HAL open science

Arithmétique des espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique positive

Romain Basson

To cite this version:

Romain Basson. Arithmétique des espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique positive. Mathématiques [math]. Université de Rennes 1, 2015. Français. NNT : . tel-01170922

HAL Id: tel-01170922

https://theses.hal.science/tel-01170922v1

Submitted on 2 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

ANNÉE 2015

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

École doctorale MATISSE

présentée par

Romain Basson

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de recherche mathématiques de Rennes
UFR de Mathématiques

Arithmétique des espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique positive

Thèse soutenue à Rennes le 24 juin 2015

devant le jury composé de :

Francesc BARS
Professeur, UAB Barcelona / Rapporteur

Boris KOLEV
Chargé de recherche CNRS / Rapporteur

Evelyne HUBERT
Chargé de recherche INRIA / Examinatrice

Gilles LACHAUD
Directeur de recherche émérite CNRS / Examinateur

Christophe RITZENTHALER
Professeur, Université Rennes 1 / Examinateur

Felix ULMER
Professeur, Université Rennes 1 / Examinateur

Reynald LERCIER
Chercheur DGA / Directeur de thèse

Sylvain DUQUESNE
Professeur, Université Rennes 1 / Directeur de thèse

Arithmétique des espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique positive

Romain Basson

ἕν οἶδα ὅτι οὐδὲν οἶδα

Σωκράτης
in Platon, *Apologie de Socrate*

As all roads lead to Rome, so I find in my own case at least that all algebraic inquiries, sooner or later, end at the Capitol of modern algebra, over whose shining portal is inscribed The Theory of Invariants.

J. J. Sylvester, 1864

Résumé

L'objet de cette thèse est une description effective des espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique positive. En caractéristique nulle ou impaire, on obtient une paramétrisation de ces espaces de modules par l'intermédiaire des algèbres d'invariants pour l'action du groupe spécial linéaire sur les espaces de formes binaires de degré 8, qui sont de type fini. Suite aux travaux de Lercier et Ritzenthaler, les cas des caractéristiques 3, 5 et 7 restaient ouverts. Pour ces derniers, les méthodes classiques de la caractéristique nulle sont inopérantes pour l'obtention de générateurs pour les algèbres d'invariants en jeu. Nous nous sommes donc contenté d'exhiber des invariants séparants en caractéristiques 3 et 7. En outre, nos résultats concernant la caractéristique 5 suggèrent l'inadéquation de cette approche pour ce cas.

À partir de ces résultats, nous avons pu expliciter la stratification des espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7 selon les groupes d'automorphismes et implémenter divers algorithmes, dont celui de Mestre, pour la reconstruction d'une courbe à partir de son module, *i.e.* la valeur de ses invariants. Pour cette phase de reconstruction, nous nous sommes notamment attachés aux questions arithmétiques, comme l'existence d'une obstruction à être un corps de définition pour le corps de modules et, dans le cas contraire, à l'obtention d'un modèle de la courbe sur ce corps de définition minimal.

Enfin pour la caractéristique 2, notre approche est différente, dans la mesure où les courbes sont étudiées via leurs modèles d'Artin-Schreier. Nous exhibons pour ceux-ci des invariants bigradués qui dépendent de la structure arithmétique des points de ramifications des courbes.

Abstract

The aim of this thesis is to provide an explicit description of the moduli spaces of genus 3 hyperelliptic curves in positive characteristic. Over a field of odd characteristic, a parameterization of these moduli spaces is given via the algebra of invariants of binary forms of degree 8 under the action of the special linear group. Following the work of Lercier and Ritzenthaler, the case of fields of characteristic 3, 5 and 7 are still open. However, in these remaining cases, the classical methods in characteristic zero do not work in providing generators for these algebra of invariants. Hence we provide only separating invariants in characteristic 3 and 7. Furthermore our results in characteristic 5 show that this approach is not suitable.

From these results, we describe the stratification of the moduli spaces of genus 3 hyperelliptic curves in characteristic 3 and 7 according to the automorphism groups of the curves and implement algorithms to reconstruct a curve from its invariants. For this reconstruction step, we paid attention to arithmetic issues, like the obstruction to be a field of definition for the field of moduli.

Finally, in the case of characteristic 2, we use a different approach where the curves are defined by their Artin-Schreier models. The arithmetic structure of the ramification points of these curves stratifies the moduli space in 5 cases and we define in each case invariants that characterize the isomorphism class of hyperelliptic curves.

Table des matières

Liste des figures . . . ix
Liste des tableaux . . . x
Liste des algorithmes . . . x
Liste des symboles . . . xii

Introduction **1**
Résultats connus . . . 2
Organisation de la thèse et principaux résultats . . . 5
Perspectives . . . 12
Conventions et notations . . . 12

1 Courbes hyperelliptiques *vs* formes binaires **15**
1.1 Des courbes hyperelliptiques aux formes binaires . . . 15
1.2 Invariants et covariants de formes binaires . . . 17
1.2.1 Définitions et propriétés de séparations . . . 17
1.2.2 Opérations de transvection . . . 19
1.3 Espaces projectifs pondérés . . . 20
1.4 Écriture d'un invariant . . . 21

I Invariants de formes binaires **23**

2 Structure des algèbres d'invariants **25**
2.1 Définitions et propriété de finitude . . . 26
2.2 Systèmes minimaux de générateurs . . . 28
2.3 Systèmes homogènes de paramètres et algèbres de Cohen-Macaulay . . . 28
2.4 Nullcone . . . 30
2.5 Modules de syzygies et suites de résolution . . . 32
2.6 Séries de Hilbert . . . 33
2.6.1 Calculs des séries de Hilbert pour les algèbres $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ en caractéristique nulle . . . 37
2.7 Majorations des degrés des familles de générateurs . . . 38
2.8 Obtention effective de familles génératrices . . . 39
2.9 L'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ en caractéristique positive . . . 40
2.10 L'exemple des quartiques binaires . . . 41
2.10.1 Cas générique, *i.e.* $\mathsf{p} = 0$ ou $\mathsf{p} \geqslant 5$ . . . 42
2.10.2 Cas de la caractéristique 3 . . . 43

3 Interlude : quartiques ternaires et invariants de Lüroth **45**
3.1 Quartiques de Lüroth . . . 45
3.2 L'expression de l'invariant de Lüroth . . . 46
3.3 Quartiques de Ciani . . . 49
3.4 Quartiques de Lüroth singulières . . . 50
3.5 Questions ouvertes . . . 53

4 Invariants pour les octiques binaires **55**
4.1 Octiques binaires en caractéristique 0 et $\mathsf{p} \geqslant 11$ . . . 55
4.1.1 Structure de l'algèbre des invariants . . . 55
4.1.2 Description de H_3 . . . 57
4.2 Octiques binaires en caractéristique 3 . . . 57
4.2.1 Invariants en caractéristique 3 . . . 57
4.2.2 Structure conjecturale de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ . . . 60
4.2.3 Covariants quadratiques . . . 63
4.3 Octiques binaires en caractéristique 7 . . . 64
4.3.1 Invariants en caractéristique 7 . . . 64
4.3.2 Structure conjecturale de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ . . . 66
4.3.3 Covariants quadratiques . . . 68
4.4 Octiques binaires en caractéristique 5 . . . 69

5 Invariants séparants **71**
5.1 $\mathfrak{D}$-invariants . . . 71
5.2 Schéma de la preuve . . . 73
5.3 Invariants séparants en caractéristique 7 . . . 74
5.3.1 Octiques n'annulant pas $\mathfrak{I}_6$ . . . 75
5.3.2 Formes annulant $\mathfrak{I}_6$ . . . 80
5.4 Invariants séparants en caractéristique 3 . . . 86
5.4.1 Formes n'annulant pas J_3 . . . 87
5.4.2 Formes annulant J_3 . . . 96

II Espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7 **99**

6 Algorithme de Mestre **101**
6.1 Identités de Clebsch . . . 102
6.2 Algorithme de reconstruction générique . . . 102
6.3 Mise en œuvre en caractéristiques 3 et 7 . . . 104

7 Stratification des espaces de modules **107**
7.1 Stratification par le groupe d'automorphismes . . . 107
7.2 Stratégie pour la reconstruction . . . 110
7.3 Description de l'espace de modules en caractéristique 3 . . . 112
7.3.1 Strates de dimension 0 . . . 114
7.3.2 Strates de dimension 1 . . . 115
7.3.3 Strates de dimension 2 . . . 117

7.3.4 Strate de dimension 3 . . . 119
7.3.5 Strate générique . . . 121
7.4 Description de l'espace de modules en caractéristique 7 . . . 122
7.4.1 Strate de dimension 0 . . . 123
7.4.2 Strates de dimension 1 . . . 123
7.4.3 Strates de dimension 2 . . . 127
7.4.4 Strate de dimension 3 . . . 129
7.4.5 Strate générique . . . 131

8 Corps de définition et corps de modules 133
8.1 Généralités . . . 133
8.2 Le cas hyperelliptique . . . 135
8.2.1 Corps de modules *versus* invariants . . . 135
8.3 Courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7 . . . 136
8.3.1 Strates de dimension 0 ou 1 . . . 137
8.3.2 Strate $\mathbf{C}_2^3$ . . . 137
8.3.3 Strate $\mathbf{C}_4$ . . . 141
8.3.4 Strate $\mathbf{D}_2$ . . . 141
8.3.5 Strate $\mathbf{C}_2$ . . . 143
8.3.6 Dénombrement des courbes sur les corps finis . . . 144

III Espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 2 145

9 Invariants pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 2 147
9.1 Modèles d'Artin-Schreier normalisés . . . 148
9.2 Invariants . . . 150
9.2.1 Type $(1,1,1,1)$ . . . 151
9.2.2 Type $(1,1,3)$ . . . 156
9.2.3 Type $(3,3)$ . . . 156
9.2.4 Type $(1,5)$ . . . 157
9.2.5 Type (7) . . . 158

Annexes 161

A Groupes linéaires algébriques 163
A.1 Généralités . . . 163
A.1.1 Notion de groupes algébriques . . . 163
A.1.2 Composante neutre . . . 164
A.1.3 Sous-groupes et morphismes . . . 165
A.2 Groupes réductifs . . . 165
A.3 Groupes linéairement et géométriquement réductifs . . . 166
A.3.1 Groupes algébriques linéairement réductifs . . . 166
A.3.2 Groupes algébriques géométriquement réductifs . . . 167

B Éléments pour la description de $\mathcal{I}_8$ **169**
B.1 Relations entre les SL_2-invariants en caractéristique 3 . . . 169
B.2 Syzygies d'ordre 1 entre les relations en caractéristique 3 . . . 170
B.3 Expressions des invariants $\mathcal{J}_{13}, \mathcal{J}_{14}$ et $\mathcal{J}_{15}$ . . . 173
B.4 Relations entre les SL_2-invariants en caractéristique 7 . . . 174

C Équations alternatives pour le $\mathfrak{D}$-invariant j_3 **177**
C.1 Coefficients P_i et Q_i des équations (5.44) . . . 177
C.2 Coefficients $\mathfrak{c}_i$ de l'équation (5.45) . . . 178

D Modèles d'Artin-Schreier normalisés **181**
D.1 Type $(1,1,1,1)$ . . . 181
D.2 Type $(1,1,3)$ . . . 182
D.3 Type $(3,3)$ . . . 183
D.4 Type $(1,5)$ . . . 184
D.5 Type (7) . . . 184

Bibliographie **185**

Index **193**

Liste des figures

3.1 Une quartique de Lüroth. 46

7.1 Stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 0 ou $\mathsf{p} \geqslant 11$ selon le groupe d'automorphismes. 110

7.2 Stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 3 selon le groupe d'automorphismes (cf. remarque 7.1.4). 113

7.3 Stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 7 selon le groupe d'automorphismes (cf. remarque 7.1.4). 124

Liste des tableaux

1 Synthèse des résultats pour l'espace de modules H_3 en caractéristiques 3 et 7. . . . 11

2.1 Comparaison de $\beta(\mathcal{I}_\mathsf{n})$ aux bornes de Jordan et de « Hilbert ». 39

7.1 Groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 0 ou $\mathsf{p} \geqslant 11$. 110

7.2 Groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 3 (cf. remarque 7.1.4). 113

7.3 Modèles $y^2 = x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$ qui annulent les trois déterminants (7.8). . 119

7.4 Reconstruction pour les courbes C qui trivialisent les équations (7.10), (7.11) et (7.12). 121

7.5 Groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 7 (cf. remarques 7.1.4 et 7.4.1). 123

7.6 Modèles $y^2 = x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$ qui annulent les trois déterminants (7.24). 129

7.7 Reconstruction pour les courbes C qui trivialisent les équations (7.26), (7.27), (7.28) et (7.29). 131

8.1 Synthèse des résultats pour l'espace de modules H_3 en caractéristiques 3 et 7. . . 137
8.2 Nombres de courbes hyperelliptiques de genre 3 non isomorphes définies sur $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_9$. 144

Liste des Algorithmes

1 Égalité dans un espace projectif pondéré. 21
2 Écrire un invariant comme un polynôme en les J_i. 22

3 Reconstruire un polynôme hyperelliptique à partir de ses SL_2-invariants en caractéristique 3. 114
4 Reconstruire un polynôme hyperelliptique à partir de ses SL_2-invariants en caractéristique 7. 124

5 De Weierstraß à Artin-Schreier 181

Liste des symboles

$\mathfrak{A}_n$	Groupe alterné de degré n, page 42
$\mathsf{AS}(\mathsf{k})$	Groupe d'Artin-Schreier du corps k, page 149
$\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$	Groupe d'automorphismes de la courbe C, page 107
$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$	Groupe d'automorphismes réduit de la courbe hyperelliptique C, page 107
$\beta(\mathsf{A})$	Bornes sur les degrés des générateurs de A, page 38
$\mathbf{C}_\mathsf{n}$	Groupe cyclique d'ordre n, page 109
$\mathcal{C}_\mathsf{n}$	Algèbre des covariants des formes binaires de degré n, page 18
$\mathbf{D}_\mathsf{n}$	Groupe diédral de degré n, page 109
Δ	Discriminant, page 18
$\mathfrak{D}$	Sous-groupe de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ engendré par les matrices diagonales et anti-diagonales, page 71
$\mathbf{G}_{672}$	Groupe d'automorphismes de la courbe $y^2 = x^7 - x$ sur $\mathbb{F}_7$, page 109
H_g	Espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre g, page 1
$\mathsf{H}(\mathsf{A}, t)$	Série de Hilbert de l'algèbre graduée A, page 33
$\mathfrak{I}_6$	Invariant $\mathsf{J}_2^3 + 5\mathsf{J}_3^2$ en caractéristique 7, page 74
$\mathcal{I}_\mathsf{n}$	Algèbre des invariants des formes binaires de degré n, page 18
ι	Involution hyperelliptique, page 15
$\mathsf{K}[\mathsf{X}]^\mathsf{G}$	Algèbre des invariants pour la G-variété X, page 26
L	Invariant de Lüroth, page 46
M_C	Corps de modules de la courbe C, page 133
M_g	Espace de modules des courbes de genre g, page 1
$M \cdot a_i$	Coefficient du terme de degré i de la forme $M \cdot (a_\mathsf{n} x^\mathsf{n} + \ldots + a_1 x z^{\mathsf{n}-1} + a_0 z^\mathsf{n})$, page 73
$\mathcal{N}_{\mathsf{G},\mathsf{V}}$ ou $\mathcal{N}_\mathsf{V}$	Nullcone de la représentation rationnelle V de G, page 31
$\mathbb{P}(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$	Espace projectif pondéré de poids w_i, page 20

$\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)$	Discriminant de la conique $\mathcal{Q}$ de la méthode de Mestre associée aux trois covariants q_i, page 102
Res_x	Résultant de deux polynômes relativement à la variable x, page 76
$\mathfrak{S}_\mathsf{n}$	Groupe symétrique de degré n, page 109
$(\cdot,\cdot)_\mathsf{k}$	$\mathsf{k}^{\text{ème}}$-transvectant de deux covariants, page 19
$\mathbf{U}_6$	Groupe d'automorphismes de la courbe $y^2 = x^7 - x$ sur $\mathbb{Q}$, page 109
$\mathbf{V}_8$	Groupe d'automorphismes de la courbe $y^2 = x^8 - 1$ sur $\mathbb{Q}$, page 109
V_n	Espace des formes binaires de degré n, page 17
$\mathsf{V}_8^{i_1,\ldots,i_j}$	Sous-espace des formes de V_8 telles que $a_{i_1} = \ldots = a_{i_j} = 0$, page 73
$\Omega_{i,j}$	Opérateur différentiel de Cayley, page 19

Introduction

Soit k un corps, F son sous-corps premier et K une clôture algébrique de k. Pour un entier $\mathsf{g} \geqslant 1$, notons $\mathsf{M_g}$ (resp. $\mathsf{H_g}$) l'ensemble des classes de K-isomorphisme de courbes algébriques (resp. hyperelliptiques) lisses, projectives, absolument irréductibles et de genre g définies sur K. Cet ensemble paramètre des variétés ; on dit que c'est un espace de modules : l'*espace de modules des courbes (resp. hyperelliptiques) lisses de genre* g. Lorsque $\mathsf{g} \geqslant 2$, Mumford, via la théorie géométrique des invariants [MF82], propose une construction géométrique de l'espace $\mathsf{M_g}$, qu'il munit d'une structure de variété algébrique de dimension $3\mathsf{g}-3$, $\mathsf{H_g}$ étant respectivement de dimension $2\mathsf{g}-1$. Mumford fait même mieux, en construisant un espace de modules des courbes $\mathsf{M_g}$ sur $\mathbb{Z}$, muni d'une structure de schéma quasi-projectif.

En relation avec ces constructions, nous souhaitons exhiber des espaces de paramètres permettant d'une part une description explicite et une manipulation effective de ces espaces de modules et d'autres part de traiter certaines questions d'ordre arithmétique, *i.e.* relativement à k.

Afin d'illustrer nos objectifs, commençons par rappeler la situation bien connue des courbes elliptiques, *i.e.* de genre 1. Par souci de simplification de notre exposé, supposons la caractéristique de k différente de 2 et 3. Toute courbe elliptique E définie sur k admet un modèle de Weierstraß, *i.e.* est définie par une équation du type

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad \text{avec } a, b \in \mathsf{k}$$

et pour laquelle le discriminant $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$ du membre de droite est non nul.

On définit alors le j-*invariant* de E comme

$$\mathsf{j} = -1728\frac{(4a)^3}{\Delta}$$

qui mène au résultat de classification explicite suivant [Sil09, Chap. III, Prop. 1.4 et Cor. 10.2].

Théorème

(i) Deux courbes elliptiques sont K-isomorphes si et seulement si elles ont le même j-invariant.

(ii) Pour $\mathsf{j}_0 \in \mathsf{K}$, il existe une courbe elliptique définie sur $\mathsf{F}(\mathsf{j}_0)$ de j-invariant égal à j_0, *e.g.*

$$\mathsf{E}/\mathsf{F}(\mathsf{j}_0) : y^2 = x^3 - \frac{27\mathsf{j}_0}{\mathsf{j}_0 - 1728}x + \frac{54\mathsf{j}_0}{\mathsf{j}_0 - 1728}, \text{ lorsque } \mathsf{j}_0 \neq 0, 1728.$$

(iii) Pour une courbe elliptique E, on a $\mathrm{Aut}(\mathsf{E}) \simeq \begin{cases} \mathbf{C}_2 & \text{si } \mathsf{j}(\mathsf{E}) \neq 0, 1728, \\ \mathbf{C}_4 & \text{si } \mathsf{j}(\mathsf{E}) = 1728, \\ \mathbf{C}_6 & \text{si } \mathsf{j}(\mathsf{E}) = 0. \end{cases}$

Pour les autres cas, *i.e.* les corps de caractéristique 2 ou 3 et lorsque $j_0 = 0$ ou 1728, on se reportera à [Sil09, p. 47 et Ann. A]. Ainsi, l'espace de modules des courbes elliptiques, qui est de dimension 1, est paramétré via un unique invariant qui permet :

- de décider numériquement si deux courbes elliptiques sont K-isomorphes ;
- d'obtenir pour un point de l'espace de module, *i.e.* une valeur du paramètre, une équation explicite d'une courbe lui correspondant, définie de façon optimale sur le plus « petit » corps possible ;
- de lire sur le paramètre le groupe d'automorphismes de la classe de courbes correspondantes.

Il est naturel d'essayer d'obtenir des résultats similaires pour les espaces de modules de courbes de genre supérieur. Un cas intéressant est alors celui des courbes hyperelliptiques de genre $\mathsf{g} \geqslant 2$ dont la classification à isomorphisme près, lorsque la caractéristique de K est différente de 2, est essentiellement reliée à l'action du groupe spécial linéaire $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur l'espace des formes binaires de degré $2\mathsf{g} + 2$. Or, à cette action est associée une algèbre d'invariants de type fini et les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptiques de genre g peuvent ainsi être représentée par les valeurs d'un ensemble fini de générateurs de cette algèbre, alors définis au sein d'un espace projectif pondéré. Notons que, par l'intermédiaire des quartiques binaires, les courbes elliptiques s'inscrivent dans ce cadre et leur j-invariant s'exprime en termes de ces SL_2-invariants (cf. remarque 2.10.2).

Selon ce paradigme, il nous faut donc dans un premier temps exhiber une famille génératrice finie d'invariants pour l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ et dans un second temps être capable d'obtenir une équation explicite d'une courbe à partir de valeurs données des invariants. Enfin, à l'instar du cas des courbes elliptiques, on souhaite pouvoir lire des informations de natures géométriques et arithmétiques en lien avec ces courbes, comme leur groupe d'automorphismes ou leur éventuel corps de définition minimal.

Résultats connus

Théorie des invariants

Les algèbres d'invariants de formes binaires de degré n sur $\mathbb{C}$, que nous noterons $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$, ont été largement étudiées, pour les petites valeurs $\mathsf{n} \leqslant 6$ et $\mathsf{n} = 8$, dès la seconde moitié du XIXème siècle, dans le cadre de la théorie classique des invariants qui tenait alors un rôle central en algèbre et en géométrie. Cette théorie culmina à la fin du XIXème avec le résultat de finitude de Hilbert [Hil90], établissant l'existence théorique de familles génératrices finies pour les algèbres d'invariants liées à l'action de groupes algébriques linéairement réductifs. Malgré une seconde preuve de nature constructive [Hil93], à l'occasion de laquelle Hilbert formula les prémices de l'algèbre commutative, la détermination effective de telles familles génératrices resta un problème difficile et il y eut un certain désintérêt concernant les questions d'effectivité en théorie des invariants. Cette dernière fut alors supplantée par le cadre abstrait et puissant offert par la géométrie algébrique et l'algèbre commutative modernes. De nombreux travaux abordent l'aspect tout aussi bien historique de la théorie classique des invariants [Cri86, Cri88, PR14], que sociologique [Fis66] ou encore épistémologique [Bon04].

Ce point de vue effectif en théorie des invariants connaît toutefois un regain d'intérêt depuis les années 80 et l'avènement de l'ère informatique, d'autant plus vif que les applications de cette théorie s'avèrent multiples. Citons pêle-mêle le calcul effectif dans les espaces de tenseurs

pour la mécanique des milieux continus [RE55, BKJO94], la détermination des anneaux de cohomologie pour la cohomologie des groupes finis [AM04], l'optimisation de la résolution de systèmes d'équations algébriques possédant des symétries [FS12, FS13], le calcul de groupes de Galois via l'algorithme de Stauduhar [Sta73, GK00] ou encore la combinatoire [Sta79b, Sta79a]. On trouvera d'autres exemples et de plus amples détails sur ces sujets dans [DK02, Chap. 5].

Concernant plus spécifiquement les algèbres d'invariants de formes binaires sur $\mathbb{C}$, de nouveaux résultats furent obtenus en se basant sur les idées originelles de Hilbert et les méthodes modernes issues de l'algèbre commutative, notamment le caractère Cohen-Macaulay de ces algèbres d'invariants associé à la connaissance de leur série de Hilbert. Shioda [Shi67] donna ainsi une description complète, en termes de décomposition de Hironaka et de résolution libre minimale, de l'algèbre des invariants des formes binaires de degré 8 et des systèmes de générateurs fondamentaux ont été exhibés pour les formes de degré 7, suite aux travaux de Dixmier, Lazard et Bedratyuk [Dix85, DL88, Bed07], et les degrés 9 et 10, suite aux travaux de Brouwer et Popoviciu [BP10b, BP10a]. Dans ce même cadre, Popoviciu [PD14] a également obtenu des familles de générateurs pour les formes binaires jointes de degrés $(2, 5)$ et $(3, 4)$. Enfin, soulignons les travaux récents d'Olive [Oli14] qui, via une reformulation des travaux originels de Gordan [Gor68] dans le cadre de la théorie des représentations, impulsée par Weyl et Weyman [Wey39, Wey93], a exhibé des familles génératrices minimales de covariants (une généralisation de la notion d'invariants) pour les formes binaires jointes de degrés $(4, 6)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 2, 4, 6)$ et $(4, 4, 8)$. En outre, dans un travail commun avec Lercier [LO14], ces derniers ont obtenu des familles génératrices minimales pour les algèbres de covariants des formes binaires de degré 9 et 10.

Toutefois l'ensemble des résultats évoqués précédemment ont été obtenus pour des formes définies sur $\mathbb{C}$ et reposent de façon essentielle sur le caractère linéairement réductif du groupe algébrique $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$. En caractéristique positive, la situation est *a priori* plus délicate, dans la mesure où le groupe $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ est seulement géométriquement réductif, ce qui ne permet plus par exemple de garantir *a priori* la propriété d'être de Cohen-Macaulay de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$. Cependant, un important résultat de Geyer [Gey74] établit que l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ sur un corps K de caractéristique p est essentiellement identique à celle sur $\mathbb{C}$, dès lors que $\mathsf{p} > \mathsf{n}$ (cf. théorème 2.9.2).

Espaces de modules des courbes hyperelliptiques

La description de l'espace de modules $\mathsf{M}_2 = \mathsf{H}_2$ sur $\mathbb{Z}$ est dû à Igusa [Igu60] qui, se basant sur les invariants de Clebsch des sextiques binaires sur $\mathbb{C}$ connus depuis le XIXème siècle [Cle72, Bol87, Bol88], définit cinq « invariants absolus » qui conviennent en toute caractéristique pour classifier les courbes hyperelliptiques de genre 2. L'espace de modules H_2 apparaît alors comme le schéma affine d'un anneau intègre, noethérien et intégralement clos à dix générateurs sur $\mathbb{Z}$. En particulier, prolongeant les travaux de Bolza [Bol88] sur les courbes de genre 2, Igusa est le premier à montrer qu'à toute valeur des invariants de Clebsch correspond une sextique les admettant comme invariants.

Toutefois ce résultat n'est pas constructif et il faut attendre les travaux de Mestre [Mes91] pour disposer d'un algorithme permettant d'obtenir une équation explicite d'une courbe de genre 2 en caractéristique 0, n'ayant pas d'autre involution que l'involution hyperelliptique, à partir de ses invariants de Clebsch. Cet algorithme est basé sur l'usage de covariants et, à l'instar des invariants de Clebsch pour les sextiques binaires, reste valable pour les courbes définies sur un corps de caractéristique strictement supérieure 5. Il a été implanté sous Magma par Gaudry. Pour les autres courbes de genre 2, en caractéristique distincte de 2, 3 et 5, Cardona et Quer ont

donné des modèles explicites dans [CQ05], tandis que le cas de la caractéristique 2 est traité dans [CNP05]. Se basant sur ces travaux, Lercier et Ritzenthaler [LR08] ont achevé l'implantation sous Magma de ces algorithmes de reconstruction pour les courbes de genre 2, valable cette fois en toute caractéristique. Le cas des courbes de genre 2 est ainsi clos. Modulo l'aspect concernant la détermination des tordues, actuellement étudiée par Rovetta [Rov15].

Pour le genre 3, Lercier et Ritzenthaler, dans [LR12], ont réalisé un travail similaire pour les courbes hyperelliptiques, en caractéristique distincte de 2, 3, 5 et 7. L'algèbre d'invariants en jeu est celle des formes de degré 8, décrite par Shioda [Shi67], et la méthode de Mestre se généralise au genre supérieur pour le cas générique des courbes dont la seule involution est l'involution hyperelliptique. Les autres cas pour la reconstruction ont été traités par les auteurs en « inversant » les expressions des invariants de Shioda en termes des paramètres de modèles normalisés selon les groupes d'automorphismes des courbes. Notons que, contrairement aux cas des courbes de genre 1 et 2, pour le genre 3 il est malcommode de se ramener à des invariants absolus. Lercier et Ritzenthaler ont ainsi préféré utiliser des invariants définis dans un espace projectif pondéré, représentation pour laquelle ils ont développé une algorithmique spécifique.

Néanmoins, que ce soit par l'intermédiaire de l'algorithme de Mestre ou par une approche plus directe, les modèles obtenus pour la reconstruction des courbes à partir de leurs invariants ne sont pas nécessairement optimaux, au sens où on peut s'interroger sur la possibilité de réaliser cette reconstruction sur un (éventuel) corps de définition « minimal ». Pour simplifier, supposons que les sous-corps de K sont parfaits et, pour une courbe C définie sur k, considérons l'intersection des sous-corps de K sur lesquels sont définis des courbes K-isomorphes à C. On appelle ce corps le corps de modules de C, que l'on note M_{C}, et qui, s'il est un corps de définition de C, est le plus petit possible. Ceci n'est pas toujours le cas lorsque la courbe possède des automorphismes non triviaux [DE99, Shi72], ainsi, notamment pour les courbes hyperelliptiques, se pose la question de savoir quand est-ce que M_{C} est un corps de définition ? Pour le cas des courbes hyperelliptiques, cette question peut en outre être raffinée en se demandant, pour les corps de caractéristique distincte de 2, quand est-ce que la courbe C peut être définie hyperelliptiquement sur M_{C}, *i.e.* par l'intermédiaire d'un modèle de Weierstraß $y^2 = \mathsf{f}(x)$, avec $\mathsf{f}(x) \in \mathsf{M}_{\mathsf{C}}[x]$? Si la réponse est évidente lorsque k est algébriquement clos ou fini [Hug07, LR12], elle l'est beaucoup moins dans le cas général, où elle est notamment reliée au groupe d'automorphismes réduit de la courbe, *i.e.* obtenu comme quotient par le sous-groupe engendré par l'involution hyperelliptique.

Pour le genre pair, Mestre a montré que les deux questions sont équivalentes. Précisément, en genre 2, pour une courbe de groupe d'automorphismes réduit trivial, il a établi que M_{C} est un corps de définition si et seulement si une conique associée à la courbe, qui intervient dans l'algorithme de reconstruction, possède un point M_{C}-rationnel. Pour les courbes de groupes d'automorphismes réduits non triviaux, les modèles explicités par Cardona et Quer [CQ05], Cardona [CNP05] en caractéristique 2 et Lercier et Ritzenthaler [LR08] en caractéristiques 3 et 5 sont directement définis sur M_{C}.

Pour les courbes hyperelliptiques de genre supérieur, Huggins a démontré que le corps de modules est un corps de définition hyperelliptique lorsque le groupe d'automorphismes réduit n'est pas cyclique ou cyclique et d'ordre un multiple de la caractéristique [Hug05, Hug07]. Pour le cas cyclique modéré, *i.e.* lorsque l'ordre est premier à la caractéristique, des contre-exemples ont été donnés par Earle et Shimura [Ear71, Shi72]. Lercier, Ritzenthaler et Sijsling [LRS15] ont entièrement caractérisé cette obstruction par l'intermédiaire d'un critère numérique effectif et explicité la descente d'un modèle sur son corps de modules, en l'absence d'obstruction. La question pour le genre 3 est *in fine* entièrement traitée, de manière effective, par Lercier, Ritzenthaler et

Sijsling [LR12, LRS15, LRS13].

Organisation de la thèse et principaux résultats

Suite au panorama que nous venons de dresser, la description explicite de l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 définies sur des corps de caractéristique 2, 3, 5 ou 7 reste ouverte. À ce sujet la tâche est double, dans la mesure où aucun système de générateurs pour l'algèbre des invariants des octiques binaires en caractéristiques 3, 5 et 7 n'a été exhibé jusqu'à présent.

Nos travaux de thèse s'inscrivent ainsi dans ce cadre et s'articule selon trois parties. La première est dévolue à la question des générateurs pour les algèbres $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3, 5 et 7, dont les résultats en caractéristiques 3 et 7 sont mis à profit dans la deuxième partie pour la description explicite de l'espace de modules H_3 d'un point de vue géométrique et arithmétique. La troisième partie aborde le cas de la caractéristique 2.

Ces trois parties, dont nous donnons ci-après une description plus détaillée du contenu, sont précédées d'un chapitre liminaire, ne renfermant aucun résultat original, au sein duquel nous présentons le lien entre l'espace de modules H_g et les invariants de formes binaires pour l'action du groupe SL_2. Nous mentionnons également deux algorithmes fondamentaux pour la conduite de nos travaux et leur réalisation effective, tous deux issus de [LR12].

À ce sujet, nos objectifs étant de nature effective, ils se concrétisent, outre ce manuscrit, par un code Magma [1] composé de divers algorithmes permettant de vérifier indépendamment nos assertions relevant du calcul formel, de calculer les invariants des courbes et de les reconstruire en caractéristiques 2, 3 et 7.

Première partie

Cette partie est essentiellement dévolue à l'étude des algèbres d'invariants de formes binaires et plus particulièrement l'algèbre $\mathcal{I}_8$ pour les formes de degré 8 en caractéristiques 3, 5 et 7.

Chapitre 2

Le premier chapitre de cette première partie vise à introduire les objets et résultats classiques de l'algèbre commutative utiles pour l'étude des algèbres d'invariants et à souligner les différences entre la caractéristique nulle et la caractéristique positive. Il est donc sans originalité et quasiment dénué de démonstration. Ce chapitre est en outre complété par l'annexe A, où nous mentionnons des rappels concernant les groupes algébriques linéaires.

Chapitre 3

Ce chapitre expose les résultats que nous avons obtenus en collaboration avec Lercier, Ritzenthaler et Sijsling au sujet de l'invariant de Lüroth pour les quartiques planes et ayant donné lieu à la publication [BLRS13]. Il illustre notamment l'avantage procuré par l'utilisation de l'algorithme 2, présenté au chapitre 1, pour la détermination de l'expression d'un invariant en fonction d'une famille génératrice donnée. Précisément, nous avons explicité l'expression de l'invariant de

1. Publié sous la licence publique générale limitée GNU et disponible en ligne à l'adresse http://perso.univ-rennes1.fr/romain.basson/magma.html

Lüroth, en termes des invariants de Dixmier-Ohno pour les quartiques ternaires sous l'action de $\mathsf{SL}_3(\mathbb{C})$ [Dix87, Ohn05], invariant de degré 54 qui caractérise le lieu des quartiques de Lüroth lisses et dont l'existence avait été établie par Morley [Mor19]. Via ce résultat, on déduit une expression explicite factorisée de l'invariant de Lüroth pour le lieu des quartiques de Ciani et on donne une réponse à deux questions théoriques restées ouvertes concernant le lieu des quartiques de Lüroth singulières.

Chapitre 4

Le chapitre 4 se concentre plus spécifiquement sur l'algèbre des invariants $\mathcal{I}_8$ pour les octiques binaires. Après avoir rappelé les résultats originels de Shioda [Shi67] en caractéristique nulle, complétés par Lercier et Ritzenthaler [LR12] pour la caractéristique $\mathsf{p} \geqslant 11$, nous présentons au sein de ce chapitre nos propres résultats en caractéristiques 3, 5 et 7. Nous exhibons notamment des familles finies d'éléments de ces trois algèbres, que nous conjecturons être des familles génératrices. Relativement à ces invariants, nous déduisons en caractéristiques 3 et 7 des systèmes homogènes de paramètres pour les algèbres $\mathcal{I}_8$ et explicitons, au moins en partie, les modules de syzygies qui en découlent.

$\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3. Nous introduisons dix SL_2-invariants en caractéristique 3, obtenus notamment par réduction modulo 3 de combinaison *ad hoc* des invariants de Shioda en caractéristique nulle. Précisément on établit la proposition suivante.

> **Proposition 4.2.1.** La réduction modulo 3 des dix invariants $\mathcal{J}_i$, établis page 59, définie dix SL_2-invariants homogènes pour les octiques binaires en caractéristique 3 de degrés $2, \ldots, 10, 12$, notés $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}$, qui forment un système de générateurs fondamentaux d'une sous-algèbre de $\mathcal{I}_8$.

En relation avec ces dix invariants, nous avons exhibé neuf relations de degré 12, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, dont on trouvera les expressions à l'annexe B.1.

Ces dernières nous ont notamment permis d'aboutir au résultat ci-après.

> **Proposition 4.2.4.** Les neuf systèmes suivants, formés de six SL_2-invariants, sont des systèmes homogènes de paramètres de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3.

$$\begin{array}{ccc}
\{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}\}, \\
\{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9\}, & \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, \\
\{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}\}, & \{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}\}.
\end{array}$$

Méconnaissant la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3, il s'est avéré délicat de donner une description précise de sa structure en termes de résolution libre minimale. À la vue de nos résultats concernant les modules de syzygies liés aux dix invariants J_i, présentés en partie à l'annexe B, nous formulons tout de même la conjecture suivante.

Conjecture 4.2.6. La résolution libre minimale de $\mathcal{I}_8$, vue comme un $\mathbb{F}_3[X]$-module, est donnée par

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \sum_{i\in \mathsf{D}_{\mathfrak{T}}} \mathfrak{T}_i\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \sum_{i\in \mathsf{D}_{\mathfrak{S}}} \mathfrak{S}_i\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \sum_{i\in \mathsf{D}_{\mathfrak{R}}} \mathfrak{R}_i\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \mathcal{I}_8 \longrightarrow 0$$

où $\mathbb{F}_3[X]$ désigne $\mathbb{F}_3[X_2, \ldots, X_{10}, X_{12}]$ pour lequel l'indéterminée X_i est de degré i. La dernière syzygie $\mathfrak{F}$ est de degré 57 et les profils des degrés des autres modules de syzygies sont les suivants

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_{\mathfrak{R}} &= \{12, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24\}\,,\\
\mathsf{D}_{\mathfrak{S}} &= \left\{22, 23, 24, 25, 26, 27, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33, 34, 35\right\}\,,\\
\mathsf{D}_{\mathfrak{T}} &= \{33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 45\}\,.
\end{aligned}$$

Enfin, dans la perspective de la mise en œuvre de l'algorithme de Mestre pour la reconstruction d'une courbe à partir de ses invariants, nous avons également exhibé une famille minimale de covariants quadratiques pour les degrés inférieurs à 14, formée de dix-huit éléments.

$\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7. En caractéristique 7, nous obtenons des résultats semblables à la caractéristique 3.

Proposition 4.3.1. La réduction modulo 7 des treize invariants $\mathcal{J}_i$, établis page 64, définie treize SL_2-invariants homogènes pour les octiques binaires en caractéristique 7 de degrés $2, \ldots, 11, 13, 14, 15$, notés $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}$, qui forment un système de générateurs fondamentaux d'une sous-algèbre de $\mathcal{I}_8$.

Ces treize SL_2-invariants en caractéristique 7 sont liés par 21 relations dont le profil des degrés est

$$11, 13, 14, 15, 16, 17, 18^2, 19, 20^2, 21, 22^2, 23, 24^2, 26^2, 28, 30$$

et dont on trouvera les premières expressions à l'annexe B.4. Les autres expressions sont disponibles dans un fichier au format Magma.

Proposition 4.2.4. Les dix systèmes suivants, formés de six SL_2-invariants, sont des systèmes homogènes de paramètres de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7

$$\begin{aligned}
&\{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, \quad \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}, \quad \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\},\\
&\{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, \quad \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}, \quad \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\},\\
&\{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, \quad \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}, \quad \{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\},\\
&\{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}.
\end{aligned}$$

Une conjecture concernant la résolution libre minimale de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique fait l'objet de la conjecture 4.2.6. Et nous exhibons également une famille minimale de covariants quadratiques pour les degrés inférieurs à 13, formée de vingt éléments.

$\mathcal{I}_8$ en caractéristique 5. La situation en caractéristique 5 s'avère singulière. En effet, contrairement aux autres caractéristiques, l'algèbre d'invariants $\mathcal{I}_8$ possède un élément de degré 1, à savoir

$$\mathsf{J}_1 = a_4.$$

Ce phénomène n'est toutefois pas totalement anecdotique, comme le suggère notre proposition 4.4.1.

Une singularité plus gênante provient en revanche de la profusion des éléments nécessaires pour engendrer l'algèbre $\mathcal{I}_8$. La recherche d'un système de générateurs fondamentaux aboutit en effet à la détermination de 62 invariants homogènes, dont voici le profil des degrés

$$1, 4, 6^2, 8^2, 9, 10^2, 11, 12^3, 13, 14^3, 15^3, 16^3, 17^3, 18^3, 19^2, 20^4, 21^4,$$
$$22^2, 23^2, 24^3, 25^3, 26, 27^2, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33^2, 37.$$

Soulignons déjà que, dans ce cas, il est plus délicat de tenir pour certain d'avoir exhibé une véritable famille génératrice de l'algèbre d'invariants $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 5. En outre, à la vue de ce résultat, il devient difficilement concevable d'utiliser ces invariants pour une description effective de l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 5. Ne serait-ce que l'obtention des générateurs de l'idéal des relations lié à ces invariants pose problème. Et il en va de même pour déterminer une famille d'invariants séparants pour les octiques binaires de discriminant non nul ou un système homogène de paramètres. Ainsi, nous ne sommes pas allés plus en avant dans notre traitement de la caractéristique 5.

Chapitre 5

Ce dernier chapitre de notre première partie vise à palier notre incapacité à établir que les deux familles d'invariants que nous avons définies en caractéristiques 3 et 7 pour les octiques binaires forment des familles génératrices. Nous démontrons ainsi directement que ces SL_2-invariants permettent de séparer les orbites des octiques binaires de discriminant non nul. Dans le cas générique, notre démonstration utilise l'action intermédiaire du sous-groupe $\mathfrak{D}$ de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ engendré par les matrices diagonales et anti-diagonales, auquel est associé une nouvelle algèbre d'invariants, dont la structure est cette fois indépendante de la caractéristique.

Nos deux résultats, fondamentaux pour notre deuxième partie, sont donc les théorèmes ci-après.

> **Théorème 5.4.1.** Les dix SL_2-invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}$, définis à la proposition 4.2.1, séparent les orbites de l'ouvert des octiques binaires de discriminant non nul pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

> **Théorème 5.3.1.** Les treize SL_2-invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}$, définis à la proposition 4.3.1, séparent les orbites de l'ouvert des octiques binaires de discriminant non nul pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

Ces deux résultats mènent au même type de représentation pour la paramétrisation de l'espace de modules H_3 que celle adoptée par Lercier et Ritzenthaler dans [LR12], à savoir celle d'un espace projectif pondéré de dimension 10 (resp. 13) et de poids $2, \ldots, 10, 12$ (resp. $2, \ldots, 11, 13, 14, 15$) en caractéristique 3 (resp. 7).

Deuxième partie

Notre deuxième partie aborde l'utilisation des invariants séparants obtenus précédemment pour la description explicite de l'espace de module H_3 en caractéristiques 3 et 7. Les trois chapitres qui composent cette partie traitent successivement de l'algorithme de Mestre pour la reconstruction d'une courbe sans involution autre que celle hyperelliptique, de la stratification de l'espace H_3 selon le groupe d'automorphismes des courbes et de la reconstruction dans toute sa généralité et enfin des questions d'ordre arithmétique en lien avec le corps de modules d'une courbe.

Chapitre 6

Ce premier chapitre de notre deuxième partie a pour objet dans un premier temps de rappeler le principe de la méthode de Mestre [Mes91] pour la reconstruction d'une forme binaire f de degré n pair à partir de ces invariants. Elle dérive d'identités dues à Clebsch [Cle72] et consiste à construire à partir d'un triplet de covariants quadratiques associés à f une conique lisse et une courbe plane de degré $\mathsf{n}/2$ dont le diviseur d'intersection correspond à la forme f. Cette procédure est effective dans la mesure où les coefficients de la conique et de la courbe plane en jeu sont des invariants en les coefficients de la forme f et peuvent donc être déterminés *a priori*.

En pratique, il s'agit donc d'exhiber un nombre « suffisant » (cf. lemmes 7.3.9 et 7.3.13) de triplets de covariants quadratiques afin d'obtenir pour n'importe quelle forme correspondant à une courbe *ad hoc* une conique lisse et pour chacun de ces triplets réaliser une étape de pré-calcul consistant à expliciter les coefficients invariants des coniques et des courbes planes de degré 4 dans notre cas. Les covariants quadratiques que nous avons évoqués précédemment au chapitre 4 suffisent en pratique. Nous indiquons enfin dans ce chapitre la méthode mise en œuvre pour la phase de pré-calculs, nécessitant une légère adaptation des formules données par Mestre en caractéristique nulle. Au final, pour les caractéristiques 3 et 7, nous avons effectué des pré-calculs pour 31 et 29 triplets de covariants quadratiques. Ces derniers sont essentiels, étant donné que les pré-calculs dans les cas les plus lourds nécessitent plus d'une douzaine d'heures.

Chapitre 7

Après de brefs rappels concernant les groupes d'automorphismes de courbes hyperelliptiques et la stratification de l'espace de modules H_3 en caractéristique nulle ou supérieure à 11 selon ces groupes d'automorphismes, nous indiquons la stratification en caractéristiques 3 et 7 (cf. tables 7.2 et 7.3).

En outre, dans ce chapitre nous énonçons les seize lemmes de reconstructions pour les courbes à partir de leurs SL_2-invariants en caractéristiques 3 et 7. Lorsque le groupe d'automorphismes est $\mathbf{C}_2$ ou $\mathbf{C}_4$, la méthode de Mestre s'applique, et pour les douze autres cas nous procédons plus directement en « inversant » les expressions des SL_2-invariants en termes des paramètres de modèles normalisés selon les groupes d'automorphismes des courbes (méthode suggérée dans [LR12]). Au passage, nous obtenons des paramétrisations rationnelles des strates de dimension 1 de l'espace H_3 en caractéristiques 3 et 7.

Chapitre 8

Ce chapitre est dédié aux questions d'ordre arithmétique. Précisément, il s'agit d'établir s'il existe une obstruction à ce que le corps de modules d'une courbe hyperelliptique de genre 3 en caractéristique 3 ou 7 soit un corps de définition (hyperelliptique) de cette courbe et, s'il n'y en pas, à reconstruire explicitement cette dernière sur ce corps.

Nos résultats relativement à ces questions correspondent essentiellement à la synthèse des travaux de Mestre [Mes91] et Lercier, Ritzenthaler et Sijsling [LR12, LRS13, LRS15] et leur mise en pratique effective.

Le seul résultat totalement original de ce chapitre est la proposition suivante concernant les courbes en caractéristique 3 de groupe d'automorphismes isomorphes à $\mathbf{C}_2^3$.

> **Proposition 8.3.4.** Soit C_f une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur un corps de caractéristique 3 telle que $\mathbf{C}_2^3 \subset \mathrm{Aut}(\mathsf{C}_\mathsf{f})$. Si f annule le discriminant (respectivement l'invariant I) des trois covariants quartiques $\mathsf{q}_2(\mathsf{f}), \mathsf{q}_3(\mathsf{f})$ et $\mathsf{q}_4(\mathsf{f})$, alors $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_\mathsf{f})$ contient $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$.

Synthèse.

La table 1, en lien avec les questions qui suivent, résume notre état de connaissance quant à la description géométrique et arithmétique de l'espace de modules H_3 en caractéristiques 3 et 7. Ces résultats sont énoncés simultanément pour les strates de dimension 0 ou 1 et indépendamment pour les strates de dimension supérieure.

Question I. Peut-on déterminer le groupe d'automorphismes d'une courbe à partir de ses SL_2-invariants ?

Question II. Le corps de modules est-il automatiquement un corps de définition ?

Question III. La courbe peut-elle être toujours définie hyperelliptiquement sur son corps de modules ?

Question IV. Peut-on reconstruire hyperelliptiquement la courbe à partir de ses SL_2-invariants ?

Question V. Peut-on reconstruire un modèle sur le corps de modules lorsqu'il n'y a pas d'obstruction ?

Question VI. Peut-on reconstruire un modèle hyperelliptique sur le corps de modules lorsqu'il n'y a pas d'obstruction ?

Troisième partie

Dans cette dernière partie, nous abordons le cas de la caractéristique 2, laissé de côté jusqu'à présent. Ce traitement à part s'explique par l'absence d'analogie entre la classification des courbes hyperelliptiques en caractéristique 2 et l'action du groupe $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ sur les formes binaires, qui a prévalu pour les autres caractéristiques. Notons que, certainement du fait de la dégénérescence observée en caractéristique 5, il s'est avéré illusoire d'essayer d'exhiber des invariants « universels », *i.e.* valables en toutes caractéristiques, définis directement sur $\mathbb{Z}$, à l'instar d'Igusa pour les courbes de genre 2.

†. Sauf éventuellement en caractéristique 7 pour les courbes annulant l'invariant $\mathfrak{I}_6 = \mathsf{J}_2^2 + 5\mathsf{J}_3^2$.

#	Dim. 0	Dim. 1	$\mathbf{C}_2^3$	$\mathbf{C}_4$	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{C}_2$
I	oui	oui	oui	oui	oui	oui
II	oui	oui	oui	oui	non	oui
III	oui	oui	oui	oui	calculable†	calculable†
IV	oui	oui	oui	oui	oui	oui
V	oui	oui	oui	oui	oui†	oui†
VI	oui	oui	oui	oui	oui†	oui†

TABLE 1 – Synthèse des résultats pour l'espace de modules H_3 en caractéristiques 3 et 7.

Notre traitement de la caractéristique 2, issu d'un travail commun avec Lercier [BL15], s'appuie sur les travaux initiaux de Nart et Sardonil [NS04] qui ont stratifié l'espace H_3 selon cinq cas liés à la structure arithmétique des points de ramification des courbes. Précisément, nous définissons pour chacun de ces cas des invariants permettant de caractériser les classes de K-isomorphisme, soit le théorème suivant.

Théorème 9.2.1. Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k.

Type $(1,1,1,1)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.3) sont entièrement déterminées par le 10-uplet

$$(\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_3, \mathsf{J}_2, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{12})$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 10 et de poids $(2,3,2,4,5,6,8,9,11,12)$.

Type $(1,1,3)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.4) sont entièrement déterminées par le 7-uplet

$$(1, 0, \mathsf{K}, \mathsf{K}', \mathsf{K}'', \mathsf{K}''', \mathsf{K}'''')$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 7 et de poids $(2,3,2,2,2,2,2)$, défini en (9.13).

Type $(3,3)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.5) sont entièrement déterminées par le 5-uplet

$$(1, 0, \mathsf{L}, \mathsf{L}', \mathsf{L}'')$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 5 et de poids $(2,3,2,2,2)$, défini en (9.15).

Type $(1,5)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.6) sont entièrement déterminées par le 6-uplet

$$(0, 0, \mathsf{M}_1, \mathsf{M}_3, \mathsf{M}_4, \mathsf{M}_5)$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 6 et de poids $(2,3,1,3,4,5)$, défini en (9.16).

Type (7)**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.7) sont entièrement déterminées par le 5-uplet

$$(0, 0, \mathsf{N}_7, \mathsf{N}_{32}, \mathsf{N}_{40})$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 5 et de poids $(2, 3, 7, 32, 40)$, défini en (9.18).

La démonstration de ce théorème est au passage l'occasion d'exhiber une famille finie de générateurs potentielle pour l'algèbre des invariants pour les couples de quartiques binaires en caractéristique 2.

Perspectives

Pour la résolution complète de la description de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 restent en suspens :

- quelques questions arithmétiques en lien avec le corps de modules des courbes en caractéristique 7 annulant l'invariant $\mathfrak{I}_6 = \mathsf{J}_2^2 + 5\mathsf{J}_3^2$;
- le cas de la caractéristique 5 qui, à la vue de nos résultats, ne peut pas être traité par l'intermédiaire de l'algèbre des invariants des octiques binaires ;
- nous n'abordons pas directement le cas des tordues dans ce manuscrit, *i.e.* des courbes définies et non isomorphes sur k, mais qui le sont sur K [Sil09, Sec. X.2]. Toutefois des algorithmes génériques existent déjà pour cette question [LRRS14] et sont déjà intégrés à notre code sous Magma. En outre, un traitement général de cette question par Rovetta [Rov15] est en cours.

Plus généralement, pour les courbes de genre 3, se pose aussi la question de la description de l'espace de modules des courbes non-hyperelliptiques, à savoir les quartiques planes. On dispose pour cet espace des invariants de Dixmier-Ohno, en caractéristique nulle, relié à l'action du groupe SL_3 sur les quartiques ternaires ; toutefois il n'existe pas d'analogue de la méthode de Mestre pour la phase de reconstruction.

Pour les espaces de modules de courbes hyperelliptiques de genre g, il semble aussi difficile de procéder plus avant selon le même schéma, sachant que les invariants fondamentaux de la $\mathbb{C}$-algèbre d'invariants $\mathcal{I}_{10}$, qui correspond au cas $\mathsf{g} = 4$, est formée de 106 éléments [BP10a].

Enfin, concernant plus spécifiquement les algèbres des octiques binaires, nous avons seulement su formuler des conjectures quant à leur système de générateurs fondamentaux et leur résolution libre minimale.

Conventions et notations

Dans l'ensemble de ce manuscrit k désigne un corps, p sa caractéristique, F son sous-corps premier et K une clôture algébrique de k.

Pour un entier g, une courbe hyperelliptique C de genre g définie sur un corps k est toujours supposée lisse, projective et absolument irréductible ; notamment, lorsque cette courbe est donnée via une équation définissant un modèle singulier, C est le modèle lisse associée à cette équation.

En revanche, une courbe, *e.g.* une conique, peut être singulière. Par classe d'isomorphisme, on entend les classes sur la clôture algébrique K et on spécifie le corps k dans le cas contraire. En outre, la notation $\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ pour le groupe d'automorphismes d'une courbe C vaut pour $\mathrm{Aut}_{\mathsf{K}}(\mathsf{C})$.

Le cardinal d'un ensemble X sera noté $|\mathsf{X}|$ et l'idéal engendré par des éléments $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n$ d'un anneau par $\langle \mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_n \rangle$.

Lorsque l'on mentionne le profil des degrés d'éléments homogènes d'une algèbre graduée, un exposant indique une répétition, *e.g.* $11, 13^3, 14, 17$ vaut pour $11, 13, 13, 13, 14, 17$.

Pour d'autres notations propres à ce document, on pourra se reporter à la liste des symboles, qui précède cette introduction page xii.

Enfin, au sein de chaque section principale d'un chapitre, les définitions, théorèmes, propositions, *etc* ... adoptent une numérotation continue, *e.g.* les chiffres X et Y pour la définition **Définition X.Y.Z** indiquent respectivement le numéro de chapitre et de section. Pour les lecteurs qui accèdent à ce document sous forme électronique, les références croisées (en bleu) et les références bibliographiques (en rouge) sont des liens hypertextes « cliquables ».

Chapitre 1

Espaces de modules des courbes hyperelliptiques *vs* invariants de formes binaires

L'objet de ce chapitre est d'établir le lien entre l'espace de modules H_g des courbes hyperelliptiques de genre g définies sur k et les orbites de l'espace des formes binaires de degré $2\mathsf{g}+2$ pour l'action du groupe $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, lorsque $\mathsf{p} \neq 2$, ouvrant ainsi la voie à une paramétrisation de l'espace H_g. Précisément, à l'action du groupe $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ sur l'espace des formes binaires de degré $2\mathsf{g}+2$ est associée une algèbre d'invariants $\mathcal{I}_{2\mathsf{g}+2}$, qui s'avère être une K-algèbre graduée de type fini. Ainsi, si $(\mathsf{J}_1, \ldots, \mathsf{J}_m)$ est une famille génératrice finie de cette algèbre, formée d'éléments homogènes de degré d_i, la paramétrisation de l'espace H_g se réalise par l'intermédiaire de l'espace projectif pondéré de poids $(\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_m)$ sur k.

Les deux dernières sections de ce chapitre présentent à ce titre deux algorithmes fondamentaux pour la manipulation des éléments dans les espaces projectifs pondérés d'une part et pour la réécriture d'un invariant dans $\mathcal{I}_{2\mathsf{g}+2}$ comme un polynôme en les générateurs J_i d'autre part.

1.1 Des courbes hyperelliptiques aux formes binaires

Définition 1.1.1 Une courbe C de genre $\mathsf{g} \geqslant 1$ définie sur k est dite *hyperelliptique* lorsqu'il existe un morphisme séparable de degré 2 de C sur $\mathbb{P}^1$ défini sur K.

L'extension $\mathsf{K}(\mathsf{C})/\mathsf{K}(x) \simeq \mathsf{K}(\mathbb{P}^1)$ quadratique est donc galoisienne ; ainsi la courbe C/K admet une involution, notée ι par la suite. Par exemple, une courbe elliptique est hyperelliptique et munie de l'involution donnée par l'inversion pour la loi de groupe.

Lemme 1.1.2 - [Har77, Prop. IV.5.3].
L'automorphisme ι est l'unique involution de C/K telle que $\mathsf{C}/\langle\iota\rangle$ soit de genre 0. Il commute avec tous les automorphismes de C/K et est appelé l'*involution hyperelliptique*.

Par unicité ι est définie sur k et induit un morphisme $\rho : \mathsf{C} \to \mathcal{Q} = \mathsf{C}/\langle\iota\rangle$, où $\mathcal{Q}/\mathsf{k}$ est donc une courbe de genre 0, isomorphe à $\mathbb{P}^1$ sur k si et seulement si elle possède un k-point rationnel. Le cas échéant, C est birationnellement équivalente à une courbe donnée par un modèle plan affine lisse

$$y^2 + \mathsf{h}(x)y = \mathsf{f}(x), \tag{1.1}$$

où f et $\mathsf{h} \in \mathsf{k}[x]$ avec $\deg \mathsf{f} \leqslant 2\mathsf{g}+2$ et $\deg \mathsf{h} \leqslant \mathsf{g}+1$. L'involution hyperelliptique est alors

$$\iota : (x, y) \mapsto (x, -y - \mathsf{h}(x)).$$

Définition 1.1.3 On dit qu'une courbe hyperelliptique C définie sur k possède un *modèle hyperelliptique* ou un *modèle de Weierstraß*, lorsqu'une courbe dans sa classe de k-isomorphisme admet un modèle de la forme de celui donné en (1.1).

Une courbe hyperelliptique a automatiquement un modèle hyperelliptique lorsqu'elle est définie sur un corps algébriquement clos ou sur un corps fini. En revanche, pour un corps quelconque en genre impair, ceci peut être en défaut (cf. chapitre 8).

Supposons dorénavant la caractéristique $\mathsf{p} \neq 2$; le cas $\mathsf{p} = 2$ est abordé à la partie III. On peut alors annuler h, via le changement de variable $y \leftarrow y + \mathsf{h}(x)/2$, et le modèle (1.1) devient

$$y^2 = \mathsf{f}(x), \tag{1.2}$$

où f est un polynôme séparable de degré $2\mathsf{g}+1$ ou $2\mathsf{g}+2$, pour lequel on adopte par la suite la dénomination de *polynôme hyperelliptique*.

En homogénéisant le modèle précédent dans l'espace projectif pondéré de poids $(1, \mathsf{g}+1, 1)$ (cf. l'exemple 1.3.2 de la section 1.3), on aboutit à un modèle projectif donné par $y^2 = \mathsf{f}(x, z)$, où f est une forme binaire de degré $2\mathsf{g}+2$, prenant en compte une « racine » à l'infini, en l'occurrence le point $(0 : 1 : 0)$, lorsque f est de degré $2\mathsf{g}+1$. Précisément, $\mathsf{f}(x, z)$ s'obtient comme $z^{2\mathsf{g}+2}\mathsf{f}(x/z)$. Avec cette convention, les racines de f sont les points de ramification du revêtement $\rho : \mathsf{C} \to \mathcal{Q} = \mathsf{C}/\langle\iota\rangle$, qui se confondent, puisque $\mathsf{p} \neq 2$, avec les points de Weierstraß de la courbe hyperelliptique C.

On a donc bien, en vertu de la formule de Hurwitz pour le genre [Har77, p. 301],

$$2\mathsf{g}(\mathsf{C}) - 2 = 2(2\mathsf{g}(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{\mathsf{P} \text{ ramifié}} (e_{\mathsf{P}} - 1),$$

où e_{P} est l'indice de ramification du point P, soit 2 dans notre cas.

Nous utiliserons toujours par la suite cette convention concernant les racines et le degré lorsque f sera un polynôme ou une forme associée à une courbe hyperelliptique.

Notre objectif est la description de l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre $\mathsf{g} = 3$, qui est relié à la notion d'isomorphisme entre deux courbes hyperelliptiques. Commençons par préciser la forme des isomorphismes entre deux telles courbes.

Proposition 1.1.4 Soit deux courbes hyperelliptiques de genre g définies sur k, données par $\mathsf{C}/\mathsf{K} : y^2 = \mathsf{f}(x, z)$ et $\mathsf{C}'/\mathsf{K} : y^2 = \mathsf{f}'(x, z)$. Si $\phi : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}'$ est un isomorphisme, il existe alors $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ et $e \in \mathsf{K}^\star$ tels que

$$\phi : (x : y : z) \mapsto (ax + bz : ey : cx + dz) \in \mathbb{P}(1, \mathsf{g}+1, 1).$$

Le couple (M, e) est unique au changement près $(\lambda M, \lambda^{g+1} e)$, où $\lambda \in \mathsf{K}^\star$.

K étant algébriquement clos, on peut donc toujours supposer $e = 1$, ainsi deux courbes hyperelliptiques sont isomorphes si et seulement si leurs polynômes hyperelliptiques sont $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalents. Nous introduisons donc dans la section suivante la notion d'invariants relative à l'action du groupe $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ sur l'espace des formes binaires.

1.2 Invariants et covariants de formes binaires

Pour un entier naturel $\mathsf{n} \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel des *formes binaires* de degré n à coefficients dans K :

$$\mathsf{V_n} := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i z^{n-i} \ / \ a_i \in \mathsf{K} \right\}.$$

De l'action d'un sous-groupe G de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ sur K^2, donnée par

$$M \cdot (x, z) = (ax + bz, cx + dz),$$

pour tout $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{G}$ et $(x, z) \in \mathsf{K}^2$, on déduit une action de G sur $\mathsf{V_n}$:

$$(M \cdot \mathsf{f})(x, z) = \mathsf{f}(M^{-1} \cdot (x, z)), \quad \forall\, (x, z) \in \mathsf{K}^2,$$

pour tout $\mathsf{f} \in \mathsf{V_n}$ et $M \in \mathsf{G}$.

En lien avec notre problème de classification des courbes hyperelliptiques à isomorphisme près, exposée à la section précédente, nous nous intéressons donc à la séparation des orbites pour l'action ci-dessus lorsque $\mathsf{G} = \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ et ce à travers la notion d'invariants.

1.2.1 Définitions et propriétés de séparations

Nous introduisons maintenant les notions d'invariants et plus généralement de covariants d'une forme binaire, qui permettent, comme l'énonce le théorème 1.2.4 ci-après, de séparer les orbites « génériques » de $\mathsf{V_n}$ pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ et $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$.

Définition 1.2.1 Soit $\mathsf{r} \in \mathbb{N}$, $(\mathsf{n}_1, \ldots, \mathsf{n}_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ et G un sous-groupe de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

- Une fonction polynomiale multi-homogène $\mathsf{q} : \bigoplus \mathsf{V}_{\mathsf{n}_i} \to \mathsf{V_r}$ de multi-degré $(\mathsf{d}_1, \ldots, \mathsf{d}_m)$ est un *covariant* lorsqu'il existe un entier $\omega \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $M \in \mathsf{G}$ et tout $(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_m) \in \bigoplus \mathsf{V}_{\mathsf{n}_i}$, on a

  $$\mathsf{q}(M \cdot \mathsf{f}_1, \ldots, M \cdot \mathsf{f}_m) = \det(M)^{-\omega}\, \mathsf{q}(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_m).$$

  On nomme alors respectivement ω et r le *poids* et l'*ordre* du covariant q.
- On appelle *invariants (relatifs)* les covariants d'ordre 0.

Remarque 1.2.2 Via l'action de la matrice scalaire $-\mathsf{I}_2$, pour qu'un covariant de degré d et d'ordre r soit défini, $\mathsf{r} - \mathsf{nd}$ doit être pair.

Exemples 1.2.3 Pour tout sous-groupe G de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$:

- $\mathsf{f} \in \mathsf{V_n}$ est un covariant de degré 1 et d'ordre n ;
- Le discriminant d'une forme binaire $\mathsf{f} = \prod_{i=1}^{\mathsf{n}} (\alpha_i x + \beta_i z)$ de degré n, en caractéristique $\mathsf{p} \neq 2$, est un invariant de degré $2(\mathsf{n} - 1)$, défini par

  $$\Delta(\mathsf{f}) = \prod_{i<j} (\alpha_i \beta_j - \beta_i \alpha_j)^2.$$

À l'exception de la partie III, où nous nous intéresserons à l'action jointe de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur $\mathsf{V}_4 \oplus \mathsf{V}_4$ en caractéristique 2, nous allons essentiellement considérer le cas $m = 1$ d'une seule forme binaire de degré n pour l'action de $\mathsf{G} = \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ ou $\mathsf{G} = \mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$.

Relativement à notre problème de classification des courbes hyperelliptiques à isomorphisme près, nous devons considérer l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$. Or celle de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ est *a priori* plus commode, dans la mesure où pour celle-ci les déterminants $\det M$ sont triviaux et la notion de poids ω s'évanouit. Ainsi, il est loisible de considérer des sommes de covariants de poids distincts et donc les algèbres des covariants et des invariants pour les formes binaires de degré n sous l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, que nous noterons $\mathcal{C}_\mathsf{n}$ et $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ par la suite. Heureusement, les notions de covariants, et donc d'invariants, coïncident pour ces deux groupes. Naturellement tout covariant pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ est un covariant pour celle de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$. La réciproque, moins évidente, s'avère également vraie.

Soit q un covariant de degré d et d'ordre r pour $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, alors, pour une matrice scalaire $\lambda\mathsf{I}_2$,

$$\mathsf{q}(\lambda\mathsf{I}_2 \cdot \mathsf{f}) = \lambda^{\mathsf{nd}-\mathsf{r}}\mathsf{q}(\mathsf{f}).$$

Ainsi, pour $M \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, ayant $M' = M/\sqrt{\det M} \in \mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, on en déduit que

$$\mathsf{q}(M \cdot \mathsf{f}) = (\det M)^{-(\mathsf{nd}-\mathsf{r})/2}\mathsf{q}(\mathsf{f}).$$

Autrement dit, q est un covariant pour $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ de poids $(\mathsf{r} - \mathsf{nd})/2$.

Achevons cette partie par l'énoncé du résultat de classification suivant, qui exprime que les algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ sont suffisantes pour discriminer les orbites de formes binaires séparables.

Théorème 1.2.4 - [MF82, p. 78], [Dix90, p. 47]. Soit f et f' deux formes binaires de degré n supérieur à 3 dont les multiplicités des racines (dans K) sont inférieures à $\mathsf{n}/2$. Alors f et f' sont dans la même orbite sous l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ (resp. $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathsf{K}$ tel que $\mathsf{I}(\mathsf{f}) = \lambda^\mathsf{d}\mathsf{I}(\mathsf{f}')$ (resp. $\mathsf{I}(\mathsf{f}) = \mathsf{I}(\mathsf{f}')$), pour tout $\mathsf{I} \in \mathcal{I}_\mathsf{n}$ homogène de degré d.

On notera que la contrainte sur la multiplicité des racines est satisfaite pour une forme associée à un modèle $y^2 = \mathsf{f}(x)$ de courbe hyperelliptique, f étant séparable. Concernant la limitation relative à la multiplicité des racines, on pourra se reporter à la notion de nullcone (cf. section 2.4).

Remarques 1.2.5

- On pourrait s'attendre à voir apparaître le poids en lieu et place du degré d dans l'énoncé du théorème précédent. Toutefois cela est indifférent, puisque, dans le cas présent, $\omega = \mathsf{n}/2 \cdot \mathsf{d}$.
- La condition sur le degré $\mathsf{n} \geqslant 3$ dans le théorème précédent est optimale. En effet, pour $\mathsf{n} = 2$, le discriminant d'une forme binaire quadratique

  $$\Delta(a_0x^2 + a_1xz + a_2z^2) = a_1^2 - 4a_0a_2$$

  engendre l'algèbre $\mathcal{I}_2$, en caractéristique $\mathsf{p} \neq 2$. Or cet invariant permet uniquement de distinguer la séparabilité des formes binaires quadratiques.

En relation avec notre objectif initial, à savoir décrire l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7 notamment, il s'agit donc de donner une tournure effective aux résultats précédents. Autrement dit, être en mesure d'exhiber des éléments de $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ et s'assurer que le « pour tout $\mathsf{I} \in \mathcal{I}_\mathsf{n}$ » du théorème 1.2.4 puisse se relaxer en un nombre fini d'éléments de $\mathcal{I}_\mathsf{n}$. À ce sujet nous donnons des premiers éléments de réponses, de nature historique, au paragraphe suivant. De plus amples détails seront fournis aux chapitres 2 et 4.

1.2.2 Opérations de transvection

Les algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ et $\mathcal{C}_\mathsf{n}$ ont été intensivement étudiées dès la seconde moitié du XIXème siècle lorsque $\mathsf{K} = \mathbb{C}$. Notamment via une opération fondamentale, introduite par Clebsch et Gordan dans [Cle72, Gor68] sous le nom d'Überschiebung, que nous nommerons *transvectant* et qui permet la construction de covariants et d'invariants à partir d'une forme binaire. Le transvectant est défini à partir de l'opérateur différentiel de Cayley

$$\Omega_{i,j} = \begin{vmatrix} \partial_{x_i} & \partial_{x_j} \\ \partial_{z_i} & \partial_{z_j} \end{vmatrix} = \partial_{x_i}\partial_{z_j} - \partial_{z_i}\partial_{x_j},$$

pour lequel on notera multiplicativement la composition.

Définition 1.2.6 Étant donné deux formes binaires $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_\mathsf{m}$ et $\mathsf{g} \in \mathsf{V}_\mathsf{n}$ et un entier naturel $\mathsf{k} \leqslant \min\{\mathsf{m}, \mathsf{n}\}$, on définit le $\mathsf{k}^{\text{ème}}$-*transvectant* des formes f et g comme la forme binaire :

$$(\mathsf{f}, \mathsf{g})_\mathsf{k} := \frac{(\mathsf{m}-\mathsf{k})\,!(\mathsf{n}-\mathsf{k})\,!}{\mathsf{m}\,!\mathsf{n}\,!} \left[\Omega^\mathsf{k}_{i,j}(\mathsf{f}(x_i, z_i), \mathsf{g}(x_j, z_j))\right]_{(x_i,z_i)=(x_j,z_j)=(x,z)} \in \mathsf{V}_{\mathsf{m}+\mathsf{n}-2\mathsf{k}}.$$

Exemple 1.2.7 Soit $\mathsf{f} = a_2x^2 + a_1xz + a_0z^2 \in \mathsf{V}_2$, déterminons le $2^{\text{ème}}$-transvectant de f avec elle-même :

$$\begin{aligned} 4(\mathsf{f},\mathsf{f})_2 &= \left[\left(\partial_{x_i}\mathsf{f}\,\partial_{z_j}\mathsf{f} - \partial_{z_i}\mathsf{f}\,\partial_{x_j}\mathsf{f}\right)^2\right]_{(x_i,z_i)=(x_j,z_j)=(x,z)} \\ &= \left[\partial^2_{x_i^2}\mathsf{f}\,\partial^2_{z_j^2}\mathsf{f} + \partial^2_{z_i^2}\mathsf{f}\,\partial^2_{x_j^2}\mathsf{f} - 2\partial^2_{x_iz_i}\mathsf{f}\,\partial^2_{x_jz_j}\mathsf{f}\right]_{(x_i,z_i)=(x_j,z_j)=(x,z)} \\ &= 2(\partial^2_{x^2}\mathsf{f}\,\partial^2_{z^2}\mathsf{f} - (\partial^2_{xz}\mathsf{f})^2) \\ &= 2(4a_2a_0 - a_1^2) \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que le discriminant d'une forme binaire quadratique, à un scalaire près.

De façon générale, le transvectant permet d'engendrer un covariant à partir de deux covariants initiaux, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 1.2.8 Si q_i et q_j sont deux covariants d'ordre r_i et r_j et de degré d_i et d_j d'une forme binaire f, *i.e.* des éléments de $\mathsf{V}_{\mathsf{r}_i}$ et $\mathsf{V}_{\mathsf{r}_j}$, alors $(\mathsf{q}_i, \mathsf{q}_j)_\mathsf{k}$, pour $\mathsf{k} \leqslant \min\{\mathsf{r}_i, \mathsf{r}_j\}$, est un covariant d'ordre $\mathsf{r}_i + \mathsf{r}_j - 2\mathsf{k}$ et de degré $\mathsf{d}_i + \mathsf{d}_j$.

Dans l'exemple 1.2.7 précédent, f est un covariant de degré 1 et d'ordre 2 d'elle-même et son $2^{\text{ème}}$-transvectant est effectivement un covariant de degré $1 + 1 = 2$ et d'ordre $2 + 2 - 2 \times 2 = 0$, autrement dit un invariant de degré 2.

Réciproquement, il est remarquable que tout covariant d'une forme f s'obtient par des calculs de transvectants successifs à partir de f, pour des ordres de transvection inférieurs au degré de la forme f. De cette observation, Gordan [Gor68], en exhibant des relations algébriques entre les transvectants, déduit son résultat fondamental de finitude.

Théorème 1.2.9 - Gordan. Les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{C}_{\mathsf{n}}$ et $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ sont de type fini.

Par cette approche, des familles finies de générateurs des algèbres $\mathcal{C}_{\mathsf{n}}$ et $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ pour $\mathsf{n} = 2, \ldots, 6$ et pour $\mathcal{I}_8$ ont été déterminées au cours de la seconde moitié du XIX siècle, avec des contributions notamment de Clebsch, Gordan, Bolza, Boole, Cayley, Eisenstein, Hermite et von Gall. Pour cette perspective historique, on pourra consulter [Dix90].

Pour une relecture moderne et fertile des méthodes de Clebsh-Gordan, on ne saurait trop conseiller la lecture des travaux de thèse d'Olive [Oli14], dans lesquels les covariants et les transvectants sont réinterprétés en termes de morphismes $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$-équivariants sur des espaces de tenseurs symétriques.

Dans notre cas, on s'intéresse à des corps de caractéristiques positives, petites, pour lesquelles les opérations différentielles, à la base du transvectant, sont mal adaptées et qui n'entrent donc pas dans le cadre de la théorie de Clebsh et Gordan. Nous introduisons ainsi au chapitre 2 diverses notions d'algèbres commutatives permettant une étude plus systématique des algèbres $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ et exposons aux chapitres 4 nos résultats concernant l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3, 5 et 7.

1.3 Espaces projectifs pondérés

La définition est similaire à celle d'un espace projectif classique, avec l'apparition d'une pondération de la relation de colinéarité.

Définition 1.3.1 Un *espace projectif pondéré* de dimension n et de poids $(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$ sur k est le quotient, noté $\mathbb{P}(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$,

$$\left(\mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$$

pour la relation d'équivalence

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \overline{\mathsf{k}}^*,\ x_i = \lambda^{\mathsf{w}_i} y_i, \quad \forall\, 0 \leqslant i \leqslant n.$$

La classe d'équivalence de $(x_0, \ldots, x_n)$ sera notée $(x_0 : \ \ldots \ : x_n)$.

Exemple 1.3.2 - Courbes hyperelliptiques. Considérons l'équation $y^2 = \mathsf{f}(x, z)$, où f est un polynôme homogène séparable de degré $2\mathsf{g} + 2$. Cette équation définie une hypersurface $\mathsf{C} \subset \mathbb{P}(1, \mathsf{g}+1, 1)$ qui est une courbe hyperelliptique de genre g. La courbe C est l'union des deux morceaux affines donnés par $x = 1$ et $z = 1$, de telle sorte que $\mathsf{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est le revêtement double ramifié en les $2\mathsf{g} + 2$ points donnés par $\mathsf{f} = 0$.

Remarquons que l'alternative consistant à considérer la clôture projective de la courbe affine $y^2 = \mathsf{f}(x, 1)$ dans $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(1, 1, 1)$, soit le modèle projectif $y^2 z^{2\mathsf{g}} = \mathsf{f}(x, z)$, aboutit à un modèle singulier avec une singularité non triviale en l'infini, autrement dit est loin d'être optimale.

Algorithme 1 : Égalité dans un espace projectif pondéré.

Entrée : Deux éléments $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_0, \ldots, y_n)$ de k^{n+1} et $\mathbb{P}$ un espace projectif pondéré de dimension n et de poids $(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$.

Sortie : Le booléen « `vrai` » si $(x_0 : \ldots : x_n) = (y_0 : \ldots : y_n)$, « `faux` » sinon.

1 $\mathcal{S}_x \leftarrow \{i \in \{0, \ldots, n\} \ / \ x_i \neq 0\}$; $\mathcal{S}_y \leftarrow \{i \in \{0, \ldots, n\} \ / \ y_i \neq 0\}$;
2 **si** $\mathcal{S}_x \neq \mathcal{S}_y$ **alors**
3 　**renvoyer** `faux`;
4 $d, \ (c_i)_{i \in \mathcal{S}_x} \leftarrow$ `PGCD_etendu`$(\mathsf{w}_i)_{i \in \mathcal{S}_x}$;
5 $\Lambda \leftarrow \prod_{i \in \mathcal{S}_x} (y_i/x_i)^{c_i}$;
6 **renvoyer** `vrai` *si* $y_i/x_i = \Lambda^{d_i/d}$, *pour tout* $i \in \mathcal{S}_x$, `faux` *sinon.*

Il est naturellement indispensable pour notre propos de pouvoir décider si deux éléments de $\mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ représentent le même élément de l'espace projectif pondéré $\mathbb{P}(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$. Une solution est donnée par l'algorithme suivant, issu de [LR12, Algo. 1].

Proposition 1.3.3 Pour un k-espace projectif pondéré $\mathbb{P}(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$, l'algorithme 1 teste si deux éléments de $\mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ sont dans la même classe. En outre, si k est un corps admettant des opérations de complexité quasi-linéaire en temps et en espace (multiplication, inversion, tests d'égalité), alors il en va de même de l'algorithme 1.

Démonstration. Si $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_0, \ldots, y_n)$ sont dans la même classe de $\mathbb{P}(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$, alors il existe $\lambda \in \overline{\mathsf{k}}^*$ tel que $y_i = \lambda^{\mathsf{w}_i} x_i$, pour tout i. Ainsi $\Lambda = \prod (y_i/x_i)^{c_i} = \lambda^{\sum c_i \mathsf{w}_i} = \lambda^d$ et on a $y_i/x_i = \lambda^{\mathsf{w}_i} = \Lambda^{\mathsf{w}_i/d}$, pour $i \in S_x$. Réciproquement si $S_x = S_y$ et $y_i/x_i = \Lambda^{\mathsf{w}_i/d}$ pour $i \in S_x$, alors on vérifie aisément que $y_i = \lambda^{\mathsf{w}_i} x_i$, pour tout i, pour λ une racine $d^{\text{ème}}$ de Λ dans $\overline{\mathsf{k}}^*$. *QED*

On déduit notamment de cet algorithme une façon d'associer à chaque classe $(x_0 : \ldots : x_n)$ de $\mathbb{P}(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$ un unique représentant. Avec les notations de l'algorithme, on pose $\Lambda = \prod_{i \in S_x} x_i^{c_i}$ et on définit $\widetilde{x}_i = x_i / \Lambda^{\mathsf{w}_i/d}$, pour tout i. $(\widetilde{x}_0, \ldots, \widetilde{x}_n)$ est alors l'unique représentant de la classe $(x_0 : \ldots : x_n)$ tel que $\prod_{i \in S_x} \widetilde{x}_i^{c_i} = 1$. Cette écriture canonique se révélera essentielle à la section 8.2.1, pour caractériser le corps de modules d'une courbe à partir de ses invariants.

Grâce à cette représentation, il devient possible, lorsque k est un corps fini, d'énumérer les points de l'espace projectif pondéré $\mathbb{P}(\mathsf{w}_0, \ldots, \mathsf{w}_n)$. Précisément, pour chaque support S_x, on se donne des entiers c_i tels que $\sum c_i \mathsf{w}_i = \mathrm{pgcd}(\mathsf{w}_i)_{i \in S_x}$ et on énumère alors tous les vecteurs $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathsf{k}^{n+1} \setminus \{0\}$ de support S_x et tels que $\prod_{i \in S_x} x_i^{c_i} = 1$.

1.4 Écriture d'un invariant relativement à un système de générateurs

La seconde opération algorithmique fondamentale pour notre propos est liée à l'écriture d'un élément de $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ comme un polynôme en les éléments d'une famille génératrice $(\mathsf{J}_1, \ldots, \mathsf{J}_m)$ de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$. Cette dernière étant graduée par le degré, on peut se limiter au cas des invariants homogènes (cf. section 2.2).

Cette opération de réécriture est par exemple essentielle pour la mise en œuvre de la méthode de Mestre au chapitre 6. Elle s'adapte en outre pour l'obtention des équations décrivant les strates de l'espace de modules H_3 (cf. chapitre 7). Enfin elle permet aussi de tester si un invariant

appartient à une sous-algèbre de $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ engendrée par une famille finie d'invariants, ce qui s'exprime par la possibilité ou non de cette opération de réécriture ; test dont on fait par exemple usage pour générer des invariants pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3, 5 et 7 aux chapitre 4.

Pour sa mise en œuvre, on suit l'approche « boite-noire » introduite par Lercier et Ritzenthaler dans [LR12, Sec. 2.3]. Celle-ci consiste à considérer un invariant d'une forme binaire, de degré n, $\mathsf{f} \in \mathsf{k}[a_0, \ldots, a_{\mathsf{n}}][x, z]$, non pas comme une expression formelle en les a_i, mais comme un programme d'évaluation qui à une forme $\mathsf{f} \in \mathsf{k}[x, z]$ associe la valeur de l'invariant dans k.

Selon ce paradigme, pour écrire un invariant homogène I de degré d en fonction des J_i, on peut alors recourir à un procédé d'évaluation-interpolation. Précisément, il suffit de construire la famille génératrice $\mathcal{B} = \{ \prod_w \mathsf{J}_w^{e_w} \ / \ \sum_w w\, e_w = d \}$ de la composante d-homogène $\mathsf{k}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_m]_d$ et d'évaluer les éléments de cette famille, ainsi que l'invariant I, en $|\mathcal{B}| + O(1)$ formes binaires choisies aléatoirement sur k (voire une extension de k). Il reste seulement alors à inverser le système linéaire correspondant. Cette procédure est résumée par l'algorithme ci-après.

Algorithme 2 : Écrire un invariant comme un polynôme en les J_i.

Entrée : Un invariant I de degré d.
Sortie : Un polynôme $P \in \mathsf{k}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_m]$ tel que $\mathsf{I} = P(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_m)$.

```
// Base pour la composante d-homogène k[J_2, ..., J_m]_d
1 B ← { ∏_w J_w^{e_w} / �sum_w w e_w = d };
// Générer aléatoirement |B| + O(1) octiques sur k
2 F ← { a_8 x^8 + ... + a_1 x + a_0 pour |B| + O(1) 9-uplets aléatoires (a_0, ..., a_8) ∈ k^9 };
// Évaluer l'invariant I et les éléments de la base B en chacune des formes de F
3 pour i = 1 à |F| faire
4     V_i ← I(F_i);
5     pour j = 1 à |B| faire
6         M_{i,j} ← B_j(F_i)
// Résoudre le système linéaire MX = V
7 trouver U tel que M × U = V;
8 renvoyer ∑_i U_i B_i pour chaque U ;
```

Notons qu'il est en général bien plus efficient de travailler dans l'algèbre $\mathsf{k}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_m]$ plutôt que dans l'algèbre $\mathsf{k}[a_0, \ldots, a_{\mathsf{n}}]$ pour l'algorithme de réécriture 2 ; la première solution permet en effet de réduire la taille de la famille $\mathcal{B}$. Pour un exemple, voir le deuxième point de la remarque 6.3.1.

L'illustration la plus remarquable de la force de ce point de vue pour la manipulation des invariants est sans nul doute le résultat que nous avons obtenu en collaboration avec Lercier, Ritzenthaler et Sijsling au sujet de l'invariant de Lüroth [BLRS13]. On pourra se reporter au chapitre 3 pour de plus amples détails à ce sujet.

Première partie

Invariants de formes binaires

Chapitre 2

Structure des algèbres d'invariants

Notre premier chapitre introductif a permis d'établir le lien entre la paramétrisation de l'espace de modules H_g et la détermination de familles génératrices finies pour l'algèbre $\mathcal{I}_{2\mathsf{g}+2}$. De telles familles de générateurs pour les algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ sur $\mathbb{C}$ étaient connues depuis la seconde moitié du XIX^{ème}siècle pour $\mathsf{n} \leqslant 6$ et $\mathsf{n} = 8$. Toutefois, à partir du rang $\mathsf{n} = 5$, l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ n'est plus une algèbre de polynômes. Si une description en termes de résolutions libres (cf. section 2.5), donnant notamment les relations entre les éléments d'un système générateur minimal, des algèbres $\mathcal{I}_5$ et $\mathcal{I}_6$ était connue dès le XIXème siècle [Her54, Cle72], il fallut en revanche attendre 1967 et les travaux de Shioda [Shi67] pour disposer d'une telle description pour $\mathcal{I}_8$. Pour $\mathsf{n} = 7$ et $\mathsf{n} \geqslant 9$, bien que des familles génératrices minimales aient été exhibées dans les cas $\mathsf{n} = 7$ [DL88, Bed07], $\mathsf{n} = 9$ [BP10a] et $\mathsf{n} = 10$ [BP10b], comptant respectivement 30, 92 et 106 éléments, à notre connaissance, aucune caractérisation des algèbres $\mathcal{I}_7$, $\mathcal{I}_9$ et $\mathcal{I}_{10}$ n'a été donnée en termes de résolutions libres.

Pour dégager les propriétés de ces algèbres d'invariants et amorcer leur étude dans les cas qui nous intéressent, à savoir l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3, 5 et 7 (cf. chapitre 4), nous nous plaçons dans le cadre plus général d'une représentation rationnelle V de degré fini d'un groupe algébrique [1] G sur un corps algébriquement clos K, à laquelle est donc associée une algèbre graduée d'invariants $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^\mathsf{G}$. Lorsque le groupe G est linéairement réductif, *e.g.* $\mathsf{G} = \mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$, l'algèbre $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^\mathsf{G}$ jouit de bonnes propriétés : elle est de type fini, d'après un résultat de Hilbert [Hil90, Hil93] qui généralise celui de Gordan pour les algèbres de covariants $\mathcal{C}_\mathsf{n}$, elle est de Cohen-Macaulay, en vertu du théorème de Hochster-Roberts [HR74], et cette propriété mène à la notion de décomposition de Hironaka de l'algèbre $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^\mathsf{G}$, qui apparaît ainsi comme un module libre de rang fini sur une algèbre de polynômes. En outre, notamment pour les algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ sur $\mathbb{C}$, pour $\mathsf{n} \leqslant 36$ au moins, on connaît *a priori* leur série de Hilbert, qui représente une source d'information souvent cruciale. La situation en caractéristique positive est *a priori* plus délicate, dans la mesure où le groupe $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ est seulement réductif et non plus linéairement réductif. Sous cette hypothèse plus restrictive, la finitude de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ subsiste, mais la propriété d'être de Cohen-Macaulay et la décomposition de Hironaka qui en découle ne sont plus assurées par le théorème de Hochster-Roberts.

L'ensemble des notions d'algèbre commutative afférentes à ces résultats font l'objet de ce chapitre. Elles sont naturellement sans originalité et se trouvent exposées de façon plus large

1. Pour les définitions et les propriétés en liens avec les groupes algébriques, on pourra se reporter à l'annexe A.

dans [Eis95, KP00, DK02]. Les résultats propres au cas $\mathsf{G} = \mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ en caractéristique positive sont essentiellement rassemblés à la section 2.9.

2.1 Définitions et propriété de finitude

Soit G un groupe algébrique linéaire et X une G-variété définis sur K. On définit, à partir de l'action de G sur X, une action de G sur l'anneau de coordonnées de X par :

$$(\mathsf{g} \cdot \mathsf{f})(\mathsf{x}) = \mathsf{f}(\mathsf{g}^{-1} \cdot \mathsf{x}), \quad \forall \mathsf{x} \in \mathsf{X}, \qquad \text{pour } \mathsf{f} \in \mathsf{K}[\mathsf{X}] \text{ et } \mathsf{g} \in \mathsf{G}.$$

Une notion d'invariant est alors naturellement associée à cette action.

