HAL
open science

Émergence du bruit dans les systèmes ouverts classiques et quantiques

Julien Deschamps

▶ **To cite this version:**

Julien Deschamps. Émergence du bruit dans les systèmes ouverts classiques et quantiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2013. Français. NNT : 2013LYO10035 . tel-01169896

HAL Id: tel-01169896

https://theses.hal.science/tel-01169896v1

Submitted on 30 Jun 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Claude Bernard Lyon 1
Institut Camille Jordan
Laboratoire de Mathématiques
UMR 5208 CNRS-UCBL

Thèse de doctorat
N° d'ordre : 35-2013

Thèse de doctorat
Spécialité Mathématiques
présentée par

Julien Deschamps

Émergence du bruit dans les systèmes ouverts classiques et quantiques

Soutenue publiquement le 22 Mars 2013

Après avis de :

Marc Arnaudon	Professeur à l'Université Bordeaux 1
Stephan De Bièvre	Professeur à l'Université Lille 1
Franco Fragnola	Professeur à l'Ecole Polythecnique de Milan

Devant le jury composé de :

Marc Arnaudon	Professeur à l'Université Bordeaux 1	Rapporteur
Stéphane Attal	Professeur à l'Université Lyon 1	Directeur de thèse
Stephan De Bièvre	Professeur à l'Université Lille 1	Rapporteur
Franco Fragnola	Professeur à l'Ecole Polythecnique de Milan	Rapporteur
Ivan Gentil	Professeur à l'Université Lyon 1	Examinateur

Résumé

Nous nous intéressons dans cette thèse à certains modèles mathématiques permettant une description de systèmes ouverts classiques et quantiques. Dans l'étude de ces systèmes en interaction avec un environnement, nous montrons que la dynamique induite par l'environnement sur le système donne lieu à l'apparition de bruits.

Dans une première partie de la thèse, dédiée aux systèmes classiques, le modèle décrit est le schéma d'interactions répétées. Etant à la fois hamiltonien et markovien, ce modèle en temps discret permet d'implémenter facilement la dissipation dans des systèmes physiques. Nous expliquons comment le mettre en place pour des systèmes physiques avant d'en étudier la limite en temps continu. Nous montrons la convergence L^p et presque sûre de l'évolution de certains systèmes vers la solution d'une équation différentielle stochastique, à travers l'étude de la limite de la perturbation d'un schéma d'Euler stochastique.

Dans une seconde partie de la thèse sur les systèmes quantiques, nous nous intéressons dans un premier temps aux actions d'environnements quantiques sur des systèmes quantiques aboutissant à des bruits classiques. A cette fin, nous introduisons certains opérateurs unitaires appelés « classiques », que nous caractérisons à l'aide de variables aléatoires dites obtuses. Nous mettons en valeur comment ces variables classiques apparaissent naturellement dans ce cadre quantique à travers des 3-tenseurs possédant des symétries particulières. Nous prouvons notamment que ces 3-tenseurs sont exactement ceux diagonalisables dans une base orthonormée. Dans un second temps, nous étudions la limite en temps continu d'une variante des interactions répétées quantiques dans le cas particulier d'un système biparti, c'est-à-dire composé de deux systèmes isolés sans interaction entre eux. Nous montrons qu'à la limite du temps continu, une interaction entre ces sous-systèmes apparaît explicitement sous forme d'un hamiltonien d'interaction; cette interaction résulte de l'action de l'environnement et de l'intrication qu'il crée. Nous illustrons ce résultat à l'aide de systèmes physiques simples permettant ainsi une étude approfondie de certaines propriétés. Nous prouvons, par exemple dans le cas thermique, que ces systèmes possèdent la propriété du retour à l'équilibre donnant l'existence d'un unique état invariant, ainsi que le convergence vers celui-ci pour tout état initial du système. Nous étudions aussi l'évolution de l'intrication de formation mesurant le lien quantique qui existe entre ces deux sous-systèmes.

Abstract

This dissertation is dedicated to some mathematical models describing classical and quantum open systems. In the study of these systems interacting with an environment, we particularly show that the dynamics induced by the environment leads to the appearance of noises.

In a first part of this thesis, devoted to classical open systems, the repeated interaction scheme is developed. This discrete-time model, being Hamiltonian and Markovian at the same time, has the advantage to easily implement the dissipation in physical systems. We explain how to set this scheme up in some physical examples. Then, we investigate the continuous-time limit of these repeated interactions. We show the L^p and almost sure convergences of the evolution of the system to the solution of a stochastic differential equation, by studying the limit of a perturbed Stochastic Euler Scheme.

In a second part of this dissertation on quantum systems, we characterize in a first work classical actions of a quantum environment on a quantum system. In this study, we introduce some "classical" unitary operators representing these actions and we highlight a strong link between them and some random variables, called obtuse random variables. We explain how these random variables are naturally connected to some 3-tensors having some particular symmetries. We particularly show that these 3-tensors are exactly the ones that are diagonalizable in some orthonormal basis. In a second work of this part, we study the continuous-time limit of a variant of the repeated interaction scheme in a case of a bipartite system, that is, a system made of two isolated systems not interaction together. We prove that an explicit Hamiltonian interaction between them appears at the limit. This interaction is due to the action of the environment and the entanglement between the two systems that it creates. This results is also illustrated by some physical examples whose some properties are then studied : return to equilibrium and evolution of entanglement.

Remerciements

Ces remerciements ne sont pas très originaux, mais ils sont néanmoins sincères (enfin, vers la fin, ils le sont de moins en moins ! !).

Je voudrais remercier en premier, Stéphane bien évidemment, qui a su être présent quand il le fallait, tout en me laissant une grande liberté. J'ai vraiment appris beaucoup ces dernières années (et pas que mathématiquement). J'ai pu faire connaissance des autres membres de la « famille » : Yan, Clément, Ion et le petit dernier Ivan. J'apprécie réellement l'état d'esprit qui règne entre nous (que ce soit d'un point de vue mathématique ou autres), et ça, je pense que c'est en grande partie grâce à toi.

Je tiens également à remercier Marc Arnaudon, Stephan De Bièvre et Franco Fagnola d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Merci aussi à Ivan Gentil d'être présent dans ce jury (j'espère ne pas avoir fait trop de bruit quand même dans le bureau d'en face).

Je souhaite dire merci aussi, aux membres de l'ANR « Ham-Mark » : Claude-Alain, Alain, Laurent, Dragi,... Ils ont toujours eu des questions et des conseils pertinents qui m'ont permis d'avancer.

Durant cette thèse, j'ai rencontré beaucoup de gens au laboratoire avec qui j'ai pu discuter autour d'un café ou autre. Un merci pour toutes les longues discussions sur les enseignements à Dominique, Miguel, Sébastien et Serge notamment. Je me suis rendu compte que les enseignements peuvent être aussi très enrichissants dans ce travail. Je souhaite remercier aussi le groupe de proba de Lyon (Cédric, Nadine,...), les autres chercheurs et secrétaires comme Thomas, Anne-Laure, Monique, Houda, tous disponibles pour discuter et répondre à mes questions plus ou moins bêtes. Bien évidemment, il y a aussi tous les « jeunes », et plus particulièrement le 111b qui est de toute évidence le meilleur bureau du labo. Et oui, j'y ai passé beaucoup de temps à travailler (y compris quelques week ends) et surtout à raconter toutes mes histoires. Je remercie Bloup-Bloup (ne vous fâchez pas c'est par ordre alphabétique), Erwan, Marianne, Mohammed et Romain, tous les nouveaux, Adriane, Ivan, Raouf et tous ceux de passage de m'avoir supporté (je sais que ce n'était pas facile tous les jours). Il y a eu aussi ceux des autres bureaux qui auraient mérité d'être dans le 111b comme Alain, Alina, Amélie, Elodie, Gaëlle, JB, Mickaël, Said (tu as repéré les guillemets ?), Thomas, Xavier...

Je voudrais dire aussi un grand merci à toute ma famille : à mes parents, pour leur soutien et pour leur aide (bon peut être pas mathématiquement, quoique....) car je n'aurais pas pu faire cette thèse sans vous (ok c'est une phrase bateau mais c'est vrai donc bon....), à Lolo pour toutes les pauses téléphoniques notamment (sincèrement tu avais mon emploi du temps, c'est pas possible) et à Stéph' pour les vacances reposantes en Normandie. J'adresse un merci particulier aussi à Guillaume que j'ai « suivi » de loin pendant toute ma scolarité.

Je ne vais pas oublier les amis que j'avais rencontrés avant cette thèse qui m'ont bien aidé à décompresser, que ce soit autour d'un apéro, pendant un foot ou un bad ou encore durant un week end : les « lyonnais » (les zébus, l'AS et tous les autres), mais aussi les « normands », notamment Schmilch, avec qui j'ai passé de longues soirées à « philosopher ».

J'ai sans doute oublié certaines personnes. Désolé. Je sais que la plupart d'entre vous vont s'arrêter ici (voire avant). Merci encore. Pour les autres, bonne lecture à vous.

Table des matières

Introduction générale **3**

I Systèmes classiques ouverts **7**

1 Introduction aux systèmes classiques **9**
1.1 Systèmes hamiltoniens classiques 9
1.2 Systèmes classiques ouverts 10

2 Systèmes dynamiques, processus markoviens et interactions répétées **13**
2.1 Systèmes dynamiques et chaînes de Markov 13
2.2 Schéma d'interactions répétées classiques 16
2.3 Systèmes dynamiques et équations différentielles stochastiques 18

3 Aperçu des résultats **23**
3.1 Construction d'une dynamique continue 23
3.2 Convergence du processus et du shift 25
3.3 Applications à des systèmes physiques 27

4 Article 1 : Limite du continu d'interactions répétées pour des systèmes classiques **29**
4.1 Introduction 31
4.2 Dynamical Systems and Markov Processes 33
4.3 Embedding Discrete Time into Continuous Time 38
4.4 Application to some Physical Systems 41
4.5 Convergence of Dynamics 46
4.6 Back to the Physical Systems 69

II Systèmes quantiques ouverts **73**

5 Introduction aux systèmes quantiques **75**
5.1 Mécanique quantique 75
5.2 Mécanique quantique pour un système ouvert 76

6 Interactions répétées quantiques et équations différentielles stochastiques quantiques 81
6.1 Interactions répétées quantiques 81
6.2 Equations différentielles stochastiques quantiques 83

7 Marches obtuses réelles 87
7.1 Variable obtuse réelle 87
7.2 Lien avec les 3-tenseurs doublement symétriques 88
7.3 Lien avec certaines actions quantiques 90

8 Aperçu des résultats 93
8.1 Article 2 : Actions classiques de systèmes quantiques et marches aléatoires obtuses complexes 93
8.2 Article 3 : Limite du continu pour un système biparti 99

9 Article 2 : Actions classiques de systèmes quantiques et marches aléatoires obtuses complexes 103
9.1 Introduction 105
9.2 Repeated Quantum Interactions 106
9.3 Classical Actions of Quantum Environments 109
9.4 Complex Obtuse Random Variables 115
9.5 Complex Doubly-Symmetric 3-Tensors 124
9.6 Representation of Classical Unitary Actions 132
9.7 An example in dimension 1 137

10 Article 3 : Limite du continu pour un système biparti 141
10.1 Introduction 143
10.2 Bipartite Model 144
10.3 Continuous-Time Limit 147
10.4 Entanglement for the Spontaneous Emission of Photons 152
10.5 Case of a Thermal Environment 154

Introduction Générale

Nous nous intéressons dans cette thèse à des théories mathématiques motivées par des problèmes issus de la physique. Plus précisément, ce travail concerne l'émergence du bruit dans les systèmes ouverts classiques ou quantiques, notamment à travers l'étude d'un modèle appelé *interactions répétées*.

Un système *ouvert* est un système en interaction avec un environnement, ce qui représente la quasi-totalité des systèmes physiques qui nous entourent. Pour de très nombreux systèmes ouverts, nous n'avons pas accès à l'environnement ou tout du moins à la totalité de l'environnement, mais uniquement au système que nous souhaitons étudier. Il est alors naturel de se demander quelles évolutions nous pouvons observer lorsqu'on se focalise seulement sur le petit système. L'interaction avec l'environnement est de manière générale à l'origine de l'apparition d'un bruit sur le système. C'est exactement ce phénomène et l'étude de ces bruits qui sont au centre des travaux présentés dans cette thèse ; que ce soit dans la description de l'action d'un bains quantiques qui donnent lieu à un bruit classique sur le système, ou dans l'étude du schéma d'interactions répétées classiques et quantiques.

Pour étudier ces systèmes ouverts, deux approches sont souvent considérées. La première, appelée *hamiltonienne*, consiste en une description très précise du système, de l'environnement, de l'interaction et de la dynamique de l'ensemble. Cette approche a souvent l'inconvénient d'aboutir à des modèles et des calculs extrêmement compliqués. De plus, pour de nombreux systèmes physiques, l'environnement est trop compliqué à décrire totalement, voire même inaccessible aux mesures. Une description précise est alors impossible. La seconde approche est celle dite *markovienne*. Dans cette approche, l'objectif de décrire complètement l'environnement est abandonné pour se concentrer sur son action effective

sur le petit système. Sous certaines hypothèses concernant particulièrement l'environnement, l'évolution du petit système est alors markovienne. L'avantage de cette approche est d'aboutir à une étude plus simple de la dynamique. Cependant, la nature physique de l'environnement et de l'interaction est souvent oubliée et l'action de l'environnement est juste représentée par un aléa.

Le schéma d'interactions répétées est un modèle à mi-chemin entre ces deux approches. En effet, le caractère hamiltonien est présent car l'action effective de l'environnement est conservée. D'autre part, par nature, ce modèle possède une structure markovienne qui a l'avantage de mener à des équations pouvant être plus facilement étudiées. Décrivons maintenant plus précisément ce modèle formalisé mathématiquement en mécanique quantique par Attal et Pautrat dans [12]. L'environnement est dans ce schéma supposé être composé d'une collection infinie de parties (sous-systèmes) identiques pouvant être dans des états différents. L'interaction entre le système et l'environnement est alors la suivante. La première partie de l'environnement est couplée au temps 0 avec le système. Ils interagissent pendant un temps, noté h. Cette interaction est quelconque a priori mais provient généralement d'un hamiltonien dans les systèmes physiques considérés. Au temps h, l'interaction est arrêtée. Nous supposons que la partie de l'environnement qui vient d'interagir n'interviendra plus par la suite dans l'évolution du système. La deuxième partie de l'environnement est alors couplée au système et ils interagissent eux aussi pendant un temps h, et ainsi de suite. Chaque partie agissant de manière indépendante avec le système, le caractère markovien de ce modèle apparaît donc naturellement.

A noter que ce type de schéma n'est pas seulement théorique, il correspond aussi à une réalité physique, notamment dans la série d'expériences [30, 31] réalisées par Serge Haroche et son équipe, qui lui a valu le prix Nobel de physique. Brièvement et schématiquement, leur système physique est une cavité comportant un nombre inconnu de photons piégés. Des particules, dans un état préparé, sont envoyées les unes après les autres dans la cavité et interagissent avec les photons. A la sortie, les particules sont mesurées. Cette mesure permet ensuite de déterminer le nombre de photons dans la cavité sans les détruire.

Le modèle général des interactions répétées a aussi d'autres avantages physiques, comme par exemple d'implémenter naturellement la dissipation. En effet, des équations comme l'équation de Langevin sont retrouvées comme limite de ces systèmes hamiltoniens dans le cas quantique comme dans le cas classique.

Dans la première partie de cette thèse, nous nous intéressons aux systèmes ouverts classiques et plus précisément au schéma d'interactions répétées classiques, très peu étudié jusqu'à présent.

Dans le premier chapitre, nous présentons de manière générale le contexte des systèmes classiques, que ce soit les systèmes dits *fermés*, en rappelant le formalisme hamiltonien souvent utilisé pour une étude précise, ou les systèmes ouverts en présentant les approches présentées précédemment dans ce cadre classique.

Le second chapitre est dédié à une description précise du schéma classique d'interactions répétées introduit par Attal dans [2]. Ce modèle est mathématiquement basé sur un parallèle entre certains systèmes dynamiques déterministes et les processus markoviens. Nous présentons aussi un équivalent continu de cette connexion qui nous sert à décrire

la limite en temps continu des interactions répétées, c'est-à-dire la limite quand le temps d'interaction h tend vers 0.

Nous terminons cette partie sur les systèmes classiques par un chapitre présentant brièvement les résultats obtenus dans l'article du chapitre 4.

Dans cet article, la convergence des systèmes dynamiques donnés par les interactions répétées est étudiée. Nous montrons par exemple que le système à la limite a une évolution donnée par une équation différentielle stochastique. Les convergences L^p et presque sûre des processus sont en particulier prouvées pour certaines dynamiques en montrant la convergence d'une perturbation d'un schéma d'Euler stochastique explicite et en utilisant de nombreux outils du calcul stochastique.

Dans la seconde partie de la thèse, nous nous intéressons aux systèmes quantiques ouverts et plus particulièrement à l'apparition de bruit classique, ou à la création d'une interaction induite par l'environnement entre des systèmes qui au départ n'en avaient pas.

Dans le chapitre 5, nous décrivons les axiomes de la mécanique quantique pour des systèmes fermés et ouverts.

Une description précise du schéma d'interactions répétées quantiques est ensuite donnée dans le chapitre 6.

Dans le chapitre suivant, certaines variables aléatoires classiques, dites *obtuses*, sont présentées dans le cas réel. Une extension au corps des complexes de ces variables est au centre d'un travail décrit par la suite. Nous verrons comment elles interviennent naturellement dans l'étude des actions classiques pouvant être induites par un environnement quantique sur un système quantique.

Le chapitre 8 est dédié à une brève description des résultats obtenus sur les systèmes quantiques ouverts dans les articles des chapitres 9 et 10.

Le premier de ces travaux concerne les variables obtuses complexes ainsi que certaines évolutions unitaires, appelées *classiques*, qui aboutissent à un bruit classique sur un système quantique. Nous verrons comment ces deux objets a priori disjoints sont reliés par des 3-tenseurs, dits *doublement symétriques*, qui sont l'objet d'une étude précise.

Pour terminer, un dernier travail sur la limite du continu pour un système biparti (composé de deux sous-systèmes sans interaction entre eux) est développé. Nous montrons qu'en passant à la limite, une interaction apparaît entre ces deux parties, due aux interactions répétées de l'environnement. Nous illustrons ces résultats avec certains exemples simples, que ce soit dans un cas thermique ou non, notamment en calculant l'intrication de formation entre les deux sous-systèmes.

Première partie

Systèmes classiques ouverts

Chapitre 1

Introduction aux systèmes classiques

Dans ce premier chapitre, nous présentons le contexte générale des systèmes classiques, qu'ils soient fermés ou ouverts.

Dans la section 1.1, le formalisme hamiltonien permettant une description précise des systèmes physiques classiques considérés est succinctement rappelé.

Nous présentons ensuite, dans la section 1.2, les différentes approches pour l'étude de systèmes classiques ouverts en les illustrant avec certains modèles et travaux existants.

1.1 Systèmes hamiltoniens classiques

Le formalisme hamiltonien est l'un des principaux points de vue adoptés physiquement pour décrire un système classique dans le but d'étudier son évolution au cours du temps. Nous présentons maintenant brièvement pour un système dans $\mathbb{R}^d$ (pour une description plus générale dans le cas d'une variété voir par exemple [1]).

Un système *hamiltonien* est un système physique dont l'énergie au cours du temps est conservée. Un exemple typique de système hamiltonien est celui d'un système *isolé*, c'est-à-dire sans interaction avec son environnement. Dans ce formalisme, l'état d'un système est décrit par sa *position*, notée q, et sa *quantité de mouvement*, notée p. L'ensemble de tous les états possibles du système est appelé *espace des phases*. Un système de $\mathbb{R}^d$ a donc son état représenté par le vecteur (q, p) de $\mathbb{R}^{2d}$, avec $q = (q_1, \cdots, q_d)$ et $p = (p_1, \cdots, p_d)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$.

La quantité centrale dans ce point de vue hamiltonien est l'énergie totale du système, appelée *hamiltonien*. Cette énergie est représentée par une fonction de l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$ dans $\mathbb{R}$, notée souvent H, dépendant de q et p. Comme, par définition, cette énergie est conservée au cours du temps, le système évolue donc dans l'ensemble

$$\{(q, p) \in \mathbb{R}^{2d} \mid H(q, p) = E_0\},$$

où E_0 est l'énergie initiale du système.

Le fait important dans ce formalisme hamiltonien est que, connaissant l'énergie, son hamiltonien, nous pouvons connaître l'évolution du système au cours du temps. En effet, celle-ci est donnée par *les équations de Hamilton* :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{et} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,,$$

pour tout i de $\{1, \cdots, d\}$.

Notez en particulier le caractère différentiel de ces équations. Une des grandes difficultés de ce type de système est qu'il est rarement possible d'obtenir une évolution explicite au cours du temps en intégrant ces équations. Les systèmes hamiltoniens sont l'objet de très nombreux travaux dans lesquels leurs propriétés sont étudiées (voir une introduction aux systèmes intégrables par exemple dans [14]).

Exemple 1.1.1. L'oscillateur harmonique dans $\mathbb{R}$ est un des exemples les plus usuels et les plus simples car nous pouvons intégrer les équations de mouvement. Il nous servit aussi d'exemple dans l'article chapitre 4.

Nous considérons un système dans $\mathbb{R}$ dont l'état est représenté par (q, p) dans $\mathbb{R}^2$. L'hamiltonien de ce système est donné par

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2\,,$$

où $p^2/2$ est l'énergie cinétique du système et $\omega^2 q^2/2$ l'énergie potentielle. La constante ω est une constante qui dépend du système.

Les équations du mouvement du système sont données par

$$\frac{dq}{dt} = p \qquad \text{et} \qquad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 q\,.$$

L'évolution exacte est dans ce cas, pour des conditions initiales (q_0, p_0) :

$$q(t) = q_0 cos(\omega t) + \frac{p_0}{\omega} sin(\omega t) \qquad \text{et} \qquad p(t) = -q_0 \omega sin(\omega t) + p_0 cos(\omega t)\,.$$

Nous verrons dans l'étude de la limite en temps continu de systèmes d'interactions répétées que même si une évolution explicite du système ne peut pas être déterminée comme dans cet exemple simple, les équations du mouvement permettent d'obtenir facilement une évolution approchée du système suffisante pour déterminer l'équation limite.

1.2 Systèmes classiques ouverts

Le formalisme précédent concerne les systèmes dont l'énergie au cours du temps est conservée. Dans le cas d'un système ouvert, l'interaction avec l'environnement implique généralement des échanges d'énergie entre le système et l'environnement. Par conséquent, le

système seul ne peut pas être décrit de manière hamiltonienne et d'autres approches sont alors nécessaires.

Comme présentée dans l'introduction, une première approche est de considérer le système et l'environnement comme formant un plus gros système qui, lui, est isolé et donc hamiltonien. Ainsi la présentation précédente peut alors s'appliquer au système total. A partir des équations du mouvement du système total, l'évolution du « petit » système peut être déterminée en regardant uniquement les composantes correspondantes. Cependant, cette approche n'est possible que dans des cas très simples. Par exemple, même pour une chaîne d'oscillateurs harmoniques, l'étude est loin d'être évidente (voir [35]).

L'autre approche, dite markovienne, consiste à oublier une description précise notamment de l'environnement nécessaire pour définir l'hamiltonien. Sous certaines hypothèses, le système est alors markovien. La dynamique du système est gouvernée par certaines probabilités de transition. Ces probabilités proviennent a priori d'une interaction avec l'environnement, mais nous oublions complètement cette origine. Certaines propriétés physiques de ce système sont alors étudiées plus facilement. Beaucoup de modèles aléatoires sont basés sur cette approche. Citons par exemple le processus d'exclusion simple considéré par Derrida, Bodineau, Lebowitz ou Gerschenfeld et bien d'autres (dans [18, 17, 24]). Ce système consiste à regarder des particules sur un réseau comme $\mathbb{Z}$ pouvant sauter de manière indépendante à gauche ou à droite si le site voisin est libre. Les probabilités de saut peuvent être interprétées comme provenant d'une interaction avec un champ ou autre.

Pour une étude des systèmes ouverts, un compromis entre ces deux approches est souvent à la base de nombreux modèles. En effet, le caractère markovien a l'avantage de faciliter les calculs tandis que le caractère hamiltonien permet un plus grand réalisme physique des modèles.

Nous pouvons citer certains travaux de De Bievre, Parris, par exemple [23], où le système de départ est totalement hamiltonien car constitué d'une particule se déplaçant dans un champ d'oscillateurs qui interagissent avec la particule uniquement quand elle est à proximité. Dans ce genre de système, il est extrêmement difficile (voire impossible) de déterminer exactement quelle est la trajectoire de la particule (Avec quel oscillateur la particule agira ? Quand l'interaction commence ?...) surtout lorsque la convergence vers un état d'équilibre nous intéresse, nécessitant bien évidemment une étude asymptotique de l'évolution. Le caractère markovien apparaît quand la répartition exacte des oscillateurs est oubliée permettant ainsi une étude plus facile des propriétés du système.

Dans d'autres travaux, comme [26] de Eckmann, Pillet et Rey-Bellet, [15] de Bernardin, [16] de Bernardin et Olla, ou encore [19] de Bodineau et Lefevere, le système est totalement déterministe et hamiltonien mais l'environnement est modélisé par une perturbation aléatoire (souvent continue) de la dynamique. Dans ces travaux par exemple, le système est une chaîne d'oscillateurs (harmoniques ou non) perturbée par un bain thermique modélisé par une équation de type Langevin ou une équation d'onde.

Le but des travaux présentés dans cette partie de la thèse est de considérer le schéma d'interactions répétées classiques, un modèle général mélangeant lui aussi à la fois une

approche hamiltonienne du système et un caractère markovien, rendant l'étude de son évolution plus accessible.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques, processus markoviens et interactions répétées

Dans ce chapitre, nous laissons momentanément de côté le cadre physique pour nous concentrer sur le formalisme mathématique permettant de décrire le schéma d'interactions répétées qui sera au centre des travaux présentés de cette partie. Le modèle classique, introduit par Attal dans [2], est principalement basé sur un parallèle entre systèmes dynamiques et processus markoviens. Nous verrons comment dans certains systèmes dynamiques déterministes l'aléa apparaît naturellement lorsque nous n'avons pas accès à toute l'information sur la dynamique mais juste à une partie représentant le système physique que nous souhaitons modéliser.

2.1 Systèmes dynamiques et chaînes de Markov

Nous commençons par présenter ce cadre mathématique dans le cas du temps discret. Un système dynamique général en temps discret est l'itération d'une application d'un espace dans lui-même. Les exemples les plus connus sont le « shift » ou décalage sur les suites à valeurs dans $\{0,1\}$ (un dérivé de ce système dynamique interviend dans la suite), les rotations sur le cercle unité (interprétées aussi comme une addition sur le tore), et les systèmes hyperboliques comme la multiplication sur $\mathbb{R}^2$ par une matrice de taille 2 ayant une valeur propre positive et une valeur propre négative. Dans notre contexte, la définition est la suivante.

Définition 2.1.1. *Un système dynamique est la donnée d'un espace mesurable $(F, \mathcal{F})$ et d'une application mesurable $\widehat{T}$ de F dans lui-même.*

La dynamique est alors donnée par la suite $(\widehat{T}^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des itérations de la fonction $\widehat{T}$. Remarquons que cette dynamique sur les éléments de F en induit naturellement une sur les fonctions de F. En effet, considérons l'espace $\mathcal{L}^\infty(F, \mathcal{F})$ des applications mesurables bornées de F dans $\mathbb{R}$. Définissons la fonction mesurable T de $\mathcal{L}^\infty(F, \mathcal{F})$ dans lui-même par

$$Tf(x) = f(\widehat{T}(x)),$$

pour tout f de $\mathcal{L}^\infty(F,\mathcal{F})$ et tout x de F.

Présentons maintenant les systèmes dynamiques qui nous servirons à modéliser l'évolution d'un système physique classique, appelé « petit système » (même si celui-ci peut avoir un nombre infini de degré de liberté), avec son environnement. Considérons une application mesurable $\widehat{T}$ agissant sur un espace produit $S \times E$ où $(S,\mathcal{S})$ et $(E,\mathcal{E})$ sont deux espaces mesurables. L'espace S représente l'espace des états du petit système et E celui de l'environnement. L'espace produit $S \times E$ est donc interprété comme l'espace des états du petit système couplé à l'environnement. L'application $\widehat{T}$ donne ainsi l'interaction entre le système et l'environnement. Nous verrons dans la partie II que cette construction est similaire à celle développée pour les systèmes quantiques. Comme précédemment remarqué, cette application $\widehat{T}$ sur les éléments de $S \times E$ permet de créer une dynamique sur les applications de $\mathcal{L}^\infty(S \times E)$.

Rappelons que nous souhaitons étudier des systèmes dans le cas où nous manquons d'information sur l'état de l'environnement car celui-ci serait trop complexe, inaccessible aux mesures, ou tout simplement inconnu. Autrement dit, nous voulons comprendre quelle évolution nous obtenons si nous restreignons T uniquement à S, ou plutôt si nous ne pouvons voir uniquement que l'évolution du petit système. Il est naturel d'étudier l'action de T sur les fonctions ne dépendant que de l'état du petit système, les « observables » classiques du petit système. Cependant, l'application T ne peut agir que sur $\mathcal{L}^\infty(S \times E)$ donc nous commençons par injecter canoniquement $\mathcal{L}^\infty(S)$ dans $\mathcal{L}^\infty(S \times E)$ de la manière suivante. Considérons une fonction bornée f sur S. Nous l'étendons à $S \times E$ en définissant une application $f \otimes \mathbb{1}$ par

$$(f \otimes \mathbb{1})(x,y) = f(x)\,,$$

pour tout x de S et tout y de E. Cette fonction $f \otimes \mathbb{1}$ représente la fonction d'origine f mais agissant sur l'espace $S \times E$. Le système dynamique T peut maintenant agir sur $f \otimes \mathbb{1}$.

A cette étape, nous devons faire une hypothèse. Nous supposons que l'espace E est muni d'une mesure de probabilité μ. Le manque d'information sur l'environnement se traduit de la manière suivante. Ce que nous pouvons observer sur le système est uniquement une moyenne sur E de l'action de T sur $S \times E$ selon la mesure de probabilité μ. Remarquons que la mesure μ choisie au départ est totalement quelconque pour le moment.

Finalement, l'objet que nous souhaitons étudier est le suivant. Pour toute fonction f de $\mathcal{L}^\infty(S)$ et tout élément x de S, nous définissons un opérateur, noté L, de la manière suivante

$$Lf(x) = \int_E T(f \otimes \mathbb{1})(x,y)\, d\mu(y)\,.$$

Nous pouvons noter que Lf appartient bien à $\mathcal{L}^\infty(S)$. L'opérateur L représente alors la restriction de la dynamique de T à $\mathcal{L}^\infty(S)$ seulement.

Mathématiquement, nous avons en fin de compte défini le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{L}^\infty(S \times E) & \xrightarrow{\;T\;} & \mathcal{L}^\infty(S \times E) \\
{\scriptstyle \otimes\mathbb{1}}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \int_E \cdot\, d\mu} \\
\mathcal{L}^\infty(S) & \xrightarrow[\;L\;]{} & \mathcal{L}^\infty(S)
\end{array}$$

L'objet qu'il faut alors étudier et comprendre est l'opérateur L. Mais avant de donner un résultat, rappelons d'abord la définition d'un noyau markovien associé à une chaîne de Markov.

Définition 2.1.2. *Un noyau markovien* Π *est une application de* $S \times \mathcal{S}$ *dans* $[0,1]$ *telle que :*

- *la fonction* $x \mapsto \Pi(x, A)$ *est mesurable, pour tout élément* A *de la tribu* $\mathcal{S}$
- *l'application* $A \mapsto \Pi(x, A)$ *est une mesure de probabilité, pour tout* x *de* S.

La valeur de $\Pi(x, A)$ peut être interprétée comme la probabilité qu'a une chaîne de Markov associée à Π d'aller dans l'ensemble A à partir de x, en un pas.

Le théorème suivant prouvé par Attal dans [2] donne une réponse sur la nature de l'opérateur L.

Théorème 2.1.3. *Il existe un noyau markovien* Π *permettant d'écrire l'opérateur* L *sous la forme suivante*

$$Lf(x) = \int_S f(z)\,\Pi(x, dz)\,, \tag{2.1.1}$$

pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty(S)$.

Réciproquement, si S *est un espace lusinien et si* Π *est un noyau markovien sur* S, *alors il existe un espace de probabilité* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *et une application* $\widehat{T}$ *sur* $S \times E$ *tels que l'opérateur*

$$Lf(x) = \int_S f(z)\,\Pi(x, dz)\,,$$

puisse s'écrire de la forme

$$Lf(x) = \int_E T(f \otimes \mathbb{1})(x, y)\,d\mu(y)$$

pour toute fonction f *de* $\mathcal{L}^\infty(S)$.

Rappelons qu'un espace lusinien est espace mesurable homéomorphe à une partie borélienne d'un espace compact et métrisable. Cette condition apparaît car la démonstration nécessite l'utilisation du théorème d'extension de Kolmogorov.

Notons que l'opérateur L n'est pas un système dynamique mais la restriction d'un système dynamique à une partie de l'espace produit. Plus précisément, il représente ce que nous pouvons voir de la dynamique sur $S \times E$ quand nous observons uniquement le système S. Ce théorème montre aussi que cet opérateur contient un certain aléa, alors que la dynamique donnée par T est totalement déterministe. Cet aléa provient de notre méconnaissance de l'environnement due au fait que nous perdons une grande partie de l'information sur T. Un opérateur de la forme (2.1.1) est appelé *opérateur markovien.*

En résumé, en observant le système S, un aléa apparaît à cause de l'interaction avec l'environnement.

Dans la réciproque du théorème précédent, notons que la dilatation de L par T n'est évidemment pas unique. Cependant, il existe une construction explicite présentée dans [2] d'une dilatation à partir de n'importe quel noyau markovien sur un espace lusinien.

Maintenant une question naturelle se pose. L'opérateur L vient de la moyenne sur E après une itération de T sur $S \times E$. La « projection » après k itérations de T est-elle donnée par l'opérateur L appliqué k fois ? La réponse est non de manière générale car lors de la projection de la dynamique de $S \times E$ à S en faisant la moyenne sur E, nous perdons beaucoup trop d'informations. Un contre-exemple assez simple est donné dans [2].

Cependant, à partir de toute dilatation de l'opérateur L, nous pouvons construire un système dynamique T dilatant n'importe quelle puissance de L. Plus précisément, nous pouvons construire une application T telle que le système dynamique tout entier $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dilate toute la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Autrement dit, il existe une manière de dilater L telle que, pour tout entier k, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^\infty(S\times E) & \xrightarrow{T^k} & \mathcal{L}^\infty(S\times E) \\ \otimes\mathbb{1}\Big\uparrow & & \Big\downarrow \int_E \cdot\, d\mu \\ \mathcal{L}^\infty(S) & \xrightarrow[L^k]{} & \mathcal{L}^\infty(S) \end{array}$$

Cette construction introduite dans [2] est celle du schéma classique d'interactions répétées que nous décrivons maintenant.

2.2 Schéma d'interactions répétées classiques

Ce schéma classique est exactement l'équivalent du modèle quantique introduit dans [12] que nous présenterons dans la partie II et que nous avons présenté de manière générale dans l'introduction.

Le point de départ de ce schéma est un système dynamique $\widehat{T}$ sur $S \times E$ dilatant un opérateur markovien L. Cette application $\widehat{T}$ est mesurable de $S \times E$ dans $S \times E$. Donc, il existe deux applications mesurables U et V, respectivement de $S \times E$ dans S et de $S \times E$ dans E, telles que, pour tout x de S et tout y de E, nous avons

$$\widehat{T}(x,y) = (U(x,y), V(x,y))\,.$$

L'application U donne l'état du système après l'interaction donnée par $\widehat{T}$ et l'application V, l'état de l'environnement.

Dans le schéma d'interactions répétées, l'environnement est supposé composé d'une infinité de parties toutes identiques (mais qui peuvent être dans des états différents). L'environnement est alors représenté par l'espace $\widetilde{E} = E^{\mathbb{N}^*}$, muni de la tribu produit $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}^*}$ et de la mesure produit $\widetilde{\mu} = \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}$. Un élément de $\widetilde{E} = E^{\mathbb{N}^*}$ est une suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ donnant l'état de chaque partie de l'environnement : y_1, l'état de la première partie, y_2 celui de la deuxième et ainsi de suite.

Définissons maintenant un nouveau système dynamique $\widetilde{T}$ sur $S \times \widetilde{E}$ par

$$\widetilde{T}(x, y) = (U(x, y_1), \theta(y)) \,,$$

pour tout x de S , toute suite $y = (y_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ de $\widetilde{E}$ et où la fonction θ est le shift sur $\widetilde{E}$, c'est-à-dire

$$\theta(y) = (y_{m+1})_{m \in \mathbb{N}^*} \,.$$

Physiquement, cette dynamique est exactement celle décrite dans l'introduction. La première partie arrive, interagit avec le système et s'en va (représenté par le shift qui supprime l'état de la première partie). Donc si nous itérons, la seconde arrive, interagit et s'en va. Nous pouvons remarquer que l'interaction entre le système et chaque partie de l'environnement se fait de manière indépendante des autres et les unes après les autres. C'est pour cette raison que ce schéma est appelé « interactions répétées ».

Il est à noter aussi que l'application V n'intervient plus dans ce schéma. Ceci est en réalité assez naturel. Cette application donne l'état de la partie de l'environnement qui vient d'interagir avec le système. Comme son état n'aura aucune importance dans la suite, il n'est pas nécessaire de le conserver.

Pour voir maintenant le lien avec l'opérateur L de départ, nous définissons comme précédemment le système dynamique T sur $\mathcal{L}^\infty(S \times \widetilde{E})$. Le résultat suivant, prouvé dans [2], montre que cette nouvelle application T dilate bien toute la suite des opérateurs markoviens $(L^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Théorème 2.2.1. *Pour tout m de $\mathbb{N}$, tout x de S et toute fonction f de $\mathcal{L}^\infty(S)$, nous avons*

$$(L^m f)(x) = \int_{\widetilde{E}} T^m(f \otimes \mathbb{1})(x, y) \, d\widetilde{\mu}(y) \,.$$

Nous pouvons regarder maintenant ce que cette construction donne au niveau de l'évolution du système. Rappelons-nous que l'opérateur L est la restriction du système dynamique T à $\mathcal{L}^\infty(S)$ et qu'il est associé à un noyau markovien Π. Considérons maintenant un état initial du système x de S et un état de l'environnement y de $\widetilde{E}$. L'évolution du système est gouvernée par les itérations de l'application U et où l'état de chaque partie E de l'environnement est donné par un élément de y. Plus précisément, la suite $(X_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ représentant les états successifs du système suit la relation

$$X_{n+1}(y) = U(X_n(y), y_{n+1}) \,,$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et avec $X_0 = x$.

Si l'état de l'environnement est inconnu, le système évolue selon $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite est en réalité une chaîne de Markov définie sur l'espace de probabilité $(E^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{E}^{\otimes \mathbb{N}^*}, \mu^{\otimes \mathbb{N}^*})$ à valeurs dans S. Ses transitions sont données par le noyau Π associé à L, pouvant aussi être exprimé en fonction de μ et U de la manière suivante, pour tout x de S,

$$\Pi(x, \cdot) = U(x, \cdot)_{\#}\mu \,,$$

l'image de μ par l'application $U(x,\cdot)$ (voir [2]).

Nous avons ainsi défini la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnant l'évolution du système. Nous pouvons maintenant écrire les puissances du système dynamique $\widetilde{T}$ d'interactions répétées de manière plus condensée à partir de cette suite. Pour tout état x de S, tout état y de $\widetilde{E}$ et tout instant k de $\mathbb{N}$, nous avons

$$\widetilde{T}^k(x,y) = (X_k(y), \theta^k(y))\,,$$

où $X_0 = x$ et θ^k est le shift appliqué k fois, i.e. $\theta^k(y) = (y_{n+k})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Depuis le début de cette section, nous avons décrit ce modèle en temps discret. La dynamique est indexée par $\mathbb{N}$, signifiant implicitement que chaque interaction dure un temps 1. Nous pouvons introduire un nouveau paramètre h, la durée de chaque interaction. Cet ajout ne change pas radicalement le modèle précédent. Nous indexons maintenant les suites des états des différents systèmes par $h\mathbb{N}$ à la place de $\mathbb{N}$: $(X^{(h)}_{nh})_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_{nh})_{n\in\mathbb{N}^*}$.... Les applications $T^{(h)}$, $U^{(h)}$, ..., elles aussi peuvent dépendre de ce nouveau paramètre. Ceci est physiquement naturel car l'état du système après une interaction dépend de la durée de celle-ci.

Dorénavant, les états successifs du système sont donnés par la suite $(X^{(h)}_{nh})_{n\in\mathbb{N}}$ évoluant de la manière suivante

$$X^{(h)}_{(n+1)h}(y) = U^{(h)}(X^{(h)}_{nh}(y), y_{(n+1)h})\,.$$

Le système dynamique construit à partir du schéma d'interactions répétées est maintenant $\widetilde{T}^{(h)}$ défini par

$$\widetilde{T}^{(h)}(x,y) = (U^{(h)}(x,y_h), \theta^{(h)}(y))\,,$$

où $\theta^{(h)}$ est le shift sur $E^{h\mathbb{N}^*}$, i.e. $\theta^{(h)}(y) = (y_{(n+1)h})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Les travaux réalisés sur ces systèmes classiques d'interactions répétées durant cette thèse concernent la limite en temps continu de ces systèmes dynamiques ou uniquement sur le processus $(X^{(h)}_{nh})_{n\in\mathbb{N}}$ quand le paramètre d'interaction h tend vers 0. La limite de ces chaînes de Markov sont des solutions d'équations différentielles stochastiques. Pour cette raison, nous décrivons dans la section qui suit ce même parallèle entre systèmes dynamiques déterministes et processus markoviens, mais dans le cas continu.

2.3 Systèmes dynamiques et équations différentielles stochastiques

Dans le cas discret, nous avons décrit un moyen de dilater une chaîne de Markov tout entière en un système dynamique déterministe sur un espace plus grand. Nous présentons maintenant un équivalent dans le cas des solutions d'équations différentielles stochastiques. Nous nous restreignons dans cette section à l'étude d'équations différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ avec $m \geq 1$.

Définition 2.3.1. *Un système dynamique en temps continu est un semi-groupe* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *d'applications mesurables, c'est-à-dire satisfaisant*

$$T_s \circ T_t = T_{s+t}\,,$$

pour tout s, t *de* $\mathbb{R}^+$.

Considérons une équation différentielle stochastique de la forme suivante

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t\,, \tag{2.3.1}$$

où W_t est un mouvement brownien standard d-dimensionnel, b et σ sont deux applications mesurables respectivement, de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$, l'espace des matrices réelles de taille $m \times d$.

Dans toute la suite, nous aurons besoin de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique pour toutes conditions initiales et sur tout intervalle de temps. Pour cette raison, nous nous restreignons à deux cas.

Le premier type d'équation différentielle stochastique est celui dont les coefficients b et σ sont globalement Lipschitz, c'est-à-dire

(H1) il existe $K_0 > 0$ tel que pour tout x, y, nous avons

$$|b(x) - b(y)| \leq K_0\,|x-y| \qquad \text{et} \qquad \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq K_0\,|x-y|\,,$$

Le deuxième type, un peu plus général, est le cas de coefficients localement Lipschitz et localement bornés, c'est-à-dire

(H2) les fonctions b et σ sont localement Lipschitz : pour tout $N > 0$, il existe $K_N > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{B}(0, N)$, la boule centrée en 0 de rayon N, nous avons

$$|b(x) - b(y)| \leq K_N\,|x-y| \qquad \text{et} \qquad \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq K_N\,|x-y|\,,$$

(H3) les fonctions b et σ sont linéairement bornées : il existe $K_1 > 0$ tel que

$$|b(x)| \leq K_1(1+|x|) \qquad \text{et} \qquad \|\sigma(x)\| \leq K_1(1+|x|)\,,$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|$ la norme Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ définie par

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{m}(\sigma^{i,j})^2\,.$$

Nous pouvons remarquer que si les coefficients sont globalement Lipschitz alors ils sont localement Lipschitz et linéairement bornés. La distinction est faite car dans les résultats de cette thèse, dans le cas globalement Lipschitz, la convergence sera plus forte. Dans cette section, les propriétés réellement importantes sont l'existence et l'unicité de la solution en tout temps et pour toutes conditions initiales. Les conditions précédentes ne sont

évidemment pas nécessaires mais elles sont suffisantes et classiques mathématiquement (voir [33]).

Présentons maintenant une dilatation de la solution de l'équation différentielle stochastique (2.3.1) dans un contexte équivalent au cas discret. Il faut alors trouver un environnement et un semi-groupe tels que si nous restreignons le système dynamique au système représenté ici par $\mathbb{R}^m$, alors nous obtenons la solution de l'équation. Une telle construction est aussi faite dans [2] en se basant sur des résultats présents par exemple dans [38].

L'environnement choisi est l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ associé au mouvement brownien $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Cet espace canonique est plus précisément l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$ s'annulant à l'origine. Sur cet espace, le mouvement brownien $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ n'est autre que l'ensemble des applications coordonnées, c'est-à-dire, pour tout t de $\mathbb{R}^+$ et toute application ω de Ω, nous avons $W_t(\omega) = \omega(t)$.

Sur cet espace Ω, un shift θ_t similaire au shift discret existe. Pour tout t de $\mathbb{R}^+$, nous définissons θ_t par

$$\theta_t(\omega)(s) = \omega(t+s) - \omega(t)\,,$$

pour tout ω de Ω et tout s de $\mathbb{R}^+$.

Nous pouvons maintenant construire un système dynamique $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dilatant la solution de l'équation différentielle stochastique (2.3.1). Nous définissons la famille $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ par

$$T_t(x,\omega) = (X_t(\omega), \theta_t(\omega))\,,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $\omega \in \Omega$, où X_t est la solution de (2.3.1) au temps t partant de $X_0 = x$.

Dans [2], Attal montre le résultat suivant justifiant le fait que nous avons bien dilaté la solution de l'équation différentielle stochastique par un système dynamique continu.

Théorème 2.3.2. *La famille $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un système dynamique en temps continu sur $\mathbb{R}^m \times \Omega$.*

La question naturelle qui suit dans cet équivalent continu du parallèle décrit en discret dans la section précédente est la suivante : quel objet joue le rôle de l'opérateur markovien L ?

