :1301.0720.

[LM01] J. M. Landsberg and L. Manivel. The projective geometry of Freudenthal's magic square. *J. Algebra*, 239(2) :477–512, 2001.

[Man98] Laurent Manivel. *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, volume 3 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[Man11] L. Manivel. On the derived category of the Cayley plane. *J. Algebra*, 330 :177–187, 2011.

[Mat86] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Nam03] Yoshinori Namikawa. Mukai flops and derived categories. *J. Reine Angew. Math.*, 560 :65–76, 2003.

[Nam04] Yoshinori Namikawa. Mukai flops and derived categories. II. In *Algebraic structures and moduli spaces*, volume 38 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 149–175. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[Nam09] Yoshinori Namikawa. Induced nilpotent orbits and birational geometry. *Adv. Math.*, 222(2) :547–564, 2009.

[Nee96] Amnon Neeman. The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1) :205–236, 1996.

[Orl09] Dmitri Orlov. Remarks on generators and dimensions of triangulated categories. *Mosc. Math. J.*, 9(1) :153–159, back matter, 2009.

[Rob80] Paul Roberts. Cohen-Macaulay complexes and an analytic proof of the new intersection conjecture. *J. Algebra*, 66(1) :220–225, 1980.

[Rob88] Joel Roberts. *Projective embeddings of algebraic varieties*, volume 19 of *Monografías del Instituto de Matemáticas [Monographs of the Institute of Mathematics]*. Universidad Nacional Autónoma de México, México, 1988. With a Spanish summary.

[Sch77] D. Schaub. Propriété topologique du gradué associé d'un anneau (S_r). *Comm. Algebra*, 5(11) :1223–1239, 1977.

[Tha99] Michael Thaddeus. Complete collineations revisited. *Math. Ann.*, 315(3) :469–495, 1999.

[Vai84] Israel Vainsencher. Complete collineations and blowing up determinantal ideals. *Math. Ann.*, 267(3) :417–432, 1984.

[VdB04] Michel Van den Bergh. Three-dimensional flops and noncommutative rings. *Duke Math. J.*, 122(3) :423–455, 2004.

[Wey03] Jerzy M. Weyman. *Cohomology of vector bundles and syzygies.* Cambridge Tracts in Mathematics 149. Cambridge : Cambridge University Press. xiv, 371 p., 2003.

[WZ12] Jerzy Weyman and Gufang Zhao. Noncommutative desingularization of orbit closures for some representations of GL_n. arXiv :1204.0488v1, 2012.

[Zak93] F.L. Zak. *Tangents and secants of algebraic varieties.* Translations of Mathematical Monographs. 127. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). vii, 164 p., 1993.

Résumé

Soit X une variété algébrique de Gorenstein à singularités rationnelles. Une résolution des singularités crépante de X est souvent considérée comme une résolution des singularités minimales de X. Malheureusement, les résolutions crépantes sont très rares. Ainsi, les variétés déterminantielles de matrices anti-symétriques n'admettent jamais de résolution crépante des singularités.

Dans cette thèse, on discutera de diverses notions de résolutions catégoriques crépantes développées par Alexander Kuznetsov. Conjecturalement, ces résolutions doivent être minimale du point de vue catégorique. On introduit dans ce manuscrit la notion de résolution magnifiques des singularités et on montre que tout variété munie d'une telle résolution admet une résolution catégorique faiblement crépante. On en déduit que toutes les variétés déterminantielles (carrées, symétriques et anti-symétriques) admettent des résolutions catégoriques faiblement crépantes.

Finalement, on s'intéressera à des hypersurfaces quartiques issues du carré magique de Tits-Freudenthal. On ne peut pas construire de résolution magnifique des singularités pour de telles hypersurfaces, mais on montrera qu'elles admettent tout de même des résolutions catégorique faiblement crépantes des singularités.

Abstract

Let X be an algebraic variety with Gorenstein rational singularities. A crepant resolution of X is often considered to be a minimal resolution of singularities for X. Unfortunately, crepant resolution of singularities are very rare. For instance, determinantal varieties of skew-symmetric matrices never admit crepant resolution of singularities.

In this thesis, we discuss various notions of categorical crepant resolution of singularities as defined by Alexander Kuznetsov. Conjecturally, these resolutions are minimal from the categorical point of view. We introduce the notion of wonderful resolution of singularities and we prove that a variety endowed with such a resolution admits a weakly crepant resolution of singularities. As a corollary, we prove that all determinantal varieties (square, as well as symmetric and skew-symmetric) admit weakly crepant categorical resolution of singularities.

Finally, we study some quartics hypersurfaces which come from the Tits-Freudenthal magic square. Though they do no admit any wonderful resolution of singularities, we are still able to prove that they have a weakly crepant resolution of singularities.

Mots-clés

Résolution des singularités, catégories dérivées, géométrie birationnelle, dualité projective, espaces préhomogènes