Définition 2.1.1 On dit que $\mathsf{f} \in \mathsf{K}[\mathsf{X}]$ est un *invariant* lorsque $\mathsf{g} \cdot \mathsf{f} = \mathsf{f}$, pour tout $\mathsf{g} \in \mathsf{G}$.
L'*algèbre des invariants* de la K-algèbre $\mathsf{K}[\mathsf{X}]$ pour l'action de G est ainsi

$$\mathsf{K}[\mathsf{X}]^{\mathsf{G}} := \{\mathsf{f} \in \mathsf{K}[\mathsf{X}] \mid \mathsf{g}.\mathsf{f} = \mathsf{f}, \forall \mathsf{g} \in \mathsf{G}\}.$$

On s'intéresse plus particulièrement au cas où $\mathsf{X} = \mathsf{V}$ est une *représentation rationnelle* de G de degré fini, *i.e.* une représentation linéaire de dimension finie pour laquelle le morphisme de groupes $\mathsf{G} \to \mathsf{GL}(\mathsf{V})$ est aussi un morphisme de variétés. La K-algèbre $\mathsf{K}[\mathsf{V}]$ est alors isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_{\mathsf{n}}]$, où n est la dimension de V en tant que K-espace vectoriel. Notons alors que $\mathsf{K}[\mathsf{V}]$ et $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$ sont munies d'une structure de K-algèbre graduée, ce qui va se révéler fort utile.

Remarque 2.1.2 Si H est un sous-groupe de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ et $\overline{\mathsf{H}}$ son adhérence, pour la topologie de Zariski, on a $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{H}} = \mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\overline{\mathsf{H}}}$, ce qui justifie de se restreindre aux groupes linéaires algébriques.

Un problème fondamental de la théorie des invariants consiste à déterminer des générateurs de l'algèbre des invariants $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$, ce qui mène naturellement à la question :

« L'algèbre des invariants est-elle de type fini ? ».

Précisément, nous adoptons la terminologie suivante.

Définition 2.1.3 Une famille $(\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m)$ d'éléments d'une K-algèbre A est une *famille génératrice finie* de cette algèbre lorsque

$$\mathsf{A} = \mathsf{K}[\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m].$$

Lorsqu'une telle famille existe, la K-algèbre A est dite de *type fini*. Une famille génératrice finie est dite *minimale* lorsque toute sous-famille stricte de celle-ci n'est plus génératrice.

Le premier résultat de finitude fut établi par Paul Gordan en 1868 [Gor68] pour le cas particulier des algèbres de covariants de formes binaires sous l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$, la démonstration proposée par Gordan étant effective.

Le résultat général pour les groupes algébriques linéairement réductifs est toutefois dû à Hilbert qui démontra en 1890, dans [Hil90], le théorème ci-après et établit à cette occasion les

prémices de l'algèbre de commutative avec notamment le théorème de la base de Hilbert et le Nullstellensatz.

Théorème 2.1.4 - Théorème de finitude de Hilbert.
Si G est un groupe algébrique linéairement réductif et V une représentation rationnelle de G de degré fini, alors l'algèbre des invariants $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$ est de type fini.

Gordan reprocha toutefois à Hilbert d'avoir donné une preuve non constructive de ce résultat et se serait exclamé « Das ist Theologie und nicht Mathematik ». Hilbert publia finalement une démonstration constructive de son théorème trois ans plus tard [Hil93]. Pour une version moderne, on pourra se reporter à [Der99].

Exemple 2.1.5 - Polynômes symétriques.
Le groupe symétrique de degré n, noté $\mathfrak{S}_{\mathsf{n}}$, agit sur K^{n} via

$$\sigma.(x_1, \dots, x_{\mathsf{n}}) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(\mathsf{n})}), \quad \text{pour } \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathsf{n}}.$$

On a alors le résultat bien connu [Stu93] :

$$\mathsf{K}[x_1, \dots, x_{\mathsf{n}}]^{\mathfrak{S}_n} \simeq \mathsf{K}[\Sigma_1, \dots, \Sigma_{\mathsf{n}}],$$

où $\Sigma_j = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_j \leqslant n} x_{i_1} \dots x_{i_j}$ est le $j^{\text{ème}}$ polynôme symétrique élémentaire. Une autre famille génératrice minimale est donnée par les n premières sommes de Newton $\mathsf{S}_k = \sum_{i=1}^{\mathsf{n}} x_i^k$, pour $1 \leqslant k \leqslant \mathsf{n}$.

Cette question de finitude est plus généralement englobée par le $14^{\text{ème}}$ problème de Hilbert, formulé par ce dernier parmi une liste de vingt-trois problèmes lors du Congrès International des Mathématiciens à Paris en 1900.

Problème 2.1.6 - $14^{\text{ème}}$ problème de Hilbert. Soit $\mathsf{K}[a_1, \dots, a_k]$ une K-algèbre intègre de type fini, F son corps des fractions et H un sous-corps intermédiaire $\mathsf{K} \subset \mathsf{H} \subset \mathsf{F}$. La K-algèbre $\mathsf{K}[a_1, \dots, a_k] \cap \mathsf{H}$ est-elle de type fini ?

Nagata proposa le contre-exemple suivant en 1959 [Nag59]. Soit $\mathsf{K} = \mathbb{C}$ et $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 16}$ une famille de nombres complexes algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathsf{G} \subset \mathsf{GL}_{32}(\mathbb{C})$ le groupe des matrices diagonales par blocs formé des matrices

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_{16} \end{pmatrix}, \quad \text{où } A_j = \begin{pmatrix} c_j & c_j b_j \\ 0 & c_j \end{pmatrix}$$

et les c_j et b_j sont des nombres complexes arbitraires vérifiant, pour tout $1 \leqslant i \leqslant 3$, $c_1 \cdots c_{16} = 1$ et $\sum_{j=1}^{16} a_{i,j} b_j = 0$. Alors $\mathsf{K}[x_1, \dots, x_{32}]^{\mathsf{G}}$ n'est pas une K-algèbre de type fini.

2.2 Systèmes minimaux de générateurs pour les algèbres graduées de type fini

Soit A une k-*algèbre graduée*

$$\mathsf{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{A}_i,$$

où $\mathsf{A}_0 = \mathsf{k}$, telle que A_i est un k-espace vectoriel de dimension finie et $\mathsf{A}_i\mathsf{A}_j \subset \mathsf{A}_{i+j}$, pour tout i et j. Un élément de A_i est dit *homogène de degré* i.

Pour une telle algèbre, on note A_+ l'idéal gradué de A engendré par ses éléments non constants, *i.e.* $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}^*} \mathsf{A}_i$. La finitude de A est alors liée à celle du quotient $\mathsf{A}_+/(\mathsf{A}_+)^2$.

Proposition 2.2.1 Pour la k-algèbre graduée A, s'équivalent

(i) $\mathsf{a}_1, \ldots, \mathsf{a}_m$ engendrent A , vu comme k-algèbre ;

(ii) $\bar{\mathsf{a}}_1, \ldots, \bar{\mathsf{a}}_m$ engendrent $\mathsf{A}_+/(\mathsf{A}_+)^2$, vu comme k-espace vectoriel.

En particulier, A est de type fini si et seulement si $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{A}_+/(\mathsf{A}_+)^2$ est finie et, le cas échéant, il existe des systèmes de générateurs minimaux de cardinal $\dim_{\mathsf{k}} \mathsf{A}_+/(\mathsf{A}_+)^2$.

Précisément, toute la situation est graduée

$$\mathsf{A}_+/(\mathsf{A}_+)^2 = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathsf{A}_i/(\mathsf{A}_+)_i^2$$

et pour déterminer effectivement une famille génératrice minimale de A du cardinal attendu, il suffit de considérer dans chaque composante homogène A_i, $i \geqslant 1$, une base du supplémentaire de $(\mathsf{A}_+)_i^2$. Autrement dit le nombre $\dim_{\mathsf{k}}(\mathsf{A}_+)_i/(\mathsf{A}_+)_i^2$ est le nombre d'*invariants fondamentaux* de degré i.

Exemple 2.2.2 D'après l'exemple 2.3.5 ci-après, un système minimal de générateurs de $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ a au moins $\mathsf{n} - 2$ éléments.

2.3 Systèmes homogènes de paramètres et algèbres de Cohen-Macaulay

Considérons toujours une k-algèbre graduée $\mathsf{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{A}_i$, avec $\mathsf{A}_0 = \mathsf{k}$.

Définition 2.3.1 On appelle *système homogène de paramètres* tout ensemble d'éléments homogènes $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathsf{A}$ tel que :

(i) $\theta_1, \ldots, \theta_r$ sont algébriquement indépendants sur k ;

(ii) A est un $\mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$-module de type fini, *i.e.* il existe $\eta_1, \ldots, \eta_s \in \mathsf{A}$,

$$\mathsf{A} = \eta_1\mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r] + \cdots + \eta_s\mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r].$$

Lorsque $\mathsf{A} = \mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$ et que les η_i sont homogènes, on appelle les θ_i (resp. les η_i) les *invariants primaires* (resp. *secondaires*).

Formulons quelques observations au sujet de cette définition.

Remarques 2.3.2

- Quitte à décomposer les éléments η_i selon leurs composantes homogènes, il est loisible de les supposer homogènes.
- La condition (ii) équivaut à dire que A est une extension entière de l'anneau $\mathsf{k}[\theta_1, \dots, \theta_r]$.
- L'entier r est égal à la dimension de Krull de A, qui est d'ailleurs le degré de transcendance du corps de fraction de A sur k [Kna07].
- Un système homogène de paramètres constitue nécessairement une famille algébriquement libre maximale ; la réciproque est toutefois erronée. Considérons en effet l'algèbre

$$\mathsf{K}[x, y, z]/\langle xy - z\rangle.$$

  On peut vérifier que la dimension de Krull de cette algèbre est 2 et que les classes $\overline{x}$ et $\overline{z}$ forment une famille algébriquement libre maximale. Or la classe $\overline{y}$ ne saurait être entière sur $\mathsf{K}[\overline{x}, \overline{z}]$ et la famille $(\overline{x}, \overline{z})$ ne forme donc pas un système homogène de paramètres.

En vertu du lemme de normalisation de Noether [Eis95, Th. 13.3], une algèbre graduée de type fini admet toujours un système homogène de paramètres. Un critère pour l'obtention de tels systèmes est décrit à la section suivante.

Remarque 2.3.3 D'après un résultat de Brion [Bri82, Th. 3], la situation est plus délicate pour les algèbres multi-graduées, en effet pour la $\mathbb{C}$ algèbre $\mathsf{A} = \mathbb{C}[\mathsf{V}_{\mathsf{n}_1} \oplus \cdots \oplus \mathsf{V}_{\mathsf{n}_m}]^{\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})}$, qui est $\mathbb{N}^m$-graduée, s'équivalent :

(i) A admet un système (multi-)homogène de paramètres ;

(ii) $(\mathsf{n}_1, \dots \mathsf{n}_m)$ fait partie de la liste suivante :

$$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (4,4), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,2), (2,2,2).$$

Exemples 2.3.4 - Polynômes symétriques, suite de l'exemple 2.1.5.

La famille génératrice $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{\mathsf{n}})$ de l'algèbre $\mathsf{K}[x_1, \dots, x_{\mathsf{n}}]^{\mathfrak{S}_{\mathsf{n}}}$ est algébriquement libre [Stu93]. Il s'agit ainsi d'une famille génératrice minimale et d'un système homogène de paramètres de cette algèbre, qui est donc isomorphe à la K-algèbre de polynômes $\mathsf{K}[x_1, \dots, x_n]$.

En revanche, l'algèbre des polynômes alternés, *i.e.* $\mathsf{B} = \mathsf{K}[x_1, \dots, x_{\mathsf{n}}]^{\mathfrak{A}_{\mathsf{n}}}$, est engendrée par les polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ et le discriminant $\Delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Or on a $\Delta^2 \in \mathsf{K}[x_1, \dots, x_{\mathsf{n}}]^{\mathfrak{S}_{\mathsf{n}}}$, ainsi la famille $(\Sigma_1, \dots, \Sigma_{\mathsf{n}})$ forme toujours un système homogène de paramètres pour B, auquel est associé les deux invariants secondaires 1 et Δ.

Exemple 2.3.5 Pour les algèbres d'invariants de formes binaires, on a [Bri96, Chap. 3], pour $\mathsf{n} \geqslant 3$,

$$\dim_{\mathrm{Krull}} \mathcal{I}_{\mathsf{n}} = \mathsf{n} - 2.$$

Le lemme de normalisation de Noether garantit donc l'existence de systèmes homogènes de paramètres pour les algèbres graduées de type fini. Autrement dit, toute algèbre de ce type se réalise comme un module de type fini sur une algèbre de polynômes. L'inconvénient de cette décomposition réside en l'absence d'unicité *a priori* dans l'écriture des éléments. Pour palier ceci, on peut exiger la propriété plus forte d'être un module libre de type fini, qui est liée à la propriété de Cohen-Macaulay [2] pour une telle algèbre.

Proposition 2.3.6 Pour une k-algèbre graduée A de type fini s'équivalent

(i) il existe un système homogène de paramètres $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ de A tel que A soit un module libre sur $\mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$;

(ii) pour tout système homogène de paramètres $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ de A, A est un module libre sur $\mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$.

Le cas échéant, l'algèbre A est dite de *Cohen-Macaulay*. Il existe alors des éléments (homogènes) $\eta_1, \ldots, \eta_s \in \mathsf{A}$ tels que

$$\mathsf{A} = \eta_1 \mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r] \oplus \cdots \oplus \eta_s \mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r].$$

Une telle décomposition de l'algèbre A est appelée *décomposition de Hironaka*.

L'énoncé fondamental concernant les algèbres d'invariants est alors le suivant [HR74].

Théorème 2.3.7 - Hochster-Roberts, 1974. Si V est une représentation rationnelle de degré fini d'un groupe linéairement réductif G sur K, alors $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$ est de Cohen-Macaulay.

Notons qu'il admet une réciproque partielle [Kem00].

Théorème 2.3.8 - Kemper. Si le groupe algébrique G est réductif et si pour toute représentation rationnelle l'algèbre d'invariant $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$ est de Cohen-Macaulay, alors G est linéairement réductif.

Naturellement, pour les corps de caractéristique nulle, cet énoncé est vide, dans la mesure où tous les groupes algébriques réductifs sont linéairement réductifs. Cependant il indique par exemple que les groupes classiques en caractéristique positive admettent des représentations rationnelles dont les anneaux d'invariants ne sont pas de Cohen-Macaulay.

2.4 Nullcone

Comme l'indique le quatrième point de la remarque 2.3.2 de la section précédente, pour établir qu'une famille d'éléments homogènes d'une algèbre graduée est un système homogène de paramètres, il ne suffit pas de montrer que cette famille est algébriquement libre et maximale pour cette propriété. Nous exposons ainsi dans cette section un critère géométrique pour déterminer de tels systèmes, basé sur la notion de nullcone et le critère de Hilbert-Mumford.

2. Pour un exposé plus général sur la propriété de Cohen-Macaulay d'un anneau, on pourra se reporter à [Eis95, Chap. 18]

On considère pour cela une représentation rationnelle V d'un groupe réductif G sur un corps algébriquement clos K.

Définition 2.4.1 Le *nullcone* $\mathcal{N}_{\mathsf{G},\mathsf{V}} \subset \mathsf{V}$ est la variété affine définie par l'idéal $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}_{+}$:

$$\mathcal{N}_{\mathsf{G},\mathsf{V}} := \left\{ \mathsf{v} \in \mathsf{V} \mid \mathsf{I}(\mathsf{v}) = 0,\ \forall \mathsf{I} \in \mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}_{+} \right\}.$$

Lorsque le contexte est sans ambiguïté au sujet de G, on se contentera de la notation $\mathcal{N}_{\mathsf{V}}$. On dispose alors de la caractérisation suivante [DK02, Lem. 2.4.2].

Lemme 2.4.2 Le nullcone $\mathcal{N}_{\mathsf{V}}$ est l'ensemble de tous les $\mathsf{v} \in \mathsf{V}$ tel que 0 soit dans l'adhérence de l'orbite $\mathsf{G}.\mathsf{v}$.

Le raffinement de ce lemme consiste en le critère de Hilbert-Mumford, établi initialement par Hilbert pour $\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})$ [Hil93] et généralisé par Mumford pour un groupe réductif quelconque [MF82].

Théorème 2.4.3 - Critère de Hilbert-Mumford.
Soit T un tore maximal de G, on a $\mathcal{N}_{\mathsf{G},\mathsf{V}} = \mathsf{G} \cdot \mathcal{N}_{\mathsf{T},\mathsf{V}}$.

Ce critère s'avère redoutablement efficace pour caractériser les éléments du nullcone, *e.g.* pour les formes binaires sous l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$.

Corollaire 2.4.4 Pour l'action du groupe $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur l'espace V_{n} des formes binaires de degré n, une forme $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_{\mathsf{n}}$ appartient au nullcone si et seulement si elle possède une racine de multiplicité strictement supérieure à $\mathsf{n}/2$.

Démonstration. Considérons le tore maximal

$$\mathsf{T} = \left\{ \sigma_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathsf{K}^* \right\}$$

de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$. Pour une forme binaire $\mathsf{f} = a_{\mathsf{n}} x^{\mathsf{n}} + a_{\mathsf{n}-1} x^{\mathsf{n}-1} z + \cdots + a_0 z^{\mathsf{n}} \in \mathsf{V}_{\mathsf{n}}$ et $\sigma_\lambda \in \mathsf{T}$, on a

$$\sigma_\lambda \cdot \mathsf{f} = a_{\mathsf{n}} \lambda^{\mathsf{n}} x^{\mathsf{n}} + a_{\mathsf{n}-1} \lambda^{\mathsf{n}-2} x^{\mathsf{n}-1} z + \cdots + a_0 \lambda^{-\mathsf{n}} z^{\mathsf{n}}.$$

Ainsi, d'après le lemme 2.4.2, $\mathsf{f} \in \mathcal{N}_{\mathsf{T},\mathsf{V}_{\mathsf{n}}}$ si et seulement si f est divisible par x^r ou z^r, avec $r = \lfloor \mathsf{n}/2 \rfloor + 1$. Par conséquent, selon le théorème 2.4.3, $\mathsf{f} \in \mathcal{N}_{\mathsf{SL}_2(\mathsf{K}),\mathsf{V}_{\mathsf{n}}}$ si et seulement si f est divisible par $(\sigma \cdot x)^r$, pour un $\sigma \in \mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, d'où la conclusion. *QED*

Nous aboutissons finalement au critère espéré, donné par exemple dans [DK02, Lem. 2.4.5].

Proposition 2.4.5 Si la variété affine définie par les éléments homogènes $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$ est le nullcone $\mathcal{N}_{\mathsf{V}}$, alors $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$ est un $\mathsf{K}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$-module de type fini.

Ce résultat fut initialement énoncé par Hilbert [Hil93] pour le groupe $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$ et se reformule dans ce cas, vu le résultat sur la dimension de Krull de $\mathsf{K}[\mathsf{V}_{\mathsf{n}}]^{\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})}$ donné à l'exemple 2.3.5, de la façon suivante.

Proposition 2.4.6 - Hilbert, 1893.
Pour des éléments homogènes $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2} \in \mathsf{K}[\mathsf{V}_{\mathsf{n}}]^{\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})}$, lorsque $\mathsf{n} \geqslant 3$, s'équivalent

(i) la variété affine définie par $\theta_1, \ldots, \theta_{\mathsf{n}-2}$ est $\mathcal{N}_{\mathsf{V_n}}$;

(ii) $\theta_1, \ldots, \theta_{\mathsf{n}-2}$ est un système homogène de paramètres de $\mathsf{K}[\mathsf{V_n}]^{\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})}$.

Malgré la commodité de ce critère, il n'est en pratique pas si aisé de le mettre en œuvre pour exhiber un système homogène de paramètres pour l'algèbre $\mathsf{K}[\mathsf{V_n}]^{\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})}$, comme on peut s'en convaincre en consultant les calculs menés dans [Shi67, BP10a, BP10b] pour les cas $\mathsf{n} = 8, 10$ et 9 respectivement en caractéristique nulle.

Dixmier donne toutefois un critère [Dix85, Lem. 5.2] permettant d'obtenir le profil des degrés d'un système homogène de paramètres pour l'algèbre $\mathbb{C}[\mathsf{V_n}]^{\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})}$. Il lui permit en pratique d'établir l'existence d'un système homogène de paramètres pour $\mathbb{C}[\mathsf{V}_9]^{\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})}$ avec le profil de degré : 4, 8, 10, 12, 12, 14, 16. Un système explicite correspondant à ces degrés ne fut déterminé qu'un quart de siècle plus tard par Brouwer et Popoviciu [BP10b]. En outre, le critère sur les degrés de Dixmier est exploité dans [BDP14] pour la classification complète des profils de degrés des systèmes homogènes de paramètres des algèbres $\mathbb{C}[\mathsf{V_n}]^{\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})}$ pour $\mathsf{n} \leqslant 8$.

2.5 Modules de syzygies et suites de résolution

Jusqu'à présent, notre attention s'est essentiellement portée sur les générateurs des algèbres d'invariants. Toutefois, comme nous l'avons préalablement évoqué, ces algèbres ne sont pas en général des algèbres de polynômes et il est par conséquent naturel de s'intéresser aux relations entre les éléments d'une famille génératrice minimale, soit la détermination de modules des syzygies. Une fois lancé dans cette direction, rien ne nous empêche de poursuivre en cherchant les relations entre les relations, *etc* ... ce qui mène à la notion de résolution libre minimale pour un S-module graduée et ainsi à une autre forme de décomposition des algèbres d'invariants, alternative à celle de Hironaka introduite à la section 2.3. Pour notre propos, nous nous limitons au cas où l'anneau S est une algèbre de polynômes sur un corps, *e.g.* celle engendrée par un système homogène de paramètres d'une k-algèbre de type fini.

En outre, soulignons que ces relations, ou syzygies, correspondent à une information de nature géométrique relative aux objets en lien avec les modules en questions. À ce sujet, on pourra consulter l'ouvrage, au titre évocateur, de Eisenbud : *The Geometry of Syzygies* [Eis05, Sec. 0B].

On note S la k-algèbre de polynômes $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ et S^r pour un S-module libre de rang r. Dans ce qui suit, M désigne un S-module de type fini, *e.g.* une k-algèbre graduée de type fini considérée comme un $\mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$-module (cf. section 2.3).

Définition 2.5.1 On appelle *module de syzygies* des éléments $\mathsf{m}_1, \ldots, \mathsf{m}_r \in \mathsf{M}$, le sous-module de S^r

$$Syz(\mathsf{m}_1, \ldots, \mathsf{m}_r) = \{(\mathsf{s}_1, \ldots, \mathsf{s}_r) \in \mathsf{S}^r \ / \ \mathsf{s}_1\mathsf{m}_1 + \cdots + \mathsf{s}_r\mathsf{m}_r = 0\}.$$

Autrement dit, il s'agit du noyau M_0 de l'application linéaire $\mathsf{S}^r \to \mathsf{M}, \mathsf{s} \mapsto \sum_{i=1}^r \mathsf{s}_i\mathsf{m}_i$, qui est à nouveau un S-module de type fini, d'après le théorème de la base de Hilbert. On peut alors réitérer ce processus en s'intéressant au module de syzygies de M_0, par l'intermédiaire

d'une application linéaire $d_1 : \mathsf{S}^s \to \mathsf{S}^r$ dont l'image est M_0. Via ce processus, on construit une résolution libre du S-module M, comme nous le définissons ci-après.

Définition 2.5.2 Une *résolution libre* d'un S-module M de type fini est la donnée d'une suite exacte (potentiellement infinie) de S-modules libres

$$\ldots \xrightarrow{d_{i+1}} \mathsf{S}_i \xrightarrow{d_i} \ldots \xrightarrow{d_2} \mathsf{S}_1 \xrightarrow{d_1} \mathsf{S}_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Cette décomposition serait sûrement de peu d'intérêt si elle était infinie, toutefois on dispose du résultat suivant de Hilbert pour les modules de type fini, dont on trouvera une démonstration dans [Eis05, Sec.2A.3].

Théorème 2.5.3 - Théorème des syzygies de Hilbert.
Tout S-module M de type fini admet une résolution libre finie

$$0 \to \mathsf{S}_m \xrightarrow{d_m} \ldots \xrightarrow{d_2} \mathsf{S}_1 \xrightarrow{d_1} \mathsf{S}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathsf{M} \to 0.$$

En outre, M admet une telle résolution libre de longueur $m \leqslant n$, le nombre d'indéterminée de S.

En outre, en choisissant à chaque étape une famille génératrice minimale, on peut rendre cette décomposition unique à isomorphisme près (cf. [Eis05, Sec. 1B]).

Shioda [Shi67] a déterminé la résolution minimale de l'algèbre d'invariants $\mathcal{I}_8$ en caractéristique nulle, que l'on indique au théorème 4.1.1. Pour notre part, nous avons conjecturée une telle résolution pour $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3 et 7 (cf. les conjectures 4.2.6 et 4.3.5).

En pratique, Schreyer [Sch80] a proposé un algorithme générique pour les calculs de modules de syzygies, basé sur les bases de Gröbner. Toutefois, pour l'obtention de nos résultats menant aux conjectures 4.2.6 et 4.3.5, soit le calcul explicite des (premiers) modules de syzygies de l'algèbre d'invariants $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3 et 7, il est bien plus efficace de se ramener à de l'algèbre linéaire via l'utilisation d'une version *ad hoc* de l'algorithme 2 d'écriture d'un invariant relativement à un système de générateurs (cf. section 4.2.2).

2.6 Séries de Hilbert

Pour une k-algèbre graduée de type fini $\mathsf{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{A}_i$, avec $\mathsf{A}_0 = \mathsf{k}$, chaque composante homogène A_i est un k-espace vectoriel de dimension finie. On peut ainsi lui associer la série formelle suivante

$$\mathsf{H}(\mathsf{A}, t) := \sum_{i=0}^{+\infty} \dim_{\mathsf{k}} \mathsf{A}_i \, t^i,$$

appelée *série de Hilbert*[3] de l'algèbre graduée A.

Cette série encode donc les dimensions des composantes homogènes de A et s'avère être un outil puissant pour l'étude des algèbres graduées de type fini. Ne serait-ce déjà que pour minorer le nombres d'invariants fondamentaux nécessaire pour générer l'algèbre A (cf. section 2.2).

3. On recense également les dénominations *série de Poincaré* et *série de Molien*.

On dispose des « règles de calculs » suivantes.

Proposition 2.6.1 Pour trois k-algèbres graduées de type fini $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3$, on a

$$\mathsf{H}(\mathsf{A}_1 \oplus \mathsf{A}_2, t) = \mathsf{H}(\mathsf{A}_1, t) + \mathsf{H}(\mathsf{A}_2, t) \quad \text{et} \quad \mathsf{H}(\mathsf{A}_1 \otimes_{\mathsf{k}} \mathsf{A}_2, t) = \mathsf{H}(\mathsf{A}_1, t)\mathsf{H}(\mathsf{A}_2, t)$$

et si la suite $0 \to \mathsf{A}_1 \to \mathsf{A}_2 \to \mathsf{A}_3 \to 0$ est une suite exacte respectant la graduation, alors

$$\mathsf{H}(\mathsf{A}_1, t) - \mathsf{H}(\mathsf{A}_2, t) + \mathsf{H}(\mathsf{A}_3, t) = 0.$$

Exemple 2.6.2 Puisque $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \simeq \mathsf{k}[x_1] \otimes \ldots \otimes \mathsf{k}[x_n]$, notant d_i le degré de x_i,

$$\mathsf{H}(\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n], t) = \frac{1}{(1 - t^{d_1}) \cdots (1 - t^{d_n})}.$$

Des deux décompositions décrites précédemment pour une algèbre graduée de type fini A, la décomposition de Hironaka pour les algèbres de Cohen-Macaulay (cf. proposition 2.3.6) et la résolution libre (cf. 2.5.3), on déduit, en vertu des règles édictées à la proposition 2.6.1, une écriture sous forme de fraction rationnelle de la série de Hilbert $\mathsf{H}(\mathsf{A}, t)$.

Précisément, si $\mathsf{A} = \eta_1 \mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r] \oplus \cdots \oplus \eta_s \mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$ est une décomposition de Hironaka de l'algèbre A, alors

$$\mathsf{H}(\mathsf{A}, t) = \frac{\sum_{i=1}^{s} t^{e_i}}{(1 - t^{d_1}) \cdots (1 - t^{d_r})}, \tag{2.1}$$

où d_i (resp. e_i) est le degré de θ_i (resp. η_i).

Lorsque le système homogène de paramètres $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ est fixé, les entiers e_i, *i.e.* les degrés des invariants secondaires associés, sont uniquement déterminés, à l'ordre près. Toutefois, lorsque $\mathsf{A} \neq \mathsf{k}$, il existe une infinité de systèmes homogène de paramètres pour A, *e.g.* si $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$ est un système homogène de paramètres, il en va de même de $\{\theta_1^{a_1}, \ldots, \theta_r^{a_r}\}$, pour $a_i \in \mathbb{N}^*$. Ainsi l'écriture de la série de Hilbert sous la forme précédente, *i.e.* $N(t)/(1-t^{d_1}) \ldots (1-t^{d_r})$ avec $N(t)$ un polynôme à coefficients entiers naturels, n'est pas unique. On peut ainsi s'interroger sur le degré d'information que l'on peut déduire d'une telle écriture *a priori*.

Certaines quantités liées à l'écriture (2.1) sont en effet indépendantes du choix $\{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$, et témoignent de propriétés intrinsèques de l'algèbre A (cf. [DK02, Sec. 1.4] et [Shi67, Lem. 1]).

Proposition 2.6.3 Pour une k-algèbre A graduée de type fini, avec $\mathsf{k} = \mathsf{A}_0$,

(i) $H(\mathsf{A}, t)$ est la série entière d'une fraction rationnelle, dont le rayon de convergence est supérieur à 1 et l'ordre du pôle en $t = 1$ est égal au degré de transcendance r de A sur k ;

(ii) si k est de caractéristique nulle, $\mathrm{Frac}(\mathsf{A})$ est une extension de $\mathrm{Frac}(\mathsf{k}[\theta_1, \ldots, \theta_r])$ de degré $s = \deg \theta_1 \cdots \deg \theta_r [\mathsf{H}(\mathsf{A}, t)(1 - t)^r]_{t=1}$.

Le minimum de s pour tous les choix possibles de système homogène de paramètres peut être appelé la *complexité* de A ; ce nombre mesure la distance de A à une algèbre de polynômes.

Les considérations précédentes conduisent alors aux questions suivantes, soulevées par Dixmier [Dix82]. On considère une fraction rationnelle H pouvant s'écrire sous la forme :

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} t^{e_i}}{(1-t^{d_1})\cdots(1-t^{d_r})}, \tag{2.2}$$

où les e_i et les d_i sont des entiers naturels, non nuls à l'exception peut-être de e_1. Appelons *écriture minimale d'une* série de Hilbert H une écriture sous la forme (2.2) pour laquelle s (ou de façon équivalente le produit $d_1 \cdots d_r$) est minimal. Il est aisé de donner des cas où l'écriture minimale n'est pas unique, *e.g.*

$$\frac{1+z+z^2+z^3+z^4}{(1-z^2)(1-z^3)} = \frac{1+z^2+z^3+z^4+z^6}{(1-z)(1-z^6)}.$$

Question I. Ce phénomène de non unicité peut-il se produire dans le contexte des algèbres d'invariants de formes binaires $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$?

Question II. Une écriture minimale de $\mathsf{H}(\mathcal{I}_{\mathsf{n}}, t)$ provient-elle d'un système homogène de paramètres de $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$? Le cas échéant, on parlera d'*écriture représentative.*

Observons immédiatement que la question II est loin d'être anecdotique. En effet, lorsqu'une telle écriture de la série de Hilbert provient d'un système homogène de paramètres d'une algèbre graduée A de type fini et de Cohen-Macaulay, et donc d'une décomposition de Hironaka de celle-ci, elle aboutit à une majoration assez fine des degrés des systèmes de générateurs fondamentaux de A. Précisément la majoration est donnée par $\max\{d_1, \ldots, d_r, e_1, \ldots, e_s\}$. Pour d'autres majorations *a priori* des degrés des générateurs de $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$, voir la section 2.7.

Voici les écritures minimales des séries de Hilbert des algèbres $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ en caractéristique nulle pour $\mathsf{n} \leqslant 8$. Pour la détermination de ces dernières, voir le paragraphe suivant.

$$\begin{gathered}
\mathsf{H}(\mathcal{I}_2, t) = \frac{1}{1-t^2}, \qquad \mathsf{H}(\mathcal{I}_3, t) = \frac{1}{1-t^4}, \qquad \mathsf{H}(\mathcal{I}_4, t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}, \\
\mathsf{H}(\mathcal{I}_5, t) = \frac{1+t^{18}}{(1-t^4)(1-t^8)(1-t^{12})}, \qquad \mathsf{H}(\mathcal{I}_6, t) = \frac{1+t^{15}}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})}, \\
\mathsf{H}(\mathcal{I}_7, t) = \frac{N_1(t)}{(1-t^4)(1-t^8)(1-t^{12})^2(1-t^{20})} = \frac{N_2(t)}{(1-t^4)(1-t^8)^2(1-t^{12})(1-t^{30})}, \\
\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1+t^8+t^9+t^{10}+t^{18}}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7)},
\end{gathered} \tag{2.3}$$

où

$$\begin{aligned}
N_1(t) = 1 + 2t^8 + 4t^{12} + 4t^{14} + 5t^{16} + 9t^{18} + 6t^{20} + 9t^{22} + 8t^{24} + \\
9t^{26} + 6t^{28} + 9t^{30} + 5t^{32} + 4t^{34} + 4t^{36} + 2t^{40} + t^{48}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$N_2(t) = 1 + t^8 + 5t^{12} + 4t^{14} + 3t^{16} + 9t^{18} + 4t^{20} + 5t^{22} + 8t^{24} +$$

$$4t^{26} + 4t^{28} + 8t^{30} + 5t^{32} + 4t^{34} + 9t^{36} + 3t^{38} + 4t^{40} + 5t^{42} + t^{46} + t^{54}. \quad (2.5)$$

L'écriture est unique et provient de système homogène de paramètres pour $2 \leqslant \mathsf{n} \leqslant 6$ (cf. [Gor87, GY03] par exemple) et $\mathsf{n} = 8$ (cf. [Shi67]). La première écriture minimale de $\mathsf{H}(\mathcal{I}_7, t)$ est connue depuis le XIXème siècle, tandis que la seconde a été déterminée par Dixmier [Dix82], qui prouvent également qu'elles proviennent toutes les deux de systèmes homogènes de paramètres. Dixmier [Dix82] évoque également sept écritures minimales pour $\mathsf{H}(\mathcal{I}_9, t)$ et Brouwer et Popoviciu montrent [BP10b] qu'elles proviennent (au moins) pour cinq d'entre elles de systèmes homogènes de paramètres. Pour $\mathsf{n} \geqslant 10$, ces questions n'ont, à notre connaissance, pas été abordées. Notons au passage la complexité des algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ en caractéristique nulle pour $\mathsf{n} \leqslant 8$: 1, 1, 1, 2, 2, 88, 5. Concernant cette question de la représentativité, on peut aussi consulter [Dix85].

Concernant la seconde question, une réponse négative a été donnée pour l'action d'un groupe fini [Sta78, Ex. 3.8]. Pour le cas des algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$, le problème reste, à notre connaissance, ouvert en caractéristique nulle. Pour la caractéristique positive, nous apportons potentiellement une réponse négative, vu nos résultats conjecturaux en caractéristiques 3 et 7 pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ (cf. remarques 4.2.7 et le dernier paragraphe de la section 4.3.2). Nous présumons en effet que la série de Hilbert $\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t)$ en caractéristique nulle, donnée en (2.6), est encore la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3 et 7. Or nous montrons qu'il n'existe pas de système homogène de paramètres avec le profil de degré *ad hoc* en caractéristiques 3 et 7.

Outre ce que nous venons de détailler, en lien avec les décompositions de Hironaka d'une algèbre graduée de type fini, terminons en évoquant l'information en lien avec une résolution libre minimale, en traitant l'exemple de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique nulle (cf. la section 4.1.1 pour une description complète de cette algèbre).

Relativement à cette décomposition sous forme de résolution libre minimale, on réécrit la série de Hilbert en plaçant au dénominateur des facteurs $(1 - t^{d_i})$ pour les degrés correspondant à ceux d'un système de générateurs fondamentaux de l'algèbre, soit dans le cas de $\mathcal{I}_8$:

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1 - \sum_{d=16}^{20} t^d + \sum_{d=25}^{29} t^d - t^{45}}{\prod_{d=2}^{10}(1 - t^d)},$$

relativement au système de générateurs fondamentaux $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}$, où J_i est de degré i.

L'alternance des signes au numérateur reflète alors la règle de calcul, établie à la proposition 2.6.1, concernant la série de Hilbert d'une suite exacte d'algèbres graduées. Dans le cas de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique nulle, on voit apparaître précisément les profils de degrés des éléments de systèmes de générateurs minimaux des modules de syzygies successifs liés aux neuf invariants fondamentaux $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}$. Ces derniers sont ainsi, par exemple, reliés par cinq relations de degrés 16 à 20.

Toutefois, la situation n'est pas toujours aussi claire, dans la mesure où rien n'empêche la superposition des profils de degrés des générateurs de deux modules de syzygies consécutifs, ce qui mènerait à un phénomène de compensation pour le numérateur de la série de Hilbert, vu l'alternance des signes. Nous avons typiquement observé ce phénomène en caractéristique 3 et 7 pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ (cf. sections 4.2.2 et 4.3.2), *e.g.* en caractéristique 3, nous avons exhibé des relations fondamentales entre les générateurs (potentiels) de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ de degrés 22, 23 et 24, or les premières syzygies pour l'ensemble de relations débutent au degré 22.

On peut enfin observer la symétrie dans les degrés des syzygies de l'algèbre $\mathcal{I}_8$, relativement au degré 23 :

$$1 \quad 16, 17, 18, 19, 20 \quad | \quad 25, 26, 27, 28, 29 \quad 45.$$

Ce phénomène correspond à la propriété d'être de Gorenstein de l'algèbre $\mathcal{I}_8$, défini comme [Sta78] :

Définition 2.6.4 Une k-algèbre A graduée de type fini, avec $\mathsf{k} = \mathsf{A}_0$, est dite de *Gorenstein* lorsqu'elle est de Cohen-Macaulay et qu'il existe un entier $l \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\mathsf{H}(\mathsf{A}, 1/t) = (-1)^{\dim_{\mathrm{Krull}} \mathsf{A}} t^l \mathsf{H}(\mathsf{A}, t).$$

Nous venons d'illustrer assez largement l'intérêt de la série de Hilbert d'une algèbre graduée de type fini concernant l'étude de cette dernière. Il est donc avantageux, et même potentiellement crucial comme nous en avons fait l'expérience, de connaître *a priori* cette série. Nous rappelons à ce sujet les résultats et méthodes à l'œuvre pour l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ en caractéristique nulle.

2.6.1 Calculs des séries de Hilbert pour les algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ en caractéristique nulle

Précisément, la notion de série de Hilbert fût historiquement introduite par Cayley [Cay56] dans le cadre de l'étude des algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ sur $\mathbb{C}$. Il conjectura la formule suivante, qui ne fût établie qu'un quart de siècle plus tard par Sylvester [Syl78] :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}_\mathsf{n})_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i\mathsf{n} \text{ est impair,} \\ \left[\frac{i\mathsf{n}}{2}, i, \mathsf{n}\right] - \left[\frac{i\mathsf{n}}{2} - 1, i, \mathsf{n}\right] & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $[w, i, \mathsf{n}]$ désigne le nombre de partition de l'entier w en au plus n entiers au plus égaux à i.

Remarque 2.6.5 On notera la symétrie $[w, \mathsf{d}, \mathsf{n}] = [w, \mathsf{n}, \mathsf{d}]$ qui induit une partie de la loi de réciprocité de Hermite (cf. [Fra80]) :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}_\mathsf{n})_\mathsf{d} = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}_\mathsf{d})_\mathsf{n}.$$

À partir de cette formule, Sylvester et Franklin calculèrent la série de Hilbert de l'algèbre des invariants des formes binaires $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ pour les valeurs $\mathsf{n} \leqslant 10$ [SF79b] et $\mathsf{n} = 12$ [Syl81].

La détermination de la série de Hilbert d'une algèbre d'invariants découle plus généralement de la formule de Molien-Weyl.

Théorème 2.6.6 - Formule de Molien-Weyl [Wey68]. La série de Hilbert liée à une représentation rationnelle de degré fini (V, ρ) d'un groupe compact G s'écrit

$$\mathsf{H}(\mathsf{K}[\mathsf{V}]^\mathsf{G}, t) = \int_\mathsf{G} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - \rho(g)t)} d\mu(g),$$

où $d\mu$ est la mesure de Haar sur G.

Cette formule dérive de considération issue de la théorie des représentations linéaires ou de celle des algèbres de Lie. On pourra consulter [MS93] et [Dix90, §9] à ce sujet pour les algèbres $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$. Notons qu'intervient de façon cruciale l'irréductibilité des $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$-modules V_{d}, qui ne subsiste pas en caractéristique positive. Suivant ce point de vue, Springer [Spr77, Spr80] obtint une forme close de $\mathsf{H}(\mathcal{I}_{\mathsf{n}}, t)$:

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_{\mathsf{n}}, t) = \sum_{0 \leqslant j < \mathsf{n}/2} (-1)^j \varphi_{\mathsf{n}-2j} \left(\frac{(1-t^2)t^{j(j+1)}}{(j, t^2)\,!(\mathsf{n}-j, t^2)\,!} \right)$$

où, pour $d \in \mathbb{N}$, $(d,t)\,! = (1-t)(1-t^2)\dots(1-t^d)$ et l'opérateur φ_d transforme une fonction rationnelle en t en la fonction rationnelle $(\varphi_d f)(t^d) = 1/d \cdot \sum_{j=1}^{d} f(e^{2\pi i j/d} t)$ (cf. [BC79]).

Implantée par Cohen et Brouwer, ces derniers donnèrent des formules explicites pour $\mathsf{n} \leqslant 16$ et $\mathsf{n} = 18$ [BC79]. Littelman et Procesi complétèrent ce travail pour les valeurs paires de n inférieures à 36 [LP90]. On peut accéder à ces résultats en ligne [Bro] pour $\mathsf{n} \leqslant 30$.

Citons enfin l'utilisation de la formule de Molien-Weyl pour le calcul de la série de Hilbert de l'algèbre des invariants des quartiques ternaires (*i.e.* pour l'action de $\mathsf{SL}_3(\mathbb{C})$) par Shioda [Shi67, Appendix] ; calcul à la base des résultats de Dixmier concernant les générateurs de cette algèbre [Dix87], qui furent complétés par Ohno [Ohn05] et Elsenhans [Els15].

2.7 Majorations des degrés des familles de générateurs

À une algèbre graduée de type fini A, on peut associer les deux entiers $\beta(\mathsf{A})$ et $\eta(\mathsf{A})$ définis respectivement comme :

$$\min\{d \mid \mathsf{A} \text{ est engendrée par ses éléments de degré } \leqslant d\} \quad \text{et}$$

$$\min\{d \mid \mathsf{A} \text{ admet un système homogène de paramètres dont les éléments sont de degré } \leqslant d\}.$$

On peut alors essayer de donner *a priori* des bornes pour la valeur $\beta(\mathsf{A})$.

Historiquement, Jordan [Jor76, Jor79] a établi la borne suivante pour les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$:

$$\beta(\mathcal{I}_{\mathsf{n}}) \leqslant \mathsf{n}^6.$$

Dans un cadre plus général, *i.e.* pour une représentation rationnelle V de degré n d'un groupe algébrique linéairement réductif G, Popov [Pop81, Pop82] fournit la borne, à croissance factorielle :

$$\beta(\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}) \leqslant \mathsf{n}\,\mathrm{ppcm}(1, 2, \dots, \eta(\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}})),$$

améliorée par Derksen [Der01] en une borne polynomiale :

$$\beta(\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}) \leqslant \max\left\{2, \frac{3}{8} s\eta(\mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}})\right\},$$

où $s = \dim_{\mathrm{Krull}} \mathsf{K}[\mathsf{V}]^{\mathsf{G}}$.

Toutefois, pour le cas des formes binaires, la borne de Derksen mène à

$$\beta(\mathcal{I}_{\mathsf{n}}) \leqslant \frac{3}{2}(\mathsf{n}+1)\mathsf{n}^6$$

et n'améliore donc pas la borne initiale de Jordan.

Les bornes évoquées précédemment pour $\beta(\mathcal{I}_\mathsf{n})$ sont prohibitives, au sens où elles ne peuvent pas servir en pratique comme valeurs d'arrêt pour la recherche de générateurs de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$. Une telle valeur est en revanche obtenue via la réécriture de la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ en lien avec une décomposition de Hironaka (cf. l'écriture (2.1)). Pour mémoire, si $\mathcal{I}_\mathsf{n} = \eta_1\mathsf{K}[\theta_1,\dots,\theta_r] \oplus \cdots \oplus \eta_s\mathsf{K}[\theta_1,\dots,\theta_r]$ est une telle décomposition, alors

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_\mathsf{n}, t) = \frac{\sum_{i=1}^{s} t^{e_i}}{(1-t^{d_1})\cdots(1-t^{d_r})}, \tag{2.6}$$

où d_i (resp. e_i) est le degré de θ_i (resp. η_i). On a alors de manière évidente

$$\beta(\mathcal{I}_\mathsf{n}) \leqslant \max\{d_i, e_i\}.$$

La table 2.1 compare les valeurs de $\beta(\mathcal{I}_\mathsf{n})$ avec les bornes obtenues d'une part avec le résultat de Jordan et d'autre part avec une écriture représentative de la série de Hilbert, pour $\mathsf{n} \leqslant 10$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta(\mathcal{I}_\mathsf{n})$	2	4	3	18	15	30	10	22	21
Hilbert	2	4	3	18	15	48	18	66	48
Jordan	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441	10^6

TABLE 2.1 – Comparaison de $\beta(\mathcal{I}_\mathsf{n})$ aux bornes de Jordan et de « Hilbert ».

2.8 Obtention effective de familles génératrices

Au risque de se répéter, des familles génératrices minimales pour les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ et $\mathcal{C}_\mathsf{n}$ étaient connues dès le XIXème siècle pour $\mathsf{n} = 2,\dots,6$ et 8 ; modulo une petite imprécision concernant $\mathcal{C}_8$ qui fut seulement corrigée par Bedratyuk [Bed08]. Leurs obtentions résultaient de la mise en œuvre de la méthode introduite par Clebsch et Gordan, évoquée à la section 1.2.2.

Le cas $\mathsf{n} = 7$ connut une histoire plus rocambolesque, débutant avec la conjecture erronée de Cayley [Cay56], qui pensait que l'algèbre $\mathcal{I}_7$ n'était pas de type fini, et s'achevant avec les résultats de Bedratyuk [Bed07, Bed09], obtenus via des méthodes infinitésimale sur les semi-invariants, qui prolongeaient des résultats partiels de von Gall [Gal88] et Dixmier et Lazard [DL88]. Observons seulement que, contrairement aux autres cas pour $\mathsf{n} \leqslant 8$ pour lesquels les systèmes minimaux de générateurs sus-cités possèdent moins de dix éléments, lorsque $\mathsf{n} = 7$ ce nombre est de trente.

L'utilisation de la méthode de Clebsch et de Gordan, basée sur des opérations de transvection, s'effectuait dans le cadre de la méthode dite *symbolique*, qui fut introduite par Cayley [Cay45], Aronhold [Aro63] et Clebsch [Cle61]. Cette dernière consiste à réduire les calculs sur les formes binaires de degré n au cas spécifiques des puissances $\mathsf{n}^{\text{èmes}}$ de formes linéaires $(\alpha x + \beta z)^\mathsf{n}$. Un traité classique sur le sujet est l'ouvrage de Grace et Young [GY03]. À notre connaissance, cette approche, ainsi que sa reformulation en terme d'*Umbral calculus*, realisée notamment par Kung et Rota [KR84], n'ont pas permis d'obtenir d'autres résultats significatifs.

En revanche, la méthode de Gordan peut être réinterprétée via la théorie des représentations, ce que firent par exemple Weyl et Weyman [Wey39, Wey93]. Cette voie a été admirablement mise à profit et prolongée par Olive [Oli14], lui permettant d'obtenir des familles génératrices minimales de covariants pour les formes binaires jointes $\mathsf{V}_6 \oplus \mathsf{V}_4$ et $\mathsf{V}_6 \oplus \mathsf{V}_4 \oplus \mathsf{V}_2$ et d'invariants pour $\mathsf{V}_6 \oplus \mathsf{V}_4 \oplus \mathsf{V}_2 \oplus \mathsf{V}_2$ et $\mathsf{V}_8 \oplus \mathsf{V}_4 \oplus \mathsf{V}_4$, avec une application directe pour la description des tenseurs d'élasticité en mécanique. En outre, dans un travail commun avec Lercier [LO14], il a obtenu des familles génératrices minimales pour les algèbres $\mathcal{C}_9$ et $\mathcal{C}_{10}$.

L'autre approche féconde consiste à utiliser la propriété de Cohen-Macaulay et la connaissance de la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ en caractéristique nulle. Cette stratégie nécessite tout de même d'être capable d'exhiber un système homogène de paramètres de $\mathcal{I}_\mathsf{n}$, tâche qui se révèle assez ardue du fait de l'absence de méthode systématique efficiente. On peut toutefois à ce sujet évoquer les travaux de Dixmier [Dix85] et Brouwer, Draisma et Popoviciu [BDP14] qui donnent des critères sur les profils de degrés des systèmes homogènes de paramètres des $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$.

Cette approche fut tout de même suivie avec succès par Shioda [Shi67], qui obtint par ce biais une description complète de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ (cf. la section 4.1).

Plus récemment, suivant cette idée, Popoviciu et Brouwer [BP10a, BP10b], en obtenant les bornes de « Hilbert » explicites de $\beta(\mathcal{I}_\mathsf{n})$ évoquées à la section précédente, ont pu déterminer des familles génératrices minimales de $\mathcal{I}_9$ et $\mathcal{I}_{10}$. Selon ce même schéma, Popoviciu [PD14] donne également des familles génératrices minimales pour les formes jointes $\mathsf{V}_2 \oplus \mathsf{V}_5$ et $\mathsf{V}_3 \oplus \mathsf{V}_4$.

Pour clore cette section, signalons quand même les algorithmes génériques pour la détermination de systèmes de générateurs pour des algèbres d'invariants $\mathsf{K}[\mathsf{V}]^\mathsf{G}$ proposés par Derksen [Der99], pour le cas où G est un groupe algébrique linéairement réductif, et par Kemper [DK08], pour le cas où G est un groupe algébrique réductif. Néanmoins, à notre connaissance, outre des exemples en petites dimensions, ces algorithmes ne permettent pas d'obtenir de résultats nouveaux concernant les algèbres $\mathcal{I}_\mathsf{n}$.

2.9 L'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ en caractéristique positive

Si l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ pour les formes binaires définies sur $\mathbb{C}$ est intensivement étudiée depuis le milieu du XIXème siècle, elle l'a beaucoup moins été pour les corps de caractéristique positive. Dorénavant on suppose donc la caractéristique p des corps k et K positive.

Malheureusement, les méthodes qui viennent d'être décrites au paragraphe précédent s'adaptent mal au cas de la caractéristique positives petites, précisément lorsque $\mathsf{p} < \mathsf{n}$, comme le suggère le théorème 2.9.2 ci-après ; cas sur lesquels nous portons justement notre intérêt pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$.

Une des difficulté liée à la caractéristique positive, réside en la perte du caractère linéairement réductif du groupe algébrique $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ (cf. théorème A.3.4). Se pose dès lors la question de la finitude de la K-algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$, le théorème 2.1.4 de finitude de Hilbert ne suffisant plus en effet pour conclure. Toutefois, ce théorème admet une généralisation au cas des groupes algébriques géométriquement réductifs, établie pas Nagata [Nag63].

Théorème 2.9.1 - Nagata. Si G est un groupe algébrique géométriquement réductif et X une G-variété affine, alors $\mathsf{K}[\mathsf{X}]^\mathsf{G}$ est une K-algèbre de type fini.

Or le groupe algébrique linéaire connexe $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ est semi-simple, donc réductif et ainsi géométriquement réductif, d'après le théorème de Haboush (cf. théorème A.3.8).

De la finitude de l'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ en caractéristique positive, on déduit l'existence de systèmes homogènes de paramètres (conséquence du lemme de normalisation de Noether) et d'une résolution libre minimale (théorème 2.5.3 des syzygies de Hilbert).

En revanche, le théorème de Hochster-Roberts ne s'applique plus et l'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ ne possède plus *a priori* la propriété d'être de Cohen-Macaulay. Autrement dit, pour un système homogène de paramètres donné $\{\theta_1, \ldots, \theta_{\mathsf{n}-2}\}$, l'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ se réalise comme un $\mathsf{K}[\theta_1, \ldots, \theta_r]$-module de type fini plus nécessairement libre. Une conséquence directe est l'impossibilité d'obtenir une borne fine sur la quantité $\beta(\mathcal{I}_{\mathsf{n}})$, introduite à la section 2.7, via l'approche basée sur la connaissance de la série de Hilbert et d'un système homogène de paramètres de l'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$.

On peut néanmoins tempérer cette disconvenue, dans la mesure où, à notre connaissance, on ne connaît pas les séries de Hilbert des algèbres $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ pour des corps de n'importe quel caractéristique positive.

On peut enfin noter que, d'après [Hoc78, §2 p. 294], l'anneau $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ est intégralement clos.

Pour terminer les remarques générales sur ce sujet, indiquons le résultat majeur de Geyer [Gey74, Satz 13] concernant la caractéristique positive, qui permet de relier la structure de l'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ en caractéristique positive $\mathsf{p} > \mathsf{n}$ à celle obtenue en caractéristique nulle.

Théorème 2.9.2 - Geyer, 1974. Pour un entier naturel $\mathsf{n} \geqslant 2$, notant $\mathsf{A} = \mathbb{Z}[1/\mathsf{p} \mid \mathsf{p} \leqslant \mathsf{n}]$, on a, pour toute A-algèbre B,

$$\mathcal{I}_{\mathsf{n}}(\mathsf{B}) = \mathcal{I}_{\mathsf{n}}(\mathsf{A}) \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{B}.$$

Ainsi, en caractéristique $\mathsf{p} > \mathsf{n}$, les propriétés de l'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$ sont les mêmes qu'en caractéristique nulle : même série de Hilbert, algèbre de Cohen-Macaulay, mêmes grandeurs caractéristiques pour les décompositions de Hironaka ou sous forme de résolution libre minimale, *etc* ...

Malheureusement, ce théorème ne recouvre pas les cas qui nous intéressent lorsque $\mathsf{n} = 8$, d'où nos résultats partiels au chapitre 4.

2.10 L'exemple des quartiques binaires

Avant de passer à l'étude de l'algèbre $\mathcal{I}_8$, qui fait l'objet du chapitre 4, illustrons ce qui précède avec le cas des quartiques binaires, *i.e.* lorsque $\mathsf{n} = 4$. L'exemple est naturellement quelque peu futile, puisque $\mathcal{I}_4$ est toujours une algèbre de polynômes en deux indéterminées. Toutefois les résultats afférents nous serons utiles à la section 8.3.2.

En vertu du résultat dû à Geyer (théorème 2.9.2), il faut distinguer selon que la caractéristique p de k est ou non différente de 3 (excluant *a priori* le cas $\mathsf{p} = 2$).

2.10.1 Cas générique, *i.e.* $\mathsf{p} = 0$ ou $\mathsf{p} \geqslant 5$

Soit $\mathsf{q} = a_4x^4 + a_3x^3z + a_2x^2z^2 + a_1xz^3 + a_0z^4$ une quartique binaire définie sur k, avec $\mathsf{p} = 0$ ou $\mathsf{p} \geqslant 5$. On définit les deux invariants suivants [4] pour q :

$$\mathsf{I} = 12a_4a_0 - 3a_3a_1 + a_2^2 \quad \text{et} \quad \mathsf{J} = 72a_4a_2a_0 + 9a_3a_2a_1 - 27a_4a_1^2 - 27a_0a_3^2 - 2a_2^3, \tag{2.7}$$

comme dans [CF09].

Ces deux invariants sont algébriquement indépendants et on a $\mathcal{I}_4 = \mathsf{k}[\mathsf{I}, \mathsf{J}]$, qui est donc une algèbre de polynômes. Le discriminant de la quartique q est alors donné par $\Delta = 4\mathsf{I}^3 - \mathsf{J}^2$ et la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_4$ est

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_4, t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}.$$

Étant donné $\mathsf{I}, \mathsf{J} \in \mathsf{k}$ tels que $\Delta \neq 0$, on peut facilement reconstruire une forme K-isomorphe à q, *e.g.*

$$x^3z - 27\mathsf{I}^3/\mathsf{J}^2xz^3 - 27\mathsf{I}^3/\mathsf{J}^2z^4, \quad \text{si } \mathsf{J} \neq 0 \quad \text{et} \quad x^3z + xz^3 \quad \text{sinon.} \tag{2.8}$$

Enfin, on est en mesure de lire le groupe d'automorphismes d'une quartique binaire sur ses invariants I et J.

Proposition 2.10.1 - [LRS13, Prop. 2.6]. Soit q une quartique binaire sur k de discriminant non nul, alors

$$\mathrm{Aut}(\mathsf{q}) \simeq \begin{cases} \mathfrak{A}_4 & \text{si } \mathsf{I} = 0 \ ; \\ \mathbf{D}_4 & \text{si } \mathsf{J} = 0 \ ; \\ \mathbf{D}_2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarque 2.10.2 D'un point de vue géométrique, ces formes binaires sont reliées aux courbes elliptiques. En particulier, l'invariant modulaire j, qui paramétrise l'espace de modules des courbes elliptiques, s'exprime rationnellement en les invariants I et J ; précisément

$$\mathsf{j} = 4 \cdot 1728 \frac{\mathsf{I}^3}{4\mathsf{I}^3 - \mathsf{J}^2}.$$

4. Historiquement les deux invariants I et J furent découverts au début de la théorie (1840–1850) par Boole, Cayley et Eisenstein et donnés sous la forme

$$\mathsf{I} = ae - 4bd + 3c^2 \quad \text{et} \quad \mathsf{J} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3,$$

mais pour la forme $\mathsf{q} = ax^4 + 4bx^3z + 6cx^2z^2 + 4dxz^3 + ez^4$; où l'on reconnaîtra les coefficients binomiaux $\binom{4}{i}$.

2.10.2 Cas de la caractéristique 3

Soit $\mathsf{q} = a_4x^4 + a_3x^3z + a_2x^2z^2 + a_1xz^3 + a_0z^4$ une quartique binaire sur k, avec $\mathsf{p} = 3$. On définit les deux invariants suivants pour q :

$$\begin{aligned} \mathsf{I} &= a_2 \quad \text{et} \\ \mathsf{J} &= a_0^3a_4^3 + a_0^2a_2^2a_4^2 + a_0a_1a_2^2a_3a_4 + a_0a_2^4a_4 + 2a_0a_2^3a_3^2 + 2a_1^3a_3^3 + 2a_1^2a_2^3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ces deux invariants sont à nouveau algébriquement indépendants et on a $\mathcal{I}_4 = \mathsf{k}[\mathsf{I}, \mathsf{J}]$, qui est donc également une algèbre de polynômes. Le discriminant de la quartique q n'est autre que J et la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_4$ est

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_4, t) = \frac{1}{(1-t)\,(1-t^6)}.$$

On notera ainsi que la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_4$ diffère selon la caractéristique.

Étant donné $\mathsf{I}, \mathsf{J} \in \mathsf{k}$ tels que $\mathsf{J} \neq 0$, on peut facilement reconstruire une forme K-isomorphe à q, *e.g.*

$$x^3z + \mathsf{I}x^2z^2 + 2\mathsf{J}/\mathsf{I}^3z^4, \qquad \text{si } \mathsf{I} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad x^3z + xz^3 \qquad \text{sinon.} \tag{2.11}$$

Enfin, nous sommes toujours en mesure de lire le groupe d'automorphismes d'une quartique binaire en caractéristique 3, grâce à l'invariant I. Comparativement au résultat en caractéristique nulle, on notera l'absence du cas $\mathfrak{A}_4$, dont l'ordre est un multiple de 3.

Proposition 2.10.3 Soit q une quartique binaire sur k de discriminant non nul, alors

$$\mathrm{Aut}(\mathsf{q}) \simeq \begin{cases} \mathbf{D}_4 & \text{si } \mathsf{I} = 0 \ ; \\ \mathbf{D}_2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Démonstration. Soit $\Lambda \subset \mathbb{P}^1(\mathsf{K})$ l'ensemble des quatre racines de q, pour lequel on a alors $\mathrm{Aut}(\mathsf{q}) \simeq \mathrm{Stab}\,\Lambda \subset \mathfrak{S}_\Lambda$. Du fait de l'action 3-transitive de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathsf{K})$, il est loisible de supposer que $\Lambda = \{0, 1, \infty, \lambda\}$, avec $\lambda \in \mathsf{K} \setminus \{0, 1\}$. La transformation $x \mapsto \lambda/x$ induit la permutation $(0\,\infty)(1\,\lambda)$ et, par symétrie, $\mathrm{Stab}\,\Lambda$ contient donc le sous-groupe d'ordre 4 formé des trois doubles transpositions de $\mathfrak{S}_\Lambda$, isomorphe à $\mathbf{D}_2$.

Il s'agit donc finalement d'examiner sous quelles conditions $\mathrm{Stab}\,\Lambda$ contient strictement $\mathbf{D}_2$. Or $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathfrak{S}_\Lambda \supset \mathrm{Stab}\,\Lambda$ s'insère dans la suite exacte scindée $1 \to \mathbf{D}_2 \to \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3 \to 1$ et tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$ de même ordre sont conjugués. Ainsi cela revient à déterminer sous quelles conditions $\mathrm{Stab}\,\Lambda$ possède une transposition ou un 3-cycle supplémentaire, le premier cas donnant lieu au cas exceptionnel en (2.12).

Commençons par nous demander pour quel λ la permutation $(1\,\lambda)$ appartient à $\mathrm{Stab}\,\Lambda$. Cette permutation fixe 0 et ∞, ainsi l'homographie associée est de la forme $x \mapsto cx$, ce qui impose $c = -1$, donc $\lambda = 1$ et *in fine* $\mathsf{I} = 0$.

Si la permutation $(0\,1\,\lambda)$ appartient à $\mathrm{Stab}\,\Lambda$, puisque celle-ci fixe ∞, l'homographie associée est de la forme $x \mapsto ax + b$. Un simple calcul montre alors que λ vaut nécessairement 1, ce qui est exclu.

Finalement, $\mathrm{Stab}\,\Lambda$ possède une transposition supplémentaire, lorsque $\mathsf{I} = 0$, mais ne peut contenir de 3-cycle, d'où le résultat. *QED*

Chapitre 3

Interlude : quartiques ternaires et invariants de Lüroth

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux quartiques de Lüroth, *i.e.* les quartiques planes passant par les dix sommets d'un pentalatéral non dégénéré. Ces quartiques sont reliées à un invariant pour les quartiques ternaires sous l'action de $\mathsf{SL}_3(\mathbb{C})$ de degré 54, l'invariant de Lüroth, mis en évidence par Morley [Mor19]. Avant l'obtention de nos propres résultats à ce sujet en collaboration avec Lercier, Ritzenthaler et Sijsling, qui ont donné lieu à la publication [BLRS13], aucune expression explicite de cet invariant n'était connue. Dans un premier temps, nous présentons ainsi la méthode qui nous a permis d'expliciter l'expression de cet invariant de Lüroth en termes des invariants de Dixmier-Ohno. Par la suite, nous confrontons notre résultat à la décomposition de l'invariant de Lüroth pour les quartiques de Ciani, obtenue dans [HS14, Sec.5], et nous répondons à deux questions soulevées dans [OS11], concernant l'existence d'invariants en lien avec des lieux de quartiques de Lüroth singulières.

Dans ce qui suit, V désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3.

3.1 Quartiques de Lüroth

Définition 3.1.1 Un *pentalatéral non dégénéré* dans le plan projectif $\mathbb{P}\mathsf{V}$ est une courbe $\mathsf{P} \subset \mathbb{P}\mathsf{V}$ formée par l'union de cinq droites $\ell_1, \ldots, \ell_5$ linéairement indépendantes, ce qui revient à dire que les intersections deux à deux de ces droites ℓ_i correspondent à dix points distincts exactement.

Les *sommets* d'un pentalatéral non dégénéré P sont les points doubles de P, *i.e.* les dix points $\bigcup_{i \neq j}((\ell_i = 0) \cap (\ell_j = 0))$.

Définition 3.1.2 Une quartique lisse $\mathsf{Q} \subset \mathbb{P}\mathsf{V}$ est appelée une *quartique de Lüroth lisse* lorsqu'elle contient les sommets d'un pentalatéral non dégénéré de $\mathbb{P}\mathsf{V}$.

L'ensemble des quartiques planes de $\mathbb{P}\mathsf{V}$ peut être identifié avec l'espace projectif $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(\mathsf{V}^*)$ sur la quatrième puissance symétrique du dual de V. Celui-ci hérite alors d'une action du groupe $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ et de son sous-groupe $\mathsf{SL}(\mathsf{V})$, qui agissent canoniquement sur V. Choisissant une base, ce que nous ferons lors de nos calculs, V s'identifie à $\mathbb{C}^3$ et l'ensemble des quartiques $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(\mathsf{V}^*)$ au projectivisé de l'espace vectoriel sur les monômes homogènes de degré 4 en la base canonique

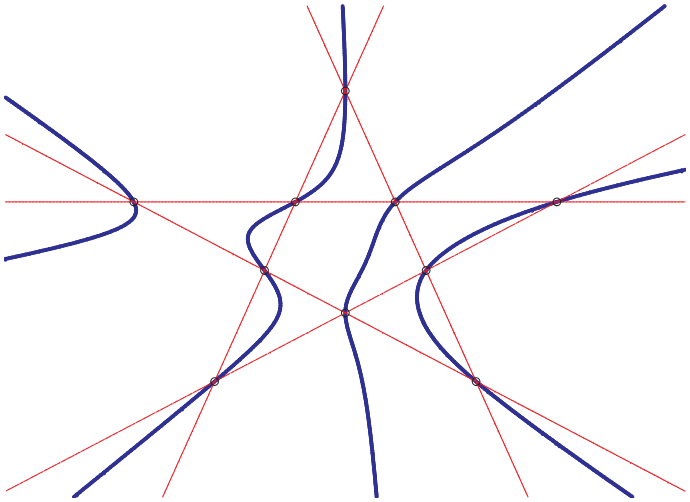

FIGURE 3.1 – Une quartique de Lüroth.

x, y, z de l'espace dual $(\mathbb{C}^3)^*$. Cet espace s'identifie alors, via le choix d'un ordre sur ces quinze monômes, à $\mathbb{P}^{14}$ qui hérite à son tour d'une action de $\mathsf{GL}_3(\mathbb{C})$ et $\mathsf{SL}_3(\mathbb{C})$.

L'étude classique des quartiques de Lüroth culmina en 1919 avec les travaux de Morley [Mor19]. Ce dernier établit que la fermeture de Zariski du lieu des quartiques de Lüroth lisses dans l'espace projectif $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(\mathsf{V}^*)$ est une hypersurface irréductible décrite par l'annulation d'une unique fonction polynomiale L de degré 54 sur l'espace projectif des quartiques $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(\mathsf{V}^*)$, définie à un scalaire près. On appellera ce polynôme L l'*invariant de Lüroth*.

Définition 3.1.3 Une quartique $\mathsf{Q} \subset \mathbb{P}\mathsf{V}$ est appelée une *quartique de Lüroth* lorsque $\mathsf{L}(\mathsf{Q}) = 0$.

Récemment, suite au travail séminal de [Bar77], plusieurs auteurs ont ravivé ce sujet [BvB12, OS10, OS11, Ott13] (voir aussi [PS12] sur l'« invariant d'inflexion »).

Toutefois, une expression explicite de L manquait encore. Au paragraphe suivant, nous expliquons comment déterminer une telle expression, essentiellement en faisant usage de l'algorithme 2 de réécriture d'un invariant selon une famille de générateurs et, en l'occurrence, d'un système complet de générateurs pour les invariants des quartiques ternaires sous l'action de $\mathsf{SL}_3(\mathbb{C})$, exhibé par Ohno [Ohn05] (non publié) en complément des invariants primaires déterminés par Dixmier [Dix87]. Ces invariants ont déjà été utilisés dans [GK06] et une nouvelle méthode effective pour vérifier leur correction peut être trouvée dans [Els15]. Pour nos calculs, nous nous sommes basés sur l'implantation de ces invariants sous MAGMA réalisée par Kohel.

3.2 L'expression de l'invariant de Lüroth

Le point clé consiste en l'observation suivante.

Proposition 3.2.1 La fonction polynomiale homogène L sur $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(\mathsf{V}^*)$ est $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$-invariante, à un scalaire près. En particulier, L est $\mathsf{SL}(\mathsf{V})$-invariante.

Démonstration. Puisque nous travaillons sur le corps algébriquement clos $\mathbb{C}$, il suffit de remarquer que toute $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$-transformation d'une quartique de Lüroth est encore une quartique de Lüroth. *QED*

Soit

$$\mathcal{I} = \mathbb{C}[\mathbb{P}\operatorname{Sym}^4(\mathsf{V}^*)]^{\mathsf{SL}(\mathsf{V})}$$

l'algèbre graduée des fonctions polynomiales $\mathsf{SL}(\mathsf{V})$-invariantes sur $\mathbb{P}\operatorname{Sym}^4(\mathsf{V}^*)$, qui coïncide avec celles $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$-invariantes à un scalaire près (comme pour les formes binaires). La structure de l'algèbre $\mathcal{I}$ est connue ; Shioda en a notamment déterminé la série de Hilbert [Shi67, p. 1045] :

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}, t) = \frac{N(t)}{(1-t^3)(1-t^6)(1-t^9)(1-t^{12})(1-t^{15})(1-t^{18})(1-t^{27})}$$

où

$$\begin{aligned} N(t) = 1 &+ t^9 + t^{12} + t^{15} + 2t^{18} + 3t^{21} + 2t^{24} + 3t^{27} + 4t^{30} + 3t^{33} + 4t^{36} \\ &+ 4t^{39} + 3t^{42} + 4t^{45} + 3t^{48} + 2t^{51} + 3t^{54} + 2t^{57} + t^{60} + t^{63} + t^{66} + t^{75}. \end{aligned}$$

Cette écriture correspond à une décomposition de Hironaka de l'algèbre $\mathcal{I}$. Précisément, les invariants primaires $\mathsf{I} = (\mathsf{I}_3, \mathsf{I}_6, \mathsf{I}_9, \mathsf{I}_{12}, \mathsf{I}_{15}, \mathsf{I}_{18}, \mathsf{I}_{27})$ ont été explicités par Dixmier [Dix87] et cette famille peut être complétée en une famille de générateurs fondamentaux par $\mathsf{J} = (\mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}, \mathsf{J}_{15}, \mathsf{J}_{18}, \mathsf{J}_{21}, \mathsf{J}'_{21})$, explicitement déterminée par Ohno [Ohn05]. Dans les deux cas, les indices indiquent le degré de l'invariant comme fonction homogène. Notons que I_{27} n'est rien d'autre que le discriminant d'une quartique ternaire.

Finalement, on a

Théorème 3.2.2 - Dixmier-Ohno. $\mathcal{I} = \mathbb{C}[\mathsf{I}, \mathsf{J}]$.

Ces résultats avaient été conjecturés par Shioda [Shi67, Appendix] qui prédit en outre les paramètres de la résolution libre minimale de l'algèbre $\mathcal{I}$, qui, à notre connaissance, n'a pas encore été explicitée.

On se donne dorénavant une base pour V et un système de coordonnées correspondant pour $\mathbb{P}\operatorname{Sym}^4(\mathsf{V}^*) \simeq \mathbb{P}^{14}$, vu comme l'espace projectif sur les monômes de degré 4 en x, y et z. L'invariant L devient ainsi une expression en les coefficients de ces monômes. Il est toutefois improbable de pouvoir donner l'expression de L en termes de ces coefficients (voir la remarque finale de la section 3.5). En revanche, en vertu de la proposition 3.2.1 et du théorème 3.2.2, L s'exprime comme un polynôme en les invariants I et J. Cette expression n'est toutefois pas unique, étant donné l'existence de relations de degré 54 entre ces invariants.

Pour obtenir l'expression de L en termes des invariants I et J, nous nous basons sur la méthode d'évaluation-interpolation de l'algorithme 2, en lien avec les observations de la proposition ci-après.

Proposition 3.2.3 Soit $\mathsf{A} = \mathbb{C}[x_3, \ldots, x_{27}, y_9, \ldots, y_{21}, y'_{21}]$ une algèbre graduée de polynômes en 13 variables, les poids étant donnés par les indices, et considérons la surjection f donnée par

$$\mathsf{f} : \mathsf{A} \longrightarrow \mathcal{I}, x_k \mapsto \mathsf{I}_k, \mathsf{y}_k \mapsto \mathsf{J}_k.$$

Soit $\mathcal{I}_{54}$ (resp. A_{54}) la composante homogène de degré 54 de $\mathcal{I}$ (resp. A) et K le noyau de l'application $\mathsf{A}_{54} \to \mathcal{I}_{54}$ induite par f. Alors $\dim_{\mathbb{C}} K = 215$.

Soit X un ensemble fini de quartiques de Lüroth et considérons l'application linéaire

$$\mathsf{f}' : \mathsf{A}_{54} \to \mathbb{C}^X$$

correspondant en l'évaluation polynomiale en les éléments de X. Soit K' le noyau de f' et supposons que $\dim_{\mathbb{C}} K' = 216$. Alors, pour tout élément L' de $K' \backslash K$, l'image $\mathsf{f}(\mathsf{L}')$ correspond à l'invariant de Lüroth.

Démonstration. On calcule aisément que $\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{A}_{54} = 1380$ et, via la série de Hilbert de $\mathcal{I}$, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{I}_{54} = 1165$, soit le résultat escompté $\dim_{\mathbb{C}} K = 215$. La suite est claire, étant donné l'unicité de L à un scalaire près. *QED*

Les calculs menant au résultat sont ainsi les suivants.

(i) Construire les 1380 monômes

$$\mathcal{B} = \{\mathsf{I}_3^{18}, \mathsf{I}_3^{16}\mathsf{I}_6, \mathsf{I}_3^{15}\mathsf{I}_9, \mathsf{I}_3^{15}\mathsf{J}_9, \ldots, \mathsf{J}_{18}^3, \mathsf{I}_{27}^2\}$$

de degré 54 qui génèrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des invariants de degré 54.

(ii) Générer un ensemble fini $\mathcal{Q}$ de cardinal q suffisamment grand de quartiques planes aléatoires à coefficients rationnels.

(iii) Générer un ensemble fini $\mathcal{L}$ de cardinal l suffisamment grand de quartiques de Lüroth aléatoires de la forme

$$\ell_1\ell_2\ell_3\ell_4 + c_1 \cdot \ell_2\ell_3\ell_4\ell_5 + c_2 \cdot \ell_1\ell_3\ell_4\ell_5 + c_3 \cdot \ell_1\ell_2\ell_4\ell_5 + c_4 \cdot \ell_1\ell_2\ell_3\ell_5$$

où $\ell_1 = x$, $\ell_2 = y$, $\ell_3 = z$, $\ell_4 = x + y + z$, ℓ_5 est une droite à coefficients rationnels et les c_i sont des rationnels.

(iv) Calculer la matrice $M_1 = (I(q))_{I \in \mathcal{B}, q \in \mathcal{Q}}$, en évaluant les monômes de $\mathcal{B}$ en les quartiques de $\mathcal{Q}$.

(v) Calculer la matrice $M_2 = (I(q))_{I \in \mathcal{B}, q \in \mathcal{Q}}$, en évaluant les monômes de $\mathcal{B}$ en les quartiques de Lüroth de $\mathcal{L}$.

(vi) Calculer le noyau N_1 de dimension 215 de M_1, soit une base des relations homogènes de degré 54 satisfaites par les éléments de $\mathcal{B}$, *i.e.* de $\mathcal{I}_{54}$.

(vii) Calculer le noyau N_2 de dimension 216 de M_2, soit une base des relations homogènes de degré 54 satisfaites par les quartiques de Lüroth.

(viii) Tout élément non nul d'un supplémentaire de N_1 dans N_2 fournit alors une expression de L en termes des invariants de Dixmier-Ohno.

Tous ces calculs ont été effectués sous Magma. Sur un corps fini premier de cardinal $\mathsf{p} = 2017$, 10007, 100003 ou même 1000003, ces opérations prennent moins d'une minute. En revanche, obtenir ce résultat sur le corps des rationnels est moins aisé. Il s'agit essentiellement de rendre les coefficients des matrices M_1 et M_2 les plus petits possibles Ainsi à l'étape (ii) de l'algorithme, nous générons des quartiques planes avec des entiers aléatoires restreints à $\{-1, 0, 1\}$. Et de la même manière, les coefficients c_i de l'étape (iii) sont bornés en valeur absolue par 4.

On peut estimer la taille de nos calculs grâce à l'inégalité de Hadamard pour les matrices M_1 et M_2. En l'occurrence, via nos choix pour les quartiques, nous obtenons des bornes légèrement inférieures à $2^{200\,000}$ pour M_1 et $2^{350\,000}$ pour M_2.

Les phases de l'algorithme les plus coûteuses en temps sont les étapes (vi) et (vii), qui durent respectivement 5 et 9 heures sur une machine équipée d'un processeur Intel Core i7 M620 2.67GHz.

Un programme pour obtenir l'invariant de Lüroth L est disponible en ligne[1]. Il est basé sur l'implantation sous Magma des invariants de Dixmier-Ohno réalisée par Kohel[2]. Enfin, l'expression de L se concrétise en un fichier de 1,4 Mo également disponible en ligne[3]. Elle est formée de 1164 termes à coefficients rationnels, dont le plus large est le quotient d'un entier de 680 chiffres premier à un entier de 671 chiffres. Modulo 1000003, cette expression commence par :

$$\begin{aligned}
&I_3^{18} + 469313 I_3^2 I_6^8 + 710780 I_6^9 + 969230 I_3^3 I_6^6 I_9 + 374233 I_3 I_6^7 I_9 + 276144 I_3^2 I_6^5 I_9^2 \\
&\quad + 602674 I_6^6 I_9^2 + 527614 I_3^3 I_6^3 I_9^3 + 538637 I_3 I_6^4 I_9^3 + 392526 I_3^4 I_6 I_9^4 + 645841 I_3^2 I_6^2 I_9^4 \\
&\quad + 914224 I_6^3 I_9^4 + 207808 I_3^3 I_9^5 + 31577 I_3 I_6 I_9^5 + 635768 I_9^6 + 668878 I_3^{15} J_9 \\
&\quad + 507293 I_3^3 I_6^6 J_9 + 318476 I_3 I_6^7 J_9 + 59775 I_3^2 I_6^5 I_9 J_9 + 581086 I_6^6 I_9 J_9 + 830307 I_3^3 I_6^3 I_9^2 J_9 \\
&\quad + 804817 I_3 I_6^4 I_9^2 J_9 + 6418 I_3^6 I_9^3 J_9 + 578316 I_3^4 I_6 I_9^3 J_9 + 741618 I_3^2 I_6^2 I_9^3 J_9 + 452974 I_6^3 I_9^3 J_9 \\
&\quad + 36214 I_3^3 I_9^4 J_9 + 522408 I_3 I_6 I_9^4 J_9 + 253043 I_9^5 J_9 + 469299 I_3^2 I_6^5 J_9^2 + \dots
\end{aligned}$$

3.3 Quartiques de Ciani

Nous nommons *quartique de Ciani* toute quartique plane de la forme

$$ax^4 + bx^2y^2 + cx^2z^2 + dy^4 + ey^2z^2 + fz^4.$$

Une quartique de Ciani a un groupe d'automorphismes isomorphe à $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$ et, réciproquement, toute quartique avec cette propriété est $\mathbb{C}$-isomorphe à une quartique de Ciani.

Dans [HS14, Sec.5], Hauenstein et Sottile montrent que l'invariant de Lüroth sur les quartiques de Ciani se factorise sous la forme

$$G^4\, H^2\, J$$

avec $G, H, J \in \mathbb{C}[a, b, c, d, e, f]$ homogènes de degrés respectifs $6, 9$ et 12. À partir de notre expression de L, il est aisé de confirmer cette décomposition ; nous en donnons une version légèrement différente, dans la mesure où les coefficients b, c, e sont remplacés par $2b, 2c, 2c$ dans [HS14, Sec.5] :

$$G = a \cdot d \cdot f \cdot (adf - (1/4)ae^2 - (1/4)b^2 f - (1/4)bce - (1/4)c^2 d),$$

$$\begin{aligned}
H = &\left(adf - (1/4)ae^2 - (1/4)b^2 f + (1/4)bce + (3/4)c^2 d\right) \\
&\left(adf - (1/4)ae^2 + (3/4)b^2 f + (1/4)bce - (1/4)c^2 d\right) \\
&\left(adf + (3/4)ae^2 - (1/4)b^2 f + (1/4)bce - (1/4)c^2 d\right),
\end{aligned}$$

1. http://iml.univ-mrs.fr/~ritzenth/programme/luroth/luroth.m
2. http://echidna.maths.usyd.edu.au/kohel/alg/index.html
3. http://iml.univ-mrs.fr/~ritzenth/programme/luroth/LurothInvF.m

$$
\begin{aligned}
J = {} & a^4d^4f^4 - (1/49)a^4d^3e^2f^3 + (51/19208)a^4d^2e^4f^2 - (1/38416)a^4de^6f + (1/614656)a^4e^8 - (1/49)a^3b^2d^3f^4 \\
& - (205/9604)a^3b^2d^2e^2f^3 - (3/38416)a^3b^2de^4f^2 + (1/153664)a^3b^2e^6f + (15/343)a^3bcd^3ef^3 \\
& + (29/9604)a^3bcd^2e^3f^2 - (5/38416)a^3bcde^5f - (1/153664)a^3bce^7 - (1/49)a^3c^2d^4f^3 \\
& - (205/9604)a^3c^2d^3e^2f^2 - (3/38416)a^3c^2d^2e^4f + (1/153664)a^3c^2de^6 + (51/19208)a^2b^4d^2f^4 \\
& - (3/38416)a^2b^4de^2f^3 + (3/307328)a^2b^4e^4f^2 + (29/9604)a^2b^3cd^2ef^3 - (5/19208)a^2b^3cde^3f^2 \\
& - (3/153664)a^2b^3ce^5f - (205/9604)a^2b^2c^2d^3f^3 + (2/2401)a^2b^2c^2d^2e^2f^2 + (55/153664)a^2b^2c^2de^4f \\
& + (3/307328)a^2b^2c^2e^6 + (29/9604)a^2bc^3d^3ef^2 - (5/19208)a^2bc^3d^2e^3f - (3/153664)a^2bc^3de^5 \\
& + (51/19208)a^2c^4d^4f^2 - (3/38416)a^2c^4d^3e^2f + (3/307328)a^2c^4d^2e^4 - (1/38416)ab^6df^4 + (1/153664)ab^6e^2f^3 \\
& - (5/38416)ab^5cdef^3 - (3/153664)ab^5ce^3f^2 - (3/38416)ab^4c^2d^2f^3 + (55/153664)ab^4c^2de^2f^2 \\
& + (3/153664)ab^4c^2e^4f - (5/19208)ab^3c^3d^2ef^2 - (17/76832)ab^3c^3de^3f - (1/153664)ab^3c^3e^5 \\
& - (3/38416)ab^2c^4d^3f^2 + (55/153664)ab^2c^4d^2e^2f + (3/153664)ab^2c^4de^4 - (5/38416)abc^5d^3ef \\
& - (3/153664)abc^5d^2e^3 - (1/38416)ac^6d^4f + (1/153664)ac^6d^3e^2 + (1/614656)b^8f^4 - (1/153664)b^7cef^3 \\
& + (1/153664)b^6c^2df^3 + (3/307328)b^6c^2e^2f^2 - (3/153664)b^5c^3def^2 - (1/153664)b^5c^3e^3f + (3/307328)b^4c^4d^2f^2 \\
& + (3/153664)b^4c^4de^2f + (1/614656)b^4c^4e^4 - (3/153664)b^3c^5d^2ef - (1/153664)b^3c^5de^3 \\
& + (1/153664)b^2c^6d^3f + (3/307328)b^2c^6d^2e^2 - (1/153664)bc^7d^3e + (1/614656)c^8d^4.
\end{aligned}
$$

Le produit $G^4\,H^2\,J$ est formé de 1695 termes, ce que l'on peut comparer au nombre total de monômes en a, b, c, d, e et f de degré 54, à savoir 3439.

3.4 Quartiques de Lüroth singulières

Soit $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(V^*)$ le lieu des quartiques de Lüroth et $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(V^*)$ l'hypersurface définie par l'annulation du discriminant I_{27}. Nous présentons dans ce qui suit de nouveaux résultats concernant la géométrie du lieu $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ des quartiques de Lüroth singulières.

Le Potier et Tikhomirov [LPT01] ont montré que

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{D} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2,$$

où $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des sous-variétés irréductibles de $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(V^*)$ de codimension 2, dont les degrés respectifs comme sous-variétés de $\mathcal{D}$ sont 24 et 30. En outre, tandis que $\mathcal{L}_1$ est réduite, la sous-variété réduite $(\mathcal{L}_2)_{\mathrm{red}}$ de $\mathcal{L}_2$ est de degré 15.

Dans [OS11], Ottaviani et Sernesi établissent qu'il n'existe pas de nouvel invariant de degré 15 qui s'annule sur $(\mathcal{L}_2)_{\mathrm{red}}$, ce qui implique que cette sous-variété n'est pas une hypersurface principale dans $\mathcal{L}$. Nous démontrons plus généralement qu'aucune des trois variétés $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $(\mathcal{L}_2)_{\mathrm{red}}$ ne sont des intersections complètes, en usant des mêmes méthodes que celles introduites à la section 3.2. Ainsi, notre principale tâche consiste à générer des quartiques dans $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

Pour $\mathcal{L}_2$, nous procédons en suivant [OS11, Rmq. 3.3] : à l'étape (iii) de l'algorithme décrit à la section 3.2, on choisit les droites ℓ_i de telle sorte que trois d'entre elles aient un point d'intersection commun.

Pour $\mathcal{L}_1$, nous mettons en œuvre les constructions et résultats de [OS11, p. 1759]. Soit la procédure suivante.

(i) Construire une surface cubique S contenant deux droites l et m non sécantes et non parallèles.

(ii) Calculer le revêtement double $f : l \to m$ envoyant $p \in l$ sur l'intersection $T_pS \cap m$ du plan tangent T_pS à S en p avec la droite m, et construire $g : m \to l$ similairement.

(iii) Soit $B_f \subset m$ (resp. $B_g \subset l$) le diviseur de branchement de f (resp. g). Construire le morphisme $f' : l \to \mathbb{P}^1$ (resp. $g' : m \to \mathbb{P}^1$) se ramifiant sur B_g (resp. B_f).

(iv) Construire $q \in m \subset S$ tel que $f^{-1}(q)$ soit aussi une fibre de f'.

(v) Construire le lieu de ramification de la projection de degré 2, $S \to \mathbb{P}(T_q S)$ à partir du point $q \in S$. Alors, d'après [OS11, Prop. 3.1(i)], on obtient une quartique dans $\mathcal{L}_1$.

Le chapelet de propositions et remarques ci-après montre comment ces étapes peuvent être réalisées sans étendre le corps de base (tout du long, on considérera $\mathsf{k} = \mathbb{Q}$).

Proposition 3.4.1 Soit k un corps et supposons que nous nous sommes donné six points rationnels $p_1, \ldots, p_6 \in \mathbb{P}V(k)$ du plan projectif sur k. Supposons en outre que cet ensemble de points est suffisamment général, au sens où le système linéaire complet C des cubiques passant par ces points est de dimension 4. Soit $S \subset \mathbb{P}C$ la fermeture de Zariski de $c(\mathbb{P}V)$, où $c : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}C$ est l'application rationnelle de Clebsch. Alors S est le lieu d'annulation d'une cubique quaternaire $F \in \mathrm{Sym}^3(C^*)$ sur k.

L'application rationnelle c se restreint en une application birationnelle entre $\mathbb{P}V$ et S. Soit $l_0 \subset \mathbb{P}V$ la droite rationnelle contenant p_1 et p_2 et soit $m_0 \subset \mathbb{P}V$ la droite rationnelle p_1 et p_3. Soit x et x' deux points de l distincts de p_1 ou p_2 et soit y et y' deux points de l distincts de p_1 ou p_3. Alors les images $c(x)$ et $c(x')$ sont des éléments bien définis de S, et la droite l qui les joints est définie sur k et inclue dans S. Similairement, on obtient une droite m passant par $c(y)$ et $c(y')$. Les droites l et m sont non sécantes et non parallèles.