La réponse est tout simplement le semi-groupe dont le générateur infinitésimal est exactement celui de l'équation différentielle stochastique (2.3.1). Avant de décrire plus précisément ce fait, nous rappelons la définition et quelques propriétés des générateurs infinitésimaux associés à des processus markoviens. Comme nous étudions des processus, et plus particulièrement des solutions d'équations différentielles stochastiques dont l'existence et l'unicité sont supposées ou seront prouvées, nous ne présentons ici qu'un aperçu très simplifié de la théorie des générateurs markoviens sans rentrer dans les détails de domaine et autres.

Considérons la solution $(X_t^x)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de l'équation différentielle stochastique (2.3.1) partant du point x. Nous pouvons définir une famille d'application $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ agissant sur

$C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, l'ensemble d'applications de $\mathbb{R}^m$ possédant un support compact, de la manière suivante : pour tout t de $\mathbb{R}^+$, pour tout f de $C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ et tout x de $\mathbb{R}^m$

$$P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_t^x)\right] .$$

Grâce notamment à la propriété de Markov, cette famille $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un semi-groupe. Ce semi-groupe possède un *générateur infinitésimal* $\mathcal{A}$ permettant de voir $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ comme $(e^{t\mathcal{A}})_{t\in\mathbb{R}^+}$. Ce générateur permet ainsi de décrire l'évolution du semi-groupe. Dans le cas du mouvement brownien, cet opérateur $\mathcal{A}$ n'est autre que le Laplacien ; ceci justifiant l'appellation de processus de diffusion grâce à cette forte relation avec l'équation de la chaleur.

Dans le cas de la solution de l'équation différentielle stochastique (2.3.1), le générateur infinitésimal est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a^{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} ,$$

où a est la matrice $\sigma\sigma^t$.

Ce générateur infinitésimal a la propriété de presque caractériser la loi du processus. De cette manière, nous avons défini un opérateur à partir d'un processus markovien. Cependant, une question se pose sur l'unicité du processus associé à un générateur donné. Cette question est directement liée à la notion de problème de martingales caractérisant les processus associés à un générateur.

Définition 2.3.3. *Soit $x \in \mathbb{R}^m$. Un processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est solution du problème de martingale $(\mathcal{L}, x)$, si, pour tout f de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, le processus*

$$M_t^f = f(Y_t) - f(x) - \int_0^t \mathcal{L}f(Y_s)ds ,$$

est une martingale relativement à $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$.

Dans notre cas d'existence et d'unicité de la solution de l'équation différentielle (2.3.1), nous pouvons montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^m$, le seul processus solution du problème de martingale $(\mathcal{A}, x)$ est la solution $(X_t^x)_{t\in\mathbb{R}^+}$ (voir [33]).

Revenons maintenant aux systèmes dynamiques $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur $\mathbb{R}^m \times \Omega$. Comme dans le cas discret, nous lui associons le système dynamique $(\mathcal{T}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m \times \Omega)$. L'opérateur markovien apparaissait dans la section précédente quand nous nous intéressions à ce qui se passe uniquement sur le système. Procédons de la même manière ici. Une application f de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m)$ est aussi vue comme une application de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m \times \Omega)$ en tensorisant par l'identité. Maintenant, le système dynamique $(\mathcal{T}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ peut agir sur $f \otimes \mathbb{1}$. Ensuite, ce que nous observons quand nous regardons uniquement le système, c'est la moyenne sur Ω suivant la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Ainsi nous retrouvons le semi-groupe $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ étendu aux fonctions de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m)$ car

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{T}_t(f \otimes \mathbb{1})(x, \cdot)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_t^x)\right] = P_t(f)(x) ,$$

pour tout x de $\mathbb{R}^m$ et tout f de $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m)$. Ceci montre que l'équivalent de la suite $(L^k)_{k\in\mathbb{N}}$ en temps continu n'est autre que le semi-groupe $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Finalement dans cette section, nous avons présenté des systèmes dynamiques formalisant l'évolution d'un système ouvert dans un schéma d'interactions répétées, ainsi que leurs équivalents continus. Ce que nous traitons dans le chapitre suivant et qui est au centre des travaux de cette thèse sur les systèmes classiques est la limite en temps continu de ces interactions répétées.

Chapitre 3

Aperçu des résultats

Dans ce chapitre, nous présentons un bref aperçu des résultas obtenus sur les systèmes classiques ouverts. Ceux-ci ont abouti à l'article [25] du chapitre 4.

Cet article concerne l'étude de la limite en temps continu des systèmes dynamiques donnés par le schéma d'interactions répétées, c'est-à-dire la limite quand le temps d'interaction h tend vers 0. Il est alors montré que certains systèmes dynamiques convergent vers un semi-groupe associé à la solution d'une équation différentielle stochastique.

Dans la première section, nous décrivons un moyen d'obtenir une dynamique continue comme limite d'un système dynamique discret dans un cadre mathématique permettant de faire cohabiter les deux dynamiques. La section suivante est dédiée à la convergence en elle-même des shifts sur l'environnement ainsi que celle des processus donnant l'évolution du système. Nous terminons ensuite avec un exemple d'application assez simple des théorèmes de convergence.

3.1 Construction d'une dynamique continue

Dans le but d'étudier la convergence de systèmes dynamiques en temps discret vers le semi-groupe de la solution d'une équation différentielle stochastique dans $\mathbb{R}^m$ dirigée par un mouvement brownien d-dimensionnel, nous commençons par nous restreindre naturellement aux systèmes dynamiques dont l'espace des états du petit système S est $\mathbb{R}^m$ et dont l'espace des états de chaque partie de l'environnement E est $\mathbb{R}^d$.

La première étape est alors de trouver un moyen de faire agir les systèmes dynamiques discrets sur le même espace $\mathbb{R}^m \times \Omega$ que le semi-groupe d'une équation différentielle stochastique.

Considérons un système dynamique $\widetilde{T}^{(h)}$ sur $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ donné par

$$\widetilde{T}^{(h)}(x, y) = (U^{(h)}(x, y_h), \theta^{(h)}(y)) \,,$$

où $\theta^{(h)}$ est le shift sur $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ et donc $\theta^{(h)}(y) = (y_{(n+1)h})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Concentrons nous pour le moment sur les environnements $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ et Ω. Rappelons que l'ensemble Ω est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$ s'annulant à l'origine. Nous définissons maintenant des applications $\phi_I^{(h)}$ et $\phi_P^{(h)}$ permettant de mettre ces deux espaces en relation. L'espace $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ est injecté dans Ω par $\phi_I^{(h)}$ de la manière suivante. Pour tout suite $y = (y_{nh})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$, l'application $\phi_I^{(h)}$ interpole linéairement les éléments de y vus comme des accroissements et nous obtenons donc

$$\phi_I^{(h)}(y)(t) = \sum_{n=0}^{\lfloor t/h \rfloor} y_{nh} + \frac{t - \lfloor t/h \rfloor h}{h} y_{(\lfloor t/h \rfloor + 1)h}\,,$$

pour tout t de $\mathbb{R}^+$ avec par convention $y_0 = 0$.

Réciproquement, l'application $\phi_P^{(h)}$ est définie de Ω dans $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ qui a une fonction ω associe ses accroissements sur les intervalles de longueur h,

$$\phi_P^{(h)}(\omega) = (W_{nh}(\omega) - W_{(n-1)h}(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*} = (\omega(nh) - \omega((n-1)h))_{n\in\mathbb{N}^*}\,.$$

On peut remarquer que les applications $\phi_P^{(h)}$ et $\phi_I^{(h)}$ satisfont la relation

$$\phi_P^{(h)} \circ \phi_I^{(h)} = \mathrm{Id}_{(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}}\,.$$

L'image de $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ par $\phi_I^{(h)}$ est un sous-espace de Ω qui « remplit » tout l'espace quand h tend vers 0. En effet, l'espace Ω est un espace polonais (métrique, séparable et complet) pour la distance D de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts définie par

$$D(\omega, \omega') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \frac{\sup\limits_{0\le t\le n} |\omega(t) - \omega'(t)|}{1 + \sup\limits_{0\le t\le n} |\omega(t) - \omega'(t)|}\,,$$

pour tout ω et ω' et où $|\cdot|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Le lemme suivant montre qu'à la limite nous n'oublions aucune partie de Ω au sens de D.

Lemme 1. *Pour tout $\omega \in \Omega$,*

$$\lim_{h\to 0} D(\omega, \phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)) = 0\,.$$

La preuve de ce résultat est basée sur le fait qu'une fonction continue peut être approchée sur les compacts par une fonction linéaire par morceaux.

Maintenant que les environnements sont mis en relation, nous pouvons définir, à partir de $\widetilde{T}^{(h)}$, un système dynamique en temps discret sur $\mathbb{R}^m \times \Omega$. Les applications $\phi_I^{(h)}$ et $\phi_P^{(h)}$, n'agissant uniquement que sur l'environnement, sont relevées de manière canonique respectivement sur $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ et sur $\mathbb{R}^m \times \Omega$ par

$$\Phi_I^{(h)} = (Id, \phi_I^{(h)}) \qquad \text{et} \qquad \Phi_P^{(h)} = (Id, \phi_P^{(h)})\,.$$

Ensuite, nous associons à $\widetilde{T}^{(h)}$ le système dynamique $\overline{T}^{(h)}$ sur $\mathbb{R}^m \times \Omega$ donné par

$$\overline{T}^{(h)} = \Phi_I^{(h)} \circ \widetilde{T}^{(h)} \circ \Phi_P^{(h)} .$$

Remarquons que les applications satisfont la relation $\Phi_P^{(h)} \circ \Phi_I^{(h)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}}$ et que par conséquent, pour tout $n \geq 1$, nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m \times \Omega & \xrightarrow{(\overline{T}^{(h)})^n} & \mathbb{R}^m \times \Omega \\ \Phi_P^{(h)} \big\downarrow & & \big\uparrow \Phi_I^{(h)} \\ \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*} & \xrightarrow[(\widetilde{T}^{(h)})^n]{} & \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*} \end{array}$$

Le système dynamique $\widetilde{T}^{(h)}$ sur $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ est ainsi relevé sur $\mathbb{R}^m \times \Omega$.

La dernière étape consiste à interpoler linéairement en temps la dynamique de $((\overline{T}^{(h)})^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour avoir une dynamique en temps continu et ainsi pouvoir la comparer avec celle d'un semi-groupe. A cette fin, considérons alors la famille $(\overline{T}_t^{(h)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ définie par

$$\begin{aligned} \overline{T}_t^{(h)} &= (\overline{T}^{(h)})^{\lfloor t/h \rfloor} + \frac{t - \lfloor t/h \rfloor h}{h} \quad \left\{ (\overline{T}^{(h)})^{(\lfloor t/h \rfloor + 1)} - (\overline{T}^{(h)})^{\lfloor t/h \rfloor} \right\} \\ &= \frac{(\lfloor t/h \rfloor + 1)h - t}{h} \quad (\overline{T}^{(h)})^{\lfloor t/h \rfloor} + \frac{t - \lfloor t/h \rfloor h}{h} \quad (\overline{T}^{(h)})^{(\lfloor t/h \rfloor + 1)} , \end{aligned}$$

où par convention $(\overline{T}^{(h)})^0 = \mathrm{Id}$.

A cause de l'interpolation linéaire, la famille $(\overline{T}_t^{(h)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ n'est pas un semi-groupe mais nous pouvons cependant étudier la convergence vers un semi-groupe d'une équation différentielle stochastique.

Remarquons aussi que les états de l'environnement dans $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ sont donnés pour un ω de Ω par son image par $\phi_P^{(h)}$, ses accroissements sur les intervalles de longueur h. En loi, ce sont des lois normales centrées de variance h.

Notons par $\overline{X}_t^{(h)}$ et $\overline{\theta}_t^{(h)}$, les applications sur les deux composantes de $\overline{T}_t^{(h)}$. Plus précisément, pour tout ω de Ω, pour tout x de $\mathbb{R}^m$ et pour tout t de $\mathbb{R}^+$, nous avons

$$\overline{T}_t^{(h)}(x, \omega) = (\overline{X}_t^{(h)}(\phi_P^{(h)}(\omega)), \overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)) .$$

Remarquons que le processus $\overline{X}_t^{(h)}$ n'est pas un processus markovien à cause aussi de l'interpolation linéaire.

3.2 Convergence du processus et du shift

La convergence de la dynamique $(\overline{T}_t^{(h)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ vers le semi-groupe d'une équation différentielle stochastique est faite composante par composante.

Commençons par la convergence des shifts sur l'environnement pour la convergence uniforme sur les compacts donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Soit ω une fonction de Ω. Alors pour tout t de $\mathbb{R}^+$, nous avons*

$$\lim_{h\to 0} D(\theta_t(\omega), \overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)) = 0\,.$$

La preuve de ce résultat est aussi basée sur la convergence sur les compacts des fonctions linéaires par morceaux vers les fonctions continues.

La convergence du processus $\overline{X}_t^{(h)}$ vers la solution d'une équation différentielle stochastique revient à montrer la convergence d'une chaîne de Markov linéairement interpolée vers cette solution. Rappelons que cette chaîne de Markov évolue selon la fonction $U^{(h)}$. Comme nous sommes intéressés par la limite quand h tend vers 0, l'application $U^{(h)}$, supposée suffisamment régulière, est écrite sous forme d'un développement limité en h. Nous pouvons alors lire sur son approximation l'évolution limite. Nous avons les deux résultats suivants dépendant des conditions sur les coefficients à l'ordre 0 et 1 en h : global Lipschitz ou localement Lipschitz et linéairement bornés.

Théorème 3.2.2. *Supposons qu'il existe deux applications globalement Lipschitz b, σ, et une application $\eta^{(h)}$ vérifiant*

$$\left|\eta^{(h)}(x,y)\right| \leq K_2(h^\alpha\,|x| + |y|)\,,$$

avec $\alpha \in]0,+\infty]$ et $K_2 > 0$, telles que

$$U^{(h)}(x,y) = x + \sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x,y)\,.$$

Alors, pour tout x_0 de $\mathbb{R}^m$ et pour tout τ positif, le processus $(\overline{X}_t^h)_{t\in\mathbb{R}^+}$ partant de x_0 converge sur l'intervalle $[0,\tau]$ dans L^p, pour tout $p \geq 1$, et presque sûrement, quand h tend vers 0, vers la solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t\,,$$

avec $X_0 = x_0$.

Théorème 3.2.3. *Supposons qu'il existe deux applications localement Lipschitz et linéairement bornées b, σ, et une application $\eta^{(h)}$ vérifiant*

$$\left|\eta^{(h)}(x,y)\right| \leq K_2(h^\alpha\,|x| + |y|)\,,$$

avec $\alpha \in]0,+\infty]$ et $K_2 > 0$, telles que

$$U^{(h)}(x,y) = x + \sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x,y)\,.$$

Alors, pour tout x_0 de $\mathbb{R}^m$ et pour tout τ positif, le processus $(\overline{X}_t^h)_{t\in\mathbb{R}^+}$ partant de x_0 converge sur l'intervalle $[0,\tau]$ dans L^p, pour tout $p \geq 1$, quand h tend vers 0 vers la solution de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t\,,$$

avec $X_0 = x_0$.

L'application $\eta^{(h)}$ dans ces résultats regroupe tous les termes d'ordre élevé en h qui n'interviennent pas dans l'évolution limite.

Ces deux théorèmes sont les conséquences de deux résultats prouvés de manière un peu plus générale sous forme de convergence de la perturbation d'un schéma d'analyse numérique stochastique. La preuve du premier théorème est basée sur plusieurs utilisations de la formule d'Itô, de l'inégalité de Burkholder et d'autres théorèmes de calcul stochastique. La difficulté réside dans la gestion de cette perturbation $\eta^{(h)}$ de forme assez générale. Cette application a priori anodine fait perdre la structure intégrale de l'approximation et ne permet pas l'utilisation des théorèmes stochastiques usuels de manière directe. Le deuxième résultat utilise des temps de sorties de certaines boules et la non-explosion des processus concernés pour se ramener au cas globalement Lipschitz .

3.3 Applications à des systèmes physiques

Dans cette section, nous illustrons ces résultats avec des exemples physiques assez simples comme le cas d'une interaction harmonique amortie ou non.

Le premier exemple est un système hamiltonien dans lequel l'interaction entre le petit système et une partie de l'environnement est représentée par l'hamiltonien suivant,

$$H\left[\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix}\right] = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{1}{2}(Q_2 - Q_1)^2\,,$$

où $P_1^2/2$ est l'énergie cinétique du petit système, $P_2^2/2$ celle d'une partie de l'environnement et l'interaction est harmonique $1/2(Q_2 - Q_1)^2$.

Une approximation de l'application $U^{(h)}$ donnant l'état du système après une interaction est déterminée à partir des équations de Hamilton. Après un renforcement en $1/h$, non pas de toute l'interaction harmonique mais uniquement des termes d'interaction pure (ou de manière équivalente du bruit uniquement), les théorèmes précédents peuvent s'appliquer dans le cas où les états de l'environnement sont donnés par une loi normale (qui dans ce cas peut représenter un état de Gibbs sur l'environnement).

L'évolution du petit système converge alors dans L^p, pour tout $p \geq 1$, et presque sûrement sur tout intervalle $[0, \tau]$ vers la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \begin{pmatrix} X_t^{(2)} \\ -X_t^{(1)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dW_t\,,$$

où $X_t^{(j)}$ représente la j-ième composante de X_t.

Cette équation apparaît dans certains travaux, [43] et [37] par exemple, comme la perturbation naturelle d'un oscillateur harmonique.

Le formalisme et les résultats présentés peuvent être appliqués à des systèmes non-hamiltoniens. Par exemple, le cas d'une interaction harmonique amortie.

Nous considérons le système précédent en ajoutant une friction fluide $-fP_1$ sur le système. Cette force supplémentaire fait perdre de l'énergie au système qui ne va plus être

hamiltonien. Cependant, une approximation de la fonction $U^{(h)}$ peut être aussi obtenue à partir des équations de Newton. Après la même renormalisation, les théorèmes s'appliquent encore et l'évolution limite est donnée par l'équation de type Langevin

$$\begin{cases} d\,Q_1 = P_1 dt \\ d\,P_1 = -f\,P_1 - Q_1 dt + d\,W_t^{(1)}\,. \end{cases}$$

Les équations de Langevin sont très étudiées physiquement et possèdent notamment un comportement asymptotique connu.

Chapitre 4

Article 1 : Limite du continu d'interactions répétées pour des systèmes classiques

Continuous Time Limit of Classical Repeated Interaction Systems

Julien DESCHAMPS

Abstract

We consider the physical model of a classical mechanical system (called "small system") undergoing repeated interactions with a chain of identical small pieces (called "environment"). This physical setup constitutes an advantageous way of implementing dissipation for classical systems; it is at the same time Hamiltonian and Markovian. This kind of model has already been studied in the context of quantum mechanical systems, where it was shown to give rise to quantum Langevin equations in the limit of continuous time interactions ([12]), but it has never been considered for classical mechanical systems yet. The aim of this article is to compute the continuous limit of repeated interactions for classical systems and to prove that they give rise to particular stochastic differential equations in the limit. In particular we recover the usual Langevin equations associated to the action of heat baths. In order to obtain these results, we consider the discrete-time dynamical system induced by Hamilton's equations and the repeated interactions. We embed it into a continuous-time dynamical system and we compute the limit when the time step goes to 0. This way we obtain a discrete-time approximation of stochastic differential equation, considered as a deterministic dynamical system on the Wiener space, which is not exactly of the usual Euler scheme type. We prove the L^p and almost sure convergence of this scheme. We end with applications to concrete physical examples such as a charged particle in a uniform electric field or a harmonic interaction. We obtain the usual Langevin equation for the action of a heat bath when considering a damped harmonic oscillator as the small system.

4.1 Introduction

To study open physical systems, i.e., systems in interaction with a large environment, two main approaches are often considered. The first one is Hamiltonian, it consists in describing completely the small system, the environment and their interactions in a completely Hamiltonian way. Then, one studies the associated dynamical system. The other approach is Markovian; it consists in giving up describing the environment (which is too complicated or unknown) and to describe only the effective action of the environment on the small system. Under some assumptions on the environment, the evolution of the small

system is a Markov process. One can then study this Markov process with the associated probabilistic tools (invariant measure, etc).

In the context of quantum mechanical systems, Attal and Pautrat propose in [12] a new type of model for the interaction of a small system and the environment: the *scheme of repeated interactions*. In this setup, the environment is seen as an infinite assembly of small identical pieces which act independently, one after the other, on the system during a small time step h. This approach has the advantage of being in between the two previous approaches: it is Hamiltonian for each interaction of the small system with one piece of the environment is described by a full Hamiltonian, it is also Markovian in its structure of independent and repeated interactions with fresh pieces of the environment.

This approach, in the quantum context, has also the advantage of giving rise to a rather workable way of implementing the dissipation. It is physically realistic, as shown in [12] that, in the continuous interaction limit (h tends to 0), the associated dynamics converges to the usual quantum Langevin equations associated to open quantum systems.

Our aim in this article is to consider this scheme of repeated interactions, and its continuous time limit, for classical physical systems.

Attal describes in [2] a mathematical framework for classical systems of repeated interactions. His construction is based on a strong connection between Markov processes and dynamical systems that he describes; we present it in Section 4.2. The main idea is that Markov processes are all obtained from deterministic dynamical systems on product spaces when ignoring one of the two components. In particular stochastic differential equations can be seen as deterministic dynamical systems on the state space times the Wiener space.

The dynamical system associated with repeated classical interactions is discrete in time, depending on the time parameter h. If one wants to consider all these dynamical systems for all h and their continuous limit, when h tends to 0, we have to embed discrete time and continuous time dynamical systems into a common natural setup. This is what we develop in Section 4.3.

Section 4.4 is devoted to presenting several physical examples to which our main theorems will be applied at the end of the article.

The convergence of the discrete dynamical systems associated with classical repeated interactions is carefully studied in Section 4.5. More precisely, the evolution of the system undergoing repeated interactions shall be represented by a Markov chain (X^h_{nh}). The study of a limit evolution comes down to the convergence of a linearly interpolated Markov chain to the solution of a stochastic differential equation. Indeed, the embedded dynamics leads to consider the linear interpolation of (X^h_{nh}), i.e., the process (X^h_t) defined by

$$X^h_t = X^h_{\lfloor t/h \rfloor h} + \frac{t - \lfloor t/h \rfloor h}{h} \Big\{ X^h_{(\lfloor t/h \rfloor + 1)h} - X^h_{\lfloor t/h \rfloor h} \Big\} .$$

The main theorems of Section 4.5 are concerned with the convergence of this process (X^h_t) under some assumptions. Theorem 4.5.2 and 4.5.7 shows the L^p and almost sure convergences when the evolution of the Markov chain is given by

$$X^h_{(n+1)h} = X^h_{nh} + \sigma(X^h_{nh})(W_{(n+1)h} - W_{nh}) + hb(X^h_{nh}) + h\eta^{(h)}(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh}) .$$

The limit process is the solution of the stochastic differential equation

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t$$

when the maps b and σ are Lipschitz or locally Lipschtiz and linearly bounded, and when $\eta^{(h)}$ satisfies

$$\left|\eta^{(h)}(x,y)\right| \leq K(h^\alpha\,|x| + |y|)\,.$$

All these results are then applied in Sect. 4.6 to the physical examples previously presented in Sect. 4.4.

4.2 Dynamical Systems and Markov Processes

4.2.1 Discrete Time

A connexion between deterministic dynamical systems and Markov chains has been recently presented by Attal in [2]. He shows that randomness in Markov chains appears naturally from deterministic dynamical systems when loosing some information about some part of the system. In this section, we present the context and the main results of [2].

A *discrete time dynamical system* is a measurable map $\widehat{T}$ on a measurable space $(F,\mathcal{F})$. The dynamics of this system is given by the sequence $(\widehat{T}^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ of iterations of $\widehat{T}$. From this map $\widehat{T}$, one can naturally define a map T on $\mathcal{L}^\infty(F,\mathcal{F})$, the set of bounded functions on F, by

$$Tf(x) = f(\widehat{T}(x))\,,$$

for all f in $\mathcal{L}^\infty(F,\mathcal{F})$ and all x in F.

Now consider a dynamical system $\widehat{T}$ on a product space $S\times E$ where $(S,\mathcal{S})$ and $(E,\mathcal{E})$ are two measurable spaces. Furthermore, assume that $(E,\mathcal{E})$ is equipped with a probability measure μ. Physically, S is understood as the phase space of a "small" system and E as the one of the environment. Let T be the map on $\mathcal{L}^\infty(S\times E)$ induced by $\widehat{T}$.

The idea of the construction developed in [2] is to consider the situation where one has only access to the system S and not to the environment E (for example E might be too complicated, or unknown, or unaccessible to measurement). One wants to understand what kind of dynamics is obtained from T when restricting it to S only.

Consider a bounded function f on S, we naturally extend it as a (bounded) function on $S\times E$ by considering

$$(f\otimes \mathbb{1})(x,y) = f(x),$$

for all x in S, all y in E. That is, the function f made for acting on S only is seen as being part of a larger world $S\times E$.

The dynamical system T can now act on $f\otimes\mathbb{1}$. We assume that what the observer of the system S sees from the whole dynamics on $S\times E$ is an average on E along the given

probability measure μ. Therefore, we have to consider the operator L on $\mathcal{L}^\infty(S)$ defined by

$$Lf(x) = \int_E T(f \otimes \mathbb{1})(x,y)\, d\mu(y)\,.$$

Note that Lf also belongs to $\mathcal{L}^\infty(S)$. This operator L on $\mathcal{L}^\infty(S)$ represents the restriction of the dynamics $\widehat{T}$ on S. In other words, we have the following commuting diagram :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^\infty(S\times E) & \xrightarrow{T} & \mathcal{L}^\infty(S\times E) \\ \otimes\mathbb{1}\Big\uparrow & & \Big\downarrow \int_E \cdot\, d\mu \\ \mathcal{L}^\infty(S) & \xrightarrow[L]{} & \mathcal{L}^\infty(S) \end{array}$$

It is natural now to wonder what is the nature of the operator L obtained this way. In [2] the following result is proved.

Theorem 4.2.1. *There exists a Markov transition kernel* Π *such that* L *is of the form*

$$Lf(x) = \int_S f(z)\, \Pi(x, dz)\,,$$

for all $f \in \mathcal{L}^\infty(S)$.

Conversely, if S *is a Lusin space and* Π *is any Markov transition kernel on* S*, then there exist a probability space* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *and a dynamical system* $\widehat{T}$ *on* $S \times E$ *such that the operator*

$$Lf(x) = \int_S f(z)\, \Pi(x, dz)\,,$$

is of the form

$$Lf(x) = \int_E T(f \otimes \mathbb{1})(x,y)\, d\mu(y)$$

for all $f \in \mathcal{L}^\infty(S)$.

Recall that a Markov transition kernel is a map from $S \times \mathcal{S}$ to $[0,1]$ such that, for all A in $\mathcal{S}$, the map $x \mapsto \Pi(x,A)$ is measurable, and, for all x in S, the map $A \mapsto \Pi(x,A)$ is a probability measure. The value of $\Pi(x,A)$ can be understood as the probability of a Markov chain related to Π has to go from x into A. Moreover, recall also that a Lusin space is measurable space homeomorphic to a Borel subset of a compact metrisable space. This condition is mainly necessary for Kolmogorov Consistency Theorem.

The mapping L on the system S is not a dynamical system anymore. It represents the part of the dynamics on the large system $S \times E$ which is obtained when observing S only. The main fact of the above result is that L encodes some randomness, while T was completely deterministic. This randomness arises from the lack of knowledge on the environment.

Note that in the reciprocal above, the dynamical system T which dilates L is not unique.

The Markov operator L obtained above comes from the projection of only one iteration of the dynamical system T. It is not true in general that if one projects the mapping T^k on S one would obtain L^k (see [2] for a counter-example). It would be very interesting to be able to construct a dynamical system T which dilates a Markov operator L not only for one step, but for all their powers T^k and L^k. This would mean that we have a whole dynamical system $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ which dilates a whole Markov chain $(L^k)_{k\in\mathbb{N}}$ when restricting it to S. This is to say that one wants the following diagram to commute for all $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^\infty(S\times E) & \xrightarrow{T^k} & \mathcal{L}^\infty(S\times E) \\ {\scriptstyle \otimes\mathbb{1}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \int_E \cdot\, d\mu} \\ \mathcal{L}^\infty(S) & \xrightarrow[L^k]{} & \mathcal{L}^\infty(S) \end{array}$$

As explained in [2] this can be obtained through the scheme of repeated interactions, as follows.

Let $\widehat{T}$ be a dynamical system on $S\times E$ which dilates a Markov operator L. Since $\widehat{T}$ is a measurable map from $S\times E$ to $S\times E$, there exist two measurable maps U and V such that, for all x in S, all y in E,

$$\widehat{T}(x,y) = (U(x,y), V(x,y))\,.$$

Now, consider the space $\widetilde{E} = E^{\mathbb{N}^*}$ endowed with the usual σ-field $\mathcal{E}^{\otimes\mathbb{N}^*}$ and the product measure $\widetilde{\mu} = \mu^{\otimes\mathbb{N}^*}$. From the map $\widehat{T}$, one defines a dynamical system $\widetilde{T}$ on the space $S\times\widetilde{E}$ by

$$\widetilde{T}(x,y) = (U(x,y_1), \theta(y))\,,$$

for all x in S, all sequence $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ in $\widetilde{E}$, where θ is the shift on $\widetilde{E}$, that is,

$$\theta(y) = (y_{m+1})_{m\in\mathbb{N}^*}\,.$$

Physically, this construction can be understood as follows. The system S is in interaction with a large environment. This large environment is a chain $\widetilde{E}$ made of copies of a small piece E. One after the other, each part E of this environment interacts with the system S, independently from the others. This is the so-called "*repeated interactions scheme*".

Note that the function V doesn't appear in the definition of $\widetilde{T}$. From the physical point of view this is natural, the map V gives the evolution of the part E of the environment which acts on the system. As this part shall not be involved in the dynamics of the system S, its new state has no importance for the system.

As previously, the mapping $\widetilde{T}$ induces an operator T on $\mathcal{L}^\infty(S\times\widetilde{E})$. Then, the following theorem (proved in [2]) shows that the sequence (T^k) of iterations of T dilates the whole Markov chain $(L^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Theorem 4.2.2. *For all m in $\mathbb{N}^*$, all x in S, and all f in $\mathcal{L}^\infty(S)$,*

$$(L^m f)(x) = \int_{\widetilde{E}} T^m(f\otimes\mathbb{1})(x,y)\,d\widetilde{\mu}(y)\,.$$

The operator L represents the action of a Markov kernel Π on bounded maps and the restriction of the whole dynamics given by T to S. On the other hand, the Markovian behaviour on functions associated with the action of Π can be also seen on points when focusing on the dynamical system $\widetilde{T}$. Indeed, for all initial state x of the system in S, and all state of the environment y in $\widetilde{E}$, the evolution of the system is given by the sequence $(X_n^x(y))_{n\in\mathbb{N}}$ defined by

$$X_{n+1}^x(y) = U(X_n^x(y), y_{n+1}),$$

with $X_0 = x$. Now if the state of the environment is unknown, the dynamics of the system is represented by the sequence $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ of maps from $\widetilde{E}$ to S. This sequence (X_n^x) is a Markov chain. Furthermore, the Markov transition kernel of (X_n^x) is Π again.

Note that the whole dynamics of $\widetilde{T}$ can be expressed from this sequence (X_n^x) as follows. For all k in $\mathbb{N}$, all x in S, and all y in $\widetilde{E}$,

$$\widetilde{T}^k(x,y) = (X_k^x(y), \theta^k(y)),$$

where $\theta^k(y)$ is the sequence y which is shifted k times, i.e. $\theta^k(y) = (y_{n+k})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Note that sequences are indexed by $\mathbb{N}^*$ in this scheme of repeated interactions. Physically, this can be understood as repeated interactions between the systems which last for a time duration 1. Now, a new parameter h is added. It represents the time step for the interactions. Henceforth, all the sequences are now indexed by $h\mathbb{N}^*$.

For instance, the dynamics of the system is now given by the Markov chain $(X_{nh}^{(h)})_{n\in\mathbb{N}}$ defined for all starting state x by

$$X_{(n+1)h}^{(h)}(y) = U^{(h)}(X_{nh}^{(h)}(y), y_{(n+1)h}),$$

with $X_0^{(h)} = x$.

The dynamical system given by the scheme of repeated interactions is now

$$\widetilde{T}^{(h)}(x,y) = (U^{(h)}(x, y_h), \theta^{(h)}(y)),$$

where $\theta^{(h)}$ is the shift, i.e. $\theta^{(h)}(y) = (y_{(n+1)h})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Note that the map $U^{(h)}$ can also depend on the time step h. We shall see in the examples of Section 4.4 explicit expressions for this map $U^{(h)}$ in some physical situations.

Our aim is now to understand what can be the limit dynamics of these repeated interactions when the time step h goes to 0.

Attal and Pautrat, in [12], have studied open quantum systems with an equivalent setup of repeated interactions. They show the convergence of repeated interactions to quantum stochastic differential equations. In Section 4.5, we shall see that the limit evolutions in the classical case are solutions of some stochastic differential equations. Therefore, we shall need to extend our parallel between Markov chains and dynamical systems to the continuous time setup and in particular to solutions of stochastic differential equations.

4.2.2 Continuous Time

As previously seen, from a Markov operator L, with the help of repeated interactions, one can construct a dynamical system which dilates the whole sequence (L^k). Moreover, the evolution of the first component is given by a Markov chain associated to the Markov transition kernel. We wish to extend this idea to Markov processes which are solutions of stochastic differential equations.

A *continuous time dynamical system* is a semigroup of measurable functions $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, that is, which satisfy $T_s \circ T_t = T_{s+t}$, for all s, t in $\mathbb{R}^+$.

Consider now a stochastic differential equation (SDE) on $\mathbb{R}^m$,

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t\,, \tag{4.2.1}$$

where W_t is a d-dimensional standard Brownian motion, b and σ are measurable functions respectively from $\mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}^m$, and from $\mathbb{R}^m$ to $\mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$, the space of $m \times d$ real matrices. We want to create an environment Ω and a deterministic dynamical system (T_t) on $\mathbb{R}^m \times \Omega$ which dilates the solution and such that the first component of T_t is the solution of (4.2.1) at time t.

However, we shall need existence and uniqueness of the solution of (4.2.1) at all time t and for all initial conditions. In order to guarantee that properties, we have to make some assumptions on the functions b and σ. We require them to be either globally Lipschitz,

(H1) there exists $K_0 > 0$ such that for all x, y we have

$$|b(x) - b(y)| \le K_0\,|x-y| \quad \text{and} \quad \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \le K_0\,|x-y|\ ,$$

or locally Lipschitz and linearly bounded,

(H2) the functions b and σ are locally Lipschitz: for all $N > 0$, there exists $K_N > 0$ such that for all $x, y \in \mathbb{B}(0,N)$ we have

$$|b(x) - b(y)| \le K_N\,|x-y| \quad \text{and} \quad \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \le K_N\,|x-y|\ .$$

(H3) linear growth bound: here exists a constant $K_1 > 0$ such that

$$|b(x)| \le K_1(1+|x|) \qquad \text{and} \qquad \|\sigma(x)\| \le K_1(1+|x|)\,,$$

where $|\cdot|$ is the euclidean norm on $\mathbb{R}^m$ and $\|\cdot\|$ is the Hilbert-Schmidt norm on $\mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$ defined by

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{m}(\sigma^{i,j})^2\,.$$

Note that Assumption (H1) implies (H2) and (H3). We differentiate the two cases because the convergences studied in Section 4.5 shall be stronger for globally Lipschitz functions b and σ.

Note also that Assumption (H1) or Assumptions (H2) and (H3) are sufficient (see [33]) but not necessary. One can now construct the environment and the dynamical system. Consider the Wiener space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ associated to the canonical Brownian motion (W_t). This is to say that $\Omega = C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ is the space of continuous functions from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}^d$ vanishing at the origin. In this case, Wiener measure $\mathbb{P}$ plays the part of the measure μ of the last section. The canonical Brownian motion (W_t) is then defined by $W_t(\omega) = \omega(t)$, for all $\omega \in \Omega$ and all $t \in \mathbb{R}_+$.

Consider the *shift* θ_t defined on Ω by

$$\theta_t(\omega)(s) = \omega(t+s) - \omega(t)\,.$$

and the family of mappings $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ on $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ defined by

$$T_t(x,\omega) = (X_t^x(\omega), \theta_t(\omega))\,,$$

for all $x \in \mathbb{R}^m$, all $\omega \in \Omega$, where X_t^x is the solution of (4.2.1) at time t, starting at x. In [2], Attal shows the following.

Theorem 4.2.3. *The family (T_t) on $\mathbb{R}^m \times \Omega$ is a continuous time dynamical system.*

Let us denote by $\mathcal{T}_t$ the map induced by T_t on $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m)$. It induces a semigroup $(P_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ on $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m)$ by

$$P_t(f)(x) = \mathbb{E}\left[\mathcal{T}_t(f \otimes \mathbb{1})(x,\cdot)\right]\,.$$

The generator of this semigroup (P_t) is

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a^{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\,,$$

where a is the symmetric matrix $\sigma\sigma^t$.

4.3 Embedding Discrete Time into Continuous Time

In order to prove the convergence of the discrete time dynamical systems, associated to repeated interactions, to the continuous time dynamical systems associated to solutions of stochatic differential equations, we need to explicitly embed the discrete time dynamical systems into a continuous time setup.

The state space on which the repeated interaction dynamical system $\widetilde{T}^{(h)}$ acts is $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$, whereas the one of $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ is $\mathbb{R}^m \times \Omega$. The first step in constructing the embedding of dynamical systems is to construct an embedding of $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ into Ω.

4.3.1 Discrete Approximation of Ω

Let $\phi_I^{(h)}$ be the map from $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ to Ω defined by

$$\phi_I^{(h)}(y)(t) = \sum_{n=0}^{\lfloor t/h \rfloor} y_{nh} + \frac{t - \lfloor t/h \rfloor h}{h} y_{(\lfloor t/h \rfloor + 1)h}\,,$$

where $y_0 = 0$. This map $\phi_I^{(h)}$ actually builds a continuous piecewise linear function whose increments are the elements of the sequence y. The range of $\phi_I^{(h)}$ is denoted by $\Omega^{(h)}$, it is a subspace of Ω.

Conversely, define the map $\phi_P^{(h)}$ from Ω to $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ by

$$\phi_P^{(h)}(\omega) = (W_{nh}(\omega) - W_{(n-1)h}(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*} = (\omega(nh) - \omega((n-1)h))_{n\in\mathbb{N}^*}\,.$$

In other words, the range of an element of Ω by $\phi_P^{(h)}$ is the sequence of its increments at the times nh, for all $n \in \mathbb{N}^*$. Note that these functions $\phi_I^{(h)}$ and $\phi_P^{(h)}$ satisfy

$$\phi_P^{(h)} \circ \phi_I^{(h)} = \mathrm{Id}_{(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}}\,.$$

In particular the map $\phi_I^{(h)}$ is an injection from $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ to Ω, the spaces $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ and $\Omega^{(h)}$ are in bijection through the functions $\phi_I^{(h)}$ and $(\phi_P^{(h)})_{|\Omega^{(h)}}$.

We now show that $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ can be viewed as an approximation of Ω for the usual metric associated to the topology of uniform convergence on compact sets. For two elements ω and ω' in Ω define the distance

$$D(\omega,\omega') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \frac{\sup\limits_{0\le t\le n} |\omega(t)-\omega'(t)|}{1+\sup\limits_{0\le t\le n} |\omega(t)-\omega'(t)|}\,,$$

where $|\cdot|$ is the euclidean norm on $\mathbb{R}^d$. The space Ω endowed with this metric is a separable complete metric space.

Lemma 4.3.1. *For all $\omega \in \Omega$,*

$$\lim_{h\to 0} D(\omega, \phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)) = 0\,.$$

Proof. This result is based on the uniform convergence of piecewise linear maps to continuous one on compact sets. Let ω be a function in Ω. Then, by definition,

$$\phi_P^{(h)}(\omega) = (\omega(nh) - \omega((n-1)h))_{n\in\mathbb{N}^*}\,.$$

Now the mapping $\phi_I^{(h)}$ is applied to the sequence $\phi_P^{(h)}(\omega)$. For all t in $\mathbb{R}_+$, we have

$$\begin{aligned}\phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(t) &= \sum_{n=0}^{\lfloor t/h\rfloor} (\omega(nh) - \omega((n-1)h)) + \\ &\qquad + \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\Big\{\omega((\lfloor t/h\rfloor+1)h) - \omega(\lfloor t/h\rfloor h)\Big\} \\ &= \omega(\lfloor t/h\rfloor h) + \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\Big\{\omega((\lfloor t/h\rfloor+1)h) - \omega(\lfloor t/h\rfloor h)\Big\}\,.\end{aligned}$$

Note that $\phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(t)$ is a point in the segment $\Big[\omega(\lfloor t/h \rfloor h)), \omega((\lfloor t/h \rfloor + 1)h)\Big]$ Since ω is continuous we have

$$\lim_{h\to 0} \omega(\lfloor t/h \rfloor h) = \lim_{h\to 0} \omega((\lfloor t/h \rfloor + 1)h) = \omega(t)\,.$$

Therefore,

$$\lim_{h\to 0} \phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(t) = \omega(t)\,.$$

Let $n \in \mathbb{N}$, as $[0, n]$ is compact the function ω is uniformly continuous on this interval. Thus,

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\le t\le n} \Big|\omega(t) - \phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(t)\Big| = 0\,.$$

On the other hand, note that

$$\frac{\sup\limits_{0\le t\le n} \Big|\omega(t) - \phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(t)\Big|}{1 + \sup\limits_{0\le t\le n} \Big|\omega(t) - \phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(t)\Big|} \le 1\,.$$

Hence, by Lebesgue's theorem,

$$\lim_{h\to 0} D(\omega, \phi_I^{(h)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)) = 0\,.$$

□

4.3.2 Embedding the Discrete Time Dynamics

The first step in the construction of a continuous dynamics from $\widetilde{T}^{(h)}$ is to relate it to a discrete time evolution on $\mathbb{R}^m \times \Omega$. Since the functions $\phi_I^{(h)}$ and $\phi_P^{(h)}$ are only defined on $(\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ or Ω, we extend them to $\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}$ and $\mathbb{R}^m \times \Omega$, respectively, by

$$\Phi_I^{(h)} = (Id, \phi_I^{(h)})\,, \qquad \Phi_P^{(h)} = (Id, \phi_P^{(h)})\,.$$

Consider the dynamical system $\overline{T}^{(h)}$ on $\mathbb{R}^m \times \Omega$ given by

$$\overline{T}^{(h)} = \Phi_I^{(h)} \circ \widetilde{T}^{(h)} \circ \Phi_P^{(h)}\,.$$

As we have

$$\Phi_P^{(h)} \circ \Phi_I^{(h)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m \times \Omega}\,,$$

the following diagram is commuting for all $n \ge 1$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^m \times \Omega & \xrightarrow{(\overline{T}^{(h)})^n} & \mathbb{R}^m \times \Omega \\
\Phi_P^{(h)} \Big\downarrow & & \Big\uparrow \Phi_I^{(h)} \\
\mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*} & \xrightarrow[(\widetilde{T}^{(h)})^n]{} & \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^d)^{h\mathbb{N}^*}
\end{array}$$

We now relate this dynamical system to a continuous time dynamics, by linearly interpolating in time. Define a new family of maps $(\overline{T}_t^{(h)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ by

$$\begin{aligned}\overline{T}_t^{(h)} &= (\overline{T}^{(h)})^{\lfloor t/h\rfloor} + \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\ \left\{(\overline{T}^{(h)})^{(\lfloor t/h\rfloor+1)} - (\overline{T}^{(h)})^{\lfloor t/h\rfloor}\right\}\\ &= \frac{(\lfloor t/h\rfloor+1)h-t}{h}\ (\overline{T}^{(h)})^{\lfloor t/h\rfloor} + \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\ (\overline{T}^{(h)})^{(\lfloor t/h\rfloor+1)}\,,\end{aligned}$$

where, by convention, $(\overline{T}^{(h)})^0 = \mathrm{Id}$.

The projections on the first and the second component of $\overline{T}_t^{(h)}$ are respectively denoted by $\overline{X}_t^{(h)}$ and $\overline{\theta}_t^{(h)}$. More precisely, for all initial $x \in \mathbb{R}$ and ω, the value of $\overline{T}_t^{(h)}(x,\omega)$ can be also expressed as

$$\overline{T}_t^{(h)}(x,\omega) = (\overline{X}_t^{(h)}(\phi_P^{(h)}(\omega)), \overline{\theta}_t^{(h)}(\omega))\,.$$

Note that, in general, the family $(\overline{T}_t^{(h)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ is not a semigroup because of the linear interpolation. The random process $\overline{X}_t^{(h)}$ is not also Markovian but a linearly interpolated Markov chain.

Also note that the state of the environment for the evolution of the system is given by $\phi_P^{(h)}(\omega)$, i.e. by the increments of a continuous function of the Wiener space Ω. In other words, the measure μ_h on the environment is a Gaussian of mean 0 and variance h.

Finally, the convergence of the dynamical system $\widetilde{T}^{(h)}$ to a continuous one can be studied by examining the dynamics of $(\overline{T}_t^{(h)})_{t\in\mathbb{R}_+}$, more exactly the convergence of the random process $\overline{X}^{(h)}$ to a solution of a stochastic differential equation and the convergence of $\bar{\theta}_t^{(h)}$ to the shift θ_t on Ω according to the metric D.

However, before hands, we want to illustrate this framework and in particular the scheme of repeated interactions, through physical examples.

4.4 Application to some Physical Systems

As explained in the introduction, the main motivation for the study of repeated interaction schemes and their continuous limit is to try to obtain physically justified and workable models for the dissipation of a simple system into a large environment, such as a heat bath for instance. In this section, we present some physical examples whose forces due to the environment on the small system are essentially linear to satisfy the conditions of Theorems 4.5.6 and 4.5.8 . Particularly, a way to obtain the function $U^{(h)}$ from a Taylor expansion of the dynamics is described. We shall see that the limit evolution can be determined from terms of order 1 in a Taylor expansion in h.

4.4.1 Charged Particle in a Uniform Electric Field

Consider a particle of charge q and mass m in a uniform electric field E in dimension 1. Its energy without interaction with E is just kinetic, i.e. $p^2/2m$. In the presence of the

exterior electric field, the particle has a potential energy $-qxE$, where x is the position. Thus, the Hamiltonian of the particle is

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - qxE\,.$$

The dynamics of the particle is governed by Hamilton's equations of motion,

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = qE\,. \end{cases}$$

These equations can be easily solved and give

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 + \dfrac{p(0)}{m}t + x(0) \\ p(t) = qEt + p(0)\,. \end{cases}$$

Now we set up the scheme of repeated interactions. The small system is the particle. As it moves in dimension 1, the space S is $\mathbb{R}^2$ endowed with its Borelian σ-algebra. The environment is the exterior electric field. Hence, the space E is $\mathbb{R}$. Intuitively, the limit process shall be a solution of a SDE driven by a 1-dimensional Brownian motion (W_t).

