



HAL
open science

Vibro-acoustique statistique : Etude des hypothèses de la SEA

Thibault Lafont

► **To cite this version:**

Thibault Lafont. Vibro-acoustique statistique : Etude des hypothèses de la SEA. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ECDL0003 . tel-01170280

HAL Id: tel-01170280

<https://theses.hal.science/tel-01170280>

Submitted on 1 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de l'Université de Lyon

délivrée par l'Ecole Centrale de Lyon

Spécialité : ACOUSTIQUE

soutenue publiquement le 11 février 2015

par

Thibault LAFONT

Ingénieur diplômé de l'école supérieure de Chimie Physique Electronique de Lyon

préparée au

Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon

en cotutelle avec le

Laboratoire Vibrations Acoustique de l'INSA Lyon

Vibro-acoustique Statistique : Étude des hypothèses de la SEA

Statistical vibroacoustics : study of SEA assumptions

Ecole doctorale Mécanique Energétique Génie Civil Acoustique (MEGA)

Jury :

Prof. François GAUTIER	LAUM (Le Mans)	Examineur
Dr. Alain LE BOT	LTDS (Lyon)	Directeur
Prof. Brian MACE	University of Auckland (Nouvelle Zélande)	Rapporteur
Prof. Jean-Dominique POLACK	LAM (Paris)	Rapporteur
Prof. Aldo SESTIERI	Universita di Roma (Italie)	Examineur
Dr. Nicolas TOTARO	LVA (Lyon)	Co-directeur

Remerciements

Cette thèse a été financée par le Labex *CeLya* (pour centre lyonnais d'acoustique). Je tiens donc à remercier dans un premier temps toute l'équipe qui le compose, notamment les secrétaires, Mesdames Lenoir et Perriaux, et les directeurs, Messieurs Juvé et Parizet.

Le goût pour l'acoustique et la volonté d'aller plus loin dans ce domaine m'ont été inspirés par deux professeurs de l'EPFL : Messieurs Hervé Lissek et Vincent Martin. Je tiens à les remercier et espère les croiser régulièrement dans la suite de mon parcours. Je remercie également Romain Boulandet, ancien doctorant de l'EPFL, pour tous les échanges administratifs et surtout personnels qui ont été toujours enrichissants et chaleureux.

Je suis très reconnaissant envers mes directeurs de thèse, Alain Le Bot de l'école Centrale de Lyon et Nicolas Totaro de L'INSA Lyon. Merci pour leur confiance, leur patience et leur disponibilité. Nos nombreuses discussions m'ont permis de mener ce travail dans des conditions très agréables.

Je remercie les professeurs Jean-Dominique Polack du LAM de Paris et Brian Mace de l'université de Auckland pour m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce travail. Je souhaite remercier les professeurs François Gautier du LAUM au Mans et Aldo Sestieri de la Sapienza à Rome pour avoir accepté de faire partie du jury. Merci aussi à monsieur Gérard Borello de la société InterAC pour sa venue à ma soutenance.

Je remercie Juliette Cayer-Barrioz et Denis Mazuyer de l'école Centrale de Lyon ainsi que Bernard Laulagnet, Laurent Maxit et Kerem Ege de L'INSA pour leurs remarques et avis sur certains points techniques. Je remercie Didier Roux de Centrale Lyon pour sa gentillesse et ses conseils.

Un grand merci à tous les doctorants et post-doctorants de mes deux laboratoires et tout particulièrement à mes deux co-bureau : Michaël et Fabien. Leur bonne humeur et leur humour ont été salvateurs pendant les périodes de stress et de fatigue.

Un grand merci à mes amis, ma famille et ma belle famille pour leurs encouragements.

Enfin je ne remercierai jamais assez ma femme Marion pour son soutien et son amour.



Table des matières

0.1	Contexte et problématique	3
0.2	Présentation de la SEA	5
0.2.1	L'approche modale	7
0.2.2	L'approche ondulatoire	8
0.3	Applications	9
0.4	Critiques et limites	9
0.5	Objectif de la thèse et organisation du mémoire	10
1	Étude bibliographique	
	<i>Bibliography</i>	13
1.1	Années 1960, 1970	14
1.1.1	Lyon	14
1.1.2	Smith	15
1.1.3	Newland	15
1.1.4	Fahy	16
1.1.5	Crandall et Lotz	16
1.1.6	Maidanik	17
1.2	Années 1980, 1990	18
1.2.1	Lesueur	18
1.2.2	Langley	18
1.2.3	Keane et Price	18
1.2.4	Mace	19
1.2.5	Burroughs	19
1.3	Conclusion	19
2	Origines des hypothèses de la SEA	
	<i>Foundations of statistical energy analysis assumptions</i>	23
2.1	Approche modale	24
2.1.1	N=2 oscillateurs	24
2.1.2	N>2 oscillateurs	29
2.1.3	Paquets d'oscillateurs	32
2.1.4	Systèmes continus	36

2.2	Approche ondulatoire	39
2.2.1	Étude préliminaire : relations de propagation de l'énergie	39
2.2.2	Échange d'énergie entre deux sous-systèmes	40
2.3	Conclusion	42
3	Hypothèse de champ diffus	
	<i>Diffuse field assumption</i>	45
3.1	Définition du champ diffus	48
3.2	Cas d'une plaque rectangulaire appuyée-appuyée	50
3.2.1	Énergie locale	51
3.2.2	Critère de champ diffus	52
3.3	Résultats : analyse des conditions d'apparition du champ diffus	53
3.3.1	Une force excitatrice	54
3.3.2	Plusieurs forces excitatrices	57
3.4	Champ diffus et théorie des billards	59
3.5	Cas particulier : la plaque circulaire	61
3.6	Conclusion	64
4	Hypothèse d'équipartition des énergies modales	
	<i>Modal energies equipartition assumption</i>	67
4.1	Contexte historique	70
4.2	Paradoxe de la SEA	71
4.3	Modèles de dissipation	71
4.4	Énergie modale	72
4.4.1	Critère d'équipartition	73
4.5	Analyse des conditions d'apparition de l'équipartition de l'énergie modale	74
4.5.1	Une force excitatrice	74
4.5.2	N_i forces excitatrices	75
4.6	Remarque sur la loi normale	78
4.7	Conclusion	79
5	Hypothèse de couplage faible	
	<i>Weak coupling assumption</i>	83
5.1	Introduction	85
5.2	Problème des trois oscillateurs	86
5.2.1	Calcul SEA	86
5.2.2	Calcul de référence	87
5.3	Outils d'analyse	89
5.3.1	Identification non contrainte	89
5.3.2	La SEA inverse contrainte (CIT)	90

5.4	Comparaison du calcul SEA et du calcul de référence	91
5.4.1	Cas de deux oscillateurs	91
5.5	Conditions d'apparition des facteurs de couplage indirects	93
5.5.1	Étude par la méthode non contrainte	93
5.5.2	Proper-SEA vs SEA like	95
5.5.3	Analyse par la technique contrainte (CIT)	95
5.6	Conclusion	97
6	Hypothèse des modes résonants	
	<i>Hypothesis of resonant modes</i>	99
6.1	Introduction	101
6.2	Définition du problème	101
6.2.1	Influence des modes non résonants : méthode directe	102
6.2.2	Influence des modes non résonants : méthode inverse non contrainte	105
6.3	Conclusion	106
7	Applications sur des réseaux de plaques	
	<i>Numerical applications on plate networks</i>	109
7.1	Hypothèses de champ diffus, d'équipartition de l'énergie modale et de <i>rain-on-the-roof</i> sur le cas de deux plaques couplées	112
7.1.1	Calcul analytique	112
7.1.2	Énergies locales	113
7.1.3	Énergies modales	114
7.1.4	Étude du champ diffus et de l'équipartition modale en fonction du nombre d'excitations	114
7.1.5	Comparaison entre la SEA et le calcul de référence	116
7.1.6	Différents cas test	117
7.2	$N > 2$ plaques couplées	119
7.2.1	Calcul de référence	120
7.2.2	Calcul SEA	120
7.2.3	Paramètres des simulations	121
7.2.4	Étude sur l'hypothèse de couplage faible	121
7.2.5	Étude des hypothèses de champ diffus, de couplage faible, d'équipartition de l'énergie et de <i>rain-on-the-roof</i>	124
7.3	Conclusion	126
A	Démonstrations du chapitre 2	139
B	Comparatif entre le calcul de référence et deux calculs par les éléments finis.	141
C	Étude de convergence	143

D	Caractéristiques des machines de calcul	145
E	Billards : Illustrations de quelques trajectoires cycliques	147
F	Distribution de l'énergie modale pour une force excitatrice dans le cas d'un amortissement Δ constant.	149
G	Distribution modale en basses fréquences	151
H	Calcul des énergies locales et modales d'un réseau de 3 plaques	153
	Bibliographie	157

« Nous ne connaissons le monde que par nos sensations, et toutes nos sensations ont un caractère commun et un seul : elles correspondent à des différences d'énergie entre les organes de nos sens et le milieu qui les entoure. »

W. Ostwald, *L'énergie*, (trad. E. Philippi), Felix Alcan, 1910.

à Marion, à Oscar

Table des abréviations

SEA	Statistical Energy Analysis
CPP	Coupling Power Proportionality
DLF	Damping Loss Factor
CLF	Coupling Loss Factor
PIM	Power Injection Method
CLFi	indirect Coupling Loss Factor
FDB	Find the Best Distribution
CIT	Constrained Inverse Technique
HF	High Frequency
MF	Medium Frequency
LF	Low Frequency
REF	Reference
SmEdA	Statistical modal Energy distribution Analysis
MODENA	Modal Energy Analysis

Introduction

0.1 Contexte et problématique

Les normes gouvernementales et les exigences des particuliers en matière de bruit s'avèrent de plus en plus contraignantes si bien que les ingénieurs sont parfois amenés à relever de véritables défis scientifiques. Les secteurs automobile et aéronautique illustrent assez bien ce phénomène. En effet, la réglementation qui imposait à chaque automobile un niveau sonore maximal de 82 dBA en 1970 a diminué de 10 dBA ce niveau en trente ans. Le bruit perçu (effective perceived noise - EPN) des avions à réaction a chuté de 15 dB dans cette même période. Les grands projets de recherche en aéronautique restent dans cette dynamique. A titre d'exemple, l'objectif du programme CleanSky défini par l'ACARE¹ est de réduire de 50% d'ici 2020 le bruit perçu des avions civils par rapport aux niveaux de 2000.

L'ingénieur en vibro-acoustique a pour tâche d'examiner les réponses dynamiques de systèmes complexes soumis à des excitations extérieures aussi complexes. Pour la résolution de ces problèmes plusieurs méthodes existent et le choix demeure dans leur applicabilité, leur précision et leur rapidité d'exécution.

Les méthodes déterministes sont précises et largement utilisées, et ce, quel que soit le secteur (académique, industriel). Néanmoins, quelques points critiques demeurent :

- En hautes fréquences, ces méthodes sont dépassées par la quantité d'information nécessaire pour satisfaire à cette précision. En effet, la montée en fréquence impose un découpage en éléments finis de plus en plus important car la taille de chaque élément est liée à la longueur d'onde. Le nombre total de degrés de liberté induit alors un coût de calcul de plus en plus élevé. Quand bien même les ordinateurs seraient capables de calculer le mouvement, la pression, l'énergie de chaque élément, la difficulté serait reportée sur le traitement de cette formidable quantité d'information. Si les calculateurs sont limités à la gestion d'un certain nombre de degrés de liberté, cela impose pour chaque système, selon sa taille et sa complexité, une limite en fréquence. La figure 1 illustre quelques limites fréquentielles pour une gestion allant jusqu'à 10 millions de degrés de liberté.
- Lorsqu'un système est décrit avec des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites, les solutions peuvent être exprimées dans une base modale. Ceci est vrai à

1. Conseil Consultatif pour la Recherche Aéronautique en Europe



FIGURE 1 – Limite en fréquence pour l'étude de quelques cas industriels par la méthode des éléments finis. *Frequency limit of investigation with finite element method for few industrial cases.*

basses comme à hautes fréquences. En pratique cela revient à faire une analyse modale. En basses fréquences les modes sont séparés et faciles à mesurer. Par contre, en hautes fréquences, les modes se recouvrent et il devient difficile de les extraire. En terme de simulations numériques, la problématique est différente. La distinction des modes ne pose pas de difficultés particulières, les fréquences propres peuvent toujours être calculées. Monter en fréquence provoque un accroissement important du nombre de modes et a des répercussions sur les coûts de calcul.

Que cela soit du point de vue expérimental ou numérique la conclusion est la même : les modes sont utiles en basses fréquences mais ne sont plus pertinents en hautes fréquences.

- Les méthodes déterministes requièrent une connaissance rigoureuse et détaillée des paramètres du système : nature et localisation des sources, matériaux de la structure, type d'assemblage, conditions aux limites, etc. Le résultat d'une méthode déterministe s'applique à une structure unique, bien déterminée. Ce type de méthodes pourrait être appliqué à une population de structures (issue par exemple d'une fabrication à la chaîne), mais cela requiert de faire un calcul par individu car elles sont extrêmement sensibles aux détails du modèle. On conçoit donc facilement qu'elles ne sont pas adaptées à ce genre de problématique.

S'il n'est pas possible de prédire le comportement vibratoire exact d'un système, il est néanmoins peut être possible de prédire un comportement moyen d'une population de systèmes nominale-ment identiques [1]. Par ailleurs, le surplus de données obtenu par les éléments finis peut agir comme du bruit dans l'information que l'on souhaite extraire [2]. Pour ces différentes raisons les méthodes statistiques représentent une alternative intéressante. Le principe consiste à ne plus prendre la totalité de l'information mais uniquement une population statistique suffisamment représentative pour décrire les phénomènes physiques. La rapidité des calculs est nettement améliorée au détriment du détail.

0.2 Présentation de la SEA

La SEA [3, 4, 5] (pour Statistical Energy Analysis) est une méthode statistique introduite dans les années 60 pour estimer les réponses vibro-acoustiques des structures complexes² en hautes fréquences. Les ouvrages de Richard Lyon (premier en 1975 [3], second en 1995 [6]), dans lesquels sont décrits la théorie et son application, font office de référence. Le lecteur est renvoyé au glossaire en fin de manuscrit pour certaines définitions générales et d'autres propres à la SEA.

Le principe de la SEA est simple : l'étude constitue le *système*. Le système est alors découpé en *sous-systèmes* considérés comme des réservoirs d'énergie vibratoire. Le but de la SEA est de prédire les énergies vibratoires moyennes de chaque sous-système (cf figure 2). Cette moyenne se fait sur le temps, la fréquence et sur un ensemble de sous-systèmes ayant des propriétés physiques similaires. Ainsi la méthode ne fournit pas des transferts d'énergies exacts entre sous-systèmes mais plutôt leurs espérances mathématiques.

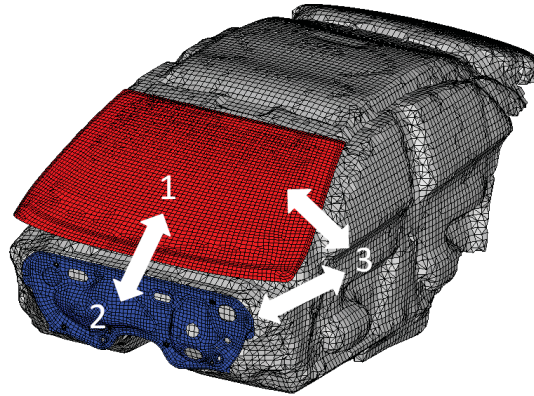


FIGURE 2 – Exemple de découpage d'un système en trois sous-systèmes : tablier, pare-brise, habitacle (d'après [7]). *Example of a system divided in three subsystems : firewall, windscreen, passenger compartment (from [7]).*

Tout sous-système peut recevoir de l'énergie par des forces excitatrices aléatoires, peut dissiper de l'énergie ou encore en échanger avec les sous-systèmes voisins. En régime stationnaire, le bilan d'énergie d'un sous-système i s'écrit :

$$P_{diss,i} + \sum_{j \neq i} P_{ij} = P_{inj,i} \quad (1)$$

où $P_{diss,i}$ est la puissance dissipée, $P_{inj,i}$ est la puissance injectée et P_{ij} la puissance échangée avec un sous-système j . Cette égalité est valable tant que le couplage entre les sous-systèmes est conservatif. La puissance dissipée est proportionnelle à l'énergie vibratoire moyenne E_i ,

$$P_{diss,i} = \omega_c \eta_i E_i \quad (2)$$

2. Le terme *complexe* peut faire référence à la géométrie de la structure comme à la quantité d'information.

où ω_c est la fréquence centrale de la bande de fréquence d'étude et où η_i caractérise l'amortissement interne du sous-système i (appelé communément DLF pour *damping loss factor*). Les autres échanges d'énergie s'écrivent de la même manière. L'énergie transmise (et donc perdue) du sous-système i vers j s'exprime par l'équation

$$P_{i \rightarrow j} = \omega_c \eta_{ij} E_i \quad (3)$$

où η_{ij} est le facteur de perte par couplage (appelé aussi CLF pour *coupling loss factor*). Cette équation est similaire à l'équation de dissipation (2). D'autre part, le sous-système j contribue à transmettre de l'énergie à i ,

$$P_{j \rightarrow i} = \omega_c \eta_{ji} E_j \quad (4)$$

La puissance échangée entre les sous-systèmes i et j est finalement la contribution de chacun (équations (3) et (4)),

$$P_{ij} = \omega_c (\eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j) \quad (5)$$

Les facteurs de perte par couplage η_{ij} et η_{ji} ne sont pas indépendants ; ils sont liés par la relation

$$N_i \eta_{ij} = N_j \eta_{ji} \quad (6)$$

où N_i est le nombre de modes du sous-système i . Cette relation est démontrée à plusieurs reprises au chapitre 3. Finalement la puissance échangée entre i et j peut s'écrire en fonction des énergies modales,

$$P_{ij} = \omega_c \eta_{ij} N_i \left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right) \quad (7)$$

Ce résultat, qui représente le cœur de la théorie de la SEA est appelé *coupling power proportionality (CPP)*. La démonstration de cette relation est faite au chapitre 2 pour plusieurs configurations. D'autre part Mace [8] présente les conséquences sur l'écriture et l'interprétation des CLF lorsque la CPP est invalide.

En substituant les équations (2) et (7) dans le bilan d'énergie (1), on obtient un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les énergies modales E_i/N_i ,

$$\omega_c \begin{bmatrix} N_1 \sum_j \eta_{1j} & \cdots & -N_n \eta_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -N_k \eta_{kl} & \cdots & N_n \sum_j \eta_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1/N_1 \\ \vdots \\ E_n/N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{inj,1} \\ \vdots \\ P_{inj,n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ainsi, la SEA avec sa relation fondamentale de la *coupling power proportionality*, donne un schéma simple des transferts d'énergie. La principale force de la SEA est qu'elle a été formulée sous l'hypothèse que l'information complexe ne peut être détaillée. Si mettre en œuvre la SEA veut dire gagner en simplicité et en temps de calcul cela signifie aussi s'exposer à ne pouvoir ni expliquer ni modéliser certains phénomènes ou propriétés.

La théorie de la SEA se décline en deux approches : l'approche modale et l'approche ondu-

latoire. Leur lien s'explique simplement : un mode est une superposition d'ondes et une onde est une somme de modes. Fahy propose en référence [9] une rétrospective de chacune d'elle.

0.2.1 L'approche modale

Lorsque deux sous-systèmes interagissent pour échanger de l'énergie, il est possible d'exprimer cette interaction sur la somme des modes des sous-systèmes découplés³ et d'un terme dépendant des conditions aux limites des sous-systèmes. Le développement de la solution sur la base des modes propres fait intervenir des forces modales, des raideurs et des masses généralisées. Dans cette approche les modes peuvent donc être assimilés à des systèmes masse-ressort.

La première démonstration de la CPP est basée sur le modèle de deux oscillateurs harmoniques [10] couplés par un couplage conservatif et excités par des forces aléatoires⁴. Lyon et Sharton écrivent que la puissance moyenne échangée entre deux oscillateurs est [11]

$$P_{12} = \beta(E_1 - E_2) \quad (9)$$

avec E_i ($i = 1, 2$) les énergies moyennes temporelles des oscillateurs et β le coefficient de puissance échangée. β dépend des propriétés du couplage et des fréquences propres des oscillateurs découplés.

Dans le cadre d'un système multimodal, l'analyse est étendue à l'échange d'énergie entre groupes (ou sets) d'oscillateurs⁵. Dans ce modèle on suppose que le mouvement d'un oscillateur appartenant à un set (ou sous-système) est indépendant des mouvements des autres oscillateurs du même set. Ainsi les modes échangent de l'énergie uniquement avec les modes des autres sous-systèmes. Ceci permet de faire facilement le lien avec le modèle précédent et d'exprimer la puissance échangée entre deux sous-systèmes comme une somme des puissances échangées entre paires d'oscillateurs (chacun appartenant à un set différent). Le mouvement d'un oscillateur seul est donc déterminé par la force excitatrice et par la réaction d'interaction des autres oscillateurs tout en négligeant les interactions intra-set.

Sous ces conditions, la relation de la CPP entre deux oscillateurs est étendue à deux sets d'oscillateurs qui sont les modes découplés des sous-systèmes. Elle prend donc la forme de l'équation (7). L'exemple de la figure 2 devient alors grandement simplifié comme l'illustre la figure 3.

Le bilan d'énergie donné par la SEA devient

$$\begin{bmatrix} P_{inj,1} \\ P_{inj,2} \\ P_{inj,3} \end{bmatrix} = \omega_c \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_{12} + \eta_{13} & -\eta_{21} & -\eta_{31} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23} & -\eta_{32} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & \eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

3. voir Glossaire

4. cf démonstration en section 2.1.1 du chapitre 2

5. cf démonstrations des sections 2.1.2 et 2.1.3 du chapitre 2

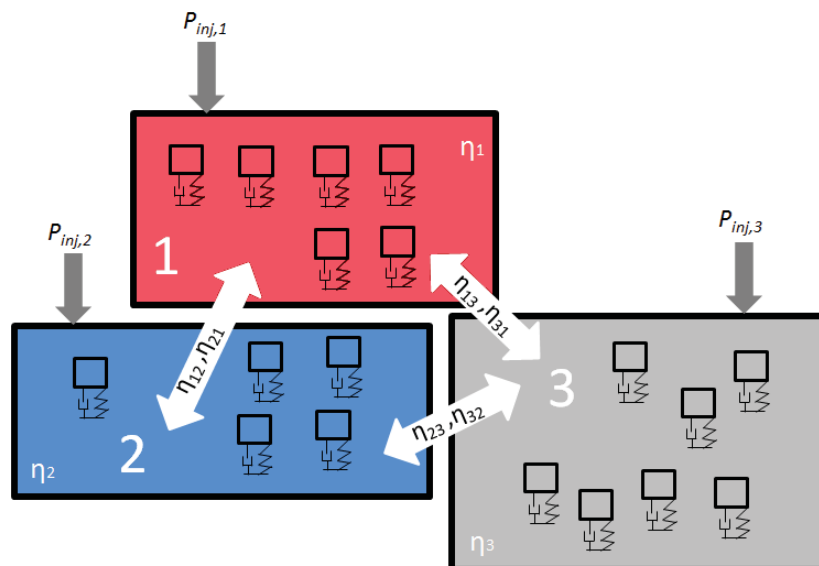


FIGURE 3 – Modélisation SEA de l'échange d'énergie de trois sous-systèmes. *SEA modelization of energy exchanges of three subsystems.*

L'approche modale est très intéressante conceptuellement. Elle donne un schéma clair des interactions entre plusieurs sous-systèmes en assimilant une notion complexe (les modes vibratoires) à une notion simple (les oscillateurs). Fahy [9] souligne néanmoins que cette approche n'est pas la plus adaptée à des problématiques structure-structure bien qu'elle ait été utilisée avec succès dans des cas académiques (poutres [12], plaques [13], etc). Elle soulève des difficultés de compréhension des phénomènes physiques : les modes découplés sont souvent choisis de manière à satisfaire les conditions aux limites qui ne permettent pas de transmission d'énergie à la frontière.

0.2.2 L'approche ondulatoire

L'approche ondulatoire [14, 15, 16] est basée sur l'acoustique géométrique [17] et est le prolongement de la théorie de Sabine en acoustique des salles. La fréquence est suffisamment élevée pour permettre une interprétation en terme de rayon car la longueur d'onde est suffisamment petite pour ignorer les irrégularités du modèle (orifices, ouvertures). Les champs vibratoires des sous-systèmes sont constitués d'ondes planes et l'échange d'énergie à l'interface est calculé via les coefficients de réflexion et de transmission. Dans le cas d'une jonction spatialement uniforme, les coefficients de transmission sont exprimés en termes d'impédances évaluées pour des sous-systèmes découplés infinis. L'hypothèse sous-jacente à cette approche est que les ondes sont décorrélatées entre elles : les ondes transmises à l'interface ayant subi plusieurs réflexions sont indépendantes des ondes directement transmises. C'est, autrement dit, l'hypothèse du champ diffus qui est évoquée.

Les modes découplés dépendent de la structure et des conditions aux limites et sont associés à des fréquences propres. Les ondes sont, quant à elles, dépendantes des propriétés

dynamiques de la structure et indépendantes des conditions aux limites (qui influent surtout sur la dispersion). Par conséquent l'approche ondulatoire n'implique aucune considération sur les fréquences propres ou leurs distributions. Cette différence fait que l'approche ondulatoire est plus séduisante pour l'évaluation des CLF.

0.3 Applications

Les applications de la SEA peuvent être divisées en deux groupes [18] : (i) la SEA prédictive et (ii) la SEA inverse.

La SEA prédictive (ou *predictive SEA*) consiste à trouver théoriquement les paramètres de la SEA pour prédire les énergies moyennes des sous-systèmes. Elle est employée plutôt en phase de conception. Bien que tous les paramètres ne soient pas évidents à calculer (notamment l'amortissement interne) la SEA prédictive a été appliquée à de nombreux cas industriels. On peut citer Craik [19, 20] et Koizumi [21] pour les applications liées aux bâtiments, Bryam, Lim [22] pour l'automobile ; Borello [23] et Huang [24] pour les camions ; Hynna [25] pour les bateaux. Sheng [26] discute des applications sur des structures complexes multi-couplées. Guasch propose un rapprochement original entre la SEA et la théorie des graphes [27] pour trouver les chemins d'énergie dominants dans le cas de structures contenant un grand nombre de sous-systèmes [28].

La SEA inverse utilise des modèles identifiés. Le schéma SEA est conservé mais l'objectif est changé : on ne cherche plus les énergies moyennes des sous-systèmes mais les paramètres de la matrice des CLF (les facteurs de pertes et les facteurs de couplage). Pour cela les paramètres inconnus du schéma SEA sont identifiés via la méthode des puissances injectées (PIM) [29]. Elle permet de calculer expérimentalement les DLF et les CLF connaissant les puissances injectées et les énergies sans découpler les sous-systèmes. Une application sur un moteur diesel est donnée par Wu [30]. Les aspects pratiques de l'utilisation de la PIM sont discutés par De Langhe [31]. Dans ce mémoire la PIM est présentée et utilisée dans le chapitre 5.

Finalement, le schéma de la SEA peut être appliqué

- soit d'une manière directe (SEA prédictive) en calculant toutes les inconnues pour parvenir aux énergies des sous-systèmes.
- soit d'une manière *inverse* (SEA non prédictive) en calculant les énergies moyennes des sous-systèmes pour estimer les CLF.

0.4 Critiques et limites

La SEA, pour être utilisée, oblige son utilisateur à respecter certaines hypothèses : couplage faible et conservatif, amortissement faible, champ diffus, équipartition de l'énergie modale,

etc⁶.

Malheureusement le domaine de validité de ces hypothèses est méconnu. La SEA, simple dans son principe et dans ses équations, souffre d'un manque de règles strictement définies. Trop de points sont laissés à l'intuition de son utilisateur. Elle est souvent utilisée à mauvais escient ce qui contribue à la discréditer. On présente ci dessous quelques limites.

La sous-structuration est la première étape de la SEA et la plus délicate car c'est elle qui définit le problème. Un sous-système doit intervenir dans le bilan d'énergie pour être considéré comme tel sinon il ne doit pas apparaître dans le découpage. Deux critères définissent un sous-système [3] : le nombre de modes doit être important (c'est le critère de *significance*) et tous les modes d'un même sous-système sont supposés avoir la même énergie (c'est le critère de *similarity*). Totaro [32, 33] propose une méthode de sous-structuration basée sur un indice de séparation d'ensembles (ou *cluster*). Une approche similaire de sous-structuration automatique est discutée par Cereceda [34].

Pour appliquer la SEA au sens prédictif il faut connaître les DLF et les CLF. Une fois le système découpé, le couplage entre les sous-systèmes doit être suffisamment faible pour que le comportement modal des sous-systèmes découplés ne soit pas affecté quand ils sont couplés. Une des difficultés de la SEA est justement le calcul des CLF pour qu'ils respectent l'hypothèse de couplage faible. De nombreuses études ont été consacrées à la détermination des CLF à partir de l'approche modale de la SEA [35, 36], de l'approche ondulatoire [37, 38, 39] ou à partir d'autres méthodes (mesures de mobilités [40], double formulation modale [41, 42, 7]).

Plusieurs textes de la littérature se sont intéressés à la SEA dans son sens le plus strict en essayant de trouver des solutions pour respecter scrupuleusement chaque hypothèse. D'autres ont tenté d'élargir le domaine de validité de la SEA en relaxant une hypothèse en particulier. Les extensions sont multiples : sur la question du couplage, citons les études sur le couplage fort [43], le couplage non conservatif [44, 45, 46] et le couplage indirect [47]. Maxit [48] propose la méthode SmEdA qui relaxe l'hypothèse d'équipartition de l'énergie modale et Totaro présente en référence [49] la méthode MODENA qui prend en compte les contributions des modes non résonants. Enfin, Langley [50] développe une méthode qui se passe de l'hypothèse de champ diffus.

0.5 Objectif de la thèse et organisation du mémoire

L'objectif de la thèse consiste à clarifier les hypothèses de la SEA. En d'autres termes connaître les hypothèses nécessaires et celles qui sont de second ordre. Pour cela on étudiera leur provenance, leur utilité, les éventuelles équivalences et les conséquences que peuvent amener leur non respect.

Ce mémoire est divisé en sept chapitres.

- Le premier chapitre reprend les études fondatrices de la SEA. Il met en avant, par auteur

6. Ces hypothèses seront démontrées dans les chapitres suivants.

et par année, les démonstrations et les hypothèses associées pour établir la *coupling power proportionality* (CPP).

- Le chapitre 2 redémontre l'équation de la CPP pour les deux approches de la SEA (modale et ondulatoire). Son objectif est de souligner la nécessité de chaque hypothèse par des arguments mathématiques et physiques.
- Le chapitre 3 s'intéresse à l'hypothèse de champ diffus et notamment à ses conditions d'obtention. Un critère de champ diffus est établi sur un exemple de plaque rectangulaire. Un parallèle est fait avec la théorie des billards et le cas particulier d'une plaque circulaire est traité.
- Le chapitre 4 étudie l'hypothèse d'équipartition de l'énergie modale. Comme pour l'hypothèse de champ diffus, un critère d'équipartition est défini sur l'exemple de la plaque rectangulaire pour statuer sur la répartition des énergies modales. Un parallèle est fait entre l'approche de la physique statistique et le théorème d'équipartition.
- Le chapitre 5 discute, sur un exemple de trois oscillateurs couplés, de l'hypothèse de couplage faible et de l'apparition de *coupling loss factor* (CLF) indirects. Deux outils, dont la *power injection method* (PIM), sont présentés.
- Le chapitre 6 traite de l'hypothèse des modes résonants. L'exemple des oscillateurs et les outils du chapitre 5 sont réutilisés.
- Le chapitre 7 propose quelques applications sur des réseaux de deux et trois plaques couplées par des raideurs. Les hypothèses abordées dans les chapitres précédents sont testées. Les résultats sont présentés sous la forme de cas-tests pour pouvoir extraire facilement des directives à l'attention d'un utilisateur.

Chapitre 1

Étude bibliographique

Bibliography

Chapter overview

This chapter reviews the previous works on the foundation of statistical energy analysis. Each section is dedicated to an author, the model and the assumptions he/she used.

The main conclusions are the followings :

- Foundations of SEA are based on the energy exchange of mechanical oscillators or sets of oscillators. Most of the investigations were conducted between the 60s and the 80s. Lyon is the first author who demonstrated the coupling power proportionality (CPP) for three conservative coupling terms (gyroscopic, inertial, elastic) between two interacting oscillators. For more than two oscillators, the CPP has been demonstrated by three authors via the perturbation technique : Newland, Fahy and Crandall.
- For discrete systems, conservative coupling and random forces are the two common assumptions regularly invoked to demonstrate the CPP between two oscillators. The weak coupling assumption is however not so clearly identified.
- For continuous subsystems various assumptions are called : diffuse field, energy equipartition, random excitations, etc. The multiplicity of the hypotheses are often due to a cultural difference or the model used more than the author opinion itself.

La littérature qui concerne la SEA est très riche. Le développement de la théorie de la SEA traditionnelle s'est fait entre 1962 et 1968 avec comme principaux acteurs : Lyon, Smith, Maidanik, Ungar, Eichler, Scharton et Newland. Tous ont redémontré la *coupling power proportionality* par l'approche modale, c'est à dire en assimilant les modes vibratoires à des systèmes masse-ressort et donc en utilisant des modèles d'oscillateurs harmoniques couplés. Dans leurs démonstrations, les principales différences étaient justement dans le choix de ces modèles et des éléments de couplage associés.

La CPP écrit que la puissance moyenne échangée entre deux oscillateurs est égale à la différence de leurs énergies moyennes multipliée par un coefficient de proportionnalité β .

$$P_{12} = \beta(E_1 - E_2) \quad (1.1)$$

C'est l'établissement de cette relation et l'écriture du coefficient β qui fait appel à toute une kyrielle d'hypothèses. L'objectif de ce chapitre est d'analyser les articles fondamentaux de la SEA. Pour cela on relève les hypothèses en reprenant, par auteurs, quelques principes de démonstration. C'est dans le chapitre suivant qu'on aborde les démonstrations et qu'on peut lister la totalité des hypothèses de la SEA. D'autre part, on organise la bibliographie de manière chronologique. C'est un choix arbitraire mais assez naturel car il a une certaine logique chronologique. D'autre part cela a aussi le mérite de montrer l'évolution des modèles de démonstrations et des hypothèses à travers les années.

1.1 Années 1960, 1970

1.1.1 Lyon

Au début des années 60, l'objectif de Lyon est de déterminer l'équilibre énergétique dans un fluide. Cela se transforma en un problème de vibrations des structures et Lyon s'intéressa à la puissance transmise entre deux modes excités de manière aléatoire. En 1962 [10] il parvient, avec Maidanik, à une première écriture de la *coupling power proportionality*. Pour deux oscillateurs de masse total $m_i + M$, de raideur k_i et d'amortissement λ_i couplés par un terme de raideur K , de masse M et gyroscopique G , le coefficient de proportionnalité β entre la puissance transmise et la différence des énergies des deux oscillateurs est

$$\beta = \frac{M^2(\Delta_1\Omega_2^4 + \Delta_2\Omega_1^4 + \Delta_1\Delta_2(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2)) + (G^2 + 2MK)(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2) + K^2(\Delta_1 + \Delta_2)}{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2)} \quad (1.2)$$

où les fréquences propres Ω_i et l'amortissement Δ_i sont : $\Omega_i^2 = (k_i + K)/(m_i + M)$ et $\Delta_i = \lambda_i/(m_i + M)$. Pour parvenir à cette expression, Lyon et Maidanik font les hypothèses (i) d'un couplage conservatif, (ii) de forces stationnaires aléatoires décorrélées et (iii) d'un couplage faible. Cette dernière hypothèse se traduit par les conditions suivantes : $M \ll m_i$, $G \ll \Delta_i$ et $K \ll m_i\Omega_i^2$.

En 1968, Lyon et Sharton [11] retrouvent une expression du coefficient de proportionnalité pour le même modèle mais sans l'hypothèse de couplage faible. L'expression est

$$\beta = \frac{\mu^2(\Delta_1\Omega_2^4 + \Delta_2\Omega_1^4 + \Delta_1\Delta_2(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2)) + (\gamma^2 + 2\mu\kappa)(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2) + \kappa^2(\Delta_1 + \Delta_2)}{(1 - \mu^2)(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2)} \quad (1.3)$$

où $\mu = M/(m_1+M)^{1/2}(m_2+M)^{1/2}$, $\gamma = G/(m_1+M)^{1/2}(m_2+M)^{1/2}$ et $\kappa = K/(m_1+M)^{1/2}(m_2+M)^{1/2}$. On retrouve cette expression dans les ouvrages [3, 6].

1.1.2 Smith

Durant les mêmes années, Smith [51] mène à bien des calculs d'interaction entre les modes d'une structure excités par un champ réverbérant. Il montre que la réponse d'une plaque à un champ acoustique diffus atteint une limite lorsque le couplage dû au rayonnement acoustique domine la dissipation interne de la plaque. Il découvre ainsi le rôle de la température vibratoire qui est l'idée principale de la SEA : lorsque deux corps de températures différentes (énergies modales) sont mis en contact, ils échangent de l'énergie.

1.1.3 Newland

En 1966, Newland [52] redémontre la CPP pour le cas de deux oscillateurs parmi un groupe de N oscillateurs. Le couplage se limite à un terme élastique K_{ij} . Il introduit pour cela la méthode des perturbations (*perturbation technique*) qui consiste à écrire le mouvement d'un oscillateur sous la forme d'une série de Taylor. Avant d'écrire les développements limités, l'auteur fait l'hypothèse que les excitations sont stationnaires et aléatoires. Cela permet de définir la densité spectrale de la puissance transmise à partir de leur autocorrélation. Après développement, il fait appel à l'hypothèse de décorrélation des excitations (*an assumption of the so called energy approach*) pour pouvoir mettre tous les termes de corrélations croisées à zéro. Il parvient alors à une première écriture de la puissance transmise à l'ordre 4 (équation (24) de [52]). Enfin, en supposant des excitations bruits blancs, l'auteur retrouve l'expression de la CPP (équation (44)) :

$$\beta = \frac{2K_{ij}^2(\omega_i\zeta_i + \omega_j\zeta_j)}{m_i m_j [(\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} + \omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2})^2 + (\omega_i\zeta_i + \omega_j\zeta_j)^2][(\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} - \omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2})^2 + (\omega_i\zeta_i + \omega_j\zeta_j)^2]} \quad (1.4)$$

avec, par rapport aux notations précédentes, $\Omega_i = \omega_i$; $\zeta_i = \Delta_i/2\Omega_i$ (et ζ_i et ζ_j strictement inférieurs à 1).

En résumé, pour deux oscillateurs parmi N couplés par des raideurs, Newland démontre la CPP en utilisant les hypothèses suivantes : (i) un couplage conservatif (supposé implicitement), (ii) des excitations aléatoires stationnaires décorrélées bruits blancs et (iii) un couplage faible.

Dans le papier de 1968 [53], il généralise sa formule pour des paquets d'oscillateurs couplés par des termes élastiques et inertiels sans donner le détail de ses calculs (équation (9)). Il fait les hypothèses suivantes : **(i)** un couplage faible et **(ii)** conservatif, **(iii)** des excitations aléatoires décorrélées stationnaires bruits blancs, **(iv)** une distribution uniforme des fréquences propres, **(v)** une bande de fréquence d'intégration étroite et **(vi)** un amortissement faible. Enfin, pour deux sous-systèmes parmi N , il ajoute l'hypothèse **(vii)** de forte densité modale.

1.1.4 Fahy

En 1970 Fahy [54] reprend la méthode de Newland et démontre la CPP pour des groupes d'oscillateurs couplés par des termes gyroscopiques G_{ij} . Son texte ne donne pas les détails des calculs mais seulement les étapes et les résultats obtenus (ainsi que la difficulté de démonstration : *The double integration involves very many terms and the results of a large algebraic bookkeeping operation is as follow [...]*). En faisant l'hypothèse **(i)** d'une excitation ponctuelle bruit blanc et **(ii)** d'un couplage gyroscopique l'auteur parvient à l'expression du facteur β (équation (5) de [54]),

$$\beta = \frac{2G_{ij}^2 \omega_i \omega_j (\zeta_i \omega_j + \zeta_j \omega_i)}{m_i m_j [(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4(\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j)(\zeta_i \omega_i \omega_j^2 + \zeta_j \omega_j \omega_i^2)]} \quad (1.5)$$

et à la CPP (équation (6) de [54]).

Dans son texte de 1975 [55], l'auteur rappelle la CPP dans le cadre de deux oscillateurs couplés par des termes gyroscopiques, élastiques et inertiels. Les hypothèses données sont : **(i)** des couplages conservatifs et **(ii)** des forces statistiquement indépendantes ayant des spectres uniformes (plats). Il précise aussi que la relation est valide quelle que soit la force de couplage. Il étend son résultat à plus de deux oscillateurs en supposant **(iii)** des couplages faibles.

Fahy écrit en 1994 [9] le texte célèbre de l'analyse critique (*A critical overview*) dans lequel il rappelle les études fondatrices de la SEA, les principes des approches modale, ondulatoire et par la mobilité. Il pointe du doigt les défauts de la SEA et propose des perspectives d'investigations.

1.1.5 Crandall et Lotz

Crandall et Lotz (1973) utilisent la méthode des perturbations de Newland pour démontrer le facteur β de la CPP pour un système de deux (parmi N) oscillateurs. Ils utilisent **(i)** des couplages élastique et inertiel (K_{ij} et M_{ij}) qui sont deux cas de couplage conservatif pour ne pas introduire de degré de liberté supplémentaire dans leur écriture du Lagrangien. L'hypothèse **(ii)** de couplage faible et l'écriture de la fonction de dissipation conduisent aux équations du mouvement. Ils précisent explicitement que **(iii)** les forces extérieures sont aléatoires, stationnaires bruits blancs. Ils parviennent ainsi à une première écriture du facteur β (équation (15)

de [56]). On la rappelle,

$$\beta = \frac{2[\zeta_i \omega_i (K_{ij} - M_{ij} \omega_j^2)^2 + \zeta_j \omega_j (K_{ij} - M_{ij} \omega_j^2)^2 + 4(\zeta_i \omega_i \zeta_j \omega_j) M_{ij}^2 (\zeta_i \omega_i \omega_j^2 + \zeta_j \omega_j \omega_i^2)]}{m_i m_j [(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4(\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j) (\zeta_i \omega_i \omega_j^2 + \zeta_j \omega_j \omega_i^2)]} \quad (1.6)$$

Par ailleurs, ils écrivent la CPP non pas comme différence des énergies réelles des oscillateurs mais plutôt comme une différence des énergies découplées. Ils généralisent ensuite leurs résultats pour des populations statistiques d'oscillateurs.

Il vient, dans un premier temps, l'hypothèse curieuse et non justifiée **(i)** d'indépendance des énergies et du facteur beta (plus tard critiquée par Mace) : *We treat here only one simple case assuming $(U_{i0} - U_{j0})^1$ to be independant of ϕ_{ij}^2 for all i and j .* Ils spécifient **(ii)** une excitation en bande réduite *narrow band* (tronquée par rapport au bruit blanc), ne considèrent que **(iii)** les modes résonants et supposent explicitement **(iv)** que les fréquences propres sont uniformément distribuées. Cette dernière hypothèse peut être qualifiée *d'hypothèse de probabilité uniforme* ; beaucoup d'auteurs la font ([53, 57]) car elle est commode pour le développement des calculs. L'hypothèse **(v)** d'amortissement constant est aussi employée. Cela simplifie notamment le rapport du numérateur et du dénominateur du β : le rapport des espérances est égal à l'espérance du rapport. Avec l'amortissement constant le dénominateur devient déterministe. Ils écrivent une expression du coefficient β qui ne fait plus intervenir que des masses, une fréquence centrale et un couplage moyen (formule (19) de [56]) :

$$\beta = \frac{\pi[(K_{ij} - \bar{M}_{ij} \omega_c^2)^2] + 4\zeta_i \zeta_j \omega_c^4 \bar{M}_{ij}^2}{2\Delta\omega m_i m_j \omega_c^2} \quad (1.7)$$

où $\Delta\omega$ est la bande de fréquence centrée sur ω_c .

1.1.6 Maidanik

L'article de Maidanik de 1976 [58] redémontre la CPP pour deux systèmes couplés. Il développe dans un premier temps la réponse d'un système isolé à une excitation en utilisant des opérateurs d'impédance et de réponse impulsionnelle. Dans un deuxième temps, il étend sa démonstration au cas de deux systèmes couplés. Le type de couplage n'est pas précisé, il est simplement supposé **(i)** conservatif. Il considère par ailleurs que les forces excitatrices sont **(ii)** statistiquement indépendantes. L'auteur retrouve la CPP (équation (95) de [58]) et l'hypothèse de couplage faible n'est pas nécessaire (*The validity of the statement is also independent of the positions and the strength of the coupling.*)

1. On comprend ici les énergies des sous-systèmes découplés (voir le glossaire).
2. Les déformées propres.

1.2 Années 1980, 1990

1.2.1 Lesueur

Dans le chapitre sept de l'ouvrage [59], Lesueur et Guyader présentent la méthode SEA en soulignant les principales hypothèses. Prenant comme premier modèle deux oscillateurs (couplés par un terme gyroscopique), les auteurs parviennent à la relation de la CPP. Ils admettent que **(i)** la fonction d'autocorrélation entre les forces excitatrices est nulle, **(ii)** la condition d'un régime permanent et que la densité spectrale de puissance des forces est constante. Pour un modèle multi-modal cela revient à émettre, d'une part **(i)** l'hypothèse supplémentaire que les modes sont découplés au sein d'un sous-système, mais couplés à tous les autres modes de l'autre sous-système. D'autre part, **(ii)** que l'énergie modale de chaque sous-système est équirépartie. L'étude de deux systèmes continus couplés fait appel aux mêmes hypothèses. La bande d'analyse **(iii)** (qui est infinie dans ce cas) est tronquée en une bande finie. Pour trois sous-systèmes (ou plus) **(iv)** l'hypothèse de couplage faible s'avère nécessaire et est admise.

1.2.2 Langley

Dans son article de 1989, Langley [60] démontre les équations de la SEA pour un système constitué de plusieurs sous-systèmes multi-couplés. Il parvient à une forme de CPP en considérant que la densité volumique (ou équivalent) est constante pour tout sous-système j , que **(i)** l'amortissement est proportionnel à la masse et que **(ii)** l'énergie a une forme spécifique (équation (35)). L'auteur souligne qu'il n'a pas eu besoin de l'hypothèse de couplage faible. Puis, dans la seconde partie de son papier, il retrouve les équations de la SEA en supposant **(iii)** l'hypothèse de couplage faible et **(iv)** en négligeant l'influence des modes non résonants³.

1.2.3 Keane et Price

En 1991 Keane et Price [61] appliquent la SEA à un système de poutres couplées excitées par des forces ponctuelles en condition libre. C'est une étude qui reprend et développe leurs travaux sur la SEA entre 1986 et 1989. Elle traite trois points : le modèle d'amortissement, le type d'excitation et la force de couplage. Ils montrent que le type de modèle d'amortissement influe peu sur l'expression de la puissance transmise à partir du moment où celui-ci est faible. Ils recommandent néanmoins un amortissement proportionnel à la fréquence **(i)** pour éviter le couplage intermodal dans un même sous-système⁴. L'hypothèse **(ii)** d'excitation *rain-on-the-roof* est utile dans le cas où les déformées modales varient au sein du sous-système⁵. Enfin **(iii)** le couplage est préconisé faible pour que la CPP soit respectée.

3. voir Glossaire

4. Cette hypothèse est régulièrement faite dans les calculs mais elle ne reste pas moins qu'une approximation assez grossière.

5. On se place ici dans un contexte probabiliste : les modes ont une probabilité d'exister dans la bande de fréquence.

1.2.4 Mace

Mace [62, 63, 64], par une approche ondulatoire, s'intéresse au cas de deux systèmes continus de dimension 1. La nouveauté de son étude est de prendre en compte les ondes régressives (réflexions), élément habituellement négligé dans la SEA traditionnelle [3, 11]. En effet, l'approche ondulatoire de la SEA est souvent utilisée à des fins de calcul de CLF [3, 9, 65] en supposant que les ondes sont diffuses et uniquement transmises d'un sous-système aux autres sous-systèmes. Les réflexions qui surviennent aux frontières sont négligées.

L'auteur appelle les hypothèses suivantes : **(i)** les sous-systèmes sont linéaires et excités par des forces harmoniques décorréelées, **(ii)** le couplage est conservatif, **(iii)** les ondes sont indépendantes d'un sous-système à un autre, **(iv)** l'amortissement est faible, **(v)** les sous-systèmes sont fortement résonants. Par ailleurs leurs propriétés sont décrites par des fonctions de densité de probabilité qui admettent aussi quelques hypothèses : **(vi)** les propriétés statistiques des sous-systèmes sont indépendantes les unes des autres, **(vii)** les facteurs de réflexion sont constants et leurs phases sont des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$. Mace parvient à une écriture de la puissance transmise faisant intervenir un terme lié au champ direct, un terme lié au champ réverbéré et un terme provenant de la corrélation entre l'excitation et l'onde incidente.