Démonstration. Il s'agit d'un résultat classique de la théorie des surfaces cubiques (cf. [Har77, Section V.4]). *QED*

Ceci permet d'accomplir la première étape (i).

Pour la seconde (ii), on choisit des coordonnées sur l en prenant deux points l_1, l_2 de l et en envoyant $(x : y) \in \mathbb{P}^1$ sur $xl_1 + yl_2$. Similairement on choisit deux points $m_1, m_2 \in m$. Pour déterminer le morphisme $f : l \to m$ explicitement en termes de ces coordonnées, on considère deux équations $M_1 = M_2 = 0$ définissant m. Étant donné $p \in l$ de coordonnées $(x : y) \in \mathbb{P}^1$, le point $f(p) = T_p S \cap m$ correspond au noyau de la matrice dont les lignes sont données par M_1, M_2 et les dérivées partielles de F. Un vecteur générateur pour cet espace sera une combinaison de m_1 et m_2 avec des coefficients homogènes quadratiques $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ en (x, y). Le morphisme f correspond maintenant à l'application $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ donnée par (f_1, f_2). On détermine g semblablement.

Pour la troisième étape, nous nous basons sur le résultat suivant.

Proposition 3.4.2 Soit l une droite projective sur k, de coordonnées homogènes x et y, et D un k-diviseur rationnel de degré 2 sur l. Alors les formules suivantes déterminent un morphisme $f' : l \to \mathbb{P}^1$ de degré 2 sur k dont le lieu de ramification est D.

- Si D consiste en les deux points $(x_1 : y_1)$ et $(x_2 : y_2)$ rationnels sur k, alors on peut considérer

$$f'(x : y) = ((y_1 x - x_1 y)^2 : (y_2 x - x_2 y)^2).$$

- Si D est défini par une équation $rx^2 + ty^2 = 0$, alors on peut considérer

$$f'(x : y) = (rx^2 - 2txy - ty^2 : rx^2 + 2txy - ty^2).$$

- Si D est défini par une équation $rx^2 + sxy + ty^2 = 0$, avec $s \neq 0$, alors on peut considérer

$$f'(x : y) = (r^2sx^2 + 2r(s^2 - 2rt)xy + (s^3 - 3rst)y^2 : r(rsx^2 + 4rtxy + sty^2)). \tag{3.1}$$

Démonstration. Une fois la réponse fournie, la vérification est aisée. Toutefois, illustrons comment déterminer ces expressions en traitant le troisième cas, pour lequel les points de D sont définis sur une extension quadratique de k. Nous faisons usage des coordonnées affines $t = x/y$ sur l. Supposons pour ces coordonnées que le diviseur $D = [d] + [\overline{d}]$ est formé de deux points conjugués, de somme non nulle, puisque nous sommes dans le cas (iii). Alors $f' = ((t-d)/(t-\overline{d}))^2$, défini en (3.1), vérifie $\overline{f'} = 1/f'$. Or, $(df' + \overline{d})/(\overline{d}f' + d)$ est une homographie de f' stable par conjugaison et définie ainsi un morphisme sur le corps de base k. Homogénéisant, on aboutit à l'expression de l'énoncé. *QED*

Pour le point (iv), on a la proposition suivante.

Proposition 3.4.3 Soit $f, f' : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ deux morphismes de degré 2, n'étant pas reliés par un automorphisme de $\mathbb{P}^1$. Alors les points q de $\mathbb{P}^1$ tels que la fibre de f au-dessus de q soit aussi une fibre de f' au-dessus d'un point q' peuvent être obtenus comme ci-après.

Écrire

$$f(x : y) = (a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 : a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2)$$

et

$$f'(x : y) = (a_1'x^2 + b_1'xy + c_1'y^2 : a_2'x^2 + b_2'xy + c_2'y^2).$$

Alors $q = (\lambda_1 : \lambda_2)$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2')$ génère le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & -a_1' & a_2' \\ b_1 & -b_2 & -b_1' & b_2' \\ c_1 & -c_2 & -c_1' & c_2' \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Si l'on note $q = (\lambda_1 : \lambda_2)$ et $q' = (\lambda_1' : \lambda_2')$, alors déterminer q et q' revient à résoudre l'équation

$$\begin{aligned} &\lambda_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2) - \lambda_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) \\ &= \lambda_2'(a_1'x^2 + b_1'xy + c_1'y^2) - \lambda_1'(a_2'x^2 + b_2'xy + c_2'y^2), \end{aligned}$$

ce qui correspond clairement à la détermination du noyau de la matrice évoquée. *QED*

Pour le point (v), on choisit un isomorphisme $\mathbb{P}C \cong \mathbb{P}^3$ envoyant le point q sur $(1 : 0 : 0 : 0)$, que l'on combine avec le résultat suivant.

Proposition 3.4.4 Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface cubique contenant $q = (1 : 0 : 0 : 0)$ définie par une cubique quaternaire $F \in \mathsf{k}[w, x, y, z]$. Soit π la projection $S \to \mathbb{P}(T_qS)$ relative au point $q \in S$.

Alors le lieu de ramification de π est isomorphe à la courbe quartique de $\mathbb{P}^2$ déterminée par l'annulation du discriminant du polynôme quadratique $F(1, xt, yt, zt)/t$.

Démonstration. Puisque S est une sous-variété de $\mathbb{P}^3$, on obtient un système de coordonnées induits sur T_qS en envoyant $(x : y : z)$ sur la direction tangente donnée par la droite passant par les points $(1 : 0 : 0 : 0)$ et $(1 : x : y : z)$.

Alors $(x : y : z)$ est un point de ramification de la projection $S \to \mathbb{P}(T_qS)$ si et seulement si l'équation $F(1, xt, yt, zt) = 0$ a une racine double autre que 0, autrement dit si le discriminant du polynôme quadratique $F(1, xt, yt, zt)/t$ est nul. Ce discriminant est une quartique homogène en les variables x, y, z, qui définit une quartique plane de $\mathcal{L}_1$, ce que nous escomptions. *QED*

Un programme pour générer des quartiques dans $\mathcal{L}_1$ selon ce mode opératoire est disponible en ligne [4].

Après avoir généré suffisamment de quartiques dans $\mathcal{L}_1$ [5], en choisissant des 6-uplets aléatoires $\{p_1, \ldots, p_6\}$ (cf. proposition 3.4.1), nous sommes en mesure de procéder comme à la section 3.2. Jusqu'au degré 30, tous les invariants s'annulant sur les listes de quartiques dans $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des multiples de I_{27}. Étant donné que les composantes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $(\mathcal{L}_2)_{\mathrm{red}}$ de $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, de codimension 2, sont de degré respectivement inférieur à $24 \cdot 27$, $24 \cdot 30$ et $24 \cdot 15$, et donc inférieur strictement à $(30)^2$, on aboutit au résultat suivant.

Théorème 3.4.5 Les sous-variétés $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $(\mathcal{L}_2)_{\mathrm{red}}$ de l'espace projectif des quartiques planes $\mathbb{P}\,\mathrm{Sym}^4(V^*)$ (et ainsi leurs images dans l'espace de modules des quartiques planes) ne sont pas des intersection complètes. En particulier, ce ne sont pas des hypersurfaces principales du lieu $\mathcal{D}$ d'annulation du discriminant.

Puisqu'il n'existe pas d'invariant de degré 24 s'annulant sur $\mathcal{L}_1$, la construction présumée d'un tel invariant par Morley [Mor19, p.282] est erronée. Un programme sous Magma est disponible pour vérifier indépendamment toutes les étapes pour l'obtention du théorème 3.4.5. [6]

3.5 Questions ouvertes

L'expression de l'invariant de Lüroth L que nous donnons dépend de plusieurs choix arbitraires, qui peuvent expliquer sa lourdeur. Tout d'abord, parmi les invariants de la famille génératrice de Dixmier-Ohno, seuls quelques-uns des invariants primaires de Dixmier ont une signification géométrique (cf. [Dix87]) et sont en cela « naturels ». Ensuite, notre expression peut être modifiée par n'importe quel élément du noyau N_1, ce qui ouvre la voie à une minimisation de notre expression par des techniques issues de la théorie des codes. Mais à nouveau, les paramètres en jeu découragent toute tentative.

La réponse négative concernant l'existence des invariants de degré 24 et 30 à la section 3.4 exclue la décomposition dans [OS11, p.1764]. Toutefois la géométrie de la situation ne semble pas donner d'indice concernant l'existence d'une autre décomposition de ce type.

4. http://iml.univ-mrs.fr/~ritzenth/programme/luroth/GenerateL1.m
5. 1024 curves over $\mathcal{Q}$ are available at http://iml.univ-mrs.fr/~ritzenth/programme/luroth/L1Database.m
6. http://iml.univ-mrs.fr/~ritzenth/programme/luroth/SingularLurothInv.m

Une expression de l'invariant de Lüroth en termes des 15 coefficients d'une quartique générique serait naturellement louable. Cependant, il n'est pas envisageable d'exprimer ainsi formellement les invariants fondamentaux de Dixmier-Ohno, leurs expressions contenant un trop grand nombre de termes. Enfin, un décompte des monômes pondérés en ces 15 variables pour les invariants de degré 54 conduit à un total de 62 422 531 333. Naturellement seule une fraction de ces monômes peuvent entrer en jeu pour l'expression finale de L, mais nous ne savons pas les discriminer.

Chapitre 4

Invariants pour les octiques binaires

Pour la description de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre $\mathsf{g} = 3$ en caractéristique $\mathsf{p} \neq 2$, il est naturel, vu le chapitre 1, de s'intéresser à l'algèbre des invariants $\mathcal{I}_8$ des formes binaires de degré $8 = 2\mathsf{g} + 2$.

Pour le sujet propre à notre travail, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la situation en caractéristiques 3 et 7, développée dans les sections qui suivent. Toutefois, nous rappelons dans un premier temps les résultats historiques concernant la caractéristique nulle, valables également pour $\mathsf{p} \geqslant 11$, et nous terminons par nos (maigres) résultats concernant la caractéristique 5, essentiellement afin de souligner l'inadéquation de cette approche via les formes binaires dans ce cas précis.

4.1 Octiques binaires en caractéristique 0 et $\mathsf{p} \geqslant 11$

4.1.1 Structure de l'algèbre des invariants

Historiquement, von Gall [Gal80], s'inspirant des méthodes impulsées par Gordan, fut le premier à exhiber un système d'invariants fondamentaux pour l'algèbre des invariants $\mathcal{I}_8$ des octiques binaires.

Il fallut toutefois attendre 1967 et les travaux de Shioda [Shi67], pour disposer d'une description complète de l'algèbre des invariants $\mathcal{I}_8$ des octiques binaires ; résultat que Mumford qualifia comme « an extraordinary tour de force » dans [MF82].

Shioda établit notamment la suite de résolution libre minimale de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 4.1.1 - [Shi67, Th. 3].

L'algèbre graduée des invariants des octiques binaires $\mathcal{I}_8$ est engendrée par 9 invariants homogènes $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}$, de degré $2, \ldots, 10$, avec $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_7$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Ces générateurs sont liés par 5 relations, notées $\mathfrak{R}_i(\mathsf{J})$, de degré $15 + i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, qui, à leur tour, sont reliées par 5 premières syzygies fondamentales, notées $\mathfrak{T}_i(\mathfrak{R})$, de degré $24 + i$, $1 \leqslant i \leqslant 5$. La seconde syzygie, notée $\mathfrak{F}$, est alors unique, à une constante près, et de degré 45.

La résolution libre minimale de $\mathcal{I}_8$, vue comme un $\mathbb{Q}[X]$-module, est ainsi donnée par

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}\mathbb{Q}[X] \longrightarrow \sum_{i=1}^{5} \mathfrak{T}_i\mathbb{Q}[X] \longrightarrow \sum_{i=1}^{5} \mathfrak{R}_i\mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{I}_8 \longrightarrow 0$$

où $\mathbb{Q}[X]$ désigne $\mathbb{Q}[X_2, \ldots, X_{10}]$ pour lequel l'indéterminée X_i est de degré i.

Pour établir ce théorème, Shioda commence par exhiber les neuf invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}$, définis pour une octique binaire f par

$$\mathsf{J}_2 = (\mathsf{f}, \mathsf{f})_8, \quad \mathsf{J}_3 = (\mathsf{f}, g)_8, \quad \mathsf{J}_4 = (k, k)_4, \quad \mathsf{J}_5 = (m, k)_4, \quad \mathsf{J}_6 = (k, h)_4,$$

$$\mathsf{J}_7 = (m, h)_4, \quad \mathsf{J}_8 = (p, h)_4, \quad \mathsf{J}_9 = (n, h)_4 \quad \text{et} \quad \mathsf{J}_{10} = (q, h)_4,$$

où

$$g = (\mathsf{f}, \mathsf{f})_4, k = (\mathsf{f}, \mathsf{f})_6, h = (k, k)_2, m = (\mathsf{f}, k)_4, n = (\mathsf{f}, h)_4, p = (g, k)_4, q = (g, h)_4,$$

cinq relations liant ces invariants

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{R}_1 & : & \mathsf{J}_8^2 + A_6\mathsf{J}_{10} + A_7\mathsf{J}_9 + A_8\mathsf{J}_8 + A_{16} = 0 \\ \mathfrak{R}_2 & : & \mathsf{J}_8\mathsf{J}_9 + B_7\mathsf{J}_{10} + B_8\mathsf{J}_9 + B_9\mathsf{J}_8 + B_{17} = 0 \\ \mathfrak{R}_3 & : & \mathsf{J}_8\mathsf{J}_{10} + C_0\mathsf{J}_9^2 + C_8\mathsf{J}_{10} + C_9\mathsf{J}_9 + C_{10}\mathsf{J}_8 + C_{18} = 0 \\ \mathfrak{R}_4 & : & \mathsf{J}_9\mathsf{J}_{10} + D_9\mathsf{J}_{10} + D_{10}\mathsf{J}_9 + D_{11}\mathsf{J}_8 + D_{19} = 0 \\ \mathfrak{R}_5 & : & \mathsf{J}_{10}^2 + E_0\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9^2 + E_{10}\mathsf{J}_{10} + E_{11}\mathsf{J}_9 + E_{12}\mathsf{J}_8 + E_{20} = 0 \end{array} \tag{4.1}$$

où les A_i, B_i, C_i, D_i et E_i sont des éléments homogènes de degré i de $\mathbb{Q}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_7]$, explicitement connus (cf. [Shi67, p. 1034] [1]), et il établit que les six invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_7$ sont algébriquement indépendants, à l'aide du critère basé sur le nullcone (cf. corollaire 2.4.4).

Connaissant la série de Hilbert de l'algèbre graduée $\mathcal{I}_8$, déterminée par Sylvester et Franklin [SF79b] :

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{18}}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7)},$$

Shioda est alors en mesure d'établir les égalités

$$\mathcal{I}_8 = \mathbb{Q}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}] = \mathsf{P} \oplus \mathsf{J}_8\mathsf{P} \oplus \mathsf{J}_9\mathsf{P} \oplus \mathsf{J}_{10}\mathsf{P} \oplus \mathsf{J}_9^2\mathsf{P},$$

où on a noté $\mathsf{P} = \mathbb{Q}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_7]$. Cette dernière écriture correspond à une décomposition de Hironaka pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$, avec les six invariants primaires $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_7$, qui forment donc un système homogène de paramètres pour $\mathcal{I}_8$, et les cinq invariants secondaires $1, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_9^2$.

La réécriture de $\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t)$, selon les invariants fondamentaux J_i, donne alors

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1 - \sum_{d=16}^{20} t^d + \sum_{d=25}^{29} t^d - t^{45}}{\prod_{d=2}^{10}(1-t^d)}.$$

Cette écriture permet à la fois de conjecturer *a priori* le nombre et les degrés des relations entre les J_i (*i.e.* les $\mathfrak{R}_i$) et de leurs syzygies (*i.e.* les $\mathfrak{T}_i$ et $\mathfrak{F}$) données dans le théorème 4.1.1 et de prouver l'exactitude de la résolution libre annoncée. Pour les expressions explicites des syzygies $\mathfrak{T}_i$ et $\mathfrak{F}$, on consultera [Shi67, §4].

1. Comme l'ont remarqué Lercier et Ritzenthaler dans [LR12], il y a deux fautes de frappes dans les expressions données par Shioda. Ligne 12, le dernier terme de D_{10} devrait être $-1/(2^3 \cdot 3)\mathsf{J}_2 B_8$ au lieu de $-1/(2^3)\mathsf{J}_2 B_8$ et, ligne 16, le 6ème terme de E_{12} devrait être $-1/(3^5 \cdot 5)\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_6$ au lieu de $-1/(3^3 \cdot 5)\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_6$.

Enfin, comme le suggère le théorème 2.9.2 de Geyer, qui implique en particulier que la série de Hilbert de l'algèbre graduée $\mathcal{I}_8$ est identique en caractéristique nulle et en caractéristique $\mathsf{p} \geqslant 11 > 8$, il est raisonnable de penser que la description de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ est inchangée en caractéristique positive $\mathsf{p} \geqslant 11$.

En ce sens, comme l'indique Lercier et Ritzenthaler dans [LR12], on peut préalablement vérifier que les neufs invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}$ et leurs syzygies sont définis sur $\mathbb{Z}[1/2, 1/3, 1/5, 1/7]$. Une relecture attentive de la preuve de Shioda permet alors d'énoncer le résultat escompté.

Proposition 4.1.2 - [LR12, Prop. 1.9]. Sur un corps de caractéristique $\mathsf{p} \geqslant 11$, l'algèbre $\mathcal{I}_8$ est engendrée par la réduction des invariants J_i et ceux-ci satisfont les réductions des relations $\mathfrak{R}_i$.

4.1.2 Description de H_3

L'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 peut ainsi être décrit comme la variété quasi-projective donnée par les équations (4.1), définie dans l'espace projectif pondéré de poids 2, 3, ..., 10 de dimension 8, avec la condition additionnelle de non annulation du discriminant, invariant homogène de degré 14.

Pour une description plus détaillée de cet espace, on pourra consulter [LR12], qui en donne notamment une description selon la stratification par les groupes d'automorphismes des courbes.

À l'instar de ce qui a été fait pour les courbes elliptiques, dont l'espace de modules est paramétrisé par l'invariant modulaire j, on pourrait essayer de se donner une famille d'invariants absolus, plutôt que projectifs, pour décrire H_3. La tâche est toutefois moins aisée, dans la mesure où le seul invariant homogène facilement calculable et qui ne s'annule pas sur cet espace est le discriminant, qui est donc de degré 14.

Relativement à cette question, on peut également s'intéresser au corps des fractions $\mathrm{Frac}(\mathcal{I}_8)$. $\mathrm{Frac}(\mathcal{I}_n)$ est un corps de fractions rationnelles, d'après [BK86], et pour $\mathsf{n} = 8$ Maeda a exhibé 6 invariants absolus algébriquement indépendants qui engendrent $\mathrm{Frac}(\mathcal{I}_8)$ [Mae90, Th. B p. 631]. Toutefois, les degrés de ces derniers sont trop élevés pour une utilisation efficiente.

4.2 Octiques binaires en caractéristique 3

La description de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ reste finalement en suspend pour les caractéristiques $\mathsf{p} = 3, 5$ et 7, laissant de côté *a priori* la caractéristique 2 pour laquelle l'algèbre $\mathcal{I}_8$ n'est pas reliée à la description de l'espace de modules H_3.

Or, comme on l'a indiqué à la section 2.9, ces trois cas $\mathsf{p} = 3, 5$ et 7 sont plus délicats, dans la mesure où le groupe algébrique agissant $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ n'est pas linéairement réductif et puisque l'on ne connaît plus la série de Hilbert de l'algèbre graduée de type fini $\mathcal{I}_8$ *a priori*.

De ce fait, nous nous contentons d'exhiber dans ce qui suit des invariants fondamentaux potentiels de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3, 5 ou 7 et de formuler des conjectures quant à la résolution libre minimale de cette algèbre en caractéristique 3 ou 7.

4.2.1 Invariants en caractéristique 3

Notre tâche première consiste à déterminer une famille finie d'invariants potentiellement générateurs pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3. À cette fin, nous avons mis en œuvre deux méthodes.

- **Méthode 1 :** on détermine une base de la composante homogène de degré d de $\mathcal{I}_8$. Pour cela, on procède toujours via la procédure d'évaluation/interpolation de l'algorithme 2 de réécriture d'un invariant, adaptée de la façon suivante :
  - ligne 1 : la base $\mathcal{B}$ est formée des monômes de degré d en les coefficients d'une octique binaire ;
  - ligne 4 et 6 : $V_i \leftarrow 0$ et $M_{i,j} \leftarrow \mathcal{B}_j(\mathcal{F}_i) - (\det A)^{4\mathsf{d}}\mathcal{B}_j(A_j.\mathcal{F}_i)$, où A_j est un élément aléatoire de $\mathsf{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_3)$.

  La base recherchée s'obtient alors comme une base du noyau de M. Pour mettre en évidence les nouveaux invariants, *i.e.* ceux qui n'appartiennent pas à la sous-algèbre engendrée par les générateurs de degré strictement inférieur d, il suffit de tester pour chacun des éléments de cette base si celui-ci peut s'exprimer à l'aide des éléments de degré strictement inférieur à d, ce qui est aisé grâce à l'algorithme 2, en limitant les éléments de la base $\mathcal{B}$ à ceux formés à partir des générateurs de degré strictement inférieur à d (cf. la section 1.4).
- **Méthode 2 :** à l'instar de la proposition 4.1.2 qui relie la description de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique $\mathsf{p} \geqslant 11$ au cas de la caractéristique nulle, on peut essayer d'obtenir des générateurs de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ sur $\mathbb{F}_3$ en réduisant modulo 3 les générateurs $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}$ de $\mathcal{I}_8$ sur $\mathbb{Q}$. Il faut alors être attentif à deux aspects :
  - naturellement, puisque 3 n'est pas un inversible de l'anneau $\mathbb{Z}[1/2, 1/3, 1/5, 1/7]$, sur lequel les générateurs $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}$ sont définis, il faut être précautionneux avec les dénominateurs. De ce fait, nous introduisons des invariants de Shioda normalisés :

$$\begin{array}{lll} \mathsf{j}_2 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \mathsf{J}_2, & \mathsf{j}_3 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3/3 \cdot \mathsf{J}_3, & \mathsf{j}_4 = 2^9 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot \mathsf{J}_4, \\ \mathsf{j}_5 = 2^9 \cdot 5 \cdot 7^5 \cdot \mathsf{J}_5, & \mathsf{j}_6 = 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 7^6 \cdot \mathsf{J}_6, & \mathsf{j}_7 = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^7 \cdot \mathsf{J}_7, \\ \mathsf{j}_8 = 2^{17} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^9 \cdot \mathsf{J}_8, & \mathsf{j}_9 = 2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^9 \cdot \mathsf{J}_9, & \mathsf{j}_{10} = 2^{22} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^{11} \cdot \mathsf{J}_{10}, \end{array} \tag{4.2}$$

    au sens où les j_i sont définis sur $\mathbb{Z}$ et les pgcd des coefficients de leurs expressions en les coefficients a_i d'une octique binaire générale sont triviaux.
  - la réduction modulo 3 a tendance à faire apparaître des relations. Par exemple, on a $\mathsf{j}_4 = \mathsf{j}_2^2 \mod 3$.

  On peut évidemment procéder comme dans la méthode précédente pour tester si l'on obtient un nouveau générateur.

La première méthode a l'avantage d'être systématique et permet ainsi d'obtenir des résultats concluants (cf. les remarques à la fin de cette section). En revanche, elle a l'inconvénient de fournir des expressions « à plat » en les coefficients a_i de l'octique binaire générale, qui deviennent difficilement maniables passé le degré 20, vu leur nombre de termes. La seconde méthode permet justement d'exprimer les invariants de manière condensée, à l'aide des invariants en caractéristique nulle (cf. les invariants $\mathcal{J}_i$ ci-dessous), ce qui s'avère nécessaire pour la caractéristique 5 (cf. section 4.4). Toutefois, cette représentation a alors l'inconvénient de nécessiter un relèvement p-adique des coefficients des octiques binaires pour le calcul de leurs SL_2-invariants, ce qui rend *a priori* moins robuste une telle implantation sous Magma.

En pratique, pour les caractéristiques 3 et 7, nous avons choisi d'implanter sous Magma les SL_2-invariants définis ci-après (cf. propositions 4.2.1 et 4.3.1) « à plat ». À ce sujet, le lecteur pourra consulter l'apport des $\mathfrak{D}$-invariants, exposé à la suite de la remarque 5.1.1 à la section 5.1. Concernant la caractéristique 5 (cf. section 4.4), vu les degrés en jeu, le choix n'est plus réellement

possible et nous avons eu recours aux expressions basées sur les invariants j_i en caractéristique nulle.

À l'aide des invariants de Shioda normalisés introduits en (4.2), nous définissons les dix invariants suivants sur $\mathbb{Z}$, toujours tels que les pgcd des coefficients de leurs expressions en les coefficients a_i d'une octique binaire générale soient triviaux (cf. l'exemple 4.2.2 ci-après).

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &= \mathsf{j}_2,\\
\mathcal{J}_3 &= \mathsf{j}_3,\\
\mathcal{J}_4 &= (1/2^{10}/7^4)\cdot\left(\mathsf{j}_4 - 4\mathsf{j}_2^2\right)/3,\\
\mathcal{J}_5 &= (1/2^9/7^5/5)\cdot(\mathsf{j}_5 - 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3),\\
\mathcal{J}_6 &= (1/2^{14}/7^6)\cdot(\mathsf{j}_6 - 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 - 837\mathsf{j}_3^2 - 130\mathsf{j}_2^3)/3^4,\\
\mathcal{J}_7 &= (1/2^{15}/5/7^7)\cdot(\mathsf{j}_7 - 7\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5)/3,\\
\mathcal{J}_8 &= (1/2^{17}/5^2/7^9)\cdot(8\mathsf{j}_8 - 4\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2 - 2430\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3 - 381\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 - 216\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 + 763\mathsf{j}_2^4)/3^6,\\
\mathcal{J}_9 &= (1/2^{19}/5/7^9)\cdot(9\mathsf{j}_9 - 72\mathsf{j}_7\mathsf{j}_2 - \mathsf{j}_6\mathsf{j}_3 + 144\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 - 69/2)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + (4671/8)\mathsf{j}_3^3 + (503/2)\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3)/3^6,\\
\mathcal{J}_{10} &= (1/2^{22}/5^2/7^{11})\cdot(81\mathsf{j}_{10} - 162\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 - 243\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3 - 6\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 13\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^2 + (9963/2)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 36\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2\\
&\quad + (18387/4)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2 + 1350\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + (3537/4)\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2 - 2419\mathsf{j}_2^5)/3^7,\\
\mathcal{J}_{12} &= (-1/2^{22}/5^2/7^{11})(243\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2 + (243/1568)\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + (447893469/392)\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^2 + (2187/14)\mathsf{j}_7\mathsf{j}_5\\
&\quad + (47048836230/7)\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 - (609433614900129064550375/448)\mathsf{j}_6^2 - (14643/784)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2\\
&\quad + (1951655710275/224)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3^2 - (44236007/784)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^3 + (2937141/2)\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2\\
&\quad + (3360628035/784)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 + (6187664473626123/196)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + (39207540951/1568)\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2\\
&\quad - (40991480367903/784)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 - (322083084735/1568)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4\\
&\quad + (609433611633057388035825/448)\mathsf{j}_3^4 + (2133017601687299262319623/784)\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^3\\
&\quad + (3047168074501105459448 59/112)\mathsf{j}_2^6)/3^9.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Il suffit alors de réduire modulo 3.

Proposition 4.2.1 La réduction modulo 3 des dix invariants $\mathcal{J}_i$ donnés ci-dessus définie dix SL_2-invariants homogènes pour les octiques binaires en caractéristique 3 de degrés $2,\ldots,10,12$, notés $\mathsf{J}_2,\ldots,\mathsf{J}_{10},\mathsf{J}_{12}$, qui forment un système de générateurs fondamentaux d'une sous-algèbre de $\mathcal{I}_8$.

Démonstration. Vu le mode d'obtention des J_i, ces derniers sont clairement des SL_2-invariants pour les octiques binaires en caractéristique 3. En outre, on vérifie simplement la minimalité du système obtenu par le procédé indiqué à la méthode 1. *QED*

Exemple 4.2.2 Sur $\mathbb{F}_3$, on a ainsi défini

$$
\begin{aligned}
\mathsf{J}_2 &= \mathsf{j}_2 \mod 3 = a_0a_8 + a_1a_7 + a_2a_6 + a_3a_5 + 2a_4^2,\\
\mathsf{J}_3 &= \mathsf{j}_3 \mod 3 = 2a_0a_4a_8 + a_0a_5a_7 + a_1a_3a_8 + 2a_1a_5a_6 + 2a_2a_3a_7 + a_2a_4a_6,\\
\mathsf{J}_4 &= (1/2^{10}/7^4)\cdot\left(\mathsf{j}_4 - 4\mathsf{j}_2^2\right)/3 \mod 3\\
&= a_0a_2a_6a_8 + 2a_0a_2a_7^2 + 2a_0a_4^2a_8 + 2a_0a_4a_5a_7 + 2a_0a_5^2a_6 + 2a_1^2a_6a_8\\
&\quad + a_1^2a_7^2 + 2a_1a_3a_4a_8 + a_1a_3a_5a_7 + a_1a_4^2a_7 + 2a_1a_4a_5a_6 + 2a_2a_3^2a_8
\end{aligned}
$$

$$+ 2a_2a_3a_4a_7 + 2a_2a_4^2a_6 + a_3^2a_5^2 + a_3a_4^2a_5 + a_4^4.$$

Remarque 4.2.3 On a choisi de noter indistinctement par des J_i les SL_2-invariants des octiques binaires, malgré la dépendance à la caractéristique du corps de base. Le contexte est d'une part censé permettre de distinguer les situations et, d'autre part, on notera la différence de cardinalité entre nos trois familles de SL_2-invariants pour la caractéristique $\mathsf{p} = 0$ et $\mathsf{p} \geqslant 11$, la caractéristique $\mathsf{p} = 3$ et la caractéristique $\mathsf{p} = 7$ (cf. paragraphe suivant) respectivement.

Comme nous l'indiquons plus précisément au paragraphe suivant, méconnaissant la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3, nous ne sommes pas parvenus à montrer que les dix SL_2-invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}$ définis précédemment forment un système de générateurs de cette algèbre. Nous pouvons toutefois formuler les observations suivantes :

- Pour notre propos, *i.e.* la description de l'espace H_3 en caractéristique 3, il nous faut avant tout disposer d'une famille d'invariants homogènes séparants pour les octiques binaires de discriminant non nul en caractéristique 3 pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$. Or la famille $(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12})$ possède cette propriété (cf. théorème 5.4.1 page 86), soit un premier motif de satisfaction.
- Concernant l'aspect famille génératrice, la méthode 1 exposée ci-dessus permet en pratique de déterminer une base de la composante homogène de degré d de $\mathcal{I}_8$ jusqu'au degré 40. Or aucun invariant supplétif aux dix SL_2-invariants J_i ne se révèle nécessaire pour engendrer ces bases, ce qui nous laisse raisonnablement espérer que nous avons effectivement exhibé un système de générateurs de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3. À ce sujet, on pourra également se reporter à la remarque 6.3.1 page 104.

Terminons ce paragraphe par une expression en les SL_2-invariants J_i du discriminant d'une octique binaire en caractéristique 3, qui est un invariant homogène de degré 14 :

$$\begin{aligned}\Delta = {} & 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_3^2 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6 \\ & + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_6^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_7^2 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_{10}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2.2 Structure conjecturale de l'algèbre $\mathcal{I}_8$

Une fois déterminés des invariants pour les octiques binaires, fournissant une potentielle famille génératrice, on peut tenter de décrire la structure de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3.

Relations entre les SL_2-invariants

Grâce à l'algorithme 2 d'écriture d'un invariant relativement à un système de générateurs, en considérant une relation homogène de degré d entre les SL_2-invariants J_i comme l'invariant nul de degré d, nous avons exhibé neuf relations de degré 12, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24. La première est

$$\mathfrak{R}_{12} = \mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_{10} + (\mathsf{J}_2^2 + \mathsf{J}_4)\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3^2 + (\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3 + \mathsf{J}_2^6 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7.$$

Pour les expressions des autres relations, on pourra se reporter à l'annexe B.1. Par la suite, on note $\mathfrak{R}_i$ la relation de degré i. Nos calculs indiquent enfin l'absence d'autres générateurs pour l'idéal des relations jusqu'au degré 45.

Systèmes homogènes de paramètres

Pour les systèmes homogènes de paramètres, grâce à la caractérisation du nullcone donnée par le corollaire 2.4.4, nous parvenons au résultat suivant pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3.

Proposition 4.2.4 Les neuf systèmes suivants, formés de six SL_2-invariants, sont des systèmes homogènes de paramètres de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3.

$$\begin{array}{ccc} \{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}\}, \\ \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9\}, & \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}, \\ \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}\}, & \{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}\}, & \{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}\}. \end{array}$$

Démonstration. Considérons le système $\mathcal{S} = \{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}$. En vertu du critère donnée par le corollaire 2.4.4, il s'agit d'établir que, pour toute octique binaire f,

$$\mathsf{J}_2(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_4(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_5(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_7(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_9(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_{12}(\mathsf{f}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{f} \in \mathcal{N}_{\mathsf{V}_8},$$

i.e. f a une racine d'ordre de multiplicité au moins 5.

Pour montrer cela, commençons par observer que

$$\sqrt{\langle \mathsf{J}_2, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}, \mathfrak{R}_{12}, \ldots, \mathfrak{R}_{24} \rangle} = \langle \mathsf{J}_2, \mathsf{J}_3, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12} \rangle,$$

comme le montre un simple calcul de base de Gröbner dans l'anneau $\mathbb{F}_3[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}]$ pour l'ordre grevlex $\mathsf{J}_{12} < \cdots < \mathsf{J}_2$ avec les poids $12, \ldots, 2$. En particulier, le discriminant d'une octique binaire f annulant le système $\mathcal{S}$ est nul. Ainsi, du fait de l'action 3-transitive de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$ sur la droite projective, on peut supposer que f admet 0, 1 et ∞ pour racines, avec ∞ pour racine double, soit

$$\mathsf{f} = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x, \quad \text{avec } a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 0.$$

Observons alors que seules les trois racines 0, 1 et ∞ peuvent être une racine de multiplicité au moins 5 de f. À nouveau, un simple calcul de base de Gröbner dans l'anneau $\mathbb{F}_3[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ permet d'établir que le radical de l'idéal

$$\langle \mathsf{J}_2(\mathsf{f}), \mathsf{J}_4(\mathsf{f}), \mathsf{J}_5(\mathsf{f}), \mathsf{J}_7(\mathsf{f}), \mathsf{J}_9(\mathsf{f}), \mathsf{J}_{12}(\mathsf{f}), a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \rangle$$

est formé de trois composantes irréductibles de dimension 0, qui correspondent aux trois éventualités pour une racine de multiplicité au moins 5 de f.

On procède identiquement, *mutatis mutandis*, pour les huit autres systèmes. *QED*

Remarque 4.2.5 La courbe hyperelliptique de genre 3 d'équation $y^2 = x^7 - 1$ définie sur $\mathbb{F}_3$ (cf. lemme 7.3.2 page 114) a pour SL_2-invariants

$$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0).$$

Ainsi, tout système homogène de paramètres pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3, formé à partir des J_i, contient nécessairement J_7.

Résolution libre minimale

Par des calculs similaires à ceux menés pour déterminer les relations $\mathfrak{R}_i$, nous avons également déterminés des syzygies aux ordres suivants pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3. Nos résultats nous amènent à formuler la conjecture suivante quant à la résolution libre de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3, sous l'hypothèse que les dix SL_2-invariants, introduits à la section précédente, forment une famille génératrice de $\mathcal{I}_8$.

Conjecture 4.2.6 La résolution libre minimale de $\mathcal{I}_8$, vue comme un $\mathbb{F}_3[X]$-module, est donnée par

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F}\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \sum_{i\in \mathsf{D}_{\mathfrak{T}}} \mathfrak{T}_i\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \sum_{i\in \mathsf{D}_{\mathfrak{S}}} \mathfrak{S}_i\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \sum_{i\in \mathsf{D}_{\mathfrak{R}}} \mathfrak{R}_i\mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \mathbb{F}_3[X] \longrightarrow \mathcal{I}_8 \longrightarrow 0$$

où $\mathbb{F}_3[X]$ désigne $\mathbb{F}_3[X_2, \ldots, X_{10}, X_{12}]$ pour lequel l'indéterminée X_i est de degré i. La dernière syzygie $\mathfrak{F}$ est de degré 57 et les profils des degrés des autres modules de syzygies sont les suivants

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_{\mathfrak{R}} &= \{12, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24\}\,,\\
\mathsf{D}_{\mathfrak{S}} &= \left\{22, 23, 24, 25, 26, 27, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33, 34, 35\right\}\,,\\
\mathsf{D}_{\mathfrak{T}} &= \{33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 45\}\,.
\end{aligned}$$

Dans le présent document, on se limite à indiquer les expressions des premières syzygies d'ordre 1, à l'annexe B.2. En effet, la dernière syzygie $\mathfrak{F}$ de degré 57 est, par exemple, formée de 667 termes ! Toutefois, toutes les syzygies évoquées dans la conjecture précédente sont explicites et disponible dans un fichier Magma.

Remarques 4.2.7 Terminons cette section par quelques observations en lien avec la conjecture précédente.

1. La série de Hilbert associée à la résolution libre minimale introduite à la conjecture 4.2.6 est
$$\mathsf{H}(t) = \frac{N(t)}{\prod_{i=2}^{10}(1-t^i)(1-t^{12})},$$
où
$$\begin{aligned}
N(t) = \quad & 1 - t^{12} - t^{16} - t^{17} - t^{18} - t^{19} - t^{20} + t^{25} + t^{26} + t^{27} + 2t^{28}\\
& + t^{57} - t^{45} - t^{41} - t^{40} - t^{39} - t^{38} - t^{37} + t^{32} + t^{31} + t^{30} + 2t^{29}.
\end{aligned}$$
Il est alors surprenant et satisfaisant de constater que la série H est égale à la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique nulle :
$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{18}}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7)}. \tag{4.5}$$
On peut en effet difficilement croire au caractère fortuit de ce résultat, qui tend donc naturellement à nous conforter au sujet de notre conjecture.

2. Si $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3 admet donc la même série de Hilbert qu'en caractéristique nulle, cette dernière se réécrit sous la forme

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{N'(t)}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^7)(1-t^9)(1-t^{12})},$$

où

$$\begin{aligned} N'(t) = 1 + t^3 + 2t^6 + t^8 + 2t^9 + t^{10} + t^{11} + 2t^{12} + t^{13} + 2t^{14} + 2t^{15} + 2t^{16} \\ + t^{17} + 2t^{18} + t^{19} + t^{20} + 2t^{21} + t^{22} + 2t^{24} + t^{27} + t^{30}, \end{aligned}$$

relativement au système homogène de paramètres $\{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_7, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{12}\}$. En particulier, on obtiendrait ainsi une borne sur le degré des éléments d'une famille génératrice minimale, à savoir $30 = \deg N'$, sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{I}_8$ est de Cohen-Macaulay (cf. section 2.7). Or nous avons justement observé l'absence de nouveau générateur jusqu'au degré 40.

En outre, l'écriture en (4.5) de la série de Hilbert $\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t)$, à savoir son écriture minimale (cf. section 2.6), donnerait un autre exemple de forme non représentative d'une série de Hilbert. En effet, considérons l'octique binaire $\mathsf{f} = z^3x(x-z)(x^3 + x^2z + xz^2 + 2z^3)$ sur $\mathbb{F}_3$. Cette dernière est telle que $\mathsf{J}_2(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_3(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_4(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_5(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_6(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_7(\mathsf{f}) = 0$, or f n'est pas un élément du nullcone $\mathcal{N}_{\mathsf{V}_8}$. Ainsi $\{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7\}$ ne saurait être un système homogène de paramètres de $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3 et aucun système homogène de paramètres de $\mathcal{I}_8$ ne peut donc avoir ce profil de degré.

3. Enfin, notons la réciprocité du polynôme $N(t)$, ce qui suggère que l'algèbre $\mathcal{I}_8$ serait encore de Gorenstein en caractéristique 3.

4.2.3 Covariants quadratiques

À l'instar de l'algèbre $\mathcal{I}_8$, l'algèbre $\mathcal{C}_8$ des covariants des octiques binaires est une algèbre de type fini et l'on peut par conséquent chercher à en exhiber une famille génératrice. Pour la caractéristique nulle et supérieure à 11, une famille de générateurs est donnée dans [LR12, Tab. 1 p. 607]. Pour la caractéristique 3, nous n'avons toutefois pas cette prétention. Nous serions de toute manière encore mis en difficulté par la méconnaissance de la série de Hilbert de $\mathcal{C}_8$, donnée pour la caractéristique nulle dans [SF79b, p.230-233].

Heureusement, pour notre propos, en l'occurrence pour la mise en œuvre de la méthode de Mestre, exposée au chapitre 6, nous avons uniquement besoin de covariants quadratiques pour les octiques binaires en caractéristique 3.

Pour engendrer de tels covariants, nous avons à nouveau mis en œuvre les méthodes décrites pour la générations des SL_2-invariants en caractéristique 3, page 57. En pratique, nous nous sommes bornés à exhiber une famille minimale de covariants quadratiques pour les composantes homogènes de degré inférieur à 14, vu comme des $\mathbb{F}_3[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}]$-modules ; soit les éléments suivants, où l'indice indique le degré du covariant quadratique :

$$\mathsf{q}_5,\ \mathsf{q}_6,\ \mathsf{q}_7,\ \mathsf{q}'_7,\ \mathsf{q}_8,\ \mathsf{q}'_8,\ \mathsf{q}_9,\ \mathsf{q}'_9,\ \mathsf{q}''_9,\ \mathsf{q}_{10},\ \mathsf{q}'_{10},\ \mathsf{q}_{11},\ \mathsf{q}'_{11},\ \mathsf{q}_{12},\ \mathsf{q}'_{12},\ \mathsf{q}_{13},\ \mathsf{q}'_{13},\ \mathsf{q}_{14}.$$

Par exemple, la composante homogène de degré 9 des covariants quadratiques est engendrée sur $\mathbb{F}_3$ par

$$\mathsf{J}_2^2\mathsf{q}_5,\ \mathsf{J}_4\mathsf{q}_5,\ \mathsf{J}_3\mathsf{q}_6,\ \mathsf{J}_2\mathsf{q}_7,\ \mathsf{J}_2\mathsf{q}_7',\ \mathsf{q}_9,\ \mathsf{q}_9' \text{ et } \mathsf{q}_9''.$$

Cette limitation au degré 14 est raisonnable, dans la mesure où les covariants quadratiques intervenant aux lemmes 7.3.9 et 7.3.13, pour la reconstruction des courbes hyperelliptiques de genre 3 et de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ et $\mathbf{C}_2$ respectivement en caractéristique 3, sont de degré inférieur à 11.

Terminons par l'expression du covariant quadratique de degré 5 q_5. Les expressions des autres q_i sont absentes de ce document, sachant par exemple que q_{14} est formé de 15 360 termes, mais naturellement disponible dans un fichier Magma.

$$\begin{aligned}
\mathsf{q}_5 = {} & (a_2a_4a_5^3 + 2a_1a_5^4 + 2a_2a_4^2a_5a_6 + 2a_2a_3a_5^2a_6 + a_1a_4a_5^2a_6 + a_0a_5^3a_6 + a_2^2a_5a_6^2 + 2a_2a_4^3a_7 + 2a_3^3a_5a_7 + 2a_1a_4^2a_5a_7 + a_2^2a_5^2a_7 \\
& + 2a_1a_3a_5^2a_7 + a_0a_4a_5^2a_7 + 2a_2a_3^2a_6a_7 + a_2^2a_4a_6a_7 + a_1a_3a_4a_6a_7 + 2a_0a_4^2a_6a_7 + a_1a_2a_5a_6a_7 + a_0a_3a_5a_6a_7 + 2a_1^2a_6^2a_7 \\
& + a_0a_2a_6^2a_7 + 2a_1a_3^2a_7^2 + a_1a_2a_4a_7^2 + a_0a_3a_4a_7^2 + a_1^2a_5a_7^2 + 2a_0a_2a_5a_7^2 + 2a_0a_1a_6a_7^2 + 2a_0^2a_7^3 + a_3^3a_4a_8 + a_2a_3a_4^2a_8 \\
& + 2a_1a_4^3a_8 + a_2a_3^2a_5a_8 + 2a_2^2a_4a_5a_8 + 2a_0a_4^2a_5a_8 + 2a_0a_3a_5^2a_8 + a_1a_3^2a_6a_8 + 2a_1a_2a_4a_6a_8 + 2a_0a_3a_4a_6a_8 + 2a_1^2a_5a_6a_8 \\
& + a_0a_2a_5a_6a_8 + 2a_0a_1a_6^2a_8 + 2a_2^3a_7a_8 + a_1^2a_4a_7a_8 + 2a_0a_2a_4a_7a_8 + a_0a_1a_5a_7a_8 + a_1a_2^2a_8^2 + a_0a_1a_4a_8^2 + a_0^2a_5a_8^2)\mathbf{x}^2 \\
& + (2a_2a_3a_5^3 + a_0a_5^4 + a_3^3a_5a_6 + 2a_1a_4^2a_5a_6 + 2a_2^2a_5^2a_6 + 2a_1a_3a_5^2a_6 + a_0a_4a_5^2a_6 + a_2a_3^2a_6^2 + 2a_1a_3a_4a_6^2 + a_0a_4^2a_6^2 + a_1a_2a_5a_6^2 \\
& + 2a_0a_3a_5a_6^2 + a_1^2a_6^3 + 2a_0a_2a_6^3 + a_2a_3a_4^2a_7 + a_2a_3^2a_5a_7 + a_2^2a_4a_5a_7 + 2a_0a_4^2a_5a_7 + 2a_1a_2a_5^2a_7 + 2a_0a_3a_5^2a_7 + 2a_2^2a_3a_6a_7 \\
& + a_1a_3^2a_6a_7 + 2a_0a_3a_4a_6a_7 + a_1^2a_5a_6a_7 + 2a_0a_2a_5a_6a_7 + a_0a_1a_6^2a_7 + 2a_2^3a_7^2 + 2a_1a_2a_3a_7^2 + a_0a_1a_5a_7^2 + a_0^2a_6a_7^2 + 2a_3^4a_8 \\
& + 2a_2a_3^2a_4a_8 + 2a_2^2a_4^2a_8 + a_1a_3a_4^2a_8 + a_2^2a_3a_5a_8 + a_1a_3^2a_5a_8 + a_1a_2a_4a_5a_8 + a_2^3a_6a_8 + a_1a_2a_3a_6a_8 + 2a_0a_1a_5a_6a_8 \\
& + a_0^2a_6^2a_8 + 2a_1a_2^2a_7a_8 + 2a_1^2a_3a_7a_8 + a_0a_2a_3a_7a_8 + a_0^2a_5a_7a_8 + 2a_1^2a_2a_8^2 + 2a_0a_2^2a_8^2 + 2a_0a_1a_3a_8^2)\mathbf{xz} + a_1a_3a_5^3 \\
& + 2a_0a_4a_5^3 + 2a_3^3a_4a_6 + a_2a_3a_4^2a_6 + a_1a_4^3a_6 + a_2a_3^2a_5a_6 + a_0a_4^2a_5a_6 + a_1a_2a_5^2a_6 + 2a_0a_3a_5^2a_6 + 2a_2^2a_3a_6^2 + 2a_1a_3^2a_6^2 \\
& + 2a_1a_2a_4a_6^2 + a_0a_3a_4a_6^2 + a_0a_1a_6^3 + a_3^4a_7 + 2a_2a_3^2a_4a_7 + a_1a_3a_4^2a_7 + a_0a_4^3a_7 + a_1a_3^2a_5a_7 + 2a_1a_2a_4a_5a_7 + a_1^2a_5^2a_7 \\
& + 2a_0a_2a_5^2a_7 + 2a_1a_2a_3a_6a_7 + 2a_1^2a_4a_6a_7 + a_0a_2a_4a_6a_7 + 2a_0^2a_6^2a_7 + a_1a_2^2a_7^2 + 2a_1^2a_3a_7^2 + a_0a_2a_3a_7^2 + 2a_0a_1a_4a_7^2 \\
& + 2a_2a_3^3a_8 + 2a_1a_3^2a_4a_8 + a_1a_2a_4^2a_8 + a_0a_3a_4^2a_8 + 2a_1a_2a_3a_5a_8 + a_0a_3^2a_5a_8 + 2a_1^2a_4a_5a_8 + a_0a_2a_4a_5a_8 + 2a_1a_2^2a_6a_8 \\
& + a_1^2a_3a_6a_8 + 2a_0a_2a_3a_6a_8 + a_0a_1a_4a_6a_8 + a_1^2a_2a_7a_8 + a_0a_2^2a_7a_8 + 2a_0a_1a_3a_7a_8 + 2a_0^2a_4a_7a_8 + a_1^3a_8^2 + 2a_0^2a_3a_8^2\mathbf{z}^2.
\end{aligned}$$

4.3 Octiques binaires en caractéristique 7

Pour l'obtention des résultats de cette section concernant l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7, nous avons procédé identiquement au cas de la caractéristique 3, *mutatis mutandis*. Nous nous contentons donc d'énoncer ces résultats et de souligner d'éventuelles différences.

4.3.1 Invariants en caractéristique 7

À l'aide des invariants de Shioda normalisés introduits en (4.2) page 58, nous définissons les treize invariants suivants sur $\mathbb{Z}$, tels que les pgcd des coefficients de leurs expressions en les coefficients a_i d'une octique binaire générale soient triviaux (cf. l'exemple 4.3.2 ci-après).

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &= \mathsf{j}_2, \\
\mathcal{J}_3 &= \mathsf{j}_3, \\
\mathcal{J}_4 &= (1/2^9/3^3)(9\mathsf{j}_4 - 4\mathsf{j}_2^2)/7, \\
\mathcal{J}_5 &= (1/2^9/5)(\mathsf{j}_5 - 22/3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3)/7, \\
\mathcal{J}_6 &= (1/2^{14}/3^2)(\mathsf{j}_6 - (10267/180)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 - (85/2)\mathsf{j}_3^2 + (8677/405)\mathsf{j}_2^3)/7^2, \\
\mathcal{J}_7 &= (1/2^{14}/3/5)(\mathsf{j}_7 + (26/3)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2 - (687/8)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 - (719/18)\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2)/7^2,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_8 &= (1/2^{17}/3/5^2)(\mathsf{j}_8 - 75600\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2 + 119\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3 - 729\mathsf{j}_4^2 + (8624091/2)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 \\
&\quad + (19271581/6)\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 - (14575750/9)\mathsf{j}_2^4)/7^4, \\
\mathcal{J}_9 &= (1/2^{19}/3^2/5)(\mathsf{j}_9 - 384\mathsf{j}_7\mathsf{j}_2 - 18630\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3 - (29942/9)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 + (4382325/4)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 \\
&\quad + (3166955/4)\mathsf{j}_3^3 - (3454201/9)\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3)/7^3, \\
\mathcal{J}_{10} &= (1/2^{22}/3^2/5^2)(\mathsf{j}_{10} - 20\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 - 69048\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3 - 1108080\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 1814400\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^2 - (1801373/3)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 \\
&\quad + 63216936\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + (424057725/8)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2 - (381689791/3)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 - (891941435/12)\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2 \\
&\quad + (9445341227/243)\mathsf{j}_2^5)/7^5, \\
\mathcal{J}_{11} &= (-1/2^{21}/3/5^2)(7\mathsf{j}_9\mathsf{j}_2 + (6/25)\mathsf{j}_8\mathsf{j}_3 + (35/6)\mathsf{j}_7\mathsf{j}_4 - (62062/27)\mathsf{j}_7\mathsf{j}_2^2 - (4531735756765/12)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5 \\
&\quad - (13370021/90)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + (76979/432)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + (3270029/3000)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^2 - (421539293/24300)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^3 \\
&\quad - (240959/400)\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3 + (140477648801/16200)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + (356415822721/56250)\mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2 \\
&\quad - (2770091149469/911250)\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^4)/7^5,
\end{aligned}$$

Pour les expressions de $\mathcal{J}_{13}, \mathcal{J}_{14}$ et $\mathcal{J}_{15}$ cf. l'annexe *B.3*.

Il suffit alors de réduire modulo 7.

Proposition 4.3.1 La réduction modulo 7 des treize invariants $\mathcal{J}_i$ donnés ci-dessus définie treize SL_2-invariants homogènes pour les octiques binaires en caractéristique 7 de degrés $2, \ldots, 11, 13, 14, 15$, notés $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}$, qui forment un système de générateurs fondamentaux d'une sous-algèbre de $\mathcal{I}_8$.

Exemple 4.3.2 Sur $\mathbb{F}_7$, on a ainsi défini

$$\begin{aligned}
\mathsf{J}_2 &= \mathsf{j}_2 \mod 7 = 3a_2a_6 + 2a_3a_5 + 2a_4^2, \\
\mathsf{J}_3 &= \mathsf{j}_3 \mod 7 = 2a_2a_4a_6 + 5a_2a_5^2 + 5a_3^2a_6 + 4a_3a_4a_5 + 5a_4^3, \\
\mathsf{J}_4 &= (1/2^9/3^3)(9\mathsf{j}_4 - 4\mathsf{j}_2^2)/7 \mod 7 \\
&= a_0a_2a_6a_8 + 3a_0a_3a_5a_8 + 3a_0a_4^2a_8 + 6a_0a_4a_6^2 + a_0a_5^2a_6 + 6a_1a_2a_6a_7 + 4a_1a_3a_5a_7 \\
&\quad + 5a_1a_3a_6^2 + 4a_1a_4^2a_7 + 5a_1a_4a_5a_6 + 4a_1a_5^3 + 6a_2^2a_4a_8 + 5a_2^2a_5a_7 + a_2^2a_6^2 + a_2a_3^2a_8 \\
&\quad + 5a_2a_3a_4a_7 + 2a_2a_3a_5a_6 + 6a_2a_4^2a_6 + 4a_2a_4a_5^2 + 4a_3^3a_7 + 4a_3^2a_4a_6 + 6a_3^2a_5^2 \\
&\quad + a_3a_4^2a_5 + 4a_4^4 + a_0a_2a_6a_8 + 2a_0a_2a_7^2 + 2a_0a_4^2a_8 + 2a_0a_4a_5a_7 + 2a_0a_5^2a_6 + 2a_1^2a_6a_8.
\end{aligned}$$

Comme en caractéristique 3, méconnaissant la série de Hilbert de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7, nous ne sommes pas parvenus à montrer que les treize SL_2-invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}$, J_{13}, J_{14}, J_{15} définis précédemment forment un système de générateurs de cette algèbre. Toutefois :

- la famille $(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15})$ est une famille d'invariants homogènes séparants pour les octiques binaires de discriminant non nul en caractéristique 7 pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ (cf. théorème 5.3.1 page 75) ;
- aucun autre invariant n'apparaît jusqu'au degré 40 pour la constitution des bases vectorielles des composantes homogènes de $\mathcal{I}_8$.

Terminons ce paragraphe par une expression en les SL_2-invariants J_i du discriminant d'une octique binaire en caractéristique 7, qui est un invariant homogène de degré 14 :

$$\begin{aligned}\Delta = {} & 5\mathsf{J}_2^7 + 3\mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_4 + 3\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + 5\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2 + 4\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4^2 + 3\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^3 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + 4\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 3\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5^2 \\ & + 3\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + 4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + 4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_6^2 + 3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 3\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_8 \\ & + 5\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_9 + 4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_9 + 4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{10} + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_{11} + 6\mathsf{J}_{14}.\end{aligned}$$

4.3.2 Structure conjecturale de l'algèbre $\mathcal{I}_8$

Exposons également pour la caractéristique 7 quelques résultats, pour la plupart conjecturaux, concernant la structure de l'algèbre $\mathcal{I}_8$.

Relations entre les SL_2-invariants

Les treize SL_2-invariants en caractéristique 7 sont liés par (au moins) 21 relations dont le profil des degrés est

$$11, 13, 14, 15, 16, 17, 18^2, 19, 20^2, 21, 22^2, 23, 24^2, 26^2, 28, 30.$$

La première est

$$\mathfrak{R}_{11} = 4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + 6\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^4 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + 3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2^3 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^2 + (4\mathsf{J}_3^3 + 6\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2 + 3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2 + 3\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + 5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6.$$

Pour les expressions des 11 autres premières relations, on pourra se reporter à l'annexe B.4. Par la suite, on note $\mathfrak{R}_i$ (et $\mathfrak{R}'_i$) la (les) relation(s) de degré i. Nos calculs indiquent enfin l'absence d'autres générateurs pour l'idéal des relations jusqu'au degré 45.

Systèmes homogènes de paramètres

Proposition 4.3.3 Les dix systèmes suivants, formés de six SL_2-invariants, sont des systèmes homogènes de paramètres de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7

$$\begin{array}{lll} \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, & \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}, & \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, \\ \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, & \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}, & \{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, \\ \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, & \{\mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}, & \{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}, \\ \{\mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}\}. & & \end{array}$$

Démonstration. On procède comme pour la démonstration de la proposition 4.2.4 page 61, *mutatis mutandis.* *QED*

Remarque 4.3.4 La courbe hyperelliptique de genre 3 d'équation $y^2 = x^7 - 1$ définie sur $\mathbb{F}_7$ (cf. lemme 7.4.2 page 123) a pour SL_2-invariants

$$(0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0).$$

Ainsi, tout système homogène de paramètres pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7, formé à partir des J_i, contient nécessairement J_{14}.

Résolution libre minimale

Pour conjecturer la résolution libre de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7, nous avons été obligé de procéder quelque peu différemment, dans la mesure où nous avons seulement été capable de calculer explicitement les syzygies d'ordre 1 et les syzygies d'ordre 2 et 3 jusqu'au degré 51. On peut toutefois conjecturer les profils de degrés des autres modules de syzygies, en supposant que

- la série de Hilbert de l'algèbre graduée $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7, à l'instar de la caractéristique 3, est identique à celle en caractéristique nulle ;
- $\mathcal{I}_8$ est une algèbre de Gorenstein en caractéristique 7.

En effet, la réécriture de la série

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{18}}{(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7)}. \tag{4.7}$$

pour le dénominateur $\prod_{i=2}^{11}(1-t^i)\prod_{i=13}^{15}(1-t^i)$, associé aux treize générateurs conjecturaux J_i, mène au numérateur

$$\begin{aligned} N(t) = 1 &- t^{11} - t^{13} - t^{14} - t^{15} - t^{16} - t^{17} - t^{18} - t^{19} - t^{20} \\ &+ t^{24} + 2t^{25} + 2t^{26} + 3t^{27} + 3t^{28} + 4t^{29} + 3t^{30} + 4t^{31} + 3t^{32} + 3t^{33} + 2t^{34} + t^{35} \\ &- t^{36} - t^{37} - 3t^{38} - 4t^{39} - 6t^{40} - 5t^{41} - 7t^{42} - 6t^{43} - 6t^{44} - 6t^{45} - 4t^{46} - 3t^{47} - 2t^{48} \\ &+ 2t^{50} + 3t^{51} + 4t^{52} + 6t^{53} + 6t^{54} + 6t^{55} + 7t^{56} + 5t^{57} + 6t^{58} + 4t^{59} + 3t^{60} + t^{61} + t^{62} \\ &- t^{63} - 2t^{64} - 3t^{65} - 3t^{66} - 4t^{67} - 3t^{68} - 4t^{69} - 3t^{70} - 3t^{71} - 2t^{72} - 2t^{73} - t^{74} \\ &+ t^{78} + t^{79} + t^{80} + t^{81} + t^{82} + t^{83} + t^{84} + t^{85} + t^{87} - t^{98}. \end{aligned}$$

Ainsi, du fait de la réciprocité de $N(t)$ en lien avec le caractère Gorenstein, il suffit de connaître les syzygies jusqu'au degré 49.

Conjecture 4.3.5 La résolution libre minimale de $\mathcal{I}_8$, vue comme un $\mathbb{F}_7[X]$-module, est donnée par

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathfrak{F}\mathbb{F}_7[X] \longrightarrow \sum_{i\in\mathsf{D}_{\mathfrak{R}}} \mathfrak{W}_i\mathbb{F}_7[X] \longrightarrow \sum_{i\in\mathsf{D}_{\mathfrak{R}}} \mathfrak{V}_i\mathbb{F}_7[X] \longrightarrow \sum_{i\in\mathsf{D}_{\mathfrak{R}}} \mathfrak{U}_i\mathbb{F}_7[X] - \cdots \\ \cdots \longrightarrow \sum_{i\in\mathsf{D}_{\mathfrak{T}}} \mathfrak{T}_i\mathbb{F}_7[X] \longrightarrow \sum_{i\in\mathsf{D}_{\mathfrak{S}}} \mathfrak{S}_i\mathbb{F}_7[X] \longrightarrow \sum_{i\in\mathsf{D}_{\mathfrak{R}}} \mathfrak{R}_i\mathbb{F}_7[X] \longrightarrow \mathbb{F}_7[X] \longrightarrow \mathcal{I}_8 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où $\mathbb{F}_7[X]$ désigne $\mathbb{F}_7[X_2, \ldots, X_{11}, X_{13}, X_{14}, X_{15}]$ pour lequel l'indéterminée X_i est de degré i. La dernière syzygie $\mathfrak{F}$ est de degré 98 et les profils des degrés des autres modules de syzygies sont les suivants

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_{\mathfrak{R}} &= \left\{11, 13, 14, 15, 16, 17, 18^2, 19, 20^2, 21, 22^2, 23, 24^2, 26^2, 28, 30\right\}, \\ \mathsf{D}_{\mathfrak{S}} &= \left\{18, 20, 21, 22^2, 23, 24^3, 25^2, 26^2, 27^3, 28^4, 29^4, 30^4, 31^5, 32^3, 33^5, 34^3, 35^5, 36^2, 37^4, 38, 39^3, 41^2, 43\right\}, \\ \mathsf{D}_{\mathfrak{T}} &= \left\{31, 33^2, 34, 35^4, 36^3, 37^5, 38^5, 39^7, 40^7, 41^7, 42^9, 43^7, 44^9, 45^6, \right. \\ &\qquad \left. 46^9, 47^5, 48^7, 49^3, 50^5, 51^2, 52^5, 54^3, 56^2, 58, 60\right\} \\ \mathsf{D}_{\mathfrak{U}} &= \left\{38, 40, 42^2, 44^3, 46^5, 47^2, 48^5, 49^3, 50^7, 51^5, 52^9, 53^6 \right. \\ &\qquad \left. , 54^9, 55^7, 56^9, 57^7, 58^7, 59^7, 60^5, 61^5, 62^3, 63^4, 64, 65^2, 67\right\}, \end{aligned}$$

$$\mathsf{D}_{\mathfrak{Y}} = \left\{55, 57^2, 59^3, 60, 61^4, 62^2, 63^5, 64^3, 65^5, 66^3, 67^5, 68^4, 69^4, 70^4, 71^3, 72^4, 73^2, 74^3, 75, 76^2, 77, 78, 80\right\},$$
$$\mathsf{D}_{\mathfrak{W}} = \left\{68, 70, 72^2, 74^2, 75, 76^2, 77, 78^2, 79, 80^2, 81, 82, 83, 84, 85, 87\right\}.$$

Si $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7 admet donc la même série de Hilbert qu'en caractéristique nulle, cette dernière se réécrit sous la forme

$$\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t) = \frac{N'(t)}{(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{14})},$$

où

$$\begin{aligned} N'(t) = 1 &+ t^2 + t^4 + t^6 + t^7 + 2t^8 + 2t^9 + 2t^{10} + 2t^{11} + 2t^{12} + 2t^{13} + 2t^{14} + 3t^{15} + 3t^{16} + 3t^{17} \\ &+ 3t^{18} + 2t^{19} + 2t^{20} + 2t^{21} + 2t^{22} + 2t^{23} + 2t^{24} + 2t^{25} + t^{26} + t^{27} + t^{29} + t^{31} + t^{33}, \end{aligned}$$

relativement au système homogène de paramètres $\{\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{14}\}$. En particulier, on obtiendrait ainsi une borne sur le degré des éléments d'une famille génératrice minimale, à savoir $33 = \deg N'$, sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathcal{I}_8$ est de Cohen-Macaulay (cf. section 2.7). Or nous avons justement observé l'absence de nouveau générateur jusqu'au degré 40.

En outre, l'écriture en (4.7) de la série de Hilbert $\mathsf{H}(\mathcal{I}_8, t)$, à savoir son écriture minimale (cf. section 2.6), donnerait un autre exemple de forme non représentative d'une série de Hilbert. En effet, considérons l'octique binaire $\mathsf{f} = z^2x(x-z)(x^4 + x^3z + x^2z^2 + xz^3 + z^4)$ sur $\mathbb{F}_7$. Cette dernière est telle que $\mathsf{J}_2(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_3(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_4(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_5(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_6(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_7(\mathsf{f}) = 0$, or f n'est pas un élément du nullcone $\mathcal{N}_{\mathsf{V}_8}$. Ainsi $\{\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_7\}$ ne saurait être un système homogène de paramètres de $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 7 et aucun système homogène de paramètres de $\mathcal{I}_8$ ne peut donc avoir ce profil de degré.

4.3.3 Covariants quadratiques

À l'instar de la caractéristique 3, nous nous sommes contentés en caractéristique 7 d'exhiber une famille minimale de covariants quadratiques pour les composantes homogènes de degré inférieur à 13, vu comme des $\mathbb{F}_3[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}]$-modules, de l'algèbre bigraduée des covariants $\mathcal{C}_8$; soit les éléments suivants, où l'indice indique le degré du covariant quadratique :

$$\mathsf{q}_5,\ \mathsf{q}_6,\ \mathsf{q}_7,\ \mathsf{q}'_7,\ \mathsf{q}_8,\ \mathsf{q}'_8,\ \mathsf{q}_9,\ \mathsf{q}'_9,\ \mathsf{q}''_9,\ \mathsf{q}_{10},\ \mathsf{q}'_{10},\ \mathsf{q}_{11},\ \mathsf{q}'_{11},\ \mathsf{q}''_{11},\ \mathsf{q}_{12},\ \mathsf{q}'_{12},\ \mathsf{q}''_{12},\ \mathsf{q}_{13},\ \mathsf{q}'_{13},\ \mathsf{q}''_{13}.$$

En pratique, pour la mise en œuvre de la méthode de Mestre intervenant aux lemmes 7.4.11 et 7.4.15, pour la reconstruction des courbes hyperelliptiques de genre 3 et de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ et $\mathbf{C}_2$ respectivement en caractéristique 7, seuls des covariants quadratiques de degré inférieur à 12 sont nécessaires.

Terminons par l'expression du covariant quadratique q_5, de degré 5, les expressions des autres q_i étant absentes de ce document, mais naturellement disponible dans un fichier Magma.

$$\begin{aligned} \mathsf{q}_5 = (&a_3^2a_5^3 + 2a_2a_4a_5^3 + 2a_1a_5^4 + 3a_3^2a_4a_5a_6 + 6a_2a_4^2a_5a_6 + 3a_2a_3a_5^2a_6 + 2a_1a_4a_5^2a_6 + 5a_0a_5^3a_6 + 2a_3^3a_6^2 + 3a_1a_4^2a_6^2 + 4a_2^2a_5a_6^2 \\ &+ 5a_1a_3a_5a_6^2 + 3a_0a_4a_5a_6^2 + 2a_1a_2a_6^3 + 6a_0a_3a_6^3 + a_3^2a_4^2a_7 + 2a_2a_4^3a_7 + 6a_3^3a_5a_7 + 3a_2a_3a_4a_5a_7 + a_2^2a_5^2a_7 \\ &+ 2a_2a_3^2a_6a_7 + 6a_2^2a_4a_6a_7 + 5a_3^3a_4a_8 + 3a_2a_3a_4^2a_8 + 6a_2a_3^2a_5a_8 + 4a_2^2a_4a_5a_8 + 3a_2^2a_3a_6a_8)\mathbf{x}^2 \\ &+ (3a_2a_3a_5^3 + 3a_1a_4a_5^3 + 3a_0a_5^4 + 4a_3^3a_5a_6 + 6a_1a_4^2a_5a_6 + 2a_2^2a_5^2a_6 + 5a_1a_3a_5^2a_6 + 3a_0a_4a_5^2a_6 + 5a_2a_3^2a_6^2 + a_1a_3a_4a_6^2 \\ &+ a_0a_4^2a_6^2 + 6a_1a_2a_5a_6^2 + 4a_0a_3a_5a_6^2 + 3a_0a_2a_6^3 + 4a_3^3a_4a_7 + a_2a_3a_4^2a_7 + 2a_2a_3^2a_5a_7 + 6a_2^2a_4a_5a_7 + a_2^2a_3a_6a_7 + 4a_3^4a_8 \\ &+ 4a_2a_3^2a_4a_8 + 6a_2^2a_4^2a_8 + 3a_2^2a_3a_5a_8 + 4a_2^3a_6a_8)\mathbf{xz} + 6a_3^3a_5^2 + 4a_2a_3a_4a_5^2 + 6a_1a_4^2a_5^2 + 5a_2^2a_5^3 + a_1a_3a_5^3 + 2a_0a_4a_5^3 + 5a_3^3a_4a_6 \\ &+ a_2a_3a_4^2a_6 + 5a_1a_4^3a_6 + 4a_2a_3^2a_5a_6 + 4a_1a_3a_4a_5a_6 + 4a_0a_4^2a_5a_6 + 5a_1a_2a_5^2a_6 + a_0a_3a_5^2a_6 + 3a_2^2a_3a_6^2 + 6a_1a_3^2a_6^2 + a_1a_2a_4a_6^2 \\ &+ 3a_0a_3a_4a_6^2 + 4a_0a_2a_5a_6^2 + 5a_3^4a_7 + 5a_2a_3^2a_4a_7 + 4a_2^2a_4^2a_7 + 2a_2^2a_3a_5a_7 + 5a_2^3a_6a_7 + 2a_2a_3^3a_8 + 4a_2^2a_3a_4a_8 + a_2^3a_5a_8\mathbf{z}^2. \end{aligned}$$

4.4 Octiques binaires en caractéristique 5

La situation en caractéristique 5 s'avère singulière. En effet, contrairement aux autres caractéristiques, l'algèbre d'invariants $\mathcal{I}_8$ possède un élément de degré 1 en caractéristique 5, à savoir

$$\mathsf{J}_1 = a_4.$$

Ce phénomène n'est toutefois pas totalement anecdotique, comme le suggère le résultat suivant.

Proposition 4.4.1 Si l'entier naturel g est tel que $\mathsf{g}+2$ est un nombre premier, alors le coefficient central $a_{\mathsf{g}+1}$ des formes binaires de degré $2\mathsf{g}+2$ est un invariant pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ en caractéristique $\mathsf{g}+2$.

Démonstration. Avec les notations de la proposition, notons p le nombre premier $\mathsf{g}+2$. Considérons $\mathsf{f} = a_{2\mathsf{g}+2}x^{2\mathsf{g}+2} + a_{2\mathsf{g}+1}x^{2\mathsf{g}+1}z + \ldots + a_0 z^{2\mathsf{g}+2} \in \mathsf{V}_{2\mathsf{g}+2}$ et $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$. Via l'action de M^{-1}, le terme $a_k x^k z^{2\mathsf{g}+2-k}$ est transformé en

$$a_k(ax+bz)^k(cx+dz)^{2\mathsf{g}+2-k}. \tag{4.8}$$

Par symétrie, il est loisible de supposer $k \leqslant \mathsf{g}+1$ et, pour un tel k, le coefficient du terme $x^{\mathsf{g}+1}z^{g+1}$ de la quantité (4.8) est

$$a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{2\mathsf{g}+2-k}{\mathsf{g}+1-i} a^i b^{\mathsf{g}+1-i} c^{\mathsf{g}+1-i} d^i. \tag{4.9}$$

Or, $\mathsf{g} = \mathsf{p}-2$, ainsi

$$\binom{2\mathsf{g}+2-k}{\mathsf{g}+1-i} = \binom{2\mathsf{p}-2-k}{\mathsf{p}-1-i} \tag{4.10}$$

et, pour $0 \leqslant i \leqslant k$ et $0 \leqslant k \leqslant \mathsf{g} = \mathsf{p}-2$, on a $\mathsf{p}-1-i < \mathsf{p}$ et $\mathsf{p} \leqslant 2\mathsf{p}-2-k$, ce qui assure que p divise le coefficient binomial (4.10). Ainsi le coefficient (4.8) est nul modulo p pour $k \neq \mathsf{g}+1$.

En outre, lorsque $k = \mathsf{g}+1$,

$$\binom{\mathsf{p}-1}{\mathsf{p}-1-i} = \frac{(\mathsf{p}-1)\times\ldots\times\mathsf{p}-i}{1\times\ldots\times i} \equiv (-1)^i \mod \mathsf{p}.$$

Ainsi le coefficient (4.9) vaut modulo p

$$a_{\mathsf{g}+1}\sum_{i=0}^{\mathsf{g}+1}(-1)^i\binom{\mathsf{g}+1}{i}a^i b^{\mathsf{g}+1-i}c^{\mathsf{g}+1-i}d^i = (ad-bc)^{\mathsf{g}+1}a_{\mathsf{g}+1}.$$

Finalement, on a établit, comme espéré, que

$$M^{-1}\cdot a_{\mathsf{g}+1} = (ad-bc)^{\mathsf{g}+1}a_{\mathsf{g}+1} = \det(M^{-1})^{-(\mathsf{g}+1)}a_{\mathsf{g}+1} \mod \mathsf{p}.$$

QED

On a d'ailleurs déjà rencontré cette situation avec les quartiques binaires en caractéristique 3 à la section 2.10.2, *i.e.* lorsque $\mathsf{g}=1$, pour lesquelles $\mathsf{I} = a_2$ est un invariant.

Un corollaire notable de l'existence de cet invariant de degré 1 pour les octiques binaires en caractéristique 5 est que la série de Hilbert de l'algèbre graduée $\mathcal{I}_8$ pour cette caractéristique est nécessairement distincte de celle en caractéristique nulle, ce qui contraste avec nos conjectures précédentes en caractéristiques 3 et 7.

Une singularité plus gênante provient en revanche de la profusion des éléments nécessaires pour engendrer l'algèbre $\mathcal{I}_8$. La recherche d'un système de générateurs fondamentaux jusqu'au degré 45 aboutit en effet à la détermination de 62 invariants homogènes, dont voici le profil des degrés

$$\begin{gathered}1, 4, 6^2, 8^2, 9, 10^2, 11, 12^3, 13, 14^3, 15^3, 16^3, 17^3, 18^3, 19^2, 20^4, 21^4,\\ 22^2, 23^2, 24^3, 25^3, 26, 27^2, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33^2, 37,\end{gathered}$$

et les expressions des premiers éléments, exprimés à l'aide des invariants de Shioda normalisés introduits en (4.2) page 58

$$\begin{aligned}
\mathsf{J}_4 &= \mathsf{j}_4 \mod 5\,,\\
\mathsf{J}_6 &= \mathsf{j}_6 \mod 5\,,\\
\mathsf{J}'_6 &= -26/125\cdot \mathsf{j}_2^3 - 93/125\cdot \mathsf{j}_3^2 - 2/5\cdot \mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 \mod 5\,,\\
\mathsf{J}_8 &= -1/5\cdot \mathsf{j}_2^4 - 3/5\cdot \mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2 - 3/5\cdot \mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + 1/5\cdot \mathsf{j}_8 \mod 5\,,\\
\mathsf{J}'_8 &= -2322/3125\cdot \mathsf{j}_2^4 - 1421/3125\cdot \mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2 - 13/25\cdot \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4 - 3/5\cdot \mathsf{j}_4^2 - 3/125\cdot \mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 \mod 5\,,\\
\mathsf{J}_9 &= -1/5\cdot \mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_3 - 3/5\cdot \mathsf{j}_3^3 - 1/5\cdot \mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 1/5\cdot \mathsf{j}_9 \mod 5.
\end{aligned}$$

Soulignons déjà que, dans ce cas, il est plus délicat de tenir pour certain d'avoir exhibé une véritable famille génératrice de l'algèbre d'invariants $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 5. En outre, à la vue de ce résultat, il devient difficilement concevable d'utiliser ces invariants pour une description effective de l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 5. Ne serait-ce que l'obtention des générateurs de l'idéal des relations lié à ces invariants pose problème. Et il en va de même pour déterminer une famille d'invariants séparants pour les octiques binaires de discriminant non nul ou un système homogène de paramètres. Ainsi, nous ne sommes pas allés plus en avant dans notre traitement de la caractéristique 5.

Chapitre 5

Invariants séparants pour les octiques binaires en caractéristiques 3 et 7

Au chapitre précédent, nous avons exhibé les deux familles suivantes de SL_2-invariants, en caractéristique 3 et 7 respectivement,

$$(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}) \quad \text{et} \quad (\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}),$$

sans être en mesure d'établir que celles-ci engendrent l'algèbre $\mathcal{I}_8$. Par conséquent, nous ne pouvons pas invoquer le théorème 1.2.4, pour conclure que ces invariants suffisent pour séparer les orbites des octiques binaires, hors du nullcone, sous l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

L'objet de ce chapitre est d'établir ce résultat de façon directe, en se limitant à l'ouvert des formes de discriminant non nul. Ceci est naturellement suffisant vu notre objectif concernant les courbes hyperelliptiques.

Notre démonstration dans le cas général repose sur l'action intermédiaire d'un sous-groupe $\mathfrak{D}$ de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ et des invariants qui lui sont associés.

5.1 $\mathfrak{D}$-invariants

Soit $\mathfrak{T} \subset \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ le sous-groupe des matrices diagonales inversibles et

$$\mathfrak{D} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \ / \ \lambda, \mu \in \mathsf{K}^\star \right\rangle \subset \mathsf{GL}_2(\mathsf{K}),$$

extension de $\mathfrak{T}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

D'après [LRS15, sec. 2.2], considérons les $\mathfrak{D}$-*invariants* de l'octique binaire

$$\mathsf{f} = a_8 x^8 + a_7 x^7 z + \cdots + a_1 x z^7 + a_0 z^8,$$

i.e. une famille de générateurs minimale de l'algèbre des invariants $\mathsf{K}[a_0, \ldots, a_8]^{\mathfrak{D}}$, donnée comme la famille formée des vingt invariants suivants :

$$
\begin{aligned}
\text{deg. } 1: \quad & \mathfrak{i}_1 &&= a_4, \\
\text{deg. } 2: \quad & \mathfrak{i}_2 &&= a_0\, a_8,\ \mathfrak{j}_2 = a_1\, a_7,\ \mathfrak{k}_2 = a_2\, a_6,\ \mathfrak{l}_{2,} = a_3\, a_5, \\
\text{deg. } 3: \quad & \mathfrak{i}_3 &&= a_0\, a_5\, a_7 + a_1\, a_3\, a_8,\ \mathfrak{j}_3 = a_0\, {a_6}^2 + {a_2}^2 a_8, \\
& \mathfrak{k}_3 &&= a_1\, a_5\, a_6 + a_2\, a_3\, a_7,\ \mathfrak{l}_3 = a_2\, {a_5}^2 + {a_3}^2 a_6, \\
\text{deg. } 4: \quad & \mathfrak{i}_4 &&= a_0\, {a_5}^2 a_6 + a_2\, {a_3}^2 a_8,\ \mathfrak{j}_4 = a_0\, a_3\, a_6\, a_7 + a_1\, a_2\, a_5\, a_8, \\
& \mathfrak{k}_4 &&= a_0\, a_2\, {a_7}^2 + {a_1}^2 a_6\, a_8,\ \mathfrak{l}_4 = a_1\, {a_5}^3 + {a_3}^3 a_7, \\
& \mathfrak{m}_4 &&= a_1\, a_3\, {a_6}^2 + {a_2}^2 a_5\, a_7, \\
\text{deg. } 5: \quad & \mathfrak{i}_5 &&= {a_0}^2 a_6\, {a_7}^2 + {a_1}^2 a_2\, {a_8}^2,\ \mathfrak{j}_5 = a_0\, {a_5}^4 + {a_3}^4 a_8, \\
& \mathfrak{k}_5 &&= a_0\, {a_3}^2 {a_7}^2 + {a_1}^2 {a_5}^2 a_8,\ \mathfrak{l}_5 = {a_1}^2 {a_6}^3 + {a_2}^3 {a_7}^2, \\
\text{deg. } 6: \quad & \mathfrak{i}_6 &&= {a_0}^2 a_3\, {a_7}^3 + {a_1}^3 a_5\, {a_8}^2, \\
\text{deg. } 7: \quad & \mathfrak{i}_7 &&= {a_0}^3 {a_7}^4 + {a_1}^4 {a_8}^3.
\end{aligned}
$$

Remarques 5.1.1

- Suivant [LRS15, sec. 2.2], ces invariants se construisent en deux temps. On détermine d'abord des invariants pour l'action diagonale du sous-groupe $\mathfrak{T}$ des matrices diagonales, ce qui est aisé, puis il suffit de symétriser ces invariants pour l'action anti-diagonale de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- Comme nous le ferons pour les SL_2-invariants au chapitre 7, dans le cas des $\mathfrak{D}$-invariants, il est aisé de reconstruire une octique binaire f à partir de ses $\mathfrak{D}$-invariants.

Outre le rôle crucial que les $\mathfrak{D}$-invariants joueront dans nos démonstrations des théorèmes 5.3.1 et 5.4.1, énoncés aux deux sections suivantes, nous pouvons déjà faire un usage plus prosaïque de ceux-ci.

En effet, de l'inclusion $\mathfrak{D} \cap \mathsf{SL}_2(\mathsf{K}) \subset \mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, on déduit l'inclusion

$$\mathsf{K}[a_0, \ldots, a_8]^{\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})} \subset \mathsf{K}[a_0, \ldots, a_8]^{\mathfrak{D} \cap \mathsf{SL}_2(\mathsf{K})}.$$

Ainsi les SL_2-invariants J_i en caractéristiques 3 et 7, définis au chapitre précédent, peuvent s'exprimer à l'aide des $\mathfrak{D}$-invariants. Par exemple, en caractéristique 3 :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{J}_2 &= 2\mathfrak{i}_1^2 + \mathfrak{i}_2 + \mathfrak{j}_2 + \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{l}_2\,, \\
\mathsf{J}_3 &= 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_3 + 2\mathfrak{k}_3\,, \\
\mathsf{J}_4 &= \mathfrak{i}_1^4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{l}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_3 + 2\mathfrak{i}_4 + 2\mathfrak{k}_4\,.
\end{aligned}
$$

En pratique, l'invariant J_{12} en caractéristique 3 est formé de 2 293 termes en les coefficients a_i d'une octique binaire et de 1 189 termes en les $\mathfrak{D}$-invariants. En caractéristique 7, pour l'invariant J_{15}, on passe de 9 045 termes à 3 091. Cette forme de compression pour la représentation des SL_2-invariants en caractéristiques 3 et 7 offre *in fine* un gain de temps d'environ un facteur 3 lors du calcul des SL_2-invariants d'une octique binaire.

5.2 Schéma de la preuve

Dans le cas général, nous allons utiliser l'action intermédiaire du groupe $\mathfrak{D}$ pour montrer que les SL_2-invariants en caractéristiques 3 et 7 séparent les orbites des octiques de discriminant non nul sous l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

Pour cela, nous allons être amené à considérer les sous-espaces suivants de V_8 :

$$\mathsf{V}_8^{i_1,\ldots,i_j} := \left\{a_8x^8 + a_7x^7z + \ldots + a_1xz^7 + a_0z^8 \in \mathsf{V}_8 \mid a_{i_1} = \ldots = a_{i_j} = 0\right\},$$

pour $0 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant 8$.

À une octique f, on associe alors l'ensemble de classes modulo $\mathfrak{D}$

$$\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{i_1,\ldots,i_j} := \left(\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}).\mathsf{f} \bigcap \mathsf{V}_8^{i_1,\ldots,i_j}\right) / \mathfrak{D}. \tag{5.1}$$

Pour établir que nos SL_2-invariants suffisent pour séparer les orbites d'octiques sous l'action de GL_2, nous procédons en deux temps.

1. Déterminer des entiers $i_1, \ldots, i_j$ tels que, pour un sous-ensemble de formes $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8$, l'ensemble $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{i_1,\ldots,i_j}$ soit non vide et de cardinal fini. Et donner alors des bornes pour ce cardinal.
2. Caractériser les $\mathfrak{D}$-invariants des formes dans $\mathsf{V}_8^{i_1,\ldots,i_j}$ à partir des SL_2-invariants.

Pour pouvoir conclure, il suffit alors que le nombre de classes de $\mathfrak{D}$-invariants caractérisées par les SL_2-invariants, disons d, soit strictement inférieur au double du minorant c du cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{i_1,\ldots,i_j}$. En effet, le cas échéant, si deux octiques binaires non GL_2-équivalentes avaient les mêmes SL_2-invariants, ces dernières seraient GL_2-équivalentes à au moins $2\mathsf{c}$ formes dans $\mathsf{V}_8^{i_1,\ldots,i_j}$ non $\mathfrak{D}$-équivalentes. Or les SL_2-invariants permettent de caractériser d classes de $\mathfrak{D}$-invariants, avec $\mathsf{d} < 2\mathsf{c}$, d'où une contradiction.

En pratique, nous n'avons pas déterminé d'indices $i_1, \ldots, i_j$ tels que l'ensemble $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{i_1,\ldots,i_j}$ soit non vide ou fini pour toute octique de discriminant non nul. Nous envisageons différents cas, partitionnés par l'annulation d'invariants. Ces cas correspondent donc systématiquement à des formes non GL_2-équivalentes et peuvent ainsi être traités séparément. Par exemple, en caractéristique 3, nous distinguerons selon l'annulation de l'invariant J_3 : pour les formes n'annulant pas J_3, on considérera le sous-espace $\mathsf{V}_8^{1,7}$, et pour celles annulant J_3, on considérera $\mathsf{V}_8^{1,4,7}$ et $\mathsf{V}_8^{3,4,5}$.

Notation. Pour une forme $\mathsf{f} = a_{\mathsf{n}}x^{\mathsf{n}} + \ldots + a_1xz^{\mathsf{n}-1} + a_0z^{\mathsf{n}} \in \mathsf{Vn}$ et une matrice $M \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, on notera $M \cdot a_i$ le coefficient du terme $x^iz^{\mathsf{n}-i}$ de $M \cdot \mathsf{f}$.

Formes sans automorphisme

Pour une forme binaire f sans automorphisme, dénombrer les éléments d'un ensemble $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{i_1,\ldots,i_j}$ équivaut à dénombrer les transformations $M \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ telles que $M \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{i_1,\ldots,i_j}$, modulo $\mathfrak{D}$, comme l'indique le lemme suivant.

Lemme 5.2.1 Soit $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_{\mathsf{n}}$ une forme binaire sans automorphisme et $M_1, M_2 \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$. Les deux formes $M_1 \cdot \mathsf{f}$ et $M_2 \cdot \mathsf{f}$ sont $\mathfrak{D}$-équivalentes si et seulement si M_1^{-1} et M_2^{-1} le sont.

Démonstration.

$$M_1 \cdot \mathsf{f} = M_2 \cdot \mathsf{f} \mod \mathfrak{D},$$

$$\begin{aligned}
&\iff (M_2^{-1}M_1)\cdot \mathsf{f} = \mathsf{f} \mod \mathfrak{D},\\
&\iff \exists\, D \in \mathfrak{D}, (DM_2^{-1}M_1)\cdot \mathsf{f} = \mathsf{f},\\
&\iff \exists\, D \in \mathfrak{D}, DM_2^{-1}M_1 = \mathsf{I}_2, \quad \text{puisque } \operatorname{Aut}(\mathsf{f}) = \{\mathrm{id}\},\\
&\iff M_2^{-1} = M_1^{-1} \mod \mathfrak{D}.
\end{aligned}$$

QED

En pratique, les seules transformations de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ que nous aurons à envisager sont celles de la forme $\left(\begin{smallmatrix}1 & r\\ s & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1}$, pour lesquelles on caractérise aisément la $\mathfrak{D}$-équivalence.

Lemme 5.2.2 Deux éléments $\left(\begin{smallmatrix}1 & r\\ s & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}1 & r'\\ s' & 1\end{smallmatrix}\right)$ de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ sont $\mathfrak{D}$-équivalents, pour la multiplication à gauche, si et seulement si

$$\left|\begin{array}{ll}(r', s') \in \{(r,s), (1/s, 1/r)\} & \text{si } rs \neq 0,\\ (r', s') = (r, s) & \text{sinon.}\end{array}\right.$$

Démonstration. $\mathfrak{D}$ étant formé de matrices diagonales et antidiagonales, pour lesquelles on a

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & r\\ s & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & \lambda r\\ \mu s & \mu\end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ \mu & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & r\\ s & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda s & \lambda\\ \mu & \mu r\end{pmatrix},$$

les seules solutions envisageables pour que $\left(\begin{smallmatrix}1 & r'\\ s' & 1\end{smallmatrix}\right)$ soit $\mathfrak{D}$-équivalente à $\left(\begin{smallmatrix}1 & r\\ s & 1\end{smallmatrix}\right)$, selon que rs est nul ou non, sont données par

$$(\lambda, \mu) = (1, 1) \quad \text{et} \quad (\lambda, \mu) = (1/s, 1/r).$$

QED

5.3 Invariants séparants en caractéristique 7

Contrairement à l'ordre qui a prévalu jusqu'à présent, nous abordons le cas de la caractéristique 7 en premier. Simplement car son traitement est plus simple que celui de la caractéristique 3. Dans cette partie, K est donc supposé être de caractéristique 7.