The environment of the discrete time dynamics at time step h is the set $\mathbb{R}^{h\mathbb{N}^*}$. The interaction between the system and the environment is described as follows. At each time $(n-1)h$, the value of the electric field $E(nh)$ is sampled from the increment $W(nh) - W((n-1)h)$ of the 1-dimensional Brownian motion. The system evolves during a time h according to the solution of the equations whose initial values $x((n-1)h)$ and $p((n-1)h)$ and where the electric field is $E(nh)$. After this time h, the interactions are stopped and one repeats the procedure.

In particular the evolution of the system is given by the following Markov chain

$$\begin{cases} x(nh) = x((n-1)h) + h\dfrac{p((n-1)h)}{m} + h^2\dfrac{qE(nh)}{2m} \\ p(nh) = p((n-1)h) + hqE(nh)\,. \end{cases}$$

However, one has to make some renormalization somewhere. Indeed, when the time step h decreases, the effect of the electric field on the particle becomes smaller and smaller. To counter that, the interactions have to be reinforced. The electric field E is renormalized by multiplying by a factor $1/h$.

This normalization factor can be intuitively understood as follows. First if one wants to keep the same intensity (at least in law) for the interactions, a factor $1/\sqrt{h}$ is needed. On the other hand, one needs to renormalize with an other $1/\sqrt{h}$ as in the quantum case of [12], since the influence of the environment decreases with the time step h. Thus, the value of the electric field is now sampled from $1/h\,\big(W(nh) - W((n-1)h)\big)$.

Therefore, the new dynamics of the system is

$$\begin{cases} x(nh) = x((n-1)h) + h\dfrac{p((n-1)h)}{m} + h\dfrac{qE(nh)}{2m} \\ p(nh) = p((n-1)h) + qE(nh)\,. \end{cases}$$

In other words, using vector notations, the dynamics is

$$X(nh) = U^{(h)}(X((n-1)h), E(nh))\,,$$

where the map $U^{(h)}$ is defined by

$$U^{(h)}(x,y) = x + \sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x,y)\,,$$

with

$$\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \qquad b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{m} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta^{(h)}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{qy}{2m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.4.2 Harmonic Interaction

Our second example is another example where Hamilton's equations can be explicitly solved.

Consider two unit mass systems linked by a spring whose spring constant is 1. We assume that the two objects can just horizontaly move without friction.

In this case, the Hamiltonian of the two objects is

$$H\left[\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix}\right] = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{1}{2}(Q_2 - Q_1)^2\,,$$

where $P_1^2/2$ is the kinetic energy of the system 1 and $P_2^2/2$ the kinetic energy of the system 2.

The dynamics of the whole system is given by Hamilton's equations

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial P_1} = P_1 \qquad \text{and} \qquad \dot{P}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial Q_1} = Q_2 - Q_1 \\[2ex] \dot{Q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial P_2} = P_2 \qquad \text{and} \qquad \dot{P}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial Q_2} = -(Q_2 - Q_1)\,. \end{cases}$$

These equations can be solved and give this evolution of the whole system according to the initial conditions

$$\begin{aligned} Q_1(t) =& \frac{1}{2}\left(P_1(0) + P_2(0)\right)t + \frac{1}{2}(Q_1(0) + Q_2(0)) + \\ &+ \frac{1}{2}(Q_1(0) - Q_2(0))\,\cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(P_1(0) - P_2(0))\,\sin(\sqrt{2}t) \\ P_1(t) =& \frac{1}{2}(P_1(0) + P_2(0)) - \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1(0) - Q_2(0))\,\sin(\sqrt{2}t) + \\ &+ \frac{1}{2}(P_1(0) - P_2(0))\,\cos(\sqrt{2}t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q_2(t) =& \frac{1}{2}(P_1(0)+P_2(0))t + \frac{1}{2}(Q_1(0)+Q_2(0)) + \\
& - \frac{1}{2}(Q_1(0)-Q_2(0))\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(P_1(0)-P_2(0))\sin(\sqrt{2}t) \\
P_2(t) =& \frac{1}{2}(P_1(0)+P_2(0)) + \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1(0)-Q_2(0))\sin(\sqrt{2}t) + \\
& - \frac{1}{2}(P_1(0)-P_2(0))\cos(\sqrt{2}t)\,.
\end{aligned}
$$

Let h be a fixed time step. As h is supposed sufficiently small, an approached expression of the discrete time dynamical system can be computed by a Taylor expansion.

On the other hand, as we shall be only interested in the dynamics of the system 1, the evolutions of Q_2 and P_2 are forgotten. We get

$$
\begin{aligned}
Q_1(h) &= Q_1(0) + hP_1(0) + \frac{1}{2}\left(Q_2(0)-Q_1(0)\right)h^2 - \frac{1}{6}\left(P_1(0)-P_2(0)\right)h^3 + \circ(h^3) \\
P_1(h) &= P_1(0) + \left(Q_2(0)-Q_1(0)\right)h + \frac{1}{2}\left(P_2(0)-P_1(0)\right)h^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{3}\left(Q_1(0)-Q_2(0)\right)h^3 + \circ(h^3)\,.
\end{aligned}
$$

We now introduce the scheme of repeated interactions. System 1 is chosen as the small system. Thus, the space S is $\mathbb{R}^2$. System 2 plays the role of one piece of the environment. The space E is also in this case $\mathbb{R}^2$.

At time nh, the small system is in the state $Q_1(nh)$ and $P_1(nh)$. The values of $Q_2((n+1)h)$ and $P_2((n+1)h)$ are sampled from the increments of a 2-dimensional Brownian motion W_t. One makes the system and the environment interact during a time h with the initial conditions for the environment $Q_2((n+1)h)$ and $P_2((n+1)h)$. The interaction is stopped after a time h. One then repeats the procedure.

However, for the same reasons as for the first example, interactions need to be renormalized by a factor $1/h$. The Markov chain which gives the evolution of the system becomes

$$
\begin{aligned}
Q_1(nh) &= Q_1((n-1)h) + \Big(P_1((n-1)h) + \frac{1}{2}Q_2(nh)\Big)h + \\
&\qquad - \frac{1}{2}\Big(Q_1((n-1)h) - \frac{P_2(nh)}{3}\Big)h^2 + \circ(h^2) \\
P_1(nh) &= P_1((n-1)h) + Q_2(nh) - \Big(Q_1((n-1)h) - \frac{1}{2}P_2(nh)\Big)h + \\
&\qquad - \Big(\frac{P_1((n-1)h)}{2} + \frac{Q_2(nh)}{3}\Big)h^2 + \circ(h^2)\,,
\end{aligned}
$$

or, equivalently

$$X(nh) = U^{(h)}(X((n-1)h), Y(nh))$$

where

$$U^{(h)}(X,Y) = X + \sigma(X)Y + hb(X) + h\eta^{(h)}(X,Y),$$

with

$$b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\eta^{(h)}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \frac{h}{2}\begin{pmatrix} x_1 - y_2/3 \\ x_2 + 2y_1/3 \end{pmatrix} + \circ(h)\,.$$

Note that this function $U^{(h)}$ is of the same form as in the case of the particle in a uniform electric field.

Note also that the renormalization can be understood in a more general way as follows. In the two examples above, the interactions are reinforced by changing the states of the environment in the scheme of repeated interactions. But, in the same way as in the quantum case, the renormalization can be understood as a reinforcement of the interaction in the Hamiltonian.

Indeed, the Hamiltonien of the whole system can be written in general way,

$$H = \underbrace{H_1}_{System} + \underbrace{H_2}_{Environment} + \underbrace{I}_{Interaction},$$

where H_1 is the part of the Hamiltonian which only depends on the state of the system ($P_1^2/2 + Q_1^2/2$ for instance in the case of the harmonic interaction), H_2, the part which only depends on the state of the environment $(P_2^2/2 + Q_2^2/2)$ and the interaction part I which really depends on the two states $(-Q_1Q_2)$. Our renormalization factor can be viewed as a reinforcement of the interaction term I by multiplying it by this factor $1/h$, a greater coupling constant. In the harmonic case, this not equivalent to a renormalization of the spring constant which also appears in H_1 and H_2. Then, the scheme of repeated interactions is set up from this new Hamiltonian which depends on h.

4.4.3 Damped Harmonic Oscillator

The formalism developped in Section 4.2 is general and it can also be applied to non-Hamiltonian systems. An example based on a change of the harmonic interaction by adding a friction term for the system is presented in this part.

Consider the same system as previously, i.e. two harmonically interacting objects of mass 1. We assume that the system 1 also undergoes a fluid friction in $-fP_1$ where the positive constant f is the friction coefficient. Because of this force, the energy is not conserved, and therefore, the system is not Hamiltonian.

The evolution of the system follows Newton's law of motion,

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = P_1 \\ \dot{P}_1 = -fP_1 + Q_2 - Q_1\,. \end{cases}$$

On the other hand, the environment part stays Hamiltonian and evolves according to the equations

$$\begin{cases} \dot{Q}_2 = P_2 \\ \dot{P}_2 = Q_1 - Q_2\,. \end{cases}$$

For a small time $h > 0$, Taylor's expansions and the previous equations lead to a state of the system after a time h

$$\begin{cases} Q_1(h) = Q_1(0) + hP_1(0) + \mathcal{O}(h^2) \\ P_1(h) = P_1(0) + h(-fP_1(0) + Q_2(0) - Q_1(0)) + \mathcal{O}(h^2)\,. \end{cases}$$

We now set up the repeated interactions framework. The space of the system is $\mathbb{R}^2$. The environment is represented by the chain $(\mathbb{R}^2)^{h\mathbb{N}^*}$. The motion of the system is given by the following Markov chain

$$\begin{cases} Q_1((n+1)h) = Q_1(nh) + hP_1(nh) + \mathcal{O}(h^2) \\ P_1((n+1)h) = P_1(nh) + h(-fP_1(nh) + Q_2(nh) - Q_1(nh)) + \mathcal{O}(h^2)\,. \end{cases}$$

The sequence $(Q_2(nh), P_2(nh))_{n\in\mathbb{N}}$ is sampled from the increments of a 2-dimensional Brownian motion. However, as previousy, states of the environment are reinforced by a factor $1/h$. Hence, the Markov chain $(X(nh))$ is defined by

$$X(nh) = U^{(h)}(X((n-1)h), Y(nh))$$

where

$$U^{(h)}(X,Y) = X + \sigma(X)Y + hb(X) + h\eta^{(h)}(X,Y),$$

with

$$b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - fx_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and the remaining terms of Taylor's expansion are grouped together in the map $\eta^{(h)}$.

Note that this last function could be explicitely determined from the equations of Newton's law of motion from which higher derivatives can be expressed.

4.5 Convergence of Dynamics

We leave for the moment our physical examples and come back to the general setup as introduced in Sections. 4.2 and 4.3. In Sect 4.3.2, a continuous dynamics $\overline{T}^{(h)}$ related to $\widetilde{T}^{(h)}$ was defined on $\mathbb{R}^m \times \Omega$. The convergence of $\overline{T}^{(h)}$ to a continuous time dynamical system like (T_t) is now studied in this part.

Each dynamics acts on a product space. Therefore, we examine separately the functions on each component. More precisely, the convergence of the function $\overline{\theta}_t^{(h)}$ to θ_t for all t on Ω is firstly proved in the next subsection. Then, the one of the processes $\overline{X}_t$ to a solution of stochastic differential equation depending particularly on the function $U^{(h)}$ is studied.

4.5.1 Convergence of Shift

The space of the environment is Ω, the set of continuous functions from $\mathbb{R}_+$ to $\mathbb{R}^d$ vanishing at the origin. If the limit dynamical system exists, the space on which the shift acts has to be Ω too. Therefore, we now consider the shift θ_t on Ω. Recall that it is defined by

$$\theta_t(\omega)(s) = \omega(t+s) - \omega(t)\,,$$

for all t, s in $\mathbb{R}_+$ and all ω.

The convergence of $\overline{\theta}_t^{(h)}$ to θ_t according to the natural metric D on Ω for all t is shown in the next theorem.

Theorem 4.5.1. *Let ω be a function in Ω. For all $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\lim_{h\to 0} D(\theta_t(\omega), \overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)) = 0\,.$$

Proof. As for the proof of Lemma 4.3.1, this result is also based on the convergence of piecewise linear functions to continuous one on compact sets. However, note that two linear interpolations constitute the definition of $\overline{\theta}_t^{(h)}$ instead of one: one is due to the injection $\phi_I^{(h)}$ and the other one is due to the construction of the continuous dynamics on $\mathbb{R}^m \times \Omega$.

For all $\omega \in \Omega$ and for all t and s in $\mathbb{R}_+$, we start by computing $\theta_t(\omega)(s) - \overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)(s)$. By definition of $\overline{T}_t^{(h)}$, the point $\overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)(s)$ is obtained by linear interpolation between $\phi_I^{(h)} \circ (\theta^{(h)})^{\lfloor t/h \rfloor} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(s)$ and $\phi_I^{(h)} \circ (\theta^{(h)})^{(\lfloor t/h \rfloor + 1)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(s)$. Therefore, let us compute these two values. We have

$$\begin{aligned}\phi_I^{(h)} \circ (\theta^{(h)})^{\lfloor t/h \rfloor} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(s) &= \omega((\lfloor t/h \rfloor + \lfloor s/h \rfloor)h) - \omega(\lfloor t/h \rfloor h) + \\ &+ \frac{s - \lfloor s/h \rfloor h}{h}\Big\{\omega((\lfloor t/h \rfloor + \lfloor s/h \rfloor + 1)h) - \omega((\lfloor t/h \rfloor + \lfloor s/h \rfloor)h)\Big\}\,.\end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}\phi_I^{(h)} \circ (\theta^{(h)})^{(\lfloor t/h \rfloor + 1)} \circ \phi_P^{(h)}(\omega)(s) &= \omega((\lfloor t/h \rfloor + \lfloor s/h \rfloor + 1)h) - \omega((\lfloor t/h \rfloor + 1)h) + \\ &+ \frac{s - \lfloor s/h \rfloor h}{h}\Big\{\omega((\lfloor t/h \rfloor + \lfloor s/h \rfloor + 2)h) - \omega((\lfloor t/h \rfloor + \lfloor s/h \rfloor + 1)h)\Big\}\,.\end{aligned}$$

Since $\overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)(s)$ is a barycenter between these two points whose coefficients are given by

the linear interpolation on t, then

$$\begin{aligned}
\overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)(s) &= \frac{(\lfloor t/h\rfloor+1)h-t}{h}(\phi_I^{(h)}\circ(\theta^{(h)})^{\lfloor t/h\rfloor}\circ\phi_P^{(h)})(\omega)(s)+\\
&+\frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}(\phi_I^{(h)}\circ(\theta^{(h)})^{(\lfloor t/h\rfloor+1)}\circ\phi_P^{(h)})(\omega)(s)\\
&=\frac{(\lfloor t/h\rfloor+1)h-t}{h}\Big\{\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor)h)+\\
&+\frac{s-\lfloor s/h\rfloor h}{h}\Big[\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)-\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor)h)\Big]\Big\}+\\
&+\frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\Big\{\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)+\\
&+\frac{s-\lfloor s/h\rfloor h}{h}\Big[\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+2)h)-\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)\Big]\Big\}+\\
&-\frac{(\lfloor t/h\rfloor+1)h-t}{h}\,\omega(\lfloor t/h\rfloor h)-\frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\,\omega((\lfloor t/h\rfloor+1)h)\,.
\end{aligned}$$

As seen in the proof of Lemma 4.3.1, the term

$$-\frac{(\lfloor t/h\rfloor+1)h-t}{h}\,\omega(\lfloor t/h\rfloor h)-\frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\,\omega((\lfloor t/h\rfloor+1)h)$$

tends to $-\omega(t)$ when h goes to 0.

We just have to prove now that the other terms converge to $\omega(t+s)$. As the function ω is continuous, we have

$$\lim_{h\to 0}|\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)-\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor)h)|=0\,.$$

For the same reason,

$$\lim_{h\to 0}|\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+2)h)-\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)|=0\,.$$

On the other hand,

$$0\le\frac{([t/h]+1)h-t}{h}\le 1\,,\qquad 0\le\frac{t-[t/h]\,h}{h}\le 1\,,$$

and, obviously,

$$0\le\frac{([s/h]+1)h-s}{h}\le 1,\qquad 0\le\frac{s-[s/h]\,h}{h}\le 1\,,$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left|\frac{(\lfloor t/h\rfloor+1)h-t}{h}\right|\left|\frac{s-\lfloor s/h\rfloor h}{h}\right|\times\\
\times|\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+2)h)-\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)|=0\,,
\end{aligned}$$

and

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\right|\left|\frac{s-\lfloor s/h\rfloor h}{h}\right|\times$$
$$\times\,|\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)-\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor)h)|=0\,.$$

For the same reasons as previously, the remaining terms

$$\frac{(\lfloor t/h\rfloor+1)h-t}{h}\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor)h)+\frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\omega((\lfloor t/h\rfloor+\lfloor s/h\rfloor+1)h)$$

tend to $\omega(t+s)$.

As a conclusion, for all t, s in $\mathbb{R}_+$, we have

$$\lim_{h\to 0}\left|\theta_t(\omega)(s)-\overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)(s)\right|=0\,.$$

Since the interval $[0,n]$ is compact, by uniform continuity of these functions

$$\lim_{h\to 0}\sup_{0\le s\le n}\left|\theta_t(\omega)(s)-\overline{\theta}_t^{(h)}(\omega)(s)\right|=0\,.$$

Finally, by Lebesgue's Theorem,

$$\lim_{h\to 0}D(\theta_t(\omega),\overline{\theta}_t^{(h)}(\omega))=0\,.$$

The theorem is proved. □

Eventually, the function $\overline{\theta}_t^{(h)}$ converges to the shift θ_t when h goes to 0 for all t on Ω whatever be the continuous time dynamical system as long as the noise of the stochastic differential equation is a d-dimensional Brownian motion whose canonical space is Ω.

4.5.2 L^p and Almost-Sure Convergence

After having studied the convergence of the shift, we want now to give conditions on $U^{(h)}$ for the L^p and almost sure convergence, on every time interval $[0,\tau]$, of the process $\overline{X}_t^h$, the first component of $\overline{T}_t^h$, to the solution X_t of a SDE.

As the process $\overline{X}_t^h$ is just a linearly interpolated Markov chain, this convergence boils down to the convergence of some schemes of stochastic numerical analysis. Thus, our result belongs to a more general problem (see [20], [33], [34]), that we shall apply later on to the process $\overline{X}_t^h$ in Theorem 4.5.6.

Consider the solution X_t in $\mathbb{R}^m$ starting in X_0 of the SDE (4.2.1)

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t\,,$$

where (W_t) is a d-dimensional Brownian motion, and where the functions b and σ, respectively from $\mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}^m$ and from $\mathbb{R}^m$ to $\mathcal{M}_{m,d}(\mathbb{R})$, are Lipschitz or locally Lipschitz

and linearly bounded. Recall that this assumption is required for the existence and the uniqueness of the solution of the SDE on every time interval $[0,\tau]$ and for all initial conditions.

Let $(X^h_{nh})_{n\in\mathbb{N}}$ be a Markov chain for a time step h whose evolution is given by

$$X^h_{(n+1)h} = X^h_{nh} + \sigma(X^h_{nh})(W_{(n+1)h} - W_{nh}) + hb(X^h_{nh}) + h\eta^{(h)}(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh}),$$

with $X^h_0 = x_0$ and where $\eta^{(h)}$ is a measurable function.

Note that the form of the equation above is identical to the ones previously seen in the physical examples. Also note that, without the term $\eta^{(h)}$, the scheme above is the usual stochastic Euler one. Hence our context is more general than the usual Euler scheme for the discrete-time approximation of SDE. We have to adapt convergence theorem to this situation.

The Markov chain (X^h_{nh}) is now linearly interpolated to obtain a continuous time process $(X^h_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ defined by

$$\begin{aligned} X^h_t &= X^h_{\lfloor t/h\rfloor h} + \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\{X^h_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\} \\ &= X^h_{\lfloor t/h\rfloor h} + \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}\{\sigma(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})(W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}) + \\ &\qquad + hb(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}) + h\eta^{(h)}(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h})\}, \end{aligned}$$

for all t, and with $X^h_0 = x_0$.

For the convergence of the process X^h_t, we make one more assumption to control the term in $\eta^{(h)}$.

(H4) There exist $\alpha \in]0,+\infty]$ and K_2 such that

$$\left|\eta^{(h)}(x,y)\right| \le K_2(h^\alpha |x| + |y|).$$

The dissymmetry in x and y in (H4) can be understood as follows. We shall see that, when h goes to 0, the limit evolution depends only on b and σ. Thus, the function $\eta^{(h)}$ represents the terms in the function giving $X^h_{(n+1)h}$ according to X^h_{nh} which shall not be involved in the limit evolution. Seen as a Taylor expansion in h, this map $\eta^{(h)}$ groups together terms of order greater than 1 in $W_{(n+1)h} - W_{nh}$ and greater than 2 in X^h_{nh}.

We start with the main result on the convergence of processes in the case of globally Lipschitz functions.

Theorem 4.5.2. *For all $\tau > 0$ and for all $p \ge 1$, under Assumptions (H1) and (H4), the process (X^h_t) converges in L^p to the solution (X_t) of the SDE (4.2.1) on $[0,\tau]$.*

More precisely, for h small enough and $p = 2q$ with $q > 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\left|X_t - X^h_t\right|\big)^{2q}\Big] \le C(h^{2q\alpha} + h^{q-1}(-\log h)^q)$$

where C is a constant depending only on τ, q, K_0 and K_2.

Moreover the convergence is also almost sure on $[0,\tau]$.

In order to prove this theorem, we use the same strategy as Faure considered in his PhD thesis ([28]) for the convergence of the explicit Euler scheme, i.e. without the term $h\eta^{(h)}$. Beforehand, we need two long and technical Lemmas 4.5.3 and 4.5.5 and a property on solution of stochastic differential equation, Lemma 4.5.4. These lemmas shall be applied in the proof in the case of locally Lipschitz and linearly bounded maps because the linear growth condition shall be the key property.

The first lemma gives an inequality on the L^p-norm of some stochastic processes. In order to obtain this result, the definition of a *L^p-continuous process* is introduced.

A process Y_t is *L^p-continuous* if the function $t \longmapsto \mathbb{E}\left[|Y_t|^p\right]$ is continuous.

Lemma 4.5.3. *Let Y_t be a process defined by $Y_t = Y_0 + \int_0^t A_s\, dW_s + \int_0^t B_s\, ds$, where A_s and B_s are L^{2p}-continuous, and $\mathbb{E}\left[|Y_0|^p\right] < \infty$. Then Y_t is L^p-continuous.*

Moreover,

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_0|^p\right] + C \int_0^t \mathbb{E}\left[|Y_s|^p + \|A_s\|^p + |B_s|^p\right] ds\,, \tag{4.5.1}$$

where C is a constant which depends only on p, and the dimensions m, d.

Proof. First, by the convexity of the function $x \longrightarrow x^q$, we have for all x, y, and z non-negative reals

$$(x+y+z)^{2q} \leq C_{2q}(x^{2q} + y^{2q} + z^{2q})\,.$$

Hence,

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^{2q}\right] \leq C_{2q}\Big(\mathbb{E}\left[|Y_0|^{2q}\right] + \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t A_s\, dW_s\Big|^{2q}\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t B_s\, ds\Big|^{2q}\Big]\Big)\,.$$

By Hölder's inequality we claim that

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t B_s\, ds\Big|^{2q}\Big] \leq C_0\, t^{2q-1} \int_0^t \mathbb{E}\left[|B_s|^{2q}\right] ds\,. \tag{4.5.2}$$

Indeed, first note that

$$\Big|\int_0^t B_s\, ds\Big|^{2q} = \Big(\sum_{i=1}^m \Big|\int_0^t B_s^i\, ds\Big|^2\Big)^q\,.$$

Component by component, we have by Hölder's inequality,

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t B_s^i\, ds\Big|^{2q}\Big] \leq t^{2q-1}\mathbb{E}\Big[\int_0^t \left|B_s^i\right|^{2q} ds\Big]\,.$$

By the convexity of the function $t \longmapsto t^q$ we have the announced inequality (4.5.2). For the second term, there exists Burkholder inequality (see [33]) based on Itô's formula which gives a similar bound:

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t A_s\, dW_s\Big|^{2q}\Big] \leq C_1 t^{q-1} \int_0^t \mathbb{E}\left[\|A_s\|^{2q}\right] ds\,.$$

Finally, we have obtained the following bound

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^{2q}\right] \leq C_{2q}\Big(\mathbb{E}\left[|Y_0|^{2q}\right] + C_0 t^{2q-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[|B_s|^{2q}\right]\,ds + C_1 t^{q-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[\|A_s\|^{2q}\right]\,ds\Big)\,.$$

Now for the L^p-continuity of this process, Itô's formula is applied between two times s, t with $s \leq t$ to the process (Y_t). Indeed, since the function $x \longmapsto |x|^{2q}$ is twice differentiable for $q \geq 1$, we get

$$\begin{aligned}|Y_t|^{2q} = |Y_s|^{2q} &+ \sum_{i=1}^m \int_s^t 2q\,|Y_u|^{2q-2}\,Y_u^i\,dY_u^i\,+\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int_s^t 2q(2q-2)\,|Y_u|^{2q-4}\,Y_u^iY_u^j\,d\langle Y^i,Y^j\rangle_u\,+\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i}\int_s^t 2q(2q-2)(Y_u^i)^2\,|Y_u|^{2q-4} + 2q\,|Y_u|^{2q-2}\,d\langle Y^i,Y^i\rangle_u\end{aligned}$$

where $Y_u = (Y_u^i)_{i=1,\cdots,m}$.

From the definition of Y_u,

$$dY_u^i = \sum_{j=1}^d A_u^{i,j}\,dW_u^j + B_u^i\,du\,,$$

we have

$$d\langle Y^i,Y^j\rangle_u = \sum_{k=1}^d\sum_{l=1}^d A_u^{i,k}A_u^{j,l}\,d\langle W_,^kW^l\rangle_u = \sum_{k=1}^d A_u^{i,k}A_u^{j,k}\,du\,.$$

Hence we get

$$\begin{aligned}|Y_t|^{2q} = |Y_s|^{2q} &+ 2q\sum_{i=1}^m\int_s^t |Y_u|^{2q-2}\,Y_u^iB_u^i\,du + 2q\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^d\int_s^t |Y_u|^{2q-2}\,Y_u^iA_u^{i,j}\,dW_u^j+\\ &+2q(q-1)\sum_{i,j}\sum_{k=1}^d\int_s^t |Y_u|^{2q-4}\,Y_u^iY_u^jA_u^{i,k}A_u^{j,k}\,du+\\ &+p\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^d\int_s^t |Y_u|^{2q-2}\,(A_u^{i,k})^2\,du\,.\end{aligned}$$

Taking the expectation, we obtain

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|Y_t|^{2q}\right] =&\mathbb{E}\left[|Y_s|^{2q}\right] + 2q\sum_{i=1}^m\int_s^t \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q-2}\,Y_u^iB_u^i\right]\,du+\\ &+2q(q-1)\sum_{i,j}\sum_{k=1}^d\int_s^t \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q-4}\,Y_u^iY_u^jA_u^{i,k}A_u^{j,k}\right]\,du+\\ &+p\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^d\int_s^t \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q-2}\,(A_u^{i,k})^2\right]\,du\,.\end{aligned}$$

Hence,

$$\left|\mathbb{E}\left[|Y_t|^{2q}\right] - \mathbb{E}\left[|Y_s|^{2q}\right]\right| \leq C_1 \int_s^t \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q-1}|B_u|\right] du + \\ + C_2 \int_s^t \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q-2}\|A_u\|^2\right] du\,. \tag{4.5.3}$$

Consider the first term in Inequality (4.5.3). By Hölder's inequality we have

$$\mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q-1}|B_u|\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q}\right]^{(2q-1)/2q} \mathbb{E}\left[|B_u|^{2q}\right]^{1/2q}.$$

In the same way for the second term in (4.5.3) we get

$$\mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q-2}\|A_u\|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q}\right]^{(q-1)/q} \mathbb{E}\left[\|A_u\|^{2q}\right]^{1/q}.$$

Therefore,

$$\left|\mathbb{E}\left[|Y_t|^{2q}\right] - \mathbb{E}\left[|Y_s|^{2q}\right]\right| \leq C_1 \int_s^t \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q}\right]^{(2q-1)/2q} \mathbb{E}\left[|B_u|^{2q}]\right]^{1/2q} du + \\ + C_2 \int_s^t \mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q}\right]^{(q-1)/q} \mathbb{E}\left[\|A_u\|^{2q}\right]^{1/q} du\,.$$

Since $\mathbb{E}\left[|Y_u|^{2q}\right]$ is bounded for all $s \leq u \leq t$ and by the L^p-continuity of A_u and B_u, one can conclude that the process Y_t is L^p-continuous.

Let us proceed now with the proof of Inequality (4.5.1). By Itô's formula between t and 0 we have

$$\begin{aligned} |Y_t|^{2q} = |Y_0|^{2q} &+ \sum_{i=1}^m \int_0^t 2q\,|Y_s|^{2q-2}\,Y_s^i dY_s^i + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\int_0^t 2q(2q-2)\,|Y_s|^{2q-4}\,Y_s^i Y_s^j d\langle Y^i, Y^j\rangle_s + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i}\int_0^t 2q(2q-2)(Y_s^i)^2\,|Y_s|^{2q-4} + 2q\,|Y_s|^{2q-2}\,d\langle Y^i, Y^i\rangle_s\,. \end{aligned}$$

Hence, taking the expectation we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|Y_t|^{2q}\right] = \mathbb{E}\left[|Y_0|^{2q}\right] &+ 2q\sum_{i=1}^m \int_0^t \mathbb{E}[\left|Y_s^i\right|^{2q-2} Y_s^i B_s^i]\,ds + \\ &+ 2q(q-1)\sum_{i,j}\sum_{k=1}^d \int_0^t \mathbb{E}\left[|Y_s|^{2q-4}\,Y_s^i Y_s^j A_s^{i,k} A_s^{j,k}\right] ds + \\ &+ q\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^d \int_0^t \mathbb{E}\left[|Y_s|^{2q-2}\,(A_s^{i,k})^2\right] ds\,. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Let us start with the last term of the (4.5.4). First recall that

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}(A_s^{i,k})^2 = \|A_s\|^2 .$$

Note that, for all k in $[\![0,2q]\!]$ and x, y in $\mathbb{R}$, we claim that $x^{2q-k}y^k \leq x^{2q} + y^{2q}$. Indeed we have $Y^k \leq 1 + Y^{2q}$, for all Y in $\mathbb{R}$ and we apply it to $Y = y/x$ (if $x = 0$, the inequality is clearly true). Therefore we get

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{d}|Y_s|^{2q-2}\,(A_s^{i,k})^2 \leq |Y_s|^{2q} + \|A_s\|^{2q} .$$

Now consider the first term in (4.5.4). If the scalar product on $\mathbb{R}^m$ is denoted by $(\ ,\ )$, then

$$\sum_{i=1}^{m}|Y_s|^{2q-2}\,Y_s^iB_s^i = |Y_s|^{2q-2}\,(Y_s, B_s) \leq |Y_s|^{2q-1}\,|B_s| .$$

From the previous inequality, one obtains

$$\sum_{i=1}^{m}|Y_s|^{2q-2}\,Y_s^iB_s^i \leq |Y_s|^{2q} + |B_s|^{2q} .$$

Let us consider now the last term of (4.5.4). Note that,

$$|Y_s|^{2q-4}\,Y_s^iY_s^jA_s^{i,k}A_s^{j,k} \leq |Y_s|^{2q-2}\,\|A_s\|^2 .$$

Hence,

$$\sum_{i,j}\sum_{k=1}^{d}|Y_s|^{2q-4}\,Y_s^iY_s^jA_s^{i,k}A_s^{j,k} \leq C_3(|Y_s|^{2q} + \|A_s\|^{2q}) .$$

In conclusion, there exists a constant C such that

$$\mathbb{E}\left[|Y_t|^{2q}\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_0|^{2q}\right] + C\int_0^t \mathbb{E}\left[|Y_s|^{2q} + \|A_s\|^{2q} + |B_s|^{2q}\right]\,ds .$$

The lemma is proved. □

The next lemma (proved in [34]) gives some regularities of trajectories of solutions X_t of the SDE (4.2.1).

Lemma 4.5.4. *Let (X_t) be the solution of (4.2.1) for all $t \in [0,\tau]$. Suppose that the maps b and σ are locally Lipschitz (H2) and linearly bounded (H3) .*

Then, for all $t \in [0,\tau]$ and for all $q \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^{2q}\right] \leq (1 + \mathbb{E}\left[|x_0|^{2q}\right])e^{Ct}, \tag{4.5.5}$$

and, for all t, s such that $t \geq s$,

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^{2q}\right] \leq D(1 + \mathbb{E}\left[|x_0|^{2q}\right])(t-s)^q e^{C(t-s)}, \tag{4.5.6}$$

where C and D are positive constants depending only on τ, q and K_1.

Moreover, for all $\tau > 0$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,\tau]} |X_t|^{2q}\right] < +\infty$$

For the convergence of the process X_t^h to X_t the main tool shall be Lemma 4.5.3. However, notice that the evolution of X_t^h doesn't allow to apply this lemma because of the linear interpolation. More precisely, for all n, between the times nh and $(n+1)h$, this process is not of the form $X_{nh}^h + \int_{nh}^t A_s\, dW_s + \int_{nh}^t B_s\, ds$. Therefore, in order to apply it, it's natural to introduce the new process Y_t^h defined by

$$Y_t^h = Y_{\lfloor t/h\rfloor h}^h + \int_{\lfloor t/h\rfloor h}^t b(Y_{\lfloor t/h\rfloor h}^h) + \eta^h(Y_{\lfloor t/h\rfloor h}^h, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}))\, ds + \\ + \int_{\lfloor t/h\rfloor h}^t \sigma(Y_{\lfloor t/h\rfloor h}^h)\, dW_s\,.$$

Note that $X_{(n+1)h}^h = Y_{(n+1)h}^h$ for all n.

The last lemma gives equivalent bounds as in Lemma 4.5.4 but for the processes (X_t^h) and (Y_t^h).

Lemma 4.5.5. *Let (X_t^h) and (Y_t^h) be the processes defined above. Suppose that the maps b and σ are locally Lipschitz and linearly bounded. Moreover, suppose that Hypothesis (H4) are satisfied. Then, for all $t \in [0,\tau]$ and all $q \geq 1$,*

$$\mathbb{E}[\left|X_t^h\right|^{2q}] \leq C_0(1 + \mathbb{E}[\left|X_0^h\right|^{2q}])e^{C_1 t}\,,$$

and,

$$\mathbb{E}[\left|Y_t^h\right|^{2q}] \leq C_0(1 + \mathbb{E}[\left|X_0^h\right|^{2q}])e^{C_1 t}\,. \tag{4.5.7}$$

Moreover, for all t and for h small enough,

$$\mathbb{E}[\left|X_t^h - X_{\lfloor t/h\rfloor h}^h\right|^{2q}] \leq C_2(h^{2q} + h^q(-\log h)^q)\,,$$

and,

$$\mathbb{E}[\left|Y_t^h - Y_{\lfloor t/h\rfloor h}^h\right|^{2q}] \leq C_2(h^{2q} + h^q(-\log h)^q)\,. \tag{4.5.8}$$

On the other hand, for all $h \leq h_0$,

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\leq\tau}\left|Y_t^h\right|)^{2q}] \leq C_3(1 + \mathbb{E}[\left|X_0^h\right|^{2q}])\,,$$

where (C_i) are constants depending only on τ, q, K_1 and K_2.

Proof. Before the proof, we want to note that Assumption (H1) implies the fact that the functions b and σ are linearly bounded. More precisely, there exists $K_1 \geq 0$ such that

$$|b(x)| \leq K_1(1+|x|) \qquad \text{and} \qquad \|\sigma(x)\| \leq K_1(1+|x|)\,.$$

This linear growth property shall be often used in the following proofs.

The proof of this lemma is achieved in several steps.

The first step is to bound $\mathbb{E}[\left|X_t^h\right|^{2q}]$ according to $\mathbb{E}[|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}|^{2q}]$. From the definition of X_t^h, we have

$$\begin{aligned}\left|X_t^h\right|^{2q} \leq C_0(\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q} + h^{2q}\left|b(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q} + \\ + \|\sigma(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})\|^{2q}\left|W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q} \\ + h^{2q}\left|\eta^h(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q})\,.\end{aligned}$$

The process X_t^h at time $\lfloor t/h\rfloor h$ is independent of $W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}$. Therefore, by the linear growth property, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|X_t^h\right|^{2q}] \leq C_0\Big(\mathbb{E}[\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] + C_pK_1^{2q}h^{2q}(1+\mathbb{E}[\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}]) + \\ + C_pK_1^{2q}(1+\mathbb{E}[\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}])\mathbb{E}[\left|W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] + \\ + h^{2q}\mathbb{E}[\left|\eta^h(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q}]\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

In the same way as above, the following bound can be found for (Y_t^h):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|Y_t^h\right|^{2q}] \leq C_0\Big(\mathbb{E}[\left|Y^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] + C_qK_1^{2q}h^{2q}(1+\mathbb{E}[\left|Y^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}]) + \\ + C_pK_1^{2q}(1+\mathbb{E}[\left|Y^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}])\mathbb{E}[\left|W_t - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] + \\ + h^{2q}\mathbb{E}[\left|\eta^h(Y^h_{\lfloor t/h\rfloor h}, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q}]\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

The next step is now to bound $\mathbb{E}[\left|W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}]$ and $\mathbb{E}[\left|W_t - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}]$. By definition of the norm, one can find an upper bound by examining the supremum of d 1-dimensional standard Brownian motions $(B_t^k)_{k=1\cdots d}$ on the time interval $[0,h]$. Thus, consider the process M_h defined by

$$M_h = \max_{k\in[|1,d|]}\sup_{t\in[0,h]}\left|B_t^k\right|\,.$$

The aim is to find a bound on $\mathbb{E}\left[M_h^{2q}\right]$. Firstly, note that,

$$\mathbb{E}\left[M_h^{2q}\right] \leq \mathbb{E}\Big[M_h^{2q}\,\mathbb{1}_{\left\{M_h > 2\sqrt{h(-\log h)}\right\}}\Big] + C_1h^q(-\log h)^p\,.$$

But,

$$\mathbb{E}\Big[M_h^{2q}\ \mathbb{1}_{\left\{M_h>2\sqrt{h(-\log h)}\right\}}\Big] \le \sum_{k=1}^{d} \mathbb{E}\Big[(\sup_{t\in[0,h]}\left|B_t^k\right|)^{2q}\ \mathbb{1}_{\left\{\sup_{t\in[0,h]}|B_t^k|>2\sqrt{h(-\log h)}\right\}}\Big]\,.$$

By using the reflexion principle we get

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[M_h^{2q}\ \mathbb{1}_{\left\{M_h>2\sqrt{h(-\log h)}\right\}}\Big] &\le 2\sum_{k=1}^{d} \mathbb{E}\Big[(\sup_{t\in[0,h]} B_t^k)^{2q}\ \mathbb{1}_{\left\{\sup_{t\in[0,h]} B_t^k>2\sqrt{h(-\log h)}\right\}}\Big]\\ &\le C_2\int_{x\ge 2\sqrt{h(-\log h)}} x^{2q} g(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

where $g(x) = 2\ e^{-x^2/2h}/\sqrt{2\pi h}$.

Hence,

$$\mathbb{E}\Big[M_h^{2q}\ \mathbb{1}_{\left\{M_h>2\sqrt{h(-\log h)}\right\}}\Big] \le C_3 h^{q-1/2}\int_{u\ge 2\sqrt{-\log h}} u^{2q}e^{-u^2/2}\,du\,.$$

Let us compute now this integral. By integration by parts, we have

$$\begin{aligned}I_q = \int_{u\ge 2\sqrt{-\log h}} u^{2q}e^{-u^2/2}\,du &= \Big[u^{2q-1}(-e^{-u^2/2})\Big]_{2\sqrt{-\log h}}^{\infty}\\ &\quad + (2q-1)\int_{u\ge 2\sqrt{-\log h}} u^{2q-2}e^{-u^2/2}dx\\ &=(2\sqrt{-\log h})^{2q-1}e^{-(2\sqrt{-\log h})^2/2} + (2q-1)I_{q-1}\\ &=(2\sqrt{-\log h})^{2q-1}h^2 + (2q-1)I_{q-1}\,.\end{aligned}$$

By recurrence, $I_q \le C_4(\sqrt{-\log h})^{2q-1}h^2$. Therefore, for h small enough,

$$\mathbb{E}\left[M_h^{2q}\right] \le C_5 h^q(-\log h)^q\,.$$

Thus, we obtain

$$\mathbb{E}[\left|W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] \le C_6 h^q(-\log h)^q\,,$$

and

$$\mathbb{E}[\left|W_t - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] \le C_6 h^q(-\log h)^q\,.$$

Then, from Assumption (H3),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|\eta^h(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q}] \le C_7(h^{2q\alpha}\mathbb{E}[\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] +\\ + \mathbb{E}[\left|W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}])\end{aligned}$$

and with the previous inequality on $\mathbb{E}[\left|W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}]$,

$$\mathbb{E}[\left|\eta^h(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q}] \leq C_7(h^{2q\alpha}\mathbb{E}[\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] + \\ + C_6 h^q(-\log h)^q)\,. \tag{4.5.11}$$

Hence, for h small enough, Inequilties (4.5.9) and (4.5.10) becomes

$$\mathbb{E}[\left|X^h_t\right|^{2q}] \leq C_8\Big((1 + h^{2q} + h^q(-\log h)^q)\ \mathbb{E}[\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] + h^{2q} + h^q(-\log h)^q\Big)\,, \tag{4.5.12}$$

and,

$$\mathbb{E}[\left|Y^h_t\right|^{2q}] \leq C_8\Big((1 + h^{2q} + h^q(-\log h)^q)\ \mathbb{E}[\left|Y^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] + h^{2q} + h^q(-\log h)^q\Big)\,. \tag{4.5.13}$$

These inequalities allow us to bound the expectation of the norm of the processes X^h_t and Y^h_t according to the time in $h\mathbb{N}^*$ just before.

The next step is to understand how the norm of this process between two successive times in $h\mathbb{N}^*$ evolves. In other words, we want to study the evolution of the norm of the Markov chain $(X^h_{nh}) = (Y^h_{nh})$.

Recall that

$$X^h_{(n+1)h} = X^h_{nh} + \sigma(X^h_{nh})(W_{(n+1)h} - W_{nh}) + hb(X^h_n) + \\ + h\eta^{(h)}(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh})\,.$$

This can be also written as

$$X^h_{(n+1)h} = X^h_{nh} + \int_{nh}^{(n+1)h} b(X^h_{nh}) + \eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh}))\,ds + \\ + \int_{nh}^{(n+1)h} \sigma(X^h_{nh})\,dW_s\,.$$

One obtains from Lemma 4.5.3 between the times nh and $(n+1)h$ for the process Y^h_{t+nh} that

$$\mathbb{E}[\left|X^h_{(n+1)h}\right|^{2q}] \leq \mathbb{E}[\left|X^h_{nh}\right|^{2q}] + C_9\int_{nh}^{(n+1)h} (\mathbb{E}[\left|Y^h_s\right|^{2q}] + \mathbb{E}[\|\sigma(X^h_{nh})\|^{2q}] + \\ + \mathbb{E}[\left|b(X^h_{nh}) + \eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh}))\right|^{2q}])\,ds\,.$$

The value of $\mathbb{E}[\left|Y^h_s\right|^{2q}]$ can be bounded with (4.5.13). Hence, for h sufficiently small, and from the linear growth property, it follows that

$$\mathbb{E}[\left|X^h_{(n+1)h}\right|^{2q}] \leq (1 + C_{10}h)\mathbb{E}[\left|X^h_{nh}\right|^{2q}] + C_{11}h\,.$$

Note that, the sequence $(\mathbb{E}[\left|X^h_{nh}\right|^{2q}])_{n\in\mathbb{N}}$ is subarithmetico-geometric, that is, this sequence has the following form $x_{n+1} \leq \beta x_n + \gamma$ where $\beta \geq 1$. Thus, each $\mathbb{E}[\left|X^h_{nh}\right|^{2q}]$ can be controlled by only $\mathbb{E}[\left|X^h_0\right|^{2q}]$ and the time n. Indeed, if a sequence (x_n) satisfies the previous inequality, then, for all n,

$$x_n \leq \beta^n x_0 + n e^{n(\beta-1)}\gamma\,.$$

Therefore, for all t in $[0,\tau]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] \leq &(1+C_{10}h)^{t/h}\mathbb{E}[\left|X^h_0\right|^{2q}] + \frac{t}{h}e^{C_{10}t}C_{11}h\\ \leq &(\mathbb{E}[\left|X^h_0\right|^{2q}] + C_{11}t)e^{C_{10}t}\,.\end{aligned}$$

Hence with Inequality (4.5.12),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|X^h_t\right|^{2q}] &\leq C_{12}(\mathbb{E}[\left|X^h_0\right|^{2q}] + C_{11}t)e^{C_{10}t}\\ &\leq C_{13}(1+\mathbb{E}[\left|X^h_0\right|^{2q}])e^{C_{10}t}\,,\end{aligned}$$

and, for the same reason,

$$\mathbb{E}[\left|Y^h_t\right|^{2q}] \leq C_{13}(1+\mathbb{E}[\left|X^h_0\right|^{2q}])e^{C_{10}t}\,.$$

Let us proceed now with the proof of Inequality (4.5.8). For all t, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|X^h_t - X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] \leq C_0\mathbb{E}[&h^{2q}\left|b(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q} +\\ &+\|\sigma(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})\|^{2q}\left|W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q} +\\ &+h^{2q}\left|\eta^h(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}, W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W_{\lfloor t/h\rfloor h})\right|^{2q}]\,.\end{aligned}$$

Then, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X^h_t - X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}|^{2q}] \leq C_8\Big((h^{2q}+h^q(-\log h)^q)\mathbb{E}[|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}|^{2q}] +\\ + h^{2q} + h^q(-\log h)^q\Big)\,.\end{aligned}$$

Finally, from the bound (4.5.7) on $\mathbb{E}[|X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}|^{2q}]$, we obtain

$$\mathbb{E}[\left|X^h_t - X^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] \leq C_{14}(h^{2q}+h^q(-\log h)^q)$$

and the same reasons

$$\mathbb{E}[\left|Y^h_t - Y^h_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}] \leq C_{14}(h^{2q}+h^q(-\log h)^q)\,.$$

We now proceed with the proof of the last inequality. Note that the process Y_t^h can be also written by this way

$$Y_t^h = X_0 + \int_0^t \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\big(b(Y_{kh}^h) + \eta^{(h)}(Y_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big)\, ds + \\ + \int_0^t \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\sigma(Y_{kh}^h)\, dW_s\,.$$

We define the process Z_t^h by

$$Z_t^h = \sup_{s\le t} |Y_t^h|\,.$$

The aim is to find a bound on $\mathbb{E}\big[(Z_t^h)^{2q}\big]$ independent of h.

