



HAL
open science

Modélisation mixte éléments discrets / éléments finis de la dégradation de structures en béton armé sous impact sévère

Aurélien Masurel

► To cite this version:

Aurélien Masurel. Modélisation mixte éléments discrets / éléments finis de la dégradation de structures en béton armé sous impact sévère. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAI009 . tel-01171020

HAL Id: tel-01171020

<https://theses.hal.science/tel-01171020>

Submitted on 2 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Matériaux, Mécanique, Génie Civil, Electrochimie**

Présentée par

Aurélien MASUREL

Thèse dirigée par **Laurent DAUDEVILLE**, préparée au
Laboratoire Sols, Solides, Structures – Risques (L3S-R)

Modélisation mixte éléments discrets / éléments finis de la dégradation de structures en béton armé sous impact sévère

Thèse soutenue publiquement le 23 mars 2015, devant le jury composé de :

M. Alain COMBESCURE

Professeur à l'INSA de Lyon, Président

M. Jean-François DUBÉ

Professeur à l'IUT de Nîmes, Rapporteur

M. Ali LIMAM

Professeur à l'INSA de Lyon, Rapporteur

M. Laurent DAUDEVILLE

Professeur à l'Université de Grenoble, Directeur de thèse

M. Serguei POTAPOV

Ingénieur de recherche expert à EDF, Encadrant

M. Vincent FAUCHER

Ingénieur de recherche expert au CEA, Examineur

M. Philippe MARIN

Professeur à l'Université de Grenoble, Examineur



Remerciements

Je remercie tout d'abord les membres de mon jury de thèse :

Monsieur Alain COMBESURE, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse

Messieurs Jean-François DUBE et Ali LIMAM qui ont été rapporteurs de ce travail.

Merci à mon directeur de thèse, Laurent DAUDEVILLE, pour m'avoir proposé ce sujet et dirigé mon travail pendant ces trois ans.

Je remercie mes encadrants :

Monsieur Serguei POTAPOV, pour sa disponibilité, sa patience et pour m'avoir fait partager ses connaissances en dynamique rapide et sur EUROPLEXUS, ainsi que sa rigueur scientifique et sur le plan de la rédaction.

Monsieur Vincent FAUCHER, pour m'avoir aidé à rentrer dans EUROPLEXUS et à paralléliser mes développements.

Monsieur Philippe MARIN, pour ses questions pertinentes et son expérience sur le mailleur éléments discrets SpherePadder++.

Je remercie le département AMA de EDF R&D qui a initié et financé ma thèse, et M. François WAECKEL pour son accueil, ainsi que l'ensemble des personnes de ce département pour les pauses et les repas passés ensemble et leurs réponses à mes questions.

Merci à Patrick MASSIN pour m'avoir accueilli au LaMSID pendant une partie de ma thèse, et aux stagiaires et thésards que j'ai croisé – JB, André, Fabien, Marcel, Max, Guilhem, Christelle, Dina, Emricka, Alexandre – et les anciens du « pôle Fluide » – François, Lise, Marie, Nasir, Hippolyte – pour les bons moments passés ensemble lors des repas et des pauses.

Mes derniers remerciements iront à ma famille et mes amis qui m'ont soutenu pendant ces trois années.

Résumé

L'objectif de cette thèse est de mettre en place un cadre numérique qui permet de simuler la réponse de structures en béton armé de taille industrielle soumises à des impacts sévères. Notre modèle repose sur trois ingrédients principaux : 1) la modélisation éléments discrets (ED) du béton, permettant de profiter de la nature « discrète » de cette formulation et de décrire facilement l'apparition et la propagation des discontinuités fortes de la matière ; 2) la modélisation éléments finis (EF) poutre des armatures, donnant la possibilité de représenter toute la complexité du ferrailage que l'on rencontre dans les structures industrielles en béton armé ; 3) un modèle de liaison acier-béton original, que nous avons proposé et mis en œuvre dans le code EUROPLEXUS, et qui constitue le principal apport de cette thèse. Nous avons effectué une étude théorique et numérique sur la stabilité et la précision de ce modèle de liaison, et avons calibré ses paramètres en simulant un essai d'arrachement. En modélisant l'essai de traction d'un tirant (barre en béton contenant une armature), nous avons montré la capacité de notre modèle à reproduire le transfert des efforts entre le béton et l'armature au niveau de l'interface acier-béton. Testé et validé sur des cas-tests élémentaires, le modèle mixte ED-EF a ensuite été appliqué à la simulation de vraies structures en béton armé. Nous avons simulé de manière détaillée quelques essais connus (l'impact mou sur poutre CEA, l'essai Meppen II-4), ce qui a permis de valider l'ensemble de notre approche numérique et de recueillir des éléments pour définir les pistes d'amélioration des modèles que nous avons mis en œuvre.

Abstract

The aim of this work is to set up a numerical framework to simulate the behaviour of industrial size reinforced concrete structures subjected to severe impacts. Our model is based on three main features: 1) modelling of the concrete with a discrete element method to handle easily strong material discontinuities such as macro-cracks; 2) modelling of the reinforcing bars (rebars) with finite element method to be able to represent complex reinforcement cages of industrial structures; 3) an original steel-concrete bond model that we proposed and implemented in the fast dynamics explicit code EUROPLEXUS and that constitutes the main task of this work. We conducted theoretical and numerical studies of this model to guarantee its stability and precision during the time integration. We calibrated the model's local parameters by simulating pull-out tests. To verify qualitatively our mixed DE-FE model, we simulated a tie-test (a long concrete column which contains a reinforcement bar) and showed that our model ensures the correct transfer of forces between steel and concrete. After testing our model on simple test cases, we simulated real reinforced concrete structures subjected to impacts (soft impact on a beam, Meppen test n°II-4), allowing us to validate our numerical approach and to define some perspectives to improve the models we have developed.

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	5
Abstract	5
Table des matières	7
Introduction générale.....	11
1 Etude bibliographique	15
1.1 Le béton.....	15
1.1.1 Caractéristiques générales	15
1.1.2 Comportement quasi-statique	16
1.1.3 Comportement dynamique	22
1.1.4 Béton armé.....	24
1.2 Généralités sur les structures et les impacts étudiés.....	24
1.2.1 Caractéristiques de la structure	24
1.2.2 Définition et classification des impacts	25
1.3 Méthodes de modélisation de la macro-fissuration	29
1.3.1 Les méthodes continues.....	29
1.3.2 Les méthodes discrètes	32
1.4 Conclusion	36
2 Modélisation du béton par la méthode des éléments discrets sphériques.....	39
2.1 Etat des lieux au démarrage de la thèse	40
2.1.1 Généralités sur la méthode des éléments discrets utilisée.....	40
2.1.2 Cadre algorithmique et numérique existant	42
2.2 Le maillage éléments discrets	43
2.2.1 Caractéristiques.....	43
2.2.2 Méthodes de génération.....	44
2.3 Interactions entre les éléments discrets	50
2.3.1 Définition des interactions	50
2.3.2 Recherche des interactions	51

<Table des matières

2.3.3	Calcul des efforts d'interaction	52
2.3.4	Résistance au roulement.....	54
2.4	Etude du modèle ED du béton	55
2.4.1	Comportement élastique linéaire	55
2.4.2	Comportement non linéaire.....	68
2.5	Evaluation numérique du modèle.....	72
2.5.1	Essai de fendage	72
2.5.2	Essai de Nooru-Mohamed.....	75
2.6	Conclusion	78
3	Liaison acier-béton.....	81
3.1	Bibliographie.....	81
3.1.1	Etudes expérimentales de l'interface.....	81
3.1.2	Modèles discrets d'interface acier-béton	88
3.2	Etude du modèle de Rousseau.....	92
3.2.1	Caractéristiques générales	92
3.2.2	Prise en compte du changement de direction de l'armature	93
3.2.3	Etude de l'équilibre de la liaison acier-béton.....	95
3.3	Nouveau modèle de liaison A-B en modélisation ED.....	97
3.3.1	Caractéristiques générales	97
3.3.2	Calcul des efforts d'interaction	98
3.3.3	Validation du modèle proposé en élasticité linéaire.....	101
3.3.4	Etude du modèle en non linéaire	104
3.3.5	Modélisation du ferrailage complexe.....	108
3.4	Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF	109
3.4.1	Loi de comportement de la composante normale à l'armature	110
3.4.2	Loi de comportement de la composante tangentielle	114
3.4.3	Glissement important.....	121
3.4.4	Distance de recherche des liaisons acier-béton.....	123
3.4.5	Détermination du pas de temps d'intégration.....	127
3.4.6	Simulation d'un essai de tirant.....	135
3.5	Conclusion	141
4	Simulation d'impacts sur des structures en béton armé	143
4.1	Introduction.....	143
4.2	Impact mou sur poutre.....	144

<Table des matières

4.2.1	Description de l'essai.....	144
4.2.2	Modélisation numérique.....	146
4.2.3	Résultats.....	152
4.3	Impact mou sur dalle : essai MEPPEN II-4.....	159
4.3.1	Description de l'essai.....	159
4.3.2	Modélisation de l'essai.....	161
4.3.3	Résultats.....	166
4.4	Impact dur sur poutre.....	172
4.5	Conclusion.....	176
	Conclusion générale et perspectives.....	179
	Conclusions.....	179
	Perspectives.....	182
	Bibliographie.....	185
	Annexes.....	195
	Modification du calcul de la seconde rotation.....	195

Introduction générale

Les centrales nucléaires sont des installations d'importance stratégique pour les pays qui utilisent cette technologie pour produire de l'énergie. Elles sont donc protégées par des structures conséquentes en béton armé afin de faire face aux différents risques d'origine naturelle ou humaine qui peuvent survenir. On s'intéresse dans cette thèse au risque de chute d'un avion sur l'enceinte de confinement du bâtiment réacteur. Ce type d'impact, sévère en raison de la masse et de la vitesse importantes du projectile considéré, sollicite très fortement la structure conduisant à un niveau d'endommagement très avancé.

La spécificité et la complexité du problème considéré est due, d'une part, à un chargement dynamique intense (fortement variable en temps et en espace) exercé localement sur la structure pendant un temps très court et, d'autre part, à la présence simultanée de plusieurs phénomènes physiques très non linéaires comme la fissuration et la fragmentation éventuelle du béton dans la zone impactée, la plasticité et les grandes déformations des armatures dans le cas de formation de fragments, la présence de multiples interfaces matérielles et surfaces de contact, etc. Il s'agit d'un problème de dynamique rapide. L'approche purement théorique des problèmes relevant de ce domaine permet rarement d'obtenir une solution analytique. Expérimentalement, étant donné la taille réelle d'une enceinte de confinement et la nature du projectile, un essai grandeur nature demanderait des moyens techniques et financiers (construction, instrumentation, réalisation) extrêmement importants. De ce fait, la simulation numérique est pratiquement incontournable pour étudier ce genre de problème.

Grâce à la puissance sans cesse croissante des ordinateurs et des méthodes de calcul parallèle, des modèles numériques de plus en plus sophistiqués des systèmes mécaniques peuvent être réalisés et appliqués à des structures conséquentes. EDF R&D développe des modèles et des codes de calculs pour quantifier et améliorer la résistance de ses installations. L'objectif de cette thèse est de développer un modèle numérique qui permette de prédire le comportement d'une structure en béton armé soumise à un impact sévère.

Le département AMA d'EDF R&D, qui a initié la présente thèse, a choisi de développer l'approche par éléments discrets (ED) pour pouvoir modéliser de très forts niveaux d'endommagement (macro-fissuration avancée, fracturation, fragmentation) des structures en béton armé sous impacts sévères, cette approche étant une alternative intéressante à la méthode des éléments finis (EF) avec érosion d'éléments dont la mise en œuvre reste délicate.

En s'associant avec le laboratoire 3S-R de l'Université Joseph Fourier de Grenoble, qui est à l'origine de la méthode ED utilisée¹, les premiers travaux à EDF sur cette méthode ont été réalisés dans le cadre de la thèse de Jessica Rousseau (2006-2009) avec l'implantation de la méthode ED dans le code EUROPLEXUS², co-développé par EDF et utilisé dans les études accidentelles. Dans la thèse de Rousseau, les éléments discrets ont été utilisés à la fois pour la modélisation du béton et du ferrailage via les lois de comportement appropriées - fragile pour le béton et ductile pour l'acier. Une loi d'interface acier-béton (A-B) a été développée dans le contexte ED. Pour pouvoir modéliser les ouvrages de grande taille soumis à des charges localisées de type impact, un algorithme de couplage des formulations ED et EF coque a été mis en œuvre ainsi qu'un traitement de contact entre les modèles EF et ED permettant de modéliser le projectile en EF et la cible en ED. Malgré ces progrès et la démonstration sur quelques cas-tests de l'efficacité de la méthode, l'état de maturité de l'approche n'avait pas été atteint pour pouvoir envisager son utilisation dans un contexte industriel, car il subsistait un certain nombre de problèmes techniques et d'interrogations liés à l'approche ED en général et à sa mise en œuvre dans EUROPLEXUS en particulier, nécessitant une investigation ultérieure. Il s'agissait d'un comportement trop fragile en compression du modèle ED de béton, la branche post pic descendant trop vite par rapport à l'allure relevée d'habitude dans les essais de compression simple. Concernant la liaison acier-béton, on constatait un départ massif des ED béton appartenant à l'enrobage des armatures (écaillage artificiel) lorsque la structure commençait à se déformer.

Pour résoudre ces problèmes, deux thèses de doctorat sur la problématique « Eléments discrets » ont été lancées simultanément en 2011 au L3S-R et à AMA (LaMSID³) : la thèse d'Ahmad Omar (UJF Grenoble) sur la modélisation ED du béton en dynamique rapide et la présente thèse (financement CIFRE⁴) orientée sur la modélisation ED de la liaison acier-béton. Dans ce montage, les deux thèses se complètent, l'une devant approfondir l'aspect modélisation du matériau béton en dynamique et l'autre apportant la dimension structure et visant les calculs industriels de structures en béton armé.

Le cadre numérique que nous adoptons repose sur la modélisation du béton par la méthode des éléments discrets sphériques, qui représente le matériau par un assemblage polydisperse d'éléments rigides sphériques qui interagissent entre eux par des lois locales de nature cohésive avant la rupture et de type contact après la rupture. Contrairement aux méthodes continues, la méthode ED considère le milieu comme naturellement discontinu, ce qui permet de modéliser facilement l'apparition et l'évolution des discontinuités de la matière. Associée à un schéma d'intégration temporelle explicite, la méthode ED est bien adaptée à l'étude des problèmes de dynamique rapide mettant en jeu de la fissuration.

¹ On peut citer notamment l'application de la méthode des éléments discrets sphériques au béton (Hentz, 2003), la prise en compte de la loi de transfert de moments en 3D pour limiter les rotations des éléments discrets (Plassiard, 2007), les simulations d'impacts à grande vitesse (Shiu, 2008). Ce laboratoire est également à l'origine de plusieurs codes de calcul mettant en œuvre la méthode des éléments discrets : SDEC (Magnier & Donzé, 1998) et YADE (Kozicki & Donzé, 2009).

² Code de dynamique rapide, propriété conjointe du CEA et du Centre Commun de Recherches de la Commission Européenne à Ispra et développé dans le cadre d'un consortium impliquant également EDF et l'ONERA.

³ Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, Unité mixte EDF-CEA-CNRS UMR 2832.

⁴ Convention CIFRE n° 2011/1105.

Le présent mémoire de thèse est composé de 8 parties : une introduction générale, quatre chapitres principaux et une conclusion générale avec un volet perspectives, la bibliographie utilisée et des annexes.

Le premier chapitre introduit la problématique de chute d'avion et propose un état de l'art succinct des différents domaines techniques sur lesquels s'appuie cette problématique. On commence par présenter dans la première section les principales caractéristiques du matériau béton et ses propriétés mécaniques. La deuxième section est dédiée aux essais d'impacts sur des structures en béton armé issus de la littérature afin de caractériser le choc d'avion et d'identifier les essais qui sont les plus représentatifs de ce type d'impact. La troisième section du chapitre présente les méthodes numériques les plus utilisées pour simuler les problèmes d'impact et de fissuration. En fonction des possibilités et des limitations offertes par chaque méthode, nous expliquerons les raisons qui ont motivé le choix de la méthode des éléments discrets sphériques.

Le chapitre 2 est consacré à la description des principaux ingrédients de la méthode ED sphériques : principe, calcul des efforts, loi de comportement du béton. On précisera entre autres que les éléments discrets considérés ici n'ont pas de vocation à représenter les granulats du béton. Dans ce travail de thèse, nous nous plaçons à une échelle suffisamment grande pour considérer que le béton est homogène et isotrope. Nous chercherons ensuite à caractériser la représentativité d'un assemblage d'éléments discrets dans son ensemble vis-à-vis du comportement macroscopique du béton : nous présentons une procédure d'identification des paramètres locaux permettant au modèle ED de reproduire le comportement macroscopique du béton. Pour évaluer la capacité du modèle à restituer le comportement non linéaire du béton, nous simulons quelques essais où le béton est fortement sollicité en traction et en cisaillement, les deux principaux modes de rupture lors d'un impact.

Le chapitre 3 constitue le cœur de notre travail : il présente l'ensemble de nos travaux réalisés pour aboutir à un modèle de liaison acier-béton stable et robuste. La présente thèse faisant suite à la thèse de J. Rousseau, où un modèle de liaison A-B a été proposé dans le cadre numérique qui nous intéresse, nous présentons d'abord l'étude numérique du modèle de Rousseau et les modifications que nous lui avons apportées pour l'améliorer. Face à des limitations de ce modèle (non équilibré en rotation) et des difficultés pour modéliser un ferrailage complexe des structures industrielles, nous avons proposé et mis en œuvre un autre modèle de liaison qui conserve les principaux avantages du modèle initial, tout en corrigeant les défauts de ce dernier et permettant d'envisager les calculs à l'échelle industrielle. Nous présentons une étude théorique et numérique sur la stabilité et la précision du nouveau modèle de liaison en dégageant un critère que doit vérifier le pas de temps du calcul pour que l'intégration temporelle du modèle soit stable et précise à une erreur relative donnée. Le modèle est calibré en simulant un essai d'arrachement. Pour tester la capacité de notre modèle à reproduire le transfert des efforts entre le béton et l'armature au niveau de l'interface acier-béton, on considère un cas simple de tirant, dans lequel le rôle de l'interface acier-béton dans l'endommagement et la rupture du béton est prépondérant.

Le chapitre 4 présente l'application du modèle mixte ED-EF, que nous avons mis en œuvre dans le code EUROPLEXUS, à la modélisation des essais d'impact sur structures de taille industrielle. Les comparaisons quantitatives avec les mesures expérimentales seront réalisées pour montrer les capacités prédictives de notre modèle. L'objectif ici est de simuler de manière détaillée quelques

essais connus réalisés sur structures en béton armé, ce qui nous permet, d'une part, de valider l'ensemble de notre approche numérique et, d'autre part, de recueillir des éléments pour définir les pistes d'amélioration des modèles que nous avons mis en œuvre. Nous présentons d'abord la simulation d'un essai de choc mou résultant d'une chute gravitaire (vitesse d'impact de 5.425 m/s) d'un projectile lourd sur une poutre en béton armé. La deuxième simulation présentée concerne l'essai II-4 de la campagne expérimentale MEPPEN où un projectile de grande taille très déformable percute une dalle épaisse en béton armé très ferrillée (impact mou à grande vitesse, 250 m/s). La troisième simulation réalisée concerne la modélisation d'un choc dur avec notre modèle, pour estimer ses capacités à reproduire le comportement d'une structure soumise à ce type de choc.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et les perspectives.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Ce chapitre fait un état des lieux des travaux issus de la littérature qui nous ont servi comme base de réflexion pour définir nos choix de modélisation. Tout d'abord le comportement du béton est décrit à travers les résultats fournis par les essais classiques statiques et dynamiques. Ensuite, on va chercher à caractériser le phénomène de l'impact sur les structures qui nous intéressent en nous référant à des essais expérimentaux. Enfin, nous présenterons les différentes méthodes numériques utilisées pour simuler le problème de macro-fissuration avancée. Ce chapitre se termine par un récapitulatif des ingrédients de modélisation que l'on a retenus pour mettre en place une stratégie numérique efficace et robuste et aborder les simulations avec des modèles de taille industrielle.

1.1 Le béton

1.1.1 Caractéristiques générales

Découvert et utilisé depuis l'Antiquité, le béton s'est imposé comme le matériau de construction le plus utilisé dans le monde entier. Facile à fabriquer à partir de matériaux très courants (sable, granulats, ciment...), il est aussi bon marché. Le béton peut reproduire n'importe quelle forme et une fois sec il nécessite très peu d'entretien.

Le béton est l'objet de nombreuses recherches pour améliorer sa résistance et sa durabilité. Ces études portent aussi bien sur ses constituants (Béton Hautes Performances, Béton Ultra Hautes Performances...) que sur son association avec d'autres matériaux du génie civil, surtout l'acier (béton armé, béton précontraint...). La composition peut donc fortement varier d'un béton à l'autre : type de granulats et de ciment, type de renforcement, mais aussi en terme de quantité de ces matériaux.

La microstructure du béton est très hétérogène (Figure 1) : des granulats (sables, gravillons, cailloux...) liés par du ciment. Cet arrangement complexe de plusieurs constituants est à l'origine des propriétés mécaniques du béton. L'étude du béton à cette échelle est très délicate. Cependant, à une échelle suffisamment grande (supérieure à environ 10 fois la taille du plus gros granulats), le béton peut être considéré comme homogène et continu (Mazars, 1984). Dans ce travail de thèse, nous nous placerons à cette échelle pour la modélisation du béton.

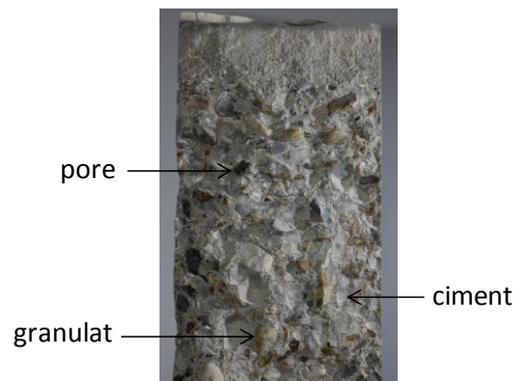


Figure 1 - Microstructure du béton.

De nombreux essais existent pour identifier les propriétés mécaniques du béton. Dans la suite de cette section, nous allons donc décrire brièvement les essais les plus connus, car nous nous y référerons plus tard soit pour déterminer/recaler les paramètres de notre modèle numérique, soit pour vérifier/valider le bon comportement de ce dernier.

1.1.2 Comportement quasi-statique

1.1.2.1 L'essai de compression simple

Il s'agit de l'essai le plus courant car il permet de déterminer la limite de compression du béton, σ_c , sa caractéristique principale. Le béton est un matériau beaucoup plus résistant en compression qu'en traction. Des normes existent suivant les pays pour décrire les dimensions de l'éprouvette en béton et le protocole expérimental (CERIB). En général l'éprouvette recommandée est cylindrique avec une hauteur égale au double de son diamètre. Cette éprouvette est ensuite soumise à une charge croissante par le biais de deux plateaux jusqu'à rupture (Figure 2).

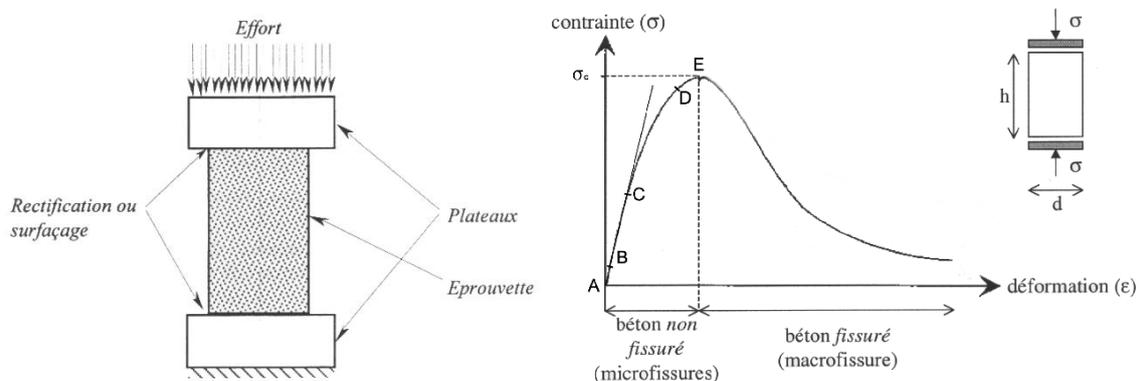


Figure 2 - Schéma de l'essai de compression simple et courbe contrainte-déformation axiale.

La Figure 2 montre aussi l'allure classique de la courbe contrainte-déformation longitudinale obtenue à la fin de l'essai. On peut décomposer l'évolution du comportement du béton jusqu'à sa rupture en cinq phases (Mazars, 1984).

- Zone A-B, très courte : fermeture des microfissures sous les grains, augmentation de E.
- Zone B-C, jusqu'à 30 à 50% de σ_c : le comportement du béton est élastique linéaire.
- Zone C-D, jusqu'à 70 à 90% de σ_c : les non linéarités apparaissent et des microfissures entre la matrice et les agrégats se forment.

1.1 Le béton

- Zone D-E, jusqu'à σ_c : la non linéarité s'accroît, des microfissures parallèles à l'axe de l'éprouvette apparaissent, le volume de l'éprouvette augmente.
- Zone au-delà de E : phase descendante qui correspond à l'apparition de macro-fissures et à la ruine de l'éprouvette.

Dans cet essai, le faciès de fissuration de l'éprouvette dépend des conditions aux limites. Si le frottement entre l'éprouvette et les plateaux est important, les déformations transverses aux extrémités de l'éprouvette seront limitées. L'éprouvette prend alors une forme de tonneau. Des fissures en forme de cône apparaissent à ses extrémités et après l'écaillage, l'éprouvette ressemble à un sablier (Figure 3).



Figure 3 – Forme finale de l'éprouvette lors d'un essai de compression.

Des essais de compression cycliques sont également réalisés. Ces essais mettent en évidence le phénomène d'ouverture/fermeture des fissures dans le béton. Au cours des cycles de charge/décharge, on observe une baisse du module de Young (Figure 4).

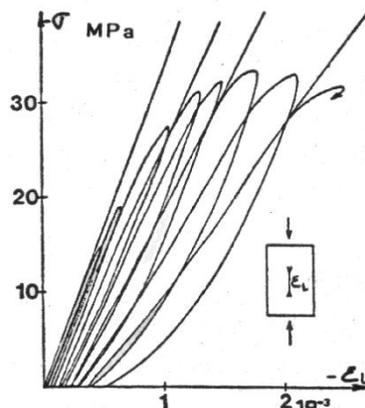


Figure 4 - Résultat d'un essai cyclique de compression simple (Mazars, 1984).

1.1.2.2 Traction simple

La limite de traction σ_t du béton est en général dix fois plus faible que sa limite en compression. On veille donc toujours à ce que le béton dans la structure soit sollicité majoritairement en compression. Cette dissymétrie du comportement du béton en traction/compression lui procure des propriétés particulières en dynamique, il est donc important de caractériser le comportement du béton en traction.

L'essai de traction simple direct (Figure 5-c), qui consiste à tirer sur l'éprouvette dans la direction longitudinale par le biais de deux plateaux collés à ses extrémités, est en réalité assez difficile à réaliser : il faut éviter que la fissure s'initie trop près des plateaux où l'état de contraintes n'est plus unidimensionnel et également s'assurer de l'homogénéité des contraintes dans l'éprouvette.

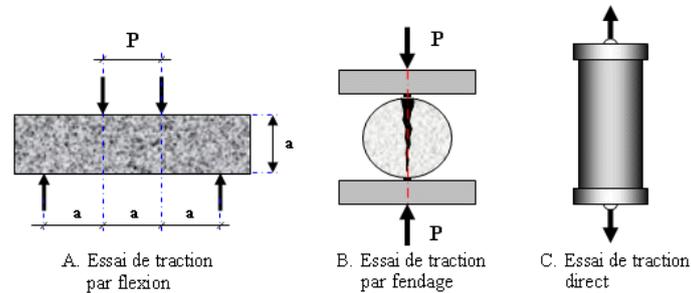


Figure 5 - Différents essais pour déterminer le comportement du béton en traction (Phoummavong, 2003).

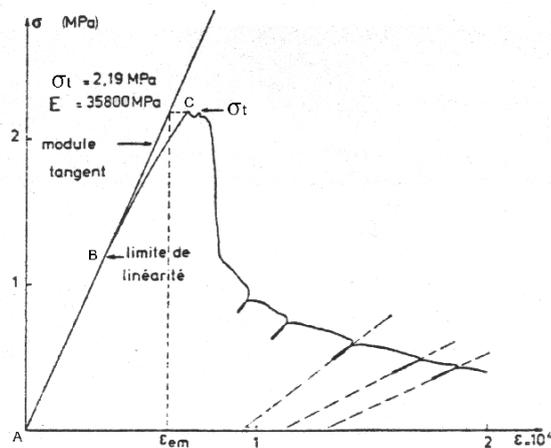


Figure 6 - Courbe contrainte-déformation axiale du béton lors d'un essai de traction simple (Terrien, 1980).

On peut voir sur la Figure 6 un exemple de courbe contrainte-déformation longitudinale que l'on obtient lors de cet essai. Trois phases principales peuvent être identifiées sur cette courbe.

- Zone A-B, jusqu'à 50 à 60% de σ_t : élasticité linéaire.
- Zone B-C, jusqu'à σ_t : le comportement devient non linéaire avec l'apparition de microfissures.
- Zone au-delà de C : la contrainte chute brutalement (phénomène d'adoucissement), des fissures perpendiculaires au sens du chargement se forment et coalescent pour former une macro-fissure (Figure 7).