1.2.5 Burrough

L'article de Burroughs *et al.* de 1997 [66] étudie les fondamentaux de la SEA (objectifs, équations, hypothèses, etc). Il reprend le modèle de Cremer [65] : deux oscillateurs couplés par un terme gyroscopique et un terme élastique ; et l'étend au cas de deux sous-systèmes multimodaux. Dans la première partie, pour prouver la CPP, l'auteur appelle les hypothèses suivantes : **(i)** les fréquences propres sont loin des bornes de la bande de fréquence pour étendre l'intégration à $-\infty + \infty$ sans perdre en précision, **(ii)** les excitations sont large bande de densité spectrale de puissance constante, **(iii)** les forces excitatrices sont indépendantes et décorréelées. Dans le second modèle de démonstration, **(iv)** les modes sont supposés fortement couplés⁶ et l'énergie est équirépartie. La CPP est dans chaque cas établie.

1.3 Conclusion

Les fondements de la SEA se sont d'abord basés sur l'approche modale modélisant un échange d'énergie entre deux oscillateurs couplés. Lyon est le premier à démontrer la relation de la *coupling power proportionality* pour trois types de couplage (gyroscopique, inertiel et élastique) en utilisant un modèle de deux oscillateurs seuls. Pour plus de deux oscillateurs, la CPP a été démontrée via la méthode des perturbations par trois auteurs : Newland, Fahy et Crandall. Il en ressort que les hypothèses de couplage conservatif et d'excitations aléatoires sont

6. aux autres modes d'un sous-système.

régulièrement citées. La nécessité de prendre en compte l'hypothèse de couplage faible n'est pas aussi claire.

A partir des années 70, d'autres modèles ont été utilisés pour démontrer la CPP et d'autres hypothèses sont apparues telles que le champ diffus, l'équipartition de l'énergie et l'amortissement faible. De plus, on observe que différents termes sont employés pour désigner une ou plusieurs hypothèses. Même si ceci est plus souvent dû à une différence de culture ou de modèle plutôt que de points de vue, cela contribue à obscurcir la méthode. Il devient, de ce fait, difficile d'identifier clairement celles qui sont réellement nécessaires et celles qui sont, au contraire, de second ordre.

Chapitre 2

Origines des hypothèses de la SEA

Foundations of statistical energy analysis assumptions

Chapter overview

This chapter discusses the origin of SEA assumptions. The demonstrations of the coupling power proportionality are done for the two approaches of SEA (modal and wave) and for several models. For each one, the required assumptions are clearly identified. A special notation is adopted : Hm_x denotes hypothesis x of the modal approach ; Hw_y hypothesis y of the wave approach.

For the modal approach the main conclusions are the following :

- For $N=2$ oscillators the assumptions are : $Hm1$ conservative coupling ; $Hm2$ random stationary and uncorrelated forces ; $Hm3$ external forces are white noises.
- For more than two oscillators, the assumption of weak coupling ($Hm4$) is invoked.
- For sets of oscillators, three assumptions are made : $Hm5$ excitations have identical power spectral densities in each subsystem ; $Hm6$ the number of modes is large ; $Hm7$ the probability density function are constant over the frequency band $\Delta\omega$ and $Hm8$ the damping is low. The alternative assumption of modal energy equipartition ($Hm9$) can bypass $Hm5$.
- For continuous systems one assumes that there is no influence of the non resonant modes ($Hm10$).

For the wave approach three hypotheses are necessary :

- High frequencies ($Hw1$), diffuse field ($Hw2$) and weak coupling ($Hw3$).

A summary illustration (figure 2.6) is given at the end of the chapter.

Le chapitre précédent a montré que les hypothèses de la SEA étaient variées et que les démonstrations le sont aussi. Ce chapitre reprend les développements théoriques des équations fondamentales de la SEA de manière à identifier clairement où et quelles hypothèses interviennent. Les ouvrages de Lyon [6] et Le Bot [67] font office de référence. Dans les premiers modèles, les oscillateurs sont *déterministes*. En d'autres termes ils se comportent comme des filtres linéaires soumis à des *entrées* aléatoires. On peut donc appliquer les théories du traitement du signal (fonctions de réponse en fréquence, corrélation, etc). Dans la section 4 les oscillateurs deviennent aléatoires et sont groupés en sous-systèmes. Enfin, dans la section 5, on se place dans le cas de systèmes continus. Quelques passages de démonstrations requièrent des développements mathématiques plus fournis mais ne participent pas nécessairement à la compréhension générale. Ils sont donc donnés en annexe. On adopte une notation spéciale pour désigner une hypothèse : Hmx est la x^{eme} hypothèse de l'approche modale et Hwy la y^{eme} hypothèse de l'approche ondulatoire.

2.1 Approche modale

2.1.1 N=2 oscillateurs

L'objectif est de retrouver la relation principale de la SEA : la *coupling power proportionality* (CPP). La puissance transmise est proportionnelle à la différence des énergies vibratoires des sous-systèmes. On rappelle la relation,

$$P_{ij} = \beta(E_i - E_j) \quad (2.1)$$

avec β le coefficient de proportionnalité.

Du point de vue de la SEA modale, le cas de démonstration le plus répandu est celui des oscillateurs couplés [6, 52, 68, 11, 54, 69, 45]. Dans la configuration de la figure 2.1, deux oscillateurs sont couplés par une raideur K et excités par des forces f_1 et f_2 . L'oscillateur i ($i=1,2$) est constitué d'une masse m_i , d'un amortissement interne λ_i et d'une raideur interne k_i . La pulsation propre de l'oscillateur découplé est $\Omega_i = (k_i/m_i)^{1/2}$, le taux d'amortissement $\eta_i = \lambda_i/m_i\Omega_i$ et sa position est notée w_i . La pulsation propre de l'oscillateur i lorsque l'autre oscillateur (j) est bloqué est notée $\omega_i = ((k_i + K)/m_i)^{1/2}$. On l'appelle aussi *pulsation bloquée*¹.

Par définition, la raideur K qui lie les deux oscillateurs a pour fonction la transmission de l'énergie. En aucun cas elle ne consomme ni ne crée d'énergie. La première hypothèse qui intervient est donc

(Hm1) : Le couplage est conservatif. *Conservative coupling*

1. voir Glossaire

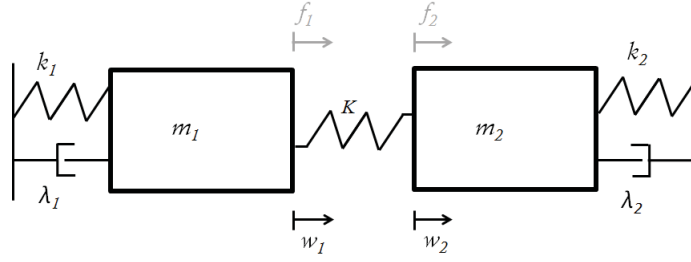


FIGURE 2.1 – Deux oscillateurs de masse m_i , de raideur k_i et d’amortissement λ_i excités par des forces aléatoires décorréées f_i sont couplés par une raideur K . *Two oscillators having mass m_i , spring of stiffness k_i and damping λ_i excited by uncorrelated random forces f_i are coupled by a spring of stiffness K .*

Les équations qui décrivent le mouvement de chaque oscillateur sont

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{w}_1 + \lambda_1 \dot{w}_1 + k_1 w_1 + K(w_1 - w_2) &= f_1, \\ m_2 \ddot{w}_2 + \lambda_2 \dot{w}_2 + k_2 w_2 + K(w_2 - w_1) &= f_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le bilan de puissance s’obtient en multipliant ces équations respectivement par \dot{w}_1 et \dot{w}_2 . Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} m_1 \dot{w}_1 \ddot{w}_1 + \lambda_1 \dot{w}_1 \dot{w}_1 + k_1 w_1 \dot{w}_1 + K(w_1 - w_2) \dot{w}_1 &= f_1 \dot{w}_1, \\ m_2 \dot{w}_2 \ddot{w}_2 + \lambda_2 \dot{w}_2 \dot{w}_2 + k_2 w_2 \dot{w}_2 + K(w_2 - w_1) \dot{w}_2 &= f_2 \dot{w}_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

soit encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_1 \dot{w}_1^2 + k_1 w_1^2 - K w_1 w_2) + \lambda_1 \dot{w}_1^2 + \frac{1}{2} K (w_1 \dot{w}_2 - \dot{w}_1 w_2) &= f_1 \dot{w}_1, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_2 \dot{w}_2^2 + k_2 w_2^2 - K w_2 w_1) + \lambda_2 \dot{w}_2^2 + \frac{1}{2} K (w_2 \dot{w}_1 - \dot{w}_2 w_1) &= f_2 \dot{w}_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Par identification on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} + P_{diss,1} + P_{12} &= P_{inj,1}, \\ \frac{dE_2}{dt} + P_{diss,2} + P_{21} &= P_{inj,2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec les énergies vibratoires

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} (m_1 \dot{w}_1^2 + k_1 w_1^2 - K w_1 w_2) \\ E_2 &= \frac{1}{2} (m_2 \dot{w}_2^2 + k_2 w_2^2 - K w_1 w_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

la puissance dissipée de l’oscillateur i

$$P_{diss,i} = \lambda_i \dot{w}_i^2 \quad (2.7)$$

la puissance injectée dans l’oscillateur i

$$P_{inj,i} = f_i \dot{w}_i \quad (2.8)$$

et les puissances échangées

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{2}K(w_1\dot{w}_2 - \dot{w}_1w_2) \\ P_{21} &= \frac{1}{2}K(w_2\dot{w}_1 - \dot{w}_2w_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

On observe naturellement que $P_{12} = -P_{21}$.

A présent considérons l'hypothèse suivante :

(Hm2) : Les forces extérieures sont aléatoires, stationnaires et décorrélées.
Random, stationary and uncorrelated external forces.

En admettant des forces aléatoires stationnaires, on fait intervenir non plus les expressions instantanées des différents termes du bilan de puissance mais leurs espérances de probabilité notées $\langle . \rangle$. Par ailleurs, il est prouvé [70] que pour deux processus aléatoires stationnaires décorrélés X et Y ,

$$\begin{aligned} \langle XY \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY} d\omega, \\ S_{XY} &= S_{F_1 F_2} H_{X F_1}^* H_{Y F_2}, \\ \langle X\dot{Y} \rangle &= - \langle \dot{X}Y \rangle, \\ \langle X\dot{X} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec S_{XY} la densité spectrale de puissance croisée des deux processus X et Y ; $H_{X F_1}$ (resp. $H_{Y F_2}$) les fonctions de réponse en fréquence ayant l'entrée F_1 (resp. F_2) et la sortie X (resp. Y).

Si les entrées f_i ($i=1,2$) sont des processus aléatoires stationnaires alors les sorties w_i et \dot{w}_i le sont aussi. Ainsi $\langle \dot{w}_1 w_2 \rangle = - \langle \dot{w}_2 w_1 \rangle$ et $\langle \dot{w}_1 w_1 \rangle = 0$. L'espérance de la dérivée de l'énergie vibratoire devient

$$\begin{aligned} \langle \frac{dE_1}{dt} \rangle &= m_1 \langle \ddot{w}_1 \dot{w}_1 \rangle + k_1 \langle \dot{w}_1 w_1 \rangle - \frac{1}{2}K(\langle \dot{w}_1 w_2 \rangle + \langle \dot{w}_2 w_1 \rangle) = 0, \\ \langle \frac{dE_2}{dt} \rangle &= m_2 \langle \ddot{w}_2 \dot{w}_2 \rangle + k_2 \langle \dot{w}_2 w_2 \rangle - \frac{1}{2}K(\langle \dot{w}_2 w_1 \rangle + \langle \dot{w}_1 w_2 \rangle) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) permet de simplifier les expressions de (2.5) pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle P_{diss,1} \rangle + \langle P_{12} \rangle &= \langle P_{inj,1} \rangle, \\ \langle P_{diss,2} \rangle + \langle P_{21} \rangle &= \langle P_{inj,2} \rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

Cette relation traduit que l'énergie reçue est soit distribuée au sous-système voisin soit dissipée.

On suppose que

(Hm3) : Les forces extérieures sont des bruits blancs. *External forces are white noises.*

Le terme *bruit blanc* permet de considérer que les excitations ont des densités spectrales de puissances constantes (notées S_i). Les hypothèses 2 et 3 impliquent que

- dans le domaine temporel la fonction d'autocorrélation de l'excitation f_i est une fonction Dirac : $R_{f_i f_i}(\tau) = S_i \delta(\tau)$ où δ est le symbole de Kronecker.
- la fonction d'intercorrélacion entre f_i et f_j est nulle ($R_{f_i f_j}(\tau) = 0$) lorsque $i \neq j$ et la densité interspectrale de puissance est égale à zéro (par décorrélation) : $S_{f_i f_j} = 0$.

Pour la démonstration, les énergies $\langle E_1 \rangle$, $\langle E_2 \rangle$ et la puissance échangée $\langle P_{12} \rangle$ doivent être explicitement calculées. La difficulté réside dans le développement des termes $\langle \dot{w}_i^2 \rangle$, $\langle w_1 w_2 \rangle$, $\langle \dot{w}_1 w_2 \rangle$ et $\langle \dot{w}_2 w_1 \rangle$. Pour cela on utilise les propriétés des produits d'intercorrélacion,

$$\begin{aligned}
 \langle w_1 w_2 \rangle &= \frac{S_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}^*(\omega) H_{21}(\omega) d\omega + \frac{S_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}^*(\omega) H_{22}(\omega) d\omega, \\
 \langle \dot{w}_1 \dot{w}_2 \rangle &= \frac{S_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 H_{11}^*(\omega) H_{21}(\omega) d\omega + \frac{S_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 H_{12}^*(\omega) H_{22}(\omega) d\omega, \\
 \langle \dot{w}_1 w_2 \rangle &= \frac{S_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega H_{11}^*(\omega) H_{21}(\omega) d\omega + \frac{S_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega H_{12}^*(\omega) H_{22}(\omega) d\omega, \\
 \langle w_1 \dot{w}_2 \rangle &= \frac{S_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -j\omega H_{11}^*(\omega) H_{21}(\omega) d\omega - \frac{S_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega H_{12}^*(\omega) H_{22}(\omega) d\omega, \\
 \langle w_1^2 \rangle &= \frac{S_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{11}(\omega)|^2 d\omega + \frac{S_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{12}(\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec H_{ik} le terme de rang i colonne k de la matrice de fonction de réponse en fréquence du système. Pour les obtenir, on reprend les équations du mouvement (équation (2.2)) dans le domaine fréquentiel ($w_i(t) \rightarrow \hat{w}_i(\omega)$). Soit,

$$\begin{aligned}
 -m_1 \omega^2 \hat{w}_1 + \lambda_1 j \omega \hat{w}_1 + k_1 \hat{w}_1 + K(\hat{w}_1 - \hat{w}_2) &= F_1, \\
 -m_2 \omega^2 \hat{w}_2 + \lambda_2 j \omega \hat{w}_2 + k_2 \hat{w}_2 + K(\hat{w}_2 - \hat{w}_1) &= F_2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Passées sous forme matricielle, on fait apparaître le système $\mathbf{D}\mathbf{W}=\mathbf{F}$ avec \mathbf{D} la matrice de rigidité dynamique, \mathbf{W} le vecteur déplacement et \mathbf{F} le vecteur excitation. Il vient

$$\begin{bmatrix} m_1(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_1) & -K \\ -K & m_2(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

où on a noté $\Delta_i = \lambda_i/m_i$ la bande passante. Or, le système matriciel peut aussi s'écrire sous la forme $\mathbf{W}=\mathbf{H}\mathbf{F}$ avec \mathbf{H} la matrice des fonctions de réponse en fréquence. Le calcul de cette dernière matrice revient à inverser la matrice de rigidité dynamique : $\mathbf{H} = \mathbf{D}^{-1}$.

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \begin{bmatrix} m_2(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_2) & K \\ K & m_1(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_1) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

avec $\det \mathbf{D} = m_1(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_1)m_2(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_2) - K^2$.

Par ailleurs, disposant des équations (2.6) et (2.13), on obtient le système matriciel,

$$\begin{bmatrix} \langle E_1 \rangle \\ \langle E_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1/2\pi \\ S_2/2\pi \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_1/2\pi \\ S_2/2\pi \end{bmatrix} = \frac{1}{E_{11}E_{22} - E_{12}E_{21}} \begin{bmatrix} E_{22} & -E_{12} \\ -E_{21} & E_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle E_1 \rangle \\ \langle E_2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

avec

$$E_{ik} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [m_i\omega^2 + (k_i + K)] |H_{ij}|^2(\omega) - KH_{1k}^*(\omega)H_{2k}(\omega) d\omega \quad (2.18)$$

L'expression de la puissance échangée P_{12} devient avec les équations (2.9) et (2.13),

$$\langle P_{12} \rangle = \begin{bmatrix} P_1 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1/2\pi \\ S_2/2\pi \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} j\omega KH_{11}^*(\omega)H_{21}(\omega) d\omega \\ P_2 &= - \int_{-\infty}^{\infty} j\omega KH_{12}^*(\omega)H_{22}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (2.20)$$

On note que malgré les apparences, ces deux intégrales sont bien réelles. En substituant (2.17) dans (2.19), l'espérance de la puissance transmise entre 1 et 2 est

$$\langle P_{12} \rangle = \frac{1}{E_{11}E_{22} - E_{12}E_{21}} \begin{bmatrix} P_1 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{22} & -E_{12} \\ -E_{21} & E_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle E_1 \rangle \\ \langle E_2 \rangle \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

soit encore,

$$\langle P_{12} \rangle = \frac{P_1E_{22} + P_2E_{21}}{E_{11}E_{22} - E_{12}E_{21}} \langle E_1 \rangle - \frac{P_1E_{12} + P_2E_{11}}{E_{11}E_{22} - E_{12}E_{21}} \langle E_2 \rangle \quad (2.22)$$

Le calcul des coefficients requiert le calcul des intégrales de l'équation (2.13) par la technique des résidus [67]. Après développement, on retrouve la célèbre relation de la *coupling power proportionality* (CPP),

$$\langle P_{12} \rangle = \beta_{12}(\langle E_1 \rangle - \langle E_2 \rangle) \quad (2.23)$$

avec

$$\beta_{12} = \frac{K^2(\Delta_1 + \Delta_2)}{m_1m_2[(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\omega_2^2 + \Delta_2\omega_1^2)]} \quad (2.24)$$

On observe la symétrie $\beta_{21} = \beta_{12}$ et $\langle P_{21} \rangle = \beta_{21}(\langle E_2 \rangle - \langle E_1 \rangle) = -\beta_{12}(\langle E_1 \rangle - \langle E_2 \rangle) = -P_{12}$.

Finalement, les hypothèses suffisantes² pour établir la relation de la *coupling power proportionality* entre deux oscillateurs sont :

- un couplage conservatif,

2. On rappelle : A est une condition nécessaire de B alors $A \Rightarrow B$; A est une condition suffisante de B alors $B \Rightarrow A$.

- des forces extérieures de type bruit blanc aléatoires, stationnaires et décorrélées.

On distingue le cas de deux oscillateurs car la CPP fonctionne toujours. Et c'est d'ailleurs ce qui est montré dans le chapitre 5. Pour plus de deux oscillateurs la CPP ne fonctionne que dans le cadre d'hypothèses restrictives. C'est que qui est démontré dans la suite de ce chapitre.

2.1.2 N>2 oscillateurs

On considère un système à $N > 2$ oscillateurs (Figure 2.2). L'équation du mouvement d'un tel système est

$$m_i \ddot{w}_i + \lambda_i \dot{w}_i + k_i w_i + \sum_{i \neq j} K_{ij} (w_i - w_j) = f_i \quad (2.25)$$

où f_i est la force appliquée à l'oscillateur i .

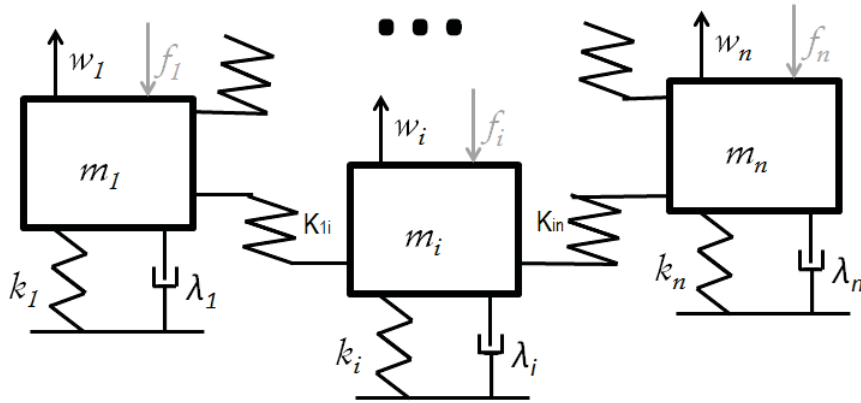


FIGURE 2.2 – N>2 oscillateurs de masse m_i , de raideur k_i et d'amortissement λ_i couplés par des raideurs K_{ij} . *N>2 oscillators having mass m_i , spring of stiffness k_i and damping λ_i are coupled by elastic couplings K_{ij}*

La démonstration de la CPP s'appuie sur la méthode des perturbations qui consiste à écrire le déplacement w_i en série de Taylor et calculer, ordre par ordre, les produits d'intercorrélation. L'hypothèse supplémentaire nécessaire³ est la suivante :

(Hm4) : Le couplage est faible. *Weak coupling*

Elle se traduit par une raideur de couplage petite devant les raideurs internes $K_{ij} \ll k_i$ pouvant aussi s'écrire $K_{ij} = \epsilon \alpha_{ij}$ avec $\epsilon \ll 1$ ⁴. Le développement limité à l'ordre 2 du déplacement de l'oscillateur i est

$$w_i(t) = w_{i,0} + \epsilon w_{i,1}(t) + \epsilon^2 w_{i,2}(t) + o(\epsilon^2) \quad (2.26)$$

3. Il est important de noter que cette technique n'est valable que dans un voisinage du système non perturbé.

4. En pratique il n'y a pas de cas où la notion de couplage faible a été explicitement définie sur la base d'un critère. On ne peut donc pas définir rigoureusement α_{ij} .

La dérivation terme à terme conduit à des développements similaires pour $\dot{w}_i(t)$ et $\ddot{w}_i(t)$. Les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned} m_i \ddot{w}_{i,0} + \lambda_i \dot{w}_{i,0} + k_i w_{i,0} &= f_i(t), \\ m_i \ddot{w}_{i,1} + \lambda_i \dot{w}_{i,1} + k_i w_{i,1} &= \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} (w_{j,0} - w_{i,0}), \\ m_i \ddot{w}_{i,2} + \lambda_i \dot{w}_{i,2} + k_i w_{i,2} &= \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} (w_{j,1} - w_{i,1}), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.27)$$

après avoir substitué le développement de (2.26) dans (2.25) et identifié les termes de chaque ordre en ϵ .

Les termes de droite sont associés à la source, ceux de gauche sont les inconnues. On remarque que l'inconnue $w_{i,n}$ d'ordre n dépend des inconnues $w_{j,n-1}$ d'ordre $n - 1$. Ainsi le système peut être résolu de manière récursive. En introduisant la réponse impulsionnelle $h_i(t)$ de l'oscillateur i découplé, c'est à dire la solution $m_i \ddot{h}_i + \lambda_i \dot{h}_i + k_i h_i = \delta(t)$, la résolution se fait à chaque ordre

$$\begin{aligned} w_{i,0} &= h_i \star f_i, \\ w_{i,1} &= h_i \star \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} (w_{j,0} - w_{i,0}), \\ w_{i,2} &= h_i \star \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} (w_{j,1} - w_{i,1}), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.28)$$

où \star désigne le produit de convolution. En considérant les équations (2.9) et (2.26), la puissance transmise entre deux oscillateurs i et j est, à l'ordre 2, limitée à trois termes

$$\langle P_{ij} \rangle = \epsilon \alpha_{ij} \langle w_{i,0} \dot{w}_{j,0} \rangle + \epsilon^2 \alpha_{ij} \langle w_{i,0} \dot{w}_{j,1} + w_{i,1} \dot{w}_{i,0} \rangle + o(\epsilon^2) \quad (2.29)$$

En effet, les termes se combinent et suppriment un facteur 1/2. On rappelle : $\langle \dot{w}_1 w_2 \rangle = - \langle \dot{w}_2 w_1 \rangle$ et $\langle \dot{w}_1 w_1 \rangle = 0$. Avec (2.10) on a,

$$\langle w_{i,0} \dot{w}_{j,0} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_{i,0} \dot{w}_{j,0}}(\omega) d\omega \quad (2.30)$$

$w_{i,0}$ est la sortie du système linéaire de réponse impulsionnelle h_i d'entrée f_i et $\dot{w}_{j,0}$ la dérivée temporelle de la sortie du système linéaire de réponse h_j et d'entrée f_j . Dans le domaine fréquentiel, la fonction de réponse en fréquence H_i est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle h_i . La densité spectrale de puissance $S_{w_{i,0} \dot{w}_{j,0}}$ devient

$$S_{w_{i,0} \dot{w}_{j,0}} = \frac{S_{f_i, f_j}}{2\pi} H_i^*(\omega) j\omega H_j(\omega) \quad (2.31)$$

Compte tenu des hypothèses $Hm2$ et $Hm3$, $S_{f_i, f_j} = 0$, ainsi

$$\langle w_{i,0} \dot{w}_{j,0} \rangle = \frac{S_{f_i, f_j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_i^*(\omega) j\omega H_j(\omega) d\omega = 0 \quad (2.32)$$

Les termes suivants s'écrivent, après développements en annexe A et en posant $S_{f_i, f_i} = S_i$

$$\begin{aligned} \langle w_{i,0} \dot{w}_{j,1} \rangle &= \frac{S_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{ij} |H_i(\omega)|^2 j\omega H_j(\omega) d\omega \\ \langle w_{i,1} \dot{w}_{j,0} \rangle &= -\frac{S_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{ij} j\omega H_i(\omega) |H_j(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.33)$$

Finalement, en injectant (2.32) et (2.33) dans (2.29), la puissance transmise entre deux oscillateurs i et j devient

$$\langle P_{ij} \rangle = \epsilon^2 (P_i S_i - P_j S_j) + o(\epsilon^2) \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{ij}^2 |H_i(\omega)|^2 j\omega H_j(\omega) d\omega \\ P_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{ij}^2 j\omega H_i(\omega) |H_j(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.35)$$

Par ailleurs, les espérances des énergies cinétique et élastique sont égales lorsque les hypothèses $Hm2$ et $Hm3$ sont satisfaites⁵. Ainsi, l'énergie vibratoire de l'oscillateur i est

$$\langle E_i \rangle = m_i \dot{w}_i^2 \quad (2.36)$$

Soit pour l'ordre 0

$$\langle E_i \rangle = \frac{S_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m_i \omega^2 |H_i|^2(\omega) d\omega + o(1) \quad (2.37)$$

(2.34) et (2.37) conduisent à

$$\langle P_{ij} \rangle = \beta_{ij} \langle E_i \rangle - \beta_{ji} \langle E_j \rangle + o(\epsilon^2) \quad (2.38)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \epsilon^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{ij}^2 |H_i(\omega)|^2 j\omega H_j(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} m_i \omega^2 |H_i|^2(\omega) d\omega} \\ \beta_{ji} &= \epsilon^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{ij}^2 |H_j(\omega)|^2 j\omega H_i(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} m_j \omega^2 |H_j|^2(\omega) d\omega} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Il est démontré⁶ après développement des intégrales que

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\pi} m_i m_j \Delta_i \Delta_j \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 K_{ij}^2 |H_j H_i|^2 d\omega \quad (2.40)$$

où $\Delta_i = \lambda_i / m_i$. On observe que les indices peuvent être permutés et que $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Cette dernière relation est aussi appelée *relation de réciprocité* [6] ou *relation de cohérence* [47]. En conclu-

5. Ce résultat peut être démontré en tout généralité. C'est ce qui est fait au chapitre 2 section 2.2 de l'ouvrage [67].

6. section 2.3 de [67]

sion, pour un système ayant plus de deux oscillateurs la relation de la CPP est théoriquement vérifiée sous réserve de faire l'hypothèse supplémentaire du couplage faible. Le cas $N = 2$ est donc un cas particulier.

2.1.3 Paquets d'oscillateurs

On considère dans cette section que les oscillateurs sont nombreux et peuvent être regroupés par *paquets* pour former des *sous-systèmes* (cf figure 2.3). Chaque sous-système i contient N_i modes (assimilés à N_i oscillateurs). Un oscillateur est repéré par son indice α dans le sous-système i auquel il appartient. La position de l'oscillateur α du sous système i est noté $W_{i,\alpha}$.

Forme déterministe

On fait l'hypothèse supplémentaire que

(Hm5) : Les densités spectrales des excitations sont identiques au sein de chaque sous-système.
The power spectral densities of the excitations are identical within each subsystem.

Cette hypothèse vient compléter les hypothèses 2 et 3. En résumé, les excitations sont stationnaires, aléatoires, décorréées de type bruit blanc et leurs densités spectrales de puissances sont les mêmes dans tous les sous-systèmes. Ce type d'excitation est aussi appelé *rain-on-the-roof* car les forces sont décorréées spatialement et temporellement et d'intensité égale en analogie avec des gouttes de pluie tombant sur un toit. Des précisions sur ce type d'excitation sont données dans la suite.

On introduit un système canonique dont les expressions seront similaires à celles calculées dans les sections précédentes. Dans chaque sous système, les oscillateurs sont découplés et les masses sont supposées identiques. L'équation du mouvement de l'oscillateur α du sous-système i est

$$m_i \ddot{W}_{i,\alpha} + \lambda_{i,\alpha} \dot{W}_{i,\alpha} + k_{i,\alpha} W_{i,\alpha} = F_{i,\alpha} + \sum_{j \neq i} \sum_{\beta=1}^{N_j} K_{i\alpha,j\beta} W_{j,\beta} \quad (2.41)$$

On considère qu'un mode du sous-système i peut échanger de l'énergie avec tous les modes d'un sous-système $j \neq i$. Par nature, les modes forment une base orthogonale. L'énergie totale est donc la somme des énergies modales. Aussi,

$$\langle E_i \rangle = \sum_{\alpha=1}^{N_i} \langle E_{i,\alpha} \rangle \quad (2.42)$$

avec l'énergie vibratoire d'un mode similaire à celle trouvée pour deux oscillateurs (équation (2.6)),

$$\langle E_{i,\alpha} \rangle = \frac{1}{2} \left(m_i \dot{W}_{i,\alpha}^2 + k_{i,\alpha} W_{i,\alpha}^2 - \sum_{j \neq i} \sum_{\beta=1}^{N_j} K_{i\alpha,j\beta} W_{i,\alpha} W_{j,\beta} \right) \quad (2.43)$$

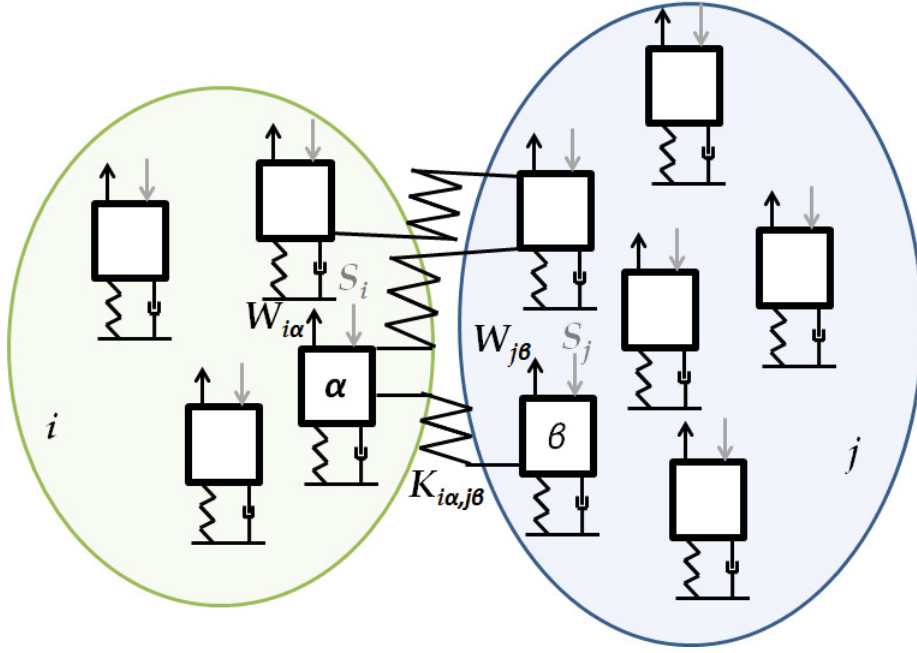


FIGURE 2.3 – Sous-systèmes contenant $N_i > 2$ oscillateurs de masse m_i , de raideur k_i et d’amortissement λ_i couplés par des raideurs $K_{i\alpha, j\beta}$. Subsystems containing $N_i > 2$ oscillators having mass m_i , spring of stiffness k_i and damping λ_i are coupled by elastic couplings $K_{i\alpha, j\beta}$.

De la même manière, la puissance transmise entre deux sous-systèmes est la somme des puissances transmises d’un mode à un autre.

$$\langle P_{ij} \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle P_{i\alpha, j\beta} \rangle \quad (2.44)$$

Avec la puissance transmise mode à mode $P_{i\alpha, j\beta}$ similaire à l’équation (2.9),

$$P_{i\alpha, j\beta} = \frac{1}{2} K_{i\alpha, j\beta} (W_{i\alpha} \dot{W}_{j\beta} - \dot{W}_{i\alpha} W_{j\beta}) \quad (2.45)$$

le problème canonique est posé.

Avec l’équation (2.34) et l’hypothèse $Hm5$ (les DSP sont constantes dans chaque sous-système : $S_{i\alpha} = S_i$) il vient,

$$\langle P_{i\alpha, j\beta} \rangle = P_{i\alpha} S_i - P_{j\beta} S_j \quad (2.46)$$

Avec (2.44) et (2.46),

$$\langle P_{ij} \rangle = \sum_{\alpha, \beta} P_{i\alpha} S_i - \sum_{\alpha, \beta} P_{j\beta} S_j \quad (2.47)$$

considérant (2.37), (2.42) et (2.47),

$$\langle P_{ij} \rangle = \frac{\sum_{\alpha, \beta} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}^2 |H_{i\alpha}(\omega)|^2 j\omega H_{j\beta}(\omega) d\omega}{\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} m_i \omega^2 |H_{i\alpha}|^2(\omega) d\omega} \langle E_i \rangle - \frac{\sum_{\alpha, \beta} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}^2 |H_{j\beta}(\omega)|^2 j\omega H_{i\alpha}(\omega) d\omega}{\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} m_j \omega^2 |H_{j\alpha}|^2(\omega) d\omega} \langle E_j \rangle \quad (2.48)$$

ou encore

$$\langle P_{ij} \rangle = \beta_{ij} \langle E_i \rangle - \beta_{ji} \langle E_j \rangle \quad (2.49)$$

Les facteurs β sont proches de ceux trouvés en (2.39) avec des sommes ajoutées au numérateur et au dénominateur. Ces sommes portent sur le nombre de modes et obligent à connaître tous les paramètres des oscillateurs et à faire le calcul des fonctions de réponses en fréquence pour chaque oscillateur de chaque sous-système. C'est le principal désavantage de la méthode déterministe.

Forme probabiliste

On peut faire une estimation probabiliste des sommes discrètes (équation (2.48)) en les remplaçant par des intégrales. Pour minimiser l'erreur dans une telle opération il convient de faire l'hypothèse supplémentaire que

(Hm6) : Le nombre de modes est important dans chaque sous-système ($N_i \gg 1$).
The number of modes is large in each subsystem ($N_i \gg 1$).

Ainsi le numérateur et le dénominateur de β_{ij} deviennent respectivement,

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}^2 |H_{i\alpha}(\omega)|^2 j\omega H_{j\beta}(\omega) d\omega = N_i N_j \langle \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ij}^2 |H_i(\omega)|^2 j\omega H_j(\omega) d\omega \rangle \quad (2.50)$$

$$\sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} m_i \omega^2 |H_{i\alpha}(\omega)|^2 d\omega = N_i \langle \int_{-\infty}^{+\infty} m_i \omega^2 |H_i(\omega)|^2 d\omega \rangle \quad (2.51)$$

où N_i est le nombre de modes du sous-système i dans la bande de fréquence $\Delta\omega$ et $\langle \int d\omega \rangle$ une estimation probabiliste de l'intégrale $\int d\omega$ en considérant que les fréquences propres $\omega_{i,\alpha}$ et $\omega_{j,\beta}$ sont des variables aléatoires⁷. Avec ces deux dernières équations on peut réécrire la relation (2.49). On propose la notation $\langle \langle . \rangle \rangle$ qui désigne l'estimation probabiliste des espérances $\langle P_{ij} \rangle, \langle E_i \rangle$ en considérant que le nombre de modes dans la bande de fréquence $\Delta\omega = [\omega_{min}; \omega_{max}]$ soit grand.

$$\langle \langle P_{ij} \rangle \rangle = \omega \eta_{ij} \langle \langle E_i \rangle \rangle - \omega \eta_{ji} \langle \langle E_j \rangle \rangle \quad (2.52)$$

avec $\omega = \sqrt{\omega_{min}\omega_{max}}$ et où

$$\omega \eta_{ij} = N_j \frac{\langle \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ij}^2 |H_i(\omega)|^2 j\omega H_j(\omega) d\omega \rangle}{\langle \int_{-\infty}^{+\infty} m_i \omega^2 |H_i(\omega)|^2 d\omega \rangle} \quad (2.53)$$

7. Le lecteur aura noté qu'il n'y a pas d'hypothèse sur la répartition des modes. On se contente d'admettre l'approximation des sommes par des intégrales. Toutes les formules d'approximation sont valables (Somme de Darboux, méthode de monte carlo, etc).

Les η_{ij} sont appelés facteurs de perte par couplage (ou *coupling loss factors, CLF*). Ils remplacent les facteurs β_{ij} qui sont traditionnellement utilisés pour les formes déterministes de la CPP. De plus, la relation (2.52) fait intervenir la pulsation centrale de la bande d'excitation $\Delta\omega = [\omega_{min}; \omega_{max}]$.

A la sous-section précédente les résonateurs étaient déterministes et la résolution du problème déterministe requérait une connaissance totale de tous les paramètres des oscillateurs. En pratique les sous-systèmes contiennent un grand nombre de modes ; le nombre d'oscillateurs et, *a fortiori* de paramètres, est très élevé. A l'inverse, le problème posé sous sa forme probabiliste requiert de connaître uniquement les propriétés statistiques d'un oscillateur. Elles sont spécifiées par

(Hm7) : une fonction de densité de probabilité uniforme sur la bande de fréquence $\Delta\omega$.
The probability density function are unchanging over the frequency band $\Delta\omega$.

La figure 2.4 illustre cette hypothèse. La résolution des intégrales pour le calcul de $\omega\eta_{ij}$ (équation

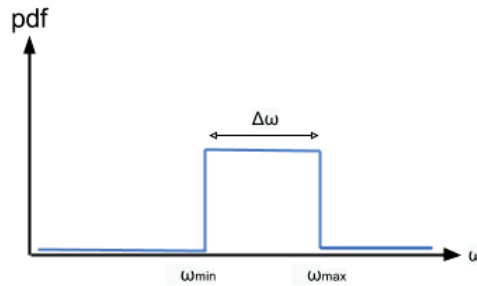


FIGURE 2.4 – PdF des $\omega_{i,\alpha}$: les fréquences propres sont décrites par des fonctions de densité de probabilité uniformes sur $\Delta\omega$. *PdF of $\omega_{i,\alpha}$: the natural frequencies are described with probability density functions which are constant over $\Delta\omega$.*

tion (2.53)) est faite en annexe C de [67]. L'intégrale du numérateur fait notamment intervenir l'hypothèse

(Hm8) : L'amortissement est faible. *The damping is small.*

pour simplifier l'expression de $\langle \int j\omega H_j |H_i|^2 d\omega \rangle$ et finalement obtenir pour un couplage élastique

$$\begin{aligned}\omega\eta_{ij} &= \frac{N_j \pi \omega K_{ij}^2}{2m_i m_j \omega^3 \Delta\omega} \\ \omega\eta_{ji} &= \frac{N_i \pi \omega K_{ij}^2}{2m_i m_j \omega^3 \Delta\omega}\end{aligned}\tag{2.54}$$

Le calcul des coefficients β par l'approche déterministe requierait la connaissance précise de toutes les fréquences propres $\omega_{i,\alpha}$ (équations (2.24) et (2.40)). Ici, les fréquences propres n'apparaissent plus dans l'expression de $\beta = \omega\eta_{ij}$. C'est en cela que c'est une estimation probabiliste, le temps de calcul est diminué au détriment de la précision.

D'autre part, une conséquence de (2.54) est que la relation de réciprocité devient,

$$N_i \eta_{ij} = N_j \eta_{ji} \quad (2.55)$$

Autre approche

Une autre méthode est utilisée dans les références [6, 59] pour prouver la CPP sans passer par un calcul formel des énergies. Entre deux oscillateurs α et β appartenant respectivement aux sous-systèmes i et j , la CPP est prouvée et s'écrit

$$\langle P_{ij} \rangle = \sum_{i\alpha, j\beta} \beta_{\alpha, \beta} (\langle E_{i, \alpha} \rangle - \langle E_{j, \beta} \rangle) \quad (2.56)$$

En considérant

(Hm9) : Équipartition modale de l'énergie. *Modal energy equipartition.*

on peut écrire que l'énergie vibratoire d'un mode α d'un sous-système i est l'énergie vibratoire du sous-système divisée par le nombre total de modes : $\langle E_{i, \alpha} \rangle = \frac{\langle E_i \rangle}{N_i}$. Par ailleurs on introduit $\eta_{ij} \omega N_i = \sum_{\alpha, \beta} \beta_{\alpha, \beta}$. Il vient alors,

$$\langle P_{ij} \rangle = \omega (\eta_{ij} \langle E_i \rangle - \eta_{ji} \langle E_j \rangle) \quad (2.57)$$

On retrouve la relation de réciprocité de l'équation (2.55). Dans cette approche l'hypothèse *Hm5* est remplacée par l'hypothèse *Hm9*. Il est important de noter que cette hypothèse d'équipartition de l'énergie modale est une hypothèse comportementale, elle est donc difficile à vérifier *a priori*.

2.1.4 Systèmes continus

Jusqu'à présent les systèmes étudiés étaient discrets (le nombre d'oscillateurs/modes était fini). Pour les systèmes continus tels que des poutres, des plaques et des cavités, le nombre de modes est illimité.

Équivalence avec le modèle des oscillateurs

En général, l'équation du mouvement qui régit les déplacements d'une structure s'écrit

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial w}{\partial t} + kw = f(x, t) + \text{conditions aux limites} \quad (2.58)$$

où m est la masse (par unité de longueur, de surface ou de volume), k est un opérateur compact, λ un terme d'amortissement et f un champ de forces extérieures. Chaque structure finie

contient des modes propres ψ_α . Ces modes forment une base orthogonale,

$$\int \psi_\alpha(x)\psi_\beta(x)dx = \delta_{\alpha,\beta} \quad (2.59)$$

où l'intégrale est réalisée sur tout le domaine d'étude. Une réécriture conduit à la relation de fermeture [67] :

$$\sum_\alpha \psi_\alpha(x)\psi_\alpha(x') = \delta(x - x') \quad (2.60)$$

Cette relation est la conséquence que les modes propres forment une base sur laquelle toute solution w peut être développée comme une série de modes propres. Si $w(x, t)$ est une solution de l'équation du mouvement (2.58) alors à chaque instant t ,

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int w(x', t)\delta(x' - x)dx' \\ w(x, t) &= \int w(x', t) \sum_\alpha \psi_\alpha(x)\psi_\alpha(x')dx' \\ w(x, t) &= \sum_\alpha \int w(x', t)\psi_\alpha(x')dx' \psi_\alpha(x) \\ w(x, t) &= \sum_\alpha W_\alpha(t)\psi_\alpha(x) \end{aligned} \quad (2.61)$$

où $W_\alpha(t) = \int w(x', t)\psi_\alpha(x')dx'$ ⁸. De même, l'excitation f peut se développer comme une série,

$$f(x, t) = \sum_\alpha F_\alpha(t)\psi_\alpha(x) \Leftrightarrow F_\alpha(t) = \int f(x, t)\psi_\alpha(x)dx \quad (2.62)$$

où les termes F_α sont appelés forces modales. L'équation du mouvement (2.58), développée sur la base des modes propres, introduit des termes de masse et de raideur généralisées. Le parallèle avec le mouvement d'un oscillateur harmonique est ainsi justifié.

Les forces modales peuvent elles être considérées comme une excitation *rain-on-the-roof* ?

Pour reprendre les parties précédentes, une excitation *rain-on-the-roof* est définie comme un champ homogène et isotrope de forces aléatoires stationnaires, décorrélées dans l'espace et le temps. L'autocorrélation d'une telle excitation s'écrit,

$$R_{ff}(x, x', t, t') = \langle f(x, t)f(x', t') \rangle = S\delta(x' - x)\delta(t' - t) \quad (2.63)$$

Cette fonction dépend de la distance $|x' - x|$ (caractère homogène et isotrope) et du retard $\tau = t' - t$ (caractère stationnaire). Comme f est un processus aléatoire, les forces modales F_α

8. Précisons que l'interversion de l'intégrale avec la somme n'est possible que si la série converge absolument, propriété qui est vérifiée dans la base des modes propres.

le sont aussi et leur corrélation s'écrit

$$\begin{aligned}
 \langle F_\alpha(t)F_\beta(t + \tau) \rangle &= \langle \int f(x, t)\psi_\alpha(x)dx \times \int f(x', t + \tau)\psi_\beta(x')dx' \rangle \\
 &= \iint \langle f(x, t)f(x', t + \tau) \rangle \psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')dxdx' \\
 &= \iint S\delta(x' - x)\delta(\tau)\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')dxdx' \\
 &= S\delta(\tau) \int \psi_\alpha(x)\psi_\beta(x)dx \\
 &= S\delta(\tau)\delta_{\alpha,\beta}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Ces simplifications se font en vertu des propriétés de la fonction δ et de l'orthogonalité des modes propres⁹. Ainsi, pour une excitation *rain-on-the-roof*, toutes les forces modales sont des bruits blancs décorrélés ayant le même spectre S . Une telle excitation respecte bien les hypothèses $Hm2$ et $Hm3$.

Excitation par des bruits blancs tronqués

La densité spectrale de puissance d'un bruit blanc s'étend sur une bande fréquentielle infinie. Pour pouvoir prouver que la CPP est toujours vérifiée, il faut se ramener au cas fini.

On divise la structure en sous-systèmes et on considère toutes les hypothèses précédentes. La principale différence est que chaque sous-système a un nombre infini de résonateurs. Par conséquent une troncature fréquentielle s'impose¹⁰. On suppose désormais que les excitations (stationnaires, aléatoires décorrélées) ont une densité spectrale de puissance constante sur une bande de fréquence $\Delta\omega = [\omega_{min}, \omega_{max}]$ et nulle ailleurs. Autrement dit,

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= S_0 \text{ si } \omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}] \\
 S(\omega) &= 0 \text{ sinon}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

On modifie ainsi l'hypothèse $Hm3$ en imposant des excitations stationnaires, aléatoires, décorrélées, bruits blancs tronqués. On n'excite uniquement les modes qui sont dans la bande de fréquence. Ces modes sont qualifiés de *résonants*. Leur fréquence est située dans $\Delta\omega$; autrement ils sont qualifiés de *non résonants*. On va supposer que seuls les modes résonants participent à l'échange d'énergie. On suppose qu'il n'y a

(Hm10) : Pas d'influence des modes non résonants. *No influence of non-resonant modes.*

Les bornes de l'intégrale dans le calcul de l'espérance de l'énergie modale deviennent

$$\langle E_\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} m\omega^2 |H_\alpha|^2 S(\omega) d\omega = \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} m\omega^2 |H_\alpha|^2 d\omega \tag{2.66}$$

9. Par ailleurs on suppose ici que toutes les intégrales sont convergentes.

10. La série converge absolument, le reste $o(\epsilon^2)$ tend donc vers 0. Ainsi on est en droit de tronquer.

Le problème continu se ramène à un problème discret par le développement sur la base des modes propres du système indépendant (équation (2.61)). D'autre part ce problème discret se trouve être précisément le problème canonique. Ainsi, le système continu est réduit à un système de paquets d'oscillateurs. On est en droit d'appliquer le formalisme précédent.

2.2 Approche ondulatoire

Jusqu'à présent l'approche utilisée était l'approche modale. Elle a permis de mettre en évidence la provenance de dix hypothèses de la SEA. Voyons maintenant les hypothèses spécifiques à l'approche ondulatoire.

On considère que le champ vibratoire est décomposé en une superposition d'ondes propagatives suffisamment désordonnées pour aborder le problème d'une manière statistique. Les auteurs ayant contribué à cette approche sont Lyon [6], Scharton [11] et Langley [50].

2.2.1 Étude préliminaire : relations de propagation de l'énergie

Dans cette section deux résultats sont présentés : l'égalité entre les énergies cinétique et élastique et la relation de proportionnalité entre le flux d'intensité et la densité d'énergie locale.