Note that from the definition of the norm and the convexity of the function $x \longmapsto |x|^q$,

$$\mathbb{E}\big[(Z_t^h)^{2q}\big] \le C_{15} \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\big[(Z_t^{h,i})^{2q}\big]\,,$$

where $Z_t^{h,i}$ is defined by $Z_t^{h,i} = \sup_{s\le t} |Y_t^{h,i}|$. Therefore it is sufficient to bound component by component. For all $i \in [|1,m|]$, by the triangle inequality,

$$\mathbb{E}\big[|Z_t^{h,i}|^{2q}\big] \le C_{16}\big(\mathbb{E}\big[\,|X_0|^{2q}\,\big] + \\ + \mathbb{E}\big[\big(\sup_{s\le t}\big|\int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(b^i(Y_{kh}^h) + \eta^{(h),i}(Y_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big)\, du\big|\big)^{2q}\,\big] + \\ + \mathbb{E}\big[\big(\sup_{s\le t}\big|\int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor}\sum_{j=0}^d \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\sigma^{i,j}(Y_{kh}^h)\, dW_u^j\big|\big)^{2q}\,\big]\big)\,. \tag{4.5.14}$$

Consider the second term in this inequality. By Hölder's inequality,

$$\big|\int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(b^i(Y_{kh}^h) + \eta^{(h),i}(Y_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big)\, du\big|^{2q} \le \\ \le s^{2q-1}\int_0^s \big|\sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(b^i(Y_{kh}^h) + \eta^{(h),i}(Y_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big)\big|^{2q}\, du\,.$$

Note that this sum over k is reduced to one term for each s. Hence,

$$\int_0^s \big|\sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(b^i(Y_{kh}^h) + \eta^{(h),i}(Y_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big)\big|^{2q}\, du\,. \le \\ \le C_{17}\int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(\big|b^i(Y_{kh}^h)\big|^{2q} + \big|\eta^{(h),i}(Y_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big|^{2q}\big)\, du\,.$$

From Assumption (H3) and the linear growth bound on the function b,

$$\int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(|b^i(Y^h_{kh})|^{2q} + |\eta^{(h),i}(Y^h_{kh}, W_{(k+1)h} - W_{kh})|^{2q}\big)\, du \leq$$
$$\leq C_{18} \int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(1 + (Z^h_u)^{2q} + h^{\alpha 2q}(Z^h_u)^{2q} + |W_{(k+1)h} - W_{kh}|^{2q}\big)\, du\,.$$

Since we are interested in h small, we can consider $h \leq 1$. Therefore, since $t \leq \tau$, we obtain

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{s\leq t} \big| \int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(b^i(Y^h_{kh}) + \eta^{(h),i}(Y^h_{kh}, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big)\, du\big|\big)^{2q}\big] \leq$$
$$\leq C_{19}\big(1 + \int_0^t \mathbb{E}\big[(Z^h_u)^{2q}\big] + \mathbb{E}\big[\sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)|W_{(k+1)h} - W_{kh}|^{2q}\big]\, du\big)\,.$$

Recall that for each u the sum over k is reduced to one term. Since each term can be bounded by $h^q(-\log h)^q$ as previously shown, then, for h sufficiently small,

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{s\leq t} \big| \int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\big(b^i(Y^h_{kh}) + \eta^{(h),i}(Y^h_{kh}, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big)\, du\big|\big)^{2q}\big] \leq$$
$$\leq C_{20}\big(1 + \int_0^t \mathbb{E}\big[(Z^h_u)^{2q}\big]\, du\big)\,.$$

Consider now the last term in Inequality (4.5.14). By Burkhölder Inequality, we get

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{s\leq t} \big| \int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \sum_{j=0}^{d} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\sigma^{i,j}(Y^h_{kh})\, dW^j_u\big|\big)^{2q}\big] \leq$$
$$\leq C_{21} t^{q-1}\big(\int_0^t \mathbb{E}\big[\sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \sum_{j=0}^{d} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)|\sigma^{i,j}(Y^h_{kh})|^{2q}\big]\, du\big)\,.$$

From the the linear growth bound of σ, we obtain

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{s\leq t} \big| \int_0^s \sum_{k=0}^{\lfloor \tau/h \rfloor} \sum_{j=0}^{d} \mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(u)\sigma^{i,j}(Y^h_{kh})\, dW^j_u\big|\big)^{2q}\big] \leq$$
$$\leq C_{22}\big(1 + \int_0^t \mathbb{E}\big[(Z^h_u)^{2q}\big]\, du\big)\,.$$

Finally, we get

$$\mathbb{E}\big[|Z^{h,i}_t|^{2q}\big] \leq C_{23}\big(1 + \int_0^t \mathbb{E}\big[(Z^h_u)^{2q}\big]\, du\big)\,,$$

and then,

$$\mathbb{E}[(Z_t^h)^{2q}] \leq C_{24}(1 + \int_0^t \mathbb{E}[(Z_u^h)^{2q}]\, du)\,.$$

Hence, by Gronwall's lemma,

$$\mathbb{E}[(Z_\tau^h)^{2q}] \leq C_{25}\,,$$

where C_{25} is independent of h. □

Proof. Theorem 4.5.2. For all positive τ, the same strategy as in the proof of Lemma 4.5.5 is set up to show the convergence on the time interval $[0, \tau]$.

The error between the solution X_t of the SDE and the process X_t^h is denoted by ϵ_t. Let us begin with a formula which relates the errors at two consecutive points of $h\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\epsilon_{(n+1)h} =& X_{(n+1)h} - X^h_{(n+1)h}\\ =& \epsilon_{nh} + \int_{nh}^{(n+1)h} \sigma(X_s) - \sigma(X^h_{nh})\, dW_s +\\ &+ \int_{nh}^{(n+1)h} b(X_s) - b(X^h_{nh}) - \eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh})\, ds\,.\end{aligned}$$

As previously seen, Lemma 4.5.3 is applied to the process $(X_{nh+t} - Y^h_{nh+t})$ instead of ϵ_{nh+t} because of the linear interpolation in the definition of X_t^h. Then, we get

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\epsilon_{(n+1)h}|^{2q}] \leq& \mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + C_0 \int_{nh}^{(n+1)h} (\mathbb{E}[\,\left|X_s - Y_s^h\right|^{2q}\,] +\\ &+ \mathbb{E}[\|\sigma(X_s) - \sigma(X^h_{nh})\|^{2q}] +\\ &+ \mathbb{E}[\,\left|b(X_s) - b(X^h_{nh}) - \eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh})\right|^{2q}\,])\, ds\,.\end{aligned}$$

Or,

$$X_s - Y_s^h = \epsilon_{nh} + X_s - X_{nh} + Y^h_{nh} - Y_s^h\,.$$

Then, we obtain

$$\mathbb{E}[\,\left|X_s - Y_s^h\right|^{2q}\,] \leq C_1(\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + \mathbb{E}[\,|X_s - X_{nh}|^{2q}\,] + \mathbb{E}[\,\left|Y_s^h - Y^h_{nh}\right|^{2q}\,])\,.$$

From Lemma 4.5.4,

$$\mathbb{E}[\,|X_s - X_{nh}|^{2q}\,] \leq C_2(1 + \mathbb{E}[\,|X_0|^{2q}\,])(s - nh)^q \leq C_3 h^q$$

For the process Y_t^h, Lemma 4.5.5 gives the inequality

$$\mathbb{E}[\,\left|Y_s^h - Y^h_{nh}\right|^{2q}\,] \leq C_4(h^{2q} + h^q(-\log h)^q)\,.$$

Therefore, for a small h,

$$\mathbb{E}[\,\left|X_s - Y_s^h\right|^{2q}\,] \leq C_5(\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + h^q(-\log h)^q)\,.$$

Since σ is a Lipschitz function,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|\sigma(X_s)-\sigma(X^h_{nh})\|^{2q}] &\le K_0^{2q}\,\mathbb{E}[\left|X_s - X^h_{nh}\right|^{2q}]\\ &\le K_0^{2q}\,\mathbb{E}[\left|X_s - X_{nh} + X_{nh} - X^h_{nh}\right|^{2q}]\\ &\le C_6(\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + h^q)\,.\end{aligned}$$

On the other hand, the last term can be also bounded

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\left|b(X_s) - b(X^h_{nh}) - \eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh})\right|^{2q}]\\ &\qquad\le C_7(\mathbb{E}[\left|b(X_s) - b(X^h_{nh})\right|^{2q}] + \mathbb{E}[\left|\eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh})\right|^{2q}])\,.\end{aligned}$$

As $\mathbb{E}[\left|X^h_{nh}\right|^{2q}]$ is finite,

$$\mathbb{E}[\left|\eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh})\right|^{2q}] \le K(h^q(-\log h)^q + h^{2q\alpha})\,.$$

And, finally, we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|b(X_s) - b(X^h_{nh}) - \eta^h(X^h_{nh}, W_{(n+1)h} - W_{nh})\right|^{2q}] \le C_8(&\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,]+\\ &+ h^q(-\log h)^q + h^{2q\alpha})\,.\end{aligned}$$

Thus, for h sufficiently small,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\left|\epsilon_{(n+1)h}\right|^{2q}] &\le \mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + C_0h\Big(C_5(\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + h^q(-\log h)^q)+\\ &\qquad + C_6(\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + h^q) + C_8(\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + h^q(-\log h)^q + h^{2q\alpha})\Big)\\ &\le (1 + C_9h)\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,] + C_{10}h^{q+1}(-\log h)^q + C_{11}h^{1+2q\alpha}\,.\end{aligned}$$

Note that $(\mathbb{E}[\,|\epsilon_{nh}|^{2q}\,])$ is an other subarithmetico-geometric sequence. Hence, as $\epsilon_0 = 0$,

$$\mathbb{E}\left[|\epsilon_{nh}|^{2q}\right] \le ne^{nC_9h}(C_{10}h^{q+1}(-\log h)^q + C_{11}h^{1+2q\alpha})\,.$$

On the other hand,

$$\epsilon_t = \epsilon_{\lfloor t/h\rfloor h} + X_s - X_{nh} + X^h_{nh} - X^h_s\,.$$

Therefore, for a time t in $[0,\tau]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\,|\epsilon_t|^{2q}\,] &\le C_5(\mathbb{E}\left[\left|\epsilon_{\lfloor t/h\rfloor h}\right|^{2q}\right] + h^q(-\log h)^q)\\ &\le C_5[\frac{t}{h}e^{t/hC_9h}(C_{10}h^{q+1}(-\log h)^q + C_{11}h^{1+2q\alpha}) + h^q(-\log h)^q]\\ &\le C_{12}(h^q(-\log h)^q + h^{2q\alpha})\,.\end{aligned}\tag{4.5.15}$$

Eventually, a bound on $\mathbb{E}\big[\left|X_t - X_t^h\right|^{2q}\big]$ is found. However, we want to prove the inequality on the supremum

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}|\epsilon_t|\big)^{2q}\big] \leq C(h^{2q\alpha} + h^q(-\log h)^q)\,.$$

Let us proceed with the proof of this inequality. From the definition of the norm and the convexity of the map $x \longmapsto |x|^p$,

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}|\epsilon_t|\big)^{2q}\big] \leq C_{13}\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\left|\epsilon_t^i\right|\big)^{2q}\big]\,.$$

Thus, it is sufficient to control the supremum of each component.

For all i in $[|1,m|]$,

$$\begin{aligned}
\epsilon_t^i = &\int_0^t \sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\big[b^i(X_s) - b^i(X_{kh}^h) - (\eta^{(h)})^i(X_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\big]\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,ds\\
&+\int_0^t \sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\sum_{j=1}^{d}\big[\sigma^{i,j}(X_s) - \sigma^{i,j}(X_{kh}^h)\big]\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,dW_s^j\\
&+\sum_{j=1}^{d}\sigma^{i,j}(X_{\lfloor t/h\rfloor h}^h)\big[W_t^j - W_{\lfloor t/h\rfloor h}^j - \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}(W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h}^j - W_{\lfloor t/h\rfloor h}^j)\big]\,.
\end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned}
&(4.5.16)\quad \mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\left|\epsilon_t^i\right|\big)^{2q}\big]\\
&\leq C_{14}\big(\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\int_0^t\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\{b^i(X_s) - b^i(X_{kh}^h) +\\
&\qquad\qquad - (\eta^{(h)})^i(X_{kh}^h, W_{(k+1)h} - W_{kh})\}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,ds\big|\big)^{2q}\big]\\
&+\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\int_0^t\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\sum_{j=1}^{d}\{\sigma^{i,j}(X_s) - \sigma^{i,j}(X_{kh}^h)\}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,dW_s^j\big|\big)^{2q}\big]\\
&+\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\sum_{j=1}^{d}\sigma^{i,j}(X_{\lfloor t/h\rfloor h}^h)\{W_t^j - W_{\lfloor t/h\rfloor h}^j +\\
&\qquad\qquad - \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}(W_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h}^j - W_{\lfloor t/h\rfloor h}^j)\}\big|\big)^{2q}\big]\big)\,.
\end{aligned}$$

Consider the first term of (4.5.16), by Hölder's inequality, we get

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\int_0^t\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\{b^i(X_s)-b^i(X^h_{kh})+ \\ -(\eta^{(h)})^i(X^h_{kh},W_{(k+1)h}-W_{kh})\}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,ds\}\big|\big)^{2q}\big] \\ \le C_{15}\,\mathbb{E}\big[\int_0^\tau\big|\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\{b^i(X_s)-b^i(X^h_{kh})+ \\ -(\eta^{(h)})^i(X^h_{kh},W_{(k+1)h}-W_{kh})\}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\big|^{2q}\,ds\big]\,.$$

Note that, for all s, the sum over k is just composed by only one term; thus

$$\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\int_0^t\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\{b^i(X_s)-b^i(X^h_{kh})+ \\ -(\eta^{(h)})^i(X^h_{kh},W_{(k+1)h}-W_{kh})\}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,ds\big|^{2q}\big] \\ \le C_{15}\int_0^\tau\mathbb{E}\big[\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\big|b^i(X_s)-b^i(X^h_{kh})+ \\ -(\eta^{(h)})^i(X^h_{kh},W_{(k+1)h}-W_{kh})\big|^{2q}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\big]\,ds\,,$$

or, from previous inequalities on processes,

$$\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\int_0^t\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\{b^i(X_s)-b^i(X^h_{kh})+ \\ -(\eta^{(h)})^i(X^h_{kh},W_{(k+1)h}-W_{kh})\}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,ds\big|^{2q}\big] \\ \le C_{16}(h^q(-\log h)^q+h^{2q\alpha})\,.$$

Consider now the second term of (4.5.16). By Burkholder's inequality, we obtain

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\int_0^t\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\sum_{j=1}^d(\sigma^{i,j}(X_s)-\sigma^{i,j}(X^h_{kh}))\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,dW^j_s\big|\big)^{2q}\big] \\ \le C_{17}\mathbb{E}\big[\int_0^\tau\big|\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\sum_{j=1}^d(\sigma^{i,j}(X_s)-\sigma^{i,j}(X^h_{kh}))\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\big|^{2q}\,ds\big] \\ \le C_{17}\int_0^\tau\mathbb{E}\big[\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\big|\sum_{j=1}^d(\sigma^{i,j}(X_s)-\sigma^{i,j}(X^h_{kh}))\big|^{2q}\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\big]\,ds\,.$$

Therefore, from Assumption (H1) and the bound on ϵ_t,

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]}\big|\int_0^t\sum_{k=0}^{\lfloor\tau/h\rfloor}\sum_{j=1}^d(\sigma^{i,j}(X_s)-\sigma^{i,j}(X^h_{kh}))\mathbb{1}_{]kh,(k+1)h]}(s)\,dW^j_s\big|\big)^{2q}\big] \\ \le C_{18}(h^q(-\log h)^q+h^{2q\alpha})\,.$$

Let us proceed with the remaining term of (4.5.16). Note that

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|\sum_{j=1}^{d}\sigma^{i,j}(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})\{W^j_t - W^j_{\lfloor t/h\rfloor h}+ - \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}(W^j_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W^j_{\lfloor t/h\rfloor h})\}|)^{2q}] \leq$$

$$\leq C_{19}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,\tau]}(\sum_{j=1}^{d}|\sigma^{i,j}(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})|^{2q}\sup_{s\in[\lfloor t/h\rfloor h,(\lfloor t/h\rfloor+1)h]}|W^j_s - W^j_{\lfloor t/h\rfloor h}|^{2q})]$$

$$\leq C_{19}\mathbb{E}[\sup_{k\in[|0,\lfloor\tau/h\rfloor|]}(\sum_{j=1}^{d}|\sigma^{i,j}(X^h_{kh})|^{2q}\sup_{s\in[kh,(k+1)h]}|W^j_s - W^j_{kh}|^{2q})]$$

Since the supremum of non-negative elements is less than the sum of this elements and from the linear growth bound on σ, we get

$$\mathbb{E}[\sup_{k\in[|0,\lfloor\tau/h\rfloor|]}(\sum_{j=1}^{d}|\sigma^{i,j}(X^h_{kh})|^{2q}\sup_{s\in[kh,(k+1)h]}|W^j_s - W^j_{kh}|^{2q})] \leq$$

$$\leq C_{20}\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{\lfloor\tau/h\rfloor}(1+|X^h_{kh}|^{2q})\sup_{s\in[kh,(k+1)h]}|W^j_s - W^j_{kh}|^{2q}]$$

Since $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,\tau]}|\sigma^{i,j}(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})|^{2q}]$ is finite (Lemma 4.5.5), by independence of increments of Brownian motion and, from the bound on the supremum of these increments on a time interval of length h, we obtain

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|\sum_{j=1}^{d}\sigma^{i,j}(X^h_{\lfloor t/h\rfloor h})\{W^j_t - W^j_{\lfloor t/h\rfloor h}+ - \frac{t-\lfloor t/h\rfloor h}{h}(W^j_{(\lfloor t/h\rfloor+1)h} - W^j_{\lfloor t/h\rfloor h})\}|)^{2q}] \leq$$

$$\leq C_{21}\lfloor\tau/h\rfloor h^q(-\log h)^q\,.$$

Finally, we obtain

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}\left|\epsilon^i_t\right|)^{2q}] \leq C_{22}(h^{q-1}(-\log h)^q + h^{2q\alpha})\,.$$

And, therefore, we have

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|\epsilon_t|)^{2q}] \leq C_{22}(h^{q-1}(-\log h)^q + h^{2q\alpha})\,.$$

This inequality implies the convergence in L^p of the process (X^h_t) to (X_t) on $[0,\tau]$ when h tends to 0. For the remaining p, the convergence is due to the inclusion of the spaces L^p.

For the almost sure convergence, we take an exponent p such that $p > 4$ and $p\alpha > 1$. Thus, the previous result gives

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]} |X_t - X_t^{1/k}|\big)^{2q}\big] < \infty\,.$$

As $\big(\sup_{t\in[0,\tau]} |X_t - X_t^{1/k}|\big)^{2q}$ are non-negative random variables, then

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[0,\tau]} |\epsilon_t| = 0 \quad \text{a.s.}\,.$$

□

From the convergence of this scheme of stochastic numerical analysis, the main result on the convergence of the process $\overline{X}_t^h$ to a solution of a SDE is deduced.

Theorem 4.5.6. *Suppose that there exist measurable maps b, σ, and $\eta^{(h)}$ which verify Assumption (H1) for b and σ, and (H4) for $\eta^{(h)}$ such that the function on the first component of $\widetilde{T}^{(h)}$ is of the following form,*

$$U^{(h)}(x,y) = x + \sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x,y)\,.$$

For all x_0 in $\mathbb{R}^m$, and all $\tau > 0$, let $X_t^{x_0}$ be the solution on $[0,\tau]$ of the SDE

$$dX_t^{x_0} = b(X_t^{x_0})dt + \sigma(X_t^{x_0})dW_t\,.$$

Then, the process $(\overline{X}_t^h)$, starting in x_0, converges to $(X_t^{x_0})$ when h tends to 0 in L^p, for all $p \geq 1$ on $[0,\tau]$.

Moreover, the convergence is almost sure on $[0,\tau]$.

We now present a similar result in the case of locally Lipschitz and linearly bounded functions b and σ, that is to say satisfying Assumptions (H2) and (H3).

Theorem 4.5.7. *For all $\tau > 0$, under the assumptions (H1), (H2), and (H3), the process (X_t^h) converges in L^p to the solution (X_t) of the SDE (4.2.1) on $[0,\tau]$ for all $p \geq 1$.*

More precisely,

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]} |X_t - X_t^h|\big)^p\big] = 0\,.$$

Proof. For all $\tau > 0$ and all natural N, we define two stopping times τ_N and $\tau_N^{(h)}$ by

$$\tau_N = \inf\{t; |X_t| \geq N\} \quad \text{and} \quad \tau_N^{(h)} = \inf\{t; |X_t^{(h)}| \geq N\}\,.$$

Note that, from Theorem 4.5.2,

$$\mathbb{E}\big[\big(\sup_{t\in[0,\tau]} |X^h_{t\wedge\tau_N^{(h)}\wedge\tau_N} - X_{t\wedge\tau_N^{(h)}\wedge\tau_N}|\big)^{2q}\big] \leq C_N(h^{q-1}(-\log h)^q + h^{2q\alpha})\,,$$

where C_N notably depends on K_N.

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|X_t^h - X_t|)^{2q}] \leq \mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|X^h_{t\wedge\tau_N^{(h)}\wedge\tau_N} - X_{t\wedge\tau_N^{(h)}\wedge\tau_N}|)^{2q}] + \\ + \mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|X_t^h|^{2q} + |X_t|^{2q} : \tau_N^{(h)} \leq \tau] + \\ + \mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|X_t^h|^{2q} + |X_t|^{2q} : \tau_N \leq \tau] .$$

Hence, we get for all N

$$\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|X_t^h - X_t|)^{2q}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\in[0,\tau]}|X^h_{t\wedge\tau_N^{(h)}\wedge\tau_N} - X_{t\wedge\tau_N^{(h)}\wedge\tau_N}|^{2q}] + \\ + \frac{2}{N}\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,\tau]}|X_t^h|^{2q+1} + \sup_{t\in[0,\tau]}|X_t|^{2q+1}] .$$

Since the expectation of the supremum of X_t (Lemma 4.5.3) and the supremum of X_t^h (Lemma 4.5.4) can be bounded by a constant independent of h for all h sufficiently small, then

$$\lim_{h\to 0}\mathbb{E}[(\sup_{t\in[0,\tau]}|X_t - X_t^h|)^{2q}] = 0 .$$

□

Theorem 4.5.7 implies the following result on the limit evolution of the system when the time step h for the interactions goes to 0.

Theorem 4.5.8. *Suppose that there exist measurable maps b, σ, and $\eta^{(h)}$ which verify Assumptions (H2) and (H3) for b and σ, and (H4) for $\eta^{(h)}$ such that the function on the first component of $\widetilde{T}^{(h)}$ is of the following form,*

$$U^{(h)}(x,y) = x + \sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x,y) .$$

For all x_0 in $\mathbb{R}^m$, and all $\tau > 0$, let $X_t^{x_0}$ be the solution on $[0,\tau]$ of the SDE

$$dX_t^{x_0} = b(X_t^{x_0})dt + \sigma(X_t^{x_0})dW_t .$$

Then, the process $(\overline{X}_t^h)$, starting in x_0, converges to $(X_t^{x_0})$ when h tends to 0 in L^p, for all $p \geq 1$ on $[0,\tau]$.

Physically, the results of these two theorems of convergence can be understood as follows. If the effective action of the environment on the system is roughly linear, the limit evolution of the system is given by a solution of a stochastic differential equation. This SDE is deduced from a Taylor expansion of the function $U^{(h)}$.

With the quantum repeated interactions scheme, Attal and Pautrat (in [12]) find quantum Langevin equations as limits of some Hamiltonian systems. There are some similarities with their results, particularly on the form of considered interactions.

4.6 Back to the Physical Systems

4.6.1 Charged Particle in a Uniform Electric Field

The first example was a charged particle in a uniform electric field. Recall that the evolution for a time step h is given by

$$X(nh) = U^{(h)}(X((n-1)h), E(nh)),$$

where the map $U^{(h)}$ is defined by

$$U^{(h)}(x,y) = x + \sigma(x)y + hb(x) + h\eta^h(x,y),$$

with

$$\sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \qquad b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{m} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \eta^h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{qy}{2m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note that this function $U^{(h)}$ is of the form of Theorem 4.5.6. The function σ is constant and the function b is linear. Finally, they are Lipschitz functions. For the function η^h, Assumption (H4) is also verified with $\alpha = +\infty$ and $K_2 = \frac{q}{2m}$. Therefore, Theorem 4.5.6 can be applied for this system.

For all intial x_0 and p_0, all $\tau > 0$, the limit process which gives the evolutions of the charged particle is almost surely the solution $X_t = \begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix}$ on $[0,\tau]$ of the stochastic differential equation

$$dX_t = \begin{pmatrix} \frac{X_t^{(2)}}{m} \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} dW_t,$$

where W_t is a 1-dimensional standard Brownian motion and with $X_0 = (x_0, p_0)$.

4.6.2 Harmonic Interaction

The second example was a harmonic interaction between the system and the environment. The evolution of the system was descibed by the Markov chain

$$X(nh) = U^{(h)}(X((n-1)h), Y(nh))$$

where

$$U^{(h)}(X,Y) = X + \sigma(X)Y + hb(X) + h\eta^{(h)}(X,Y),$$

with

$$b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and

$$\eta^{(h)}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \frac{h}{2}\begin{pmatrix} x_1 - y_2/3 \\ x_2 + 2y_1/3 \end{pmatrix} + \circ(h)\,.$$

The functions b and σ are Lipschitz. For the map $\eta^{(h)}$, Assumptions (H4) is verified too for $\alpha = 1$. Theorem 4.5.6 can be applied for this system. Therefore, we conclude that for all $\tau > 0$ and all $Q_1(0)$, $P_1(0)$ in $\mathbb{R}$, the limit evolution on $[0, \tau]$ of the system is given almost surely by the solution of the stochastic differential equation

$$dX_t = \begin{pmatrix} X_t^{(2)} \\ -X_t^{(1)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} dW_t\,,$$

starting at time 0 in $X_0 = \begin{pmatrix} Q_1(0) \\ P_1(0) \end{pmatrix}$.

Note that this SDE is the equation of a harmonic oscillator perturbed by a Brownian noise. This kind of SDE was already considered in [43] and [37] for instance.

Let us focus now on the asymptotic behaviour of this process. This stochastic differential equation has no stationary measure since the non-perturbed differential equation has no stable point. Physically, the energy of the system whose evolution is governed by this SDE inscreases with the time. More precisely, we get

$$\mathbb{E}\Big[(X_t^{(1)})^2 + (X_t^{(2)})^2\Big] = Q_1(0)^2 + P_1(0)^2 + t\,.$$

However, in [37], it is shown that the system oscillates infinitely often. This means that the system is excited by repeated interactions which bring energy and it has no time to dissipate it. The next example shall be different.

4.6.3 Damped Harmonic Oscillator

The last example is the damped harmonic oscillator. The system undergoing repeated interactions evolves following the Markov chain $(X(nh))$ defined by

$$X(nh) = U^{(h)}(X((n-1)h), Y(nh))$$

where

$$U^{(h)}(X, Y) = X + \sigma(X)Y + hb(X) + h\eta^{(h)}(X, Y),$$

with

$$b\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - fx_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The map $\eta^{(h)}$ is not explicitly expressed. But as said in the section 4, from Newton's law of motion, high derivative of P_1 and Q_1 can be bounded with Q_1, P_1, Q_2 et P_2. Then a required bound on $\eta^{(h)}$ can be found. Moreover, the maps b et σ are Lipschitz. Therefore Theorem 4.5.6 can be applied.

Hence, the limit evolution of the system is governed by the solution of the stochastic differential equation

$$\begin{cases} d\,Q_1 = P_1 dt \\ d\,P_1 = -f\,P_1 - Q_1 dt + d\,W_t^{(1)}\,. \end{cases}$$

Then, we examine the asymptotic behaviour of the system. This stochastic differential equation is a Langevin equation whose stationary measure is given by the Gibbs measure

$$d\,\mu = \frac{e^{-f\frac{(Q_1)^2+(P_1)^2}{2}}}{\mathcal{Z}}\,d\,Q_1\,d\,P_1\,,$$

where $\mathcal{Z}$ is a normalizing constant.

Contrary to the previous example, the friction force allows the system to dissipate a part of its energy and then, the convergence of the dynamics to the stationary state (see [36]). Physically, the system is thermalised by the environment and the temperature is $1/f$.

Deuxième partie

Systèmes quantiques ouverts

Chapitre 5

Introduction aux systèmes quantiques

Dans ce chapitre, nous présentons le formalisme de la mécanique quantique ainsi que les grands principes généraux pour un système fermé ou ouvert (voir, pour une description plus approfondie, par exemple [3, 9, 10, 11]). Dans la première section, nous rappelons les, axiomes de base de la mécanique quantique pour un système fermé. Nous décrivons ensuite les axiomes dérivés des précédents permettant une étude des systèmes quantiques ouverts.

5.1 Mécanique quantique

Le formalisme mathématique de la mécanique quantique est totalement différent de celui de la mécanique classique. Il est basé sur certains axiomes que nous présentons ici, d'abord pour un système fermé.

Premier axiome : Etats

L'espace des *états* d'un système est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les états du système sont les vecteurs de norme 1 de $\mathcal{H}$. Plus précisément, ce sont les classes d'équivalence de vecteurs de norme 1 à multiplication par un scalaire de module 1 près. Toute l'information sur le système est contenue dans une de ces classes de vecteurs, appelée aussi *fonction d'onde*.

Deuxième axiome : Observables

Les *observables* du système sont les quantités physiques qui peuvent être mesurées sur le système : position, vitesse, énergie, ... Une observable est représentée par un opérateur auto-adjoint X sur $\mathcal{H}$. Le résultat de la mesure de cette observable est à valeur dans le spectre de X.

Dans le cas de la dimension finie (ce qui sera le cas dans la majorité des travaux présentés ici), une observable peut toujours être diagonalisée dans une base orthonormée

et donc peut être écrite comme

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \,,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de X et les opérateurs P_i sont les projections orthogonales sur les sous-espaces propres.

En dimension infinie, il faut consider la mesure spectrale associée à X.

Troisième axiome : Mesures quantiques

Le résultat de la mesure d'une observable X est aléatoire, à valeurs dans le spectre de X. Plus précisément, pour un système dans un état ψ, le résultat de la mesure de X est λ_i avec la probabilité $p_i = \|P_i\psi\|^2 = \langle \psi, P_i\psi \rangle$.

De plus, si nous observons la valeur λ_i, après la mesure l'état du système devient immédiatement

$$\psi_i = \frac{P_i\psi}{\|P_i\psi\|} \,.$$

Cette projection de l'état du système après la mesure est appelée *réduction du paquet d'ondes*.

Quatrième axiome : Dynamique

Parmi toutes les observables, l'énergie totale H du système appelée, comme en mécanique classique, l'*hamiltonien*, donne l'évolution du système au cours du temps. Si nous définissons les opérateurs unitaires U_t par

$$U_t = e^{-itH} \,,$$

pour tout t de $\mathbb{R}^+$, alors l'état du système après un temps t sera

$$\psi_t = U_t\psi \,.$$

5.2 Mécanique quantique pour un système ouvert

Dans le cas d'un système ouvert, le formalisme précédent doit être étendu. Nous décrivons donc dans cette section l'extension des axiomes qui nous permettra de décrire un système en interaction avec son environnement.

Avant cela, nous avons besoin d'introduire certaines notations : *Bra*, *Ket* et la trace partielle.

Sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$, nous définissons pour un vecteur ψ de $\mathcal{H}$ les deux applications linéaires suivantes : le Bra $|\psi\rangle$

$$\begin{array}{rccc} |\psi\rangle : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda\psi \,, \end{array}$$

et le Ket $\langle\psi|$

$$\begin{array}{rccc} \langle\psi| : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & y & \longmapsto & \langle \psi, y \rangle \,. \end{array}$$

Nous identifierons dans la suite le Bra $|\psi\rangle$ avec le vecteur ψ même si mathématiquement les deux objets sont différents. Nous pouvons remarquer que le Ket peut aussi agir sur les Bras de manière canonique. Il est à noter aussi que ces notations permettent par exemple d'écrire facilement par $|\psi\rangle\langle\phi|$ l'application qui à un vecteur $|y\rangle$ associe $\langle\phi\,,\,y\rangle|\psi\rangle$. En particulier, la projection orthogonale sur la droite engendrée par un vecteur ψ est l'opérateur $|\psi\rangle\langle\psi|$.

Un système ouvert (système + environnement) est représenté en mécanique quantique par le produit tensoriel des espaces de Hilbert

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}\,,$$

où $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert associé au petit système et $\mathcal{K}$ celui de l'environnement. Cet espace est l'équivalent quantique de l'espace produit $S \times E$ classique. Le système total, ainsi obtenu, est fermé et donc le formalisme précédent peut être utilisé. Pour étudier ce que nous obtenons quand nous ne regardons que le petit système à partir de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, nous introduisons la trace partielle définie à partir du théorème suivant.

Théorème 5.2.1. *Pour tout opérateur à trace T de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, il existe un unique opérateur à trace $Tr_{\mathcal{K}}(T)$ sur $\mathcal{H}$ tel que, pour tout opérateur borné X sur $\mathcal{H}$,*

$$Tr\,(\,Tr_{\mathcal{K}}(T)X) = Tr\,(T(X \otimes I))\ .$$

L'unique opérateur $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(T)$ est appelé *trace partielle* sur $\mathcal{K}$ de T.

Expliquons maintenant comment à partir de la trace partielle une généralisation naturelle des états dans le cas d'un système ouvert peut être facilement obtenue.

Pour un petit système et un environnement représenté par $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, comme dans le cas classique, nous voulons étudier ce que nous pouvons voir lorsque nous regardons uniquement le petit système. A cette fin, considérons une observable X sur $\mathcal{H}$ décomposée comme

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ P_i\,,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de X et les opérateurs P_i sont les projections orthogonales sur les sous-espaces propres. Cette observable peut être relevée comme une observable sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ en tensorisant par l'identité. Notons alors que,

$$X \otimes I = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ P_i \otimes I\,.$$

D'après le formalisme décrit précédemment, le résultat de la mesure selon $X \otimes I$ est λ_i avec la probabilité

$$\|(P_i \otimes I)\psi\|^2 = \mathrm{Tr}\,(|\psi\rangle\langle\psi|(P_i \otimes I)) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|)P_i)\ .$$

Nous pouvons donc déduire, à partir de $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|)$, tout ce qui se passe sur le petit système, en utilisant uniquement des opérateurs sur $\mathcal{H}$.

Pour cette raison, les états dans le cas du système ouvert sont généralisés en considérant cette trace partielle. Il est donc naturel d'essayer de caractériser ces opérateurs obtenus à partir de la trace partielle.

Théorème 5.2.2. *Soit ρ un opérateur sur $\mathcal{H}$. Alors nous avons équivalence entre*

- *il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ et un vecteur ψ de norme 1 sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ tels que*

$$\rho = Tr_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|)\,.$$

- *l'opérateur ρ est auto-adjoint, positif et de trace 1.*

Un opérateur vérifiant ces propriétés est appelé *matrice densité*. Ces opérateurs représentent maintenant les états du petit système. Comme ils sont en particulier des opérateurs compacts, ils peuvent être écrits comme une somme de projecteurs,

$$\rho = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n |e_n\rangle\langle e_n|\,,$$

avec $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$ et les μ_n des réels positifs satisfaisant

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n = 1\,.$$

Dans le cas où la matrice densité ρ peut s'écrire comme un projecteur sur une unique droite engendrée par un vecteur $|\psi\rangle$, c'est-à-dire $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, l'état est appelé *pur*. On retrouve alors le formalisme des systèmes fermés.

Maintenant que l'état d'un système ouvert est représenté par une matrice densité, nous étendons les autres axiomes (pour une description précise de cette extension, voir [3]). Dans le cas d'un petit système dans un état ρ et d'une l'observable X décomposée comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, la probabilité que le résultat de la mesure soit λ_i est $\mathrm{Tr}(\rho P_i)$. De plus, si la valeur est λ_i, l'état du système devient immédiatement

$$\rho_i = \frac{P_i \rho P_i}{\mathrm{Tr}(\rho P_i)}\,.$$

Ceci est la réduction du paquet d'ondes dans le formalisme des matrices densités.

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution du système. Avant de donner de manière générale l'évolution du système, nous traitons un exemple simple. Le système total (petit système + environnement) étant fermé, l'évolution est déterminée par son hamiltonien. Prenons l'exemple d'un hamiltonien de la forme suivante,

$$H = H_{\mathcal{H}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{K}}\,,$$

où $H_{\mathcal{H}}$ et $H_{\mathcal{K}}$ sont respectivement l'hamiltonien du petit système et celui de l'environnement. L'opérateur H représente une évolution sans interaction entre le petit système et

l'environnement. Chaque partie évolue de manière autonome. L'unitaire donnant l'évolution est alors

$$U(t) = e^{-itH} = e^{-itH_{\mathcal{H}}} \otimes e^{-itH_{\mathcal{K}}} = U_{\mathcal{H}}(t) \otimes U_{\mathcal{K}}(t)\,,$$

le produit tensoriel des deux unitaires. Considérons un état initial du système total ψ donnant une matrice densité $\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ sur le petit système. L'état du système total au temps t étant $\psi_t = U(t)\psi$, nous obtenons ainsi, en revenant à la définition de la trace partielle, un état du petit système

$$\rho_t = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(|\psi_t\rangle\langle\psi_t|) = U_{\mathcal{H}}(t)\rho\, U_{\mathcal{H}}(t)^*\,.$$

Cet exemple montre que l'évolution du système dans le cas d'une matrice densité semble être donnée par la conjugaison par l'opérateur unitaire. Dans ce cas particulier, l'expression est simplifiée car il n'y a aucune interaction entre le système et l'environnement.

Présentons maintenant l'axiome sur l'évolution d'un système ouvert de manière plus générale. Le système total évolue selon un opérateur unitaire U (le temps est oublié dans cette description). Pour un état initial du système ρ et un état de l'environnement $|\phi\rangle\langle\phi|$, le système couplé après l'interaction est dans l'état

$$U(\rho \otimes |\phi\rangle\langle\phi|)U^*\,.$$

Dans le but d'obtenir l'état du petit système, nous calculons ensuite la trace partielle sur $\mathcal{K}$ de cet élément. Mathématiquement, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) & \xrightarrow{U\cdot U^*} & \mathcal{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}) \\ {\scriptstyle \otimes|\phi\rangle\langle\phi|}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(\cdot)} \\ \mathcal{S}(\mathcal{H}) & \xrightarrow[L]{} & \mathcal{S}(\mathcal{H}) \end{array}$$

où les ensembles $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ sont respectivement l'ensemble des matrices densités de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$.

Notons que ce diagramme est l'équivalent quantique du diagramme classique donnant le lien entre un opérateur markovien et une dilatation par un système dynamique.

Grâce à ce diagramme, nous avons défini une application L donnant l'état du petit système après une interaction représentée par un opérateur unitaire U. L'opérateur L est appelé *application complètement positive.*

Une application complètement positive L peut toujours être décomposée de la manière suivante

$$L(\rho) = \sum_n M_n \rho M_n^*\,,$$

où les opérateurs M_n sont des opérateurs bornés vérifiant

$$\sum_n M_n^* M_n = I\,.$$

Cette écriture est appelée *décomposition de Krauss* d'une application complètement positive.

Maintenant que nous avons décrit les principes fondamentaux de la mécanique quantique des systèmes ouverts, nous présentons dans ce contexte, le schéma d'interactions répétées.

Chapitre 6

Interactions répétées quantiques et équations différentielles stochastiques quantiques

Le schéma d'interactions répétées quantiques, formalisé mathématiquement par Attal et Pautrat dans [12], est un modèle introduit dans le but d'étudier l'évolution d'un système ouvert quand l'environnement ne peut pas être décrit complètement.

Dans la section suivante, nous le présentons dans ce contexte quantique. Ensuite, nous décrivons brièvement et schématiquement la limite en temps continu de ces interactions répétées donnée par des équations différentielles stochastiques quantiques qui sont notamment au centre du travail fait dans [5].

6.1 Interactions répétées quantiques

Dans le schéma d'interactions répétées, l'environnement est supposé être une collection infinie de parties identiques. Il donc représenté par l'espace de Hilbert

$$T\Phi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{K}_n \,,$$

où les espaces $\mathcal{K}_n$ sont tous égaux à un même espace $\mathcal{K}$. L'indice n n'est présent que dans un souci de compréhension car il permet de se rappeler qu'il s'agit de la nième copie de $\mathcal{K}$. Une fois le modèle décrit cet indice sera oublié. Donnons une définition mathématique plus précise de cet espace dans le cas simple où $\mathcal{K}_n = \mathbb{C}^{N+1}$. Fixons, tout d'abord, une base orthonormée $\{e_0, e_1, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{C}^{N+1}$, où le premier élément e_0, que nous notons aussi Ω, est considéré comme l'état fondamental de cette partie de l'environnement. Le produit tensoriel dénombrable $T\Phi$ est défini pour la suite stabilisatrice Ω. Plus précisément, donnons une base orthonormée de l'espace $T\Phi$. Considérons par exemple la famille

$$\{X_A; A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*\times\{1,\ldots,N\}}\} \,,$$

où $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*\times\{1,\ldots,N\}}$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^* \times \{1,\ldots,N\}$ et l'élément X_A avec $A = \{(n_1,i_1),\ldots,(n_k,i_k)\}$ est

$$\Omega \otimes \ldots \otimes \Omega \otimes e_{i_1} \otimes \Omega \otimes \ldots \otimes \Omega \otimes e_{i_2} \otimes \ldots ,$$

avec e_{i_1} sur la copie $\mathcal{K}_{n_1}$, ...

Maintenant si nous considérons un petit système représenté par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, d'après le formalisme décrit dans le chapitre précédent, l'espace du petit système couplé avec l'environnement est alors

$$\mathcal{H} \otimes \bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{K}_n .$$

Afin de décrire l'interaction entre le petit système et l'environnement, nous définissons certains opérateurs canoniques sur $T\Phi$. Sur $\mathbb{C}^{N+1}$, nous notons par a^i_j les opérateurs satisfaisant

$$a^i_j e_k = |e_j\rangle\langle e_i|e_k = \delta_{ik} e_j ,$$

pour tout i,j,k de $\{0,\ldots,N\}$. La famille de tous ces a^i_j forme une base des opérateurs sur $\mathbb{C}^{N+1}$. Sur $T\Phi$, ces opérateurs peuvent être naturellement dilatés en les opérateurs $a^i_j(n)$ où $a^i_j(n)$ agit comme a^i_j sur $\mathcal{K}_n$ et l'identité sur les autres copies de $\mathcal{K}$.

Nous pouvons décrire maintenant l'interaction entre le petit système et l'environnement. Comme dans le cas classique, l'interaction entre une partie du l'environnement et le petit système est hamiltonienne. Il nous suffit alors de fixer cet opérateur. Prenons un hamiltonien H sur $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ de la forme

$$H = H_{\mathcal{H}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{K}} + H_I ,$$

où $H_{\mathcal{H}}$ et $H_{\mathcal{K}}$ sont les hamiltoniens des systèmes isolés et H_I décrit la « vraie » interaction entre les systèmes. Pour une interaction durant un temps h, l'unitaire associé sur $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ est $U = e^{-ihH}$. Cet opérateur unitaire est lui aussi dilaté sur $\mathcal{H}\otimes T\Phi$ de la manière suivante. Nous définissons l'opérateur U_n sur $\mathcal{H}\otimes T\Phi$ comme celui agissant comme U sur $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}_n$ et l'identité sur les autres copies de $\mathcal{K}$. Ainsi U_n représente l'interaction entre le petit système et la nième partie de l'environnement.

Le schéma d'interaction entre le petit système et l'environnement $T\Phi$ est toujours le même. Le système est couplé à la première copie $\mathcal{K}_1$ et interagit pendant un temps h selon U_1. Au temps h, l'interaction est arrêtée et le système est couplé à $\mathcal{K}_2$ et ils interagissent selon U_2 et ainsi de suite...

Les opérateurs donnant l'évolution du système total sont alors les suivants

$$V_n = U_n U_{n-1} \ldots U_1 ,$$

où V_n représente les n premières interactions. Selon le formalisme du chapitre précédent, pour un état initial ρ de $\mathcal{H}\otimes T\Phi$, l'état du système total après n interactions est

$$V_n \, \rho \, V_n^* .$$

Afin d'introduire la limite en temps continu de ces interactions répétées, réécrivons cette évolution d'une manière différente. L'unitaire U peut être décomposé sur la base des a_j^i,

$$U = \sum_{i,j} U_j^i \otimes a_j^i \,,$$

où les U_j^i sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. Par conséquent, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'unitaire U_n peut être écrit comme

$$U_n = \sum_{i,j} U_j^i \otimes a_j^i(n) \,.$$

Ainsi les opérateurs V_n vérifient l'équation récurrente suivante

$$V_{n+1} = U_{n+1} V_n = \sum_{i,j} U_j^i \otimes a_j^i(n+1) V_n \,.$$

Dans la suite, nous enlevons « par abus » le produit tensoriel (en réalité, il suffit tout simplement de dilater sur $\mathcal{H} \otimes T\Phi$ les U_j^i et les $a_j^i(n)$). Remarquons que l'opérateur V_n et les $a_j^i(n+1)$ commutent car V_n agit uniquement sur les n premières copies de $\mathcal{K}$ et les $a_j^i(n+1)$ agissent uniquement sur la (n+1)ième. Par conséquent, l'équation précédente peut s'écrire

$$V_{n+1} = \sum_{i,j} U_j^i V_n a_j^i(n+1) \,.$$

Notons que ces opérateurs $a_j^i(n)$ jouent exactement le même rôle que la suite (y_n) de l'environnement dans le cas classique. Cette équation ressemble à celle donnant l'évolution de la chaîne de Markov X_{nh}^h. Ces opérateurs sont appelés *bruits quantiques*. Nous verrons en particulier dans le chapitre suivant sur les marches obtuses et surtout dans [4] que les bruits classiques peuvent être retrouvés dans le formalisme quantique. Certaines combinaisons de ces bruits quantiques peuvent être interprétées comme une variable classique : une variable Bernoulli, de Poisson ou autres.