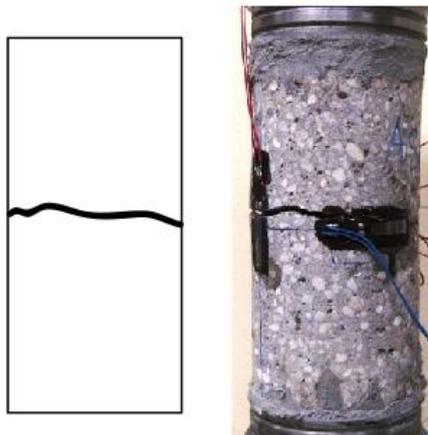


Figure 7 - Faciès de fissuration en traction simple directe (Gabet, 2006).

Pour éviter les difficultés de mise en œuvre de l'essai de traction simple, on a recours à d'autres essais, les essais de traction indirecte, souvent plus simples à réaliser. L'essai de fendage (aussi appelé essai brésilien), le plus courant, consiste à comprimer une éprouvette cylindrique selon deux génératrices diamétralement opposées (Figure 5-b). Pour éviter une rupture locale en compression au niveau des génératrices de chargement et répartir la charge appliquée, on intercale entre l'éprouvette et les plateaux de la presse deux bandes minces en contreplaqué. Ce chargement génère par effet Poisson une contrainte de traction perpendiculaire à la direction de l'effort appliqué. Cette contrainte de traction se concentre au milieu de l'éprouvette et provoque des déformations localisées au centre de l'éprouvette puis, avec l'augmentation de l'intensité du chargement, l'amorçage d'une macro-fissure qui se propage vers les deux génératrices sur lesquelles on applique ce chargement. Le comportement du béton étant fragile en traction, cette macro-fissure atteint très rapidement les extrémités de l'éprouvette. La rupture est brutale et apparaît sous la forme de fendage le long du diamètre vertical de l'éprouvette (Figure 8).



Figure 8 - Faciès de fissuration de l'éprouvette par essai de fendage.

L'essai brésilien dépend de la taille de l'éprouvette et des conditions de l'essai. On peut trouver dans (Rocco et al., 1999) une étude de l'influence de ces paramètres sur les résultats de l'essai et une formule analytique pour calculer la contrainte de rupture de l'éprouvette en fonction de ses caractéristiques et de la limite de traction du béton.

1.1.2.3 Comportement biaxial

Des essais plus avancés permettent d'étudier le comportement multiaxial du béton en appliquant un chargement mixte.

L'essai de Nooru-Mohamed (Nooru-Mohamed, 1992) consiste à solliciter une éprouvette de béton en traction/cisaillement. L'éprouvette est doublement entaillée afin de favoriser l'amorçage de deux macro-fissures au milieu de ses deux bords latéraux opposés (Figure 9). Ses bords supérieur et inférieur sont collés à deux plateaux. Le chargement est appliqué à l'aide du plateau supérieur que l'on sollicite horizontalement et verticalement pour créer un chargement combiné de cisaillement et de traction. Les rotations du plateau supérieur sont bloquées, tandis que le plateau inférieur est complètement bloqué.

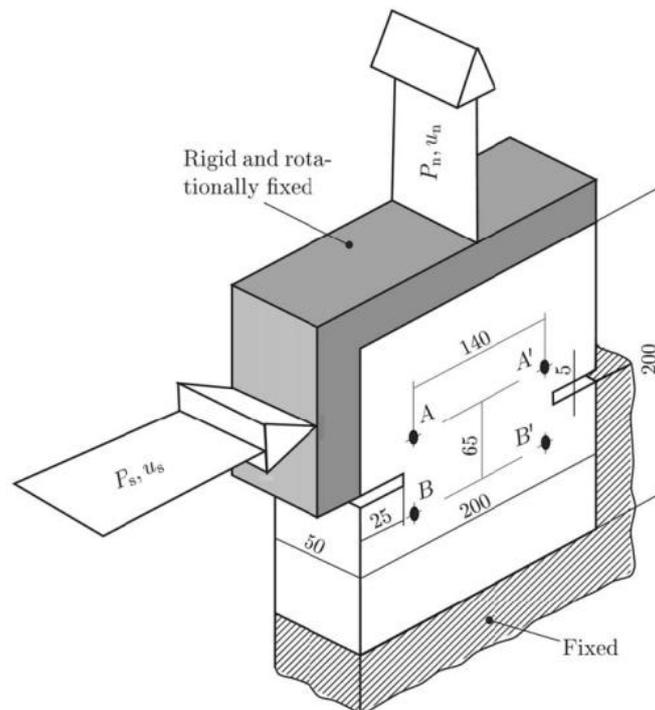


Figure 9 - Schéma de l'essai de Nooru-Mohamed (dimensions en mm) (Gasser et Holzapfel, 2006).

Ce chargement mixte est appliqué selon un ordre précis. L'éprouvette est d'abord chargée en cisaillement (P_s sur la Figure 9). Ce chargement est maintenu constant par la suite, et un chargement de traction P_n est appliqué jusqu'à la rupture.

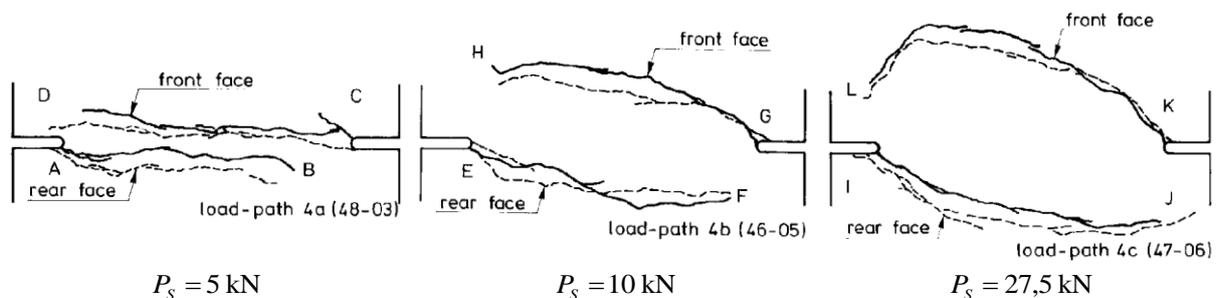


Figure 10 - Faciès de rupture de l'éprouvette pour chacun des trois protocoles 4a, 4b, 4c (Nooru-Mohamed, 1992).

1.1 Le béton

Nooru-Mohamed a réalisé plusieurs essais au cours desquels il faisait varier l'intensité des chargements P_n et P_s , par exemple les protocoles 4a, 4b, et 4c dans lesquels l'influence de l'intensité de P_s est étudiée (Figure 10). Les deux macro-fissures s'amorcent à partir des entailles et se propagent dans l'éprouvette selon une trajectoire d'autant plus courbe que le chargement de cisaillement est élevé. Quand P_s est faible (Figure 10-a) le chargement de traction P_n domine et le faciès de rupture est proche de celui d'une rupture en traction simple : les macro-fissures sont perpendiculaire à la direction de P_n (mode I). Plus P_s devient important, plus on se rapproche du cas de rupture par cisaillement (mode II), et donc l'angle de propagation des fissures se rapproche de 45° (Figure 10 b et c).

1.1.2.4 Comportement sous sollicitation triaxiale

Les essais triaxiaux permettent d'étudier le comportement du béton lorsqu'il est soumis à une pression de confinement. Il existe deux principaux types de ces essais : les essais de compression à confinement actif et à confinement passif.

L'essai à confinement actif consiste à soumettre l'éprouvette cylindrique à une pression hydrostatique appliquée à l'aide d'un fluide, et à une contrainte axiale appliquée par un piston (Jamet et al., 1984), (Ramtani, 1990). La Figure 11 montre l'évolution du comportement de l'éprouvette cylindrique en béton sous l'effet de différentes pressions de confinement. Pour une pression de confinement nulle, l'essai revient à un essai de compression simple : le comportement du béton est élastique adoucissant. Lorsque l'on fait des essais en augmentant la pression de confinement, le pic de contrainte de la courbe augmente et le comportement devient plastique avec écrouissage positif. Des essais triaxiaux avec confinement actif ont été réalisés avec des pressions de confinement très élevées, de l'ordre du Giga Pascal (Gabet, 2006), grâce à la presse GIGA du laboratoire 3S-R (DGA-CNRS-Université de Grenoble) pour étudier le comportement mécanique du béton soumis à des sollicitations extrêmes comme des explosions.

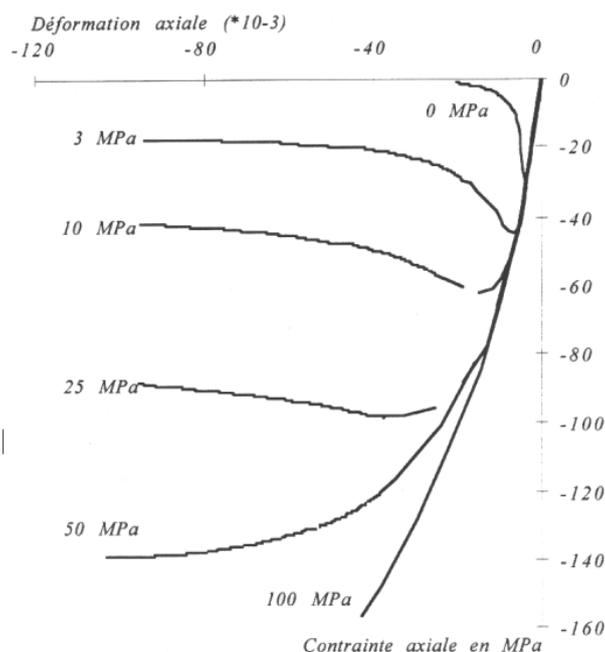


Figure 11 - Comportement triaxial du béton pour différentes pression de confinement (Jamet et al., 1984).

Le confinement passif utilise l'effet Poisson pour comprimer radialement une éprouvette sollicitée en traction (Burlion, 1998). Par exemple, on comprime axialement une éprouvette insérée dans un tube de métal, ce qui permet de caractériser le comportement compactant du béton. La Figure 12 présente une courbe typique de l'évolution de la pression hydrostatique en fonction de la déformation volumique que l'on obtient lors de ce type d'essai :

- jusqu'à 100 MPa, le comportement du béton peut être considéré comme élastique linéaire ;
- ensuite, on observe un écrouissage positif linéaire jusqu'au point de compaction, le point d'inflexion de la courbe : pendant cette phase, appelée durcissement élastique, la rigidité du béton reste la même, ce sont les déformations irréversibles qui vont augmenter : les pores du béton se referment ;
- après le point de compaction, les déformations irréversibles s'atténuent et la rigidité du béton augmente : la porosité dans le béton a fortement baissé, il est devenu beaucoup plus compact et il est donc de plus en plus difficile de le déformer.

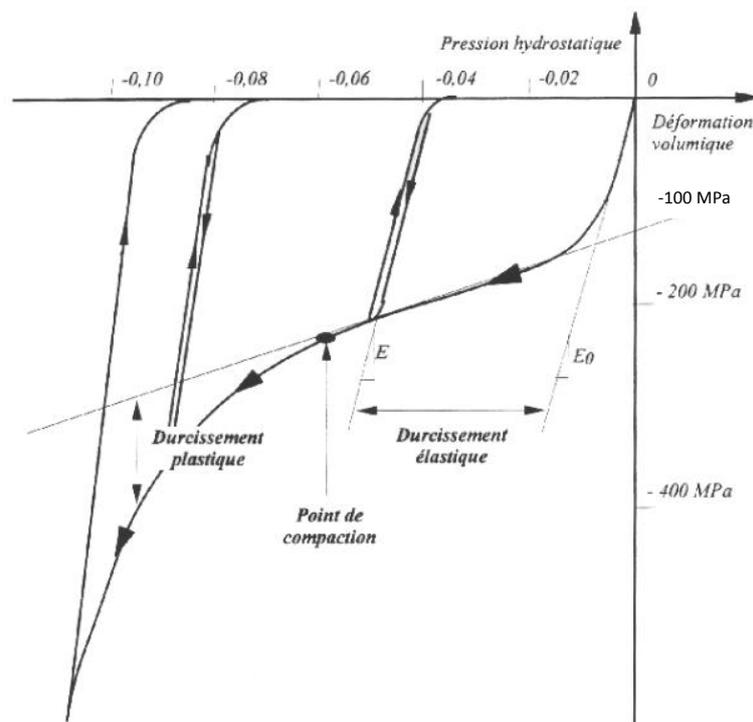


Figure 12 - Comportement compactant du béton (Burlion, 1998).

1.1.3 Comportement dynamique

Les chargements dynamiques comme des impacts qui sont des chargements très intenses appliqués sur une très courte période peuvent entraîner des déformations très rapides de la structure en béton armé. Il est donc intéressant de connaître la réponse du béton lorsqu'il est soumis à un haut taux de déformation.

L'essai dynamique le plus répandu est l'essai aux barres de Hopkinson. Le principe et la mise en œuvre de cet essai est toujours l'objet de nombreuses études (Brara et Klepaczko, 2006), (Forquin et al., 2008), (Ozbolt et al., 2014) : il est basé sur la propagation d'ondes dans un échantillon souvent cylindrique qui est placé entre une barre d'entrée et une barre de sortie (Figure 13). Un projectile est lancé sur l'extrémité libre de la barre d'entrée. Ce choc génère une impulsion dans la barre. Les

1.1 Le béton

jauges installées sur les barres d'entrée et de sortie permettent de mesurer les contraintes et les déformations dans ces barres engendrées par l'impulsion du choc. Cet essai permet d'imposer des taux de déformation élevés dans l'échantillon, supérieurs à 100 s^{-1} .

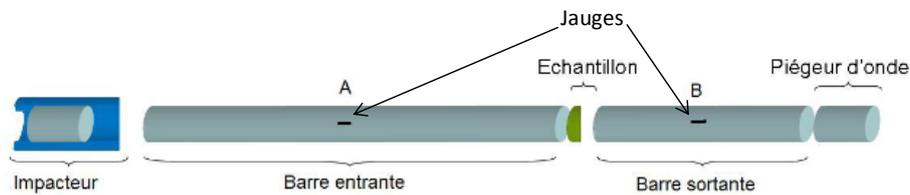


Figure 13 - Principe de l'essai de compression aux barres de Hopkinson (Safa, 2008)

L'influence de l'effet de vitesse a été étudiée sur les différents paramètres mécaniques du béton, mais elle est la plus importante sur ses limites de traction et de compression (Bischoff et Perry, 1995), (Toutlemonde, 1995). Pour se représenter cette dépendance, on définit le rapport dynamique DIF (Dynamic Increase Factor), qui est le rapport entre la résistance dynamique et la résistance statique en compression et en traction.

Les principaux résultats des essais issus de la littérature sont récapitulés sur la Figure 14 (en compression) et sur la Figure 15 (en traction). A partir de ces données des droites de tendance peuvent être obtenues, comme celles préconisées par le CEB. En traction comme en compression, le comportement du béton en fonction de $\log \dot{\epsilon}$ peut être considéré comme bilinéaire et décomposé en deux phases. La première serait due à la présence d'eau dans les micropores du béton provoquant un effet de viscosité dans le matériau. Ce phénomène est appelé « effet Stéfán » (Rossi et al., 1994). La deuxième phase est une augmentation plus brutale du rapport dynamique qui serait due à des effets inertiels, qui deviennent prépondérants à ce niveau de vitesse de déformation (Janach, 1976), (Gatuingt et Pijaudier-Cabot, 2002).

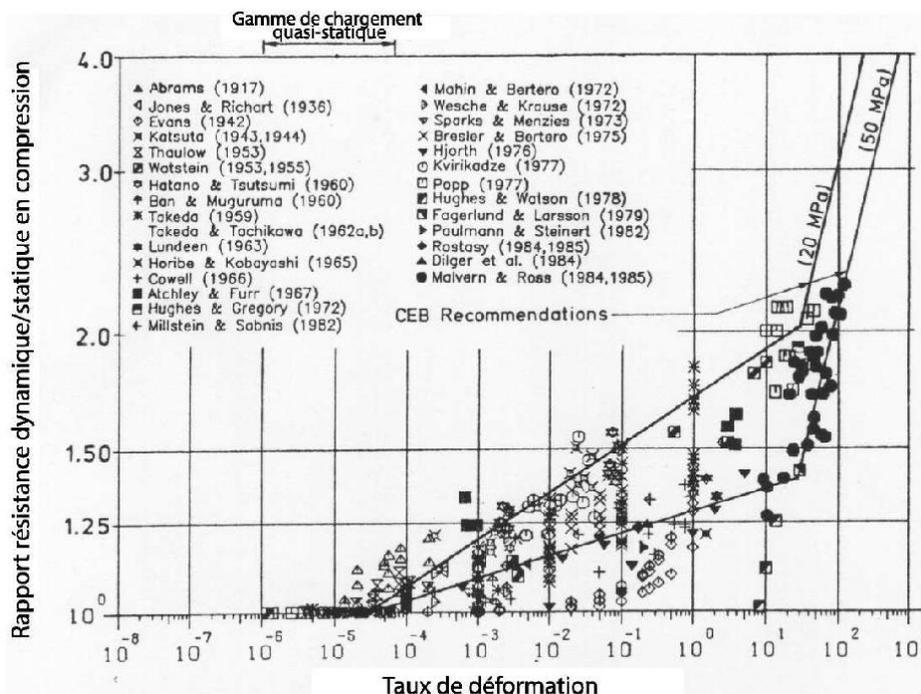


Figure 14 - Dépendance de la résistance à la compression au taux de déformation (Bischoff et Perry, 1991).

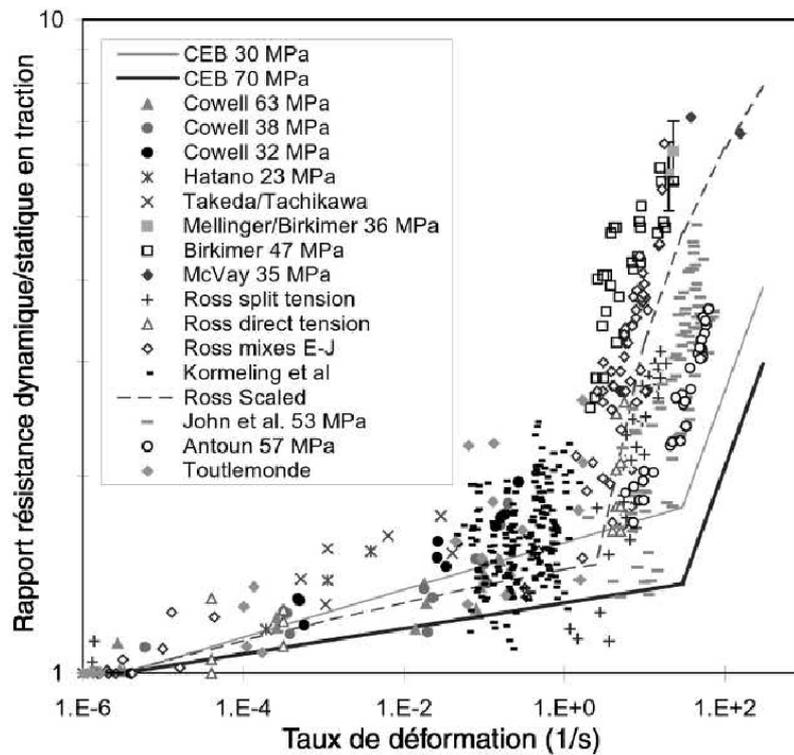


Figure 15 - Dépendance de la résistance à la traction du béton au taux de déformation (Malvar et Crawford, 1998).

1.1.4 Béton armé

Le béton a une limite de traction beaucoup plus faible que sa limite de compression. Pour améliorer la tenue de la partie de la structure en béton soumise à de la traction, on renforce la structure en ajoutant le plus souvent des armatures en acier. L'acier possédant une limite de traction très élevée, il reprend des efforts de traction suite à l'apparition de macro-fissures dans le béton dans ces zones. Si on cherche à modéliser le comportement d'une structure en béton armé lors d'une phase de fissuration très avancée, il est important de prendre en compte l'interaction entre le béton et les aciers. Cette interaction dépend de la qualité de l'adhérence entre le béton et les armatures ainsi que du type de ces dernières. Nous consacrons donc une part importante de ce travail de thèse à la modélisation de l'interface acier-béton et la traitons dans un chapitre dédié (le chapitre 3).

1.2 Généralités sur les structures et les impacts étudiés

1.2.1 Caractéristiques de la structure

L'enceinte de confinement est une structure élancée en béton armé qui isole le réacteur nucléaire de l'extérieur et constitue la troisième barrière de confinement des produits radioactifs, les deux premières étant la gaine du crayon combustible et la cuve du réacteur. L'enceinte peut être unique ou encore composée de deux parois ayant chacune une fonction différente (Figure 16). Dans le second cas, la paroi interne est en béton précontraint et elle est rendue étanche grâce à l'utilisation d'un « liner » (peau métallique), afin d'empêcher les fuites d'éléments radioactifs en cas d'accident. La paroi externe, en béton armé, protège le réacteur nucléaire contre les agressions externes de type

1.2 Généralités sur les structures et les impacts étudiés

chute d'avion. Les enceintes de confinement ont généralement une base cylindrique et une partie supérieure appelée dôme en forme de calotte sphérique, permettant de couvrir un volume important hébergeant le circuit primaire, et de répartir au mieux les efforts quel que soit le type d'accident : surpression interne, impact d'avion, séisme...

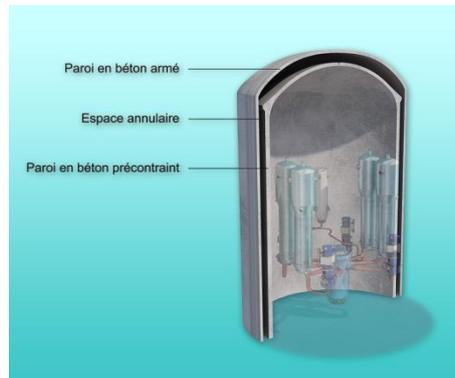


Figure 16 - Schéma d'une coupe du bâtiment réacteur (ASN).

Une enceinte de confinement a une hauteur de 60 m environ, un diamètre de l'ordre de 50 m et l'épaisseur de chacune des parois est de 1 m environ. Elle présente un taux de ferrailage (densité des aciers de renforcement du béton) très élevé pour résister aux très fortes contraintes pouvant survenir lors d'un impact. Le modèle numérique à mettre en place doit donc être capable de prendre en compte l'ensemble des armatures renforçant l'enceinte ainsi que leur interaction avec le béton environnant.

1.2.2 Définition et classification des impacts

Les caractéristiques des projectiles pouvant impacter la structure considérée, notamment la masse et la vitesse, peuvent être très différentes : missiles, avions... De plus, même au sein de chacune de ces deux catégories, les missiles et appareils peuvent avoir des caractéristiques très diverses. La réponse de la structure lors de l'impact peut donc être très différente en fonction du type et de l'intensité du chargement. Dans sa thèse, Koechlin (Koechlin, 2007) propose un critère de classification (1.1) des impacts basé sur la formule de Riera (Riera, 1968) qui prend en compte les paramètres de la structure cible et du projectile. σ_p est la contrainte de rupture du projectile, σ_c est la contrainte de rupture du matériau qui constitue la structure cible, ρ_p est la masse volumique du projectile et V_0 sa vitesse.

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_c} + \frac{\rho_p V_0^2}{\sigma_c} = 1 \quad (1.1)$$

Ce critère distingue deux types d'impacts : le choc dur et le choc mou. Un choc dur se produit quand un projectile rigide ($\sigma_p \gg \sigma_c$) et/ou très rapide ($\rho_p V_0^2 \gg \sigma_c$) impacte la structure (le critère est supérieur à 1) : suivant les cas, le projectile peut perforer la structure ou bien rebondir. Le choc dur se produit en général lorsque le projectile est un missile peu déformable. Dans le cas contraire il s'agit d'un choc mou (le critère est inférieur à 1) : le projectile va se déformer beaucoup au contact de la structure. Ce type de choc correspond davantage à l'impact d'un avion sur une structure.

La classification des principaux essais d'impacts en fonction de ce critère est montrée sur la Figure 17. On voit sur ce graphique que les impacts d'avion peuvent tous être considérés comme des chocs mous qu'il s'agisse d'avion de ligne (B707-300) ou bien d'avions de chasse (FB-111 et Phantom F-4).

1.2.2.1 Impact dur

Lors d'un choc dur, la structure est sollicitée très localement, dans la zone d'impact du missile, et pendant un temps trop court pour qu'elle puisse répondre globalement. Son comportement dans la zone de l'impact est surtout local. Les phénomènes locaux et globaux dans la structure peuvent donc être considérés comme découplés. Pour étudier ce type d'impact, on peut réaliser des essais sur des structures plus petites et plus simples qui ne représentent que la zone impactée de l'ouvrage global.

Un grand nombre d'essais d'impacts peuvent être considérés comme des chocs durs (Figure 17). Les impacts durs ont été étudiés dès la première moitié du 20^{ème} siècle et ont principalement concerné des applications militaires : fabrication de missiles et/ou construction de murs de protection. Suite à ces essais, de nombreux modèles semi-analytiques et des lois de prédiction de la pénétration ont été proposés : la formule de Petry (Kennedy, 1976), la formule EDF-CEA (Berriaud et al., 1978), etc. Une liste critique très complète de ces critères a été faite dans (Li et al., 2005). La validité de ces formules est relativement limitée, elle ne concerne que des projectiles rigides et compacts de type missile (ogive cylindrique avec un nez plat, conique ou hémisphérique).

Pour des projectiles de forme complexe ou de grande taille par rapport à l'épaisseur de la structure, il est nécessaire de créer un modèle numérique du projectile et simuler son impact sur la structure dans un calcul couplé.

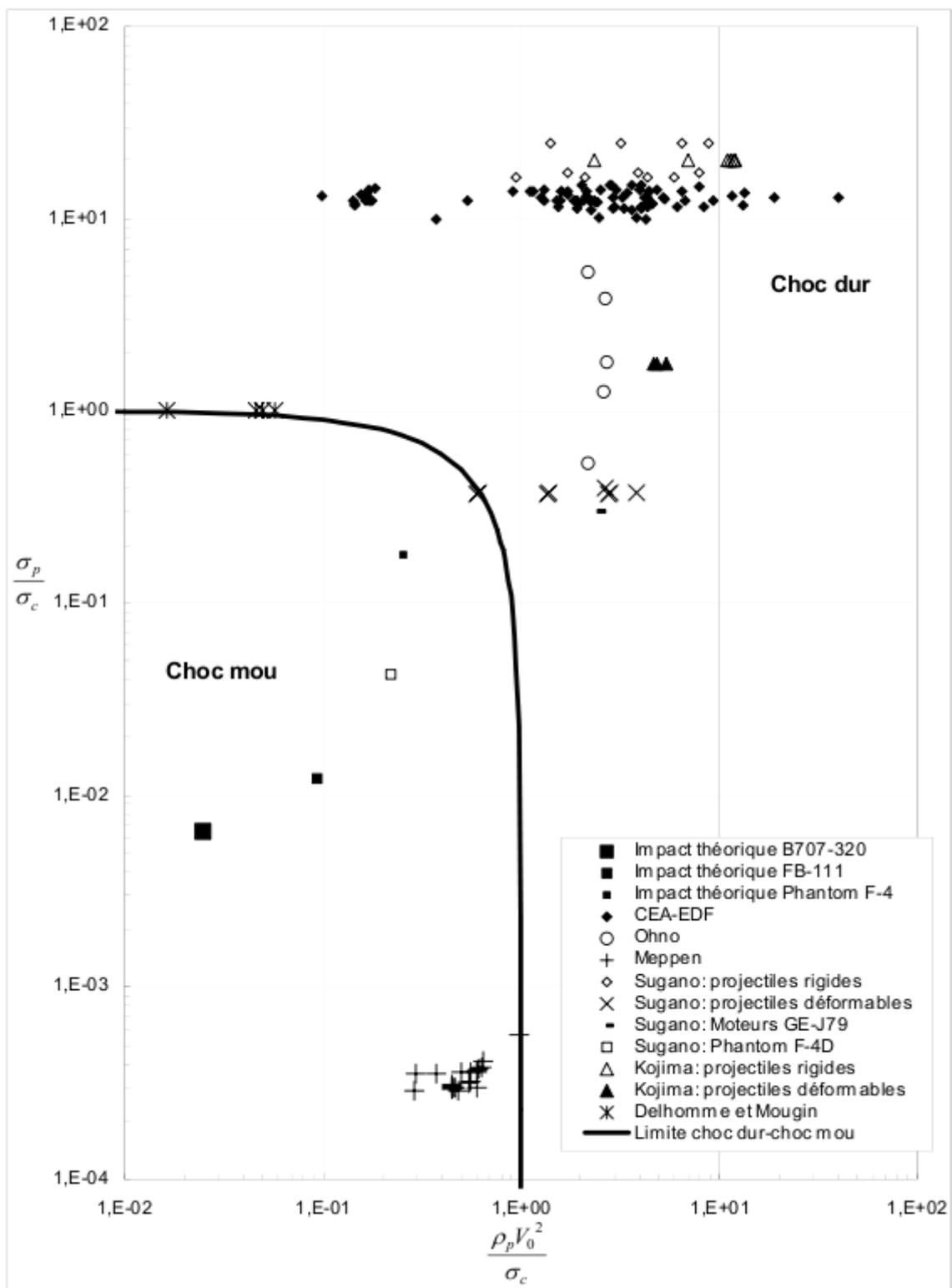


Figure 17 - Classification des essais d'impact en chocs mous et chocs durs (Koechlin, 2007).