Prenons le cas d'une corde vibrante de tension T et de masse m par unité de longueur. L'équation des ondes est [71]

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T \frac{\partial w^2}{\partial x^2} = 0 \quad (2.67)$$

où la célérité est

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (2.68)$$

Les densités d'énergie cinétique $K(x, t)$ et élastique $V(x, t)$ sont définies par

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \frac{1}{2} m \dot{w}^2 \\ V(x, t) &= \frac{1}{2} T w'^2 \end{aligned} \quad (2.69)$$

où $\dot{\square}$ est la dérivée par rapport au temps et \square' la dérivée par rapport à l'espace.

La densité d'énergie est : $W(x, t) = K(x, t) + V(x, t)$. Le flux d'intensité est quant à lui défini par

$$I(x, t) = -T w' \dot{w} \quad (2.70)$$

Le bilan d'énergie est caractérisé par le flux d'intensité et la densité d'énergie. Soit

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (2.71)$$

Prenons une onde propagative, $w(x, t) = f(x - ct)$ où f est une notation arbitraire. Les densités

d'énergie cinétique et élastique sont

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \frac{1}{2} m c^2 f'^2 \\ V(x, t) &= \frac{1}{2} T f'^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

L'équation (2.68) conduit à l'égalité des densités d'énergie

$$K(x, t) = T(x, t) \quad (2.73)$$

Ainsi une onde propagative dans une corde vérifie l'égalité des densités d'énergie cinétique et élastique pour toutes les positions x et à tout instant t . Par ailleurs, le flux d'intensité I et la densité d'énergie W sont développés

$$\begin{aligned} I &= T c f'^2 \\ W &= T f'^2 \end{aligned} \quad (2.74)$$

soit encore

$$I = cW \quad (2.75)$$

2.2.2 Échange d'énergie entre deux sous-systèmes

Lorsque deux sous-systèmes i et j ont une frontière commune, ils échangent de l'énergie via cette frontière. On commence par poser l'hypothèse suivante

(Hw1) : La fréquence est élevée. *The frequency is high.*

Elle permet de se placer dans l'approximation de la vibroacoustique géométrique [72] et d'utiliser la méthode des rayons (une introduction est donnée par exemple en [73]). En 2D et 3D les ondes sont supposées planes et évoluent dans toutes les directions à des vitesses égales. Cette dernière hypothèse d'homogénéité et d'isotropie est celle d'un

(Hw2) : champ diffus. *Diffuse field.*

Elle se traduit par des densités d'énergie homogènes et une intensité radiative isotrope¹¹. Un champ diffus est donc une somme d'ondes planes d'amplitudes et de phases aléatoires, provenant de manière équiprobable de toutes les directions. En un point l'énergie se calcule en intégrant les contributions en provenance de tout l'espace. Comme l'intensité est le flux de puissance moyen sur un côté d'une surface unité, l'intégration se fait sur une demie sphère

11. Le terme de dissipation vient contrarier l'hypothèse de champ diffus. En toute rigueur seule une dissipation nulle permet un champ diffus mais il n'y aurait, dans ce cas, pas de puissance injectée! Finalement, il faut considérer une dissipation suffisamment faible et voir cette hypothèse comme une idéalisation (impossible à vérifier en réalité).

($2\pi r^2$ au lieu de $4\pi r^2$). Il vient

$$I = \frac{c_g W}{2\pi} \quad (2.76)$$

avec c_g la vitesse de groupe.

On considère la situation suivante : les deux hypothèses sont vérifiées (hautes fréquences, champ diffus) et la frontière adjacente Γ aux sous-systèmes est petite par rapport aux autres frontières. C'est l'hypothèse de couplage faible vue par l'approche ondulatoire.

(Hw3) : Couplage faible. *Weak coupling.*

Le flux d'énergie échangée est caractérisé par l'efficacité de transmission T_{ij} qui est le ratio des puissances transmises et incidentes. La puissance incidente de i vers j est la somme des contributions de tous les rayons arrivant sur la frontière Γ par angle θ ,

$$P_{i \rightarrow j} = \int_L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_{ij} I \cos(\theta) d\theta d\Gamma \quad (2.77)$$

avec L la longueur de la frontière Γ . La puissance transmise est la différence des puissances incidentes¹²

$$P_{ij} = P_{i \rightarrow j} - P_{j \rightarrow i} \quad (2.78)$$

Par ailleurs, le champ étant diffus, on peut introduire une efficacité de transmission moyenne définie par

$$\bar{T}_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_{ij} \cos(\theta) d\theta \quad (2.79)$$

qui devient indépendante de l'angle d'incidence. (2.77) devient, avec (2.76) et (2.79),

$$P_{i \rightarrow j} = \frac{L \bar{T}_{ij} c_g W_i}{2\pi} \quad (2.80)$$

La puissance transmise est finalement

$$P_{ij} = \frac{L \bar{T}_{ij} c_g}{2\pi} W_i - \frac{L \bar{T}_{ji} c_g}{2\pi} W_j \quad (2.81)$$

Pour retrouver la relation de la CPP de l'approche modale, on considère que la densité d'énergie peut s'écrire $W_i = E_i/S$ (avec S la surface) et introduire la densité modale [65] $n = S\omega/2\pi c_\phi$ (avec c_ϕ la vitesse de phase). Soit

$$P_{ij} = \frac{L \bar{T}_{ij}}{4\pi^2 c_\phi \omega} \times \frac{E_i}{n_i} - \frac{L \bar{T}_{ji}}{4\pi^2 c_\phi \omega} \times \frac{E_j}{n_j} \quad (2.82)$$

12. Implicitement on suppose que les ondes sont non cohérentes.

En posant $\eta_{ij}\omega = L\bar{T}_{ij}/4\pi^2c_\phi\omega$, l'équation (2.82) conduit à

$$P_{ij} = \eta_{ij}\omega \frac{E_i}{n_i} - \eta_{ji}\omega \frac{E_j}{n_j} \quad (2.83)$$

Les approches modale et ondulatoire arrivent au même résultat : la *coupling power proportionality*. La figure 2.5 propose un parallèle entre SEA modale et SEA ondulatoire.

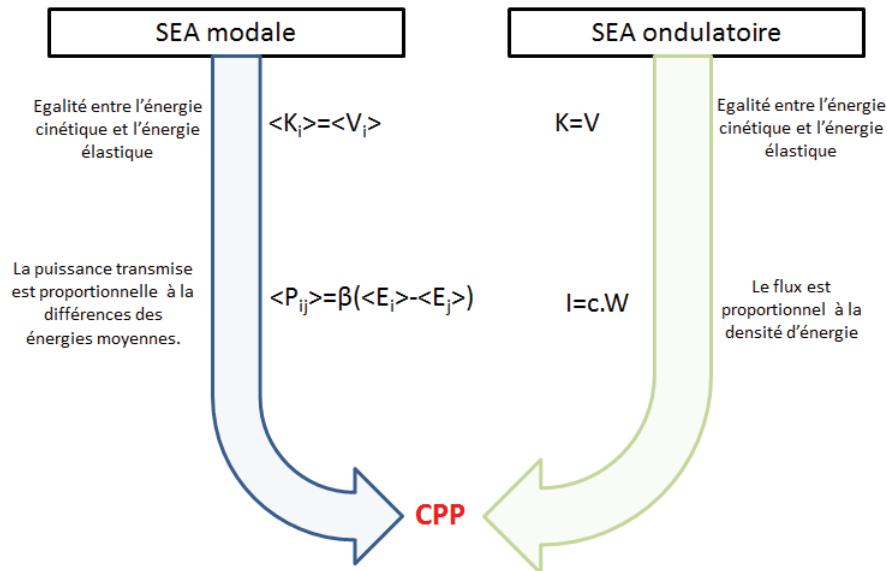


FIGURE 2.5 – SEA modale et SEA ondulatoire mènent au même résultat : la CPP. *Modal SEA and Wave SEA lead to the same result : the CPP.*

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a choisi un couplage exclusivement élastique. En toute rigueur un terme de couplage gyroscopique et un terme de couplage par la masse peuvent aussi être pris en compte. La restriction au cas élastique n'affecte ni la compréhension générale des phénomènes ni le résultat de la CPP, mais étoffe considérablement les expressions de la puissance transmise et des énergies vibratoires (*a fortiori* les expressions des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation). Les résultats énoncés restent donc vrais hormis l'expression du coefficient β qui est modifiée.

La figure 2.6 propose un point de vue plus synthétique de chaque démonstration et des hypothèses requises. On distingue deux domaines : l'approche modale et l'approche ondulatoire. Les hypothèses qui sont appelées sont différentes (à part l'hypothèse du couplage faible). Désireux d'avoir des résultats rapides et fiables par la SEA, l'ingénieur aura beaucoup de mal à vérifier toutes les hypothèses prescrites. Même s'il peut contrôler les entrées, il ne lui sera pas aisé de connaître l'état des sous-systèmes. D'autre part, la vision modale et la vision ondulatoire mènent au même résultat : la CPP. On s'interroge sur les équivalences possibles entre les hypo-

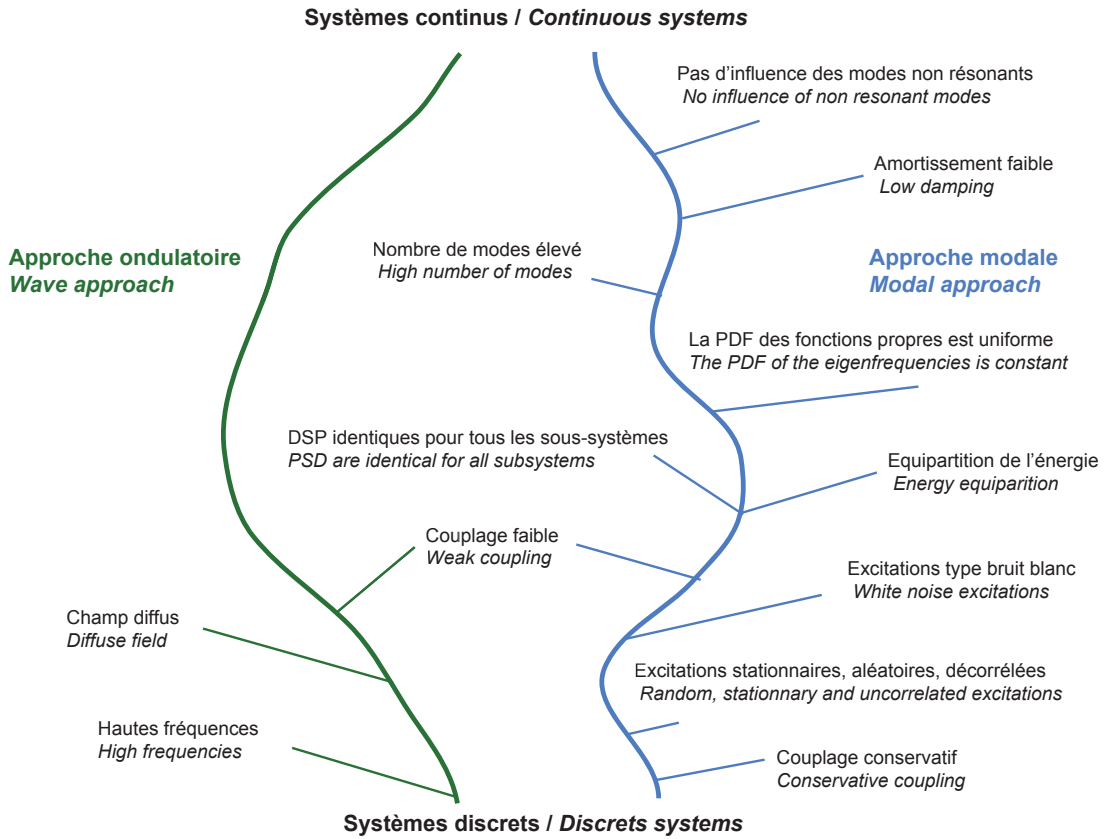


FIGURE 2.6 – Résumé des hypothèses de la SEA suivant les modèles dans lesquels elles interviennent. *Summary of SEA assumptions with respect to their call-out models.*

thèses de chaque approche. Dans cette optique, une étude sur les inclusions, les équivalences et le degré de nécessité des hypothèses de la SEA pourrait être bénéfique. C'est précisément l'objet des chapitres suivants.

Chapitre 3

Hypothèse de champ diffus

Diffuse field assumption

Chapter overview

This chapter is a discussion of the rain-on-the-roof excitation and the diffuse field hypotheses when using statistical energy analysis (SEA). The example of a simply supported plate is taken to quantify whether a field is diffuse.

Before getting to the heart of the matter several approaches of vibroacoustics are reviewed to introduce diffuseness : wave acoustics, geometrical acoustics and statistical acoustics (cf figure 3.1). The definition of diffuse field in the present chapter is based on a geometrical vibro-acoustic definition : the field is considered diffuse if homogeneous. The question of the isotropic nature of a field is not broached.

The rain-on-the-roof hypothesis is discussed with the assumption of diffuse field by increasing the number of excitations. The study of the conditions of diffuseness starts with the computation of the local energy $\langle e \rangle (x, y, \omega_c)$ at different points on the plate, called receivers (in section 3.2). The diffuse nature of a field is examined by comparing the energy at different receivers. From the equation of motion (equation (3.5)) and using the frequency response function H (equation (3.7)) one demonstrates the local energy expectation at any point when the plate is excited by a single point force (equation (3.11)). A ratio σ_d is then introduced : it is the standard deviation divided by the mean value of the local energy expectation (equation (3.13)). When σ_d approaches zero, the local energy is uniformly distributed over the plate. Precisely the criterion $\sigma_d \leq 0.7$ defines a diffuse field.

The drawing of σ_d is given in section 3.3.1. σ_d is represented on the dimensionless wave-number κ - damping η plan and the map is correlated with other specific parameters : the number of resonant modes N in the frequency band ; the modal overlap M and the attenuation factor per unit length m (figure 3.3 is a central result, figure 3.4 is a simplification). It is observed that diffuse field is reached at high frequencies and low damping (dark zone). In that case σ_d is below 0.7. For low frequencies only few modes are present, the field is modal. For

high damping value the field is dominated by a direct field emanating from the point force. In that cases σ_d is above 0.7. The presence of several letters on the map is useful to isolate specific test case for the rest of the essay.

Two illustrations, one of a direct field (frequency and damping conditions of point *A* from figure 3.3) and one of a modal field (frequency and damping conditions of point *B*) are respectively given by figure 3.5 and figure 3.6. In figure 3.5 the energy dramatically decreases due to a high damping and the source position is easily recovered : the field is direct. The modal behavior is less obvious : there are few modes (19 until $f_{max} = 89$ Hz) and the energy fluctuates between -60 dB and -80 dB. In figure 3.6 one can observe an alternation of dark and light areas which demonstrates minimum and maximum of energies.

Figure 3.7 shows the evolution of σ_d versus the number of point excitations with the same power spectral density. Two cases are tested : In figure 3.7 (a) the field is modal with a single excitation ($\kappa = 1.29, f_c = 31.5Hz; \eta = 0.03$) (point *C* in figure 3.3). In Figure 3.7 (b) the response is dominated by the direct field ($\kappa = 7.31, f_c = 1000Hz; \eta = 0.1$) with a single excitation (point *D* in Figure 3.3). It is observed that even if a field is not diffuse (modal fields, direct fields) for a single excitation ($\sigma_d > 0.7$) using a high number of excitation would enforce it to be diffuse. Consequently, the hypothesis of a rain-on-the-roof excitation implies the state of diffuse field.

Figure 3.8 illustrates the convergence of the diffuse field criterion according to the meshing type of the receivers on the plate. The frequency and damping conditions are given by point *E* of figure 3.3. It is shown that a random mesh converges faster than an organized mesh. The use of an organized mesh on a simple and symmetric structure like the rectangular plate can lead to a bias in the study. For these reasons a random mesh is preferred in the simulation.

From the previous results (figure 3.7 and figure 3.8) we noted that σ_d decreases but it never reaches zero even for a large number of random forces. Three arguments are developed :

- first, the fact that the kinetic energy is arbitrary fixed at zero by boundary conditions. An outskirt area has a null energy density and the size of the area depends on the wavelength and thus on the frequency band : the lower the frequency, the larger the area.
- second, the fact that in the vicinity of the excitation point, the energy is more significant. This phenomenon is explained by Weaver [74] and is denoted as the back-scattering effect (cf figure 3.9).
- The third argument is based on the billiard theory. The right angles impose four directions of propagation (cf figure 3.11). Even if there are many reflections the rays are still organized which is not in agreement with diffuseness.

In section 3.5 the particular case of a circular plate (figure 3.12) is examined. The circular plate is submitted to a random single point force and the diffuse field criterion is computed in the same manner as the rectangular plate example. Figure 3.13 shows a comparison of the σ_d of the two plates (rectangular and circular). They are renamed $\sigma_{d,rect}$ and $\sigma_{d,circ}$. It is observed

that $\sigma_{d,circ}$ stays above 0.7 even for high frequencies. It means that the diffuse field is never reached for a circular plate submitted to one random point excitation.

An investigation on the reflexion type is then conducted. It is shown that specular reflections (cf figure 3.14) make concentric energy distributions further or nearer from the plate center (depending on the point force position). In that case, the standard deviation of the local energies cannot be small and the diffuse field criterion is high. Conversely, Lambertian reflections (cf figure 3.15) allow a possible diffuse behavior since the reflections are not compulsorily symmetrical.

A remark on the definition of the energy density is given in appendix B. It is known that locally, taking the energy density as twice the kinetic energy is a false approximation. Nonetheless, globally, over the whole plate, the approximation is true. To evaluate the possible error, a comparison is made between σ_d from the analytical calculation and σ_d from the finite element method. Results show that (cf figure B.1) the analytic computation is not favorable to a better convergence. On the contrary, it overestimates σ_d .

Finally the main conclusions of this chapter are that the field

- is always diffuse with a rain on the roof excitation.
- is never diffuse for non ergodic structures submitted to a single point excitation if one considers that the excitation gives a single ray. This is the point of view of the billiard theory.
- can be diffuse in a rectangular plate with a single point excitation with some conditions on the frequency and on the damping and if one considers that the excitation lead to multiple rays (not in agreement with the point of view of the billiard theory).

Some results of this chapter have been presented in a congress [75] or published [76].

Les chapitres précédents ont souligné l'importance du champ diffus dans la démonstration de la *coupling power proportionality* (CPP). Deux interrogations peuvent être amenées :

Comment caractériser le champ diffus ? Sous quelles conditions l'obtient-on ?

Ce chapitre tente de répondre à ces questions. En premier lieu, un critère de champ diffus est proposé. Il permet, par un calcul d'écart type des énergies locales en différents points d'une structure, de constater (ou non) que le champ est diffus. Puis deux exemples analytiques sont traités pour déterminer ses conditions d'émergence. Les résultats de ce chapitre ont donné lieu à la publication [76].

3.1 Définition du champ diffus

Le concept de champ diffus peut être introduit selon différents points de vue de la vibro-acoustique. On distingue :

- l'acoustique ondulatoire, dont le principe repose sur la résolution d'équations aux dérivées partielles en fonction des conditions initiales et des conditions limites. Cette approche présente plusieurs difficultés : la forme de la structure ne s'exprime pas toujours de manière évidente et le comportement des parois est souvent difficile à définir rigoureusement.
- l'acoustique géométrique, dont le principe consiste à suivre les trajectoires de rayons (vibratoires ou sonores) se réfléchissant sur les frontières d'une structure et qui respectent les lois de Snell-Descartes. Ce moyen d'investigation est très utilisé en acoustique des salles et n'a de sens que dans le domaine des hautes fréquences.
- l'acoustique statistique (ou l'acoustique de Sabine), domaine dans lequel s'inscrit la SEA, qui donne une description macroscopique statistique des phénomènes physiques.

Par définition, en régime permanent, la pression acoustique totale est la superposition des réponses individuelles de chaque mode. D'après Rossi [72], en acoustique ondulatoire, un champ diffus est *caractérisé en régime permanent par un niveau de pression acoustique spatialement uniforme et, en régime libre (extinction de la source sonore), par une décroissance linéaire et spatialement uniforme de ce niveau quel que soit l'emplacement de la source*. Cette définition est applicable aux systèmes acoustiques (cf figure 3.1 (a)) comme aux structures. Weaver [77] insiste plus sur l'aspect aléatoire en expliquant que lorsque le champ est diffus, même si la réponse de la structure est déterministe, *après un temps suffisamment long et plusieurs réflexions les ondes paraissent aléatoires*.

Du point de vue de l'acoustique géométrique où les ondes vibratoires et acoustiques sont vues comme des "rayons", un champ est diffus lorsqu'il est *homogène et isotrope*. C'est la définition habituelle de l'acoustique des salles. Cela signifie, dans un contexte purement acoustique, que toutes les ondes sonores arrivant au microphone ont les mêmes amplitudes (homogénéité)

et aucune direction n'est privilégiée (isotropie) [78] (cf figure 3.1 (b)). L'homogénéité, dans le cas vibratoire, signifie que la densité d'énergie en un point d'une structure est égale au rapport de l'énergie totale sur l'aire de la structure. L'isotropie, qui caractérise l'invariance par rotation des propriétés physiques de la structure, permet d'écrire de plus que l'intensité ne dépend pas de la direction d'observation. En terme de rayon, cela implique qu'en chaque point la densité de rayons est la même et dans chaque direction le nombre de rayons incidents est le même.

En acoustique statistique, dans l'hypothèse du champ diffus, l'énergie (surfaique ou volumique) moyenne est la même et décroît de la même manière partout. C'est ce qui a permis d'établir la loi de Sabine sur le temps de réverbération. Si à chaque réflexion l'énergie d'un rayon diminue par absorption de $\delta w = -\alpha w_i$ (avec α le facteur d'absorption moyen et w_i l'énergie moyenne incidente) et qu'on admet que la diminution d'énergie est un phénomène continu dans le temps alors, en valeur relative, il vient

$$\frac{\delta w}{w} = \frac{-\alpha}{t_m} dt \quad (3.1)$$

où t_m est le temps moyen lié au libre parcours moyen l entre deux réflexions. Pour un champ diffus il est démontré que le libre parcours moyen est lié au volume du système V et à la surface totale des parois S par la relation $l = 4V/S$. L'intégration de l'équation (3.1) donne

$$w = w_0 e^{\frac{-\alpha t}{t_m}} \quad (3.2)$$

avec w_0 l'énergie à l'instant $t = 0$ du régime libre. Le temps de réverbération T_s est défini comme étant le temps nécessaire pour observer une décroissance de 60 dB après l'extinction de la source. Soit avec (3.3)

$$w(T_s) = w_0 e^{\frac{-\alpha T_s}{t_m}} = w_0 10^{-6} \quad (3.3)$$

d'où à $c = 340$ m/s

$$T_s = \frac{0.16V}{\alpha S} \quad (3.4)$$

Ainsi, l'hypothèse de champ diffus implique plusieurs propriétés : la décroissance exponentielle de l'énergie dans le temps et le fait que, par ailleurs, cette décroissance soit la même quelque soit la répartition des absorbants sur les parois. Finalement la théorie de Sabine (1895) se limite à une description globale et approximative du champ acoustique. Les variables énergétiques utilisées sont moyennées dans l'espace et dans le temps. La SEA conserve cet esprit.

Lyon [79], pour définir le champ diffus, part de la mécanique statistique et commence par énoncer trois conditions d'état aléatoire maximal (*maximally random state*) pour des particules : (i) toutes les directions de propagation sont envisageables ; (ii) la valeur efficace de la vitesse d'une particule est la même pour toutes les directions ; (iii) les positions et les moments cinétiques de chaque particule sont indépendants. Il propose alors une définition du champ diffus pour des sets d'oscillateurs : (i) Les modes ont la même énergie dans une bande de fréquence. (ii) Les déplacements (les potentiels de vitesse acoustique) et les moments (les pressions acous-

tiques) d'un mode sont statistiquement indépendants. Enfin, (iii) les amplitudes modales sont statistiquement indépendantes (cf figure 3.1 (c)).

Toujours du point de vue statistique, Fahy [54] définit le champ diffus avec une vision thermodynamique : *La densité d'énergie est constante dans tout le volume de l'enceinte.*

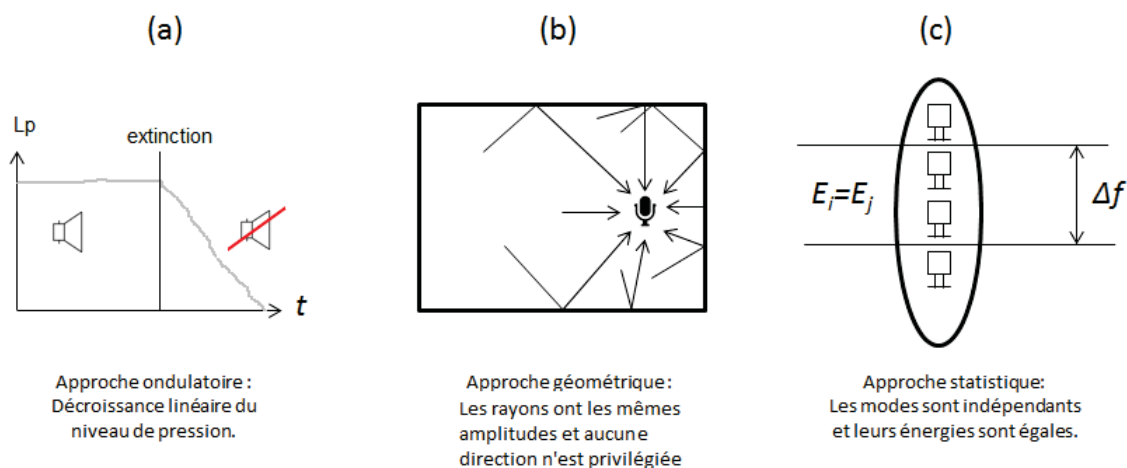


FIGURE 3.1 – Champ diffus vu par la vibro-acoustique ondulatoire (a), la vibro-acoustique géométrique (b) et la vibro-acoustique statistique (c). *Diffuse field from three point of views : wave vibro-acoustics (a), architectural vibro-acoustics (b), statistical vibro-acoustic (c).*

A partir de ces définitions, on conçoit bien que le caractère diffus dépend de la géométrie du système, des conditions aux limites mais aussi du type d'excitation. Dans ce chapitre, les conditions d'apparition du champ diffus vont être étudiées dans deux types de structures. D'autre part, on ne s'intéresse qu'au caractère homogène du champ, le caractère isotrope n'est pas abordé.

3.2 Cas d'une plaque rectangulaire appuyée-appuyée

Le premier exemple est une plaque rectangulaire en appui simple sur ses bords (illustrée par la figure 3.2). L'évaluation du champ diffus est basée sur une comparaison des énergies locales en tout point (appelé *récepteur*) de la plaque.

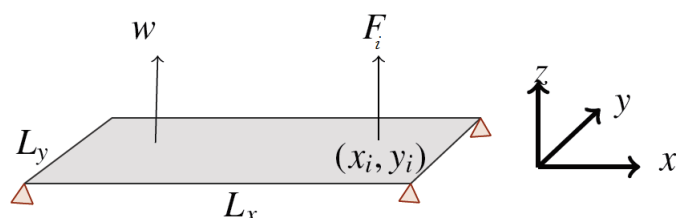


FIGURE 3.2 – Plaque rectangulaire en appui simple excitée par une force seule ou un ensemble de forces aléatoires décorréliées de type bruits blancs. *Simply supported rectangular plate excited by either a single point force or several random forces having the power spectral density of white noise.*

L'équation du mouvement régissant la déflexion transverse $w(x, y, t)$ d'une plaque non amortie excitée par une force $f(x, y, t)$ est

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \lambda \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t), \quad (3.5)$$

où $\nabla^4 = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et λ l'amortissement¹. Dans le cas de N excitations ponctuelles, la distribution de force est

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^N F_i(t) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (3.6)$$

où F_i sont des fonctions aléatoires dont la densité spectrale de puissance $S_i(\omega)$ est supposée constante sur toute la bande de fréquence $\Delta\omega$ et nulle ailleurs. Pour une excitation *rain-on-the-roof*, qui est composée d'un ensemble de forces aléatoires stationnaires décorréliées de même nature qu'un bruit blanc, N tend vers l'infini.

Si H désigne la réceptance, c'est à dire la fonction de réponse en fréquence entre la sortie w en (x, y) et l'entrée F_i en (x_i, y_i) alors, par décomposition modale, H est

$$H(x, y; x_i, y_i; \omega) = \sum_{n \geq 0} \frac{\psi_n(x_i, y_i) \psi_n(x, y)}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta\omega_n\omega)}, \quad (3.7)$$

où ψ_n est la déformée propre du mode n et $\eta = \lambda/2m\omega_n$ le facteur d'amortissement.

3.2.1 Énergie locale

L'expression complète de l'énergie d'une plaque est donnée par plusieurs ouvrages ([71, 80]). Cependant, par raison de simplicité nous nous limiterons à définir la densité d'énergie locale comme le double de l'énergie cinétique (on discute ce point dans l'annexe B). Ainsi, l'espérance de l'énergie locale est

$$\langle e(x, y, t) \rangle = m \langle \dot{w}(x, y, t)^2 \rangle. \quad (3.8)$$

Le terme $\langle \dot{w}^2 \rangle$ peut être considéré comme la fonction d'autocorrélation de \dot{w} prise en zéro. C'est aussi la transformée de Fourier de la densité spectrale de puissance $S_{\dot{w}\dot{w}}$ à zéro,

$$\langle \dot{w}(x, y, t)^2 \rangle = R_{\dot{w}\dot{w}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{w}\dot{w}}(\omega) d\omega. \quad (3.9)$$

1. Dans ce chapitre l'amortissement est visqueux. On distinguera deux types d'amortissement dans le chapitre suivant.

Or, les forces étant décorrélées, la densité spectrale de puissance de \dot{w} est liée à la densité spectrale de puissance des forces par,

$$S_{\dot{w}\dot{w}}(\omega) = \sum_{i=1}^N \omega^2 |H|^2(\omega) S_i(\omega). \quad (3.10)$$

En combinant les équations (3.8), (3.9) et (3.10) l'expression de l'énergie locale devient

$$\langle e \rangle (x, y, \omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |H|^2 d\omega, \quad (3.11)$$

où les bornes de l'intégrale ont été réduites à $\Delta\omega$ car $S_i(\omega)$ est nulle au delà. Remarquons que l'espérance $\langle e \rangle$ est indépendante du temps pour des forces stationnaires et qu'elle est dépendante de la bande de fréquence (octave centrée sur ω_c). Le problème est finalement réduit au calcul de la réceptance H entre une force en x_i, y_i et un déplacement en x, y .

Dans l'exemple d'une plaque simplement appuyée, pour un mode $n = (\alpha, \beta)$, les expressions des fréquences propres non amorties ainsi que les déformées propres sont

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{D}{m}} \left(\left(\frac{\alpha\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{\beta\pi}{L_y} \right)^2 \right) \\ \psi_n(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{\pi\alpha x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi\beta y}{L_y}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

où $\alpha = 1, 2, \dots$ et $\beta = 1, 2, \dots$

3.2.2 Critère de champ diffus

Le champ diffus est caractérisé par la distribution de l'énergie locale sur la plaque. On définit un critère de champ diffus en calculant le ratio de l'écart-type de l'énergie locale normalisé par la moyenne [75]. Soit,

$$\sigma_d = \frac{\sqrt{\langle e \rangle^2 - \langle e \rangle^2}}{\langle e \rangle} = \frac{\text{écart type}}{\text{moyenne}} \quad (3.13)$$

avec $\bar{\square} = \frac{1}{L_x L_y} \iint \square(x, y) dx dy$. Lorsque σ_d tend vers zéro, les récepteurs ont des énergies voisines, l'énergie locale est uniformément distribuée sur la plaque. Ainsi on définit le critère de champ diffus $\sigma_d \leq 0.7^2$.

Le ratio σ_d est tracé sur le plan fréquence/amortissement. Pour pouvoir généraliser ce cas de plaque appuyée, la fréquence est remplacée par le nombre d'onde sans dimension

$$\kappa = \frac{kl}{2\pi} \sim \sqrt{\omega} \quad (3.14)$$

où $k = (\omega^2 m / D)^{1/4}$ et où $l = \pi L_x L_y / 2(L_x + L_y)$ est le libre parcours moyen. Le plan (κ, η) est

2. D'autres critères sont aussi valables. On aurait pu prendre celui de Schroeder [81] par exemple.

utilisé dans une étude consacrée aux diagrammes de validité de la SEA [82]. Il est intéressant de comparer la cartographie du champ diffus avec les résultats de cette étude. Pour délimiter le domaine de validité de la SEA, pour un système seul, Le Bot *et al.* [82] se basent sur :

- $N = n\Delta\omega$, le nombre de modes dans la bande de fréquence d'étude, n la densité modale³.
- M , le recouvrement modal qui est le produit de la densité modale par $\eta\omega_c$.
- $m = \eta\omega l/c_g$, le facteur d'atténuation par unité de longueur, c_g la vitesse de groupe des ondes et l le libre parcours moyen.

Pour des sous-systèmes i et j couplés, un quatrième paramètre s'ajoute

- la condition de couplage faible $\gamma_{ij} \ll 1$ avec $\gamma_{ij} = \tau_{ij}L_{ij}/(m_i l P_i)$ la force de couplage⁴, L_{ij} la longueur du couplage, τ_{ij} l'efficacité moyenne de transmission et P_i le périmètre du sous-système i .

3.3 Résultats : analyse des conditions d'apparition du champ diffus

Les dimensions, l'épaisseur et le matériau de la plaque sont fixés (cf Tableau 3.1). La longueur et la largeur de la plaque sont choisies de manière à éviter l'apparition de doublets de modes [72] et à répartir au mieux les fréquences propres. Le critère de champ diffus est observé en faisant varier la bande de fréquence (octaves entre 16 Hz et 8 kHz) et l'amortissement η . Le pas fréquentiel et le nombre de récepteurs sont estimés par une étude de convergence (cf Annexe C).

type	Symbole	Valeur	Unité
Dimensions	$L_x \times L_y$	1.44×1.2	m
Densité	ρ	7800	kg/m^3
Module d'Young	E	$2.1E11$	N/m^2
Coefficient de Poisson	ν	0.3	–
Épaisseur	h	2	mm
Coefficient de flexion	D	153.84	–
Coefficient d'amortissement	η	[0.001 – 0.9]	–
Fréquence centrale d'octave	f_c	[16 – 8000]	Hz
Libre parcours moyen	l	1.0282	m

Tableau 3.1 – Paramètres mécaniques de la plaque rectangulaire. *Mechanical parameters of the rectangular plate.*

3. Définie par le nombre de modes présent dans la bande de fréquence $\Delta\omega$: $n = N/\Delta\omega$.

4. On renvoie le lecteur au chapitre 5 pour une discussion sur la force d'un couplage.

3.3.1 Une force excitatrice

L'excitation est, pour commencer, unique et sa position est aléatoire. Le calcul de l'énergie locale en chaque point récepteur se base sur l'expression (3.11) avec $S_i = 1$. La fonction de réponse en fréquence H est donnée par l'équation (3.7) où on ne considère que les modes entre $f_{min} = 0$ Hz et $f_{max} = \sqrt{2}f_c$ Hz. La carte des valeurs calculées de σ_d en fonction de κ et η est représentée par la figure 3.3. Les isovaleurs de σ_d forment des lignes délimitant le champ diffus de la plaque rectangulaire. Le nombre de modes N , le recouvrement modal M et le facteur d'atténuation m sont représentés par des lignes épaisses. Leurs valeurs sont ajustées pour une bonne corrélation avec la cartographie. Les différents points A, B, C, ... permettent d'isoler des cas spécifiques, utiles pour la suite du mémoire.

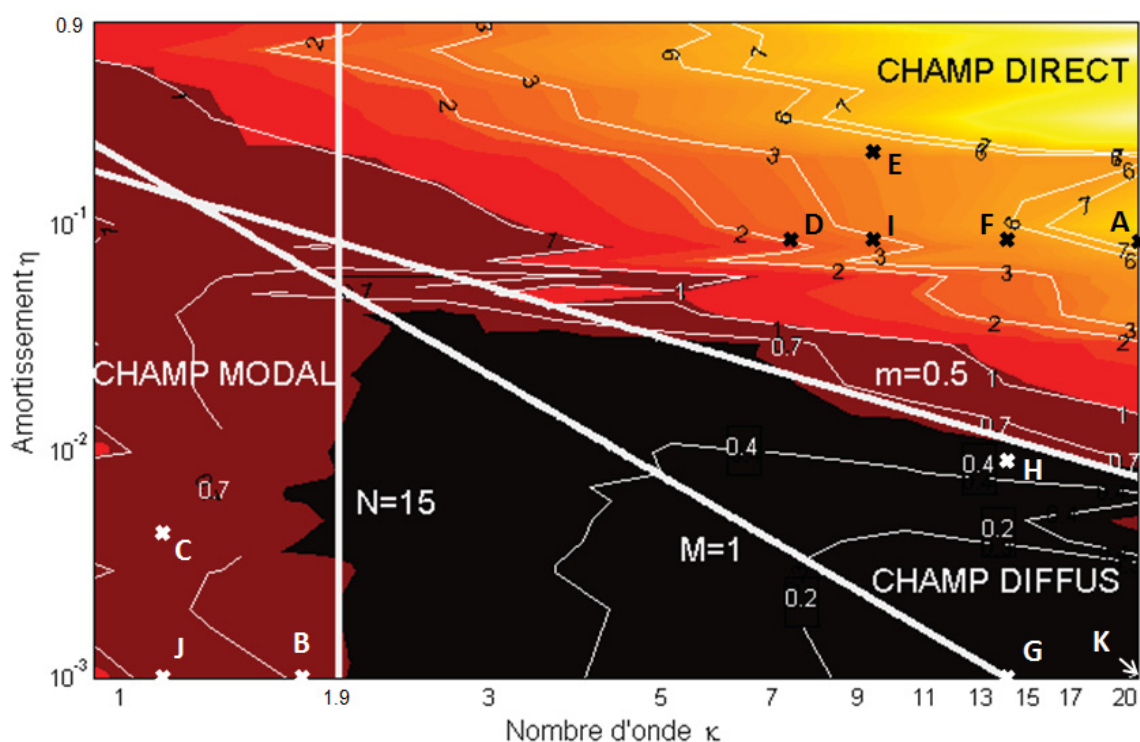


FIGURE 3.3 – Illustration de σ_d sur le plan nombre d'onde- amortissement pour un cas général de plaque rectangulaire excitée par une seule force excitatrice comparé au recouvrement modal $M = 1$, au facteur d'atténuation $m = 0.5$ et au nombre de modes $N = 15$. *Illustration of σ_d for a general rectangular plate excited by a single point force versus wavenumber - damping ratio compared with modal overlap $M = 1$, the attenuation factor $m = 0.5$ and the number of modes $N = 15$.*

Il y a beaucoup d'informations sur cette carte. Pour faciliter la compréhension, la figure 3.4 propose un dessin simplifié. On distingue trois zones :

- Une zone sombre ($0 < \sigma_d < 0.7$) qui s'étend entre $\kappa = 1.9$ et $\kappa = 20.7$ est bornée à gauche par la ligne verticale $N = 15$ et au dessus par le facteur d'atténuation $m = 0.5$.
- Une zone claire ($0.7 < \sigma_d < 1.2$) qui s'étend entre $\kappa = 0.9$ et $\kappa = 1.9$ est bornée à droite par

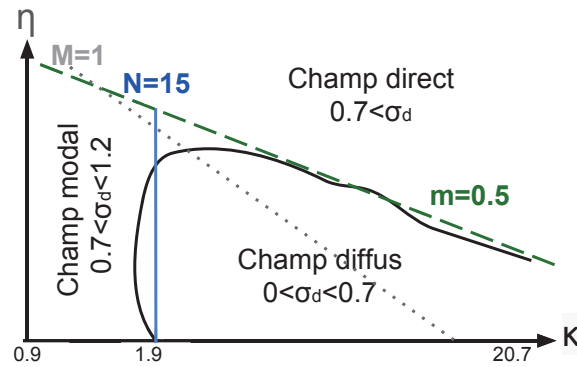


FIGURE 3.4 – Schéma simplifié de σ_d sur le plan (κ, η) pour un cas général de plaque rectangulaire excitée par une seule force excitatrice comparé au recouvrement modal $M = 1$, au facteur d'atténuation $m = 0.5$ et au nombre de modes $N = 15$. *Simplified drawing of σ_d on (κ, η) plan for a general rectangular plate excited by a single point force compared with the modal overlap $M = 1$, the attenuation factor $m = 0.5$ and the number of modes $N = 15$.*

la ligne verticale $N = 15$.

- Une zone très claire ($0.7 < \sigma_d$) qui s'étend entre $\kappa = 1.9$ et $\kappa = 20.7$ est bornée à gauche par la ligne verticale $N = 15$ et au dessous par le facteur d'atténuation $m = 0.5$.

Dans la première zone, le σ_d est en dessous de la ligne de niveau $\sigma_d = 0.7$. Il est considéré comme faible. Cela signifie que les écarts des énergies des récepteurs sont faibles. Tous les récepteurs de la plaque ont des énergies voisines : le champ est diffus. Ce domaine est avec une bonne approximation délimité par les lignes $N = 15$ et $m = 0.5$. Le nombre de modes N et le facteur d'atténuation m sont donc des paramètres importants pour qualifier le champ diffus. En effet, une partie de la ligne de niveau $\sigma_d = 0.7$ est quasi droite et se confond avec la ligne $m = 0.5$. L'autre partie de la ligne de niveau est de part et d'autre de la ligne verticale $N = 15$. Il faut donc un nombre suffisamment important de modes et un facteur d'atténuation faible pour avoir un champ diffus. Les conditions hautes fréquences et faibles amortissements sont favorables.

D'autre part, les calculs sont menés sur des bandes d'octave, chacune contenant un grand nombre de modes. C'est une situation favorable pour avoir un recouvrement modal élevé. De ce fait, la ligne de recouvrement modal M ne peut pas être corrélée avec la zone de champ diffus. Il aurait fallu calculer σ_d à fréquences pures pour la faire apparaître sur la figure 3.3. Le paramètre est finalement laissé à $M = 1$, valeur préconisée par Le Bot et Cotoni [82].

Pour une fréquence fixée entre $\kappa = 1.9$ et $\kappa = 20.7$, quand l'amortissement devient plus fort, l'écart type évolue de manière significative. La valeur de σ_d augmente et peut aller au delà de 7 pour les hautes fréquences. Dans ce cas le champ n'est plus diffus mais dominé par un champ direct émanant du point d'excitation. Les fortes valeurs d'amortissement provoquent une décroissance rapide de l'énergie : plus les récepteurs sont éloignés de la position de la

source excitatrice, plus leurs énergies sont faibles et plus l'écart type se creuse.

Finalement, en hautes fréquences, le champ est diffus pour les amortissements faibles. Sinon le champ est direct. De la même manière, partant de la zone de champ diffus, pour un amortissement donné et lorsque la fréquence centrale diminue (en dessous de $\kappa \leq 1.9$) σ_d croît. L'augmentation de σ_d n'est pas aussi franche que pour le champ direct, les valeurs atteintes en basses fréquences sont comprises entre $\sigma_d = 0.7$ et $\sigma_d = 1$. Dans ce cas, seuls quelques modes sont résonants, et les récepteurs voient leurs énergies varier au fonction de leur position sur un nœud ou un ventre de vibration. En basses fréquences, quel que soit l'amortissement, l'énergie est dominée par un comportement modal. Le champ ne peut pas être diffus en dessous d'un certain nombre de modes.

Une représentation des espérances des énergies locales de chaque récepteur permet d'appuyer ces remarques.

La figure 3.5 représente l'état énergétique de la plaque en condition de champ direct, c'est à dire pour des hautes fréquences et un fort amortissement (point A de la figure 3.3 : $f_c = 8\text{kHz}$; $\kappa = 20.70$; $\eta = 0.1$). Dans ce cas, les espérances des énergies locales varient fortement (entre -70 et -170 dB).

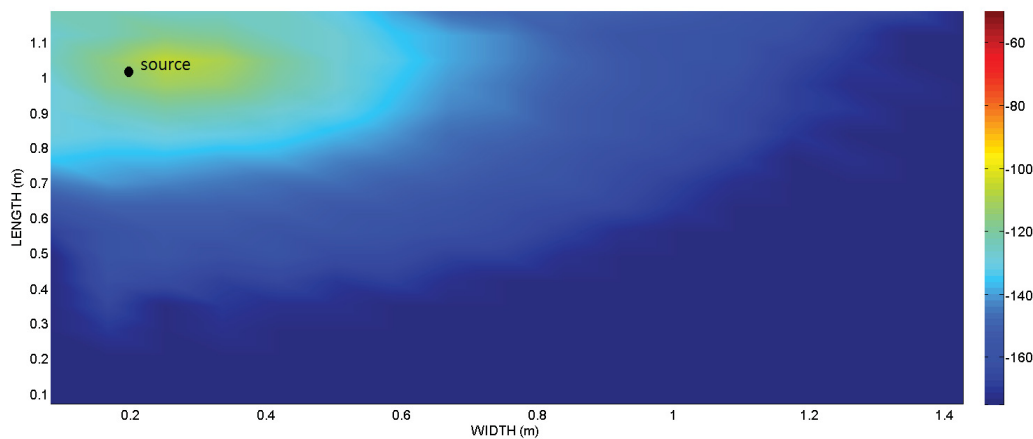


FIGURE 3.5 – Cartographie de l'espérance de l'énergie locale de la plaque au point A ($f_c = 8\text{kHz}$; $\kappa = 20.70$; $\eta = 0.1$ condition de champ direct). La décroissance de l'énergie due à l'amortissement provoque une domination d'un champ direct à proximité de la position de l'excitation. La distorsion de présentation provoque un comportement non centré sur la source. *Mapping of local energy expectation at point A ($f_c = 8\text{kHz}$; $\kappa = 20.70$; $\eta = 0.1$ direct field conditions). The energy decreasing due to high damping triggers a dominant direct field near the excitation position. The distortion of the presentation provokes a non centred behavior.*

On observe que l'énergie est très importante au voisinage de l'excitation ($x_E = 0.2$ m ; $y_E = 1$ m) et devient rapidement faible pour les récepteurs *loin* de la source. Le champ peut être qualifié de direct dans la mesure où l'amortissement est tellement fort que les rayons générées par la source n'atteignent pas les bords et que le champ réverbéré est très faible. C'est typiquement le comportement d'une plaque infinie.

La figure 3.6 représente l'état énergétique de la plaque en condition de champ modal (point

B de la figure 3.3) soit pour des basses fréquences (63Hz) et un faible amortissement ($\eta = 0.001$).

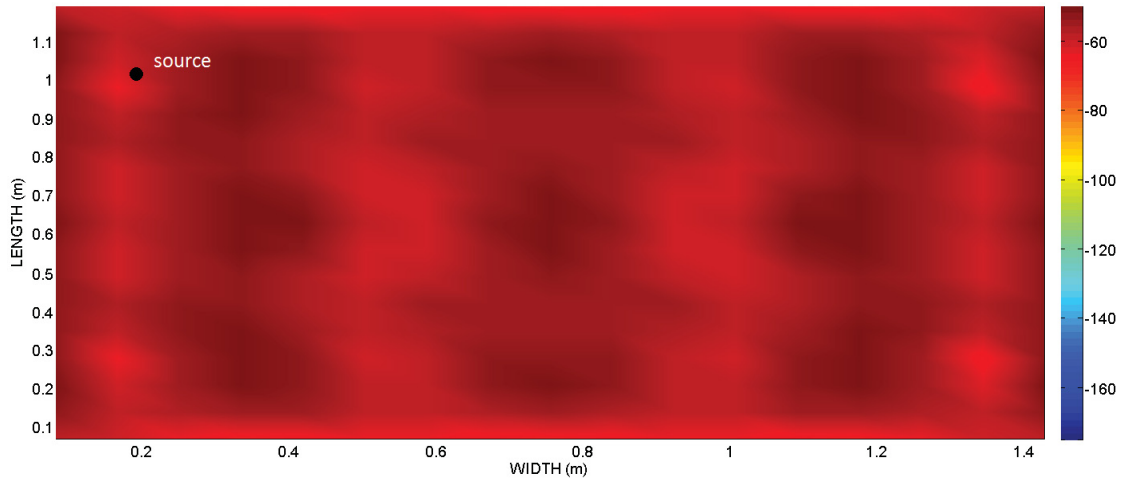


FIGURE 3.6 – Cartographie de l’espérance de l’énergie locale de la plaque au point B ($f_c = 63.5\text{Hz}$; $\kappa = 1.83$; $\eta = 0.001$ condition d’un champ modal). La faible population de mode (basse fréquences) provoque la disparité des espérances des énergies locales. *Mapping of local energy expectation at point B ($f_c = 63.5\text{Hz}$; $\kappa = 1.83$; $\eta = 0.001$ modal field conditions). Having a few modes (low frequencies) cause the inequality of local energies expectations.*

Le comportement modal est moins évident à observer : la plaque ne compte que 19 modes jusqu’à $f_{max} = \sqrt{2}f_c = 89\text{Hz}$ et les énergies fluctuent entre -60 et -80dB . On observe une alternance de zones sombres et de zones claires qui témoignent de minima et maxima d’énergie. Une partie des récepteurs ont des maxima d’énergie qui sont la contribution de ventres de vibration ; les autres récepteurs ont des minima d’énergie qui sont la superposition de nœuds de vibration. L’écart type entre les énergies locales reste stable et élevé, et ce, quelle que soit la valeur de l’amortissement. σ_d est donc compris entre 0.7 et 1.2.