Ce schéma d'interactions répétées est au centre de plusieurs travaux s'intéressant à des problématiques diverses, citons par exemple [22, 8, 21]. Dans la fin de ce chapitre, nous en présentons une sur la convergence de ces interactions répétées quand le temps d'interaction h tend vers 0, traitée dans [12]. Comme dans le cas classique, l'évolution limite sera donnée par une équation différentielle stochastique. Dans la section suivante, nous décrivons les équations obtenues à partir de ces dynamiques particulières.

6.2 Equations différentielles stochastiques quantiques

Nous ne voulons pas ici décrire rigoureusement toute la théorie des équations différentielles stochastiques quantiques (pour une plus grande description [10, 3]) mais juste donner les idées principales sans rentrer dans les détails.

Nous avons vu dans la section précédente que les opérateurs unitaires importants dans le schéma d'interactions répétées sont les V_n qui évoluent selon

$$V_{n+1} = \sum_{i,j} U_j^i V_n a_j^i(n+1) \,,$$

équation pouvant être réécrite de la manière suivante

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{i,j} (U_j^i - \delta_{ij}) V_n a_j^i(n+1)\,.$$

Une équation différentielle stochastique quantique est par analogie une équation en temps continu de la forme

$$dV_t = \sum_{i,j} L_j^i V_t da_j^i(t)\,.$$

Comme expliqué précédemment, nous n'allons pas donner un sens mathématique aux $da_j^i(t)$, ni même à l'espace sur lequel ils agissent, mais juste en présenter quelques intuitions.

La première étape est de décrire l'environnement continu. Dans le schéma d'interactions répétées, l'environnement est représenté par le produit tensoriel dénombrable

$$T\Phi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{K}_n\,.$$

Une extension continue serait dans ce cas un produit tensoriel sur $\mathbb{R}^+$,

$$\bigotimes_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{K}_t\,,$$

où les $\mathcal{K}_t = \mathcal{K} = \mathbb{C}^{N+1}$ par la suite. Cependant, ce produit non dénombrable n'a pas de sens mathématique. Pour cette raison, l'idée est de trouver un espace qui joue le rôle de ce produit non dénombrable : l'*espace de Fock* $\Phi = \Gamma(L^2(\mathbb{R}^+, \mathcal{K}))$. Nous n'allons pas le décrire mais il faut garder à l'esprit que cet espace peut être vu comme $\bigotimes_{t\in\mathbb{R}^+} \mathcal{K}_t$. Sur cet espace, il existe une base continue d'opérateurs $\{da_j^i(t)\ |i,j = 0,\ldots,N, t \in \mathbb{R}^+\}$ telle que pour tout t de $\mathbb{R}^+$, l'opérateur $da_j^i(t)$ agit sur K_t de la même manière que les $a_j^i(n)$ sur chaque $\mathcal{K}_n$ et l'identité sur les autres copies. Dans cette base, un élément est particulier, $da_0^0(t)$ qui est l'élément habituel « dt ».

Une fois cet environnement continu trouvé, comme dans le cas classique, les dynamiques discrètes et continues n'agissent pas sur les mêmes espaces. Il faut donc essayer d'injecter en particulier l'espace $T\Phi$ dans l'espace Φ. Ceci peut être réalisé en « découpant » le produit tensoriel continu en intervalle de longueur h. En renormalisant de manière adéquate les bruits, une identification naturelle entre ces espaces peut être faite.

En résumé, dans le cas d'un système ouvert (système + environnement) représenté par $\mathcal{H} \otimes \Phi$, l'équation donnant l'évolution des unitaires $V_{n+1} = \sum_{i,j} U_j^i V_n a_j^i(n+1)$ possède son équivalent continu donné par l'équation différentielle stochastique quantique,

$$dV_t = \sum_{i,j=0}^{N} L_j^i V_t da_j^i(t)\,,$$

avec L_j^i des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$ et les opérateurs $da_j^i(t)$, les bruits quantiques continus.

Comme pour le discret, les bruits classiques comme le mouvement brownien ou le processus de Poisson peuvent être retrouvés dans ce formalisme quantique (voir [13]).

Nous nous intéressons maintenant à des questions importantes à propos de ces équations différentielles stochastiques quantiques que sont l'existence et l'unicité de la solution ainsi que le caractère unitaire de la solution au cours du temps qui est déterminant dans la description de l'évolution d'un système quantique. Le théorème suivant donne un critère général qui sera suffisant dans la suite.

Théorème 6.2.1. *Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable et si les opérateurs L^i_j sont bornés sur $\mathcal{H}$ alors l'équation*

$$dV_t = \sum_{i,j=0}^{N} L^i_j V_t da^i_j(t)$$

possède une unique solution.

De plus, si les coefficients vérifient

$$\begin{aligned}
L^0_0 &= -(iH + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} L^*_k L_k) \\
L^0_j &= L_j \\
L^i_0 &= -\sum_{k=1}^{N} L^*_k S^k_i \\
L^i_j &= S^i_j - \delta_{ij} I
\end{aligned}$$

où H est opérateur auto-adjoint, les L_i sont des opérateurs sur $\mathcal{H}$ et les S^i_j dont des opérateurs tels que $(S^i_j)_{i,j=1,\dots,N}$ soit unitaire, alors la solution est une famille d'opérateurs unitaires.

Maintenant que nous avons présenté ce cadre général des équations différentielles stochastiques quantiques, nous donnons un résultat de convergence des interactions répétées prouvé dans [12] pour un certain type d'opérateurs hamiltoniens.

Considérons le cas d'un schéma d'interactions répétées dont l'interaction entre le petit système et une partie de l'environnement est donnée par l'hamiltonien suivant sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

$$H = H_{\mathcal{H}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{K}} + \sum_{i=1}^{N} V_i \otimes a^0_i + V^*_i \otimes a^i_0 + \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} \otimes a^i_j$$

où les V_i et les D_{ij} sont des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$, $H_{\mathcal{H}}$ et $H_{\mathcal{K}}$ des opérateurs hermitiens donnant les évolutions sans interaction des deux systèmes et où les D_{ij} satisfont aussi les relations $D^*_{ij} = D_{ji}$.

Ce type d'opérateurs hamiltoniens regroupe beaucoup de systèmes physiques comme l'émission spontanée de photons que nous étudierons dans un cas particulier dans [5].

Comme dans le cas classique, dans la limite en temps continu quand le temps d'interaction h tend vers 0, les bruits sur l'environnement doivent être amplifiés. L'hamiltonien est alors renormalisé de la manière suivante

$$H = H_{\mathcal{H}} \otimes I + I \otimes H_{\mathcal{K}} + \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i=1}^{N} V_i \otimes a_i^0 + V_i^* \otimes a_0^i + \frac{1}{h} \sum_{i,j=1}^{N} D_{ij} \otimes a_j^i \,.$$

Ces renormalisations différentes en $1/h$ et $1/\sqrt{h}$ peuvent être interprétées comme une renormalisation en $1/\sqrt{h}$ des a_j^0 et des a_0^j. Comme nous avons la relation $a_j^i = a_j^0 a_0^i$, ces bruits sont donc eux multipliés par $1/h$ et non $1/\sqrt{h}$.

Afin de noter de manière concise les résultats, nous introduisons les notations suivantes. Notons par D la matrice de taille $N \times N$ dont les coefficients sont les $(D_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ et par V le vecteur suivant

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} .$$

Intéressons nous maintenant à l'évolution du système total. Celle-ci est donnée par une interaction entre le petit système et une partie de l'environnement durant un temps h gouvernée par l'unitaire U relatif à l'hamiltonien H, c'est-à-dire $U = e^{-ihH}$.

Dans le schéma d'interactions répétées, le système total évolue selon est les unitaires V_n satisfaisant

$$V_{n+1} = U_{n+1} V_n \,,$$

avec $V_0 = I$ et U_n les dilatations naturelles de U à Φ .

Dans [12], Attal et Pautrat montrent le résultat suivant donnant la limite des ces unitaires quand h tend vers 0.

Théorème 6.2.2. *La solution $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathcal{H} \otimes \Phi$ converge fortement quand h tend vers 0 vers la solution de l'équation différentielle stochastique quantique*

$$dV_t = \sum_{i,j=0}^{N} L_j^i V_t da_j^i(t)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0^0 &= -(iK + \frac{1}{2} W^* W) \\ L_{\cdot}^0 &= W \\ L_0^{\cdot} &= -W^* S \\ L_{\cdot}^{\cdot} &= S - I \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} K &= H_{\mathcal{H}} + \langle \Omega \,,\, H_{\mathcal{K}} \Omega \rangle I + V^* D^{-2} (\sin D - D) V \\ W &= D^{-1} (e^{-iD} - I) V \\ S &= e^{-iD} \,. \end{aligned}$$

Chapitre 7

Marches obtuses réelles

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les bruits quantiques, les a_j^i en temps discret ou les $da_j^i(t)$ en temps continu. A plusieurs reprises, il a été mentionné que certaines combinaisons de ces bruits quantiques permettaient de retrouver les bruits classiques comme les variables de Bernoulli, les variables normales ou d'autres processus classiques. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats existants sur les variables obtuses réelles et notamment ceux donnant des premiers liens entre les bruits quantiques et classiques développés dans [6, 13] à travers certains 3-tenseurs appelés *doublement symétriques*.

7.1 Variable obtuse réelle

Les variables obtuses réelles sont introduites par Attal et Emery (voir [7]) dans le contexte des martingales normales. Ce sont des variables aléatoires à support fini prenant des valeurs parmi un système particulier de vecteurs.

Définition 7.1.1. *Un système obtus de $\mathbb{R}^N$ est une famille de $N+1$ vecteurs $v_0, \dots, v_N$ tels que*

$$\langle v_i \, , \, v_j \rangle = -1$$

pour tout $i \neq j$.

Une variable obtuse réelle de $\mathbb{R}^N$ est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un système obtus de $\mathbb{R}^N$. Plus précisément, elle prend $N+1$ valeurs, données par des $v_0, \dots, v_N$ formant un système obtus avec probabilité $p_0, \dots, p_N$.

Montrons maintenant que ces variables obtuses sont caractéristiques dans la théorie des probabilités. Considérons une variable aléatoire X, prenant $N+1$ valeurs non nulles $v_0, \dots, v_N$ avec probabilité $p_0, \dots, p_N$. Notons par $X^1, \dots, X^N$ les coordonnées de X dans $\mathbb{R}^N$. La variable X est dite *centrée* si sa moyenne est nulle, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[X^i] = 0 \, ,$$

pour tout i, et dite *réduite* si sa matrice de covariance est I, c'est-à-dire

$$\mathrm{cov}(X^i, X^j) = \mathbb{E}[X^i\, X^j] - \mathbb{E}[X^i]\, \mathbb{E}[X^j] = \delta_{i,j}\,,$$

pour tout $i, j = 1, \dots N$.

Cette variable aléatoire X peut être réalisée sur son espace canonique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{0, \dots, N\}$, $\mathcal{F}$ est la σ-algèbre des parties de Ω et la mesure $\mathbb{P}$ est donnée par $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$. Sur cet espace, la variable X est définie par $X(i) = v_i$. Si nous notons les coordonnées de v_i par v_i^k pour tout $k = 1, \dots, N$, nous avons alors $X^k(i) = v_i^k$.

Pour un vecteur v de $\mathbb{R}^N$, nous définissons le vecteur $\widehat{v}$ de $\mathbb{R}^{N+1}$ par

$$\widehat{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}.$$

Remarquons que cette injection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$ envoie un système obtus sur un système orthogonal.

Définissons aussi la variable déterministe X^0 sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ toujours égale à 1 et la variable $\widetilde{X}^i$ par

$$\widetilde{X}^i(j) = \sqrt{p_j}\, X^i(j)$$

pour tout $i = 0, \dots, N$ et tout $j \in \Omega$ qui est une renormalisation de la variable X^i. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 7.1.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) X est centrée et réduite.

2)La matrice $\left(\widetilde{X}^i(j)\right)_{i,j}$ de taille $(N+1) \times (N+1)$ est orthogonale.

3)La matrice $\left(\sqrt{p_i}\, \widehat{v}_i^j\right)_{i,j}$ de taille $(N+1) \times (N+1)$ est orthogonale.

4) La famille $\{v_0, \dots, v_N\}$ est un système obtus et

$$p_i = \frac{1}{1 + \|v_i\|^2}\,,$$

pour tout i de Ω.

Ce résultat montre qu'une variable centrée et réduite de $\mathbb{R}^N$ prenant $N+1$ valeurs à ses valeurs dans un système obtus. De plus, les probabilités sont directement reliées aux vecteurs de cet ensemble.

7.2 Lien avec les 3-tenseurs doublement symétriques

Nous relions maintenant les variables obtuses réelles à des 3-tenseurs qui possèdent certaines symétries.

Définition 7.2.1. *Un 3-tenseur réel est une collection $(T_k^{ij})_{ijk}$ de coefficients réels indexés par 3 indices.*

Remarquons qu'une famille de coefficients $(T_k^{ij})_{i,j,k=1,\dots,N}$ peut être vue comme une application de $\mathbb{R}^N$ dans $M_N(\mathbb{R})$ de la manière suivante

$$(T(x))^{ij} = \sum_{k=1}^{N} T_k^{ij} x^k \,,$$

mais aussi comme une application de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ par

$$T(x,y,z) = \sum_{i,j,k=1}^{N} T_k^{ij} x^i y^j z^k \,.$$

Associons un 3-tenseur à une variable obtuse de la manière suivante. Commençons par remarquer que la famille $\{X^0, \dots, X^N\}$ forme une base de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (proposition précédente). Donc comme, pour tout i, j, le produit $X^i X^j$ appartient aussi à $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, il peut être décomposé sur la base. Il existe donc des coefficients réels $(T_k^{ij})_{ijk}$ tels que

$$X^i X^j = \sum_{k=0}^{N} T_k^{ij} X^k \,.$$

La famille de tous ces coefficients forment un 3-tenseur $(T_k^{ij})_{ijk}$ lié à la variable X. Remarquons qu'à partir d'une variable de $\mathbb{R}^N$, nous avons défini un 3-tenseur dont les indices vont de 0 à N. Par définition de ce 3-tenseur, certaines symétries sur les indices peuvent être déduites.

Proposition 7.2.2. *Si X est une variable obtuse réelle, alors le 3-tenseur associé à X possède les propriétés suivantes :*

- $T_0^{ij} = \delta_{ij}$
- $(i,j,k) \mapsto T_k^{ij}$ *est symétrique*
- $(i,j,l,m) \mapsto \sum_k T_k^{ij} T_k^{lm}$ *est symétrique*

Un 3-tenseur satisfaisant ces symétries est appelé *doublement symétrique.*

Ainsi, à partir d'une variable obtuse, nous avons un 3-tenseur doublement symétrique. En réalité, nous avons un peu plus, il existe une bijection entre les 3-tenseurs doublement symétriques et les systèmes obtus.

Théorème 7.2.3.
Les formules

$$S = \left\{ v \in \mathbb{R}^N \,;\; T(\widehat{v}) = |\widehat{v}\rangle\langle\widehat{v}| \right\} \,,$$

et

$$T(x) = \sum_{v \in S} \frac{1}{1 + \|v\|^2} \, \langle \widehat{v} \,,\, x \rangle \, |\widehat{v}\rangle\langle\widehat{v}| \,,$$

établissent une bijection entre l'ensemble des 3-tenseurs doublement symétriques et l'ensemble des systèmes obtus.

Ce résultat a été démontré en premier par Attal et Emery dans [7]. Disons juste quelques mots à propos de la preuve. L'écriture du 3-tenseur à partir du système obtus est rapide en revenant à la définition du 3-tenseur. Par contre, l'association d'un système obtus à partir d'un 3-tenseur doublement symétrique est un peu plus compliquée. A cette fin, considérons la famille des matrices

$$\{(T_k^{ij})_{ik} \mid j = 0, \dots, N\}\,.$$

Grâce aux symétries du 3-tenseur, cet ensemble est une famille de matrices symétriques réelles qui commutent 2 à 2. La diagonalisation simultanée de ces matrices permet alors d'obtenir une famille de vecteurs orthonormaux relatifs à un système obtus. Nous verrons dans [4] qu'à ce point l'extension aux complexes est beaucoup plus difficile.

7.3 Lien avec certaines actions quantiques

Justifions maintenant l'introduction de ces 3-tenseurs doublement symétriques en montrant comment ils apparaissent naturellement dans le monde quantique.

Considérons les pas d'une marche aléatoire $X(k)$ indépendants et identiquement distribués de loi donnée par une variable obtuse réelle sur l'espace $(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}})$.

Montrons qu'il existe un isomorphisme naturel entre $L^2(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}})$ et l'espace $T\Phi$ des interactions répétées. Rappelons que sur $T\Phi$, nous avons défini la base

$$\{X_A; A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*\times\{1,\dots,N\}}\}\,,$$

où $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*\times\{1,\dots,N\}}$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^* \times \{1, \dots, N\}$ et l'élément X_A avec $A = \{(n_1, i_1), \dots, (n_k, i_k)\}$ est

$$\Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes e_{i_1} \otimes \Omega \otimes \dots \otimes \Omega \otimes e_{i_2} \otimes \dots\,.$$

Sur $L^2(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}})$, pour toute partie A de $\mathcal{P}_{\mathbb{N}^*\times\{1,\dots,N\}}$, nous définissons la variable aléatoire

$$Y_A = \prod_{(k,i)\in A} X^i(k)\,,$$

avec par convention $X_\emptyset = 1$. L'ensemble $\{Y_A; A \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}^*\times\{1,\dots,N\}}\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}})$. De cette manière, un isomorphisme naturel F entre $L^2(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}})$ et $T\Phi$ est défini envoyant canoniquement une base sur l'autre.

Maintenant, nous avons le théorème suivant prouvé dans [13] par Attal et Pautrat.

Théorème 7.3.1. *Soient X une variable obtuse réelle, $(X(k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ et T respectivement les pas d'une marche aléatoire et le 3-tenseur doublement symétrique associés à X.*

Alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et tout i de $\{1, \dots, N\}$, l'opérateur de multiplication $\mathcal{M}_{X^i(k)}$ a pour image par l'isomorphisme F l'opérateur

$$F\mathcal{M}_{X^i(k)}F^* = a_i^0(k) + a_0^i(k) + \sum_{j,l=1}^{N} T_i^{jl} a_l^j(k)\,.$$

De manière générale, une variable aléatoire classique est injectée dans le monde quantique via son opérateur de multiplication sur un espace L^2 car cela permet notamment de retrouver avec elle toutes ses propriétés probabilistes. Ce qui est intéressant ici, c'est que nous pouvons identifier certains bruits quantiques (combinaisons des opérateurs a^i_j) qui en réalité représentent un bruit classique. Cette caractérisation se fait à partir de la décomposition de l'opérateur de multiplication sur la base des $a^i_j(k)$ qui défini un 3-tenseur. Ce théorème nous dit que si un opérateur donne un 3-tenseur doublement symétrique, alors il s'agit d'un opérateur de multiplication par une variable obtuse et représente donc un bruit classique.

Exemple 7.3.2. Donnons l'exemple d'une marche de Bernoulli de paramètre p et $q = 1-p$. L'opérateur associé est

$$a^0_1 + a^1_0 + \frac{q-p}{\sqrt{qp}} a^1_1 \,.$$

La limite en temps continu de ces opérateurs a été en partie étudiée par Attal et Pautrat dans [13] où nous retrouvons des processus markoviens classiques, comme le mouvement brownien représenté par exemple par $a^0_1(t) + a^1_0(t)$ ou le processus de Poisson compensé $a^0_1(t) + a^1_0(t) + a^1_1(t)$. En dimension supérieure, des processus plus exotiques peuvent apparaître comme des mouvements browniens sur certaines composantes et des processus de Poisson sur d'autres.

Chapitre 8

Aperçu des résultats

Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus sur les systèmes ouverts quantiques. Ces travaux, en collaboration avec Attal et Pellegrini, ont abouti aux articles [4, 5] des chapitres 9 et 10.

Le premier travail concerne l'étude de certaines actions classiques d'un environnement quantique sur un système quantique. Nous montrons une forte connexion avec les marches obtuses complexes et les 3-tenseurs doublement symétriques complexes.

Dans le second article, la limite en temps continu d'interactions répétées pour un système biparti montre principalement l'apparition d'une interaction explicite entre deux sous-systèmes qui au départ n'interagissent pas.

8.1 Article 2 : Actions classiques de systèmes quantiques et marches aléatoires obtuses complexes

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que certaines associations de bruits quantiques représentent un bruit classique sur le système. La question qui nous intéresse dans ce travail est la suivante : quelles actions d'un environnement quantique sur un système quantique aboutissent à un bruit classique ?

Dans cet article, nous étudions des actions quantiques d'un environnement $\mathcal{K}$ sur un système quantique $\mathcal{H}$ dont l'interaction est de la forme

$$U = \sum_{i=0}^{N} U_i \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \,,$$

avec U_i des opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$ et la famille des $(f_i)_{i=0,\dots,N}$ forme une base othonormée de $\mathcal{K}$. Ces opérateurs unitaires semblent être caractéristiques des actions classiques d'un environnement quantique sur un système quantique.

Regardons l'action de ce type d'unitaire sur le système. Considérons un état ρ du petit système et un état ω de l'environnement. Après l'interaction, l'état du petit système est

donné par

$$\mathcal{L}(\rho) = Tr_{\mathcal{K}}\,(U(\rho \otimes \omega)U^*) = \sum_i \langle f_i|\,\omega\,|f_i\rangle\, U_i\,\rho\, U_i^*\,.$$

Remarquons que cet état est exactement celui obtenu après l'action d'un opérateur unitaire aléatoire sur $\mathcal{H}$ prenant les valeurs U_i avec les probabilités $\langle f_i|\,\omega\,|f_i\rangle$. Pour cette raison, ces opérateurs sont appelés *unitaires classiques*. Dans la suite, nous montrons qu'ils sont directement liés à une extension complexe des variables obtuses.

8.1.1 Variables obtuses complexes

Présentons la généralisation des résultats du chapitre précédent aux complexes. Nous verrons que cette extension n'est pas aussi évidente qu'elle pourrait sembler être.

Définition 8.1.1. *Un système obtus de $\mathbb{C}^N$ est une famille de $N+1$ vecteurs $v_0, \ldots, v_N$ tels que*

$$\langle v_i\,,\, v_j\rangle = -1$$

pour tout $i \neq j$.

Comme dans le cas réel, nous montrons qu'une variable aléatoire centrée réduite prenant $N+1$ valeurs non nulles dans $\mathbb{C}^N$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[X^i] = 0$$

et

$$\mathrm{cov}(X^i, X^j) = \mathbb{E}[\overline{X^i}\,X^j] - \mathbb{E}[\overline{X^i}]\,\mathbb{E}[X^j] = \delta_{i,j}\,,$$

pour tout $i, j = 1, \ldots N$, prend ses valeurs obligatoirement dans un système obtus avec les probabilités données par $1/(1+\|v_i\|^2)$. Ces probabilités forment en réalité une loi naturelle associée à un système obtus. Nous montrons inversement qu'à une transformation unitaire près, il y a unicité de la variable obtuse liée à des probabilités fixées.

De plus, une certaine « minimalité » de ces variables aléatoires est mise en valeur ; minimalité au sens où toute variable centrée réduite (si ce n'est pas le cas une transformation affine permet de se ramener à une variable centrée réduite) à support fini peut être vue comme l'image par une isométrie partielle d'une variable obtuse complexe comme le montre le théorème suivant.

Théorème 8.1.2. *Soit X une variable centrée réduite de $\mathbb{C}^d$, prenant n valeurs différentes $v_1, \ldots, v_n$, avec probabilité $p_1, \ldots, p_n$.*

Alors, nous avons

$$n \geq d+1\,.$$

De plus, si Y est une variable obtuse de $\mathbb{C}^{n-1}$ associée aux probabilités $p_1, \ldots, p_n$, il existe une isométrie partielle A de $\mathbb{C}^{n-1}$ dans $\mathbb{C}^d$ telle que

$$X = AY\,.$$

8.1.2 Lien avec les 3-tenseurs doublement symétriques complexes

De la même manière que dans le cas réel, un 3-tenseur est associé à une variable obtuse complexe. Ce 3-tenseur possède certaines propriétés de symétries sur les indices.

Proposition 8.1.3. *Si X est une variable obtuse complexe, alors le 3-tenseur associé à X possède les propriétés suivantes : pour tout i, j, k et l*

- $T_0^{ij} = \delta_{ij}$
- $T_k^{ij} = T_i^{kj}$
- $\sum_{m=0}^{N} T_m^{ij} \overline{T_l^{mk}} = \sum_{m=0}^{N} T_m^{kj} \overline{T_l^{mi}}$,
- $\sum_{m=0}^{N} T_m^{ij} T_l^{km} = \sum_{m=0}^{N} T_m^{kj} T_l^{im}$.

Un 3-tenseur satisfaisant ces symétries est appelé *doublement symétrique complexe.* Notons le moins grand nombre de symétries entre indices que dans le cas réel. Ceci est la principale difficulté du passage des réels aux complexes. Nous pouvons particulièrement remarquer dans la deuxième propriété que les coefficients ne sont pas symétriques en tous les indices mais uniquement en i et k. C'est exactement la commutation de l'indice j avec les autres qui caractérise les 3-tenseurs doublement symétriques réels et donc les variables obtuses réelles. Plus précisément, si nous considérons une variable obtuse complexe dont le 3-tenseur possède la commutation des indices i et j en plus, alors la variable est réelle. La caractérisation des variables obtuses réelles ne réside donc pas dans le caractère réel des coefficients, car il existe des variables obtuses complexes dont le 3-tenseur associé a tous ses coefficients réels.

Nous montrons aussi dans ce travail que, si nous retirons la première propriété qui n'est due qu'au fait que la première coordonnée X^0 soit toujours égale à 1, les trois autres propriétés sont exactement les propriétés nécessaires et suffisantes pour qu'un 3-tenseur soit diagonalisable dans une base orthonormée. Ces propriétés sont les équivalents à trois indices du fait d'être normale pour une matrice (un 2-tenseur). En effet, nous savons qu'être normale pour une matrice est équivalent à être diagonalisable dans une base orthonormée. Cette propriété est à la base du théorème suivant donnant la bijection entre les systèmes obtus et les 3-tenseurs doublement symétriques.

Théorème 8.1.4. *L'ensemble des 3-tenseurs doublement symétriques est en bijection avec l'ensemble des systèmes obtus complexes.*

Pour la preuve de ce théorème, la grande difficulté dans le cas complexe est de trouver le système obtus associé à un 3-tenseur doublement symétrique donné. Rappelons que dans le cas réel, nous nous servons du fait que la famille

$$\{(T_k^{ij})_{ik} \mid j = 0, \ldots, N\}$$

est une famille commutante de matrices symétriques réelles et donc diagonalisable simultanément. Dans le cas complexe, cette famille n'est plus commutante et surtout les matrices

sont symétriques complexes (et pas hermitiennes) donc pas nécessairement diagonalisables. Pour contourner ce problème, nous utilisons le résultat de factorisation suivant applicable pour cette famille de matrices.

Théorème 8.1.5 (Factorisation simultanée de Takagi)**.** *Soit $\mathcal{F} = \{A_i\,;\ i \in \mathcal{J}\}$ une famille de matrices symétriques complexes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{G} = \left\{\overline{A_i}\,A_j\,;\ i,j \in \mathcal{J}\right\}$. Il existe une matrice unitaire telle que, pour tout i, la matrice UA_iU^T soit diagonale si et seulement si la famille $\mathcal{G}$ est commutante.*

A partir de cette matrice unitaire U, la base orthonormée diagonalisant le 3-tenseur, et donc le système obtus, est obtenue.

Maintenant, une question naturelle se pose. Si nous avons en réalité un 3-tenseur doublement symétrique réel (sans l'avoir encore remarqué), nous faisons une factorisation de Takagi simultanée afin d'obtenir un système obtus. Même si les matrices sont réelles, cette factorisation donne des matrices diagonales complexes et une matrice unitaire. Une question est alors : peut-on retrouver, à partir de la factorisation Takagi, la diagonalisation simultantée ? Ce point n'étant pas traité dans l'article [4], nous le développons en détail ici.

Proposition 8.1.6. *Considérons une famille de matrices réelles symétriques $\{A_i\}$ dont la factorisation simultanée de Takagi donne une matrice unitaire U et des matrices diagonales D_i telles que*

$$A_i = UD_i\overline{U}^{-1}\,.$$

Alors, à partir de cette décomposition, nous retrouvons la diagonalisation simultanée des A_i, c'est-à-dire une matrice orthogonale O et des matrices diagonales réelles $\widetilde{D}_i$ telles que

$$A_i = O\widetilde{D}_iO^{-1}\,.$$

Démonstration. Rappelons, tout d'abord, que les matrices diagonales D_i dans la factorisation de Takagi ne sont pas nécessairement réelles. Néanmoins, en multipliant la matrice U par une matrice diagonale composée de phases appropriées, nous pouvons supposer que la matrice D_1 est positive réelle. Notons que ceci n'affecte pas la factorisation simultanée de Takagi. Uniquement les coefficients de U et des D_i sont modifiés, tout en gardant le caractère unitaire ou diagonal des matrices. A cette étape, les matrices D_i pour $i \geq 2$ peuvent être complexes.

Concentrons nous sur la matrice A_1. Soit λ une valeur propre réelle de D_1 et $u = a+ib$ un vecteur associé de U. La factorisation de Takagi nous donne

$$A_1\overline{u} = \lambda u\,.$$

Le scalaire λ étant réel, nous avons $Aa = \lambda a$ et $Ab = -\lambda b$. Les vecteurs a et b sont des vecteurs propres de A_1 pour les valeurs propres λ et $-\lambda$.

Maintenant, nous obtenons trois cas. Premièrement, supposons que si μ est une valeur propre de A_1 alors $-\mu$ ne l'est pas (en particulier 0 ne l'est pas). Alors la matrice U est faite

de vecteur de la forme a ou ib, avec a et b réels. Plus précisément, un vecteur est de la forme a si la valeur propre est positive et ib si la valeur propre est négative. Considérant la matrice O composée des vecteurs a et b, nous obtenons une matrice orthogonale diagonalisant la matrice A_1. Nous passons alors de U à O en multipliant U par une matrice diagonale dont les coefficients sont 1 s'il correspond à un vecteur a ou i s'il correspond à un vecteur de la forme ib. En notant D cette matrice diagonale, nous avons pour les autres matrices A_i,

$$A_i = UD_i\overline{U}^{-1} = ODD_i\overline{D}^{-1}O^{-1}\,.$$

Comme les A_i et O sont réelles, alors les matrices $DD_i\overline{D}^{-1}$ composées des valeurs propres des A_i le sont aussi. Le résultat s'en suit.

Considérons maintenant le cas où λ et $-\lambda$ sont des valeurs propres de A_1 mais $\lambda \neq 0$. Dans ce cas, nous avons simultanément $a \neq 0$ et $b \neq 0$. A partir de l'orthogonalité des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes pour une matrice symétrique réelle, nous avons $\langle a, b\rangle = 0$. Ainsi en considérant $(A_1)^2 = A_1A_1^* = UD_1^2U^*$, nous obtenons

$$Ker(A_1 - \lambda I) \oplus Ker(A_1 + \lambda I) = Ker((A_1)^2 - \lambda^2 I) = Span\{a_i\} \oplus Span\{b_i\}\,,$$

où les sommes directes sont orthogonales. En particulier, les parties réelles et imaginaires des vecteurs de U donnent les vecteurs propres de A_1. Prenons maintenant un vecteur $a + ib$ de A_2, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, tel que $A_1(a - ib) = \lambda(a + ib)$, $A_2(a - ib) = \mu(a + ib)$ où $\langle a, b\rangle = 0$ et μ complexe. Ensuite, nous avons

$$A_2a = Re(\mu)a - Im(\mu)b \text{ et } A_2b = -Re(\mu)b - Im(\mu)a.$$

Comme A_2 commute avec A_1, nous avons $A_2a \in Span\{a_i\}$. Donc, nous obtenons aussi $\langle A_2b, b\rangle = 0$ car $\langle Span\{a_i\}, b\rangle = 0$. Par conséquent, cela nous donne

$$A_2a = Re(\mu)a \text{ et } A_2b = -Re(\mu)b$$

et μ réel. Il apparaît alors que les $\{a_i\}$ et les $\{b_i\}$ sont des vecteurs propres de A_2, et avec la même preuve pour les autres A_i. En distinguant après les différentes valeurs propres de A_2, nous pouvons décomposer chaque $Span\{a_i\}$ de la manière suivante,

$$Span\{a_i\} = \bigoplus Span\{a_{ij}\}\,,$$

où les sommes sont directes. La conséquence est que chaque partie de la somme directe précédente correspond à une seule valeur propre de A_1 et de A_2.

Par induction, nous trouvons une décomposition similaire

$$Span\{a_i\} = \bigoplus Span\{a_{ij}\}$$

telle que $Span\{a_{ij}\}$ correspond à une seule valeur propre pour chaque A_i. De la même manière, nous avons aussi une décomposition

$$Span\{b_i\} = \bigoplus Span\{b_{ij}\}$$

avec la même propriété.

Maintenant sur chaque $Span\{a_{ij}\}$ ou $Span\{b_{ij}\}$, nous pouvons extraire une famille orthogonale diagonalisant chaque A_i. Le résultat s'en suit.

Le dernier cas est le cas où 0 est valeur propre de A_1. Dans ce cas, nous avons,

$$Ker(A_1) = Span\{a_i, b_i\}\,.$$

Comme $Ker(A_1)$ est stable par A_2,

$$Ker(A_1) = (Ker(A_2) \cap Ker(A_1)) \oplus E$$

où l'espace E regroupe les sous-espaces de valeurs propres non-nulles pour A_2 mais 0 pour A_1. Comme décrit précédemment, l'espace E est une somme directe de $Span\{a_i\}$ et $Span\{b_i\}$. Nous obtenons alors la décomposition

$$Ker(A_1) = (Ker(A_2) \cap Ker(A_1)) \oplus \bigoplus Span\{a_i\} \oplus \bigoplus Span\{b_i\}\,.$$

Par induction, en appliquant la même procédure pour les autres matrices A_i, nous avons

$$Ker(A_1) = Span\{a_i^0, b_i^0\} \oplus \bigoplus Span\{a_{ij}\} \oplus \bigoplus Span\{b_{ij}\},$$

où l'espace $Span\{a_i^0, b_i^0\}$ est le sous-espace commun à tous les A_i pour la valeur propre 0.

A partir de cette décomposition, nous pouvons extraire une famille orthogonale qui diagonalise les matrices A_i. □

Nous avons donc étendu aux complexes, les 3-tenseurs doublement symétriques associés aux variables obtuses complexes.

8.1.3 Unitaires classiques et marches obtuses complexes

Comme dans le cas réel, à partir de l'isomorphisme F entre l'espace $L^2(\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\otimes\mathbb{N}})$, associé à une marche obtuse indépendante et identiquement distribuée, et l'espace $T\Phi$, nous avons le théorème suivant sur l'opérateur de multiplication par les pas d'une marche obtuse.

Théorème 8.1.7. *Soient X une variable obtuse complexe, $(X(p))_{p\in\mathbb{N}^*}$ et T, respectivement les pas d'une marche obtuse et le 3-tenseur doublement symétrique associés à X.*

Alors, pour tout p de $\mathbb{N}$ et tout i de $\{1, \ldots, N\}$, l'opérateur de multiplication $\mathcal{M}_{X^i(p)}$ a pour image par l'isomorphisme F l'opérateur

$$F\,\mathcal{M}_{X^i(p)}\,F^* = \sum_{j,k=0}^{N} \overline{T_k^{ij}}\, a_k^j(p)\,.$$

Le principal but de l'extension au complexe des marches obtuses réside dans le théorème suivant donnant la décomposition d'un opérateur unitaire classique en terme d'opérateur de multiplication par une variable obtuse complexe.

Théorème 8.1.8. *Soit* $U = \sum_{i=1}^{N+1} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ *un opérateur unitaire sur* $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^{N+1}$ *agissant classiquement sur* $\mathcal{H}$*. Supposons que* $\langle \phi_i \, , \, e_0 \rangle \neq 0$ *pour tout* i*. Alors il existe une variable obtuse sur* $\mathbb{C}^N$*, telle que*

$$U = A \otimes I + \sum_{i=1}^{N} B_i \otimes F \, \mathcal{M}_{X^i} \, F^* \tag{8.1.1}$$

pour certains opérateurs $A, B_1, \ldots, B_N$ *sur* $\mathcal{H}$*.*

Plus précisément, la variable obtuse X *est celle associée à la distribution de probabilité* $\{|\langle e_0 \, , \, \phi_i \rangle|^2 \, , \; i = 1, \ldots, N+1\}$ *et aux valeurs*

$$v_i^j = \frac{\langle e_j \, , \, \phi_i \rangle}{\langle e_0 \, , \, \phi_i \rangle}$$

pour $i = 1, \ldots, N+1$*,* $j = 1, \ldots, N$*. Les opérateurs* A *et* B_i *sont donnés par*

$$A = \sum_{i=0}^{N} p_i U_i$$

et

$$B_i = \sum_{j=0}^{N} p_j \overline{v_j^i} U_j \, .$$

Finalement, nous avons montré qu'une action quantique donnée par un unitaire classique peut être décomposée comme une somme d'opérateurs de multiplication par une variable obtuse complexe.

8.2 Article 3 : Limite du continu pour un système biparti

Dans ce travail, nous étudions la limite du continu d'interactions répétées dans le cas d'un petit système biparti afin d'étudier certaines propriétés d'intrication provoquées par l'environnement.

Le petit système est composé de deux parties distinctes A et B. Il est donc représenté par un espace de Hilbert $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$. De plus, nous supposons que les deux sous-systèmes A et B n'interagissent pas entre eux. Ce petit système interagit avec son environnement suivant le schéma d'interactions répétées. Cependant, contrairement au schéma habituel, nous faisons une hypothèse supplémentaire. Chaque partie de l'environnement interagit avec le sous-système A pendant un temps h, puis l'interaction est arrêtée. Ensuite, cette partie interagit avec le sous-système B pendant aussi un temps h pour après ne plus intervenir. Le schéma habituel aurait été, une seule interaction entre le petit système complet et la partie de l'environnement. Mathématiquement, l'interaction entre le sous-système A et une pièce de l'environnement est donnée par l'hamiltonien sur $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B \otimes \mathcal{H}$

$$H_{tot}^A = H^A \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + H_I^A,$$

tandis que celui entre le sous-système B et l'environnement est

$$H^B_{tot} = I \otimes H^B \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + H^B_I \,,$$

avec

$$H^A_I = \sum_{j=1}^{N} V_j \otimes I \otimes a^0_j + V^*_j \otimes I \otimes a^j_0 \,,$$

et

$$H^B_I = \sum_{j=1}^{N} I \otimes W_j \otimes a^0_j + I \otimes W^*_j \otimes a^j_0 \,,$$

où les V_j sont des opérateurs sur $\mathcal{H}^A_S$ et les W_j sur $\mathcal{H}^B_S$. Notons que H^A_I agit uniquement de manière non triviale sur $\mathcal{H}^A_S$ et $\mathcal{H}$, et H^B_I sur $\mathcal{H}^B_S$ et $\mathcal{H}$.

Dans notre cas, nous choisissons une hamiltonien de l'environnement de la forme

$$H^R = \sum_{j=0}^{N} \gamma_j \, a^j_j = \sum_{j=0}^{N} \gamma_j \, a^0_j a^j_0 \,,$$

où les γ_j sont les valeurs propres de H_R.

Chaque hamiltonien H^A_{tot} ou H^B_{tot} induit une évolution unitaire donnée par

$$\begin{aligned} U^A &= e^{-ihH^A_{tot}} \\ U^B &= e^{-ihH^B_{tot}}. \end{aligned}$$

Comme le sous-système A interagit en premier, suivi du sous-système B, l'unitaire donnant l'interaction entre le système et une partie de l'environnement est donc

$$U = U^B U^A \,.$$

Notons que, habituellement, la dynamique serait la suivante. L'hamiltonien serait de la forme

$$\tilde{H}_{tot} = H^A \otimes I \otimes I + I \otimes H^B \otimes I + I \otimes I \otimes H_R + \tilde{H}_I,$$

avec $\tilde{H}_I$ donnant l'interaction entre $\mathcal{H}_S$ et $\mathcal{H}$, et donc un unitaire

$$\tilde{U} = e^{i2\tau \tilde{H}_{tot}}.$$

La principale différence est dans l'interaction où la non commutation a priori de H^A_I et H^B_I empêche de pouvoir mettre directement U sous la même forme que $\tilde{U}$.

Nous pouvons maintenant étudier de la même manière qu'habituellement dans un schéma d'interactions répétées, l'évolution du système sur $\mathcal{H}^A_S \otimes \mathcal{H}^B_S \bigotimes_k \mathcal{H}$ gouvernée par la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$V_n = U_n U_{n-1} \dots U_1 \,,$$

où U_n sont les dilatations de l'unitaire U sur l'espace $\mathcal{H}^A_S \otimes \mathcal{H}^B_S \bigotimes_k \mathcal{H}$.

Nous obtenons alors l'évolution limite suivante quand le temps d'interaction h tend vers 0.

Théorème 8.2.1. *Quand h tend vers 0, la dynamique continue converge fortement vers l'évolution unitaire, solution de l'équation différentielle stochastique quantique*

$$dU_t = \left[-i(H^A \otimes I + I \otimes H^B + 2\lambda_0 I \otimes I) - \frac{1}{2}\sum_j V_j^* V_j \otimes I + I \otimes W_j^* W_j + 2V_j \otimes W_j^* \right] U_t dt$$
$$- i\sum_{i=1}^{N} (V_j \otimes I + I \otimes W_j) U_t da_j^0(t) + (V_j^* \otimes I + I \otimes W_j^*) U_t da_0^j(t)\,.$$

Remarquons que l'évolution limite peut être aussi mise sous la forme

$$dU_t = L_0^0 U_t dt + \sum_{j=1}^{N} L_0^i da_0^i(t) + L_i^0 da_i^0(t)\,,$$

avec, pour $S_j = V_j \otimes I + I \otimes W_j$, les coefficients suivants

$$L_0^0 = -i\left(H_A \otimes I + I \otimes H_B + 2\lambda_0 I \otimes I + i\frac{1}{2}\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^* \right) - \frac{1}{2}\sum_j S_j^* S_j,$$
$$L_0^j = -iS_j\,, \qquad L_j^0 = -iS_j^*\,,$$

Notons l'apparition du terme

$$1/2 \sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*$$

montrant une action effective de A sur B alors que le modèle discret n'en posséde pas. Ceci étant dû au fait que l'état de la particule de l'environnement qui vient d'agir avec le sous-système A garde une trace de cette interaction qui influence alors l'état de B.

Dans ce travail, nous présentons quelques exemples comme le cas de l'émission spontanée pour un état pur ou thermique sur l'environnement. Nous montrons aussi dans un cas particulier le retour à l'équilibre de ces systèmes, c'est-à-dire la convergence faible asymptotique pour tout état initial vers un état invariant en utilisant des résultats de Fagnola et Rebolledo ([27]).

Nous étudions aussi dans le cas de l'émission spontanée l'évolution de l'intrication de formation entre les deux sous-systèmes en utilisant des résultats de Vogelsberger développés pendant sa thèse [44]. Nous obtenons une évolution caractéristique (représentée sur la figure suivante), croissante jusqu'à un certain point avant de décroître vers 0.

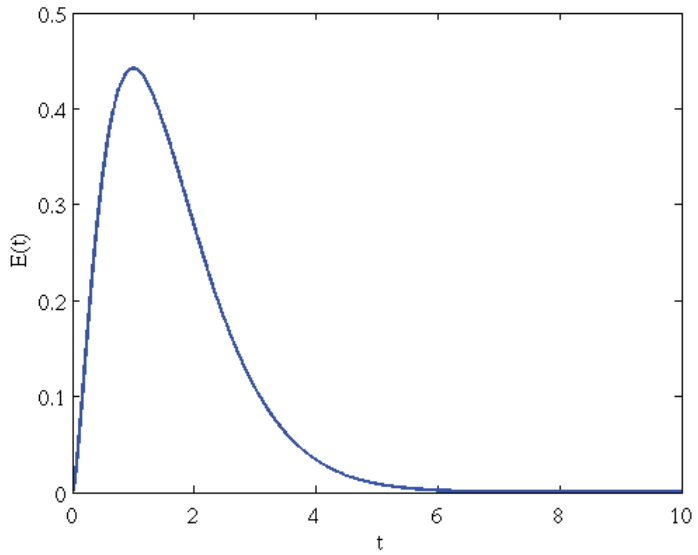

FIGURE 8.1 – **Intrication de formation**

Chapitre 9

Article 2 : Actions classiques de systèmes quantiques et marches aléatoires obtuses complexes

Classical Action of Quantum Baths and Complex Obtuse Random Variables

Stéphane ATTAL, Julien DESCHAMPS, Clément PELLEGRINI

Abstract

We consider the model of a quantum environment acting on a quantum system $\mathcal{H}_S$ via repeated quantum interactions, as defined in [12]. We characterize those actions of the environment which are classical, that is, where the environment acts as a classical noise. We show that this situation is intimately related to a notion of complex obtuse random variables, which extend real obtuse random variables as defined in [7]. We explore the structure of complex obtuse random variables and show that they are characterized by a 3-tensor which admits certain symmetries. We show that these symmetries are the exact 3-tensor analogue of the normal character for 2-tensors (i.e. matrices), that is, a necessary and sufficient condition for being diagonalizable in some orthonormal basis. This associated 3-tensor is the central object for writing the multiplication operator by these random variables. We obtain a representation of the classical unitary actions of the environment in terms of complex obtuse random variables. This allows to describe the interaction with the environment as an explicit random walk in the unitary group $\mathcal{U}(\mathcal{H}_S)$. We give explicit Hamiltonians which give rise to such classical evolutions. We discuss the passage to the continuous-time limit for some cases.