Pour établir notre théorème de séparation ci-après, nous procédons en deux temps selon l'annulation de l'invariant de degré 6 :

$$\mathfrak{I}_6 := \mathsf{J}_2^3 + 5\mathsf{J}_3^2.$$

Les résultats de la section 5.3.1, concernant les formes n'annulant pas $\mathfrak{I}_6$, et ceux de la section 5.3.2, pour les formes annulant $\mathfrak{I}_6$, permettent d'aboutir au résultat escompté suivant.

Théorème 5.3.1 Les treize SL_2-invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}$, définis à la proposition 4.3.1, séparent les orbites de l'ouvert des octiques binaires de discriminant non nul pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux octiques f et f', de discriminant non nul et n'annulant pas $\mathfrak{I}_6$, non GL_2-équivalentes et ayant les mêmes SL_2-invariants. La proposition 5.3.3 établit que, pour une telle octique h, l'ensemble $\mathsf{X}_{\mathsf{h}}^{3,5}$ est de cardinal 2 ou 3. Ainsi les octiques f et f' sont GL_2-équivalentes à au moins quatre formes non $\mathfrak{D}$-équivalentes et appartenant à $\mathsf{V}_8^{3,5}$. Or la proposition 5.3.4 montre que les SL_2-invariants de telles octiques dans $\mathsf{V}_8^{3,5}$ caractérisent trois classes de $\mathfrak{D}$-invariants, d'où une contradiction.

Dans le cas des formes de discriminant non nul annulant $\mathfrak{I}_6$, nous avons prouvé au cours de la démonstration de la proposition 5.3.8 que les SL_2-invariants séparent les orbites de telles formes.

Ces deux cas relatifs à l'annulation éventuelle de $\mathfrak{I}_6$ étant disjoints pour la GL_2-équivalence, le résultat est établi. *QED*

5.3.1 Octiques n'annulant pas $\mathfrak{I}_6$

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux formes f qui n'annulent pas l'invariant $\mathfrak{I}_6$, plus particulièrement en nous intéressant au cardinal de l'ensemble $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}$.

Cardinaux des ensembles $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}$

Afin de nous ramener à des transformations de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ dans $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, nous énonçons préalablement le lemme suivant.

Lemme 5.3.2 Pour toute octique binaire f définie sur K telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \neq 0$, il existe dans son orbite sous $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ une forme $\mathsf{g} = b_8x^8 + b_7x^7z + \ldots + b_1xz^7 + b_0z^8$ telle que

$$(b_2^2b_5 + 4b_2b_3b_4 + 2b_3^3)(b_3b_6^2 + 4b_4b_5b_6 + 2b_5^3) \neq 0. \tag{5.2}$$

Démonstration. Soit $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7z + \ldots + a_1xz^7 + a_0z^8 \in \mathsf{V}_8$ telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \neq 0$.

Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} q & r \\ s & t \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$,

$$M^{-1}\cdot(a_2^2a_5+4a_2a_3a_4+2a_3^3) = (\det M)^9(c_6r^6+c_5tr^5+c_4t^2r^4+c_3t^3r^3+c_2t^4r^2+c_1t^5r+c_0t^6) \tag{5.3}$$

et

$$-M^{-1}\cdot(a_3a_6^2+4a_4a_5a_6+2a_5^3) = (\det M)^9(c_6q^6+c_5q^5s+c_4q^4s^2+c_3q^3s^3+c_2q^2s^4+c_1qs^5+c_0s^6), \tag{5.4}$$

où

$$\begin{aligned}
c_0 &= 2a_3^3 + a_2^2a_5 + 4a_2a_3a_4, & c_1 &= a_3^2a_4 + 2a_2a_4^2 + 6a_2^2a_6 + 5a_2a_3a_5,\\
c_2 &= 3a_3^2a_5 + 6a_2a_4a_5 + 5a_2a_3a_6, & c_3 &= 3a_2a_5^2 + 4a_3^2a_6,\\
c_4 &= 4a_3a_5^2 + a_3a_4a_6 + 2a_2a_5a_6, & c_5 &= 5a_4^2a_6 + 6a_4a_5^2 + 2a_3a_5a_6 + a_2a_6^2,\\
c_6 &= 3a_4a_5a_6 + 5a_5^3 + 6a_3a_6^2.
\end{aligned}$$

Or $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \in \langle c_0, c_1, \ldots, c_6\rangle$, ainsi les polynômes bivariés (5.3) et (5.4) sont non identiquement nuls, ce qui assure l'existence d'une forme $\mathsf{g} \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f}$ vérifiant la condition (5.2). *QED*

Nous sommes maintenant en mesure de borner le cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}$, pour une octique f de discriminant non nul et n'annulant pas $\mathfrak{I}_6$.

Proposition 5.3.3 Pour toute octique binaire f telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$, on a l'alternative suivante pour le cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}$:

- $|\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}| = 3$, si $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) = \{\mathrm{id}\}$;
- $2 \leqslant |\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}| \leqslant 3$, sinon.

Démonstration. Soit $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7z + \ldots + a_1xz^7 + a_0z^8 \in \mathsf{V}_8$ telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$. En vertu du lemme 5.3.2, il est loisible de supposer que f vérifie la condition (5.2).

Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} q & r \\ s & t \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, on a alors

$$a_2^2a_5 + 4a_2a_3a_4 + 2a_3^3 \in \langle M^{-1} \cdot a_3, M^{-1} \cdot a_5\rangle, \text{ si } q = 0$$

et

$$a_3a_6^2 + 4a_4a_5a_6 + 2a_5^3 \in \langle M^{-1} \cdot a_3, M^{-1} \cdot a_5\rangle, \text{ si } t = 0,$$

dans l'anneau $\mathsf{K}[q, r, s, t, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 1/(qt-rs)]$. L'annulation de ces deux quantités étant exclue selon l'hypothèse (5.2), on a nécessairement $qt \neq 0$. En outre, modulo l'action de $\mathfrak{D}$, on peut se restreindre aux cas où $q = t = 1$.

On est donc ramené à chercher les couples $(r, s) \in \mathsf{K}^2$ tels que $1 - rs = \det M_{r,s} \neq 0$ et $M_{r,s}^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{3,5}$, où $M_{r,s} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, *i.e.* les solutions du système :

$$\begin{cases} 0 &= M_{r,s}^{-1} \cdot a_3 = a_5r^3s + 6a_6r^3 + 4a_4r^2s + 3a_5r^2 + 3a_3rs + 4a_4r + 6a_2s + a_3 \\ 0 &= M_{r,s}^{-1} \cdot a_5 = \underbrace{(a_3s^3 + 4a_4s^2 + 3a_5s + 6a_6)}_{=\,d_s} r + \underbrace{6a_2s^3 + 3a_3s^2 + 4a_4s + a_5}_{=\,n_s} \\ 1 &\neq rs \end{cases} \tag{5.5}$$

Dans la mesure où $\mathrm{Res}_s(n_s, d_s) = \mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \neq 0$, d_s est non nul pour tout couple solution (r, s). Ainsi, en exprimant r en fonction de s via la deuxième équation du système (5.5), ce système équivaut à

$$Q_{\mathsf{f}}(s)R_{\mathsf{f}}(s) = 0, \quad r = -\frac{n_s}{d_s} \quad \text{et} \quad 1 \neq rs,$$

où Q_{f} et R_{f} désignent les deux polynômes en s : $Q_{\mathsf{f}} = a_2s^4 + 3a_3s^3 + 6a_4s^2 + 3a_5s + a_6$ et

$$\begin{aligned} R_{\mathsf{f}} = {} & (a_2^2a_5 + 4a_2a_3a_4 + 2a_3^3)s^6 + (6a_2^2a_6 + 5a_2a_3a_5 + 2a_2a_4^2 + a_3^2a_4)s^5 \\ & + (5a_2a_3a_6 + 6a_2a_4a_5 + 3a_3^2a_5)s^4 + (3a_2a_5^2 + 4a_3^2a_6)s^3 \\ & + (2a_2a_5a_6 + a_3a_4a_6 + 4a_3a_5^2)s^2 \\ & + (a_2a_6^2 + 2a_3a_5a_6 + 5a_4^2a_6 + 6a_4a_5^2)s + 6a_3a_6^2 + 3a_4a_5a_6 + 5a_5^3. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Ces derniers vérifient dans l'anneau $\mathsf{K}[r, s, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 1/(rs - 1)]$:

$$\Delta(R_{\mathsf{f}}) = 4\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})^5 \neq 0, \ \mathrm{Res}_s(Q_{\mathsf{f}}, R_{\mathsf{f}}) = 5\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})^3 \neq 0 \text{ et } \mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \in \langle M_{r,s}^{-1} \cdot a_5, Q_{\mathsf{f}}\rangle.$$

Ainsi, pour un couple (r, s) solution du système (5.5), s est nécessairement une des six racines simples du polynôme R_{f}, racine qui ne saurait donc être simultanément une racine de Q_{f}.

Réciproquement, pour une telle racine s, ayant

$$\mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, d_s) = 6(a_3a_6^2 + 4a_4a_5a_6 + 2a_5^3)\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})^2 \neq 0 \quad \text{(hypothèse (5.2))}$$

et $sn_s + d_s = 6Q_{\mathsf{f}}(s) \neq 0$, $r_s = -n_s/d_s$ est bien défini et tel que $\det M_{r_s,s} \neq 0$. Notons également que, toujours grâce à l'hypothèse (5.2), $\mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, n_s) = (a_2^2a_5 + 4a_2a_3a_4 + 2a_3^3)\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})^2 \neq 0$, ainsi r_s est non nul.

Finalement le système (5.5) admet six solutions distinctes (r_i, s_i), $1 \leqslant i \leqslant 6$, vérifiant $r_is_i \neq 0$, où les s_i sont les six racines distinctes de R_{f}, et chaque couple solution est associé à une matrice $M_{r_i,s_i} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r_i \\ s_i & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

Il est alors crucial d'observer que pour une racine s_i de R_{f}, $1/r_i$ est une autre racine de R_{f} (en évaluant formellement R_{f} en $1/r_i$) distincte de s_i, étant donné que $s_ir_i \neq 1$; racine à laquelle est associée le couple solution $(1/s_i, 1/r_i)$. Ce fait est naturellement lié à une sorte de réciprocité modulo $\mathfrak{D}$ pour le polynôme R_{f}, précisément

$$R_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1}\cdot\mathsf{f}}(s) = -s^6R_{\mathsf{f}}(1/s).$$

Ainsi, quitte à renuméroter les six racines distinctes de R_{f}, ces dernières sont s_1, s_2, s_3, $1/r_1$, $1/r_2$, $1/r_3$, où (r_i, s_i) est un couple solution du système (5.5) et, en vertu du lemme 5.2.2, on a donc

$$\left(\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \cap \mathsf{V}_8^{3,5}\right)/\mathfrak{D} = \left\{M_{r_i,s_i}^{-1} \cdot \mathsf{f}, M_{1/s_i,1/r_i}^{-1} \cdot \mathsf{f}\right\}_{1\leqslant i\leqslant 3}/\mathfrak{D} = \left\{M_{r_i,s_i}^{-1} \cdot \mathsf{f}\right\}_{1\leqslant i\leqslant 3}/\mathfrak{D}. \tag{5.7}$$

On a donc d'ores et déjà établi que $\left|\left(\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \cap \mathsf{V}_8^{3,5}\right)/\mathfrak{D}\right| \leqslant 3$, pour toute octique f telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$.

Cas $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) = \{\mathrm{id}\}$. Pour les octiques sans automorphisme autre que trivial, l'inégalité précédente est une égalité, d'après le lemme 5.2.1, puisque les trois matrices de transformations M_{r_i,s_i}, $1 \leqslant i \leqslant 3$, ne sauraient être $\mathfrak{D}$-équivalentes (lemme 5.2.2).

Cas $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \neq \{\mathrm{id}\}$. Pour ces formes, nous allons établir l'inégalité $|\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}| \geqslant 2$, en distinguant selon le groupe d'automorphismes de f. Puisque $\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$, les groupes d'automorphismes envisageables pour f sont les groupes d'automorphismes réduits $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$ des courbes hyperelliptiques associées, donnés à la table 7.5. En outre, étant donné que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \neq 0$, seuls les cas 2, 3, 4 et 5 de la table 7.5 sont à considérer, *i.e.* les groupes $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2^3$ et $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$ conduisant au groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2$ ou $\mathbf{D}_2$ pour la forme f. Vu les inclusions $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4 \supset \mathbf{C}_4, \mathbf{D}_2$ et $\mathbf{C}_2^3 \supset \mathbf{D}_2$, il suffit alors d'établir l'inégalité souhaitée pour les deux cas $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$ et $\mathbf{C}_2^3$. On raisonne alors directement sur les formes normalisées indiquées à la table 7.5.

- $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$: à GL_2-équivalence près, on peut supposer f de la forme

  $$(x^4 - 1)(x^4 + ax^2 + 1),$$

  avec $a \neq 0$ (le cas $a = 0$ correspond à une courbe de groupe d'automorphismes $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$, pour laquelle $\mathfrak{I}_6 = 0$). Des calculs aisés dans l'anneau $\mathbb{F}_{49}(a)[r, s]$ permettent alors d'établir que

  $$\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5} = \left\{\mathsf{f}, u^4ax^8 + u^{46}x^7 + ax^6 + u^{12}ax^4 + 6ax^2 + u^{34}x + u^4a\right\},$$

où u est une racine dans $\mathbb{F}_{49}$ de x^2+6x+3. Ces deux formes sont clairement non $\mathfrak{D}$-équivalentes ($\mathfrak{i}_1$ est nul pour f) et on a donc $|\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}|=2$.

- $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{C}_2^3$: à GL_2-équivalence près, on peut supposer f de la forme

$$(x^4+ax^2+1)(x^4+bx^2+1),$$

avec $a \neq 0$ (a et b ont des rôles symétriques et $a=b=0$ est exclu). Des calculs aisés dans l'anneau $\mathbb{F}_{49}(a,b)[r,s]$ permettent alors de conclure semblablement à $|\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,5}|=3$.

QED

Caractérisation des $\mathfrak{D}$-invariants à partir des SL_2-invariants pour les octiques dans $\mathsf{V}_8^{3,5}$

Lorsque l'on restreint l'action du groupe $\mathfrak{D}$ au sous-espace de formes $\mathsf{V}_8^{3,5}$, certains générateurs de l'algèbre des invariants $\mathsf{K}[\mathsf{V}_8]^{\mathfrak{D}}$, introduite à la section 5.1, deviennent triviaux ; précisément

$$\mathsf{K}[\mathsf{V}_8^{3,5}]^{\mathfrak{D}} = \mathsf{K}[\mathfrak{i}_1,\mathfrak{i}_2,\mathfrak{j}_2,\mathfrak{k}_2,\mathfrak{j}_3,\mathfrak{k}_4,\mathfrak{i}_5,\mathfrak{l}_5,\mathfrak{i}_7].$$

On peut alors caractériser ces neuf $\mathfrak{D}$-invariants à partir des SL_2-invariants, à une multiplicité 3 près, comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 5.3.4 Soit $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{3,5}$ et $(\mathfrak{j}_2 : \ldots : \mathfrak{j}_{11} : \mathfrak{j}_{13} : \mathfrak{j}_{14} : \mathfrak{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Si $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \neq 0$, alors les $\mathfrak{D}$-invariants $(\mathfrak{i}_1 : \mathfrak{i}_2 : \mathfrak{j}_2 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{j}_3 : \mathfrak{k}_4 : \mathfrak{i}_5 : \mathfrak{l}_5 : \mathfrak{i}_7)$ des formes de $\mathsf{V}_8^{3,5}$ GL_2-équivalentes à f sont caractérisés par les équations suivantes :

- $\mathfrak{i}_1$ est n'importe quelle solution de l'équation séparable de degré 3

$$0 = X^3 + 4\mathfrak{j}_2\, X + \mathfrak{j}_3\,; \tag{5.8}$$

- $\mathfrak{i}_2$ est solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} 0 = {} & (5\mathfrak{i}_1^8 + 3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^3 + 3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{j}_2^4)\, X + 3\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 4\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_3^2 + 4\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_6 + 3\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 5\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 \\ & + \mathfrak{j}_2^5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 4\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_4^2 + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 3\mathfrak{j}_5^2\,; \end{aligned} \tag{5.9}$$

- $\mathfrak{j}_2$ est solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} 0 = {} & (6\mathfrak{i}_1^4 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3 + 4\mathfrak{j}_2^2)\, X \\ & + 3\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2 + 5\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2 + 5\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{j}_2^3 + 5\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_5 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\,; \end{aligned} \tag{5.10}$$

- $\mathfrak{k}_2 = 4\mathfrak{i}_1^2 + 5\mathfrak{j}_2\,;$
- $\mathfrak{j}_3$ est solution de l'équation linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} 6\mathfrak{i}_1\, X + 3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2 + 4\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{j}_2^2 + 6\mathfrak{j}_4 & \text{si } \mathfrak{i}_1 \neq 0, \\ \mathfrak{j}_2\, X + 6\mathfrak{j}_5 & \text{sinon}\,; \end{array} \right. \tag{5.11}$$

- $\mathfrak{k}_4$ est solution de l'équation linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} (\mathfrak{i}_1^5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3)\, X + A_9 & \text{si } \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 \neq 0, \\ (\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{k}_2^3)\, X + B_{10} & \text{si } \mathfrak{j}_3 = 0, \\ (2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2)\, X + C_9 & \text{sinon, } i.e.\ \mathfrak{j}_2 = 0, \end{array}\right. \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A_9 = {} & 4\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 5\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^3 + 4\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2 + 5\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2 + 6\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2 + 3\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^3 \\ & + 4\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + 5\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2 + 5\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{k}_2 \\ & + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_3 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 \\ & + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 \\ & + 5\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 \\ & + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_3^3 + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_8 + 6\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5, \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} B_{10} = {} & 4\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2 + 4\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 6\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + 3\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4 \\ & + 5\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_2^2 + 4\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2 + 4\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{k}_2^2 + 3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^3 + 3\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 \\ & + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^2 + 4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_2 \\ & + 6\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 + 6\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4^2 + 4\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8, \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \text{et } C_9 = {} & 2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2 + 3\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{k}_2 + 5\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_4 + 5\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^4 + 6\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 \\ & + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_8 + 4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_7 + 3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_9\,; \end{aligned} \tag{5.15}$$

- $\mathfrak{i}_5$ est solution de l'équation linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} (2\mathfrak{i}_1^5 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3)\, X + A_{10} & \text{si } \mathfrak{j}_3 \neq 0, \\ 3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\, X + B_9 & \text{sinon,} \end{array}\right. \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A_{10} = {} & 6\mathfrak{i}_1^8\mathfrak{i}_2 + 2\mathfrak{i}_1^8\mathfrak{j}_2 + 3\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_4 + 5\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2 + 6\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2 + 4\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_3^2 + 6\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2 \\ & + 4\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2^2 + 6\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3 + 4\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{k}_2 + 6\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2^3 + 3\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 4\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^2 \\ & + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2 + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2^2 \\ & + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2^3 + 4\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2 + 6\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2 + 6\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_2^2 + 6\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{k}_2^3 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^3 + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5 \\ & + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{k}_4 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + 4\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_3 + 6\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_2 + 6\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 \\ & + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_3 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4^2 \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} \text{et } B_9 = {} & 4\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^3 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_4 + 6\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_4 + 5\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_4 + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2 + 6\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{k}_4 \\ & + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + 5\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_6 + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_4\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_7 + 4\mathfrak{k}_4\mathfrak{j}_5\,; \end{aligned} \tag{5.18}$$

- $\mathfrak{l}_5$ est solution de l'équation linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} \mathfrak{i}_1^2\, X + A_7 & \text{si } \mathfrak{i}_1 \neq 0, \\ 2\mathfrak{j}_2\, X + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_7 & \text{sinon,} \end{array}\right. \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} \text{où } A_7 = {} & 6\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^2 + 5\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3 + 4\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2 + 5\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2 \\ & + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2 + 3\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_2 + 6\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^3 + 3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_5 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3^2 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\,; \end{aligned} \tag{5.20}$$

- $\mathfrak{i}_7$ est solution de l'équation linéaire

$$(3\mathfrak{i}_1^2 + 2\mathfrak{j}_2)\, X + 6\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{k}_4\mathfrak{i}_5. \tag{5.21}$$

Démonstration. Une première étape consiste à établir la validité des équations annoncées, ce que l'on fait aisément en évaluant formellement ces expressions pour une octique générique dans $\mathsf{V}_8^{3,5}$.

En outre, il s'agit de s'assurer que, pour chacun des neuf $\mathfrak{D}$-invariants $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{j}_3$, $\mathfrak{k}_4$, $\mathfrak{i}_5$, $\mathfrak{l}_5$, $\mathfrak{i}_7$, au moins une des équations le caractérisant est non triviale.

C'est clair pour le polynôme $X^3 + 4\mathfrak{j}_2\, X + \mathfrak{j}_3$ de l'équation (5.8) qui est unitaire. Observons de plus qu'il est séparable, dans la mesure où son discriminant vaut $5\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})$.

Pour les équations (5.11) et (5.19) définissant $\mathfrak{j}_3$ et $\mathfrak{l}_5$ respectivement, notons que si $\mathfrak{i}_1$ est nul, il en va alors de même pour $\mathfrak{j}_3$, $\mathfrak{j}_2$ ne saurait donc être nul, puisque $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})$ ne l'est pas.

Pour les équations (5.9), (5.10), (5.12), (5.16) et (5.21) définissant $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{k}_4$, $\mathfrak{i}_5$ et $\mathfrak{i}_7$ respectivement, on a

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{i}_1}(5\mathfrak{i}_1^8+3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^3+3\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3^2+\mathfrak{j}_2^4, \mathfrak{i}_1^3+4\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{i}_1+\mathfrak{j}_3) = 4\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})^4, \quad \mathrm{Res}_{\mathfrak{i}_1}(6\mathfrak{i}_1^4+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3+4\mathfrak{j}_2^2, \mathfrak{i}_1^3+4\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{i}_1+\mathfrak{j}_3) = 2\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})^2,$$

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{i}_1}(2\mathfrak{i}_1^5+4\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2+4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3, \mathfrak{i}_1^3+4\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{i}_1+\mathfrak{j}_3) = 5\mathfrak{j}_3\mathfrak{I}_6(\mathsf{f})^2, \quad \mathrm{Res}_{\mathfrak{i}_1}(\mathfrak{i}_1^5+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3, \mathfrak{i}_1^3+4\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{i}_1+\mathfrak{j}_3) = 4\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}),$$

$$\text{et } \mathrm{Res}_{\mathfrak{i}_1}(3\mathfrak{i}_1^2 + 2\mathfrak{j}_2, \mathfrak{i}_1^3 + 4\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{j}_3) = 4\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}),$$

ainsi $\mathfrak{i}_1$ peut être simultanément une racine de l'équation (5.8) par laquelle il est défini et du terme de degré 1 des équations linéaires qui nous intéressent seulement pour les équations (5.12) et (5.16), lorsque $\mathfrak{j}_2$ ou $\mathfrak{j}_3$ sont nuls, ce qui ne peut advenir simultanément, sachant que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \neq 0$. Il suffit alors de noter que, lorsque $\mathfrak{j}_2$ est nul, $\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2$ ne saurait l'être, et, lorsque $\mathfrak{j}_3$ est nul, $\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2+\mathfrak{k}_2^3$ et $\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2$ ne sauraient l'être, vu les appartenances suivantes dans l'anneau $\mathsf{K}[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]$,

$$\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \in \langle \mathfrak{i}_1(\mathsf{f})\mathfrak{k}_2(\mathsf{f}), \mathsf{J}_2(\mathsf{f})\rangle, \quad \mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \in \sqrt{\langle \mathsf{J}_3(\mathsf{f}), (\mathfrak{i}_1^2\mathsf{J}_2^2 + \mathfrak{k}_2^3)(\mathsf{f})\rangle} \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) \in \langle \mathfrak{k}_2(\mathsf{f}), \mathsf{J}_3(\mathsf{f})\rangle.$$

QED

5.3.2 Formes annulant $\mathfrak{I}_6$

Commençons par l'exemple instructif suivant.

Exemple 5.3.5 Soit $\mathsf{f}_1 = x^8 + 4x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x^3 + x \in \mathsf{V}_8$, pour laquelle on a $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}_1) = 0$. Un calcul aisé de base de Gröbner permet d'établir que $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f}_1 \cap \mathsf{V}_8^{3,5} = \emptyset$. En revanche, on a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \mathsf{f}_1 = 5x^8+2x^7+x^3+x \in \mathsf{V}_8^{2,6}$. Toutefois, symétriquement, pour $\mathsf{f}_2 = x^8+2x^2+x+1 \in \mathsf{V}_8^{3,5}$, on a $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}_2) = 0$ et $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f}_2 \cap \mathsf{V}_8^{2,6} = \emptyset$.

Ainsi, il paraît difficilement envisageable pour les octiques binaires annulant l'invariant $\mathfrak{I}_6$ de produire un énoncé semblable à la proposition 5.3.3, sauf à considérer peut-être les intersections des orbites de ces formes avec les sous-espaces $\mathsf{V}_8^{1,7}$ ou $\mathsf{V}_8^{0,8}$. Nous nous écartons toutefois de cette voie dans la mesure où, à l'instar des invariants J_2 et J_3, l'invariant $\mathfrak{I}_6$ dépend uniquement des coefficients centraux d'une octique binaire, précisément les coefficients des termes de degré compris entre 2 et 6. On préfère donc énoncer le lemme suivant, inspiré de l'exemple 5.3.5 précédent.

Lemme 5.3.6 Pour une forme $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8$ telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) = 0$, on a l'alternative suivante

(i) si $\mathsf{J}_2(\mathsf{f})\mathsf{J}_3(\mathsf{f}) \neq 0$, alors $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \bigcap \mathsf{V}_8^{3,5} \neq \emptyset$;

(ii) sinon, *i.e.* $\mathsf{J}_2(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_3(\mathsf{f}) = 0$, alors $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \bigcap \left(\mathsf{V}_8^{2,6} \cup \mathsf{V}_8^{3,5}\right) \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathsf{V}_8$ telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) = 0$.

Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, $M^{-1} \cdot a_3 = 6r^3a_6 + 3r^2a_5 + 4ra_4 + a_3$. Ainsi de deux choses l'une, soit a_5 est nul, auquel cas $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot a_3 = a_5 = 0$, soit a_5 est non nul, auquel cas il existe $r \in \mathsf{K}$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot a_3 = 0$. Il est donc loisible de supposer par la suite que $a_3 = 0$ et $a_5 \neq 0$, le cas $a_3 = a_5 = 0$ étant trivial.

Pour une telle forme, l'annulation de J_2 ou, de façon équivalente, de J_3, puisque $0 = \mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_2^3 + 5\mathsf{J}_3^2$, équivaut à l'une des deux conditions suivantes

$$(C_1) : a_2 = a_4 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (C_2) : \begin{cases} 0 = & a_2a_5^2 + 4a_4^3 \\ 0 = & a_2a_6 + 3a_4^2 \\ 0 = & a_4a_6 + a_5^2 \end{cases}.$$

Concluons alors à l'aide du lemme suivant.

Lemme 5.3.7 Pour une forme $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathsf{V}_8$ telle que $\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) = 0$, $a_3 = 0$ et $a_5 \neq 0$, si $\mathsf{J}_2(\mathsf{f})\mathsf{J}_3(\mathsf{f}) \neq 0$, alors $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \cap \mathsf{V}_8^{3,5} \neq \emptyset$.

Démonstration. Pour une telle forme

$$\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) = a_2(6a_2^2a_6^3 + 4a_2a_4^2a_6^2 + 2a_2a_4a_5^2a_6 + 6a_2a_5^4 + 3a_4^4a_6 + 5a_4^3a_5^2).$$

Si $a_2 = 0$, alors $a_4 \neq 0$ (condition (C_1)) et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 3a_4/a_5 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{3,5}$. Sinon, dans l'anneau

$$\mathsf{A} = \mathsf{K}\left[r, s, u, a_0, a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_5}\right],$$

pour une matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{M}_2(\mathsf{A})$, l'idéal $\langle M^{-1} \cdot a_3, M^{-1} \cdot a_5, \det(M) - u, \mathfrak{I}_6(\mathsf{f})\rangle$ a trois composantes primaires. Pour l'une d'entre elle M est toujours singulière. Pour les deux autres, $\mathsf{J}_2(\mathsf{f})\mathsf{J}_3(\mathsf{f}) \neq 0$ exclu que $u = 1$ soit l'unique solution. Dans ces deux cas, la base de Gröbner pour l'ordre lexicographique $r > s > u > a_0 > a_1 > a_2 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > a_8$ fournie une solution admissible pour r et s, *i.e.* telle que $M \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ et $M^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{3,5}$. *QED*

En vertu du lemme qui vient d'être établi, les seules formes potentiellement épineuses sont donc celles pour lesquelles J_2 et J_3 sont nuls. Si f vérifie (C_1), de deux choses l'une, soit a_6 est déjà nul et $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{2,6}$, soit $\left(\begin{smallmatrix} 4a_5/a_6 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{2,6}$. Si f vérifie (C_2), $\left(\begin{smallmatrix} 2a_4/a_5 & 1 \\ 1 & 5a_6/a_5 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{2,6}$ et cette matrice a son déterminant égal à $(3a_4a_6 - a_5^2)/a_5^2 = 3$. *QED*

La proposition suivante énonce la reconstruction des octiques binaires de discriminant non nul annulant l'invariant $\mathfrak{I}_6$ à partir de leurs SL_2-invariants. Selon le lemme 5.3.6 précédent, on réalise cette reconstruction avec des modèles appartenant aux sous-espaces $\mathsf{V}_8^{2,6}$ ou $\mathsf{V}_8^{3,5}$, le choix entre ces deux alternatives pouvant être déterminé à l'aide des quatre invariants $\mathsf{J}_2, \mathsf{J}_3, \mathsf{J}_4$ et J_5.

Contrairement au cas des octiques n'annulant pas $\mathfrak{J}_6$, nous procédons ici directement, *i.e.* nous reconstruisons une octique directement à partir de ses SL_2-invariants et montrons dans la foulée que l'ambiguïté qui subsite lors de cette reconstruction est licite, en exhibant des isomorphismes *ad hoc*.

Proposition 5.3.8 Soit f une octique binaire de discriminant non nul, telle que $\mathfrak{J}_6(\mathsf{f}) = 0$, et soit $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{11} : \mathsf{j}_{13} : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Considérons en outre les quatre invariants suivants :

$$\mathfrak{J}_7 = \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_5, \quad \mathsf{I}_{a_6} = 3\mathsf{j}_3^3 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_7$$

$$\mathsf{I}_{a_0} = 6\mathsf{j}_3^3 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + 3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7 \quad \text{et} \quad \mathsf{I}_{a_1a_7} = \frac{4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + 6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_4^2}{\mathsf{j}_3^2}, \text{ lorsque } \mathsf{j}_3 \neq 0.$$

Si $\mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_3 = 0$ **et :**

si $\mathsf{j}_4 = \mathsf{j}_5 = 0$ **:** f est $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalente à $a_8x^8 + a_6x^6 + a_1x + a_0$, où

si $\mathsf{j}_6 = \mathsf{j}_{10} = 0$ **:** $a_0 = a_8 = 1$ et $a_1 = a_6 = 0$;

si $\mathsf{j}_6 = 0$ **et** $\mathsf{j}_{10} \neq 0$ **:** $a_0 = 0$, $a_6 = \dfrac{\mathsf{j}_{15}}{\mathsf{j}_{10}}$, $a_1 = 1/a_6$ et $a_8 = 3\dfrac{a_1^2a_6^5\mathsf{j}_{14}}{\mathsf{j}_{10}^2}$;

si $\mathsf{j}_6 \neq 0$ **:** $a_6 = 1, a_0 = 3\dfrac{\mathsf{j}_9}{a_6^2\mathsf{j}_6}$ et $a_8 = \dfrac{3a_0a_6^4\mathsf{j}_8 + a_1^2a_6^5\mathsf{j}_6}{\mathsf{j}_6^2}$, avec a_1 racine de

$$a_6^{21}\mathsf{j}_6X^{14} + 5a_6^{12}\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_9X^8 + 5a_6^3\mathsf{j}_9^4X^2 + \mathsf{j}_9^3\mathsf{j}_{14} + 3\mathsf{j}_9\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_{11}^2 + 3\mathsf{j}_{10}^3\mathsf{j}_{11} \; ; \tag{5.22}$$

sinon : f est $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalente à $a_8x^8 + a_7x^7 + x^5 + a_1x + a_0$, où

si $\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 \neq 0$ **:** $a_0 = \mathsf{j}_5, a_1 = 2\mathsf{j}_4, a_7 = 2\dfrac{\mathsf{j}_6^2}{\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_4} + 5\dfrac{\mathsf{j}_4^2}{\mathsf{j}_5^2} + 2\dfrac{\mathsf{j}_8}{\mathsf{j}_5^2}$

et $a_8 = 3\dfrac{\mathsf{j}_4^3}{\mathsf{j}_5^3} + 4\dfrac{\mathsf{j}_4\mathsf{j}_8}{\mathsf{j}_5^3} + 4\dfrac{\mathsf{j}_6^2}{\mathsf{j}_5^3} + 6\dfrac{\mathsf{j}_6}{\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4}$;

si $\mathsf{j}_4 = 0$ **(et** $\mathsf{j}_5 \neq 0$**) :** $a_0 = \mathsf{j}_5, a_1 = 0, a_7 = 2\dfrac{\mathsf{j}_8}{\mathsf{j}_5^2}$ et $a_8 = 2\dfrac{\mathsf{j}_7}{\mathsf{j}_5^2}$;

si $\mathsf{j}_5 = 0$ **(et** $\mathsf{j}_4 \neq 0$**) :** $a_0 = 0, a_1 = 2\mathsf{j}_4, a_7 = 4\dfrac{\mathsf{j}_6}{\mathsf{j}_4^2}$ et $a_8 = 6\dfrac{\mathsf{j}_{13}}{\mathsf{j}_4^4}$;

sinon : f est $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalente à $a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_1x + a_0$, où

si $\mathfrak{J}_7 = 0$ **:** $a_4 = 6\mathsf{j}_3/\mathsf{j}_2$ et

si $\mathsf{I}_{a_6} = \mathsf{I}_{a_0} = 0$ **:** $a_8 = 1/a_1$ et $a_7 = \mathsf{j}_2/a_1$, avec $\mathsf{j}_2 = \dfrac{3\mathsf{j}_2^2 + 4\mathsf{j}_4}{\mathsf{j}_2}$ et

$$a_1 = -\frac{\mathsf{j}_2^7 + 3\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_{10} + 3\mathsf{j}_7^2 + 6\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8 + 5\mathsf{j}_5\mathsf{j}_9 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_{10} + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_{11} + a_4\mathsf{j}_{13} + 6\mathsf{j}_{14}}{\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 5a_4\mathsf{j}_6 + 3\mathsf{j}_7} \; ;$$

si $\mathsf{I}_{a_6} \neq 0$ **et** $\mathsf{I}_{a_0} = 0$ **:** $a_6 = (4a_4^2\mathsf{j}_5 + 4\mathsf{j}_7 + a_4\dfrac{\mathsf{j}_8}{\mathsf{j}_2} + 3a_4\dfrac{\mathsf{j}_9}{\mathsf{j}_3} + 3a_4\mathsf{j}_6)/a_4^2$, $a_1 = 1/a_6$, $a_7 = \dfrac{3\mathsf{j}_2^2 + 4\mathsf{j}_4}{\mathsf{j}_2a_1}$ et

$$a_8 = \frac{6a_6^2\mathsf{j}_4^3 + 4a_6^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5^2 + 4a_6^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_6 + 2a_6^2a_4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 2a_6^2a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_8 + 4a_6^2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7}{6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5^2 + 5\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + 6a_4\mathsf{j}_6^2 + 3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 5a_4\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + 5\mathsf{j}_6\mathsf{j}_7} \; ;$$

si $\mathsf{I}_{a_6} = 0$ **et** $\mathsf{I}_{a_0} \neq 0$ **:** $a_6 = 0$ et

si $\mathsf{I}_{a_1 a_7} = 0$ **:** $a_1 = 0$,

$$a_7 = -\frac{\mathsf{i}_2^7 + 4\mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_{10} + 2\mathsf{j}_7^2 + 5\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8 + 4\mathsf{j}_5\mathsf{j}_9 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_{10} + 4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_{11} + 4a_4\mathsf{j}_{13} + \mathsf{j}_{14}}{3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 4a_4\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_7},$$

avec $\mathsf{i}_2 = \dfrac{4\mathsf{j}_2^2 + 3\mathsf{j}_4}{\mathsf{j}_2}$, et $a_0 = 1/a_7$, si $a_7 \neq 0$, ou $a_0 = 1$ et $a_8 = \mathsf{i}_2/a_0$;

si $\mathsf{I}_{a_1 a_7} \neq 0$ **:** $a_0 = a_8 = a$, avec a racine de $\mathsf{j}_2 X^2 + 6\mathsf{I}_{a_1 a_7}\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_2^2 + 4\mathsf{j}_4$, et (a_1, a_7) est solution de $XY = \mathsf{I}_{a_1 a_7}$ et

$$\begin{aligned} &a^3 a_4^{16}(X^4 + Y^4) + 6a^2 a_4^{17}\mathsf{j}_4 + 5a^2 a_4^{16}\mathsf{j}_5 + 2a_4^{16}\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 5a^4 a_4^{13}\mathsf{j}_6 \\ &+ 6a^2 a_4^{13}\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + 3a_4^{16}\mathsf{j}_7 + 3a^2 a_4^{14}\mathsf{j}_7 + 6a^2 a_4^{13}\mathsf{j}_8 + 5a_4^{14}\mathsf{j}_9 \\ &+ 3a^2 a_4^{12}\mathsf{j}_9 + 6a^4 a_4^{10}\mathsf{j}_9 + 6a_4^{13}\mathsf{j}_{10} + 6a^2 a_4^{11}\mathsf{j}_{10} + a^2 a_4^{10}\mathsf{j}_{11} \\ &+ a^2 a_4^7\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8 + 5a_4^{10}\mathsf{j}_{13} + 4a^2 a_4^8\mathsf{j}_{13} + 2a_4^9\mathsf{j}_{14} + 4a_4^4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_{15} \ ; \end{aligned} \tag{5.23}$$

si $\mathfrak{I}_7 \neq 0$ **:** $a_6 = 1, a_4 = 6\dfrac{\mathsf{j}_3}{\mathsf{j}_2}, a_0 = \dfrac{4\mathsf{j}_3^2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + 3a_4\mathsf{j}_5}{\mathsf{j}_3}$,

$a_8 = \dfrac{2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2 + 3a_0 a_4\mathsf{j}_4 + 2a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 2a_0\mathsf{j}_5 + 4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + 3a_4\mathsf{j}_7}{\mathsf{j}_3^3 + 4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 6a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5}$, a_1 est racine de

$$2\mathsf{j}_3 X^2 + a_8\mathsf{j}_3^3 + 4a_8\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 6a_8 a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2 + a_0 a_4\mathsf{j}_4 + a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_4^2 + 6a_0\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 \tag{5.24}$$

et si $a_1 \neq 0$, alors $a_7 = (4a_8\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + 3a_8 a_4\mathsf{j}_4 + 4a_0 a_4 + a_4\mathsf{j}_3 + 4a_8\mathsf{j}_5 + 4\mathsf{j}_4)/a_1\mathsf{j}_2$, sinon a_7 est racine d'un des deux polynômes suivants

$$\begin{aligned} &(2a_4\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_7 + 3a_4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + a_0 a_4\mathsf{j}_8 + 3\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + 5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_9 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_{10} + 3a_4\mathsf{j}_{11})\, X^2 \\ &+ a_0^4 a_8 + 6a_8^2 a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_9 + 6a_0^2 a_8\mathsf{j}_6 + 5a_8^2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_7 + 3a_8^2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_8 + a_8^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_9 + 4a_8^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_{10} \\ &+ 4a_8^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_{11} + 2a_4\mathsf{j}_5^2 + 5\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + 2a_4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_6 + a_8\mathsf{j}_6^2 + 4a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_7 + 6a_8\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + 4a_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 \\ &+ 6a_0 a_8\mathsf{j}_9 + 5a_8\mathsf{j}_3\mathsf{j}_9 + 5a_8 a_4\mathsf{j}_{11} + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 3a_0\mathsf{j}_8 + 4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_9 + 6\mathsf{j}_{11}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

ou

$$\begin{aligned} &(a_4\mathsf{j}_5^2 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + 5a_4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_6 + 3a_0 a_4\mathsf{j}_7 + 6a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_7 + 4\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_8 + 3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_9)\, X^2 \\ &+ 4a_8^2\mathsf{j}_6^2 + 3a_8^2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + 4a_8^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 + 4a_8^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_9 + 4a_8^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_{10} + 3a_8^2 a_4\mathsf{j}_{11} + 5a_4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 \\ &+ 4a_0 a_4\mathsf{j}_6 + 4a_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + 6a_8\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + 6a_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 6a_0 a_8\mathsf{j}_8 + 4a_8\mathsf{j}_3\mathsf{j}_8 \\ &+ 5a_8\mathsf{j}_2\mathsf{j}_9 + 3a_8 a_4\mathsf{j}_{10} + 5\mathsf{j}_5^2 + 5a_0\mathsf{j}_7 + 4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_8 + 3a_8\mathsf{j}_{11} + 5\mathsf{j}_{10}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Démonstration. Commençons par observer que les onze cas indiqués dans notre proposition sont disjoints. Ainsi, pour montrer que les SL_2-invariants permettent de séparer les orbites de formes de discriminant non nul et d'invariant $\mathfrak{I}_6$ nul, il suffit d'établir pour chacun de ces onze cas les deux points suivants :

(i) une forme dont les SL_2-invariants vérifient les conditions du cas considéré admet dans son orbite sous $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ un modèle du type annoncé ;

(ii) l'ambiguïté qui subsiste quant à la reconstruction d'un tel modèle à partir des SL_2-invariants est licite, au sens où toutes les formes ainsi obtenues sont GL_2-équivalentes entre elles.

Cas $\mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_3 = 0$: en vertu du lemme 5.3.6, l'orbite de f rencontre $\mathsf{V}_8^{2,6} \cup \mathsf{V}_8^{3,5}$.

Or, d'une part, pour une forme $a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathsf{V}_8^{3,5}$

$$\mathsf{J}_2(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_3(\mathsf{f}) = 0 \iff (a_2 = a_4 = 0) \text{ ou } (a_4 = a_6 = 0)$$

et cela implique alors l'annulation de $\mathsf{J}_4(\mathsf{f})$ et $\mathsf{J}_5(\mathsf{f})$. D'autre part, pour une forme $a_8x^8 + a_7x^7 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_1x + a_0 \in \mathsf{V}_8^{2,6}$, on a dans l'anneau $\mathsf{K}[a_0, a_1, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, 1/\Delta(\mathsf{f})]$,

$$a_3, a_5 \in \sqrt{\langle \mathsf{J}_2(\mathsf{f}), \mathsf{J}_3(\mathsf{f}), \mathsf{J}_4(\mathsf{f}), \mathsf{J}_5(\mathsf{f})\rangle}.$$

Autrement dit, on a établi que, lorsque $\mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_3 = 0$ et $\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$, $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \cap \mathsf{V}_8^{3,5} \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathsf{j}_4 = \mathsf{j}_5 = 0$.

Plaçons nous donc dans le cas où $\mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_3 = \mathsf{j}_4 = \mathsf{j}_5 = 0$, en vertu de ce qui précède et quitte à échanger f avec $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \mathsf{f}$, on peut supposer que $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{2,3,4,5}$. Pour une telle forme, on observe alors les équivalences suivantes :

$$\mathsf{j}_6 = \mathsf{j}_{10} = 0 \iff \text{seul } \mathsf{j}_{14} \text{ est non nul} \iff \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{2,3,4,5,6}$$

et

$$\mathsf{j}_6 = 0 \iff \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{0,2,3,4,5} \cup \mathsf{V}_8^{2,3,4,5,6}.$$

Pour le cas où $\mathsf{j}_6 = \mathsf{j}_{10} = 0$, la classe des SL_2-invariants de x^8+1 est $(0 : \ldots : 0 : 1 : 0)$. Réciproquement soit f dont les SL_2-invariants sont tous nuls à l'exception de j_{14}. Géométriquement, on peut supposer $\mathsf{f}(x)$ de la forme $\mathsf{f}(x) = x(x-1)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$, avec $a, b, c, d, e \in \mathsf{K}$. Un calcul de bases de Gröbner permet alors d'établir que le système ainsi déterminé admet pour unique solution $\mathsf{f}(x) = x^7 - x$, qui est $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalente à $x^8 + 1$.

Lorsque $\mathsf{j}_6 = 0$ et $\mathsf{j}_{10} \neq 0$, on peut supposer que $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{0,2,3,4,5} \setminus \mathsf{V}_8^{6}$, *i.e.* de la forme $a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_1x$, avec $a_6 \neq 0$, puisque $\mathsf{j}_{10} \neq 0$. La reconstruction se fait ainsi sans ambiguïté.

Lorsque $\mathsf{j}_6 \neq 0$, on peut supposer que $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{2,3,4,5}$, *i.e.* de la forme $a_8x^8+a_7x^7+a_6x^6+a_1x+a_0$, avec $a_0a_6 \neq 0$, puisque $\mathsf{j}_6 \neq 0$. Or, pour une telle forme, si ξ est une racine $6^{\text{ème}}$ de $1/a_6$ et ζ une racine de $a_0X^7 + 2X + a_7\xi^7$, on a

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \zeta & 1 \end{pmatrix} = a'_8x^8 + x^6 + a'_1x + a'_0,$$

soit le modèle attendu. Seul le coefficient a_1 est alors caractérisé de façon ambiguë par l'équation (5.22) et les isomorphismes entre les 14 modèles ainsi déterminés sont donnés par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$, où α est une racine de $a_0X^7 + 2X = 0$.

Examinons maintenant le cas où j_4 et j_5 ne sont pas simultanément nuls. D'après ce qui précède, cela implique que $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \cap \mathsf{V}_8^{3,5} = \emptyset$ et par conséquent que $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f} \cap \mathsf{V}_8^{2,6} \neq \emptyset$. À l'instar de la strate $\mathsf{V}_8^{3,5}$, on a à nouveau l'équivalence

$$\mathsf{J}_2(\mathsf{f}) = \mathsf{J}_3(\mathsf{f}) = 0 \iff (a_3 = a_4 = 0) \text{ ou } (a_4 = a_5 = 0),$$

pour une forme $a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathsf{V}_8^{2,6}$, et on peut donc supposer que $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{2,3,4,6} \setminus \mathsf{V}_8^{3,5}$. On normalise alors simplement le coefficient a_5 de f à 1 puisque

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot a_5 = q^5t^3a_5.$$

On aboutit donc au modèle désiré et, la reconstruction se faisant ici sans ambiguïté, il suffit simplement de vérifier formellement les identités proposées.

Cas $\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 \neq 0$: en vertu du lemme 5.3.6, on peut supposer que $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{3,5}$ et pour une telle forme

$$\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) = \mathfrak{I}_7(\mathsf{f}) = 0 \text{ et } \mathsf{J}_2(\mathsf{f})\mathsf{J}_3(\mathsf{f}) \neq 0 \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{c} a_0 = a_2 = 0 \\ a_6 = a_8 = 0 \\ a_2 = a_6 = 0 \\ a_2a_6 + 5a_4^2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{et } a_4 \neq 0.$$

Les deux premières éventualités sont naturellement équivalentes via la transformation $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, tandis que les deux dernières le sont via la transformation $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt[3]{a_2/a_4} \\ \sqrt[3]{a_6/a_4} & 1 \end{pmatrix}$. Dans tous les cas, il est donc possible de supposer $\mathsf{f} \in \left(\mathsf{V}_8^{2,3,5,6} \cup \mathsf{V}_8^{0,2,3,5}\right) \setminus \mathsf{V}_8^4$ et pour une telle forme la nullité de ses coefficients a_0 et/ou a_6 est dictée par celle des invariants I_{a_0} et I_{a_6} respectivement.

Lorsque $\mathsf{I}_{a_0} = \mathsf{I}_{a_6} = 0$, pour $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7 + a_4x^4 + a_1x$, on a $a_1 \neq 0$, car $\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$, soit le modèle attendu. La reconstruction se fait ainsi sans ambiguïté.

Lorsque $\mathsf{I}_{a_0} = 0$ et $\mathsf{I}_{a_6} \neq 0$, pour $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_1x$, on a $a_6 \neq 0$ et la reconstruction se fait sans ambiguïté.

Lorsque $\mathsf{I}_{a_0} \neq 0$ et $\mathsf{I}_{a_6} = 0$, pour $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7 + a_4x^4 + a_1x + a_0$, on a $\mathsf{I}_{a_1a_7} = a_1a_7$ et on distingue alors selon l'annulation ou non de cet invariant.

Lorsque $\mathsf{I}_{a_1a_7} = 0$, quitte à considérer $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot \mathsf{f}$, il est loisible de supposer a_1 nul. La reconstruction se fait alors sans ambiguïté.

Lorsque $\mathsf{I}_{a_1a_7} \neq 0$, a_0a_8 est une quantité invariante non nulle, puisque $\mathsf{I}_{a_0} \neq 0$ et, posant $a^2 = a_0a_8$, on a

$$\begin{pmatrix} -\sqrt[8]{\dfrac{a_0}{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt[8]{\dfrac{a_8}{a}} \end{pmatrix} .(a_8x^8 + a_7x^7 + a_4x^4 + a_1x + a_0) = ax^8 + a_7'x^7 + a_4x^4 + a_1'x + a,$$

soit le modèle annoncé, pour lequel a_1' et a_7' jouent des rôles parfaitement symétriques. Le système vérifié par ces derniers déterminent uniquement la paire $\left\{\pm a_1'^4, \pm a_7'^4\right\}$, a étant défini au signe près. Autrement dit, à la symétrie près donnée par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, on caractérise les modèles $\zeta^4ax^8 + \zeta^7\mathsf{I}_{a_1a_7}/a_1'x^7 + a_4x^4 + \zeta a_1'x + \zeta^4a$, où ζ est une racine $8^{\text{ème}}$ de l'unité. Or, pour ξ une racine $16^{\text{ème}}$ de l'unité,

$$\begin{pmatrix} 1/\xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} .(ax^8 + a_7'x^7 + a_4x^4 + a_1'x + a) = \xi^8ax^8 + \xi^{10}a_7'x^7 + a_4x^4 + \xi^6a_1'x + \xi^8a,$$

ce qui donne l'équivalence entre les modèles caractérisés.

Notons enfin que l'annulation du coefficient dominant de l'équation (5.23) impliquerait celle de a_4 ou a_0a_8, ce qui est exclue.

Enfin, lorsque $\mathfrak{I}_7(\mathsf{f}) \neq 0$, pour $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{3,5}$,

$$\mathfrak{I}_6(\mathsf{f}) = 0, \mathfrak{I}_7(\mathsf{f}) \neq 0 \text{ et } \mathsf{J}_2(\mathsf{f})\mathsf{J}_3(\mathsf{f}) \neq 0 \Longrightarrow a_2a_6 = 0.$$

Par symétrie, on choisi $a_2 = 0$ et on peut normaliser a_6 à 1 comme précédemment, soit le modèle proposé. Seule la détermination des coefficients a_1 et a_7 d'un tel modèle est alors ambiguë, précisément a_1 et a_7 ne sont connus qu'au signé près, le signe de a_1a_7 étant lui constant, lorsque $a_1 \neq 0$. Or

$$\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} .(a_8x^8 + a_7x^7 + x^6 + a_4x^4 + a_1x + a_0) = a_8x^8 - a_7x^7 + x^6 + a_4x^4 - a_1x + a_0,$$

avec t une racine de $X^2 + 1$. Notons enfin que l'annulation du dénominateur de la fraction définissant a_8 impliquerait celle de a_0 (soit $\mathfrak{I}_7 = 0$) ou a_4, ce qui est exclue, et que l'annulation simultanée des coefficients dominants des équations (5.25) et (5.25) définissant a_7 lorsque a_1 est nul impliquerait celle de a_0, et donc $\Delta(\mathsf{f}) = 0$, ou a_4, ce qui est exclue. *QED*

5.4 Invariants séparants en caractéristique 3

Dans cette partie, K est supposé être de caractéristique 3. Similairement à la caractéristique 7, cette partie vise à établir le résultat de séparation suivant. Cette fois, notre dichotomie s'opère selon l'annulation ou non de l'invariant J_3.

Théorème 5.4.1 Les dix SL_2-invariants $\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}$, définis à la proposition 4.2.1, séparent les orbites de l'ouvert des octiques binaires de discriminant non nul pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

Démonstration. Le cas $\mathsf{J}_3 = 0$ est traité à la section 5.4.2. Pour les octiques binaires f, de discriminant non nul, telle que $\mathsf{J}_3(\mathsf{f}) = 0$, la situation est simple, dans la mesure où $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,4,5}$ ou $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,4,7}$ est un singleton et cette alternative est dictée par l'annulation d'invariants (proposition 5.4.11). Il suffit alors d'établir que les SL_2-invariants de formes dans $\mathsf{V}_8^{3,4,7}$ ou $\mathsf{V}_8^{1,4,7}$ caractérisent une unique classe de $\mathfrak{D}$-invariants, c'est la proposition 5.4.12.

Le cas $\mathsf{J}_3 \neq 0$ est abordé à la section 5.4.1. Pour ces octiques, on considère les ensembles $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$. On spécifie dans un premier temps le cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$, qui dépend du groupe d'automorphismes de f (cf. la table 7.2 page 113) et de l'annulation de trois invariants $\mathfrak{I}_{10}, \mathfrak{I}_{11}$ et $\mathfrak{I}_{12}$, introduits en (5.35). Précisément, d'après la proposition 5.4.3, on a pour le cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$ (une entrée « - » signifie que ce cas ne peut advenir)

Aut(f)	{id}	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{D}_4$
$\mathfrak{I}_{10} \neq 0$	13	9	7	5
$\mathfrak{I}_{10} = 0, \mathfrak{I}_{12} \neq 0$	12	–	–	–
$\mathfrak{I}_{10} = 0, \mathfrak{I}_{12} = 0, \mathfrak{I}_{11} \neq 0$	11	8	–	–

(5.27)

Dans un second temps, on s'assure que les SL_2-invariants caractérisent correctement les $\mathfrak{D}$-invariants des formes dans $\mathsf{V}_8^{1,7}$, *i.e.* en accord avec les résultats de la table précédente. Il s'agit des corollaires 5.4.6, 5.4.7, 5.4.8 et 5.4.9. La situation est toutefois plus subtile ici, car on ne sait pas *a priori* distinguer sur une ligne du tableau (5.27) les groupes d'automorphismes des formes en question. Les corollaires 5.4.7, 5.4.8 et 5.4.9 indiquent alors justement que les équations de strates données aux lemmes 7.3.5, 7.3.7 et 7.3.11 permettent de caractériser le groupe d'automorphismes d'une octique binaire. Ainsi chaque case de la table (5.27) est déterminée par une famille d'invariants et pour chaque case le nombre de classes de $\mathfrak{D}$-invariants caractérisé par

les SL_2-invariants est toujours strictement inférieur au double de la valeur de cette case, *i.e.* le cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$, ce qui assure la propriété de séparation des SL_2-invariants.

Enfin pour les formes annulant les trois invariants $\mathfrak{I}_{10}, \mathfrak{I}_{11}$ et $\mathfrak{I}_{12}$, on procède directement, à l'instar des formes annulant l'invariant $\mathfrak{I}_6$ en caractéristique 7, en montrant que les SL_2-invariants caractérisent des modèles isomorphes, c'est le lemme 5.4.10. *QED*

5.4.1 Formes n'annulant pas J_3

Dans un premier temps, nous allons nous pencher sur les formes f qui n'annulent pas l'invariant J_3, plus particulièrement en nous intéressant à l'ensemble $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$ de classes modulo $\mathfrak{D}$.

Cardinaux des ensembles $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$

Soit $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7z + \ldots + a_1xz^7 + a_0z^8 \in \mathsf{V}_8$ une octique de discriminant non nul et $M = \left(\begin{smallmatrix} q & r \\ s & t \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ telle que $M^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,7}$.

En se plaçant dans l'anneau $\mathbb{F}_3[q, r, s, t, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 1/(qt - rs)]$, on établit que

- si $q = 0$, alors

$$a_0^4a_7 + 2a_0^3a_1a_6 + a_0a_1^3a_4 + 2a_1^4a_3 \in \langle M^{-1} \cdot a_1, M^{-1} \cdot a_7\rangle \ ; \tag{5.28}$$

- si $t = 0$, alors

$$2a_1a_8^4 + a_2a_7a_8^3 + 2a_4a_7^3a_8 + a_5a_7^4 \in \langle M^{-1} \cdot a_1, M^{-1} \cdot a_7\rangle. \tag{5.29}$$

Laissons ces cas de côté pour le moment et supposons que $qt \neq 0$. Modulo l'action de $\mathfrak{D}$, on peut alors supposer que $q = t = 1$ et on note toujours $M_{r,s}$ la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$. La condition $M_{r,s}^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,7}$, avec $M_{r,s} \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, correspond alors au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & M_{r,s}^{-1} \cdot a_1 = rs^7a_1 + 2rs^6a_2 + rs^4a_4 + 2rs^3a_5 + rsa_7 + 2ra_8 + 2s^7a_0 \\ & & \qquad +s^6a_1 + 2s^4a_3 + s^3a_4 + 2sa_6 + a_7, \\ 0 & = & M_{r,s}^{-1} \cdot a_7 = \underbrace{(s^7a_1 + 2s^6a_2 + s^4a_4 + 2s^3a_5 + sa_7 + 2a_8)}_{=\,d_s}r \\ & & \qquad + \underbrace{2s^7a_0 + s^6a_1 + 2s^4a_3 + s^3a_4 + 2sa_6 + a_7}_{=\,n_s}, \\ 1 & \neq & rs. \end{array}\right. \tag{5.30}$$

Dans la mesure où $\mathrm{Res}_s(n_s, d_s) = \Delta(\mathsf{f}) \neq 0$, d_s est non nul pour tout couple solution (r, s). Ainsi, en exprimant r en fonction de s via la deuxième équation du système (5.30), celui-ci équivaut à

$$(Q_{\mathsf{f}}(s))^3R_{\mathsf{f}}(s) = 0, \quad r = -\frac{n_s}{d_s} \quad \text{et} \quad 1 \neq rs,$$

où $Q_{\mathsf{f}}(s) = s^8\,\mathsf{f}(1/s)$ est le polynôme réciproque de f et R_{f} est le polynôme :

$$
\begin{aligned}
R_{\mathsf{f}} = {} & (a_0^4a_7 + 2a_0^3a_1a_6 + a_0a_1^3a_4 + 2a_1^4a_3)X^{26} + (2a_0^4a_8 + a_0^3a_2a_6 + 2a_0a_1^3a_5 + a_1^3a_2a_3)X^{25} \\
& + (a_0^3a_1a_8 + 2a_0^3a_2a_7 + a_1^4a_5 + 2a_1^3a_2a_4)X^{24} + (a_0^3a_3a_7 + 2a_0^3a_4a_6 + 2a_0a_2^3a_4 + a_1a_2^3a_3)X^{23} \\
& + (2a_0^3a_3a_8 + a_0^3a_5a_6 + a_0a_2^3a_5 + 2a_2^4a_3)X^{22} + (a_0^3a_4a_8 + 2a_0^3a_5a_7 + 2a_1a_2^3a_5 + a_2^4a_4)X^{21} \\
& + (2a_0a_2^3a_7 + 2a_1^3a_3a_7 + a_1^3a_4a_6 + a_1a_2^3a_6)X^{20} \\
& + (a_0a_2^3a_8 + a_1^3a_3a_8 + 2a_1^3a_5a_6 + 2a_2^4a_6)X^{19} + (2a_1^3a_4a_8 + a_1^3a_5a_7 + 2a_1a_2^3a_8 + a_2^4a_7)X^{18} \\
& + (a_0a_3^3a_7 + a_0a_4^4 + 2a_1a_3^3a_6 + 2a_1a_3a_4^3)X^{17} + (2a_0a_3^3a_8 + 2a_0a_4^3a_5 + a_2a_3^3a_6 + a_2a_3a_4^3)X^{16} \\
& + (a_1a_3^3a_8 + a_1a_4^3a_5 + 2a_2a_3^3a_7 + 2a_2a_4^4)X^{15} + (2a_0a_4a_5^3 + a_1a_3a_5^3 + a_3^4a_7 + 2a_3^3a_4a_6)X^{14} \\
& + (a_0a_5^4 + 2a_2a_3a_5^3 + 2a_3^4a_8 + a_3^3a_5a_6)X^{13} + (2a_1a_5^4 + a_2a_4a_5^3 + a_3^3a_4a_8 + 2a_3^3a_5a_7)X^{12} \\
& + (2a_0a_5^3a_7 + a_1a_5^3a_6 + 2a_3a_4^3a_7 + a_4^4a_6)X^{11} + (a_0a_5^3a_8 + 2a_2a_5^3a_6 + a_3a_4^3a_8 + 2a_4^3a_5a_6)X^{10} \\
& + (2a_1a_5^3a_8 + a_2a_5^3a_7 + 2a_4^4a_8 + a_4^3a_5a_7)X^9 + (a_0a_4a_7^3 + a_0a_6^3a_7 + 2a_1a_3a_7^3 + 2a_1a_6^4)X^8 \\
& + (2a_0a_5a_7^3 + 2a_0a_6^3a_8 + a_2a_3a_7^3 + a_2a_6^4)X^7 + (a_1a_5a_7^3 + a_1a_6^3a_8 + 2a_2a_4a_7^3 + 2a_2a_6^3a_7)X^6 \\
& + (2a_0a_4a_8^3 + a_1a_3a_8^3 + a_3a_6^3a_7 + 2a_4a_6^4)X^5 + (a_0a_5a_8^3 + 2a_2a_3a_8^3 + 2a_3a_6^3a_8 + a_5a_6^4)X^4 \\
& + (2a_1a_5a_8^3 + a_2a_4a_8^3 + a_4a_6^3a_8 + 2a_5a_6^3a_7)X^3 + (2a_0a_7a_8^3 + a_1a_6a_8^3 + 2a_3a_7^4 + a_4a_6a_7^3)X^2 \\
& + (a_0a_8^4 + 2a_2a_6a_8^3 + a_3a_7^3a_8 + 2a_5a_6a_7^3)X + 2a_1a_8^4 + a_2a_7a_8^3 + 2a_4a_7^3a_8 + a_5a_7^4.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

Remarquons alors que les coefficients des termes de degré 0 et 26 de R_{f} correspondent aux conditions (5.28) et (5.29). Or le lemme suivant énonce qu'il est toujours possible de choisir f de telle sorte que ces coefficients soient non nuls. Ainsi, pour dénombrer les éléments de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$, seules les transformations $M_{r,s}$ sont à considérer.

Lemme 5.4.2 Pour toute forme $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8$ telle que $\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$, il existe dans l'orbite de f sous $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ une forme $\mathsf{g} = b_8x^8 + b_7x^7z + \ldots + b_1xz^7 + b_0z^8$ telle que

$$
(b_0^4b_7 + 2b_0^3b_1b_6 + b_0b_1^3b_4 + 2b_1^4b_3)(2b_1b_8^4 + b_2b_7b_8^3 + 2b_4b_7^3b_8 + b_5b_7^4) \neq 0. \tag{5.32}
$$

Démonstration. Soit $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7z + \ldots + a_1xz^7 + a_0z^8 \in \mathsf{V}_8$ telle que $\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$.

Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} q & r \\ s & t \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$,

$$
M^{-1} \cdot (a_0^4a_7 + 2a_0^3a_1a_6 + a_0a_1^3a_4 + 2a_1^4a_3) = (\det M)^7 r^{26} R_{\mathsf{f}}(t/r) \tag{5.33}
$$

et

$$
M^{-1} \cdot (2a_1a_8^4 + a_2a_7a_8^3 + 2a_4a_7^3a_8 + a_5a_7^4) = (\det M)^7 q^{26} R_{\mathsf{f}}(s/q). \tag{5.34}
$$

Or $\Delta(\mathsf{f}) \in \langle \text{coefficients de } R_{\mathsf{f}} \rangle$, ainsi les polynômes bivariés (5.33) et (5.34) sont non identiquement nuls, ce qui assure l'existence d'une forme $\mathsf{g} \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K}) \cdot \mathsf{f}$ vérifiant la condition (5.32).

QED

Pour la suite de notre propos, considérons les trois invariants suivants :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{10} &= \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^2 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_{10}, \\
\mathfrak{I}_{11} &= 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_3 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8, \\
\mathfrak{I}_{12} &= \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 \\
&\quad + \mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_{10}\mathsf{J}_2 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_{12}.
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

Nous traitons dans un premier temps le cas des formes n'annulant pas simultanément $\mathfrak{I}_{10}, \mathfrak{I}_{11}$ et $\mathfrak{I}_{12}$, objet de la proposition qui suit. Le cas d'annulation des trois invariants $\mathfrak{I}_i$ est traité à part par le lemme 5.4.10, à la fin de ce paragraphe.

Proposition 5.4.3 Pour une octique binaire f telle que $\mathsf{J}_3(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$ et n'annulant pas simultanément $\mathfrak{I}_{10}, \mathfrak{I}_{12}$ et $\mathfrak{I}_{11}$, le cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$ dépend de l'annulation des trois invariants $\mathfrak{I}_i$ et du groupe d'automorphismes de f. Précisément, la situation est résumée par la table suivante.

Aut(f)	{id}	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{D}_4$
$\mathfrak{I}_{10} \neq 0$	13	9	7	5
$\mathfrak{I}_{10} = 0, \mathfrak{I}_{12} \neq 0$	12	–	–	–
$\mathfrak{I}_{10} = 0, \mathfrak{I}_{12} = 0, \mathfrak{I}_{11} \neq 0$	11	8	–	–

(5.36)

Une entrée « - » signifie que ce cas ne peut advenir.

Remarque 5.4.4 Pour une octique binaire de discriminant non nul, son groupe d'automorphismes correspond au groupe d'automorphismes réduit de la courbe hyperelliptique qui lui est associée. D'après le lemme 7.2.2, lorsque J_3 est non nul, seuls les cas 1, 2 , 4 et 6 de la table 7.2 page 113 sont alors à considérer, soit ceux de la table (5.36).

Démonstration.

Formes de groupe d'automorphismes trivial. Soit $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7z + \ldots + a_1xz^7 + a_0z^8 \in \mathsf{V}_8$ telle que $\mathsf{J}_3(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$ et dont le groupe d'automorphismes est trivial. D'après le lemme 5.2.1, pour déterminer le cardinal de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$, il suffit de dénombrer les transformations $M \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ telles que $M^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,7}$ modulo $\mathfrak{D}$. En outre, d'après les remarques précédents l'énoncé de la proposition 5.4.3, il suffit de considérer les transformations $M_{r,s} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)$, en supposant que f vérifie la condition (5.32) du lemme 5.4.2.

On est donc ramené à chercher les couples $(r, s) \in \mathsf{K}^2$ solutions du système (5.30), qui, on l'a vu, équivaut à

$$(Q_{\mathsf{f}}(s))^3 R_{\mathsf{f}}(s) = 0, \quad r = -\frac{n_s}{d_s} \quad \text{et} \quad 1 \neq rs,$$

où $Q_{\mathsf{f}}(s) = s^8\,\mathsf{f}(1/s)$ est le polynôme réciproque de f et R_{f} a été défini ci-dessus en (5.31). Or Q_{f} et R_{f} vérifient dans l'anneau $\mathsf{K}[r, s, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, 1/(rs-1)]$:

$$\Delta(R_{\mathsf{f}}) = 2\mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f})^{12}\mathsf{J}_3(\mathsf{f})^{24}, \ \mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, Q_{\mathsf{f}}) = \mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f})^4 \text{ et } -n_s s - d_s = Q_{\mathsf{f}}(s).$$

Cas $\mathfrak{I}_{10} \neq 0$. Pour un couple (r, s) solution du système (5.30), s est nécessairement une des vingt-six racines simples du polynôme R_{f}, racine qui ne saurait donc être simultanément une racine de Q_{f}, lorsque $\mathfrak{I}_{10} \neq 0$.

Réciproquement, pour une telle racine s, ayant

$$\mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, d_s) = (2a_1a_8^4 + a_2a_7a_8^3 + 2a_4a_7^3a_8 + a_5a_7^4)\Delta(\mathsf{f})^4 \neq 0 \qquad \text{(hypothèse (5.32))}$$

et $n_s s + d_s = 2Q_{\mathsf{f}}(s) \neq 0$, $r_s = -n_s/d_s$ est bien défini et est tel que $\det M_{r_s,s} \neq 0$. Notons également que

$$\mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, n_s) = (a_0^4a_7 + 2a_0^3a_1a_6 + a_0a_1^3a_4 + 2a_1^4a_3)\Delta(\mathsf{f})^4 \neq 0 \qquad \text{(hypothèse (5.32))}$$

ainsi r_s est non nul.

Finalement le système (5.30) admet vingt-six solutions distinctes (r_i, s_i), $1 \leqslant i \leqslant 26$, vérifiant $r_i s_i \neq 0$, où les s_i sont les vingt-six racines distinctes de R_{f}, et chaque couple solution est associé à une matrice $M_{r_i,s_i} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & r_i \\ s_i & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$.

Il est alors crucial d'observer que pour une racine s_i de R_{f}, $1/r_i$ est une autre racine de R_{f} (en évaluant formellement R_{f} en $1/r_i$) distincte de s_i, étant donné que $s_i r_i \neq 1$; racine à laquelle est associée le couple solution $(1/s_i, 1/r_i)$. Ce fait est naturellement lié à une sorte de réciprocité modulo $\mathfrak{D}$ pour le polynôme R_{f}, précisément

$$R_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{-1}.\mathsf{f}}(s) = -s^{26} R_{\mathsf{f}}(1/s).$$

Ainsi, quitte à renuméroter les vingt-six racines distinctes de R_{f}, ces dernières sont $s_1, \ldots, s_{13}$, $1/r_1, \ldots, 1/r_{13}$, où (r_i, s_i) est un couple solution du système (5.30). La combinaison des lemmes 5.2.2 et 5.2.1, permet alors d'établir que

$$\left|\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}\right| = \left|\left\{M_{r_i,s_i}, M_{1/s_i,1/r_i}\right\}_{1 \leqslant i \leqslant 13} / \mathfrak{D}\right| = 13, \tag{5.37}$$

pour toute octique f de groupe d'automorphismes trivial et telle que $\mathsf{J}_3(\mathsf{f})\mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$.

Cas $\mathfrak{I}_{10} = 0$ et $\mathfrak{I}_{12} \neq 0$. Lorsque $\mathfrak{I}_{10}$ est nul, R_{f} et Q_{f} ont une racine commune, puisque $\mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, Q_{\mathsf{f}}) = \mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f})^4 = 0$. Via l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, on peut supposer que cette racine commune est 0, autrement dit que

$$a_8 = 2a_1a_8^4 + a_2a_7a_8^3 + 2a_4a_7^3a_8 + a_5a_7^4 = 0.$$

Or, puisque f est de discriminant non nul, a_7 ne peut être nul, et on a finalement $a_8 = a_5 = 0$. Observons alors que pour une telle forme $\mathsf{J}_3 = a_2(2a_3a_7 + a_4a_6)$, qui est supposé non nul.

0 est racine double de R_{f}, mais pas triple, puisque le coefficient du terme de degré 2 de R_{f} vaut $a_7^3\mathsf{J}_3/a_2$ et est donc non nul. Considérons alors $R'_{\mathsf{f}} = R_{\mathsf{f}}/s^2$ et $Q'_{\mathsf{f}} = Q_{\mathsf{f}}/s$, pour lesquels

$$\Delta(R'_{\mathsf{f}}) = a_2^5/a_7^{12}\mathfrak{I}_{12}(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f})^{12}\mathsf{J}_3(\mathsf{f})^{19},\ \mathrm{Res}_s(R'_{\mathsf{f}}, Q'_{\mathsf{f}}) = 1/a_7^5\mathfrak{I}_8(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f})^4,\ \text{avec } a_2^2\mathfrak{I}_{12} = \mathsf{J}_3^2\mathfrak{I}_8,$$

$$\mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, d_s) = 1/a_7^2(2a_3a_7 + a_4a_6)\Delta(\mathsf{f})^4,$$

$$\mathrm{Res}_s(R'_{\mathsf{f}}, n_s) = 1/a_7^2(a_0^4a_7 + 2a_0^3a_1a_6 + a_0a_1^3a_4 + 2a_1^4a_3)\Delta(\mathsf{f})^4.$$

Ces quatre quantités sont non nuls et on peut donc conclure, comme pour le cas $\mathfrak{I}_{10} \neq 0$ précédent, sachant que R'_{f} est de degré 24, que

$$\left|\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}\right| = 12,$$

pour toute octique f de groupe d'automorphismes trivial telle que $\mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f}) = 0$ et $\mathsf{J}_3\mathfrak{I}_{12}\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$.

Cas $\mathfrak{I}_{10} = \mathfrak{I}_{12} = 0$ et $\mathfrak{I}_{11} \neq 0$. Lorsque $\mathfrak{I}_{10}$ et $\mathfrak{I}_{12}$ sont nuls, R'_{f} et Q'_{f} ont une racine commune, autrement dit R_{f} et Q_{f} ont deux racines communes. Via l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, on peut supposer que ces racines communes sont 0 et ∞, soit $a_8 = a_5 = 0$ et $a_0 = a_3 = 0$ (en effet a_8 et a_7 ainsi que a_0 et a_1 ne peuvent être simultanément nuls, puisque $\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$). Observons alors que pour une telle forme $\mathsf{J}_3 = a_2 a_4 a_6$.

Comme précédemment 0 est racine exactement double de R_{f} qui est de degré 24. Considérons toujours $R'_{\mathsf{f}} = R_{\mathsf{f}}/s^2$ et $Q'_{\mathsf{f}} = Q_{\mathsf{f}}/s$, pour lesquels

$$\Delta(R'_{\mathsf{f}}) = 2a_2^5 a_6^5/a_1^{12}/a_7^{12}\ \mathfrak{I}_{11}(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f})^{12}\mathsf{J}_3(\mathsf{f})^{15},\ \mathrm{Res}_s(R'_{\mathsf{f}}, Q'_{\mathsf{f}}) = 2/a_1^5/a_7^5\ \mathfrak{I}_6(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f})^4,$$

$$\text{avec } a_2^2 a_6^2 \mathfrak{I}_{11} = \mathsf{J}_3^3 \mathfrak{I}_6, \mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, d_s) = 1/a_1^2/a_7^2 \Delta(\mathsf{f})^4, \mathrm{Res}_s(R_{\mathsf{f}}, d_s) = 1/a_1^2 a_7 (\mathsf{J}_3(\mathsf{f})/a_2)\Delta(\mathsf{f})^4.$$

Ces quatre quantités sont non nulles et on peut donc conclure, comme pour les cas précédents, sachant que R'_{f} est de degré 22, que

$$\left|\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}\right| = 11,$$

pour toute octique f de groupe d'automorphismes trivial et telle que $\mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f}) = \mathfrak{I}_{12}(\mathsf{f}) = 0$ et $\mathsf{J}_3(\mathsf{f})\mathfrak{I}_{11}(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$.

Formes de groupe d'automorphismes non trivial. Pour ces formes, on raisonne directement sur les modèles normalisés, indiqués à la table 7.2 page 113, pour dénombrer les éléments de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$. Nous nous contentons ici d'exposer en détail le cas des formes de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_4$, pour lequel les expressions en jeu sont de tailles raisonnables. Le traitement des deux autres possibilités est similaire.

$\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{D}_4$. Il s'agit du cas 6 de la table 7.2, dont le modèle normalisé est

$$\mathsf{f} = x^8 + ax^4 + 1, \quad \text{avec } a \in \mathsf{K}.$$

Pour ce modèle, on a $\mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f}) = \Delta(\mathsf{f})$, qui est donc non nul. En outre, un calcul de base de Gröbner dans l'anneau $\mathbb{F}_3(a)[r,s]$, pour l'ordre « grevlex », relatif à l'idéal $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot a_1, \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \cdot a_7 \rangle$ permet d'établir que les éléments de $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7}$ sont caractérisés par les cinq classes de $\mathfrak{D}$-invariants suivantes

$$\begin{aligned}
&(a : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0),\\
&(1 : (a+1)^2 : 0 : (a+2)^2 : 0 : 0 : 2(a+1)(a+2)^2 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0),\\
&(1 : (a+2)^2 : 0 : (a+1)^2 : 0 : 0 : (a+1)^2(a+2) : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0),\\
&((a+1)^2 : (a+2)^2 : 0 : 1 : 2(a+2)^2 a : 0 : (a+2) : 0 : 2(a\\
&\quad +2)^2 a : (a+2)^3 a : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : (a+2)^5 a^2 : 0 : 0 : 0 : 0),\\
&((a+2)^2 : (a+1)^2 : 0 : 1 : (a+1)^2 a : 0 : (2a+2) : 0 : (a\\
&\quad +1)^2 a : (a+1)^3 a : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 2(a+1)^5 a^2 : 0 : 0 : 0 : 0).
\end{aligned}$$

Des cas d'égalités entre ces classes interviennent seulement lorsque $a \in \mathbb{F}_3$. Or, pour $a = 0$, f a un groupe d'automorphismes plus gros, en l'occurrence $\mathbf{D}_8$ (cas 8 de la table 7.2), et pour $a = 1$ ou 2, f est de discriminant nul.

$\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{D}_2$. Il s'agit du cas 4 de la table 7.2, dont le modèle normalisé est

$$(x^4 + ax^2 + 1)(x^4 + bx^2 + 1) \quad \text{avec } a, b \in \mathsf{K}.$$

Contentons nous d'indiquer que, pour ce modèle, l'annulation de $\mathfrak{I}_{10}$, combinée avec la non nullité du discriminant, implique celle de $\mathfrak{I}_{12}$ et $\mathfrak{I}_{11}$.

$\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{C}_2$. Il s'agit du cas 2 de la table 7.2, dont le modèle normalisé est

$$x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + 1, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathsf{K}.$$

Pour ce modèle, l'annulation de $\mathfrak{I}_{10}$ implique celle de $\mathfrak{I}_{12} = 0$.

QED

Caractérisation des $\mathfrak{D}$-invariants à partir des SL_2-invariants pour les octiques dans $\mathsf{V}_8^{1,7}$

Lorsque l'on restreint l'action du groupe $\mathfrak{D}$ au sous-espace des formes de $\mathsf{V}_8^{1,7}$, certains générateurs de l'algèbre des invariants $\mathsf{K}[\mathsf{V}_8]^{\mathfrak{D}}$, introduite à la section 5.1, deviennent triviaux ; précisément

$$\mathsf{K}[\mathsf{V}_8^{1,7}]^{\mathfrak{D}} = \mathsf{K}[\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{j}_3, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{i}_4, \mathfrak{j}_5].$$

Ces $\mathfrak{D}$-invariants sont alors caractérisés, avec une certaine ambiguïté, par les SL_2-invariants.

Proposition 5.4.5 Soit $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,7}$ et $(\mathfrak{j}_2 : \ldots : \mathfrak{j}_{10} : \mathfrak{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Si $\mathfrak{j}_3 \neq 0$, alors les $\mathfrak{D}$-invariants $(\mathfrak{i}_1 : \mathfrak{i}_2 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{l}_2 : \mathfrak{j}_3 : \mathfrak{l}_3 : \mathfrak{i}_4 : \mathfrak{j}_5)$ des formes de $\mathsf{V}_8^{1,7}$ GL_2-équivalentes à f sont caractérisés par les équations suivantes :

- $\mathfrak{i}_1$ est n'importe quelle solution de l'équation de degré 13

$$\begin{aligned} 0 = {} & X^{13} + 2\mathfrak{j}_3\, X^{10} + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\, X^8 + (\mathfrak{j}_2^3 + 2\mathfrak{j}_6)\, X^7 + (2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4)\, X^6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5\, X^5 \\ & + (2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_9)\, X^4 + 2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4\, X^3 + \mathfrak{I}_{11}\, X^2 + \mathfrak{I}_{12}\, X + \mathfrak{J}_3\mathfrak{I}_{10}\ ; \end{aligned} \tag{5.39}$$

- $\mathfrak{i}_2$ est la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathfrak{i}_1^2 \mathsf{P}_{\mathfrak{i}_2}(\mathfrak{i}_1)\, X \\ & + \mathfrak{i}_1^{14} + 2\mathfrak{i}_1^{11}\mathfrak{j}_3 + (\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{j}_4)\mathfrak{i}_1^{10} + (\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_6)\mathfrak{i}_1^8 \\ & + (2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3)\mathfrak{i}_1^7 + 2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + (2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_9 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_3^3)\mathfrak{i}_1^5 \\ & + (\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_2^5 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{j}_{10})\mathfrak{i}_1^4 + (\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4)\mathfrak{i}_1^3 \\ & + (\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_9 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_{12} + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_6^2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_4^3 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{10} + 2\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8)\mathfrak{i}_1^2 \\ & + (2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4)\mathfrak{i}_1 \\ & + 2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^4 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5, \end{aligned} \tag{5.40}$$

  lorsque $\mathsf{P}_{\mathfrak{i}_2}(\mathfrak{i}_1) \neq 0$, où

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{\mathfrak{i}_2} = {} & 2\mathfrak{j}_2\, X^8 + (\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{j}_4)\, X^6 + \mathfrak{j}_5\, X^5 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\, X^3 + (2\mathfrak{j}_2^4 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_8)\, X^2 \\ & + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_5^2 + \mathfrak{j}_{10}, \end{aligned} \tag{5.41}$$

sinon $\mathfrak{i}_2$ est n'importe quelle solution de l'équation de degré 3

$$\begin{aligned}0 = {} & 2\mathfrak{i}_1^9 X^3 + (2\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_5)X^2 + (\mathfrak{i}_1^{13} + 2\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2^3 + 2\mathfrak{i}_1^{10}\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^8\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 \\ & + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_3^3 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{i}_1^9\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4^2 \\ & + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_4^3 + 2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5^2 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5^2 \\ & + 2\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_6^2 + 2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 \\ & + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_9 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_9 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{10} + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10} + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_{12})X + \mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2^4 + \mathfrak{i}_1^8\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 \\ & + \mathfrak{i}_1^9\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^5\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^8\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 \\ & + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4^2 \\ & + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^3 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 \\ & + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 \ ;\end{aligned} \tag{5.42}$$

- $\mathfrak{k}_2$ est la solution de l'équation linéaire

$$0 = \mathfrak{i}_1 X + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2 + 2\mathfrak{j}_3 \ ; \tag{5.43}$$

- $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{i}_1^2 + \mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_2 + 2\mathfrak{k}_2$;
- $\mathfrak{j}_3$ est la solution d'une des cinq équations linéaires

$$0 = \mathfrak{i}_1 \mathsf{P}_i(\mathfrak{i}_1)\, X + \mathsf{Q}_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 5, \tag{5.44}$$

  lorsqu'il existe i tel que $\mathsf{P}_i(\mathfrak{i}_1) \neq 0$, où $\mathsf{P}_1 = X^4 + 2\mathfrak{j}_2 X^2 + 2\mathfrak{j}_3 X + \mathfrak{j}_4$ (cf. la section C.1 pour les expressions des autres coefficients P_i et Q_i).
  Sinon, $\mathfrak{j}_3$ est n'importe quelle solution de l'équation de degré 3

$$\mathfrak{i}_1^6 X^3 + \mathfrak{c}_2\, X^2 + \mathfrak{c}_1\, X + \mathfrak{c}_0 \tag{5.45}$$

  (cf. la section C.2 pour les expressions des coefficients $\mathfrak{c}_i$) ;
- $\mathfrak{l}_3$ est la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mathfrak{j}_3 X + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{i}_1^2 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{i}_1^3 + 2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{i}_2 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2 \\ & + 2\mathfrak{j}_4\mathfrak{i}_1^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_4\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{j}_6 \ ; \end{aligned} \tag{5.46}$$

- $\mathfrak{i}_4 = \mathfrak{i}_1^4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2 + 2\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{j}_4$;
- $\mathfrak{j}_5 = \mathfrak{i}_1^5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{i}_1^3 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{j}_5$.

Démonstration. Une première étape consiste à établir la validité des équations annoncées, ce que l'on fait aisément en évaluant formellement ces expressions pour une octique générique dans $\mathsf{V}_8^{1,7}$.

En outre, il s'agit de s'assurer que, pour chacun des huit $\mathfrak{D}$-invariants $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{j}_3$, $\mathfrak{l}_3$, $\mathfrak{i}_4$, $\mathfrak{j}_5$, au moins une des équations le caractérisant est non triviale. Or, étant donné que $\mathfrak{j}_3$ est non nul, il en va de même de $\mathfrak{i}_1$. En effet, pour $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,7}$, $\mathfrak{j}_3 = \mathfrak{i}_1(2a_0a_8 + a_2a_6)$. *QED*

De cette proposition et de la proposition 5.4.3, on déduit les quatre corollaires suivants. On indique ici la démonstration du cas générique des formes de groupe d'automorphismes trivial et

du cas des formes de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_4$. La démarche est à nouveau similaire pour les deux autres cas.

Corollaire 5.4.6 Pour un uplet de SL_2-invariants $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ d'une forme de discriminant non nul, avec $\mathsf{j}_3 \neq 0$, les uplets de $\mathfrak{D}$-invariants $(\mathsf{i}_1 : \mathsf{i}_2 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{l}_2 : \mathsf{j}_3 : \mathfrak{l}_3 : \mathsf{i}_4 : \mathsf{j}_5)$, correspondant à des formes dans $\mathsf{V}_8^{1,7}$, solutions des équations de la proposition précédente sont au plus au nombre de 21.

Démonstration. Dans ce qui suit, on note $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ le polynôme de degré 13 qui définit l'équation (5.39). Via des calculs de base de Gröbner dans l'anneau $\mathbb{F}_3[a_0, a_2, \ldots, a_6, a_8, 1/\Delta(\mathsf{f})]$ pour l'ordre lexicographique, on établit les assertions suivantes :

(i) si i_1 est une racine commune de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ et $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_2}$, alors i_1 est une racine multiple de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$;

(ii) si i_1 est une racine commune de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ et des cinq polynômes P_i, alors i_1 est une racine multiple de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ et $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_2}$ et les équations de degré 3 (5.42) et (5.45) sont de discriminants nuls.

Définissons une racine i_1 de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ comme étant de

- Type I : si $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_2}(\mathsf{i}_1) \neq 0$ et s'il existe $i \in \{1, \ldots, 5\}$, $\mathsf{P}_i(\mathsf{i}_1) \neq 0$;
- Type II : si $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_2}(\mathsf{i}_1) = 0$ et s'il existe $i \in \{1, \ldots, 5\}$, $\mathsf{P}_i(\mathsf{i}_1) \neq 0$;
- Type III : si $\mathsf{P}_i(\mathsf{i}_1) = 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, 5\}$.

Si i_1 est une racine de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ de type I, alors tous les autres $\mathfrak{D}$-invariants sont uniquement déterminés. Si i_1 est une racine de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ de type II, alors tous les autres $\mathfrak{D}$-invariants sont uniquement déterminés, à l'exception de i_2 qui est solution de l'équation de degré 3 (5.42). Enfin si i_1 est une racine de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ de type III, alors tous les autres $\mathfrak{D}$-invariants sont uniquement déterminés, à l'exception de i_2 et j_3 qui sont solutions des équations de degré 3 (5.42) et (5.45), de discriminants nuls.

Notant n_{X} le nombre de racine de $\mathsf{P}_{\mathsf{i}_1}$ de type X et n le nombre de uplets de $\mathfrak{D}$-invariants solutions, ce qui précède implique les trois majorations suivantes :

$$\mathsf{n} \leqslant \mathsf{n}_{\mathsf{I}} + 3 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{II}} + 2 \cdot 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{III}}, \quad \mathsf{n}_{\mathsf{II}} \leqslant 8 - 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{III}} \quad \text{et} \quad \mathsf{n}_{\mathsf{I}} \leqslant 13 - 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{II}} - 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{III}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathsf{n} &\leqslant 13 - 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{II}} - 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{III}} + 3 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{II}} + 2 \cdot 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{III}} \\ &= 13 + \mathsf{n}_{\mathsf{II}} + 2 \cdot \mathsf{n}_{\mathsf{III}} \\ &\leqslant 13 + 8 = 21. \end{aligned}$$

QED

Corollaire 5.4.7 Soit f une octiques binaires dans $\mathsf{V}_8^{1,7}$, de discriminant et d'invariant J_3 non nuls, et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Si ses SL_2-invariants vérifient les équations (7.4) du lemme 7.3.5, alors ils caractérisent 5 classes de $\mathfrak{D}$-invariants $(\mathsf{i}_1 : \mathsf{i}_2 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{l}_2 : \mathsf{j}_3 : \mathfrak{l}_3 : \mathsf{i}_4 : \mathsf{j}_5)$ et $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{D}_4$.