Dans le cas d’un champ modal ou d’un champ direct, la position d’un récepteur conditionne son énergie. Dans le premier cas c’est la position d’un récepteur dans un nœud ou un ventre de vibration, dans le second c’est la distance d’un récepteur par rapport à la position de la source excitatrice qui engendre des écarts types élevés et un champ non diffus. Par ailleurs, les domaines de champ diffus et de validité de la SEA sont corrélés. Finalement, lorsque le sous-système est excité par une force ponctuelle aléatoire, les conditions pour satisfaire l’hypothèse de champ diffus sont hautes fréquences et faibles amortissements.

3.3.2 Plusieurs forces excitatrices

On se place dans deux cas où, *a priori*, le champ est non diffus avec une seule excitation : une configuration de champ modal (point C de la figure 3.3) et une configuration de champ direct (point D)⁵. Dans ces deux cas on excite la plaque avec un ensemble de N_i forces excitatrices et

5. On choisit ces deux nouveaux points pour des considérations de temps de calcul.

on observe le comportement de σ_d . L'évolution de σ_d en fonction de N_i (variant de $N_i = 1$ à $N_i = 1000$) est représenté sur la figure 3.7.

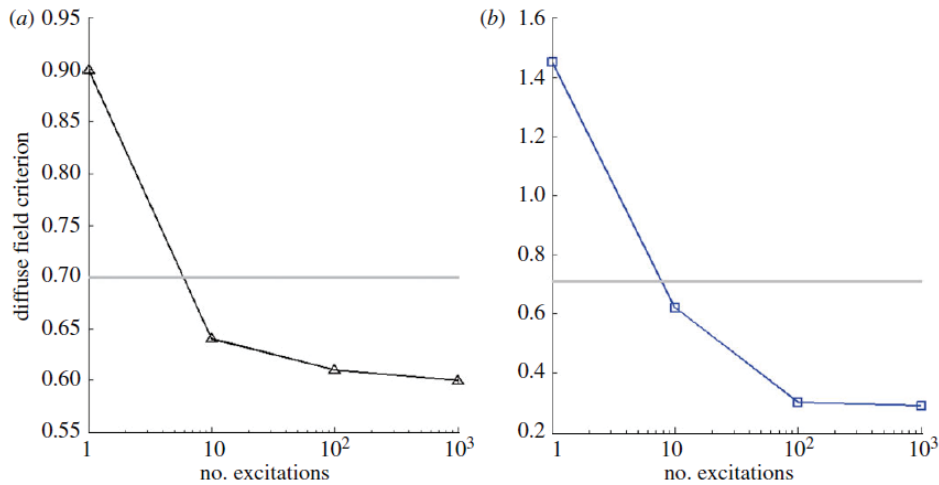


FIGURE 3.7 – Évolution de σ_d par rapport au nombre d'excitations : figure (a) du champ modal au champ diffus ($f_c = 31.5$ Hz ; $\kappa = 1.29$; $\eta = 0.003$ - point C) ; figure (b) du champ direct au champ diffus ($f_c = 1000$ Hz ; $\kappa = 7.31$; $\eta = 0.1$ - point D). Evolution of σ_d versus the number of uncorrelated random excitations : (a) From modal field to diffuse field ($f_c = 31.5$ Hz ; $\kappa = 1.29$; $\eta = 0.003$ - point C) ; (b) From dominant direct field to diffuse field ($f_c = 1000$ Hz ; $\kappa = 7.31$; $\eta = 0.1$ - point D)

Dans les deux cas, σ_d diminue avec le nombre d'excitations pour atteindre des valeurs en dessous du critère ($\sigma_d \leq 0.7$). Cela signifie qu'un champ modal ou direct avec une seule excitation peut devenir diffus si $N_i \gg 1$.

Les calculs analytiques sont exécutés sur le calculateur NFV7 dont les caractéristiques sont fournies en annexe D. Le temps de calcul est variable suivant la fréquence centrale de l'octave et l'amortissement (le pas fréquentiel est en $\eta f_{max}/4$). Il faut environ 72 heures pour tracer la carte de la figure 3.3. Le réseau de 30000 récepteurs est étudié sous deux configurations : un maillage ordonné et un aléatoire. L'évolution de σ_d est observée (cf figure 3.8) pour les conditions suivantes : $f_c = 2$ kHz ($\kappa = 10.35$) et $\eta = 0.2$ (point E de la figure 3.3).

Pour un réseau aléatoire, σ_d converge légèrement plus rapidement vers des valeurs de champ diffus que pour le réseau ordonné. Les valeurs se confondent pour un nombre d'excitations élevé. L'utilisation d'une grille régulière sur une structure aussi simple et symétrique qu'une plaque rectangulaire introduit un biais sur l'estimation du ratio. Le choix du réseau aléatoire est donc plus adapté.

Finalement, si un champ peut être naturellement non diffus avec une excitation (champ modal, champ direct), il tend à le devenir avec un nombre suffisant d'excitations aléatoires décorréliées. L'hypothèse de l'excitation *rain-on-the-roof* convient tout à fait car elle est composée d'une infinité d'excitations et implique ainsi une diffusivité du champ vibratoire. Il a été vu qu'à partir de 100 excitations σ_d est stable. Cela représente environ 58 excitations par m^2 .

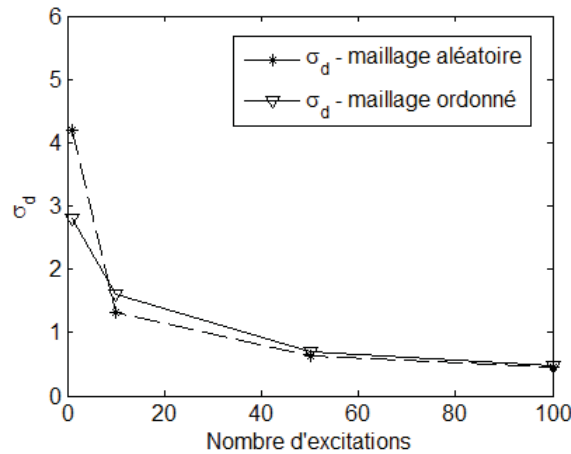


FIGURE 3.8 – Évolution de σ_d par rapport au nombre d'excitations et au type de maillage au point E : $f_c = 2$ kHz / $\kappa = 10.35$ et $\eta = 0.2$. Evolution of σ_d versus the number of uncorrelated random excitations and the meshing type at point E : $f_c = 2$ kHz / $\kappa = 10.35$ et $\eta = 0.2$.

Il est important de noter que même pour un nombre élevé d'excitations, σ_d ne converge pas vers zéro. Trois arguments sont avancés :

Le champ n'est pas complètement homogène à cause des conditions aux limites qui imposent toujours une énergie cinétique nulle en périphérie alors qu'elle est évidemment non nulle dans le domaine. L'aire de cette zone dépend de la longueur d'onde et donc de la fréquence : plus la fréquence est faible et plus cette aire sera importante, induisant une valeur limite pour σ_d .

Le second argument est qu'au voisinage du point d'excitation il y a toujours une concentration plus forte de l'énergie. C'est ce qu'explique le texte de Weaver sur le *back-scattering effect* [74]. Soit un point source S et un point récepteur R. Lorsque R et S sont distincts, deux trajectoires distinctes arrivent avec deux phases distinctes. Les phases sont suffisamment désordonnées de sorte que les énergies des rayons s'ajoutent (cf figure 3.9 (a)). En revanche, lorsque R est confondu avec S, un phénomène différent se produit : les rayons arrivent avec la même phase et donc interfèrent de manière constructive. Ainsi les amplitudes des rayons s'ajoutent et l'énergie calculée est plus élevée qu'autre part (cf figure 3.9 (b)). Il y a donc une sur-évaluation de l'énergie au point source, ce qui ne va pas dans le sens du champ diffus.

Enfin, le dernier argument est que la géométrie rectangulaire n'est justement pas propice à l'émergence du champ diffus. Ce dernier point est développé dans la section suivante.

3.4 Champ diffus et théorie des billards

Il a été vu (§ 2.2 du chapitre 2) qu'à hautes fréquences l'approximation géométrique est applicable. Les rayons vibratoires (ou sonores) ont des trajectoires orthogonales aux fronts d'onde et constituent des chemins de propagation de l'énergie. Par nature les rayons sont in-

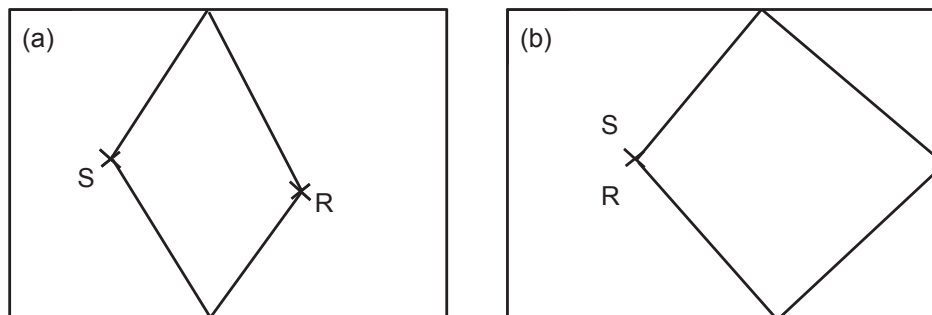


FIGURE 3.9 – Illustration du back-scattering effect : (a) le point source S et le point récepteur R sont distincts, les phases sont distinctes et les énergies des rayons s'ajoutent. (b) le point S et le point récepteur R sont confondus, les rayons sont en phase et interfèrent constructivement, les amplitudes s'ajoutent et l'énergie résultante est plus élevée. *back-scattering effect illustration : (a) the source position S and the receiver position R are different, the phases are distinct and the resulting energy is the sum of each ray energy. (b) the source position S and the receiver position R are mixed up : the phases are synchronized and rays interfere constructively, the resulting energy is greater because the wave amplitude are add up.*

dépendants : un rayon n'échange pas d'énergie avec ses voisins. D'autre part, un rayon peut être assimilé au mouvement d'une masse libre non soumise à une force : il est linéaire rectiligne uniforme jusqu'à atteindre un obstacle, les frontières du système. Pour les mathématiciens ce problème définit un *billard* [83, 84, 85] : la masse évolue dans l'espace des phases qui décrit sa position et sa direction. D'autre part, les réflexions aux limites sont supposées spéculaires et la mesure de probabilité d'un état (de la masse) dans l'espace des phases est invariante sur la trajectoire.

Dans la théorie des billards, si la masse *passé le même temps* au voisinage de chaque position et ce quelle que soit sa direction, alors le billard est *ergodique*. Par conséquent, les moyennes spatiales et les moyennes temporelles sont égales pour toutes les trajectoires. Une structure ergodique est donc favorable au champ diffus. L'exemple du triangle quelconque (ni équilatéral ni isocèle) est tout indiqué (cf figure 3.10) : les cassures irrégulières assurent que les rayons passent aux voisinages de tous les points et dans toutes les directions.

Si on reprend l'exemple de la plaque rectangulaire, l'ergodicité signifie que l'énergie moyenne d'un récepteur sur une période temporelle est égale à la moyenne des énergies de tous les récepteurs à un temps donné. Or le billard rectangulaire est une structure qui n'est pas ergodique [86]. En effet, les angles droits imposent quatre directions de propagation [87]. Même avec un grand nombre de réflexions, les trajectoires d'un rayon restent ordonnées (cf figure 3.11).

On peut s'intéresser aux conditions de champ diffus pour une structure qui, à l'inverse de la plaque rectangulaire, n'impose pas de direction particulière. C'est le cas de la plaque circulaire.

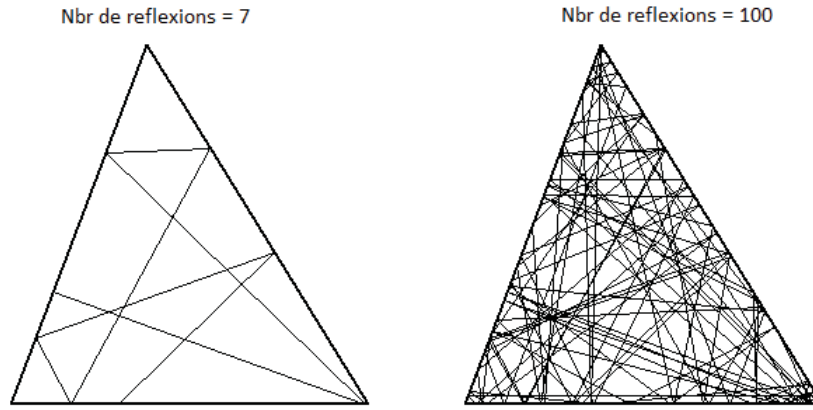


FIGURE 3.10 – Représentations d’un billard triangulaire quelconque après 7 et 100 réflexions spéculaires. *Representations of a any triangular billiard after 7 and 100 specular reflections.*

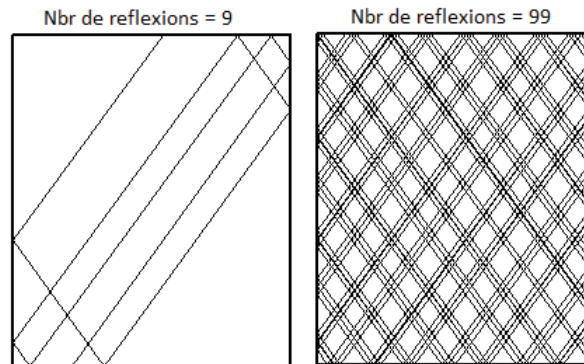


FIGURE 3.11 – Représentations d’un billard rectangulaire après 9 et 99 réflexions spéculaires. *Representations of a rectangular billiard after 9 and 99 specular reflections.*

3.5 Cas particulier : la plaque circulaire

La plaque circulaire est un cas de géométrie contenant une infinité d’axes de symétrie. Elle est étudiée ici pour observer le comportement du ratio σ_d . Soit une plaque de rayon $R = 0.5\text{m}$ et dont les caractéristiques sont définies dans la tableau 3.2. Le calcul de la réponse de la plaque à une excitation ponctuelle est réalisé par les éléments finis. Le coefficient d’amortissement est fixé à $\eta = 0.001$. L’observation se fait sur les sept premières octaves ($f_c = 16\text{ Hz}$; $f_c = 1\text{ kHz}$) et le pas fréquentiel reste $df = \eta f_{max}/4$. La discrétisation de la surface en éléments est en $\lambda/6$ et la célérité des ondes de flexion est donnée par Martin [73] : $c_f = (D/\rho h)^{1/4} \sqrt{\omega}$. On compte 246 modes jusqu’à 2 kHz et la plaque contient 24652 degrés de liberté. A nouveau, la fréquence est remplacée par le nombre d’onde sans dimension κ et le libre parcours moyen est $l = \pi R/2$. L’excitation porte sur un nœud pris au hasard (figure 3.12).

L’énergie totale de chaque élément est la somme des énergies cinétiques et des énergies de déformations. Le ratio σ_d reste celui donné par l’équation (3.13). Il est appelé $\sigma_{d,circ}$ et est

type	Symbole	Valeur	Unité
Densité	ρ	2700	kg/m^3
Module d'Young	E	$6.9E9$	N/m^2
Coefficient de Poisson	ν	0.33	—
Épaisseur	h	2	mm
Coefficient de flexion	D	5.162	—
Coefficient d'amortissement	η	0.001	—
Libre parcours moyen	l	0.7854	m

Tableau 3.2 – Paramètres mécaniques de la plaque circulaire. *Mechanical parameters of the circular plate.*

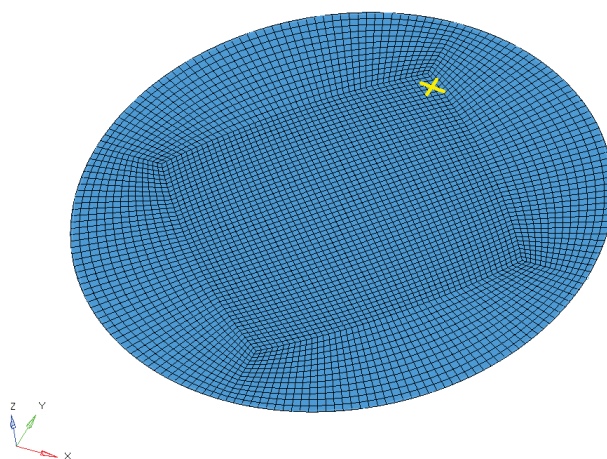


FIGURE 3.12 – Plaque circulaire appuyée sur le bords excitée par une force ponctuelle dont la position est repérée par une croix. *Simply supported circular plate excited by a single point force whose position is marked by a cross.*

calculé pour chaque octave. Il est ensuite comparé avec celui de la plaque rectangulaire de la section 3.3 (renommé $\sigma_{d,rect}$) ayant le même amortissement. Les résultats sont présentés par la figure 3.13.

Les matériaux qui composent la plaque rectangulaire et la plaque circulaire étant différents, les résultats qui représentent σ_d en fonction du nombre d'onde sont donc décalés.

Pour les deux premières octaves (jusqu'à $\kappa = 1.8$), les deux ratios sont au dessus de la ligne de niveau $\sigma_d = 0.7$. Il y a peu de modes et les niveaux d'énergies sont très différents en fonction des positions des récepteurs sur des nœuds ou des ventres de vibration : le champ modal prédomine. Quand la fréquence augmente, le ratio de la plaque rectangulaire diminue et celui de la plaque circulaire reste à peu près constant (autour de 1.1). Ainsi, pour une plaque circulaire soumise à une excitation, on n'observe pas de champ diffus même pour des conditions favorables (amortissement faible et hautes fréquences).

Investiguons sur cette dernière remarque en étudiant deux types de réflexions :

- Les réflexions spéculaires, appelées aussi réflexions régulières : le rayon réfléchi sur le bord du disque est symétrique au rayon incident par rapport à la normale.

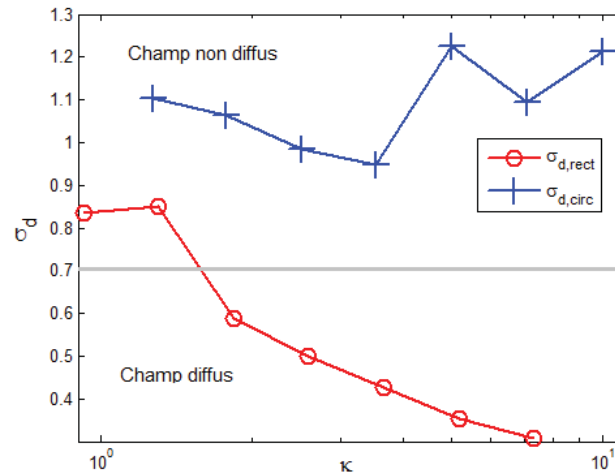


FIGURE 3.13 – Évolution des ratios σ_d pour une plaque rectangulaire et une plaque circulaire en fonction du nombre d'onde sans dimension κ . *Evolution of the ratios σ_d of a rectangular plate and a circular plate versus the dimensionless wavenumber κ .*

- Les réflexions lambertiennes ou réflexions diffuses : le rayon réfléchi peut prendre toutes les directions.

La figure 3.14 présente les réflexions spéculaires d'un *rayon vibratoire* dans la plaque circulaire. L'excitation est placée à différentes positions : à $a = 0$ m ; à $a = 0.05$ m et $a = 0.35$ m du centre du cercle.

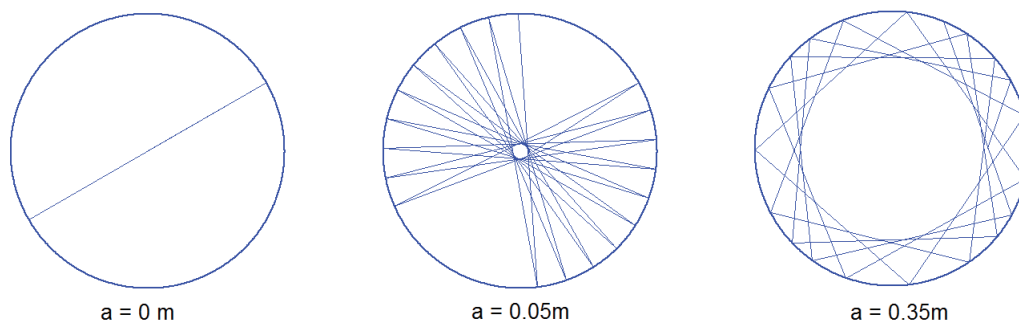


FIGURE 3.14 – Réflexions spéculaires d'un rayon sur la plaque circulaire pour une excitation placée à $a = 0$ m ; à $a = 0.05$ m et $a = 0.35$ m du centre du cercle. *Specular reflections of a ray in the circular plate excited by a single point force placed at $a = 0$ m ; à $a = 0.05$ m et $a = 0.35$ m of the center.*

Lorsque l'excitation est au centre de la plaque, le rayon est réfléchi à seulement deux endroits. À l'inverse, pour des excitations autres qu'à $a = 0$ m, le parcours du rayon est concentrique et est situé entre a et R le rayon de la plaque. Dans ce cas il n'y a plus de passage par le centre. Les énergies locales sont en bandes concentriques placées à des distances variables en fonction des modes excités.

Dans la théorie des billards, les réflexions sont spéculaires. Dans le cas d'une plaque circu-

laire isotrope, contrairement à la plaque rectangulaire, les rayons prennent dans la plupart des cas⁶ toutes les directions possibles. La position de départ conditionne la distribution de l'énergie. Les rayons ne passent jamais par le centre sauf si l'excitation a lieu justement au centre. Ainsi, même pour une plaque très faiblement amortie (nombre important de réflexions) le champ ne sera jamais diffus avec une excitation ponctuelle.

La figure 3.15 illustre le cas de réflexions lambertiennes où les rayons peuvent prendre toutes les directions. La distribution d'énergie devient indépendante de la position de l'excitation et le champ peut être diffus.

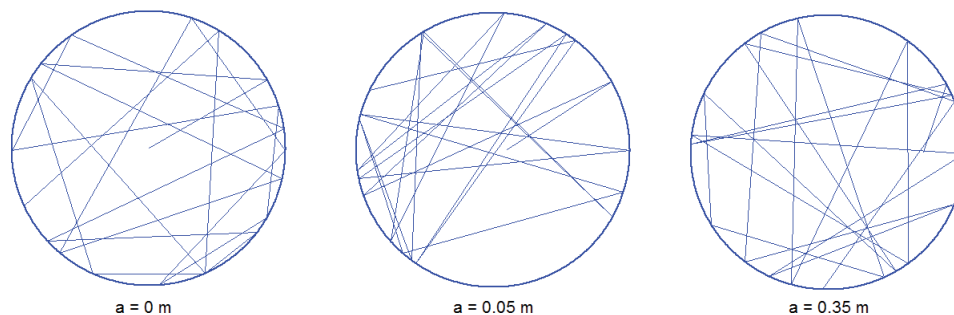


FIGURE 3.15 – Réflexions lambertiennes d'un rayon sur la plaque circulaire pour une excitation placée à $a = 0$ m ; à $a = 0.05$ m et $a = 0.35$ m du centre du cercle. *Lambertian reflections of a ray in the circular plate excited by a single point force placed at $a = 0$ m ; à $a = 0.05$ m et $a = 0.35$ m of the center.*

Les plaques rectangulaires et circulaires sont deux billards non ergodiques [88] : dans le premier cas les directions sont conditionnées par les angles droits, dans l'autre ce sont les positions de l'excitation. Les quatre directions de propagation imposées dans la plaque rectangulaire suffisent à s'approcher d'un champ diffus ($\sigma_d < 0.7$). Dans la plaque circulaire le champ ne peut être considéré comme diffus au sens du critère que si l'excitation est de type *rain-on-the-roof* (toutes les positions sont envisagées) ou si les conditions aux limites permettent des réflexions lambertiennes.

3.6 Conclusion

Le calcul analytique de l'énergie locale d'une plaque rectangulaire a permis d'évaluer le caractère diffus d'un champ. Le moyen utilisé est un critère basé sur l'écart type des espérances des énergies locales. On a observé que le champ vibratoire pouvait être diffus avec une excitation ponctuelle dans des conditions de hautes fréquences et de faible amortissement. Dans les autres cas, le champ est modal ou direct. Néanmoins, l'utilisation de plusieurs excitations aléatoires et décorrélées tel que le *rain-on-the-roof* permet de forcer le champ à être diffus. Finalement l'hypothèse *rain-on-the-roof* implique l'hypothèse de champ diffus (et non l'inverse).

6. Il peut arriver dans certains cas de tomber sur des trajectoires cycliques comme l'illustre l'annexe E.

Le cas particulier de la plaque circulaire a aussi été étudié. Avec une excitation seule on ne parvient pas, même en condition de hautes fréquences / faible amortissement, à retrouver un champ diffus. Ceci confirme l'observation de Bruneau [89] qui préconise des structures complexes pour éviter l'existence de modes radiaux ou tangentiels et, au contraire, favoriser les modes obliques pour une meilleure diffusivité du champ. Ainsi, dans le cas d'une plaque circulaire, seule une excitation *rain-on-the-roof* peut amener le champ diffus.

En conclusion, le champ

- est toujours diffus avec une excitation *rain-on-the-roof*.
- n'est jamais diffus pour une structure non ergodique soumis à une seule excitation au sens de la théorie des billards (une excitation donne lieu aux réflexions spéculaires d'un seul rayon).
- est diffus avec une excitation ponctuelle pour des conditions en fréquence et en amortissement spécifiques (hautes fréquences, faibles amortissements).
- D'un point de vue modale, les conditions d'établissement du champ diffus sont : un grand nombre de modes $N \gg 1$ et un facteur d'atténuation faible $m \ll 1$.

Chapitre 4

Hypothèse d'équipartition des énergies modales

Modal energies equipartition assumption

Chapter overview

This chapter is concerned with the assumption of modal energy equipartition. The example of a rectangular simply supported plate is reused. In the same manner as for diffuse field, the assumption of rain-on-the-roof is also discussed.

The chapter begins with a brief historical context. It highlights that in statistical physics, equipartition of energy arises under quite general conditions provided that non-linear interactions between particles ensure the mixing of energy. For instance, in the kinetic theory of gases each particle has a random motion and their energy is shared thanks to their collisions. Moreover, equipartition does not mean that all particles (modes in the SEA context) have the same energy at a fixed time but only that their time-averaged energies are equal.

The following section (4.2) points out that the SEA demonstration model is paradoxical. Indeed, linear oscillators are a typical example where equipartition of energy cannot be reached because it is a non-ergodic system. For such a system, the governing equations projected on the global modal basis are uncoupled so that the initial repartition of energy among modes remains unchanged in time. *A priori*, the assumption of equipartition of the energy is not possible in SEA. We will see that it is nonetheless feasible but not in the sense of statistical physics.

A special point on dissipation is made in section 4.3. Two dissipation models are reviewed : viscous and hysteresis damping. It gives two frequency response functions (equations (4.4) and (4.6)) which are useful when writing the expressions of modal energy (equation (4.9)) and energy equipartition criterion (equation (4.10)) on the example of a simply supported rectangular plate.

Section 4.5 is dedicated to the study of energy equipartition on the rectangular simply sup-

ported plate. As well as diffuse field a criterion is introduced. The expressions of modal energy and the ratio σ_e are given by equations (4.9) and (4.10).

First the case of a single point force excitation is presented. Figure 4.2 shows the repartition of modal energy in two examples : $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.1$ (direct field state) and $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.001$ (diffuse field state). The repartition of the modal energy when the plate is excited by a single excitation is decreasing and can be fitted with a Weibull distribution. The ratio σ_e for each example are between 1.1 and 1.2. In the special case of a single point force excitation the modal energy depends on the mode index (as demonstrated by equation (4.13)), consequently modal energy cannot be equally distributed.

Second, the case of several random point forces is presented. Figure 4.3 shows the repartition of modal energy when 10 random excitations are used (again for two examples of damping loss factor giving a diffuse field state and a direct field state). For a viscous damping the energy distribution fits with a Normal distribution. The modal energies are group around a mean value and equipartition is nearly achieved. Nevertheless, the damping model makes the modal energy frequency-depending (demonstrated by equation (4.16)). In that case (several random excitations and viscous damping) the energy cannot be equally distributed.

Finally, figure 4.4 represents the repartition of modal energy for both models of damping. The energy distribution is drawn in light grey when the modal damping ratio is maintained constant with $\eta = 0.01$ (diffuse field condition). It corresponds to a Normal distribution similar to the one in figure 4.3. Otherwise, when the half-power bandwidth defined as $\Delta = 4\pi\eta f_c = 502.65$ (in dark grey) is maintained constant, the modal energy distribution is again a normal but much more tighten showing that the modal energies have closed values. The energy equipartition ratio σ_e is in that case three times lower ($\sigma_e = 0.05$ instead of $\sigma_e = 0.211$). This clearly shows that equipartition is reached when the modal forces have same power spectral density (rain-on-the-roof) and when the half-power bandwidth of modes is the same (hysteresis damping). In that case, the expression of the modal energy is given by (4.17).

An remark on the fit functions is made before conclusion. The FDB matlab module is used to find the best functions which fit with the modal energy distribution. It is shown (figure 4.5) that inverse gaussian is the best fitting function closely followed by Nakagami, Rician and normal functions.

Figure 4.6 compares energy equipartition from the points of views of SEA and the one of statistical physics. Energy equipartition in SEA is not the same as energy equipartition in statistical physics. In statistical physics energy is shared with the non linear interactions between the molecules whereas in SEA energy equipartition is achieved with a rain-on-the-roof excitation and a half power damping model (Δ constant).

The main conclusion of the chapter is that energy equipartition is

- reached with an infinite number of uncorrelated random white noise forces (i.e rain on the roof excitation) and if all of the modes have the same half power bandwidth.

-
- possible from the SEA point of view but clearly not for the same reasons as statistical physics.

Dans ce chapitre les conditions d'obtention de l'équipartition de l'énergie modale dans un système SEA sont analysées. Tout comme le champ diffus, un critère d'équipartition est développé à partir de l'exemple de la plaque rectangulaire appuyée.

4.1 Contexte historique

Le concept d'équipartition de l'énergie vient de la mécanique statistique [86, 90, 91, 92]. Il est le fruit des développements de l'hypothèse atomique émise par le philosophe grec Démocrite (-460 ; -370 av JC) : *La matière peut être considérée comme un ensemble d'entités invisibles*. Cette hypothèse se concrétise grâce aux chimistes du XIX^{eme} siècle dont le précurseur est Dalton (1808). Effectivement, pendant longtemps les visions *énergétique* et *atomique* s'opposent et le concept d'un gaz formé de particules (les atomes) est loin d'être admis par tous. Ce n'est qu'à la suite des investigations de Perrin (1908) sur le nombre d'Avogadro que les physiciens acceptent *la réalité atomique*.

L'idée avait pourtant germé depuis longtemps. Les premiers travaux suivant cette voie sont ceux de Bernoulli (1738). Ils établissent que la pression d'un gaz parfait peut se calculer par la moyenne des actions des molécules sur les parois du récipient les contenant. Les travaux de Charles (1787) et de Gay-Lussac (1802) relient la température à une pression et stipulent donc que la température est une grandeur proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne d'une molécule. Clausius (1858) introduit le concept de libre parcours moyen entre deux collisions successives d'une molécule. Maxwell (1859) établit la loi de distribution des vitesses des molécules et énonce le principe de l'équipartition. L'auteur écrit que *la distribution des vitesses des molécules, une fois acquise demeure invariante sous les chocs moléculaires*. Enfin, la fameuse *Stosszahlansatz* ou hypothèse de chaos moléculaire est énoncée par Boltzmann. Il généralise en 1868 la loi de Maxwell pour des gaz polyatomiques. Puis en 1871 il formule l'hypothèse d'ergodicité pour la théorie cinétique des gaz. Elle énonce qu'à l'équilibre, pour un système ayant un très grand nombre de particules, la valeur moyenne temporelle d'une grandeur calculée est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures de cette grandeur prises à différents instants. Ceci illustre le rapprochement entre la théorie statistique et l'expérience : la première valeur est une mesure expérimentale et la seconde est celle que permet de calculer la physique statistique. Enfin ses investigations mènent, en 1876, au théorème de l'équipartition.

Le théorème stipule que si l'hamiltonien est une forme quadratique définie positive, il y a g variables qui contribuent à $1/2k_B T$ de l'énergie totale E . Soit encore,

$$E = \frac{gk_B T}{2} \quad (4.1)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T est la température.

Ce résultat est aussi énoncé de la manière suivante : *dans un système à l'équilibre à la température T , chaque degré de liberté contribue pour $1/2k_B T$ à l'énergie totale* [93]. L'équipartition naît

du mouvement Brownien et notamment des interactions non linéaires (chocs) des particules entre elles qui assurent une redistribution équitable de l'énergie. Ramené à la vision modale de la SEA, le concept d'équipartition, revient à appliquer les principes de la thermodynamique (chocs des molécules où la population considérée est finie) à une population de modes (population infinie).

4.2 Paradoxe de la SEA

Si l'équipartition naît de la physique statistique et de l'hypothèse d'ergodicité alors le schéma de la SEA pose problème. En effet, l'exemple des oscillateurs harmoniques est le système typique où l'équipartition de l'énergie ne peut être vérifiée car c'est un système non ergodique ! Le principal argument est que les équations du mouvement projetées dans la base modale sont découplées et que la répartition initiale de l'énergie reste donc inchangée dans le temps. Pour espérer atteindre l'équipartition dans ce genre de modèle on ne peut pas considérer les interactions entre les oscillateurs.

Magionesi *et al.* [94] dans leurs discussions évitent le point de vue de la SEA. Ils ne se préoccupent pas de savoir que le réseau d'oscillateurs est non ergodique. Ils se placent plutôt du point de vue de la physique statistique en observant l'évolution libre d'un système linéaire. Ils considèrent une population d'oscillateurs en faisant varier la probabilité de présence des fréquences propres. Ils n'observent donc pas l'évolution d'un système seul mais l'espérance sur une population. Ils parviennent alors à un résultat étrange : si l'équipartition n'est vérifiée par aucun des individus elle l'est néanmoins sur la moyenne de la population. Les travaux de Roveri *et al.* [95] suivent ceux de Magionesi en stipulant que l'équipartition peut être vérifiée si les fréquences de résonance sont suffisamment désordonnées. L'équipartition en SEA, qui signifie que les énergies moyennes temporelles des modes sont égales [96], ne serait assurée que dans le cas d'une excitation *rain-on-the-roof*.

4.3 Modèles de dissipation

Beaucoup de systèmes physiques peuvent être ramenés à des modèles d'oscillateurs harmoniques. Dans ce cas, le choix du type d'amortissement est déterminant. On distingue les amortissements de type visqueux et de type structuraux (ou hystérétiques). Considérons un oscillateur seul soumis à une force excitatrice f dont le déplacement est noté w (figure 4.1).

L'équation du mouvement est

$$m\ddot{w} + \lambda\dot{w} + kw = f \quad (4.2)$$

En introduisant la fréquence de résonance $\omega_n = \sqrt{k/m}$ et un amortissement visqueux $\eta =$

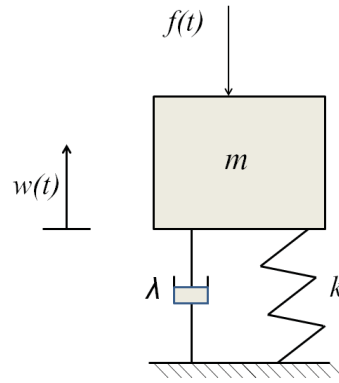


FIGURE 4.1 – Oscillateur harmonique seul de masse m d'amortissement λ et de raideur k .
Simple oscillator having a mass m a damping λ and a spring of stiffness k .

$\lambda/m\omega_n$ l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel devient

$$(\omega_n^2 + j\eta\omega_n\omega - \omega^2)\hat{w} = \frac{\hat{f}}{m} \quad (4.3)$$

et la fonction de réponse en fréquence $H(\omega)$ d'un tel système est définie par

$$H(\omega) = \frac{1}{m\omega_n^2[1 + j\eta\frac{\omega}{\omega_n} - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]} \quad (4.4)$$

Dans le cas d'un modèle d'amortissement de type structural, l'amortissement est défini par $\Delta = \eta\omega$. On l'appelle communément *half power bandwidth*. L'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel est

$$(\omega_n^2 + j\Delta\omega_n - \omega^2)\hat{w} = \frac{\hat{f}}{m} \quad (4.5)$$

et la fonction de réponse en fréquence correspondante est

$$H(\omega) = \frac{1}{m\omega_n^2[1 + j\frac{\Delta}{\omega_n} - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]} \quad (4.6)$$

Il y a une distinction à faire entre l'amortissement visqueux $\eta\omega$ constant et l'amortissement hystérétique η constant. Ces deux modèles sont utilisés dans la suite.

4.4 Énergie modale

On reprend l'exemple de la plaque appuyée dont les caractéristiques sont évoquées dans le chapitre du champ diffus (cf tableau 3.1). L'énergie globale peut être calculée en intégrant l'énergie locale sur toute la surface de la plaque suivant la relation

$$\langle E \rangle (\omega_c) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \langle e \rangle (x, y, \omega_c) dx dy, \quad (4.7)$$

L'orthogonalité des déformées propres (équation (2.59)) conduit à $\int_S \psi_n(x, y) \psi_p(x, y) dx dy = \delta_{n,p}$ où $\delta_{n,p}$ est le symbole de Kronecker. Les équations (3.7), (3.11) et (4.7) mènent à l'expression de l'énergie globale comme la somme des énergies modales.

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle (\omega_c) &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |H|^2 d\omega dx dy, \\
 &= \sum_{n,p \geq 0} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(\sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{\psi_n(x_i, y_i) \psi_p(x_i, y_i) \psi_n(x, y) \psi_p(x, y)}{m^2 (\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta\omega_n\omega)^* (\omega_p^2 - \omega^2 + j\eta\omega_p\omega)} d\omega \right) dx dy \\
 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{\psi_n(x_i, y_i)^2}{m((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\eta\omega_n\omega)^2)} d\omega \\
 &= \sum_{n \geq 0} \langle E_n \rangle
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

L'énergie modale $\langle E_n \rangle$ du mode n à une somme d'effort de densité spectrale S_i est

$$\langle E_n \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{\psi_n(x_i, y_i)^2}{m((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\eta\omega_n\omega)^2)} d\omega. \tag{4.9}$$

Cette dernière expression ne fait pas intervenir la somme des modes de 0 à f_{max} comme le faisait le calcul de l'espérance de l'énergie locale pour le critère de champ diffus. Ici on ne s'intéresse plus à l'énergie des récepteurs mais à l'énergie mode par mode. Pour avoir cette information, on supprime donc la somme sur les modes. Finalement, les énergies modales sont calculées sur la bande d'octave $[f_{min}; f_{max}]$ et les sommes ne portent plus que sur les fréquences et les excitations. Tout comme pour le champ diffus, la répartition des énergies peut être évaluée par un critère d'écart type.

4.4.1 Critère d'équipartition

Dans le même esprit que pour le champ diffus, un critère d'équipartition de l'énergie peut être défini [75]. Au lieu de comparer les énergies locales on compare les énergies modales. Soit,

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{\langle E_n \rangle^2 - \langle E_n \rangle^2}}{\langle E_n \rangle}, \tag{4.10}$$

où $\bar{\square} = \frac{1}{N} \sum_n^N \square$. Quand les énergies modales ont des valeurs similaires, l'écart type est faible et le ratio σ_e tend vers zéro. Cela signifie que l'énergie modale est uniformément distribuée sur les modes. On prend le critère d'équipartition $\sigma_e \leq 0.7$.

4.5 Analyse des conditions d'apparition de l'équipartition de l'énergie modale

4.5.1 Une force excitatrice

On s'intéresse à la répartition des énergies modales dans la plaque excitée par une seule force ponctuelle aléatoire. On choisit, dans un premier temps, le modèle d'amortissement hystérétique (η constant). Il est nécessaire d'avoir un nombre de modes suffisant dans la bande de fréquence pour observer une distribution convenable. Deux cas fréquence/amortissement sont étudiés :

- un cas où le champ direct domine, qui correspond au point F de la figure 3.3 dont les conditions sont $f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.1$.
- un cas où le champ est champ diffus, qui correspond au point G - $f_c = 4\text{kHz}$, $\kappa = 14.63$, $\eta = 0.001$.

Les résultats sont représentés par la figure 4.2.

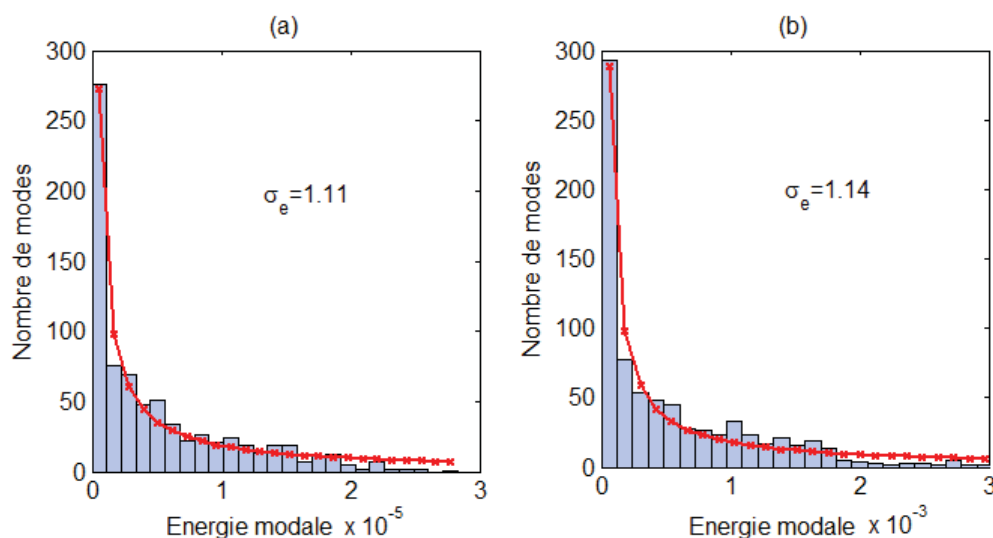


FIGURE 4.2 – Distribution de l'énergie modale de la plaque rectangulaire soumise à une excitation aléatoire : figure (a) conditions de champ direct ($f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.1$ - point F); figure (b) condition de champ diffus ($f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.001$ - point G). Modal energy distribution of the simply supported rectangular plate excited by a single excitation : figure (a) conditions of direct field ($f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.1$ - point F); figure (b) condition of diffuse field ($f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.001$ - point G).

A $f_c = 4\text{kHz}$ on compte 768 modes dans l'octave. 36 à 38 % du nombre total de modes dans la bande de fréquence ont une énergie modale quasi-nulle. A l'inverse, peu de modes atteignent le maximum d'énergie ($\approx 0.3\%$). Le critère d'équipartition de l'énergie σ_e a dans les deux cas des valeurs voisines. Même si la bande de fréquence d'étude influence le nombre de

modes pris en compte et le facteur d'amortissement influence les valeurs des énergies modales, la distribution reste la même pour un champ direct et pour un champ diffus.

La répartition de l'énergie modale dans les deux cas peut être approchée par une distribution de Weibull¹. Au premier ordre, une telle fonction s'écrit

$$W(x, a, b) = abx^{b-1}e^{-ax^b}, \quad (4.11)$$

où a et b sont des paramètres réglables. Pour les essais, $\eta = 0.1$ (figure 4.2 (a)) donne ($a = 0.006; b = 0.063$) et $\eta = 0.001$ (figure 4.2 (b)) donne ($a = 1.201; b = 0.049$). Les valeurs des paramètres a et b permettent de simplifier l'expression de la fonction,

$$W(x, a, b) \sim \frac{ab}{x}. \quad (4.12)$$

Autrement dit, les énergies modales suivent une décroissance en $1/x$. Cette dernière expression montre que l'équipartition de l'énergie ne peut être atteinte pour une seule excitation et va dans le sens des observations de Roveri et Magionesi.

L'expression générale de l'énergie modale dans le cas spécifique d'une excitation est

$$\langle E_n \rangle (\omega_c) = \frac{S_0 \psi_n(x_i, y_i)^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \frac{d\omega}{m((\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (\eta\omega_n\omega)^2)} = \frac{S_0 \psi_n(x_i, y_i)^2}{2m\eta\omega_n} \quad (4.13)$$

où les bornes d'intégration sont en toute rigueur $\Delta\omega$ au lieu de l'infini. La démonstration de (4.13) se fait en utilisant la technique des résidus. Le développement des calculs est présenté en annexe C de la référence [67]. Par ailleurs,

$$\int_{\Delta\omega} \square d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \square d\omega \text{ si } \omega_n \in \Delta\omega$$

$$\int_{\Delta\omega} \square d\omega = 0 \text{ sinon} \quad (4.14)$$

L'énergie modale, fortement dépendante du mode par le terme ψ_n/ω_n , ne peut donc être équitablement distribuée. Par ailleurs, ce calcul montre que la distribution est bien en $1/\omega_n$, ce qui est conforme à (4.12).

4.5.2 N_i forces excitatrices

On s'intéresse à présent à la répartition des énergies modales lorsque la plaque est excitée par un ensemble de forces aléatoires décorréliées. Les mêmes cas de test (points F et G) sont repris. La figure 4.3 présente la répartition de l'énergie modale lorsque la plaque est excitée par un ensemble de dix forces aléatoires décorréliées.

Ces distributions sont en accord avec une loi normale. Les énergies modales se regroupent autour d'une valeur moyenne et les critères d'équipartition calculés sont bien inférieurs à ceux

1. Il n'y a pas d'argument physique ou mathématique pour justifier le choix d'une telle distribution. Dans le cas présent c'est un choix arbitraire.

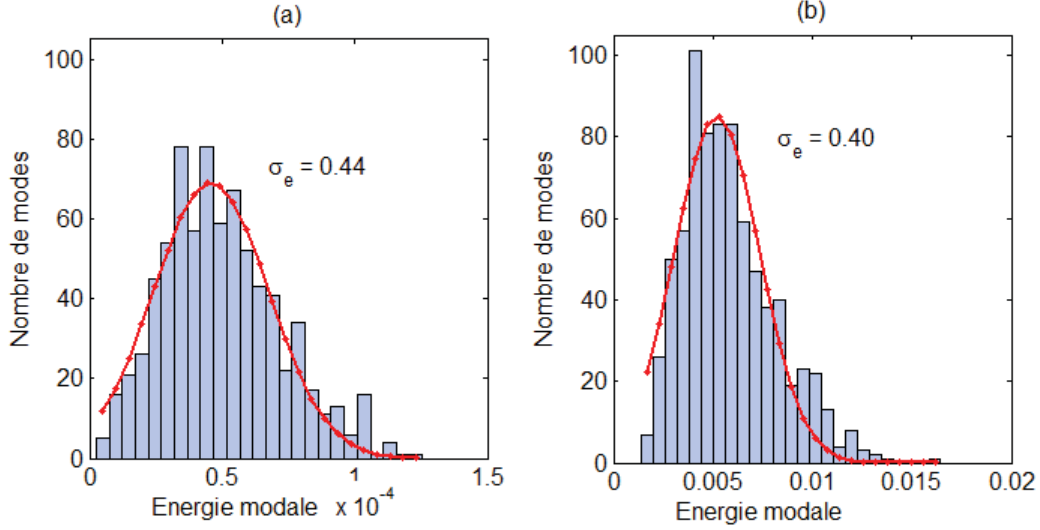


FIGURE 4.3 – Distribution de l'énergie modale de la plaque rectangulaire soumise à 10 excitations aléatoires : figure (a) conditions de champ direct ($f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.1$ - point F); figure (b) condition de champ diffus ($f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.001$ - point G). *Modal energy distribution of the simply supported rectangular plate excited by a ten random excitations : figure (a) conditions of direct field ($f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.63$; $\eta = 0.1$ - point F); figure (b) condition of diffuse field ($f_c = 4\text{kHz}$, $\kappa = 14.63$, $\eta = 0.001$ - point G).*

trouvés pour une excitation unique.

Pour un nombre infini d'excitations l'expression se simplifie grandement. Le théorème Cèsaro permet de le démontrer :

On pose $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \psi_n^2$ une suite réelle. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite, la moyenne arithmétique des n premiers termes possède la même limite. Dans notre cas $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1, ainsi

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_n(x_i, y_i)^2 \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2}{L_x L_y} \sin^2\left(\frac{\pi \alpha x}{L_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \beta y}{L_y}\right) \right) \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_n(x_i, y_i)^2 \right) &= \frac{2}{L_x L_y} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2\left(\frac{\pi \alpha x}{L_x}\right) \sin^2\left(\frac{\pi \beta y}{L_y}\right) \right) \quad (4.15) \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_n(x_i, y_i)^2 \right) &= \frac{2}{L_x L_y} \times \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

L'expression (4.13) se simplifie,

$$\langle E_n \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_0 \psi_n(x_i, y_i)^2}{2m\eta\omega_n} = \frac{N S_0}{2L_x L_y m\eta\omega_n} \sim \frac{1}{\omega_n}. \quad (4.16)$$

L'équation (4.16) met en avant la dépendance en fréquence de l'énergie modale. Par conséquent, de la même manière que pour une seule excitation, l'équipartition de l'énergie ne peut

être atteinte théoriquement. Dans ce cas, le facteur d'amortissement est constant rendant impossible l'apparition de l'équipartition. Cette remarque concorde avec le raisonnement de Mace [57].