9.1 Introduction

Repeated quantum interaction models are physical models introduced and developed in [12] which consist in describing the Hamiltonian dynamics of a quantum system undergoing a sequence of interactions with an environment made of a chain of identical systems. These models were developed for they furnish toy models for quantum dissipative systems. They are at the same time Hamiltonian and Markovian. They spontaneously give rise to quantum stochastic differential equations in the continuous time limit. It has been proved in [21] and [22] that they constitute a good toy model for a quantum heat bath in some situations and that they can also give an account of the diffusive behavior of an electron in an electric field, when coupled to a heat bath. When adding to each step of the dynamics a measurement of the piece of the environment which has just interacted, we recover all the discrete-time quantum trajectories for quantum systems ([39], [40], [41]). Physically this model corresponds exactly to physical experiments such as the ones performed by S. Haroche et al on the quantum trajectories of a photon in a cavity ([30], [31]).

The discrete-time dynamics of these repeated interaction systems, as well as their continuous-time limit, give rise to time evolutions driven by quantum noises coming from the environment. These quantum noises emerging from the environment describe all the possible actions inside the environment (excitation, return to ground state, jumps in between two energy levels, ...). It is a remarkable fact that these quantum noises can also be combined together in order to give rise to classical noises. That is, in discrete-time they can give rise to any random walk; in continuous-time, they give rise to two cornerstones of stochastic processes: Brownian motion and Poisson processes.

Our aim here is to characterize, among all the possible evolutions driven by repeated quantum interactions, those who are driven by a classical noise. This characterization is carried by the form of the basic unitary interaction in between the small system and one piece of the environment. In this article we concentrate on a large class of those *classical unitary actions* of the environment. We show that they are intimately related to a particular algebraical structure: 3-tensors on $\mathbb{C}^N$ that can be diagonalized in some orthonormal basis, that is, the 3-tensor analogue of normal matrices for the 2-tensors.

We show that these diagonalizable 3-tensors are naturally associated to particular random variables on $\mathbb{C}^N$: the *obtuse random variables*. They are a kind of basis for all the random variables in $\mathbb{C}^N$, in a sense that we shall make precise in this article.

These particular random variables which appear as associated to the classical unitary actions of the environment are those who drive this classical action.

This article is constructed as follows. In Section 10.2 we present the mathematical setup associated to repeated quantum interactions. Section 10.3 is devoted to characterizing those unitary operators on bipartite systems which act classically on one of the two systems. We define there the class of unitary operators on which we will concentrate, for we are not able to characterize all the classical unitary actions.

In Section 10.4 we introduce the notions of *obtuse systems*, of *obtuse random variables* and their associated 3-tensors. We establish the important symmetries shared by these tensors and we show our main result: these symmetries are the necessary and sufficient conditions for the 3-tensor to be diagonalizable in some orthonormal basis.

Coming back to classical unitary actions, in Section 10.5, we show that the diagonalization of 3-tensors gives an explicit representation of the repeated quantum interaction dynamics in terms of obtuse random walks. This representation gives an explicit description of the evolution of the small system as a random walk on its unitary group.

We end in Section 10.6 and 10.7 with a few examples, where we can show up explicit Hamiltonians which give rise to such classical dynamics and also where we can compute their continuous-time limit.

9.2 Repeated Quantum Interactions

Let us describe precisely the physical and the mathematical setup of these models.

We consider a reference quantum system with state space $\mathcal{H}_S$, which we shall call the *small system* (even if it is infinite dimensional!). Another system $\mathcal{H}_E$, called the

environment is made up of a chain of identical copies of a quantum system $\mathcal{K}$, that is,

$$\mathcal{H}_E = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{K}$$

where the countable tensor product is understood in a sense that we shall make precise later.

The dynamics in between $\mathcal{H}_S$ and $\mathcal{H}_E$ is obtained as follows. The small system $\mathcal{H}_S$ interacts with the first copy $\mathcal{K}$ of the chain during an interval $[0, h]$ of time and following some Hamiltonian H_{tot} on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$. That is, the two systems evolve together following the unitary operator

$$U = e^{-ihH_{\text{tot}}} .$$

After this first interaction, the small system $\mathcal{H}_S$ stops interacting with the first copy and starts an interaction with the second copy which was left unchanged until then. This second interaction follows the same unitary operator U. And so on, the small system $\mathcal{H}_0$ interacts repeatedly with the elements of the chain one after the other, following the same unitary evolution U. Note that with our assumptions, the unitary operator U can be any unitary operator on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$.

Let us now give a mathematical setup to this repeated quantum interaction model.

Let $\mathcal{H}_S$ be a separable Hilbert space and $\mathcal{K}$ be a finite dimensional Hilbert space. We choose a fixed orthonormal basis of $\mathcal{K}$ of the form $\{X^i; i \in \mathcal{N} \cup \{0\}\}$ where $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$, that is, the dimension of $\mathcal{K}$ is $N + 1$ (note the particular role played by the vector X^0 in our notation). We consider the Hilbert space

$$T\Phi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{K}$$

where this countable tensor product is understood with respect to the stabilizing sequence $(X^0)_{n\in\mathbb{N}^*}$. This is to say that, denoting by X_n^i the vector corresponding to X^i in the n-th copy of $\mathcal{K}$, an orthonormal basis of $T\Phi$ is made of the vectors

$$X_\sigma = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} X_n^{i_n}$$

where $\sigma = (i_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ runs over the set $\mathcal{P}$ of all sequences in $\mathcal{N} \cup \{0\}$ with only a finite number of terms different from 0.

Let U be a fixed unitary operator on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$. We denote by U_n the natural ampliation of U to $\mathcal{H}_S \otimes T\Phi$ where U_n acts as U on the tensor product of $\mathcal{H}_S$ and the n-th copy of $\mathcal{K}$ and U act as the identity of the other copies of $\mathcal{K}$. In our physical model, the operator U_n is the unitary operator expressing the result of the n-th interaction. We also define

$$V_n = U_n U_{n-1} \ldots U_1,$$

with the convention $V_0 = I$. The operator V_n is clearly the unitary operator expressing the transformation of the whole system after the n first interactions.

Define the elementary operators a^i_j, $i, j \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ on $\mathcal{K}$ by

$$a^i_j \, X^k = \delta_{i,k} \, X^j \, .$$

We denote by $a^i_j(n)$ their natural ampliation to $T\Phi$ acting on the n-th copy of $\mathcal{K}$ only, that is, if $\sigma = (i_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$a^i_j(n) \, X_\sigma = \delta_{i,i_n} \, X_{\sigma \setminus \{i_n\} \cup \{j\}} \, ,$$

where we denote by $\sigma \setminus \{i_n\} \cup \{j\}$ the same sequence as σ but where the n-th term i_n has been replaced by j.

Clearly, U can always be written as

$$U = \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \otimes a^i_j$$

for some bounded operators U^i_j on $\mathcal{H}_S$. The unitarity of U is then equivalent to the relations

$$\sum_{k \in \mathcal{N} \cup \{0\}} (U^k_i)^* \, U^k_j = \sum_{k \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^k_j \, (U^k_i)^* = \delta_{i,j} \, I \, .$$

With this representation for U it is clear that the operator U_n, representing the n-th interaction, is given by

$$U_n = \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \otimes a^i_j(n) \, .$$

With these notations, the sequence (V_n) of unitary operators describing the n first repeated interactions can be represented as follows:

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} \, V_n \\ &= \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \otimes a^i_j(n+1) V_n \, . \end{aligned}$$

But, inductively, the operator V_n acts only on the n first sites of the chain $T\Phi$, whereas the operators $a^i_j(n+1)$ act on the $(n+1)$-th site only. Hence they commute. In the following, we shall drop the $\otimes$ symbols, identifying operators like $a^i_j(n+1)$ with $I_{\mathcal{H}_S} \otimes a^i_j(n+1)$, identifying U^i_j with $U^i_j \otimes I_{T\Phi}$. This gives finally

$$\boxed{V_{n+1} = \sum_{i,j \in \mathcal{N} \cup \{0\}} U^i_j \, V_n \, a^i_j(n+1) \, .} \tag{9.2.1}$$

This equation is the one which describes completely the evolution of the whole system. One can notice its particular form, where the step between V_n and the new V_{n+1} is described by a basis of all the possible transformations coming from the environment, namely the $a^i_j(n+1)$ associated to corresponding effect, namely U^i_j, on the small system $\mathcal{H}_S$.

9.3 Classical Actions of Quantum Environments

For a moment we leave repeated quantum interaction models in order to concentrate on those unitary operators on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$ which correspond to a classical action of the environment, that is, an action as a random unitary operator on $\mathcal{H}_S$.

9.3.1 Statistical Interpretation of Density Matrices

In the quantum mechanics of open systems the states are *density matrices*, that is, positive, trace-class operators, with trace equal to 1. There are two ways to understand these density matrices, two *interpretations*.

First of all, the open quantum system point of view: the density matrices are what you see from a quantum system which is coupled to some environment, the whole coupled system being in a pure state.

Theorem 9.3.1. *Let ρ be an operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$. The following assertions are equivalent.*

i) There exist a Hilbert space $\mathcal{K}$ and a unit vector Ψ in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ such that $\rho = Tr_{\mathcal{K}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$.

ii) The operator $\rho_{\mathcal{H}}$ is positive, trace-class and $Tr\rho_{\mathcal{H}} = 1$.

Density matrices can always be decomposed as

$$\rho = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \, |e_n\rangle\langle e_n| \tag{9.3.1}$$

for some orthonormal basis e of eigenvectors and some positive eigenvalues λ_n satisfying $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1$.

The density matrices represent the generalization of the notion of wave function which is necessary to handle open quantum systems. Their decomposition under the form (9.3.1) can be understood as a mixture of wave functions.

The second point of view, usually shared by the physicists, is that a density matrix can be understood as a *random pure state*. Le us describe this interpretation and explain why it represents the same states as density matrices.

First of all recall the two main axioms of Quantum Mechanics concerning states. The axioms of quantum mechanics say that measuring an observable X (that is, a self-adjoint operator), with spectral measure ξ_X, gives a value of the measurement in the A with probability

$$Tr(\rho\, \xi_X(A)) \, .$$

After the measurement of the observable X inside the set A, the state ρ is transformed into the state

$$\frac{\xi_X(A)\, \rho\, \xi_X(A)}{Tr(\rho\, \xi_X(A))} \, .$$

This is the so-called "*reduction of the wave packet*".

We shall now compare these elements for density matrices with the ones we obtain with random states.

First of all, note the following extension of the representation of density matrices.

Lemma 9.3.2. *If $(\phi_i)_{i=1,\dots,n}$ is any family of norm 1 vectors in $\mathcal{H}$ and if $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ are positive reals such that $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, then*

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

is a density matrix.

The difference with the representation (9.3.1) lies is the fact that we do not ask the ϕ_i's to be two by two orthogonal. In particular there can more of them than the dimension of the state space.

Proof. Indeed, we have, for all $x \in \mathcal{H}$

$$\langle x \, , \, \rho \, x\rangle = \sum_i \lambda_i \, \|\langle x \, , \, \phi_i\rangle\|^2 \geq 0 \, ,$$

and

$$Tr(\rho) = \sum_i \lambda_i \, \langle \phi_i \, , \, \phi_i\rangle = 1 \, .$$

□

Now consider a random pure state $|\phi\rangle$ which is equal to $|\phi_i\rangle$ with probability λ_i, $i = 1, \dots, n$. Note that the ϕ_i's are all norm 1 but not necessarily orthogonal with each other.

Proposition 9.3.3. *Let $|\phi\rangle$ be a random pure state which is equal to $|\phi_i\rangle$ with probability λ_i, $i = 1, \dots, n$. Let ρ be the density matrix*

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \, .$$

Then measuring any observable X with the random pure state $|\phi\rangle$ gives a measure lying in a set A with probability

$$Tr(\rho \, \xi_X(A)) \, .$$

Furthermore, after the measurement of X in A, the random state $|\phi\rangle$ is transformed into another random pure state $|\psi\rangle$ whose associated density matrix is

$$\frac{\xi_X(A) \, \rho \, \xi_X(A)}{Tr(\rho \, \xi_X(A))} \, .$$

Proof. Let us detail what happens if we measure the observable X with the random state $|\phi\rangle$. Let us adopt a helpful notation. By "(choose ϕ_i)" we mean the event that $|\phi\rangle$ is equal to the state $|\phi_i\rangle$. By "(measure in A)" we mean "the event of having the result of the measure of X lying in A". Adopting obvious probabilistic notations, we know that

$$\mathbb{P}(\text{choose } \phi_i) = \lambda_i \qquad \text{and} \qquad \mathbb{P}(\text{measure in } A \,|\, \text{choose } \phi_i) = \|\xi_X(A)\,|\phi_i\rangle\|^2 .$$

In particular,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{measure in } A) &= \sum_i \mathbb{P}(\text{measure in } A,\ \text{choose } \phi_i) \\
&= \sum_i \mathbb{P}(\text{measure in } A \,|\, \text{choose } \phi_i)\, \mathbb{P}(\text{choose } \phi_i) \\
&= \sum_i \lambda_i \langle \phi_i\,,\, \xi_X(A)\,\phi_i\rangle \\
&= Tr(\rho\, \xi_X(A)) .
\end{aligned}$$

Hence measuring any observable X of $\mathcal{H}$ with the density matrix ρ or with the random state $|\phi\rangle$ gives the same probabilities.

Let us compute the reduction of the wave packet in this case too. If we have measured X with the random state $|\phi\rangle$ we have measured X with one the state $|\phi_i\rangle$. After having measured the observable X with a value in A, the state of the system is one of the pure states

$$\frac{\xi_X(A)|\phi_i\rangle}{\|\xi_X(A)|\phi_i\rangle\|} .$$

But what is exactly the probability to obtain the above pure state? We have to compute $\mathbb{P}(\text{choose } \phi_i \,|\, \text{measure in } A)$. This is equal to

$$\frac{\mathbb{P}(\text{measure in } A,\ \text{choose } \phi_i)}{\mathbb{P}(\text{measure in } A)} = \frac{\lambda_i \langle \phi_i\,,\, \xi_X(A)\,\phi_i\rangle}{Tr(\rho\, \xi_X(A))} = \frac{\lambda_i \|\xi_X(A)\,\phi_i\|^2}{Tr(\rho\, \xi_X(A))} .$$

Hence, after the measurement we end with a random pure state again, which corresponds to the density matrix

$$\sum_i \frac{\lambda_i \|\xi_X(A)\,\phi_i\|^2}{Tr(\rho\, \xi_X(A))}\, \frac{\xi_X(A)|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\xi_X(A)}{\|\xi_X(A)|\phi_i\rangle\|^2} = \sum_i \lambda_i\, \frac{\xi_X(A)|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\xi_X(A)}{Tr(\rho\, \xi_X(A))} ,$$

that is, the density matrix

$$\frac{\xi_X(A)\,\rho\,\xi_X(A)}{Tr(\rho\, \xi_X(A))} .$$

□

In that sense, from the physicist point of view, these two states, when measuring observables (which is what states are meant for) give exactly the same results, the same values, the same probabilities, the same reduction of the wave packet. Hence they describe the same "*state*" of the system.

This equivalence is only physical, in the sense that whatever one wants to do physically with these states, they give the same results. Mathematically they are clearly different objects: one is a positive trace 1 operator, the other one is a random pure state.

9.3.2 Classical Unitary Interactions

We now focus on unitary interactions between two quantum systems. We are given two quantum systems $\mathcal{H}_S$ and $\mathcal{K}$ interacting with each other; their dynamics is driven by a total Hamiltonian

$$H_{tot} = H_S \otimes I + I \otimes K + H_{int} \,.$$

Both systems evolve this way during a time interval of length h, so that the evolution of the state of the system is driven by the unitary operator

$$U = e^{-ihH_{tot}} \,,$$

which is a rather general unitary operator U on $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{K}$.

We are interested in the resulting action of U on $\mathcal{H}_S$. This action is described as follows. Consider any given state ω on $\mathcal{K}$, we compute the mapping

$$\mathcal{L}(\rho) = Tr_{\mathcal{K}} \left(U(\rho \otimes \omega) U^* \right)$$

on all density matrices ρ of $\mathcal{H}_S$. This mapping exactly expresses what we recover from the system $\mathcal{H}_S$ of the action of the environment K via the unitary U.

This mapping $\mathcal{L}$ is well-known to be a *quantum channel* on $\mathcal{H}_S$ and it admits a so-called *Krauss representation*, that is, there exist bounded operators L_i, $i \in I$, on $\mathcal{H}_S$ such that

$$\sum_{i \in I} L_i^* L_i = I$$

and

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i \in I} L_i \, \rho \, L_i^*$$

for all density matrix ρ.

The Krauss representation of $\mathcal{L}$ as above is not unique, there is a little freedom in the way of choosing the coefficients L_i. This non-uniqueness is completely described by the following theorem.

Theorem 9.3.4 (GHJW Theorem)**.** *The two Krauss representations*

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=1}^{l} L_i \, \rho \, L_i^*$$

and

$$\mathcal{K}(\rho) = \sum_{i=1}^{k} K_i \, \rho \, K_i^* \,,$$

with $l \leq k$ say, represent the same quantum channel if and only if there exists a unitary matrix $(u_j^i)_{i,j=1,\ldots,k}$ such that

$$K_i = \sum_{j=1}^{k} u_j^i \, L_j \,,$$

where the list of the L_j's has been completed by zeros if $l < k$.

Now we start characterizing those unitary actions that we call *classical*. We begin with an important remark.

Proposition 9.3.5. *Let $\mathcal{L}$ be a quantum channel on $\mathcal{H}$ which admits a Krauss decomposition*

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i=1}^{n} L_i \, \rho \, L_i^*$$

where the L_i's are all scalar multiples of unitary operators: $L_i = \lambda_i \, U_i$ on $\mathcal{H}$. In particular we have

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1 \, .$$

Then the action of $\mathcal{L}$ on the states of $\mathcal{H}$ is exactly the same as if one were applying a random unitary transform to $\mathcal{H}$: choosing one of the unitary actions U_i with respective probability $\|\lambda_i\|^2$.

Proof. According to the rules of Quantum Mechanics, if the unitary transform U_i is applied to $\mathcal{H}$ then the state ρ of $\mathcal{H}$ is transformed into $U_i \, \rho \, U_i^*$. If this occurs randomly with probability p_i, respectively, then the new state of $\mathcal{H}$ is one of the states $U_i \, \rho \, U_i^*$ with probability p_i. That is, according to the statistical interpretation of density matrices developed above, we end with the state

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \, U_i \, \rho \, U_i^* = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{p_i} \, U_i) \, \rho \, (\sqrt{p_i} \, U_i)^* \, .$$

This gives the result. □

This motivates the following definition of a classical unitary action from $\mathcal{K}$ onto $\mathcal{H}$.

Definition 9.3.6. *A unitary operator U on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ gives rise to a* classical action of $\mathcal{K}$ onto $\mathcal{H}$ *if for every state ω on $\mathcal{K}$, the quantum channel*

$$\mathcal{L}(\rho) = Tr_{\mathcal{K}} \, (U(\rho \otimes \omega)U^*)$$

on $\mathcal{H}$ admits a Krauss decomposition made of multiples of unitary operators only.

For short we may say that U is a *classical unitary*, but one has to keep in mind that it is classical for its action on $\mathcal{H}$ only.

Due to the freedom left by the GHJW Theorem on the Krauss representation of a given quantum channel, the above definition of a classical unitary action seems very difficult to characterize. At least, we have not been able to completely characterize it. There is a very strong condition in the above definition: it is the fact that this property is asked for every state ω on $\mathcal{K}$. But the strength of this condition is compensated by the fuzziness of the sentence “there exists a Krauss decomposition made of ...", which seems very hard to characterize in general.

In this article we concentrate on a very large class of unitary actions which are classical in that sense. We are strongly convinced and we conjecture that they are the only possible classical unitaries. But we have not been able to prove this fact.

Proposition 9.3.7. *If U is of the form*

$$U = \sum_{i=1}^{k} U_i \otimes |e_i\rangle\langle f_i|$$

for some unitary operators U_i on $\mathcal{H}$, some orthonormal bases (e_i) and (f_i) of $\mathcal{K}$, then U is a classical unitary action from $\mathcal{K}$ onto $\mathcal{H}$.

Proof. First of all, let us check that an operator of the form above is a unitary operator. We have

$$\begin{aligned} U^*U &= \sum_{i,j} U_i^* U_j \otimes |f_i\rangle\langle e_i|\, |e_j\rangle\langle f_j| \\ &= \sum_{i} U_i^* U_i \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \\ &= \sum_{i} I \otimes |f_i\rangle\langle f_i| \\ &= I \otimes I\,. \end{aligned}$$

Let ρ be some initial state on $\mathcal{H}$ and ω the state of $\mathcal{H}_R$ before interaction. After interaction the state becomes

$$\begin{aligned} U(\rho \otimes \omega)U^* &= \sum_{i,j} U_i\, \rho\, U_j^* \otimes |e_i\rangle\langle f_i|\, \omega\, |f_j\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j} \langle f_i|\, \omega\, |f_j\rangle\, U_i\, \rho\, U_j^* \otimes |e_i\rangle\langle e_j|\,. \end{aligned}$$

The resulting state on $\mathcal{H}_S$ is

$$\mathcal{L}(\rho) = Tr_{\mathcal{K}}\,(U(\rho \otimes \omega)U^*) = \sum_i \langle f_i|\, \omega\, |f_i\rangle\, U_i\, \rho\, U_i^*\,.$$

This is exactly the required form for U to be a classical unitary action. □

Note that from the proof above we can immediately deduce the following important simplification.

Corollary 9.3.8. If U is of the form

$$U = \sum_{i=1}^{k} U_i \otimes |e_i\rangle\langle f_i|$$

for some unitary operators U_i on $\mathcal{H}$, some orthonormal bases (e_i) and (f_i) of $\mathcal{K}$, then U has the same classical unitary action on $\mathcal{H}$ as the operator

$$V = \sum_{i=1}^{k} U_i \otimes |f_i\rangle\langle f_i|\,. \tag{9.3.2}$$

As a consequence we shall now concentrate on those unitary actions of the form (9.3.2) only.

The aim of the rest of this article is to completely characterize such "random unitary operators" (or *classical unitary interactions*) on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, to express them in terms of multiplication operators by a natural basis of random variables, the *complex obtuse random variables*.

Once again note that U is not explicitly a random unitary operator, that is, a random variable with values on $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. It is a deterministic unitary operator on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ whose action on the states of $\mathcal{H}$ oughts to the same quantum physics as the action of a random unitary operator on $\mathcal{H}$.

9.4 Complex Obtuse Random Variables

We shall show that the structure of those classical unitary interactions is intimately related to a particular family of random variables, the *complex obtuse random variables*. Real obtuse random variables were introduced in [7], for they appear naturally in the theory of discrete-time normal martingales, predictable and chaotic representation property, for vector-valued martingales. Here the physical situation brings us to consider their complex counterpart. The point is that with this extension, most of the results of [7] do not extend easily and need a rather deep algebraical study.

9.4.1 Obtuse Systems

Let $N \in \mathbb{N}^*$ be fixed. In $\mathbb{C}^N$, an *obtuse system* is a family of $N+1$ vectors $v_1, \ldots, v_{N+1}$ such that

$$\langle v_i \, , \, v_j \rangle = -1$$

for all $i \neq j$. In that case we put

$$\widehat{v}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1} \, ,$$

so that

$$\langle \widehat{v}_i \, , \, \widehat{v}_j \rangle = 0$$

for $i \neq j$. They form an orthogonal family of $N+1$ vectors in $\mathbb{C}^{N+1}$, hence they form an orthogonal basis of $\mathbb{C}^{N+1}$.

We put

$$p_i = \frac{1}{\|\widehat{v}_i\|^2} = \frac{1}{1 + \|v_i\|^2} \, .$$

Lemma 9.4.1. *We then have*

$$\sum_{i=1}^{N+1} p_i = 1 \tag{9.4.1}$$

and

$$\sum_{i=1}^{N+1} p_i\, v_i = 0\,. \tag{9.4.2}$$

Proof. We compute, for all j

$$\langle \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, \widehat{v}_i\,,\, \widehat{v}_j\rangle = p_j \|\widehat{v}_j\|^2 = 1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\, \widehat{v}_j\rangle\,.$$

As the $\widehat{v}_j$'s form a basis, this means that

$$\sum_{i=1}^{N+1} p_i\, \widehat{v}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

This implies the two announced equalities. □

Lemma 9.4.2. *We also have*

$$\sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |v_i\rangle\langle v_i| = I_{\mathbb{C}^N}\,. \tag{9.4.3}$$

Proof. As the vectors $(\sqrt{p_i}\,\widehat{v}_i)_{i\in\{1,\dots,N+1\}}$ form an orthonormal basis of $\mathbb{C}^{N+1}$ we have

$$I_{\mathbb{C}^{N+1}} = \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |\widehat{v}_i\rangle\langle\widehat{v}_i|\,.$$

Now put

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \widetilde{v}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \end{pmatrix}\,.$$

We get

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{C}^{N+1}} &= \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |u+\widetilde{v}_i\rangle\langle u+\widetilde{v}_i| \\ &= \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |u\rangle\langle u| + \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |u\rangle\langle\widetilde{v}_i| + \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |\widetilde{v}_i\rangle\langle u| + \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |\widetilde{v}_i\rangle\langle\widetilde{v}_i|\,. \end{aligned}$$

Now, using (9.4.1) and (9.4.2), we get

$$I_{\mathbb{C}^{N+1}} = |u\rangle\langle u| + \sum_{i=1}^{N+1} p_i\, |\widetilde{v}_i\rangle\langle\widetilde{v}_i|\,.$$

Now, coming back to the definition of u and $\widetilde{v}_i$, this gives easily (9.4.3). □

9.4.2 Obtuse Random Variables

Consider a random variable X, with values in $\mathbb{C}^N$ which can take only $N+1$ different non-null values $v_1, \dots, v_{N+1}$ with strictly positive probability $p_1, \dots, p_{N+1}$ respectively.

We shall denote by $X^1, \dots, X^N$ the coordinates of X in $\mathbb{C}^N$. We say that X is *centered* if its expectation is 0, that is, if $\mathbb{E}[X^i] = 0$ for all i. We say that X is *normalized* if its covariance matrix is I, that is, if

$$\operatorname{cov}(X^i, X^j) = \mathbb{E}[\overline{X^i}\, X^i] - \mathbb{E}[\overline{X^i}]\, \mathbb{E}[X^j] = \delta_{i,j}\,,$$

for all $i, j = 1, \dots N$.

We assume that X is defined on its canonical space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, that is, $\Omega = \{1, \dots, N+1\}$, $\mathcal{F}$ is the full σ-algebra of Ω, the probability measure $\mathbb{P}$ is given by $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$ and X is given by $X(i) = v_i$. The coordinates of v_i are denoted by v_i^k, for $k = 1, \dots, N$, so that $X^k(i) = v_i^k$.

In the same way as above we put

$$\widehat{v}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+1}\,,$$

for all $i = 1, \dots, N+1$.

We shall also consider the deterministic variable X^0 on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, which is always equal to 1. For $i = 0, \dots, N$ let $\widetilde{X}^i$ be the random variables defined by

$$\widetilde{X}^i(j) = \sqrt{p_j}\, X^i(j)$$

for all $i = 0, \dots, N$ and all $j \in \Omega$.

Proposition 9.4.3. *The following assertions are equivalent.*

1) X is a centered and normalized random variable.

2) The $(N+1) \times (N+1)$-matrix $\left(\widetilde{X}^i(j)\right)_{i,j}$ is a unitary matrix.

3) The $(N+1) \times (N+1)$-matrix $\left(\sqrt{p_i}\, \widehat{v}_i^j\right)_{i,j}$ is a unitary matrix.

4) The family $\{v_1, \dots, v_{N+1}\}$ is an obtuse system with

$$p_i = \frac{1}{1 + \|v_i\|^2}\,,$$

for all i.

Proof.

1) $\Rightarrow$ 2): Since the random variable X is centered and normalized, each component X^i has a zero mean and the scalar product between two components X^i, X^j is given by the matrix I. Hence, for all i in $\{1, \dots, N\}$, we get

$$\mathbb{E}\left[X^i\right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N+1} p_k\, v_k^i = 0\,, \tag{9.4.4}$$

and for all $i, j = 1, \dots N$,

$$\mathbb{E}[\overline{X^i}\, X^j] = \delta_{i,j} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N+1} p_k\, \overline{v_k^i}\, v_k^j = \delta_{i,j}\,. \tag{9.4.5}$$

Now, using Eqs. (9.4.4) and (9.4.5), we get, for all $i, j = 1, \dots, N$

$$\langle \widetilde{X}^0\,,\, \widetilde{X}^0 \rangle = \sum_{k=1}^{N+1} p_k = 1\,,$$

$$\langle \widetilde{X}^0\,,\, \widetilde{X}^i \rangle = \sum_{k=1}^{N+1} \overline{\sqrt{p_k}}\, \sqrt{p_k}\, v_k^i = 0\,,$$

and

$$\langle \widetilde{X}^i\,,\, \widetilde{X}^j \rangle = \sum_{k=1}^{N+1} \overline{\sqrt{p_k}\, v_k^j}\, \sqrt{p_k} v_k^i = \delta_{i,j}\,.$$

The unitarity follows immediatly.

2) $\Rightarrow$ 1): Conversely, if the matrix $\left(\widetilde{X}^i(j)\right)_{i,j}$ is unitary, the scalar products of column vectors gives the mean 0 and the covariance I for the random variable X.

2) $\Leftrightarrow$ 3): The matrix $\left(\sqrt{p_j}\, \widehat{v}_i^j\right)_{i,j}$ is the transpose matrix of $\left(\widetilde{X}^i(j)\right)_{i,j}$. Therefore, if one of these two matrices is unitary, its transpose matrix is unitary too.

3) $\Leftrightarrow$ 4): The matrix $\left(\sqrt{p_j}\, \widehat{v}_j^i\right)_{i,j}$ is unitary if and only if

$$\langle \sqrt{p_i}\, \widehat{v}_i\,,\, \sqrt{p_j}\, \widehat{v}_j \rangle = \delta_{i,j}\,,$$

for all $i, j = 1, \dots, N+1$. On the other hand,

$$\langle \sqrt{p_i}\, \widehat{v}_i\,,\, \sqrt{p_i}\, \widehat{v}_i \rangle = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p_i\,(1 + \|v_i\|^2) = 1$$

and

$$\langle \sqrt{p_i}\, \widehat{v}_i\,,\, \sqrt{p_j}\, \widehat{v}_j \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{p_i}\, \sqrt{p_j}\, (1 + \langle v_i\,,\, v_j \rangle) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v_i\,,\, v_j \rangle = -1\,.$$

□

Definition 9.4.4. *Random variables in $\mathbb{C}^N$, which take only $N+1$ different values with strictly positive probability, which are centered and normalized are called* obtuse random variables in $\mathbb{C}^N$, *because of Proposition 9.4.3.*

9.4.3 Generic Character of Obtuse Random Variables

We shall here present several results which show the particular character of obtuse random variables. The idea is that somehow they generate all the finitely supported probability distributions on $\mathbb{C}^N$.

First of all, we show a result which shows that obtuse random variables on $\mathbb{C}^N$ with a prescribed probability distribution $\{p_1, \dots, p_{N+1}\}$ are essentially unique.

Theorem 9.4.5. *Let X be an obtuse random variable of $\mathbb{C}^N$ having $\{p_1, \dots, p_{N+1}\}$ as associated probabilities. Then the following assertions are equivalent.*

i) The random variable Y is an obtuse random variable on $\mathbb{C}^N$ with same probabilities $\{p_1, \dots, p_{N+1}\}$.

ii) There exists a unitary operator U on $\mathbb{C}^N$ such that $Y = UX$.

Proof. One direction is obvious. If $Y = UX$, then $\mathbb{E}[Y] = U\mathbb{E}[X] = U0 = 0$ and

$$\mathbb{E}[YY^*] = \mathbb{E}[UXX^*U^*] = U\mathbb{E}[XX^*]U^* = UIU^* = I\,.$$

Hence Y is a centered and normalized random variable on $\mathbb{C}^N$, taking $N+1$ different values. Hence it is an obtuse random variable. The probabilities associated to Y are clearly the same as for X.

In the converse direction. Let $v_1, \dots, v_{N+1}$ the possible values of X, associated to the probabilities $p_1, \dots, p_{N+1}$ respectively. Let $w_1, \dots, w_{N+1}$ be the ones associated to Y. In particular, the vectors

$$\widehat{v_i} = \sqrt{p_i}\begin{pmatrix} 1 \\ v_i \end{pmatrix}\,, \quad i = 1, \dots, N+1,$$

form an orthonormal basis of $\mathbb{C}^{N+1}$. The same holds with the $\widehat{w_i}$'s. Hence there exists a unitary operator V on $\mathbb{C}^{N+1}$ such that $\widehat{w_i} = V\widehat{v_i}$, for all $i = 1, \dots, N+1$.

We shall index the coordinates of $\mathbb{C}^{N+1}$, from 0 to N in order to be compatible with the embedding of $\mathbb{C}^N$ that we have chosen. In particular we have

$$V_0^0 + \sum_{j=1}^{N} V_j^0 v_i^j = 1$$

for all $i = 1, \dots, N+1$. This gives in particular

$$\sum_{j=1}^{N} V_j^0 (v_1^j - v_i^j) = 0 \tag{9.4.6}$$

for all $i \in \{2, \dots, N+1\}$.

But as the $\widehat{v_i}$'s are linearly independent then so are the $\sqrt{p_1}\widehat{v_1} - \sqrt{p_i}\widehat{v_i}$, $i = 2, \dots, N+1$. As

$$\sqrt{p_1}\widehat{v_1} - \sqrt{p_i}\widehat{v_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_i \end{pmatrix}$$

this means that the $v_1 - v_i$'s are linearly independent, $i = 2, \dots, N+1$.

As a consequence the unique solution of the system (9.4.6) is $V_j^0 = 0$ for all $j = 1, \dots, N$. This implies $V_0^0 = 1$ obviously.

The same kind of reasoning applied to the relation $\widehat{v_i} = V^* \widehat{w_i}$ shows that the column coefficients V_0^j, $j = 1, \dots, N$ are also all vanishing. Finally the operator V is of the form

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \langle 0| \\ |0\rangle & U \end{pmatrix},$$

for some unitary operator U on $\mathbb{C}^N$. This gives the result. □

Having proved that uniqueness, we shall now prove that obtuse random variables generates all the other random variables (at least with finite support). First of all, a rather simple remark.

Proposition 9.4.6. *Let X be a centered and normalized random variable in $\mathbb{C}^d$, taking n different values $v_1, \dots, v_n$, with probability $p_1, \dots, p_n$ respectively. Then we must have*

$$n \geq d + 1\,.$$

Proof. Let X be centered and normalized in $\mathbb{C}^d$, taking the values $v_1, \dots, v_n$ with probabilities $p_1, \dots, p_n$ and with $n \leq d$, that is, $n < d+1$. Put

$$\widetilde{X}^0 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} \end{pmatrix}, \widetilde{X}^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} v_1^1 \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} v_n^1 \end{pmatrix}, \dots, \widetilde{X}^d = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} v_1^d \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} v_n^d \end{pmatrix}.$$

They are $d+1$ vectors of $\mathbb{C}^n$. We have, for all $i, j = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{X}^0 \,,\, \widetilde{X}^0 \rangle &= \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\
\langle \widetilde{X}^0 \,,\, \widetilde{X}^i \rangle &= \sum_{k=1}^n p_k v_k^i = \mathbb{E}[X^i] = 0 \\
\langle \widetilde{X}^i \,,\, \widetilde{X}^j \rangle &= \sum_{k=1}^n p_k \overline{v_k^i} v_k^j = \mathbb{E}[\overline{X^i} X^j] = \delta_{i,j}\,.
\end{aligned}$$

The family of $d+1$ vectors $\widetilde{X}^0, \dots, \widetilde{X}^d$ is orthonormal in $\mathbb{C}^n$. This is impossible if $n < d+1$. □

We can now state the theorem which shows how general, finitely supported, random variables on $\mathbb{C}^d$ are generated by the obtuse ones. We concentrate only on centered and normalized random variables, for they obviously generate all the others, up to an affine transform of $\mathbb{C}^d$.

Theorem 9.4.7. *Let X be a centered and normalized random variable in $\mathbb{C}^d$, taking n different values $v_1, \ldots, v_n$, with probabilities $p_1, \ldots, p_n$ respectively and with $n \geq d+1$.*

If Y is any obtuse random variable on $\mathbb{C}^{n-1}$ associated to the probabilities $p_1, \ldots, p_n$, then there exists a partial isometry A from $\mathbb{C}^{n-1}$ to $\mathbb{C}^d$, with final space $\mathbb{C}^d$, such that

$$X = AY\,.$$

Proof. Assume that the obtuse random variable Y takes the values $w_1, \ldots, w_n$ in $\mathbb{C}^{n-1}$. We wish to find a $(n-1) \times d$ matrix A such that

$$A_1^i w_j^1 + A_2^i w_j^2 + \ldots + A_{n-1}^i w_j^{n-1} = v_j^i \tag{9.4.7}$$

for all $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, n$.

In particular, for each fixed $i = 1, \ldots, d$, we have the following subsystem of $n-1$ equations with $n-1$ variables $A_1^i, \ldots, A_{n-1}^i$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} w_1^k A_k^i = v_1^i \\ \sum_{k=1}^{n-1} w_2^k A_k^i = v_2^i \\ \qquad \vdots \\ \sum_{k=1}^{n-1} w_{n-1}^k A_k^i = v_{n-1}^i\,. \end{cases} \tag{9.4.8}$$

The vectors

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_1^1 \\ \vdots \\ w_1^{n-1} \end{pmatrix}, \ldots, w_{n-1} = \begin{pmatrix} w_{n-1}^1 \\ \vdots \\ w_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

are linearly independent. Thus so are the vectors

$$\begin{pmatrix} w_1^1 \\ \vdots \\ w_{n-1}^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} w_1^{n-1} \\ \vdots \\ w_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hence the system (9.4.8) can be solved and furnishes the coefficients A_k^i, $k = 1, \ldots, n-1$. We have to check that these coefficients are compatible with all the equations of (9.4.8). Actually, the only equation from (9.4.7) that we have forgotten in (9.4.8) is

$$\sum_k A_k^i w_n^k = v_n^i\,.$$

But this equation comes easily from the $n-1$ first equations if we sum them after multiplication by p_j:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_k A_k^i p_j w_j^k = \sum_{j=1}^{n-1} p_j v_j^i\,.$$

This gives, using $\mathbb{E}[X^i] = \mathbb{E}[Y^i] = 0$

$$\sum_k A_k^i (-p_n w_n^k) = -p_n v_n^i\,.$$

Which is the required relation.

We have proved the relation $X = AY$ with A being a linear map from $\mathbb{C}^{n-1}$ to $\mathbb{C}^d$. The fact that X is normalized can be written as $\mathbb{E}[XX^*] = I_d$. But

$$\mathbb{E}[XX^*] = \mathbb{E}[AYY^*A^*] = A\mathbb{E}[YY^*]A^* = AI_nA^* = AA^* .$$

Hence A must satisfy $AA^* = I_d$, which is exactly saying that A is a partial isometry with final space $\mathbb{C}^d$. □

9.4.4 Associated 3-Tensors

Obtuse random variables are naturally associated to a 3-tensor with very particular properties. This is what we shall prove now.

Recall that a *3-tensor on* $\mathbb{C}^n$ is a linear mapping from $\mathbb{C}^n$ to $M_n(\mathbb{C})$. Coordinate-wise, it is represented by a collection of coefficients $(T_k^{ij})_{i,j,k=1,\dots,n}$. It acts as

$$(T(x))^{ij} = \sum_{k=1}^{n} T_k^{ij} x^k .$$

A 3-tensor can be also viewed as a map from $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}$ as

$$T(x,y,z) = \sum_{i,j,k=1}^{n} T_k^{ij} x^i y^j z^k .$$

We are going to see that obtuse random variables are related to particular 3-tensors.

Proposition 9.4.8. *Let X be an obtuse random variable in $\mathbb{C}^N$. Then there exists a unique 3-tensor T on $\mathbb{C}^N$ such that*

$$\overline{X^i}\, X^j = \sum_{k=0}^{N} T_k^{ij}\, X^k . \tag{9.4.9}$$

This 3-tensor T is given by

$$T_k^{ij} = \mathbb{E}[\overline{X^i}\, X^j\, \overline{X^k}] . \tag{9.4.10}$$

Proof. As X is an obtuse random variable, that is, a centered and normalized random variable in $\mathbb{C}^N$ taking exactly $N+1$ different values, the random variables $\{X^0, X^1, \dots, X^N\}$ are orthonormal in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, hence they form an orthonormal basis of $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, for the latter space is $N+1$-dimensional. These random variables being bounded they products are still elements of $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, hence they can be written as linear combinations of the X^i's. As a consequence, there exists a 3-tensor T on $\mathbb{C}^{N+1}$ such that

$$\overline{X^i}\, X^j = \sum_{k=0}^{N} T_k^{ij}\, X^k$$

for all $i, j = 0, \ldots, N$. In particular we have

$$\mathbb{E}[\overline{X^i}\, X^j\, \overline{X^k}] = \sum_{l=0}^{N} T_l^{ij}\, \mathbb{E}[X_l\, \overline{X_k}] = T_k^{ij}\,.$$

□

This 3-tensor has quite some symmetries, let us detail them.

Proposition 9.4.9. *Let T be the 3-tensor associated to an obtuse random variable X. Then it satisfies, for all $i, j, k, l = 0, \ldots N$*

$$T_0^{ij} = \delta_{ij} \tag{9.4.11}$$

$$T_k^{ij} = T_i^{kj}\,, \tag{9.4.12}$$

$$\sum_{m=0}^{N} T_m^{ij}\, \overline{T_l^{mk}} = \sum_{m=0}^{N} T_m^{kj}\, \overline{T_l^{mi}}\,, \tag{9.4.13}$$

$$\sum_{m=0}^{N} T_m^{ij}\, T_l^{km} = \sum_{m=0}^{N} T_m^{kj}\, T_l^{im}\,. \tag{9.4.14}$$

Proof.
As

$$\overline{X^i}\, X^j = \sum_{k=0}^{N} T_k^{ij}\, X^k$$

we have

$$\mathbb{E}\left[\overline{X^i}\, X^j\right] = T_0^{ij}$$

and this gives the relation (9.4.11).
Equation (9.4.12) comes directly from Equation (9.4.10) which shows a clear symmetry in (i, k).
We have

$$\overline{X^i}\, X^j\, \overline{X^k} = \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} T_m^{ij}\, \overline{T_n^{mk}}\, \overline{X^n}$$

so that

$$\mathbb{E}\left[\overline{X^i}\, X^j\, \overline{X^k}\, X^l\right] = \sum_{m=0}^{N} T_m^{ij}\, \overline{T_l^{mk}}\,.$$

But the left hand side is clearly symmetric in (i, k). This proves (9.4.13).

In the same way, we write

$$\overline{X^i}\, X^j\, \overline{X^k} = \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} T_m^{ij}\, T_n^{km}\, X^n$$

so that

$$\mathbb{E}\left[\overline{X^i}\, X^j\, \overline{X^k}\, \overline{X^l}\right] = \sum_{m=0}^{N} T_m^{ij}\, T_l^{km}\,.$$

But the left hand side is clearly symmetric in (i,k). This proves (9.4.14). □

9.5 Complex Doubly-Symmetric 3-Tensors

We are going to leave for a moment the obtuse random variables and concentrate on the symmetries we have obtained above. The relation (9.4.11) is really specific to obtuse random variables, we shall leave it for a moment. We concentrate on the relation (9.4.12), (9.4.13) and (9.4.14) which have an important consequences for the 3-tensor.

9.5.1 The Main Diagonalization Theorem

A 3-tensor T on $\mathbb{C}^{N+1}$ which satisfies (9.4.12), (9.4.13) and (9.4.14) is called a *complex doubly-symmetric 3-tensor on* $\mathbb{C}^N$.

The main result concerning complex doubly-symmetric 3-tensors in $\mathbb{C}^N$ is that they are the exact generalization for 3-tensors of normal matrices for 2-tensors: they are exactly those 3-tensors which can be diagonalized in some orthonormal basis of $\mathbb{C}^{N+1}$.

A 3-tensor T on $\mathbb{C}^N$ is said to be *diagonalizable in some orthonormal basis* $(a_i)_{i=1}^N$ of $\mathbb{C}^N$ if there exists complex numbers $(\lambda_i)_{i=1}^N$ such that

$$T(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\, \langle a_i\,,\, x\rangle\, |a_i\rangle\langle a_i| \tag{9.5.1}$$

for all $x \in \mathbb{C}^N$.

Note that, as opposed to the case of 2-tensors (that is, matrices), the "eigenvalues" λ_i are not completely determined by the representation (9.5.1). Indeed, if we put $\widetilde{a}_m = e^{i\theta_m}\, a_m$ for all m, then the $\widetilde{a}_m$'s still form an orthonormal basis of $\mathbb{C}^n$ and we have

$$T(x) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m\, e^{i\theta_m}\, \langle \widetilde{a}_m\,,\, x\rangle\, |\widetilde{a}_m\rangle\langle \widetilde{a}_m|\,.$$

Hence the λ_m's are only determined up to a phase; only their modulus is determined by (9.5.1).

Actually, there are more natural objects that can be associated to diagonalizable 3-tensors: *orthogonal families in* $\mathbb{C}^N$. Indeed, if T is diagonalizable as above, put $v_m =$

$\overline{\lambda}_m\, a_m$, for all m such that $\lambda_m \neq 0$. The family $\{v_m\,;\ m = 1, \ldots, k\}$ is then an orthonormal family in $\mathbb{C}^N$. We then have

$$T(v_m) = |v_m\rangle\langle v_m|$$

for all m and

$$T(x) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\|v_m\|^2}\, \langle v_m\,,\, x\rangle\, |v_m\rangle\langle v_m|\,.$$

Theorem 9.5.1.
A 3-tensor T on $\mathbb{C}^N$ is diagonalizable in some orthonormal basis $(v_i)_{i=1,\ldots,N}$ if and only if it is doubly-symmetric.

More precisely, the formulas

$$S = \Big\{ v \in \mathbb{C}^N\,;\ T(v) = |v\rangle\langle v| \Big\}\,,$$

and

$$T(x) = \sum_{v \in S} \frac{1}{\|v\|^2}\, \langle v\,,\, x\rangle\, |v\rangle\langle v|\,,$$

establish a bijection between the set of complex doubly-symmetric 3-tensors T and the set of orthogonal systems S in $\mathbb{C}^N$.

Proof. Let $S = \{v_i\,;\ i = 1, \ldots, K\}$ be an orthogonal system in $\mathbb{C}^N$. Put

$$T_k^{ij} = \sum_{m=1}^{K} \frac{1}{\|v_m\|^2}\, \overline{v_m^i}\, v_m^j\, \overline{v_m^k}\,,$$

for all $i, j, k = 1, \ldots, N$. We shall check that T is a complex doubly-symmetric 3-tensor in $\mathbb{C}^N$.

The symmetry of T_k^{ij} in (i, k) is obvious from the definition. This gives (9.4.12).