1.2.2.2 Impact mou

A partir des années 70, l'industrie nucléaire a commencé à s'intéresser au risque de chute d'avion. Les projectiles utilisés lors des essais sont devenus moins rigides pour pouvoir se rapprocher du comportement déformable de l'avion lorsque ce dernier impacte la structure. Pour les essais Meppen (Jonas et al., 1979), (Nachtsheim et Stangenberg, 1981), (Nachtsheim et Stangenberg, 1982) des tubes en acier ont été utilisés pour impacter des dalles en béton armé. On peut aussi citer les essais de Sugano (Sugano et al., 1993a), (Sugano et al., 1993b), où des moteurs d'avion ont été utilisés comme projectiles, et même un avion militaire réel (Sugano et al., 1993c). Sur la Figure 17, les essais Meppen sont les seuls essais d'impact sur dalles qui correspondent à des chocs mous, et qui sont donc les plus à même de représenter des impacts d'avion. Ces essais sont considérés comme des essais de référence, et de nombreuses études de ces essais ont permis d'améliorer la compréhension du comportement des dalles en béton armé soumises à un impact. Ces études ont permis de déterminer un ordre chronologique des principales étapes de la fissuration et de la fragmentation de la dalle (Jonas et al., 1982), (Koechlin, 2007) (Figure 18).

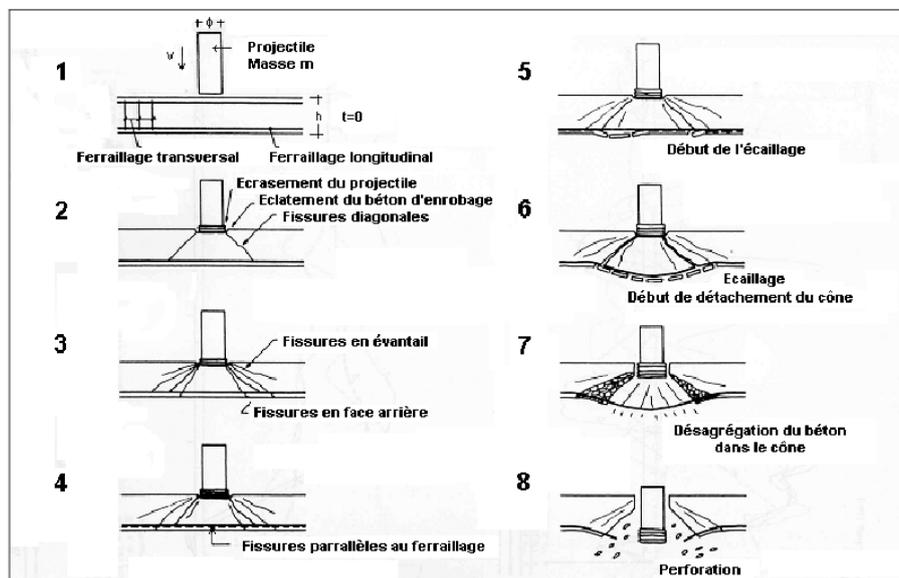


Figure 18 - Scénario de perforation établi d'après les essais Meppen (Jonas et al., 1979).

1. Etat initial avant contact avec la dalle.
2. Contact entre le projectile et la dalle : initiation de fissures diagonales dans l'épaisseur de la dalle, écrasement du projectile contre la dalle, éclatement de l'enrobage béton sur la face impactée.
3. Initiation et propagation d'autres fissures de diverses inclinaisons dans l'épaisseur de la dalle, qui peuvent déboucher sur sa face arrière.
4. Fissuration le long du ferrailage longitudinal de la face arrière.
5. Début de l'écaillage en face arrière.
6. Formation d'un cône de fissuration, écaillage plus important.
7. Endommagement du béton dans le cône de fissuration qui est retenu par le ferrailage inférieur.
8. Rupture des armatures inférieures : le projectile perce la dalle.

1.3 Méthodes de modélisation de la macro-fissuration

Lors d'un choc mou, la durée de l'impact entre le projectile et la structure est plus longue. Les ondes de déformation générées par le projectile ont le temps de se propager dans toute la structure, elles se réfléchissent sur les bords de cette dernière, et viennent se superposer aux contraintes existant dans la zone impactée modifiant ainsi son comportement. La réponse de la structure est donc une combinaison de phénomènes locaux (cisaillement) et globaux (flexion).

Lorsque la structure est suffisamment rigide et le projectile est très déformable, il est possible de découpler le calcul, c'est-à-dire qu'on calcule d'abord la force de l'impact du projectile sur une cible rigide, puis on applique ce chargement à une structure pour étudier sa réponse. L'approche proposée par Riera (Riera, 1968) et utilisée largement dans les études de chute d'avion permet de calculer la force d'impact pour une vitesse d'impact et une distribution de masse données et mener ensuite un calcul d'une structure seule en appliquant le chargement sur une surface définie. Lorsqu'on cherche à modéliser le problème d'impact d'un projectile déformable jusqu'à l'état ultime de la structure (perforation, fragmentation comme à l'étape 8 sur la Figure 18), l'approche découplée de Riera n'est plus valable et il est nécessaire de considérer un calcul couplé avec contact dynamique dont la surface change en fonction de la déformation du projectile et de la dégradation de la structure cible.

1.3 Méthodes de modélisation de la macro-fissuration

1.3.1 Les méthodes continues

La fragmentation de la structure, supposée saine avant l'impact par le projectile, se fait par l'amorçage et la propagation de macro-fissures (Figure 18). Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, une macro-fissure se traduit par l'apparition d'une discontinuité du champ de déplacements localement dans la structure qui est pourtant considérée comme continue. La modélisation de l'amorçage et de la propagation des macro-fissures au cours du temps est donc assez délicate dans les méthodes numériques dont la formulation est basée sur la mécanique des milieux continus. La méthode des éléments finis (Zienkiewicz et Taylor, 2000), la plus utilisée en mécanique des structures, fait l'objet de nombreux développements spécifiques pour tenter de reproduire les phénomènes de fissuration et de fragmentation de ces dernières.

1.3.1.1 La méthode XFEM

La méthode des éléments finis étendus (eXtended Finite Element Method) est une méthode numérique récente (Moës et al., 1999) qui permet de prendre en compte les discontinuités dans les éléments finis grâce à un enrichissement de l'espace d'approximation des champs cinématiques basé sur la partition de l'unité (Babuska et Melenk, 1997).

Cette méthode permet de suivre la propagation d'une fissure (Figure 19) voire plusieurs fissures (Siavelis, 2011) en quasi-statique, mais son application à la simulation d'impacts nécessite encore des développements. Il faudrait notamment approfondir les questions d'amorçage de la fissure, de l'ouverture et de la fermeture de nombreuses fissures, et de la fragmentation.

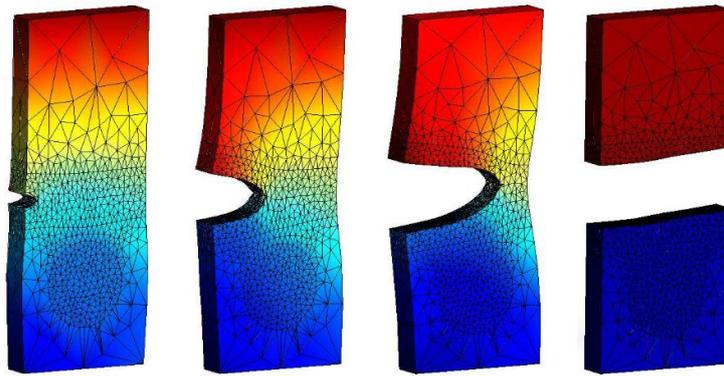


Figure 19 - Simulation numérique de la propagation d'une fissure par la méthode XFEM (Legrain, 2006).

1.3.1.2 La méthode CZM

Les modèles d'interface endommageable (dits de zones « cohésives ») sont basés sur le modèle de Barenblatt (Barenblatt, 1960). Ce dernier suppose l'existence d'une zone de transition d'une longueur caractéristique en pointe de fissure à l'intérieur de laquelle la séparation des surfaces est progressive. La loi de comportement à l'intérieur de cette zone d'épaisseur nulle définit le modèle de la zone cohésive, et consiste en général en une relation liant les contraintes d'ouverture avec l'ouverture elle-même. C'est la méthode CZM « Cohesive Zone Model » proposée dans (Camacho et Ortiz, 1996), (Zhou et al., 2005) dans le cadre de la méthode des éléments finis (Figure 20). Afin de mieux traiter le développement et la propagation de fissures dans les matériaux, des interfaces « cohésives » sont insérées entre les éléments le long des directions cristallographiques hypothétiques, car dans les matériaux réels la fracturation peut intervenir le long des plans cristallographiques dans le groupe d'éléments.

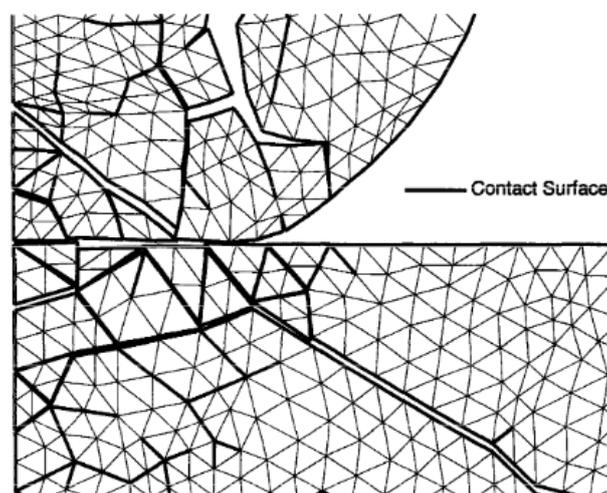


Figure 20 - Traitement des discontinuités dans le maillage éléments finis par zones cohésives (Camacho et Ortiz, 1996).

Dans le cadre de la simulation d'impacts, cette méthode présente quelques inconvénients. Tout d'abord, elle introduit des éléments ayant une certaine rigidité, mais une épaisseur nulle : la rigidité globale de la structure est modifiée et en dynamique le trajet de propagation des ondes mécaniques peut être perturbé. Ensuite, à moins de placer des zones cohésives entre tous les éléments finis du maillage, il faut connaître à l'avance la zone dans laquelle va se propager la fissure. Enfin, il faut

1.3 Méthodes de modélisation de la macro-fissuration

discrétiser la structure assez finement pour limiter l'influence de la forme et de l'orientation des éléments sur l'amorçage et la propagation des fissures.

1.3.1.3 La méthode d'érosion des éléments

La méthode d'érosion des éléments consiste à supprimer l'élément une fois qu'il est totalement endommagé selon un critère de rupture donné. Disponible dans la plupart des codes de dynamique rapide, elle est souvent utilisée pour simuler des impacts perforants (Agardh et Laine, 1999), (Huang et al., 2005), (Teng et al., 2008), (Polanco-Loria et al., 2008). Cette méthode permet d'avoir une bonne estimation de l'état final de la structure après l'impact (Figure 21) à condition d'utiliser un critère d'érosion adéquat, recalé sur des essais de la même nature que le problème traité (gamme des vitesses, nature et niveau des déformations). En outre, la propagation de la fissure dépend fortement du maillage, et le fait d'éliminer les éléments érodés du modèle ne permet plus de respecter la conservation de l'énergie.

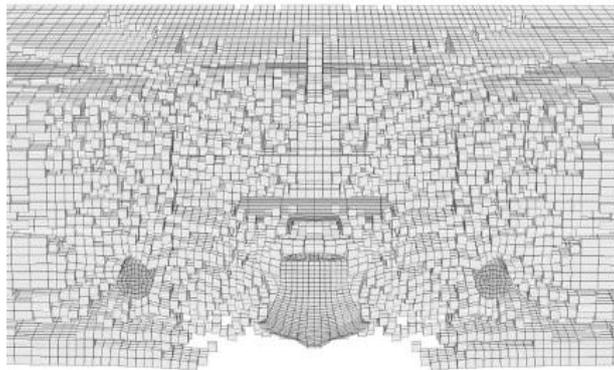


Figure 21 - Simulation de la perforation d'une dalle avec érosion des éléments finis (Agardh et Laine, 1999).

1.3.1.4 Les méthodes sans maillage « Meshfree Methods »

Pour s'affranchir des contraintes sur le maillage posées par l'introduction d'une fissure, des méthodes dites sans maillage ont été développées (SPH, RKPM, EFG,...). Elles discrétisent les équations de la Mécanique des Milieux Continus mais utilisent comme support de calcul un nuage de points. Les éléments points interagissent via des fonctions de forme de type cloche (fonctions noyaux). La plus connue est la méthode SPH « Smooth Particle Hydrodynamics » issue de la mécanique des fluides, puis adaptée à la mécanique du solide (Fries et Matthies, 2003), (Li et Liu, 2004) et aux impacts (Leppanen, 2006). La SPH solide permet de résoudre numériquement les équations de la mécanique des milieux continus et de décrire aisément l'apparition de discontinuités.

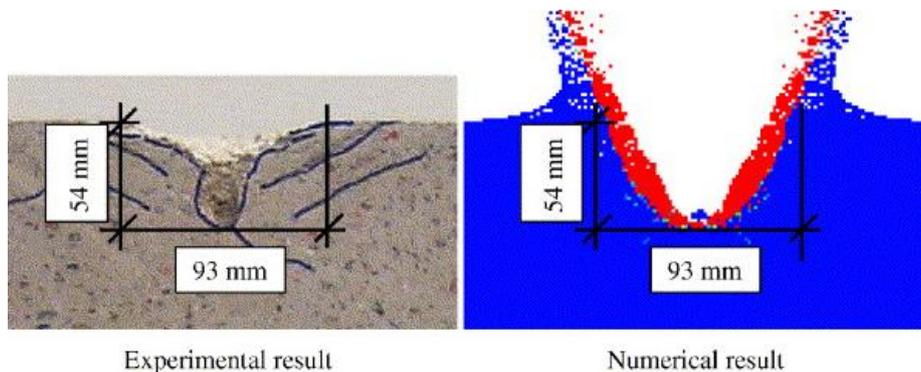


Figure 22 - Simulation d'un impact avec une méthode SPH (Leppanen, 2006).

Cependant, pour donner les meilleurs résultats les éléments voisins de chaque élément doivent être bien répartis dans le domaine couvert par la fonction noyau de ce dernier, ce qui nécessite une disposition régulière et dense des éléments dans le domaine de la structure à étudier. Les structures dont la géométrie est complexe sont donc difficiles à mailler et l'application de la condition de bord libre sur les nœuds extrémités du maillage est assez délicate (Caleyron, 2012).

1.3.2 Les méthodes discrètes

La prise en compte des discontinuités liées aux macro-fissures dans les méthodes continues nécessite des développements importants. Pour contourner ces difficultés, de nouvelles méthodes numériques se sont développées dans lesquelles on abandonne l'hypothèse de la continuité du milieu : les méthodes discrètes. Dans ces méthodes, le milieu est représenté par un ensemble de particules de forme géométrique simple traitées indépendamment les unes des autres comme des corps solides ou déformables. Le champ de déplacement inconnu n'est plus continu, mais défini uniquement en un nombre fini de points représentant le centre des particules. Ces particules-éléments interagissent par des lois très simples comme celles de Newton. Les méthodes discrètes sont très répandues pour modéliser les milieux granulaires, car elles représentent naturellement leur cinématique et leur aspect discontinu. Elles sont répertoriées généralement dans deux catégories : les « Lattice Discrete Particle models » et les méthodes aux éléments discrets.

La représentation discrète du milieu à l'échelle microscopique a une forte influence sur son comportement global restitué par la méthode discrète choisie. Il faut donc maîtriser les propriétés du milieu à l'échelle micro (les lois d'interaction entre les particules) afin que son comportement macroscopique soit bien décrit. Des relations micro-macro sont établies entre les paramètres du modèle pour assurer cette cohérence, et sont en général très spécifiques de la méthode discrète utilisée. Nous aborderons ce point au chapitre 2.

1.3.2.1 Les méthodes Lattice

Les modèles « lattice » sont basés sur un maillage qui représente la structure par un ensemble de points sans dimension reliés entre eux par des lignes, de manière à former un réseau. Ce réseau peut être bidimensionnel ou bien tridimensionnel, régulier ou irrégulier. Chaque ligne représente un élément simple comme une barre ou une poutre à laquelle est associé un comportement et un critère de rupture. Lorsque ce critère est atteint, l'élément concerné est alors rompu et retiré du modèle. Ces méthodes sont généralement utilisées à l'échelle de la microstructure du béton car ils permettent de prendre en compte facilement la nature hétérogène de ce dernier, notamment grâce à l'utilisation d'un réseau désordonné de nœuds et à une distribution de comportements différente des éléments.

Par exemple, dans (Schlangen et Van Mier, 1992) le béton est modélisé avec un système discret de poutres Euler-Bernoulli. Ce maillage est ensuite superposé à une image de la microstructure réelle du béton pour assigner différents comportements aux éléments poutre en fonction des différents composants du béton (matrice cimentaire, granulats, interface). Des résultats significatifs ont été établis sur la fracturation du béton, notamment sur l'influence de la microstructure sur la phase pré-pic et sur le régime adoucissant (Prado et Van Mier, 2003).

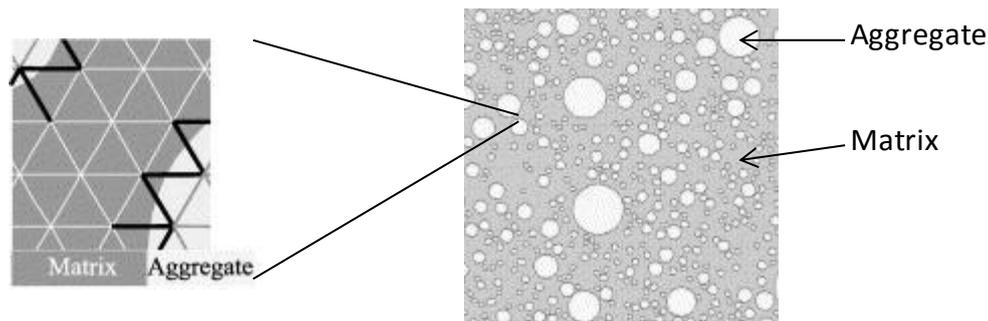


Figure 23 - Exemple de maillage du modèle « lattice » hétérogène de Prado et Van Mier.

Jivkov et al (Jivkov et al., 2013) utilisent un modèle lattice pour étudier l'influence de la porosité du béton sur son comportement à l'échelle macroscopique. Leur réseau est fait avec des éléments poutres Euler-Bernoulli élastiques linéaires sur lesquels on distribue aléatoirement des pores sphériques. Le rayon du pore est pris en compte dans la résistance en traction de l'élément poutre affecté.

La modélisation se fait donc à un niveau de détail très fin avec ces méthodes, ce qui rend fastidieuse l'étude d'une structure de grande taille. Ces modèles sont relativement simples dans leurs formulations. Cependant, ils ne permettent pas de traiter de nouveaux contacts et donc des cycles d'ouverture/fermeture de fissures, comme le peuvent les méthodes éléments discrets.

1.3.2.2 Lattice Discrete Particles Methods (LDPM)

Récemment, de nouveaux modèles ont été développés dans lesquels on donne une dimension aux points du réseau lattice : les « Lattice Discrete Particle Methods » (LDPM). Le réseau de Lattice permet de lier les éléments entre eux afin de prendre en compte l'aspect cohésif du matériau, et des éléments rigides polyédriques en interaction de type contact avec leurs voisins permettent de représenter les fissures et leur cycle d'ouverture/fermeture. Dans (Kim et al., 2013) les armatures sont prises en compte dans le béton sans ajouter de degrés de liberté au système. Les simulations des poutres en béton armé soumises à un chargement dynamique avec différents renforcements (longitudinal et transversal) permettaient de reproduire les résultats des essais. Cependant leur LDPM est encore 2D et nécessite une extension aux cas tridimensionnels pour pouvoir simuler des structures en béton armé plus complexes.

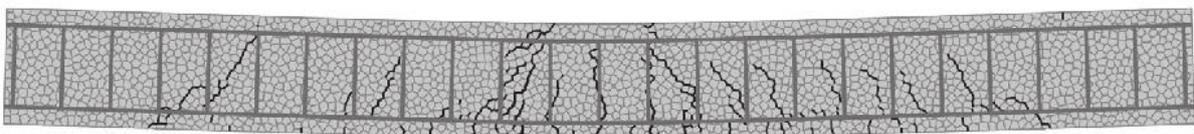


Figure 24 - Simulation d'une poutre en béton armé soumise à un impact (Kim et al., 2013).

Cusatis et al. (Cusatis et al., 2011) proposent de modéliser le béton à l'échelle mésoscopique à laquelle on peut considérer le béton comme un matériau composé de deux phases : un ensemble de granulats dans une matrice cimentaire. Ils commencent par discrétiser la structure en éléments sphériques (ces éléments correspondent aux granulats), puis créent des éléments tétraédriques à partir des centres des sphères. Par une décomposition de Voronoi ils définissent des polyèdres qui vont représenter la matrice cimentaire qui enveloppe les agrégats (Figure 25). Les arêtes des tétraèdres qui relient les sphères entre elles forment le modèle « lattice ».

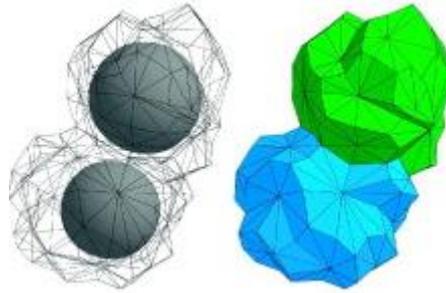


Figure 25 - Exemple de particules polyédriques utilisées dans (Cusatis et al., 2011).

En faisant l'hypothèse que les fissures potentielles vont se produire dans le ciment, chaque polyèdre interagit avec ses voisins. L'interaction mécanique entre ces particules est caractérisée par des contraintes normale et tangentielle à l'interface entre chaque facette de chaque polyèdre avec ses voisins. Après avoir généré ce maillage, une procédure d'identification est appliquée sur des essais simples pour déterminer les paramètres de la loi de comportement non linéaire du modèle méso du béton (Cusatis et al., 2011). Ce modèle permet des simulations très intéressantes de la réponse d'une dalle en Béton Ultra Haute Performance (BUHP) soumise à un impact (Smith et al., 2014) (Figure 26).

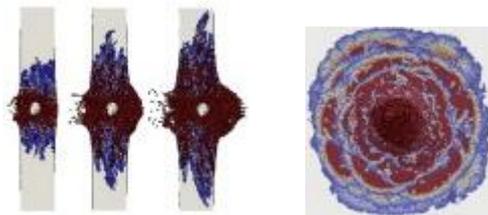


Figure 26 - Simulation d'une dalle en BUHP avec le LDPM (Smith et al., 2014).

Ces modèles permettent d'obtenir des résultats réalistes de la fracturation du béton, cependant, modéliser le béton à l'échelle mésoscopique peut devenir coûteux dans le cas de simulations à l'échelle de la structure réelle. En outre, le fait de considérer des polyèdres nécessite un algorithme très performant de détection des contacts entre eux pour pouvoir traiter les phénomènes d'ouverture et de fermeture des fissures.

1.3.2.3 Les méthodes aux éléments discrets

Les méthodes aux éléments discrets utilisent des particules rigides de forme géométrique simple (polyèdres, sphères...) pour représenter le milieu à discrétiser. Ces particules interagissent entre elles par des lois de contact et de frottement, et leur mouvement est régi par le Principe Fondamental de la Dynamique. Ces méthodes ont été développées initialement pour simuler le comportement de matériaux granulaires rencontrés en géotechnique (Cundall et Strack, 1979).

Des travaux ont ensuite proposé d'appliquer la méthode des éléments discrets sphériques pour décrire le comportement dynamique des milieux cohésifs comme le béton en ajoutant des liaisons entre les éléments pour représenter l'intégrité initiale du matériau (Donzé et al., 1999), (Hentz et al., 2003), se rapprochant ainsi des LDPM par le concept, l'origine des deux méthodes étant différente (dans les méthodes aux éléments discrets, on utilise toujours des particules). Les essais de Berriaud ont été simulés par Magnier et Donzé (Magnier et Donzé, 1998) pour étudier les phénomènes de perforation et de l'écaillage du béton en face arrière de la dalle (Figure 27). Dans sa thèse, Hentz

1.3 Méthodes de modélisation de la macro-fissuration

(Hentz, 2003) a étudié la chute d'un bloc de roche sur une dalle en béton armé et obtient des résultats satisfaisants notamment en terme de flèche.

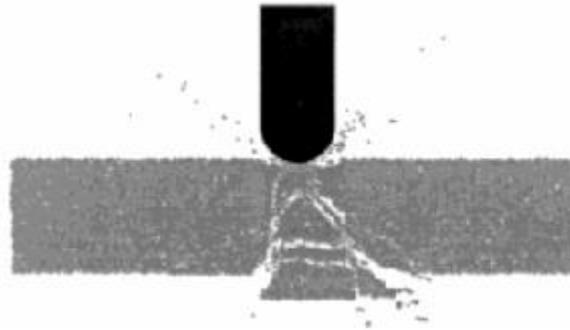


Figure 27 - Simulation de l'impact sur une structure en béton modélisée par éléments discrets (Magnier et Donzé, 1998).

On voit sur la Figure 27 et la Figure 30 le potentiel de la méthode des éléments discrets pour représenter les fortes discontinuités qui apparaissent dans la structure au cours du temps (amorçage, propagation, multi-fissuration).

Les méthodes discrètes développées dans la littérature utilisent souvent des sphères car leur géométrie est très simple à caractériser : seules les coordonnées du centre et le rayon sont nécessaires. Ensuite, il n'existe qu'une seule configuration de contact entre les particules, et elle est très simple à détecter. C'est donc une modélisation peu coûteuse en termes de mémoire et de performance pour un code de calcul. Cependant, les sphères ont tendance à se mettre en rotation facilement, ce qui peut perturber le comportement de l'assemblage de particules par exemple dans le cas de cisaillements importants (Oda et al., 1982), (Bardet, 1994).

D'autres auteurs proposent d'utiliser des formes plus complexes comme des ellipses (Ting et al., 1993) (Bertei et al., 2014), ou encore des polyèdres (Azéma, 2007), (Michaut, 2011) (Figure 28).

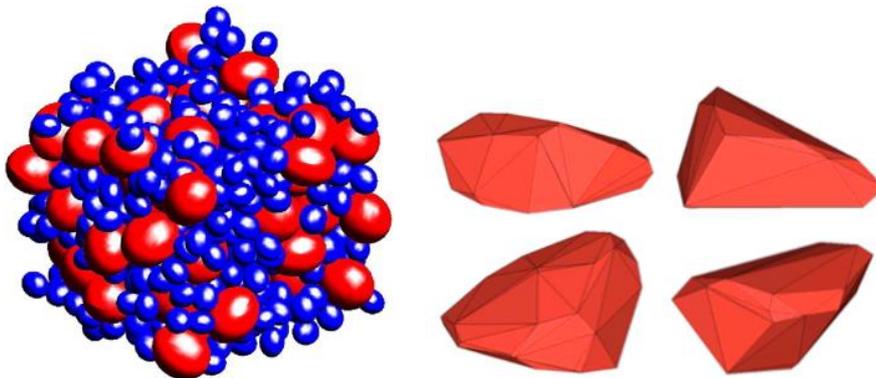


Figure 28 – Éléments ellipsoïdaux (Bertei et al., 2014) et polyédriques (Azéma, 2007).

Les ellipses et les polyèdres ont des formes plus proches de celles des agrégats des matériaux granulaires, et ils sont moins sensibles à la rotation. Cependant les polyèdres sont plus coûteux en mémoire (il faut plus de données géométriques pour les identifier), et en performances : la détection du contact nécessite beaucoup plus de calculs géométriques que pour des sphères ou des ellipses, il y a aussi plus de configurations de contacts possibles dont plusieurs qui peuvent poser problème pour appliquer les efforts de contact (arête contre arête, arête contre sommet (Donzé et al., 2008)).

Pour les ellipses, l'algorithme de détection des contacts est certes plus performant que pour des polyèdres mais reste beaucoup plus coûteux que pour des sphères (Quadfel et Rothenburg, 1999).

Les éléments sphériques étant faciles à gérer, une autre solution proposée dans la littérature consiste à grouper plusieurs sphères pour obtenir une particule de forme plus réaliste : le « cluster » ainsi obtenu peut être composé des sphères agglomérées (Favier et al., 1999) ou non (Tavarez, 2005) (Salot et al., 2009) (Figure 29).

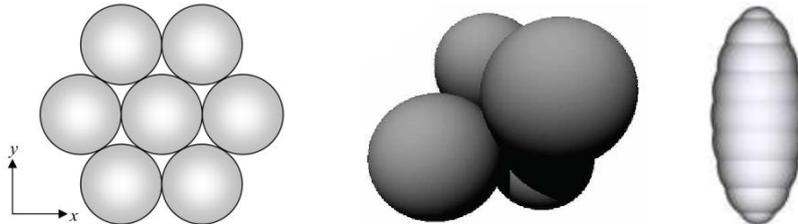


Figure 29 - Clusters de sphères non agglomérées de Tavarez et Salot et agglomérées de Favier.

Ce type de particule est moins sensible aux rotations, et la détection des contacts très simple entre des sphères peut être utilisée. Cependant, ce type de modélisation peut considérablement augmenter le nombre d'éléments et conduire à des maillages extrêmement fins (Figure 30).



Figure 30 - Simulation d'une poutre en béton soumise à un impact (Tavarez, 2005).

Par ailleurs, l'introduction d'une simple raideur en rotation permet de mieux contrôler les rotations des éléments discrets circulaires (Iwashita et Oda, 1998), (Li et al., 2005), (Zhu et Yu, 2006). Dans leur thèse, Plassiard (Plassiard, 2007) et Omar (Omar, 2014) ont étendu les travaux de Iwashita et Oda (Iwashita et Oda, 1998) à des éléments sphériques.