Si, en revanche, on fait le choix d'un modèle d'amortissement en $\Delta = \eta\omega$ constant, l'expression de l'énergie modale est modifiée. Dans ce cas il vient,

$$\langle E_n \rangle (\omega_c) = \frac{NS_0}{2L_xL_y m \Delta}. \quad (4.17)$$

L'énergie modale devient indépendante de la fréquence, et tous les modes ont une énergie identique : l'équipartition est atteinte.

La figure 4.4 fait un comparatif des deux modèles d'amortissement : η constant et Δ constant.

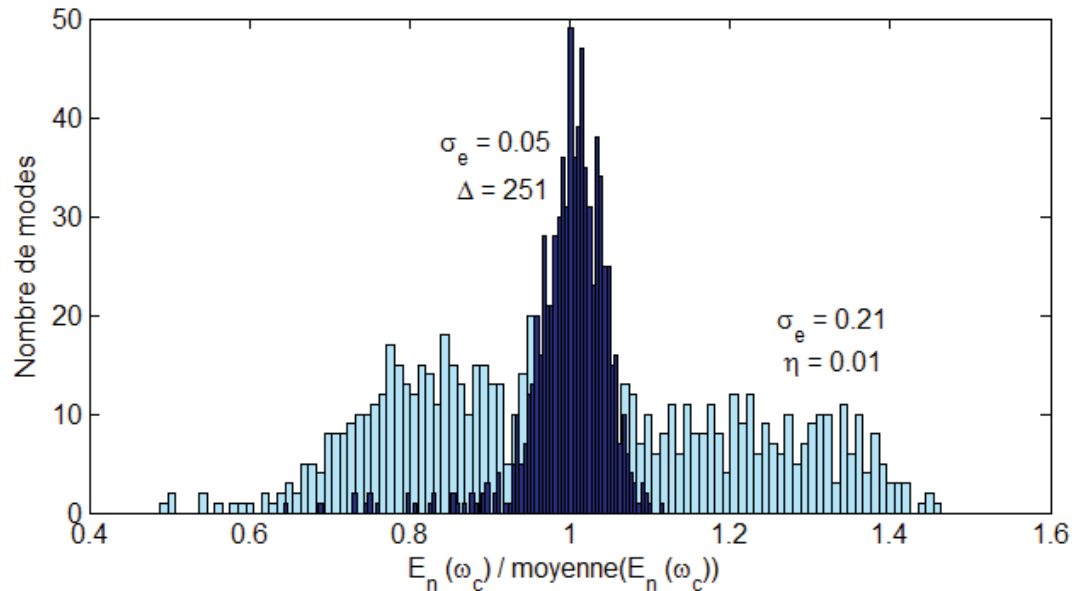


FIGURE 4.4 – Distribution de l'énergie modale de la plaque rectangulaire soumise à 1000 excitations aléatoires décorréliées. $f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.60$; $\eta = 0.01$ (point H de la figure 3.3) bleu clair; $\Delta = 251.32$ bleu foncé. *Modal energy distribution of a simply supported rectangular plate under 1000 random uncorrelated excitations. $f_c = 4\text{kHz}$; $\kappa = 14.60$; $\eta = 0.01$ (point H from figure 3.3) light-blue; $\Delta = 251.32$ dark-blue.*

Pour chaque cas la bande de fréquence d'étude est la même ($f_c = 4\text{kHz}$) et on emploie 1000 excitations aléatoires décorréliées. La distribution des énergies est représentée en clair pour le modèle en η constant et en foncé pour le modèle $\Delta = \eta\omega_c$ constant (*half-power bandwidth*). La distribution *half power bandwidth* est plus étroite que la distribution en η constant. Les énergies sont plus proches d'une valeur moyenne et les modes ont des énergies voisines. Le critère d'équipartition est quatre fois plus faible pour un modèle d'amortissement visqueux que pour un modèle d'amortissement en η constant ($\sigma_e = 0.0502$ au lieu de $\sigma_e = 0.2112$).

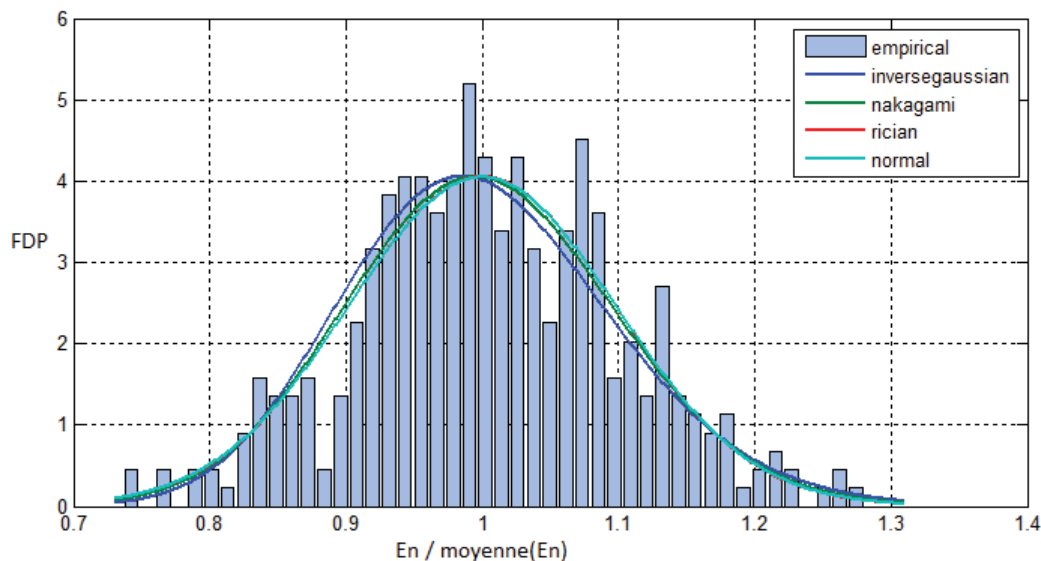


FIGURE 4.5 – Sélection des quatre meilleures distributions par le module matlab FDB : Gaussienne inverse, Nakagami, Normale, Ricienne. *Selection of the four best distributions from the FDB matlab module : Inverse-gaussian, Nakagami, Normal and Rician distributions.*

Dans le cadre d'une excitation ponctuelle, l'équipartition n'est pas atteinte et ceci quelque soit le modèle d'amortissement. Les distributions de Weibull qui sont présentées traitent uniquement le modèle η constant. Des essais ont été réalisés pour l'autre modèle d'amortissement (Δ constant) et les résultats sont toujours en accord avec une loi de Weibull (cf annexe F).

4.6 Remarque sur la loi normale

Une question sur la pertinence de la loi normale (pour le cas de plusieurs excitations) a été plusieurs fois soulevée lors de présentations en congrès. Certains reconnaissent une distribution Gamma, d'autres une distribution de Poisson. L'outil Matlab FDB (pour *Find the Best Distribution*) apporte des éléments de réponse. Le module prend l'histogramme des énergies modales en entrée et teste 17 distributions continues. En sortie il donne les quatre distributions les mieux corrélées avec les données d'entrée. La figure 4.5 donne un exemple de sortie du module FDB pour le cas $f_c = 2\text{kHz}$; $\Delta = 12.56$ ($\eta = 0.001$) avec 100 forces excitatrices aléatoires décorréliées. La première distribution est la gaussienne inverse, vient ensuite la distribution de Nakagami puis la normale et enfin la Ricienne. Le tableau présente le détail de chaque distribution.

On observe que les distributions normale et Ricienne sont confondues. Les autres sont aussi très proches mais c'est l'inverse gaussienne qui semble être la mieux corrélée.

La discussion est valable quelque soit la distribution, à savoir que les énergies des modes ont des valeurs autour d'une valeur moyenne dès que l'excitation est *rain-on-the-roof*. Par ailleurs, le modèle d'amortissement $\eta\omega$ constant permet une meilleure répartition de l'éner-

Fonction	Formule	Paramètre 1	Paramètre 2	Fonction approximée
Gaussienne Inverse	$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 x}(x-\mu)^2}$	$\mu = 1$	$\lambda = 101.10$	$\frac{4}{x^{3/2}} e^{-\frac{50(x-1)^2}{x}}$
Nakagami	$2\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^\mu \frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{2\mu-1} e^{-\frac{\mu x^2}{\omega}}$	$\mu = 25.9$	$\omega = 1.01$	$2.23 \times 10^{11} x^{49} e^{-25x^2}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu = 1$	$\sigma = 0.1$	$4e^{-50(x-1)^2}$
Ricienne	$\frac{x}{\sigma^2} I_0\left(\frac{xs}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(x^2+s^2)}{2\sigma^2}}$	$s = 1$	$\sigma = 0.1$	$\frac{x}{\sigma^2} I_0\left(\frac{xs}{\sigma^2}\right) e^{-50(x^2+1)}$

Tableau 4.1 – Paramètres et fonctions approximées des quatre distributions. *Parameters and approximated functions for the four distributions.*

gie sur les modes.

4.7 Conclusion

Contrairement à l’hypothèse de champ diffus, l’équipartition de l’énergie modale ne peut pas être atteinte dans le cas d’un système excité par une seule force aléatoire. Les conditions qui conduisent à l’équipartition de l’énergie sont :

- Une excitation *rain-on-the-roof* c’est à dire une infinité des forces aléatoires stationnaires décorréliées de type bruit blanc
- La même *half power bandwidth* Δ pour tous les modes.

Il faut, par ailleurs, un nombre *suffisant* de modes dans la bande de fréquence (cf étude le l’Annexe G).

La situation en SEA est donc très différente de celles habituellement rencontrées en physique statistique où les systèmes (constitués de particules dynamiques) mis en jeu sont ergodiques. Ils explorent tout l’espace des phases qui leur est accessible en suivant une densité de probabilité de présence qui dépend de l’ensemble considéré (micro-canonique ou canonique). Ils évoluent librement et l’équilibre statistique est atteint grâce aux chocs entre particules. Les systèmes arrivent à l’équilibre (relaxation) sans intervention extérieure (pas d’excitations). Cela conduit à l’égalité entre la moyenne temporelle \bar{E}_n de chaque particule et la moyenne d’ensemble $\langle E_n \rangle$.

En SEA les systèmes sont constitués de réseaux d’oscillateurs linéaires. Ils sont donc non ergodiques. En effet, comme les oscillateurs sont linéaires cela signifie que les équations du mouvement projetées dans la base modale sont découplées. Chaque mode conserve l’énergie qu’il avait initialement et n’échange donc pas d’énergie avec le mode voisin. Il n’y a pas de redistribution d’énergie et à aucun moment on ne peut écrire d’égalité entre moyenne temporelle et moyenne d’ensemble d’un système linéaire qui évolue librement. L’équipartition en SEA peut néanmoins être atteinte grâce à une excitation *rain-on-the-roof* et à un modèle de dissipation équimodal. Les modes d’un même système n’interagissent pas mais ils reçoivent

tous la même énergie (*rain-on-the-roof*) et dissipent tous au même rythme (Δ constant) assurant ainsi une équipartition. La figure 4.6 illustre ces deux approches.

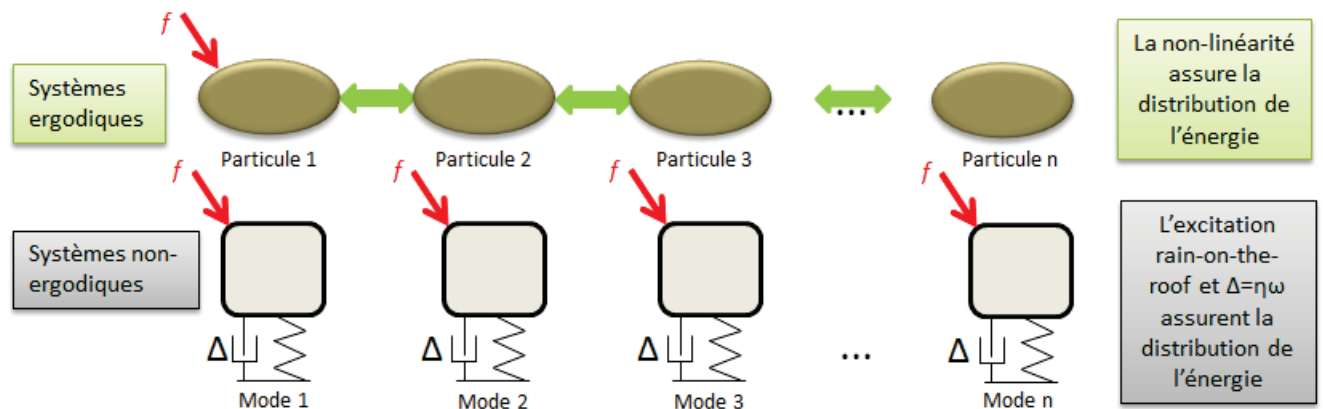


FIGURE 4.6 – L'équipartition de l'énergie : vue de la physique statistique et vue de la SEA.
Energy equipartition : from the statistical physics point of view and from the SEA point of view.

La CPP se présente formellement comme une relation linéaire entre les flux et les forces thermodynamiques (dont la définition est une différence d'énergies). Il existe d'autres relations de ce genre comme la conduction thermique ou la loi de Fick sur la diffusion de la matière. Ces lois sont des lois de relaxation. La CPP peut être vue comme un phénomène de relaxation thermodynamique des systèmes hors équilibre. C'est notamment l'argument de Carcaterra [97, 98] dans sa discussion sur l'entropie.

Finalement, l'équipartition est un phénomène qui peut exister en SEA mais pas pour les mêmes raisons qu'en physique statistique.

Chapitre 5

Hypothèse de couplage faible

Weak coupling assumption

Chapter overview

This chapter discusses the assumption of weak coupling. For that purpose the example of conservatively coupled oscillators under a broadband excitation is considered. First a review of the weak coupling criteria is made. Then a reference calculation is compared to the SEA approach. Two analysis tools, a non constrained identification technique based on the power injection method (PIM) and a constrained technique (CIT) are presented. They are useful to observe and understand the effect of a strong coupling on the coupling loss factor matrix. Some results have been shown in conference [99] and discussed in reference [100].

The weak coupling assumption is subjective, linked to experimentation. And because there is no universal consensus many authors have proposed weak coupling criteria. Finnveden [101] gives a retrospective of each : Langley uses Green's functions [60, 39]; Fahy and James [102] a ratio between the rising time of the energy envelop of the indirectly excited subsystem and the time duration of the signal of excitation; Mace's criteria γ and δ are based on a wave approach [64]; Smith defines a ratio between the coupling loss factor (CLF) and the damping loss factor (DLF) [103]; etc.

The SEA calculation recalls the proportionality factor β from the CPP relationship between two coupled oscillators (equation (5.2)) and the energy balance equation (equation (5.4)). In the reference calculation, based on the motion equations, one demonstrates the total energy expectation E_i^j of an oscillator i while the excitation is on oscillator j (equation (5.7)); the power transmitted (equation (5.9)) and the power injected (equation (5.10)). Finally, one is able to compare the proportionality factor from SEA (which is called $\beta_{ij,SEA}$) and the ratio between the power transmitted and the difference of the total energies $P_{ij}/(E_i - E_j)$ (called $\beta_{ij,REF}$) while the coupling stiffness varies.

The non constrained identification technique (section 5.3.1) based on PIM aims at exciting one by one each oscillator by uncorrelated forces and computing for each case the energy

expectation and the power injected. Three systems are then obtained for each case of excitation giving the energy of each oscillator. If E_i^j is the vibrational energy of oscillator i when the excitation is applied to oscillator j then superposing each equations allows to build a matrix system $P = E\eta$ where P is the power injected vector, E the vibrational energies E_i^j and η the coupling loss factors. Such a system is presented by equation (5.12). In PIM the injected powers and the vibrational energies are known. When inverting the system of equation (5.12) one can obtain the DLF, CLF and indirect CLF respecting the observed energy transfers without prejudging that some terms can be null (unlike equation (5.4)). The PIM finally gives a quasi-SEA system : the consistency relation is valid but the energy flow is no more governed by CPP because some CLF are conceivable for non physically coupled subsystems.

The constrained identification technique (section 5.3.2), also denoted CIT, aims at computing the *best* CLF matrix which respect a proper-SEA scheme from a quasi-SEA scheme. Three conditions must be respected : the equality of the DLF $\eta_n = \bar{\eta}_n$, the validity of the reciprocity relationship $\bar{\eta}_{np} = \bar{\eta}_{pn}$ and the indirect coupling loss factors are zero. For that the least squares method is used. The optimal parameters (denoted by $\bar{[\cdot]}$) are obtained by equation (5.16).

The comparison between the SEA approach and the reference calculation shows that for two oscillators (figure 5.2) a perfect agreement is observed for any strength of coupling : $\beta_{12,SEA}$ and $\beta_{12,REF}$ become mixed up. The coupling power proportionality holds whatever the coupling strength is and SEA always applies. For the case of three oscillators (figure 5.3(a) and (b)) one observes that β factors are in agreement until a threshold value which is 3×10^{-5} of the coupling ratio K/k . Beyond this value, $\beta_{ij,REF}$ and $\beta_{ij,SEA}$ disagree : CPP is no more valid. The assumption of weak coupling is then required to accurately apply SEA.

The analysis made by PIM and CIT shows that indirect coupling loss factors appear when the hypothesis of weak coupling is violated (Table 5.2 and figure 5.4). The CIT method can correct the apparition of indirect coupling loss factors. In that case, a SEA like scheme can be changed into a proper SEA scheme.

Finally, the main conclusion of this chapter is that the weak coupling assumption :

- is not necessary for two oscillators
- necessary for more than two oscillators
- When the coupling is strong, indirect CLF dominate the other CLF. Proper SEA and notably the traditional proportionality coefficient β cannot be used.

These conclusions agree with Sun [104].

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'influence du respect ou du non respect de l'hypothèse de couplage faible sur la CPP. A partir du modèle d'oscillateurs couplés, un calcul analytique (considéré comme référence) et un calcul SEA sont utilisés pour tester l'influence du couplage sur la qualité des prédictions SEA. Ils permettent ainsi de valider (ou invalider) la CPP. Puis on présente deux outils d'analyse (la *power injection method* (PIM) et la méthode de la SEA inverse contrainte (CIT)) utilisés pour observer les effets d'un couplage fort sur la matrice des facteurs de couplage (CLF). Certains développements théoriques et résultats de ce chapitre sont discutés dans les références [99, 100].

5.1 Introduction

L'hypothèse du couplage faible est clairement identifiée dans les travaux de développement de la SEA. Sur cette question, les avis des auteurs convergent assez bien : l'hypothèse n'est nécessaire qu'à partir de $N > 2$ oscillateurs [52]. La définition d'un couplage faible reste néanmoins abstraite. Il n'y a pas de consensus général et nombreux sont les auteurs qui ont proposé des critères de couplage faible. Leur applicabilité est parfois discutable car les quantités auxquelles ils font appel ne sont pas toujours facilement mesurables.

Langley [39, 60] propose une définition du couplage faible basée sur le calcul des fonctions de Green : le couplage est dit faible si les fonctions de Green $G_{jj}(x, y, \omega)$ des sous-systèmes couplés sont approximativement égales à celles des sous-systèmes découplés.

L'indicateur de couplage faible de Fahy et James [102] se base sur la définition de Langley. Ils utilisent le fait que, dans le domaine temporel, la fonction de Green d'un système représente la variation temporelle de l'amplitude du déplacement à un point récepteur par une excitation donnée à un point émetteur. Quand le couplage est faible, la distribution spatiale de la densité d'énergie cinétique est très différente d'un sous-système à un autre. A l'inverse, quand le couplage est fort, les sous-systèmes ont les mêmes décroissances. La quantification de cette différence de couplage est faite par la mesure du temps de montée de l'enveloppe énergétique du sous-système indirectement excité (noté θ). Lorsque le ratio C_s entre le temps de hausse θ et le temps de durée du signal est faible devant 1, le couplage est faible.

Mace [64] adopte une approche ondulatoire de la vibro-acoustique. Deux paramètres, γ et δ (basés sur la réflectance, les coefficients de réflexion et transmission), sont définis pour différencier couplage faible, couplage fort et deux autres types de couplages très forts (*re-radiation coupling*, *re-injection coupling*). Il fait d'ailleurs le distinguo entre force de *liaison* et force de *couplage* [57]. Si la première est une caractéristique propre aux sous-systèmes, la seconde dépend quant à elle de l'amortissement interne des sous-systèmes et du type de liaison. Dans les développements théoriques de la SEA, ce point n'est pas abordé. Les liaisons sont assurées par des éléments élastiques, gyroscopiques ou inertiels avec un point d'attache par sous-système (cf Chapitre 2).

Finnveden [105, 101] associe le couplage à la nature des modes qui interviennent dans

les échanges d'énergies. Il distingue modes locaux et modes globaux. Les modes locaux sont associés à un sous-système isolé, les modes globaux à des sous-systèmes couplés. Pour des sous-systèmes faiblement couplés, les modes globaux et les modes locaux sont équivalents. Finnveden reprend le paramètre γ de Mace et montre que la CPP est valide pour trois sous-systèmes couplés lorsque γ est faible.

Keane et Price [43] suivent un raisonnement analogue : le couplage est faible si le comportement modal des sous-systèmes découplés n'est pas affecté lorsqu'ils deviennent couplés.

Smith [103] reprend la démonstration de la CPP et l'étudie en condition de couplage fort. Le couplage est *fort* lorsque le ratio du facteur de couplage (CLF) par rapport au facteur d'amortissement (DLF) est grand devant 1. Il intègre alors ce critère dans l'équation de la CPP.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la nécessité de l'hypothèse de couplage faible pour la SEA. On commence par traiter le problème par la SEA : la CPP, le coefficient de proportionnalité β ainsi que le bilan d'énergie sont rappelés sur la base de l'exemple des trois oscillateurs. Puis on démontre les expressions des énergies totales, de la puissance injectée et de la puissance transmise. On est alors en mesure de comparer la SEA avec le ratio $P_{ij}/(E_i - E_j)$ tout en faisant varier le couplage. Enfin on s'intéresse à la matrice des CLF et notamment à l'apparition de CLF indirects.

5.2 Problème des trois oscillateurs

Soient trois oscillateurs (selon figure 5.1) soumis à des forces aléatoires décorréelées de DSP constante dans la bande de fréquence $\Delta\omega$.

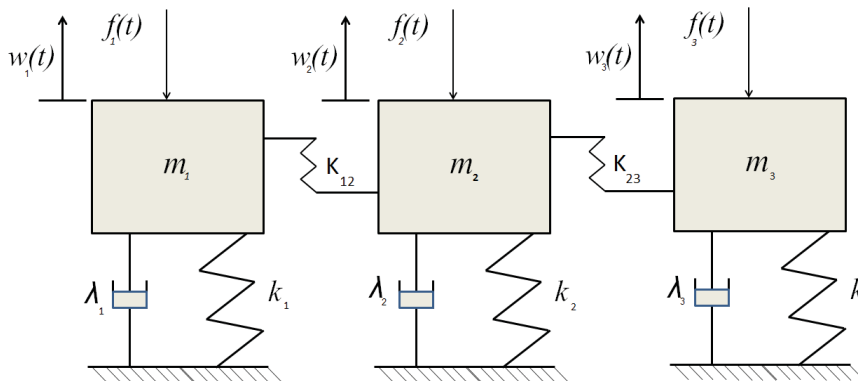


FIGURE 5.1 – Trois oscillateurs de masses m_i , d'amortissements λ_i et de raideurs k_i excités par des forces aléatoires décorréelées f_i , couplés par des raideurs K_{ij} . *Three oscillators excited by random stationary white noise processes f_i and coupled by elastic couplings K_{ij} .*

5.2.1 Calcul SEA

En supposant un couplage conservatif et des excitations bruits blancs, il a été démontré [10, 11, 52, 56] que la puissance transmise P_{ij} d'un oscillateur i vers un oscillateur j est

proportionnelle à la différence de leurs énergies vibratoires¹,

$$P_{ij} = \eta_{ij}\omega_c(E_i - E_j) \quad (5.1)$$

où ω_c est la pulsation centrale de la bande de fréquence d'excitation, η_{ij} le CLF et E_i l'énergie de l'oscillateur i . Rappelons l'expression du coefficient β pour un couplage élastique (équation (2.24)),

$$\beta_{ij} = \eta_{ij}\omega_c = \frac{K_{ij}^2(\Delta_i + \Delta_j)}{m_i m_j [(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + (\Delta_i + \Delta_j)(\Delta_i \omega_j^2 - \Delta_j \omega_i^2)]} \quad (5.2)$$

où $\Delta_i = \lambda_i/m_i$ est la bande passante, λ_i le coefficient d'amortissement visqueux. $\omega_i = ((k_i + K_{ij})/m_i)^{1/2}$ est la pulsation propre bloquée² de l'oscillateur i et K_{ij} la raideur de couplage. Les CLF vérifient par ailleurs la relation de réciprocité [6] (ou de cohérence [47]).

$$\eta_{ij} = \eta_{ji} \quad (5.3)$$

Pour les trois oscillateurs couplés par des raideurs K_{ij} (cf figure 5.1) le système SEA qui décrit l'équilibre énergétique est

$$\begin{bmatrix} P_{inj}^1 \\ P_{inj}^2 \\ P_{inj}^3 \end{bmatrix} = \omega_c \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} & 0 \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23} & -\eta_{32} \\ 0 & -\eta_{23} & \eta_3 + \eta_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

où les $\eta_i = \lambda_i/m_i\omega_i$ sont les facteurs de perte par amortissement (DLF) et P_{inj}^i est la puissance injectée dans l'oscillateur i .

La matrice de l'équation (5.4) est appelée matrice des facteurs de couplage. Un tel système correspond à une SEA dite *traditionnelle*. Mace le nomme aussi *proper-SEA* [106]. D'une part les conditions de conservation d'énergie et de cohérence sont vérifiées : la somme des termes sur chaque colonne est égale au DLF. D'autre part les facteurs de couplage entre oscillateurs non directement liés (η_{13} et η_{31}) sont égaux à zéro.

5.2.2 Calcul de référence

Dans cette section on donne les expressions exactes de l'énergie, des puissances injectées et transmises. Elles vont permettre d'établir le ratio $P_{ij}/(E_i - E_j)$ qui sera ensuite comparé au β de la SEA (équation (5.2)).

Dans l'espace de Fourier, les équations du mouvement de trois oscillateurs couplés par des couplages élastiques peuvent s'écrire sous la forme matricielle $\mathbf{DX}=\mathbf{F}$ où \mathbf{X} est le vecteur déplacement, \mathbf{F} le vecteur force et \mathbf{D} la matrice de rigidité dynamique. La fonction de réponse en fréquence H_i^j (qui donne la réponse de l'oscillateur i quand une force harmonique est appli-

1. Comme il a été vu dans le chapitre 2

2. Pour ω_2 , il faut comprendre $\omega_2 = ((k_2 + K_{12} + K_{23})/m_2)^{1/2}$.

quée à l'oscillateur j) est obtenue avec la ligne i et de la colonne j de la matrice $\mathbf{H} = \mathbf{D}^{-1}$. Pour tous vecteurs de forces harmoniques \mathbf{F} , le vecteur déplacement est $\mathbf{X}=\mathbf{HF}$.

Pour les oscillateurs mécaniques de la figure 5.1, \mathbf{H} est

$$H = \begin{bmatrix} m_1(\omega_1^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_1) & -K_{12} & 0 \\ -K_{12} & m_2(\omega_2^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_2) & -K_{23} \\ 0 & -K_{23} & m_3(\omega_3^2 - \omega^2 + j\omega\Delta_3) \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.5)$$

où $\omega_i = ((k_i + K_{ij})/m_i)^{1/2}$ est la pulsation bloquée de l'oscillateur i .

Énergies vibratoires des oscillateurs

Lorsque les forces excitatrices F_i sont aléatoires, stationnaires et décorréées de densité spectrale de puissance notée S_i , l'espérance de la vitesse quadratique de l'oscillateur i s'écrit

$$\langle \dot{X}_i^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \sum_j |H_i^j|^2 S_j d\omega \quad (5.6)$$

où $\langle . \rangle$ est une espérance de probabilité. Notons que l'intégrale porte sur une bande de fréquence infinie. Si on considère maintenant que les forces excitatrices ont une densité spectrale de puissance constante ($S_j = 1$)³ à l'intérieur de la bande de fréquence $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ ⁴ et sont nulles à l'extérieur ($S_j = 0$) l'énergie vibratoire définie comme étant deux fois l'énergie cinétique s'écrit donc

$$\langle E_i^j \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} m_i \omega^2 \left(\sum_j |H_i^j|^2 S_j \right) d\omega \quad (5.7)$$

Cette expression est valable pour n'importe quelle densité spectrale de puissance sous réserve que les forces soient aléatoires, stationnaires et décorréées.

Puissance transmise

La puissance transmise de l'oscillateur i vers l'oscillateur j lorsque la force est appliquée sur l'oscillateur k est

$$\langle P_{ij} \rangle = \frac{1}{2} K_{ij} (\langle X_i \dot{X}_j \rangle - \langle X_j \dot{X}_i \rangle) \quad (5.8)$$

soit aussi

$$\langle P_{ij} \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \Re \left[i K_{ij} \omega \left(\sum_k H_i^{k*} H_j^k S_k \right) \right] d\omega \quad (5.9)$$

où $*$ désigne le complexe conjugué et \Re la partie réelle. Dans le cas présent (cf figure 5.1), les oscillateurs 1 et 3 ne sont pas directement connectés, $K_{13} = 0$ et ainsi $\langle P_{13} \rangle = 0$.

3. hypothèse $Hm5$

4. hypothèse $Hm7$

Puissance injectée

La puissance injectée dans l'oscillateur i est,

$$\langle P_{inj}^i \rangle = \langle F_i \dot{X}_i \rangle = \frac{1}{\pi} \Re \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} i\omega H_i^i S_i d\omega \quad (5.10)$$

Gersch [68] donne une expression plus simple de la puissance injectée : pour une excitation bruit blanc ($S_i = 1$ sur une bande de fréquence infinie) la puissance injectée P_{inj}^i est inversement proportionnelle à la masse m_i de l'oscillateur. Soit

$$\langle P_{inj}^i \rangle = \frac{1}{2m_i} \quad (5.11)$$

Dans le chapitre 2 de l'ouvrage [67], Le Bot propose une démonstration de cette dernière relation.

5.3 Outils d'analyse

5.3.1 Identification non contrainte

La méthode des puissances injectées (PIM), proposée par Lyon [6] et testée par Bies [29], est une technique pour identifier les CLF de l'équation (5.4). Elle consiste à exciter un à un les oscillateurs par des forces décorrélées et à calculer (ou mesurer dans la méthode originale) l'énergie résultante et la puissance injectée de chaque oscillateur suivant les équations (5.7) et (5.10). Il découle, pour l'exemple des trois oscillateurs, neuf équations permettant de trouver les neuf CLF.

Appelons E_i^j l'énergie de l'oscillateur i quand l'excitation porte sur l'oscillateur j . L'application de la PIM donne un système matriciel du type $\mathbf{P} = \mathbf{E}\boldsymbol{\eta}$ ou \mathbf{P} est le vecteur de puissance injectée, \mathbf{E} la matrice composée des énergies vibratoires E_i^j et $\boldsymbol{\eta}$ le vecteur qui contient les CLF.

$$\begin{bmatrix} \frac{P_{inj}^1}{\omega_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_{inj}^2}{\omega_c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_{inj}^3}{\omega_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^1 & E_1^1 & E_1^1 & -E_2^1 & 0 & 0 & -E_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1^1 & 0 & E_2^1 & E_2^1 & E_2^1 & 0 & -E_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & -E_1^1 & 0 & 0 & -E_2^1 & E_3^1 & E_3^1 & E_3^1 \\ E_1^2 & E_1^2 & E_1^2 & -E_2^2 & 0 & 0 & -E_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1^2 & 0 & E_2^2 & E_2^2 & E_2^2 & 0 & -E_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E_1^2 & 0 & 0 & -E_2^2 & E_3^2 & E_3^2 & E_3^2 \\ E_1^3 & E_1^3 & E_1^3 & -E_2^3 & 0 & 0 & -E_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1^3 & 0 & E_2^3 & E_2^3 & E_2^3 & 0 & -E_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & -E_1^3 & 0 & 0 & -E_2^3 & E_3^3 & E_3^3 & E_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_{12} \\ \eta_{13} \\ \eta_{21} \\ \eta_2 \\ \eta_{23} \\ \eta_{31} \\ \eta_{32} \\ \eta_3 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\eta}$ varie sur l'ensemble \mathbb{R}^9 et se déduit par une simple inversion.

Il convient de noter que les deux termes η_{13} et η_{31} ne sont pas forcés à zéro. Ces termes

sont appelés CLF indirects car leur notation suggère qu'un flux d'énergie existe entre les oscillateurs 1 et 3 non physiquement couplés. Si ces facteurs sont effectivement nuls ou extrêmement faibles on peut conclure que les échanges d'énergie suivent un schéma de type *proper SEA*. Toutefois, l'apparition des CLF indirects suite à l'application de la PIM peut mener à un questionnement : sont-ils représentatifs d'un phénomène physique réel ou sont-ils issus d'un artefact mathématique lié à l'inversion de la matrice ?

5.3.2 La SEA inverse contrainte (CIT)

Si l'on suppose que l'échange indirect d'énergie n'a pas de réalité physique, on peut se demander si l'on peut contraindre l'inversion de la matrice de telle sorte qu'elle suppose (*a priori*) des CLF indirects nuls. C'est l'objectif de la SEA inverse sous contrainte (CIT) exposée ici.

Pour adopter un schéma de *proper SEA*, trois propriétés doivent être vérifiées. D'abord les CLF indirects doivent être nuls :

$$\eta_{13} = \eta_{31} = 0 \quad (5.13)$$

Puis la relation de réciprocités doit être vérifiée :

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \eta_{21} \\ \eta_{23} &= \eta_{32} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Enfin on peut considérer que les facteurs d'amortissement (DLF) η_1 , η_2 et η_3 sont connus. En prenant en compte ces trois contraintes, l'équation (5.12) est réduite à

$$\begin{bmatrix} \frac{P_{in1}^1}{\omega_c} - E_1^1 \eta_1 \\ -E_2^1 \eta_2 \\ -E_3^1 \eta_3 \\ -E_1^2 \eta_1 \\ \frac{P_{in2}^2}{\omega_c} - E_2^2 \eta_2 \\ -E_3^2 \eta_3 \\ -E_1^3 \eta_1 \\ -E_2^3 \eta_2 \\ \frac{P_{in3}^3}{\omega_c} - E_3^3 \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^1 - E_2^1 & 0 \\ 0 & E_2^1 - E_3^1 \\ 0 & -E_2^1 + E_3^1 \\ E_1^2 - E_2^2 & 0 \\ 0 & E_2^2 - E_3^2 \\ 0 & -E_2^2 + E_3^2 \\ E_1^3 - E_2^3 & 0 \\ 0 & E_2^3 - E_3^3 \\ 0 & -E_2^3 + E_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{12} \\ \bar{\eta}_{23} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

où la notation $\bar{\square}$ désigne les inconnues. Pour obtenir le *meilleur* système contraint il faut minimiser l'écart entre l'équation (5.12) et l'équation (5.15). Les paramètres optimaux au sens de la méthode des moindres carrés sont ceux qui minimisent la quantité :

$$\|E\bar{\eta} - P\|^2 = \min_{\eta \in \mathbb{R}^2} \|E\eta - P\|^2 \quad (5.16)$$

avec $\eta = (\eta_{12}, \eta_{23})$ variant sur l'ensemble \mathbb{R}^2 . Dans notre cas on utilise un algorithme basé sur

le *partial pivoting*.

5.4 Comparaison du calcul SEA et du calcul de référence

On considère le cas où seul l'oscillateur 1 est excité : $S_1 = 1$, $S_2 = S_3 = 0$. Les raideurs sont fixées arbitrairement, $k_i = k = 1$ N/m. Les valeurs de couplage entre les différents oscillateurs varient simultanément $K_{12} = K_{23} = K$ de 10^{-2} à 10^2 de K/k . Pour des couplages forts, les fréquences propres $f_i = \sqrt{(k_i + K_{ij})/m_i}/2\pi$ sont affectées notamment lorsque K_{ij} n'est plus négligeable devant k_i . Ainsi la bande de fréquence d'intégration $\omega_{min} = 0$ et $\omega_{max} = 10 \times \omega_m$ (où ω_m est la pulsation propre bloquée maximale) est prise suffisamment large pour que tous les modes soient résonants. La pulsation centrale est fixée à $\omega_c = 0.73$ rad/s, soit la valeur moyenne des pulsations propres.

Les caractéristiques des trois oscillateurs utilisés à titre d'exemple sont données par le tableau 5.1.

Type	Oscillateur 1	Oscillateur 2	Oscillateur 3
Masse m_i (kg)	1	4	2
Raideur k_i (N/m)	1	1	1
Amortissement λ_i (S.I)	0.1	0.4	0.2

Tableau 5.1 – Paramètres des oscillateurs *General parameters of each oscillator*

Le calcul de référence fournit les expressions des énergies $\langle E_i^j \rangle$ (équation (5.7)) et de la puissance transmise (équation (5.9)). Le ratio de la puissance transmise et de la différence des énergies est noté $\beta_{ij,REF} = P_{ij}/(E_i - E_j)$. D'autre part, le calcul de la SEA aboutit à l'expression de la CPP. La constante de proportionnalité $\eta_{ij}\omega_c$ donnée par l'équation (5.2) est notée $\beta_{ij,SEA}$. Les coefficients de proportionnalité $\beta_{ij,SEA}$ et $\beta_{ij,REF}$ peuvent alors être comparés tout en faisant varier les raideurs de couplage entre les oscillateurs.

5.4.1 Cas de deux oscillateurs

On pose $K_{23} = 0$ N/m et $K_{12} = K$. Le système se réduit à deux oscillateurs. La figure 5.2 illustre l'évolution de $\beta_{12,SEA}$ et $\beta_{12,REF}$ en fonction du taux de couplage K/k .

On observe que, quelle que soit la force de couplage, les valeurs de $\beta_{12,SEA}$ et $\beta_{12,REF}$ se superposent. Cela signifie que pour le cas de deux oscillateurs couplés soumis à des forces aléatoires le CLF donné par l'équation (5.2) est exact pour tous les couplages. Ce résultat va dans le sens de la littérature [6, 36, 52, 55]. Dans ce cas, l'hypothèse de couplage faible n'est pas nécessaire pour établir la CPP.

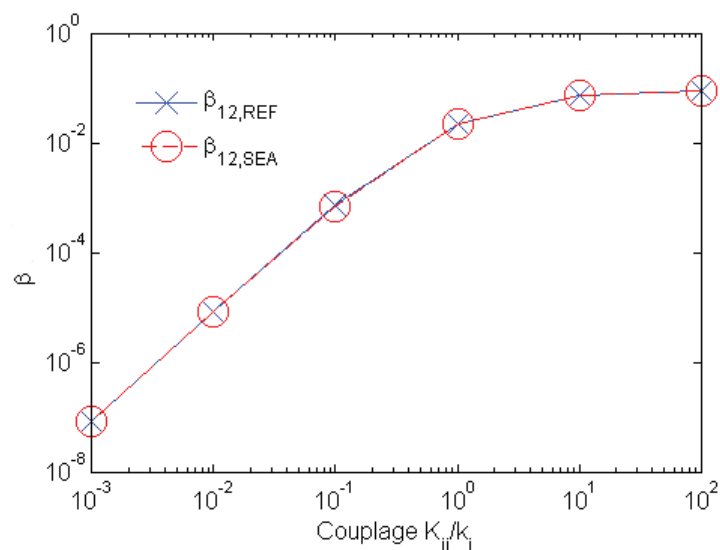


FIGURE 5.2 – Comparaison de $\beta_{12,REF}$ et $\beta_{12,SEA}$ en fonction du taux de couplage K/k . Comparison of $\beta_{12,REF}$ and $\beta_{12,SEA}$ versus the coupling strength ratio K/k .

Cas de trois oscillateurs

On considère à présent $K_{23} = K_{12} = K$. La figure 5.3 (a) présente l'évolution des facteurs $\beta_{ij,REF}$ et $\beta_{ij,SEA}$ entre les oscillateurs 1 et 2 et la figure 5.3 (b) entre les oscillateurs 2 et 3.

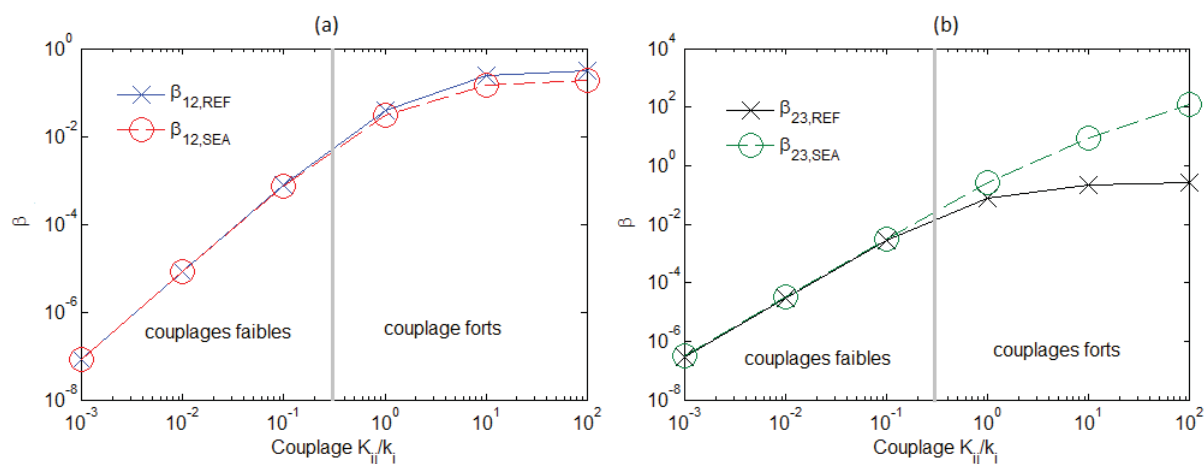


FIGURE 5.3 – Comparaison de $\beta_{ij,REF}$ et $\beta_{ij,SEA}$ pour trois oscillateurs en fonction du taux de couplage K/k . Comparison of $\beta_{ij,REF}$ and $\beta_{ij,SEA}$ for three oscillators versus the coupling strength ratio K/k .

Les facteurs β entre les oscillateurs 1 et 2 (cf figure 5.3 (a)) sont en accord jusqu'à une valeur seuil $K/k = 1$. Au delà, les coefficients prennent des valeurs différentes ce qui signifie que l'équation (5.2) n'est plus valable.

Les résultats des facteurs β entre les oscillateurs 2 et 3 (cf figure 5.3 (b)) sont plus marqués et viennent corroborer les dernières observations. Les deux régimes de couplage sont à nouveau

visibles : à partir d'une certaine valeur de couplage $\beta_{23,REF}$ et $\beta_{23,SEA}$ divergent.

Au vu de ces résultats on peut tracer une ligne séparatrice entre les valeurs de couplage faible et les valeurs de couplage fort. Cette valeur arbitrairement estimée à $K_{ij}/k_i = 3 \times 10^{-1}$ est suffisante pour faire échouer la CPP. L'hypothèse de couplage faible est nécessaire pour appliquer la SEA dans le cas de trois oscillateurs. Ces résultats sont en accord avec les observations de Woodhouse [69] et Finnveden [105]. Appliquer la SEA dans le cas d'un couplage fort est néanmoins possible d'après Lyon [3] et Mace [64] sous réserve que l'équation (5.2) soit modifiée.

Cette partie a permis d'illustrer par un exemple numérique la nécessité de l'hypothèse de couplage faible. Intéressons nous à présent au comportement de la matrice des CLF dans les différents régimes de couplage.

5.5 Conditions d'apparition des facteurs de couplage indirects

5.5.1 Étude par la méthode non contrainte

Dans cette section on étudie les conditions d'apparition des CLF indirects lors du passage de la valeur seuil séparant les deux régimes. On utilise pour cela la technique non contrainte basée sur la méthode des puissances injectées. Le vecteur η est calculé pour différentes valeurs de couplage. Si la CPP et notamment l'équation (5.2) sont correctes on s'attend à trouver une matrice des CLF d'une *proper-SEA* : les CLF indirects devraient être nuls et la relation de conservation de l'énergie respectée.

Pour appliquer la PIM, les oscillateurs sont excités un à un avec des densités spectrales de puissance $S_i = 1$ sur la bande de fréquence [$\omega_{min} = 0$ et $\omega_{max} = 10 \times \omega_m$]. Les facteurs de perte par amortissement (DLF) et par couplage (CLF) ont été estimés par le calcul de référence (équations (5.7) et (5.10)) tout en faisant varier K/k entre 10^{-2} et 10^2 . Les résultats sont présentés par le tableau 5.2 accompagné de la figure 5.4.

Tout d'abord le tableau 5.2 donne les valeurs de chaque terme du vecteur η pour différents taux de couplage.

Puis la figure 5.4 représente, sous la forme de diagrammes, les valeurs de chaque terme de la matrice des CLF pour quatre taux de couplage différents ($K_{ij}/k_i = 10^{-2}, 1, 10, 100$).

Les résultats peuvent être commentés en plusieurs points :

- Les DLF ne varient pas en fonction du taux de couplage soit $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.135$. Les valeurs calculées par la PIM sont du même ordre de grandeur que les valeurs paramétrées ($\eta_1 = 0.10$; $\eta_2 = 0.20$ et $\eta_3 = 0.14$).
- En comparant η_{12} avec η_{21} et η_{23} avec η_{32} du Tableau 5.2 on observe que $\eta_{12}=\eta_{21}$ et $\eta_{23}=\eta_{32}$. La relation de réciprocité $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ est respectée et ceci quel que soit le taux de couplage.

K_{ij}/k_i	10^{-2}	10^{-1}	1	10	100
η_1	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13
η_{12}	1.14E-05	0.0010	0.058	0.27	0.33
η_{13}	-3.83E-10	-4.23E-06	-0.0056	0.032	0.06
η_{21}	1.14E-05	0.0010	0.058	0.27	0.33
η_2	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13
η_{23}	4.39E-05	0.0042	0.14	0.19	0.17
η_{31}	-3.83E-10	-4.23E-06	-0.0056	0.032	0.06
η_{32}	4.39E-05	0.0042	0.14	0.19	0.17
η_3	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13

Tableau 5.2 – Résultats de la méthode des puissances injectées en fonction des taux de couplage K/k . Les facteurs de couplage indirects sont encadrés. *Results of the PIM with respect to the coupling strength K/k . The indirect coupling loss factors are framed.*

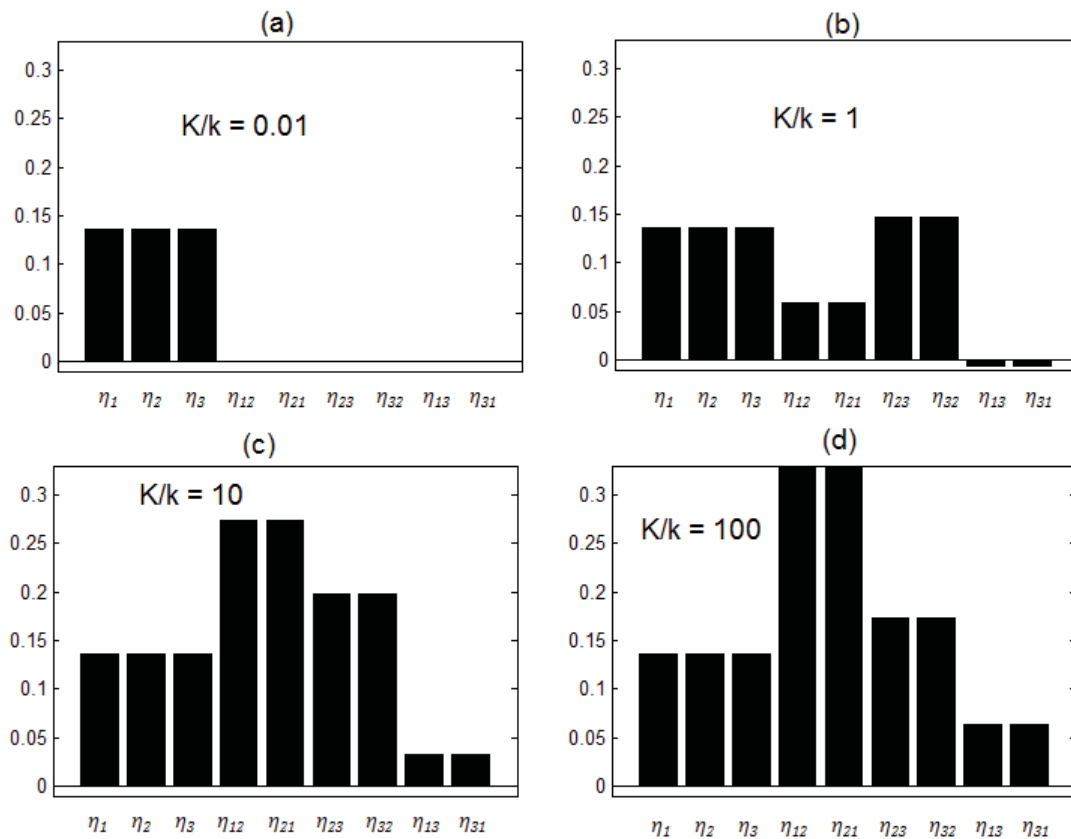


FIGURE 5.4 – Utilisation de la méthode des puissances injectées : évolution des CLF identifiés par la méthode non contrainte en fonction de K_{ij}/k_i : 10^{-2} (a), 1 (b), 10 (c), 100 (d). *Using power injection method : the evolution of the CLF vector identified by the non constrained technique versus K_{ij}/k_i : 10^{-2} (a), 1 (b), 10 (c), 100 (d).*

- Les facteurs de couplage indirects (CLFi) sont négligeables devant les CLF et les DLF pour des couplages inférieurs à la valeur seuil. Par exemple pour 10^{-2} de K/k les CLF indirects sont 115 dB plus faibles que les CLF et 200 dB plus faibles que les DLF. Dans ce

cas ils peuvent être considérés nuls et la matrice des CLF correspond à une matrice de type *proper-SEA*. Tout se passe comme si les oscillateurs étaient découplés (figure 5.4 (a)).