Démonstration. Les équations générales de la proposition 5.4.5 pour la caractérisation des $\mathfrak{D}$-invariants restent valables, toutefois, modulo les relations (7.4) du lemme 7.3.5, l'équation (5.40) pour i_2 peut être remplacée par

$$\mathsf{j}_2^2 X + \mathsf{i}_1^6 + \mathsf{i}_1^4 \mathsf{j}_2 + \mathsf{i}_1^2 \mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{i}_1 \mathsf{j}_2 \mathsf{j}_3 + 2\mathsf{i}_1^2 \mathsf{j}_4 + \mathsf{i}_1 \mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_6. \tag{5.47}$$

et l'équation (5.44) pour $\mathfrak{j}_3$ peut être remplacée par

$$2\mathfrak{i}_1 X + 2\mathfrak{i}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2 + 2\mathfrak{k}_2^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{k}_2\mathsf{J}_2 + \mathsf{J}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathsf{J}_3 + 2\mathsf{J}_4. \tag{5.48}$$

La non annulation de $\mathfrak{j}_3$ assure alors la non nullité de $\mathfrak{i}_1$ et l'annulation de $\mathfrak{j}_2$ entraînerait celle du discriminant ce qui est exclu. La seule équation non linéaire pour la détermination des $\mathfrak{D}$-invariants est donc l'équation (5.39) pour $\mathfrak{i}_1$. Or modulo les relations (7.4), cette dernière se factorise sous la forme

$$\left(X + \mathfrak{j}_4^2/(\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2^2) + 2\mathfrak{j}_4/\mathfrak{j}_3\right)\left(X^2 + \mathfrak{j}_4/\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{j}_2\right)^2\left(X^2 + (2\mathfrak{j}_4^2/(\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_2^2) + \mathfrak{j}_4/\mathfrak{j}_3)X + 2\mathfrak{j}_2\right)^4,$$

d'où les 5 solutions annoncées. Finalement, les SL_2-invariants d'une forme vérifiant les équations (7.4) du lemme 7.3.5 caractérisent 5 classes de $\mathfrak{D}$-invariants et sont ainsi les invariants d'une forme de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_4$, d'après la proposition 5.4.3. *QED*

Corollaire 5.4.8 Soit f une octiques binaires dans $\mathsf{V}_8^{1,7}$, de discriminant et d'invariant J_3 non nuls, et $(\mathfrak{j}_2 : \ldots : \mathfrak{j}_{10} : \mathfrak{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Si ses SL_2-invariants vérifient les équations (7.5) du lemme 7.3.7, alors ils caractérisent 7 classes de $\mathfrak{D}$-invariants $(\mathfrak{i}_1 : \mathfrak{i}_2 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{l}_2 : \mathfrak{j}_3 : \mathfrak{l}_3 : \mathfrak{i}_4 : \mathfrak{j}_5)$ et $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{D}_2$.

Corollaire 5.4.9 Soit f une octiques binaires dans $\mathsf{V}_8^{1,7}$, de discriminant et d'invariant J_3 non nuls, et $(\mathfrak{j}_2 : \ldots : \mathfrak{j}_{10} : \mathfrak{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Si ses SL_2-invariants vérifient les équations (7.9) du lemme 7.3.11, alors ils caractérisent 8 ou 9 classes de $\mathfrak{D}$-invariants $(\mathfrak{i}_1 : \mathfrak{i}_2 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{l}_2 : \mathfrak{j}_3 : \mathfrak{l}_3 : \mathfrak{i}_4 : \mathfrak{j}_5)$, selon l'annulation de $\mathfrak{I}_{10}$, et $\mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{C}_2$.

Formes annulant $\mathfrak{I}_{10}, \mathfrak{I}_{11}$ et $\mathfrak{I}_{12}$

Lemme 5.4.10 Soit f une octique binaire de discriminant et d'invariant J_3 non nuls et annulant $\mathfrak{I}_{10}$, $\mathfrak{I}_{11}$ et $\mathfrak{I}_{12}$, alors f est $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalente à une octique de la forme

$$x^7 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + x, \tag{5.49}$$

avec

$$(2\,a_6^2\,a_4^2\,a_2^2 + 2\,a_6\,a_4^4\,a_2 + 2\,a_4^6 + a_6^3\,a_4 + 2\,a_6\,a_4^2\,a_2 + a_4\,a_2^3 + 2\,a_6\,a_2 + 1) = 0. \tag{5.50}$$

Pour ces octiques, les SL_2-invariants séparent les orbites.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle développée pour les formes annulant l'invariant $\mathfrak{I}_6$ en caractéristique 7 (cf. proposition 5.3.8). Pour une octique binaire f telle que $\mathsf{J}_3(\mathsf{f})\Delta(\mathsf{f}) \neq 0$ et $\mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f}) = \mathfrak{I}_{11}(\mathsf{f}) = \mathfrak{I}_{12}(\mathsf{f}) = 0$, l'existence d'un modèle de la forme (5.49) dans l'orbite de f provient du résultat obtenu lors de la démonstration de la proposition 5.4.3 pour le cas $\mathfrak{I}_{10}(\mathsf{f}) = \mathfrak{I}_{12}(\mathsf{f}) = 0$ et $\mathfrak{I}_{11}(\mathsf{f}) \neq 0$. La relation (5.50) traduit alors simplement l'annulation de $\mathfrak{I}_{10}$, $\mathfrak{I}_{11}$ et $\mathfrak{I}_{12}$. Les coefficients a_2, a_4 et a_6 sont alors déterminés par les équations suivantes :

si $\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{j}_4 \neq 0$ **ou** $\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 \neq 0$

- a_4 est la solution de l'équation linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} (\mathsf{j}_2^2+2\mathsf{j}_4)X+2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3+2\mathsf{j}_3 & \text{si } \mathsf{j}_2^2+2\mathsf{j}_4\neq 0, \\ (\mathsf{j}_3+\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5)X+2\mathsf{j}_2^3+2\mathsf{j}_2^2+\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5+2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4^2+\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4+\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5+2\mathsf{j}_4^2+\mathsf{j}_4 & \text{si } \mathsf{j}_3+\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5\neq 0\ ; \end{array} \right. \tag{5.51}$$

- (a_2, a_6) est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} XY+2a_4^2+2\mathsf{j}_2+1=0, \\ X^3+Y^3+a_4\mathsf{j}_4+2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3+2\mathsf{j}_5=0\ ; \end{array} \right. \tag{5.52}$$

sinon

$$a_2\in\{\alpha,\alpha\pm\delta\}\,,\quad a_6=a_2\pm\delta\quad\text{et}\quad a_4=a_2+a_6, \tag{5.53}$$

où δ une racine carré de 2 et α une racine de $X^3+X+\mathsf{j}_5$.

Finalement, comme en caractéristique 7 lorsque $\mathfrak{I}_6$ est nul, on vérifie que les modèles obtenus dans chaque cas sont $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalents. *QED*

5.4.2 Formes annulant J_3

Pour les octiques binaires f de discriminant non nul telles que $\mathsf{J}_3(\mathsf{f})=0$, la situation est plus simple. En effet, nous allons toujours pouvoir considérer un ensemble $\mathsf{X}_\mathsf{f}^{i_1,4,i_2}$ de cardinal 1, avec $(i_1,i_2)\in\{(1,7),(3,5)\}$, comme l'énonce la proposition ci-après.

Proposition 5.4.11 Soit f une octique de discriminant non nul et $(\mathsf{j}_2:\ldots:\mathsf{j}_{10}:\mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants, tels que $\mathsf{j}_3=0$. On a alors l'alternative suivante :

(i) si

$$\mathsf{j}_4=\mathsf{j}_2^2,\ \mathsf{j}_5=0,\ \mathsf{j}_6=\mathsf{j}_2^3,\ \mathsf{j}_8=\mathsf{j}_2^4,\ \mathsf{j}_9=2\mathsf{j}_7\mathsf{j}_2,\ \mathsf{j}_{10}=\mathsf{j}_2^5,\ \mathsf{j}_{12}=\mathsf{j}_2^6, \tag{5.54}$$

alors $\mathsf{X}_\mathsf{f}^{3,4,5}$ est un singleton, dont un représentant est de la forme x^7+a_1x+1 ;

(ii) si

$$\mathsf{j}_4=\mathsf{j}_2^2,\ \mathsf{j}_6=\mathsf{j}_2^3,\ \mathsf{j}_7=\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2,\ \mathsf{j}_8=\mathsf{j}_2^4,\ \mathsf{j}_9=\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2,\ \mathsf{j}_{10}=2\mathsf{j}_5^2+\mathsf{j}_2^5,\ \mathsf{j}_{12}=\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2+\mathsf{j}_2^6, \tag{5.55}$$

alors $\mathsf{X}_\mathsf{f}^{3,4,5}$ est un singleton, dont un représentant est de la forme $x^7+a_2x^2+x$;

(iii) sinon $\mathsf{X}_\mathsf{f}^{1,4,7}$ est un singleton.

Démonstration. Dans un premier temps, il s'agit de circonscrire les cas pour lesquels $\mathsf{X}_\mathsf{f}^{1,7}$ est vide, soit ceux pour lesquels les racines du polynôme R_f, défini en (5.31), sont toutes des racines du polynôme $Q_\mathsf{f}(s)=s^8\,\mathsf{f}(1/s)$. Nous nous contentons ici d'indiquer notre démarche basée sur la distinction de trois cas.

- Si R_f a une seule racine commune avec Q_f, on peut la supposer égale à 0 et

$$R_\mathsf{f}=(a_0^4a_7+2a_0^3a_1a_6+a_0a_1^3a_4+2a_1^4a_3)X^{26}.$$

Les seules formes envisageables sont alors singulières ou correspondent au cas (i) de la proposition.

- Si R_{f} a seulement deux racines distinctes communes avec Q_{f}, on peut les supposer égales à 0 et l'infini. On considère alors les 25 cas correspondant à la non annulation d'un seul coefficient de R_{f}, pour les termes de degré 1 à 25. Tous ces cas mènent à des formes f singulières, exceptés les cas pour les termes de degrés 8 et 18, pour lesquels les formes obtenues correspondent au cas (ii) de la proposition.
- Si enfin R_{f} a au moins trois racines distinctes communes avec Q_{f}, la forme f est toujours singulière.

Pour les octiques f de discriminant non nul, annulant J_3 et dont les SL_2-invariants ne vérifient pas les équations (5.54) et (5.55), on a donc toujours $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,7} \neq \emptyset$. Supposons donc $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,7}$, pour laquelle $\mathsf{J}_3 = a_4(2a_0a_8+a_2a_6)$. Ainsi, lorsque $\mathsf{j}_3 = 0$, soit $a_4 = 0$ et $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,4,7}$, soit $2a_0a_8+a_2a_6 = 0$. Dans ce deuxième cas, un calcul formel permet d'établir que

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,4,7},$$

lorsque s est une racine de $a_0a_4X^2 + (a_2a_3 + 2a_0a_5)X + 2a_2a_4$ et

$$r = \frac{a_0s^7 + a_3s^4 + 2a_4s^3 + a_6s}{2a_2s^6 + a_4s^4 + 2a_5s^3 + 2a_8}.$$

On notera que les expressions définissant s et r sont non triviales, car a_4 est non nul a priori, ainsi que a_0a_8, puisque $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,7}$ est de discriminant non nul.

Pour ces trois cas, il est aisé à partir du polynôme R_{f} de vérifier que les ensembles $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{3,4,5}$ ou $\mathsf{X}_{\mathsf{f}}^{1,4,7}$ sont des singletons. Toutefois, cela résulte également des résultats qui suivent. *QED*

Établissons que les SL_2-invariants $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$, pour une octique f annulant J_3 et de discriminant non nul, caractérisent une unique classe de $\mathfrak{D}$-invariants dans chacun des trois cas de la proposition précédente. Les deux premiers cas sont évidents :

- cas (i) : les seuls $\mathfrak{D}$-invariants non nuls sont $\mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_2$ et $\mathfrak{i}_7 = \mathsf{j}_7$;
- cas (ii) : les seuls $\mathfrak{D}$-invariants non nuls sont $\mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_2$ et $\mathfrak{l}_5 = \mathsf{j}_5$.

Le troisième cas fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 5.4.12 Soit $\mathsf{f} \in \mathsf{V}_8^{1,4,7}$ de discriminant non nul et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Ces derniers caractérisent une unique classe $(0 : \mathfrak{i}_2 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{l}_2 : \mathsf{j}_3 : \mathfrak{l}_3 : \mathfrak{i}_4 : \mathsf{j}_5)$ de $\mathfrak{D}$-invariants, via les équations suivantes :

- $\mathfrak{i}_2$ est la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} 0 = {} & (\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5^2 + \mathsf{j}_6^2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_{10})X + \mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4^3 \\ & + \mathsf{j}_2^4\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_6^2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{j}_7^2 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_{10} + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_{10} \ ; \end{aligned} \tag{5.56}$$

- $\mathfrak{k}_2$ est la solution de l'équation linéaire

$$0 = (\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4)X + 2\mathfrak{i}_2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_2^3 + \mathfrak{i}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_6 \ ; \tag{5.57}$$

- $\mathfrak{l}_2 = 2\mathfrak{i}_2 + 2\mathfrak{k}_2 + \mathsf{j}_2$;

- j_3 est la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned}0 = {} & (\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7)X + 2\mathsf{i}_2^4\mathfrak{k}_2^2 + \mathsf{i}_2^2\mathfrak{k}_2^4 + 2\mathsf{i}_2^5\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{k}_2^5\mathfrak{l}_2 + \mathsf{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^3 + 2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{l}_2^4 \\ & + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^5 + 2\mathsf{i}_2^5\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + 2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2 + 2\mathfrak{l}_2^5\mathsf{j}_2 + \mathfrak{k}_2^4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{i}_2^3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2^4 \\ & + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_2^5 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_2^4\mathsf{j}_4 + \mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_4^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4^2 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_5^2 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_5^2 + 2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_6 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_6 \\ & + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_6 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_6^2 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_8 + 2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_{10} + \mathsf{j}_{12} \quad \text{si l'équation est non triviale,}\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & (2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_4 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_4^2 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_6)X + \mathsf{i}_2^3\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_5 \\ & + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_5 + \mathfrak{l}_2^3\mathsf{j}_5 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_5 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_7 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_7 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 \\ & \text{si l'équation est non triviale,}\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & (2\mathsf{i}_2^4\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + 2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2 + \mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2^3 + \mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_4 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 \\ & \qquad + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_6 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_6 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_8 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_8)X \\ & + 2\mathsf{i}_2^4\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_5 + \mathsf{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2^3\mathsf{j}_5 + \mathfrak{l}_2^4\mathsf{j}_5 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 \\ & + \mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_7 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_7 + \mathfrak{l}_2^3\mathsf{j}_7 \\ & + \mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7 + \mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_9 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_9 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_9 \quad \text{sinon ;}\end{aligned} \tag{5.60}$$

- $\mathfrak{l}_3$ est la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned}0 &= (2\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{l}_2^2 + \mathsf{j}_2^2)X + 2\mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_7 \\ & \quad \text{si l'équation est non triviale,}\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$0 = (2\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{l}_2^2 + \mathsf{j}_4)X + 2\mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_5 \quad \text{sinon ;} \tag{5.62}$$

- $\mathsf{i}_4 = \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{l}_2^2 + 2\mathsf{j}_4$;
- $\mathsf{j}_5 = \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + \mathfrak{l}_3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5$.

Démonstration. Une première étape consiste à établir la validité des équations annoncées, ce que l'on fait aisément en évaluant formellement ces expressions pour une octique générique dans $\mathsf{V}_8^{1,4,7}$.

Ensuite, il reste à établir que les équations caractérisant les $\mathfrak{D}$-invariants, autres que i_1, sont non triviales, ce que l'on obtient grâce à la non annulation du discriminant de f. En effet, dans l'anneau $\mathbb{F}_3[a_0, a_2, a_3, a_5, a_6, a_8]$, on a

- éq. (5.56) pour i_2 : $\Delta(\mathsf{f}) = 2a_0a_8(\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5^2 + \mathsf{j}_6^2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_{10})$;
- éq. (5.57) pour $\mathfrak{k}_2$: $\Delta(\mathsf{f}) = a_0a_8(\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4)^3$;
- éq. (5.58), (5.59) et (5.60) pour j_3 : $\Delta(\mathsf{f}) \in \sqrt{\langle \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7, A, B\rangle}$, où A et B sont les coefficients dominants des équations (5.59) et (5.60) ;
- éq. (5.61) et (5.62) pour $\mathfrak{l}_3$: $\Delta(\mathsf{f}) \in \langle 2\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{l}_2^2 + \mathsf{j}_2^2, 2\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{l}_2^2 + \mathsf{j}_4\rangle$.

QED

Deuxième partie

Espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7

Chapitre 6

Algorithme de Mestre

En vertu des théorèmes 5.4.1 et 5.3.1, nous disposons de deux familles d'invariants permettant de séparer les orbites des formes binaires de discriminant non nul pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ en caractéristiques 3 et 7 respectivement, *i.e.* d'espaces de paramètres pour les espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7. Il est évidemment aisé de calculer de tels invariants pour une courbe hyperelliptique donnée par un modèle de Weierstraß. En revanche, étant donné un point de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques, autrement dit connaissant les invariants d'une courbe, il est *a priori* moins trivial d'en fournir une équation explicite, typiquement un modèle hyperelliptique.

Précisément, si $\{\mathsf{I}_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ est un ensemble fini d'invariants homogènes séparants pour les formes binaires de degré $\mathsf{n} = 2\mathsf{g}+2$ sous l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$, on souhaite donner une réponse effective au problème suivant : considérant un point $(\iota_1 : \ldots : \iota_m)$ de l'espace projectif pondéré associé à notre système d'invariants, déterminer une équation explicite d'une courbe hyperelliptique de genre g sous la forme $y^2 = \mathsf{f}(x)$ telle que $(\mathsf{I}_1(\mathsf{f}) : \ldots : \mathsf{I}_m(\mathsf{f})) = (\iota_1 : \ldots : \iota_m)$.

Une première approche consisterait naturellement à écrire f sous forme générique et à essayer d'inverser le système polynomial $\{\mathsf{I}_i(\mathsf{f}) = \iota_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$. Toutefois, ceci ne peut être réalisé que dans des cas spécifiques (cf. section 7.2).

Mestre, dans [Mes91], proposa un algorithme permettant d'obtenir une équation explicite d'une courbe de genre 2 n'ayant pas d'autre involution que l'involution hyperelliptique en caractéristique 0 à partir de ses invariants de Clebsch (cf. [Cle72, Gor87]). Cet algorithme, à l'instar des invariants de Clebsch pour les sextiques binaires, reste valable pour les courbes définies sur un corps de caractéristique strictement supérieure 5 et a été implanté sous Magma par Gaudry. Pour les autres courbes de genre 2, en caractéristique distincte de 2, 3 et 5, Cardona et Quer ont donné des modèles explicites dans [CQ05], tandis que le cas de la caractéristique 2 est traité dans [CNP05]. Se basant sur ces travaux, Lercier et Ritzenthaler [LR08] ont achevé l'implantation sous Magma de ces algorithmes de reconstruction pour les courbes de genre 2, valable cette fois en toute caractéristique. En outre, Lercier et Ritzenthaler, dans [LR12], on réalisé un travail similaire pour les courbes hyperelliptique de genre 3, en caractéristiques distinctes de 2, 3, 5 et 7, s'appuyant sur la méthode de Mestre pour le cas générique des courbes dont la seule involution est l'involution hyperelliptique.

Dans ce qui suit, nous présentons la méthode développée par Mestre pour la reconstruction d'une courbe hyperelliptique à partir de ses invariants, en rappelant au préalable des identités fondamentales dues à Clebsch. Nous terminons en expliquant comment nous avons pu mettre en œuvre l'algorithme de Mestre pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3

et 7.

6.1 Identités de Clebsch

La référence classique à ce sujet est [Cle72, § 103], toutefois on pourra en trouver un exposé synthétique dans [LR12, § 2.1].

Fixons $\mathsf{n} \in \mathbb{N}^*$ un entier pair distinct de 2, k un corps de caractéristique nulle ou supérieure à n et K une clôture algébrique de k. Enfin, notons $\mathsf{B_c} = (x^2, xz, z^2)$ la base canonique de l'espace des formes binaires quadratiques V_2.

À $\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3 \in \mathsf{V}_2$, on associe

$$\mathsf{q}_1^\star = (\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)_1, \quad \mathsf{q}_2^\star = (\mathsf{q}_3, \mathsf{q}_1)_1, \quad \mathsf{q}_3^\star = (\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2)_1,$$

$$\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3) = \det_{\mathsf{B_c}}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3) \quad \text{et} \quad \mathsf{A}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3) = ((\mathsf{q}_i, \mathsf{q}_j)_2)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}.$$

De simples vérifications formelles permettent d'établir le lemme suivant.

Lemme 6.1.1 Pour $\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3 \in \mathsf{V}_2$, on a les relations suivantes :

(i) $\mathsf{q}_1\mathsf{q}_1^\star + \mathsf{q}_2\mathsf{q}_2^\star + \mathsf{q}_3\mathsf{q}_3^\star = 0$;

(ii) $2\det(\mathsf{A}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)) = \mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)^2$;

(iii) $\forall \mathsf{f} \in \mathsf{V}_2,\ \frac{1}{2}\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3) \times \mathsf{f} = \sum_{i=1}^3 (\mathsf{f}, \mathsf{q}_i)_2\ \mathsf{q}_i^\star = \sum_{i=1}^3 (\mathsf{f}, \mathsf{q}_i^\star)_2\ \mathsf{q}_i$.

À partir des identités précédentes, on est en mesure d'établir les deux relations fondamentales suivantes pour la méthode de Mestre.

Proposition 6.1.2 Pour $\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3 \in \mathsf{V}_2$,

(i) $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \mathsf{A}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)_{i,j}\ \mathsf{q}_i^\star\, \mathsf{q}_j^\star = 0$;

(ii) Si f est une forme binaire de degré n (pair), alors

$$\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)^{\mathsf{n}/2}\mathsf{f}(x, z) = \frac{1}{\mathsf{n}\,!}\Big(\sum_{i=1}^{3} \mathsf{q}_i^\star(x, z)\delta_i\Big)^{n/2}(\mathsf{f}(x_1, z_1))$$

où $\delta_i : \mathsf{V}_n \longrightarrow \mathsf{V}_{n-2},\ \phi(x_1, z_1) \mapsto \Omega_{12}^2(\phi(x_1, z_1), \mathsf{q}_i(x_2, z_2))$.

6.2 Algorithme de reconstruction générique

Nous présentons maintenant l'algorithme de reconstruction de Mestre pour une forme binaire $\mathsf{f}(x, z) \in \mathsf{V_n}$ de degré pair à coefficients dans k, basé sur les identités de Clebsch du paragraphe précédent. Par la suite, $\{\mathsf{I}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ désignera un système de générateurs de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$ et $(\iota_1 : \ldots : \iota_m)$ un point de l'espace projectif pondéré associé à ce système de générateurs.

Via des opérations de transvectants (cf. section 1.2.2), on peut déterminer trois covariants $\mathsf{q}_i(x, z)$ d'ordre 2 de f, auxquels on associe, suivant les notations de la section précédente, $\mathsf{q}_1^\star, \mathsf{q}_2^\star$ et $\mathsf{q}_3^\star$.

D'après la proposition 6.1.2, le point $\mathsf{p} = (x_1 : x_2 : x_3) = (\mathsf{q}_1^\star(x,z) : \mathsf{q}_2^\star(x,z) : \mathsf{q}_3^\star(x,z))$ est solution du système :

$$\begin{cases} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \mathsf{A}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)_{i,j}\ x_i x_j = 0, \\ \sum_{\underline{i}\in\{1,2,3\}^{\mathsf{n}/2}} h_{\underline{i}} x_{\underline{i}}(x,z) - \mathsf{R}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)^{\mathsf{n}/2}\mathsf{f}(x,z) = 0 \end{cases}, \tag{6.1}$$

où $\underline{i}$ désigne le multi-indice $(i_1,\ldots,i_{\mathsf{n}/2}) \in \{1,2,3\}^{\mathsf{n}/2}$.

Des propriétés du transvectant, on déduit que les coefficients $\mathsf{A}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)_{i,j}$, $h_{\underline{i}}$ et $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$ sont des invariants. Ces derniers peuvent donc s'exprimer comme des polynômes en les invariants I_i à coefficients dans le sous-corps premier de k (cf. l'algorithme 2 pour cette étape de réécriture). En particulier, si les ι_i sont donnés dans k, alors le système (6.1) est à coefficients dans k.

Supposons que $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$ soit non nul, alors le point p appartient à la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $\sum_{\underline{i}} h_{\underline{i}} x_{\underline{i}} = 0$ définie sur k si et seulement si $(x : z)$ est une racine de f. En outre, d'après le point (iii) du lemme 6.1.1, la conique $\mathcal{Q}/\mathsf{k} : \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \mathsf{A}_{i,j}\ x_i x_j = 0$ est lisse, et $(x : z) \mapsto (x_1 : x_2 : x_3)$ définit un K-isomorphisme de $\mathbb{P}^1$ sur $\mathcal{Q}$ (les covariants $\mathsf{q}_i^\star$ étant d'ordre 2, cet isomorphisme est en fait défini sur une extension quadratique de k). Finalement, la forme binaire $\sum_{\underline{i}} h_{\underline{i}} x_{\underline{i}}(x,z)$ est $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-équivalente à f.

Enfin, Mestre démontre dans [Mes91, sec.2.4] que, pour une courbe hyperelliptique générique, l'obstruction pour la reconstruction sur k de cette courbe à partir de ses invariants est équivalente à l'existence d'un point rationnel sur $\mathcal{Q}$. On aboutit ainsi à la proposition suivante.

Proposition 6.2.1 - Mestre. Soit $(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$ trois covariants d'ordre 2 d'une forme binaire f de degré pair n définie sur k. Si $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3) \neq 0$, il existe alors une conique lisse $\mathcal{Q}$ et une courbe plane $\mathcal{H}$ de degré $\mathsf{n}/2$ définies sur k telles qu'il existe un K-isomorphisme $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ envoyant les points de $\mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$ sur les racines de f. En outre, cet isomorphisme est défini au plus sur une extension quadratique de k, et sur k dès que $\mathcal{Q}$ a un k-point rationnel.

Étant donné un point $(\iota_1 : \ldots : \iota_m)$ défini sur k, résumons la marche à suivre pour reconstruire une forme binaire qui lui est associée :

- trouver un triplet $(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$ de covariants d'ordre 2 tel que la quantité $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$, vu comme un polynôme en les I_i évalués en les ι_i, soit non nulle ;
- trouver un point sur la conique $\mathcal{Q}$ définie par les expressions des coefficients $\mathsf{A}_{i,j}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$, vu comme des polynômes en les I_i évalués en les ι_i, et donner une paramétrisation de cette conique.
- soit $\mathcal{H}$ la courbe définie par les expressions des coefficients $h_{\underline{i}}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$, vu comme des polynômes en les I_i évalués en les ι_i. Retourner le diviseur d'intersection $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{H}$ comme un polynôme $\mathsf{f}(x,z)$ sur, au plus, une extension quadratique de k.

Naturellement, rien n'exclut que la quantité $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1,\mathsf{q}_2,\mathsf{q}_3)$ soit nulle pour tout triplet de covariants quadratiques ou que la conique $\mathcal{Q}$ n'ait pas de k-point rationnel, alors que, pour des raisons théoriques, on puisse reconstruire la courbe sur k. Ces diverses questions font notamment l'objet des deux chapitres suivants.

6.3 Mise en œuvre de la méthode de Mestre en caractéristiques 3 et 7

Les résultats des deux sections précédentes ont été exposés pour des formes binaires de degré pair n définies sur des corps de caractéristiques nulle ou strictement supérieures à n. Or, pour nos propres travaux, *i.e.* lorsque $\mathsf{n} = 8$, nous nous intéressons aux corps de caractéristiques 3 et 7.

Observons alors les faits suivants :

- aux sections 4.2.3 et 4.3.3, nous nous sommes donnés des familles de covariants quadratiques pour les octiques binaires en caractéristiques 3 et 7 respectivement ;
- la conique lisse $\mathcal{Q}/\mathsf{k}$: $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \mathsf{A}_{i,j}\, x_i x_j = 0$ requise à la proposition 6.2.1 s'obtient via des calculs de transvectants d'ordre 1 ou 2 sur les covariants quadratiques q_i (cf. début de la section 6.1), on peut donc mener les mêmes calculs en caractéristiques 3 et 7, et la relation fondamentale établie au point (i) de la proposition 6.1.2 ainsi que le critère de lissité pour cette conique (point (iii) du lemme 6.1.1) se vérifient formellement tout aussi aisément sur $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_7$;
- en revanche, la quartique $\mathcal{H}$ de la proposition 6.2.1 ne peut plus découler directement du point (ii) de la proposition 6.1.2 qui se révèle inexact en caractéristiques 3 et 7. Toutefois, pour un triplet de covariants quadratiques $(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)$, on souhaite seulement disposer d'une quartique obtenue à partir de ces covariants et vérifiant la seconde égalité du système (6.1). Autrement dit, il s'agit de déterminer les coefficients $h_{\underline{i}}$, *i.e.* des invariants dont on connaît *a priori* le degré, donné par

$$4\deg(\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)) + 1 - \sum_{j\in\underline{i}} \deg \mathsf{q}_j^*.$$

  On peut alors reconstruire ces coefficients en utilisant une version adaptée de l'algorithme 2 de réécriture d'un invariant.

Suivant cette démarche, nous avons été en mesure d'obtenir les triplets $(\mathsf{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$ de la proposition 6.2.1 pour les 31 jeux de triplets de covariants quadratiques intervenant aux lemmes 7.3.9 et 7.3.13 en caractéristique 3 et pour les 29 jeux de triplets de covariants quadratiques intervenant aux lemmes 7.4.11 et 7.4.15 en caractéristique 7.

À titre d'exemple, pour le triplet de covariants quadratiques $(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_{10}, \mathsf{q}_{11}'')$, utile pour le lemme 7.4.15, les coefficients $h_{\underline{i}}$ de la quartique $\mathcal{H}$ associée sont des invariants de degré compris entre 29 et 45 et la génération de ce triplet $(\mathsf{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$ nécessite un peu plus de 12 heures de calculs (sur une machine équipée d'un processeur Intel Xeon 5150 2,66 GHz).

Remarques 6.3.1

- Pour l'exposé de la méthode de Mestre à la section précédente, on considère un système de générateurs $\{\mathsf{I}_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ pour l'algèbre $\mathcal{I}_{\mathsf{n}}$, nécessaire *a priori* pour la réécriture des divers coefficients invariants, intervenant dans les expressions de $\mathsf{R}, \mathcal{Q}$ et $\mathcal{H}$, en terme des I_j. Or, pour les caractéristiques 3 et 7, nous n'avons pas su établir que les deux familles respectives de SL_2-invariants $(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12})$ et $(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15})$ sont des familles génératrices de $\mathcal{I}_8$. Toutefois, nous avons systématiquement été en mesure de réécrire les coefficients invariants pour les triplets $(\mathsf{R}, \mathcal{Q}, \mathcal{H})$ en fonction de ces seuls J_i. Ceci est évidemment de nature à nous conforter un peu plus dans notre espoir d'avoir effectivement exhibé des générateurs de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3 et 7.

- Pour illustrer l'apport de l'approche « boite noire » exposée à la section 1.4, qui mène à l'algorithme 2 de réécriture pour un invariant, considérons le cas du coefficient de la quartique $\mathcal{H}$ pour le triplet de covariants $(\mathsf{q}'_7, \mathsf{q}_{10}, \mathsf{q}''_{11})$ en caractéristique 7 évoqués ci-dessus, qui est un invariant de degré 29. Dans l'algèbre graduée $\mathsf{k}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}]$, la base $\mathcal{B} = \{\prod_w \mathsf{J}_w^{e_w} \ / \ \sum_w w\, e_w = 45\}$ est de cardinal 681. Cardinal que l'on peut comparer à celui de la base $\mathcal{B}$ obtenue pour l'algèbre graduée et pondérée $\mathsf{k}[a_0, \ldots, a_8]$, où a_i est de degré 1 et de poids i, à savoir 556 834. Notons qu'un invariant de degré d est de poids $4\mathsf{d}$ dans l'algèbre $\mathsf{k}[a_0, \ldots, a_8]$.

Exemple 6.3.2 En caractéristique 3, considérons trois covariants quadratiques de degrés les plus bas possibles : $\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6$ et q_7, introduits à la section 4.2.3. On a alors

$$\begin{aligned}\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7) = {} & \mathsf{J}_2^9 + 2\mathsf{J}_2^6\mathsf{J}_3^2 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_3^6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^4\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4^3 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2 \\ & + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5^3 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_6 \\ & + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_6^2 + 2\mathsf{J}_6^3 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7^2 \\ & + 2\mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_{10} + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{12},\end{aligned}$$

l'équation de la conique $\mathcal{Q}/\mathsf{k}$: $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \mathsf{A}_{i,j}\ x_i x_j = 0$ est donnée par

$$\begin{aligned}& (2\mathsf{J}_2^5 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_8)x_1^2 + (2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7)x_1x_2 \\ & + (2\mathsf{J}_2^6 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3^2 + \mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_4^3 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8 \\ & + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{10})x_1x_3 + (\mathsf{J}_2^6 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3^2 + \mathsf{J}_3^4 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_4^3 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_6^2 \\ & + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_{10})x_2^2 + (2\mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_3 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 \\ & + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8)x_2x_3 + (\mathsf{J}_2^7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_4 \\ & + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_7^2 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_{10})x_3^2 = 0\end{aligned}$$

et le début de celle de la quartique $\mathcal{H}/\mathsf{k}$: $\sum_{\underline{i}} h_{\underline{i}} x_{\underline{i}} = 0$ par

$$\begin{aligned}& (2\mathsf{J}_2^9\mathsf{J}_3 + \mathsf{J}_2^6\mathsf{J}_3^3 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3^5 + 2\mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^4 + 2\mathsf{J}_2^8\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3^4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 \\ & + 2\mathsf{J}_4^4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5^3 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^3 + \mathsf{J}_2^6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 \\ & + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_5^3\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2^7\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^4\mathsf{J}_7 \\ & + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6\mathsf{J}_7 \\ & + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_6^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_7^2 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7^2 + \mathsf{J}_7^3 + \mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 \\ & + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_7\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_6\mathsf{J}_7\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8^2 + 2\mathsf{J}_2^6\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_9 \\ & + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{12} + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{12} + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{12})x_1^4 + \ldots\end{aligned}$$

Considérons alors une octique f sur $\mathbb{F}_3$ telle que

$$(\mathsf{j}_2 : \mathsf{j}_3 : \mathsf{j}_4 : \mathsf{j}_5 : \mathsf{j}_6 : \mathsf{j}_7 : \mathsf{j}_8 : \mathsf{j}_9 : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12}) = (2 : 0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 0 : 2 : 2 : 1),$$

pour laquelle on vérifie que $\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7) = 2$ et dont l'équation de la conique est

$$x_1^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0.$$

Du point $(2 : 2 : 1)$ sur la conique, on déduit la paramétrisation

$$(x : z) \mapsto (x^2 + xz : 2x^2 + 2xz + z^2 : x^2)$$

qui, jointe à la quartique d'équation

$$x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1x_2^3 + 2x_2^4 + x_2^3x_3 = 0,$$

permet finalement de déterminer f, à une constante près, comme

$$\mathsf{f} = x^8 + x^7z + 2x^6z^2 + x^5z^3 + x^4z^4 + 2x^3z^5 + 2xz^7 + 2z^8.$$

Chapitre 7

Stratification des espaces de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3

D'après les théorèmes 5.4.1 et 5.3.1, nous disposons de deux familles de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-invariants permettant de séparer les orbites des formes binaires de discriminant non nul pour l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ en caractéristiques 3 et 7 respectivement, *i.e.* d'espaces de paramètres pour l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7.

L'espace de modules H_3 est de dimension 5 et est stratifié selon les groupes d'automorphismes des classes de courbes. La strate générique, de dimension 5, correspond aux courbes dont le groupe d'automorphismes est engendré par l'involution hyperelliptique ι. Les autres strates, pour lesquelles les courbes ont plus d'un automorphisme non trivial, sont de dimension comprise entre 0 et 3 (cf. les tables 7.1, 7.2 et 7.5 et les figures 7.1, 7.2 et 7.3). Comme pour une courbe elliptique, pour laquelle on peut lire le groupe d'automorphismes à partir de son j-invariant, on souhaite pouvoir déterminer le groupe d'automorphismes d'une courbe hyperelliptique de genre 3 via ses $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$-invariants. Ce travail a déjà été effectué en caractéristique nulle et $\mathsf{p} \geqslant 11$ par Lercier et Ritzenthaler [LR12]. Pour notre part, de façon analogue, nous donnons les équations des strates de l'espace de modules H_3 en caractéristiques 3 et 7 aux section 7.3 et 7.4.

Via cette stratification, nous sommes alors en mesure de mettre en œuvre une procédure de reconstruction d'une courbe sous la forme d'un modèle hyperelliptique à partir de ses SL_2-invariants (cf. les algorithmes 3 et 4). Cette reconstruction se base sur la méthode de Mestre, exposée au chapitre précédent, pour les strates dont le groupe d'automorphismes ne contient pas $\mathbf{D}_4$ (cf. le lemme 7.2.1), et sur des méthodes *ad hoc* dans les autres cas.

7.1 Stratification des espaces de modules des courbes hyperelliptiques selon leurs groupes d'automorphismes

Soit C une courbe hyperelliptique de genre $\mathsf{g} \geqslant 2$ définie sur k et ι son involution hyperelliptique. On note $\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ le groupe des automorphismes sur K de C et, ι étant centrale dans $\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ (cf. lemme 1.1.2), il est loisible de considérer en outre le *groupe d'automorphismes réduit* $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C}) = \mathrm{Aut}(\mathsf{C})/\langle\iota\rangle$. Notons que, puisque le genre g est supposé supérieur à 2, le groupe

$\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ est fini. Historiquement, la finitude du groupe d'automorphismes d'une surface de Riemann compacte, *i.e.* pour $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, de genre $\mathsf{g} \geqslant 2$ fut établi par Schwarz et l'ordre d'un tel groupe est majorée par la borne linéaire de Hurwitz $84(\mathsf{g}-1)$ [Hur93]. Pour les courbes définies sur un corps k de caractéristique p positive, on dispose du résultat suivant.

Théorème 7.1.1 - Stichtenoth, [Sti73].
Pour une courbe C de genre $\mathsf{g} \geqslant 2$ définie sur k de caractéristique p, $|\mathrm{Aut}(\mathsf{C})| \leqslant 16\mathsf{g}^4$; à une exception près : la courbe hermitienne $x^{\mathsf{q}+1} + y^{\mathsf{q}+1} + z^{\mathsf{q}+1} = 0$, où $\mathsf{q} = \mathsf{p}^n \geqslant 3$. [1]

$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$ agit, fidèlement, sur $\mathsf{C}/\langle\iota\rangle \simeq \mathbb{P}^1$, action de laquelle résulte un morphisme d'inclusion $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1 \simeq \mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$. Ainsi, la classification des groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre g définies sur k est intimement liée à la description des sous-groupes finis de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$, dont la liste est donnée dans [Web99, § 71-74] et [Hug05, § 2.2].

Brandt, dans sa thèse de doctorat [Bra88], donne la liste complète des orbites polynomiales pour les sous-groupes finis $\overline{\mathsf{G}}$ de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$, de laquelle on déduit la liste des modèles normalisés de courbes hyperelliptiques dont le groupe d'automorphismes G est tel que $\mathsf{G}/\langle\iota\rangle = \overline{\mathsf{G}}$.

La structure de G elle-même dépend du comportement de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \langle\iota\rangle \longrightarrow \mathsf{G} \longrightarrow \overline{\mathsf{G}} \longrightarrow 1,$$

comportement qui est mesuré par $\mathsf{H}^2(\overline{\mathsf{G}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. En outre, lorsque $\mathsf{p} = 0$, la structure de G dépend de sa signature [BS86], liée au revêtement $\mathsf{C} \mapsto \mathsf{C}/\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$.

Enfin, il reste à déterminer parmi la liste des sous-groupes finis $\overline{\mathsf{G}}$ de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$ ceux qui se réalisent comme groupes d'automorphismes réduits complets d'une courbe hyperelliptique C. Lorsque $\mathsf{p} = 0$, cela peut être fait par l'intermédiaire des espaces de Hurwitz [MSSV02], des groupes fuchsiens [Sin72] ou encore des espaces de Teichmüller [Rie93].

Bolza [Bol87], puis Igusa [Igu60], ont classifié les courbes de genre 2 selon leur groupe d'automorphismes réduits. Les groupes correspondants ainsi que les modèles associés, en caractéristique distincte de 2, sont dans [CGLR99] et [Car03]. Le cas de la caractéristique 2 est présenté dans [CNP05].

Pour le genre 3, la classification en caractéristique nulle est donnée dans divers articles, dont notamment [MSSV02] et [GSS05]. Leurs résultats sont présentés à la table 7.1 et à la figure 7.1.

Pour notre propos, il s'agit d'examiner de quelle façon ces résultats s'étendent aux caractéristiques positives ; les deux situations étant en partie liées comme l'indiquent les deux théorèmes suivants.

Théorème 7.1.2 - Grothendieck, [Gro71, XIII.2.12]. Si le revêtement $\mathsf{C} \mapsto \mathsf{C}/\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ est modérément ramifié, il peut être relevé en caractéristique 0.

Or, en caractéristique positive p, le revêtement $\mathsf{C} \mapsto \mathsf{C}/\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ est modérément ramifié si l'ordre de $\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ est premier à p ou, à une exception près, si $\mathsf{p} > \mathsf{g}+1$.

Théorème 7.1.3 - Roquette, [Roq70]. Le revêtement $\mathsf{C} \mapsto \mathsf{C}/\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ est modérément ramifié lorsque $\mathsf{p} > \mathsf{g}+1$, à une exception près : la courbe hyperelliptique $y^2 = x^{\mathsf{p}} - x$, [2] pour $\mathsf{p} \geqslant 5$.

1. Le cas échéant, $\mathsf{g} = \mathsf{q}(\mathsf{q}-1)/2$ et $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathrm{PGU}_3(\mathbb{F}_{\mathsf{q}^2})$, *i.e.* le groupe unitaire lié à la forme hermitienne $(x, y, z) \mapsto xx^\sigma + yy^\sigma + zz^\sigma$, où σ désigne le Frobenius $x \mapsto x^{\mathsf{q}}$, d'ordre $\mathsf{q}^3(\mathsf{q}^3+1)(\mathsf{q}^2-1)$.

2. Pour cette courbe, $\mathsf{g} = (\mathsf{p}-1)/2$ et le groupe des automorphismes est extension centrale de $\mathbf{C}_2$ par $\mathsf{PGL}_2(\mathbb{F}_{\mathsf{p}})$, donc d'ordre $2\mathsf{p}(\mathsf{p}^2-1)$.

Ainsi, pour $\mathsf{p} > \mathsf{g} + 1 = 4$ et $\mathsf{p} \neq 2\mathsf{g} + 1 = 7$, la classification est alors analogue à celle de la caractéristique 0.

Lorsque $\mathsf{p} = 7$, en vertu des théorèmes 7.1.2 et 7.1.3, la classification se déduit encore de celle de la caractéristique nulle. Précisément le cas 8 de la table 7.1, qui correspond au groupe $\mathbf{C}_{14}$ (d'ordre 14) disparaît, puisque $x^7 - 1 = (x-1)^7$ est de discriminant nul en caractéristique 7. En outre, les cas 9, 10 et 11 fusionnent, puisque les trois courbes $x^7 - x$, $x^8 - 1$ et $x^8 + 1$ sont K-isomorphes, et correspondent au cas exceptionnel indiqué par le théorème 7.1.3. Finalement, on obtient la nouvelle table 7.5 qui donne lieu à la stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 7 indiquée à la figure 7.3.

Lorsque $\mathsf{p} = 3$, vu l'hypothèse du théorème 7.1.3, il est nécessaire de s'assurer dans un premier temps qu'il n'existe pas de nouveau groupe d'automorphismes en caractéristique 3 relativement à la caractéristique nulle, en parcourant la liste dans [Bra88, Satz. 2.3]. Pour aboutir à la nouvelle table 7.2, qui donne lieu à la stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 3 indiquée à la figure 7.2, il suffit alors d'observer qu'à nouveau les cas pour lesquels 3 divise l'ordre du groupe d'automorphismes correspondent à des formes singulières et disparaissent, soit les cas 6, 9 et 12 de la table 7.1.

Enfin, pour $\mathsf{p} = 2$ en genre 3, les groupes d'automorphismes et les modèles associés sont donnés dans [NS04].

Remarque 7.1.4 Voici diverses remarques et conventions concernant les tables 7.1, 7.2 et 7.5 et les figures 7.1, 7.2 et 7.3.

- Les tables 7.1, 7.2 et 7.5 (resp. les figures 7.1, 7.2 et 7.3) sont ordonnées par dimension décroissante (resp. du haut vers le bas) puis par ordre croissant de l'ordre du groupe d'automorphismes (resp. de la gauche vers la droite).
- La dimension d'une strate de signature S [3] se calcule aisément comme $-3 + |S|$ [MSSV02, §3]. La colonne Id. fait référence à la classification des « petits » groupes finis sous MAGMA.
- Les modèles normalisés sont valables pour leur strate, toutefois pour certaines valeurs des paramètres, les courbes en question peuvent avoir un groupe d'automorphismes plus gros. L'organisation des strates entre elles se déduit notamment de ces modèles normalisés.
- Comme souligné dans [LR12], le cas 11 de la table 7.1 est incorrectement écrit comme $x^8 + 14x^2 + 1$ dans les deux références [MSSV02, GSS05] et l'organisation des strates est fausse dans [GSS05, Fig. 1].
- On adopte les notations suivantes pour désigner les divers groupes finis qui apparaissent dans les tables 7.1, 7.2 et 7.5 et les figures 7.1, 7.2 et 7.3 :
  - $\mathbf{C}_{\mathsf{n}}$ est le groupe cyclique d'ordre n ;
  - $\mathbf{D}_{\mathsf{n}}$ est le groupe diédral de degré n, d'ordre $2\mathsf{n}$; [4]
  - $\mathfrak{S}_{\mathsf{n}}$ est le groupe symétrique de degré n, d'ordre $\mathsf{n}!$;
  - $\mathbf{U}_6$ est un groupe d'ordre 24, de présentation $\langle s, t \mid s^{12}, t^2, tsts^{-5} \rangle$;
  - $\mathbf{V}_8$ est un groupe d'ordre 32, de présentation $\langle s, t \mid s^4, t^8, (st)^2, (s^{-1}t)^2 \rangle$;
  - $\mathbf{G}_{672}$ est extension centrale de $\mathbf{C}_2$ par $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$ et est donc d'ordre $2^5 \times 3 \times 7 = 672$; il admet pour présentation $\langle s, t \mid s^8, t^3, s^{-1}ts^{-2}ts^{-1}t^{-1}, sts^{-4}ts^2ts^4ts \rangle$.

3. La signature S correspond aux ordres des groupes d'inertie du revêtement galoisien $\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}/\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$.
4. Dans [LR12, LRS13, LRS15], les auteurs adoptent une convention différentes, notant $\mathbf{D}_{2\mathsf{n}}$ le groupe diédral d'ordre $2\mathsf{n}$.

#	$\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$	$\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$	sign.	dim.	modèle $y^2 =$	Id.
1	$\mathbf{C}_2$	$\{1\}$	(2^8)	5	$x(x-1)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$	$(2,1)$
2	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{C}_2$	(2^6)	3	$x^8+ax^6+bx^4+cx^2+1$ $(x^2-1)(x^6+ax^4+bx^2+c)$	$(4,2)$
3	$\mathbf{C}_4$	$\mathbf{C}_2$	$(2^3,4^2)$	2	$x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$	$(4,1)$
4	$\mathbf{C}_2^3$	$\mathbf{D}_2$	(2^5)	2	$(x^4+ax^2+1)(x^4+bx^2+1)$	$(8,5)$
5	$\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4$	$\mathbf{D}_2$	$(2^2,4^2)$	1	$(x^4-1)(x^4+ax^2+1)$ $x(x^2-1)(x^4+ax^2+1)$	$(8,2)$
6	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{D}_3$	$(2^3,6)$	1	$x(x^6+ax^3+1)$	$(12,4)$
7	$\mathbf{C}_2\times\mathbf{D}_4$	$\mathbf{D}_4$	$(2^3,4)$	1	x^8+ax^4+1	$(16,11)$
8	$\mathbf{C}_{14}$	$\mathbf{C}_7$	$(2,7,14)$	0	x^7-1	$(14,2)$
9	$\mathbf{U}_6$	$\mathbf{D}_6$	$(2,4,12)$	0	$x(x^6-1)$	$(24,5)$
10	$\mathbf{V}_8$	$\mathbf{D}_8$	$(2,4,8)$	0	x^8-1	$(32,9)$
11	$\mathbf{C}_2\times\mathbf{S}_4$	$\mathbf{S}_4$	$(2,4,6)$	0	x^8+14x^4+1	$(48,48)$

TABLE 7.1 – Groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 0 ou $\mathsf{p}\geqslant 11$.

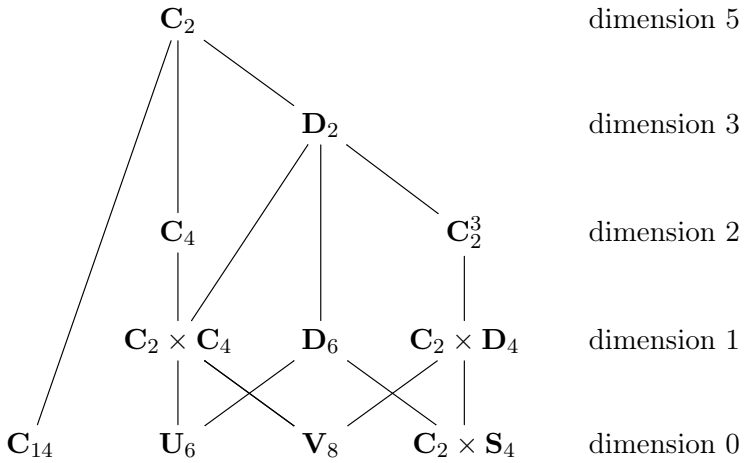

FIGURE 7.1 – Stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 0 ou $\mathsf{p}\geqslant 11$ selon le groupe d'automorphismes.

7.2 Stratégie pour la reconstruction

Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2:\mathsf{j}_3:\ldots)$ ses SL_2-invariants ; notre objectif est de retrouver à partir de ces invariants un modèle hyperelliptique $y^2=\mathsf{f}(x)$ pour la courbe C.

À cette fin, la méthode de Mestre, introduite au chapitre 6, constitue notre principal outil pour résoudre cette question. Toutefois, le lemme 7.2.1 suivant, issu de [LR12, Lem. 3.2],

illustre l'inadaptation de cette approche pour une majorité de strates de courbes dont le groupe d'automorphismes réduit est non trivial.

Lemme 7.2.1 Si le groupe d'automorphismes d'une courbe hyperelliptique $\mathsf{C} : y^2 = \mathsf{f}(x)$ de genre 3 définie sur k contient $\mathbf{D}_2$, alors, pour n'importe quel choix de trois covariants quadratiques $\mathsf{q}_i = \mathsf{q}_i(\mathsf{f})$, avec $\mathsf{f} = x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + 1$, on a $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3) = 0$.

Démonstration. Soit d_i le degré du covariant q_i, alors q_i est de poids $(8d_i - 2)/2 = 4d_i - 1$, qui est un nombre impair. Ainsi, pour $\theta : (x, z) \mapsto (-x, z) \in \mathrm{Aut}(\mathsf{C})$, on a

$$\mathsf{q}_i(\mathsf{f}) = \mathsf{q}_i(\theta.\mathsf{f}) = \det(\theta)^{4d_i-1}\theta.\mathsf{q}_i(\mathsf{f}) = -\theta.\mathsf{q}_i(\mathsf{f}).$$

L'égalité entre les termes extrêmes précédents impose que le covariant q_i a xz pour seul terme non nul, ce qui implique la nullité du déterminant $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)$ dans la base x^2, xz, z^2. *QED*

Précisément, d'après les tables 7.1, 7.2 et 7.5, cela correspond respectivement aux strates 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10 et 11 en caractéristique nulle, 2, 4, 5, 6 et 8 en caractéristique 3 et 2, 4, 5, 6, 7 et 8 en caractéristique 7.

Par conséquent, il est nécessaire de développer des méthodes *ad hoc* pour reconstruire des modèles pour les courbes de ces strates spécifiques. Dans le cas présent, nous rappelons la stratégie développée par Lercier et Ritzenthaler dans [LR12, § 3.2] pour la caractéristique $\mathsf{p} \neq 2, 3, 5$ et 7 ; stratégie valable également pour les cas $\mathsf{p} = 3$ et $\mathsf{p} = 7$ qui nous intéressent.

Une première étape consiste à déterminer quel est le groupe d'automorphismes d'une courbe dont les SL_2-invariants sont $(\mathsf{j}_2 : \mathsf{j}_3 : \dots)$, afin de sélectionner le modèle normalisé approprié pour la reconstruction d'un modèle de la courbe. Pour cela, nous établissons pour chaque groupe d'automorphismes les équations de la strate correspondante de l'espace de modules H_3. Cette tâche est notamment aisée lorsque le groupe d'automorphismes contient $\mathbf{C}_4$, comme l'indique le lemme suivant.

Lemme 7.2.2 Si le groupe d'automorphismes d'une courbe hyperelliptique $\mathsf{C} : y^2 = \mathsf{f}(x)$ de genre 3 définie sur k contient $\mathbf{C}_4$, alors tout invariant homogène de degré impair est nul.

Démonstration. Le poids d'un invariant homogène J de degré d est $8d/2 = 4d$. Si le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_4$, alors f admet un modèle de la forme $y^2 = \mathsf{f}(x)$, avec $\mathsf{f} = x(x^2 - 1)(x^4 + ax^2 + b)$. Ainsi, pour $\theta : (x, z) \mapsto (-x, z) \in \mathrm{Aut}(\mathsf{C})$, on a

$$\mathsf{J}(\theta.\mathsf{f}) = \det(\theta)^{4d}\mathsf{J} = \mathsf{J}.$$

Or $\theta.\mathsf{f} = -\mathsf{f}$, par conséquent, si d est impair, $\mathsf{J}(\mathsf{f}) = \mathsf{J}(\theta.\mathsf{f}) = \mathsf{J}(-\mathsf{f}) = -\mathsf{J}(\mathsf{f})$, d'où la conclusion, puisque k n'est pas de caractéristique 2. *QED*

De façon générale, pour exhiber des conditions nécessaires pour les strates, on peut avoir recours à l'algorithme 2 de détermination de l'expression polynomiale d'un invariant. Précisément, on choisit pour I l'invariant nul, considéré comme un invariant de degré positif d, et pour $\mathcal{F}$ un ensemble d'octiques aléatoires sur K de la forme du modèle normal de la strate considérée. Augmentant le degré d d'une unité de 0 à 45, on obtient *a priori* les générateurs de l'idéal des relations qui définit la strate.

Dans un second temps, afin de produire un modèle à partir des SL_2-invariants, on procède comme précédemment en modifiant légèrement l'algorithme 2. On insère dans la base $\mathcal{B}$ les paramètres $a, b, \ldots$ du modèle normal de la strate étudiée, donnée par les tables 7.1, 7.2 ou 7.5 selon la caractéristique, et on prend toujours pour $\mathcal{F}$ un ensemble d'octiques aléatoires sur K de la forme du modèle normal de la strate considérée. Les équations de plus bas degré ainsi déterminées permettent de reconstruire un modèle à partir de ses SL_2-invariants.

Finalement, suivant cette procédure, Lercier et Ritzenthaler ont donné dans [LR12] une description effective complète de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique $\mathsf{p} \neq 2, 3, 5$ et 7.

Pour notre part, on indique aux sections 7.3 et 7.4 suivantes les lemmes de reconstruction ainsi obtenus pour chacune des strates apparaissant dans les tables 7.2 et 7.5 pour les caractéristiques 3 et 7 respectivement. Précisément, on fournit systématiquement les équations que nous avons obtenues pour la strate et un modèle exprimé en termes des j_i pour la courbe C, ce dernier pouvant être défini sur une extension non triviale de k. Afin de rendre le degré de cette extension le plus petit possible, nous avons été amené à introduire des modèles normaux alternatifs avec plus de coefficients non nuls que ceux des tables 7.2 et 7.5. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 8 pour ce qui a trait à l'existence d'un modèle sur le corps de modules.

Les preuves des lemmes des deux sections suivantes sont naturellement indépendantes de la stratégie mise en oeuvre pour obtenir nos diverses équations ; elles reposent sur le schéma suivant :

- on s'assure que pour un modèle normalisé d'une des tables 7.2 et 7.5 ses SL_2-invariants vérifient les équations de sa strate, ainsi ce modèle forme un sous-ensemble de tous les modèles qui vérifient les équations de cette strate ;
- réciproquement, on contrôle que le modèle reconstruit a ses SL_2-invariants dans la même classe projective pondérée que le n-uplet initial $(\mathsf{j}_2 : \mathsf{j}_3 : \ldots)$. Étant donné que ces modèles sont normalisés, on a ainsi établi que seul le modèle normalisé satisfait les équations de la strates, soit l'inclusion réciproque.

La majorité de ces preuves nécessitent de lourds calculs, difficile à retranscrire dans ce document. Toutefois, un programme écrit en Magma, qui implante les vérifications correspondantes, est disponible pour un examen indépendant [5]. Nous illustrons cette stratégie en explicitant la démonstration du lemme 7.3.3.

7.3 Description de l'espace de modules en caractéristique 3

Dans cette section, k est supposé être de caractéristique 3.

Le propos liminaire de la section 7.1 a permis de préciser la liste des groupes d'automorphismes pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 3, présentée à la table 7.2, dont on déduit la stratification de l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 3 selon le groupe d'automorphismes, qui fait l'objet de la figure 7.2.

Nous exposons alors dans ce qui suit les lemmes de reconstruction pour les diverses strates de l'espace de modules H_3 en caractéristique 3, ordonnées par dimensions croissantes, qui permettent de retrouver un modèle hyperelliptique pour une courbe C à partir de ses SL_2-invariants $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$.

5. Voir note 1 page 5.

#	Aut(C)	$\overline{\mathrm{Aut}}$(C)	sign.	dim.	modèle $y^2 =$	Id.
1	$\mathbf{C}_2$	$\{1\}$	(2^8)	5	$x(x-1)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$	(2,1)
2	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{C}_2$	(2^6)	3	$x^8+ax^6+bx^4+cx^2+1$ $(x^2-1)(x^6+ax^4+bx^2+c)$	(4, 2)
3	$\mathbf{C}_4$	$\mathbf{C}_2$	$(2^3,4^2)$	2	$x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$	(4,1)
4	$\mathbf{C}_2^3$	$\mathbf{D}_2$	(2^5)	2	$(x^4+ax^2+1)(x^4+bx^2+1)$	(8, 5)
5	$\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4$	$\mathbf{D}_2$	$(2^2,4^2)$	1	$(x^4-1)(x^4+ax^2+1)$ $x(x^2-1)(x^4+ax^2+1)$	(8,2)
6	$\mathbf{C}_2\times\mathbf{D}_4$	$\mathbf{D}_4$	$(2^3,4)$	1	x^8+ax^4+1	(16, 11)
7	$\mathbf{C}_{14}$	$\mathbf{C}_7$	$(2,7,14)$	0	x^7-1	(14,2)
8	$\mathbf{V}_8$	$\mathbf{D}_8$	$(2,4,8)$	0	x^8-1	(48, 48)

TABLE 7.2 – Groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 3 (cf. remarque 7.1.4).

L'algorithme 3 résume la façon d'appliquer ces lemmes pour reconstruire un tel modèle pour n'importe quel point de l'espace de modules H_3. Notons qu'en pratique l'algorithme que nous avons implanté sous MAGMA renvoie de façon générale une octique binaire, même si le discriminant de cette dernière s'avère nul. Le cas échéant, il faut être conscient que nous n'apportons pas la preuve ici que les SL_2-invariants que nous proposons séparent correctement les orbites des formes singulières en dehors du nullcone. En outre, le groupe d'automorphismes de telles formes est potentiellement plus gros que celui indiqué par notre algorithme.

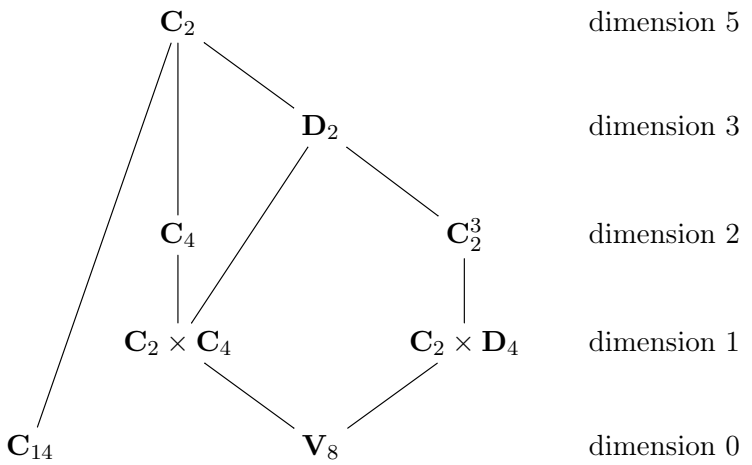

FIGURE 7.2 – Stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 3 selon le groupe d'automorphismes (cf. remarque 7.1.4).

Algorithme 3 : Reconstruire un polynôme hyperelliptique à partir de ses SL_2-invariants en caractéristique 3.

Entrée : SL_2-invariants $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$.
Sortie : Un polynôme hyperelliptique f.

1 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12}) = (0 : 0 : \ldots : 0)$, alors définir $\mathsf{f} = x^8$ (cas trivial);
2 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ satisfait Eq. (7.1), alors reconstruire f avec le lemme 7.3.1 (cas $\mathbf{V}_8$);
3 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ satisfait Eq. (7.2), alors reconstruire f avec le lemme 7.3.2 (cas $\mathbf{C}_{14}$);
4 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ satisfait Eq. (7.4), alors reconstruire f avec le lemme 7.3.5 (cas $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$);
5 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ satisfait Eq. (7.3), alors reconstruire f avec le lemme 7.3.3 (cas $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$);
6 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ satisfait Eq. (7.5), alors reconstruire f avec le lemme 7.3.7 (cas $\mathbf{C}_2^3$);
7 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ satisfait Eq. (7.7), alors reconstruire f avec le lemme 7.3.9 (cas $\mathbf{C}_4$);
8 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ satisfait Eq. (7.9), alors reconstruire f avec le lemme 7.3.11 (cas $\mathbf{D}_2$);
9 Sinon, reconstruire f avec le lemme 7.3.13 (cas $\mathbf{C}_2$);
10 **Renvoyer** f ;

7.3.1 Strates de dimension 0

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{V}_8$

Lemme 7.3.1 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C est $\mathbf{V}_8$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= \mathsf{j}_8 + 2\,\mathsf{j}_2^4, \\ 0 &= \mathsf{j}_{10} + 2\,\mathsf{j}_2^5, \\ 0 &= \mathsf{j}_{12} + \mathsf{j}_2^6, \\ 0 &= \mathsf{j}_3 = \mathsf{j}_4 = \mathsf{j}_5 = \mathsf{j}_6 = \mathsf{j}_7 = \mathsf{j}_9. \end{aligned} \tag{7.1}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{V}_8$ est K-isomorphe à la courbe $y^2 = x^8 - 1$.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_{14}$

Lemme 7.3.2 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C est $\mathbf{C}_{14}$ si et seulement si

$$0 = \mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_3 = \mathsf{j}_4 = \mathsf{j}_5 = \mathsf{j}_6 = \mathsf{j}_8 = \mathsf{j}_9 = \mathsf{j}_{10} = \mathsf{j}_{12} \qquad (\mathsf{j}_7 \neq 0). \tag{7.2}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_{14}$ est K-isomorphe à la courbe $y^2 = x^7 - 1$.

7.3.2 Strates de dimension 1

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$

Lemme 7.3.3 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$ si et seulement si

$$\begin{aligned} 0 &= \mathsf{j}_6^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_4^3, \\ 0 &= \mathsf{j}_8 + 2\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_2^4, \\ 0 &= \mathsf{j}_{10} + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_2^5, \\ 0 &= \mathsf{j}_{12} + \mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_2^6, \\ 0 &= \mathsf{j}_3 = \mathsf{j}_5 = \mathsf{j}_7 = \mathsf{j}_9. \end{aligned} \tag{7.3}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$ est K-isomorphe à la courbe $y^2 = a^2x^8 + 2a^2x^6 + ax^2 + 2$, où $a = \dfrac{\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6}{\mathsf{j}_4(\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4)} + \dfrac{2\mathsf{j}_4}{\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4}$.

Démonstration. Nous suivons la stratégie décrite à la fin du paragraphe 7.2. Notons $\mathsf{V}_{\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4}$ l'ensemble des classes de courbes hyperelliptiques de genre 3 dont le groupe d'automorphismes contient $\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4$ et E celui des classes satisfaisant les équations 7.3. Si C est un élément de $\mathsf{V}_{\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4}$, alors C admet un modèle de la forme $y^2 = (x^4-1)(x^4+ax^2+1)$ ou $y^2 = x(x^2-1)(x^4+ax^2+1)$ (cas 5 de la table 7.2) et on vérifie par un calcul formel que les SL_2-invariants d'une telle courbe satisfont les équations (7.3). Ainsi $\mathsf{V}_{\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4} \subset \mathsf{E}$. Réciproquement, soit C un élément de E et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Un calcul formel dans le corps de fractions de l'anneau quotient $\mathbb{F}_3[\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{12}]/\langle \mathrm{Eq.}(7.3)\rangle$ et utilisant l'algorithme 1 pour les espaces projectifs pondérés permet de vérifier que la courbe C' d'équation $y^2 = a^2x^8 + 2a^2x^6 + ax^2 + 2$, où

$$a = \frac{\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6}{\mathsf{j}_4(\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4)} + \frac{2\mathsf{j}_4}{\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4},$$

admet $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ pour SL_2-invariants. Ainsi C et C' sont K-isomorphes. Or le groupe d'automorphismes de la courbe C' contient le groupe engendré par $(x : y : z) \mapsto (x : -y : z)$ et $(x : y : z) \mapsto (z : \zeta ay : \sqrt{a}x)$, avec ζ une racine $4^{\text{ème}}$ primitive de l'unité, isomorphe à $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$. Ainsi $\mathsf{E} \subset \mathsf{V}_{\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4}$. *QED*

Remarque 7.3.4 Lorsque $\mathsf{j}_6 = 0$, les équations (7.3) se réduisent aux équations (7.1). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{V}_8$, et le lemme 7.3.1 s'applique en lieu et place du lemme 7.3.3 pour reconstruire un modèle. Lorsque $\mathsf{j}_4 = 0$ et $\mathsf{j}_6 \neq 0$, et donc $\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_2^3 = 0$, C peut être reconstruite via le modèle singulier $x^7 + x^5 + 2x^3 + 2x$ et, lorsque $\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4 = 0$, C peut être reconstruite via le modèle singulier $(x^2-1)(x^2+1)^3$.

Le corps de fractions du quotient de $\mathcal{I}_8$ par l'idéal engendré par les équations (7.3) s'obtient par adjonction de j_6 à $\mathsf{k}[\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_4]$, j_6 vérifiant une équation irréductible unitaire de degré 2. Les invariants j_8, j_{10} et j_{12} sont alors des fractions rationnelles en $\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_4$ et j_6.

D'un point de vue géométrique, la variété projective définie par les équations (7.3) a une singularité, à savoir le point $\mathbf{V}_8$. En outre, elle est birationnellement équivalente à la conique

$X_1^2 + X_2X_3 + 2X_3^2$ de discriminant 2. Cette dernière peut être paramétrisée par la pente des droites issues du point $\mathbf{V}_8$, ce qui mène à

$$t \mapsto \big(t : 0 : 2t+2 : 0 : 1 : 0 : t^4+t^3+2t^2+2t+1 : \\ 0 : t^5+2t^3+2t^2+2t : 2t^6+t^5+2t^4+t^2+1\big),$$

points auxquels correspondent les courbes

$$y^2 = (x^4+t+1)(x^4+x^2+2t+2).$$

Pour les valeurs $t = 1$ et $t = 2$, l'octique obtenue n'est pas séparable et, en dehors de ces points, la courbe ainsi définie est toujours de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$, puisque le point $\mathbf{V}_8$ n'est pas atteignable par cette paramétrisation. En particulier, on déduit de ce qui précède qu'il y a $3^r - 2$ classes d'isomorphisme de courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$ sur le corps fini $\mathbb{F}_{3^r}$.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$

Lemme 7.3.5 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_4^3 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^3,\\
0 &= \mathsf{j}_5\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2,\\
0 &= \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2,\\
0 &= \mathsf{j}_5^2 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2,\\
0 &= \mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_3^2,\\
0 &= \mathsf{j}_7 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_2,\\
0 &= \mathsf{j}_8 + 2\mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_2^4,\\
0 &= \mathsf{j}_9 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3,\\
0 &= \mathsf{j}_{10} + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_2^5,\\
0 &= \mathsf{j}_{12} + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_3^4 + \mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_2^6,
\end{aligned} \tag{7.4}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$ est K-isomorphe à la courbe $y^2 = x^8 + a_4x^4 + a_0$, où $a_4 = (2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_5)/\mathsf{j}_2^2$ et $a_0 = \mathsf{j}_2 + a_4^2$.

Remarque 7.3.6 Lorsque $\mathsf{j}_3 = \mathsf{j}_4 = 0$, les équations (7.4) se réduisent aux équations (7.1). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{V}_8$, et le lemme 7.3.1 s'applique en lieu et place du lemme 7.3.5 pour reconstruire un modèle.

Lorsque $\mathsf{j}_2 = 0$, C peut être reconstruite via le modèle singulier $(x^4 - a)^2$, où a est n'importe quelle racine de $X^3 + \mathsf{j}_3$.

Le corps de fractions du quotient de $\mathcal{I}_8$ par l'idéal engendré par les équations (7.4) s'obtient par adjonction de j_4 à $\mathsf{k}[\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_3]$, j_4 vérifiant une équation irréductible unitaire de degré 3. Les invariants $\mathsf{j}_5, \ldots, \mathsf{j}_{10}, \mathsf{j}_{12}$ sont alors des fractions rationnelles en $\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_3$ et j_4.

D'un point de vue géométrique, la variété projective définie par les équations (7.4) a une singularité, à savoir le point $\mathbf{V}_8$. En outre, elle est birationnellement équivalente à la conique $X_2^2 + 2X_1X_3$ de discriminant 2. Cette dernière peut être paramétrisée par la pente des droites issues du point $\mathbf{V}_8$, ce qui mène à

$$t \mapsto \big(t : 2t+2 : 2t : 2t : 2t+1 : t^2 : (t^3+t^2+2t+2)t : \\ (2t^2+2t+1)t^2 : (t+1)t^4 : 2t^6+2t^5+2t^4+t^3+2t+2\big),$$

points auxquels correspondent les courbes

$$y^2 = x^8 + x^4 + t + 1.$$

Pour les valeurs $t = 0$ et $t = 2$, l'octique obtenue n'est pas séparable et, en dehors de ces points, la courbe ainsi définie est toujours de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$, puisque le point $\mathbf{V}_8$ n'est pas atteignable par cette paramétrisation. En particulier, on déduit de ce qui précède qu'il y a $3^r - 2$ classes d'isomorphisme de courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$ sur le corps fini $\mathbb{F}_{3^r}$.

7.3.3 Strates de dimension 2

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_2^3$

Lemme 7.3.7 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_2^3$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_5^4 + 2\mathsf{j}_5^3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4^5 + 2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2\,.\\
0 &= \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_5^2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5^2 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_3^2 + \mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4^4 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^3 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^4 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2^2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_6^3 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_5^3\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_3^6\,,\\
0 &= \mathsf{j}_7\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_3^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_3^4\,,\\
0 &= \mathsf{j}_7\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_7\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_7\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3^2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_7^2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^3 + 2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_3^4\mathsf{j}_2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_2^4\,,\\
0 &= \mathsf{j}_9 + \mathsf{j}_7\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{10} + \mathsf{j}_7\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_5^2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_2^5\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{12} + \mathsf{j}_6^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_3^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_3^4 + 2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_2^6\,,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$ est K-isomorphe à la courbe

$$y^2 = a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + la_6x^2 + l^2a_8,$$

où

si $\mathsf{j}_3 = 0$ **:** $a_4 = 0$, $a_6 = 2\nu^2 + \mathsf{j}_2$, $a_8 = a_6\nu$ et $l = 1/a_6$, avec $\nu = \dfrac{2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5^3}{\mathsf{j}_4^3(\mathsf{j}_2^2+2\mathsf{j}_4)} + \dfrac{(\mathsf{j}_2^4+\mathsf{j}_4^2)\mathsf{j}_5}{\mathsf{j}_4^2(\mathsf{j}_2^2+2\mathsf{j}_4)}$.

si $\mathsf{j}_3 \neq 0$ **:** a_4 est n'importe quelle solution de l'équation de degré 3

$$\begin{aligned} 0 = {} & (2\mathsf{j}_3^2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_6)X^3 + (2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_7)X^2 \\ & + (2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2 + 2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6)X + 2\mathsf{j}_3^3 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 j_4 + j_3 j_6, \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$a_6 = 2\frac{a_4^3 + a_4\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_3}{a_4}, \quad a_8 = 2a_6^2\frac{a_4\mathsf{j}_3^2 + a_4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 2a_4\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_7}{\mathsf{j}_4^2 + a_4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + a_4\mathsf{j}_7} \quad \text{et} \quad l = \frac{1}{a_6}.$$

L'équation (7.6) peut ne pas avoir de solution dans le corps de base k, auquel cas le lemme 7.3.7 mène à un modèle défini sur une extension k' de degré 3 sur k. Cette reconstruction n'est pas otpimale, comme nous le verrons à la section 8.3.2.

Remarque 7.3.8

Dans le premier cas, lorsque $\mathsf{j}_3 = 0$, si $\mathsf{j}_6 = 0$ (resp. $\mathsf{j}_4 = 0$ et $\mathsf{j}_6 \neq 0$), les équations (7.5) se réduisent aux équations (7.1) (resp. (7.3)). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{V}_8$ (resp. $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$), et le lemme 7.3.1 (resp. la remarque 7.3.4) s'applique en lieu et place du lemme 7.3.7 pour reconstruire un modèle. Si $\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4 = 0$, à nouveau les équations (7.5) se réduisent aux équations (7.4). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$, et le lemme 7.3.5 s'applique en lieu et place du lemme 7.3.7 pour reconstruire un modèle.

Dans le second cas, lorsque $\mathsf{j}_3 \neq 0$, ce qui implique $a_4 \neq 0$, si $2\mathsf{j}_3^3 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 = 0$ ou $\mathsf{j}_4^2 + a_4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + a_4\mathsf{j}_7 = 0$, les équations (7.5) se réduisent aux équations (7.4). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$, et le lemme 7.3.5 s'applique en lieu et place du lemme 7.3.7 pour reconstruire un modèle.

Dans les deux cas, si $a_6 = 0$, alors la courbe C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$, et le lemme 7.3.5 s'applique en lieu et place du lemme 7.3.7 pour reconstruire un modèle.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_4$

À la différence des strates précédentes, les courbes de groupes d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ peuvent être reconstruites via la méthode des coniques et quartiques de Mestre, exposée au chapitre 6.

Lemme 7.3.9 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_4$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_6^4 + 2\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^6 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^5 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^9 + \mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 \\
&\quad + \mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^8 + 2\mathsf{j}_4^5\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^8 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^{10} + \mathsf{j}_2^{12}, \\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_2^6, \\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_6^2 + \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^5 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^8 + 2\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_2^3 \\
&\quad + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^5 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^7 + \mathsf{j}_4^5\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^7 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^9 + 2\mathsf{j}_2^{11}, \\
0 &= \mathsf{j}_{10}^2 + 2\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^7 + 2\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^6 + 2\mathsf{j}_4^5 + \mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^8, \\
0 &= \mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^5 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_4^4 + 2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_2^8, \\
0 &= \mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_8 + \mathsf{j}_6^3 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^7 + \mathsf{j}_2^9, \\
0 &= \mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_{10} + 2\mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8^2 \\
&\quad + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^4 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{j}_4^5\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^5 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^9 + \mathsf{j}_2^{11}, \\
0 &= \mathsf{j}_{12}^2 + 2\mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_2^6 + \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^6 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 \\
&\quad + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^9 + \mathsf{j}_8^3 + 2\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^4 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^6 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^8 + 2\mathsf{j}_4^6 + \mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^6, \\
0 &= \mathsf{j}_9 = \mathsf{j}_7 = \mathsf{j}_5 = \mathsf{j}_3.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

En outre, au moins un des trois déterminants

$$\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7), \quad \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}'_9), \quad \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_8, \mathsf{q}'_{11}) \tag{7.8}$$

est non nul pour une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ et si la conique correspondante a un k-point rationnel, alors C est K-isomorphe à une courbe définie sur k, obtenue via la méthode de Mestre (cf. proposition 8.2.5 et section 8.3.3).

Remarque 7.3.10 Les covariants quadratiques q_i sont ceux introduits à la section 4.2.3.

Pour vérifier qu'au moins un des trois déterminants proposés en (7.8) est non nul pour une courbe de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$, on résout en a et b le système obtenu en spécialisant ces déterminants en le modèle normalisé $x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$ (cf. table 7.2). Les solutions, définies potentiellement dans une k-extension, se répartissent en un nombre fini de composantes irréductibles qui correspondent toutes à des courbes de groupe d'automorphismes plus gros que $\mathbf{C}_4$ (cf. table 7.3).

$f = x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$		singulier	$\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \supset$
$a=0$	$b=0$	oui	$\mathbf{V}_8$
$a=0$	$b=1$	non	$\mathbf{V}_8$
$a=b+1$	$b^2+b+2=0$	non	$\mathbf{V}_8$
tout a	$b=1$	non (si $a \neq 1,2$)	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$
$a=0$	$b=2$	non	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$
$b^2+b+a^3=0$		-	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$

TABLE 7.3 – Modèles $y^2 = x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$ qui annulent les trois déterminants (7.8).

7.3.4 Strate de dimension 3

La strate de dimension 3 correspond aux courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{D}_2$

Lemme 7.3.11 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{D}_2$ si et seulement si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{10}, \mathsf{j}_{12}$ satisfont un ensemble de 42 équations, de degré compris entre 12 et 28 , dont

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_6^2 + 2\mathsf{j}_7\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_3^2 + \mathsf{j}_3^4 + \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_2^6 \\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5^2 + \mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_7\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_4^4 + 2\mathsf{j}_7\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_3^2 + \mathsf{j}_7\mathsf{j}_3^3 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^4 \\
&\quad + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_{12}\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_7\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_9\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 \\
&\quad + 2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_3^4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^6\,, \\
0 &= \ldots
\end{aligned} \tag{7.9}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ est K-isomorphe à la courbe

$$y^2 = a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0,$$

où, après avoir défini

- $\mathfrak{i}_1 = a_4$ comme la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} 0 = (&\mathfrak{j}_2^5\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^3 + 2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5^2 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5^2 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_7^2 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_8 \\ &+ 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_{10} + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_{10} + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{12})X + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3^3 + \mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4 \\ &+ 2\mathfrak{j}_2^5\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5^2 + 2\mathfrak{j}_5^3 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 \\ &+ 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10} + 2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_{10} \end{aligned} \tag{7.10}$$

si cette dernière est non triviale,

$$\begin{aligned} 0 = (&\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3 2 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5^2 + 2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5^2 + 2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_7^2 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_8 \\ &+ 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_1 0 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_1 0 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_1 2)X + 2\mathfrak{j}_3^5 + \mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2^5\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 \\ &+ \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6^2 + \mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 \\ &+ \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_7\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_9 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9 + 2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_{10} \end{aligned} \tag{7.11}$$

si cette dernière est non triviale,

$$\begin{aligned} 0 = (&\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5^2 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_7^2 + 2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_8 \\ &+ 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_1 0 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_1 0 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_1 2)X + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3^3 + \mathfrak{j}_3^5 + \mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{j}_2^5\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_5^3 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_6 \\ &+ 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6^2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_1 0 + \mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_1 0 \end{aligned} \tag{7.12}$$

sinon ;

- $\mathfrak{i}_2 = a_0a_8$ comme la solution de l'équation linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} \mathfrak{i}_1^2X + \mathfrak{i}_1^4 + \mathfrak{i}_1^2j_2 + 2\mathfrak{i}_1j_3 & \text{si } \mathfrak{i}_1 \neq 0, \\ (j_2^3 + 2j_6)X + 2j_2^4 + j_2^2j_4 + j_4^2 + 2j_2j_6 & \text{si } j_2^3 + 2j_6 \neq 0, \\ X + j_2 & \text{sinon} \quad ; \end{array} \right. \tag{7.13}$$

- $\mathfrak{k}_2 = a_2a_6 = j_2 + 2\mathfrak{i}_2 + \mathfrak{i}_1^2$;
- $\mathfrak{j}_3 = a_0a_6^2 + a_2^2a_8$ comme la solution de l'équation linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} \mathfrak{i}_2^2X + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2j_2^2 + 2\mathfrak{i}_2^2j_3 + \mathfrak{k}_2^2j_3 + j_2^2j_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2j_4 + \mathfrak{i}_1j_2j_4 & \\ \qquad + j_3j_4 + 2\mathfrak{i}_2j_5 + 2\mathfrak{k}_2j_5 + 2j_2j_5 + 2\mathfrak{i}_1j_6 + 2j_7 & \text{si } \mathfrak{i}_2 \neq 0, \\ j_2X + j_5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^5 & \text{sinon} \quad ; \end{array} \right. \tag{7.14}$$

si $\mathfrak{k}_2 = 0$ **:** $a_2 = 0, a_6 = 1, a_4 = \mathfrak{i}_1, a_0 = \mathfrak{j}_3$ et $a_8 = \mathfrak{i}_2/\mathfrak{j}_3$;

sinon : $a_2 = 1, a_0 = 2(\mathfrak{j}_3 + t)/\mathfrak{k}_2^2, a_4 = \mathfrak{i}_1, a_6 = \mathfrak{k}_2$ and $a_8 = \mathfrak{i}_2/a_0$, où t est n'importe quelle racine de $X^2 - (\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2)$.

Remarque 7.3.12 Il peut arriver qu'une courbe C trivialise les trois équations (7.10), (7.11) et (7.12), de telle manière qu'on ne puisse pas déterminer $\mathfrak{i}_1$ *a priori*. Toutefois, suivant la démarche présentée à la remarque 7.3.10, cela advient seulement lorsque l'on se trouve dans les cas spécifiques décrits par la table 7.4, *i.e.* pour lesquels le groupe d'automorphismes est plus gros ou la courbe singulière.

Pour les trois équations (7.13) définissant i_2, notons que lorsque i_1 et $\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_6$ sont nuls, alors la courbe en question est singulière.

Enfin, les deux équations (7.14) peuvent être triviales. Or l'annulation de $\mathsf{i}_2 = 0$ et $\mathsf{j}_2 = 0$ pour les deux équations (7.14) implique que les SL_2-invariants de la courbe satisfont les équations

$$\begin{aligned} 0 &= \mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_3^2, \\ 0 &= \mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_3^4, \\ 0 &= \mathsf{J}_2 = \mathsf{J}_4 = \mathsf{J}_5 = \mathsf{J}_7 = \mathsf{J}_8 = \mathsf{J}_{10}, \end{aligned} \tag{7.15}$$

i.e. appartiennent à la classe $(0 : 1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : \mathsf{j}_9 : 0 : 2)$. Ainsi, le cas échéant, la courbe C peut être reconstruite via le modèle singulier $ax^8 + x^6 + x^4 + x^2$, où a est n'importe quelle racine de $X^3 + \mathsf{j}_9/\mathsf{j}_3^3$.

$f = a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$	singulier	$\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \supset$
$a_0a_6^2 + 2a_2^2a_8 = 0$	-	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2^3$
$\left.\begin{aligned} a_0^2a_8^2 + a_0a_4^2a_8 + 2a_6^2a_2^2 + a_2^2a_4a_8^2 + a_4^4 &= 0 \\ a_0a_6a_8 + 2a_6^2a_2 + a_6a_4^2 + 2a_2a_4a_8 &= 0 \\ a_0a_2a_8^2 + 2a_6^2a_2a_4 + 2a_6a_2^2a_8 + a_6a_4^3 &= 0 \\ a_6^3a_2 + 2a_6^2a_4^2 + a_6a_2a_4a_8 + 2a_2^2a_8^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$	-	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$
$a_0 = 0$ ou $a_8 = 0$	oui	–
$a_0a_8 + 2a_6a_2 = 0$ et $a_4 = 0 = 0$	oui	–

TABLE 7.4 – Reconstruction pour les courbes C qui trivialisent les équations (7.10), (7.11) et (7.12).

7.3.5 Strate générique

Pour les courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2$, on peut *a priori* utiliser la méthode de Mestre, exposée au chapitre 6. Cela nécessite toutefois de fournir suffisamment de covariants quadratiques, introduits à la section 4.2.3, de telle sorte qu'une telle courbe n'annule pas tous les déterminants de coniques $\mathsf{R}(\mathsf{q}_a, \mathsf{q}_b, \mathsf{q}_c)$ définis à partir de ces covariants.

Lemme 7.3.13 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{10} : \mathsf{j}_{12})$ ses SL_2-invariants. Si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{10}, \mathsf{j}_{12}$ ne satisfont pas les équations (7.9), (7.7) et (7.2), alors le groupe d'automorphismes de C est $\mathbf{C}_2$. En outre, au moins un des 31 determinants

$$\begin{array}{lllll} \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_8), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_8'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_9), \\ \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_9'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_9''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_{10}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_{11}'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7, \mathsf{q}_8), \\ \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7, \mathsf{q}_9), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7, \mathsf{q}_9'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7, \mathsf{q}_9''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7, \mathsf{q}_{10}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_{10}), \\ \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_8, \mathsf{q}_{10}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_8, \mathsf{q}_{11}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_8, \mathsf{q}_{11}'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_8', \mathsf{q}_9), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_8', \mathsf{q}_{10}), \\ \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9, \mathsf{q}_9'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9, \mathsf{q}_{10}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9, \mathsf{q}_{11}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9, \mathsf{q}_{11}'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9', \mathsf{q}_{10}), \\ \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9', \mathsf{q}_{11}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_{10}, \mathsf{q}_{11}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_{10}, \mathsf{q}_{11}'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_{11}, \mathsf{q}_{11}'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_6, \mathsf{q}_9', \mathsf{q}_{11}'), \\ \mathsf{R}(\mathsf{q}_8, \mathsf{q}_9, \mathsf{q}_{11}') & & & & \end{array}$$

est non nul pour une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2$. Si la conique correspondante a un k-point rationnel, alors C est K-isomorphe à une courbe définie sur k, obtenue via la méthode de Mestre (cf. aussi proposition 8.2.5 et section 8.3.5).

Démonstration. Les équations (7.9), (7.7) et (7.2) sont respectivement les équations des strates de courbes de groupes d'automorphismes $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{C}_4$ et $\mathbf{C}_{14}$, qui sont les sous-strates maximales de la strate générique (cf. figure 7.2). Concernant l'annulation des 31 déterminants R, il suffit d'établir l'égalité suivante d'idéaux dans l'anneau $\mathsf{k}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12}]/\langle \mathfrak{Rel} \rangle$:

$$\langle \text{Eq. strate } \mathbf{D}_2 \rangle = \left\langle \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7), \ldots, \mathsf{R}(\mathsf{q}_8, \mathsf{q}_9, \mathsf{q}'_{11}) \right\rangle,$$

ce qui est aisé via un calcul de base de Gröbner pour l'ordre grevlex $\mathsf{J}_2 < \cdots < \mathsf{J}_{10} < \mathsf{J}_{12}$ avec les poids $2, \ldots, 10, 12$. *QED*

7.4 Description de l'espace de modules en caractéristique 7

Dans cette section, k est supposé être de caractéristique 7.

Le propos liminaire de la section 7.1 a permis de préciser la liste des groupes d'automorphismes pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 7, présentée à la table 7.5, dont on déduit la stratification de l'espace de modules H_3 des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 7 selon le groupe d'automorphismes, qui fait l'objet de la figure 7.3.