1.4 Conclusion

Le béton est un matériau à la structure fortement hétérogène à l'échelle microscopique. L'étude des propriétés mécaniques de ce matériau est difficile et la modélisation à cette échelle d'une structure de taille importante comme une enceinte de confinement serait prohibitif en termes de coût de calcul. A une échelle suffisamment grande par rapport à la taille des granulats présents dans le béton, ce dernier peut être considéré comme homogène et isotrope et sa modélisation macroscopique permet de représenter correctement son comportement statique et dynamique. Nous nous placerons à cette échelle pour la modélisation du béton dans ce travail de thèse.

Les principaux essais réalisés dans la littérature pour étudier les propriétés mécaniques du béton montrent que ce matériau a un comportement fragile. Le béton est très résistant en compression

1.4 Conclusion

mais beaucoup moins en traction. Il est donc essentiel de déterminer les zones soumises à de la traction dans les structures pour les renforcer. En dynamique, les limites de traction et de compression du béton peuvent augmenter nettement avec la vitesse de déformation, ce qui doit être pris en compte dans le modèle numérique.

L'ajout d'armatures dans le béton permet de renforcer considérablement la structure surtout dans les zones sollicitées en traction. Les enceintes de confinement sont ainsi fortement ferrillées. Pour reproduire correctement le comportement de ce type de structure soumise à un impact, il faut donc prendre en compte les armatures dans notre modélisation. Ce travail fait l'objet du chapitre 3.

De nombreux essais d'impact de projectiles contre des structures en béton armé existent dans la littérature. D'après le critère proposé par Koechlin (Koechlin, 2007), on peut les classer en chocs mous ou bien chocs durs. Le choc mou correspond à l'impact d'un projectile déformable sur la structure qui est alors sollicitée localement (endommagement dans la zone de l'impact) et globalement (propagation d'ondes dans la structure). Les impacts d'avion sont considérés comme des chocs mous, nous allons donc simuler dans ce travail de thèse des essais représentatifs de ce type d'impact.

Lors d'un impact sévère, des macro-fissures se créent et se propagent dans la structure pouvant même la fragmenter en plusieurs blocs. La simulation de l'apparition et de la propagation de ces multiples discontinuités dans la structure par des méthodes continues est assez délicate. En revanche, les méthodes discrètes font l'hypothèse que le milieu est discontinu en le représentant par un assemblage d'éléments rigides de forme géométrique simple. Parmi les différentes formes utilisées, les sphères sont les plus simples et les moins coûteuses à mettre en œuvre dans un code de calcul. C'est bien cette méthode qui a été implantée dans le code EUROPLEXUS dans la thèse de J. Rousseau qui est le point de départ de notre travail.

Chapitre 2

Modélisation du béton par la méthode des éléments discrets sphériques

Comme il a déjà été mentionné, ce travail de thèse prend le relais des travaux antérieurs sur la méthode des éléments discrets sphériques réalisés dans le cadre de la thèse (Rousseau, 2009) et mis en œuvre dans le code EUROPLEXUS. Nous héritons donc des modèles ED du béton et de la liaison acier-béton existants, et notre objectif consiste à rendre ces modèles opérationnels et utilisables dans les calculs de structures industrielles en béton armé sous sollicitations violentes.

Nous ne partons donc pas de zéro, les cadres théorique et numérique de notre travail sont en grande partie imposés dès le départ. Cependant, nous y porterons un regard critique et apporterons des solutions d'amélioration ou de substitution à chaque fois qu'une limitation du modèle se fait sentir aussi bien du point de vue théorique que numérique, ce qui nous permettra de bâtir une modélisation théoriquement maîtrisée et numériquement efficace donnant accès à la simulation des structures réelles.

Même si le sujet principal de notre travail concerne la modélisation de la liaison acier-béton, qui fait l'objet du chapitre suivant, nous sentons la nécessité de consacrer un chapitre séparé à la modélisation du béton seul, puisqu'il n'est pas imaginable d'entamer le calcul de structures en béton armé en maîtrisant uniquement les questions liées à la liaison acier-béton et en délaissant les aspects relatifs à la modélisation du comportement du béton lui-même.

L'objectif de ce deuxième chapitre est de présenter les différents aspects caractérisant la modélisation du béton par la méthode des éléments discrets (ED) sphériques implantée dans EUROPLEXUS. On expose tout d'abord quelques généralités sur la méthode ED utilisée, et on fait un état des lieux du cadre numérique existant au début de notre thèse. On parle ensuite du support géométrique ED, que l'on va traditionnellement appeler maillage, en présentant ses spécificités et les propriétés recherchées, ainsi que la méthode et l'outil numérique permettant de le générer. Ensuite on montre les lois d'interactions locales entre les éléments permettant de modéliser le comportement macroscopique du béton ainsi que la procédure d'identification de leurs paramètres. Nous présentons les résultats d'une étude que nous avons réalisée pour répondre à la question sur la convergence au maillage de la méthode ED sphérique dans le domaine élastique linéaire. Pour évaluer la capacité du modèle à restituer le comportement non linéaire du béton, nous simulons quelques essais où le béton est fortement sollicité en traction et en cisaillement, les deux principaux modes de rupture lors d'un impact.

2.1 Etat des lieux au démarrage de la thèse

2.1.1 Généralités sur la méthode des éléments discrets utilisée

Dans le cadre de la méthode des éléments discrets sphériques le milieu continu est représenté par un assemblage de sphères de différentes tailles réparties de manière désordonnée sur le domaine. Le caractère désordonné est fondamental pour assurer l'isotropie initiale du béton et éviter le développement des fissures dans quelques plans de clivage privilégiés. Deux types d'interaction sont envisagés : l'interaction de type « lien cohésif » pour modéliser un matériau cohésif non fissuré et l'interaction de type « contact » pour modéliser les interactions qui apparaissent au cours de la simulation si deux éléments initialement non liés ou ayant rompu rentrent en contact.

Il est important de préciser que les sphères du modèle ED considéré ici ne représentent pas les granulats réels du matériau. Nous nous plaçons à une échelle de modélisation intermédiaire entre celle du matériau et celle de la structure (Figure 31). Notre modèle ED considère le béton comme un matériau homogène et il n'est censé reproduire que le comportement macroscopique de ce matériau.

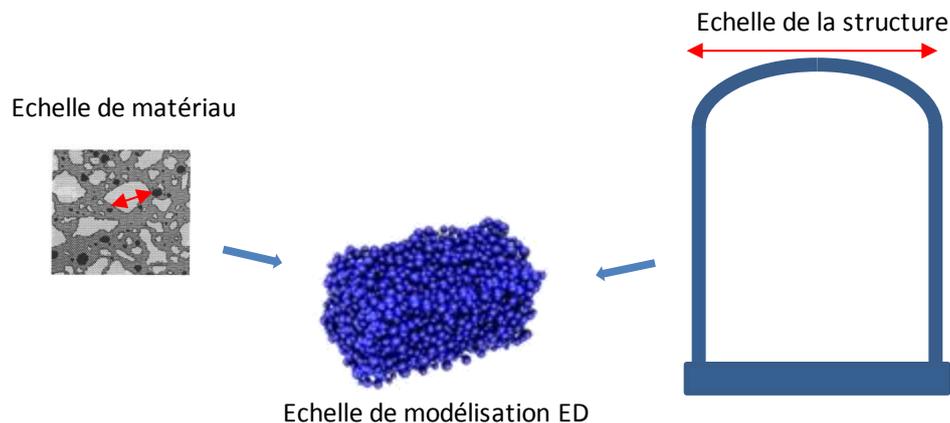


Figure 31 – L'échelle de modélisation pour le modèle éléments discrets considéré.

A la différence des modèles continus qui appliquent généralement les mêmes caractéristiques physiques macroscopiques à tous les éléments ayant le même matériau, le modèle ED repose sur des lois d'interaction locales qui sont fonction de la taille des éléments en interaction. Cela conduit à des raideurs locales différentes au niveau des liens inter-éléments. Le comportement global résulte alors de l'ensemble des interactions locales.

Chaque élément est relié à ses plus proches voisins par des lois d'interaction. Les caractéristiques à l'instant t d'un élément discret sont sa position $\vec{a}_i(t)$, sa vitesse de translation $\vec{d}_i(t)$ et sa vitesse de rotation $\vec{\omega}_i(t)$. Connaissant la position de tous les éléments à un instant donné, il est possible de déterminer les torseurs des actions mécaniques qui s'appliquent sur chacun des éléments. On en déduit par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique (PFD), appliqué au centre de chacune des sphères, les accélérations (en translation et en rotation) des éléments. Enfin un schéma explicite aux différences finies centrées conduit aux nouvelles positions $\vec{a}_i(t + \Delta t)$, vitesses $\vec{d}_i(t + \Delta t)$ et vitesses angulaires $\vec{\omega}_i(t + \Delta t)$.

2.1 Etat des lieux au démarrage de la thèse

Pour un élément i entouré à l'instant t par n voisins avec lesquels il interagit, on définit δ_{ij} le déplacement relatif entre l'élément i et l'un de ces voisins j . Si on connaît la loi d'interaction entre ces éléments, δ_{ij} induit des forces et des moments sur l'élément i . On en déduit alors son accélération $\vec{d}_i(t)$ et son accélération angulaire $\vec{\omega}_i(t)$:

$$\begin{cases} \vec{d}_i(t) = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^n \vec{F}_{j \rightarrow i}(\delta_{ij}) \\ \vec{\omega}_i(t) = \frac{1}{J_i} \sum_{j=1}^n \vec{M}_{j \rightarrow i}(\delta_{ij}) \end{cases} \quad (2.1)$$

où m_i et J_i sont respectivement la masse et le moment d'inertie de l'élément i .

Le schéma d'intégration en temps permet de passer de l'instant t à l'instant suivant $t + \Delta t$. La discrétisation en temps est réalisée par le schéma explicite des différences centrées suivant :

$$\begin{cases} \vec{d}_i(t) = \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{d}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \vec{d}_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right) \\ \vec{\omega}_i(t) = \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{\omega}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \vec{\omega}_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right) \end{cases} \quad (2.2)$$

En notant dans l'équation (2.1) la résultante des forces et des moments par $\vec{F}_i^{tot}(t)$ et $\vec{M}_i^{tot}(t)$ et en intégrant l'accélération (équation (2.2)) sur un pas de temps, on obtient les expressions pour les vitesses :

$$\begin{cases} \vec{d}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \vec{d}_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\vec{F}_i^{tot}(t)}{m_i} \Delta t \\ \vec{\omega}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \vec{\omega}_i\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\vec{M}_i^{tot}(t)}{J_i} \Delta t \end{cases} \quad (2.3)$$

D'où finalement l'expression des nouvelles positions :

$$\vec{d}_i(t + \Delta t) = \vec{d}_i(t) + \vec{d}_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t$$

La Figure 32 montre les principales étapes de la méthode des éléments discrets utilisée. A partir de la disposition des éléments définie à l'instant $n\Delta t$, on actualise d'abord pour chaque élément la liste de ses voisins avec lesquels il interagit via les liens cohésifs ou de contact. Puis on calcule les nouvelles distances pour chaque couple d'éléments en interaction et on applique les lois d'interaction qui permettent de calculer les résultantes des forces et des moments. Par le PFD, les vitesses à l'instant $(n + 1/2)\Delta t$ sont obtenues par l'équation (2.3), et finalement on calcule les déplacements à l'instant $(n + 1)\Delta t$ puis on met à jour les positions des éléments.

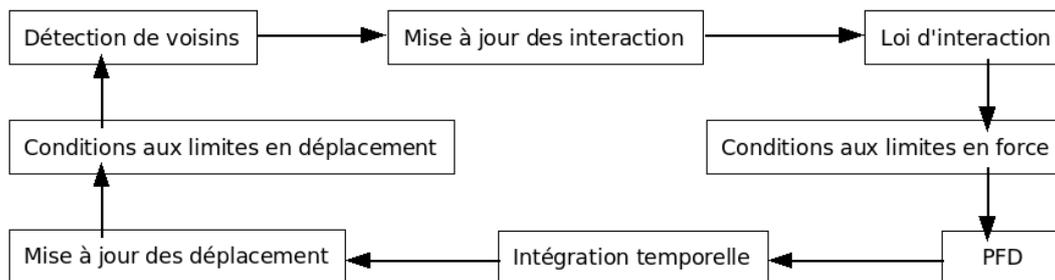


Figure 32 – Principe de l'algorithme d'intégration temporelle pour le modèle éléments discrets.

Cet algorithme s'intègre parfaitement dans le cadre numérique du schéma explicite des différences centrées utilisé dans le code EUROPLEXUS, que EDF et le CEA développent pour traiter les problèmes de dynamique rapide. Le fait que les masses et les inerties des éléments discrets du modèle ED sont naturellement concentrées assure automatiquement le découplage et produit une matrice de masse diagonale, dont l'inversion est peu coûteuse.

Puisque le schéma explicite est conditionnellement stable, il est nécessaire de respecter la condition CFL sur le pas de temps. Pour assurer la stabilité et la précision des calculs ED, nous présentons au chapitre 3 une étude analytique et numérique de ces aspects.

Mis à part le schéma d'intégration, il faut deux choses pour mettre en œuvre une modélisation ED : générer un support géométrique du modèle et établir les lois d'interaction entre les éléments. Nous allons aborder ces questions dans les sections 2.2 et 2.3.

2.1.2 Cadre algorithmique et numérique existant

Les premiers travaux à EDF sur la méthode des éléments discrets ont été réalisés dans le cadre de la thèse de Jessica Rousseau (Rousseau, 2009) avec l'implantation de la méthode dans le code EUROPLEXUS. Il est à noter que les éléments discrets ont été utilisés pour la modélisation aussi bien du béton que des armatures. La différence de traitement venait d'une part de la nature de l'assemblage des éléments - assemblage polydisperse pour le béton et une série d'éléments alignés de même diamètre pour les aciers - et d'autre part des lois de comportement utilisées - fragile pour le béton et ductile pour l'acier. Une loi d'interface acier-béton a été développée dans le contexte ED. Dans l'optique de pouvoir aborder la modélisation des ouvrages de grande taille soumis à des charges localisées de type impact, un algorithme de couplage avec recouvrement des formulations ED et EF coque a été mis en œuvre permettant de discrétiser en éléments discrets la zone impactée, siège de fortes non-linéarités, et d'utiliser en même temps les éléments finis classiques dans les zones éloignées de l'impact, donc peu sollicitées et restant élastiques linéaires. Un autre « panachage » des formulations, utile dans les calculs pratiques, a été mis en œuvre permettant de traiter le contact entre les modèles EF et ED et de modéliser ainsi le projectile en éléments finis et la cible en éléments discrets.

Malgré ces progrès et la démonstration sur quelques cas-tests simples de l'efficacité de la méthode, l'état de maturité de l'approche n'avait pas été atteint pour pouvoir envisager son utilisation dans un contexte industriel. En effet, il subsistait un certain nombre de problèmes techniques et d'interrogations liés à l'approche ED en général et à sa mise en œuvre dans EUROPLEXUS en particulier, nécessitant une investigation ultérieure. Parmi ces points délicats, on peut mentionner :

2.2 Le maillage éléments discrets

- un comportement trop fragile en compression du modèle ED de béton,
- un écaillage artificiel par détachement de l'acier du béton et le départ massif des ED béton appartenant à l'enrobage des armatures, lorsque la structure commençait à se déformer,
- des coûts du calcul ED très importants à cause d'un algorithme ED séquentiel non optimisé (plusieurs jours de temps CPU),
- l'absence d'outil informatique maîtrisé permettant de produire les maillages ED (assemblages polydispersés d'éléments sphériques).

Pour avancer sur la modélisation du béton armé et traiter les deux premiers points ci-dessus, deux thèses sur la problématique « Eléments discrets » ont été lancées simultanément en 2011 : la thèse d'Ahmad Omar (Omar, 2014) sur la modélisation ED du béton en dynamique rapide et la présente thèse orientée sur la modélisation ED de la liaison acier-béton. Dans ce montage, les deux thèses se complètent, l'une devant approfondir l'aspect modélisation du matériau béton et l'autre apportant la dimension structure.

2.2 Le maillage éléments discrets

Dans cette section nous parlerons du support géométrique du modèle ED qui se présente sous forme d'un empilement compact de sphères et que nous appellerons « maillage » par abus de langage. Nous faisons un aperçu des différentes techniques de génération de maillage ED et nous choisissons celle qui respecte les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.

2.2.1 Caractéristiques

La création d'un maillage en éléments discrets sphériques d'un volume de matière donné consiste grosso modo à représenter un volume continu par un assemblage de sphères discrètes. Dans la pratique, il existe plusieurs manières de fabriquer un tel assemblage. Cependant, le maillage résultant ne sera pas le même car les tailles des éléments discrets et leur arrangement spatial dans le volume dépendent de la méthode utilisée, ce qui aura une influence non négligeable sur le comportement mécanique du modèle ED. Comme nous faisons l'hypothèse que le béton est homogène et isotrope à l'instant initial, il faut essayer de créer un maillage ED avec les propriétés qui répondent au mieux à cette hypothèse, en limitant le plus possible l'effet de maillage sur la solution numérique.

L'idée la plus simple et facile à mettre en œuvre consisterait à remplacer le volume par des éléments discrets de même taille et rangés selon un ordre donné (Figure 33-a). Cependant, un arrangement ordonné des éléments de l'assemblage entraînerait une dépendance des propriétés mécaniques aux directions privilégiées par les éléments et donc une anisotropie initiale (Hentz, 2003). Si on construit un ensemble de sphères désordonné mais de même taille, il a tendance à se réordonner sous l'effet d'une sollicitation. Pour avoir un maillage éléments discrets représentatif d'un matériau isotrope, il faut donc que les éléments discrets soient de taille variable et placés de manière désordonnée dans le volume à discrétiser (Figure 33-b).



Figure 33 – Exemples de maillages ED ordonnés (a) et désordonné (b) (Hentz, 2003).

Lorsqu'on utilise des éléments discrets sphériques même de taille très variable, il reste inévitablement des vides entre ces éléments. Le maillage éléments discrets ainsi obtenu a une compacité $c < 1$:

$$c = \frac{V_{ED}}{V_{STR}}$$

Pour interpréter et paramétrer la compacité d'un assemblage de sphères, on définit le rapport R_{max}/R_{min} entre les rayons du plus grand et du plus petit élément discret qui le compose. Une grande valeur de ce rapport permet une distribution des tailles des éléments discrets importante et multiplie les éléments discrets les plus petits qui vont mieux combler les vides entre les plus grands. Pour représenter au mieux l'intégrité de la structure et le comportement sain du béton au début de la modélisation, il faut un échantillon assez dense, d'une compacité comprise entre 0.4 et 0.6 (Rousseau, 2009).

2.2.2 Méthodes de génération

De nombreuses méthodes ont été développées pour construire un assemblage désordonné de sphères de tailles différentes. On peut ranger la plupart de ces méthodes dans deux catégories : les méthodes dynamiques et les méthodes géométriques.

2.2.2.1 Les méthodes dynamiques

Les méthodes dynamiques utilisent les lois de Newton pour disposer les sphères aléatoirement dans un volume donné. Des relations de contact sont définies entre les sphères, et ces dernières sont soumises à des chargements mécaniques de manière à compacter le plus possible l'assemblage final afin qu'il ait la compacité voulue et qu'il respecte les dimensions du volume à discrétiser. Par exemple, les sphères peuvent être soumises à la gravité et déposées une par une (Siiria et Yliruusi, 2007). On peut citer la méthode de grossissement de Potyondy (Potyondy et al., 1996), qui consiste à comprimer l'assemblage des éléments sphériques tout en augmentant régulièrement la taille de ces derniers jusqu'à ce qu'un état d'équilibre soit atteint. D'autres utilisent des méthodes de la dynamique moléculaire, comme l'algorithme de Lubachevsky-Stillinger (Lubachevsky et Stillinger, 1990) qui utilise des sphères qui grossissent au cours du temps (Donev et al., 2004).

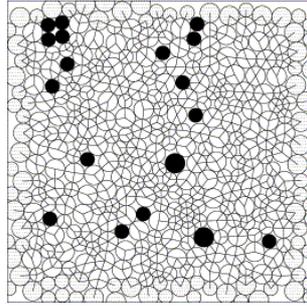


Figure 34 - Exemple d'assemblage de disques désordonnés obtenu par Donev.

Les méthodes dynamiques permettent d'obtenir des maillages très désordonnés avec des éléments de taille variable, ce qui garantit une bonne isotropie du matériau composant la structure ainsi discrétisée. Cependant, leur mise en œuvre consiste déjà en une simulation numérique d'un problème de mécanique, qui peut être très coûteuse en temps de calcul si le nombre d'éléments dans le maillage est important. En outre, les méthodes dynamiques qui consistent à appliquer un chargement sur le maillage aux frontières du volume sont plus difficiles à mettre en œuvre dès que ce dernier a une géométrie compliquée.

2.2.2.2 Les méthodes géométriques

Les méthodes géométriques créent des assemblages de sphères qui sont placées à l'aide de fonctions géométriques. Elles s'affranchissent de la résolution des équations de la dynamique nécessaires pour la réalisation physique de l'assemblage des sphères et sont donc en général moins coûteuses en temps de calcul que les méthodes dynamiques.

La méthode de Jodrey-Tory (Jodrey et Tory, 1985) consiste à placer aléatoirement dans le domaine à discrétiser des sphères de même taille, pour créer l'assemblage initial. Un processus itératif de grossissement et de remplacement des éléments est réalisé. La méthode peut présenter des problèmes de convergence en présence d'éléments fixes (armatures) et la phase de réarrangement de l'assemblage des sphères devient très coûteuse numériquement pour des maillages fins. Mueller (Mueller, 2005) a développé un algorithme géométrique qui place les sphères une par une dans un cylindre, couche par couche, en commençant par les placer contre les bords. Cette méthode est très rapide, mais doit encore être généralisée à la discrétisation par des sphères de tailles variables.

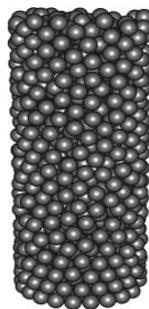


Figure 35 - Maillage éléments discrets d'un volume cylindrique (Mueller, 2005).

Une autre méthode géométrique, développée dans (Han et al., 2005), propose de générer un maillage d'éléments discrets en répétant une procédure constituée de deux étapes : comprimer l'assemblage courant des éléments sphériques, puis remplir de nouvelles sphères l'espace restant du volume à mailler (Figure 36). Cette procédure s'arrête quand il n'est plus possible d'ajouter des

sphères dans ce volume. La compression est réalisée géométriquement, à partir de l'analyse des déplacements possibles de chaque élément discret par rapport à ses voisins.

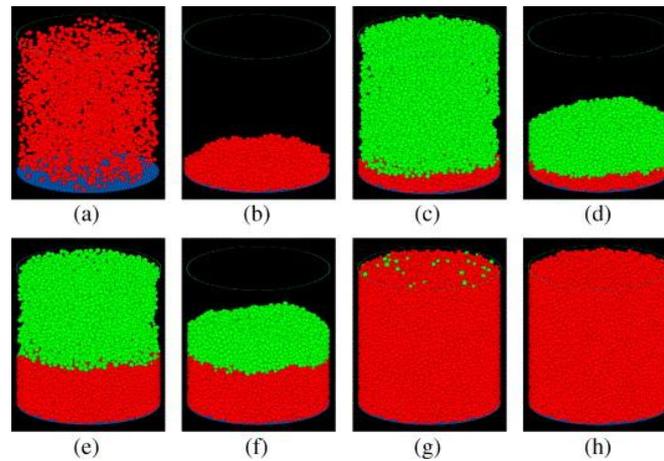


Figure 36 - Méthode de remplissage en éléments discrets sphériques du volume à mailler (Han et al., 2005).

Pour créer les maillages éléments discrets des structures en béton que nous étudions dans ce travail de thèse, nous utilisons la méthode géométrique proposée dans (Jerier et al., 2009) et implantée dans le logiciel libre⁵ SpherePadder++. Cette méthode permet de créer un assemblage d'éléments sphériques de taille variable représentant un volume de forme quelconque, discrétisé au préalable en éléments finis tétraédriques. Il est alors possible de mailler en éléments discrets des structures de forme complexe (Figure 37).



Figure 37 - Maillage éléments discrets d'une partie d'une mine à ciel ouvert (Jerier et al., 2009).

L'efficacité de cet algorithme est basée sur une fonction géométrique qui permet de trouver facilement la sphère tangente à quatre autres sphères voisines non coplanaires. Les sept principales

⁵ <https://subversion.assembla.com/svn/spherepadder>

2.2 Le maillage éléments discrets

étapes de cette méthode sont détaillées sur la Figure 38, sur laquelle un volume cubique est petit à petit rempli par des sphères.

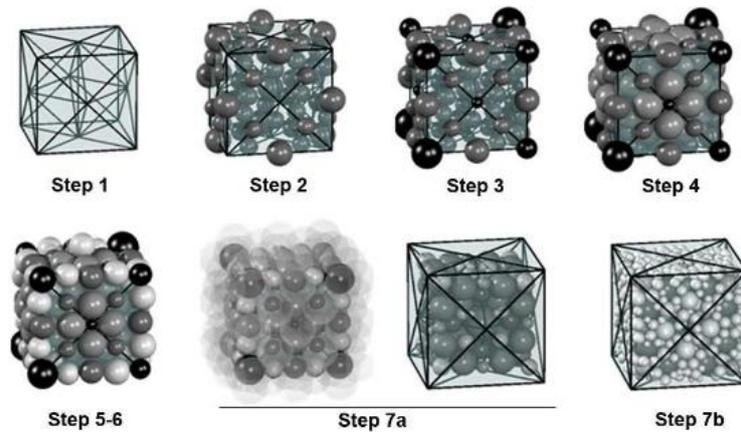


Figure 38 - Les principales étapes de la méthode proposée dans (Jerier et al., 2009).

Le contenu des sept étapes de construction du maillage ED sont :

1. Discrétisation du volume en éléments finis tétraédriques.
2. Des sphères sont placées au milieu des arêtes de chaque tétraèdre (le rayon de ces sphères est fonction de la longueur de l'arête sur laquelle la sphère est placée).
3. Des sphères sont placées au sommet de chaque tétraèdre,
4. Dans cette étape et au cours des suivantes, les sphères sont créées en utilisant la fonction géométrique. Cette dernière est appliquée pour placer des sphères au voisinage des barycentres des faces des tétraèdres.
5. (et 6.) On applique la fonction géométrique pour placer des sphères au barycentre de chaque tétraèdre et dans son voisinage.
7. (a) (gauche) A la fin de l'étape 6, l'assemblage des éléments discrets ne respecte pas les limites géométriques du volume cubique que l'on veut mailler. Pour prendre en compte ces frontières, des sphères virtuelles de taille importante sont placées tangentiellement aux faces triangulaires des tétraèdres situées sur les bords de la géométrie.
7. (a) (droite) Les sphères de l'assemblage éléments discrets qui interpénètrent les sphères virtuelles sont supprimées. Après cette étape l'assemblage d'éléments discrets n'atteint plus les frontières du volume à discrétiser.
8. Etape de densification. Remplissage par des éléments discrets des vides déterminés par une triangulation de Delaunay. L'étape 7-b peut être répétée jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'ajouter des sphères dont le rayon respecte le critère R_{\max}/R_{\min} fixé. Dans ce cas, la compacité maximale pour le critère fixé est atteinte.

Cette méthode permet de créer des assemblages d'éléments discrets sphériques de compacités diverses, en faisant varier le rapport R_{\max}/R_{\min} (Figure 39).

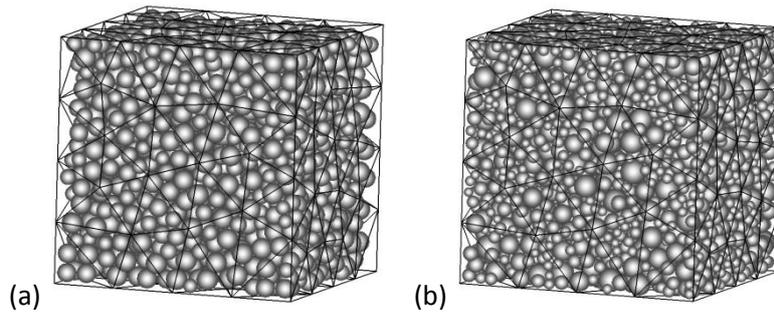


Figure 39 - Maillages ED réalisés en prenant $R_{\max}/R_{\min} = 1.5$ (a) et $R_{\max}/R_{\min} = 3$ (b).

Le maillage éléments discrets de la Figure 39-a a été généré en prenant $R_{\max}/R_{\min} = 1.5$ et sa compacité est de 52% tandis que pour celui sur la Figure 39-b nous avons pris $R_{\max}/R_{\min} = 3$ et sa compacité est 62%.

Le fait de prendre une grande valeur de R_{\max}/R_{\min} autorise la création d'éléments discrets très petits, ce qui permet d'augmenter la compacité de l'assemblage d'éléments discrets, cependant le nombre d'éléments peut devenir très important. A l'inverse, une valeur de R_{\max}/R_{\min} trop proche de 1 diminuerait trop la distribution des rayons possibles pour les éléments discrets qui seraient donc tous presque de la même taille. En prenant $R_{\max}/R_{\min} = 3$ nous obtenons des échantillons suffisamment polydispersés et dont la compacité est de l'ordre de 60%, comme ceux présentés sur la Figure 39-b et la Figure 40. Pour ce dernier maillage, nous avons déterminé sa granulométrie (Figure 41). Nous constatons qu'il y a un nombre important de petits éléments qui comblent les vides entre les éléments plus gros mais moins nombreux, ce qui permet d'atteindre une compacité de 62%. Nous retenons donc cette valeur de R_{\max}/R_{\min} pour la création de tous les maillages éléments discrets dans ce travail de thèse.