- Pour des valeurs de couplage légèrement au dessus de la valeur seuil (exemple figure 5.4 (b)) les CLF indirects sont négatifs et bien inférieurs aux CLF et DLF si bien que l'on peut encore les négliger. Par ailleurs on remarque que certains CLF sont supérieurs aux DLF. D'après le critère de Smith, qui préconise que les ratios entre les CLF et les DLF soient bien inférieurs à 1, le couplage est d'ores et déjà fort.
- Pour des couplages bien supérieurs à la valeur seuil, les CLF indirects apparaissent nettement (figure 5.4 (c) et (d)). Les CLF sont dominants par rapport aux autres termes. Dans ce cas la matrice des CLF n'est évidemment pas une matrice respectant un schéma traditionnel.

La technique d'identification des CLF non contrainte a ainsi mis en évidence la dominance des CLF directs et l'apparition des CLF indirects quand le couplage est fort. La CPP qui suppose que ces derniers soient nuls devient fausse et la SEA ne s'applique pas. Cette conclusion va dans le sens de Sun [104] sur l'effet d'un couplage fort dans un réseau linéaire de trois oscillateurs. Dans son papier, l'auteur a calculé explicitement le facteur de couplage indirect. En cas de couplage fort, il a montré que la CPP peut se réécrire comme une combinaison d'un échange direct et d'un échange indirect.

Dans une configuration de couplages faibles, les DLF et les CLF sont bien supérieurs aux CLF indirects. Un schéma traditionnel de la SEA (*proper-SEA*) s'applique et l'expression (5.2) est correcte. Une discussion sur l'apparition des CLF indirects dans le cas de pendules couplés par des raideurs ou encore de salles couplées est faite par Hodge et Woodhouse [5].

5.5.2 Proper-SEA vs SEA like

Il est possible de réécrire le bilan d'énergie de l'équation (5.4) en prenant en compte les CLF calculés par la méthode d'identification non contrainte. Le système n'est alors plus un système *proper-SEA* mais peut être qualifié de système *SEA-like*. Dans un tel système, comme les CLF sont calculés directement, le bilan d'énergie n'est plus valable pour une population [107]. L'idée générale de la SEA, à savoir caractériser le comportement moyen d'une population de systèmes, est donc perdue. De plus, dans un système de type *SEA-like*, le flux d'énergie n'est plus régi par la CPP car les CLF indirects sont pris en compte. Une comparaison d'un calcul SEA, d'un calcul *SEA-like* et d'un calcul par les éléments finis sur des structures en chaîne est menée par Barbagallo [108].

5.5.3 Analyse par la technique contrainte (CIT)

Les facteurs de couplage indirects apparaissent quand l'hypothèse de couplage faible n'est pas respectée. Dans la matrice des CLF cela se traduit par des CLF indirects non nuls. On peut

s'interroger : Quels sont les effets d'une matrice reconstruite (*SEA-like*) contrainte à respecter une matrice de la SEA traditionnelle (*proper-SEA*) ?

La méthode CIT permet d'étudier les effets provoqués lorsque les CLF indirects sont contraints à zéro. On peut construire la matrice sans contrainte (de l'équation (5.12)) et on peut retrouver une matrice SEA sans CLF indirect à l'aide de la formule de minimisation (équation (5.16)).

Les paramètres des essais numériques sont les mêmes ; la figure 5.5 présente, pour quatre couplages, les neuf termes de la matrice des CLF calculés par la PIM puis recalculés par la méthode CIT.

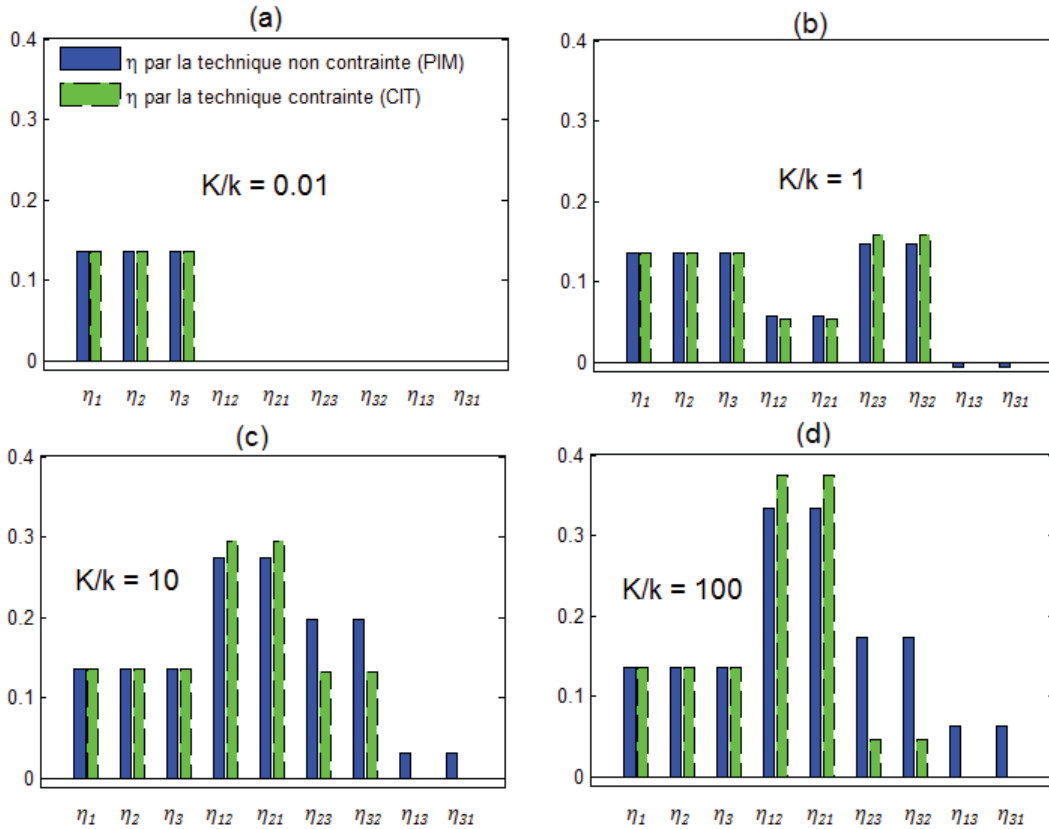


FIGURE 5.5 – Utilisation de la méthode CIT : comparaison des CLF identifiés par la méthode non contrainte et par la méthode contrainte pour K/k : 10^{-2} (a), 1 (b), 10 (c), 100 (d). *Using constrained inverse SEA method : comparison of the identified CLF by the non constrained and the constrained techniques for K/k : 10^{-2} (a), 1 (b), 10 (c), 100 (d).*

Pour des cas de couplage faible (figure 5.5 (a) et (b)), le vecteur des CLF calculé par la technique non contrainte est identique à celui calculé par la technique contrainte. Les CLF indirects sont si faibles que les forcer à zéro ne provoque aucun effet sur les autres CLF. Les DLF sont égaux aux valeurs paramétrées et les CLF sont tous positifs. Appliquer la SEA dans cette configuration ne pose aucun problème.

Pour des couplages forts (figure 5.5 (c) et (d)), les CLF directs dominent et les CLF indirects apparaissent. Forcer un tel système à adopter un comportement de *proper SEA* a des répercussions sur les CLF. Les nouvelles valeurs du vecteur η sont cohérentes. Dans ce cas, la méthode

CIT permet de corriger la PIM en transformant les chemins d'énergie fictifs (CLF indirects dominants) en chemins naturels (CLF indirects nuls).

Finalement, la technique CIT n'a pas d'utilité lorsque l'hypothèse de couplage faible est respectée. Elle permet cependant de corriger l'apparition de CLF indirects pour des valeurs de couplage fort. Les chemins d'énergies fictifs trouvés par la PIM peuvent être transformés en chemins d'énergies naturels.

5.6 Conclusion

Il a été montré que la relation fondamentale de la SEA, la *coupling power proportionality*, est valide pour toutes les forces de couplage, sous réserve que le système soit limité à deux oscillateurs et que la bande de fréquence d'excitation contienne toutes les fréquences de résonance (tous les modes résonants). Pour plus de deux sous-systèmes, la CPP est vérifiée tant que les couplages restent faibles ($K_{ij} \ll k_i$ est une condition favorable) et que tous les modes sont résonants. Néanmoins, la valeur classique de la CPP (équation (5.1)) n'est plus vérifiée pour des couplages forts. La raison est l'apparition de facteurs de perte par couplage indirect. Ils ne sont plus négligeables à partir d'une certaine valeur de couplage et le schéma classique de la SEA qui les suppose nuls n'est pas applicable. Par ailleurs, il y a une nette domination des CLF directs par rapport aux autres termes (DLF et CLF indirects), traduisant la prédominance de modes globaux.

Chapitre 6

Hypothèse des modes résonants

Hypothesis of resonant modes

Chapter overview

The motivation of this chapter is introduced by the fact that SEA requires white noise excitations. Practically, to apply SEA, the bandwidth of integration which is infinite must be truncated into a finite frequency band. The contribution of a mode outside the frequency band also called non resonant transmission is thus neglected. Classical SEA does not describe such transmissions but few authors have nonetheless given a particular attention on this topic. We may refer to Crocker and Price [109] and Craik [110] on a configuration of two coupled rooms separated by a double wall (two walls plus a plenum) for SEA and to Maxit [111] for SmEdA.

To study the influence of non-resonant mode the example of the three coupled oscillators from chapter 5 is recovered. The reference and the SEA calculation but also the non constrained technique based on PIM are reused. The frequency band is an octave and the mass of oscillator 2 is fixed in such a way that three cases appear :

- the eigenfrequency of oscillator 2 is outside the octave and lower than the inferior frequency of the bandwidth, $f_2 \leq f_{min}$ (non-resonant low frequency cases)
- the eigenfrequency of oscillator 2 is inside the octave, $f_2 \in [f_{min}; f_{max}]$ (resonant case)
- the eigenfrequency of oscillator 2 is outside the octave and higher than the superior frequency of the bandwidth, $f_2 \geq f_{max}$ (non-resonant high frequency cases)

Figure 6.1 illustrates these cases and the assumption of weak coupling is assumed.

A comparison between the reference calculation ($\beta_{ij,REF}$ based on equations (5.7) and (5.9)) and the SEA calculation ($\beta_{ij,SEA}$ of equation (5.2)) is made while the frequency f_2 varies. Figure 6.2 presents the results. One can observe that $\beta_{12,REF}$ and $\beta_{12,SEA}$ agree only when the mode is resonant. The difference between $\beta_{23,SEA}$ and $\beta_{23,REF}$ is larger. Curiously they only

agree when f_2 is inside the bandwidth and its value is close to f_1 and f_3 . The difference between figure 6.2 (a) and figure 6.2 (b) may be explained by the fact that only oscillator 1 is excited.

For the case of a non resonant low frequency mode, the mass of oscillator 2 is very large compare to the others. An equivalent sketch is drawn in figure 6.4. Oscillator 2 behave like a infinite mass : oscillator 1 has difficulty to pull away oscillator 2 and very few energy can be transmitted from oscillator 2 to oscillator 3. For the case of a non resonant high frequency mode the mass of oscillator 2 is very small compare to the others. As before, an equivalent sketch is drawn in figure 6.3. There are two ways of thinking : we assume that oscillator 2 is still a SEA subsystem and the assumption of weak coupling is then violated. Or we consider that oscillator 2 is no more a SEA subsystem. In that case the problem is reduced to two oscillators coupled by a coupling term and a damping term. The assumption of conservative coupling is then not respected.

Section 6.2.2 is concerned about using the non constrained identification technique while the frequency f_2 varies. Results are presented by Table 6.2 and figure 6.5. Three comments can be made : first the damping loss factor do not vary because each damping λ_i is proportional to the mass m_i . Second, the reciprocity relationship is correct only if the mode is resonant. Outside the octave band, $\eta_{12} \neq \eta_{21}$ and $\eta_{23} \neq \eta_{32}$. Third, the indirect coupling loss factors η_{13} and η_{31} are far below the coupling loss factor wherever the frequency f_2 is. Consequently they can be neglected.

The main conclusions of this chapter are :

- A non-resonant mode provokes the failure of the reciprocity relationship.
- Based on this simple example of three oscillators, indirect coupling loss factor do not appear when the hypothesis is violated (unlike weak coupling assumption).

6.1 Introduction

La SEA requiert des forces excitatrices bruits blancs sur une bande de fréquence. En pratique, l'intégration sur une bande de fréquence d'étude infinie est tronquée à une bande finie. En réduisant la bande de fréquence à $\Delta\omega$, on suppose implicitement que seuls les modes présents dans cette bande participent à l'échange d'énergie. Les autres modes sont qualifiés de modes non résonants. La SEA ne décrit donc pas les échanges d'énergie qui font intervenir ces modes (transmissions non résonantes).

Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette problématique. En SEA, Crocker [109] et Craik [110] utilisent le même exemple d'une configuration de deux salles couplées par une cavité (deux murs séparés par un plénum). Ils adoptent une stratégie différente pour modéliser l'influence des modes non résonants. Crocker et Price considèrent la cavité comme un espace semi-infini et introduisent un CLF supplémentaire entre les deux salles indirectement couplées. Craik différencie CLF entre deux salles et CLF entre une salle et une cavité. En dessous de la fréquence critique les dimensions de la cavité sont petites devant la longueur d'onde. Il y a donc prédominance de modes tangentiels et une distinction à faire avec les autres modes. Son calcul SEA, qui prend en compte ces nouveaux CLF, s'avère plus rigoureux que celui de Crocker et Price.

Maxit présente en référence [111] une extension de la méthode SmEdA qui prend en compte les transmissions non résonantes. Il intègre la contribution des modes non résonants par des termes supplémentaires dans la matrice de double formulation modale. Il montre que les modes non résonants basses fréquences (régis par un terme de masse) peuvent être modélisés par des couplages élastiques directs.

L'influence d'un mode non résonant est étudiée par l'exemple des trois oscillateurs du chapitre 5. Dans un premier temps, le problème est traité de manière directe en comparant les CLF de la SEA (équation (5.2)) avec le ratio $P_{ij}/(E_i - E_j)$ (équations (5.7) et (5.9)). Dans un deuxième temps, la technique d'identification non contrainte est utilisée pour observer l'évolution des CLF.

6.2 Définition du problème

Soit trois oscillateurs (cf figure 5.1). Les masses et les raideurs sont choisies de manière à faire apparaître les fréquences de résonance des oscillateurs découplés dans l'octave centrée sur $f_c = 250$ Hz. Les amortissements sont choisis proportionnels à la masse ($\lambda_i = 100 \times m_i$). Les nouvelles caractéristiques sont données par le tableau 6.1.

On s'intéresse à l'influence d'un mode en dehors de la bande de fréquence d'excitation. Pour cela on fait varier la masse de l'oscillateur 2 pour mettre en évidence trois configurations :

- Le cas non résonant basse fréquence avec $f_2 \leq f_{min}$
- Le cas résonant avec $f_2 \in [f_{min}; f_{max}]$

Type	Oscillateur 1	Oscillateur 2	Oscillateur 3
Masse m_i (kg)	0.0039	variable	0.0036
Raideur k_i (N/m)	9e3	9e3	9e3
Amortissement λ_i (S.I)	0.39	$100 \times m_2$	0.36

Tableau 6.1 – Paramètres des oscillateurs. *Parameters of the oscillators.*

- Le cas non résonant haute fréquence avec $f_2 \geq f_{max}$

La figure 6.1 schématise les trois configurations.

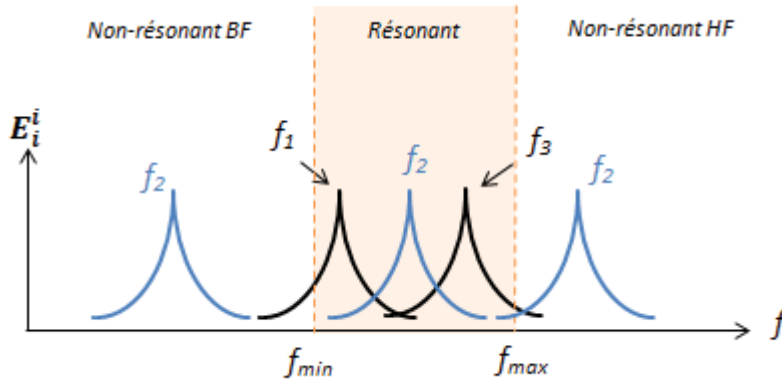


FIGURE 6.1 – Illustration des différents cas pour l'étude de l'influence d'un mode non résonant sur l'exemple des trois oscillateurs couplés. *Illustration of the several test cases for the study of the influence of a non resonant mode in the example of the three coupled oscillators.*

La bande de fréquence d'excitation est une octave définie par la fréquence centrale $f_c = 250$ Hz (donc $[f_{min} = 176.77$ Hz ; $f_{max} = 353.55$ Hz]). On se place dans une configuration de couplage faible en fixant $K/k = 10^{-2}$ pour ne pas influencer les facteurs de couplage indirects.

6.2.1 Influence des modes non résonants : méthode directe

L'excitation n'est appliquée que sur l'oscillateur 1 ($S_1 = 1$ et $S_2 = S_3 = 0$). Comme précédemment, la méthode directe consiste à comparer le CLF de la SEA ($\beta_{ij,SEA}$ de l'équation (5.2)) avec le ratio $P_{ij}/(E_i - E_j)$ (appelé $\beta_{ij,REF}$ calculé suivant les équations (5.7) et (5.9)). La figure 6.2 présente les résultats.

$\beta_{12,REF}$ et $\beta_{12,SEA}$ sont en accord dès que le mode est résonant (figure 6.2 (a)). Dans les cas non résonant basses fréquences et non résonant hautes fréquences, les écarts entre les β sont visibles, leur différence est de l'ordre de 6 dB. Les prévisions données par la SEA entre les oscillateurs 1 et 2 sont correctes dès que la masse de l'oscillateur 2 est de l'ordre de grandeur de la masse de l'oscillateur 1.

La différence entre $\beta_{23,REF}$ et $\beta_{23,SEA}$ est importante (figure 6.2 (b)). Pour les cas non résonants BF et non résonants HF, les écarts sont de l'ordre de 30 dB. $\beta_{23,REF}$ et $\beta_{23,SEA}$ s'ac-

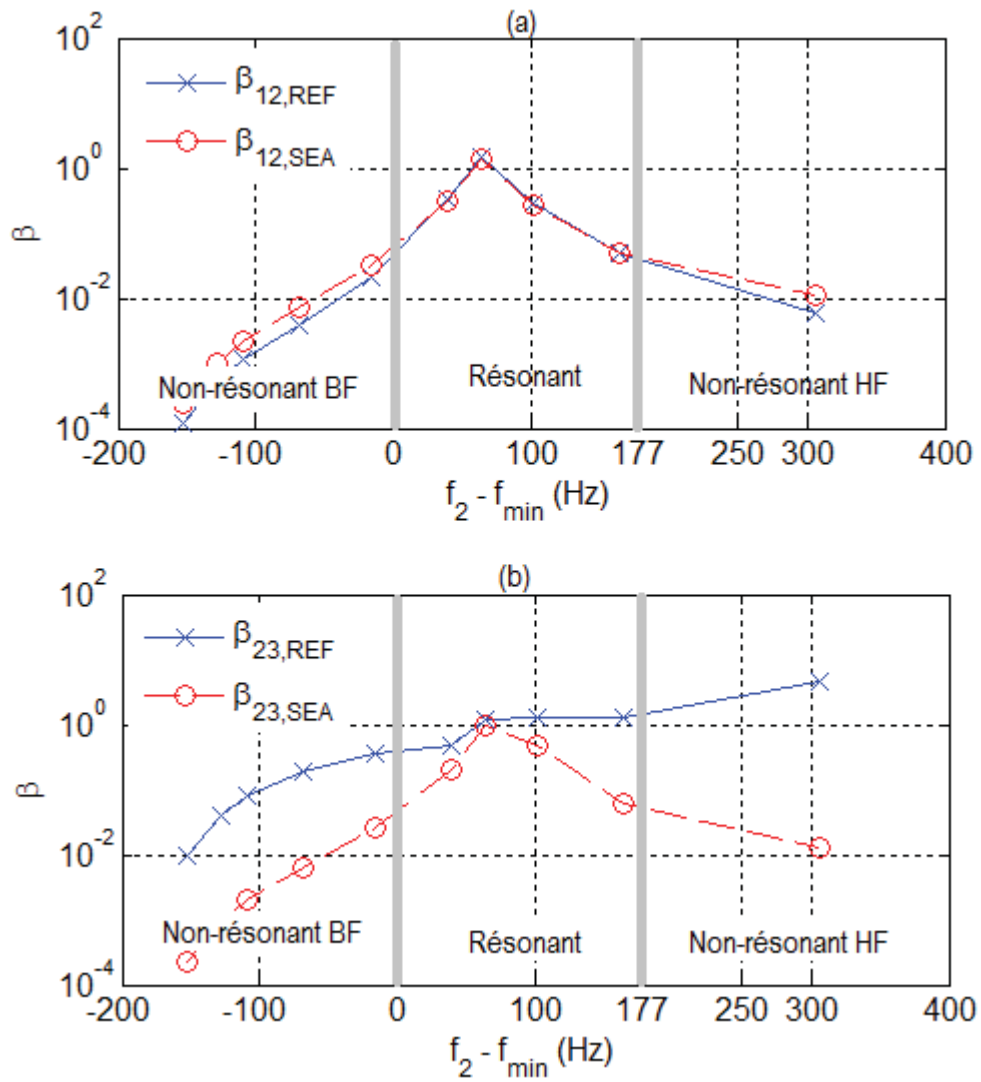


FIGURE 6.2 – Évolution des $\beta_{ij,REF}$ et $\beta_{ij,SEA}$ pour trois oscillateurs quand l'oscillateur 1 est excité en fonction de la distance du pic de résonance de l'oscillateur 2 : $f_2 - f_{min}$. La figure (a) compare $\beta_{12,REF}$ et $\beta_{12,SEA}$; la figure (b) compare $\beta_{23,REF}$ et $\beta_{23,SEA}$. Evolution of $\beta_{ij,REF}$ and $\beta_{ij,SEA}$ for three oscillators when oscillator 1 is excited with respect to the distance of the resonance peak of oscillator 2 : $f_2 - f_{min}$. Figure (a) compares $\beta_{12,REF}$ and $\beta_{12,SEA}$; figure (b) compares $\beta_{23,REF}$ and $\beta_{23,SEA}$.

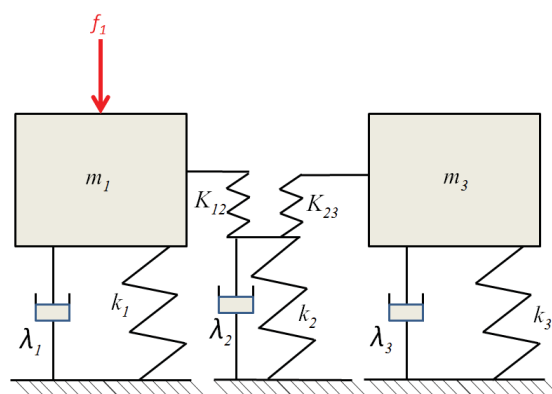


FIGURE 6.3 – Schéma équivalent d'un mode non résonant hautes fréquences. *Equivalent sketch of a high frequency non resonant mode.*

cordent seulement dans le cas où la valeur de la masse de l'oscillateur 2 est très proche des autres masses.

Dans le cas non résonant HF, la masse de l'oscillateur 1, plus importante que celle de l'oscillateur 2, entraîne *facilement* le mouvement de l'oscillateur voisin. Plus la masse m_2 devient petite, moins son influence sur l'oscillateur 1 est marquée. Par ailleurs, si la masse m_2 est très petite devant m_1 et m_3 , l'oscillateur 2 aura des difficultés à entraîner le mouvement de l'oscillateur 3 surtout s'il est excité indirectement. La puissance transmise est dans ce cas extrêmement faible ; tout se passe comme si l'oscillateur 2 n'existait pas (cf figure 6.3). On est face à un effet de puits d'énergie : l'énergie transmise de l'oscillateur 1 vers 2 est quasi totalement dissipée par l'oscillateur 2 et presque rien n'est transmis à l'oscillateur 3. Finalement l'oscillateur 2 ne devrait pas être considéré dans ce cas comme un sous-système SEA car il ne participe plus significativement à l'échange d'énergie. Vouloir modéliser son échange avec l'oscillateur 3 par $\beta_{23,SEA}$ n'a plus de sens.

Si on considère que l'oscillateur 2 n'est plus un sous-système SEA, le schéma est réduit à deux oscillateurs couplés par un couplage faisant intervenir un terme d'amortissement. On se heurte dans ce cas à l'hypothèse du couplage non conservatif.

En résumé, dans le cas d'un mode non résonant HF :

- Soit on considère que le sous-système 2 est un sous-système SEA et dans ce cas on ne respecte pas l'hypothèse des modes résonants.
- Soit on considère que le sous-système 2 n'est pas un sous-système SEA et dans ce cas on ne respecte pas l'hypothèse du couplage non conservatif.

Dans les cas non résonants BF, la masse de l'oscillateur 2 est plus importante que celles des autres oscillateurs. La masse m_2 se comporte comme un massif infini et est donc *difficilement* excité par l'oscillateur 1. Le système des trois oscillateurs est réduit à un système de deux oscillateurs non couplés (cf figure 6.4). L'écart entre $\beta_{ij,REF}$ et $\beta_{ij,SEA}$ ne va décroître qu'avec la diminution de la masse m_2 .

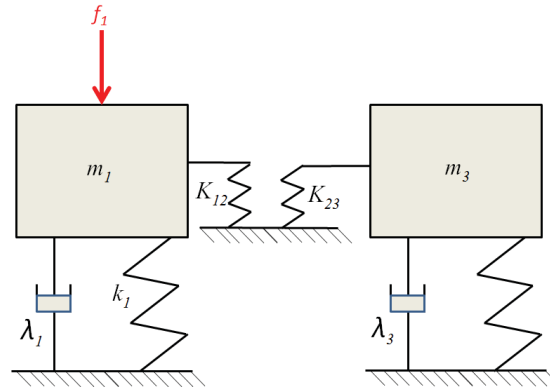


FIGURE 6.4 – Schéma équivalent d'un mode non résonant basses fréquences. *Equivalent sketch of a low frequency non-resonant mode.*

Finale­ment pour des transferts d'énergie entre des oscillateurs qui ne sont pas directement excités, l'influence d'un mode non résonant est beaucoup plus marquée.

6.2.2 Influence des modes non résonants : méthode inverse non contrainte

On utilise à présent la méthode des puissances injectées pour étudier les effets d'un mode non résonant sur les termes de la matrice des CLF. Le vecteur η est calculé pour différentes valeurs de f_2 . On excite un à un les oscillateurs avec des densités spectrales de puissance $S_i = 1$ sur l'octave centrée sur $f_c = 250$ Hz. Les DLF et les CLF sont estimés par les équations (5.7) et (5.10) tout en faisant varier la masse de l'oscillateur 2. Enfin on présente les résultats avec le tableau 6.2 et la figure 6.5.

Le tableau 6.2 donne les valeurs de chaque terme du vecteur η pour différentes valeurs de $f_2 - f_{min}$.

$f_2 - f_{min}$	-128	-108	-68	-15	39	64	164
η_1	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063
η_{12}	3.31e-07	7.24e-07	2.432e-06	1.29e-05	0.00021	0.00091	3.12e-05
η_{13}	8.39e-11	3.65e-10	3.04e-09	3.42e-08	5.54e-07	1.49e-06	3.65e-07
η_{21}	9.90e-06	1.96e-05	4.71e-05	7.03e-05	0.00021	0.00091	3.72e-05
η_2	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063
η_{23}	9.18e-06	1.81e-05	4.24e-05	5.84e-05	0.00013	0.00063	4.80e-05
η_{31}	8.39e-11	3.65e-10	3.04e-09	3.42e-08	5.54e-07	1.49e-06	3.64e-07
η_{32}	3.071e-07	6.67e-07	2.19e-06	1.07e-05	0.00013	0.00063	4.024e-05
η_3	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063

Tableau 6.2 – Résultats de la méthode des puissances injectées en fonction de la distance du pic de résonance de l'oscillateur 2 : $f_2 - f_{min}$. Les facteurs de couplage indirect sont encadrés. *Results of the PIM with respect to the distance of the resonance peak of oscillator 2 : $f_2 - f_{min}$. The indirect coupling loss factors are framed.*

Pour plus de clarté, seulement cinq données sont représentées (figure 6.5) : η_1 , η_2 , η_{12} , η_{21} et η_{13} .

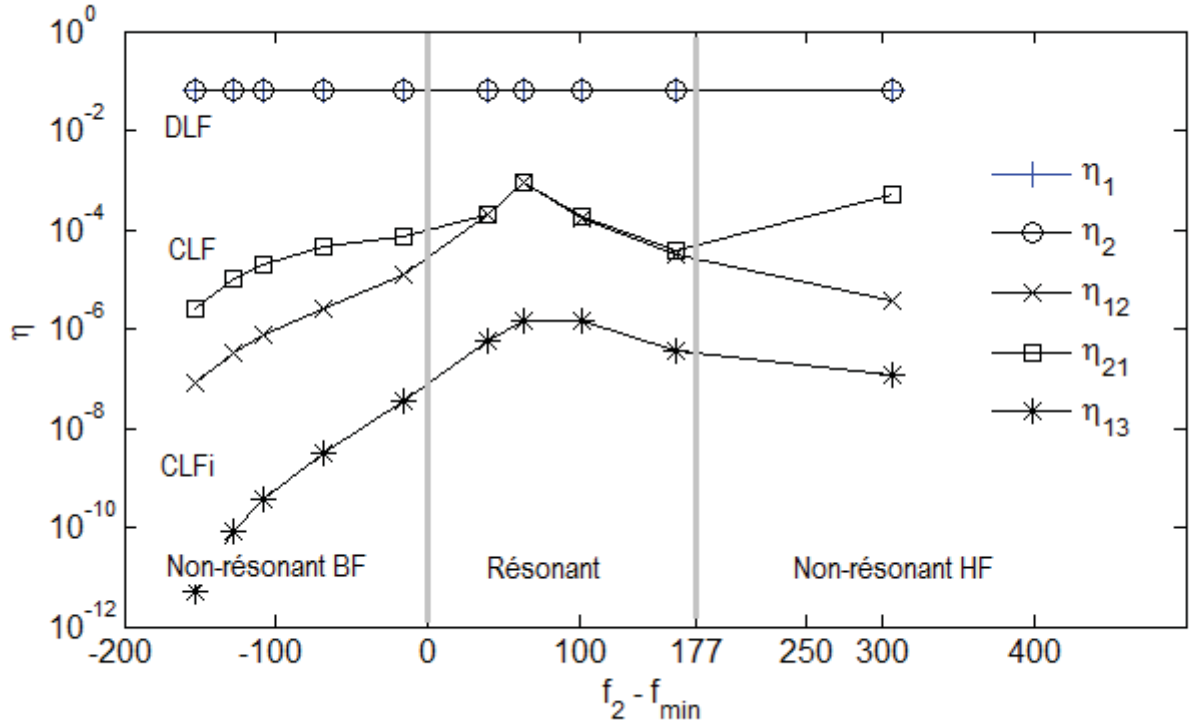


FIGURE 6.5 – Influence d’un mode non résonant : évolution des facteurs de perte par amortissement (DLF : η_i), de couplage direct (CLF : η_{ij}) et de couplage indirect (CLFi : η_{ik}) avec la méthode des puissances injectées. *Influence of a non-resonant mode : evolution of damping loss factors (DLF : η_i), the coupling loss factors (CLF : η_{ij}) and indirect coupling loss factors (CLFi : η_{ik}) using power injection method.*

Au vu du tableau 6.2, les DLF des oscillateurs 1 et 3 sont correctement estimés : $\eta_1 = \eta_3 = 0.063$ pour les valeurs paramétrées $\eta_1 = 0.065$ et $\eta_3 = 0.063$. De plus, la relation de cohérence n’est pas valide pour les cas non résonants (basses fréquences et hautes fréquences). En effet, ce n’est que lorsque le mode est résonant que $\eta_{12} = \eta_{21}$ (cf figure 6.5). Il en est de même pour η_{23} et η_{32} . Les CLF indirects évoluent avec f_2 mais restent très inférieurs aux CLF directs et, *a fortiori*, sont très inférieurs aux DLF. De manière générale, pour les différentes valeurs de $f_2 - f_{min}$, les CLF indirects sont 40 dB inférieurs aux CLF et 90 dB inférieurs aux DLF. Pour trois oscillateurs couplés, que le mode soit résonant ou pas, les CLF indirects peuvent être négligés.

6.3 Conclusion

Un mode non résonant est un mode dont la fréquence de résonance est en dehors de la bande d’excitation $[f_{min}; f_{max}]$. Dans l’exemple des trois oscillateurs, cela se traduit par un oscillateur ayant des caractéristiques mécaniques radicalement différentes des deux autres.

Il a été vérifié que la SEA fonctionnait dans le cas où tous les modes étaient résonants. L’échange d’énergie entre un oscillateur excité et son voisin est correctement estimé. Dans

le cadre d'un échange entre deux oscillateurs indirectement excités, les résultats numériques montrent que les fréquences de résonance devaient être très proches pour que la relation (5.2) soit applicable.

Quand le mode est non résonant, la SEA ne fonctionne pas.

Pour une situation de couplage faible, on ne constate pas de dominance des facteurs de couplage indirect. La technique non contrainte (PIM) permet de clarifier les effets d'un mode non résonant sur les termes de la matrice des CLF. On pouvait s'attendre, comme pour le couplage, à une émergence nette des CLF indirects mais ce n'est pas le cas. Le non respect de l'hypothèse de troncature modale conduit effectivement à une matrice des CLF différentes d'une matrice SEA, mais pour une autre cause : l'invalidité de la relation de réciprocité.

Chapitre 7

Applications sur des réseaux de plaques

Numerical applications on plate networks

Chapter overview

This chapter is concerned with some applications on two and three coupled plates. All the previous assumptions are reviewed except the hypothesis of resonant modes.

The first example is two coupled plates A and B (figure 7.1). Diffuse field, equipartition of modal energy and rain-on-the-roof assumptions are studied. The hypothesis of weak coupling is viewed in the second example of three coupled plates. As before, a reference calculation is presented. The local energies and modal energies are given by equations (7.6), (7.7), (7.11) and (7.12). Only plate A is excited by a varying number of excitations.

On one hand, diffuse field is studied. The two plates have a direct field behavior if plate A is excited by a single point force (point I of figure 3.3). The ratios σ_d (equation (3.13)) of each plate are drawn versus the number of excitations (figure 7.2). The observations confirm the conclusions of chapter 3. The ratio of plate A , $\sigma_{d,A}$, decreases with the number of excitations proving that a rain-on-the-roof forces the field to be diffuse. At the opposite, the diffuse field ratio of plate B ($\sigma_{d,B}$) stays high because the plate is indirectly excited by the spring. It acts like a single point force excitation.

On the other hand, equipartition is presented. The ratios σ_e (equation (4.10)) of each plate are drawn versus the number of excitations (figure 7.3). $\sigma_{e,B}$ does not evolve and equipartition is never reached in plate B because the plate is indirectly excited by a single point force. In plate A equipartition is observed starting from 25 random excitations.

Equation (7.16) is a mean to study the difference between SEA and the reference calculation. Section 7.1.6 deals with five test cases. For the three first tests, only plate A is excited by a single random point force.

-
- In case 1 (table 7.2) the two plates have a modal field behavior (Point J of figure 3.3). The difference between SEA and reference, $\Delta_{SEA-REF}$, is large meaning that SEA fails.
 - In case 2 (table 7.3) the two plates have a direct field behavior (Point F of figure 3.3) and $\Delta_{SEA-REF}$ is still large. SEA cannot be used propely.
 - In case 3 (table 7.4) the field is diffuse in the two plates (Point K of figure 3.3). $\Delta_{SEA-REF}$ is very small meaning that SEA gives a correct estimation of the energy transfer.
 - Case 4 (table 7.5) presents a example where the two plates have different behaviors. A rain-on-the-roof is applied on plate *A* (100 random excitations) and plate *B* has a small damping coefficient ($\eta_B = 0.01$) allowing a diffuse field in each plate. SEA can be applied on that case in the right way.
 - In case 5 (table 7.6) plate *A* is still excited by a rain-on-the-roof. Equipartition and diffuse field are verified. Nonetheless, plate *B* has this time a large damping coefficient ($\eta_B = 0.1$). Curiously, it is observed that the difference $\Delta_{SEA-REF}$ is not so large showing that SEA is still practicable even if neither diffuse field nor equipartition assumptions are respected.

The second example is three coupled plates (figure 7.4). It is used to evaluate the hypotheses of diffuse field, equipartition, rain-on-the-roof and weak coupling. The reference calculation is similar to the one of two coupled plate ; the detail are then given in appendix H. The global energy of each plate are computed using modal energies (equations (7.17), (7.18) and (7.19)). The SEA calculation gives two energy ratios (equations (7.20) and (7.21)).

The assumption of weak coupling is studied using a direct way (the comparison of the energy ratios from the reference and from SEA) and a inverse way (the use of the non constrained identification technique). It is assumed that the three plates fulfill the diffuse field assumption.

The direct way compares the energy ratios given by SEA and the reference using two coupling stiffness values $K_{AB} = K_{BC} = K = 10^5$ N/m and $K = 10^8$ N/m. Figure 7.5 illustrates the results. The conclusions follow the observations of chapter 5 : two coupling regimes are highlighted. For small coupling, SEA and the reference agree. For strong coupling, SEA overestimates the energy transfers. Consequently, weak coupling assumption is necessary to apply SEA.

The inverse way is the use of the non constrained identification technique (presented in section 5.3.1). The DLF, CLF and the possible indirect CLF are computed while the coupling K varies. The CLF given by SEA (from equation (7.14)) are also given and renamed $\eta_{ij,SEA}$. The results are illustrated by figure 7.6 and table 7.8. Weak coupling and strong coupling can be separated by a threshold value ($K=10^6$ N/m). This value is smaller than Smith's criterion. For weak coupling, the indirect CLF are negligible. The computed CLF agree with the CLF computed by SEA. For strong coupling, the indirect CLF are small compare to the CLF and

DLF but are no more negligible. The CLF computed by PIM do not fit with the CLF given by SEA. The reciprocity relationship holds whatever the coupling values are.

Finally the chapter ends with some cases on the three plates example to test each assumption. Eight configurations are viewed and summarized in two tables (7.9 and 7.10). Some precisions are given to help the reading of the tables :

For all cases, the central frequency of the octave band is $f_c = 2$ kHz. When a plate is excited by a single point force, the rain-on-the-roof box is filled *non*. Automatically the equipartition box is also filled *non*. Otherwise, the two boxes are filled *oui*.

The diffuse field box is filled *oui* when either a rain-on-the-roof box is filled *oui* or when the plate is excited by a single point force and its damping is small ($\eta = 0.02$).

The coupling box is filled *faible* when the coupling $K = 10^4$ N/m. Otherwise, the coupling value is $K = 10^7$ N/m and the box is filled *fort*.

These cases show :

- SEA cannot be applied if none of the assumptions are respected.
- When the weak coupling hypothesis is not fulfilled, it makes automatically SEA fail (cases 4 and 5).
- Rain-on-the-roof is linked to equipartition and implies diffuse field. These are the conclusions of chapters 3 and 4.
- SEA can give good results if the indirectly excited subsystems do not respect equipartition. This is good news because rain-on-the-roof excitation would have been a difficult assumption to respect in all subsystems (cf cases 1,2,3,7 and 8).
- SEA gives good results if all of the subsystems verify the diffuse field assumption (cf cases 1,2,6 and 7).
- SEA can eventually give good results when a subsystem to not respect the diffuse field hypothesis. In that case this subsystem must be the last subsystem coupled to another subsystem which respect the assumption (cf cases 3 and 8).

Les notions introduites par les chapitres 3 et 4 ont permis d'étudier les hypothèses de champ diffus, d'équipartition de l'énergie modale et d'excitation *rain-on-the-roof* dans le cadre d'un système seul. Par les chapitres 5 et 6, qui traitent du couplage et de l'influence des modes non résonants pour des oscillateurs, on accède à différents outils d'analyse (PIM, CIT). Ce chapitre présente des applications sur des exemples de plaques rectangulaires couplées par des raideurs.

On étudie dans un premier temps les hypothèses de champ diffus, d'équipartition de l'énergie modale et de *rain-on-the-roof* sur un exemple de deux plaques couplées. L'hypothèse de couplage faible n'est pas abordée dans cette section. Elle le sera sur l'exemple suivant de trois plaques couplées¹.

7.1 Hypothèses de champ diffus, d'équipartition de l'énergie modale et de *rain-on-the-roof* sur le cas de deux plaques couplées

7.1.1 Calcul analytique

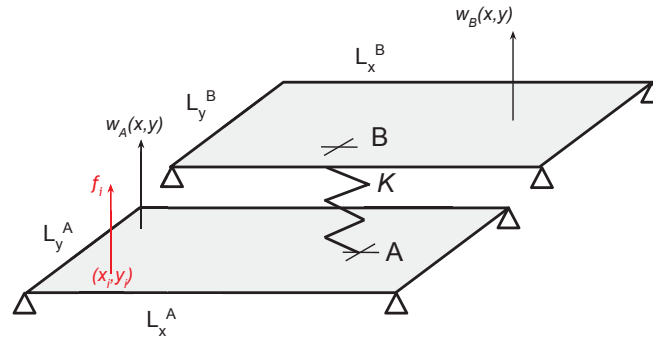


FIGURE 7.1 – Une plaque A en appui simple, excitée par des forces aléatoires décorrélatées bruits blancs f_i est couplée par une raideur élastique K à une plaque B en appui simple. *Simply supported plate A is excited by random stationary white noise processes f_i is coupled by elastic coupling K to a simply supported plate B.*

Soit deux plaques A et B couplées (cf figure 7.1). w_A et w_B désignent les déplacements sur les plaques A et B, K représente la raideur du couplage. Si A est excitée par une somme de processus stochastiques $f_i(x, y, t)$ selon l'équation (3.6), les équations du mouvement sont analogues à l'expression (3.5) avec un terme supplémentaire de couplage. Soit,

$$D\nabla^4 w_A(x, y, t) + m \frac{\partial^2 w_A(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t) + K(w_B(x_B, y_B, t) - w_A(x_A, y_A, t))\delta(x - x_A, y - y_A), \quad (7.1)$$

1. Dans son papier de 2006, Culla [112] fait une approche similaire. Il rappelle les hypothèses de la SEA et les teste sur deux exemples : un cas de plaque-cavité et un cas de trois plaques couplées. Le but étant de vérifier si la SEA est applicable, ce qui est aussi l'objet de ce chapitre.

pour la plaque A et

$$D\nabla^4 w_B(x, y, t) + m \frac{\partial^2 w_B(x, y, t)}{\partial t^2} = K(w_A(x_A, y_A, t) - w_B(x_B, y_B, t))\delta(x - x_B, y - y_B), \quad (7.2)$$

pour la plaque B où x_A, y_A est le point d'attache du couplage sur A et x_B, y_B sur B .

Soit $G^A(x, y; x_i, y_i, \omega)$ (resp. G^B) la fonction de réponse en fréquence (FRF) du système couplé pour un récepteur placé en x, y sur A (resp. sur B) et une force ponctuelle en x_i, y_i sur A . On utilise les FRF du système découplé pour les déterminer. Pour la plaque A , elle s'écrit

$$H^A(x, y; x_i, y_i, \omega) = \sum_{n \geq 0} \frac{\psi_n^A(x, y)\psi_n^A(x_i, y_i)}{m(\omega_{A,n}^2 - \omega^2 + j\eta_A\omega_{A,n}\omega)}, \quad (7.3)$$

où x_i, y_i désigne soit la position de la sollicitation extérieure ($i = 1, 2..N$) soit la position du point d'attache du couplage x_A, y_A . η_A et ψ^A désignent respectivement le coefficient d'amortissement et les déformées propres de la plaque A découplée. Idem pour la plaque B . Il vient

$$\begin{aligned} G^A(x, y; x_i, y_i, \omega) &= H^A(x, y; x_i, y_i; \omega) + H^A(x, y; x_A, y_A; \omega)K[W^B(x_i, y_i; \omega) - W^A(x_i, y_i; \omega)], \\ G^B(x, y; x_B, y_B, \omega) &= H^B(x, y; x_B, y_B; \omega)K[W^A(x_i, y_i; \omega) - W^B(x_i, y_i; \omega)], \end{aligned} \quad (7.4)$$

où $W^A(x_i, y_i; \omega) = G^A(x_A, y_A; x_i, y_i, \omega)$ et $W^B(x_i, y_i; \omega) = G^B(x_B, y_B; x_i, y_i, \omega)$. Les déplacements W^A et W^B sont obtenus en substituant x, y avec x_A, y_A et x_B, y_B ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 + KH^A(x_A, y_A; x_A, y_A; \omega) & -KH^A(x_A, y_A; x_A, y_A; \omega) \\ -KH^B(x_B, y_B; x_B, y_B; \omega) & 1 + KH^B(x_B, y_B; x_B, y_B; \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^A \\ W^B \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} H^A(x_A, y_A; x_i, y_i; \omega) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Alors, les FRF G^A et G^B en chaque point récepteur sont obtenues en appliquant la relation (7.4) avec W^A et W^B déterminés par (7.5).

7.1.2 Énergies locales

L'expression de l'énergie locale $\langle e \rangle(x, y, \omega_c)$ pour la plaque A est (voir équation (3.11))

$$\langle e_A \rangle(x, y, \omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G^A(x, y; x_i, y_i; \omega)|^2 d\omega \quad (7.6)$$

et

$$\langle e_B \rangle(x, y, \omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G^B(x, y; x_i, y_i; \omega)|^2 d\omega \quad (7.7)$$

pour la plaque B .

7.1.3 Énergies modales

Les énergies modales pour chaque plaque sont calculées en suivant un raisonnement similaire à celui du cas d'une seule plaque.

$$\langle E^A \rangle (\omega_c) = \int_{L_x^A} \int_{L_y^A} \langle e_A \rangle (x, y, \omega_c) dx dy \quad (7.8)$$

idem pour la plaque B . Les énergies globales sont donc

$$\langle E^A \rangle (\omega_c) = \sum_{n \geq 0} \langle E_n^A \rangle (\omega_c) \quad (7.9)$$

et

$$\langle E^B \rangle (\omega_c) = \sum_{n \geq 0} \langle E_n^B \rangle (\omega_c), \quad (7.10)$$

avec les expressions des énergies modales

$$\langle E_n^A \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{|\psi_n^A(x_i, y_i) + K\psi_n^A(x_A, y_A)[W^B(x_i, y_i; \omega) - W^A(x_i, y_i; \omega)]|^2}{m((\omega_{A,n}^2 - \omega^2)^2 + (\eta_A \omega_{A,n} \omega)^2)} d\omega, \quad (7.11)$$

pour A et

$$\langle E_n^B \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{|K\psi_n^B(x_B, y_B)[W^A(x_i, y_i; \omega) - W^B(x_i, y_i; \omega)]|^2}{m((\omega_{B,n}^2 - \omega^2)^2 + (\eta_B \omega_{B,n} \omega)^2)} d\omega, \quad (7.12)$$

pour B .

7.1.4 Étude du champ diffus et de l'équipartition modale en fonction du nombre d'excitations

Le tableau 7.1 donne les paramètres de simulation. Les calculs des énergies locales (champ diffus) et des énergies modales (équipartition) suivent respectivement les équations (7.6), (7.7), (7.11) et (7.12). Le pas fréquentiel et le nombre de récepteurs sur les plaques respectent l'étude de convergence de l'annexe C. La raideur de couplage est fixée en $x_A = 0.72$ m, $y_A = 0.6$ m sur la plaque A et en $x_B = 0.39$ m, $y_B = 1.06$ m sur la plaque B .

Seule la plaque A est excitée. Les ratios σ_d (équation (3.13)) et σ_e (équation (4.10)) sont calculés pour chaque plaque et le nombre d'excitations varie à chaque essai. On se place dans un cas où le champ n'est pas diffus *a priori* (point I de la figure 3.3 où $f_c = 2$ kHz ; $\kappa = 10.35$; $\eta = 0.1$). Les évolutions de $\sigma_{d,A}$ et $\sigma_{d,B}$ sont représentées par la figure 7.2.