Nous exposons alors dans ce qui suit les lemmes de reconstruction pour les diverses strates de l'espace de modules H_3 en caractéristique 7, ordonnées par dimension croissante, qui permettent de retrouver un modèle hyperelliptique pour une courbe C à partir de ses SL_2-invariants $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$.

L'algorithme 4 résume la façon d'appliquer ces lemmes pour reconstruire un tel modèle pour n'importe quel point de l'espace de modules H_3. À ce sujet, on pourra se reporter aux remarques déjà faites concernant l'algorithme 3 pour la caractéristique 3.

Remarque 7.4.1 Contrairement aux autres cas, nous n'indiquons pas la signature du groupe d'automorphismes $\mathbf{G}_{672}$ (cf. table 7.5). Cette omission n'est pas fortuite et nous la justifions au moins en soulignant que ce cas exceptionnel, pour lequel l'ordre du groupe est multiple de la caractéristique $\mathsf{p} = 7$, mène à une situation de ramification sauvage pour le revêtement $\mathsf{C} \mapsto \mathsf{C}/\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$. Dans une telle situation, la filtration de ramification associée au groupe $\mathbf{G}_{672}$ doit être raffinée et voit apparaître d'autres groupes d'inertie dits « sauvages », ce qui a notamment pour conséquence de mettre en défaut la formule de Riemann-Hurwitz (cf. [Roc08, § 1.2]). Autrement dit, la détermination de cette éventuelle signature nous mènerait loin de notre sujet. Au demeurant, pour notre propos, l'utilisation de ces signatures se limitant au calcul des dimensions des strates et, dans le cas présent, l'estimation de la dimension de la strate $\mathbf{G}_{672}$ étant triviale, le lecteur nous pardonnera cette méconnaissance.

#	Aut(C)	$\overline{\mathrm{Aut}}$(C)	sign.	dim.	modèle $y^2 =$	Id.
1	$\mathbf{C}_2$	$\{1\}$	(2^8)	5	$x(x-1)(x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)$	(2,1)
2	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{C}_2$	(2^6)	3	$x^8+ax^6+bx^4+cx^2+1$ $(x^2-1)(x^6+ax^4+bx^2+c)$	(4, 2)
3	$\mathbf{C}_4$	$\mathbf{C}_2$	$(2^3,4^2)$	2	$x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$	(4,1)
4	$\mathbf{C}_2^3$	$\mathbf{D}_2$	(2^5)	2	$(x^4+ax^2+1)(x^4+bx^2+1)$	(8, 5)
5	$\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4$	$\mathbf{D}_2$	$(2^2,4^2)$	1	$(x^4-1)(x^4+ax^2+1)$ $x(x^2-1)(x^4+ax^2+1)$	(8,2)
6	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{D}_3$	$(2^3,6)$	1	$x(x^6+ax^3+1)$	(12, 4)
7	$\mathbf{C}_2\times\mathbf{D}_4$	$\mathbf{D}_4$	$(2^3,4)$	1	x^8+ax^4+1	(16, 11)
8	$\mathbf{G}_{672}$	$\mathbf{PGL}_2(\mathbb{F}_7)$	-	0	x^7-x	(672, 1043)

TABLE 7.5 – Groupes d'automorphismes des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 7 (cf. remarques 7.1.4 et 7.4.1).

7.4.1 Strate de dimension 0

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{G}_{672}$

Lemme 7.4.2 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C est $\mathbf{G}_{672}$ si et seulement si

$$0 = \mathsf{j}_2 = \mathsf{j}_3 = \mathsf{j}_4 = \mathsf{j}_5 = \mathsf{j}_6 = \mathsf{j}_7 = \mathsf{j}_8 = \mathsf{j}_9 = \mathsf{j}_{10} = \mathsf{j}_{11} = \mathsf{j}_{13} = \mathsf{j}_{15} \qquad (\mathsf{j}_{14} \neq 0). \tag{7.16}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{G}_{672}$ est K-isomorphe à la courbe $y^2 = x^7 - x$.

7.4.2 Strates de dimension 1

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$

Lemme 7.4.3 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_2\times\mathbf{C}_4$ si et seulement si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{14}, \mathsf{j}_{15}$ satisfont un ensemble de 23 équations, de degré compris entre 3 et 70, dont

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_4^2 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_2^4\,,\\
0 &= \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 4\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_2^5\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^2 + \mathsf{j}_4^3 + 5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_8 + 6\mathsf{j}_6^3 + 3\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^3 + 6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^5 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^7\,,\\
0 &= \ldots\\
0 &= \mathsf{j}_{15} = \mathsf{j}_{13} = \mathsf{j}_{11} = \mathsf{j}_9 = \mathsf{j}_7 = \mathsf{j}_5 = \mathsf{j}_3\,.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$ est K-isomorphe à la courbe $y^2 = a^2x^8 + 2a^2x^6 + ax^2 + 5$, où $a = (3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_2^4)/(\mathsf{j}_4 + 3\mathsf{j}_2^2)^2$.

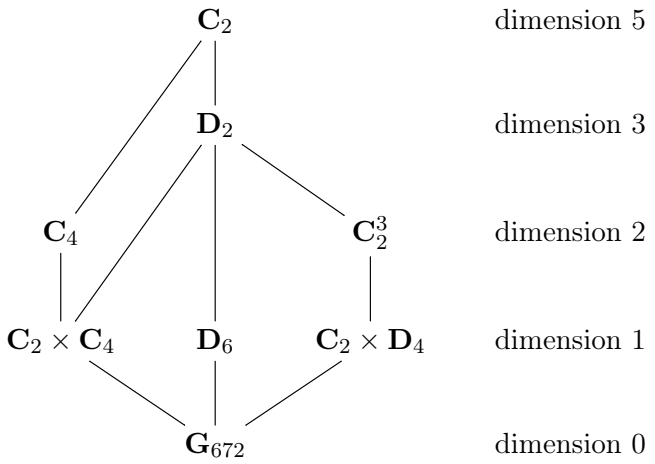

FIGURE 7.3 – Stratification de l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 7 selon le groupe d'automorphismes (cf. remarque 7.1.4).

Algorithme 4 : Reconstruire un polynôme hyperelliptique à partir de ses SL_2-invariants en caractéristique 7.

Entrée : SL_2-invariants $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$.
Sortie : Un polynôme hyperelliptique f.

1 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15}) = (0 : 0 : \ldots : 0)$, alors définir $\mathsf{f} = x^8$ (cas trivial);
2 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ satisfait Eq. (7.16), alors reconstruire f avec le lemme 7.4.2 (cas $\mathbf{G}_{672}$);
3 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ satisfait Eq. (7.19), alors reconstruire f avec le lemme 7.4.7 (cas $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$);
4 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ satisfait Eq. (7.18), alors reconstruire f avec le lemme 7.4.5 (cas $\mathbf{D}_6$);
5 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ satisfait Eq. (7.17), alors reconstruire f avec le lemme 7.4.3 (cas $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$);
6 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ satisfait Eq. (7.20), alors reconstruire f avec le lemme 7.4.9 (cas $\mathbf{C}_2^3$);
7 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ satisfait Eq. (7.23), alors reconstruire f avec le lemme 7.4.11 (cas $\mathbf{C}_4$);
8 Si $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ satisfait Eq. (7.25), alors reconstruire f avec le lemme 7.4.13 (cas $\mathbf{D}_2$);
9 Sinon, reconstruire f avec le lemme 7.4.15 (cas $\mathbf{C}_2$);
10 **Renvoyer** f ;

Remarque 7.4.4 Lorsque $\mathsf{j}_2 = 0$, les équations (7.17) se réduisent aux équations (7.16). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{G}_{672}$, et le lemme 7.4.2 s'applique en lieu et place du lemme 7.4.3 pour reconstruire un modèle. Lorsque $\mathsf{j}_4 + 3\mathsf{j}_2^2 = 0$, C peut être reconstruite via le modèle singulier $x(x^2-1)(x^2+1)^2$.

Le corps de fractions du quotient de $\mathcal{I}_8$ par l'idéal engendré par les équations (7.17) s'obtient par adjonction de j_4 à $\mathsf{k}[\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_{14}]$, j_4 vérifiant l'équation irréductible unitaire de degré 7

$$X^7 + \mathsf{j}_2^2 X^6 + \mathsf{j}_2^6 X^4 + 3\mathsf{j}_2^8 X^3 + \mathsf{j}_2^{10} X^2 + 2\mathsf{j}_2^{12} X + 5\mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_2^7.$$

Les invariants $\mathsf{j}_6, \mathsf{j}_8$ et j_{10} sont alors des fractions rationnelles en $\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_4$ et j_{14}.

D'un point de vue géométrique, la variété projective définie par les équations (7.17) a une singularité, à savoir le point $\mathbf{G}_{672}$. En outre, elle est birationnellement équivalente à la conique $X_2^2 + 6X_1X_3$ de discriminant 6. Cette dernière peut être paramétrisée par la pente des droites

issues du point $(1:0:4:0:0:0:0:0:6:0:0:4:0)$, qui correspond à la courbe singulière $y^2 = x^7 + x^5 + 6x^3 + 6x$, ce qui mène à

$$\begin{aligned} t \mapsto (&t:0:(4t+1)t:0:(3t+2)t:0:(4t+4)t: \\ &0:(6t^4+2t^3+2t^2+t+3)t:0:0:(4t^7+t^6+2t^5+2t^4+5t^3+5t^2+4t+4):0)\,, \end{aligned}$$

points auxquels correspondent les courbes

$$y^2 = (x^4 + 6/t)(x^4 + 2x^2 + 1/t), \text{ si } t \neq 0.$$

Pour la valeur $t = 1$, l'octique obtenue n'est pas séparable et, pour la valeur $t = 0$, le point correspond à la courbe $y^2 = x^7 - x$ de groupe d'automorphismes $\mathbf{G}_{672}$. En dehors de ces deux points, la courbe ainsi définie est toujours de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$. En particulier, on déduit de ce qui précède qu'il y a $7^r - 2$ classes d'isomorphisme de courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$ sur le corps fini $\mathbb{F}_{7^r}$.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{D}_6$

Lemme 7.4.5 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{D}_6$ si et seulement si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{14}, \mathsf{j}_{15}$ satisfont un ensemble de 77 équations, de degré compris entre 6 et 70, dont

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_3^2 + 3\mathsf{j}_2^3\,,\\
0 &= \mathsf{j}_5\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2\,,\\
0 &= \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_4^2 + 4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + 5\mathsf{j}_2^4\,,\\
0 &= \mathsf{j}_7\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + 5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3\,,\\
0 &= \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 3\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_2^5\,,\\
0 &= \mathsf{j}_9\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5 + 3\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3 + 5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^4\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^2 + 3\mathsf{j}_4^3 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + 3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + 4\mathsf{j}_2^6\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{11}\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_7\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2 + 3\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3 + 5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^5\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{13}\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_7 + 4\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + 4\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^6\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_8 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3 + 4\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^3 + 6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^5 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^7 + 3\mathsf{j}_2^9\,,\\
0 &= \mathsf{j}_{15}\mathsf{j}_2 + 6\mathsf{j}_9\mathsf{j}_8 + 6\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_5 + 3\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^3 + 5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^7\,,\\
0 &= \ldots
\end{aligned} \tag{7.18}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_6$ est K-isomorphe à la courbe d'équation $y^2 = x^7 + a_4x^4 + a_1x$, où $a_4 = 6\mathsf{j}_3/\mathsf{j}_2$ et $a_0 = (3a_4\mathsf{j}_4 + 3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3)/\mathsf{j}_3$.

Remarque 7.4.6 Lorsque $\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 = 0$, les équations (7.18) se réduisent aux équations (7.16). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{G}_{672}$, et le lemme 7.4.2 s'applique en lieu et place du lemme 7.4.5 pour reconstruire un modèle.

Le corps de fractions du quotient de $\mathcal{I}_8$ par l'idéal engendré par les équations (7.18) s'obtient par adjonction de j_3 et j_4 à $\mathsf{k}[\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_{14}]$, j_3 vérifiant une équation irréductible unitaire de degré 2 et j_4 l'équation irréductible unitaire de degré 7

$$X^7 + \mathsf{j}_2^2X^6 + \mathsf{j}_2^4X^5 + 6\mathsf{j}_2^6X^4 + 2\mathsf{j}_2^8X^3 + 4\mathsf{j}_2^{10}X^2 + 4\mathsf{j}_2^{12}X + 4\mathsf{j}_2^{14} + 5\mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_2^7.$$

Les invariants $\mathsf{j}_5, \dots \mathsf{j}_{13}$ et j_{15} sont alors des fractions rationnelles en $\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_3, \mathsf{j}_4$ et j_{14}.

D'un point de vue géométrique, la variété projective définie par les équations (7.18) a une singularité, à savoir le point $\mathbf{G}_{672}$. Vu la remarque 7.4.6, il est loisible de considérer l'intersection de cette variété avec l'hyperplan affine $\mathsf{j}_2 = 1$, afin de la paramétriser. Précisément, cette intersection est birationnellement équivalente à la conique $X_2^2 + 6X_1X_3$ de discriminant 6 et cette dernière peut être paramétrisée par la pente des droites issues du point

$$(1 : 2 : 3 : 6 : 1 : 4 : 2 : 6 : 1 : 4 : 5 : 3 : 1),$$

qui correspond à la courbe singulière $y^2 = x^7 + 5x^4 + x$, ce qui mène à

$$\begin{aligned} t \mapsto \big(&t^2 : 2t^3 : (3t+1)t^3 : (6t+5)t^4 : (t^2+t+2)t^4 : (4t^2+4t+2)t^5 : (2t^3+5t^2+4t+4)t^5 : \\ &(6t^3+t^2+3t+2)t^6 : (t^4+6t^3+2t^2+3)t^6 : (4t^4+2t^3+4t+5)t^7 : (5t^5+6t^4+6t^3+4)t^8 : \\ &(3t^7+5t^6+2t^5+2t^4+t^3+6t^2+4t+4)t^7 : (t^6+2t^5+2t^4+6t^3+6t^2+5t+1)t^9\big), \end{aligned}$$

points auxquels correspondent les courbes

$$y^2 = x(x^6 + 5tx^3 + t^2 + 4t), \text{ pour } t \neq 0.$$

La valeur $t = 0$ est naturellement exclue et pour le paramètre $t = 3$ l'octique obtenue n'est pas séparable. En dehors de ces deux points, la courbe ainsi définie est toujours de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_6$. En particulier, on déduit de ce qui précède qu'il y a $7^r - 2$ classes d'isomorphisme de courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_6$ sur le corps fini $\mathbb{F}_{7^r}$.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$

Lemme 7.4.7 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \dots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$ si et seulement si $\mathsf{j}_2, \dots, \mathsf{j}_{14}, \mathsf{j}_{15}$ satisfont un ensemble de 77 équations, de degré compris entre 6 et 70, dont

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_3^2 + 3\mathsf{j}_2^3, \\
0 &= \mathsf{j}_5\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2, \\
0 &= \mathsf{j}_6\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_4^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_2^4, \\
0 &= \mathsf{j}_7\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3, \\
0 &= \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_2^5, \\
0 &= \mathsf{j}_9\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3 + 5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^4, \\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^2 + 6\mathsf{j}_4^3 + 2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + 3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4, \\
0 &= \mathsf{j}_{11}\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_7\mathsf{j}_6 + 5\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2 + 4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^5, \\
0 &= \mathsf{j}_{13}\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_3 + 6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^6, \\
0 &= \mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_8 + 5\mathsf{j}_6^3 + 6\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3 + 4\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^7, \\
0 &= \mathsf{j}_{15}\mathsf{j}_2 + 6\mathsf{j}_9\mathsf{j}_8 + 6\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_5 + 5\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3 + 4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^5 + 5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^7, \\
0 &= \dots
\end{aligned} \tag{7.19}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$ est K-isomorphe à la courbe $y^2 = x^8 + a_4x^4 + a_0$, où $a_4 = 6\mathsf{j}_3/\mathsf{j}_2$ et $a_0 = (6a_4\mathsf{j}_3 + 3\mathsf{j}_4)/\mathsf{j}_2$.

Remarque 7.4.8 Lorsque $\mathsf{j}_2 = 0$, les équations (7.19) se réduisent aux équations (7.16). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{G}_{672}$, et le lemme 7.4.2 s'applique en lieu et place du lemme 7.4.7 pour reconstruire un modèle.

Le corps de fractions du quotient de $\mathcal{I}_8$ par l'idéal engendré par les équations (7.19) s'obtient par adjonction de j_3 et j_4 à $\mathsf{k}[\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_{14}]$, j_3 vérifiant une équation irréductible unitaire de degré 2 et j_4 l'équation irréductible unitaire de degré 7

$$X^7 + \mathsf{j}_2^2 X^6 + 6\mathsf{j}_2^4 X^5 + 6\mathsf{j}_2^6 X^4 + 6\mathsf{j}_2^8 X^3 + 6\mathsf{j}_2^{10} X^2 + 4\mathsf{j}_2^{14} + 5\mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_2^7.$$

Les invariants $\mathsf{j}_5, \ldots \mathsf{j}_{13}$ et j_{15} sont alors des fractions rationnelles en $\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_3, \mathsf{j}_4$ et j_{14}.

D'un point de vue géométrique, la variété projective définie par les équations (7.19) a une singularité, à savoir le point $\mathbf{G}_{672}$. Vu la remarque 7.4.8, on peut considérer l'intersection de cette variété avec l'hyperplan affine $\mathsf{j}_2 = 1$, afin de la paramétriser. Précisément, cette intersection est birationnellement équivalente à la conique $X_2^2 + 6X_1X_3$ de discriminant 6 et cette dernière peut être paramétrisée par la pente des droites issues du point $(1 : 2 : 6 : 0 : 2 : 1 : 0 : 6 : 3 : 1 : 0 : 2 : 0)$, qui correspond à la courbe singulière $y^2 = x^8 + 5x^4 + 1$, ce qui mène à

$$\begin{aligned} t \mapsto \big(t^2 : 2t^3 : (6t+1)t^3 : 5t^4 : (2t^2+2t+2)t^4 : (t^2+t+2)t^5 : (3t^2+2t+4)t^5 : \\ (6t^3+2t^2+4t+2)t^6 : (3t^4+3t^3+4t^2+3)t^6 : (t^4+4t^2+5)t^7 : \\ (3t^4+4t^2+5t+4)t^8 : (2t^7+3t^6+4t^4+6t^3+4t+4)t^7 : (2t^5+3t^4+6t^3+6t^2+5t+1)t^9\big), \end{aligned}$$

points auxquels correspondent les courbes

$$y^2 = x^8 + 5tx^4 + t^2 + 3t, \text{ pour } t \neq 0.$$

La valeur $t = 0$ est naturellement exclue et pour le paramètre $t = 4$ l'octique obtenue n'est pas séparable. En dehors de ces deux points, la courbe ainsi définie est toujours de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$. En particulier, on déduit de ce qui précède qu'il y a $7^r - 2$ classes d'isomorphisme de courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$ sur le corps fini $\mathbb{F}_{7^r}$.

7.4.3 Strates de dimension 2

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_2^3$

Lemme 7.4.9 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_2^3$ si et seulement si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{14}, \mathsf{j}_{15}$ satisfont un ensemble de 52 équations, de degré compris entre 8 et 30, dont

$$\begin{aligned} 0 &= \mathsf{j}_4^2 + 3\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3 + 3\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_2^4, \\ 0 &= \mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3 + 4\mathsf{j}_3^3 + 4\mathsf{j}_7\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3, \\ 0 &= \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + 6\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2 + 5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_2^5, \\ 0 &= \mathsf{j}_5^2 + 6\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3 + 5\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_2^5, \\ 0 &= \mathsf{j}_7\mathsf{j}_4 + 4\mathsf{j}_8\mathsf{j}_3 + 3\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^2 + 4\mathsf{j}_9\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_7\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^3, \\ 0 &= \mathsf{j}_6\mathsf{j}_5 + 5\mathsf{j}_8\mathsf{j}_3 + 4\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^2 + 3\mathsf{j}_9\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 + 6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^3, \\ 0 &= \ldots \end{aligned} \tag{7.20}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$ est K-isomorphe à la courbe

$$y^2 = a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + la_6x^2 + l^2a_8,$$

où

- a_4 est n'importe quelle solution de l'équation de degré 3

$$\begin{aligned} 0 = (3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_3^2)x^3 + (4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2 + 2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_4^2 + 6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6)x \\ + 2\mathsf{j}_3^3 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 6\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_7 \ ; \end{aligned} \tag{7.21}$$

- $a_6 = 4a_4^2 + 5\mathsf{j}_2$;
- $$a_8 = \begin{cases} 0 & \text{si } 2a_4(3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_3^2) + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 = 0, \\ -\frac{(3a_6^3\mathsf{j}_4 + a_6^2a_4(3a_4\mathsf{j}_4+\mathsf{j}_5) + 4a_6^5 + 2a_6^3a_4^4 + a_6^2a_4^6)}{2a_4(3\mathsf{j}_2^3+\mathsf{j}_3^2)+\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3+\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4+\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5} & \text{sinon} \ ; \end{cases} \tag{7.22}$$
- et $l = 1/a_6$.

L'équation (7.21) peut ne pas avoir de solution dans le corps de base k, auquel cas le lemme 7.4.9 mène à un modèle défini sur une extension k' de degré 3 sur k. Cette reconstruction n'est pas otpimale, comme nous le verrons à la section 8.3.2.

Remarque 7.4.10 Si $3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_3^2 = 3\mathfrak{I}_6 = 0$ (*i.e.* l'équation (7.21) est linéaire), les équations (7.20) se réduisent aux équations (7.19). Autrement dit C a un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$, et le lemme 7.4.7 s'applique en lieu et place du lemme 7.4.9 pour reconstruire un modèle.

Si $a_6 = 0$, alors la courbe C a à nouveau un groupe d'automorphismes plus gros, à savoir $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$, et le lemme 7.4.7 s'applique en lieu et place du lemme 7.4.9 pour reconstruire un modèle.

Lorsque $3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_3^2 = 3\mathfrak{I}_6 \neq 0$, on a, dans l'anneau $\mathsf{k}[a4, a6, a8, l, 1/\mathfrak{I}_6]$,

$$\mathrm{Disc}(a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + la_6x^2 + l^2a_8) \in \left\langle 2a_4(3\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_3^2) + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 \right\rangle ,$$

ainsi la forme reconstruite est singulière.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{C}_4$

À la différence des strates précédentes, les courbes de groupes d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ peuvent être reconstruites via la méthode des coniques et quartiques de Mestre, exposée au chapitre 6.

Lemme 7.4.11 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{C}_4$ si et seulement si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{14}, \mathsf{j}_{15}$ satisfont un ensemble de 30 équations, de degré compris entre 3 et 56, dont

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^3 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + \mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^2 + 4\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^4 \\
&\quad + 3\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^5 + 4\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^7 + 5\mathsf{j}_4^5 + 2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^4 + 5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^6 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^8 + 5\mathsf{j}_2^{10} , \\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^2 + 4\mathsf{j}_6^2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_4^3 + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_2^6 , \\
0 &= \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_4^2 + 5\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 5\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 5\mathsf{j}_6^3 + 6\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3 + \mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + 6\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^6 + 2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^3 + 6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^5 + 3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^7 + 4\mathsf{j}_2^9 , \\
0 &= \mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 5\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_6^2 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^3 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^3 + 5\mathsf{j}_8\mathsf{j}_2^4 + 5\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4 + 4\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2^2 + 3\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^5 + 4\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^6 + 5\mathsf{j}_2^8 , \\
0 &= \mathsf{j}_{14}\mathsf{j}_4^4 + 6\mathsf{j}_{10}^2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4 + 5\mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_{10}\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6^2 + 3\mathsf{j}_8^3\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_8^3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + 4\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2 + 4\mathsf{j}_8^2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_2^2 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^4 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^2 \\
&\quad + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^4 + 2\mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^6 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_6\mathsf{j}_2^8 + 3\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^5\mathsf{j}_2 + 5\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^5 + 4\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^7 + 6\mathsf{j}_8\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^9 + 2\mathsf{j}_6^4\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_4^3 + \mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^2 + 3\mathsf{j}_6^3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^4 + 6\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2 + 6\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^3 \\
&\quad + 3\mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^5 + \mathsf{j}_6^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^7 + 6\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^6 + 6\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^5\mathsf{j}_2^2 + 4\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2^4 + 5\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^6 + 4\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^8 + 5\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^{10} + 4\mathsf{j}_4^7\mathsf{j}_2 + \mathsf{j}_4^5\mathsf{j}_2^5 + 5\mathsf{j}_4^4\mathsf{j}_2^7 + 4\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_2^9 + \mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2^{11} + 6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^{13} , \\
0 &= \ldots \\
0 &= \mathsf{j}_{15} = \mathsf{j}_{13} = \mathsf{j}_{11} = \mathsf{j}_9 = \mathsf{j}_7 = \mathsf{j}_5 = \mathsf{j}_3 .
\end{aligned} \tag{7.23}$$

En outre, au moins un des trois déterminants

$$\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7), \quad \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}''_9), \quad \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}'_8, \mathsf{q}''_{11}) \tag{7.24}$$

est non nul pour une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ et si la conique correspondante a un k-point rationnel, alors C est K-isomorphe à une courbe définie sur k, obtenue via la méthode de Mestre (cf. proposition 8.2.5 et section 8.3.3).

Remarque 7.4.12 Les covariants quadratiques q_i sont ceux introduits à la section 4.3.3.

Pour vérifier qu'au moins un des trois déterminants proposés en (7.24) est non nul pour une courbe de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$, on résout en a et b le système obtenu en spécialisant ces déterminants en le modèle normalisé $x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$ (cf. table 7.5). Les solutions, définies potentiellement dans une k-extension, se répartissent en un nombre fini de composantes irréductibles qui correspondent toutes à des courbes de groupe d'automorphismes plus gros que $\mathbf{C}_4$ (cf. table 7.6).

$f = x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$		singulier	$\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \supset$
$a=0$	$b=0$	oui	$\mathbf{G}_{672}$
$a=1$	$b=1$	non	$\mathbf{G}_{672}$
tout a	$b=1$	non (si $a \neq 2,5$)	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$
$a=0$	$b=6$	non	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$
$b^2+4ba+b+a^3=0$		-	$\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_4$

TABLE 7.6 – Modèles $y^2 = x(x^2-1)(x^4+ax^2+b)$ qui annulent les trois déterminants (7.24).

7.4.4 Strate de dimension 3

La strate de dimension 3 correspond aux courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$.

Strate $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \simeq \mathbf{D}_2$

Lemme 7.4.13 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Le groupe d'automorphismes de C contient $\mathbf{D}_2$ si et seulement si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{14}, \mathsf{j}_{15}$ satisfont un ensemble de 127 équations, de degré compris entre 11 et 41, dont

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_2^4\mathsf{j}_3 + 4\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^3 + 5\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_5 + 3\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + 5\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + 4\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_7 + 3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_8 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_9\,, \\
0 &= \mathsf{j}_2^5\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3^3 + 5\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_4 + 3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4^2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_5 + 3\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 \\
&\quad + 4\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_7 + 4\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_7 + 3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 6\mathsf{j}_6\mathsf{j}_7 + 4\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_9 + 5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_9 + 4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_10 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_{11}\,, \\
0 &= \mathsf{j}_2^7 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^4 + 3\mathsf{j}_2^5\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_4 + 6\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_4^2 + 5\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4^3 + 5\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 3\mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_5 + 6\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_2^4\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_6 \\
&\quad + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_5\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6^2 + 6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4\mathsf{j}_7 + 3\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5\mathsf{j}_7 + \mathsf{j}_7^2 + 4\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_8 + 2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_8 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathsf{j}_8 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_9 + 6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_9 + 4\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_{10} + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_{11}\,, \\
0 &= \ldots
\end{aligned} \tag{7.25}$$

En outre, une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ est K-isomorphe à la courbe

$$y^2 = a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0,$$

où, après avoir défini

- $\mathfrak{i}_1 = a_4$ comme la solution de l'équation linéaire

$$\begin{aligned} 0 = (\mathfrak{j}_2^6 + 5\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4^2 + 3\mathfrak{j}_4^3 + 6\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5^2 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 3\mathfrak{j}_6^2 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 4\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8 \\ + 3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_9 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{10})X + 3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5 + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5^2 + 5\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 \\ + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_7 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 3\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_8 + 5\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_9 + 5\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10} + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{11} \end{aligned} \tag{7.26}$$

  si cette dernière est non triviale,

$$\begin{aligned} 0 = (3\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_4^3 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5^2 + 3\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{j}_6^2 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + 4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8 + 5\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 \\ + 5\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_9 + 3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{10})X + 3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 6\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5 \\ + 6\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5^2 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_7 + 3\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 5\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_8 + 3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_9 + 5\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9 + 3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10} \end{aligned} \tag{7.27}$$

  si cette dernière est non triviale,

$$\begin{aligned} 0 = (\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3^2 + 4\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_4^3 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 5\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5^2 + 4\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 \\ + 6\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8 + 5\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_9)X + 4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 6\mathfrak{j}_3^3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 6\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5^2 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 \\ + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_7 + 3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9 + \mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10} + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{11} \end{aligned} \tag{7.28}$$

  si cette dernière est non triviale,

$$\begin{aligned} 0 = (\mathfrak{j}_3^4 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{j}_4^3 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5^2 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_6 + 3\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_6^2 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8 \\ + 2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 + 5\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_9 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{10})X + 4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 3\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + 3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 + 3\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5 + 5\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5^2 + 4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 6\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 \\ + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + 4\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_7 + 4\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7 + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 + 6\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_7 + 3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_8 + 6\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_9 + 6\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9 + 3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10} + 5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_{11} \end{aligned} \tag{7.29}$$

  sinon ;

- $\mathfrak{k}_2 = a_2a_6 = 5\mathfrak{j}_2 + 4\mathfrak{i}_1^2$;
- $\mathfrak{i}_2 = a_0a_8$ comme la solution de l'équation linéaire

$$(\mathfrak{i}_1^4 + 3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2)X + 3\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2 + 3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2 + 6\mathfrak{j}_2^3 + 3\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 + 6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_5 \ ; \tag{7.30}$$

- $\mathfrak{j}_3 = a_0a_6^2 + a_2^2a_8$ comme la solution de l'équation linéaire

$$\left| \begin{array}{ll} \mathfrak{i}_1^4X + 4\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^3 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + 5\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 5\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5 + 4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 & \text{si } \mathfrak{i}_1 \neq 0, \\ \mathfrak{j}_2^2X + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3 + 6\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + 4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5 & \text{si } \mathfrak{j}_2 \neq 0 \ ; \end{array} \right. \tag{7.31}$$

si $\mathfrak{k}_2 = 0$ **:** $a_2 = 0, a_6 = 1, a_4 = \mathfrak{i}_1, a_0 = \mathfrak{j}_3$ et $a_8 = \mathfrak{i}_2/\mathfrak{j}_3$;

si $\mathfrak{i}_2 = 0$ **:** $a_0 = 0, a_2 = 1, a_4 = \mathfrak{i}_1, a_6 = \mathfrak{k}_2$ et $a_8 = \mathfrak{j}_3$;

sinon : $a_2 = 1, a_0 = 4(\mathfrak{j}_3 + t)/\mathfrak{k}_2^2, a_4 = \mathfrak{i}_1, a_6 = \mathfrak{k}_2/a_2$ et $a_8 = \mathfrak{i}_2/a_0$, où t est n'importe quelle racine de $X^2 - (\mathfrak{j}_3^2 + 3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2)$.

Remarque 7.4.14 Il peut arriver qu'une courbe C trivialisent les quatre équations (7.26), (7.27), (7.28) et (7.29), de telle manière qu'on ne puisse pas déterminer $\mathfrak{i}_1$ a priori. Toutefois, suivant la démarche présentée à la remarque 7.4.12, cela advient seulement lorsque l'on se trouve

dans les cas spécifiques décrits par la table 7.7, *i.e.* pour lesquels le groupe d'automorphismes est plus gros ou la courbe singulière.

De la même façon, les équations (7.30) ou (7.31) peuvent être triviales. Or l'annulation de $\mathfrak{i}_1^4 + 3\mathfrak{k}_2 j_2$ pour l'équation (7.30) ou de $\mathfrak{i}_1$ et j_2 pour l'équation (7.31) respectivement implique celle de l'invariant $\mathfrak{J}_6$. Ainsi, le cas échéant, la courbe C peut être reconstruite grâce à la proposition 5.3.8, voire a un groupe d'automorphismes plus gros, auquel cas un des lemmes précédent s'applique.

$f = a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$	singulier	$\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) \supset$
$a_8 = 0$ ou $a_0 = 0$	oui	-
$a_6 = a_4 = a_2$	non	$\mathbf{G}_{672}$
$a_8a_2^2 + 6a_0a_6^2 = 0$	-	$\mathbf{C}_2^3$
$\left.\begin{array}{r} a_8a_2^2 + a_0a_6^2 + 4a_4^3 = 0 \\ a_8a_2a_4^2 + 4a_0a_6^3 + 2a_6a_4^3 = 0 \\ a_8a_4^4 + 2a_0a_6^4 + a_6^2a_4^3 = 0 \\ a_6a_2 + 5a_4^2 = 0 \end{array}\right\}$	-	$\mathbf{D}_6$

TABLE 7.7 – Reconstruction pour les courbes C qui trivialisent les équations (7.26), (7.27), (7.28) et (7.29).

7.4.5 Strate générique

Pour les courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2$, on peut *a priori* utiliser la méthode de Mestre, exposée au chapitre 6. Cela nécessite toutefois de fournir suffisamment de covariants d'ordre quadratique, introduits à la section 4.3.3, de telle sorte qu'une telle courbe n'annule pas tous les déterminants de coniques $\mathsf{R}(\mathsf{q}_a, \mathsf{q}_b, \mathsf{q}_c)$ définis à partir de ces covariants. Contrairement à la caractéristique 3, à la vue de nos calculs, cela semble impossible en caractéristique 7 ; on pallie alors à ce défaut en traitant à part les courbes pour lesquelles l'invariant $\mathfrak{J}_6 = \mathsf{J}_2^3 + 5\mathsf{J}_3^2$ est nul.

Lemme 7.4.15 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k et $(\mathsf{j}_2 : \ldots : \mathsf{j}_{14} : \mathsf{j}_{15})$ ses SL_2-invariants. Si $\mathsf{j}_2, \ldots, \mathsf{j}_{14}, \mathsf{j}_{15}$ ne satisfont pas les équations (7.25) et (7.23), alors le groupe d'automorphismes de C est $\mathbf{C}_2$. En outre, soit au moins un des 27 déterminants

$$\begin{array}{lllll}
\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_8'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_9'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7, \mathsf{q}_7'), \\
\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_9'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_9''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9', \mathsf{q}_9''), \\
\mathsf{R}(\mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_{11}''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{12}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_7, \mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8), \\
\mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8, \mathsf{q}_8'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8, \mathsf{q}_9), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_9, \mathsf{q}_9''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_8, \mathsf{q}_{11}''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{10}), \\
\mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{10}'), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{11}''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_7', \mathsf{q}_{10}, \mathsf{q}_{11}''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_8, \mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{11}''), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{11}', \mathsf{q}_{11}''), \\
\mathsf{R}(\mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{11}'', \mathsf{q}_{12}), & \mathsf{R}(\mathsf{q}_9'', \mathsf{q}_{11}'', \mathsf{q}_{12}'') & & &
\end{array}$$

est non nul pour une courbe C de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2$, soit $\mathsf{j}_2^3 + 5\mathsf{j}_3^2 = 0$, *i.e.* l'invariant $\mathfrak{J}_6$ est nul. Dans le premier cas, si la conique correspondante a un k-point rationnel, alors C est K-isomorphe à une courbe définie sur k, obtenue via la méthode de Mestre (cf. aussi proposition 8.2.5 et section 8.3.5). Dans le second cas, on reconstruit un modèle grâce à la proposition 5.3.8.

Démonstration. Les équations (7.25) et (7.23) sont respectivement les équations des strates de courbes de groupes d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{C}_4$, qui sont les sous-strates maximales de la strate générique (cf. figure 7.3). Concernant l'alternative entre l'annulation des 27 déterminants R et celle de $\mathfrak{I}_6$, il suffit d'établir l'inclusion suivante d'idéaux dans l'anneau $\mathsf{k}[\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15}]/\langle \mathfrak{Rel} \rangle$:

$$\langle \text{Eq. strate } \mathbf{D}_2 \rangle \times \langle \mathfrak{I}_6 \rangle \subset \left\langle \mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7), \ldots, \mathsf{R}(\mathsf{q}''_9, \mathsf{q}''_{11}, \mathsf{q}''_{12}) \right\rangle ,$$

ce qui est aisé via un calcul de base de Gröbner pour l'ordre grevlex $\mathsf{J}_2 < \cdots < \mathsf{J}_{14} < \mathsf{J}_{15}$ avec les poids $2, \ldots, 14, 15$. *QED*

Exemple 7.4.16 Donnons des exemples de courbes ayant pour groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2$ et annulant plusieurs des 27 déterminants du lemme 7.4.15.

- La courbe $\mathsf{C} : y^2 = x^8 + 5x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 1$ définie sur $\mathbb{F}_7$ a ses SL_2-invariants dans la classe $(4 : 0 : 1 : 2 : 0 : 4 : 5 : 3 : 0 : 1 : 6 : 5 : 4)$ qui annule 16 des 27 déterminants.
- La courbe $\mathsf{C} : y^2 = x^8 + x^6 + 3x^5 + 2x^3 + 2x^2 + x$ définie sur $\mathbb{F}_7$ a ses SL_2-invariants dans la classe $(2 : 2 : 5 : 5 : 6 : 0 : 6 : 0 : 1 : 5 : 4 : 3 : 3)$ qui annule les 27 déterminants, ainsi que l'invariant $\mathfrak{I}_6$.

Chapitre 8

Corps de définition et corps de modules

Au chapitre précédent, nous avons vu comment reconstruire une courbe hyperelliptique C de genre 3 en caractéristique 3 ou 7 à partir de ses SL_2-invariants (cf. algorithmes 3 et 4). Toutefois, dans certains cas, cette reconstruction n'est pas optimale, au sens où pour des SL_2-invariants définis sur k, le modèle hyperelliptique obtenu pour la courbe C est défini sur une extension de k. Précisément, pour les courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$, $\mathbf{C}_4$, $\mathbf{D}_2$ ou $\mathbf{C}_2$, la reconstruction peut avoir lieu sur une extension quadratique ou cubique du corps auquel les SL_2-invariants de la courbe appartiennent (cf. les lemmes 7.3.7, 7.3.9, 7.3.11, 7.3.13, 7.4.9, 7.4.11, 7.4.13 et 7.3.13).

On peut alors se demander s'il y a une obstruction théorique à ce que la courbe C soit (hyperelliptiquement) définie sur k et, s'il n'y en a pas, s'il est possible d'exhiber un modèle défini sur k pour C.

Plus généralement, on peut s'interroger sur l'existence éventuelle d'un corps de définition minimal pour la courbe C. D'ailleurs, le corps k contenant les SL_2-invariants de la courbe C, définis au sein d'un espace projectif pondéré, dépend du représentant de la classe choisi. Cependant, le représentant canonique obtenu via l'algorithme 1, décrit à la section 1.3, permet d'obtenir l'extension minimale du sous-corps premier F contenant les SL_2-invariants de C (cf. section 8.2.1). On peut alors à nouveau se demander s'il y a une obstruction théorique à ce que la courbe C soit (hyperelliptiquement) définie sur cette extension minimale et s'interroger sur la possibilité de quantifier cette obstruction.

Après un exposé plus précis des questions précédentes, nous apportons des réponses relatives à celles-ci pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7 au troisième paragraphe de ce chapitre, basées essentiellement sur les résultats de Mestre [Mes91], Huggins [Hug05, Hug07] et Lercier, Ritzenthaler et Sijsling [LR12, LRS13, LRS15].

8.1 Généralités

Soit C une courbe définie sur K et de genre $\mathsf{g} \geqslant 1$.

Définition 8.1.1 - corps de moduless, corps de définition.

Le *corps de modules* de C est le sous-corps de K fixé par l'ensemble $\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathsf{K}) \ / \ \mathsf{C} \simeq {}^{\sigma}\mathsf{C}\}$. On le note M_{C}.

Un *corps de définition* de C est un corps k pour lequel il existe une courbe C' définie sur k et K-isomorphe à C. Le cas échéant, on dit que la courbe C' est un *modèle* de C sur k et un

isomorphisme géométrique entre C et C' est appelé un *isomorphisme de descente*.

Une question classique consiste à déterminer quel est le plus petit corps de définition d'une courbe C et en particulier si M_C en est un ou s'il y a une obstruction. Notons que si tous les sous-corps de K sont parfaits et si M_C est un corps de définition de C, alors il s'agit du plus petit possible, en vertu de la proposition suivante.

Proposition 8.1.2 - [Koi72, Prop. 2.3]. M_C est une extension purement inséparable de l'intersection de tous les corps de définition de C.

Concernant cette question relative au corps de modules d'une courbe, de nombreuses conditions suffisantes sont données dans la littérature. Nous en donnons un aperçu dans la proposition qui suit.

Proposition 8.1.3 M_C est un corps de définition de la courbe C de genre g lorsque

(i) $\mathsf{g} = 0$;

(ii) $\mathsf{g} = 1$ [Sil09, preuve de la Prop. 1.4.(c) p. 47] ;

(iii) $\mathsf{g} \geqslant 2$ et $\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ est trivial [DE99, Cor. 4.3] ;

(iv) K est la clôture algébrique d'un corps fini [Hug07, Cor. 2.11].

Un autre critère extrêmement utile pour déterminer si le corps de modules M_C d'une courbe est un corps de définition (cf. théorème 8.1.4 ci-dessous) provient de la construction suivante, exposée dans [DE99].

Supposons l'extension $\mathsf{K}/\mathsf{M}_\mathsf{C}$ galoisienne, de groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathsf{K}/\mathsf{M}_\mathsf{C})$. Par définition du corps de modules, pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe un K-isomorphisme $F_\sigma : \mathsf{C} \longrightarrow {}^\sigma\mathsf{C}$. Or cet isomorphisme induit un isomorphisme $f_\sigma : \mathsf{B} \longrightarrow {}^\sigma\mathsf{C}/\mathrm{Aut}({}^\sigma\mathsf{C}) = {}^\sigma\mathsf{B}$ et le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C} \arrow[r] \arrow[d] & {}^\sigma\mathsf{C} \arrow[d] \\ \mathsf{B} \arrow[r] & {}^\sigma\mathsf{B} \end{tikzcd}$$

Les relations de cocycles de Weil impliquent alors que la courbe B admet un modèle B' sur M_C et l'existence d'un K-isomorphisme $\varphi : \mathsf{B} \longrightarrow \mathsf{B}'$ tels que, pour tout $\sigma \in \Gamma$, $f_\sigma = (\varphi^{-1})^\sigma \circ \varphi$.

Théorème 8.1.4 - [DE99, Cor. 4.3(c)], [Hug07, Cor. 2.12].
Si $\mathsf{B}'(\mathsf{M}_\mathsf{C}) \neq \emptyset$, alors M_C est un corps de définition de C.

Le résultat suivant, implicitement contenu dans [Cou94, §7], donne une condition suffisante pour la non vacuité de $\mathsf{B}'(\mathsf{M}_\mathsf{C})$.

Proposition 8.1.5 - [LR12, Prop. 4.3].
Soit $(e_1^{n_1}, \ldots, e_s^{n_s})$ la signature du revêtement $\mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C}/\mathrm{Aut}(\mathsf{C}) = \mathsf{B}$, où $e_1 < \cdots < e_s$ sont les indices de ramification et n_i leur multiplicité. Si B est une courbe de genre 0 et qu'au moins un des n_i est impair, alors le corps de modules est un corps de définition de C.

8.2 Le cas hyperelliptique

On suppose dorénavant que la caractéristique de K est distincte de 2. On considère $\mathsf{g} \geqslant 2$ un entier, $\mathsf{n} = 2\mathsf{g} + 2$, $\mathsf{f} \in \mathsf{K}[x]$ un polynôme séparable de degré n et C la courbe hyperelliptique de genre g définie par l'équation $y^2 = \mathsf{f}(x)$. Par la suite, on supposera que l'extension $\mathsf{K}/\mathsf{M}_\mathsf{C}$ est galoisienne et k désignera un corps intermédiaire de cette extension.

La question de savoir si le corps de modules M_C est un corps de définition de C fut initialement posée par Mestre dans [Mes91], sous la condition que le genre g soit pair. Dans ce cas, il a établi [Mes91, p. 322] que C admet un modèle hyperelliptique sur k lorsque C est définie sur k. Cependant cela n'est pas vrai en général et il faut ainsi distinguer deux questions : le corps de modules est-il un corps de définition de la courbe ? Le cas échéant, le modèle sur le corps de modules admet-il une équation hyperelliptique ? Cela motive la terminologie suivante :

Définition 8.2.1 Une courbe hyperelliptique C/K est dite *hyperelliptiquement définie* sur k lorsqu'il existe un modèle de C défini sur k donné par une équation hyperelliptique.

À nouveau de nombreuses conditions suffisantes sont données dans la littérature.

Proposition 8.2.2 C est hyperelliptiquement définie sur M_C dans les cas suivants :

(i) K est la clôture algébrique d'un corps fini [Hug07, Cor. 2.11] ;

(ii) $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$ n'est pas cyclique [Hug07] ;

(iii) $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$ est cyclique d'ordre un multiple de $\mathsf{p} = \operatorname{car} \mathsf{K}$ [Hug07, Th. 5.4] ;

(iv) $\mathsf{g} = 2$ et $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$ est non trivial [CQ05] ;

(v) $\mathsf{g} = 3$, $\mathsf{p} = 0$ ou $\mathsf{p} \geqslant 11$, $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$ est non trivial et $\mathrm{Aut}(\mathsf{C})$ est distinct de $\mathbf{D}_2$ [LR12, §4].

8.2.1 Corps de modules *versus* invariants

Comme nous allons le voir dans ce qui suit, le corps de modules de la courbe hyperelliptique C est intimement lié aux valeurs prises par certaines familles de SL_2-invariants de la forme binaire f définissant C. Ainsi ces invariants fournissent *a priori* une voie intéressante pour la descente d'une courbe.

Lemme 8.2.3 - [LRS13, Lem. 3.2]. Soit I_1 et I_2 deux invariants homogènes de même degré pour les formes binaires de degré n. Si I_1 et I_2 sont définis sur F et $\mathsf{I}_2(\mathsf{f}) \neq 0$, alors $\mathsf{I}_1(\mathsf{f})/\mathsf{I}_2(\mathsf{f}) \in \mathsf{M}_\mathsf{C}$.

Comme on l'a déjà remarqué, dans la mesure où $\mathsf{I}_2(\mathsf{f})$ est susceptible de s'annuler, il est préférable de travailler au sein d'un espace projectif pondéré. On a vu à la section 1.3 comment associer à chaque élément d'un tel espace un représentant canonique. Précisément, pour le cas qui nous intéresse, si $(\mathsf{I}_1 : \ldots : \mathsf{I}_m)$ est un m-uplet d'invariants homogènes de degrés d_i définis sur F pour une forme binaire de degré n, on considère d le pgcd des degrés d_i pour lesquels $\mathsf{I}_i(\mathsf{f}) \neq 0$ et des entiers c_i tels que $\sum c_i \mathsf{d}_i = \mathsf{d}$ (avec la convention $c_i = 0$ lorsque $\mathsf{I}_i(\mathsf{f}) = 0$), qui définissent $\mathsf{I} = \prod \mathsf{I}_i^{c_i}$, invariant homogène de degré d. Alors le représentant canonique de $(\mathsf{I}_1(\mathsf{f}) : \ldots : \mathsf{I}_m(\mathsf{f}))$ est

$$(\mathfrak{I}_1(\mathsf{f}), \ldots, \mathfrak{I}_m(\mathsf{f})) = \left(\frac{\mathsf{I}_1(\mathsf{f})}{\mathsf{I}(\mathsf{f})^{d_1/d}} : \ldots : \frac{\mathsf{I}_m(\mathsf{f})}{\mathsf{I}(\mathsf{f})^{d_1/d}} \right),$$

et ce représentant particulier est défini sur $\mathsf{M_C}$, vu le lemme précédent.

On aboutit *in fine*, avec les notations précédentes, à la proposition suivante.

Proposition 8.2.4 - [LRS13, Preuve prop. 3.3]. Soit $(\mathsf{I}_1, \ldots, \mathsf{I}_m)$ une famille de SL_2-invariants séparants pour les formes binaires de degré n de discriminant non nul définis sur F. Alors

$$\mathsf{M_C} = \mathsf{F}(\mathfrak{I}_1(\mathsf{f}), \ldots, \mathfrak{I}_m(\mathsf{f})).$$

Ainsi, nos deux familles de SL_2-invariants séparants $(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{10}, \mathsf{J}_{12})$, introduite à la section 4.2, et $(\mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{13}, \mathsf{J}_{14}, \mathsf{J}_{15})$, introduite à la section 4.3, pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7 respectivement, définies sur $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_7$ respectivement, permettent de déterminer aisément le corps de modules d'une telle courbe donnée par une équation hyperelliptique.

En outre, la proposition 8.2.4 permet d'énoncer une version raffinée de la proposition 6.2.1 concernant la méthode de reconstruction de Mestre. En effet, la conique $\mathcal{Q}$ et la courbe plane $\mathcal{H}$ de degré $\mathsf{n}/2$ introduites à la section 6.2 ont pour coefficients des invariants, *i.e.* des éléments de l'algèbre $\mathcal{I}_\mathsf{n}$, définis sur le corps premier F, d'où le nouvel énoncé suivant.

Proposition 8.2.5 - Mestre. Soit $(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)$ trois covariants d'ordre 2 d'une forme binaire f de degré pair n définie sur F. Si $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3) \neq 0$, il existe alors une conique lisse $\mathcal{Q}$ et une courbe plane $\mathcal{H}$ de degré $\mathsf{n}/2$ définies sur $\mathsf{M_C}$ telles qu'il existe un K-isomorphisme $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ envoyant les points de $\mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$ sur les racines de f. En particulier $\mathsf{M_C}$ est un corps de définition dès que $\mathcal{Q}$ a un $\mathsf{M_C}$-point rationnel et, le cas échéant, C peut être définie hyperelliptiquement sur $\mathsf{M_C}$.

8.3 Courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristiques 3 et 7

Nous nous concentrons maintenant plus spécifiquement sur les deux cas qui nous intéressent, à savoir celui des courbes hyperelliptiques de genre 3 définies sur des corps de caractéristiques 3 et 7. Les résultats qui suivent proviennent essentiellement des travaux récents de Lercier, Ritzenthaler et Sijsling, exposés dans [LR12, LRS13, LRS15].

Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur un corps de caractéristique 3 ou 7. L'ensemble des résultats exposés par la suite permettront de répondre, au moins partiellement, aux questions suivantes concernant la courbe C.

Question I. Peut-on déterminer le groupe d'automorphismes de C à partir de ses SL_2-invariants ?

Question II. Le corps de modules est-il automatiquement un corps de définition ?

Question III. La courbe peut-elle être toujours définie hyperelliptiquement sur son corps de modules ?

Question IV. Peut-on reconstruire hyperelliptiquement la courbe à partir de ses SL_2-invariants ?

Question V. Peut-on reconstruire un modèle sur le corps de modules lorsqu'il n'y a pas d'obstruction ?

Question VI. Peut-on reconstruire un modèle hyperelliptique sur le corps de modules lorsqu'il n'y a pas d'obstruction ?

#	Dim. 0	Dim. 1	$\mathbf{C}_2^3$	$\mathbf{C}_4$	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{C}_2$
I	oui	oui	oui	oui	oui	oui
II	oui	oui	oui	oui	non	oui
III	oui	oui	oui	oui	calculable*	calculable*
IV	oui	oui	oui	oui	oui	oui
V	oui	oui	oui	oui	oui*	oui*
VI	oui	oui	oui	oui	oui*	oui*
VII (car. 3)	1	$q-2$	$q^2-2q+2^\dagger$	$q^2-2q+2^\dagger$	$q^3-2q^2+q^\dagger$	$q^5-q^3+q-2^\dagger$
VII (car. 7)	1	$q-2$	$q^2-2q+2^\dagger$	$q^2-2q+2^\dagger$	$q^3-2q^2+2^\dagger$	$q^5-q^3+q-1^\dagger$

TABLE 8.1 – Synthèse des résultats pour l'espace de modules H_3 en caractéristiques 3 et 7.

Question VII. Quel est le nombre de classes d'isomorphisme (géométrique) de courbes hyperelliptiques de genre 3 de groupe d'automorphismes donné sur $\mathbb{F}_q$ en caractéristiques 3 et 7 respectivement ?

Avant d'entrer dans les détails, nous synthétisons les réponses à ces questions dans la table 8.1.

Remarque 8.3.1 Le cas des courbes de genre 2 a été entièrement traité dans [CQ05, LR08], et dans [CNP05] pour $p = 2$. En particulier, si le groupe d'automorphismes réduit de la courbe C est non trivial, le corps de modules M_C est toujours un corps de définition et C peut être définie hyperelliptiquement sur M_C. Pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique $p = 0$ ou $p \geqslant 11$, on se reportera à [LR12, Tab. 5 p. 631].

8.3.1 Strates de dimension 0 ou 1

Les cas de dimension 0 (cas 7 et 8 de la table 7.2 et cas 8 de la table 7.5) sont triviaux, dans la mesure où les modèles sont directement définis sur les sous-corps premiers respectifs $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_7$.

Pour les courbes des strates de dimension 1 (cas 5 et 6 de la table 7.2 et cas 5, 6 et 7 de la table 7.5), il n'y a pas non plus de difficulté. Ces courbes sont hyperelliptiquement définies sur leur corps de modules (point (ii) de la proposition 8.2.2) et on dispose d'équations hyperelliptiques explicites sur ce dernier (cf. les lemmes 7.3.3, 7.3.5, 7.4.3, 7.4.5 et 7.4.7).

8.3.2 Strate $\mathbf{C}_2^3$

Toujours en vertu du point (ii) de la proposition 8.2.2, les courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$ sont hyperelliptiquement définies sur leur corps de modules. D'après les lemmes 7.3.7 et 7.4.9, nous sommes en mesure de reconstruire hyperelliptiquement de telles courbes, en caractéristiques 3 et 7 respectivement, sur une extension au plus cubique de leur corps de modules. La reconstruction ainsi proposée n'est donc pas optimale.

*. Sauf éventuellement en caractéristique 7 pour les courbes annulant l'invariant $\mathfrak{I}_6$.
†. Conjecturés.

Afin de reconstruire hyperelliptiquement ces courbes sur leur corps de modules, nous suivons la stratégie développée par Lercier, Ritzenthaler et Sijsling dans [LRS13]. L'idée à la base de cette méthode est donnée par la proposition suivante.

Proposition 8.3.2 - [LRS13, Prop. 2.5]. Pour deux formes binaires f_1 et f_2 de degré pair n définie sur k et un covariant q d'ordre r pour les formes binaires de degré n défini sur F, on a

$$\mathrm{Isom}(\mathsf{f}_1, \mathsf{f}_2) \subset \mathrm{Isom}(\mathsf{q}(\mathsf{f}_1), \mathsf{q}(\mathsf{f}_2)).$$

De ce résultat découle notamment le théorème suivant.

Théorème 8.3.3 - [LRS13, Th. 3.8].
Soit f une forme binaire de degré pair n. S'il existe un covariant q d'ordre $\mathsf{r} \geqslant 4$ tel que $\mathsf{q}(\mathsf{f})$ est un polynôme hyperelliptique, alors $\mathsf{M}_{\mathsf{C}_{\mathsf{q}(\mathsf{f})}} \subset \mathsf{M}_{\mathsf{C}_\mathsf{f}}$, où $\mathsf{C}_{\mathsf{q}(\mathsf{f})}$ est la courbe d'équation $y^2 = \mathsf{q}(\mathsf{f})$ associée $\mathsf{q}(\mathsf{f})$.

En outre, si $\mathsf{C}_{\mathsf{q}(\mathsf{f})}$ est hyperelliptiquement définie sur $\mathsf{M}_{\mathsf{C}_{\mathsf{q}(\mathsf{f})}}$, alors C_f est hyperelliptiquement définie sur une extension de $\mathsf{M}_{\mathsf{C}_\mathsf{f}}$ de degré au plus $[\mathrm{Aut}(\mathsf{q}(\mathsf{f})) : \mathrm{Aut}(\mathsf{f})]$.

Pour le cas qui nous intéresse, d'un point de vue théorique, le théorème précédent est inutile, du fait du point (ii) de la proposition 8.2.2. Néanmoins, ce théorème peut être employé de façon effective, selon la démarche suivante :

- déterminer un covariant q vérifiant les hypothèses du théorème précédent ;
- expliciter un isomorphisme de descente entre $\mathsf{q}(\mathsf{f})$ et le covariant $\mathfrak{c}$ défini sur $\mathsf{M}_{\mathsf{C}_{\mathsf{q}(\mathsf{f})}}$;
- d'après la proposition 8.3.2, cet isomorphisme de descente fournit un isomorphisme de descente de f sur $\mathfrak{f}$, définie sur une extension de degré au plus $[\mathrm{Aut}(\mathsf{q}(\mathsf{f})) : \mathrm{Aut}(\mathsf{f})]$ de $\mathsf{M}_{\mathsf{C}_\mathsf{f}}$.

L'intérêt de cette méthode provient du fait qu'il est naturellement plus aisé de déterminer un isomorphisme de descente entre $\mathsf{q}(\mathsf{f})$ et $\mathfrak{c}$ qu'entre f et $\mathfrak{f}$, dès que l'ordre r de q est inférieur au degré n de f. À ce sujet, pour de plus amples détails concernant l'obtention de tels isomorphismes, on renvoie à l'article original [LRS13, Sec. 2], notamment la proposition 2.7. Notons que dans les deux cas que nous considérerons par la suite, nous aurons toujours $\mathsf{r} = 4$.

En pratique, pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$ en caractéristique 3 ou 7, afin d'améliorer la reconstruction proposée aux lemmes 7.3.7 et 7.4.9 respectivement, on souhaite disposer pour une octique binaire f de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ (groupe d'automorphismes réduit lié à $\mathbf{C}_2^3$) de covariants q d'ordres $\mathsf{r} \geqslant 4$ minimaux tels que $\mathsf{C}_{\mathsf{q}(\mathsf{f})}$ soit hyperelliptiquement définie sur $\mathsf{M}_{\mathsf{C}_{\mathsf{q}(\mathsf{f})}}$ et $\mathrm{Aut}(\mathsf{q}(\mathsf{f})) = \mathrm{Aut}(\mathsf{f}) = \mathbf{D}_2$. Nous examinons cela plus en détails au deux paragraphes suivants.

Cas des corps de caractéristique 3

Vu les résultats de la section 2.10.2 sur les quartiques binaires en caractéristique 3, ces dernières sont toujours définies sur leur corps de modules et leur groupe d'automorphismes est $\mathbf{D}_2$ dès que l'invariant I est non nul, ce qui suggère l'utilisation de covariants d'ordre 4 pour notre propos.

Considérons les trois covariants d'ordre 4 et de degrés respectifs 2, 3 et 4 suivants :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{q}_2 = {} & (a_5^2 + 2a_2a_8)x^4 + (2a_4a_5 + 2a_2a_7 + 2a_1a_8)x^3 + (a_4^2 + 2a_3a_5 + 2a_2a_6 + 2a_1a_7 + 2a_0a_8)x^2 \\
& + (2a_3a_4 + 2a_1a_6 + 2a_0a_7)x + a_3^2 + 2a_0a_6, \\
\mathsf{q}_3 = {} & (2a_4^2a_6 + a_3a_5a_6 + a_2a_6^2 + a_3a_4a_7 + a_2a_5a_7 + 2a_1a_6a_7 + a_0a_7^2 + 2a_3^2a_8 + a_2a_4a_8 + a_1a_5a_8 + 2a_0a_6a_8)x^4 \\
& + (2a_3a_4a_6 + 2a_2a_5a_6 + 2a_1a_6^2 + a_3^2a_7 + 2a_2a_4a_7 + 2a_1a_5a_7 + a_0a_6a_7 + 2a_2a_3a_8 + 2a_1a_4a_8 + 2a_0a_5a_8)x^3 \\
& + (2a_2a_4a_5 + a_1a_5^2 + 2a_2a_3a_6 + 2a_1a_4a_6 + 2a_0a_5a_6 + 2a_2^2a_7 + 2a_1a_3a_7 + 2a_0a_4a_7 + a_1a_2a_8 + 2a_0a_3a_8)x \\
& + 2a_2a_4^2 + a_2a_3a_5 + a_1a_4a_5 + 2a_0a_5^2 + a_2^2a_6 + a_1a_3a_6 + a_0a_4a_6 + 2a_1a_2a_7 + a_0a_3a_7 + a_1^2a_8 + 2a_0a_2a_8, \\
\mathsf{q}_4 = {} & (2a_4^2a_5^2 + a_3a_5^3 + a_4^3a_6 + 2a_2a_5^2a_6 + 2a_2a_4a_6^2 + a_1a_5a_6^2 + 2a_3a_4^2a_7 + 2a_3^2a_5a_7 + 2a_2a_4a_5a_7 + a_2a_3a_6a_7 \\
& \qquad + 2a_1a_4a_6a_7 + a_1a_3a_7^2 + a_3^2a_4a_8 + 2a_2a_3a_5a_8 + a_2^2a_6a_8 + 2a_1a_3a_6a_8 + a_1a_2a_7a_8 + a_1^2a_8^2)x^4 \\
& + (a_4^3a_5 + 2a_3a_4a_5^2 + a_3a_4^2a_6 + a_3^2a_5a_6 + 2a_2a_4a_5a_6 + 2a_1a_5^2a_6 + a_1a_4a_6^2 + 2a_0a_5a_6^2 + 2a_3^2a_4a_7 \\
& + 2a_2a_4^2a_7 + 2a_1a_4a_5a_7 + a_2^2a_6a_7 + 2a_1a_3a_6a_7 + a_0a_4a_6a_7 + a_1a_2a_7^2 + 2a_0a_3a_7^2 + 2a_3^3a_8 + 2a_2a_3a_4a_8 \\
& \qquad + 2a_1a_3a_5a_8 + a_1a_2a_6a_8 + a_0a_3a_6a_8 + 2a_0a_2a_7a_8 + a_0a_1a_8^2)x^3 \\
& + (2a_4^4 + 2a_3a_4^2a_5 + 2a_3^2a_5^2 + 2a_2a_3a_5a_6 + 2a_1a_4a_5a_6 + 2a_0a_5^2a_6 + a_2^2a_6^2 + 2a_2a_3a_4a_7 + 2a_1a_4^2a_7 + 2a_0a_4a_5a_7 \\
& + 2a_1a_2a_6a_7 + 2a_1^2a_7^2 + 2a_0a_2a_7^2 + 2a_2a_3^2a_8 + 2a_1a_3a_4a_8 + 2a_0a_3a_5a_8 + 2a_1^2a_6a_8 + 2a_0a_1a_7a_8 + a_0^2a_8^2)x^2 \\
& + (a_3a_4^3 + 2a_3^2a_4a_5 + a_2a_4^2a_5 + a_2a_3a_5^2 + 2a_1a_4a_5^2 + 2a_0a_5^3 + 2a_2a_3a_4a_6 + 2a_1a_4^2a_6 + 2a_0a_4a_5a_6 \\
& + a_1a_2a_6^2 + 2a_2a_3^2a_7 + a_2^2a_4a_7 + 2a_1a_3a_4a_7 + 2a_1a_2a_5a_7 + 2a_0a_3a_5a_7 + a_1^2a_6a_7 + a_0a_2a_6a_7 + 2a_2^2a_3a_8 \\
& \qquad + a_1a_2a_4a_8 + 2a_1^2a_5a_8 + a_0a_2a_5a_8 + 2a_0a_1a_6a_8 + a_0^2a_7a_8)x \\
& + 2a_3^2a_4^2 + a_2a_4^3 + a_3^3a_5 + 2a_1a_4^2a_5 + 2a_1a_3a_5^2 + a_0a_4a_5^2 + 2a_2a_3^2a_6 + 2a_2^2a_4a_6 + 2a_1a_3a_4a_6 \\
& + a_1a_2a_5a_6 + 2a_0a_3a_5a_6 + a_0a_2a_6^2 + a_2^2a_3a_7 + 2a_1a_2a_4a_7 + a_1^2a_5a_7 + 2a_0a_2a_5a_7 + a_0a_1a_6a_7 + a_0^2a_7^2,
\end{aligned}
$$

associés à l'octique binaire $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. De simples vérifications formelles montrent que ces trois covariants vérifient la proposition suivante.

Proposition 8.3.4 Soit $\mathsf{C_f}$ une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur un corps de caractéristique 3 telle que $\mathbf{C}_2^3 \subset \mathrm{Aut}(\mathsf{C_f})$. Si f annule le discriminant (respectivement l'invariant I) des trois covariants quartiques $\mathsf{q}_2(\mathsf{f}), \mathsf{q}_3(\mathsf{f})$ et $\mathsf{q}_4(\mathsf{f})$, alors $\mathrm{Aut}(\mathsf{C_f})$ contient $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$.

Ainsi, pour toute courbe hyperelliptique $\mathsf{C_f} : y^2 = \mathsf{f}(x)$ de genre 3 définie sur un corps de caractéristique 3 et de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$, il existe un covariant quartique q parmi $\mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3, \mathsf{q}_4$ tel que $\mathsf{q}(\mathsf{f})$ soit de discriminant non nul et $\mathsf{I}(\mathsf{q}(\mathsf{f})) \neq 0$. Pour un tel covariant, les hypothèses du théorème 8.3.3 sont vérifiées et on a $\mathrm{Aut}(\mathsf{q}(\mathsf{f})) = \mathrm{Aut}(\mathsf{f}) \simeq \mathbf{D}_2$, ce qui permet, suivant la stratégie exposée au paragraphe précédent, de reconstruire hyperelliptiquement la courbe $\mathsf{C_f}$ sur son corps de modules.

Exemple 8.3.5 Soit $(0 : 1 : 1 : 1 : 0 : 1 : 2 : 2 : 1 : 0)$ un point de l'espace de modules H_3 défini sur $\mathbb{F}_3$. L'algorithme 3 montre que ce point correspond à une courbe de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$ et lemme de reconstruction 7.3.7 mène au modèle $y^2 = \mathsf{f}(x)$, où

$$\mathsf{f}(x) = u^5x^8 + u^{10}x^6 + ux^4 + x^2 + u^{11},$$

défini sur l'extension de degré 3 $\mathbb{F}_3(u) = \mathbb{F}_3[t]/(t^3 + t^2 + 2t + 1)$. Ce modèle n'est donc pas défini sur le corps de modules $\mathbb{F}_3$ de la courbe considérée. Pour obtenir un tel modèle, on met donc en œuvre la stratégie issue du théorème 8.3.3, à l'aide des trois covariants quadratiques définis précédemment. Parmi ces trois covariants, seul $\mathsf{q}_4(\mathsf{f}) = u^{24}x^4 + x^2z^2 + u^{14}z^4$ est tel que $\mathsf{I}(\mathsf{q}_4(\mathsf{f})) = 1 \neq 0$, *i.e.* $\mathrm{Aut}(\mathsf{q}_4(\mathsf{f})) \simeq \mathbf{D}_2$ (cf. le théorème 2.10.3 page 43). Ainsi, un isomorphisme de descente entre $\mathsf{q}_4(\mathsf{f})$ et la quartique équivalente $x^3z + x^2z^2 + 2z^4$ définie sur $\mathbb{F}_3$, reconstruite à partir des invariants $(\mathsf{I}(\mathsf{q}_4(\mathsf{f})) : \mathsf{J}(\mathsf{q}_4(\mathsf{f}))) = (1 : 1)$ (cf. la section 2.10.2), fournit un isomorphisme

de descente pour le modèle $y^2 = \mathsf{f}(x)$ sur le corps de modules $\mathbb{F}_3$. D'après [LRS13, Prop. 2.7], un tel isomorphisme est défini sur l'extension $\mathbb{F}_3(w) = \mathbb{F}_3(u)[t]/(t^2 + u^2 t + u^{21})$ (extension de $\mathbb{F}_3(u)$ dans laquelle $\mathsf{q}_4(\mathsf{f})$ a une racine) et est par exemple donné par

$$(x : z) \mapsto (x + w^{576} z : w^{701} x + w^{237} z).$$

Appliquée à f, cette transformation mène en effet au modèle défini sur $\mathbb{F}_3$

$$y^2 = x^7 + x^5 + 2x^3 + x + 1.$$

Cas des corps de caractéristique 7

Les résultats de la section 2.10.1 sur les quartiques binaires en caractéristique 7 étant analogues à ceux de la caractéristique 3, on utilise à nouveau des covariants d'ordre 4 pour notre propos.

Considérons les trois covariants d'ordre 4 et de degrés respectifs 1, 2 et 4 suivants

$$\begin{aligned}
\mathsf{q}_1 &= a_6x^4 + 3a_5x^3 + 6a_4x^2 + 3a_3x + a_2,\\
\mathsf{q}_2 &= (6a_5^2 + a_4a_6)x^4 + (2a_4a_5 + 5a_3a_6)x^3 + (4a_4^2 + 2a_3a_5 + a_2a_6)x^2 + (2a_3a_4 + 5a_2a_5)x + 6a_3^2 + a_2a_4,\\
\mathsf{q}_4 &= (3a_4^2a_5^2 + 3a_3a_5^3 + 6a_4^3a_6 + 3a_2a_5^2a_6 + 3a_1a_5a_6^2 + 3a_0a_6^3 + 3a_3^2a_5a_7 + 6a_2a_4a_5a_7 + 6a_1a_5^2a_7 + a_2a_3a_6a_7\\
&\qquad + a_1a_4a_6a_7 + 3a_3^2a_4a_8 + 6a_2a_4^2a_8 + a_2a_3a_5a_8 + a_0a_5^2a_8 + 6a_0a_4a_6a_8)x^4\\
&\quad + (3a_3a_4a_5^2 + 6a_2a_5^3 + 6a_3a_4^2a_6 + 6a_3^2a_5a_6 + a_2a_4a_5a_6 + 2a_1a_5^2a_6 + 2a_2a_3a_6^2 + 2a_0a_5a_6^2 + a_3^2a_4a_7 + 2a_2a_4^2a_7\\
&\qquad + 2a_1a_4a_5a_7 + 6a_2^2a_6a_7 + 5a_1a_3a_6a_7 + a_3^3a_8 + 2a_2a_3a_4a_8 + 6a_2^2a_5a_8 + 5a_0a_4a_5a_8 + 2a_0a_3a_6a_8)x^3\\
&\quad + (6a_3^2a_5^2 + a_2a_4a_5^2 + 3a_1a_5^3 + a_3^2a_4a_6 + a_2a_4^2a_6 + 6a_2a_3a_5a_6 + 3a_1a_4a_5a_6 + 5a_2^2a_6^2 + 5a_1a_3a_6^2\\
&\quad + 4a_0a_4a_6^2 + 3a_3^3a_7 + 3a_2a_3a_4a_7 + 4a_1a_4^2a_7 + 5a_2^2a_5a_7 + 2a_1a_3a_5a_7 + a_1a_2a_6a_7 + 4a_2^2a_4a_8 + 3a_0a_4^2a_8\\
&\qquad + 5a_0a_3a_5a_8 + 6a_0a_2a_6a_8)x^2\\
&\quad + (3a_3^2a_4a_5 + 6a_2a_4^2a_5 + 6a_2a_3a_5^2 + a_1a_4a_5^2 + a_0a_5^3 + 6a_3^3a_6 + a_2a_3a_4a_6 + 2a_1a_4^2a_6 + 2a_2^2a_5a_6 + 2a_0a_4a_5a_6\\
&\qquad + 6a_1a_2a_6^2 + 6a_0a_3a_6^2 + 2a_2a_3^2a_7 + 2a_1a_3a_4a_7 + 5a_1a_2a_5a_7 + 2a_2^2a_3a_8 + 5a_0a_3a_4a_8 + 2a_0a_2a_5a_8)x\\
&\quad + 3a_3^2a_4^2 + 6a_2a_4^3 + 3a_3^3a_5 + 3a_1a_3a_5^2 + 3a_0a_4a_5^2 + 3a_2a_3^2a_6 + 6a_1a_3a_4a_6 + 6a_0a_4^2a_6\\
&\quad + a_1a_2a_5a_6 + a_0a_3a_5a_6 + 3a_2^2a_3a_7 + 6a_1a_3^2a_7 + a_1a_2a_4a_7 + 3a_2^3a_8 + a_0a_3^2a_8 + 6a_0a_2a_4a_8,
\end{aligned}$$

associés à l'octique binaire $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. De simples vérifications formelles montrent que ces trois covariants vérifient la proposition suivante.

Proposition 8.3.6 Soit C_f une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur un corps de caractéristique 7 telle que $\mathbf{C}_2^3 \subset \mathrm{Aut}(\mathsf{C}_\mathsf{f})$. Si f annule le discriminant (respectivement les invariants I et J) des trois covariants quartiques $\mathsf{q}_1(\mathsf{f}), \mathsf{q}_2(\mathsf{f})$ et $\mathsf{q}_4(\mathsf{f})$, alors $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_\mathsf{f})$ contient $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{D}_4$.

On obtient donc la même conclusion qu'au paragraphe précédent, à savoir la garantie de pouvoir reconstruire hyperelliptiquement sur son corps de modules toute courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur un corps de caractéristique 7 et de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_2^3$.

8.3.3 Strate $\mathbf{C}_4$

D'après la proposition 8.1.5, puisque la strate $\mathbf{C}_4$ est de signature $(2^3, 4^2)$ (cf. les tables 7.1, 7.2 et 7.5), le corps de modules d'une courbe hyperelliptique de genre 3 de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ est un corps de définition.

En outre, d'après les lemmes 7.3.9 et 7.4.11 et la proposition 8.2.5, nous sommes en mesure de reconstruire hyperelliptiquement une telle courbe sur une extension au plus quadratique de son corps de modules.

Cependant, Lercier et Ritzenthaler ont montré, [LR12, Prop. 4.20], que toute courbe hyperelliptique de genre 3 et de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$ peut être définie hyperelliptiquement sur son corps de modules. En outre, la démonstration de ce résultat se traduit en une méthode effective. Nous nous contentons ici d'exposer cette méthode.

Vu le lemme 7.3.9, un des trois déterminants $\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7)$, $\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}'_9)$ ou $\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_8, \mathsf{q}'_{11})$ est non nul en caractéristique 3 et, selon le lemme 7.4.11, un des trois déterminants $\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}_7)$, $\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}_6, \mathsf{q}''_9)$ ou $\mathsf{R}(\mathsf{q}_5, \mathsf{q}'_8, \mathsf{q}''_{11})$ est non nul en caractéristique 7. Or, on a vu pour la strate $\mathbf{C}_4$ que les invariants homogènes de degré impair sont nuls (lemme 7.2.2), ainsi pour n'importe lequel de ces six cas, la conique et la quartique associées ont les formes suivantes :

$$\mathcal{Q} : \mathsf{A}_{1,1}x_1^2 + \mathsf{A}_{1,3}x_1x_3 + \mathsf{A}_{2,2}x_2^2 + \mathsf{A}_{3,3}x_3^2 = 0,$$

$$\mathcal{H} : x_2\left(h_{1,1}x_1^3 + h_{1,3}x_1^2x_3 + h_{3,1}x_1x_3^2 + h_{3,3}x_3^3 + h_{1,2}x_1x_2^2 + h_{3,2}x_2^2x_3\right),$$

avec en outre $h_{1,3} = h_{3,1} = 0$ en caractéristique 3.

Via un changement de variables linéaire, on peut normaliser $\mathcal{Q}$ sous la forme $ax_1^2 - x_2^2 + cx_3^2$ et paramétriser cette dernière selon le point $(0 : \sqrt{c} : 1)$ par

$$\varphi : (t : u) \mapsto (2\sqrt{c}tu : \sqrt{c}(at^2 + u^2) : at^2 - u^2).$$

La forme binaire obtenue via la substitution $\mathcal{H}(\varphi(ct, u))$ se décompose alors en le produit d'une forme binaire $\mathsf{f} \in \mathsf{M}_{\mathsf{C}}[x]$ et de la constante $\sqrt{c}$, soit le résultat escompté.

8.3.4 Strate $\mathbf{D}_2$

Il s'agit du seul cas, pour les courbes hyperelliptiques de genre 3, où le corps de modules n'est pas nécessairement un corps de définition ; *e.g.* Huggins, dans [Hug05, Chap.5], propose la famille de courbes hyperelliptiques de genre

$$\mathsf{C} : y^2 = \left(x^2 - a_1\right)\left(x^2 + \frac{1}{\overline{a_1}}\right)\left(x^2 - a_2\right)\left(x^2 + \frac{1}{\overline{a_2}}\right),$$

avec $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}(i) \setminus (\mathbb{Q} \cup i\mathbb{Q})$, $|a_i| > 1$ et $|a_1/a_2| \neq 1$, pour laquelle C est définie sur $\mathbb{Q}(i)$ et admet $\mathbf{D}_2$ pour groupe d'automorphismes. Huggins démontre alors que le corps de moduless de C est $\mathbb{Q}(i) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$ et que C ne peut être définie sur $\mathbb{Q}$.

Lercier, Ritzenthaler et Sijsling, dans [LRS15], donnent en particulier un critère effectif, basé sur les $\mathfrak{D}$-invariants introduits à la section 5.1, pour déterminer l'obstruction à ce qu'une courbe hyperelliptique de genre 3 et de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ puisse être définie hyperelliptiquement sur son corps de modules.

Précisément, en vertu des lemmes 7.3.11 et 7.4.13 pour les caractéristiques 3 et 7 respectivement (cf. [LR12, Lem. 3.10] pour les autres caractéristiques), une telle courbe admet un modèle de

la forme $y^2 = \mathsf{f}(x)$, avec $\mathsf{f} = a_8x^8 + a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x + a_0 \in \mathsf{K}[x]$, sauf éventuellement lorsqu'elle annule l'invariant $\mathfrak{I}_6$ en caractéristique 7 (cf. remarque 8.3.9 ci-dessous). Selon la terminologie de [LRS15, Déf. 3.1], une telle courbe est dite de type $(0, 2, 4)$.

On peut alors associer à f les $\mathfrak{D}$-invariants suivants[2] :

$$\mathfrak{i}_1 = a_4, \quad \mathfrak{i}_2 = a_0a_8, \quad \mathfrak{k}_2 = a_2a_6, \quad \mathfrak{j}_3 = a_2^2a_8 + a_0a_6^2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{j}_3^2 - 4\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2.$$

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le théorème suivant, reformulée à partir de [LRS15, Lem. 3.13, Th. 3.14].

Théorème 8.3.7 Soit $\mathsf{C} : y^2 = \mathsf{f}(x)$ une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur K de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ telle que f soit de type $(0, 2, 4)$ et $\mathsf{M}_\mathsf{C} = \mathsf{k}$.

Avec les notations ci-dessus, C admet une descente hyperelliptique sur k si et seulement si $\mathfrak{k}_2$ est une norme de l'extension $\mathsf{k}(\sqrt{\mathfrak{d}})/\mathsf{k}$. Dans tous les cas, C admet un modèle du type $(0, 2, 4)$ sur l'extension au plus quadratique $\mathsf{k}(\sqrt{\mathfrak{d}})$ de k.

En pratique, les lemmes 7.3.11 et 7.4.13 permettent de reconstruire les courbes hyperelliptiques de genre 3 de corps de modules k et de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ sur l'extension au plus quadratique $\mathsf{k}(\sqrt{\mathfrak{d}})$ de k. Toutefois, en l'absence d'obstruction, cette reconstruction est non optimale, vu le théorème précédent, et l'obtention d'un modèle hyperelliptique défini sur le corps de modules est explicite dans [LRS15, §3.2].

Indiquons ici les formules en caractéristique 3 : soit $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{k}_2$ et $\mathfrak{j}_3$ les $\mathfrak{D}$-invariants d'une courbe hyperelliptique C de genre 3 définie sur K, de groupe d'automorphismes $\mathbf{D}_2$ et de corps de modules k, donnés par le lemme de reconstruction 7.3.11. Supposons que $\mathfrak{d} = \mathfrak{j}_3^2 - 4\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2$ ne soit pas un carré de k, en particulier $\mathfrak{k}_2$ est non nul, et que $\mathfrak{k}_2$ soit une norme de l'extension $\mathsf{k}(\mathfrak{d})/\mathsf{k}$. Il existe donc $a, b \in \mathsf{k}$ tels que $\mathfrak{k}_2 = a^2 - \mathfrak{d}b^2$. Alors, C est isomorphe à la courbe définie sur k par

$$y^2 = A_0x^8 + A_1x^7 + A_2x^6 + A_3x^5 + A_4x^4 + \mathfrak{d}A_3x^3 + \mathfrak{d}^2A_2x^2 + \mathfrak{d}^3A_1x + \mathfrak{d}^4A_0 \tag{8.1}$$

où

$$\begin{aligned}
A_0 &= (b\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2 + 2b\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{k}_2^2)/\mathfrak{k}_2^2a + (b^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2b^2\mathfrak{j}_3^3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3)/\mathfrak{k}_2^2,\\
A_1 &= (2b\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + b\mathfrak{j}_3^3)/\mathfrak{k}_2^2a + (b^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^4 + b^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + b\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4 + b^2\mathfrak{j}_3^4 + 2b\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^2)/\mathfrak{k}_2^2,\\
A_2 &= (2b\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^4 + 2b\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4 + 2b\mathfrak{j}_3^4 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2)/\mathfrak{k}_2^2a\\
&\qquad + (2b^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_3 + 2b^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + 2b^2\mathfrak{j}_3^5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^3)/\mathfrak{k}_2^2,\\
A_3 &= (b\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_3 + b\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^3 + b\mathfrak{j}_3^5)/\mathfrak{k}_2^2a\\
&\qquad + (2b^2\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2^6 + b\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^6 + b\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_3^2 + b^2\mathfrak{j}_3^6 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^5 + b\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^4)/\mathfrak{k}_2^2,\\
A_4 &= (b\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2^6 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^6 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_3^2 + 2b\mathfrak{j}_3^6 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^4)/\mathfrak{k}_2^2a + (b^2\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2^6\mathfrak{j}_3 + 2b^2\mathfrak{j}_3^7 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^5\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_3^3 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^5)/\mathfrak{k}_2^2.
\end{aligned}$$

Exemple 8.3.8 Soit $\mathbb{F}_3(u)$ le corps à 9 éléments, avec $\pi_{u,\mathbb{F}_3} = x^2 + 2x + 1$, et C une courbe hyperelliptique de genre 3 et de groupe d'automorphisme $\mathbf{D}_2$ dont les SL_2-invariants normalisés

2. Nos conventions de notations diffèrent de celles adoptées dans [LRS15], précisément dans ce dernier :

$$J_1 = \mathfrak{i}_1, J_{2,0} = \mathfrak{i}_2, J_{2,1} = \mathfrak{k}_2, I_{3,3,1} = \mathfrak{j}_3 \text{ et } I_{3,3,2} = \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2.$$

sont $(0 : u^7 : u^7 : u^6 : u^3 : 1 : u^7 : 0 : u^3 : u^2)$. Ainsi le corps de modules de C est $\mathbb{F}_9$ et le lemme de reconstruction 7.3.11 mène aux $\mathfrak{D}$-invariants $\mathfrak{i}_1 = 2, \mathfrak{i}_2 = u^5, \mathfrak{k}_2 = u^2$ et $\mathfrak{j}_3 = 2$. Alors, $\mathfrak{d} = u^3$ n'est pas un carré de $\mathbb{F}_9$, mais $\mathfrak{k}_2 = 2^2 - u^2\mathfrak{d}$ est une norme de l'extension $\mathsf{k}(\mathfrak{d})/\mathsf{k}$. Ainsi C peut être hyperelliptiquement définie sur son corps de modules $\mathbb{F}_9$ et le modèle (8.1) donne

$$y^2 = u^6x^8 + u^3x^7 + u^6x^6 + ux^5 + ux^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + u^2.$$

Remarque 8.3.9 Le lemme 7.4.13 pour la caractéristique 7 échoue lorsque l'invariant $\mathfrak{I}_6$ est nul. Le cas échéant, la reconstruction d'une courbe à partir de ses invariants est basée sur la proposition 5.3.8 et n'est a priori plus optimale (cf. l'équation (5.23)).

8.3.5 Strate $\mathbf{C}_2$

Pour les courbes hyperelliptiques de genre impair de groupe d'automorphismes générique, le corps de modules est systématiquement un corps de définition.

Proposition 8.3.10 - [LR12, Prop. 4.13]. Si g est impair et si $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathsf{C})$ est trivial, alors M_C est un corps de définition de C.

En revanche, contrairement aux courbes hyperelliptiques de genre pair [Mes91], en genre impair les courbes hyperelliptiques de groupe d'automorphismes réduit trivial ne sont pas nécessairement hyperelliptiquement définies sur leur corps de modules. L'obstruction à être défini hyperelliptiquement sur le corps de modules pour une telle courbe est néanmoins quantifiable ; suivant [LR12, §4.3], la condition suffisante de la proposition 8.2.5 se reformule en une équivalence pour une courbe hyperelliptique de groupe d'automorphismes réduit.

Proposition 8.3.11 - [LR12, Cor. 4.12]. Soit $(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3)$ trois covariants d'ordre 2 d'une forme binaire f de degré pair n définie sur F. Si $\mathsf{R}(\mathsf{q}_1, \mathsf{q}_2, \mathsf{q}_3) \neq 0$, il existe alors une conique lisse $\mathcal{Q}$ et une courbe plane $\mathcal{H}$ de degré $\mathsf{n}/2$ définies sur M_C telles qu'il existe un K-isomorphisme $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ envoyant les points de $\mathcal{Q} \cap \mathcal{H}$ sur les racines de f. En particulier, C peut être définie hyperelliptiquement sur M_C si et seulement si $\mathcal{Q}$ a un M_C-point rationnel.

Remarque 8.3.12

- Cette équivalence n'est plus valable si le groupe d'automorphismes réduit de la courbe n'est pas trivial (cf. paragraphe 8.3.3 pour les courbes de groupe d'automorphismes $\mathbf{C}_4$).
- En caractéristique 7, pour les courbes de groupe d'automorphismes trivial appartenant à la sous-strate définie par l'annulation de l'invariant $\mathfrak{I}_6$, la reconstruction ne peut plus se faire via la méthode de Mestre et repose alternativement sur la proposition 5.3.8. Pour ces cas, la reconstruction que nous proposons est à nouveau non optimale *a priori* (cf. les équations (5.22), (5.24), (5.25) et (5.26)).

#	Dim. 0	Dim. 1	$\mathbf{C}_2^3$	$\mathbf{C}_4$	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{C}_2$
$\mathbb{F}_3$	1	1	5	5	12	217
$\mathbb{F}_9$	1	7	65	65	576	58237

TABLE 8.2 – Nombres de courbes hyperelliptiques de genre 3 non isomorphes définies sur $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_9$.

8.3.6 Dénombrement des courbes sur les corps finis

Pour l'espace de modules H_3 de dimension 5, on s'attend à obtenir q^5 classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptiques de genre 3 définies sur $\mathbb{F}_\mathsf{q}$. On peut alors s'intéresser au dénombrement de ces classes pour chacune des strates d'automorphismes de l'espace de modules. La réponse est triviale pour celles de dimension 0 et a été donnée aux sections 7.3.2 et 7.4.2 pour les strates de dimension 1, via l'obtention d'une paramétrisation de chacune de ces strates. Nous n'avons pas obtenu de telles paramétrisations pour les strates de dimensions supérieures, toutefois on peut émettre des conjectures au sujet de ces dernières, en supposant que les quantités recherchées dépendent seulement de la caractéristique et en connaissant leurs valeurs pour les premiers q.

Par exemple en caractéristique 3, il est possible d'énumérer les courbes hyperelliptiques de genre 3 définies sur $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_9$, ce qui mène aux résultats de la table 8.2. Pour les strates $\mathbf{C}_2^3$ et $\mathbf{C}_4$ de dimension 2, le cardinal cherché est donc de la forme $\mathsf{q}^2 + a\mathsf{q} + b$ et l'unique solution compatible avec les résultats sur $\mathbb{F}_3$ et $\mathbb{F}_9$ est donc $(a, b) = (-2, 2)$. On procède de même pour les cardinaux de $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{C}_2$, recherchés sous la forme $\mathsf{q}^3 + a\mathsf{q}^2 + b\mathsf{q} + c$ et $\mathsf{q}^5 - \mathsf{q}^3 + d\mathsf{q}^2 + e\mathsf{q} + f$, puisqu'il n'y a pas de strate d'automorphismes de dimension 4 dans H_3 ; en tenant compte du nombre total de courbes q^5 escompté.