Etant donné qu'il subsiste des vides entre les éléments dans le volume, si on prend pour la masse des éléments discrets la même masse volumique ρ que celle du matériau composant le volume, alors l'assemblage d'éléments discrets aura une masse d'autant plus petite, que celle du volume réel, que sa compacité c est faible. Cette différence peut avoir une influence non négligeable sur les propriétés dynamiques du modèle ED de la structure modélisée. Nous faisons donc une correction sur la masse M_I de chaque élément I (de rayon R_I) de l'assemblage éléments discrets afin que ce dernier ait la même masse que la structure modélisée :

$$M_I = \frac{4\rho}{3c} \pi R_I^3$$

Pour évaluer l'isotropie de l'échantillon représenté sur la Figure 40, nous projetons les directions de contact de chaque élément avec ses voisins selon les trois plans principaux du repère global. Le résultat est présenté sous la forme de rosaces (Figure 42) qui indiquent le nombre de directions de contact ayant l'inclinaison donnée par rapport au plan donné (XY, YZ, et ZX) du repère principal. Quelle que soit l'inclinaison, le nombre de directions de contact est de l'ordre de 600, ce qui montre qu'aucune direction particulière n'est privilégiée par les contacts dans l'assemblage d'éléments discrets. Nous pouvons donc considérer que ce dernier sera représentatif d'un comportement isotrope.

2.2 Le maillage éléments discrets

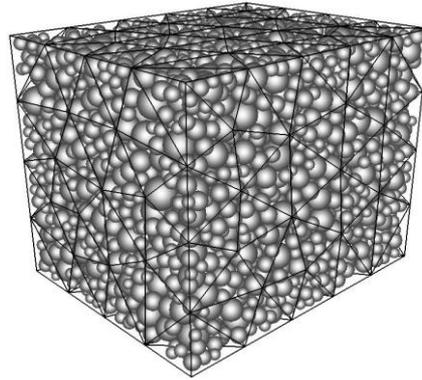


Figure 40 - Maillage tétraédrique initial et maillage éléments discrets obtenu d'un pavé (5056 éléments discrets).

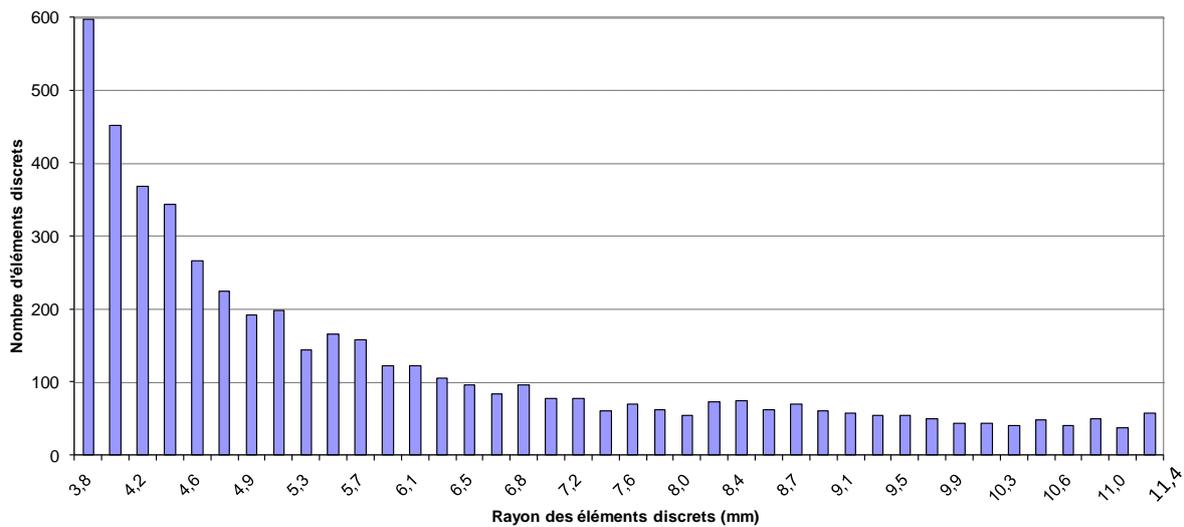


Figure 41 - Distribution des rayons des éléments discrets pour le maillage de 5056 éléments discrets.

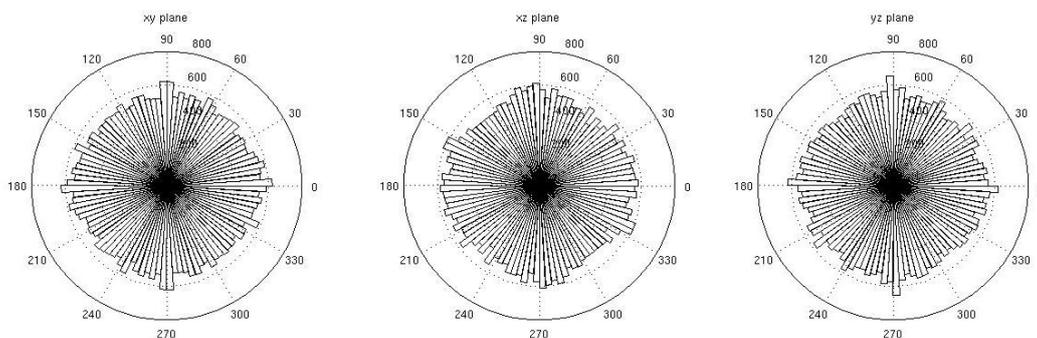


Figure 42 - Rosaces de distribution de l'orientation des contacts dans les plans XY, YZ, ZX.

Dans le premier modèle de liaison acier-béton présenté au chapitre 3, les armatures sont représentées par des éléments discrets de même rayon (égal à celui de l'armature) et alignés. L'ajout de ces armatures dans le maillage de la structure nécessite un traitement particulier : les éléments discrets modélisant l'armature ne doivent pas bouger et leur taille doit rester égale au diamètre de cette dernière. Avec cette méthode il est possible d'introduire les armatures en acier pour modéliser une structure en béton armé. A la fin de l'étape 5 de l'algorithme on superpose le maillage éléments discrets des armatures au maillage éléments discrets béton, puis on supprime les éléments discrets

béton qui se superposent avec les éléments discrets acier. L'algorithme passe ensuite à l'étape 6 et se poursuit normalement. En procédant ainsi, les vides entre les maillages de l'armature et du béton vont être comblés pendant les étapes 6 et 7, ce qui permettra d'assurer une bonne adhérence du béton à l'acier. La Figure 43 montre le maillage final d'un échantillon contenant une armature modélisée en éléments discrets après avoir appliqué cette procédure.

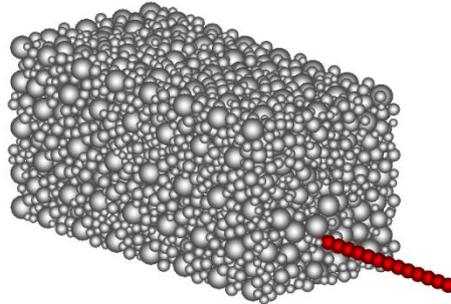


Figure 43 – Maillage éléments discrets final d'un volume de béton armé.

Il est à noter que la construction de modèles ED via l'outil SpherePadder++ s'est grandement simplifiée et banalisée à la suite de son intégration dans le mailleur SMESH de la plate-forme SALOME (<http://www.salome-platform.org>).

2.3 Interactions entre les éléments discrets

2.3.1 Définition des interactions

Pour simuler les déplacements et les déformations du milieu maillé en éléments discrets, on définit des interactions entre les éléments. Ces interactions consistent en des liaisons entre deux éléments discrets, auxquels est attachée une loi de comportement mécanique. Pour étudier les matériaux granulaires, des interactions de contact entre les éléments ont été proposées : ces interactions vont s'opposer à l'interpénétration des deux éléments en développant un effort de répulsion. Dans le cas contraire, l'interaction est désactivée entre les deux éléments. Une interaction de contact entre deux éléments I et J est donc créée à l'instant t^n si la condition suivante est vérifiée :

$$D_{IJ}^n \leq R_I + R_J \quad (2.4)$$

où D_{IJ} est la distance qui sépare les centres des éléments discrets I et J , et R_I (respectivement R_J) est le rayon de l'élément I (respectivement J). Etant donné l'évolution de l'assemblage éléments discrets au cours du temps, les interactions de contact doivent être recherchées au cours du calcul. On voit avec l'équation (2.4) l'avantage d'utiliser des sphères car le critère de détection du contact peut s'écrire sous la forme d'une simple inégalité entre des scalaires.

Les interactions de contact seules ne suffisent pas pour représenter des matériaux cohésifs comme le béton, dans lequel les granulats sont liés entre eux par du ciment, une matrice cohésive. Cette dernière empêche les mouvements relatifs entre les granulats jusqu'à une certaine limite. Il faut donc créer des interactions « cohésives » entre les éléments pour tenir compte de cette résistance. Contrairement aux liaisons de contact qui se créent lorsque les éléments discrets s'interpénètrent, ce n'est pas nécessairement le cas des liaisons cohésives et il est donc nécessaire de définir un domaine

2.3 Interactions entre les éléments discrets

d'interaction autour de chaque élément discret béton. Ce domaine dépend du rayon de l'élément discret et d'un scalaire, le coefficient d'interaction λ :

$$D_{IJ}^0 \leq \lambda(R_I + R_J)$$

Lorsque le domaine d'interaction d'un élément discret béton touche celui de son voisin une interaction cohésive est créée entre ces deux éléments discrets (Figure 44).

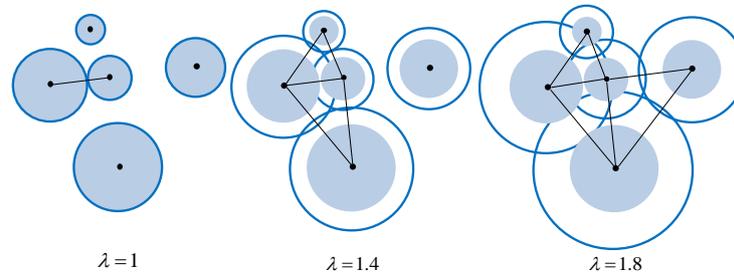


Figure 44 - Influence du rayon d'interaction sur le voisinage et le nombre de liaisons d'un élément discret.

Enfin, les liaisons cohésives doivent être créées à l'instant initial uniquement, et lorsqu'elles rompent au cours du calcul suite à un mouvement relatif, elles sont supprimées définitivement du modèle car l'endommagement est un phénomène irréversible. En jouant sur le coefficient d'interaction on fait varier le nombre d'interactions cohésives dans l'assemblage éléments discrets (Figure 44). Le nombre moyen de liaisons cohésives par élément discret béton, appelé coordinnence, est un paramètre important du modèle ED de béton car il a une influence sur ses propriétés mécaniques. Plus la coordinnence est importante, plus il y aura de liaisons entre les éléments discrets de l'échantillon, et ce dernier sera d'autant plus rigide. On montre notamment que le module de Young varie linéairement avec la coordinnence (Rousseau, 2009). La mesure de la coordinnence s'effectue sans prendre en compte les éléments discrets situés aux frontières de l'échantillon, car ces derniers ont nettement moins de voisins. On fait varier le coefficient d'interaction de manière à avoir une coordinnence de 12 à l'intérieur de l'échantillon. On a choisi le nombre 12 car c'est le nombre moyen de contact de chaque élément avec ses voisins dans un assemblage ordonné de type cubique face centrée de sphères de même rayon. Un autre choix de valeur pour la coordinnence est possible. Cependant, pour conserver la même influence de ce paramètre sur les propriétés élastiques du matériau représenté par l'assemblage éléments discrets, il faut se tenir à la même valeur pour tous les maillages éléments discrets utilisés.

2.3.2 Recherche des interactions

Les interactions de contact entre les éléments discrets pouvant se produire tout au long de la déformation, il est nécessaire de les identifier à chaque instant du calcul pour décrire correctement le contact entre les différents fragments. Puisque le maillage éléments discrets de la structure étudiée peut être très fin, il faut donc appliquer une méthode de recherche des interactions performante pour limiter son impact sur le temps global de calcul. On peut trouver dans (O'Connor, 1996) une liste de la plupart des algorithmes de tri spatial optimisé développés dans la littérature.

Dans ce travail nous utilisons la méthode de subdivision par grille. Cette méthode superpose une grille de cellules sur le maillage éléments discrets et associe ces derniers à la cellule qui les contient. Pour chacune de ces cellules, on recherche les possibilités de création de liaisons entre les éléments

discrets qu'elle contient, et avec les éléments discrets des cellules voisines. La taille des cellules doit donc être judicieusement choisie : si les cellules sont trop grandes, des parcours inutiles d'éléments sont effectués, ce qui peut fortement diminuer les performances, et si elles sont trop petites, le risque est de manquer des liaisons possibles entre des éléments discrets situés dans des cellules au-delà des cellules voisines. En outre, la détermination de la taille des cellules est d'autant plus délicate que les éléments discrets ont des tailles très variables. En revanche, cette méthode est très performante pour des assemblages plutôt denses d'éléments discrets dont la distribution des tailles est réduite. Cette méthode est donc la plus adaptée aux maillages éléments discrets que nous produisons dans ce travail de thèse ($R_{\max}/R_{\min} = 3$, $c = 60\%$).

La Figure 45 est un exemple typique en dimension 2 de la mise en œuvre de la méthode de subdivision par grille sur un assemblage d'éléments discrets sphériques avec $R_{\max}/R_{\min} = 3$ et une compacité élevée. La grille de cellules symbolisée par des lignes noires est superposée sur ce maillage. On a colorié en orange la cellule courante sur laquelle s'applique la méthode, et en jaune les cellules voisines de cette dernière. Pour déterminer la taille de ces cellules, on se base sur le cas le plus défavorable : pour un élément discret de rayon R_{\max} situé dans la cellule orange ses voisins doivent tous se trouver dans cette cellule et les cellules jaunes pour que la méthode soit la plus performante. Le côté de chaque cellule doit donc avoir pour longueur $2\lambda R_{\max}$. On peut le voir pour les deux éléments discrets de taille R_{\max} pour lesquels on a tracé leur rayon d'interaction par un cercle noir : ils sont trop éloignés l'un de l'autre, et ce même si on les rapproche le plus possible l'un de l'autre tout en gardant leurs centres dans leurs cellules respectives. Cette subdivision est donc satisfaisante et tire le meilleur parti des performances de cette méthode.

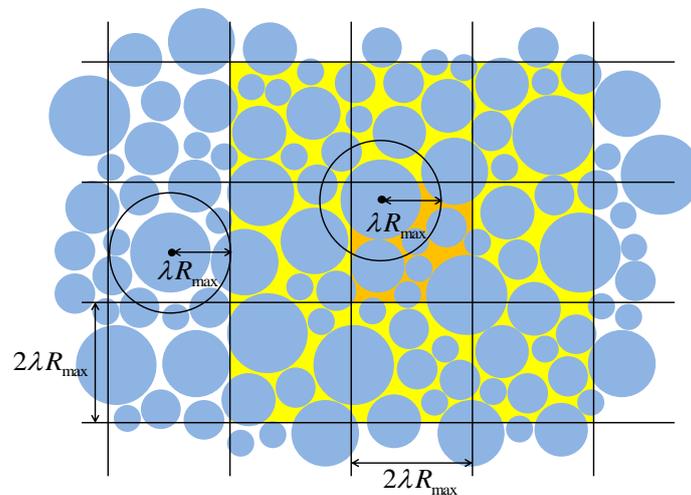


Figure 45 – Exemple de la mise en œuvre de la méthode de subdivision par grille sur un maillage éléments discrets.

2.3.3 Calcul des efforts d'interaction

Le fait de créer une liaison entre deux éléments discrets se traduit mécaniquement par des efforts qui vont être transmis à chacun de ces éléments. Ces efforts vont s'opposer au mouvement relatif de chaque élément par rapport à son voisin dans les directions normale et tangentielle à un plan de contact fictif (P) situé à égale distance des surfaces de ces deux éléments (Figure 46). Cette résistance

2.3 Interactions entre les éléments discrets

est symbolisée par deux ressorts de raideurs K_N et K_S placés selon chacune de ces directions. Chaque élément discret a six degrés de liberté : trois en translation et trois en rotation.

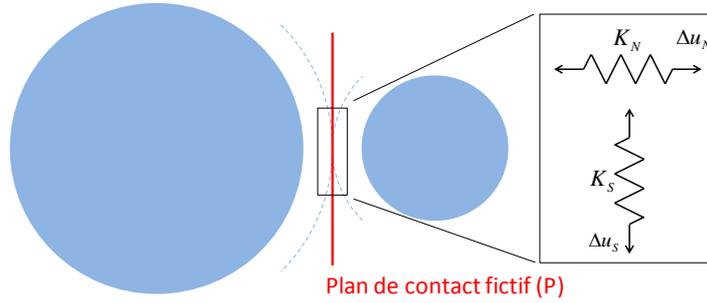


Figure 46 - Schéma des composantes normale et tangentielle de la liaison.

La liaison est définie géométriquement par une ligne qui passe par les centres des deux éléments discrets I et J (Figure 47). On définit un vecteur unitaire \vec{n} de même direction que cette ligne et donc normal à (P). Le plan (P) coupe le segment $G_I G_J$ au point C , situé à égale distance des surfaces des éléments I et J . Ce point va servir à déterminer la composante de l'effort de réaction dans la direction tangentielle au plan de contact (Figure 47).

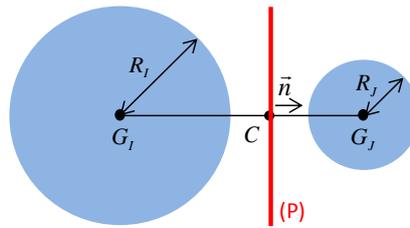


Figure 47 - Schéma de la liaison entre les deux éléments I et J.

$$\vec{G_I C} = \left(R_I + \frac{1}{2} \left(\| \vec{G_I G_J} \| - (R_I + R_J) \right) \right) \vec{n}$$

La composante normale à (P) de l'effort exercé par l'élément I sur l'élément J à un instant t^{n+1} donné est la force de rappel du ressort de raideur K_N (voir (2.5)). Cet effort normal au plan de contact s'oppose à l'éloignement ou au rapprochement des deux éléments.

$$\vec{F}_N^{n+1} = -K_N (D_{IJ}^{n+1} - D_{IJ}^0) \vec{n}^{n+1} \quad (2.5)$$

La composante tangentielle de l'effort exercé par l'élément I sur l'élément J est calculée de manière incrémentale par la méthode de Hart (Hart et al., 1988). L'incrément d'effort tangential est calculé à partir de la composante tangentielle à (P) de la vitesse relative de l'élément J par rapport à l'élément I exprimée au point de contact C :

$$\vec{V}_N(C \in J/I) = \vec{V}(C \in J/I) - (\vec{V}(C \in J/I) \cdot \vec{n}^{n+1}) \vec{n}^{n+1}$$

On en déduit l'incrément de déplacement tangential à (P) en multipliant cette vitesse par le pas de temps courant :

$$\Delta \vec{U}_S = \vec{V}_N(C \in J/I) \Delta t$$

Puis on calcule l'incrément d'effort tangential appliqué par l'élément I sur l'élément J pour résister à ce mouvement :

$$\Delta \vec{F}_S = -K_S \Delta \vec{U}_S$$

Il reste ensuite à sommer cet incrément d'effort avec l'effort tangentiel cumulé \vec{F}_S^n depuis le début du calcul jusqu'à l'instant précédent t^n . Cependant, entre les instants t^n et t^{n+1} , si le vecteur \vec{n} a changé, alors il en est de même pour le plan de contact (P). La méthode de Hart propose d'effectuer deux rotations sur l'effort tangentiel cumulé pour l'actualiser. La première rotation permet de prendre en compte le changement de direction de la liaison :

$$\vec{F}_S^{R1,n} = \vec{F}_S^n - \vec{F}_S^n \times (\vec{n}^n \times \vec{n}^{n+1})$$

La deuxième formule prend en compte la vitesse de rotation moyenne $\vec{\Omega}_p$ selon la nouvelle normale :

$$\vec{\Omega}_p = \left(\frac{1}{2} (\vec{\Omega}(I/0) + \vec{\Omega}(J/0)) \cdot \vec{n}^{n+1} \right) \vec{n}^{n+1}$$

$$\vec{F}_S^{R2,n} = \vec{F}_S^{R1,n} - \vec{F}_S^{R1,n} \times \vec{\Omega}_p \Delta t$$

La composante tangentielle de l'effort de réaction est obtenue en ajoutant l'incrément d'effort tangentiel à l'effort tangentiel cumulé transporté dans le nouveau plan (P) par les deux rotations :

$$\vec{F}_S^{n+1} = \vec{F}_S^{R2,n} + \Delta \vec{F}_S$$

On en déduit le vecteur des efforts internes exercés par la liaison au point C sur les deux éléments qu'elle relie (1^{ère} équation de (2.6)). Comme les éléments sont rigides, l'effort $\vec{F}_{\text{int}}^{n+1}$ et le moment qu'il génère sont appliqués directement aux centres des éléments I et J avec un signe opposé.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{int}}^{n+1} &= \vec{F}_I^{n+1} + \vec{F}_J^{n+1} \\ \vec{M}_I(\vec{F}_{\text{int}}^{n+1}) &= -\vec{IC} \times \vec{F}_{\text{int}}^{n+1} \\ \vec{M}_J(\vec{F}_{\text{int}}^{n+1}) &= \vec{JC} \times \vec{F}_{\text{int}}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3.4 Résistance au roulement

L'effort d'interaction tangentiel déterminé par la méthode de Hart à partir de la vitesse relative des éléments dans le plan de contact, s'oppose au glissement relatif entre les deux éléments. Les vitesses de rotation des éléments sont modifiées uniquement par le moment de l'effort tangentiel transporté au centre de l'élément. Dans le cas où les deux éléments discrets roulent sans glisser l'un sur l'autre, l'effort tangentiel est nul et la liaison cohésive ne s'oppose donc pas à leur mouvement. Etant donné le nombre important d'éléments dans le maillage, chaque élément a au moins 2 voisins donc sa résistance au roulement se fait par frustration (3 sphères en contact ne peuvent rouler sans glisser les unes sur les autres simultanément). Cependant, plusieurs travaux montrent que cette contribution indirecte de l'effort tangentiel à la résistance à la rotation des éléments n'est pas suffisante pour s'opposer au roulement qui peut devenir excessif et modifier les propriétés mécaniques du modèle discret. Des simulations d'essais de compression réalisés par Hentz (Hentz, 2003) montrent que la résistance en compression globale du béton est nettement sous-estimée par un modèle où les rotations des éléments sont libres. Bardet (Bardet, 1994) montre que le roulement des éléments a une influence sur la résistance au cisaillement et donc sur l'apparition et la propagation des bandes de cisaillement dans le modèle.

Pour introduire une résistance au roulement dans notre modèle, nous retenons l'idée de limiter les rotations des éléments (voir Chapitre 1). La solution la plus simple à mettre en œuvre consiste à

2.4 Etude du modèle ED du béton

bloquer totalement les rotations des éléments, ce qui permet de retrouver une limite de compression plus réaliste du béton restituée par le modèle discret (Hentz, 2003). Cependant, elle pose problème dans le cas où la structure étudiée subit des rotations importantes comme une poutre élancée en flexion. Entre autre, le blocage des rotations est une condition trop forte dans la mesure où le roulement n'est pas la seule cinématique possible de rotation des éléments. Il est donc préférable d'autoriser le roulement et d'introduire une raideur de rotation au niveau de l'élément pour le limiter. Le premier modèle de ce type a été développé par Iwashita et Oda (Iwashita et Oda, 1998) avec des éléments circulaires. A partir du mouvement relatif dû au roulement et d'une raideur de rotation, un moment résistant au roulement est calculé et appliqué sur chacun des éléments pour s'opposer à leur roulement relatif. Ce modèle a été étendu à une modélisation tridimensionnelle avec des éléments sphériques par Plassiard (la « Loi de Transfert de Moments » (LTM) (Plassiard, 2007)) et implanté dans EUROPLEXUS par Omar (Omar, 2014).

2.4 Etude du modèle ED du béton

2.4.1 Comportement élastique linéaire

2.4.1.1 Construction des relations locales-globales

Nous nous plaçons dans le cas où le béton est sollicité par des chargements suffisamment faibles pour que son comportement reste dans le domaine élastique linéaire. Son comportement est donc décrit uniquement par deux paramètres : le module de Young et le coefficient de Poisson. A partir de ces deux grandeurs macroscopiques, il faut déterminer quelles valeurs attribuer aux raideurs locales normale K_N et tangentielle K_S de chaque liaison afin que l'assemblage des éléments discrets reproduise le comportement macroscopique du béton. Des relations entre les paramètres locaux aux liaisons entre les éléments discrets et les paramètres macroscopiques du matériau ont été développées dans le cas d'un assemblage ordonné d'éléments de même taille (Cambou et al., 1995), (Liao et al., 1997). Le modèle proposé par Donzé (Donzé et al., 1999) s'inspire du modèle de Liao et permet de définir des nouvelles relations « micro-macro » prenant en compte la taille variable des éléments et l'aspect désordonné du maillage (équation 2.7).

$$E = \frac{D_{IJ}^0}{S_{\text{int}}} K_N \frac{\beta + \gamma \frac{K_S}{K_N}}{\alpha + \frac{K_S}{K_N}}; \quad S_{\text{int}} = \min(\pi R_I^2, \pi R_J^2)$$
$$\nu = \frac{1 - \frac{K_S}{K_N}}{\alpha + \frac{K_S}{K_N}}; \quad \nu \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right] \quad (2.7)$$

On remarque notamment dans l'expression du module de Young un terme S_{int} , désignant la surface d'interaction, qui fait directement intervenir les rayons des éléments I et J . Les expressions (2.7) font également intervenir trois paramètres α , β , et γ qui doivent être déterminés à chaque fois qu'une nouvelle manière de génération de maillage ED est testée. Nous allons présenter cette identification dans la sous-section suivante.

Une étude adimensionnelle menée dans (Huang, 1999) montre que le comportement macroscopique élastique d'un assemblage d'éléments reliés par des liens de raideurs normale K_N et tangentielle K_S

dépend du rapport K_S/K_N . L'expression de E donnée par le modèle de Donzé (2.7) peut être adimensionnée pour faire disparaître sa dépendance explicite à K_N et réaliser ce type d'étude :

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\frac{\beta}{\gamma} + \frac{K_S}{K_N}}{\frac{\beta}{\gamma} + 1} \frac{\alpha + 1}{\alpha + \frac{K_S}{K_N}}; \quad E_0 = \frac{D_{IJ}^0}{S_{\text{int}}} K_N \frac{\beta + \gamma}{\alpha + 1} \quad (2.8)$$

2.4.1.2 Procédure d'identification des paramètres du modèle élastique linéaire

Une procédure d'identification en quatre étapes (Hentz, 2003), basée sur le résultat obtenu par Huang, permet de déterminer les coefficients α , β , et γ du modèle.

1. On maille d'abord un parallépipède rectangle (éprouvette numérique) en éléments discrets de manière à obtenir un assemblage polydisperse et isotrope.
2. On définit le rayon d'interaction adéquat pour avoir une coordinence égale à 12 au sein de l'échantillon.
3. On fait varier le rapport des raideurs locales à chacune des liaisons cohésives entre 0 et 1. Pour chacune de ces valeurs, on simule un essai de compression simple à la fin duquel on mesure le module de Young et le coefficient de Poisson.
4. On détermine les coefficients α , β , et γ tels que les courbes E/E_0 et ν données par le modèle (2.8) soient les plus proches possibles de celles obtenues numériquement à l'étape 3.

A la différence de la méthode des éléments finis, pour laquelle la convergence vers la bonne solution avec le raffinement du maillage est mathématiquement démontrée, la méthode des éléments discrets sphériques nécessite a priori une ré-identification des paramètres locaux si on procède au raffinement du maillage. Il est donc nécessaire d'avoir des éléments d'appréciation sur la « consistance » de la méthode ED, faute de pouvoir démontrer sa convergence. Autrement dit il faut déterminer la finesse du maillage ED à partir de laquelle la solution ED devient représentative du comportement élastique macroscopique du volume matériel étudié, et notamment pour des chargements qui diffèrent de ceux utilisés lors de l'identification des paramètres.

Dans les sous-sections suivantes nous cherchons à déterminer l'influence du maillage (agencement des éléments, finesse) sur les paramètres élastiques macroscopiques restitués par le modèle ED.

2.4.1.2.1 Influence de l'agencement des éléments

Pour étudier l'influence de l'agencement des éléments dans un maillage ED, nous modifions les propriétés géométriques des tétraèdres du maillage EF donné en entrée à SpherePadder++ en utilisant deux mailleurs éléments finis différents : le mailleur NETGEN (Schöberl et al.), et le mailleur GHS3D couplé au générateur de maillages surfaciques BLSURF connu pour la régularité des éléments qu'il produit (INRIA projet GAMMA). La forme géométrique des tétraèdres influence directement la manière dont ils sont remplis par des éléments discrets par SpherePadder++ au cours des étapes 5 et 6 de l'algorithme (Figure 38) où les ED sont ajoutés près du centre de gravité des tétraèdres. L'objectif ici est de mettre en œuvre la procédure d'identification sur deux volumes prismatiques en béton identiques mais maillés initialement en tétraèdres avec NETGEN pour l'un et GHS3D+BLSURF pour l'autre et de comparer les deux jeux de paramètres α , β , et γ obtenus.

2.4 Etude du modèle ED du béton

Les maillages éléments finis du volume de béton obtenus avec NETGEN (respectivement GHS3D+BLSURF) ainsi que les étendues des rapports d'aspect des éléments (un rapport d'aspect égal à 1 correspond à un tétraèdre parfaitement régulier) sont représentés sur la Figure 48 (respectivement Figure 49). On remarque que pour le maillage obtenu par GHS3D+BLSURF le rapport d'aspect des éléments a une distribution légèrement plus restreinte (1.05-2.26) que celle du maillage obtenu par NETGEN (1.07-2.31), ce qui montre la différence de géométrie des deux maillages EF utilisés. L'écart entre les distributions s'accroît lorsque la finesse du maillage augmente : le rapport d'aspect des éléments obtenus par NETGEN atteint 2.51, alors qu'il reste globalement constant autour de 2.3 pour les éléments des maillages obtenus par GHS3D+BLSURF. On peut dire que NETGEN et GHS3D+BLSURF donnent des maillages tétraédriques dont les propriétés géométriques sont a priori suffisamment différentes pour influencer sur le modèle discret généré par SpherePadder++.