Les résultats sont en accord avec les observations du chapitre 3 : quand la plaque A est excitée par une force ponctuelle, le ratio est élevé ($\sigma_{d,A} \approx 3.5$). Ceci indique une condition de champ non diffus (champ direct). L'énergie est ensuite transférée à la plaque B via l'élément de couplage K qui agit aussi comme une force ponctuelle. Le ratio σ_d de la plaque B est donc

7.1. HYPOTHÈSES DE CHAMP DIFFUS, D'ÉQUIPARTITION DE L'ÉNERGIE MODALE ET DE RAIN-ON-THE-ROOF SUR LE CAS DE DEUX PLAQUES COUPLÉES

Type	Symbole	Valeur	Unité
Plaque A	$L_x^A \times L_y^A$	1.44×1.2	m^2
Plaque B	$L_x^B \times L_y^B$	1.39×1.1	m^2
Densité	ρ	7800	kg/m^3
Module d'Young	E	$2.1E11$	N/m^2
Coefficient de Poisson	ν	0.3	—
Épaisseur	$h_A=h_B$	2	mm
Raideur	K	10^4	$N.m^{-1}$
Libre parcours moyen	l_A	1.028	m
Libre parcours moyen	l_B	0.964	m

Tableau 7.1 – Paramètres des plaques A et B et du couplage K. General parameters of plate A and B and the coupling K.

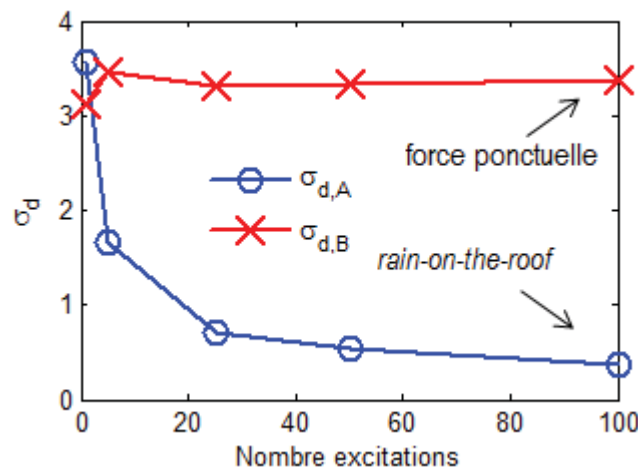


FIGURE 7.2 – Du champ direct au champ diffus : évolution du critère de champ diffus des deux plaques par rapport au nombre d'excitations. From direct to diffuse field : evolution of diffuse field criteria for the two plates versus the number of excitations.

du même ordre que celui de la plaque A pour une excitation ($\sigma_{d,B} \approx 3.5$), traduisant une condition de non diffusion. Lorsque le nombre d'excitations augmente, $\sigma_{d,A}$ décroît pour atteindre des valeurs de l'ordre de $\sigma_{d,A} \approx 0.4$. Le ratio de B reste, en revanche, élevé car la plaque B est toujours excitée par une seule force ponctuelle. Les petites variations observées de $\sigma_{d,B}$ sont dues aux positions aléatoires des récepteurs. L'excitation, composée de multiples forces aléatoires décorréelées, modélise idéalement une excitation *rain-on-the-roof*. Elle est appliquée sur la plaque A et force le champ à être diffus. C'est pourquoi $\sigma_{d,A}$ décroît. La plaque B étant, quant à elle, indirectement sollicitée par le ressort qui agit toujours comme une force ponctuelle, le champ direct persiste.

Sous les mêmes conditions (point I de la cartographie) la figure 7.3 représente les ratios σ_e de chaque plaque en fonction du nombre d'excitations. Le modèle d'amortissement est $\Delta = \eta\omega$ constant.

$\sigma_{e,B}$ reste élevé et ne varie pas entre chaque essai car il n'y a désormais plus de dépen-

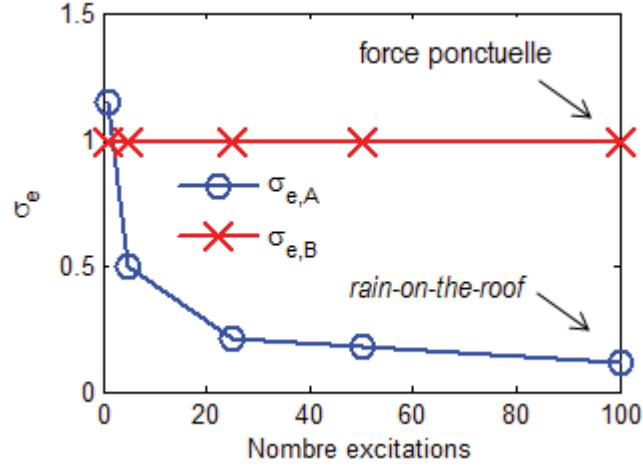


FIGURE 7.3 – Du champ direct au champ diffus : évolution de σ_e pour deux plaques couplées en fonction du nombre d'excitations. *From direct to diffuse field : evolution of σ_e for two coupled plates versus the number of excitations.*

dance spatiale due aux récepteurs. Ainsi l'énergie n'est jamais équirépartie dans la plaque B . En revanche, $\sigma_{e,A}$ décroît avec le nombre d'excitations pour atteindre des valeurs proches de 0.1. Cela signifie que tous les modes ont quasiment les mêmes énergies. L'excitation *rain-on-the-roof* favorise l'état d'équipartition dans la plaque A . La plaque B , étant excitée par une force ponctuelle, n'atteint pas l'état d'équipartition. Les observations sont en accord avec les conclusions du chapitre 4.

7.1.5 Comparaison entre la SEA et le calcul de référence

Les calculs analytiques donnent accès aux expressions des énergies globales de chaque sous-système (équation (7.9)). Du point de vue de la SEA, pour deux sous-systèmes couplés A et B où seul A est excité, le bilan de puissance et la CPP conduisent au système SEA [6]

$$\frac{1}{\omega_c} \begin{pmatrix} \langle P_A \rangle \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_A + \eta_{AB} & -\eta_{BA} \\ -\eta_{AB} & \eta_B + \eta_{BA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle E^A \rangle \\ \langle E^B \rangle \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

où η_A et η_B sont les DLF des plaques A et B . D'autre part les CLF η_{AB} et η_{BA} de deux plaques couplées par une raideur sont donnés par Mace et Li [57],

$$\omega_c n_A \eta_{AB} = \omega_c n_B \eta_{BA} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \gamma^2)}} \frac{K^2}{32\pi\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\rho_A h_A D_A} \sqrt{\rho_B h_B D_B}}, \quad (7.14)$$

avec $\gamma = \kappa^2 / (\Delta_A \times \Delta_B)$ le coefficient de la force de couplage où $\kappa = K^2 / m_A m_B \omega^2$; D_A , D_B les rigidités en flexion des plaques; n_A , $n_B = L_x L_y \sqrt{m/D} / (4\pi)$ les densités modales. Le

développement de la deuxième ligne de l'équation (7.13) conduit au ratio des énergies globales

$$\left(\frac{\langle E^B \rangle}{\langle E^A \rangle} \right)_{SEA} = \frac{\eta_{AB}}{\eta_B + \eta_{BA}} = \frac{\frac{\eta_B}{n_A}}{1 + \frac{\eta_B}{\eta_{BA}}}. \quad (7.15)$$

La SEA et le calcul analytique peuvent être alors comparés par la différence

$$\Delta_{SEA-REF} = \left| 10 \log \left(\frac{\langle E^B \rangle}{\langle E^A \rangle} \right)_{SEA} - 10 \log \left(\frac{\langle E^B \rangle}{\langle E^A \rangle} \right)_{REF} \right|. \quad (7.16)$$

où le ratio $\langle E^B \rangle / \langle E^A \rangle_{SEA}$ provient de l'équation (7.15) et $\langle E^B \rangle / \langle E^A \rangle_{REF}$ de l'équation (7.9).

7.1.6 Différents cas test

La comparaison du calcul de référence (équations (7.9)- (7.12)) et du calcul SEA (équation (7.15)) peut se faire sous différentes conditions (nombre d'excitations, fréquences centrales, amortissements). La bande de fréquence est une octave centrée sur f_c . Quelques cas d'étude sont présentés ci-dessous. Pour chacun, on précise les paramètres de simulation, les ratios σ_d et σ_e ainsi que la différence $\Delta_{SEA-REF}$ entre la SEA et le calcul de référence (suivant (7.16)).

Les résultats sont résumés dans des tableaux. Dans les trois premiers cas, la plaque A est excitée par une seule force ponctuelle aléatoire.

- Cas 1 (tableau 7.2) : On s'intéresse à un cas où les deux plaques sont en champ modal. La fréquence centrale est fixée à $f_c = 31.5$ Hz ($\kappa = 1.29$) et les amortissements sont faibles $\eta_A = \eta_B = 0.001$. Ces conditions correspondent au point J de la figure 3.3.

Plaque A	Plaque B	$\Delta_{SEA-REF}$ (dB)
$\sigma_{d,A} = 0.77$	$\sigma_{d,B} = 1.04$	13.37
$\sigma_{e,A} = 0.93$	$\sigma_{e,B} = 2.19$	(NO SEA)

Tableau 7.2 – Comparatif SEA/Analytique pour un configuration champ modal - champ modal ($f_c = 31.5$ Hz; $\kappa = 1.29$; $\eta_A = \eta_B = 0.001$; 1 excitation). *Comparison between SEA and reference for a modal field - modal field configuration* ($f_c = 31.5$ Hz; $\kappa = 1.29$; $\eta_A = \eta_B = 0.001$; 1 excitation).

On observe que les ratios σ_d et σ_e ont des valeurs élevées, ce qui signifie qu'aucune des hypothèses n'est respectée. Dans le cas où les sous-systèmes ont un comportement modal, la SEA a tendance à surestimer grandement les transferts d'énergie.

- Cas 2 (tableau 7.3) : Étudions le cas où le champ direct prédomine dans les deux plaques. La fréquence centrale est fixée à $f_c = 4$ kHz ($\kappa = 14.35$) et l'amortissement est fort $\eta_A = \eta_B = 0.1$ (point F de la figure 3.3).

7.1. HYPOTHÈSES DE CHAMP DIFFUS, D'ÉQUIPARTITION DE L'ÉNERGIE MODALE ET DE RAIN-ON-THE-ROOF SUR LE CAS DE DEUX PLAQUES COUPLÉES

Plaque A	Plaque B	$\Delta_{SEA-REF}$ (dB)
$\sigma_{d,A} = 4.65$	$\sigma_{d,B} = 4.77$	7.16
$\sigma_{e,A} = 1.46$	$\sigma_{e,B} = 1.73$	(NO SEA)

Tableau 7.3 – Comparatif SEA/Analytique pour un configuration champ direct - champ direct ($f_c = 4$ kHz; $\kappa = 14.35$; $\eta_A = \eta_B = 0.1$; 1 excitation). *Comparison between SEA and reference for a direct field - direct field configuration ($f_c = 4$ kHz; $\kappa = 14.35$; $\eta_A = \eta_B = 0.1$; 1 excitation).*

L'erreur entre la SEA et le calcul de référence est élevée, de l'ordre de 7 dB. Les hypothèses de champ diffus et d'équipartition de l'énergie modale n'étant pas respectées, la SEA ne peut pas être utilisée.

- Cas 3 (tableau 7.4) : On se place dans un cas où les deux plaques sont en condition de champ diffus (point K de la figure 3.3), soit $f_c = 16$ kHz ($\kappa = 29.27$), $\eta_A = \eta_B = 1 \times 10^{-4}$.

Plaque A	Plaque B	$\Delta_{SEA-REF}$ (dB)
$\sigma_{d,A} = 0.12$	$\sigma_{d,B} = 0.19$	0.23
$\sigma_{e,A} = 1.85$	$\sigma_{e,B} = 5.27$	(SEA OK)

Tableau 7.4 – Comparatif SEA/Analytique pour un configuration champ diffus - champ diffus ($f_c = 16$ kHz, ($\kappa = 29.27$); $\eta_A = \eta_B = 0.0001$; 1 excitation). *Comparison between SEA and reference for a diffuse field - diffuse field configuration ($f_c = 16$ kHz; ($\kappa = 29.27$); $\eta_A = \eta_B = 0.0001$; 1 excitation).*

Dans ce cas, le champ diffus est vérifié pour tous les sous-systèmes, les ratios σ_d sont proches de zéro. L'équipartition n'est pas vérifiée car chaque plaque n'est excitée que par une seule force excitatrice (directement ou indirectement via la raideur). Les ratios σ_e sont par conséquent élevés. La différence entre la SEA et le calcul de référence est très faible (<1dB). Ce cas montre que, même si l'hypothèse d'équipartition de l'énergie modale et l'hypothèse de *rain-on-the-roof* ne sont pas vérifiées, on peut tout de même appliquer la SEA. Ceci est possible car les champs sont diffus dans les deux plaques.

- Cas 4 (tableau 7.5) : On se place dans un cas où les amortissements des plaques *A* et *B* sont différents pour une bande de fréquence centrée sur $f_c = 1$ kHz : La plaque *A* a un amortissement fixé à $\eta_A = 0.04$ (condition de champ direct) et la plaque *B* a un amortissement $\eta_B = 0.01$ (condition de champ diffus). Par ailleurs, la plaque *A* est excitée par 100 forces aléatoires décorréliées.

Les ratios σ_d des deux plaques sont faibles et traduisent que l'hypothèse de champ diffus est vérifiée dans tous les sous-systèmes. L'excitation force le champ direct de la plaque *A* à être diffus. L'équipartition est atteinte uniquement dans *A* du fait de l'excitation *rain-on-the-roof*. La SEA donne dans ce cas une estimation correcte des transferts d'énergie ($\Delta_{SEA-REF}$ de 2.34 dB).

- Cas 5 (tableau 7.6) : Dans ce dernier cas la plaque *A* est excitée par 100 forces aléatoires

Plaque A	Plaque B	$\Delta_{SEA-REF}$ (dB)
$\sigma_{d,A} = 0.31$	$\sigma_{d,B} = 0.46$	2.34
$\sigma_{e,A} = 0.12$	$\sigma_{e,B} = 1.17$	(SEA OK)

Tableau 7.5 – Comparatif SEA/Analytique pour un configuration champ diffus - champ diffus ($f_c = 1$ kHz, ($\kappa = 7.31$); $\eta_A = 0.04$, $\eta_B = 0.01$; 100 excitations). *Comparison between SEA and reference for a diffuse field - diffuse field configuration* ($f_c = 1$ kHz; ($\kappa = 7.31$); $\eta_A = 0.04$, $\eta_B = 0.01$; 100 excitations).

décorrélées. L'amortissement est fixé à $\eta_A = \eta_B = 0.1$ et la bande de fréquence est centrée à $f_c = 2$ kHz ($\kappa = 10.35$), ce qui correspond au point I de la figure 3.3.

Plaque A	Plaque B	$\Delta_{SEA-REF}$ (dB)
$\sigma_{d,A} = 0.42$	$\sigma_{d,B} = 4.28$	2.86
$\sigma_{e,A} = 0.77$	$\sigma_{e,B} = 1.56$	(SEA OK)

Tableau 7.6 – Comparatif SEA/Analytique pour un configuration champ diffus - champ direct ($f_c = 2$ kHz, ($\kappa = 10.35$); $\eta_A = \eta_B = 0.1$; 100 excitations). *Comparison between SEA and reference for a diffuse field - direct field configuration* ($f_c = 2$ kHz, ($\kappa = 10.35$); $\eta_A = \eta_B = 0.1$; 100 excitations).

L'équipartition ainsi que le champ diffus sont des conditions atteintes pour la plaque A ($\sigma_{d,A}$ et $\sigma_{e,A}$ faibles). Toutefois la plaque B reste indirectement excitée en un point, l'équipartition n'est donc pas vérifiée dans ce sous-système. Le champ diffus n'est pas atteint car l'amortissement fort entraîne un champ direct et donc un ratio $\sigma_{d,B}$ élevé. La différence entre la SEA et le calcul analytique est de l'ordre de 2.8 dB. C'est néanmoins une estimation correcte des transferts d'énergie.

Les différents cas-tests montrent que la SEA n'est pas applicable lorsque les deux plaques sont en champ direct ou en champ modal. L'hypothèse de champ diffus semble être primordiale; l'équipartition et l'excitation *rain-on-the-roof* sont deux hypothèses liées mais ne sont pas forcément nécessaires. Le dernier cas test soulève un point intéressant : la SEA donne une estimation correcte des transferts d'énergie même si l'hypothèse de champ diffus n'est pas vérifiée dans la plaque indirectement excitée. L'étude s'oriente vers un exemple de 3 plaques couplées pour confirmer ces observations et pour pouvoir étudier l'hypothèse de couplage faible.

7.2 N>2 plaques couplées

Dans cette section on considère le cas de trois plaques rectangulaires A, B et C couplées par des raideurs K_{AB} et K_{BC} (cf figure 7.4).

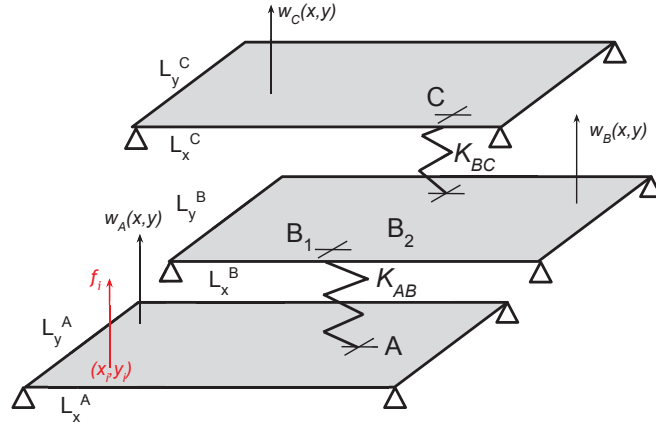


FIGURE 7.4 – Réseau de trois plaques en appui simple A , B et C couplées par des raideurs K_{AB} and K_{BC} . Three simply supported plates A , B and C coupled by elastic couplings K_{AB} and K_{BC} .

7.2.1 Calcul de référence

Le problème de trois plaques couplées est similaire à celui de la section précédente. Le détail des calculs est donc reporté en annexe H. On suppose que seule la plaque A est excitée par un *rain-on-the-roof*. Les expressions des énergies modales sont

$$\langle E_n^A \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{|\psi_n^A(x_i, y_i) + K_{AB}\psi_n^A(x_A, y_A)[W^{B1}(x_i, y_i; \omega) - W^A(x_i, y_i; \omega)]|^2}{m((\omega_{A,n}^2 - \omega^2)^2 + (\eta_A\omega_{A,n}\omega)^2)} d\omega, \quad (7.17)$$

pour A ,

$$\langle E_n^B \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \left| \frac{K_{AB}\psi_n^B(x_{B1}, y_{B1})[W^A(x_i, y_i; \omega) - W^{B1}(x_i, y_i; \omega)]}{m((\omega_{B,n}^2 - \omega^2)^2 + (\eta_B\omega_{B,n}\omega)^2)^{1/2}} + \frac{K_{BC}\psi_n^B(x_{B2}, y_{B2})[W^C(x_i, y_i; \omega) - W^{B2}(x_i, y_i; \omega)]}{m((\omega_{B,n}^2 - \omega^2)^2 + (\eta_B\omega_{B,n}\omega)^2)^{1/2}} \right|^2 d\omega \quad (7.18)$$

pour B et

$$\langle E_n^C \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{|K_{BC}\psi_n^C(x_C, y_C)[W^{B2}(x_i, y_i; \omega) - W^C(x_i, y_i; \omega)]|^2}{m((\omega_{C,n}^2 - \omega^2)^2 + (\eta_C\omega_{C,n}\omega)^2)} d\omega, \quad (7.19)$$

pour C .

7.2.2 Calcul SEA

Lorsque A est excitée par un champ de forces f_i , le bilan d'énergie et la CPP donnent un système similaire à celui des trois oscillateurs (équation (5.4) du chapitre 5) avec $\langle P_{inj}^B \rangle$ et $\langle P_{inj}^C \rangle$ égaux à zéro. Les CLF sont donnés par l'équation (7.14). Les ratios d'énergie dans le

cas présent sont alors

$$\left(\frac{\langle E^B \rangle}{\langle E^A \rangle} \right)_{SEA} = \frac{\eta_{AB}}{[(\eta_B + \eta_{BA} + \eta_{BC}) - \eta_{CB} \frac{\eta_{BC}}{\eta_C + \eta_{CB}}]} \quad (7.20)$$

et

$$\left(\frac{\langle E^C \rangle}{\langle E^A \rangle} \right)_{SEA} = \frac{\eta_{BC}}{\eta_C + \eta_{CB}} \times \frac{\eta_{AB}}{[(\eta_B + \eta_{BA} + \eta_{BC}) - \eta_{CB} \frac{\eta_{BC}}{\eta_C + \eta_{CB}}]} \quad (7.21)$$

7.2.3 Paramètres des simulations

Les paramètres des simulations sont donnés par le tableau 7.7. Les énergies globales de chaque plaque (suivant l'équation (7.9)) sont calculées suivant les équations (7.11) et (7.12).

Type	Symbole	Valeur	Unité
Plaque A	$L_x^A \times L_y^A$	1.44×1.2	m^2
Plaque B	$L_x^B \times L_y^B$	1.39×1.1	m^2
Plaque C	$L_x^C \times L_y^C$	1.42×1.3	m^2
Épaisseur	$h_A = h_B = h_C$	2	mm
Densité	ρ	7800	kg/m ³
Module d'Young	E	$2.1E11$	N/m ²
Coefficient de poisson	ν	0.3	–
Point d'attache A	x_A, y_A	0.72, 0.61	m
Point d'attache B1	x_{B1}, y_{B1}	0.35, 0.91	m
Point d'attache B2	x_{B2}, y_{B2}	1.09, 0.31	m
Point d'attache C	x_C, y_C	0.35, 0.30	m

Tableau 7.7 – Paramètres des trois plaques couplées. *General parameters of the three coupled plates.*

7.2.4 Étude sur l'hypothèse de couplage faible

On commence par étudier l'hypothèse de couplage faible. La bande de fréquence est fixée à une octave centrée sur 2 kHz. Les raideurs de couplage $K_{AB} = K_{BC} = K$ varient simultanément et les amortissements sont identiques $\eta_A = \eta_B = \eta_C = 0.02$ de manière à avoir un champ diffus dans toutes les plaques.

Méthode directe

Dans cette partie, seule la plaque A est excitée par un champ de 100 forces aléatoires décorrélées. On propose d'étudier les décroissances d'énergie du réseau de plaques. On compare les ratios donnés par la SEA (équations (7.20) et (7.21)) et le calcul de référence (équations (7.9) et (7.10)). La figure 7.5 présente les résultats pour deux forces de couplage : à $K = 10^5$ N/m (figure 7.5(a)) et à $K = 10^8$ N/m (figure 7.5(b)).

Les ratios sont représentés par des paliers. Pour $K = 10^4$ N/m (Fig 7.5(a)), on constate que le calcul de référence et la SEA s'accordent. D'une plaque à une autre l'énergie décroît

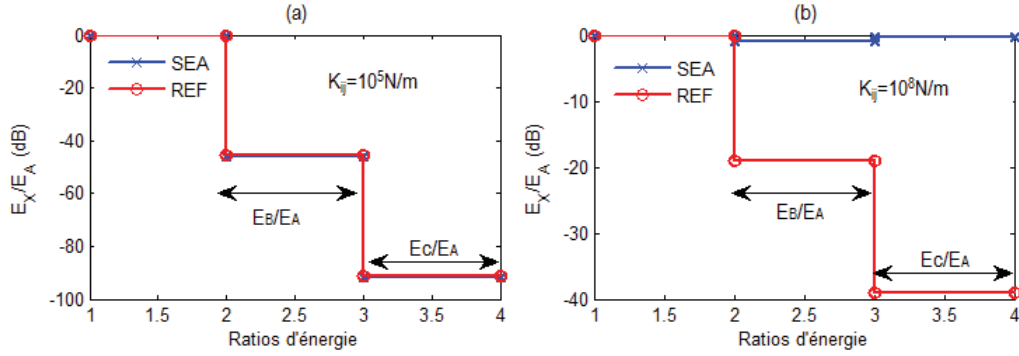


FIGURE 7.5 – Étude de la décroissance d'énergie dans le réseau de plaques : comparaison entre la SEA et le calcul de référence pour deux valeurs de couplage $K = K_{AB} = K_{BC} = 10^5 \text{ N/m}$ (a) et $K = K_{AB} = K_{BC} = 10^8 \text{ N/m}$ (b). *Study of the energy decreasing of the plate network : comparison between the SEA approach and the reference calculation for two coupling values $K = K_{AB} = K_{BC} = 10^5 \text{ N/m}$ (a) and for $K = K_{AB} = K_{BC} = 10^8 \text{ N/m}$ (b).*

fortement. Il y a en effet une différence de 45 dB entre la plaque A et la plaque B et jusqu'à 90 dB entre A et C. Pour Smith, la valeur de K correspond à un couplage faible. En effet, $\eta_{12}/\eta_1 = 9.54 \times 10^{-8}$ et $\eta_{23}/\eta_2 = 1.07 \times 10^{-7}$ sont des valeurs négligeables devant 1. Dans ce cas, la formule des CLF donnée par l'équation (7.14) est valide, la SEA peut ainsi être appliquée.

Pour des couplages forts ($K = 10^8 \text{ N/m}$ in Fig 7.5(b)), on observe une différence de 23 dB entre $\langle E^B \rangle$ et $\langle E^A \rangle$ et de 50 dB entre $\langle E^C \rangle$ et $\langle E^A \rangle$ entre la SEA et la référence. Si d'après le calcul de référence l'énergie décroît d'une plaque à une autre ; pour la SEA les trois plaques ont les mêmes énergies moyennes. Les critères de Smith, dans ce cas, sont supérieurs à 1 : $\eta_{12}/\eta_1 = 9.53$, $\eta_{23}/\eta_2 = 10.7$ et représentent un régime de couplage fort. L'expression du facteur de proportionnalité de la CPP doit être modifiée pour appliquer la SEA avec cette force de couplage.

Les observations faites à partir d'un système discret (les trois oscillateurs du chapitre 5) sont confirmées avec l'exemple des trois plaques. Deux régimes de couplage ont été mis en évidence. Pour des valeurs de couplage faible la formule des CLF est valide et la SEA donne des estimations correctes. En revanche, pour des couplages forts la formule (7.14) ne s'applique pas et la SEA ne donne pas de résultats satisfaisants.

Méthode inverse

La méthode des puissances injectées est utilisée pour étudier les effets du couplage sur la matrice des CLF. Les trois plaques sont excitées une à une par 100 forces aléatoires décorréelées tandis que le couplage $K_{AB} = K_{BC} = K$ varie de 10^4 à 10^8 N/m . Les résultats sont présentés par le tableau 7.8 et la figure 7.6 où, pour une meilleure compréhension, seule une partie des données est représentée. Par ailleurs, les valeurs des CLF prescrites par la SEA (formule (7.14)) sont ajoutées et renommées $\eta_{ij,SEA}$.

D'après le tableau 7.8, la relation de réciprocité ($\eta_{12} = \eta_{21}$ et $\eta_{23} = \eta_{32}$) est valide quelle que

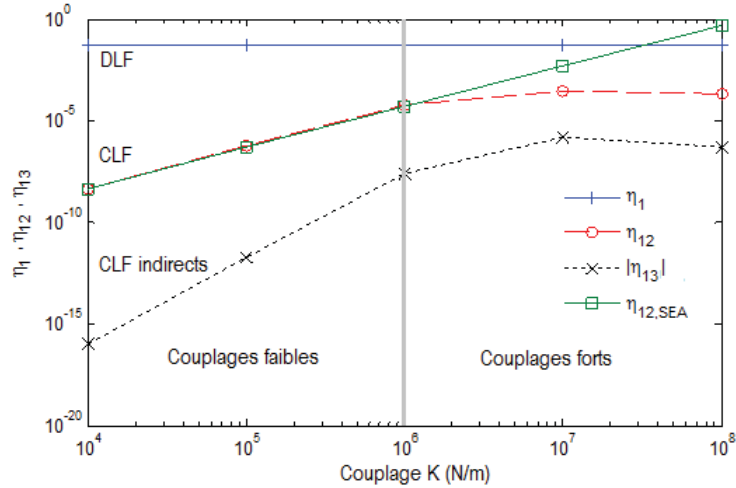


FIGURE 7.6 – Exemples de DLF, CLF et CLF indirects calculés par la méthode d’identification non contrainte (PIM) et un CLF donné par la SEA en fonction du couplage $K = K_{AB} = K_{BC}$. *Examples of DLF, CLF and indirect CLF from the non-constrained technique (PIM) and a coupling loss factors from SEA versus the coupling strength $K = K_{AB} = K_{BC}$.*

K_{ij}	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
η_1	0.019	0.019	0.018	0.019	0.020
η_{12}	4.67e-09	4.81e-07	5.70e-05	0.00021	0.00018
η_{13}	3.82e-16	1.90e-12	-1.36e-07	-6.05e-07	-1.56e-08
η_{21}	5.01e-09	5.64e-07	5.92e-05	0.00018	0.00020
η_2	0.016	0.015	0.015	0.015	0.016
η_{23}	5.44e-09	5.57e-07	0.00010	0.00029	0.00023
η_{31}	-3.30e-18	-1.21e-12	-8.21e-09	5.67e-07	5.62e-08
η_{32}	5.46e-09	4.35e-07	4.80e-05	0.00015	0.00017
η_3	0.023	0.021	0.024	0.023	0.022
$\eta_{12,SEA}$	4,769e-09	4,769e-07	4,769e-05	0,0048	0,477
$\eta_{21,SEA}$	5,390e-09	5,390e-07	5,390e-05	0,0054	0,539
$\eta_{23,SEA}$	5,390e-09	5,390e-07	5,390e-05	0,0054	0,539
$\eta_{32,SEA}$	4,465e-09	4,465e-07	4,465e-05	0,0045	0,446

Tableau 7.8 – Résultats de la technique d’identification non contrainte (PIM) et les CLF donnés par la SEA en fonction du couplage $K = K_{AB} = K_{BC}$. *Results of the non constrained identification technique (PIM) and the CLF given by SEA with respect to the coupling strength $K = K_{AB} = K_{BC}$.*

soit la force de couplage. Les DLF estimés par la PIM et ceux paramétrés ($\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.02$) sont analogues. D’autre part on prend la valeur absolue des CLF indirects pour pouvoir les comparer aux autres CLF.

D’après la figure 7.6, les deux régimes de couplage apparaissent et peuvent être séparés par une ligne verticale : les couplages faibles (de $K = 10^4$ N/m à $K < 10^6$ N/m) et les couplages forts (pour $K \geq 10^6$ N/m).

Pour des conditions de couplage faible les DLF restent constants mais les CLF évoluent si-

gnificativement (de 10^{-9} à 10^{-3}). Les CLF indirects (ligne de pointillés) sont très faibles devant les autres CLF (ligne en tirets) : jusqu'à 90 dB en dessous des CLF à $K = 10^4 \text{ N/m}$ et 40 dB à $K = 10^6 \text{ N/m}$. Ils sont donc négligeables.

Pour le régime de couplage fort les DLF, CLF et CLF indirects sont quasiment constants. Ils n'évoluent plus et deviennent indépendants de la force de couplage. L'écart entre les CLF indirects et les CLF directs est nettement moins marqué.

Les CLF donnés par la SEA évoluent linéairement avec la force de couplage. D'après la figure 7.6, $\eta_{12,SEA}$ coupe η_1 à $K = 3 \times 10^7 \text{ N/m}$. Si on définit la valeur seuil à $K = 10^6 \text{ N/m}$ le critère de Smith [103] est vérifié.

Dans cet exemple les CLF indirects apparaissent comme on a pu le constater avec l'exemple des trois oscillateurs couplés du chapitre 5. Deux régimes de couplage ont été mis en valeur par la technique non contrainte. Pour des couplages faibles, les CLF indirects sont négligeables devant les CLF et les DLF. La SEA, qui les fixe à zéro, est applicable. Au dessus d'une valeur seuil, les raideurs se comportent comme des liens rigides et les CLF ne varient plus. Les CLF indirects sont faibles car les couplages, même forts, sont localisés. Ils ne s'appliquent qu'en un point (ou deux) de chaque plaque. Ils suffisent tout de même à mettre en échec la CPP.

7.2.5 Étude des hypothèses de champ diffus, de couplage faible, d'équipartition de l'énergie et de *rain-on-the-roof*

On s'intéresse aux hypothèses de champ diffus, d'équipartition de l'énergie modale, d'excitation *rain-on-the-roof* et de couplage faible. On teste différentes configurations et pour tous les cas on fixe $f_c = 2 \text{ kHz}$. Les résultats des 8 essais sont présentés dans les tableaux 7.9 et 7.10.

Dans les six premiers tests, seule la plaque *A* est excitée. Dans les deux derniers tests, c'est uniquement la plaque *B* qui est excitée.

Lorsque qu'une plaque est excitée par une seule force ponctuelle (directement ou indirectement via les raideurs) et que son amortissement est fort (fixé à $\eta = 0.1$ qui correspond à un champ direct d'après la figure 3.3), alors l'hypothèse de champ diffus n'est pas respectée. Dans ce cas, la case *Champ diffus* prend la valeur *non*. Dans le cas contraire, cela signifie que la plaque est soit excitée par un *rain-on-the-roof*, soit excitée par une force ponctuelle et son amortissement est faible (fixé à $\eta = 0.02$). La case *Champ diffus* prend la valeur *oui*.

Dès que l'on applique une excitation *rain-on-the-roof* (en pratique 100 excitations), la case *Equipartition* prend la valeur *oui* conformément aux conclusions du chapitre 4.

Enfin, la case *Couplage* prend la valeur *faible* quand la raideur K_{12} ou K_{23} est égale à 10^4 N/m . Dans le cas contraire, la raideur est fixée à 10^7 N/m et la case prend la valeur *fort*. Ceci est déterminé afin d'être cohérent avec l'étude de la section précédente.

A la vue de ces essais, il ressort que

- La SEA ne fonctionne pas si aucune des hypothèses n'est respectée.

Essais	Hypothèses	A	B	C	$\Delta_{AB,SEA-REF}$	$\Delta_{BC,SEA-REF}$	SEA
1	Champ diffus	oui	oui	oui	2.62 dB	2.97 dB	OK
	Équipartition	oui	non	non			
	Rain on roof	oui	non	non			
	Couplage	faible		faible			
2	Champ diffus	oui	oui	oui	1.54 dB	3.75 dB	OK
	Équipartition	non	non	non			
	Rain on roof	non	non	non			
	Couplage	faible		faible			
3	Champ diffus	oui	oui	non	2.04 dB	2.64 dB	OK
	Équipartition	oui	non	non			
	Rain on roof	oui	non	non			
	Couplage	faible		faible			
4	Champ diffus	oui	oui	oui	26.28 dB	28.70 dB	NO
	Équipartition	oui	non	non			
	Rain on roof	oui	non	non			
	Couplage	fort		faible			

Tableau 7.9 – Essais 1 à 4 sur le réseau de trois plaques couplées. *Tests 1 to 4 on the coupled plates network.*

- Les tests 4 et 5 montrent que lorsque l'hypothèse de couplage faible n'est pas respectée cela fait automatiquement échouer la SEA.
- L'hypothèse de *rain-on-the-roof* implique l'hypothèse d'équipartition de l'énergie modale et l'hypothèse de champ diffus. Cela conforte les conclusions des chapitres 3 et 4.
- La SEA peut fonctionner si les sous-systèmes indirectement excités ne respectent pas l'hypothèse d'équipartition de l'énergie modale (ou encore l'hypothèse de *rain-on-the-roof*) (cf tests 1,2,3,7 et 8).
- L'hypothèse de champ diffus doit être vérifiée dans tous les sous-systèmes pour appliquer la SEA. Dans le cas contraire elle échoue (cf tests 1,2,6 et 7).
- La SEA peut éventuellement donner des prédictions correctes lorsque certains sous-systèmes ne respectent pas l'hypothèse de champ diffus. Dans ce cas, le sous-système qui ne respecte pas l'hypothèse est le dernier indirectement excité par un sous-système qui la respecte (cf tests 3 et 8).

Essais	Hypothèses	A	B	C	$\Delta_{AB,SEA-REF}$	$\Delta_{BC,SEA-REF}$	SEA
5	Champ diffus	oui	oui	oui	3.87 dB	25.13 dB	NO
	Équipartition	oui	non	non			
	Rain on roof	oui	non	non			
	Couplage	faible		fort			
6	Champ diffus	oui	non	non	2.52 dB	12.45 dB	NO
	Équipartition	oui	non	non			
	Rain on roof	oui	non	non			
	Couplage	faible		faible			
7	Champ diffus	oui	oui	oui	0.83 dB	1.20 dB	OK
	Équipartition	non	oui	non			
	Rain on roof	non	oui	non			
	Couplage	faible		faible			
8	Champ diffus	non	oui	non	1.32 dB	0.21 dB	OK
	Équipartition	non	oui	non			
	Rain on roof	non	oui	non			
	Couplage	faible		faible			

Tableau 7.10 – Essais 5 à 8 sur le réseau de trois plaques couplées. *Tests 5 to 8 on the coupled plates network.*

7.3 Conclusion

Quelques résultats ont fait l'objet de publications. L'étude portant sur les hypothèses de champ diffus et d'équipartition de l'énergie sur deux plaques couplées est présentée en section 5 de la référence [76]. D'autre part, les résultats de l'étude de l'hypothèse du couplage faible sur l'exemple de trois plaques couplées sont commentés en section 3 de la référence [100].

Ce chapitre a permis d'illustrer les résultats des chapitres précédents sur deux exemples de plaques couplées. Les principales conclusions sont les suivantes :

- L'hypothèse de *rain-on-the-roof* est équivalente à l'hypothèse d'équipartition de l'énergie modale (sous réserve d'avoir un amortissement Δ constant).
- l'hypothèse de *rain-on-the-roof* est aussi liée à l'hypothèse de champ diffus. La première implique la seconde.
- Le champ diffus est une condition pour appliquer la SEA sur un système comportant

plus de deux sous-systèmes. L'hypothèse doit être vérifiée par tous les sous-systèmes.

- L'équipartition de l'énergie n'est pas nécessaire pour appliquer la SEA. C'est plutôt rassurant car il aurait fallu que tous les sous-systèmes soient excités par un *rain-on-the-roof*.
- L'hypothèse de couplage faible est nécessaire à partir de trois sous-systèmes. Un couplage fort provoque une émergence de CLF indirects et fait échouer la CPP. La SEA n'est pas applicable dans ce cas.

Conclusion générale et perspectives

General conclusions and some extensions propositions

Statistical energy analysis is a statistical approach of vibroacoustics which describes complex systems in terms of vibrating and acoustical energies. In the high frequency range, this method constitutes an alternative to bypass the problems which can arise when applying deterministic methods. But its use requires the knowledge and the fulfillment of strong assumptions which restrict its domain of application.

In this thesis, the foundations of SEA have been examined in order to discuss each assumption. Diffuse field, equipartition of modal energy, weak coupling, the influence of non resonant modes and the rain-on-the-roof excitation are the five took up hypotheses. Their equivalence and their influence on the results quality have been discussed to contribute to the clarification of the necessary assumptions to apply properly SEA. The industrial applications with SEA have often been disappointing because of the violation of some hypotheses.

Two criteria, a diffuse field criterion and a modal energy equipartition criterion, have been introduced with the example of a simply supported plate excited by a single random point force. A diffuse field is found possible for small damping and in the high frequency range. From a modal point of view, the conditions to have a diffuse field are the following : a large number of modes $N \gg 1$, a small attenuation factor $m \ll 1$ and a large modal overlap $M \gg 1$. Furthermore, the examples showed that a rain-on-the-roof excitation implies a diffuse field. On the contrary, a single point excitation causes either a modal field or a direct field or a diffuse field. It depends on the damping and frequency conditions.

An interesting result has been demonstrated : the equipartition of modal energy is foreseeable when a rain-on-the-roof excitation (which implies a constant power injected for all modes) and a half power bandwidth damping (constant dissipation for each mode) are gathered.

In this way, the rain-on-the-roof hypothesis is equivalent to modal energy equipartition hypothesis. Furthermore, a rain-on-the-roof imposes a diffuse field in the subsystem. Another conclusion is that the rain-on-the-roof hypothesis implies the diffuse field hypothesis. It has an

interesting practical implication : imposing a rain-on-the-roof strictly implies the fulfillment of the modal energy equipartition assumption and the diffuse field assumption. This is good news because the two latter assumptions are not easily verified for industrial applications.

The weak coupling hypothesis is present for both SEA approaches, modal and wave. This assumption is necessary when a system is divided up in two subsystems or more. The example of three coupled oscillators has showed that indirect coupling loss factor appear further to strong coupling. These CLF are not taken into consideration by proper-SEA. In this case, SEA gives wrong results and may overestimate the energy transfers. Consequently, the weak coupling assumption is unavoidable to apply SEA.

The hypothesis of resonant modes (or the influence of non resonant modes) is needed to use SEA on continuous systems. Practically, this assumption allows to compute the integral over a finite bandwidth $\Delta\omega$. The conclusions from the study of the influence of non resonant modes are the following : if some modes are non resonant, indirect coupling loss factor appear but not in a significant manner. They provoke the disequilibrium of the reciprocity relationship, which is no more verified.

In the literature, a large number of articles make a discussion about SEA based on industrial examples. The conclusions are usually difficult because sometimes these examples reach the limit of the applicability of SEA. It is hard to say if the theory fails or if the system is not compatible with theory. This thesis provides simple examples to make impartial and useful conclusions.

In this thesis, we have chosen to analyze the validity domains of some assumptions and the consequences on the quality of the results when one is violated. Some hypotheses, like conservative coupling or small damping, have not been broached. It is an intentional choice. It could be interesting in future investigations to use a similar approach for the study of these two assumptions.

We have tried, throughout the dissertation, to illustrate with simple examples these conclusions which may have repercussions on SEA applicability on complex systems. Moreover, we have tried to define guidelines. In the last chapter we have initiated the study on multimodal systems, more complicated than coupled oscillators. We stayed, nonetheless, far from industrial cases. An extension would be the analysis thanks to the ratios of diffuse field and modal energy equipartition of complex systems. Are curves and stamping an obstacle to diffuseness? Is the use of rain-on-the-roof excitation in that case a mean to improve the results? What is, practically speaking, a rain-on-the-roof excitation? Rochambeau [113] has shown that a troubled flow can behave like a rain-on-the-roof because it has small spatial correlations. Are other cases conceivable? In the thesis we have observed that an excitation is a rain-on-the-roof if a sufficient stress density is employed. Is it possible to define a corresponding rule?

Finally one has observed that a lot of hybrid methods have been derivated from the SEA model. Each of them try to extend the validity domain of the original method. It would be interesting to analyze some of these methods on the basis of the present study. SmEdA [48] (or

MODENA [49]) has a larger validity domain than SEA. What are the equivalences between the hypotheses in that cases ?

La méthode SEA (Statistical Energy Analysis) est une approche statistique de la vibro-acoustique permettant de décrire les systèmes complexes en termes d'échanges d'énergies vibratoires et acoustiques. En moyennes et hautes fréquences, cette méthode se présente comme une alternative aux méthodes déterministes. Néanmoins, son utilisation requiert la connaissance et le respect d'hypothèses fortes qui limitent son domaine d'application.

Dans ce mémoire, les fondements de la SEA ont été examinés afin de discuter chaque hypothèse. Le champ diffus, l'équipartition de l'énergie modale, le couplage faible, l'influence des modes non résonants et l'excitation *rain-on-the-roof* sont les cinq hypothèses qui ont été abordées. Les équivalences et leurs influences sur la qualité des résultats ont été discutées pour contribuer à la clarification des hypothèses nécessaires à l'application de la SEA et pour borner son domaine de validité. Les applications industrielles parfois décevantes l'ont souvent été à cause d'hypothèses non respectées.

Des critères de champ diffus et d'équipartition de l'énergie modale ont été établis sur la base de l'exemple d'une plaque en appui simple soumise à une excitation ponctuelle aléatoire. Il a été démontré qu'un champ diffus est possible pour des faibles amortissements et en hautes fréquences. D'un point de vue modale, les conditions d'établissement d'un champ diffus dans la plaque sont : un nombre de modes élevé $N \gg 1$, un facteur d'atténuation faible $m \ll 1$ et un recouvrement modal fort $M \gg 1$. Par ailleurs, les exemples présentés ont montré qu'une excitation de type *rain-on-the-roof* appliquée sur une plaque induit forcément un champ diffus. Ce n'est pas vrai dans le cas d'une seule excitation qui génère, suivant les conditions d'amortissement et de fréquences, un champ modal (basses fréquences, faibles amortissements), un champ direct (hautes fréquences, forts amortissements) ou même un champ diffus (hautes fréquences, faibles amortissements).

Un résultat intéressant a été démontré : l'équipartition de l'énergie modale est atteinte lorsque l'on associe une excitation *rain-on-the-roof* (qui induit une puissance injectée constante sur chaque mode) et un modèle d'amortissement à bande passante constante (qui induit une dissipation constante sur chaque mode).

Ainsi, dans ce cas, l'hypothèse de l'excitation de type *rain-on-the-roof* est équivalente à l'hypothèse d'équipartition de l'énergie modale. D'autre part, l'excitation *rain-on-the-roof* impose un champ diffus dans le sous-système. Cela amène à conclure que l'hypothèse *rain-on-the-roof* implique que l'hypothèse de champ diffus est vérifiée.

Cette conclusion a une implication pratique intéressante : imposer des excitations *rain-on-the-roof* implique obligatoirement le respect des hypothèses d'équipartition de l'énergie modale et de champ diffus, qui sont des hypothèses difficiles à vérifier sur une application industrielle.

L'hypothèse de couplage faible apparaît dans les approches modale et ondulatoire de la SEA. Elle est nécessaire lorsque le système est découpé en trois sous-systèmes ou plus. L'utilisation du modèle de trois oscillateurs a montré que la conséquence d'un couplage fort est l'apparition notable de CLF indirects non pris en compte dans le bilan d'énergie de la SEA. Dans ce cas, la méthode donne des résultats erronés et a tendance à surestimer les transferts d'énergie. L'hypothèse de couplage faible est, par conséquent, incontournable pour appliquer correctement la SEA.

L'hypothèse des modes résonants est nécessaire pour une application de la SEA sur des systèmes continus. Elle permet de ramener le calcul des intégrales sur un intervalle fini, $\Delta\omega$. Les conclusions liées à l'influence des modes non résonants sur la qualité des prédictions de la SEA sont les suivantes : si un ensemble de modes est non résonant alors des couplages indirects apparaissent mais de manière non significative et ils provoquent un déséquilibre de la relation de réciprocité, qui n'est plus vérifiée.

De nombreux textes mènent une discussion de la SEA sur la base d'exemples industriels. Les conclusions sont, dans ces cas, difficiles car bien souvent ces exemples sont à la marge de l'applicabilité de la SEA. On ignore si c'est la théorie qui échoue ou si c'est le système qui n'est pas adapté à la théorie elle-même. Dans ce mémoire on a choisi des exemples simples pour tirer des conclusions objectives et utiles.

Nous avons fait le choix, dans ce mémoire, d'analyser les domaines de validité de certaines hypothèses et les implications de leur non-respect sur la qualité des résultats SEA par rapport à des calculs exacts. Certaines hypothèses telles que le couplage conservatif n'ont pas été abordées dans ce travail. C'est un choix délibéré mais il pourrait être intéressant, dans des investigations futures, d'utiliser la même démarche pour l'étude de ces hypothèses.

Nous avons essayé, tout au long des chapitres, d'illustrer par des exemples simples des conclusions qui peuvent avoir des répercussions sur l'applicabilité de la SEA sur des systèmes plus complexes. Nous avons tenté d'en définir des guides. Dans la dernière partie de ce mémoire, nous avons initié l'étude de systèmes multi-modaux plus complexes que de simples oscillateurs couplés. Toutefois, nous sommes restés loin des applications industrielles. Une des perspectives à ce travail est l'analyse, notamment grâce aux indicateurs de champ diffus et d'équipartition de l'énergie modale, de systèmes à géométrie complexe. Par exemple, les courbures et emboutissages souvent présents sur ces systèmes sont-ils des freins à l'établissement d'un champ diffus ? L'utilisation d'excitations *rain-on-the-roof* permet-elle d'améliorer les résultats dans ces cas là ? D'ailleurs, qu'est-ce que, en pratique, une excitation *rain-on-the-roof* ? Rochambeau [113] a démontré qu'un écoulement turbulent peut se comporter comme une excitation *rain-on-the-roof* notamment grâce à ses faibles corrélations spatiales. D'autres cas sont-ils envisageables ? Dans notre étude, nous avons démontré qu'une excitation est de type *rain-on-the-roof* si l'on utilise une densité d'effort décorrélés suffisante. Existe-t'il une règle clairement définissable ?

Enfin de nombreuses méthodes dites *hybrides* ont été développées pour tenter d'étendre le

domaine de validité de la SEA. Il serait intéressant d'analyser, sur la base de la présente étude, d'autres méthodes. La méthode SmEdA [48] (voire la méthode MODENA [49]) notamment a un domaine de validité plus large. Quelles sont les équivalences des hypothèses dans ces cas là ?