We have

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n} \overline{T_x^{ij}}\, T_l^{xk} &= \sum_{x=0}^{n} \sum_{m,n=1}^{K} \frac{1}{\|v_m\|^2}\, \frac{1}{\|v_n\|^2}\, v_n^i\, \overline{v_n^j}\, v_n^x\, \overline{v_m^x}\, v_m^k\, \overline{v_m^l} \\
&= \sum_{m,n=1}^{K} \frac{1}{\|v_m\|^2}\, \frac{1}{\|v_n\|^2}\, v_n^i\, \overline{v_n^j}\, \langle v_m\,,\, v_n\rangle\, v_m^k\, \overline{v_m^l} \\
&= \sum_{m=1}^{K} \left(\frac{1}{\|v_m\|^2} \right)^2 v_m^i\, \overline{v_m^j}\, \|v_m\|^2\, v_m^k\, \overline{v_m^l}
\end{aligned}$$

and the symmetry in (i, k) is obvious. This gives (9.4.13).

We have

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{n} T_x^{ij}\, T_l^{kx} &= \sum_{x=0}^{n}\sum_{m,n=1}^{K} \frac{1}{\|v_m\|^2}\,\frac{1}{\|v_n\|^2}\,\overline{v_n^i}\, v_n^j\, \overline{v_n^x}\,\overline{v_m^k}\, v_m^x\, \overline{v_m^l} \\ &= \sum_{m,n=1}^{K} \frac{1}{\|v_m\|^2}\,\frac{1}{\|v_n\|^2}\,\overline{v_n^i}\, v_n^j\, \langle v_n\,,\, v_m\rangle\, \overline{v_m^k}\,\overline{v_m^l} \\ &= \sum_{m=1}^{K} \left(\frac{1}{\|v_m\|^2}\right)^2 \overline{v_m^i}\, v_m^j\, \|v_m\|^2\, \overline{v_m^k}\,\overline{v_m^l}\end{aligned}$$

and the symmetry in (i,k) is obvious. This gives (9.4.14).
We have proved that the formula

$$T(x) = \sum_{y\in S} \frac{1}{\|y\|^2}\,\langle y\,,\, x\rangle\, |y\rangle\langle y| \tag{9.5.2}$$

defines a complex doubly-symmetric 3-tensor.
Now given a complex doubly-symmetric 3-tensor T of the form above, we shall prove that the set S coincides with

$$S' = \{v \in \mathbb{C}^N\,;\; T(v) = |v\rangle\langle v|\}\,.$$

Clearly, if $y \in S$ we have by (9.5.2)

$$T(y) = |y\rangle\langle y|\,.$$

This proves that $S \subset S'$. Now, let $v \in S'$. On one side we have

$$T(v) = |v\rangle\langle v|\,,$$

on the other side we have

$$T(v) = \sum_{y\in S} \frac{1}{\|y\|^2}\,\langle y\,,\, v\rangle\, |y\rangle\langle y|\,.$$

In particular, applying both sides to some $y \in S$ we get

$$\langle v\,,\, y\rangle\, v = \langle y\,,\, v\rangle\, y$$

and thus $v = \mu\, y$ with $\|\mu\| = 1$. But, once again

$$T(v) = T(\mu y) = \mu T(y) = \mu\, |y\rangle\langle y|$$

on one side,

$$T(v) = |v\rangle\langle v| = |y\rangle\langle y|$$

on the other side. This proves that $\mu = 1$ and $v = y$. We have proved that S coincides with the set

$$\{v \in \mathbb{C}^N\,;\; T(v) = |v\rangle\langle v|\}\,.$$

Now we shall prove that all complex doubly-symmetric 3-tensor T on $\mathbb{C}^N$ are diagonalizable in some orthonormal basis.

The property (9.4.12) indicates that the matrices

$$T^j = (T_k^{ij})_{i,k=1,\dots,N}$$

are symmetric. But as they are complex-valued matrices it is not a sufficient condition for them to be diagonalizable. We shall use the following theorems ([32]).

Theorem 9.5.2 (Takagi Factorization)**.** *Let M be a complex symmetric matrix, there exist a unitary U matrix and a diagonal matrix D such that*

$$M = UDU^T = UD(\overline{U})^{-1}. \tag{9.5.3}$$

Secondly, we shall need to simultaneously "diagonalize" the T^j's. We shall make use of the following criteria.

Theorem 9.5.3 (Simultaneous Takagi factorization)**.** *Let $\mathcal{F} = \{A_i\,;\ i \in \mathcal{J}\}$ be a family of complex symmetric matrices in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Let $\mathcal{G} = \left\{\overline{A_i}\,A_j\,;\ i,j \in \mathcal{J}\right\}$. Then there exists a unitary matrix U such that, for all i in $\mathcal{J}$, the matrix UA_iU^T is diagonal if and only if the family $\mathcal{G}$ is commuting.*

This is the first step of our proof: proving that in our case the matrices $\overline{T^i}\,T^j$ commute. Using the 3 symmetry properties of T we get

$$\begin{aligned}
\left(\overline{T^i}\,T^j\,\overline{T^k}\,T^l\right)_n^m &= \sum_{x,y,z=1}^{N} \overline{T_x^{mi}}\,T_y^{xj}\,\overline{T_z^{yk}}\,T_n^{zl} \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{N} \overline{T_x^{my}}\,T_i^{xj}\,\overline{T_z^{yk}}\,T_n^{zl} \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{N} \overline{T_x^{my}}\,T_i^{xj}\,\overline{T_y^{zk}}\,T_n^{zl} \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{N} \overline{T_x^{zy}}\,T_i^{xj}\,\overline{T_y^{mk}}\,T_z^{nl} \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{N} \overline{T_x^{zn}}\,T_i^{xj}\,\overline{T_y^{mk}}\,T_z^{yl} \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{N} \overline{T_x^{zi}}\,T_n^{xj}\,\overline{T_y^{mk}}\,T_z^{yl} \\
&= \sum_{x,y,z=1}^{N} \overline{T_y^{mk}}\,T_z^{yl}\,\overline{T_x^{zi}}\,T_n^{xj} \\
&= \left(\overline{T^k}\,T^l\,\overline{T^i}\,T^j\right)_n^m .
\end{aligned}$$

This proves that $\overline{T^i}\,T^j\,\overline{T^k}\,T^l = \overline{T^k}\,T^l\,\overline{T^i}\,T^j$.

The family $\{\overline{T^i}\widehat{T}^j, i,j = 1,\cdots,N\}$ is commuting. Thus, by Theorem 9.5.3, the matrices T^j can be simultaneously Takagi factorized. There exists then a unitary matrix $U = (u^{kl})_{k,l=1,\cdots,N}$ such that, for all j in $\{1,\cdots,N\}$,

$$T^j = U D_j \overline{U}^{-1}\,, \tag{9.5.4}$$

where the matrix D^j is a diagonal matrix, $D^j = diag(\lambda_1^j,\cdots,\lambda_N^j)$. Thus, the coefficient T_k^{ij} can be written as

$$T_k^{ij} = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m^j\, u^{im}\, u^{km}\,.$$

Let us denote by a_m the mth column vector of $\overline{U}$, that is, $a_m = (\overline{u^{lm}})_{l=1,\cdots,N}$. Moreover, we denote by λ_m the vector of λ_m^j, for $j = 1,\cdots,n$. Since the matrix $\overline{U}$ is unitary, the vectors a_m form an orthonormal basis of $\mathbb{C}^N$. We have

$$T_k^{ij} = \sum_{m=1}^{N} \overline{a_m^i}\,\lambda_m^j\,\overline{a_m^k}\,.$$

Our aim now is to prove that λ_m is proportional to a_m. To this end, we shall use the symmetry properties of T. From the simultaneous reduction (9.5.4), we get

$$\overline{T^j}\,T^q = \overline{U}\,D^j D^q\,U^T\,,$$

where U^T is the transpose matrix of U. Thus, we have

$$(\overline{T^j}\,T^q)_r^i = \sum_{m=1}^{N} \overline{T_m^{ij}}\,T_r^{mq} = \sum_{m=1}^{N} a_m^i\,\overline{\lambda_m^j}\,\lambda_m^q\,\overline{a_m^r}\,.$$

In particular we have, for all $p \in \{1,\ldots,n\}$

$$\sum_{i,j,q,r=1}^{N} (\overline{T^j}\,T^q)_r^i\,\overline{a_p^i}\,\lambda_p^j\,\overline{\lambda_p^q}\,a_p^r = \sum_{m=1}^{N} \langle a_p\,,\,a_m\rangle\,\langle\lambda_m\,,\,\lambda_p\rangle\,\langle\lambda_p\,,\,\lambda_m\rangle\,\langle a_m\,,\,a_p\rangle = \|\lambda_p\|^4\,.$$

But applying the symmetry (9.4.13) this is also equal to

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,q,r=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} a_m^q\,\overline{\lambda_m^j}\,\lambda_m^i\,\overline{a_m^r}\,\overline{a_p^i}\,\lambda_p^j\,\overline{\lambda_p^q}\,a_p^r &= \sum_{m=1}^{N} \langle a_p\,,\,\lambda_m\rangle\,\langle\lambda_m\,,\,\lambda_p\rangle\,\langle\lambda_p\,,\,a_m\rangle\,\langle a_p\,,\,a_m\rangle \\ &= \|\langle a_p\,,\,\lambda_p\rangle\|^2\,\|\lambda_p\|^2\,.\end{aligned}$$

This gives

$$\|\langle a_p\,,\,\lambda_p\rangle\| = \|\lambda_p\| = \|\lambda_p\|\,\|a_p\|\,.$$

This is the case of equality in Cauchy-Schwartz inequality, hence there exists $\mu_p \in \mathbb{C}$ such that $\lambda_p = \mu_p\, a_p$, $p = 1, \ldots, N$. This way, the 3-tensor T can be written as

$$T_k^{ij} = \sum_{m=1}^{N} \mu_m\, \overline{a_m^i}\, a_m^j\, \overline{a_m^k}\,. \tag{9.5.5}$$

In other words

$$T(x) = \sum_{m=1}^{N} \mu_m \langle a_m\,,\, x\rangle\, |a_m\rangle\langle a_m|\,.$$

We have obtained the orthonormal diagonalization of T. The proof is complete. □

9.5.2 Back to Obtuse Random Variables

The theorem above is a general diagonalization theorem for 3-tensors. For the moment it does not take into account the relation (9.4.11). When we make it enter into the game, we see the obtuse systems appearing.

Theorem 9.5.4. *Let T be a doubly-symmetric 3-tensor on $\mathbb{C}^N$, satisfying also the relation*

$$T_0^{ij} = \delta_{ij}$$

for all $i, j = 1, \ldots, N$. Then the orthogonal system S such as

$$T(x) = \sum_{v \in S} \frac{1}{\|v\|^2} \langle v\,,\, x\rangle\, |v\rangle\langle v|$$

is made of exactly N vectors $v_1, \ldots, v_N$, all of them satisfying $v_i^0 = 1$. In particular the family of N vectors of $\mathbb{C}^{N-1}$, obtained by restricting the v_i's to their $N-1$ last coordinates, forms an obtuse system in $\mathbb{C}^{N-1}$.

Proof. Assume that $S = \{v_1, \ldots, v_K\}$, first. By hypothesis, we have

$$T_k^{ij} = \sum_{m=1}^{K} \frac{1}{\|v_m\|^2}\, \overline{v_n^i}\, v_m^j\, \overline{v_m^k}\,,$$

for all $i, j, k = 1, \ldots, N$. With hypothesis (9.4.11) we have in particular

$$T_0^{ij} = \sum_{m=1}^{K} \frac{1}{\|v_m\|^2}\, \overline{v_n^i}\, v_m^j\, \overline{v_m^0} = \delta_{ij}$$

for all $i, j = 1, \ldots, N$.

Consider the orthonormal family of $\mathbb{C}^N$ made of the vectors $e_m = v_m / \|v_m\|$. We have obtained above the relation

$$\sum_{m=0}^{K} \overline{v_m^0}\, |e_m\rangle\langle e_m| = I$$

as matrices acting on $\mathbb{C}^N$. The above is thus a spectral decomposition of the identity matrix, this implies that the e_m's are exactly N vectors and that all the $\overline{v_m^0}$ are equal to 1.

This proves the first part of the theorem. The last part concerning obtuse systems is now obvious and was already noticed when we have introduced obtuse systems. □

In particular we have proved the following theorem.

Theorem 9.5.5. *The set of doubly-symmetric 3-tensors T on $\mathbb{C}^N$ which satisfy also the relation*

$$T_0^{ij} = \delta_{ij}$$

for all $i, j = 1, \ldots, N$, is in bijection with the set of obtuse random variables X on $\mathbb{C}^N$.

The bijection is described by the following:

– The random variable X is the only random variable satisfying

$$\overline{X^i} X^j = \delta_{ij} \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{N} T_k^{ij} X^k \,.$$

– The 3-tensor T is described by

$$T_k^{ij} = \mathbb{E}[\overline{X^i}\, X^j\, \overline{X^k}] \,.$$

9.5.3 Representation of multiplication operators

Let X be an obtuse random variable in $\mathbb{C}^N$, with associated 3-tensor T and let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_T)$ be the canonical space of X. We have seen that the space $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_T)$ is a $N+1$-dimensional Hilbert space and that the family $\{\overline{X^0}, \overline{X^1}, \ldots, \overline{X^N}\}$ is an orthonormal basis of that space. Hence for every obtuse random variable X, with 3-tensor, we have a natural unitary operator

$$\begin{array}{rcccc} U_T & : & L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_T) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{N+1} \\ & & \overline{X^i} & \longmapsto & e_i \,, \end{array}$$

where $\{e_0, \ldots, e_N\}$ is the canonical orthonormal basis of $\mathbb{C}^N$. The operator U_T is called the *canonical isomorphism* associated to X.

The following result is obvious from the definitions, but we call it Theorem for it is very useful.

Theorem 9.5.6. *Let X be an obtuse random variable on $\mathbb{C}^N$, with associated 3-tensor T and canonical isomorphism U_T. Then we have*

$$U_T\, \mathcal{M}_{X^i}\, U_T^* = \sum_{j,k=0}^{N} \overline{T_k^{ij}}\, a_k^j \,.$$

Proof. Let $\in \{1, \ldots, N\}$ be fixed. For all $j = 0, \ldots, N$ we have the relation

$$X^i \, \overline{X^j} = \sum_{k=0}^{N} \overline{T_k^{ij}} \, \overline{X^k} \, .$$

Recall that the operators a_n^m act on the orthonormal basis $\{\overline{X^0}, \overline{X^1}, \ldots, \overline{X^N}\}$ by

$$a_n^m \overline{X^p} = \delta_{mp} \overline{X^n} \, .$$

This gives

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m,k=0}^{N} \overline{T_k^{im}} \, a_k^m \right) \overline{X^j} &= \sum_{k=0}^{N} \overline{T_k^{ij}} \, \overline{X^k} \\ &= X^i \, \overline{X^k} \, . \end{aligned}$$

This proves the representation. □

9.5.4 Recovering the Real Case

In [7] have been introduced the notions of *real* obtuse random variables and their associated *real* doubly-symmetric 3-tensors. In the same way they obtained certain symmetries on the tensor which corresponded exactly to the condition for being diagonalizable in some real orthonormal basis. Note that in [7] the situation for the diagonalization theorem was much easier, for the symmetries associated to the 3-tensor came down to simultaneous diagonalization of commuting symmetric real matrices.

The question we want to answer here is: How do we recover the real case from the complex case? By this we mean: On what condition a complex doubly-symmetric 3-tensor correspond to a real one, that is, can be diagonalized in some *real* orthonormal basis? Surprisingly enough, the answer is not: When the coefficients T_k^{ij} are all real! Let us see that with a counter-example.

Let us consider the one dimensional random variable X which takes values i, $-i$ with probability $1/2$. As usual denote by X^0 the constant random variable equal to 1 and by X^1 the random variable X. We have the relations

$$\begin{aligned} \overline{X^0} X^0 &= X^0 \\ \overline{X^0} X^1 &= X^1 \\ \overline{X^1} X^0 &= -X^1 \\ \overline{X^1} X^1 &= X^0 \end{aligned}$$

give us the following matrices for the associated 3-tensor T:

$$T_{\cdot}^{\cdot 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad T_{\cdot}^{\cdot 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

They are real-valued matrices, but they are associated to a complex (non real) random variable.

In fact, the major difference between a complex (non real) doubly-symmetric 3-tensor and a real doubly-symmetric 3-tensor, is the commutation property of index i and j in the coefficients T_k^{ij}. More precisely, we have the following proposition.

Proposition 9.5.7. *Let T be a complex doubly symmetric tensor such that for all i, j, k*

$$T_k^{ij} = T_k^{ji}\,.$$

Then, T is a real 3-tensor related to a real obtuse random variable.

Proof. The commutation relation implies that

$$\mathbb{E}[\bar{X}^j X^i \bar{X}^k] = \mathbb{E}[\bar{X}^i X^j \bar{X}^k],$$

for all i, j, k. Since $\{X_k\}$ is an orthonormal basis of L^2, we get

$$\bar{X}^j X^i = \bar{X}^i X^j, a.s$$

for all i, j. Then $\bar{X}^j X^i$ is almost surely real for all i, j. Considering the case $j = 0$ implies that X^i is almost surely real and the result follows. □

In the counter-example above, one can check that $T_1^{01} = 1$ and $T_1^{10} = -1$. The commutation condition is not satisfied.

9.6 Representation of Classical Unitary Actions

Coming back to classical unitary operators on $\mathcal{H}$, the obtuse random variables appear naturally in a representation of the unitary operator.

9.6.1 Multiplication Operator Representation

In the following we assume that the reference state of $\mathcal{K}$ in which the probabilities of U are computed is the pure state e_0, first vector of the canonical orthonormal basis of $\mathcal{K}$. More complicated cases will be discussed later.

Theorem 9.6.1. *Let $\mathcal{K} = \mathbb{C}^{N+1}$. Let $U = \sum_{i=1}^{N+1} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ be a unitary operator on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ acting classically on $\mathcal{H}$. Assume that $\langle \phi_i\,, e_0\rangle \neq 0$ for all i. Then there exists an obtuse random variable X on $\mathbb{C}^N$, with associated 3-tensor T and canonical isomorphism U_T, such that*

$$U = A \otimes I + \sum_{i=1}^{N} B_i \otimes U_T\, \mathcal{M}_{X^i}\, U_T^* \tag{9.6.1}$$

for some operators $A, B_1, \ldots, B_N$ on $\mathcal{H}$.

More precisely, the obtuse random variable X is the one associated to the probability distribution $\{\|\langle e_0\,,\,\phi_i\rangle\|^2\ ,\ i=1,\dots,N+1\}$ *and to the values*

$$v_i^j = \frac{\langle e_j\,,\,\phi_i\rangle}{\langle e_0\,,\,\phi_i\rangle}$$

$i=1,\dots,N+1$, $j=1,\dots,N$. *The operators A and B_i are given by*

$$A = \sum_{i=0}^{N} p_i U_i \tag{9.6.2}$$

and

$$B_i = \sum_{j=0}^{N} p_j \overline{v_j^i} U_j\,. \tag{9.6.3}$$

Proof. In the canonical basis of $\mathcal{K}$, the vector ϕ_i is of the form

$$\phi_i = \begin{pmatrix} \langle e_0\,,\,\phi_i\rangle \\ |w_i\rangle \end{pmatrix} = \langle e_0\,,\,\phi_i\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ |v_i\rangle \end{pmatrix}\,,$$

where $|v_i\rangle$ is the vector of $\mathbb{C}^N$ described in the theorem. Putting $p_i = \|\langle e_0\,,\,\phi_i\rangle\|^2$, this gives

$$|\phi_i\rangle\langle\phi_i| = p_i \begin{pmatrix} 1 & \langle v_i| \\ |v_i\rangle & |v_i\rangle\langle v_i| \end{pmatrix}.$$

We can write it also as

$$|\phi_i\rangle\langle\phi_i| = p_i\, I + p_i \begin{pmatrix} 0 & \langle v_i| \\ |v_i\rangle & |v_i\rangle\langle v_i| - I \end{pmatrix}.$$

We shall concentrate on the action of the last matrix. On a generic vector it acts as follows

$$\begin{pmatrix} 0 & \langle v_i| \\ |v_i\rangle & |v_i\rangle\langle v_i| - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ |\omega\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_i\,,\,\omega\rangle \\ x\,|v_i\rangle + \langle v_i\,,\,\omega\rangle|v_i\rangle - |\omega\rangle \end{pmatrix}.$$

In coordinates this gives

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^N \overline{v_i^l}\,\omega^l \\ \left(x\,v_i^k + \sum_{l=1}^N \overline{v_i^l}\,\omega^l\,v_i^k - \omega^k\right)_k \end{pmatrix}.$$

Let us compare it to the action of multiplication by $\sum_{l=1}^{N} \alpha_l X_l$ on the corresponding generic vector, in the basis $\{\overline{X^0}, \overline{X^1}, \ldots, \overline{X^n}\}$. We get

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{l=1}^{N} \alpha_l X^l\right)\left(x\,\overline{X^0} + \sum_{k=1}^{N} \omega^k\,\overline{X^k}\right) &= \\
&= \sum_{l=1}^{N} \alpha_l\, x\, X^l + \sum_{k,l=1}^{N} \alpha_l\, \omega^k\, X^l\, \overline{X^k} \\
&= \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=0}^{N} \alpha_l\, x\, \overline{T_l^{k0}}\,\overline{X^k} + \sum_{k,l=1}^{N} \alpha_l\, \omega^k \sum_{m=0}^{N} \overline{T_m^{lk}}\,\overline{X^m} \\
&= \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=0}^{N} \alpha_l\, x\, \overline{T_l^{k0}}\,\overline{X^k} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, \omega^k\, \overline{X^0} + \sum_{k,l,m=1}^{N} \alpha_l\, \omega^k\, \overline{T_m^{lk}}\,\overline{X^m}
\end{aligned}$$

By identification on the term in front of $\overline{X^0}$, we put $\alpha_k = \overline{v_i^k}$, this gives

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{l=1}^{N} \alpha_l X^l\right)\left(x\overline{X^0} + \sum_{k=1}^{N} \omega^k\,\overline{X^k}\right) &= \\
&= \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=0}^{N} \overline{v_i^l}\, x\, \overline{T_l^{k0}}\,\overline{X^k} + \sum_{k=1}^{N} \overline{v_i^k}\, \omega^k \overline{X^0} + \sum_{k,l,m=1}^{N} \overline{v_i^l}\, \omega^k\, \overline{T_m^{lk}}\,\overline{X^m}\,.
\end{aligned}$$

In the first term on the right hand side we have the expression

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{N} \overline{v_i^l}\, x\, \overline{T_l^{k0}} &= \sum_{l=1}^{N} \overline{v_i^l}\, x \sum_{m=0}^{N} p_m\, v_m^k\, v_m^l \\
&= \sum_{m\neq i} (-1)\, x\, p_m\, v_m^k + x\, \|v_i\|^2\, p_i\, v_i^k \\
&= \sum_{m} (-1)\, x\, p_m\, v_m^k + x\, p_i\, v_i^k + x\, \|v_i\|^2\, p_i\, v_i^k \\
&= 0 + x\, v_i^k\,.
\end{aligned}$$

This gives the expected coefficient in front of $\overline{X^k}$.

In the third term of the right hand side we have the expression

$$\begin{aligned}
\sum_{l,k=1}^{N} \overline{v_i^l} \omega^k \, \overline{T_m^{lk}} &= \sum_{l,k=1}^{N} \sum_{\mu=0}^{N} \overline{v_i^l} \, \omega^k \, p_\mu \, v_\mu^l \, \overline{v_\mu^k} \, v_\mu^m \\
&= \sum_{l,k=1}^{N} \sum_{\mu=0}^{N} \overline{v_i^l} \, \omega^k \, p_\mu \, v_\mu^l \, \overline{v_\mu^k} \, v_\mu^m \\
&= \sum_{k} \sum_{\mu \neq i} (-1) \, \omega^k \, p_\mu \, \overline{v_\mu^k} \, v_\mu^m + \sum_{k} \|v_i\|^2 \, \omega^k \, p_i \, \overline{v_i^k} \, v_i^m \\
&= \sum_{k} \sum_{\mu} (-1) \, \omega^k \, p_\mu \, \overline{v_\mu^k} \, v_\mu^m + \sum_{k} \omega^k \, p_i \, \overline{v_i^k} \, v_i^m + \sum_{k} \|v_i\|^2 \, \omega^k \, p_i \, \overline{v_i^k} \, v_i^m \\
&= \sum_{k} -\omega^k \, \delta_{k,m} + \sum_{k} \omega^k \, \overline{v_i^k} \, v_i^m \\
&= -\omega^m + \langle v_i \, , \, \omega \rangle \, v_i^m \, .
\end{aligned}$$

This gives the right coefficient again. We have proved the announced representation of U. □

We have studied the case where e_0 is the reference state ω and satisfies $\langle \phi_i \, , \, e_0 \rangle \neq 0$ for all i. Let us see how this works in the other cases.

Case where ω is a pure state different from e_0 and no $\langle \phi_i \, , \, \omega \rangle$ vanish

Choosing a unitary operator V on $\mathcal{K}$ such that $V\omega = e_0$ and remarking that

$$p_i = |\langle \phi_i \, , \, \omega \rangle|^2 = |\langle V\phi_i \, , \, e_0 \rangle|^2 \, ,$$

we see that the random unitary model described by

$$\sum_{i=0}^{n} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

associated to the state ω is equivalent to the model

$$\sum_{i=0}^{n} U_i \otimes |V\phi_i\rangle\langle V\phi_i|$$

associated to the state e_0. Then we can apply the above description replacing ϕ_i by $V\phi_i$.

Case where ω is any pure state and some $\langle \phi_i \, , \, \omega \rangle$ vanish

In the case where there exist some i such that $p_i = 0$, which means that the corresponding unitary U_i does not contribute to the evolution, we can still associate an obtuse random

variable but with lower dimension. Indeed, eventually to a cost of renumbering the indexes, the significant unitary is

$$\sum_{i=0}^{d} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i|\,,$$

where, for all $i = d+1, \ldots, n$, we have $p_i = 0$. In this case the vector space generated by $F = \{\phi_i\,,\ i = 0, \ldots, d\}$ is of dimension $d+1$. This way there exist a unitary operator W from F onto $\mathbb{C}^{d+1}$. We put $\tilde{\phi}_i = W\phi_i$, $i = 0, \ldots, d$ and $\tilde{\omega} = W\omega$. Now the random unitary model

$$\sum_{i=0}^{d} U_i \otimes |\widetilde{\phi}_i\rangle\langle\widetilde{\phi}_i|\,,$$

associated to the state $\tilde{\omega}$ belongs to one of the previous cases (replacing n by d).

Case where ω is a density matrix

In order to treat this general case, we need to use the so-called *G.N.S representation*, which allows to consider ω as the first vector of the orthonormal basis but of an enlarged space. The G.N.S representation of $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega)$ is described as follows. Associated to ω, we define

$$\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{n+1})\,;\ Tr[\omega\, A^* A] = 0\}$$

and put

$$\mathcal{H} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^{n+1})/\mathcal{V}\,.$$

Now, for $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^{n+1})$, define the map

$$\begin{array}{rccc} \pi(A): & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & [B] & \mapsto & [AB], \end{array}$$

where $[X]$ denotes the equivalent class of an operator X in $\mathcal{H}$.

Define, for all $([A],[B]) \in \mathcal{H}$

$$\langle [A],[B]\rangle = Tr\big[\omega_0\, A^\star B\big]\,. \tag{9.6.4}$$

This is a scalar product on $\mathcal{H}$, which makes it a Hilbert space.

The linear map π from $\mathcal{H}$ into $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ which to $A \in \mathcal{H}$ associates the map $\pi(A)$ is actually a representation of $(\mathbb{C}^{n+1}, \omega)$, the so-called "G.N.S. representation".

In particular we have

$$\langle [I], \pi(A)[I]\rangle = Tr\big[\omega A\big]\,,$$

for all $A \in \mathcal{H}$. The vector $[I] \in \mathcal{H}$ is of norm 1 for this scalar product. In the sequel we fix an orthonormal basis $\{E_0, \ldots, E_d\}$ of $\mathcal{H}$ where $E_0 = [I]$. This means that transported by π the action of the state ω on an observable A is the same that the one of the pure state $|I\rangle\langle I|$ on $\pi(A)$.

Within this representation, a random unitary model

$$\sum_{i=0}^{n+1} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \,,$$

associated with the state ω is equivalent to

$$\sum_{i=0}^{n+1} U_i \otimes \pi(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|) \,,$$

associated with the pure state E_0. Indeed, the family $\{\pi(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|)\}$ is a family of orthogonal projectors for the new scalar product. Let us denote these projectors by P_i. The rank of P_i is not necessarily 1. Therefore, we define a family of orthonormal vectors by

$$\psi_i = \frac{P_i|E_0\rangle}{\|P_i|E_0\rangle\|}$$

for all i. Note that

$$|\langle\psi_i, E_0\rangle|^2 = \|P_i|E_0\rangle\|^2 = Tr(\omega\pi(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|)).$$

Finally, the model

$$\sum_{i=0}^{n+1} U_i \otimes |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \,,$$

with the state ω is equivalent to

$$\sum_{i=0}^{n+1} U_i \otimes |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \,,$$

with the state $|E_0\rangle\langle E_0|$ of the environment. And we fall into the previous case.

9.7 An example in dimension 1

Let us workout an example. Let $h > 0$ be a fixed parameter. Consider the following Hamiltonian on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

$$H_{\text{tot}} = H \otimes I + V \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{h}} a_1^0 + \frac{1}{\sqrt{h}} a_0^1 + \frac{1-h}{h} a_1^1 \right) \,,$$

where V is self-adjoint on $\mathcal{H}$. In other words

$$H_{\text{tot}} = H_S \otimes I + \frac{1}{\sqrt{h}} V \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1-h}{\sqrt{h}} \end{pmatrix} \,.$$

Consider the following orthonormal basis of $\mathbb{C}^2$:

$$|\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+h}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{h} \end{pmatrix}, \qquad |\phi_2\rangle = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{1+h}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{h} \end{pmatrix} \,,$$

so that

$$|\phi_1\rangle\langle\phi_1| = \frac{1}{1+h}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{h} \\ -\sqrt{h} & h \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad |\phi_2\rangle\langle\phi_2| = \frac{1}{1+h}\begin{pmatrix} h & \sqrt{h} \\ \sqrt{h} & 1 \end{pmatrix}.$$

Computing

$$-\sqrt{h}|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{h}}|\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

gives

$$\frac{1}{1+h}\begin{pmatrix} 0 & 1+h \\ 1+h & \frac{1}{\sqrt{h}} - h\sqrt{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1-h}{\sqrt{h}} \end{pmatrix}.$$

This means that our Hamiltonian can be rewritten

$$H_{\text{tot}} = H_S \otimes (|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|) + \frac{1}{\sqrt{h}}V \otimes \left(-\sqrt{h}|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{h}}|\phi_2\rangle\langle\phi_2|\right)$$

or else

$$H_{\text{tot}} = (H_S - V) \otimes |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \left(H_S + \frac{1}{h}V\right) \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2|.$$

When written under this form H_{tot} can be easily exponentiated; let us compute $U = e^{-ihH_{\text{tot}}}$. We get

$$\begin{aligned} U &= e^{-ih(H_S-V)} \otimes |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + e^{-ih(H_S+\frac{1}{h}V)} \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2| \\ &= e^{-ih(H_S-V)} \otimes |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + e^{-i(hH_S+V)} \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2|. \end{aligned}$$

We recover the form of a classical unitary operator on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

$$U = U_1 \otimes |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + U_2 \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2|.$$

The matrix form for U is then

$$\frac{1}{1+h}\begin{pmatrix} U_1 + hU_2 & \sqrt{h}(U_2 - U_1) \\ \sqrt{h}(U_2 - U_1) & hU_1 + U_2 \end{pmatrix}.$$

Let us expand the terms of this matrix up to $o(h)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2) &= (1 - h + o(h))(I - ih(H_S - V) + he^{-iV} + o(h)) \\ &= (1-h)I - ihH_S + ihV + he^{-iV} + o(h) \\ \frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1) &= (\sqrt{h} + o(h))(e^{-iV} - I - ihH_S + o(h)) \\ &= \sqrt{h}e^{-iV} + o(h) \\ \frac{1}{1+h}(hU_1 + U_2) &= (1 - h + o(h))(hI + e^{-iV} + hK + o(h) \\ &= e^{-iV} + hK' + o(h) \end{aligned}$$

where K and K' are complicated expression which we will not need to develop. Altogether this gives

$$U = \begin{pmatrix} I + h(-iH_S + e^{-iV} - I + iV) + o(h) & \sqrt{h}(e^{-iV} - I) + o(h) \\ \sqrt{h}(e^{-iV} - I) + o(h) & I + (e^{-iV} - I) + o(1) \end{pmatrix} .$$

In the framework of [12], the repeated quantum interaction scheme associated to that unitary operator converges to the solution of the QSDE

$$dV_t = (-iH_S + e^{-iV} - I + iV)V_t\,dt + (e^{-iV} - I)V_t\,(da_1^0(t) + da_0^1(t) + da_1^1(t))$$

or else

$$dV_t = (-iH_S + iV)V_t\,dt + (e^{-iV} - I)V_t\,dN_t$$

where (N_t) is a standard Poisson process.

Let us try to understand this evolution equation from the discrete-time one, directly in probabilistic terms. The fact that

$$U = U_1 \otimes |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + U_2 \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

can be written

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2) \otimes I + \frac{1}{1+h}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{h}(U_2 - U_1) \\ \sqrt{h}(U_2 - U_1) & (1-h)(U_2 - U_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2) \otimes I + \frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1-h}{\sqrt{h}} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

With the matrix on the right-hand side we recognize the multiplication operator by the obtuse random variable X taking values $1/\sqrt{h}$ with probability $h/(1+h)$ and $-\sqrt{h}$ with probability $1/(1+h)$.

We have

$$U = \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2) \otimes I + \frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1) \otimes X .$$

This means that U takes, with probability $h/(1+h)$, the value

$$U = \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2) + \frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1)\frac{1}{\sqrt{h}} = U_2$$

and, with probability $1/(1+h)$, the value

$$U = \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2) + \frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1)(-\sqrt{h}) = U_1 .$$

The repeated interaction scheme gives

$$V_{n+1} = \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2)V_n \otimes I_{n+1} + \frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1)V_n \otimes X_{n+1}$$

or else

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2 - (1+h)I)V_n \otimes I_{n+1} + \frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1)V_n \otimes X_{n+1}\,. \tag{9.7.1}$$

The unitary operator V_{n+1} is equal to V_n multiplied on the left by U_1 or U_2 with respective probability $1/(1+h)$ and $h/(1+h)$.

This means that very often, a given value of V_n will get multiplied on the left by U_1, more exactly it is multiplied on the left by U_1^n with probability $1/(1+h)^n$. If the time steps are of length h too, we get a multiplication on the right by $U_1^{t/h}$ with probability $1/(1+h)^{t/h}$. This means, in the limit h tends to 0, that starting with a V_{t_0}, we have a random variable τ which is the first time when $X_n = 1/\sqrt{h}$. The law of τ is a geometrical law which converge, when h tends to 0 to an exponential law $\mathcal{E}(1)$. Before that jumping time τ, the unitary V_t is obtained by

$$V_t = e^{-i(t-t_0)(H_S - V)}V_{t_0}\,.$$

At the time τ, the unitary V_t gets multiplied by U_2, that is, by e^{-iV} for small h. This is exactly what is described by the QSDE associated to V_t above.

One can also understand it directly with Equation (9.7.1). We have

$$\frac{1}{1+h}(U_1 + hU_2 - (1+h)I) = -ihH_S + ihV + h(e^{iV} - I) + o(h)$$

and

$$\frac{\sqrt{h}}{1+h}(U_2 - U_1) = \sqrt{h}(e^{-iV} - I + o(1))$$

so that

$$V_{n+1} - V_n = (-iH_S + iV + (e^{iV} - I) + o(1))V_n \otimes (hI_{n+1}) + (e^{-iV} - I + o(1))V_n \otimes (\sqrt{h}X_{n+1})\,.$$

The random variable $\sqrt{h}X_n$ takes the values $-h$ with probability $1/(1+h)$ and 1 with probability $h/(1+h)$. We have also

$$V_{n+1} - V_n = (-iH_S + iV)V_n \otimes (hI_{n+1}) + (e^{-iV} - I + o(1))V_n \otimes (\sqrt{h}X_{n+1} + hI_{n+1})\,.$$

The random variable $\sqrt{h}X_n + hI_n$ takes the values 0 with probability $1/(1+h)$ and $1+h$ with probability $h/(1+h)$. At the limit h tends to 0 we are clearly dealing with a standard Poisson process and the evolution equation is exactly our QSDE.

Chapitre 10

Article 3 : Limite du continu pour un système biparti

Entanglement of Bipartite Quantum Systems driven by Repeated Interactions

Stéphane ATTAL, Julien DESCHAMPS, Clément PELLEGRINI

Abstract

We consider bipartite quantum systems without interaction, undergoing repeated interactions with some environment. We show that the environment creates entanglement in between the two systems. Even more we show that it creates an interaction Hamiltonian, that we compute explicitly. We also investigate physical models where we prove return to equilibrium and asymptotic lost of entanglement.

10.1 Introduction

Initially introduced in [12] in order to justify the quantum Langevin equations, quantum repeated interaction models are currently a tremendous line of research. It has found various applications: quantum trajectories [39, 40, 41], stochastic control [42], thermalization [21, 8]. Moreover several concrete physical experiments exactly converge to repeated quantum interactions [30, 31].

Quantum repeated interactions concern particular discrete time evolutions in Open Quantum System Theory. More precisely, the typical situation is the one of a quantum system $\mathcal{H}_S$ in contact with an infinite chain of quantum system $\bigotimes_k \mathcal{H}_k$. The quantum systems $\mathcal{H}_k$ interact with $\mathcal{H}_S$ one after the others during a time h. Concretely $\mathcal{H}_1$ interacts with $\mathcal{H}_S$ during the time h and then stops interacting, the second quantum system $\mathcal{H}_2$ then interacts with $\mathcal{H}_S$ and so on.

The continuous time limit, when h goes to zero, has been studied in detail in [12]. Remarkably, it has been shown that such discrete time models converge to the quantum Langevin equations described by Hudson and Parthasarathy. In particular, this gives an intuitive, but rigorous, justification of the use of such equations. Such an approach has also been applied in the context of indirect measurements allowing to recover Stochastic Schrödinger Equations in the continuous time limit [39, 40, 41].

In this article, we concentrate on a particular situation. We consider that the system $\mathcal{H}_S$ is composed of two isolated quantum systems $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$, that is, the two systems do not interact together. This "uncoupled" system undergoes quantum repeated interactions as follows. We consider that all the systems $\mathcal{H}_k$ interact first with $\mathcal{H}_S^A$ during a time h without interacting with $\mathcal{H}_S^B$ and then with $\mathcal{H}_S^B$ without interacting anymore with $\mathcal{H}_S^A$.

Physically this can be understood as a model of two isolated cavities interacting one after the other with a beam of photon. An incoming photon interacts first with the cavity and then with the second cavity.

Our work is motivated by entanglement considerations. While, the systems $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$ are not initially entangled and while there are no direct interaction between us, our special scheme of quantum repeated interactions creates naturally entanglement. More precisely, we show that this scheme of interaction is equivalent to a usual quantum repeated interaction model where, actually, $\mathcal{H}_S^A$ interacts with $\mathcal{H}_S^B$. In other words, the special scheme of quantum repeated interactions creates spontaneously an effective interaction between $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$. Moreover we can concretely describe this interaction Hamiltonian.

In the present work, we focus on the continuous time limit, when the time interaction between the systems $\mathcal{H}_k$ and $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ goes to zero. In particular we derive the associated Lindblad equation which describes the reduced evolution of $\mathcal{H}_S$. This allows to identify the effective coupling Hamiltonian. We also study the asymptotic behavior and the entanglement of the limit dynamics in some physical examples.

10.2 Bipartite Model

This section is devoted to the description of the model. As announced, we consider a quantum system $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$, where $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$ do not interact together ($\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$ are finite dimensional Hilbert spaces). This means that the free evolution of $\mathcal{H}_S$ is given by

$$H^A \otimes I + I \otimes H^B,$$

where H^A and H^B are the free Hamiltonian of $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$. This system is coupled to an environment made of an infinite chain of identical and independent systems :

$$T\Phi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{H}_k,$$

where $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}$ for all k.

The interaction between $\mathcal{H}_S$ and the infinite chain is described by a model of quantum interactions, that is, the copies of $\mathcal{H}$ interact one after the others with $\mathcal{H}_S$ and then stop interacting. A single interaction between a copy of $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ is described by a particular mechanism. The interaction is indeed divided into two parts. The system $\mathcal{H}$ interacts first with $\mathcal{H}_S^A$ during a time h without interacting with $\mathcal{H}_S^B$. Then, the system $\mathcal{H}$ interacts with $\mathcal{H}_S^B$ during a time h without interacting with $\mathcal{H}_S^A$.

In terms of Hamiltonians, the evolution of the coupled system $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B \otimes \mathcal{H}$ can be described as follows. For the first interaction we consider a Hamiltonian of the form

$$H_{tot}^A = H^A \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + \lambda H_I^A, \tag{10.2.1}$$

where H_R represents the free Hamiltonian of $\mathcal{H}$, the operator H_I^A represents the interaction Hamiltonian between $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}_S^A$ and λ is a coupling constant (to be more precise and with respect to the evolution that we consider, this operator acts as the identity operator on $\mathcal{H}_S^B$). In a similar way the second evolution is described by

$$H^B_{tot} = I \otimes H^B \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + \lambda' H^B_I, \tag{10.2.2}$$

where this time H^B_I acts only non trivially on $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}^B_S$ and acts as the identity operator on $\mathcal{H}^A_S$. The terms λ' represents also the coupling constant of the second interaction. Each operator H^A_{tot} and H^B_{tot} gives rise to a unitary evolution

$$U^A = e^{-ihH^A_{tot}} \tag{10.2.3}$$

$$U^B = e^{-ihH^B_{tot}}. \tag{10.2.4}$$

The composed evolution is then given by

$$U = U^B U^A. \tag{10.2.5}$$

Let us stress that usually the interaction between H and $\mathcal{H}_S$ should have been given by an Hamiltonian of the form $\tilde{H}_{tot} = H^A \otimes I \otimes I + I \otimes H^B \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + \Lambda \tilde{H}_I$, where $\tilde{H}_I$ would have represented the interaction Hamiltonian. This would have given rise to a usual unitary operator of the form

$$U = e^{-i2h\tilde{H}_{tot}}. \tag{10.2.6}$$

In our model, since H^A_I and H^B_I do not commute we cannot directly put the unitary (10.2.5) in the form of (10.2.6) (that is, with a unique exponential). In the following, we shall see that our model with $U = U^B U^A$ is equivalent to a standard model where actually there is an effective interaction between $\mathcal{H}^A_S$ and $\mathcal{H}^B_S$. To this end we have to make precise the form of the interaction Hamiltonians involved in (10.2.1) and (10.2.2).

We consider that all the Hilbert spaces involved in the interaction, that is, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^A_S$ and $\mathcal{H}^B_S$ are finite dimensional. The Hilbert space $\mathcal{H}$ is represented by $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{N+1}$. On $\mathbb{C}^{N+1}$ we consider an orthonormal eigen-basis of H^R denoted by $\{e_0, e_1, \ldots, e_N\}$. We have the associated canonical operators (a^i_j) defined by

$$a^i_j e_k = \delta_{ik} e_j \,,$$

for all i, j and k in $\{0, ..., N\}$. With this notation, we have

$$H^R = \sum_{j=0}^{N} \gamma_j \, a^j_j = \sum_{j=0}^{N} \gamma_j \, a^0_j a^j_0 \,,$$

where the γ_j's are the eigenvalues of H^R (they are positive real numbers).

Now for the interaction Hamiltonians, we consider operators of the following form

$$H^A_I = \sum_{j=1}^{N} V_j \otimes I \otimes a^0_j + V^*_j \otimes I \otimes a^j_0 \,,$$

and

$$H_I^B = \sum_{j=1}^{N} I \otimes W_j \otimes a_j^0 + I \otimes W_j^* \otimes a_0^j \,,$$

where the V_j's are operators on $\mathcal{H}_S^A$ and the W_j's on $\mathcal{H}_S^B$.

As usual in the Schrödinger picture the evolutions of states on $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B \otimes \mathcal{H}$ are given by

$$\rho \longmapsto U\rho\, U^* \,,$$

where we recall that U takes the particular form $U = U^B U^A$ in our context.

Now, we are in the position to describe the whole interaction between $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ and the chain $\bigotimes_k \mathcal{H}_k$, with $\mathcal{H}_k = \mathcal{H} = \mathbb{C}^{N+1}$. The scheme is as follows, the first copy $\mathcal{H}_1$ interacts with $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ during a time $2h$ while the rest of the chain remains isolated then the first copy disappear and the second copy comes to interacts and so on... Before making precise the evolution, we need to introduce a notation for the operators acting only on $\mathcal{H}_n$ and being the identity operator on the rest of the whole space. This way if A is an operator on $\mathcal{H}$, we extend it as an operator on $\bigotimes_k \mathcal{H}_k$ but acting only non trivially on $\mathcal{H}_n$ by putting

$$A(n) = \bigotimes_{k=1}^{n-1} I \otimes A \otimes \bigotimes_{k>n+1} I.$$

Mathematically, on $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B \bigotimes_k \mathcal{H}_k$, we consider the family of unitary operators (U_n), where U_n acts as U on $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ and the copy number n of $\mathcal{H}$ and as the identity on the rest of the chain. The operator U_n represents actually the interaction between $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ and $\mathcal{H}_n$. More precisely, the operator U_n is defined as $U_n = U_n^B U_n^A$, where for example $U_n^A = e^{-ihH_{tot,n}^A}$ with

$$H_{tot,n}^A = H^A \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes H_R(n) + \lambda \sum_{j=1}^{N} V_j \otimes I \otimes a_j^0(n) + V_j^* \otimes I \otimes a_0^j(n) \,. \tag{10.2.7}$$

A similar description holds for U_n^B.

The whole evolution is then described by the family of unitary operators (V_n) defined by

$$V_n = U_n U_{n-1} \dots U_1 \,. \tag{10.2.8}$$

As a consequence, if the initial state of $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B \bigotimes_k \mathcal{H}_k$ is ρ_0, the state after n interactions is

$$\rho_0 \longmapsto V_n\, \rho_0\, V_n^*.$$

Now that the discrete time evolution is clearly described, we shall now investigate the continuous time limit of such an evolution in the next section.