Ensuite, le volume considéré est maillé en éléments discrets de plus en plus finement, en augmentant le nombre de tétraèdres par côté du volume dans le meilleur éléments finis, jusqu'à ce que les orientations des contacts entre les éléments discrets ne privilégient plus de direction particulière dans l'espace (étape 1). La Figure 50 montre l'ensemble des maillages réalisés avec GHS3D+BLSURF et les rosaces d'orientation des liens.

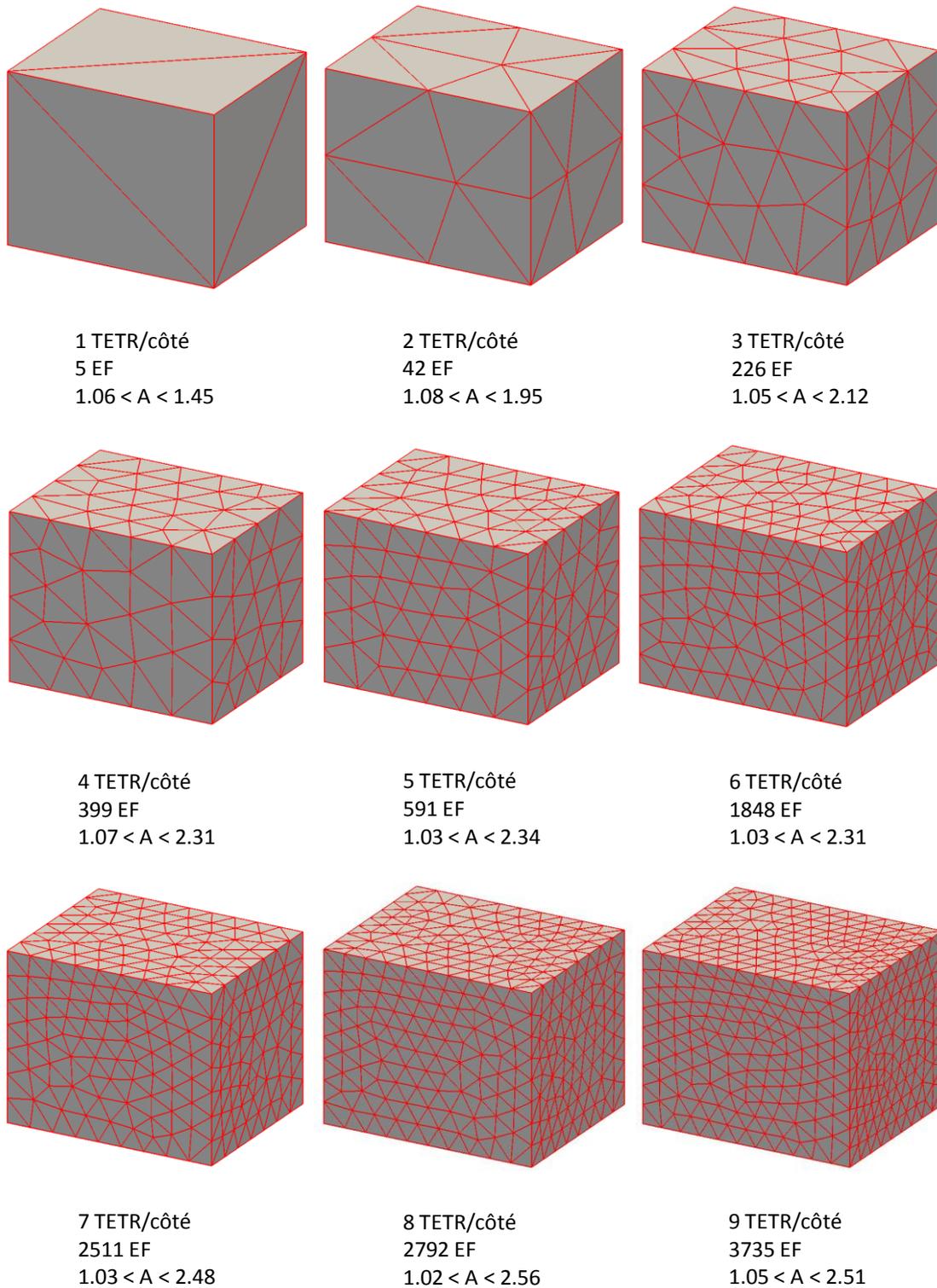


Figure 48 – Maillages du volume réalisés avec NETGEN.

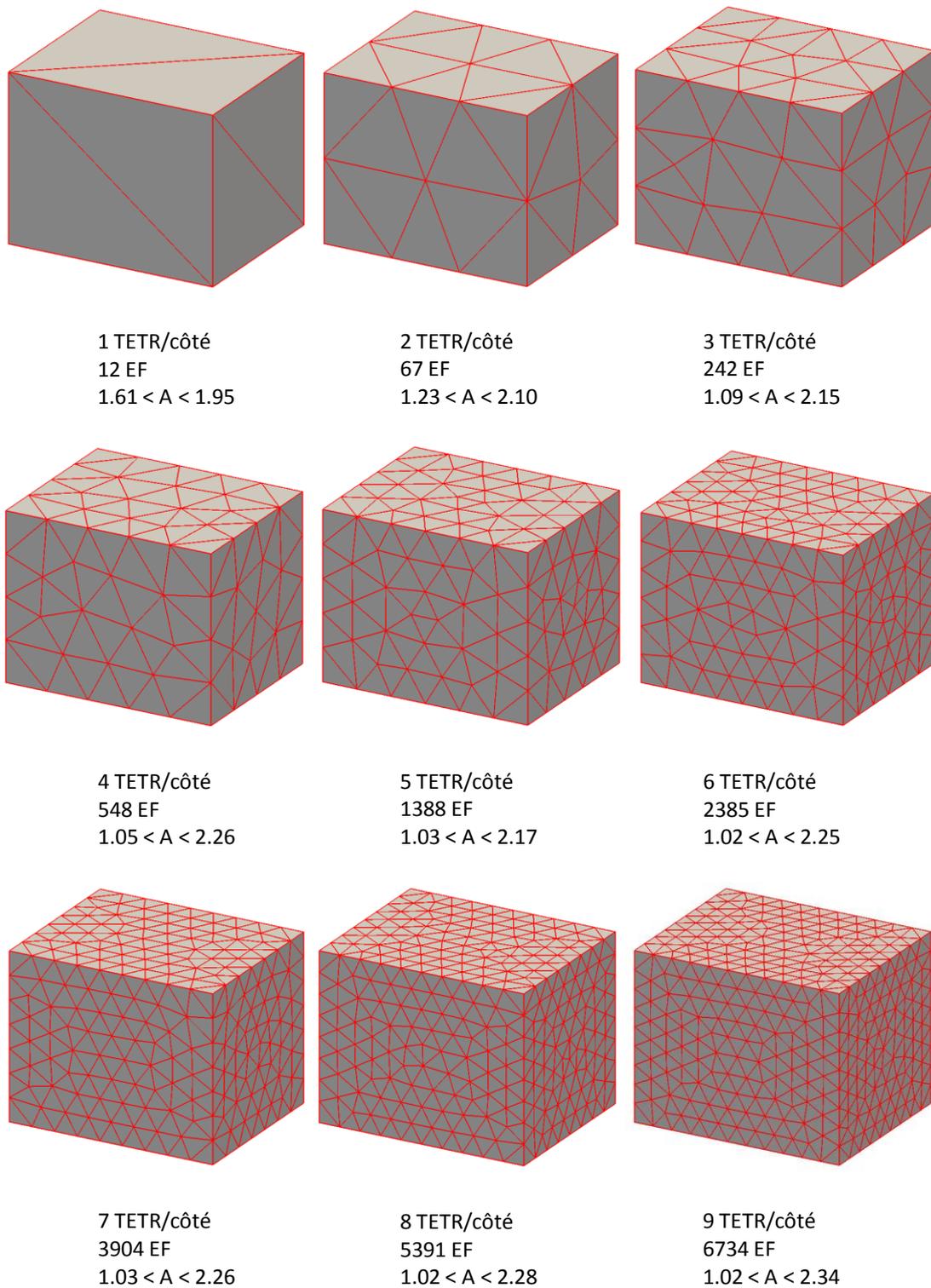


Figure 49 – Maillages du volume réalisés avec GHS3D+BLSURF.

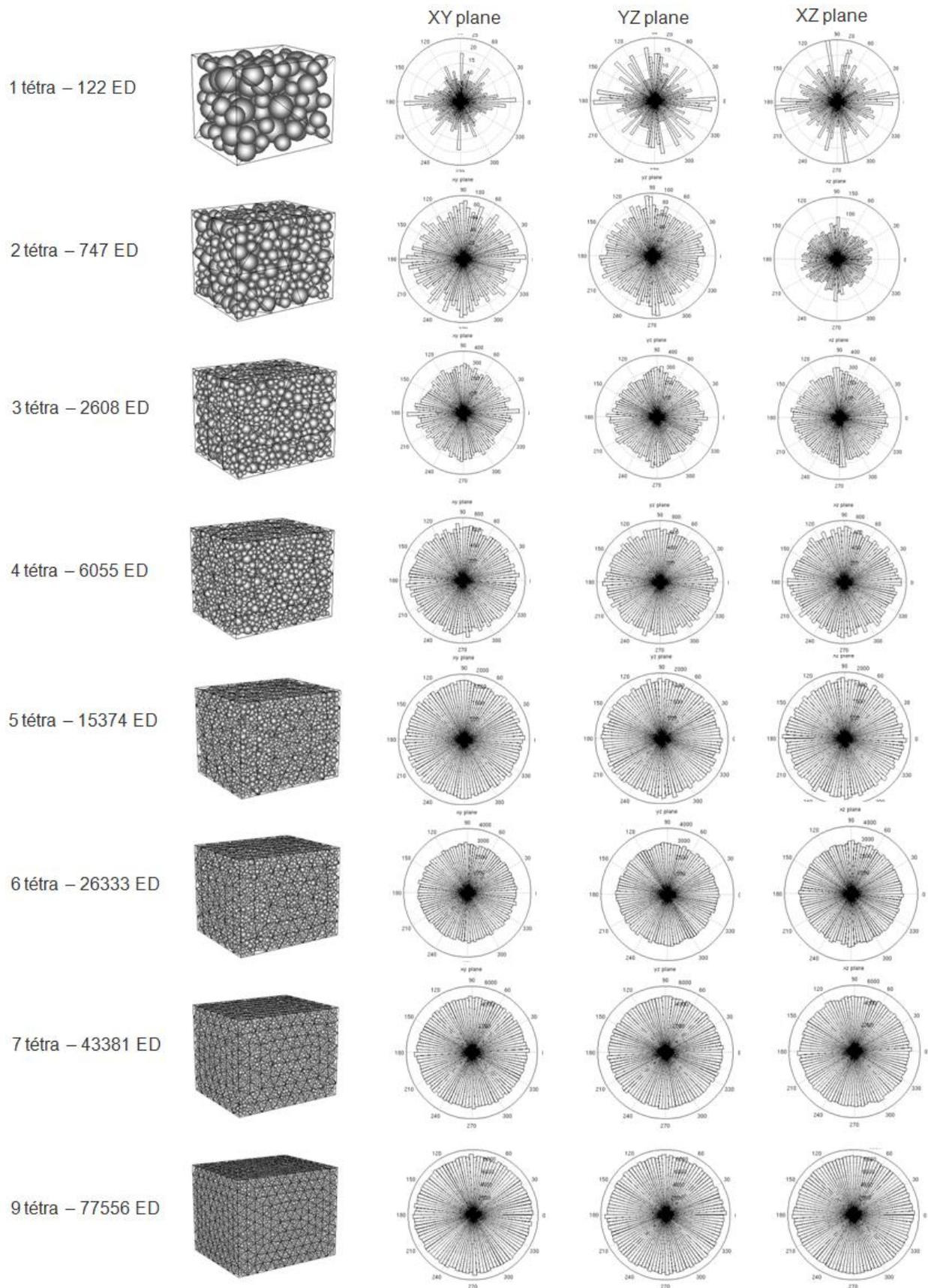


Figure 50 – Maillages ED et rosaces d’orientation des contacts obtenus à partir du maillage EF GHS3D+BLSURF.

2.4 Etude du modèle ED du béton

Nous constatons que pour une finesse de 4 tétraèdres par côté, les rosaces sur la Figure 50 montrent que le maillage ED obtenu peut être considéré comme isotrope. La même étude réalisée sur des échantillons maillés en tétraèdres avec le mailleur NETGEN aboutit au même résultat (Figure 51).

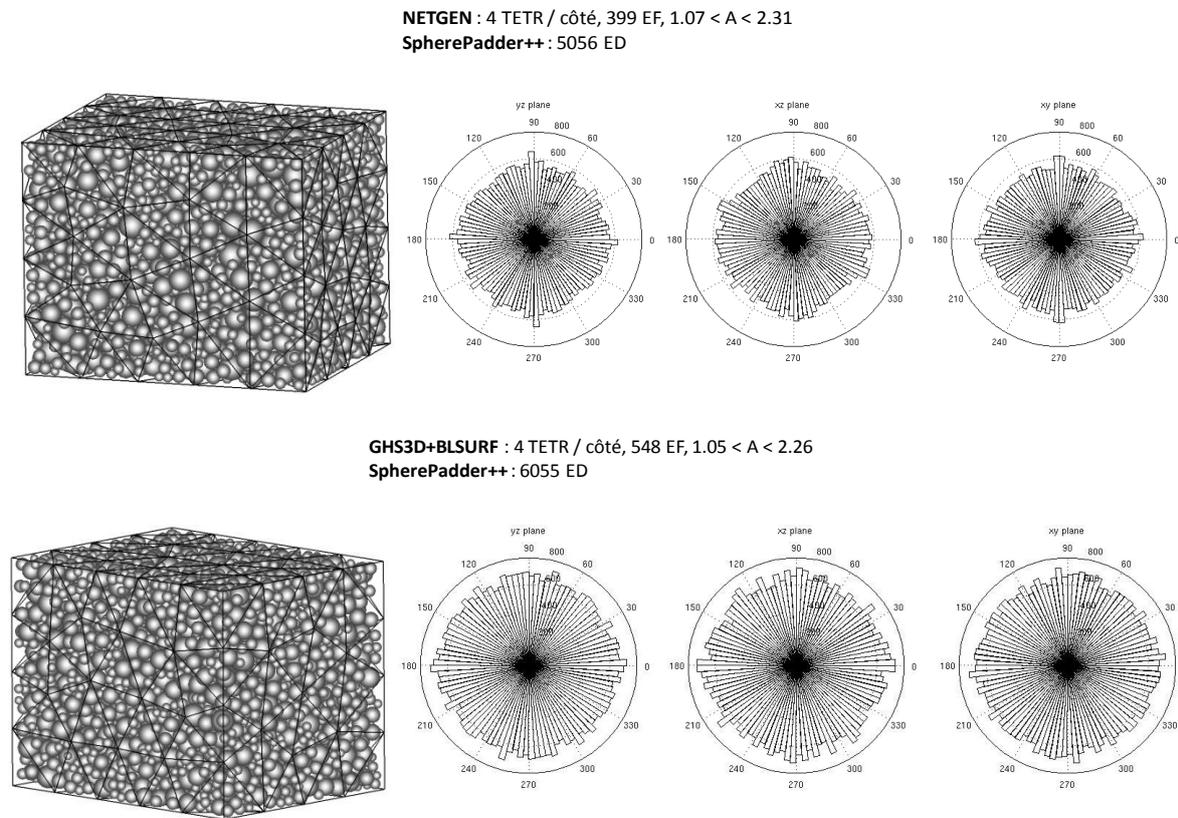


Figure 51 – Maillage ED et rosaces d'orientation des contacts obtenus à partir du maillage EF NETGEN (en haut) et GHS3D+BLSURF (en bas).

Après avoir fixé la coordonnée interne de l'échantillon à 12 (étape 2), nous lançons plusieurs simulations d'essai de compression simple sur les deux échantillons ED en faisant varier le rapport K_S/K_N (étape 3). A la fin de chaque calcul, nous mesurons le module de Young et le coefficient de Poisson. Nous déterminons les coefficients α , β , et γ tels que les courbes de E/E_0 et ν (nu sur les figures) en fonction de K_S/K_N données par le modèle de Donzé (équations (2.7) et (2.8)) (courbes rouges sur la Figure 52 et sur la Figure 53) soient les plus proches des évolutions de ces mêmes paramètres obtenues par la simulation (courbes bleues sur la Figure 52 et sur la Figure 53) (étape 4 de la procédure d'identification). Dans l'équation (2.7), l'expression du coefficient de Poisson ne dépend que de α . Le paramètre α est donc déterminé directement par la courbe d'évolution de ν en fonction de K_S/K_N . En revanche, le rapport E/E_0 dépendant du rapport β/γ (équation (2.8)) on obtient seulement la valeur de ce rapport en approximant au mieux la courbe bleue par la courbe rouge (Figure 52 à gauche et Figure 53 à gauche). Pour obtenir les valeurs de β et γ , puisque l'incertitude porte sur l'expression du module de Young, nous relançons le calcul de l'essai de compression en prenant les valeurs de α et de β/γ obtenues lors de l'étape 4 et en faisant varier β (ou γ) de manière à ce que le modèle ED restitue une valeur du module de Young la plus proche de celle entrée initialement dans le jeu de données.

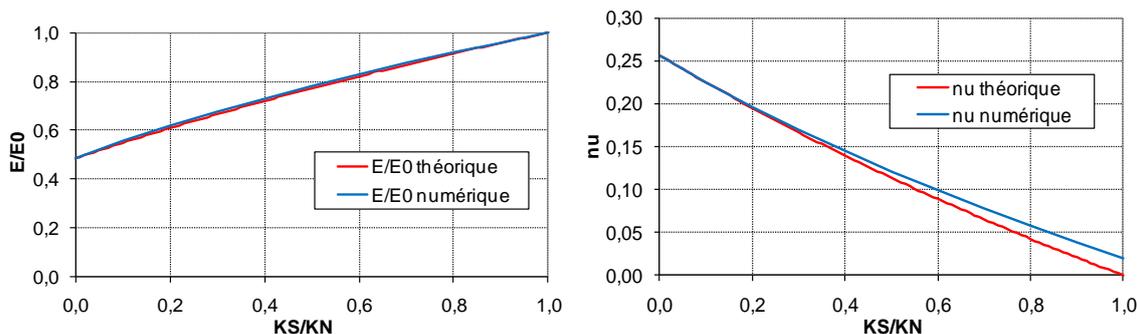


Figure 52 – Courbes théorique et numérique de E/E_0 et ν obtenues pour le maillage ED issu du maillage EF NETGEN.

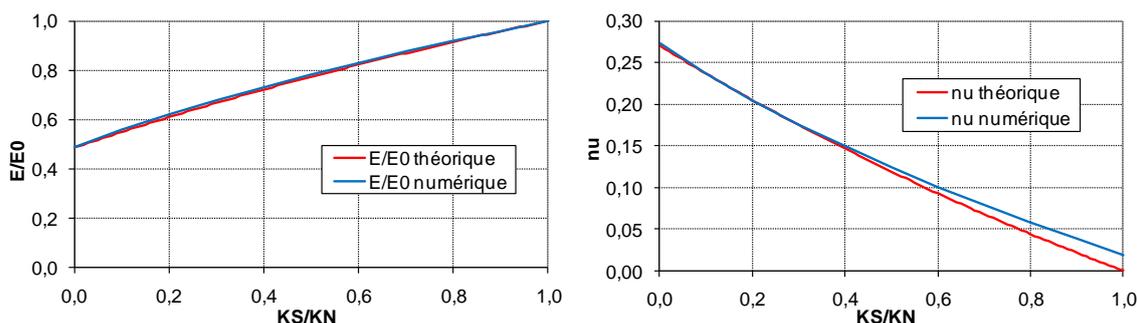


Figure 53 – Courbes théorique et numérique de E/E_0 et ν obtenues pour le maillage ED issu du maillage EF GHS3D+BLSURF.

Les jeux de paramètres obtenus pour chacun des deux maillages ED sont présentés dans le Tableau 1. Les écarts relatifs calculés entre coefficients de même type sont très faibles, de l'ordre de 5%. On en déduit que les maillages éléments finis tétraédriques d'une finesse de 4 tétraèdres selon le plus petit côté du volume, produits par NETGEN et GHS3D+BLSURF, donnent finalement des propriétés très similaires au modèle ED.

	Maillage ED (EF NETGEN)	Maillage ED (EF GHS3D+BLSURF)	Ecart relatif coeff. (%)
α	3,9	3,7	5,1
β	3,03125	2,875	5,2
γ	4,8115	4,637	3,6

Tableau 1 – Jeu de paramètres obtenus pour chaque maillage ED et erreur relative pour chaque coefficient.

Dans la sous-section suivante nous cherchons à déterminer si ce résultat est toujours vérifié pour des maillages plus fins, d'autant plus que le rapport d'aspect des éléments créés par NETGEN augmente avec la finesse du maillage lorsque l'on crée des maillages EF plus fins, ce qui n'est pas le cas des éléments produits par GHS3D+BLSURF.

2.4.1.2.2 Influence de la finesse du maillage éléments discrets

Nous lançons une série de simulations de l'essai de compression simple sur des maillages ED de plus en plus fins en utilisant le jeu de paramètres α , β , et γ identifié sur le maillage 4 tétraèdres. En partant de la finesse du maillage suffisante pour avoir une bonne isotropie (Figure 51), nous créons deux séries d'échantillons en discrétisant le volume de béton de plus en plus finement avec chaque mailleur tétraédrique : les deux maillages les plus fins comportent 9 tétraèdres par côté du volume. La Figure 54 (respectivement la Figure 56) montre les maillages ED obtenus à partir d'un maillage éléments finis tétraédriques généré par NETGEN (respectivement GHS3D+BLSURF). A la fin des

2.4 Etude du modèle ED du béton

simulations d'essai de compression simple lancées sur chaque maillage des deux séries, nous mesurons le module de Young et le coefficient de Poisson (Figure 55 et Figure 57) et nous calculons l'erreur relative avec les valeurs initiales du jeu de données (35 GPa pour E et 0,2 pour ν) (Tableau 2 et Tableau 3).

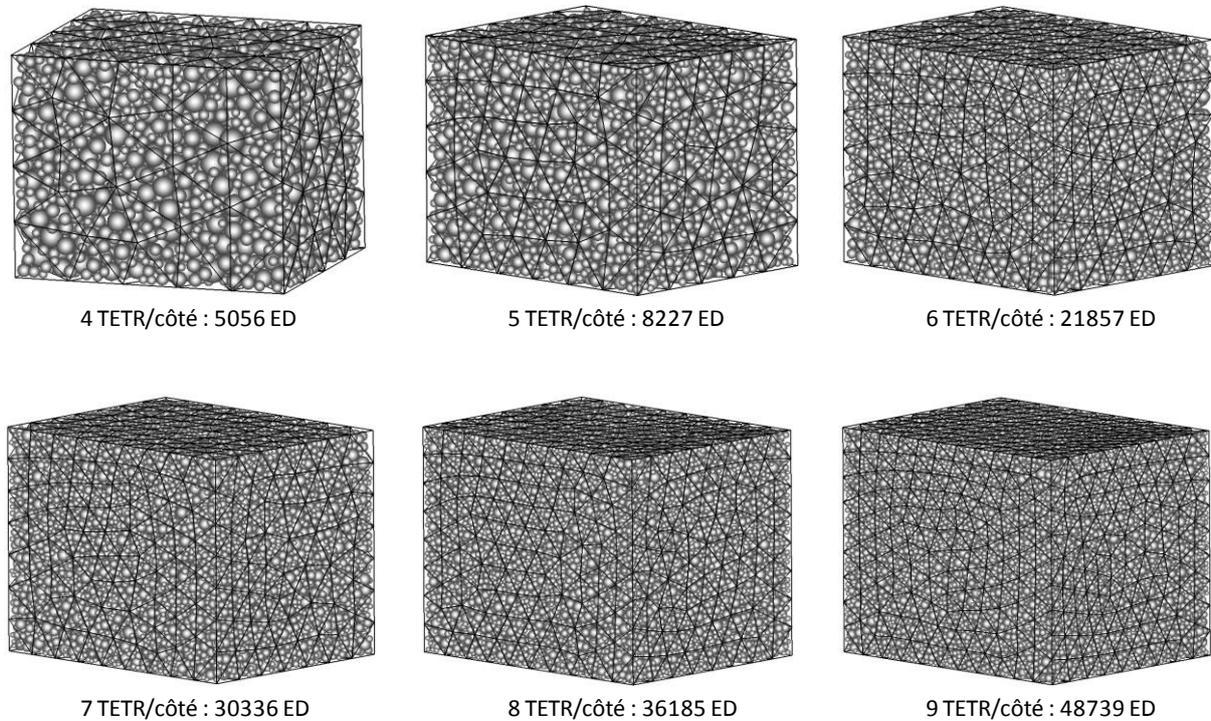


Figure 54 – Série d'échantillons dont le maillage tétraédrique initial a été obtenu avec NETGEN.

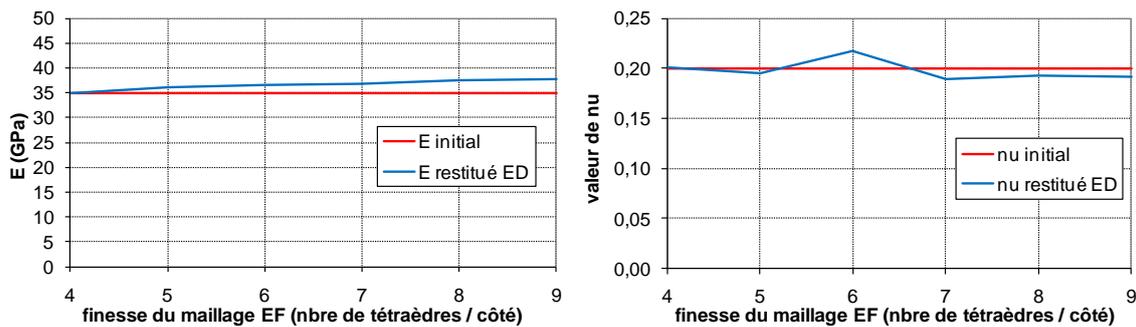


Figure 55 – Evolution de E et ν en fonction de la finesse du maillage (NETGEN).

nbre TETR / côté	Erreur relative sur E (%)	Erreur relative sur ν (%)
4	0	0,4
5	3,4	2,3
6	4,3	8,5
7	5,4	5,5
8	7,4	3,9
9	8	4,4

Tableau 2 – Erreur relative de E et ν mesurés sur les échantillons par rapport aux données initiales (NETGEN).

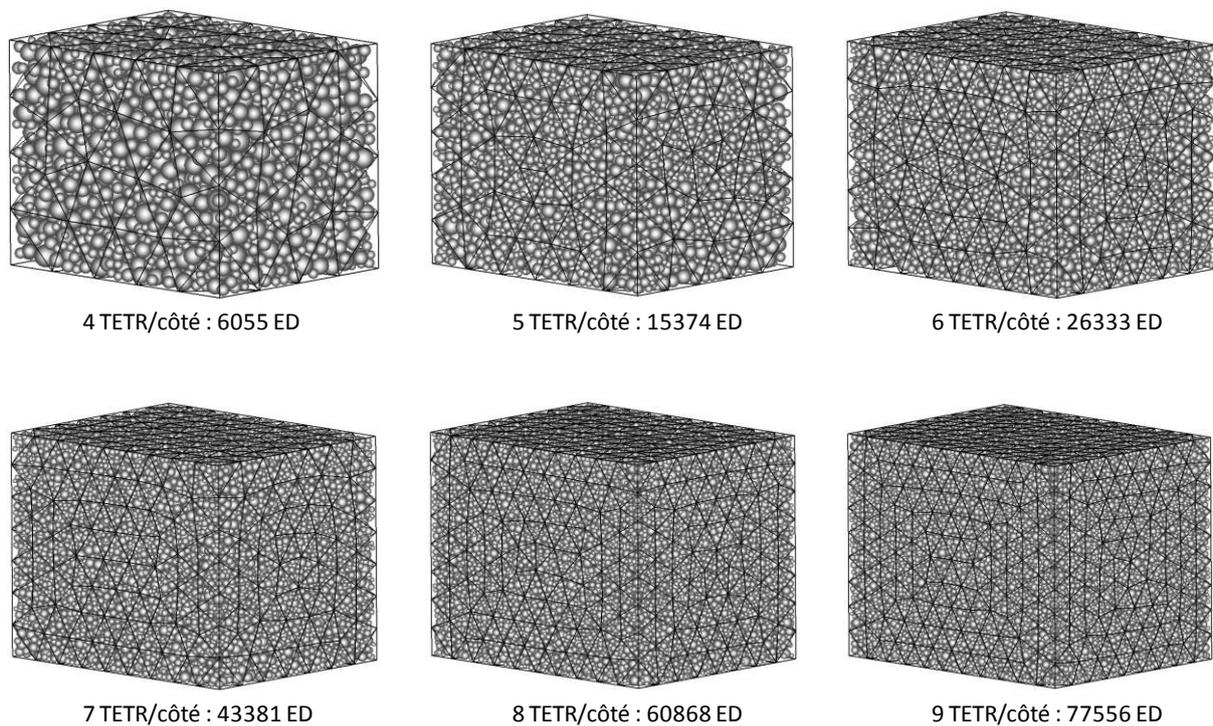


Figure 56 - Série d'échantillons dont le maillage tétraédrique initial a été obtenu avec GHS3D+BLSURF.