Glossaire

La thèse emploie différents termes qu'il est nécessaire de définir. C'est l'objet de ce glossaire.

- Mode : On peut définir un mode de deux manières : mathématiquement et physiquement. La première consiste à dire que les modes propres d'un système constituent un artifice mathématique de décomposition, une base de fonctions orthogonales. Toute réponse du système à une perturbation externe peut se développer sur cette base sous réserve que celui-ci ne soit pas amorti². Physiquement, un mode propre n est caractérisé par un maxima de résonance. On lui associe une fréquence propre f_n et une déformée propre ψ_n .
- Mode résonant : En SEA, un mode n est *résonant* si sa fréquence propre f_n est comprise dans la bande de fréquence d'excitation $[f_{min}; f_{max}]$. A l'inverse il sera appelé *mode non résonant*.
- Approche modale : L'approche modale de la SEA assimile les modes vibratoires ou acoustiques comme des systèmes masse-ressort.
- Approche ondulatoire : L'approche ondulatoire de la SEA est une approche par tirs de rayons.
- Mode libre : Un mode libre est, dans l'approche modale, assimilé à un oscillateur de masse m et de raideur k non couplé et non amorti. On donne ci-dessous une représentation schématique.

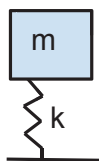


FIGURE 7.7 – Schéma d'un mode libre dans l'approche modale de la SEA. *Sketch of a free mode in the modal approach of SEA.*

- Mode couplé : Un mode couplé à un autre est représenté par un oscillateur de masse m et de raideur k couplé à un autre par un terme de couplage conservatif (figure 7.8).
- Mode bloqué : Un mode bloqué est assimilé à un oscillateur non amorti couplé à un oscillateur bloqué. La figure 7.9 en donne une représentation schématique.

2. C'est d'ailleurs en cela que c'est un artifice mathématique

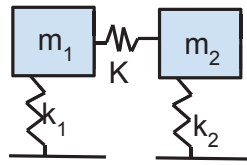


FIGURE 7.8 – Schéma d'un mode couplé dans l'approche modale de la SEA. *Sketch of a coupled mode in the modal approach of SEA.*

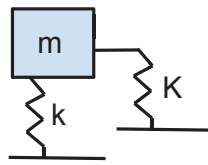


FIGURE 7.9 – Schéma d'un mode bloqué dans l'approche modale de la SEA. *Sketch of a blocked mode in the modal approach of SEA.*

- Énergie découplée : L'énergie découplée est l'énergie d'un système lorsqu'on supprime tous les couplages.
- Champ diffus : Un champ diffus en acoustique des salles est défini par un champ à la fois homogène et isotrope. Les ondes arrivent de toutes les directions et l'intensité acoustique est la même en tout point. D'autres définitions sont possibles. Elles sont données au chapitre 3.
- Équipartition de l'énergie modale : L'équipartition de l'énergie modale en SEA signifie que tous les modes ont la même énergie.
- Ergodicité : Respecter la propriété d'ergodicité signifie que les moyennes d'ensemble sont égales aux moyennes temporelles. L'ergodicité permet de montrer par des rayons (et non plus par des modes) qu'on respecte approximativement le champ diffus.
- Un mélange : Le phénomène de mélange est lié à la théorie des rayons. Il est caractérisé par le fait, qu'au bout d'un certain temps (qui dépend de la précision de l'information), l'information sur le point de départ est perdue.
- Système chaotique : un système chaotique est un système à la fois ergodique et mélangeant.

Annexe A

Démonstrations du chapitre 2

Cette annexe comporte le détail des calculs de l'équation (2.33). On s'intéresse à

$$\langle w_{i,0}\dot{w}_{j,1} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{w_{i,0}\dot{w}_{j,1}}(\omega) d\omega \quad (\text{A.1})$$

où $w_{i,0}$ est la sortie du système linéaire de fonction de transfert h_i et d'entrée f_i ; $\dot{w}_{j,1}$ est dérivée temporelle de la sortie $w_{j,1}$ du système linéaire de fonction de transfert h_i et d'entrée $\sum_{l \neq j} \alpha_{jl}(w_{l,0} - w_{j,0})$. Avec les propriétés (2.10) on écrit

$$S_{w_{i,0}\dot{w}_{j,1}} = \sum_{l \neq j} H_i^*(\omega) j\omega H_j(\omega) (\alpha_{jl} S_{f_i, w_{l,0}} - \alpha_{jl} S_{f_i, w_{j,0}}) \quad (\text{A.2})$$

avec $w_{l,0}$ la sortie du système linéaire de fonction de transfert h_l et d'entrée f_l . Soit aussi

$$S_{w_{i,0}\dot{w}_{j,1}} = \sum_{l \neq j} H_i^*(\omega) j\omega H_j(\omega) (\alpha_{jl} H_l S_{f_i, f_l} - \alpha_{jl} H_j S_{f_i, f_j}) \quad (\text{A.3})$$

Or $S_{f_i, f_j} = 0$ pour tous les termes $l \neq j$, l'indice $l = i$ est le seul pour lequel $S_{f_i, f_l} \neq 0$. Soit

$$S_{w_{i,0}\dot{w}_{j,1}} = \alpha_{ij} |H_i(\omega)|^2 j\omega H_j(\omega) \quad (\text{A.4})$$

On parvient au même résultat en interchangeant les indices i et j . Les relations (2.33) sont ainsi retrouvées.

Annexe B

Comparatif entre le calcul de référence et deux calculs par les éléments finis.

Dans l'équation (3.8), l'espérance de l'énergie locale $\langle e(x, y, t) \rangle$ est considérée comme deux fois l'énergie cinétique. Localement on fait une approximation forte car l'énergie cinétique et l'énergie élastique ne sont pas égales. On réalise une modélisation en éléments finis de la plaque rectangulaire pour clarifier cette question et valider le calcul analytique.

Le matériaux, les dimensions, la position de l'excitation sont respectés et les calculs sont exécutés sur LVAPC303 (Annexe D) jusqu'à 2 kHz (le temps de calcul est d'environ 50 min). Le pas fréquentiel est conservé et le maillage respecte un critère en $\lambda/6$. Les énergies cinétiques (E_k) et les énergies élastiques (E_s) sont extraites pour chaque élément et chaque fréquence. Le ratio du champ diffus σ_d est calculé pour un amortissement donné ($\eta = 0.001$) et pour :

- un cas où l'énergie totale est considérée comme deux fois l'énergie cinétique (Calcul 1 : $e = 2 \times E_k$)
- un cas où l'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique et l'énergie élastique (Calcul 2 : $e = E_k + E_s$).

La figure B.1 présente un comparatif entre le calcul analytique et le calcul par les éléments finis.

Le calcul analytique et le calcul 1 ($e = 2 \times E_k$) s'accordent à partir de $f_c = 250$ Hz. Le calcul 2, le plus approprié, converge plus rapidement vers 0. Prendre l'espérance comme deux fois l'énergie cinétique ne va pas dans le sens d'une meilleure homogénéité. Au contraire on ne favorise pas le champ à être diffus. Ainsi, les discussions menées restent correctes.

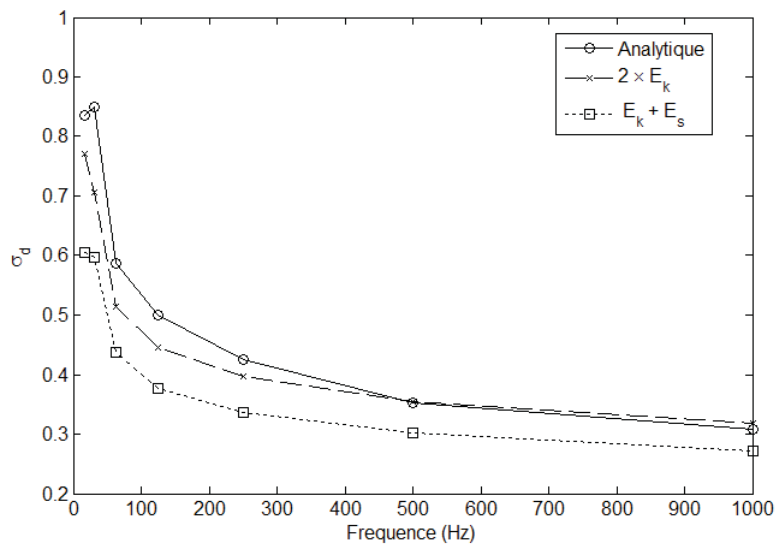


FIGURE B.1 – Calcul du ratio σ_d : comparatif entre le calcul analytique et deux calculs par les éléments finis à $\eta = 0.001$ pour les sept premières fréquences centrales. *Diffuse field ratio computation : comparison between analytic computation and two computations from the finite element method at $\eta = 0.001$ for the seventh first center frequencies.*

Annexe C

Étude de convergence

Cette annexe présente l'étude de convergence réalisée pour déterminer le pas fréquentiel et la discrétisation spatiale (nombre de récepteurs sur la plaque) optimum. Ces deux paramètres interviennent dans le calcul analytique (équation (3.11)). Le nombre de récepteurs nécessite d'être suffisamment important pour estimer les espérances des énergies locales en hautes fréquences (figure C.1(a)). L'échantillonnage fréquentiel doit être fin de manière à détecter les pics notamment pour des simulations en conditions de forts amortissements (figure C.1(b)).

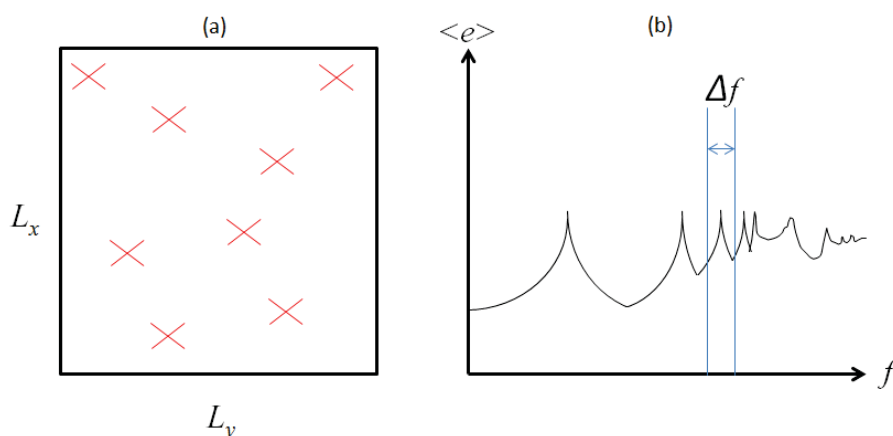


FIGURE C.1 – Discrétisation spatiale et fréquentielle, deux paramètres nécessaires au calcul de l'espérance de l'énergie locale. *Spatial (number of receivers) and frequential (frequency step) discretization, two parameters for the computation of local energy expectation.*

Il est donc nécessaire de distinguer quatre cas :

- basses fréquences ($f_c = 63Hz$) & faible amortissement ($\eta = 2 \times 10^{-4}$)
- basse fréquences ($f_c = 63Hz$) & fort amortissement ($\eta = 2 \times 10^{-1}$)
- hautes fréquences ($f_c = 8kHz$) & faible amortissement ($\eta = 2 \times 10^{-4}$)
- hautes fréquences ($f_c = 8kHz$) & fort amortissement ($\eta = 2 \times 10^{-1}$)

L'estimation du pas fréquentiel et du nombre de récepteurs se fait par rapport à des valeurs de référence. Pour un récepteur, le pas fréquentiel de référence est fixé à $\eta f_{max}/10$ et l'espérance de l'énergie locale est dans ce cas notée $\langle e_{REF} \rangle$.

Plusieurs valeurs dégressives de pas fréquents sont testées. Pour chaque cas, l'espérance de l'énergie locale $\langle e \rangle$ est calculée et comparée à la valeur de référence $\langle e_{REF} \rangle$ par le ratio $\langle e \rangle / \langle e_{REF} \rangle$. Le tableau C.1 présente les résultats. Il en ressort que le pas fréquentiel

Cas d'étude		$\eta f_{max}/10$	$\eta f_{max}/8$	$\eta f_{max}/6$	$\eta f_{max}/4$	$\eta f_{max}/2$
BF ; η faible	$\langle e \rangle / \langle e_{REF} \rangle$	1.000000	0.999989	0.999990	0.999806	0.996199
BF ; η fort	$\langle e \rangle / \langle e_{REF} \rangle$	1.000000	0.999875	0.999424	0.995764	0.940975
HF ; η faible	$\langle e \rangle / \langle e_{REF} \rangle$	1.000000	0.999995	0.999988	1.000032	1.000540
HF ; η fort	$\langle e \rangle / \langle e_{REF} \rangle$	1.000000	1.001528	1.003621	1.005629	0.933911

Tableau C.1 – Étude de convergence du pas fréquentiel. *Convergence study of the frequency step.*

optimal est $\eta f_{max}/4$. L'erreur commise, dans le cas le plus défavorable, reste convenable (0.5% en HF et fort amortissement).

Pour la discrétisation spatiale, la valeur de référence est fixée à 80000 récepteurs. Le ratio σ_d obtenu pour cette discrétisation est noté $\sigma_{d,REF}$. Il est comparé avec les ratios de champ diffus σ_d qui sont calculés pour plusieurs nombres de récepteurs. La tableau C.2 présente les résultats

Cas d'étude		80000	50000	30000	5000	1000
BF ; η faible	$\sigma_d / \sigma_{d,REF}$	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
BF ; η fort	$\sigma_d / \sigma_{d,REF}$	1.000000	1.000000	1.000000	0.996380	1.021336
HF ; η faible	$\sigma_d / \sigma_{d,REF}$	1.000000	1.000000	1.000000	1.262206	1.782203
HF ; η fort	$\sigma_d / \sigma_{d,REF}$	1.000000	1.001528	1.003621	1.005629	0.933911

Tableau C.2 – Étude de convergence du nombre de récepteurs. *Convergence study of the number of receivers.*

On retient une discrétisation de 30000 récepteurs (soit aussi 1.7 récepteur / cm^2).

Annexe D

Caractéristiques des machines de calcul

PC	Laboratoire	OS	Nbr CPU	Type	Nbr Cœurs	RAM
NVF7	LTDS	Ubuntu 12.04	2	Intel Xeon @ 3.10GHz	16	64GB
LVAPC46	LVA	Windows Server	1	Intel Xeon @ 2.67GHz	6	24GB
LVAPC303	LVA	Windows Server	1	Intel i7 @ 3.40GHz	12	64GB
LVA7	LVA	Windows Server	1	Intel i7 @ 3.20GHz	12	64GB

Tableau D.1 – Caractéristiques PC. *PC features.*

Annexe E

Billards : Illustrations de quelques trajectoires cycliques

Dans cette annexe, la figure E.1 présente des cas de trajectoires cycliques pour trois différents billards.

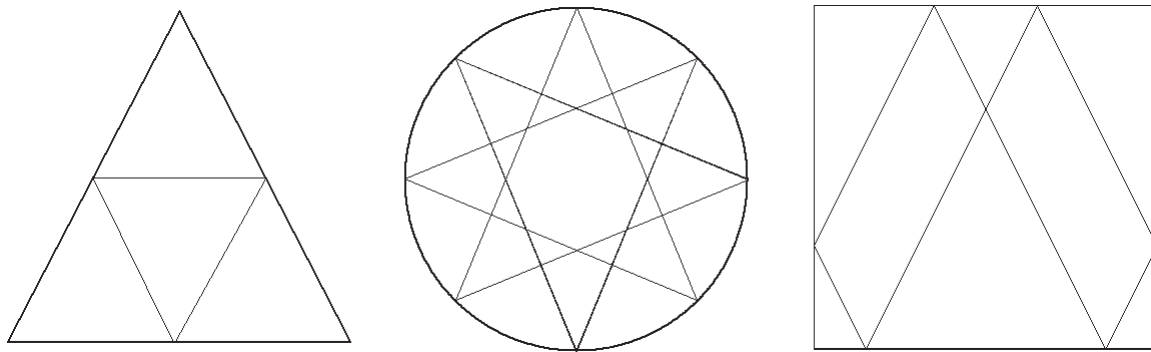


FIGURE E.1 – Illustrations de trajectoires cycliques dans un billard triangulaire (équilatéral), circulaire et rectangulaire. *Illustrations of some cyclic paths for an equilateral triangular billiard, a circular billiard and a rectangular billiard.*

Dans une trajectoire cyclique le rayon, après n réflexions, retrouve sa position de départ et repart suivant la même direction qu'initialement. Dans ce cas, la densité de rayons n'est plus la même en tout point ni en toutes directions. Ces trajectoires conduisent à des répartitions qui ne sont ni homogènes ni isotropes.

Annexe F

Distribution de l'énergie modale pour une force excitatrice dans le cas d'un amortissement Δ constant.

Dans cette annexe, on s'intéresse à la distribution de l'énergie modale de la plaque rectangulaire excitée par une force ponctuelle aléatoire. On considère le modèle d'amortissement Δ constant et reprend les deux cas de tests :

- Un cas où le champ direct domine : $f_c = 4kHz$ ($\kappa = 14.63$), $\eta = 0.1$.
- Un cas de champ diffus : $f_c = 4kHz$ ($\kappa = 14.63$), $\eta = 0.001$.

La figure F.1 présente les résultats :

Comme pour le modèle d'amortissement visqueux, les énergies modales suivent une décroissance en $1/x$. L'énergie n'est pas équirépartie.

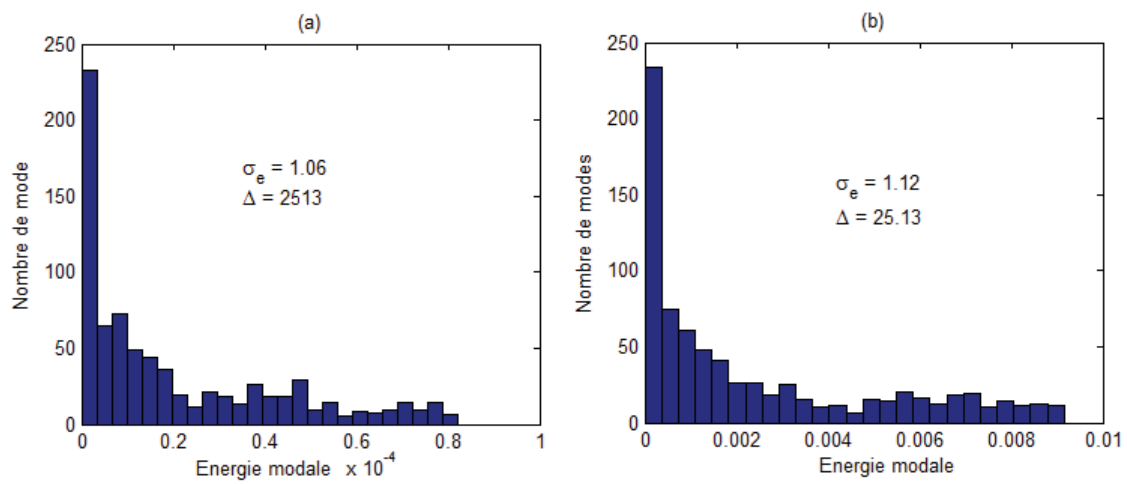


FIGURE F.1 – Distribution de l'énergie modale de la plaque rectangulaire soumise à une excitation aléatoire : figure (a) conditions de champ direct ($f_c = 4kHz$, $\kappa = 14.63$, $\eta = 0.1$ - point C) ; figure (b) conditions de champ diffus ($f_c = 4kHz$, $\kappa = 14.63$, $\eta = 0.001$ - point D). *Modal energy distribution of the simply supported rectangular plate excited by a single excitation : figure (a) conditions of direct field ($f_c = 4kHz$, $\kappa = 14.63$, $\eta = 0.1$, $\Delta = 2513$ - point C) ; figure (b) condition of diffuse field ($f_c = 4kHz$, $\kappa = 14.63$, $\eta = 0.001$, $\Delta = 25.13$ - point D).*

Annexe G

Distribution modale en basses fréquences

Pour les premières fréquences centrales ($16Hz$; $31.5Hz$; $63Hz$...) le nombre de modes reste faible. Même avec un très grand nombre d'excitations, quelques modes peuvent garder des énergies modales éloignées de la valeur moyenne. Pour un essai en basses fréquences ($f_c = 63Hz$), même si le modèle d'amortissement est dépendant de la fréquence ($\Delta = 3.95(\eta = 0.01)$) et que l'excitation est un rain-on-the-roof (100000 excitations) l'énergie ne sera pas parfaitement équirépartie ($\sigma_e = 0.1186$). La figure G.1 illustre les résultats d'un tel essai.

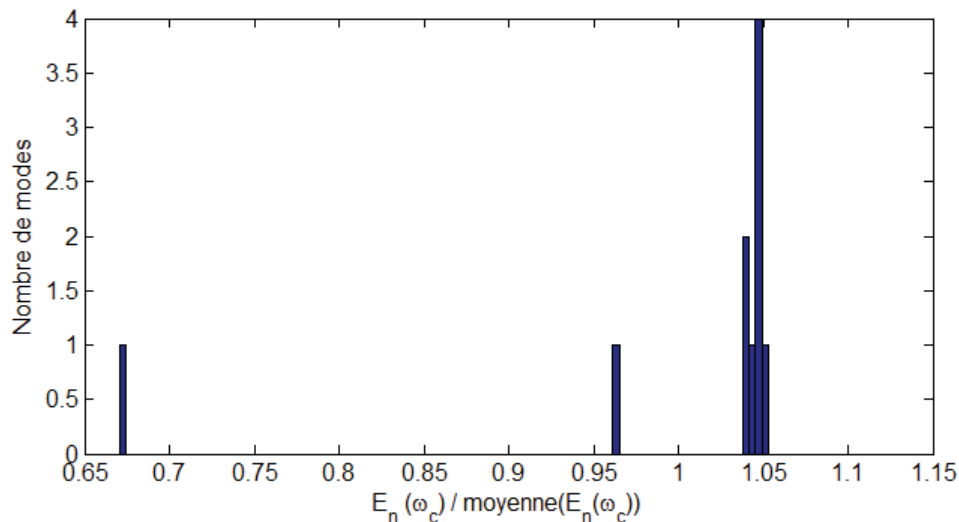


FIGURE G.1 – Distribution de l'énergie modale de la plaque rectangulaire soumise à 10^5 excitations aléatoires décorrélées pour $f_c = 63Hz$; $\eta = 0.01$; $\Delta = 3.9584$. *Distribution of modal energy of a rectangular plate excited by 10^5 uncorrelated random forces for $f_c = 63Hz$; $\eta = 0.01$; $\Delta = 3.9584$.*

Sur les 10 modes présents dans la bande de fréquence, 8 sont regroupés autour d'une même valeur, 2 ont des énergies différentes. Cette observation est due à la troncature de l'intégrale

$[-f_{min}; +f_{max}]$ au lieu de $[-\infty; +\infty]$. Le critère d'équipartition atteint une valeur limite (ici $\sigma_e \approx 0.1$). L'étude de l'équipartition en hautes fréquences permet de minimiser cette erreur.

Annexe H

Calcul des énergies locales et modales d'un réseau de 3 plaques

Pour ne pas alourdir le texte et dans un souci de complétude, le détail des calculs pour trois plaques couplées est développé dans cette annexe.

Soit trois plaques A , B et C couplées par des raideurs K_{AB} et K_{BC} . Les équations du mouvement s'écrivent

$$D\nabla^4 w_A(x, y, t) + m \frac{\partial^2 w_A(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t) + K_{AB}(w_B(x_{B1}, y_{B1}, t) - w_A(x_A, y_A, t))\delta(x - x_A, y - y_A), \quad (\text{H.1})$$

pour A

$$D\nabla^4 w_B(x, y, t) + m \frac{\partial^2 w_B(x, y, t)}{\partial t^2} = K_{AB}(w_A(x_A, y_A, t) - w_B(x_{B1}, y_{B1}, t))\delta(x - x_{B1}, y - y_{B1}) + K_{BC}(w_C(x_C, y_C, t) - w_B(x_{B2}, y_{B2}, t))\delta(x - x_{B2}, y - y_{B2}), \quad (\text{H.2})$$

pour B et

$$D\nabla^4 w_C(x, y, t) + m \frac{\partial^2 w_C(x, y, t)}{\partial t^2} = K(w_B(x_{B2}, y_{B2}, t) - w_C(x_C, y_C, t))\delta(x - x_C, y - y_C), \quad (\text{H.3})$$

pour C .

Comme pour deux plaques, pour déterminer les FRF G des plaques couplées on utilise les FRF H des plaques découplées.

$$\begin{aligned}
G^A(x, y; x_i, y_i, \omega) &= H^A(x, y; x_i, y_i; \omega) + H^A(x, y; x_A, y_A; \omega)K_{AB}[W^{B1}(x_i, y_i; \omega) - W^A(x_i, y_i; \omega)], \\
G^{B1}(x, y; x_{B1}, y_{B1}, \omega) &= H^{B1}(x, y; x_{B1}, y_{B1}; \omega)K_{AB}[W^A(x_i, y_i; \omega) - W^{B1}(x_i, y_i; \omega)], \\
G^{B2}(x, y; x_{B2}, y_{B2}, \omega) &= H^{B2}(x, y; x_{B2}, y_{B2}; \omega)K_{BC}[W^C(x_i, y_i; \omega) - W^{B2}(x_i, y_i; \omega)], \\
G^C(x, y; x_C, y_C, \omega) &= H^C(x, y; x_C, y_C; \omega)K_{BC}[W^{B2}(x_i, y_i; \omega) - W^C(x_i, y_i; \omega)],
\end{aligned} \tag{H.4}$$

où $W^A(x_i, y_i; \omega) = G^A(x_A, y_A; x_i, y_i, \omega)$ (de même pour les autres plaques). Le déplacement W^A est calculé en substituant x, y par x_A, y_A .

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 + K_{AB}H^A(x_A, y_A; x_A, y_A; \omega) & -K_{AB}H^A(x_A, y_A; x_A, y_A; \omega) & 0 & 0 \\ -K_{AB}H^{B1}(x_{B1}, y_{B1}; x_{B1}, y_{B1}; \omega) & 1 + K_{AB}H^{B1}(x_{B1}, y_{B1}; x_{B1}, y_{B1}; \omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + K_{BC}H^{B2}(x_{B2}, y_{B2}; x_{B2}, y_{B2}; \omega) & -K_{BC}H^{B2}(x_{B2}, y_{B2}; x_{B2}, y_{B2}; \omega) \\ 0 & 0 & -K_{BC}H^C(x_C, y_C; x_C, y_C; \omega) & 1 + K_{BC}H^C(x_C, y_C; x_C, y_C; \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^A \\ W^{B1} \\ W^{B2} \\ W^C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} H^A(x_A, y_A; x_i, y_i; \omega) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{H.5}$$

Alors les FRF G^A, G^{B1}, G^{B2}, G^C à chaque récepteur sont obtenues en appliquant l'équation (H.4) avec W^A, W^{B1}, W^{B2}, W^C données par l'équation (H.5).

Espérances des énergies locales

Avec l'équation (3.11), les espérances des énergies locales $\langle e \rangle (x, y, \omega_c)$ sont

$$\langle e_A \rangle (x, y, \omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G^A(x, y; x_i, y_i; \omega)|^2 d\omega \tag{H.6}$$

$$\begin{aligned}
\langle e_B \rangle (x, y, \omega_c) &= \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G^{B1}(x, y; x_i, y_i; \omega)|^2 d\omega + \\
&\sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G^{B2}(x, y; x_i, y_i; \omega)|^2 d\omega
\end{aligned} \tag{H.7}$$

$$\langle e_C \rangle (x, y, \omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} m \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G^C(x, y; x_i, y_i; \omega)|^2 d\omega \tag{H.8}$$

Espérances des énergies modales

De la même manière que pour le réseau de deux plaques,

$$\langle E^A \rangle (\omega_c) = \int_{L_x^A} \int_{L_y^A} \langle e_A \rangle (x, y, \omega_c) dx dy \tag{H.9}$$

idem pour les autres plaques. Après calcul, on obtient

$$\langle E^A \rangle (\omega_c) = \sum_{n \geq 0} \langle E_n^A \rangle (\omega_c) \quad (\text{H.10})$$

où

$$\langle E_n^A \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{|\psi_n^A(x_i, y_i) + K_{AB}\psi_n^A(x_A, y_A)[W^{B1}(x_i, y_i; \omega) - W^A(x_i, y_i; \omega)]|^2}{m((\omega_{A,n}^2 - \omega^2)^2 + (\omega_A \eta_A \omega)^2)} d\omega, \quad (\text{H.11})$$

pour la plaque A ;

$$\langle E_n^B \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{|K_{AB}\psi_n^B(x_{B1}, y_{B1})[W^A(x_i, y_i; \omega) - W^{B1}(x_i, y_i; \omega)] + K_{BC}\psi_n^B(x_{B2}, y_{B2})[W^C(x_i, y_i; \omega) - W^{B2}(x_i, y_i; \omega)]|^2}{m((\omega_{B,n}^2 - \omega^2)^2 + (\omega_B \eta_B \omega)^2)} d\omega \quad (\text{H.12})$$

pour la plaque B et

$$\langle E_n^C \rangle (\omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \frac{|K_{BC}\psi_n^C(x_C, y_C)[W^{B2}(x_i, y_i; \omega) - W^C(x_i, y_i; \omega)]|^2}{m((\omega_{C,n}^2 - \omega^2)^2 + (\omega_C \eta_C \omega)^2)} d\omega, \quad (\text{H.13})$$

pour la plaque C.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] A. J. Keane. *Statistical energy analysis of engineering structures*. PhD thesis, 1988.
- [2] G. Maidanik. Some elements in statistical energy analysis. *J. Sound Vib.*, 52(2) :171–191, 1977.
- [3] R. H. Lyon. *Statistical Energy Analysis of dynamical systems*. The MIT press, 1975.
- [4] F. J. Fahy. *Statistical energy analysis in Noise and Vib*. White, R.G. and Walker, J.G., Ellis Horwood, 1982.
- [5] C. H. Hodges and J. Woodhouse. Theories of noise and vibration transmission in complex structures. *Reports in progress in physics*, 49 :107–170, 1986.
- [6] R. H. Lyon. *Theory and application of Statistical Energy Analysis*. Butterworths-Heimann, Boston, MA, 1995.
- [7] N. Totaro, C. Dodard, and J-L. Guyader. Sea coupling loss factors of complex vibro-acoustic systems. *J. Vib. Ac.*, 131(041009) :1–8, 2009.
- [8] B. R. Mace. On the statistical energy analysis hypothesis of coupling power proportionality and some implications of its failure. *J. Sound Vib.*, 178 :95–112, 1994.
- [9] F. J. Fahy. Statistical energy analysis : a critical overview. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 346(1681) :431–447, 1994.
- [10] R. H. Lyon and G. Maidanik. Power flow between linearly coupled oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34 :623–639, 1962.
- [11] T. D. Scharton and R. H. Lyon. Power flow and energy sharing in random vibration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 43(6) :1332–1343, 1968.
- [12] H. G. Davies. Ensemble averages of power flow in randomly excited coupled beams. *J. Sound Vib.*, 77 :311–321, 1981.

- [13] E. K. Dimitriadis and A. D. Pierce. Analytical solution for the power exchange between strongly coupled plates under random excitation : a test of statistical analysis concepts. *J. Sound Vib.*, 123 :397–412, 1988.
- [14] R. H. Lyon and E. Eichler. Random vibration of connected structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 36 :1344–1354, 1964.
- [15] R. H. Lyon and T. Scharton. Vibrational-energy transmission in a three-element structure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 38 :253–261, 1965.
- [16] G. Maidanik and J. Dickey. Wave derivation of the energetics of driven coupled one-dimensional dynamic systems. *J. Sound Vib.*, 139(1) :31–42, 1990.
- [17] A. Le Bot. Derivation of statistical energy analysis from radiative exchanges. *J. Sound Vib.*, 300 :763–779, 2007.
- [18] K. De Langhe. *High frequency vibrations : contributions to experimental and computational SEA parameter identification techniques*. PhD thesis, 1996.
- [19] R. J. M. Craik. The prediction of sound transmission through buildings using statistical energy analysis. *J. Sound Vib.*, 82 :505–516, 1982.
- [20] R. J. M. Craik. A review of sound transmission through buildings using statistical energy analysis. Proceeding NOISE 93, 1993.
- [21] T. Koizumi, N. Tsujiuchi, and Tanaka H. Prediction of the vibration in buildings using statistical energy analysis. In *Conference and exposition on structural dynamics*. Society for Experimental Mechanics, 2002.
- [22] T. Lim and R. Singh. Statistical energy analysis of a gearbox with emphasis on the bearing path. *Noise Cont. Eng. J.*, 37(2) :63–69, 1991.
- [23] G. Borello. Prediction noise transmission in a truck cabin using the statistical energy analysis. In *IUTAM symposium on statistical energy analysis*. Kluwer academic publishers, 1997.
- [24] X. Huang, M. J. Moeller, J. J. Lee, and R. E. Pwell. Application of statistical energy analysis (sea) to the development of a light truck sound package. In *IUTAM symposium on statistical energy analysis*. Kluwer academic publishers, 1997.
- [25] P. Hynnä, P. Klinge, and J. Vuoksinen. Prediction of structure-borne sound transmission in large welded ship structures using statistical energy analysis. *J. Sound Vibrat.*, 180 :583–607, 1995.
- [26] M. P. Sheng, M. Q. Wang, J. C. Sun, and B. Qian. Statistical energy analysis for complicated coupled system and its application in engineering. *J. Sound Vibrat.*, 274(3-5) :877–891, 2004.

- [27] O. Guasch and L. Cortes. Graph theory applied to noise and vibration control in statistical energy analysis models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125 :3657–3672, 2009.
- [28] O. Guasch and A. Aragonès. Finding the dominant energy transmission paths in statistical energy analysis. *J. Sound Vibrat.*, 330 :2325–2338, 2011.
- [29] D. A. Bies and S. Hamid. In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method. *J. Sound Vib.*, 70 :187–204, 1980.
- [30] L. Wu, A. Agren, and U. Sundback. Determination of loss factors for statistical energy analysis of a diesel engine with geometric averaging approach. *Acta Acustica*, 2 :127–142, 1994.
- [31] K. De Langhe and P. Sas. Statistical analysis of the power injection method. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100, 1996.
- [32] N. Totaro. *Caractérisation de sources aérodynamiques et sous-structuration pour la méthode SEA*. PhD thesis, 2004.
- [33] N. Totaro and J-L. Guyader. Sea substructuring using cluster analysis : the mir index. *J. Sound Vibrat.*, 290 :264–289, 2006.
- [34] C. Diaz-Cereceda, J. Poblet-Puig, and A. Rodriguez-Ferran. Automatic subsystem identification in statistical energy analysis. *Mech. Sys. Sig. Proc.*, 2014.
- [35] G. R. Khabbaz. Comparison of mechanical coupling factor by two methods. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47(1) :392–393, 1970.
- [36] S. H. Crandall and R. Lotz. On the coupling loss factor in statistical energy analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 49(1) :352–356, 1971.
- [37] W. Wohle, T. Beckman, and H. Schreckenbach. Coupling loss factors for statistical energy analysis of sound transmission at rectangular structural slab joints, part i. *J. Sound Vibrat.*, 77(3) :323–334, 1981.
- [38] W. Wohle, T. Beckman, and H. Schreckenbach. Coupling loss factors for statistical energy analysis of sound transmission at rectangular structural slab joints, part ii. *J. Sound Vibrat.*, 77(3) :335–344, 1981.
- [39] R. S. Langley. A derivation of the coupling loss factors used in statistical energy analysis. *J. Sound Vibrat.*, 141(2) :207–219, 1990.
- [40] C. Cacciolati and J-L. Guyader. Measurement of sea coupling loss factors using point mobilities. *Phil. Trans. R. Soc.*, 346 :465–475, 1994.
- [41] L. Maxit and J-L. Guyader. Estimation of sea coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information, part i : Theory. *J. Sound Vib.*, 239(5) :907–930, 2001.

- [42] L. Maxit and J-L. Guyader. Estimation of sea coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information, part ii : Numerical applications. *J. Sound Vib.*, 239(5) :931–948, 2001.
- [43] A. J. Keane and W. G. Price. Statistical energy analysis of strongly coupled systems. *J. Sound Vibrat.*, 117 :363–386, 1987.
- [44] Berrnstein D.S. Kishimoto, Y. Thermodynamic modelling of interconnected systems, part i conservative coupling. *J. Sound Vibrat.*, 182 :23–58, 1995.
- [45] F. J. Fahy and Y. De-Yuan. Power flow between non-conservatively coupled oscillators. *J. Sound Vib.*, 114(1) :1–11, 1985.
- [46] Lalor N. Richards E. J. Sun, J. C. Power flow and energy balance of non-conservatively coupled structures, i : Theory. *J. Sound Vibrat.*, 112(2) :321–330, 1987.
- [47] B. R. Mace. Statistical energy analysis, energy distribution models and system modes. *J. Sound Vib.*, 264 :391–409, 2003.
- [48] L. Maxit. *Extension et reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales*. PhD thesis, 2000.
- [49] N. Totaro and J-L. Guyader. Modal energy analysis. *J. Sound Vibrat.*, 331 :3735–3749, 2013.
- [50] R. S. Langley. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *J. Sound Vibrat.*, 159(3) :483–502, 1992.
- [51] P. W. Smith. Response and radiation of structural modes excited by sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, 64 :640–647, 1962.
- [52] D. E. Newland. Calculation of power flow between a class of coupled oscillators. *J. Sound Vib.*, 3(3) :262–276, 1966.
- [53] D. E. Newland. Power flow between a class of coupled oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 43(3) :553–559, 1968.
- [54] F. J. Fahy. Energy flow between oscillators : special case of point excitation. *J. Sound Vib.*, 11 :481–483, 1970.
- [55] F. J. Fahy. L'analyse statistique énergétique. *Revue d'acoustique*, 8(33) :10–25, 1975.
- [56] R. Lotz and S. H. Crandall. Prediction and measurement of the proportionality constant in statistical energy analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 54 :516–524, 1973.
- [57] B. R. Mace and L. Ji. The statistical energy analysis of coupled sets of oscillators. *Proc. R. Soc. A*, 463 :1359–1377, 2007.

- [58] G. Maidanik. Response of coupled dynamic systems. *J. Sound Vib.*, 46(4) :561–583, 1976.
- [59] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles, 1988.
- [60] R. S. Langley. A general derivation of the statistical energy analysis equations for coupled dynamic systems. *J. Sound Vibrat.*, 135 :499–508, 1989.
- [61] A. J. Keane and W. G. Price. A note on the power flowing between two conservatively coupled multi-modal subsystems. *J. Sound Vibrat.*, 144 :185–196, 1991.
- [62] B. R. Mace. The statistics of power flow between two continuous one-dimensional subsystems : a wave solution. *J. Sound Vib.*, 154 :289–319, 1992.
- [63] B. R. Mace. The statistics of power flow between two continuous one-dimensional subsystems. *J. Sound Vib.*, 154 :321–341, 1992.
- [64] B. R. Mace. The statistical energy analysis of two continuous one-dimensional subsystems. *J. Sound Vib.*, 166 :429–461, 1993.
- [65] L. Cremer, M. Heckl, and E. E. Ungar. *Structure-Borne Sound : Structural vibrations and sound radiation at audio frequencies*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [66] C. B. Burroughs, R. W. Fisher, and F. R. Kem. An introduction to statistical energy analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(4) :1779–1789, 1997.
- [67] A. Le Bot. *Foundation of statistical energy analysis (In press)*. Oxford University Press, 2014.
- [68] W. Gersch. Average power and power exchange in oscillators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 46 :1180–1185, 1969.
- [69] J. Woodhouse. An approach to the theoretical background of statistical energy analysis applied to structural vibration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69 :1695–1709, 1981.
- [70] D. E. Newland. *An introduction to random vibrations and spectral analysis*. Longman, London, 1975.
- [71] J-L. Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermes Science, Paris, 2002.
- [72] M. Rossi. *Audio*. Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2007.
- [73] V. Martin. *Éléments d'acoustique générale*. Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2007.
- [74] R. L. Weaver and O. I Lobkis. Enhanced backscattering and modal echo of reverberant elastic waves. *Phy. Review Let.*, 84(21) :4942–4945, 2000.
- [75] T. Lafont, N. Totaro, and A. Le Bot. Statistical energy analysis : correlation between diffuse field and energy equipartition. In *Proceedings of the 1st euro-mediterranean conference on structural dynamics and vibroacoustics*. Marrakech, Morocco, 2013.

- [76] T. Lafont, N. Totaro, and A. Le Bot. Review of statistical energy analysis hypotheses in vibroacoustics. *Proc. R. Soc. A*, 470(2162) :1471–2946, 2014.
- [77] R. L. Weaver. Diffuse waves in finite plates. *J. Sound Vibrat.*, 94(3) :319–335, 1984.
- [78] C. Faller. *Signal processing for audio and acoustics*. EPFL, Lausanne, 2010.
- [79] R. Lyon. A new definition of diffusion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(4) :1300–1302, 1974.
- [80] W. Soedel. *Vibrations of Shells and Plates*. Marcel Dekker, New York, 2004.
- [81] M. R. Schroeder and K. H. Kuttruff. On the frequency response curves in rooms. comparison of experiemental, theoretical and monte carlo results for the average frequency spacing between maxima. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34(1) :76–80, 1962.
- [82] A. Le Bot and V. Cotoni. Validity diagrams of statistical energy analysis. *J. Sound Vib.*, 329(6) :221–235, 2010.
- [83] Ya. G. Sinai. *Introduction to Ergodic Theory*. Princeton University Press, 1976.
- [84] G. Gallavotti. *problèmes ergodiques de la mécanique classique*. EPFL, Lausanne, 1976.
- [85] W. B. Joyce. Sabine’s reverberation time and ergodic auditorium. *J. Acoust. Soc. Am.*, 58(3) :643–655, 1975.
- [86] H. T. Diep. *Physique statistique*. Ellipses, Paris, 2005.
- [87] J-D. Polack. Playing billiards in the concert hall : the mathematical foundations of geometrical room acoustics. *Appl. Ac.*, 38 :235–244, 1993.
- [88] J-D. Polack. Modifying chambers to play billiards : the foundations of reverberation theory. *Acustica*, 76 :257–272, 1992.
- [89] M. Bruneau. *Manuel d’acoustique fondamentale*. Editions Hermès, Paris, 1998.
- [90] H. Bacry. *Introduction aux concepts de la physique statistique*. Ellipses, 1998.
- [91] J. Perdijon. *Histoire de la physique*. Dunod, Paris, 2008.
- [92] R. Locqueneux. *Une histoire des idées en physique*. Vuibert, Paris, 2009.
- [93] F. Bloch and J. D. Walecka. *Fundamentals of statistical mechanics*. Imperial college press, 2001.
- [94] F. Magionesi and A. Carcaterra. Insights into energy equipartition principle in large undamped structures. *J. Sound Vibrat.*, 322(4) :851–869, 2009.
- [95] N. Roveri, A. Carcaterra, and A. Akay. Energy equipartition and frequency distribution in complex attachments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 126(1) :122–128, 2009.

- [96] R. L. Weaver. Equipartition and mean-square response in large undamped structure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110 :894–903, 2001.
- [97] A. Carcaterra. An entropy formulation for the analysis of energy flow between mechanical resonators. *Mech. Sys. Sig. Proc.*, 16 :905–920, 2002.
- [98] A. Carcaterra. Entropy in vibration : energy sharing among linear and nonlinear freely vibrating systems. In *Tenth international congress on sound and vibration*. ICSV, 2003.
- [99] T. Lafont, N. Totaro, and A. Le Bot. Acoustique statistique : étude de l’hypothèse de couplage faible et de l’influence des modes non-résonants pour la sea. In *12ème congrès français d’acoustique*. Poitiers, France, 2014.
- [100] T. Lafont, N. Totaro, and A. Le Bot. On the requirement of weak coupling in statistical energy analysis. *submitted to JASA*, 2014.
- [101] S. Finnveden. A quantitative criterion validating coupling power proportionality in statistical energy analysis. *J. Sound Vibrat.*, 330 :87–109, 2011.
- [102] F. J. Fahy and P. P. James. A study of the kinetic energy impulse as an indicator of strength of coupling between sea subsystems. *J. Sound Vib.*, 190 :363–386, 1996.
- [103] P. W. Smith. Statistical models of coupled dynamical systems and the transition from weak to strong coupling. *J. Acoust. Soc. Am.*, 63 :695–698, 1979.
- [104] Wang C. Sun, J. C. and Z. H. Sun. Power flow between three series coupled oscillators. *J. Sound Vibrat.*, 189(2) :215–229, 1996.
- [105] S. Finnveden. Ensemble averaged vibration energy flows in a three element structure. *J. Sound Vibrat.*, 187 :495–529, 1995.
- [106] B. R. Mace. Statistical energy analysis : coupling loss factors, indirect couplings and system modes. *J. Sound Vib.*, 279 :141–170, 2005.
- [107] Fredö. Sea-like approach for the derivation of energy flow coefficients with a finite element model. *J. Sound Vibrat.*, 199 :645–666, 1997.
- [108] M. Barbagallo. *Statistical energy analysis and variational principles for the prediction of sound transmission in multilayered structures*. PhD thesis, 2013.
- [109] M. J. Crocker and A. J. Price. Sound transmission through double panels using statistical energy analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47 :683–693, 1970.
- [110] R. J. M. Craik. Non-resonant sound transmission through double wall using statistical energy analysis. *Appl. Ac.*, 64 :325–341, 2003.

- [111] L. Maxit, K. Ege, N. Totaro, and J-L. Guyader. Non resonant transmission modelling with statistical modal energy distribution analysis. *J. Sound Vib.*, 333 :499–519, 2014.
- [112] A. Culla and A. Sestieri. Is it possible to treat confidentially sea the wolf in sheep's clothing? *Mech. Sys. Signal Proc.*, 20 :1372–1399, 2006.
- [113] M. de Rochambeau. *Analyse des interactions fluide-structure en moyennes fréquence sous chargement aérodynamique*. PhD thesis, 2010.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur A. LE BOT

et les rapports de

Monsieur J-D. POLACK
Professeur - Université Pierre et Marie Curie - Institut Jean Le Rond d'Alembert - 11, rue de Lourmel
75015 PARIS

Et de

Monsieur B. MACE
Professeur - The University of Auckland - Engineering block 1 Level 9 - 20 Symonds st Auckland 1010
Nouvelle-Zélande

Monsieur LAFONT Thibault

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE , ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE

Fait à Ecully, le 2 février 2015

P/Le directeur de l'E.C.L.
La directrice des Etudes



THESE SOUTENUE DEVANT L'ECOLE CENTRALE DE LYON

NOM: LAFONT Prénoms: Thibault Marie Emmanuel	DATE DE SOUTENANCE: 11 février 2015
TITRE : Vibro-acoustique statistique : Etude des hypothèses de la SEA <i>Statistical vibroacoustics : study of SEA assumptions</i>	
NATURE: Doctorat	NUMERO D'ORDRE: 2015-03
<p>RESUME: La méthode SEA (Statistical Energy Analysis) est une approche statistique de la vibro-acoustique permettant de décrire les systèmes complexes en termes d'échanges d'énergies vibratoires et acoustiques. En moyennes et hautes fréquences, cette méthode se présente comme une alternative aux méthodes déterministes (coût des calculs dû au grand nombre de modes, de degrés de liberté, unicité de la solution). Néanmoins, son utilisation requiert la connaissance et le respect d'hypothèses fortes qui limitent son domaine d'application. Dans ce mémoire, les fondements de la SEA ont été examinés afin de discuter chaque hypothèse. Le champ diffus, l'équipartition de l'énergie modale, le couplage faible, l'influence des modes non résonants et l'excitation <i>rain-on-the-roof</i> sont les cinq hypothèses qui ont été abordées. Sur la base d'exemples simples (oscillateurs couplés, plaques couplées), les équivalences et leurs influences sur la qualité des résultats ont été étudiées pour contribuer à la clarification des hypothèses nécessaires à l'application de la SEA et pour borner son domaine de validité.</p> <p>ABSTRACT: Statistical energy analysis is a statistical approach of vibroacoustics which allows to describe complex systems in terms of vibrational or acoustical energies. In the high frequency range, this method constitutes an alternative to bypass the problems which can occur when applying deterministic methods (computation cost due to the large number of modes, the large number of degrees of freedom and the unicity of the solution). But SEA has numerous assumptions which are sometimes forgotten or misunderstood. In this thesis, foundations of SEA have been examined in order to discuss each assumption. Diffuse field, modal energy equipartition, weak coupling, the influence of non-resonant modes and the rain-on-the-roof excitation are the five took up hypotheses. Based on simple examples (coupled oscillators, coupled plates), the possible equivalences and their influence on the quality of the results have been discussed to contribute to the clarification of the useful SEA assumptions and to mark out it's the validity domain.</p>	
MOTS-CLES: SEA – Vibroacoustique – Hypothèses – Equivalences	
LABORATOIRES: Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (Ecole Centrale de Lyon) et le Laboratoire Vibrations Acoustique (INSA Lyon)	
Directeurs de thèse: Alain LE BOT (LTDS) et Nicolas TOTARO (LVA)	
Président du Jury: Aldo SESTIERI	
Jury:	François GAUTIER Alain LE BOT Brian MACE (rapporteur) Jean-Dominique POLACK (rapporteur) Aldo SESTIERI Nicolas TOTARO