10.3 Continuous-Time Limit

This section is devoted to derive the continuous time limit of our special scheme of repeated interactions, i.e. the limit when the time parameter h goes to 0. It has been shown in [12], that taking simply the limit in the above description gives a trivial continuous time evolution (actually only the free evolution remains in continuous time). In order to obtain a relevant limit, the authors of [12] have shown that the total Hamiltonian has to be properly rescaled in terms of h. In particular it is crucial to strengthen the interaction in order to see its effect at the limit. More precisely, translated in our context, the total Hamiltonians have to be considered of the following form:

$$H^A_{tot} = H^A \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i=1}^{N} V_j \otimes I \otimes a^0_j + V^*_j \otimes I \otimes a^j_0 \,,$$

and,

$$H^B_{tot} = I \otimes H^B \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{j=1}^{N} I \otimes W_j \otimes a^0_j + I \otimes W^*_j \otimes a^j_0 \,.$$

Let us stress that in the above expressions the coupling constants appearing in (10.2.1) and (10.2.2) have been replaced by $1/\sqrt{h}$. This scaling represents the good way of strengthening the interaction when h goes to zero in order to obtain a relevant continuous time evolution. In particular, let $[\,\cdot\,]$ denote the integer part, one can show that the operators $(V_{[t/h]})_t$ defined in (10.2.8) converge to a family of operators $(U_t)_t$ satisfying a particular quantum stochastic differential equation. In our setup this can be expressed as follows.

Theorem 10.3.1. *When the interaction time h goes to 0, the continuous time dynamics converges strongly to the unitary solution of the quantum stochastic differential equation*

$$\begin{aligned} dU_t = &\left[-i(H^A \otimes I + I \otimes H^B + 2\lambda_0 I \otimes I) - \frac{1}{2} \sum_j V^*_j V_j \otimes I + I \otimes W^*_j W_j + 2V_j \otimes W^*_j \right] U_t dt \\ &- i \sum_{i=1}^{N} (V_j \otimes I + I \otimes W_j) U_t \; da^0_j(t) + (V^*_j \otimes I + I \otimes W^*_j) U_t \; da^j_0(t) \,. \end{aligned} \tag{10.3.1}$$

Proof. The essential step is to identify the relevant terms when we expand

$$U = U^B U^A = e^{-ihH^B_{tot}} e^{-ihH^A_{tot}},$$

in terms of h. More precisely, on $\mathcal{H}^A_S \otimes \mathcal{H}^B_S \otimes \mathcal{H}$, one can decompose U as

$$U = \sum_{i,j} U^i_j(h) \otimes a^i_j, \tag{10.3.2}$$

where $U^i_j(h)$ are operators on $\mathcal{H}^A_S \otimes \mathcal{H}^B_S$. This way, we shall find the asymptotic expression of $U^i_j(h)$ and next we shall apply the convergence results of [12] to derive Eq. (10.3.1).

In order to obtain the asymptotic expression of $U^i_j(h)$, let us study H^A_{tot} and H^B_{tot} in details. Using a similar decomposition as (10.3.2) the operators H^A_{tot} and H^B_{tot} can be seen as matrices whose the coefficients are operators on $\mathcal{H}^A_S \otimes \mathcal{H}^B_S$. In particular, they can be written as follows

$$H^A_{tot} = \begin{pmatrix} H^A \otimes I + \lambda_0 I \otimes I & \frac{1}{\sqrt{h}} V_1^* \otimes I & \frac{1}{\sqrt{h}} V_2^* \otimes I & \cdots & \frac{1}{\sqrt{h}} V_N^* \otimes I \\ \frac{1}{\sqrt{h}} V_1 \otimes I & H^A \otimes I + \lambda_1 I \otimes I & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{h}} V_2 \otimes I & 0 & H^A \otimes I + \lambda_2 I \otimes I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{h}} V_N \otimes I & 0 & 0 & \cdots & H^A \otimes I + \lambda_N I \otimes I \end{pmatrix}$$

and,

$$H^B_{tot} = \begin{pmatrix} I \otimes H^B + \lambda_0 I \otimes I & \frac{1}{\sqrt{h}} I \otimes W_1^* & \frac{1}{\sqrt{h}} I \otimes W_2^* & \cdots & \frac{1}{\sqrt{h}} I \otimes W_N^* \\ \frac{1}{\sqrt{h}} I \otimes W_1 & I \otimes H^B + \lambda_1 I \otimes I & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{h}} I \otimes W_2 & 0 & I \otimes H^B + \lambda_2 I \otimes I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{h}} I \otimes W_N & 0 & 0 & \cdots & I \otimes H^B + \lambda_N I \otimes I \end{pmatrix}$$

Now, we can make the Taylor expansion of U. In order to apply [12], only the terms $I \otimes I$, $(-ihH^A_{tot})$, $(-ihH^B_{tot})$, $(-ihH^A_{tot})^2$ and $(-ihH^B_{tot})^2$ are relevant. After computations, the operators U^A and U^B satisfy

$$U^A = \begin{pmatrix} D^A_0 & -i\sqrt{h} V_1^* \otimes I & -i\sqrt{h} V_2^* \otimes I & \cdots & -i\sqrt{h} V_N^* \otimes I \\ -i\sqrt{h} V_1 \otimes I & D^A_1 & -\frac{1}{2} h V_1 V_2^* \otimes I & \cdots & -\frac{1}{2} h V_1 V_N^* \otimes I \\ \vdots & -\frac{1}{2} h V_2 V_1^* \otimes I & D^A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -i\sqrt{h} V_N \otimes I & -\frac{1}{2} h V_N V_1^* \otimes I & -\frac{1}{2} h V_N V_2^* \otimes I & \cdots & D^A_N \end{pmatrix} + \circ(h^{3/2})$$

and,

$$U^B = \begin{pmatrix} D^B_0 & -i\sqrt{h} I \otimes W_1^* & -i\sqrt{h} I \otimes W_2^* & \cdots & -i\sqrt{h} I \otimes W_N^* \\ -i\sqrt{h} I \otimes W_1 & D^B_1 & -\frac{1}{2} h I \otimes W_1 W_2^* & \cdots & -\frac{1}{2} h I \otimes W_1 W_N^* \\ \vdots & -\frac{1}{2} h I \otimes W_2 W_1^* & D^B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -i\sqrt{h} I \otimes W_N & -\frac{1}{2} h I \otimes W_N W_1^* & -\frac{1}{2} h I \otimes W_N W_2^* & \cdots & D^B_N \end{pmatrix} + \circ(h^{3/2})$$

where the diagonal coefficients of U^A and U^B are for all $j = 1, \dots, N$,

$$D_0^A = I \otimes I - ihH^A \otimes I - ih\lambda_0 I \otimes I - \frac{1}{2}h \sum_j V_j^* V_j \otimes I + \circ(h^{3/2}),$$
$$D_j^A = I \otimes I - ihH^A \otimes I - ih\lambda_j I \otimes I - \frac{1}{2}hV_j V_j^* \otimes I + \circ(h^{3/2}),$$
$$D_0^B = I \otimes I - ihI \otimes H^B - ih\lambda_0 I \otimes I - \frac{1}{2}h \sum_j I \otimes W_j^* W_j + \circ(h^{3/2}),$$
$$D_j^B = I \otimes I - ihI \otimes H^B - ih\lambda_j I \otimes I - \frac{1}{2}hI \otimes W_j W_j^* + \circ(h^{3/2}).$$

This way computing $U^B U^A$ in asymptotic form, the coefficients $U_j^i(h)$ of the matrix U for $i, j = 0, \dots, N$ are up to the terms of order at least 3/2

$$U_0^0 = I \otimes I - ih(H_A \otimes I + I \otimes H_B + 2\lambda_0 I \otimes I) - \frac{1}{2}h \sum_j V_j^* V_j \otimes I + I \otimes W_j^* W_j + 2V_j \otimes W_j^*,$$
$$U_0^j = -i\sqrt{h}(V_j^* \otimes I + I \otimes W_j^*),$$
$$U_j^0 = -i\sqrt{h}(V_j \otimes I + I \otimes W_j),$$
$$U_j^j = I \otimes I - ih(H_A \otimes I + I \otimes H_B + 2\lambda_j I \otimes I) - \frac{1}{2}h(V_j V_j^* \otimes I + I \otimes W_j W_j^* + 2V_j^* \otimes W_j),$$
$$U_j^k = -\frac{1}{2}h(V_j V_k^* \otimes I + I \otimes W_j W_k^* + 2V_k^* \otimes W_j).$$

This way, we can easily check that

$$\lim_{h \to 0} \frac{U_j^i(h) - \delta_{ij} I}{h^{\epsilon_{i,j}}} = L_j^i,$$

where $\epsilon_{0,0} = 1$, $\epsilon_{0,j} = \epsilon_{j,0} = 1/2$ and $\epsilon_{i,j} = 0$ otherwise and where

$$L_0^0 = -i(H^A \otimes I + I \otimes H^B + 2\lambda_0 I \otimes I) - \frac{1}{2} \sum_j V_j^* V_j \otimes I + I \otimes W_j^* W_j + 2V_j \otimes W_j^*,$$
$$L_0^j = -i(V_j^* \otimes I + I \otimes W_j^*),$$
$$L_j^0 = -i(V_j \otimes I + I \otimes W_j),$$
$$L_j^i = 0.$$

These are exactly the conditions of Theorem of [12] and the results follows. □

Now that we have derived (10.3.1), we want to stress some important consequences of such an evolution, grouped together in the following theorem.

Theorem 10.3.2. *The continuous-time limit in Theorem 10.3.1 is exactly the same as the one obtained by the usual repeated interactions on* $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$

$$dU_t = L_0^0 U_t dt + \sum_j L_0^j U_t da_0^j(t) + L_j^0 U_t da_j^0(t),$$

where

$$L_0^0 = -i(H_0^{A,B} + 2\lambda_0 I \otimes I) - \frac{1}{2}\sum_j S_j^* S_j,$$
$$L_j^0 = -iS_j\,, \qquad L_0^j = -iS_j^*\,.$$

with $S_j = V_j \otimes I + I \otimes W_j$ *and the Hamiltonian*

$$H_0^{A,B} = H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2}\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*\,,$$

the term $i/2\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*$ *representing an interaction Hamiltonian.*

Proof. This result is a reinterpretation of Eq.(10.3.1) obtained in the previous theorem. Let us note that the coefficient L_0^0 of this equation can be written as

$$L_0^0 = -\,i\left(H^A \otimes I + I \otimes H^B + 2\lambda_0 I \otimes I + i\frac{1}{2}\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*\right)$$
$$-\,\frac{1}{2}\sum_j (V_j \otimes I + I \otimes W_j)^*(V_j \otimes I + I \otimes W_j)\,.$$

This way putting $S_j = V_j \otimes I + I \otimes W_j$, we get

$$L_0^0 = -i\left(H^A \otimes I + I \otimes H^B + 2\lambda_0 I \otimes I + i\frac{1}{2}\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*\right) - \frac{1}{2}\sum_j S_j^* S_j,$$
$$L_j^0 = -iS_j\,, \quad L_0^j = -iS_j^*\,.$$

Usually if one considers a system $\mathcal{H}_S$ in contact with an environment, for example in the continuous time limit of repeated interaction, with a corresponding total Hamiltonian of the form

$$H_{tot} = H_0 \otimes I + I \otimes H_R + \frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{i=1}^N V_j \otimes a_j^0 + V_j^* \otimes a_0^j\,,$$

one obtains a QSDE of the form

$$dU_t = L_0^0 U_t dt + \sum_j L_0^j U_t da_0^j(t) + L_j^0 U_t da_j^0(t)\,,$$

where

$$L_0^0 = -i(H_0 + 2\lambda_0 I) - \frac{1}{2}\sum_j V_j^* V_j,$$
$$L_j^0 = -iV_j\,, \qquad L_0^j = -iV_j^*\,.$$

In particular, the evolution $\mathcal{H}_S^A$ coupled to the Fock space Φ, representing the limit environment, can be given by

$$d\widetilde{U}_t^A = [-i(H^A + \lambda_0 I) - \frac{1}{2}\sum_j V_j^* V_j]\widetilde{U}_t^A dt - i\sum_j V_j \widetilde{U}_t^A da_j^0(t) + V_j^* \widetilde{U}_t^A da_0^j(t)\,, \tag{10.3.3}$$

which is the limit of $V_{[t/h]}^A = U_{[t/h]}^A ... U_1^A$. Similar the evolution of $\mathcal{H}_S^B$ coupled to the Fock space Φ can be given by

$$d\widetilde{U}_t^B = [-i(H^B + \lambda_0 I) - \frac{1}{2}\sum_j W_j^* W_j]\widetilde{U}_t^B dt - i\sum_j W_j \widetilde{U}_t^B da_j^0(t) + W_j^* \widetilde{U}_t^B\ da_0^j(t)\,, \tag{10.3.4}$$

which is the limit of $V_{[t/h]}^B = U_{[t/h]}^B ... U_1^B$. Knowing the evolution described by (10.3.3) and (10.3.4), it is not absolutely straightforward how to derive Eq. (10.3.1).

In fact, the apparition of the term

$$\frac{1}{2}\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*$$

cannot be directly deduced from the separate evolution. This terms appears as an effective interacting Hamiltonian between $\mathcal{H}_A^S$ and $\mathcal{H}_B^S$. In particular the evolution described by (10.3.1) can be modeled as a usual continuous time imit of repeated interactions and this way as a usual quantum Langevin evolution by considering that the free evolution of $\mathcal{H}_A^S \otimes \mathcal{H}_B^S$ is of the form

$$H_0^{A,B} = H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2}\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*$$

which involves then an effective interaction $i/2\sum_j V_j^* \otimes W_j - V_j \otimes W_j^*$.

Our special model of interaction creates spontaneously an Hamiltonian of interaction between $\mathcal{H}_A^S$ and $\mathcal{H}_B^S$ whereas they are supposed isolated.

Moreover, note that this interaction is not symmetric in $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$ due to the fact that each auxiliary system $\mathcal{H}$ acts with $\mathcal{H}_S^A$ before $\mathcal{H}_S^B$. Somehow the evolution keeps the memory of the order of the interaction. □

We want now to illustrate Theorem 10.3.1 with physical examples and to study some properties of their limit evolution. But before, since the central object in the following shall be the Lindblad generator, we recall how to obtain it from the solution $(U_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ of (10.3.1). This family of unitary operators is naturally related to a semigroup of completely positive maps as follows. We define the semigroup $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ by

$$T_t(\rho) = Tr_{\mathcal{H}}(U_t(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U_t^*)\,,$$

for all $\rho \in \mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ and all $t \in \mathbb{R}^+$. The maps T_t gives the state of $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ at time t after the interaction represented by U_t when the environment $\mathcal{H}$ is initially in its ground

state $|e_0\rangle\langle e_0|$. The Lindblad generator is then the infinitesimal generator of the semigroup $(T_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. For Eq. (10.3.1), this operator is

$$L(\rho) = -\,i\left[H^A\otimes I + I\otimes H^B + \frac{i}{2}\sum_j V_j^*\otimes W_j - V_j\otimes W_j^*, \rho\right] + \frac{1}{2}\Big(\sum_j 2S_j\rho S_j^* - S_j^*S_j\rho - \rho S_j^*S_j\Big)\,,$$

for all state ρ of the system.

In all the above description, the environment is supposed to be in its ground state $|e_0\rangle\langle e_0|$. We shall also compute the infinitesimal generator for a thermal state of the environment in Section 10.5.1.

10.4 Entanglement for the Spontaneous Emission of Photons

We present in this section a simple physical example, already considered in [12] for the usual repeated interactions and in [8] for a thermal environment. We focus more precisely on the evolution of the entanglement of formation of $\mathcal{H}_S^A\otimes\mathcal{H}_S^B$ quantifying how $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$ are linked. We don't want to treat this question in a general context but just to present a result showing that $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$ are really entangled by the interaction created by our model. Generally the computation of the entanglement of a state is not an easy question. However some results exist for some special states. Since we want to study the whole evolution of the entanglement in time for a bipartite, we consider a simple example.

In this system, all the spaces $\mathcal{H}_S^A$, $\mathcal{H}_S^B$ and $\mathcal{H}$ are $\mathbb{C}^2$ representing a 2-level system. The free dynamics H^A, H^B and H^R are given by the classical Pauli matrix σ_z defined by

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

and the operators $V_1 = W_1 = a_0^1$.

The total Hamiltonian operators are finally

$$H_{tot}^A = \sigma_z\otimes I\otimes I + I\otimes I\otimes\sigma_z + a_0^1\otimes I\otimes a_1^0 + a_1^0\otimes I\otimes a_0^1\,,$$

and,

$$H_{tot}^B = I\otimes\sigma_z\otimes I + I\otimes I\otimes\sigma_z + I\otimes a_0^1\otimes a_1^0 + I\otimes a_1^0\otimes a_0^1\,.$$

These interactions can be understood as an exchange of a photon between the different particles.

Theorem 10.3.1 can be applied to this system to obtain the limit evolution given by

$$dU_t = \left[-i(\sigma_z\otimes I + I\otimes\sigma_z + 2I\otimes I) - \frac{1}{2}S^*S + \frac{1}{2}(a_1^0\otimes a_0^1 - a_0^1\otimes a_1^0)\right]U_t dt - iSU_t da_1^0(t) - iS^*U_t da_0^1(t)\,, \tag{10.4.1}$$

where $S = a_0^1 \otimes I + I \otimes a_0^1$. The Lindblad generator of the semigroup related to this unitary evolution is

$$L(\rho) = -\,i\left[\sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z + \frac{i}{2}(a_0^1 \otimes a_1^0 - a_1^0 \otimes a_0^1), \rho\right] + \frac{1}{2}\Big(2S\rho S^* - S^*S\rho - \rho S^*S\Big)\,,$$

for all state ρ of the system.

In the following, since $\mathcal{H}_S^A = \mathcal{H}_S^B = \mathbb{C}^2$, a state on $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ is also seen as a matrix of size 4×4 with respect to the canonical basis

$$(|e_0 \otimes e_0\rangle, |e_0 \otimes e_1\rangle, |e_1 \otimes e_0\rangle, |e_1 \otimes e_1\rangle)\,.$$

Let us concentrate now on the dynamics of the system $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ for the initial state $|e_0 \otimes e_1\rangle\langle e_0 \otimes e_1|$. One can check that the states of $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ whose evolution is governed by Eq. (10.4.1) is, for all t in $\mathbb{R}^+$,

$$\rho_t = e^{tL}(|e_0 \otimes e_1\rangle\langle e_0 \otimes e_1|) = \begin{pmatrix} 1-(1+t^2)e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & -te^{-t} & 0 \\ 0 & -te^{-t} & t^2e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note that we particularly find the exponential convergence of the state of the system to $|e_0 \otimes e_0\rangle\langle e_0 \otimes e_0|$.

The initial state $|e_0 \otimes e_1\rangle\langle e_0 \otimes e_1|$ is considered because the state ρ_t is of a particular form allowing us an exact computation of its entanglement of formation. Indeed, Vogelsberger gives in his PhD Thesis [44] a formula, based on a result of Wooters [45], for the entanglement of some special states, called *X-states*. These states are the ones represented by the matrices of the form

$$\rho = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \overline{x} & c & 0 \\ \overline{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix},$$

with the conditions a, b, c, d non-negative reals such that $a + b + c + d = 1$, $|y|^2 \leq ad$ and $|x|^2 \leq bc$. The entanglement is given for these states in the next theorem.

Theorem 10.4.1. *Let ρ be the X-state*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & y \\ 0 & b & x & 0 \\ 0 & \overline{x} & c & 0 \\ \overline{y} & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

The entanglement of formation of ρ is

$$E(\rho) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-C(\rho)^2}}{2}\right),$$

where $h(x) = -x\log(x) - (1-x)\log(1-x)$ *and where* $C(\rho)$ *is the Wootters' concurrence of* ρ *given by*

$$C(\rho) = 2\max(0, |y| - \sqrt{bc}, |x| - \sqrt{ad})\,.$$

Since the state ρ_t is a X-state for all t, we deduce from Theorem 10.4.1 that the entanglement of formation of ρ_t is

$$E(\rho_t) = h\left(\frac{1+\sqrt{1-4t^2e^{-2t}}}{2}\right)\,.$$

This function $E(\rho_t)$ is plotted on Figure 10.1 to see its evolution in time. Note that one

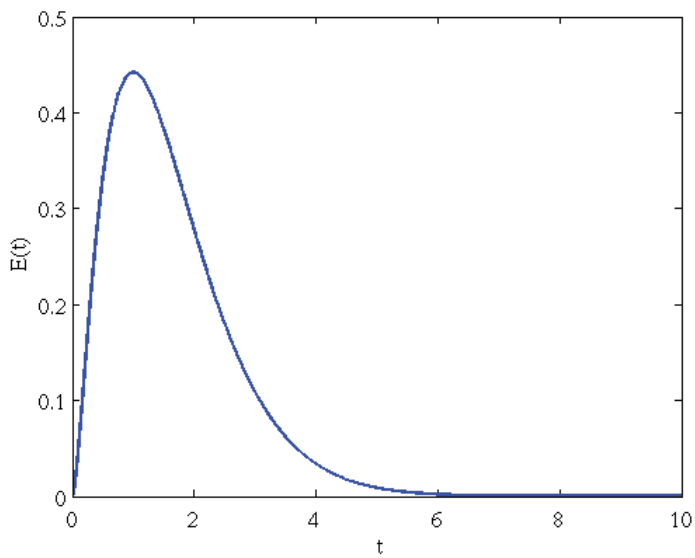

Figure 10.1: **Entanglement of formation**

can see the creation of entanglement by the interactions with environment. Then, after a peak, a lost of entanglement follows due to the convergence to the invariant state.

10.5 Case of a Thermal Environment

We have presented in the previous sections this bipartite model where the vector e_0 played a particular role. Indeed, it was crucial in the construction to get an environment in a pure state. But it is natural to wonder what kind of evolution we obtain for other states as a thermal state. One usual procedure in this case is to make use of the GNS representation. This way, one increases the space in order to turn the state into a pure state. In [8], this strategy is applied for a thermal state on the environment to derive the QSDE for some physical systems in the usual repeated interaction setup. In this section, we don't want

to make a precise similar work for a thermal state to get a QSDE but just to derive the Lindblad generator of the limit dynamics.

The model is exactly the same as described in the first section except the state of the environment. We consider the thermal state given by a Gibbs state of the following form

$$\omega_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta H^R},$$

where β is a positive real and Z is a normalizing constant. Since the Hamiltonian H^R is diagonal whose coefficients are denoted λ_i, the state ω_β is diagonal of coefficients $(\beta_0, \ldots, \beta_N)$ defined by $\beta_j = e^{-\beta\lambda_j}/Z$ satisfying $\sum_j \beta_j = 1$. We can now write the following result.

Theorem 10.5.1. *The continuous time limit of the evolution of the above repeated interaction bipartite model admits the following Lindblad generator*

$$\begin{aligned} L_\beta(\rho) = &- i \left[H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^N (\beta_j - \beta_0)(V_j \otimes W_j^* - V_j^* \otimes W_j), \rho \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \beta_j (S_j S_j^* \rho + \rho S_j S_j^* - 2 S_j^* \rho S_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \beta_0 (S_j^* S_j \rho + \rho S_j^* S_j - 2 S_j \rho S_j^*), \end{aligned}$$

where $S_j = V_j \otimes I + I \otimes W_j$.

Proof. The proof is based on a Taylor expansion of the completely positive map defined by $l(\rho) = Tr_{\mathbb{C}^{N+1}}(U(\rho \otimes \rho_\beta)U^*)$ where $U = U^B U^A$ and on a convergence theorem in [12] giving the Lindblad generator.

Let us compute the completely positive map

$$l(\rho) = Tr_{\mathbb{C}^{N+1}}(U(\rho \otimes \omega_\beta)U^*) = \sum_j (U(\rho \otimes \omega_\beta)U^*)_{jj} = \sum_{jk} \beta_k \, u_{jk} \, \rho \, u_{jk}^* .$$

With the notations $S_j = V_j \otimes I + I \otimes W_j$ and $Z_j = V_j \otimes W_j^* - V_j^* \otimes W_j$, for all $j \geq 1$ and up to terms of order greater than $3/2$, we get

$$l(\rho) = \beta_0 \, u_{00} \, \rho \, u_{00}^* + \sum_{j=1}^N \beta_0 \, u_{j0} \, \rho \, u_{j0}^* + \beta_j \, u_{0j} \, \rho \, u_{0j}^* + \beta_j \, u_{jj} \, \rho \, u_{jj}^*$$

$$
\begin{aligned}
l(\rho) =&\rho + h\Big(- i \Big[H^A \otimes I + I \otimes H^B, \rho\Big] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_j (V_j V_j^* \otimes I + I \otimes W_j W_j^* + 2V_j^* \otimes W_j)\rho \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_j \rho (V_j V_j^* \otimes I + I \otimes W_j W_j^* + 2V_j^* \otimes W_j)^* \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_0 (V_j^* V_j \otimes I + I \otimes W_j^* W_j + 2V_j \otimes W_j^*)\rho \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_0 \rho (V_j^* V_j \otimes I + I \otimes W_j^* W_j + 2V_j \otimes W_j^*)^* \\
&+ \sum_{j=1}^{N} \beta_0 S_j \rho S_j^* + \beta_j S_j^* \rho S_j\Big) \\
=&\rho + h\Big(- i \Big[H^A \otimes I + I \otimes H^B, \rho\Big] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} (\beta_j - \beta_0)(Z_j \rho - \rho Z_j) \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_j (S_j S_j^* \rho + \rho S_j S_j^* - 2S_j^* \rho S_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_0 (S_j^* S_j \rho + \beta_0 \rho S_j^* S_j - 2S_j \rho S_j^*)\Big) \\
=&\rho + h\Big(- i \left[H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{N} (\beta_j - \beta_0) Z_j, \rho\right] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_j (S_j S_j^* \rho + \rho S_j S_j^* - 2S_j^* \rho S_j) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \beta_0 (S_j^* S_j \rho + \beta_0 \rho S_j^* S_j - 2S_j \rho S_j^*)\Big) .
\end{aligned}
$$

Hence, the results follows by a convergence theorem in [12]. □

Now that we have derived the Lindblad generator of the limit evolution, the aim is to study the asymptotic behavior of the system in a physical example.

10.5.1 Return to Equilibrium in a Physical Example

We present in this section the first example but extended to $N+1$-level systems, already considered in [12] for the usual repeated interactions and in [8] for a thermal environment.

In this system, all the spaces $\mathcal{H}_S^A$, $\mathcal{H}_S^B$ and $\mathcal{H}$ are $\mathbb{C}^{N+1}$. In this example, the free Hamiltonians H^A and H^B are equal to H^R. On these spaces, the orthonormal basis $\{e_0, e_1, \ldots, e_N\}$ are still an eigen-basis of H^R (and therefore of H^A and H^B) related to the eigenvalues $(\lambda_i)_{i=0,\ldots,N}$.

The interaction Hamiltonian operators H_I^A and H_I^B are defined in this model by

$$
H_I^A = \sum_{j=1}^{N} a_j^0 \otimes I \otimes a_0^j + a_0^j \otimes I \otimes a_j^0 ,
$$

and,

$$H_I^B = \sum_{j=1}^{N} I \otimes a_j^0 \otimes a_0^j + I \otimes a_0^j \otimes a_j^0 \,.$$

Finally, the total Hamiltonian operators are taken in the same form as in the presentation of the bipartite model with $V_j = W_j = a_0^j$,

$$H_{tot}^A = H^A \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + \sum_{j=1}^{N} a_j^0 \otimes I \otimes a_0^j + a_0^j \otimes I \otimes a_j^0 \,,$$

and,

$$H_{tot}^B = I \otimes H^B \otimes I + I \otimes I \otimes H^R + \sum_{j=1}^{N} I \otimes a_j^0 \otimes a_0^j + I \otimes a_0^j \otimes a_j^0 \,,$$

where the free Hamiltonians H^A, H^B are equal to H^R.

Theorem 10.5.1 can then be applied to this system and gives a limit evolution whose Lindblad generator is

$$\begin{aligned} L_\beta(\rho) = &- i \left[H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N} (\beta_j - \beta_0)(a_0^j \otimes a_j^0 - a_j^0 \otimes a_0^j), \rho \right] \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \beta_j (S_j S_j^* \rho + \rho S_j S_j^* - 2 S_j^* \rho S_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \beta_0 (S_j^* S_j \rho + \rho S_j^* S_j - 2 S_j \rho S_j^*) \,, \end{aligned}$$

where $S_j = a_0^j \otimes I + I \otimes a_0^j$.

The aim is now to study the asymptotic behavior of the system. In a general context, the following result in the case of finite dimensional Hilbert spaces, proved by Frigerio and Verri [29] and extended by Fagnola and Rebolledo [**?**] gives a sufficient condition, in the case where the system has a faithful invariant state ρ_∞, for the $*$-weak convergence to it, that is, for all initial state ρ and all observable X on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,

$$\lim_{t \to +\infty} tr(e^{tL}(\rho) X) = tr(\rho_\infty X) \,.$$

This sufficient condition is the equality of the following commutants

$$\left\{ H, L_j, L_j^*; j = 1, \ldots, N \right\}' \quad \text{and} \quad \left\{ L_j, L_j^*; j = 1, \ldots, N \right\}' \,.$$

A system satisfying this condition is said to have the property of *return to equilibrium*.

We can now write the following result for our example.

Theorem 10.5.2. *The system $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$ evolving according to the Lindblad generator*

$$L_\beta(\rho) = -i\left[H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^N (\beta_j - \beta_0)(a_0^j \otimes a_j^0 - a_j^0 \otimes a_0^j), \rho\right]$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \beta_j\left(S_j S_j^* \rho + \rho S_j S_j^* - 2S_j^* \rho S_j\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \beta_0\left(S_j^* S_j \rho + \rho S_j^* S_j - 2S_j \rho S_j^*\right),$$

where $S_j = a_0^j \otimes I + I \otimes a_0^j$, has the property of return to equilibrium.

Moreover, the invariant state is exactly

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta(H^A \otimes I + I \otimes H^B)}}{Z},$$

where Z is a normalizing constant.

Proof. Firstly, one can check that ρ_β is a faithful invariant state since

$$L_\beta(\rho_\beta) = 0.$$

The proof is then based on the result of Fagnola and Rebolledo by showing that the commutants

$$\{H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^N (\beta_j - \beta_0)(a_0^j \otimes a_j^0 - a_j^0 \otimes a_0^j), S_k, S_k^*; k = 1, \ldots, N\}'$$

and

$$\{S_k, S_k^*; k = 1, \ldots, N\}'$$

are simply trivial.

Recall that in this physical system the operators S_k are $a_0^k \otimes I + I \otimes a_0^k$ for all $k \geq 1$. Let us prove now that $\{S_k, S_k^*; k = 1, \ldots, N\}'$ is trivial. Consider an element K of this commutant. This element K can be written with respect to the canonical basis $(a_j^i)_{i,j=0,\ldots,N}$ as

$$K = \sum_{i,j=0}^N K_j^i \otimes a_j^i,$$

where the K_j^i's are operators on $\mathbb{C}^{N+1}$. Since the operators K and S_k commute for all $k \geq 1$, we get the equality between

$$KS_k = \left(\sum_{i,j=0}^N K_j^i \otimes a_j^i\right)\left(a_0^k \otimes I + I \otimes a_0^k\right) = \sum_{i,j=0}^N K_j^i a_0^k \otimes a_j^i + \sum_{i,j=0}^N K_j^i \otimes a_j^i a_0^k$$
$$= \sum_{i,j=0}^N K_j^i a_0^k \otimes a_j^i + \sum_{j=0}^N K_j^0 \otimes a_j^k$$

and

$$S_k K = \left(a_0^k \otimes I + I \otimes a_0^k\right)\left(\sum_{i,j=0}^{N} K_j^i \otimes a_j^i\right) = \sum_{i,j=0}^{N} a_0^k K_j^i \otimes a_j^i + \sum_{i,j=0}^{N} K_j^i \otimes a_0^k a_j^i$$
$$= \sum_{i,j=0}^{N} a_0^k K_j^i \otimes a_j^i + \sum_{i=0}^{N} K_k^i \otimes a_0^i \,.$$

From the commutation of K and S_k^*, we also have the equality between

$$K S_k^* = \left(\sum_{i,j=0}^{N} K_j^i \otimes a_j^i\right)\left(a_k^0 \otimes I + I \otimes a_k^0\right) = \sum_{i,j=0}^{N} K_j^i a_k^0 \otimes a_j^i + \sum_{i,j=0}^{N} K_j^i \otimes a_j^i a_k^0$$
$$= \sum_{i,j=0}^{N} K_j^i a_k^0 \otimes a_j^i + \sum_{j=0}^{N} K_j^k \otimes a_j^0$$

and

$$S_k^* K = \left(a_k^0 \otimes I + I \otimes a_k^0\right)\left(\sum_{i,j=0}^{N} K_j^i \otimes a_j^i\right) = \sum_{i,j=0}^{N} a_k^0 K_j^i \otimes a_j^i + \sum_{i,j=0}^{N} K_j^i \otimes a_k^0 a_j^i$$
$$= \sum_{i,j=0}^{N} a_k^0 K_j^i \otimes a_j^i + \sum_{i=0}^{N} K_0^i \otimes a_k^i \,.$$

From these equalities and since the operators $(a_j^i)_{i,j=0,\ldots,N}$ form a basis, the following system of equations is obtained for $k = 1, \ldots, N$,

$$K_0^0 a_0^k = a_0^k K_0^0 + K_k^0$$
$$a_k^0 K_0^0 = K_0^0 a_k^0 + K_0^k \,,$$

for $j, k, l = 1, \ldots, N$ with $k \neq j$

$$K_j^0 a_0^l = a_0^l K_j^0$$
$$a_k^0 K_j^0 = K_j^0 a_k^0 + K_j^k$$
$$K_j^0 a_j^0 + K_j^j = a_j^0 K_j^0 + K_0^0 \,,$$

and

$$K_0^j a_l^0 = a_l^0 K_0^j$$
$$K_0^j a_0^k = a_0^k K_0^j + K_k^j$$
$$K_0^j a_0^j + K_0^0 = a_0^j K_0^j + K_j^j \,,$$

and for $i, j, k, l = 1, \dots, N$ with $k \neq i$ and $l \neq j$

$$\begin{aligned} K_j^i a_0^k &= a_0^k K_j^i \\ K_j^i a_l^0 &= a_l^0 K_j^i \\ K_j^i a_0^i + K_j^0 &= a_0^i K_j^i \\ K_j^i a_j^0 &= a_j^0 K_j^i + K_0^i \,. \end{aligned}$$

We now study all these equations in order to prove that the K_j^i's are all equal to 0. Note that the commutation of a matrix $M = (m_{ij})_{i,j=0,\dots,N}$ with a_0^k for $k = 1, \dots, N$ implies that for all $p \geq 1$ and $q = 0, \dots, N$ with $q \neq k$

$$m_{00} = m_{kk} \ , \quad m_{p,0} = 0 \quad \text{and} \quad m_{k,q} = 0 \,.$$

The commutation of M with a_k^0 gives that for all $p \geq 1$ and $q = 0, \dots, N$ with $q \neq k$

$$m_{00} = m_{kk} \ , \quad m_{0,p} = 0 \quad \text{and} \quad m_{q,k} = 0 \,.$$

Thus since $K_j^0 a_0^l = a_0^l K_j^0$ for all $j, l = 1, \dots, N$, the matrices K_j^0 are of the form

$$\begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & \dots & m_{0N} \\ 0 & m_{00} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{00} \end{pmatrix} .$$

By the same way, from $K_0^j a_l^0 = a_l^0 K_0^j$ for all $j, l = 1, \dots, N$, we deduce that the matrices K_0^j are of the form

$$\begin{pmatrix} m_{00} & 0 & \dots & 0 \\ m_{10} & m_{00} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{N0} & \dots & 0 & m_{00} \end{pmatrix} .$$

Consider now the equations on K_j^i for $i, j \neq 0$. Since we get $K_j^i a_0^k = a_0^k K_j^i$ and $K_j^i a_l^0 = a_l^0 K_j^i$ for $k, l = 1, \dots, N$ with $k \neq i$ and $l \neq j$, the matrix K_j^i is a diagonal matrix whose coefficients are all equal to m_{00} except the column j and the row i with for the moment only zero coefficients on the first row and the first column.

In the following, the coefficients of a matrix K_j^i are denoted by $(m_{kl}^{ij})_{k,l=0,\dots,N}$.

We work then on the equation $K_j^i a_0^i + K_j^0 = a_0^i K_j^i$. This equality gives that the diagonal coefficients of K_j^0 are 0 and for $l = 1, \dots, N$ with $l \neq i$,

$$m_{00}^{ij} = m_{ii}^{ij} + m_{0i}^{0j} \quad \text{and} \quad m_{0l}^{0j} = -m_{il}^{ij} \,.$$

Then from $K_j^i a_j^0 = a_j^0 K_j^i + K_0^i$ we deduce that the diagonal coefficients of K_0^i are 0 and, for $l = 1, \dots, N$ with $l \neq j$,

$$m_{00}^{ij} = m_{jj}^{ij} + m_{0j}^{i0} \quad \text{and} \quad m_{l0}^{i0} = -m_{lj}^{ij} \,.$$

From the equalities $K_0^j a_0^k = a_0^k K_0^j + K_k^j$ and $a_k^0 K_j^0 = K_j^0 a_k^0 + K_j^k$ with $k \neq j$, we finally obtain that all the matrices K_0^j, K_j^0 and K_k^j are all equal to 0 for $j \neq k$. For $j = k$, the equalities $K_0^j a_0^j + K_0^0 = a_0^j K_0^j + K_j^j$ allow us to conclude that the only non zero operators are the K_j^j's for $j = 0, \ldots, N$ and all equal to $m_{00}^{00} I$.

Hence, we have proved that the commutant $\{S_k, S_k^*; k = 1, \ldots, N\}'$ is reduced to the operators of the form $\lambda I \otimes I$ with λ in $\mathbb{C}$. Then the commutant

$$\left\{ H^A \otimes I + I \otimes H^B + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N} (\beta_j - \beta_0)(a_0^j \otimes a_j^0 - a_j^0 \otimes a_0^j), S_k, S_k^*; k = 1, \ldots, N \right\}'$$

is by definition a subset of $\{S_k, S_k^*; k = 1, \ldots, N\}'$. Therefore it is trivial too. This proves that the system has the property of return to equilibrium by the result in [27]. $\square$

Since this state ρ_β is the invariant state of $\mathcal{H}_S^A \otimes \mathcal{H}_S^B$, one can deduce the thermalization of $\mathcal{H}_S^A$ and $\mathcal{H}_S^B$ by the environment.

Bibliographie

[1] V. Arnold, “Mathematical Methods of Classical Mechanics”, Springer 2nd Edition, 1988. 9

[2] S. Attal, “Markov Chains and Dynamical Systems : the Open System Point of View”, *Stochastic Analysis*, 4, 2010. 4, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 32, 33, 34, 35, 38

[3] S. Attal, “The Theory of Quantum Noises”, à paraitre. 75, 78, 83

[4] S.Attal, J. Deschamps, C. Pellegrini, “Classical Action of Quantum Baths and Complex Obtuse Random Variables”, soumis. 83, 90, 93, 96

[5] S.Attal, J. Deschamps, C. Pellegrini, “Entanglement of Bipartite Quantum Systems driven by Repeated Interactions”, soumis. 81, 85, 93

[6] S. Attal, A. Dhahri, “Repeated Quantum Interactions and Unitary Random Walks”, *Journal of Theoretical Probability*, 23, p. 345-361, 2010. 87

[7] S. Attal, M. Emery, “Equations de structure pour des martingales vectorielles”, *Séminaire de Probabilités*, XXVIII, p. 256–278, Lecture Notes in Math., 1583, Springer, Berlin, 1994. 87, 90, 105, 115, 131

[8] S. Attal, A. Joye, “The Langevin Equation for a Quantum bath”, *Journal of Functional Analysis*, 247, (2007), p. 253-288. 83, 143, 152, 154, 156

[9] S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, “Quantum Open Systems. Vol I : The Hamiltonian approach”, Springer Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, 1880 (2006). 75

[10] S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, “Quantum Open Systems. Vol II : The Markovian approach”, Springer Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, 1881 (2006). 75, 83

[11] S. Attal, A. Joye, C.-A. Pillet, “Quantum Open Systems. Vol III : Recent Developments”, Springer Verlag, *Lecture Notes in Mathematics*, 1882 (2006). 75

[12] S. Attal, Y. Pautrat, “From repeated to continuous quantum interactions”, *Annales Henri Poincaré. A Journal of Theoretical and Mathematical Physics*, 7, 2006, p. 59–104. 4, 16, 31, 32, 36, 42, 68, 81, 83, 85, 86, 105, 139, 143, 147, 148, 149, 152, 155, 156

[13] S. Attal, Y. Pautrat, “From (n+1)-level atom chains to n-dimensional noises”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 41 (2005), no. 3, p. 391–407. 85, 87, 90, 91

[14] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, “Ìntroduction to Classical Integrable Systems”, *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, 2007. 10

[15] C. Bernardin, “Hydrodynamics for a system of harmonic oscillators perturbed by a conservative noise”, *J. Stat. Phys.*, 145, 1224-1255, (2011). 11

[16] C. Bernardin, S. Olla, “Transport Properties of a Chain of Anharmonic Oscillators with random flip of velocities”, *Stochastic Processes and their Applications*, 117, 487-513 (2011). 11

[17] T. Bodineau, B. Derrida, “Current large deviations for asymmetric exclusion processes with open boundaries”, *J. Stat. Phys.*, 123, 277-300 (2006). 11

[18] T. Bodineau, B. Derrida, J. Lebowitz, “Vortices in the two-dimensional Simple Exclusion Processes”, *J. Stat. Phys*, 133 (2008), p. 1-27. 11

[19] T. Bodineau, R. Lefevere, “Large deviations of lattice Hamiltonian dynamics coupled to stochastic thermostats”, *J. Stat. Phys.*, 133, no. 1, 1–27 (2008). 11

[20] N. Bouleau, D. Lepingle, “Numerical Methods for Stochastic Processes”, *J. Wiley. Cop.*, 1994. 49

[21] L. Bruneau, C.-A. Pillet, “Thermal relaxation of a QED cavity”, *J. Stat. Phys.* 134 (2009), no. 5-6, p. 1071–1095. 83, 105, 143

[22] L. Bruneau, S. De Bièvre, C.-A. Pillet, “Scattering induced current in a tight-binding band”, *J. Math. Phys.* 52 (2011), no. 2, 022109, 19 pp. 83, 105

[23] De Bièvre S., Parris P., “Equilibration, generalized equirepartition and diffusion in dynamical Lorentz gases”, *J. Stat. Phys*, 142, 356-385, 2011. 11

[24] B. Derrida, A. Gerschenfeld, “Current fluctuations of the one dimensional symmetric simple exclusion process with step initial condition”, *J. Stat. Phys.*, 136, 1-15 (2009). 11

[25] J. Deschamps, “Continuous-Time Limits of Classical Repeated Interaction Systems”, *Annales Henri Poincaré*, 14, pp. 179-220 (2013). 23

[26] J.P. Eckmann, C.-A. Pillet, L. Rey-Bellet, “Non-Equilibrium Statistical Mechanics of Anharmonic Chains Coupled to Two Heat Baths at Different Temperatures”, *Com. in Math. Phys.*, 201, 657-697 (1999). 11

[27] F. Fagnola, R. Rebolledo, “Lectures on the qualitative analysis of quantum Markov semigroups”, *Quantum probability and white noise analysis*, World Scientific, 14, p.197-240, 2002. 101, 161

[28] O. Faure, “Simulation du mouvement brownien et des diffusions”, These de doctorat ENPC, 1992. 51

[29] A. Frigerio, M. Verri, “Long-time asymptotic properties of dynamical semigroups on W^* algebras”, *Math. Zeitschrift*, 1982. 157

[30] S. Haroche, S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. Busk-Hoff, M. Brune and J-M. Raimond, “Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity”, *Nature* 446, 297 (2007) 4, 105, 143

[31] S. Haroche, C. Sayrin, I. Dotsenko, XX. Zhou, B. Peaudecerf, T. Rybarczyk, S. Gleyzes, P. Rouchon, M. Mirrahimi, H. Amini, M.Brune and J-M. Raimond, “Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states”, *Nature*, 477, 73 (2011) 4, 105, 143

[32] Y. P. Hong, R. A. Horn, “On Simultaneous Reduction of Families of Matrices to Triangular or Diagonal Form by Unitary Congruence”, *Linear and Multilinear Algebra*, 17 (1985), p.271-288. 127

[33] N. Ikeda, S. Watanabe, “Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes”, *North-Holland Mathematical Library, 2nd Edition*, 1989. 20, 21, 38, 49, 51

[34] P.E. Kloeden, E. Platen, “Numerical Solution of Stochastic Differential Equations”, Springer, 1999. 49, 54

[35] J. Lebowitz, E. Lieb, “Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Non-equilibrium State”, *Jornal of Mathematical Physics*, 8 (1967), 1073-1078. 11

[36] J.C. Mattingly, A.M. Stuart, D.J. Higham, “Ergodicity for SDEs and approximations : locally Lipschitz vector fields and degenerate noise”, *Stochastic Processes and their Applications*, 101, 185-232, 2002. 71

[37] L. Markus and A. Weerasinghe, “Stochastic oscillators”, *J. Differ. Equations*, 71, pp. 288-314, 1988. 27, 70

[38] B. Oksendal, “Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications”, Springer 6th Ed. (2010). 20

[39] C. Pellegrini, “Existence, uniqueness and approximation of a stochastic Schrödinger equation : the Diffusive case”, *The Annals of Probability*, 36, 2332-2353, 2008. 105, 143

[40] C. Pellegrini, “Existence, Uniqueness and Approximation of the jump-type Stochastic Schrödinger Equation for two-level systems”, *Stochastic Process and their Applications*, 120, 1722-1747, 2010. 105, 143

[41] C. Pellegrini, “Markov Chain Approximations of Jump-Diffusion Stochastic Master Equations”, *Annales de l’institut Henri Poincaré : Probabilités et Statistiques*, à paraître. 105, 143

[42] C. Pellegrini, “Poisson and Diffusion Approximation of Stochastic Schrödinger Equations with Control”, *Annales Henri Poincaré : Physique Théorique*, 10, 995-1025, 2009. 143

[43] A. Tocino, “On Preserving Long-Time Features of a Linear Stochastic Oscillator”, *BIT Numerical Mathematics*, Springer, 2007. 27, 70

[44] Vogelsberger, Thèse de doctorat de l’institut Joseph Fourier. 101, 153

[45] W.K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits”, *Phys. Rev. Letters*, 80, p. 2245-2248, 1998. 153