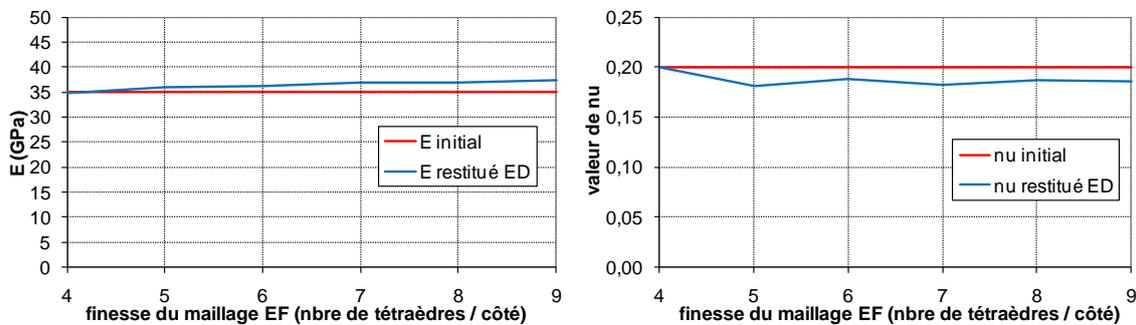


Figure 57 - Evolution de E et ν mesurés en fonction de la finesse des échantillons (GHS3D+BLSURF).

nbre TETR / côté	Erreur relative sur E (%)	Erreur relative sur ν (%)
4	0,3	0,2
5	2,6	9,4
6	3,4	6,1
7	5,4	8,9
8	5,7	6,8
9	6,9	6,9

Tableau 3 - Erreurs relatives de E et ν mesurés sur les échantillons par rapport aux données initiales (GHS3D+BLSURF).

Nous constatons que le module de Young augmente légèrement avec la finesse du maillage éléments discrets (Figure 55 et Figure 57). L'erreur relative atteint 8% pour le maillage le plus fin (Tableau 2 et Tableau 3). Ceci est dû à la compacité du maillage qui augmente avec sa finesse : pour 4 tétraèdres

2.4 Etude du modèle ED du béton

par côté de l'échantillon le maillage a une compacité de 62 % environ, et les deux maillages les plus fins ont une compacité de 63.4%. La compacité ayant une influence sur les voisinages des éléments, ces derniers ont à chaque fois un peu plus de liaisons ce qui fait augmenter légèrement E . L'évolution de ν en fonction de l'augmentation de la finesse du maillage est plus chahutée, mais reste proche de 0.2 avec une erreur relative maximale inférieure à 10% (Tableau 2 et Tableau 3). On remarque que le comportement de E et ν est similaire pour les deux séries d'échantillons, les deux meilleurs éléments fins produisent donc des échantillons aux propriétés géométriques similaires du point de vue des relations micro-macro de Donzé.

Pour une augmentation de la finesse du maillage éléments discrets d'un facteur dix, les valeurs de E et ν sont très proches de celles entrées dans le jeu de données (erreur inférieure à 10%). On peut donc dire que l'on n'a pas besoin de ré-identifier systématiquement les paramètres locaux lorsqu'on raffine le maillage. D'autre part, une finesse de 4 tétraèdres par côté suffit pour que le modèle éléments discrets reproduise le bon comportement élastique linéaire du matériau sur un essai de compression simple. L'utilisation de deux maillages tétraédriques assez différents, NETGEN et GHS3D+BLSURF, a finalement peu d'influence sur les valeurs des paramètres à identifier dans les relations micro-macro et sur la reproductibilité du comportement élastique du modèle discret. Nous pouvons donc utiliser sans distinction l'un ou l'autre mailleur pour générer le maillage tétraédrique à donner à SpherePadder++ pour produire un maillage ED.

2.4.1.3 Vérification du modèle dans le cas de cisaillement

Pour s'assurer de la validité du jeu de paramètres déterminé par la procédure d'identification, nous simulons un autre essai que l'essai de compression simple sur lequel les paramètres locaux ont été identifiés. Nous voulons tester la capacité du modèle calibré avec notre jeu de paramètres α , β , et γ à reproduire le comportement d'un volume de béton soumis à un chargement de cisaillement pur. Le cisaillement étant un mode de déformation qui peut devenir prépondérant dans les structures soumises à des impacts, il est important de vérifier que notre modèle restitue les bonnes propriétés élastiques du matériau en cisaillement.

On considère un cube soumis à des contraintes tangentielles opposées sur ses faces (Figure 58).

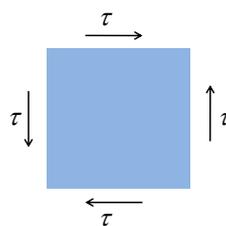


Figure 58 - Schéma dans le plan d'un cube soumis à un chargement de cisaillement pur.

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations et d'un matériau élastique linéaire, la contrainte de cisaillement τ est reliée à l'angle de cisaillement relatif γ par le module de cisaillement G (loi de Hooke).

$$\tau = G\gamma, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Nous faisons la même étude de sensibilité des paramètres élastiques à la finesse du maillage ED et au type de mailleur EF utilisé pour réaliser le maillage tétraédrique. Nous créons deux séries de

maillages tétraédriques de plus en plus fins avec NETGEN pour la première et GHS3D+BLSURF pour la seconde. Nous appliquons ensuite SpherePadder++ pour obtenir les maillages éléments discrets du volume et lançons une simulation d'un essai de cisaillement pur pour chacun des échantillons. A la fin des calculs, τ et γ sont mesurés et nous en déduisons le module de cisaillement G restitué par chaque échantillon. Ces valeurs de G sont comparées avec la valeur de G théorique calculée en utilisant le module de Young et le coefficient de Poisson rentrés initialement dans le jeu de données ($G = 14.6$ MPa).

Puisque la modélisation par éléments discrets ne permet pas d'obtenir des frontières de l'échantillon régulières, il est donc difficile d'appliquer un chargement de type contrainte au sens de la mécanique des milieux continus. Nous appliquons un déplacement imposé sur une couche d'éléments qui suit la frontière de l'échantillon (les faces GXMI, GXMA, GZMI et GZMA sur la Figure 59-a). Pour appliquer un état de contrainte de cisaillement pur dans les coins de l'échantillon nous redécoupons les couches d'éléments discrets sur lesquelles s'appliquent les déplacements imposés selon les diagonales du volume (Figure 59-b). L'épaisseur de la surface varie linéairement de l'intérieur vers l'extérieur du volume, et on peut identifier sa section moyenne à $0.9H^2$.

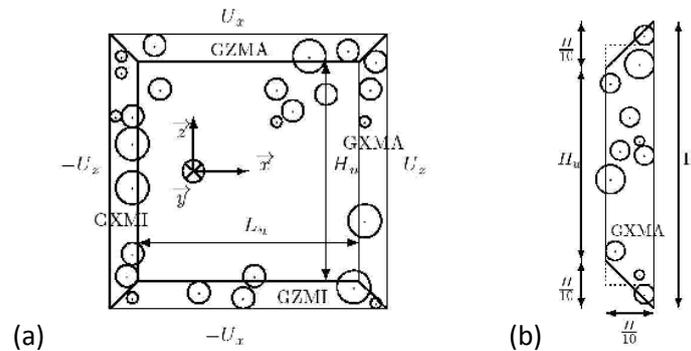


Figure 59 - Schéma du découpage en couches du volume cubique pour appliquer le « déplacement de cisaillement ».

Comme il s'agit d'un déplacement imposé, nous pouvons facilement calculer la déformation tangentielle ε_{xz} puis l'angle de cisaillement relatif γ_{xz} :

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{2U_x}{H_u} + \frac{2U_z}{L_u} \right) \Rightarrow \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$$

Pour une couche d'éléments discrets soumis à un déplacement imposé, on peut calculer une approximation de la contrainte tangentielle en sommant les contributions de chaque élément discret à la composante tangentielle à la couche de l'effort de réaction, puis en divisant cet effort résultant par la surface moyenne de la couche (Figure 59-b) :

$$\tau_{xz} = \frac{F_z}{0.9H_u^2}$$

Connaissant γ_{xz} et τ_{xz} , on en déduit G par la loi de Hooke. Pour chaque calcul, nous mesurons la valeur de G avec ce post-traitement (G numérique sur la Figure 60 et sur la Figure 61).

Nous calculons une autre estimation de G (appelé G identifié) à partir des paramètres E et ν mesurés lors de l'étude de reproductibilité des paramètres élastiques macroscopiques par le modèle discret en compression simple (Figure 55 et Figure 57).

2.4 Etude du modèle ED du béton

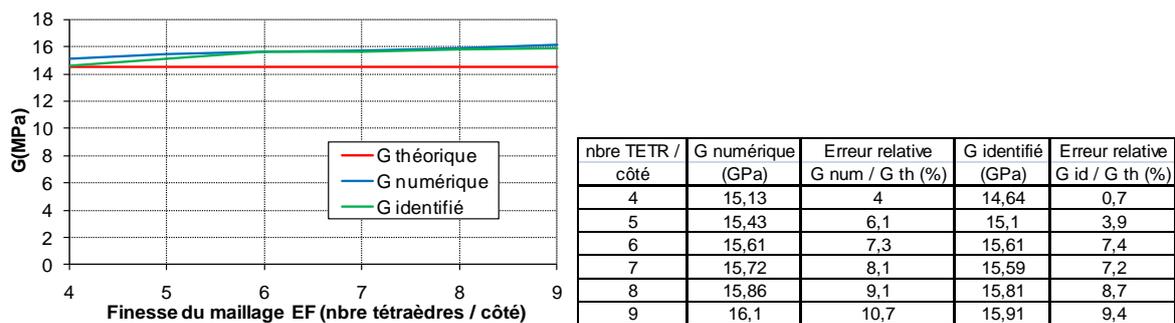


Figure 60 - Evolution de G en fonction de la finesse du maillage et erreur relative avec G théorique (NETGEN).

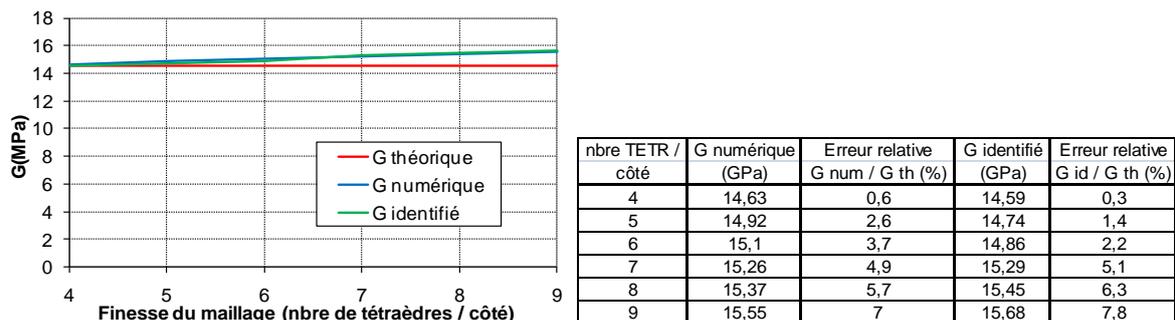


Figure 61 - Evolution de G en fonction de la finesse du maillage et erreur relative avec G théorique (GHS3D+BLSURF).

En regardant la Figure 60 et la Figure 61 nous remarquons que la valeur de G numérique reste assez proche de la valeur de G théorique, même si elle augmente légèrement avec la finesse du maillage. L'erreur relative maximale est de l'ordre de 10% maximum pour le maillage le plus fin. Nous avons vu à la fin de la procédure d'identification, lorsque nous nous intéressons à la reproductibilité des résultats, que E augmente légèrement avec la finesse du maillage éléments discrets. Or E intervient dans l'expression du module de cisailment G , ce qui explique l'augmentation de ce dernier avec la finesse du maillage éléments discrets. Les évolutions de G numérique et G identifié avec l'augmentation de la finesse du maillage sont très similaires. On en déduit que pour un jeu de paramètres déterminé en appliquant la procédure d'identification, la simulation d'un essai de cisailment avec des maillages éléments discrets dont la finesse est supérieure ou égale à 4 tétraèdres par côté restituent une bonne approximation de la valeur de G .

Nous avons mis en œuvre la procédure d'identification pour déterminer les paramètres des relations micro-macro et établir des relations entre les paramètres mécaniques microscopiques du modèle discret et macroscopiques du matériau. Nous remarquons qu'un maillage ED issu d'un maillage tétraédrique comportant 4 tétraèdres par côté du volume permet de reproduire le comportement élastique linéaire macroscopique du matériau. En utilisant les maillages ED issus de deux mailleurs EF différents, nous avons montré que leur influence sur les propriétés du maillage ED reste assez faible. Quand nous raffinons le maillage ED par rapport à celui utilisé pour la procédure d'identification, tout en gardant les paramètres des relations micro-macro déterminés par la procédure d'identification, le modèle restitue des approximations très correctes de E et ν (erreurs relatives inférieures à 10%). Nous pouvons donc considérer qu'il n'est pas nécessaire de ré-identifier systématiquement les paramètres du modèle pour des études sur des maillages ED plus fins générés en prenant le même mailleur tétraédrique et les mêmes paramètres dans SpherePadder++.

2.4.2 Comportement non linéaire

2.4.2.1 Loi de comportement au niveau des liaisons

Nous utilisons le critère de Mohr-Coulomb au niveau local pour décrire le comportement non linéaire des liaisons cohésives. Très utilisé dans la littérature pour modéliser le béton (Rousseau, 2009), (Hentz, 2003), (Sawamoto et al., 1998), (Camborde, 1999), ce critère fait appel à une fonction seuil f_1 dans laquelle C_0 est la contrainte de cohésion et Φ_i l'angle de frottement interne (Figure 62) :

$$\begin{aligned} f_1(F_N, F_S) &= |F_S| - F_N \tan \Phi_i - S_{\text{int}} C_0 \\ f_2(F_N, F_S) &= -S_{\text{int}} T - F_N \end{aligned}$$

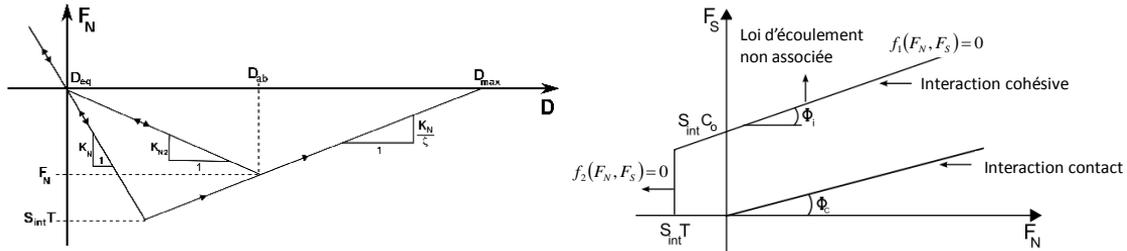


Figure 62 – Lois de comportement non linéaires pour les liaisons cohésives.

Pour prendre en compte la rupture du béton en traction, on définit une deuxième fonction seuil f_2 qui fait intervenir la contrainte limite locale de traction du béton T . La surface d'interaction $S_{\text{int}} = \min(\pi R_a^2, \pi R_b^2)$ permet de tenir compte de la taille des éléments a et b dans la définition des seuils dans f_1 et f_2 .

Le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} f_2 \leq 0 &\Rightarrow \text{la liaison cohésive est élastique} \\ f_2 \leq 0 \text{ et } f_1 > 0 &\Rightarrow F_S = F_N \tan \Phi_i + S_{\text{int}} C_0 \\ f_2 > 0 &\Rightarrow \text{endommagement de la liaison} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dans le cas où $f_2 > 0$, la composante normale de la liaison s'endommage en suivant un paramètre d'adoucissement ζ donné. Si $D_{ab} > D_{\text{max}}$ (Figure 62 à gauche) la liaison cohésive est définitivement rompue entre les deux éléments discrets. Par la suite, au cours du calcul si les deux éléments sont amenés à s'interpénétrer, une interaction de contact avec frottement est créée entre eux dont les fonctions seuil (2.10) peuvent être déduites de (2.9) :

$$\begin{aligned} f_1(F_N, F_S) &= |F_S| - F_N \tan \Phi_c \\ f_2(F_N, F_S) &= -F_N \end{aligned} \quad (2.10)$$

Φ_c est l'angle de frottement de contact. La gestion de la liaison de contact est résumée par :

$$\begin{aligned} f_2 \leq 0 &\Rightarrow \text{la liaison de contact s'oppose à l'interpénétration} \\ f_2 \leq 0 \text{ et } f_1 > 0 &\Rightarrow F_S = F_N \tan \Phi_c \\ f_2 > 0 &\Rightarrow \text{la liaison de contact est désactivée} \end{aligned}$$

2.4.2.2 Procédure d'identification du comportement non linéaire

Une procédure d'identification des paramètres du modèle de Mohr-Coulomb a été proposée par Hentz (Hentz, 2003) (Figure 63). Cette procédure repose sur des simulations d'essais de traction simple et de compression simple sur des échantillons parallélépipédiques pour déterminer les

2.4 Etude du modèle ED du béton

paramètres locaux qui permettent d'obtenir la meilleure approximation du comportement non linéaire macroscopique du béton.

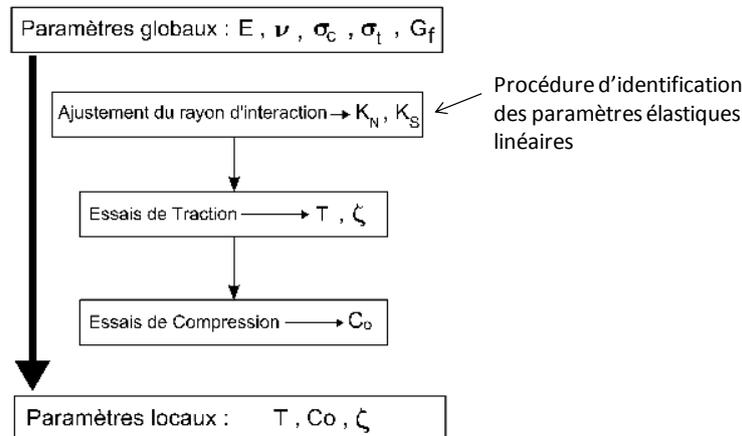


Figure 63 – Schéma de la procédure d'identification.

Des tests de sensibilité aux paramètres du modèle de Mohr-Coulomb effectués sur des simulations d'essais de traction simple montrent que la limite locale de traction T et l'adoucissement ζ ont une influence prépondérante sur le comportement du béton en traction, mais pas la cohésion. On peut donc commencer par identifier ces deux paramètres en simulant un essai de traction simple, puis caler la cohésion en simulant un essai de compression simple (Figure 63).

Les angles de frottement interne Φ_i et de contact Φ_c , compris entre 5° et 15° (Camborde, 1999), ont peu d'impact sur le comportement du béton en traction et en compression (Rousseau, 2009). Leur identification n'est donc pas réalisée dans la procédure (on leur attribue simplement une valeur appartenant à cet intervalle), mais si les données expérimentales disponibles sur les caractéristiques mécaniques du béton permettent de les identifier, ils peuvent être pris en compte.

Pour les structures de forme géométrique complexe, la procédure d'identification doit être appliquée sur un échantillon parallélépipédique représentatif extrait du maillage de la structure. Cet échantillon doit respecter la discrétisation ED minimale que nous avons déterminée en élasticité linéaire. Dans sa thèse, Omar (Omar, 2014) a appliqué la procédure d'identification des paramètres non linéaires sur un échantillon maillé en ED dont le maillage tétraédrique initial comporte 4 éléments par côté. Il montre qu'en raffinant le maillage ED de l'échantillon tout en gardant les mêmes paramètres non linéaires identifiés, le comportement non linéaire du béton est bien reproduit par le modèle discret en traction et en compression. On en déduit que le volume élémentaire représentatif du comportement non linéaire du béton est basé sur un maillage ED issu d'un maillage tétraédrique comportant au moins 4 tétraèdres par côté du volume. En supposant que ce volume est extrait de la structure, pour vérifier ce critère sur la finesse du maillage, il faut donc mailler la structure en mettant au moins 4 tétraèdres suivant son plus petit côté. Une fois la procédure d'identification mise en œuvre sur le volume maillé en éléments discrets donné, il n'est donc plus nécessaire de l'appliquer sur des volumes maillés plus finement tant qu'on conserve les mêmes paramètres de maillage.

2.4.2.3 Energie de fissuration

La loi de comportement non linéaire que nous utilisons pour décrire le comportement de la liaison cohésive béton en traction soulève le problème de la résolution d'un problème non linéaire de type endommagement avec adoucissement. La résolution rigoureuse de ce problème dans un cadre mathématique bien posé (existence et unicité de la solution) n'est plus possible. Les simulations numériques par éléments finis avec des lois de comportement adoucissantes donnent des résultats qui ne sont pas toujours objectifs vis-à-vis du maillage. Une localisation de l'endommagement dans une zone dont la taille tend vers zéro est observée lorsqu'on raffine de plus en plus le maillage (Hillerborg et al., 1976). Pour corriger cette dépendance au maillage de l'endommagement, des méthodes de régularisation comme des limiteurs de localisation sont développées (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1988). Elles permettent de retrouver la convergence de la solution lorsqu'on raffine le maillage.

Dans le cadre de la méthode des éléments discrets sphériques que nous utilisons, où l'endommagement est représenté par la dégradation d'un système mécanique discret (une liaison de type ressort) et non par l'apparition de singularités dans un champ de tenseurs à l'intérieur des éléments, on ne peut utiliser de tels outils numériques pour contrôler la dépendance de l'endommagement à la finesse de discrétisation. Il faut déterminer l'influence des paramètres d'endommagement locaux et de la taille des éléments discrets sur des grandeurs plus globales comme l'énergie de fissuration.

Le paramètre d'adoucissement local ζ ne dépend d'aucun paramètre dans le modèle éléments discrets que nous mettons en œuvre. Face à ce constat, Rousseau (Rousseau, 2009) a étudié l'influence de la taille des éléments sur ce paramètre en simulant deux essais de traction simples sur des échantillons prismatiques de même géométrie mais de finesses très différentes : 3000 éléments pour l'un et 24000 pour l'autre. Les courbes contrainte-déformation obtenues sont différentes, celle correspondant au maillage le plus fin traduisant un comportement du béton plus fragile (Figure 64). L'énergie de fissuration (aire sous la courbe contrainte-déformation) nécessaire pour rompre les liaisons cohésives dans le maillage grossier est 2 fois plus importante que pour le maillage fin.

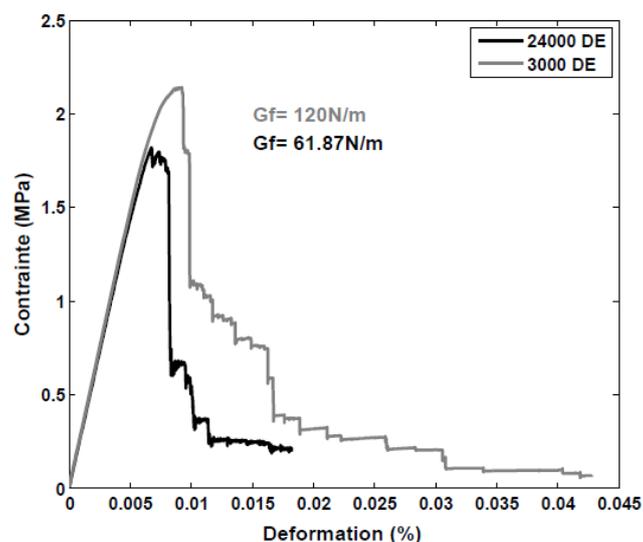


Figure 64 - Courbes contrainte-déformation lors d'un essai de traction simple pour différentes finesses du maillage ED.

2.4 Etude du modèle ED du béton

Pour étudier l'influence de la taille des éléments sur l'énergie de fissuration restituée par le modèle, Rousseau a proposé une expression approchée de G_F globale à partir du calcul de cette énergie dans chaque liaison, qui montre que G_F dépend du rayon moyen de la distribution de tous les rayons des éléments discrets de l'assemblage (équation (2.11)) :

$$G_F = \frac{(1 + \zeta)T^2}{2C(E, \nu)}R \quad (2.11)$$

où ζ est le coefficient d'adoucissement, T la limite de traction locale du béton, C est une fonction constante des paramètres mécaniques globaux E et ν , et R le rayon moyen des éléments discrets du modèle. Avec cette formule, connaissant le rayon moyen des éléments d'un maillage 1 et le coefficient d'adoucissement ζ_1 , il est possible de déterminer le coefficient d'adoucissement ζ_2 d'un maillage 2 de finesse différente (formule (2.12)) :

$$\zeta_2 = \frac{\zeta_1 + 1 - \alpha}{\alpha} \quad (2.12)$$

où α est le rapport des rayons moyens des éléments discrets des maillages 1 et 2. Avec cette formule, Rousseau obtient le paramètre d'adoucissement à mettre sur le modèle éléments discrets grossier à 3000 éléments ($\zeta = 2$) pour obtenir une courbe contrainte-déformation proche de celle restituée par le maillage fin ($\zeta = 5$) (Figure 65).

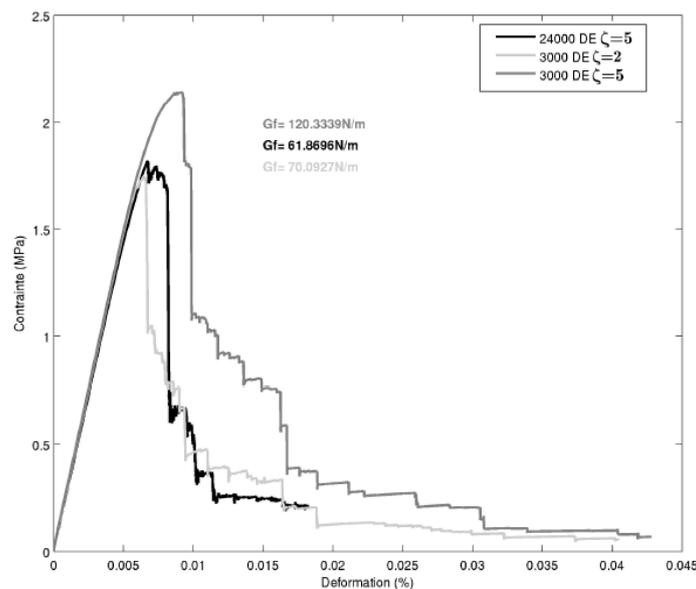


Figure 65 - Courbe contrainte – déformation avec prise en compte de l'influence de la taille des éléments sur G_F .

Il est à noter que les deux maillages étudiés par Rousseau ont une finesse très différente, d'où une variation importante du paramètre d'adoucissement. Dans notre cas, nous utilisons le résultat de la thèse de A. Omar qui montre qu'il n'est pas nécessaire de mailler plus finement que 4 tétraèdres par côté pour restituer correctement le comportement non linéaire du béton. Par conséquent, nous n'allons pas utiliser des maillages de finesesses très différentes pour montrer l'influence de la taille des éléments sur le résultat (voir le calcul sur la poutre CEA, 4.2.3). Le coefficient d'adoucissement changera peu entre ces deux maillages et peut donc être considéré comme constant.

2.5 Evaluation numérique du modèle

Pour étudier la capacité de notre modèle à restituer le comportement du béton nous le mettons en œuvre sur des simulations d'essais dans lesquels le béton est fortement sollicité en traction et en cisaillement, les deux principaux modes de rupture lors d'un impact. Etant donné que l'identification des paramètres non linéaires du modèle à été réalisée en simulant un essai de traction simple directe, simuler un essai de fendage (essai de traction indirecte) est un très bon moyen de vérifier si le modèle restitue la limite de traction et le comportement fragile du béton. Nous retenons aussi l'essai de Nooru-Mohamed (Nooru-Mohamed, 1992) pour vérifier comment le modèle ED se comporte dans le cas d'un chargement multiaxial complexe.

2.5.1 Essai de fendage

2.5.1.1 Description de l'essai

Un essai de fendage ou essai brésilien consiste à comprimer une éprouvette cylindrique selon sa direction latérale. La charge est augmentée jusqu'à la rupture par traction indirecte, qui apparaît sous forme de fendage le long du diamètre de l'éprouvette dans la direction du chargement. Un schéma du principe de l'essai de fendage est représenté sur la Figure 66. Le chargement est appliqué sur les deux plaques rigides. Les méplats, deux bandes minces en contreplaqué qui sont placées entre les plateaux de chargement et l'éprouvette, servent à éviter une rupture locale en compression au niveau des génératrices de chargement.

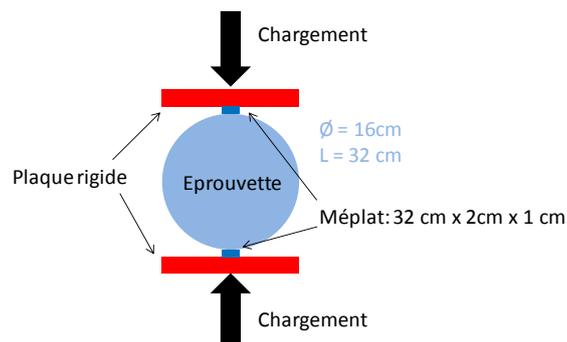


Figure 66 – Schéma de l'essai de fendage.

2.5.1.2 Modélisation de l'essai

Le maillage éléments finis tétraédriques de l'éprouvette et le maillage éléments discrets obtenu par SpherePadder++ sont montrés sur la Figure 67.

Les deux méplats sont discrétisés en éléments finis hexaédriques dont la taille est du même ordre de grandeur que celle du plus petit élément discret du maillage de l'éprouvette pour assurer une bonne gestion du contact entre les deux modèles (Figure 68). Pour maintenir l'éprouvette cylindrique dans le même axe par rapport aux méplats, nous imposons des conditions de contact frottant entre l'éprouvette et les méplats supérieur et inférieur au cours du calcul.