Troisième partie

Espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 2

Chapitre 9

Invariants pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 2

Comme nous avons pu l'observer dans notre propos liminaire du chapitre 1, le point crucial pour réduire l'étude des classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptiques de genre g à celle de l'action du groupe $\mathsf{GL}_2(\mathsf{K})$ sur l'espace des formes binaires de degré $2\mathsf{g}+2$ est de pouvoir ramener tout modèle de Weierstraß de telles courbes $y^2+\mathsf{h}(x)y=\mathsf{f}(x)$ à un modèle $y^2=\mathsf{f}(x)$, où f correspond alors à une forme binaire de degré $2\mathsf{g}+2$. Or cette réduction s'établit via la transformation $y \leftarrow y+\mathsf{h}(x)/2$, naturellement illicite sur les corps de caractéristique 2. Ainsi, nous avons jusqu'à présent écarté ce cas.

Par la suite, k est supposé être de caractéristique 2.

Le cas des courbes de genre 1 et 2 est déjà traité par l'intermédiaire respectivement du j-invariant et des cinq invariants d'Igusa définissant un espace projectif pondéré de poids 2, 4, 6, 8 et 10 [Igu60]. Précisément, pour ces courbes, la situation est la suivante en caractéristique 2 :

- une courbe elliptique est k-isomorphe à une courbe donnée par un modèle de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} y^2+a_3y=x^3+a_4x+a_6 & \text{(cas supersingulier)} \\ y^2+xy=x^3+a_4x+a_6 & \text{(cas ordinaire)} \end{array}\right.$$

  et sa classe de K-isomorphisme est déterminée par un invariant absolu j, égal à 0 ou $1/a_6$ respectivement [Sil09, Ann. A].

- une courbe hyperelliptique de genre 2 est k-isomorphe à une courbe donnée par un modèle de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} y^2+y=ax+\frac{bx+c}{x^2+x+r}+d & \text{(cas quadratique)} \\ y^2+y=\frac{ax^2+bx+c}{x^3+tx+s}+d & \text{(cas cubique)} \end{array}\right.$$

  et sa classe de K-isomorphisme est déterminée par trois invariants absolus $\mathsf{j}_1, \mathsf{j}_2$ et j_3, dérivés des invariants d'Igusa [CNP05].

Dans ce qui suit, issu d'un travail commun avec Lercier [BL15], nous nous intéressons au cas des courbes hyperelliptiques de genre 3. À l'instar de la caractéristique impaire, la situation est légèrement plus complexe pour cette occurrence. En effet, comme le montre le théorème 9.2.1,

notre principal résultat, jusqu'à dix invariants sont nécessaires pour décrire complètement les classes d'isomorphisme sur K des courbes hyperelliptiques de genre 3.

Afin d'établir ce résultat, nous nous basons sur un travail de Nart et Sardonil [NS04] pour définir des modèles normalisés pour chaque classe de k-isomorphisme de courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 2 (cf. section 9.1). La structure arithmétique des points de ramification de ces courbes conduit alors à une stratification de l'espace de modules selon cinq cas et nous définissons pour chacun de ces cas des invariants permettant de caractériser les classes de K-isomorphisme (cf. section 9.2).

La preuve pour le cas générique fait appel à l'action simultanée du groupe $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur un système de deux quartiques binaires définies sur un corps de caractéristique 2.

Pour cette action, à l'heure actuelle, seuls des invariants pour la caractéristique nulle sont connus, depuis le XIXème siècle. Précisément, l'algèbre bi-graduée de type fini des invariants pour l'action simultanée de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur les couples de quartiques binaires, notée $\mathcal{I}_{4,4}$, en caractéristique nulle admet un système d'invariants fondamentaux bi-homogènes formé de huit éléments, exhibé par Gordan [Gor70, § 29],

$$\mathsf{J}_{2,0}, \mathsf{J}_{1,1}, \mathsf{J}_{0,2}, \mathsf{J}_{3,0}, \mathsf{J}_{2,1}, \mathsf{J}_{1,2}, \mathsf{J}_{0,3}, \mathsf{J}_{2,2}, \tag{9.1}$$

où l'invariant $\mathsf{J}_{i,j}$ est de bi-degré (i,j). La série de Hilbert de $\mathcal{I}_{4,4}$ est [SF79a] :

$$\frac{1+s^2t^2+s^4t^4}{(1-s^2)(1-st)(1-t^2)(1-s^3)(1-s^2t)(1-st^2)(1-t^3)}.$$

Cette écriture est représentative et correspond au système homogène de paramètres formé des sept invariants de degré 2 et 3 précédents $\mathsf{J}_{2,0}, \mathsf{J}_{1,1}, \mathsf{J}_{0,2}, \mathsf{J}_{3,0}, \mathsf{J}_{2,1}, \mathsf{J}_{1,2}, \mathsf{J}_{0,3}$, auxquels on peut associer les trois invariants secondaires $1, \mathsf{J}_{2,2}, \mathsf{J}_{2,2}^2$. Rappelons que l'existence de systèmes homogènes de paramètres n'est plus systématique pour les algèbres multi-graduées, comme l'a montré Brion [Bri82] (cf. remarque 2.3.3).

Notons que relativement aux huit invariants fondamentaux, la série de Hilbert de $\mathcal{I}_{4,4}$ se réécrit sous la forme

$$\frac{1-s^6t^6}{(1-s^2)(1-st)(1-t^2)(1-s^3)(1-s^2t)(1-st^2)(1-t^3)(1-s^2t^2)}.$$

Ainsi, le module des relations entre ces huit générateurs est engendré par une unique relation de bi-degré $(6,6)$. On pourra alors comparer ces résultats à ceux que nous obtenons en caractéristique 2 au paragraphe 9.2.1.

9.1 Modèles d'Artin-Schreier normalisés pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en caractéristique 2

On a vu à la section 1.1 que toute courbe hyperelliptique C de genre g définie sur k peut être donnée par l'intermédiaire d'un modèle de Weierstraß

$$y^2 + \mathsf{h}(x)y = \mathsf{f}(x), \tag{9.2}$$

où $\deg \mathsf{f} \leqslant 2\mathsf{g}+2$ et $\deg \mathsf{h} \leqslant \mathsf{g}+1$. Modèle avec lequel traite la majorité des systèmes de calcul formel.

Toutefois, en caractéristique 2, un tel modèle ne se réduit pas systématiquement sous la forme $y^2 = \mathsf{f}'(x)$ et il est alors plus commode pour notre propos de représenter les courbes hyperelliptiques via un *modèle d'Artin-Schreier*

$$\mathsf{C}_{\mathsf{u}} : y^2 + y = \mathsf{u}(x)$$

où $\mathsf{u}(x)$ est une fraction rationnelle sur k. Observons qu'un tel modèle se déduit aisément d'un modèle de Weierstraß via l'isomorphisme $y \mapsto \mathsf{h}(x)y$, qui aboutit à $\mathsf{u}(x) = \mathsf{f}(x)/\mathsf{h}^2(x)$.

Les classes de k-isomorphismes de ces courbes sont alors en bijection avec les orbites des fractions rationnelles $\mathsf{u}(x)$ pour la double action du groupe d'Artin-Schreier de $\mathsf{k}(x)$

$$\mathsf{AS}(\mathsf{k}(x)) := \left\{v(x) + v(x)^2 \mid v(x) \in \mathsf{k}(x)\right\}$$

et du groupe projectif linéaire $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{k})$. Précisément, on dispose du résultat suivant.

Proposition 9.1.1 - [NS04, Prop. 1]. Deux courbes hyperelliptiques C_{u} et $\mathsf{C}_{\mathsf{u}'}$, avec $\mathsf{u}, \mathsf{u}' \in \mathsf{k}(x)$, sont isomorphes sur k si et seulement s'il existe $\gamma \in \mathsf{PGL}_2(\mathsf{k})$ tel que $\mathsf{u}'(x) + \mathsf{u}(\gamma(x)) \in \mathsf{AS}(\mathsf{k}(x))$.

Notamment, dans chaque classe $\mathsf{u}(x) + \mathsf{AS}(\mathsf{k}(x))$, on trouve toujours un élément sans pôle d'ordre pair et il est donc loisible de supposer $\mathsf{u}(x)$ de cette forme. Selon la formule du genre de Hurwitz [Har77, p. 301], le diviseurs des pôles $\mathsf{W} = \sum_{x \in \mathbb{P}^1(\mathsf{K})} m_x[x]$ vérifie

$$2\mathsf{g} + 2 = \sum_{x \in \mathbb{P}^1(\mathsf{K})} m_x + 1.$$

Ainsi, en genre 3, on obtient géométriquement cinq possibilités pour le diviseur W :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4,\ P_1 + P_2 + 3P_3,\ 3P_1 + 3P_2,\ P_1 + 5P_2 \text{ et } 7P$$

étiquetées respectivement comme $(1,1,1,1)$, $(1,1,3)$, $(3,3)$, $(1,5)$ et (7) dans [NS04].

Le théorème suivant, issu de [NS04, § 3], établit pour chacun des cinq types précédents un modèle rationnel normalisé sur k.

Théorème 9.1.2 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k, donnée par un modèle de Weierstraß

$$y^2 + \mathsf{h}(x)y = \mathsf{f}(x),$$

avec $\mathsf{h}(x) = h_4x^4 + h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0$, et soit $\mathsf{j}_2 = h_1h_3 + {h_2}^2$ et $\mathsf{j}_3 = {h_3}^2h_0 + h_4{h_1}^2 + h_3h_2h_1$.

Type $(1,1,1,1)$**.** Si $\mathsf{j}_2 \neq 0$ et $\mathsf{j}_3 \neq 0$, alors C est isomorphe à une courbe

$$y^2 + y = \frac{\mathsf{F}(x)}{\mathsf{H}(x)} \tag{9.3}$$

avec $\deg \mathsf{F}(x) = \deg \mathsf{H}(x) = 4$ et $\mathsf{H}(x)$ séparable.

Type $(1,1,3)$**.** Si $\mathsf{j}_2 \neq 0$ et $\mathsf{j}_3 = 0$ et si $(h_1, h_3) \neq (0,0)$, alors C est isomorphe à une courbe

$$y^2 + y = ax^3 + bx^2 + \frac{cx + d}{x^2 + x + s} + e, \tag{9.4}$$

avec $(a,b,c,d,e) \in \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times (\mathsf{k}/\mathsf{AS}(\mathsf{k}))$.

Type $(3,3)$**.** Si $\mathsf{j}_2 \neq 0$ et $\mathsf{j}_3 = 0$ et si $(h_1, h_3) = (0,0)$, alors C est isomorphe à une courbe

$$y^2 + y = \frac{ax+b}{(x^2+x+s)^2} + \frac{cx+d}{(x^2+x+s)^3} + e \tag{9.5}$$

avec $(a,b,c,d,e) \in \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times (\mathsf{k}/\mathsf{AS}(\mathsf{k}))$.

Type $(1,5)$**.** Si $\mathsf{j}_2 = 0$ et $\mathsf{j}_3 = 0$ et si $(h_1, h_2, h_3) \neq (0,0,0)$, alors C est isomorphe à une courbe

$$y^2 + y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + \frac{d}{x} + e \tag{9.6}$$

avec $(a,b,c,d,e) \in \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times (\mathsf{k}/\mathsf{AS}(\mathsf{k}))$.

Type (7)**.** Si $\mathsf{j}_2 = 0$ et $\mathsf{j}_3 = 0$ et si $(h_1, h_2, h_3) = (0,0,0)$, alors C est isomorphe à une courbe

$$y^2 + y = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + e \tag{9.7}$$

avec $(a,b,c,d,e) \in \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times \mathsf{k} \times (\mathsf{k}/\mathsf{AS}(\mathsf{k}))$.

Les formules effectives pour le passage d'un modèle de Weierstraß à un modèle d'Artin-Schreier normalisé d'une des cinq formes précédentes sont données à l'annexe D.

Remarque 9.1.3 j_2 et j_3 sont les deux générateurs, algébriquement indépendants, de l'algèbre $\mathcal{I}_4$ des invariants des quartiques binaires en caractéristique 2. On pourra observer qu'il s'agit des réductions modulo 2 des deux invariants I et J pour les quartiques en caractéristique nulle, définis en (2.7) page 42. En outre, notons que le discriminant d'une quartique binaire en caractéristique 2 est donné par j_3^2 et que j_2 et j_3 sont nuls si et seulement si la quartique a une racine au moins triple.

9.2 Invariants

Fort du résultat précédent de Nart et Sardonil, nous sommes en mesure d'exhiber des systèmes d'invariants pour chacun des cinq types de modèles permettant de classifier ces courbes à isomorphisme près. Le théorème suivant résume la situation.

Théorème 9.2.1 Soit C une courbe hyperelliptique de genre 3 définie sur k.

Type $(1,1,1,1)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.3) sont entièrement déterminées par le 10-uplet

$$(\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_3, \mathsf{J}_2, \mathsf{J}_4, \mathsf{J}_5, \mathsf{J}_6, \mathsf{J}_8, \mathsf{J}_9, \mathsf{J}_{11}, \mathsf{J}_{12})$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 10 et de poids $(2,3,2,4,5,6,8,9,11,12)$.

Type $(1,1,3)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.4) sont entièrement déterminées par le 7-uplet

$$(1, 0, \mathsf{K}, \mathsf{K}', \mathsf{K}'', \mathsf{K}''', \mathsf{K}'''')$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 7 et de poids $(2,3,2,2,2,2,2)$, défini en (9.13).

Type $(3,3)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.5) sont entièrement déterminées par le 5-uplet

$$(1, 0, \mathsf{L}, \mathsf{L}', \mathsf{L}'')$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 5 et de poids $(2,3,2,2,2)$, défini en (9.15).

Type $(1,5)$**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.6) sont entièrement déterminées par le 6-uplet

$$(0, 0, \mathsf{M}_1, \mathsf{M}_3, \mathsf{M}_4, \mathsf{M}_5)$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 6 et de poids $(2,3,1,3,4,5)$, défini en (9.16).

Type (7)**.** Les classes d'isomorphisme de courbes hyperelliptique données par le modèle (9.7) sont entièrement déterminées par le 5-uplet

$$(0, 0, \mathsf{N}_7, \mathsf{N}_{32}, \mathsf{N}_{40})$$

d'un k-espace projectif pondéré de dimension 5 et de poids $(2,3,7,32,40)$, défini en (9.18).

Nous détaillons ci-après chaque cas du théorème.

9.2.1 Type $(1,1,1,1)$

Nous considérons dans ce paragraphe les courbes données par un modèle de la forme (9.3). L'action du groupe $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur les fractions rationnelles $\mathsf{F}(x)/\mathsf{H}(x)$ les transforment en des fractions de même degré et équivaut finalement à l'action jointe de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur un couple de deux quartiques binaires $(\mathsf{F}(x), \mathsf{H}(x))$. Nous étudions dans un premier temps cette action, puis l'action additionnelle du groupe d'Artin-Schreier $\mathsf{AS}(\mathsf{K}(x))$, qui se trouve être identique à celle du groupe $\mathsf{AS}(\mathsf{K})$, lorsque nous nous restreignons aux modèles de la forme (9.3).

Pour l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, nous sommes confrontés aux mêmes difficultés que pour les algèbres $\mathcal{I}_8$, propres à la caractéristique positive petite, pour établir qu'une famille d'invariants est génératrice. Nous nous limitons ainsi à nouveau à prouver que les invariants que nous exhibons suffisent pour séparer les orbites de formes. Précisément, nous établissons que nos invariants permettent de séparer les orbites de couple de formes $(\mathsf{F}(x), \mathsf{H}(x))$ pour le type $(1,1,1,1)$, *i.e.* avec H séparable notamment.

Action simultanée du groupe $\mathfrak{D}$ sur deux quartiques binaires

Nous commençons par nous intéresser à l'action simultanée du groupe $\mathfrak{D}$, introduit au paragraphe 5.1, sur un système de deux quartiques binaires

$$\begin{cases} a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \\ b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0. \end{cases} \tag{9.8}$$

Du fait de l'inclusion des anneaux d'invariants

$$\mathsf{k}[a_0, a_1, \ldots, a_4, b_0, b_1, \ldots, b_4]^{\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})} \subset \mathsf{k}[a_0, a_1, \ldots, a_4, b_0, b_1, \ldots, b_4]^{\mathfrak{D}\cap\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})},$$

les invariants pour l'action $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, étudiés au paragraphe suivant, pourront s'exprimer en fonction des invariants pour l'action de $\mathfrak{D}$.

Le calcul des invariants pour l'action simultanée du groupe $\mathfrak{D}$ sur un système de deux formes se traite aisément, selon la même stratégie que celle mise en œuvre pour une seule forme [LRS15, sec. 2.2]. Précisément, ces invariants se construisent en deux temps : on détermine d'abord des invariants pour l'action du sous-groupe des matrices diagonales, puis il suffit de symétriser ces invariants pour l'action anti-diagonale de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Soit les dix $\mathfrak{D}$-invariants suivants, pour lesquels le multi-indice indique le bi-degré :

$$\begin{aligned}
&\mathsf{i}_{1,0} = a_2, \ \ \mathsf{i}_{0,1} = b_2, \\
&\mathsf{i}_{2,0} = a_0 a_4, \ \ \mathsf{i}_{0,2} = b_0 b_4, \\
&\mathsf{j}_{2,0} = a_1 a_3, \ \ \mathsf{j}_{0,2} = b_1 b_3, \\
&\mathsf{i}_{1,1} = a_4 b_0 + a_0 b_4, \ \ \mathsf{j}_{1,1} = a_3 b_1 + a_1 b_3, \\
&\mathsf{i}_{2,1} = {a_3}^2 b_0 + {a_1}^2 b_4, \ \ \mathsf{i}_{1,2} = {b_1}^2 a_4 + {b_3}^2 a_0, \\
&\mathsf{i}_{3,0} = a_0 {a_3}^2 + {a_1}^2 a_4, \ \ \mathsf{i}_{0,3} = b_0 {b_3}^2 + {b_1}^2 b_4, \\
&\mathsf{j}_{2,1} = a_1 a_4 b_1 + a_0 a_3 b_3, \ \ \mathsf{j}_{1,2} = b_0 b_3 a_3 + b_1 b_4 a_1, \\
&\mathsf{i}_{2,2} = a_3 a_4 b_0 b_1 + a_0 a_1 b_3 b_4.
\end{aligned}$$

Réciproquement, observons, qu'étant donné un point du k-espace projectif pondéré de dimension 10 et de poids $(1, 1, 2, \ldots, 3, 3, 4)$, il est facile de déterminer des coefficients $a_0, \ldots, a_4$ et $b_0, \ldots, b_4$ dont les $\mathfrak{D}$-invariants $\mathsf{i}_{1,0}, \ldots, \mathsf{i}_{2,2}$ sont égaux à ce point.

Enfin, un calcul de base de Gröbner pour l'ordre lexicographique dans l'anneau

$$\mathbb{F}_2[\mathsf{i}_{1,0}, \ldots, \mathsf{i}_{2,2}, b_2, \ldots, b_0, b_4, a_2, a_0, \ldots, a_4]$$

permet d'établir que le module des relations des dix $\mathfrak{D}$-invariants est engendré par les vingt-trois relations :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{2,0} = \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{0,2} = \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{i}_{3,0} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{2,1} + \mathsf{j}_{1,1}^2\mathsf{i}_{1,1}, \\
0 &= \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{3,0} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{2,1} + \mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{2,0} = \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{1,2} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{0,3} + \mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{0,2} = \mathsf{j}_{2,1}^2 + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{1,2} + \mathsf{j}_{1,1}^2\mathsf{i}_{2,0}, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{2,1} = \mathsf{j}_{1,2}^2 + \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{i}_{2,1} + \mathsf{j}_{1,1}^2\mathsf{i}_{0,2}, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{2,1} + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{1,1} = \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{1,2} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{1,1}, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{3,0} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{2,0} = \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{0,3} + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{0,2}, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{i}_{2,0} = \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{0,2}, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,1}^2\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{2,0} = \mathsf{i}_{3,0}^2\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{2,1}^2\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{i}_{1,1}^2\mathsf{j}_{2,0}^2, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{1,1} = \mathsf{i}_{0,3}^2\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,2}^2\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,1}^2\mathsf{j}_{0,2}^2, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{0,3}\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{0,2} = \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{j}_{1,1}^2 + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{2,0}, \\
0 &= \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{0,3}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{j}_{1,2}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{0,3}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{j}_{1,1}^3\mathsf{i}_{0,2} = \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{j}_{2,1}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{j}_{1,1}^3\mathsf{i}_{2,0}, \\
0 &= \mathsf{i}_{2,2}^2 + \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{j}_{1,1}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{j}_{1,1}^2\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{i}_{2,0} + \mathsf{i}_{1,1}^2\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{2,0}.
\end{aligned}$$

Action simultanée de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur deux quartiques binaires

Relativement à l'action simultanée de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$ sur un couple de quartiques binaires, on peut exhiber les dix invariants fondamentaux suivants, exprimés à l'aide des $\mathfrak{D}$-invariants du paragraphe précédent.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{I}_{2,0} = \mathsf{i}_{1,0}{}^2 + \mathsf{j}_{2,0},\ \ \mathsf{I}_{0,2} = \mathsf{i}_{0,1}{}^2 + \mathsf{j}_{0,2},\ \ \mathsf{I}_{1,1} = \mathsf{j}_{1,1},\\
&\mathsf{I}_{3,0} = \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{3,0},\ \ \mathsf{I}_{0,3} = \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{0,3},\ \ \mathsf{I}_{2,1} = \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{2,1},\ \ \mathsf{I}_{1,2} = \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,2},,\\
&\mathsf{I}_{2,2} = \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,1},\\
&\mathsf{I}_{3,3} = \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,3} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,1}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{i}_{3,0} + \mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{i}_{0,3} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,1}{}^2\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{2,1},\\
&\mathsf{I}_{4,4} = \mathsf{i}_{1,0}{}^4\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}{}^4\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{1,0}{}^4\mathsf{i}_{0,2}{}^2 + \mathsf{i}_{1,0}{}^4\mathsf{j}_{0,2}{}^2 + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{1,2}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1}{}^3 + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{1,1}{}^2 + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,1}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{2,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}{}^4 + \mathsf{i}_{0,1}{}^4\mathsf{j}_{2,0}{}^2 + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{i}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^3\mathsf{i}_{0,3}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2}{}^2\\
&\qquad + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{1,1}{}^2\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,1}{}^2 + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1}{}^3 + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{j}_{2,1}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}{}^3\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{2,0}{}^2\\
&\qquad + \mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,0}{}^2\mathsf{j}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,0}{}^2\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{i}_{2,2} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,3}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{1,1}{}^2\\
&\qquad + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{i}_{0,3} + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2}{}^2 + \mathsf{i}_{1,0}\mathsf{i}_{1,1}{}^2\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{1,1}{}^2 + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{1,1}{}^2 + \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{j}_{2,0} + \mathsf{i}_{0,1}{}^2\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{3,0} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{0,2}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{i}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{i}_{1,1}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,1}\mathsf{i}_{1,1}{}^2\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{0,2}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{1,1}{}^2 + \mathsf{i}_{1,1}{}^4 + \mathsf{i}_{1,1}{}^3\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{1,1}{}^2\mathsf{j}_{1,1}{}^2 + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{0,3} + \mathsf{i}_{2,0}\mathsf{i}_{1,2}{}^2 + \mathsf{i}_{2,1}{}^2\mathsf{i}_{0,2}\\
&\qquad + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{j}_{0,2}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{2,1}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{2,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{1,1} + \mathsf{i}_{0,2}\mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{3,0} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{j}_{2,0}\mathsf{j}_{1,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{0,2} + \mathsf{i}_{1,2}\mathsf{i}_{1,1}\mathsf{j}_{2,1} + \mathsf{i}_{3,0}\mathsf{i}_{0,3}\mathsf{j}_{1,1}.
\end{aligned}
$$

Même si nous ne sommes pas en mesure d'établir que ces dix invariants forment une famille génératrice de l'algèbre $\mathcal{I}_{4,4}$ en caractéristique 2, observons dans un premier temps que la situation diffère légèrement de celle en caractéristique nulle, pour laquelle il y a huit invariants fondamentaux de bi-degré $(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3),(2,2)$.

Nous nous limitons *in fine*, à vérifier que les dix invariants définis précédemment suffisent pour la séparation des orbites de couple de formes (F,H). Pour cela, on normalise H via l'action de $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$, selon l'annulation des invariants $\mathsf{I}_{0,2}$ et $\mathsf{I}_{0,3}$, qui correspondent aux invariants j_2 et j_3 introduits au théorème 9.1.2.

Cas $\mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{0,3} \neq 0$. $(\mathsf{I}_{0,2} : \mathsf{I}_{0,3}) = (1 : j)$, avec $j = \mathsf{I}_{0,3}/\mathsf{I}_{0,2}^{3/2}$, puisque l'on est dans un K-espace projectif pondéré de poids $(2,3)$; point auquel correspond la quartique $\mathsf{H}(x) = x^3 + x + j$. D'après [NS04, Prop. 3], on sait en outre que seuls 4 $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$-changements de variables stabilisent $x^3 + x + j$, qui mènent ainsi à 4 systèmes de quartiques avec les mêmes invariants, de la forme

$$
\begin{cases}
\mathsf{F}(x) = a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0\,,\\
\mathsf{H}(x) = x^3 + x + j\,.
\end{cases}
\tag{9.9}
$$

Or, tout uplet $(\mathsf{I}_{2,0},\mathsf{I}_{1,1},1,\mathsf{I}_{3,0},\mathsf{I}_{2,1},\mathsf{I}_{1,2},j,\mathsf{I}_{2,2},\mathsf{I}_{3,3},\mathsf{I}_{4,4})$ de nos 10 invariants caractérise 4 polynômes F. En effet, lorsque $\mathsf{I}_{1,1} \neq 0$, on a

$$
a_3 = a_1 + \mathsf{I}_{1,1}, \quad a_2 = (j{a_1}^2 + {\mathsf{I}_{1,1}}^2 j + \mathsf{I}_{2,1})/\mathsf{I}_{1,1},
$$

$$
a_0 = (j{a_1}^3 + \mathsf{I}_{1,2}\,{a_1}^2 + \big({\mathsf{I}_{1,1}}^2 j + \mathsf{I}_{2,1}\big)\,a_1 + \mathsf{I}_{3,0})/{\mathsf{I}_{1,1}}^2 \quad \text{et} \quad a_4 = \mathsf{I}_{1,2} + a_0 + a_2,
$$

où a_1 est solution de l'équation de degré 4

$$
j^2{a_1}^4 + {\mathsf{I}_{1,1}}^2{a_1}^2 + {\mathsf{I}_{1,1}}^3 a_1 + {\mathsf{I}_{1,1}}^4 j^2 + {\mathsf{I}_{1,1}}^2\mathsf{I}_{2,0} + {\mathsf{I}_{2,1}}^2\,. \tag{9.10}
$$

Lorsque $\mathsf{I}_{1,1} = 0$, on a similairement

$$a_1 = \sqrt{\mathsf{I}_{2,1}/j}, \quad a_2 = \sqrt{\mathsf{I}_{2,0} + \mathsf{I}_{2,1}/j}, \quad a_3 = \sqrt{\mathsf{I}_{2,1}/j}, \quad \text{et} \quad a_4 = \mathsf{I}_{1,2} + a_0 + a_2,$$

où a_0 satisfait l'équation de degré 4 donnée par $\mathsf{I}_{4,4}$, où l'on a remplacé a_1, a_2, a_3 et a_4 par leur expression. Contrairement à l'équation (9.10), celle pour a_0 peut avoir des racines avec multiplicité, toutefois, le cas échéant, on vérifie aisément que cela est compatible avec le nombre de polynômes F que l'on obtient via le stabilisateur de H.

Cas $\mathsf{I}_{0,2} = 0$ et $\mathsf{I}_{0,3} \neq 0$. On a $(\mathsf{I}_{0,2} : \mathsf{I}_{0,3}) = (0 : 1)$; point auquel correspond la quartique $\mathsf{H}(x) = x^3 + 1$. It is stabilized by four Parmi les douze changements de variables linéaires qui stabilisent $x^3 + 1$, donnés dans [NS04, Prop. 3], seuls quatre sont dans $\mathsf{SL}_2(\mathsf{K})$. À nouveau, on distingue selon l'annulation de $\mathsf{I}_{1,1}$. Lorsque $\mathsf{I}_{1,1} \neq 0$, on a

$$a_0 = \mathsf{I}_{1,2}, \quad a_1 = \mathsf{I}_{1,1}, \quad a_3 = ({a_2}^2 + \mathsf{I}_{2,0})/\mathsf{I}_{1,1}, \quad a_4 = (a_2\,\mathsf{I}_{1,2} + a_3\,a_2 + \mathsf{I}_{2,2})/\mathsf{I}_{1,1},$$

où a_2 est solution de l'équation de degré 4

$${a_2}^4 + {\mathsf{I}_{1,1}}^3\,a_2 + \mathsf{I}_{2,1}\,{\mathsf{I}_{1,1}}^2 + {\mathsf{I}_{2,0}}^2\,.$$

Le cas $\mathsf{I}_{1,1} = 0$ se traite alors de la même façon.

Cas $\mathsf{I}_{0,3} = 0$. On procède similairement lorsque $\mathsf{I}_{0,3}$ est nul. Pour $\mathsf{I}_{0,2} \neq 0$, on normalise H sous la forme $\mathsf{H} = x^2(x+1)$ et on distingue à nouveau selon l'annulation de $\mathsf{I}_{1,1}$. Lorsque $\mathsf{I}_{0,2}$ est nul, on prend $\mathsf{H} = x^3(x+1)$, sauf si $\mathsf{I}_{1,1} = \mathsf{I}_{1,2}$, auquel cas on normalise H sous la forme x^4 avec $a_3 = 0$ pour F.

Enfin, comme pour les $\mathfrak{D}$-invariants, on peut établir que le module des relations relatif aux dix invariants $\mathsf{I}_{2,0}, \mathsf{I}_{0,2}, \mathsf{I}_{1,1}, \ldots, \mathsf{I}_{4,4}$ est engendré par les trois relations, de degré 6, 8 et 12,

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{0,3} + \mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{1,2} + \mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{2,2},\\
0 &= \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{2,1} + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{2,1}^2 + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{1,2} + \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{1,2}^2 + \mathsf{I}_{2,2}^2 + \mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{3,3},\\
0 &= \mathsf{I}_{0,2}^3\mathsf{I}_{3,0}^2 + \mathsf{I}_{1,1}^3\mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{0,3} + \mathsf{I}_{2,0}^3\mathsf{I}_{0,3}^2 + \mathsf{I}_{0,2}^2\mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{2,1} + \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{0,2}^2\mathsf{I}_{2,1}^2 + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{1,1}^2\mathsf{I}_{2,1}^2 + \mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{2,1}^3\\
&\quad + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{1,1}^2\mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{1,2} + \mathsf{I}_{2,0}^2\mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{1,2} + \mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{1,2} + \mathsf{I}_{2,0}^2\mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{1,2}^2 + \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{1,1}^2\mathsf{I}_{1,2}^2\\
&\quad + \mathsf{I}_{2,1}^2\mathsf{I}_{1,2}^2 + \mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{1,2}^3 + \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{2,2}^2 + \mathsf{I}_{1,1}^3\mathsf{I}_{3,3} + \mathsf{I}_{3,0}J3\mathsf{I}_{3,3} + \mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{3,3} + \mathsf{I}_{3,3}^2 + \mathsf{I}_{1,1}^2\mathsf{I}_{4,4}.
\end{aligned}$$

Invariants pour les classes de K-isomorphisme de courbes hyperelliptiques

Nous sommes maintenant en mesure de définir dix invariants pour les courbes hyperelliptiques données via un modèle de la forme (9.3) :

$$\begin{aligned}
\mathsf{j}_2 &= \mathsf{I}_{0,2}, \quad \mathsf{j}_3 = \mathsf{I}_{0,3},\\
\mathsf{J}_2 &= \mathsf{I}_{1,1},\\
\mathsf{J}_4 &= \mathsf{I}_{2,2},\\
\mathsf{J}_5 &= \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{2,1} + \mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{1,2} + \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{0,3},\\
\mathsf{J}_6 &= \mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{0,3} + {\mathsf{I}_{1,2}}^2,\\
\mathsf{J}_8 &= \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{2,2} + \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{0,3} + \mathsf{I}_{4,4},\\
\mathsf{J}_9 &= \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{2,2} + \mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{0,3} + \mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{2,2} + {\mathsf{I}_{1,2}}^3 + \mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{3,3},\\
\mathsf{J}_{11} &= {\mathsf{I}_{0,2}}^2\mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{2,2} + \mathsf{I}_{0,2}{\mathsf{I}_{2,1}}^2\mathsf{I}_{1,2} + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{2,2} + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{3,0} + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{2,2}\\
&\quad + \mathsf{I}_{1,1}{\mathsf{I}_{2,1}}^2\mathsf{I}_{0,3} + \mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{2,1}{\mathsf{I}_{1,2}}^2 + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{3,3} + \mathsf{I}_{1,2}{\mathsf{I}_{2,2}}^2 + \mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{0,3}\mathsf{I}_{3,3},\\
\mathsf{J}_{12} &= {\mathsf{I}_{0,2}}^3{\mathsf{I}_{3,0}}^2 + {\mathsf{I}_{0,2}}^2\mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{3,0} + {\mathsf{I}_{0,2}}^2\mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{3,0} + {\mathsf{I}_{0,2}}\mathsf{I}_{2,0}{\mathsf{I}_{2,1}}^2\mathsf{I}_{0,3} + \mathsf{I}_{0,2}{\mathsf{I}_{1,1}}^2\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{3,0}\\
&\quad + {\mathsf{I}_{1,1}}^3\mathsf{I}_{2,1}\mathsf{I}_{1,2} + {\mathsf{I}_{1,1}}^4\mathsf{I}_{2,2} + \mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{2,0}{}^2\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{0,3} + \mathsf{I}_{2,0}{}^3\mathsf{I}_{0,3}{}^2 + \mathsf{I}_{0,2}{\mathsf{I}_{2,1}}^2\mathsf{I}_{2,2}\\
&\quad + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{1,2}\mathsf{I}_{3,0}\mathsf{I}_{2,2} + \mathsf{I}_{0,2}\mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{2,0}\mathsf{I}_{3,3} + \mathsf{I}_{2,0}{\mathsf{I}_{1,2}}^2\mathsf{I}_{2,2} + \mathsf{I}_{1,1}\mathsf{I}_{2,2}\mathsf{I}_{3,3} + {\mathsf{I}_{1,1}}^2\mathsf{I}_{4,4} + \mathsf{I}_{2,2}\mathsf{I}_{4,4}.
\end{aligned}$$

Afin d'établir que cette liste d'invariants est suffisante pour séparer deux orbites, nous suivons la stratégie mise en œuvre au paragraphe précédent. Cette fois, puisque H est supposé être séparable, j_3 est non nul et seuls deux cas sont à considérer en lien avec l'annulation de j_2.

Lorsque $\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 \neq 0$, on considère à nouveau $H(x) = x^3 + x + j$, avec $j = \mathsf{j}_3/\mathsf{j}_2^{3/2}$, et modulo l'addition d'un élément $e^2 + e \in \mathsf{AS}(\mathsf{K})$ à $\mathsf{F}(x)/\mathsf{H}(x)$, on peut en outre annuler le coefficient du terme x^3 de F. Ainsi il s'agit essentiellement d'établir que nos invariants séparent les systèmes de quartiques de la forme (9.9) avec $a_3 = 0$.

Lorsque $\mathsf{J}_2 \neq 0$, on a

$$a_1 = \mathsf{J}_2, \quad a_4 = (j\, a_2^3 + \mathsf{J}_2\, a_2^2 + \mathsf{J}_5\, a_2 + \mathsf{J}_4\, \mathsf{J}_2)/(\mathsf{J}_2^2\, j) \quad \text{et} \quad a_0 = (a_2^2\, j + \mathsf{J}_2\, a_4 + \mathsf{J}_5)/\mathsf{J}_2,$$

où a_2 est solution de l'équation de degré 4

$$j^2 a_2^4 + \mathsf{J}_2^2 a_2^2 + \mathsf{J}_2^3\, j a_2 + \mathsf{J}_6\, \mathsf{J}_2^2 + \mathsf{J}_5^2.$$

Sinon,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \sqrt{\mathsf{J}_5/j} \quad \text{et} \quad a_0 = a_4 + a_2 + \sqrt{\mathsf{J}_6},$$

où a_4 est solution de l'équation de degré 4

$$j^4 a_4^4 + (\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_5\, j + \mathsf{J}_4\, j^2) a_4^2 + \mathsf{J}_9 a_4 + \mathsf{J}_8.$$

Le cas $\mathsf{j}_2 = 0$ et $\mathsf{j}_3 \neq 0$ se traite de la même façon.

Terminons en indiquant que le module des relations relatif aux dix invariants $\mathsf{j}_2, \mathsf{j}_3, \mathsf{J}_2, \ldots, \mathsf{J}_{12}$ est engendré par neuf relations, de degré 11, 14, 15, 17, 18, 18, 20, 21 et 22,

$$\begin{aligned}
0 &= \mathsf{j}_3\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_9,\\
0 &= \mathsf{j}_2^2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_9 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_{11},\\
0 &= \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_5^3 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{11} + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_{12},\\
0 &= \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^3 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_9 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_6\mathsf{J}_{11},\\
0 &= \mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_6^3 + \mathsf{j}_3^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_9^2 + \mathsf{j}_3^2\mathsf{J}_{12},\\
0 &= \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4^4 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{11} + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_6\mathsf{J}_{12},\\
0 &= \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6^2 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_8 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8\\
&\quad + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_{11} + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{11} + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_9\mathsf{J}_{11} + \mathsf{j}_2^2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{12} + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{12} + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_{12},\\
0 &= \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_8\mathsf{J}_9\\
&\quad + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_6\mathsf{J}_{11} + \mathsf{j}_3\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_{12} + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_9\mathsf{J}_{12},\\
0 &= \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4^5 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_4^4\mathsf{J}_6 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_8\\
&\quad + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_{11}^2 + \mathsf{j}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_{12}.
\end{aligned}$$

Un calcul aisé de base de Gröbner permet finalement de vérifier que l'algèbre d'invariants ainsi obtenu est de dimension 5, comme attendu.

9.2.2 Type $(1,1,3)$

N'importe quelle courbe C de ce type est donnée par un modèle de la forme (9.4) du théorème 9.1.2. Modulo l'action de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$, on peut envoyer les racines $\{\nu, \nu+1\}$ de x^2+x+s sur $\{0,1\}$ et, modulo celle de $\mathsf{AS}(\mathsf{K})$, il est possible de prendre $e=0$, soit un modèle de la forme suivante pour la courbe C

$$y^2+y = Ax^3+Bx^2+\frac{C}{x}+\frac{D}{x+1}$$

avec

$$A=a,\ B=\nu a+b,\ C=\nu c+d \text{ et } D=(\nu+1)c+d. \tag{9.11}$$

En se restreignant aux modèles de cette forme, les orbites pour l'action pour les classes d'isomorphisme ont génériquement deux éléments [NS04, p.212] :

$$(A,B,C,D) \text{ et } (A,B+A^2+A,D,C).$$

Un calcul aisé permet alors de montrer qu'un système complet d'invariants pour ces orbites est donné par les cinq invariants

$$A,\ C+D,\ CD,\ B(B+A+A^2) \text{ et } BC+(B+A+A^2)D. \tag{9.12}$$

Revenant aux coefficients du modèle rationnel (9.4) du théorème 9.1.2, on obtient finalement les sept invariants

$$\begin{aligned}
\mathsf{j}_2 &= 1, \quad \mathsf{j}_3 = 0,\\
\mathsf{K} &= a,\\
\mathsf{K}' &= c,\\
\mathsf{K}'' &= c^2s+cd+d^2,\\
\mathsf{K}''' &= \left(\left(s^2+s\right)c+d\right)a^2+ad+bc,\\
\mathsf{K}'''' &= a^4s^4+(s^2+s)a^3+(b+s)a^2+ab+b^2.
\end{aligned} \tag{9.13}$$

En outre, un calcul facile de base de Gröbner dans l'anneau $\mathbb{F}_2[b,d,a,c,s,\mathsf{K},\mathsf{K}',\mathsf{K}'',\mathsf{K}''',\mathsf{K}'''']$ pour l'ordre lexicographique permet d'établir que le module des relations pour ces invariants est engendré par l'unique relation

$$0 = \mathsf{K}^4\mathsf{K}''+\mathsf{K}^2\mathsf{K}'\mathsf{K}'''+\mathsf{K}^2\mathsf{K}''+\mathsf{K}\mathsf{K}'\mathsf{K}'''+\mathsf{K}'^2\mathsf{K}''''+\mathsf{K}'''^2.$$

Enfin, notons qu'il n'est pas difficile de reconstruire un modèle rationnel du type (9.4) à partir d'un 7-uplet $(1,0,\mathsf{K},\mathsf{K}',\mathsf{K}'',\mathsf{K}''',\mathsf{K}'''')$ donné d'un k-espace projectif pondéré de poids $(2,3,2,2,2,2,2)$. Essentiellement, K et K' fournissent les coefficients a et c, s peut être choisi comme n'importe quel élément de k tel que l'équation du second degré définie par K'' ait deux solutions rationnelles en d et finalement K''' ou K'''' donne le dernier coefficient b.

9.2.3 Type $(3,3)$

N'importe quelle courbe C de ce type est donnée par un modèle de la forme (9.5) du théorème 9.1.2. Modulo l'action de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$, on peut envoyer les racines $\{\nu, \nu+1\}$ de x^2+x+s sur $\{0,\infty\}$ et, modulo celle de $\mathsf{AS}(\mathsf{K})$, il est loisible de prendre $e=0$, soit un modèle de la forme suivante pour la courbe C

$$y^2+y = Ax^3+Bx^2+\frac{Cx+D}{x^3}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= ((c+d)s+d)\nu + cs^2 + ds,\\
B &= (a^2+as+c^2+d^2+b+c)\nu + c^2s^2 + (a^2+c^2+d^2+b+c)s,\\
s^2\cdot C &= (a^2+as+c^2+d^2+b+c)\nu + c^2s^2 + (a^2+c^2+d^2+a+b+c)s + a^2+b+c^2+d^2+c,\\
s^3\cdot D &= ((c+d)s+d)\nu + cs^2 + cs + d.
\end{aligned}$$

En se restreignant aux modèles de cette forme, les orbites pour l'action pour les classes d'isomorphisme ont génériquement deux éléments [NS04, p.212] :

$$(A\lambda^3, B\lambda^2, C\lambda^{-2}, D\lambda^{-3}) \text{ et } (D\mu^3, C\mu^2, B\mu^{-2}, A\mu^{-3}) \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathsf{K}^*.$$

Un calcul aisé permet alors de montrer qu'un système complet d'invariants pour ces orbites est donné par les trois invariants

$$AD,\ BC \text{ et } A^2C^3+B^3D^2. \tag{9.14}$$

Revenant aux coefficient du modèle rationnel (9.5) du théorème 9.1.2, on obtient finalement les cinq invariants

$$\begin{aligned}
&\mathsf{j}_2 = 1, \quad \mathsf{j}_3 = 0,\\
&\mathsf{L} = c^2s + cd + d^2,\\
&\mathsf{L}' = a^4 + a^3 + \left(c^2+s\right)a^2 + \left(c^2s+c^2+d^2+b+c\right)a + b^2 + c^3 + (b+1)\,c^2,\\
&\mathsf{L}'' = c^2a^6 + \left(c^2s+d^2\right)a^5 + \left(c^4+c^2b+c^3+c^2s+cd\right)a^4 + \left(\left(c^2+d^2\right)s + cd + c^2s^2\right)a^3\\
&\quad + \left(\left(c^6+c^4+c^2\right)s^2 + \left(c^4+cd+d^2\right)s + b^2c^2 + d^2b + c^6 + \left(d^2+1\right)c^4 + dc^3 + \left(d^4+d^2\right)c^2 + d^2c + d^4\right)a^2\\
&\quad + \left(s^3c^6 + \left(c^6+\left(d^2+1\right)c^4\right)s^2 + \left(b^2c^2+c^2b+c^6+d^2c^4+(d+1)\,c^3+d^4c^2\right)s + d^2b^2 + \left(cd+d^2\right)b + dc^3\right.\\
&\quad \left. + dc^2 + \left(d^3+d^2\right)c + d^6 + d^4\right)a + \left(c^6b+c^7+c^4\right)s^2 + \left(c^4b+c^5+b^2c^2+c^4\right)s + c^2b^3 + \left(c^4+c^3+cd+d^2\right)b^2\\
&\quad + \left(c^6+\left(d^2+1\right)c^4 + dc^3 + \left(d^4+d^2\right)c^2\right)b + c^8 + c^7 + c^6 + \left(d^2+1\right)c^5 + dc^4 + \left(d^4+d^2+d\right)c^3 + d^4.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

Ces invariants sont algébriquement indépendants.

9.2.4 Type $(1,5)$

N'importe quelle courbe C de ce type est donnée par un modèle de la forme (9.6) du théorème 9.1.2. Modulo l'action de $\mathsf{AS}(\mathsf{K})$, on peut choisir $e=0$. Ainsi, en se restreignant aux modèles de cette forme, l'orbite pour l'action pour les classes d'isomorphisme est génériquement [NS04, p.214]

$$(a\lambda^5, b\lambda^4, c\lambda^3, d\lambda^{-1}) \text{ avec } \lambda\in\mathsf{K}^*.$$

Soit les six invariants

$$\mathsf{j}_2 = 0, \quad \mathsf{j}_3 = 0, \quad \mathsf{M}_1 = 1/d, \quad \mathsf{M}_3 = c, \quad \mathsf{M}_4 = b \quad \text{et} \quad \mathsf{M}_5 = a. \tag{9.16}$$

Ces invariants sont à nouveau algébriquement indépendants et la reconstruction d'un modèle de ce type à partir de ces invariants est triviale.

9.2.5 Type (7)

N'importe quelle courbe C de ce type est donnée par un modèle de la forme (9.7) du théorème 9.1.2. Modulo l'action de $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$, on peut supposer la courbe C donnée par un modèle de la forme

$$y^2 + y = Ax^7 + Bx^6 + Dx^4$$

avec

$$\begin{aligned} A &= a, \\ B &= a^2\nu^8 + a\nu + b, \\ D &= a^2\nu^{10} + \nu^8 b^2 + \nu^2 b + d, \text{ où } \nu = \sqrt{c/a}. \end{aligned}$$

Se restreignant aux modèles de cette forme, l'orbite pour l'action pour les classes d'isomorphisme est génériquement [NS04, p.214]

$$(A\lambda^7, B\lambda^6, D\lambda^{-4}) \text{ avec } \lambda \in \mathsf{K}^*,$$

et un système complet d'invariants est clairement donné par

$$(A, B, D). \tag{9.17}$$

Revenant aux coefficient du modèle rationnel (9.7) du théorème 9.1.2, on obtient finalement les cinq invariants

$$\begin{aligned} \mathsf{j}_2 &= 0, \quad \mathsf{j}_3 = 0, \\ \mathsf{N}_7 &= a, \\ \mathsf{N}_{32} &= ac^5 + b^2c^4 + a^4d + a^3bc, \\ \mathsf{N}_{40} &= c^8 + ca^5 + b^2a^4, \end{aligned} \tag{9.18}$$

qui sont aussi algébriquement indépendants.

Annexes

Annexe A

Groupes linéaires algébriques

L'objet de cette annexe est de rappeler les définitions et notions essentielles en lien avec la notion de groupes algébriques linéaires. Une référence classique pour ce sujet est le livre [Hum75] ; on peut aussi consulter [DK02, Ann. A]

Dans ce qui suit, K désigne un corps algébriquement clos.

A.1 Généralités

A.1.1 Notion de groupes algébriques

Définition A.1.1 - Groupe algébrique. On appelle *groupe algébrique (linéaire)* une variété affine G munie d'une structure de groupe pour laquelle les deux applications

(i) $\mu : \mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathsf{G}, (x, y) \mapsto xy$,

(ii) $\iota : \mathsf{G} \to \mathsf{G}, x \mapsto x^{-1}$

sont des morphismes de variétés.

Remarque A.1.2 Attention ! $\mathsf{G} \times \mathsf{G}$ est muni de la topologie de Zariski, plutôt que la topologie produit ; en particulier un groupe algébrique n'est pas un groupe topologique (excepté en dimension 0). En effet G est T_1 sans être T_2, ce que serait un groupe topologique T_1. [1]

Remarque A.1.3 Les translations $\mathsf{G} \to \mathsf{G}, x \mapsto xy$ sont des isomorphismes de variétés, ainsi toutes les propriétés géométriques d'un point de G sont transférées à tous les points de G.

Proposition A.1.4 Un groupe algébrique est lisse.

1. Un espace topologique E est un espace

T_1 **(ou de Fréchet) :** si pour tout couple d'éléments distincts x et y de E, il existe un ouvert contenant x et pas y et un ouvert contenant y et pas x.

T_2 **(ou de Hausdorff ou séparé) :** si deux points distincts admettent toujours des voisinages disjoints.

Démonstration. G est une variété, elle contient donc un ouvert dense de points lisses, d'où la conclusion en vertu de la remarque A.1.3 *QED*

Exemples A.1.5

Le groupe additif $\mathbf{G}_a$: il s'agit de la droite affine $\mathbf{A}^1 = \mathsf{K}$ munie de l'addition usuelle. C'est une variété irréductible de dimension 1.

Le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$: il s'agit de l'ouvert affine $\mathsf{K}^* \subset \mathbf{A}^1$ munie de la multiplication usuelle. C'est une variété irréductible de dimension 1.

Groupe général linéaire : $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$ est un ouvert affine principal de $\mathrm{M}_\mathsf{n}(\mathsf{K}) \simeq \mathbf{A}^{\mathsf{n}^2}$, de dimension n^2. En particulier $\mathbf{G}_m \simeq \mathsf{GL}_1(\mathsf{K})$.

Proposition A.1.6 Un sous-groupe fermé d'un groupe algébrique et le produit direct de deux groupes algébriques sont des groupes algébriques.

Exemples A.1.7

Le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles : $\mathrm{T}_\mathsf{n}(\mathsf{K})$ sous-groupe fermé de $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$ de dimension $\mathsf{n}(\mathsf{n}+1)/2$.

Le groupe des matrices triangulaires inférieures de diagonale unitaire : $\mathrm{U}_\mathsf{n}(\mathsf{K})$ sous-groupe fermé de $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$ de dimension $\mathsf{n}(\mathsf{n}\text{-}1)/2$. En particulier $\mathrm{U}_2(\mathsf{K}) \simeq \mathbf{G}_a$.

Le groupe des matrices diagonales inversibles : $\mathrm{D}_\mathsf{n}(\mathsf{K}) \simeq \mathbf{G}_m^\mathsf{n}$ sous-groupe fermé de $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$ de dimension n.

Le groupe spécial linéaire : $\mathsf{SL}_{\mathsf{n}+1}(\mathsf{K})$ sous-groupe fermé de $\mathsf{GL}_{\mathsf{n}+1}(\mathsf{K})$. C'est une hypersurface de $\mathrm{M}_{\mathsf{n}+1}(\mathsf{K})$ de dimension $\mathsf{n}^2 + 2\mathsf{n}$.

A.1.2 Composante neutre

On notera G° l'unique composante irréductible, *i.e.* connexe pour la topologie de Zariski, de l'élément neutre dans G, appelée *composante neutre* de G ; G sera dit *connexe* lorsque $\mathsf{G} = \mathsf{G}^\circ$.

Proposition A.1.8 Soit G un groupe algébrique.

(i) G° est un sous-groupe normal d'indice fini de G, dont les classes qui en découlent sont les composantes connexes de G ;

(ii) tout sous-groupe fermé d'indice fini de G contient G°.

Exemple A.1.9 $\mathbf{G}_a$, $\mathbf{G}_m$, $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$ (ouvert principal), $\mathsf{SL_n}(\mathsf{K})$, $\mathrm{D}_\mathsf{n}(\mathsf{K})$, $\mathrm{T}_\mathsf{n}(\mathsf{K})$ sont connexes.

Pour la connexité de $\mathsf{SL_n}(\mathsf{K})$ ou $\mathrm{U}_\mathsf{n}(\mathsf{K})$ on peut utiliser la proposition suivante, en se rappelant que $\mathsf{SL_n}(\mathsf{K})$ (resp. $\mathrm{U}_\mathsf{n}(\mathsf{K})$) est engendré par les sous-groupes de transvections $U_{i,j} \simeq \mathbf{G}_a$, $i \neq j$ (resp. $i < j$), où $U_{i,j}$ est l'ensemble des matrices de transvections avec un coefficient arbitraire en position (i, j).

Proposition A.1.10 Soit G un groupe algébrique et $(\mathsf{H}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes fermés connexes de G. Si la famille $(\mathsf{H}_i)_{i\in I}$ engendre G, alors G est connexe.

A.1.3 Sous-groupes et morphismes

Proposition A.1.11 Soit G un groupe algébrique.

Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux ouverts denses de G, alors $\mathsf{G} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$.

Si H est un sous-groupe de G, il en va de même de $\overline{\mathsf{H}}$.

Si H et H' sont des sous-groupes fermés de G et si H' normalise H, alors HH' est un sous-groupe fermé de G.

Proposition A.1.12 Soit $\varphi : \mathsf{G} \to \mathsf{G}'$ un morphisme de groupes algébriques, *i.e.* un morphisme de groupes et de variétés.

(i) $\ker \varphi$ et $\operatorname{im} \varphi$ sont des sous-groupes fermés de G et G' respectivement ;

(ii) $\varphi(\mathsf{G}^\circ) = \varphi(\mathsf{G})^\circ$;

(iii) $\dim \mathsf{G} = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$.

Exemple A.1.13 Pour $\det : \mathsf{GL_n}(\mathsf{K}) \to \mathbf{G}_m$, $\operatorname{im} \det = \mathbf{G}_m$, $\ker \det = \mathsf{SL_n}(\mathsf{K})$ et on retrouve que $\dim \mathsf{SL_n}(\mathsf{K}) = n^2 - 1$.

Définition A.1.14 Un morphisme est dit *rationnel* lorsque le groupe algébrique d'arrivé est $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$.

Théorème A.1.15 - [Hum75, p. 63]. Tout groupe algébrique est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un certain $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$.

D'où la dénomination alternative de *groupes algébriques linéaires* pour les groupes algébriques.

A.2 Groupes réductifs

Définition A.2.1 - Tore. Un groupe algébrique G est dit *diagonalisable* (resp. est un *tore*) lorsqu'il est isomorphe à un sous-groupe fermé de $\mathrm{D_n}(\mathsf{K})$ (resp. à $\mathrm{D_n}(\mathsf{K})$) pour un certain n.

Définition A.2.2 - Sous-groupe de Borel. Un *sous-groupe de Borel* d'un groupe algébrique G est un sous-groupe connexe résoluble maximal.

Puisque un tore T de G est connexe et résoluble, T est contenu dans un sous-groupe de Borel B de G. Ainsi les tores maximaux de G sont ceux des sous-groupes de Borel.

Théorème A.2.3 Tous les sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique sont conjugués.

Un groupe algébrique G possède un unique sous-groupe normal résoluble maximal, qui est automatiquement fermé (il s'agit de l'intersection de tous les sous-groupes de Borel de G). Sa

composante neutre est alors le sous-groupe normal connexe résoluble maximal de G, appelé le *radical* de G et noté $\mathsf{R}(\mathsf{G})$, ainsi

$$\mathsf{R}(\mathsf{G}) = \left(\bigcap_{\mathsf{B}\ \text{Borel}} \mathsf{B} \right)^{\circ}.$$

Le sous-groupe des éléments unipotents de $\mathsf{R}(\mathsf{G})$ est normal dans G et est appelé le *radical unipotent* de G, noté $\mathsf{R}_u(\mathsf{G})$ (il s'agit du sous-groupe normal connexe unipotent maximal de G).

Définition A.2.4 Un groupe algébrique G non trivial est dit

(i) *semi-simple* lorsqu'il est connexe et que $\mathsf{R}(\mathsf{G})$ est trivial ;

(ii) *réductif* lorsqu'il est connexe et que $\mathsf{R}_u(\mathsf{G})$ est trivial.

Proposition A.2.5 $\mathsf{R}_u(\mathsf{G})$ est trivial si et seulement si $\mathsf{R}(\mathsf{G})$ est un tore.

Exemples A.2.6

(i) $\mathsf{SL_n}(\mathsf{K})$ est semi-simple ;

(ii) $\mathsf{R}(\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})) \simeq \mathsf{K}^*$ (groupe des homothéties) ;

(iii) Si G est connexe et $\mathsf{R}(\mathsf{G}) \neq \mathsf{G}$, alors $\mathsf{G}/\mathsf{R}(\mathsf{G})$ est semi-simple ;

(iv) $\mathsf{GL_n}(\mathsf{K})$, les tores, les groupes semi-simples, les groupes finis sont réductifs ;

(v) Si G est connexe et $\mathsf{R}_u(\mathsf{G}) \neq \mathsf{G}$, alors $\mathsf{G}/\mathsf{R}_u(\mathsf{G})$ est réductif ;

Lemme A.2.7 Si G un groupe réductif, alors $\mathsf{R}(\mathsf{G}) = \mathsf{Z}(\mathsf{G})^{\circ}$ est un tore d'intersection finie avec $[\mathsf{G}, \mathsf{G}]$.

A.3 Groupes algébriques linéairement réductifs et géométriquement réductifs

Par hypothèse les représentations considérées seront toujours supposées de degré fini et rationnelles.

A.3.1 Groupes algébriques linéairement réductifs

Définition A.3.1 - Groupes linéairement réductifs. Un groupe algébrique linéaire G est dit *linéairement réductif* lorsque, pour toute représentation rationnelle V et tout $v \in \mathsf{V}^{\mathsf{G}} \setminus \{0\}$, il existe une fonction linéaire invariante $\mathsf{f} \in (\mathsf{V}^*)^{\mathsf{G}}$ telle que $\mathsf{f}(v) \neq 0$.

Théorème A.3.2 Pour un groupe algébrique linéaire G s'équivalent

(i) G est linéairement réductif ;

(ii) pour toute représentation rationnelle V, il existe une unique sous-représentation W telle que $\mathsf{V} = \mathsf{V}^{\mathsf{G}} \oplus \mathsf{W}$ et on a $(\mathsf{W}^*)^{\mathsf{G}} = 0$;

(iii) pour toute G-variété affine X, il existe un unique opérateur de Reynolds $\mathcal{R} : \mathsf{K}[\mathsf{X}] \to \mathsf{K}[\mathsf{X}]^{\mathsf{G}}$; [2]

(iv) toute représentation rationnelle est semi-simple.

Corollaire A.3.3 Si G est linéairement réductif, V et W sont des représentations rationnelles et $\varphi : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ une application linéaire surjective G-équivariante, alors $\varphi(\mathsf{V}^{\mathsf{G}}) = \mathsf{W}^{\mathsf{G}}$.

En caractéristique positive, il y a peu de groupes linéairement réductifs comme le montre le théorème suivant

Théorème A.3.4 - [Nag61]. Si $\operatorname{car} \mathsf{K} = \mathsf{p} > 0$, un groupe algébrique linéaire est linéairement réductif si et seulement si G° est un tore et $\mathsf{G}/\mathsf{G}^\circ$ est premier à p.

Exemple A.3.5 En caractéristique positive les seuls groupes linéairement réductifs sont les groupes finis non modulaire, les tores et les extensions de tores par des groupes finis non modulaires.

En revanche, en caractéristique nulle les notions de groupes algébriques réductifs et linéairement réductifs se confondent.

Théorème A.3.6 - [NM63]. Si $\operatorname{car} \mathsf{K} = 0$, alors un groupe algébrique linéaire est réductif si et seulement s'il est linéairement réductif.

A.3.2 Groupes algébriques géométriquement réductifs

Définition A.3.7 - Groupes géométriquement réductifs. Un groupe algébrique linéaire G est dit *géométriquement réductif* lorsque, pour toute représentation rationnelle V et tout $v \in \mathsf{V}^{\mathsf{G}} \setminus \{0\}$, il existe un invariant homogène $\mathsf{f} \in (\mathsf{V}^*)^{\mathsf{G}}$ de degré strictement positif tel que $\mathsf{f}(v) \neq 0$.

Les groupes linéairement réductifs sont donc clairement géométriquement réductifs. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple d'un p-groupe en caractéristique p positive. On a en revanche l'équivalence suivante

Théorème A.3.8 - [NM63, Hab75].
Un groupe algébrique linéaire est géométriquement réductif si et seulement s'il est réductif.

Démonstration. Le sens direct fût démontré par Nagata et Miyata en 1963 dans [NM63] et le sens réciproque (conjecturé par Mumford) par Haboush en 1975 dans [Hab75]. *QED*

Exemples A.3.9

(i) $\mathbf{G}_a$ agit régulièrement sur K^2 via $\sigma \cdot (x, y) = (x + \sigma y, y)$, pour $\sigma \in \mathbf{G}_a$ et $(x, y) \in \mathsf{K}^2$. $\mathsf{K}[x, y]^{\mathbf{G}_a} = \mathsf{K}[y]$ et pour $v \in \mathsf{K} \times \{0\} = (\mathsf{K}^2)^{\mathbf{G}_a}$ tout invariant s'annule en v. Ainsi $\mathbf{G}_a$ n'est pas géométriquement réductif.

2. Rappelons que $\mathcal{R}$ est une projection G-invariante.

(ii) Supposons $\operatorname{car} \mathsf{K} = \mathsf{p} > 0$. Le groupe cyclique d'ordre p, $\mathbf{C}_{\mathsf{p}} = \langle \sigma \rangle$, agit sur K^2 via $\sigma \cdot (x, y)$, pour $(x, y) \in \mathsf{K}^2$. $\mathbf{C}_{\mathsf{p}}$ n'est pas linéairement réductif, dans la mesure où le sous-espace $\mathsf{K} \times \{0\}$ n'a pas de complémentaire $\mathbf{C}_{\mathsf{p}}$-stable. En revanche $\mathbf{C}_{\mathsf{p}}$ est géométriquement réductif.

La notion de groupes algébriques géométriquement réductifs a notamment l'intérêt d'offrir une formulation généralisée du théorème de finitude pour les algèbres d'invariants, énoncé originellement par Hilbert [Hil90, Hil93] pour les groupes linéairement réductifs (cf. théorème 2.1.4). Cette généralisation fut établie par Nagata [Nag63].

Théorème A.3.10 - Nagata. Si G est un groupe géométriquement réductifs et X est une G-variété affine, alors $\mathsf{K}[\mathsf{X}]^{\mathsf{G}}$ est une K-algèbre de type fini.

Notons que la réciproque est vraie.

Théorème A.3.11 - Popov [Pop79].
Si $\mathsf{K}[\mathsf{X}]^{\mathsf{G}}$ est de type fini pour toute G-variété affine X, alors G est réductif.

Annexe B

Éléments pour la description de l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristiques 3 et 7

B.1 Relations entre les SL_2-invariants en caractéristique 3

Nous indiquons ici les expressions des neuf relations de degrés 12, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24 entre les SL_2-invariants en caractéristique 3, introduites à la section 4.2.2.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{12} = {} & \mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_{10} + (\mathsf{J}_2^2 + \mathsf{J}_4)\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3^2 + (\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3 + \mathsf{J}_2^6 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 \ ; \\
\mathfrak{R}_{16} = {} & 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_6\mathsf{J}_{10} + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_2^2 + 2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_6^2 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_{10} \\
& + (\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3^3 + (\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + (\mathsf{J}_2^4 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_4^2)\mathsf{J}_8 + (2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2)\mathsf{J}_3^2 + (\mathsf{J}_2^5 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_5^2)\mathsf{J}_6 \\
& + (2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_9)\mathsf{J}_3 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_4^4 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_{12} \ ; \\
\mathfrak{R}_{17} = {} & \mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6^2 + (\mathsf{J}_2^2 + \mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{10} + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + (\mathsf{J}_2^3 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_7)\mathsf{J}_{10} \\
& + (2\mathsf{J}_2^4 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3^3 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + (2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_8 + (2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3^2 \\
& + (\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_6 + (\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_7^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{12})\mathsf{J}_3 \\
& + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^3 + \mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_9 \ ; \\
\mathfrak{R}_{18} = {} & 2\mathsf{J}_3^6 + \mathsf{J}_3^4\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_8\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_8^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_{10} + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{10} + (\mathsf{J}_2^3 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3^4 \\
& + (2\mathsf{J}_2^3 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_7\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_2^4 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_{10} + (\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_3^3 \\
& + (2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + (2\mathsf{J}_2^5 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_{12})\mathsf{J}_3^2 \\
& + (\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{J}_4^3 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_{12})\mathsf{J}_6 + (\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9)\mathsf{J}_3 \\
& + \mathsf{J}_2^9 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7^2 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{12} \ ; \\
\mathfrak{R}_{19} = {} & \mathsf{J}_3\mathsf{J}_8^2 + \mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_{10} + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_3^5 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_6 + (\mathsf{J}_2^2 + 2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6^2 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 \\
& + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{10} + (2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3^4 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6^2 + (\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4 + 2\mathsf{J}_4^2)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_3^3 \\
& + (\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + (\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_9)\mathsf{J}_3^2 \\
& + (\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9)\mathsf{J}_6 + (\mathsf{J}_2^8 + \mathsf{J}_4^4 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{12} + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_{12})\mathsf{J}_3 \\
& + \mathsf{J}_2^5\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5^3 + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_4^3\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_7^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{12} + 2\mathsf{J}_7\mathsf{J}_{12} \ ; \\
\mathfrak{R}_{20} = {} & \mathsf{J}_{10}^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^6 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_6^3 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_8\mathsf{J}_{10} + (\mathsf{J}_2^2 + 2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_8^2 + (\mathsf{J}_2^2 + 2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_{10} \\
& + (2\mathsf{J}_2^2 + 2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_6\mathsf{J}_{10} + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_3^5 + \mathsf{J}_5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6^2 + (\mathsf{J}_2^3 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4)\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + (2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{10} \\
& + 2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_3^4 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + (2\mathsf{J}_2^4 + \mathsf{J}_4^2)\mathsf{J}_6^2 + (\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_7)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + (2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{J}_5^2)\mathsf{J}_{10} \\
& + (\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9)\mathsf{J}_3^3 + (\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_9)\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6 + (2\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^2)\mathsf{J}_8 \\
& + (2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^3 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_7^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{12})\mathsf{J}_3^2 + (2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_4^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^3 + \mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_{12})\mathsf{J}_6 \\
& + (\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_5^3 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_7 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{12})\mathsf{J}_3 + \mathsf{J}_2^8\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_4^5 \\
& + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5^2 + \mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7^2 + 2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_{12} + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{12} + 2\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_{12} \ ;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{22} = {} & 2J_3^2J_8^2 + J_6J_8^2 + J_6^2J_{10} + J_2J_3^2J_6J_8 + 2J_2J_6^2J_8 + J_2J_{10}^2 + (J_2^2 + 2J_4)J_3^6 + (J_2^2 + 2J_4)J_3^4J_6 \\
& + (2J_2^2 + 2J_4)J_3^2J_6^2 + (2J_2^2 + J_4)J_8J_{10} + J_5J_3^3J_8 + J_5J_3J_6J_8 + J_2J_4J_8^2 + 2J_2J_4J_6J_{10} + 2J_7J_3^5 \\
& + J_7J_3^3J_6 + (J_2J_5 + 2J_7)J_3J_6^2 + J_4^2J_3^2J_8 + (2J_2^4 + J_2^2J_4 + J_4^2)J_6J_8 + 2J_2^2J_5J_3J_{10} + (J_2J_4^2 + J_5^2)J_3^4 \\
& + (J_2J_4^2 + 2J_5^2)J_3^2J_6 + (2J_2J_4^2 + 2J_5^2)J_6^2 + (2J_2^3J_5 + 2J_2J_4J_5 + J_4J_7 + J_2J_9)J_3J_8 + (J_4^3 + J_2J_5^2 + J_{12})J_{10} \\
& + (J_4^2J_5 + J_2^3J_7 + J_2J_4J_7 + J_2^2J_9 + 2J_4J_9)J_3^3 + (J_2^4J_5 + J_4^2J_5 + J_2J_4J_7 + 2J_2^2J_9 + J_4J_9)J_3J_6 \\
& + (2J_2^3J_4^2 + J_2^2J_5^2 + J_4J_5^2 + 2J_2J_{12})J_8 + (2J_2^4J_4^2 + 2J_2^2J_4^3 + 2J_4^4 + J_2J_7^2 + 2J_7J_9 + J_2^2J_{12})J_3^2 \\
& + (J_2^4J_4^2 + J_2^2J_4^3 + J_4^4 + J_2J_4J_5^2 + 2J_2^2J_5J_7 + J_2J_7^2 + 2J_2J_5J_9 + J_7J_9)J_6 \\
& + (J_2J_4^3J_5 + J_4J_5^3 + 2J_2^4J_4J_7 + J_2^2J_4^2J_7 + 2J_4^3J_7 + J_2J_5^2J_7 + J_5J_7^2 + 2J_2^3J_4J_9 + J_2J_4^2J_9 + 2J_5^2J_9 + 2J_7J_{12})J_3 \\
& + J_2^{11} + J_2^2J_4^2J_5^2 + 2J_2J_5^4 + 2J_2^3J_4J_5J_7 + 2J_2J_4^2J_5J_7 + 2J_5^3J_7 + 2J_2^4J_7^2 + 2J_2^2J_4J_7^2 \\
& + J_2^4J_5J_9 + 2J_2^2J_4J_5J_9 + 2J_2^3J_7J_9 + 2J_2J_4J_7J_9 + J_2^5J_{12} + J_2^3J_4J_{12} + J_2J_4^2J_{12} \ ; \\
\mathfrak{R}_{23} = {} & J_3^5J_8 + 2J_3^3J_6J_8 + J_3J_6^2J_8 + J_3J_{10}^2 + J_2J_3^7 + J_2J_3^5J_6 + 2J_2J_3^3J_6^2 + J_2J_3J_8J_{10} + J_4J_3J_8^2 \\
& + 2J_4J_3^3J_{10} + J_5J_3^4J_6 + 2J_5J_3^2J_6^2 + J_5J_6^3 + 2J_5J_8J_{10} + J_2J_4J_3^3J_8 + (2J_2J_5 + J_7)J_8^2 \\
& + (J_2J_5 + 2J_7)J_3^2J_{10} + (2J_2J_5 + 2J_7)J_6J_{10} + J_2^2J_4J_3^5 + J_2^2J_4J_3^3J_6 + (J_2^4 + J_2^2J_4)J_3J_6^2 \\
& + (J_2^2J_5 + 2J_4J_5 + 2J_2J_7)J_3^2J_8 + (J_2^2J_5 + J_4J_5 + J_2J_7)J_6J_8 + (2J_2^3J_4 + 2J_2J_4^2 + 2J_5^2)J_3J_{10} \\
& + (2J_2^3J_5 + 2J_2^2J_7 + J_4J_7 + 2J_2J_9)J_3^4 + (2J_2^3J_5 + 2J_2J_4J_5 + J_2^2J_7 + J_4J_7 + J_2J_9)J_3^2J_6 + 2J_2^3J_5J_6^2 \\
& + (J_2^4J_4 + J_2^2J_4^2 + J_4^3 + J_2J_5^2 + J_{12})J_3J_8 + (J_2^4J_5 + 2J_2^2J_4J_5 + 2J_2^3J_7 + J_2J_4J_7 + 2J_4J_9)J_{10} \\
& + (J_2^3J_4^2 + 2J_2J_4^3 + J_2^2J_5^2 + J_4J_5^2 + 2J_2J_5J_7 + J_5J_9 + J_2J_{12})J_3^3 + (J_2^3J_4^2 + J_2J_4^3 + J_4J_5^2 + 2J_7^2 + 2J_5J_9)J_3J_6 \\
& + (J_2^3J_4J_5 + J_2^2J_4J_7 + J_4^2J_7 + J_2J_4J_9)J_8 + (J_4^3J_5 + J_2^3J_4J_7 + J_2J_4^2J_7 + 2J_2^4J_9 + J_2^2J_4J_9 + J_4^2J_9 + J_5J_{12})J_3^2 \\
& + (J_2^4J_4J_5 + 2J_2^2J_4^2J_5 + 2J_2^3J_4J_7 + 2J_2J_4^2J_7 + J_2^2J_4J_9)J_6 \\
& + (2J_2^2J_4^4 + 2J_2^3J_4J_5^2 + J_2^4J_5J_7 + J_2^2J_4J_5J_7 + J_4^2J_5J_7 + J_2J_4J_7^2 + 2J_4J_7J_9 + J_2^4J_{12} + 2J_2^2J_4J_{12})J_3 \\
& + J_2^9J_5 + J_2^3J_4^3J_5 + J_2J_4^4J_5 + 2J_2^4J_5^3 + 2J_2^2J_4J_5^3 + J_2^4J_4^2J_7 + J_4^4J_7 \\
& + J_2^3J_5^2J_7 + 2J_2J_4J_5^2J_7 + J_2J_7^3 + 2J_2J_4^3J_9 + 2J_2^2J_5^2J_9 + J_7^2J_9 \ ; \\
\mathfrak{R}_{24} = {} & J_3^8 + 2J_3^2J_6^3 + J_6^4 + J_8^3 + J_3^2J_8J_{10} + 2J_2J_3^2J_8^2 + J_2J_6J_8^2 + 2J_2J_3^4J_{10} + J_2J_6^2J_{10} + (2J_2^2 + 2J_4)J_3^4J_8 \\
& + (J_2^2 + J_4)J_3^2J_6J_8 + 2J_2^2J_6^2J_8 + 2J_4J_{10}^2 + 2J_5J_3^3J_{10} + J_5J_3J_6J_{10} + (2J_2^3 + J_2J_4)J_3^6 + (2J_2^3 + 2J_2J_4)J_3^4J_6 \\
& + (J_2^3 + J_2J_4)J_3^2J_6^2 + 2J_2J_4J_8J_{10} + (2J_2J_5 + J_7)J_3^3J_8 + (J_2J_5 + 2J_7)J_3J_6J_8 + (2J_2^4 + 2J_2^2J_4 + J_4^2)J_8^2 \\
& + (J_2^2J_4 + J_4^2)J_3^2J_{10} + J_2^4J_6J_{10} + J_9J_3^5 + (J_4J_5 + J_2J_7 + J_9)J_3^3J_6 + (J_2^2J_5 + 2J_4J_5 + 2J_2J_7 + J_9)J_3J_6^2 \\
& + (2J_2^3J_4 + J_2J_4^2 + 2J_5^2)J_3^2J_8 + (J_2J_4^2 + J_5^2)J_6J_8 + (J_2J_4J_5 + J_2J_9)J_3J_{10} \\
& + (J_4^3 + J_2J_5^2 + J_{12})J_3^4 + (J_2^2J_4^2 + J_4^3 + 2J_2J_5^2 + J_{12})J_3^2J_6 + (J_2^4J_4 + J_2J_5^2 + 2J_5J_7)J_6^2 \\
& + (2J_4^2J_5 + 2J_2^3J_7 + 2J_2J_4J_7 + 2J_2^2J_9 + 2J_4J_9)J_3J_8 + (J_2^3J_4^2 + J_2J_4^3 + 2J_4J_5^2 + 2J_7^2 + 2J_5J_9 + 2J_2J_{12})J_{10} \\
& + (2J_2J_4^2J_5 + 2J_4^2J_7 + J_2^3J_9 + 2J_2J_4J_9)J_3^3 + (2J_2^3J_4J_5 + J_2J_4^2J_5 + 2J_2^4J_7 + J_2^2J_4J_7 + 2J_4^2J_7 + J_2^3J_9)J_3J_6 \\
& + (2J_2^2J_4^3 + 2J_4^4 + J_2^3J_5^2 + J_2J_4J_5^2 + J_2^2J_5J_7 + 2J_4J_5J_7 + 2J_2J_5J_9 + J_7J_9)J_8 \\
& + (2J_2^3J_4^3 + J_2^2J_4J_5^2 + 2J_4^2J_5^2 + J_2^3J_5J_7 + J_2J_4J_5J_7 + 2J_2^2J_7^2 + J_4J_7^2 + 2J_2^2J_5J_9 + 2J_2J_7J_9 + J_2^3J_{12} + 2J_2J_4J_{12})J_3^2 \\
& + (2J_2^3J_4^3 + 2J_2^2J_4J_5^2 + J_4^2J_5^2 + 2J_2^3J_5J_7 + 2J_2J_4J_5J_7 + 2J_2^2J_7^2 + J_4J_7^2 + 2J_2^2J_5J_9 + 2J_2J_7J_9 + 2J_2^3J_{12} \\
& \qquad + 2J_2J_4J_{12})J_6 \\
& + (J_2^2J_4^3J_5 + J_2^3J_5^3 + J_2J_4J_5^3 + J_2^3J_4^2J_7 + 2J_2J_4^3J_7 + J_2^2J_5^2J_7 + J_7^3 + 2J_2^2J_4^2J_9 + 2J_4^3J_9 + 2J_5J_7J_9 + 2J_2J_7J_{12})J_3 \\
& + J_2^{12} + 2J_2^4J_4^4 + 2J_4^6 + J_2^3J_4^2J_5^2 + 2J_2^2J_5^4 + 2J_2^4J_4J_5J_7 + 2J_2^2J_4^2J_5J_7 + 2J_2J_5^3J_7 + J_2^3J_4J_7^2 + 2J_2J_4^2J_7^2 \\
& + J_5^2J_7^2 + 2J_5^3J_9 + J_2^4J_7J_9 + 2J_4^2J_7J_9 + J_2J_4J_9^2 + 2J_2^4J_4J_{12} + 2J_4^3J_{12} + J_2J_5^2J_{12} + J_{12}^2 \ ;
\end{aligned}
$$

B.2 Syzygies d'ordre 1 entre les relations en caractéristique 3

Nous indiquons ci-après les expressions des treize premières syzygies d'ordre 1 pour l'algèbre $\mathcal{I}_8$ en caractéristique 3, évoquées à la conjecture 4.2.6.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{22} = {} & 2J_2\mathfrak{R}_{20} + J_4\mathfrak{R}_{18} + J_5\mathfrak{R}_{17} + (2J_2^3 + J_3^2 + J_2J_4 + 2J_6)\mathfrak{R}_{16} \\
& + (2J_3^2J_4 + 2J_2J_4^2 + J_5^2 + J_2^2J_6 + J_4J_6 + 2J_3J_7 + J_2J_8 + J_{10})\mathfrak{R}_{12} \ ; \\
\mathfrak{S}_{23} = {} & (J_2^2 + 2J_4)\mathfrak{R}_{19} + J_2J_3\mathfrak{R}_{18} + (2J_3^2 + 2J_2J_4 + J_6)\mathfrak{R}_{17} + (2J_2^2J_3 + J_3J_4 + 2J_2J_5 + 2J_7)\mathfrak{R}_{16} \\
& + (J_2^4J_3 + J_2J_3^3 + J_2^2J_3J_4 + J_3J_4^2 + 2J_3^2J_5 + 2J_2J_4J_5 + J_2J_3J_6 + 2J_4J_7 + J_3J_8)\mathfrak{R}_{12} \ ; \\
\mathfrak{S}_{24} = {} & J_2\mathfrak{R}_{22} + J_5\mathfrak{R}_{19} + (2J_2^3 + 2J_3^2 + 2J_2J_4 + J_6)\mathfrak{R}_{18} + 2J_2^2J_3\mathfrak{R}_{17} + (2J_2^4 + J_2^2J_4 + J_8)\mathfrak{R}_{16} + (J_2^3J_3^2 + 2J_3^4 + J_2^4J_4 \\
& + J_2J_3^2J_4 + 2J_2^2J_4^2 + 2J_4^3 + 2J_2^2J_3J_5 + 2J_3J_4J_5 + 2J_2J_4J_6 + J_5J_7 + 2J_4J_8 + 2J_2J_{10} + 2J_{12})\mathfrak{R}_{12} \ ; \\
\mathfrak{S}_{25} = {} & J_2\mathfrak{R}_{23} + J_2J_3\mathfrak{R}_{20} + (2J_3^2 + 2J_2J_4 + J_6)\mathfrak{R}_{19} + (2J_3J_4 + J_2J_5 + J_7)\mathfrak{R}_{18} \\
& + (2J_2^4 + 2J_2J_3^2 + 2J_2^2J_4 + 2J_2J_6 + J_8)\mathfrak{R}_{17} + (J_2^2J_5 + J_2J_7)\mathfrak{R}_{16} \\
& + (J_2^3J_3J_4 + 2J_3^3J_4 + J_2J_3J_4^2 + J_2^4J_5 + J_2J_3^2J_5 + 2J_2^2J_4J_5 + J_3J_4J_6 + J_2J_3J_8 + J_5J_8 + J_4J_9 + J_3J_{10})\mathfrak{R}_{12} \ ; \\
\mathfrak{S}_{26} = {} & (2J_2J_3^4 + J_2^5J_4 + J_2^2J_3^2J_4 + J_4J_5^2 + 2J_3J_5J_6 + 2J_2J_6^2 + 2J_2J_5J_7 + 2J_3^2J_8 + 2J_2J_3J_9 + 2J_2^2J_{10} + 2J_4J_{10} \\
& + J_2J_{12})\mathfrak{R}_{12} + (2J_2^5 + 2J_2^3J_4 + 2J_2J_3J_5 + 2J_2^2J_6 + 2J_4J_6 + 2J_3J_7 + 2J_{10})\mathfrak{R}_{16} \\
& + (2J_2^3J_3 + J_3^3 + 2J_2^2J_5 + 2J_4J_5 + 2J_3J_6)\mathfrak{R}_{17} + (2J_2^4 + J_2J_3^2 + 2J_4^2 + J_3J_5 + J_2J_6)\mathfrak{R}_{18} \\
& + (2J_2^2J_3 + J_3J_4 + 2J_2J_5)\mathfrak{R}_{19} + (J_2^3 + 2J_3^2 + J_6)\mathfrak{R}_{20} + (J_2^2 + J_4)\mathfrak{R}_{22} \ ; \\
\mathfrak{S}_{27} = {} & (2J_3J_4^3 + J_2^2J_3^2J_5 + 2J_3^2J_4J_5 + 2J_2J_4^2J_5 + 2J_2J_3J_5^2 + 2J_2J_3J_4J_6 + 2J_4J_5J_6 + J_2^4J_7 + J_2J_3^2J_7 + 2J_2^2J_4J_7 \\
& + 2J_4^2J_7 + 2J_3J_5J_7 + 2J_2J_6J_7 + 2J_2^2J_3J_8 + 2J_3J_4J_8 + J_2J_5J_8 + J_2J_4J_9)\mathfrak{R}_{12} \\
& + (2J_2J_3^3 + J_2^2J_3J_4 + 2J_3J_4^2 + J_2^3J_5 + 2J_2J_4J_5 + J_2J_3J_6 + J_2^2J_7 + 2J_4J_7 + 2J_3J_8)\mathfrak{R}_{16} \\
& + (2J_2^5 + 2J_2^2J_3^2 + 2J_2^3J_4 + 2J_3^2J_4 + 2J_4J_6 + J_3J_7 + 2J_2J_8 + 2J_{10})\mathfrak{R}_{17} + J_2^3J_3\mathfrak{R}_{18} \\
& + (2J_2J_3^2 + J_2^2J_4 + J_4^2 + 2J_3J_5 + J_2J_6)\mathfrak{R}_{19} + (2J_2^2J_3 + J_2J_5 + J_7)\mathfrak{R}_{20} + 2J_2J_3\mathfrak{R}_{22} + J_4\mathfrak{R}_{23} \ ; \\
\mathfrak{S}_{281} = {} & (J_2^8 + J_4^4 + 2J_2J_3^3J_5 + J_2^2J_3J_4J_5 + J_2^3J_5^2 + J_3^2J_5^2 + 2J_2J_4J_5^2 + J_3^2J_4J_6 + 2J_2J_4^2J_6 + J_2J_3J_5J_6 + 2J_4J_6^2 + 2J_3^3J_7 \\
& + J_2J_3J_4J_7 + 2J_4J_5J_7 + J_2J_3^2J_8 + 2J_2^2J_4J_8 + J_4^2J_8 + J_3J_5J_8 + 2J_2J_6J_8 + J_2^2J_3J_9 + J_2^3J_{10} + 2J_3^2J_{10} \\
& + 2J_2J_4J_{10})\mathfrak{R}_{12} + (J_2^6 + J_2^3J_3^2 + 2J_3^2J_6 + J_2J_4J_6 + 2J_2J_3J_7 + 2J_2^2J_8 + 2J_4J_8 + 2J_2J_{10} + 2J_{12})\mathfrak{R}_{16} \\
& + (2J_2^4J_3 + J_2J_3^3 + J_2^2J_3J_4 + J_3J_4^2 + 2J_3^2J_5 + J_2J_4J_5 + J_2J_3J_6 + J_5J_6 + J_4J_7 + J_3J_8 + J_2J_9)\mathfrak{R}_{17} \\
& + (2J_2^5 + 2J_2^2J_3^2 + J_3^2J_4 + 2J_2J_4^2 + 2J_2J_3J_5 + J_5^2 + 2J_2^2J_6 + J_4J_6 + J_{10})\mathfrak{R}_{18} + (2J_2^3J_3 + 2J_3^3 + 2J_2^2J_5 + J_3J_6)\mathfrak{R}_{19} \\
& + (J_2^4 + J_2J_3^2 + J_2^2J_4 + J_4^2 + 2J_3J_5 + J_2J_6 + J_8)\mathfrak{R}_{20} + (J_2^3 + J_2J_4)\mathfrak{R}_{22} + J_2J_3\mathfrak{R}_{23} + (2J_2^2 + J_4)\mathfrak{R}_{24} \ ; \\
\mathfrak{S}_{282} = {} & (J_3J_6J_7 + 2J_3J_4^2J_5 + 2J_3J_4J_9 + 2J_2^3J_3J_7 + 2J_2J_3^2J_4^2 + J_2J_5J_9 + J_2^5J_6 + J_2^2J_{12} + 2J_3^4J_4 + 2J_2^2J_4^3 + 2J_5^2J_6 \\
& + 2J_2J_7^2 + 2J_7J_9 + 2J_6J_{10} + J_2J_3^2J_8 + J_2J_4J_{10} + 2J_2J_4J_5^2 + 2J_2^2J_4J_8 + J_2J_4^2J_6 + J_3J_5J_8 + J_2^3J_5^2 \\
& + 2J_3^2J_5^2 + J_2^3J_{10} + J_4J_6^2 + J_3^3J_7 + J_2^2J_3J_4J_5 + J_2J_3J_4J_7 + J_4^4 + 2J_8^2)\mathfrak{R}_{12} \\
& + (J_2^6 + J_2^3J_3^2 + 2J_2J_3^2J_4 + J_2^2J_4^2 + 2J_2J_5^2 + J_2^3J_6 + J_3^2J_6 + J_2J_3J_7 + 2J_5J_7 + J_2J_{10} + J_{12})\mathfrak{R}_{16} \\
& + (J_2^4J_3 + J_2^2J_3J_4 + 2J_3J_4^2 + 2J_2^3J_5 + 2J_3^2J_5 + J_2J_3J_6 + 2J_4J_7 + 2J_3J_8 + 2J_2J_9)\mathfrak{R}_{17} \\
& + (2J_3^2J_4 + 2J_2J_4^2 + 2J_5^2 + 2J_4J_6 + J_3J_7 + 2J_2J_8 + J_{10})\mathfrak{R}_{18} \\
& + (J_2^3J_3 + J_3^3 + J_2^2J_5 + 2J_4J_5 + 2J_3J_6)\mathfrak{R}_{19} + (J_2^4 + 2J_2J_3^2 + 2J_2^2J_4 + 2J_4^2 + 2J_2J_6 + J_8)\mathfrak{R}_{20} \\
& + (2J_2^3 + 2J_3^2 + J_6)\mathfrak{R}_{22} + (2J_2J_3 + 2J_5)\mathfrak{R}_{23} + (J_2^2 + 2J_4)\mathfrak{R}_{24} \ ; \\
\mathfrak{S}_{291} = {} & (J_2J_3^2J_4J_5 + 2J_2J_3J_5J_7 + 2J_2J_3J_4J_8 + J_2^7J_3 + J_2J_5^3 + J_5J_6^2 + J_7J_{10} + 2J_2J_3^5 + 2J_3^3J_4^2 + 2J_4^3J_5 + 2J_5J_{12} \\
& + 2J_2J_7J_8 + 2J_3^2J_4J_7 + J_3J_4J_5^2 + 2J_2^2J_3J_{10} + 2J_2J_5J_{10} + 2J_3J_5J_9 + J_4J_6J_7 + 2J_4J_5J_8 + J_2^2J_3J_5^2 \\
& + J_2J_3^2J_9 + J_2^2J_5J_8 + J_2J_3^3J_6 + 2J_2J_3J_6^2 + 2J_2J_3J_{12} + J_3J_4J_{10} + J_3^2J_5J_6 + J_3J_4^2J_6 + J_2J_4J_5J_6)\mathfrak{R}_{12} \\
& + (2J_2^5J_3 + J_2^3J_3J_4 + J_2J_3J_4^2 + 2J_2J_3^2J_5 + J_2^2J_3J_6 + 2J_2J_5J_6 + J_6J_7 + J_5J_8 + 2J_3J_{10})\mathfrak{R}_{16} \\
& + (J_2^3J_3^2 + 2J_3J_4J_5 + 2J_2J_5^2 + J_3^2J_6 + J_2J_4J_6 + 2J_6^2 + 2J_2J_3J_7)\mathfrak{R}_{17} \\
& + (2J_2^2J_3J_4 + 2J_3J_4^2 + J_2^3J_5 + J_2J_4J_5 + J_5J_6 + 2J_2^2J_7 + J_3J_8)\mathfrak{R}_{18} \\
& + (J_2^2J_3^2 + 2J_3^2J_4 + J_2J_4^2 + J_2J_3J_5 + J_5^2 + J_2^2J_6 + J_4J_6 + 2J_3J_7 + 2J_2J_8 + J_{10})\mathfrak{R}_{19} \\
& + (J_2^3J_3 + J_2J_3J_4 + J_2^2J_5)\mathfrak{R}_{20} + (2J_2^2J_3 + 2J_2J_5 + J_7)\mathfrak{R}_{22} + (J_3^2 + J_2J_4 + 2J_6)\mathfrak{R}_{23} \ ;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}_{292} = {} & (\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^5 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^3 + \mathrm{J}_2^6\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_3^4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_4^3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6^2 \\
& + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_{10} \\
& + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{12} \\
& + (\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^3 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_9)\mathfrak{R}_{16} \\
& + (2\mathrm{J}_2^6 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3^2 + 2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_4^3 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 \\
& + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{17} + (\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_8)\mathfrak{R}_{18} \\
& + (2\mathrm{J}_2^5 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_{10})\mathfrak{R}_{19} \\
& + (\mathrm{J}_3^3 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6)\mathfrak{R}_{20} + (2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5)\mathfrak{R}_{22} + (\mathrm{J}_2^3 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4)\mathfrak{R}_{23} + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathfrak{R}_{24}\ ; \\
\mathfrak{S}_{30} = {} & (\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6^2 + \mathrm{J}_5\mathrm{J}_6\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_8 \\
& + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_{12} + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_7\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_7 \\
& + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^4\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_6\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2^9 + 2\mathrm{J}_3^6 + \mathrm{J}_6^3 + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_7^2 \\
& + \mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^4 + 2\mathrm{J}_3^4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_4^3\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7^2 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_8^2 + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_{12} + 2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{12} \\
& + (\mathrm{J}_2^7 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_3^2 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^4 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^3 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 \\
& + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_6^2 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_7^2 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{16} \\
& + (\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^3 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_8 \\
& + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_{10})\mathfrak{R}_{17} + (2\mathrm{J}_2^6 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_4^3 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_6^2 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 \\
& + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{18} + (2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_3 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_9)\mathfrak{R}_{19} \\
& + (\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_8)\mathfrak{R}_{20} \\
& + (2\mathrm{J}_2^4 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_8)\mathfrak{R}_{22} + (\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5)\mathfrak{R}_{23} + (\mathrm{J}_2^3 + \mathrm{J}_3^2 + 2\mathrm{J}_6)\mathfrak{R}_{24}\ ; \\
\mathfrak{S}_{31} = {} & (\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6^2 \\
& + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_7\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7^2 \\
& + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_{12} + \mathrm{J}_2^7\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5^3 + 2\mathrm{J}_3^4\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_4^3\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_6^2\mathrm{J}_7)\mathfrak{R}_{12} + (\mathrm{J}_2^6\mathrm{J}_3 + 2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^3 \\
& + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6^2 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_7 \\
& + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_7\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_{10})\mathfrak{R}_{16} \\
& + (2\mathrm{J}_2^7 + 2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_3^2 + 2\mathrm{J}_2^5\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^3 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_6 \\
& + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_7^2 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_5\mathrm{J}_9 \\
& + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{17} + (2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^3 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6 \\
& + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_6\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_5\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_{10})\mathfrak{R}_{18} \\
& + (2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3^2 + \mathrm{J}_3^4 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_4^3 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_6^2 + \mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 \\
& + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{19} + (2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_7)\mathfrak{R}_{20} \\
& + (\mathrm{J}_3^3 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6)\mathfrak{R}_{22} + (2\mathrm{J}_2^4 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_8)\mathfrak{R}_{23} + (2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_7)\mathfrak{R}_{24}\ ; \\
\mathfrak{S}_{32} = {} & (2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_8^2 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8^2 + \mathrm{J}_2^{10} + \mathrm{J}_5^4 + \mathrm{J}_4^5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6^2 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^4\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_{12} \\
& + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_3^4\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_3^5\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_6^2 \\
& + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_6^3 + \mathrm{J}_3^4\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_8\mathrm{J}_{12} + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_8\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_{12} + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^3\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5^3 + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 \\
& + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_{12} + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_7\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_9)\mathfrak{R}_{12} \\
& + (\mathrm{J}_2^5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5^2\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_{12} + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^4 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4^3 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_6^2 + 2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_{12} \\
& + 2\mathrm{J}_2^8 + 2\mathrm{J}_4^4 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_9 \\
& + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4)\mathfrak{R}_{16} \\
& + (\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_6\mathrm{J}_9 + \mathrm{J}_5\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3^3 + 2\mathrm{J}_2^5\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_{12} + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_7 \\
& + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_2^6\mathrm{J}_3 + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^3 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_6^2 + 2\mathrm{J}_3^5 \\
& + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5)\mathfrak{R}_{17} + (\mathrm{J}_2^7 + \mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_3^2 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_4^2 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^3 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_6 \\
& + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_6^2 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_6\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_4\mathrm{J}_{10} + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{18} \\
& + (2\mathrm{J}_2^5\mathrm{J}_3 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^3 + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_3^3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_4^2\mathrm{J}_5 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_6 \\
& + \mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_8 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_9 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_9)\mathfrak{R}_{19} \\
& + (2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3^2 + 2\mathrm{J}_2^4\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_4^3 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_5^2 + 2\mathrm{J}_3^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_6^2 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_5\mathrm{J}_7 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_4\mathrm{J}_8 \\
& + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_{10} + \mathrm{J}_{12})\mathfrak{R}_{20} + (2\mathrm{J}_2^5 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_3^2 + 2\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_4^2 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_5^2 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_6 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_7 + \mathrm{J}_2\mathrm{J}_8 + 2\mathrm{J}_{10})\mathfrak{R}_{22} \\
& + (\mathrm{J}_2^3\mathrm{J}_3 + \mathrm{J}_3^3 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_4 + 2\mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_5 + 2\mathrm{J}_3\mathrm{J}_6)\mathfrak{R}_{23} + (2\mathrm{J}_2^4 + 2\mathrm{J}_2\mathrm{J}_3^2 + \mathrm{J}_2^2\mathrm{J}_4 + \mathrm{J}_3\mathrm{J}_5)\mathfrak{R}_{24}\ ;
\end{aligned}
$$

B.3 Expressions des invariants $\mathcal{J}_{13}, \mathcal{J}_{14}$ et $\mathcal{J}_{15}$

Voici les expressions des trois SL_2-invariants en caractéristique 7 de degrés 13, 14 et 15, introduits au paragraphe 4.3.1.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{13} = (&26108765677037 \cdot 3^3/2^{26}/5^4)(j_{10}j_3 - (875/12688860119039982)j_9j_4 \\
&- (10850/57099870535679919)j_9j_2^2 + (148/3524683366399995)j_8j_3j_2 \\
&- (875/25377720238079964)j_7j_6 + (25585525/913597928570878704)j_7j_4j_2 \\
&+ (24043747/253777202380799640)j_7j_3^2 + (87911285/2055595339284477084)j_7j_2^3 \\
&- (815712436317275/38066580357119946)j_6j_5j_2 + (64492285/22557973544959968)j_6j_4j_3 \\
&- (20477723/456798964285439352)j_6j_3j_2^2 + (434636125/1370396892856318056)j_5j_4j_2^2 \\
&+ (977333651/1903329017855997300)j_5j_3^2j_2 + (7634986177/15416965044633578130)j_5j_2^4 \\
&- (671352897919/4060435238092794240)j_4^2j_3j_2 - (1315671535409/10151088095231985600)j_4j_3^3 \\
&+ (2431522636249/41111906785689541680)j_4j_3j_2^3 + (483084126259/57099870535679919000)j_3^3j_2^2 \\
&- (42516404745479/462508951339007343900 0)j_3j_2^5)/7^6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{14} = (&17 \cdot 227 \cdot 420879527141/2^{31}/3^2/5)(j_{10}j_4 - (81004/1827195857141758875)j_{10}j_2^2 \\
&- (56/8120870476185595)j_9j_5 + (1123472/60906528571391962 5)j_9j_3j_2 \\
&- (26/24362611428556785)j_8j_6 + (11963/438527005714022130)j_8j_4j_2 \\
&- (2751551/15226632142847990625)j_8j_3^2 + (84854014/246671440714137448125)j_8j_2^3 \\
&- (19152/8120870476185595)j_7^2 - (1843968/40604352380927975)j_7j_5j_2 \\
&+ (18215652/40604352380927975)j_7j_4j_3 + (8404297328/3045326428569598125)j_7j_3j_2^2 \\
&+ (1176392/14617566857134071)j_6^2j_2 - (1190287586335694/4872522285711357)j_6j_5j_3 \\
&+ (5544268/8120870476185595)j_6j_4^2 + (139107364291/3288952542855165975)j_6j_4j_2^2 \\
&- (220546384429/913597928570879 4375)j_6j_3^2j_2 - (5607062286812/14800286442848246 8875)j_6j_2^4 \\
&- (178672816/365439171428351775)j_5^2j_2^2 - (30953138741/10963175142850553250)j_5j_4j_3j_2 \\
&- (114974150599/15226632142847990625)j_5j_3^3 \\
&+ (19950928211662/1233357203570687240625)j_5j_3j_2^3 - (2845077977/73087834285670355)j_4^3j_2 \\
&- (2027722223131/40604352380927975000)j_4^2j_3^2 \\
&- (7873896142463827/2960057288569649377500)j_4^2j_2^3 \\
&- (430736600745542/41111906785689574 6875)j_4j_3^2j_2^2 \\
&+ (21727818239983079/6660128899281711099375)j_4j_2^5 \\
&+ (1119117483050301/1268886011903999218750)j_3^4j_2 \\
&+ (117238795277602292/9250179026780154304 6875)j_3^2j_2^4 \\
&- (1391221031276438992/1498529002338384997359375)j_2^7)/7^8,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{15} = (&13 \cdot 199 \cdot 9622517 \cdot 11417881/2^{31}/3^2/5^3)(j_{10}j_5 \\
&- (60906528571392106/4263456999997439985)j_{10}j_3j_2 + (1610/852691399999487997)j_9j_4j_2 \\
&- (151592/7674222599995391973)j_9j_2^3 - (5/284230466666495999)j_8j_7 \\
&- (574/852691399999487997)j_8j_5j_2 + (17079/11369218666659839960)j_8j_4j_3 \\
&+ (3780239/6395185499999615997750)j_8j_3j_2^2 + (1132460/852691399999487997)j_7j_6j_2 \\
&+ (144697/1421152333332479995)j_7j_5j_3 + (22745/1705382799998975994)j_7j_4^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (130280479/1705382799998975994)\mathsf{j}_7\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^2 - (11630020073/21317284999987199 9250)\mathsf{j}_7\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2 \\
&+ (2669289854/69068003399958527757)\mathsf{j}_7\mathsf{j}_2^4 - (135952066060595/1705382799998975994)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4 \\
&- (13823606369905010/7674222599995391973)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^2 - (47621305/393549876922840614)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 \\
&- (49909516258/5755666949996543979 75)\mathsf{j}_6\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^3 - (10774267/7105761666662399975)\mathsf{j}_5^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2 \\
&- (13615967099/61393780799963135784)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_2 - (14886617977/85269139999948799700)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^2 \\
&- (14679693322/5312923338458348289)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_4\mathsf{j}_2^3 \\
&- (39648155077391/1918555649998847993 2500)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_2^2 \\
&+ (6980960636503/5977038755765641825125)\mathsf{j}_5\mathsf{j}_2^5 - (26373457/22738437333319679920)\mathsf{j}_4^3\mathsf{j}_3 \\
&+ (320196294523943/46045335599972351838000)\mathsf{j}_4^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^2 \\
&+ (127643396827597/2558074199998463991 0000)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2 \\
&+ (39331397547176/2590050127498444790 8875)\mathsf{j}_4\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^4 \\
&+ (199622292114959/5755666949996543979 7500)\mathsf{j}_3^3\mathsf{j}_2^3 \\
&- (87951565346141/4662090229497200623 5975)\mathsf{j}_3\mathsf{j}_2^6)/7^7,
\end{aligned}
$$

B.4 Relations entre les SL_2-invariants en caractéristique 7

Pour des raisons de compromis en terme de place, nous n'indiquons ici que les expressions des 11 premières relations (sur les 23) de degrés 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18^2, 19, 20^2 entre les SL_2-invariants en caractéristique 7.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{11} = {} & 4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + 6\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^4 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_8 + 3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2^3 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^2 \\
& + (4\mathsf{J}_3^3 + 6\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2 + 3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2 + 3\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + 5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 \ ; \\
\mathfrak{R}_{13} = {} & 4\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_7 + 4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_2\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^5 + 3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7 + 5\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9 + (4\mathsf{J}_3^2 + 6\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_7 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^3 \\
& + (\mathsf{J}_3^3 + 3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_2^2 + (3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2 + \mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{10} \ ; \\
\mathfrak{R}_{14} = {} & \mathsf{J}_2^7 + \mathsf{J}_7^2 + 4\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_8 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{11} + 3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^5 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_8 + 3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7 + 6\mathsf{J}_5\mathsf{J}_9 + \mathsf{J}_6\mathsf{J}_2^4 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_8 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_7 \\
& + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2^3 + (\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 4\mathsf{J}_{10})\mathsf{J}_2^2 + (2\mathsf{J}_3^4 + 5\mathsf{J}_4^3 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_6^2)\mathsf{J}_2 + 6\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4^2 + 3\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 \ ; \\
\mathfrak{R}_{15} = {} & 4\mathsf{J}_7\mathsf{J}_8 + \mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{11} + 4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{13} + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^6 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8 + 3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{11} + 3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2\mathsf{J}_8 \\
& + (2\mathsf{J}_3^2 + \mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_8 + (5\mathsf{J}_4^2 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_7 + (4\mathsf{J}_3^3 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2^3 + (3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2 + 3\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_2^2 \\
& + (5\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4 + 5\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5^2 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{10})\mathsf{J}_2 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^3 + 6\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + 5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{10} \ ; \\
\mathfrak{R}_{16} = {} & \mathsf{J}_2^8 + 5\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7^2 + 4\mathsf{J}_2^4\mathsf{J}_8 + 6\mathsf{J}_7\mathsf{J}_9 + 3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_7 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_9 + 3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{11} + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_{13} \\
& + 4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8 + 4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + 5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9 + 5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{11} + \mathsf{J}_6\mathsf{J}_2^5 + 2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_2\mathsf{J}_8 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7 \\
& + 3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_9 + 5\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_2^4 + (\mathsf{J}_4^2 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_8 + (4\mathsf{J}_3^3 + 5\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_7 + (5\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 4\mathsf{J}_{10})\mathsf{J}_2^3 \\
& + (3\mathsf{J}_3^4 + 5\mathsf{J}_4^3 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + 4\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_6^2)\mathsf{J}_2^2 + (3\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4^2 + 6\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_5^2 + 4\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + 2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{10})\mathsf{J}_2 \\
& + 4\mathsf{J}_3^4\mathsf{J}_4 + 6\mathsf{J}_4^4 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + 4\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5^2 + 3\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + 3\mathsf{J}_5^2\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_6^2 + 6\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_{10} \ ; \\
\mathfrak{R}_{17} = {} & 4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7\mathsf{J}_8 + 6\mathsf{J}_8\mathsf{J}_9 + 2\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_{11} + 2\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_{13} + 6\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{15} + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^7 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_7^2 + 2\mathsf{J}_3\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_8 + 3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^3\mathsf{J}_7 \\
& + \mathsf{J}_4\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_9 + 5\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_{11} + 5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_3^2 + 5\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2^2\mathsf{J}_7 + (5\mathsf{J}_3^2 + 6\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2\mathsf{J}_9 + (\mathsf{J}_3^2 + 2\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_{11} \\
& + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_2\mathsf{J}_8 + (\mathsf{J}_4^2 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_2\mathsf{J}_7 + (4\mathsf{J}_4^2 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5)\mathsf{J}_9 + 6\mathsf{J}_3\mathsf{J}_6\mathsf{J}_8 + (2\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4 + 4\mathsf{J}_{10})\mathsf{J}_7 \\
& + (5\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_5 + 5\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6)\mathsf{J}_2^3 + (2\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4 + 4\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_5 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_5^2 + 5\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_{10})\mathsf{J}_2^2 \\
& + (2\mathsf{J}_3^5 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^3 + 5\mathsf{J}_3^2\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5 + \mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_6 + 4\mathsf{J}_4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6 + \mathsf{J}_3\mathsf{J}_6^2 + 3\mathsf{J}_5\mathsf{J}_{10})\mathsf{J}_2 + 4\mathsf{J}_3^3\mathsf{J}_4^2 + 4\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4^2\mathsf{J}_6 + 4\mathsf{J}_5\mathsf{J}_6^2 + 3\mathsf{J}_3\mathsf{J}_4\mathsf{J}_{10} \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{18} = {} & J_2^9 + 2J_2^2J_7^2 + 6J_2^5J_8 + 2J_2J_8^2 + 4J_2J_7J_9 + J_9^2 + 5J_7J_{11} + 6J_3J_7J_8 + 5J_3J_2^2J_{11} + 4J_3J_{15} + 3J_4J_2^3J_8 \\
& + 5J_5J_2^3J_7 + 3J_5J_2J_{11} + 6J_5J_{13} + 6J_6J_2^2J_8 + J_3J_4J_2^2J_7 + 6J_3J_4J_2J_9 + 2J_3J_4J_{11} + (3J_4^2 + 5J_3J_5)J_2J_8 \\
& + (3J_3^3 + J_4J_5 + 2J_3J_6)J_2J_7 + (3J_3^3 + 3J_4J_5 + 3J_3J_6)J_9 + (2J_4J_6 + 6J_{10})J_2^4 + (4J_3^2J_4 + 6J_4J_6)J_8 \\
& + (3J_3^2J_5 + J_5J_6)J_7 + (2J_4^3 + J_3^2J_6 + J_6^2)J_2^3 + (6J_3^2J_4^2 + 5J_3^3J_5 + 5J_4J_5^2 + 2J_4^2J_6 + 6J_3J_5J_6 + J_4J_{10})J_2^2 \\
& + (5J_3^4J_4 + 3J_4^4 + 6J_3J_4^2J_5 + 4J_3^2J_5^2 + 3J_3^2J_4J_6 + 3J_5^2J_6 + 6J_4J_6^2 + 2J_3^2J_{10} + 4J_6J_{10})J_2 \\
& + J_3^6 + 2J_3^2J_4^3 + 3J_3^3J_4J_5 + 2J_4^3J_6 + J_3J_4J_5J_6 + 4J_6^3 + 6J_4^2J_{10} + 3J_3J_5J_{10} \ ; \\
\mathfrak{R}'_{18} = {} & 3J_2^2J_7^2 + 4J_2^5J_8 + 4J_2J_8^2 + 5J_2J_7J_9 + 3J_9^2 + 5J_7J_{11} + 3J_3J_7J_8 + 2J_3J_2J_{13} + 3J_3J_{15} + J_4J_2^7 + 6J_4J_7^2 + 2J_4J_2^3J_8 \\
& + J_5J_2^3J_7 + 4J_5J_2^2J_9 + 5J_5J_{13} + (3J_3^2 + 6J_6)J_2^2J_8 + 3J_3J_4J_2^2J_7 + 3J_3J_4J_2J_9 + 2J_3J_4J_{11} + (6J_4^2 + J_3J_5)J_2J_8 \\
& + (6J_3^3 + 4J_4J_5 + 6J_3J_6)J_2J_7 + (2J_3^3 + 5J_4J_5 + 2J_3J_6)J_9 + (J_4J_6 + 4J_{10})J_2^4 + (5J_3^2J_4 + 2J_4J_6)J_8 \\
& + (2J_3J_4^2 + 6J_3^2J_5 + 4J_5J_6)J_7 + (J_4^3 + 5J_3J_4J_5 + 4J_3^2J_6)J_2^3 + (6J_3^3J_5 + 6J_4J_5^2 + 4J_4^2J_6 + 6J_3J_5J_6 + 2J_4J_{10})J_2^2 \\
& + (6J_3^4J_4 + 6J_4^4 + 5J_3J_4^2J_5 + 6J_3^2J_5^2 + J_5^2J_6 + 6J_3^2J_{10} + 2J_6J_{10})J_2 \\
& + 3J_3^6 + 4J_3^2J_4^3 + 2J_3^3J_4J_5 + 5J_3J_4J_5J_6 + 5J_6^3 + 5J_4^2J_{10} + J_3J_5J_{10} \ ; \\
\mathfrak{R}_{19} = {} & 6J_2^2J_7J_8 + 3J_2J_8J_9 + J_8J_{11} + J_2^3J_{13} + 2J_2^2J_{15} + J_3J_2^8 + 3J_3J_2J_7^2 + 6J_3J_8^2 + 4J_3J_7J_9 \\
& + J_4J_7J_8 + 5J_4J_2^3J_9 + 6J_4J_2^2J_{11} + 2J_4J_{15} + 3J_5J_7^2 + 3J_5J_2^3J_8 + 3J_6J_2^2J_9 + (5J_3^2 + 6J_6)J_2J_{11} \\
& + (4J_3^2 + J_6)J_{13} + 6J_4^2J_2^2J_7 + (4J_4^2 + J_3J_5)J_2J_9 + (2J_4^2 + J_3J_5)J_{11} + (J_3^3 + 6J_4J_5 + 2J_3J_6)J_2J_8 \\
& + (6J_3^2J_4 + 2J_5^2 + J_4J_6 + 5J_{10})J_2J_7 + (J_3^2J_4 + 4J_5^2 + J_4J_6 + 2J_{10})J_9 + (5J_3^2J_5 + 2J_5J_6)J_8 \\
& + (6J_3^4 + 3J_4^3 + 3J_3J_4J_5 + 3J_6^2)J_7 + (6J_4^2J_5 + 6J_3J_4J_6)J_2^3 + (2J_3J_4^3 + 2J_3^3J_6 + J_4J_5J_6 + 6J_3J_6^2 + 3J_5J_{10})J_2^2 \\
& + (J_3^3J_4^2 + 3J_3^4J_5 + 3J_4^3J_5 + 4J_3J_4J_5^2 + 5J_3J_4^2J_6 + 2J_5J_6^2 + 6J_3J_4J_{10})J_2 + 5J_3J_4^4 + J_3^2J_4^2J_5 \\
& + 6J_3^3J_5^2 + 3J_3^3J_4J_6 + 4J_4^2J_5J_6 + 4J_3J_5^2J_6 + 4J_3J_4J_6^2 + 2J_3^3J_{10} + J_4J_5J_{10} + 6J_3J_6J_{10} \ ; \\
\mathfrak{R}_{20} = {} & J_2^{10} + 5J_2^3J_7^2 + 2J_2^2J_7J_9 + 3J_2J_9^2 + 3J_2J_7J_{11} + 3J_9J_{11} + 2J_7J_{13} + J_3J_2J_7J_8 + 4J_3J_8J_9 + J_3J_2^3J_{11} \\
& + 5J_3J_2^2J_{13} + J_3J_2J_{15} + J_4J_2J_7^2 + J_4J_2^4J_8 + 5J_4J_8^2 + 6J_4J_7J_9 + 3J_5J_7J_8 + 6J_5J_2^3J_9 + 4J_5J_2^2J_{11} \\
& + 2J_5J_2J_{13} + 6J_5J_{15} + (3J_3^2 + 4J_6)J_7^2 + 5J_6J_2^3J_8 + 5J_3J_4J_2J_{11} + (4J_4^2 + J_3J_5)J_2^2J_8 + (3J_3^3 + J_4J_5)J_2^2J_7 \\
& + (J_3^3 + J_4J_5 + 6J_3J_6)J_2J_9 + (6J_4J_5 + 6J_3J_6)J_{11} + (J_3^2J_4 + 2J_5^2 + J_4J_6 + 2J_{10})J_2J_8 \\
& + (J_3J_4^2 + 2J_5J_6)J_2J_7 + (4J_3J_4^2 + 2J_3^2J_5 + 2J_5J_6)J_9 + 2J_6^2J_2^4 + (6J_3^4 + J_4^3 + 4J_3J_4J_5 + 6J_6^2)J_8 \\
& + (4J_3^3J_4 + 4J_4^2J_5 + 5J_3J_5^2 + 6J_3J_4J_6 + J_3J_{10})J_7 + (5J_4^2J_6 + 2J_4J_{10} + 5J_{14})J_2^3 \\
& + (5J_3^4J_4 + 2J_4^4 + 6J_3J_4^2J_5 + 6J_3^2J_5^2 + J_3^2J_4J_6 + 5J_5^2J_6 + 4J_4J_6^2 + 2J_3^2J_{10} + 6J_6J_{10})J_2^2 \\
& + (4J_3^6 + 3J_3^2J_4^3 + 2J_3^3J_4J_5 + 3J_4^2J_5^2 + 6J_3J_5^3 + J_3^4J_6 + 3J_4^3J_6 + 4J_3^2J_6^2 + 5J_6^3 + J_4^2J_{10} + 6J_3J_5J_{10})J_2 \\
& + 3J_3^4J_4^2 + J_4^5 + 2J_3^5J_5 + 6J_3J_4^3J_5 + 5J_3^2J_4J_5^2 + 4J_3^3J_5J_6 + 4J_4J_5^2J_6 \\
& + 2J_4^2J_6^2 + 4J_3J_5J_6^2 + 5J_3^2J_4J_{10} + 5J_5^2J_{10} + 3J_4J_6J_{10} + 4J_3^2J_{14} \ ; \\
\mathfrak{R}'_{20} = {} & 2J_2^3J_7^2 + J_2^6J_8 + 4J_2^2J_8^2 + J_2^2J_7J_9 + 4J_2J_9^2 + 5J_2J_7J_{11} + J_9J_{11} + 6J_7J_{13} + 4J_3J_2J_7J_8 + 2J_3J_8J_9 \\
& + 6J_3J_2^3J_{11} + 3J_4J_2J_7^2 + 3J_4J_2^4J_8 + 2J_4J_8^2 + 6J_4J_7J_9 + 3J_5J_7J_8 + 2J_5J_2^3J_9 + 2J_5J_2^2J_{11} + J_5J_2J_{13} + J_5J_{15} \\
& + (3J_3^2 + 6J_6)J_7^2 + J_6J_2^3J_8 + 3J_3J_4J_2^2J_9 + 5J_3J_4J_2J_{11} + 6J_3J_4J_{13} + J_3J_5J_2^2J_8 + (5J_3^3 + 5J_4J_5)J_2^2J_7 \\
& + (4J_3^3 + 3J_4J_5 + 5J_3J_6)J_2J_9 + (4J_3^3 + 6J_4J_5 + J_3J_6)J_{11} + (J_3^2J_4 + 6J_5^2 + J_4J_6 + 4J_{10})J_2J_8 \\
& + (2J_3J_4^2 + 5J_3^2J_5 + J_5J_6)J_2J_7 + (J_3J_4^2 + 6J_3^2J_5 + 4J_5J_6)J_9 + (3J_3^4 + 5J_4^3 + 3J_3J_4J_5 + J_3^2J_6 + 2J_6^2)J_8 \\
& + (5J_3^3J_4 + 4J_4^2J_5 + J_3J_5^2 + 2J_3J_{10})J_7 + (4J_3^4J_4 + 5J_3J_4^2J_5 + 5J_3^2J_4J_6 + 2J_3^2J_{10})J_2^2 \\
& + (2J_3^6 + J_3^2J_4^3 + 3J_3^3J_4J_5 + 4J_4^2J_5^2 + 5J_3J_5^3 + 2J_3^4J_6 + 2J_3J_4J_5J_6 + 2J_3^2J_6^2)J_2 \\
& + J_3^4J_4^2 + 5J_3^5J_5 + 2J_3^2J_4J_5^2 + J_3^3J_5J_6 + 6J_3^2J_4J_{10} + 6J_5^2J_{10} \ ;
\end{aligned}
$$

Annexe C

Équations alternatives pour le $\mathfrak{D}$-invariant j_3

C.1 Coefficients P_i et Q_i des équations (5.44)

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_1 = {} & \mathsf{i}_1^6\mathsf{i}_2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{i}_1^4\mathfrak{k}_2 + \mathsf{i}_1^4\mathsf{i}_2^2 + 2\mathsf{j}_2^3\mathsf{i}_1^2 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{i}_1^2\mathfrak{k}_2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{i}_1^3 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + \mathsf{j}_4\mathsf{i}_1^4 + \mathsf{i}_1^2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathsf{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2 \\ & + 2\mathsf{j}_2^3\mathfrak{l}_2 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2 + 2\mathsf{j}_2^2\mathfrak{l}_2^2 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{i}_1\mathfrak{l}_2 + \mathsf{j}_3^2\mathsf{i}_1^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{i}_1^2\mathfrak{k}_2 + \mathsf{j}_5\mathsf{i}_1^3 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_4\mathfrak{k}_2 + \mathsf{j}_3^2\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4\mathsf{i}_1 \\ & + 2\mathsf{j}_4\mathsf{i}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{j}_4\mathfrak{k}_2^2 + \mathsf{j}_4\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{j}_5\mathsf{i}_1\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{j}_6\mathsf{i}_1^2 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_6\mathsf{i}_2 + \mathsf{j}_6\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{j}_7\mathsf{i}_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_2 = {} & (2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{j}_4)X^3 + (\mathsf{i}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2^2 + 2\mathfrak{l}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2^2 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4)X \\ & + \mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4\end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_2 = {} & \mathsf{j}_2\mathsf{i}_1^8 + (\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2)\mathsf{i}_1^6 + (2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_5)\mathsf{i}_1^5 + (2\mathfrak{k}_2^3 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2)\mathsf{i}_1^4 + (\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_7)\mathsf{i}_1^3 \\ & + (\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^3 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2^3 + \mathsf{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{j}_2^4 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3^2 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6)\mathsf{i}_1^2 \\ & + (2\mathfrak{k}_2^3\mathsf{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3^3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_6)\mathsf{i}_1 + \mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2^3 + \mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2^3 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^4 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3^2 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3^2 \\ & + 2\mathfrak{l}_2^3\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_3 = {} & (\mathsf{i}_2 + 2\mathfrak{l}_2 + 2\mathsf{j}_2)X^6 + 2\mathsf{i}_2^2X^4 + (\mathfrak{k}_2^3 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_4)X^2 + (2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_5 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5)X + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2 \\ & + 2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3^2 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_6 + 2\mathsf{j}_8\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Q}_3 = {} & (2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2 + 2\mathsf{j}_2^2)\mathsf{i}_1^7 + (\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + \mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_2 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_6)\mathsf{i}_1^5 + (\mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_3)\mathsf{i}_1^4 \\ & + (\mathsf{i}_2^4 + 2\mathfrak{k}_2^4 + 2\mathsf{i}_2^3\mathfrak{l}_2 + \mathsf{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_6)\mathsf{i}_1^3 \\ & + (2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_5 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_5 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_7 + 2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7)\mathsf{i}_1^2 \\ & + (2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2^2 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2^2 + \mathfrak{l}_2^3\mathsf{j}_2^2 + 2\mathsf{j}_2^5 + 2\mathsf{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2^3\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_4 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_4 \\ & \qquad + 2\mathsf{j}_3^2\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_7)\mathsf{i}_1 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{i}_2\mathsf{j}_2^3\mathsf{j}_3 + 2\mathsf{j}_2^4\mathsf{j}_3 + \mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 \\ & + 2\mathsf{i}_2^3\mathsf{j}_5 + \mathfrak{k}_2^3\mathsf{j}_5 + \mathfrak{k}_2^2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_5 + 2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + \mathsf{i}_2^2\mathsf{j}_7 + \mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_7 + \mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_7 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2\mathsf{j}_7 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_7 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_4 = {} & (\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{l}_2^2 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2 + 2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_2)X^5 + (2\mathfrak{k}_2\mathsf{j}_3 + \mathsf{j}_5)X^4 + (\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_4)X^3 \\ & + (2\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_3 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_5)X^2 + (\mathsf{i}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_2^2 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2^3 + \mathsf{j}_2^4 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathsf{j}_4 + \mathfrak{l}_2^2\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_8)X \\ & + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_3 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_3\mathsf{j}_4 + \mathsf{j}_2^2\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_4\mathsf{j}_5 + \mathsf{j}_3\mathsf{j}_6 + \mathsf{i}_2\mathsf{j}_7 + \mathfrak{k}_2\mathsf{j}_7 + \mathfrak{l}_2\mathsf{j}_7 + \mathsf{j}_2\mathsf{j}_7\end{aligned} \tag{C.3}$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}_4 = {} & 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1^{10} + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{i}_1^7 + (\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2)\mathfrak{i}_1^6 + (\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5)\mathfrak{i}_1^5 \\
& + (\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6)\mathfrak{i}_1^4 + 2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{i}_1^3 \\
& + (\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4 + \mathfrak{k}_2^5 + \mathfrak{l}_2^5 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_{10})\mathfrak{i}_1^2 \\
& + (2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7 \\
& + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_9)\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2^2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^3 + \mathfrak{i}_2^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{l}_2^4\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3 \\
& + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2^4 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^4 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 \\
& + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5^2 + \mathfrak{j}_6^2 + 2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_{10} + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_{10}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_5 = {} & (\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{l}_2^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2)X^5 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3X^4 + 2\mathfrak{j}_6X^3 + (2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3)X^2 \\
& + (2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^3 + 2\mathfrak{j}_2^4 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5)X \\
& + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}_5 = {} & 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{i}_1^{10} + \mathfrak{j}_2^2\mathfrak{i}_1^8 + (2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{j}_5)\mathfrak{i}_1^7 + (\mathfrak{i}_2^3 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2 + 2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{j}_3^2)\mathfrak{i}_1^6 \\
& + (\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6)\mathfrak{i}_1^4 + (\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_5)\mathfrak{i}_1^3 \\
& + (2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^3 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4 + 2\mathfrak{l}_2^5 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 \\
& \quad + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_{10})\mathfrak{i}_1^2 + (\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 \\
& \qquad + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7)\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3 \\
& + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2^3 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 \\
& + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_6^2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8.
\end{aligned}
$$

C.2 Coefficients $\mathfrak{c}_i$ de l'équation (5.45)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{c}_2 = {} & (\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^4 + 2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2^3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^2 \\
& + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 \\
& + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{j}_3^3 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 \\
& + 2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{c}_1 = {} & \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^4\mathfrak{k}_2 + \mathfrak{i}_1^6\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2 + \mathfrak{i}_1^6\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_2^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2 + 2\mathfrak{i}_2^4\mathfrak{l}_2^2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^3 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^3 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^4 + \mathfrak{i}_1^{10}\mathfrak{j}_2 \\
& + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{k}_2^5\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_1^8\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^4\mathfrak{j}_2 + \mathfrak{l}_2^5\mathfrak{j}_2 + 2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2 \\
& + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2^2 + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2^4 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^5 + \mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2^4\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^5\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 \\
& + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3 + \mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3^2 + \mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_2^4\mathfrak{j}_4 \\
& + \mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 \\
& + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4^2 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2 + 2\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5 \\
& + \mathfrak{i}_1^5\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 \\
& + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6 + 2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 \\
& + \mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 + 2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_8 + 2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 + \mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{c}_0 = {} & +\mathfrak{i}_1^{11}\mathfrak{i}_2^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^7+\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2^4\mathfrak{k}_2+\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2^4+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{k}_2^5+\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2+\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2^5\mathfrak{l}_2+\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^5\mathfrak{l}_2^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2^3 \\
& +\mathfrak{i}_1^1\mathfrak{3}\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1^{11}\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1^{11}\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2 \\
& +\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2+\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2^3+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^3+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_2^3+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3 \\
& +2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^3+2\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2^4+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^4+\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^4+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^4+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^5+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^5+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^5+2\mathfrak{i}_1^{12}\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^5\mathfrak{j}_3+\mathfrak{k}_2^6\mathfrak{j}_3 \\
& +2\mathfrak{i}_1^{10}\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_2^5\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_1^8\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{l}_2^4\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^5\mathfrak{j}_3+\mathfrak{l}_2^6\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_1^8\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3 \\
& +\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^4\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_2^4\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3 \\
& +\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_3+2\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{j}_3^2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3^2+\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3^2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3^2+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3^3+\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4 \\
& +\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^5\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^9\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4 \\
& +\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_4 \\
& +2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4 \\
& +2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_4^2+\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^2 \\
& +\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_4^2+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_4^2+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4^3+\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4^3+\mathfrak{i}_1^{10}\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_2^5\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^8\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^4\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1^8\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5 \\
& +\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_5+\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^4\mathfrak{j}_5+\mathfrak{l}_2^5\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{k}_2^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5 \\
& +2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^4\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5 \\
& +\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_5 \\
& +\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5+2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5+\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_5+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_5^2+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5^2+2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_5^2 \\
& +2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_6+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^7\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_6 \\
& +2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_6+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6 \\
& +2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6+\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_6+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6+\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6+\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6+\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_6+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_1^6\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_7 \\
& +2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2^3\mathfrak{j}_7+\mathfrak{l}_2^4\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7+\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_7 \\
& +2\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^3\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7+\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7 \\
& +2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{j}_4^2\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_7+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_7+\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_6\mathfrak{j}_7+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_8+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1^5\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8 \\
& +2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_8+\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_8+\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8+\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8+\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_3^2\mathfrak{j}_8+\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_8 \\
& +\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{j}_7\mathfrak{j}_8+2\mathfrak{i}_1^4\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{i}_2^3\mathfrak{j}_9+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{i}_2\mathfrak{l}_2^2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{i}_2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_9+2\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_9+\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_9 \\
& +\mathfrak{i}_1^2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9+2\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9+2\mathfrak{l}_2\mathfrak{j}_4\mathfrak{j}_9+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_{10}+\mathfrak{i}_1^3\mathfrak{k}_2\mathfrak{j}_{10}+\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_2^2\mathfrak{j}_{10}+\mathfrak{i}_1\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{j}_{10}+2\mathfrak{i}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10}+2\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{10}+\mathfrak{j}_5\mathfrak{j}_{10}+2\mathfrak{j}_3\mathfrak{j}_{12}
\end{aligned}
$$

Annexe D

Modèles d'Artin-Schreier normalisés

Étant donné un modèle de Weierstraß $y^2 + \mathsf{h}(x)y = \mathsf{f}(x)$ pour une courbe hyperelliptique de genre 3 en caractéristique 2, nous expliquons comment obtenir effectivement un modèle d'Artin-Schreier normalisé (cf. théorème 9.1.2) dans l'orbite de $\mathsf{f}(x)/\mathsf{h}^2(x)$ pour l'action du groupe d'Artin-Schreier $\mathsf{AS}(\mathsf{K}(x))$ et du groupe projectif linéaire $\mathsf{PGL}_2(\mathsf{K})$. Notre démarche est résumée par l'algorithme 5.

Algorithme 5 : De Weierstraß à Artin-Schreier

Entrée : $\mathsf{h}(x) = h_4\,x^4 + h_3\,x^3 + h_2\,x^2 + h_1\,x + h_0$, $\mathsf{f}(x)$.
Sortie : $\mathsf{u}(x)$

```
j2 := h1 h3 + h2^2;
j3 := h3^2 h0 + h4 h1^2 + h3 h2 h1;
si j3 = 0 alors
    si j2 = 0 alors
        si h1 = 0 et h2 = 0 et h3 = 0 alors
            aller à la section D.5                    /* Type (7) */
        aller à la section D.4                        /* Type (1,5) */
    si h1 = 0 et h3 = 0 alors
        aller à la section D.3                        /* Type (3,3) */
    aller à la section D.2                            /* Type (1,1,3) */
aller à la section D.1                                /* Type (1,1,1,1) */
```

D.1 Type $(1, 1, 1, 1)$

Ces courbes satisfont $\mathsf{j}_3 \neq 0$, *i.e.* h est séparable. Afin de déterminer un modèle d'Artin-Schreier équivalent de la forme

$$y^2 + y = \frac{\mathsf{F}(x)}{\mathsf{H}(x)}, \quad \text{avec } \deg \mathsf{F}(x) = 4 \text{ et } \deg \mathsf{H}(x) = 4,$$

il s'agit de calculer un polynôme $t(x) = t_4\,x^4 + t_3\,x^3 + t_2\,x^2 + t_1\,x + t_0$ tel que

$$\mathsf{f}(x)/\mathsf{h}^2(x) + (t(x)/\mathsf{h}(x))^2 + t(x)/\mathsf{h}(x)$$

soit de degré 4 ou, de façon équivalente, tel que $\mathsf{f}(x) + t(x)^2$ soit divisible par $\mathsf{h}(x)$. Disposant d'un tel polynôme $t(x)$, le polynôme $\mathsf{F}(x)$ est simplement donné par $(\mathsf{f}(x) + t(x)^2)/\mathsf{h}(x)$ et le polynôme $\mathsf{H}(x)$ par $\mathsf{h}(x)$.

Sous la condition générique $h_0h_1 \neq 0$, un tel polynôme $t(x)$ est donné par

$$\begin{aligned}
t_0^2 &= 0\,,\\
\mathsf{j}_3\,h_0^2\cdot t_1^2 &= {h_0}^4h_1f_7 + {h_0}^4h_3\,f_5 + (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_0}^3f_3 + {h_0}^2({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3)f_2\\
&\quad + ({h_0}^2h_3\,h_4 + h_0\,h_1\,h_2\,h_4 + h_0\,h_1\,{h_3}^2 + h_0\,{h_2}^2h_3 + {h_1}^3h_4 + {h_1}^2h_2\,h_3)h_0\,f_1\\
&\quad + ({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3){h_1}^2f_0\,,\\
\mathsf{j}_3\,h_0^2\cdot t_2^2 &= ({h_0}^2h_3 + {h_1}^3){h_0}^2f_7 + (h_0\,h_1\,h_4 + h_0\,h_2\,h_3 + {h_1}^2h_3){h_0}^2f_5\\
&\quad + {h_0}^2({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3)f_4 + (h_0\,h_3\,h_4 + h_1\,h_2\,h_4 + h_1\,{h_3}^2 + {h_2}^2h_3){h_0}^2f_3\\
&\quad + h_0\,(h_0\,h_1\,{h_4}^2 + h_0\,{h_3}^3 + h_1\,{h_2}^2h_4 + {h_2}^3h_3)f_1 + {h_2}^2({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3)f_0\,,\\
\mathsf{j}_3\,h_0^2\cdot t_3^2 &= (h_0\,h_1\,h_4 + h_0\,h_2\,h_3 + {h_1}^2h_3 + h_1\,{h_2}^2){h_0}^2f_7 + {h_0}^2({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3)f_6\\
&\quad + (h_0\,h_3\,h_4 + h_1\,h_2\,h_4 + h_1\,{h_3}^2){h_0}^2f_5 + ({h_1\,h_4}^2 + {h_3}^3){h_0}^2f_3\\
&\quad + ({h_0\,h_4}^2 + h_1\,h_3\,h_4 + h_2\,{h_3}^2)h_3\,h_0\,f_1 + {h_3}^2({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3)f_0\,,\\
\mathsf{j}_3\,h_0^2\cdot t_4^2 &= {h_0}^2({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3)f_8 + (h_0\,h_3 + h_1\,h_2)h_4\,{h_0}^2f_7 + {h_0}^2{h_4}^2h_1\,f_5\\
&\quad + h_3\,{h_0}^2{h_4}^2f_3 + (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_4}^2h_0\,f_1 + {h_4}^2({h_0\,h_3}^2 + {h_1}^2h_4 + h_1\,h_2\,h_3)f_0\,.
\end{aligned}$$

Si h_1 est nul, alors, puisque $\mathsf{j}_3 = h_0h_3^2 + h_1^2h_4 + h_1h_2h_3 \neq 0$, $h_1h_3 \neq 0$ et le changement de variable $x \mapsto (x+1)/x$ (resp. $x \mapsto x/(x+1)$) lorsque $h_4 \neq 0$ (resp. $h_4 = 0$) ramène au cas générique précédent.

Enfin, si $h_0 = 0$, puisque $\mathsf{j}_3 \neq 0$, $h_1 \neq 0$, et on peut choisir

$$\begin{aligned}
t_0^2 &= f_0\,,\ \ t_1^2 = 0\,,\\
\mathsf{j}_3\,{h_1}^2\cdot t_2^2 &= {h_1}^5f_7 + h_3\,{h_1}^4f_5 + (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_1}^3f_4 + (h_1\,h_2\,h_4 + h_1\,{h_3}^2 + {h_2}^2h_3){h_1}^2f_3\\
&\quad + (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_2}^2h_1\,f_2 + ({h_1}^3{h_4}^2 + {h_1}^2{h_3}^3 + h_1\,{h_2}^3h_4 + h_1\,{h_2}^2{h_3}^2 + {h_2}^4h_3)f_1\,,\\
\mathsf{j}_3\,{h_1}^2\cdot t_3^2 &= (h_1\,h_3 + {h_2}^2){h_1}^3f_7 + (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_1}^3f_6 + (h_2\,h_4 + {h_3}^2){h_1}^3f_5 + ({h_1\,h_4}^2 + {h_3}^3){h_1}^2f_3\\
&\quad + (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_3}^2h_1\,f_2 + ({h_1}^2{h_4}^2 + h_1\,h_2\,h_3\,h_4 + h_1\,{h_3}^3 + {h_2}^2{h_3}^2)h_3\,f_1\,,\\
\mathsf{j}_3\,{h_1}^2\cdot t_4^2 &= (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_1}^3f_8 + h_4\,h_2\,{h_1}^3f_7 + {h_4}^2{h_1}^3f_5 + {h_4}^2h_3\,{h_1}^2f_3\\
&\quad + (h_1\,h_4 + h_2\,h_3){h_4}^2h_1\,f_2 + {h_4}^2(h_1\,h_2\,h_4 + h_1\,{h_3}^2 + {h_2}^2h_3)f_1\,.
\end{aligned}$$

D.2 Type $(1,1,3)$

Pour les courbes de ce type, *i.e.* lorsque $\mathsf{h}(x)$ a une racine double, on commence par exhiber un modèle équivalent de la forme

$$y^2 + y = \frac{\mathsf{F}(x)}{\mathsf{H}(x)^2}\,,\quad \text{avec } \deg \mathsf{F}(x) = 8 \text{ et } \deg \mathsf{H}(x) = 2\,.$$

Puisque $\mathsf{j}_3 = h_0h_3^2 + h_1^2h_4 + h_1h_2h_3 = 0$, nous sommes déjà dans cette situation lorsque $h_1 \neq 0$ et $h_3 = 0$ (resp. $h_1 = 0$ et $h_3 \neq 0$, modulo le changement de variable $x \mapsto 1/x$). En toute généralité, *i.e.* lorsque $h_1 \neq 0$ et $h_3 \neq 0$, notant $s_i = \sqrt{h_i}$ et envoyant la racine double de h à l'infini, on a

$$\begin{aligned}
&H(x) = (s_1s_3 + {s_2}^2){s_1}^4x^2 + {s_1}^4s_3x + {s_2}^2{s_1}^2 + {s_0}^2{s_3}^2,\\
&s_3^4F(x)/s_1^8 = (s_1x+1)^8f_8 + s_3(s_1x+1)^7xf_7 + {s_3}^2(s_1x+1)^6x^2f_6 + {s_3}^3(s_1x+1)^5x^3f_5\\
&\quad + {s_3}^4(s_1x+1)^4x^4f_4 + {s_3}^5(s_1x+1)^3x^5f_3 + {s_3}^6(s_1x+1)^2x^6f_2 + {s_3}^7(s_1x+1)x^7f_1 + {s_3}^8x^8f_0.
\end{aligned}$$

Ceci fait, un modèle équivalent de la forme

$$y^2+y=ax^3+bx^2+e+\frac{cx+d}{x^2+s+x},$$

est donné par, notant $\overline{F}_i=\sqrt{F_i}$ et $\overline{H}_i=\sqrt{H_i}$,

$$\begin{aligned}
\overline{H}_2^{10}\cdot a &= \overline{H}_1{}^6\overline{F}_7{}^2,\\
\overline{H}_2^{20}\cdot b &= \overline{H}_1{}^{12}\overline{F}_7{}^4+\overline{H}_2{}^8\overline{H}_1{}^4\overline{F}_5{}^4+\overline{H}_1{}^8\overline{H}_2{}^8\overline{F}_8{}^2+\overline{H}_2{}^{12}\overline{H}_1{}^4\overline{F}_6{}^2+\overline{H}_2{}^{14}\overline{H}_1{}^4\overline{F}_8,\\
\overline{H}_2{}^{10}\overline{H}_1{}^6\cdot c &= \overline{H}_1{}^4(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^4\overline{F}_7{}^2+\overline{H}_2{}^4\overline{H}_1{}^8\overline{F}_5{}^2+\overline{H}_2{}^8\overline{H}_1{}^4\overline{F}_3{}^2+\overline{H}_2{}^4\overline{H}_1{}^{10}\overline{F}_8\\
&\quad+\overline{H}_2{}^5\overline{H}_1{}^3(\overline{H}_0{}^3\overline{H}_2{}^3+\overline{H}_0\overline{H}_1{}^4\overline{H}_2+\overline{H}_1{}^6)\overline{F}_7+\overline{H}_2{}^6\overline{H}_1{}^4(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^2\overline{F}_6\\
&\quad+\overline{H}_2{}^7\overline{H}_1{}^3(\overline{H}_2{}^2\overline{H}_0{}^2+\overline{H}_0\overline{H}_1{}^2\overline{H}_2+\overline{H}_1{}^4)\overline{F}_5+\overline{H}_2{}^8\overline{H}_1{}^6\overline{F}_4\\
&\quad+\overline{H}_2{}^9\overline{H}_1{}^3(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)\overline{F}_3+\overline{H}_2{}^{10}\overline{H}_1{}^4\overline{F}_2+\overline{H}_2{}^{11}\overline{H}_1{}^3\overline{F}_1,\\
\overline{H}_2{}^8\overline{H}_1{}^6\cdot d &= \overline{H}_0{}^2(\overline{H}_2{}^2\overline{H}_0{}^2+\overline{H}_0\overline{H}_1{}^2\overline{H}_2+\overline{H}_1{}^4)^2\overline{F}_7{}^2+\overline{H}_2{}^4\overline{H}_0{}^2(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^2\overline{F}_5{}^2+\overline{H}_0{}^2\overline{H}_2{}^8\overline{F}_3{}^2+\overline{H}_2{}^{10}\overline{F}_1{}^2\\
&\quad+\overline{H}_2{}^4\overline{H}_1{}^2\overline{H}_0{}^2(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^2\overline{F}_8+\overline{H}_2{}^5\overline{H}_1\overline{H}_0{}^2(\overline{H}_2{}^2\overline{H}_0{}^2+\overline{H}_0\overline{H}_1{}^2\overline{H}_2+\overline{H}_1{}^4)\overline{F}_7+\overline{H}_0{}^2\overline{H}_1{}^4\overline{H}_2{}^6\overline{F}_6\\
&\quad+\overline{H}_2{}^7\overline{H}_1\overline{H}_0{}^2(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)\overline{F}_5+\overline{H}_0{}^2\overline{H}_1{}^2\overline{H}_2{}^8\overline{F}_4+\overline{H}_0{}^2\overline{H}_1\overline{H}_2{}^9\overline{F}_3+\overline{H}_0\overline{H}_1\overline{H}_2{}^{10}\overline{F}_1+\overline{H}_1{}^2\overline{H}_2{}^{10}\overline{F}_0\\
\overline{H}_2{}^{16}\overline{H}_1{}^6\cdot e &= \overline{H}_0{}^4\overline{H}_1{}^{10}\overline{F}_7{}^4+\overline{H}_2{}^8\overline{H}_0{}^4\overline{H}_1{}^2\overline{F}_5{}^4+\overline{H}_2{}^8\overline{H}_0{}^4\overline{H}_1{}^6\overline{F}_8{}^2\\
&\quad+\overline{H}_2{}^6(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^2(\overline{H}_2{}^2\overline{H}_0{}^2+\overline{H}_0\overline{H}_1{}^2\overline{H}_2+\overline{H}_1{}^4)^2\overline{F}_7{}^2+\overline{H}_2{}^{12}\overline{H}_0{}^4\overline{H}_1{}^2\overline{F}_6{}^2\\
&\quad+\overline{H}_2{}^{10}(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^4\overline{F}_5{}^2+\overline{H}_2{}^{14}(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^2\overline{F}_3{}^2+\overline{H}_2{}^{16}\overline{H}_1{}^2\overline{F}_2{}^2\\
&\quad+\overline{H}_2{}^{18}\overline{F}_1{}^2+\overline{H}_2{}^{10}\overline{H}_1{}^{10}\overline{F}_8+\overline{H}_2{}^{11}\overline{H}_1{}^3(\overline{H}_0{}^3\overline{H}_2{}^3+\overline{H}_0\overline{H}_1{}^4\overline{H}_2+\overline{H}_1{}^6)\overline{F}_7\\
&\quad+\overline{H}_2{}^{12}\overline{H}_1{}^4(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)^2\overline{F}_6+\overline{H}_2{}^{13}\overline{H}_1{}^3(\overline{H}_2{}^2\overline{H}_0{}^2+\overline{H}_0\overline{H}_1{}^2\overline{H}_2+\overline{H}_1{}^4)\overline{F}_5\\
&\quad+\overline{H}_2{}^{14}\overline{H}_1{}^6\overline{F}_4+\overline{H}_2{}^{15}\overline{H}_1{}^3(\overline{H}_2\overline{H}_0+\overline{H}_1{}^2)\overline{F}_3+\overline{H}_2{}^{16}\overline{H}_1{}^4\overline{F}_2+\overline{H}_2{}^{17}\overline{H}_1{}^3\overline{F}_1,\\
\overline{H}_1{}^4\cdot s &= \overline{H}_2{}^2\overline{H}_0{}^2.
\end{aligned}$$

D.3 Type $(3,3)$

Les courbes de ce type admettent un modèle d'Artin-Schreier de la forme

$$y^2+y=\frac{ax+b}{(x^2+x+s)^2}+\frac{cx+d}{(x^2+x+s)^3}+e,$$

avec

- si $h_4\neq 0$, en notant $\overline{f}_i=\sqrt{f_i}$ et $\overline{\overline{h}}_i=\sqrt[4]{h_i}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{h}}_2{}^7\overline{\overline{h}}_4{}^{12}\cdot a &= \overline{\overline{h}}_2{}^3\overline{f}_7{}^4+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^8\overline{f}_7{}^2+\overline{\overline{h}}_2{}^3\overline{\overline{h}}_4{}^8\overline{f}_6{}^2+\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{10}\overline{f}_5{}^2+\overline{\overline{h}}_2{}^7\overline{\overline{h}}_4{}^8\overline{f}_8\\
&\quad+(\overline{\overline{h}}_0{}^3\overline{\overline{h}}_4{}^3+\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_2{}^4\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^6)\overline{\overline{h}}_4{}^9\overline{f}_7+\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{10}(\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)^2\overline{f}_6\\
&\quad+(\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^2+\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_2{}^2\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^4)\overline{\overline{h}}_4{}^{11}\overline{f}_5+\overline{\overline{h}}_2{}^3\overline{\overline{h}}_4{}^{12}\overline{f}_4+\overline{\overline{h}}_4{}^{13}(\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)\overline{f}_3+\overline{\overline{h}}_4{}^{14}\overline{\overline{h}}_2\overline{f}_2+\overline{\overline{h}}_4{}^{15}\overline{f}_1,\\
\overline{\overline{h}}_2{}^9\overline{\overline{h}}_4{}^{24}\cdot b &= \overline{\overline{h}}_2\overline{f}_7{}^8+\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{12}(\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)^2\overline{f}_7{}^4+\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{16}\overline{f}_6{}^4+\overline{\overline{h}}_2{}^9\overline{\overline{h}}_4{}^{16}\overline{f}_8{}^2+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_2{}^3\overline{\overline{h}}_4{}^{20}\overline{f}_7{}^2\\
&\quad+\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{20}(\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)^2\overline{f}_6{}^2+\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{24}\overline{f}_4{}^2+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{22}(\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)^2\overline{f}_8\\
&\quad+\overline{\overline{h}}_0{}^2(\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^2+\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_2{}^2\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^4)\overline{\overline{h}}_4{}^{23}\overline{f}_7+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_2{}^3\overline{\overline{h}}_4{}^{24}\overline{f}_6\\
&\quad+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^{25}(\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)\overline{f}_5+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{26}\overline{f}_4+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^{27}\overline{f}_3+\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4{}^{28}\overline{f}_1+\overline{\overline{h}}_2\overline{\overline{h}}_4{}^{28}\overline{f}_0,\\
\overline{\overline{h}}_2{}^{10}\overline{\overline{h}}_4{}^6\cdot c &= (\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)^4\overline{f}_7{}^2+\overline{\overline{h}}_2{}^4\overline{\overline{h}}_4{}^4\overline{f}_5{}^2+\overline{\overline{h}}_4{}^8\overline{f}_3{}^2,\\
\overline{\overline{h}}_2{}^{14}\overline{\overline{h}}_4{}^4\cdot d &= \overline{\overline{h}}_0{}^2(\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^2+\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_2{}^2\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^4)^2\overline{f}_7{}^2+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^4(\overline{\overline{h}}_0\overline{\overline{h}}_4+\overline{\overline{h}}_2{}^2)^2\overline{f}_5{}^2+\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^8\overline{f}_3{}^2+\overline{\overline{h}}_4{}^{10}\overline{f}_1{}^2,\\
\overline{\overline{h}}_2{}^8\overline{\overline{h}}_4{}^{24}\cdot e &= \overline{f}_7{}^8+\overline{\overline{h}}_2{}^4\overline{\overline{h}}_4{}^{12}\overline{f}_7{}^4+\overline{\overline{h}}_4{}^{16}\overline{f}_6{}^4+\overline{\overline{h}}_2{}^8\overline{\overline{h}}_4{}^{16}\overline{f}_8{}^2+\overline{\overline{h}}_2{}^4\overline{\overline{h}}_4{}^{20}\overline{f}_6{}^2,\\
\overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^2\cdot s &= \overline{\overline{h}}_0{}^2\overline{\overline{h}}_4{}^2,
\end{aligned}$$

- sinon $h_4=0$ et si $h_0\neq 0$ (resp. $h_0=0$), on est ramené à la situation précédente, modulo le changement de variable $x\mapsto 1/x$ (resp. $x\mapsto 1/(x+1)$).

D.4 Type $(1,5)$

Dans ce cas, $\mathsf{h}(x)$ a une racine de multiplicité 3 et, par conséquent, $\mathsf{j}_2 = 0$ et $\mathsf{j}_3 = 0$. Envoyant cette racine d'ordre 3 à l'infini, on peut toujours obtenir un modèle de la forme

$$y^2 + y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + \frac{d}{x} + e,$$

avec

- si $h_1 h_2 \neq 0$, en notant $\overline{f}_i = \sqrt{f_i}$ et $\overline{h}_i = \sqrt{h_i}$,

$$\begin{aligned}
\overline{h}_1^{26}\overline{h}_2^{40} \cdot a &= \overline{h}_1^{12}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{h}_2^{4}\overline{h}_1^{8}\overline{f}_5^{\,2} + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{4}\overline{f}_3^{\,2} + \overline{h}_2^{12}\overline{f}_1^{\,2}, \\
\overline{h}_1^{104}\overline{h}_2^{32} \cdot b &= \overline{h}_0^{32}\overline{h}_1^{48}\overline{f}_7^{\,8} + \overline{h}_0^{32}\overline{h}_1^{32}\overline{h}_2^{16}\overline{f}_5^{\,8} + \overline{h}_1^{16}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{\,2})^{32}\overline{f}_3^{\,8} + \overline{h}_2^{16}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{\,2})^{32}\overline{f}_1^{\,8} \\
&\quad + \overline{h}_1^{76}\overline{h}_0^{12}\overline{f}_7^{\,4} + \overline{h}_0^{8}\overline{h}_1^{80}\overline{f}_6^{\,4} + (\overline{h}_0^{2}\overline{h}_2^{2} + \overline{h}_0\overline{h}_1^{2}\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{4})^{4}\overline{h}_1^{68}\overline{h}_0^{4}\overline{f}_5^{\,4} \\
&\quad + \overline{h}_1^{88}\overline{f}_4^{\,4} + \overline{h}_2^{4}(\overline{h}_0^{2}\overline{h}_2^{2} + \overline{h}_0\overline{h}_1^{2}\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{4})^{4}\overline{h}_1^{60}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{4}\overline{f}_3^{\,4} \\
&\quad + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{64}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{8}\overline{f}_2^{\,4} + \overline{h}_2^{12}\overline{h}_1^{52}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{12}\overline{f}_1^{\,4} + \overline{h}_1^{90}\overline{h}_0^{2}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{h}_1^{92}\overline{f}_6^{\,2} \\
&\quad + \overline{h}_2^{2}\overline{h}_1^{86}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{2}\overline{f}_5^{\,2} + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{82}\overline{h}_0^{2}\overline{f}_3^{\,2} + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{84}\overline{f}_2^{\,2} + \overline{h}_2^{10}\overline{h}_1^{78}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{2}\overline{f}_1^{\,2}, \\
\overline{h}_1^{26}\overline{h}_2^{24} \cdot c &= \overline{h}_0^{4}\overline{h}_1^{12}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{h}_1^{8}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{4}\overline{f}_5^{\,2} + \overline{h}_0^{4}\overline{h}_1^{4}\overline{h}_2^{8}\overline{f}_3^{\,2} + \overline{h}_2^{8}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{4}\overline{f}_1^{\,2} + \overline{h}_1^{18}\overline{f}_8 + \overline{h}_1^{17}\overline{h}_2\overline{f}_7 \\
&\quad + \overline{h}_1^{16}\overline{h}_2^{2}\overline{f}_6 + \overline{h}_1^{15}\overline{h}_2^{3}\overline{f}_5 + \overline{h}_1^{14}\overline{h}_2^{4}\overline{f}_4 + \overline{h}_1^{13}\overline{h}_2^{5}\overline{f}_3 + \overline{h}_1^{12}\overline{h}_2^{6}\overline{f}_2 + \overline{h}_1^{11}\overline{h}_2^{7}\overline{f}_1 + \overline{h}_1^{10}\overline{h}_2^{8}\overline{f}_0, \\
\overline{h}_1^{26} \cdot d &= \overline{h}_2^{8}\overline{h}_0^{12}\overline{h}_1^{12}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{8}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{4}\overline{h}_0^{8}\overline{f}_5^{\,2} + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{4}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{8}\overline{h}_0^{4}\overline{f}_3^{\,2} \\
&\quad + \overline{h}_2^{8}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{12}\overline{f}_1^{\,2} + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_0^{8}\overline{h}_1^{18}\overline{f}_8 + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{17}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})\overline{h}_0^{7}\overline{f}_7 \\
&\quad + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{16}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{2}\overline{h}_0^{6}\overline{f}_6 + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{15}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{3}\overline{h}_0^{5}\overline{f}_5 \\
&\quad + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{14}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{4}\overline{h}_0^{4}\overline{f}_4 + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{13}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{5}\overline{h}_0^{3}\overline{f}_3 \\
&\quad + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{12}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{6}\overline{h}_0^{2}\overline{f}_2 + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{11}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{7}\overline{h}_0\overline{f}_1 + \overline{h}_2^{8}\overline{h}_1^{10}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{8}\overline{f}_0, \\
\overline{h}_1^{26} \cdot e &= \overline{h}_0^{10}\overline{h}_1^{12}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{h}_0^{8}\overline{h}_1^{14}\overline{f}_6^{\,2} + \overline{h}_2^{2}\overline{h}_1^{8}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{2}\overline{h}_0^{8}\overline{f}_5^{\,2} \\
&\quad + \overline{h}_1^{4}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{8}\overline{h}_0^{2}\overline{f}_3^{\,2} + \overline{h}_1^{6}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{8}\overline{f}_2^{\,2} + \overline{h}_2^{2}(\overline{h}_0\overline{h}_2 + \overline{h}_1^{2})^{10}\overline{f}_1^{\,2}.
\end{aligned}$$

- sinon $h_1 \neq 0$ et $h_2 = 0$ (resp. $h_1 = 0$ et $h_2 \neq 0$) implique que $h_3 = h_4 = 0$ (resp. $h_0 = h_2 = 0$) et on peut utiliser les mêmes formules, modulo le changement de variable $x \mapsto 1/(x+1)$ (resp. $x \mapsto x+1$).

D.5 Type (7)

Les courbes de ce type admettent un modèle d'Artin-Schreier de la forme

$$y^2 + y = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + e,$$

avec

- si $h_4 \neq 0$, en notant $\overline{f}_i = \sqrt{f_i}$ et $\overline{\overline{\overline{h}}}_i = \sqrt[8]{h_i}$,

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,14} \cdot a &= \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,12}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,8}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,4}\overline{f}_5^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,4}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,8}\overline{f}_3^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,12}\overline{f}_1^{\,2}, \\
\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,28} \cdot b &= \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,8}\overline{f}_7^{\,4} + \overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,8}\overline{f}_5^{\,4} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,10}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,14}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,8}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,16}\overline{f}_6^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,2}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,22}\overline{f}_3^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,24}\overline{f}_2^{\,2}, \\
\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,14} \cdot c &= \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,8}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,8}\overline{f}_3^{\,2}, \\
\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,56} \cdot d &= \overline{f}_7^{\,8} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,4}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,28}\overline{f}_7^{\,4} + \overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,32}\overline{f}_6^{\,4} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,6}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,42}\overline{f}_7^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,4}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,44}\overline{f}_6^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,2}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,46}\overline{f}_5^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,48}\overline{f}_4^{\,2} + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,8}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,48}\overline{f}_8 \\
&\quad + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,7}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,49}\overline{f}_7 + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,6}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,50}\overline{f}_6 + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,5}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,51}\overline{f}_5 + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,4}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,52}\overline{f}_4 + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,3}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,53}\overline{f}_3 + \overline{\overline{\overline{h}}}_0^{\,2}\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,54}\overline{f}_2 + \overline{\overline{\overline{h}}}_0\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,55}\overline{f}_1 + \overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,56}\overline{f}_0, \\
\overline{\overline{\overline{h}}}_4^{\,16} \cdot e &= \overline{f}_8^{\,2}.
\end{aligned}$$

- sinon, nécessairement $h_0 \neq 0$ et les mêmes formules s'appliquent, modulo le changement de variable $x \mapsto 1/x$.

Bibliographie

[AM04] Alejandro Adem et R. James Milgram, *Cohomology of finite groups*, volume 309. Springer Science, 2004.

[Aro63] Siegfried Aronhold, Über ein fundamentale Begründung der Invariantentheorie. *Journal de Crelle*, 62:281–345, 1863.

[Bar77] Wolf Barth, Moduli of vector bundles on the projective plane. *Inventiones mathematicae*, 42(1):63–91, 1977.

[BC79] Andries E. Brouwer et Arjeh M. Cohen, The poincare series of the polynomials invariant under SU(2) in its irreducible representation of degree < 17. *Stichting Mathematisch Centrum. Zuivere Wiskunde*, 134:1–20, 1979.

[BDP14] Andries E. Brouwer, Jan Draisma et Mihaela Popoviciu, The degrees of a system of parameters of the ring of invariants of a binary form. *arXiv preprint arXiv :1404.5722*, 2014.

[Bed07] Leonid Bedratyuk, On complete system of invariants for the binary form of degree 7. *Journal of Symbolic Computation*, 42(10):935–947, 2007.

[Bed08] Leonid Bedratyuk, On complete system of covariants for the binary form of degree 8. *Matematychnyj Visnik Naukovogo Tovarystva Im. Shevchenka*, pages 11–22, 2008.

[Bed09] Leonid Bedratyuk, A complete minimal system of covariants for the binary form of degree 7. *Journal of Symbolic Computation*, 44(2):211–220, 2009.

[BK86] Fedor Alekseevich Bogomolov et Pavel Ivanovich Katsylo, Rationality of some quotient varieties. *Sbornik : Mathematics*, 54(2):571–576, 1986.

[BKJO94] Jean-Paul Boehler, Alexandre Aleksandrovich Kirillov Jr et E. Turan Onat, On the polynomial invariants of the elasticity tensor. *Journal of elasticity*, 34(2):97–110, 1994.

[BL15] Romain Basson et Reynald Lercier, Invariants for hyperelliptic curves of genus 3 in characteristic 2. In preparation, 2015.

[BLRS13] Romain Basson, Reynald Lercier, Christophe Ritzenthaler et Jeroen Sijsling, An explicit expression of the Lüroth invariant. *In Proceedings of the 38th international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 31–36. ACM, 2013.

[Bol87] Oskar Bolza, Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen. *Mathematische Annalen*, 30(4):478–495, 1887.

[Bol88] Oskar Bolza, On binary sextics with linear transformations into themselves. *American Journal of Mathematics*, 10(1):47–70, 1888.

[Bon04] Jacqueline Boniface, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*. Cambridge University Press, 2004.

[BP10a] Andries E. Brouwer et Mihaela Popoviciu, The invariants of the binary decimic. *Journal of Symbolic Computation*, 45(8):837–843, August 2010.

[BP10b] Andries E. Brouwer et Mihaela Popoviciu, The invariants of the binary nonic. *Journal of Symbolic Computation*, 45(6):709–720, June 2010.

[Bra88] Rolf Brandt, *Über die Automorphismengruppen von algebraischen Funktionenkörpern*. Thèse de doctorat, Universität Essen, 1988.

[Bri82] Michel Brion, Invariants de plusieurs formes binaires. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 110:429–445, 1982.

[Bri96] Michel Brion, Invariants et covariants des groupes algébriques réductifs. *Notes de cours de l'école d'été de Monastir (Juillet-Aout 1996)*, 1996.

[Bro] Andries E. Brouwer, http ://www.win.tue.nl/˜aeb/math/poincare.html.

[BS86] Rolf Brandt et Henning Stichtenoth, Die automorphismengruppen hyperelliptischer Kurven. *Manuscripta mathematica*, 55(1):83–92, 1986.

[BvB12] Christian Böhning et Hans-Christian Graf von Bothmer, On the rationality of the moduli space of Lüroth quartics. *Mathematische Annalen*, 353(4):1273–1281, 2012.

[Car03] Gabriel Cardona, On the number of curves of genus 2 over a finite field. *Finite Fields and Their Applications*, 9(4):505–526, 2003.

[Cay45] Arthur Cayley, On the theory of linear transformations. *Cambridge Math. J*, 4(1845):1–16, 1845.

[Cay56] Arthur Cayley, A second memoir upon quantics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 146:101–126, 1856.

[CF09] John E. Cremona et Tom A. Fisher, On the equivalence of binary quartics. *Journal of Symbolic Computation*, 44(6):673–682, 2009.

[CGLR99] Gabriel Cardona, Jesús González, Joan-Carles Lario et Anna Rio, On curves of genus 2 with Jacobian of GL 2-type. *Manuscripta mathematica*, 98(1):37–54, 1999.

[Cle61] Alfred Clebsch, Über eine symbolische Darstellungsweise algebraischer Formen. *Journal für Reine und Angewandte Mathematik*, 59:1–62, 1861.

[Cle72] Alfred Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen*. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1872.

[CNP05] Gabriel Cardona, Enric Nart et Jordi Pujolàs, Curves of genus two over fields of even characteristic. *Mathematische Zeitschrift*, 250(1):177–201, 2005.

[Cou94] Jean-Marc Couveignes, Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0. *In Annales de l'institut Fourier*, volume 44, pages 1–38. Chartres : L'Institut, 1950-, 1994.

[CQ05] Gabriel Cardona et Jordi Quer, Field of moduli and field of definition for curves of genus 2. *Computational Aspects of Algebraic Curves*, 13:71–83, 2005.

[Cri86] Tony Crilly, The rise of Cayley's invariant theory (1841–1862). *Historia mathematica*, 13(3):241–254, 1986.

[Cri88] Tony Crilly, The decline of Cayley's invariant theory (1863–1895). *Historia mathematica*, 15(4):332–347, 1988.

[DE99] Pierre Dèbes et Michel Emsalem, On fields of moduli of curves. *Journal of Algebra*, 211(1):42–56, 1999.

[Der99] Harm Derksen, Computation of Invariants for Reductive Groups. *Advances in Mathematics*, 141(2):366–384, February 1999.

[Der01] Harm Derksen, Polynomial bounds for rings of invariants. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(4):955–963, 2001.

[Dix82] Jacques Dixmier, Série de Poincaré et systèmes de paramètres pour les invariants des formes binaires de degré 7. *Bull. Soc. math. France*, 110:303–318, 1982.

[Dix85] Jacques Dixmier, Quelques résultats et conjectures concernant les séries de Poincaré des invariants des formes binaires. *Séminaire d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin, Lecture Notes in Mathematics*, 1146:127–160, 1985.

[Dix87] Jacques Dixmier, On the projective invariants of quartic plane curves. *Advances in Mathematics*, 64(3):279–304, 1987.

[Dix90] Jacques Dixmier, Quelques aspects de la théorie des invariants. *Gazette des mathématiciens*, 43:39–64, 1990.

[DK02] Harm Derksen et Gregor Kemper, *Computational Invariant Theory*, volume 130. Springer Verlag, 2002.

[DK08] Harm Derksen et Gregor Kemper, Computing invariants of algebraic groups in arbitrary characteristic. *Advances in Mathematics*, 217:2089–2129, 2008.

[DL88] Jacques Dixmier et Daniel Lazard, Le nombre minimum d'invariants fondamentaux pour les formes binaires de degré 7. *Journal of symbolic computation*, 6(1):113–115, 1988.

[Ear71] Clifford J. Earle, On the moduli of closed Riemann surfaces with symmetries. *Advances in the Theory of Riemann Surfaces. Ann. of Math. Studies*, 66:119–130, 1971.

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative Algebra : with a view toward algebraic geometry*, volume 150. Springer, 1995.

[Eis05] David Eisenbud, *The Geometry of Syzygies : A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, volume 229. Springer Science, 2005.

[Els15] Andreas-Stephan Elsenhans, Explicit computations of invariants of plane quartic curves. *Journal of Symbolic Computation*, 68:109–115, 2015.

[Fis66] Charles S Fisher, The death of a mathematical theory : A study in the sociology of knowledge. *Archive for history of exact sciences*, 3(2):137–159, 1966.

[Fra80] Fabian Franklin, On the calculation of the generating functions and tables of groundforms for binary quantics. *American Journal of Mathematics*, 3(2):128–153, 1880.

[FS12] Jean-Charles Faugère et Jules Svartz, Solving polynomial systems globally invariant under an action of the symmetric group and application to the equilibria of n vortices in the plane. *In Proceedings of the 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 170–178. ACM, 2012.

[FS13] Jean-Charles Faugère et Jules Svartz, Gröbner bases of ideals invariant under a commutative group : the non-modular case. *In Proceedings of the 38th international symposium on International symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 347–354. ACM, 2013.

[Gal80] August Freiherr von Gall, Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung. *Mathematische Annalen*, 17(1):31–51, 1880.

[Gal88] August Freiherr von Gall, Das vollständige Formensystem der binären Form 7ter Ordnung. *Mathematische Annalen*, 31(3):318–336, 1888.

[Gey74] Wulf-Dieter Geyer, Invarianten binärer Formen. *Lecture Notes in Mathematics, Springer*, 412:36–69, 1974.

[GK00] Katharina Geissler et Jürgen Klüners, Galois group computation for rational polynomials. *Journal of Symbolic Computation*, 30(6):653–674, 2000.

[GK06] Martine Girard et David R. Kohel, Classification of genus 3 curves in special strata of the moduli space. *Lecture Notes in Computer Science, Springer*, 4076/2006:346–360, 2006.

[Gor68] Paul Gordan, Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1868(69):323–354, 1868.

[Gor70] Paul Gordan, Die simultanen Systeme binärer Formen. *Mathematische Annalen*, 2(2):227–280, 1870.

[Gor87] Paul Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. Zweiter Band : Binäre Formen. *Leipzig : Teubner*, 2, 1887.

[Gro71] Alexander Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental : 1. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960/61*, volume 224 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.

[GSS05] Jaime Gutierrez, David Sevilla et Tanush Shaska, *Hyperelliptic curves of genus 3 with prescribed automorphism group*, volume 13 de *Lecture Notes Series on Computing*. Singapore : World Scientific, 2005.

[GY03] John Hilton Grace et Alfred Young, *The algebra of invariants*. Cambridge University Press, 1903.

[Hab75] William J Haboush, Reductive groups are geometrically reductive. *Annals of Mathematics*, pages 67–83, 1975.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, volume 52. Springer, 1977.

[Her54] Charles Hermite, *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées*, volume Œuvres, tome 1. Cambridge and Dublin Math. J., 1854.

[Hil90] David Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische Annalen*, 36(4):473–534, 1890.

[Hil93] David Hilbert, Über die vollen Invariantensysteme. *Mathematische Annalen*, 42(3): 313–373, 1893.

[Hoc78] Melvin Hochster, Cohen-Macaulay rings and modules. *In* Olli Lehto, éditeur, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume 1, pages 291–298. International Congress of Mathematicians, 1978.

[HR74] Melvin Hochster et Joel L Roberts, Rings of invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay. *Advances in mathematics*, 13(2):115–175, 1974.

[HS14] Jonathan D Hauenstein et Frank Sottile, Newton polytopes and witness sets. *Mathematics in Computer Science*, 8(2):235–251, 2014.

[Hug05] Bonnie Huggins, *Fields of moduli and fields of definition of curves*. Thèse de doctorat, University of California, Berkeley, 2005.

[Hug07] Bonnie Huggins, Fields of moduli of hyperelliptic curves. *Mathematical Research Letters*, 14:249–262, 2007.

[Hum75] James E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, volume 21 de *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1975.

[Hur93] Adolf Hurwitz, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. *Mathematische Annalen*, 41(3):403–442, 1893.

[Igu60] Jun-Ichi Igusa, Arithmetic variety of moduli for genus two. *The Annals of Mathematics*, 72(3):612–649, November 1960.

[Jor76] Camille Jordan, Mémoire sur les covariants des formes binaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 177–232, 1876.

[Jor79] Camille Jordan, Sur les covariants des formes binaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 345–378, 1879.

[Kem00] Gregor Kemper, A characterization of linearly reductive groups by their invariants. *Transformation Groups*, 5(1):85–92, 2000.

[Kna07] Anthony W. Knapp, *Advanced algebra*. Springer Science, 2007.

[Koi72] Shoji Koizumi, The fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves. *Nagoya Mathematical Journal*, 48:37–55, 1972.

[KP00] Hanspeter Kraft et Claudio Procesi, Classical invariant theory, a primer. *Lecture Notes, Version*, 2000.

[KR84] Joseph P.S. Kung et Gian-Carlo Rota, The invariant theory of binary forms. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 10(1):27–85, 1984.

[LO14] Reynald Lercier et Marc Olive, A minimal covariant basis for the binary nonics and the binary decimics. In preparation, 2014.

[LP90] Peter Littelmann et Claudio Procesi, On the Poincaré series of the invariants of binary forms. *Journal of Algebra*, 133(2):490–499, 1990.

[LPT01] Joseph Le Potier et Alexander Tikhomirov, Sur le morphisme de Barth. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 34(4):573–629, 2001.

[LR08] Reynald Lercier et Christophe Ritzenthaler, Invariants and reconstructions for genus 2 curves in any characteristic, available in MAGMA 2.15 and later (http ://magma.maths.usyd.edu.au/magma/handbook/text/1457), 2008.

[LR12] Reynald Lercier et Christophe Ritzenthaler, Hyperelliptic curves and their invariants : geometric, arithmetic and algorithmic aspects. *Journal of Algebre*, 372:595–636, 2012.

[LRRS14] Reynald Lercier, Christophe Ritzenthaler, Florent Rovetta et Jeroen Sijsling, Parametrizing the moduli space of curves and applications to smooth plane quartics over finite fields. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 17(A):128–147, 2014.

[LRS13] Reynald Lercier, Christophe Ritzenthaler et Jeroen Sijsling, Fast computation of isomorphisms of hyperelliptic curves and explicit descent. *Tenth Algorithmic Number Theory Symposium ANTS-X*, 1:463–486, 2013.

[LRS15] Reynald Lercier, Christophe Ritzenthaler et Jeroen Sijsling, Explicit Galois obstruction and descent for hyperelliptic curves with tamely cyclic reduced automorphism group. *Mathematics of Computation*, to appear, 2015.

[Mae90] Takashi Maeda, On the invariant field of binary octavics. *Hiroshima Mathematical Journal*, 20(3):619–632, 1990.

[Mes91] Jean-François Mestre, Construction de courbes de genre 2 à partir de leurs modules. *In Effective methods in algebraic geometry*, volume 94, pages 313–334, Boston, 1991. Birkhäuser.

[MF82] David Mumford et John Fogarty, *Geometric invariant theory*, volume 34 de Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, Berlin, 2nd édition, 1982.

[Mor19] Frank Morley, On the Lüroth Quartic Curve. *American Journal of Mathematics*, 41:279–282, 1919.

[MS93] Bernard Mourrain et N. Stolfi, The Hilbert series of Invariants of Sln(k). *In IMACS-SC-93*, 1993.

[MSSV02] Kay Magaard, Tanush Shaska, Sergey Shpectorov et Helmut Voelklein, The locus of curves with prescribed automorphism group. Surikaisekikenkyusho Kokyuroku,(1267) : 112–141, 2002. *Communications in arithmetic fundamental groups (Kyoto, 1999/2001)*, pages 112–141, 2002.

[Nag59] Masayoshi Nagata, On the 14-th problem of Hilbert. *American Journal of Mathematics*, 81(3):766–772, July 1959.

[Nag61] Masayoshi Nagata, Complete reducibility of rational representations of a matric group. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, pages 87–99, 1961.

[Nag63] Masayoshi Nagata, Invariants of group in an affine ring. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 3(3):369–378, 1963.

[NM63] Masayoshi Nagata et Takehiko Miyata, Note on semi-reductive groups. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 3(3):379–382, 1963.

[NS04] Enric Nart et Daniel Sadornil, Hyperelliptic curves of genus three over finite fields of even characteristic. *Finite Fields and Their Applications*, 10(2):198 – 220, 2004.

[Ohn05] T. Ohno, The graded ring of invariants of ternary quartics. Unpublished, 2005 ?

[Oli14] Marc Olive, *Géométrie des espaces de tenseurs, Une approche effective appliqu'ee à la m'ecanique des milieux continus.* Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille, 2014.

[OS10] Giorgio Ottaviani et Edoardo Sernesi, On the hypersurface of Lüroth quartics. *Michigan Mathematics Journal*, 59(2):365–394, 2010.

[OS11] Giorgio Ottaviani et Edoardo Sernesi, On singular Lüroth quartics. *Science China Mathematics*, 54(8):1757–1766, 2011.

[Ott13] Giorgio Ottaviani, A computational approach to Lüroth quartics. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 62(1):165–177, 2013.

[PD14] Mihaela Ileana Popoviciu Draisma, *Invariants of binary forms*. Thèse de doctorat, University_of_Basel, 2014.

[Pop79] Vladimir L. Popov, Hilbert's theorem on invariants. *Doklady Akademii Nuak SSSR*, 249(3):551–555, 1979.

[Pop81] Vladimir L. Popov, Constructive invariant theory. *Astérisque*, 87(8):303–334, 1981.

[Pop82] Vladimir L. Popov, The constructive theory of invariants. *Izvestiya : Mathematics*, 19(2):359–376, 1982.

[PR14] Karen Hunger Parshall et David E Rowe, Toward a history of nineteenth-century invariant theory. *The history of modern mathematics*, 1:157–208, 2014.

[PS12] A Popolitov et Sh Shakirov, On Undulation Invariants of Plane Curves. *arXiv preprint arXiv :1208.5775*, 2012.

[RE55] Ronald Samuel Rivlin et Jerald LaVerne Ericksen, Stress-deformation relations for isotropic materials. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 4(3):323–425, 1955.

[Rie93] John FX. Ries, Subvarieties of moduli space determined by finite groups acting on surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 335(1):385–406, 1993.

[Roc08] Magali Rocher, *Courbes algébriques en caractéristique $p > 0$ munies d'un gros p-groupe d'automorphismes*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2008.

[Roq70] Peter Roquette, Abschätzung der Automorphismenanzahl von Funktionenkörpern bei Primzahlcharakteristik. *Mathematische Zeitschrift*, 117:157–163, 1970.

[Rov15] Florent Rovetta, *Étude algorithmique et arithmétique des courbes de petit genre*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille, en cours, 2015.

[Sch80] Frank-Olaf Schreyer, *Die Berechnung von Syzygien mit dem verallgemeinerten Weierstraß'schen Divisionssatz und eine Anwendung auf analytische Cohen-Macaulay Stellenalgebren minimaler Multiplizität*. Thèse de doctorat, Universität Hamburg, 1980.

[SF79a] James Joseph Sylvester et Fabian Franklin, Tables of the Generating Functions and Groundforms for Simultaneous Binary Quantics of the First Four Orders, Taken Two and Two Together. *American Journal of Mathematics*, 2(4):293–306, 1879.

[SF79b] James Joseph Sylvester et Fabian Franklin, Tables of the generating functions and groundforms for the binary quantics of the first ten orders. *American Journal of Mathematics*, 2(3):223–251, 1879.

[Shi67] Tetsuji Shioda, On the graded ring of invariants of binary octavics. *American Journal of Mathematics*, 89(4):1022–1046, October 1967.

[Shi72] Goro Shimura, On the field of rationality for an abelian variety. *Nagoya Mathematical Journal*, 45:167–178, 1972.

[Sil09] Joseph Hillel Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, volume 106 de *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 2nd édition, 2009.

[Sin72] David Singerman, Finitely maximal Fuchsian groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1):29–38, 1972.

[Spr77] Tonny Albert Springer, *Invariant theory*. Springer, 1977.

[Spr80] Tonny A. Springer, On the invariant theory of SU(2). *In Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, volume 83, pages 339–345. Elsevier, 1980.

[Sta73] Richard P. Stauduhar, The determination of Galois groups. *Mathematics of computation*, 27(124):981–996, 1973.

[Sta78] Richard Peter Stanley, Hilbert functions of graded algebras. *Advances in Math*, 28(1):57–83, 1978.

[Sta79a] Richard P. Stanley, Combinatorics and invariant theory. *Relations between combinatorics and other parts of mathematics*, 34:345–355, 1979.

[Sta79b] Richard P. Stanley, Invariants of finite groups and their applications to combinatorics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1(3):475–511, 1979.

[Sti73] Henning Stichtenoth, Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik. *Archiv der Mathematik*, 24(1):527–544, 1973.

[Stu93] Bernd Sturmfels, *Algorithms in invariant theory.* Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, first édition, 1993.

[Syl78] James Joseph Sylvester, Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5(30):178–188, 1878.

[Syl81] James Joseph Sylvester, Tables of the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and tables of the irreducible syzygies of certain quantics. *American Journal of Mathematics*, 4(1):41–61, 1881.

[Web99] Heinrich Martin Weber, *Lehrbuch der Algebra*, volume II. Friedrich Vieweg und Sohn, second édition, 1899.

[Wey39] Hermann Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations.* Princeton University Press, 1939.

[Wey68] Hermann Weyl, *Gesammelte Abhandlungen Bände I, II, III, IV. Herausgegeben von K. Chandrasekharan.* Springer-Verlag, 1968.

[Wey93] Jerzy Weyman, Gordan ideals in the theory of binary forms. *Journal of Algebra*, 161(2):370–391, 1993.

Index

algèbre
- de Cohen-Macaulay, 30
- complexité d'une, 34
- décomposition de Hironaka d'une, 30
- de Gorenstein, 37
- graduée, 28

Artin-Schreier
- groupe d', 149
- modèle d', 149

Ciani
- quartique de, 49

corps
- de modules, 133
- de définition, 133

covariant, 17
- ordre, 17
- poids, 17

espace projectif pondéré, 20

famille génératrice
- finie, 26
- minimale, 26

forme binaire, 17

groupe algébrique
- composante neutre d'un, 164
- connexe, 164
- linéaire, 163, 165
- radical d'un, 166
- réductif, 166
  - géométriquement réductif, 167
  - linéairement réductif, 166
- semi-simple, 166
- sous-groupe de Borel d'un, 165

groupe d'automorphismes réduits, 107

hyperelliptique
- courbe, 15
- hyperelliptiquement définie, 135
- involution, 15
- modèle, 16
- polynôme, 16

invariant(s), 17, 26
- $\mathfrak{D}$-invariants, 71
- algèbre des, 26
- de Dixmier-Ohno, 47
- primaire, 29
- secondaire, 29

isomorphisme de descente, 134

Lüroth
- invariant de, 46
- quartique de, 46
  - lisse, 45

module de syzygies, 32

nullcone, 31

pentalatéral, 45

représentation rationnelle, 26

résolution libre, 33

série de Hilbert, 33
- écriture minimale d'une, 35
- écriture représentative d'une, 35

système homogène de paramètres, 28

tore, 165

transvectant, 19

Weierstraß
- modèle de, 16