2.5 Evaluation numérique du modèle

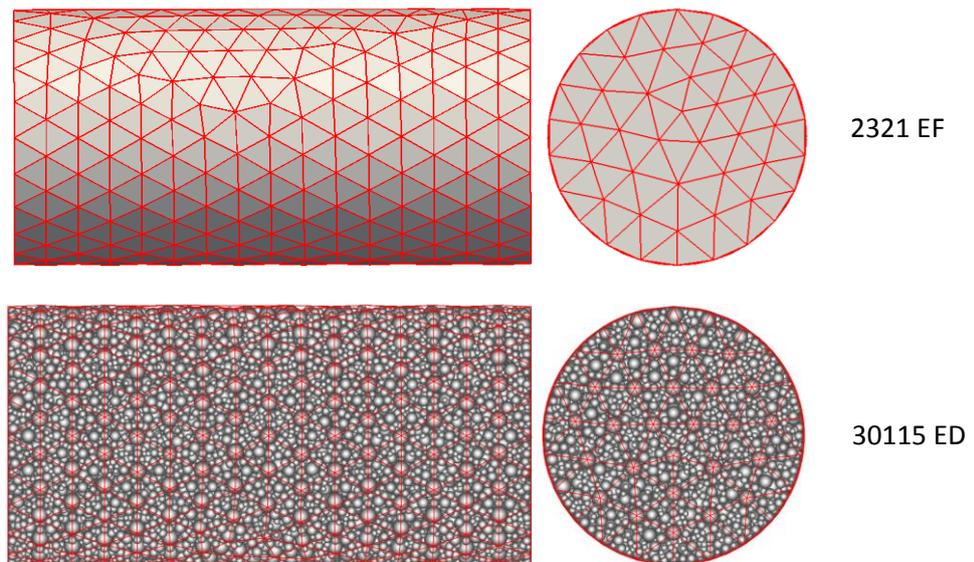


Figure 67 – Maillages éléments finis et éléments discrets de l'éprouvette.

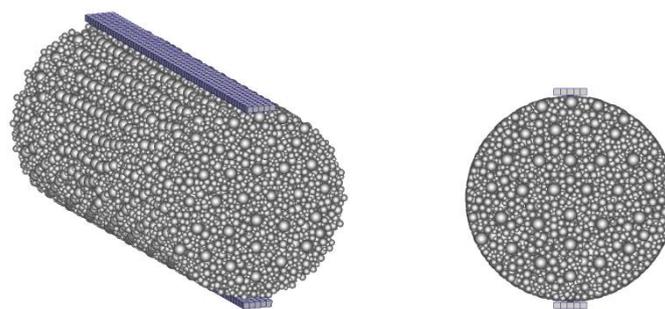


Figure 68 – Maillages ED de l'éprouvette et EF des méplats.

Les caractéristiques mécaniques du béton de l'éprouvette sont récapitulées dans le Tableau 4-a. Après application de la procédure d'identification, les paramètres mécaniques du modèle ED du béton qui restitue ces propriétés mécaniques sont présentés dans le Tableau 4-b.

Masse volumique	2500 kg/m ³
Module de Young	25 GPa
Coefficient de Poisson	0,16
Limite de traction	3,3 MPa
Limite de compression	35 MPa

(a)

Masse volumique	2500 kg/m ³
Module de Young	25 GPa
Coefficient de Poisson	0,16
Limite locale de traction	2,3 MPa
Cohésion	4,5 MPa
Angle de frottement interne	35°
Angle de frottement de contact	40°
Adoucissement	6

(b)

Tableau 4 – (a) Caractéristiques mécaniques du béton et (b) paramètres du modèle obtenus après identification.

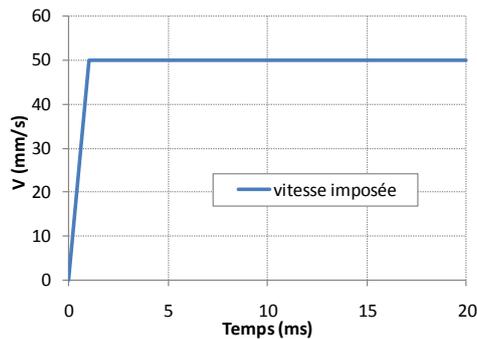


Figure 69 – Evolution de la vitesse imposée sur les méplats au cours du temps.

Le chargement porte sur la vitesse pour pouvoir contrôler plus facilement l'application du chargement au cours de la simulation de l'essai.

2.5.1.3 Résultats

L'état de fragmentation de l'éprouvette à la fin du calcul est représenté sur la Figure 70. Sous l'action de la pression des deux méplats, l'éprouvette s'est rompue, selon son diamètre et parallèlement à la direction du chargement, en deux demi-cylindres délimités très nettement par une macro-fissure résultant de la cassure des liaisons cohésives dans le plan du chargement. A part dans la zone de séparation, les deux demi-cylindres restent peu endommagés (les éléments discrets qui ont gardé tous leurs liens cohésifs sains sont en bleu foncé sur la Figure 70). On voit ainsi que le modèle ED arrive à reproduire qualitativement le comportement fragile du béton en traction.

On constate que beaucoup d'éléments discrets, qui ont perdu la totalité de leurs voisins, sont encore « en suspension » au lieu de tomber, puisqu'on fait un calcul dynamique sur un temps relativement court.

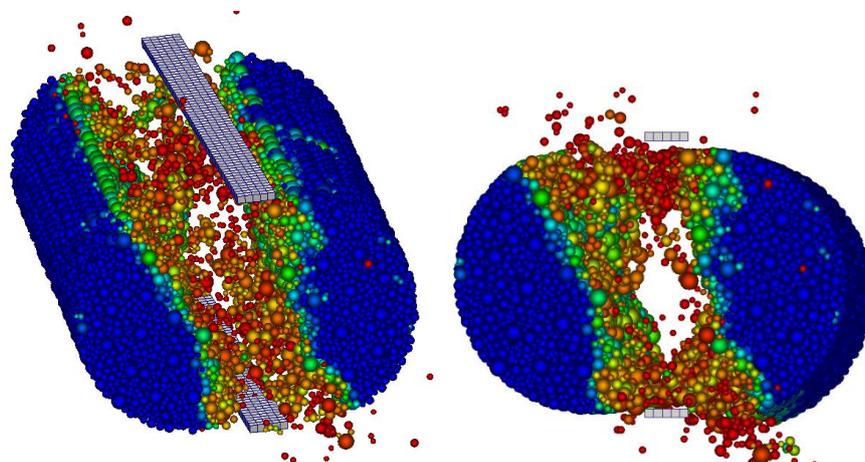


Figure 70 – Endommagement de l'éprouvette en béton à la fin de la simulation.

Sur la Figure 71, on a tracé l'évolution de la limite de traction globale du béton au cours du calcul. Cette limite est calculée en appliquant la formule suivante :

$$T = \frac{2P}{\pi DL}$$

où P est la résultante selon la direction du chargement des efforts de réaction de l'éprouvette sur les méplats, D et L sont respectivement le diamètre et la longueur de l'éprouvette.

2.5 Evaluation numérique du modèle

On observe sur la Figure 71 un pic de contrainte qui correspond au moment où le béton a atteint sa résistance limite en traction : la valeur au sommet est de 3,4 MPa, ce qui correspond bien à la limite globale de traction du béton déterminée expérimentalement, à savoir 3,3 MPa (Tableau 4-a).

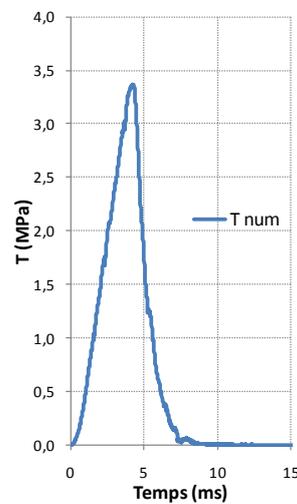


Figure 71 – Evolution de la contrainte de traction dans le béton au cours du temps.

Nous retrouvons donc le comportement fragile du béton et sa limite de traction en simulant un autre essai que l'essai de traction simple directe, utilisé dans la procédure d'identification. On en déduit que l'essai de traction simple et la procédure d'identification que nous utilisons permettent d'obtenir un jeu de paramètres correct garantissant au modèle une bonne capacité de prédiction.

2.5.2 Essai de Nooru-Mohamed

2.5.2.1 Description de l'essai

L'essai de Nooru-Mohamed consiste à soumettre une éprouvette en béton à un chargement combiné de traction/cisaillement (Nooru-Mohamed, 1992). L'éprouvette considérée possède deux encoches. Au cours de l'essai, deux fissures vont s'amorcer (une à partir de chaque encoche) et vont se propager dans l'éprouvette. Un schéma de principe de cet essai est représenté sur la Figure 72.

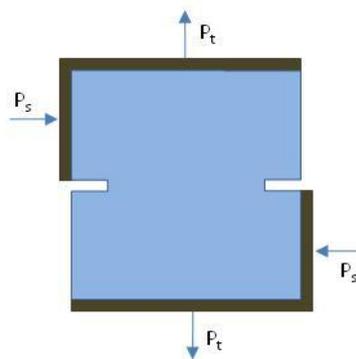


Figure 72 – Schéma du chargement appliqué à l'éprouvette dans l'essai de Nooru-Mohamed.

2.5.2.2 Modélisation de l'essai

L'éprouvette que nous avons utilisée dans la simulation a les mêmes dimensions que celle de Nooru-Mohamed (Nooru-Mohamed, 1992), excepté pour les deux encoches, qui sont prises ici plus larges : ceci est dû au fait que la version actuelle du logiciel SpherePadder++ ne permet pas encore de traiter

(discrétiser) les fortes variations géométriques localisées de la frontière du domaine. Cette modification n'a pas d'influence sur l'amorçage et le trajet de propagation des fissures, car ils dépendent essentiellement du rapport entre la force de cisaillement et celle de traction. Le maillage tétraédrique de l'éprouvette et le maillage éléments discrets final que nous avons utilisés sont représentés sur la Figure 73.

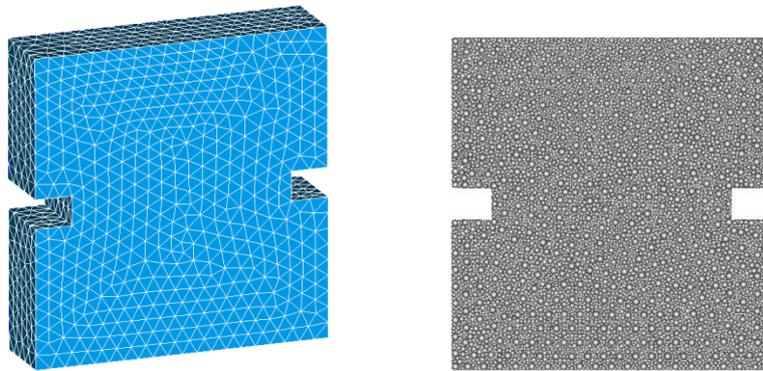


Figure 73 – Maillages tétraédrique puis éléments discrets de l'éprouvette en béton.

Les paramètres du modèle de béton utilisé sont récapitulés dans le Tableau 5.

Masse volumique	2300 kg/m ³
Module de Young	29 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Limite locale de traction	3 MPa
Cohésion	6 MPa
Angle de frottement interne	15°
Angle de frottement de contact	15°
Adoucissement	10

Tableau 5 – Paramètres mécaniques du modèle de béton.

L'application combinée du chargement de cisaillement puis de traction sur l'éprouvette est particulière : la Figure 72 montre la direction et la zone d'application de chacune de ces deux sollicitations. Plusieurs protocoles de chargement ont été proposés dans (Nooru-Mohammed, 1992). Dans ce travail nous suivons le protocole 4b dans lequel la phase d'application du chargement compte deux étapes : nous commençons par appliquer un chargement de cisaillement P_s , puis nous appliquons l'effort de traction en gardant constant l'effort de cisaillement P_s . En chargeant l'éprouvette de cette manière, les contraintes principales changent d'orientation au cours du test, ce qui modifie le trajet de propagation des deux fissures. Nous étudions trois cas de chargement : pour chacun, nous allons prendre une intensité différente du chargement de cisaillement P_s (à savoir 5 kN, 10 kN et 27.5 kN) pour analyser son influence sur l'orientation et la forme des fissures.

2.5.2.3 Résultats

Nous comparons les trajectoires de propagation des deux fissures dans le calcul EUROPLEXUS (Figure 74) à celles relevées dans les essais (Figure 75). On constate que le calcul reproduit le faciès de fissuration conforme à celui de l'essai. Notamment, l'augmentation de l'intensité du chargement de cisaillement résulte en des trajets de fissure de plus en plus curvilignes. Les fissures s'initient aux coins internes des encoches de l'éprouvette, et leurs trajets de propagation sont très proches de ceux constatés expérimentalement.

2.5 Evaluation numérique du modèle

Il faut noter que la Figure 74 affiche un état d'endommagement du béton qui est représenté dans le calcul éléments discrets par un état d'endommagement des liaisons cohésives du modèle ED béton à un instant donné. On affiche cet état sur les éléments discrets sphériques du modèle en les coloriant en fonction du nombre de liens cassés. Le champ d'endommagement affiché est calculé pour chaque élément discret comme un ratio entre le nombre de liens rompus à l'instant donné et le nombre de liens à l'instant initial. La visualisation sur les éléments donne un aspect « diffus » à ce champ qu'on a du mal à interpréter à cause de son caractère moyenné. Notamment, il est difficile de savoir si l'état endommagé correspond à une réelle fissure traversante.

Pour répondre à cette question, nous traçons la composante verticale du champ de déplacement (Figure 76). Les sauts de couleur nets qu'on peut observer témoignent de la présence des vraies macro-fissures car le champ de déplacement vertical est discontinu. On observe la même discontinuité sur les deux faces de l'éprouvette, ce qui signale une fissure traversante. Cette discontinuité part de l'encoche et disparaît dans la région proche du front de fissure visible sur la Figure 74, où le champ d'endommagement correspond à une microfissuration diffuse.

Ces résultats montrent que le modèle de béton développé dans ce travail permet de prédire correctement les phénomènes physiques observés au cours de cet essai, détectant des positions d'amorçage et reproduisant les trajets de propagation des fissures curvilignes.

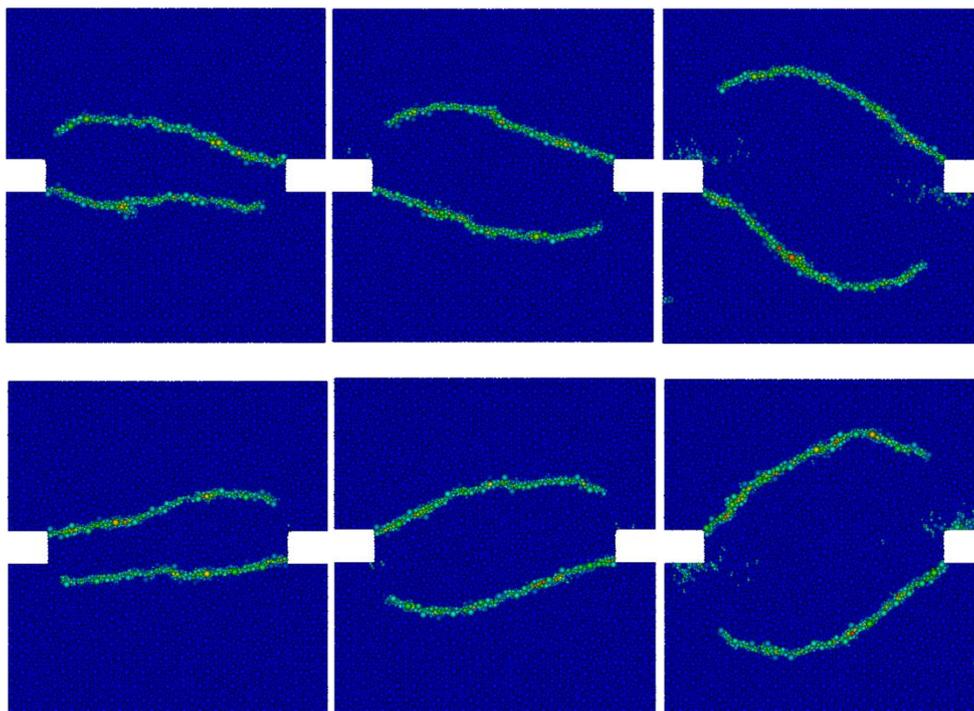


Figure 74 – Etat d'endommagement de l'éprouvette face avant (en haut) et face arrière (en bas).

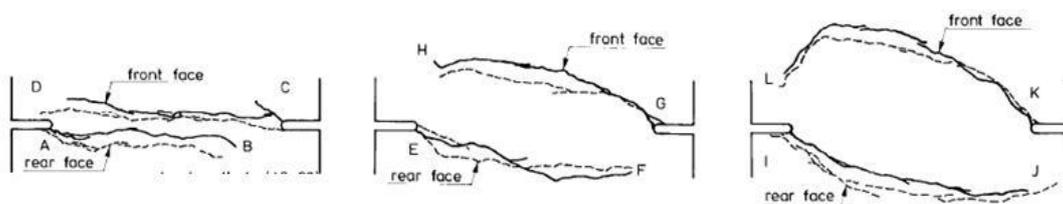


Figure 75 – Faciès de fissuration relevés dans les essais cisaillement-traction pour $P_s = 5$ kN, 10 kN et 27.5 kN.

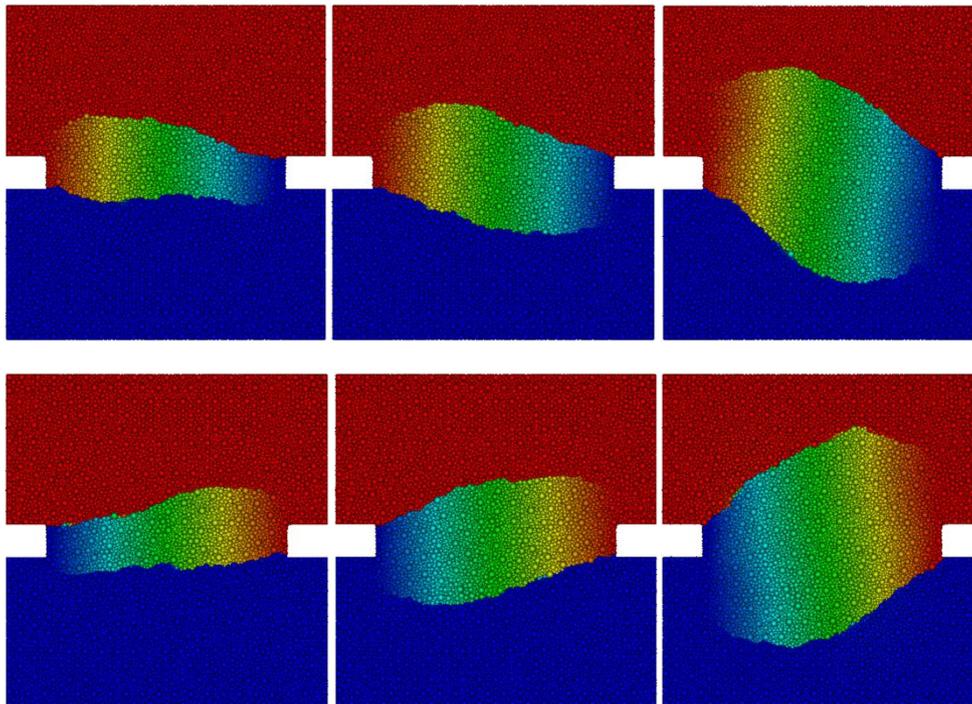


Figure 76 - Déplacement vertical des ED en face avant (en haut), en face arrière (en bas).

2.6 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons présenté le cadre théorique et la validation numérique de la méthode des éléments discrets (ED) sphériques que nous utilisons pour modéliser le comportement macroscopique du béton. Après quelques généralités sur la méthode ED, nous avons dressé un état des lieux de l'état de développement du cadre numérique ED existant au début de notre thèse. Nous avons présenté ensuite le support géométrique du modèle ED, ses spécificités et les propriétés voulues (polydispersité, homogénéité, isotropie initiale), ainsi que la méthode et l'outil numérique SpherePadder++ permettant de générer les maillages ED des structures à géométrie complexe, dans le cadre informatique de la plateforme open-source SALOME.

Nous avons présenté ensuite les lois d'interactions locales entre les éléments discrets, permettant de modéliser le comportement macroscopique du béton, ainsi que la procédure d'identification de leurs paramètres.

Pour répondre à la question sur la convergence au maillage de la méthode ED sphérique, nous avons réalisé une étude numérique sur une série d'échantillons ED maillés de plus en plus finement. Nous avons appliqué une procédure d'identification pour déterminer les paramètres locaux de ces modèles, et on a montré que les jeux de paramètres obtenus sont peu dépendants de la finesse du maillage éléments discrets ainsi que du mailleur employé pour fabriquer le maillage tétraédrique utilisé en entrée de SpherePadder++. Grâce à cette étude nous avons déterminé une discrétisation minimale nécessaire au modèle ED pour pouvoir reproduire le comportement macroscopique du béton dans le domaine élastique linéaire.

Nous avons montré les résultats de simulation avec notre modèle d'un essai de fendage d'une éprouvette cylindrique en béton. Le calcul permet de reproduire correctement la rupture fragile du béton en traction : l'éprouvette se fend selon son diamètre en deux demi-cylindres. La valeur de la

2.6 Conclusion

limite globale de traction du béton calculée au cours de la simulation est très proche de celle mesurée expérimentalement.

Dans le but de tester la capacité du modèle ED à représenter le comportement du béton sous chargement multiaxial, nous avons simulé un essai de Nooru-Mohamed avec un chargement combiné de cisaillement/traction, et en faisant varier l'intensité du chargement de cisaillement. Pour chaque cas de charge, nous avons comparé les directions de propagation des fissures obtenues numériquement avec celles issues de l'essai. Le modèle ED que nous employons reproduit fidèlement les trajets de propagation des fissures observés expérimentalement.

Chapitre 3

Liaison acier-béton

Le phénomène de liaison correspond à l'interaction physique de deux matériaux différents, qui se produit sur une zone d'interface en permettant le transfert des efforts entre les deux corps en contact. Dans le cas du béton armé, la liaison acier-béton s'exprime dans une espèce de couche ou enveloppe autour de l'armature dont les propriétés mécaniques diffèrent de celles du reste du béton ou de l'armature. Les propriétés de la liaison évoluent en fonction des déformations et de l'endommagement du béton au voisinage de la surface de l'armature. L'endommagement du béton dans cette zone entraîne localement une diminution importante de la résistance et donc une redistribution des forces internes, ce qui affecte significativement la réponse de la structure lors de chargements extrêmes. La liaison acier-béton joue donc un rôle important dans le comportement d'une structure en béton armé dès l'apparition des macro fissures et jusqu'à la ruine.

Ce chapitre présente le modèle de liaison acier-béton proposé au cours de cette thèse et adapté à une modélisation du béton par éléments discrets. Sachant que l'interaction acier-béton (A-B) fait l'objet d'une littérature assez conséquente, tant sur les aspects expérimentaux que numériques, on ne cherche pas ici à faire une revue exhaustive des références existantes. A cause du contexte particulier de la modélisation du béton retenue, on préfère aller vers l'essentiel en rappelant brièvement, dans la première section, quelques travaux récents qui permettent d'expliquer la problématique et de mettre en lumière les principaux phénomènes physiques à prendre en compte. La présente thèse faisant suite à la thèse de J. Rousseau (Rousseau, 2009), où un modèle de liaison acier-béton a été proposé dans le cadre numérique qui nous intéresse, nous présentons dans la deuxième section de ce chapitre l'étude numérique du modèle de Rousseau, que nous qualifierons de modèle initial, et nous exposons les modifications que nous lui avons apportées pour l'améliorer. Face à des limitations de ce modèle, découvertes lors de ladite étude, et des difficultés pratiques dans la modélisation du ferrailage complexe des structures industrielles, nous avons choisi de proposer et de mettre en œuvre un autre modèle de liaison, exposé dans la section 3. Ce nouveau modèle conserve les principaux avantages du modèle initial tout en corrigeant les défauts de ce dernier et permettant d'envisager les calculs à l'échelle industrielle. Dans la dernière section de ce chapitre, nous validons ce modèle en simulant un essai d'arrachement et un essai de tirant.

3.1 Bibliographie

3.1.1 Etudes expérimentales de l'interface

On trouve dans la thèse de N. Dominguez (Dominguez, 2005) une revue relativement exhaustive des essais expérimentaux réalisés dans la littérature pour étudier l'interaction entre l'acier et le béton.

Parmi ces essais, on peut retenir trois principaux types d'essais, très étudiés dans la littérature, permettant d'appréhender et caractériser les phénomènes se produisant à l'interface A-B : l'essai d'arrachement, l'essai de tirant et l'essai de poutre en flexion. Nous allons décrire brièvement ces essais car ils nous permettront de calibrer le modèle de liaison acier-béton développé dans ce travail de thèse.

3.1.1.1 L'essai d'arrachement

L'essai d'arrachement consiste à appliquer un chargement de traction croissant sur l'extrémité d'une barre d'armature droite en partie noyée dans un bloc en béton (Figure 77). Cet essai permet de s'affranchir des effets associés à d'autres mécanismes de déformation (flexion, torsion, etc.) pour se concentrer sur le comportement tangentiel de l'interface. Réalisé sur des bancs d'essais spécialement conçus, il permet aussi d'étudier l'effet de confinement du béton sur la réponse tangentielle de l'interface. Cependant, ce type d'essai seul ne suffit pas pour caractériser toute la complexité des phénomènes physiques et des chargements que l'armature, faisant partie du ferrailage dans une structure industrielle en béton armé, pourrait subir lors des régimes d'exploitation nominaux ou accidentels.

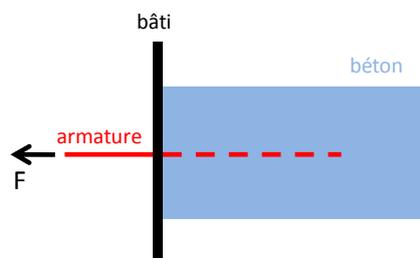


Figure 77 – Schéma de l'essai d'arrachement.

Il existe quatre principaux modes de ruine de l'éprouvette lors d'un essai d'arrachement :

- La rupture par la propagation de fissures longitudinales (Figure 78-a) se produit à cause d'une concentration importante des contraintes dans le béton qui peut être due par exemple à son hétérogénéité, un confinement trop faible ou une épaisseur d'enrobage trop petite. Une macro-fissure s'amorce et se propage dans la direction longitudinale à l'axe de l'armature au fur et à mesure que la concentration des contraintes de traction au front de fissure dépasse la limite en traction du béton.
- La rupture par adhérence (Figure 78-b) se produit lorsque la résistance de la liaison acier-béton est exploitée à son maximum en évitant l'apparition de fissures longitudinales, par exemple en appliquant une pression de confinement ou en choisissant un enrobage important de l'armature. Les microfissures de cisaillement dans la zone de l'interface coalescent pour former une fissure cylindrique. Désormais, l'armature interagit avec le béton par frottement dû à sa présence, elle peut alors être arrachée si la force d'extraction est supérieure à ce frottement.
- Si le béton est très rigide et l'adhérence très forte entre l'armature et le béton, leur résistance combinée peut être suffisante pour retenir l'armature qui se met alors à plastifier sous l'effet de la force d'extraction (Figure 78-c).
- Le mode de rupture illustré sur la Figure 78-d est lié à des fissures radiales à la direction de l'armature qui s'amorcent et se propagent en décrivant une surface de rupture de forme

3.1 Bibliographie

conique dans le béton. Si ce mode de fissuration est prépondérant par rapport au cisaillement dans l'interface, un cône de béton peut subsister sur la barre lors de son extraction.

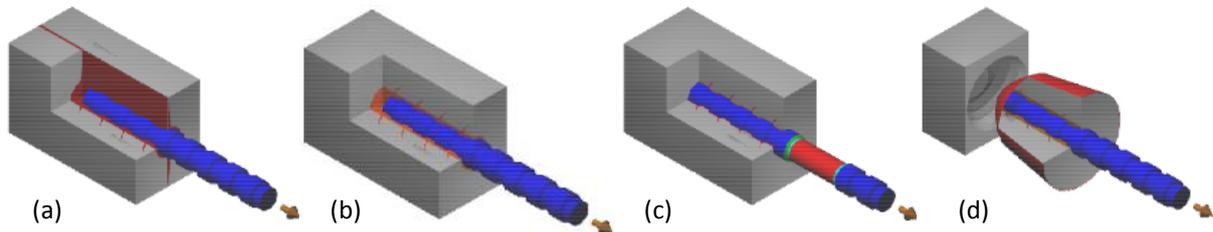


Figure 78 - Les quatre principaux modes de ruine de l'essai d'arrachement (Dominguez, 2005).

La loi d'adhérence de l'interface acier-béton exprime l'évolution de la contrainte tangentielle d'adhérence τ en fonction du déplacement relatif entre le béton et l'armature s . Dans le cas de la ruine par rupture d'adhérence, la courbe contrainte-glisement typique que l'on obtient est présentée sur la Figure 79.

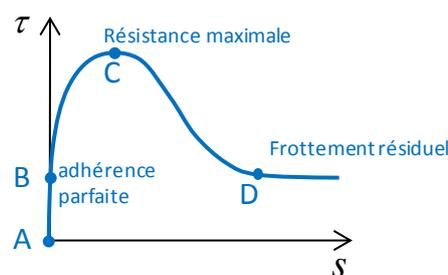


Figure 79 – Courbe typique contrainte-glisement d'un essai d'arrachement.

Cette courbe peut être décomposée en quatre phases successives (Torre-Casanova, 2012) :

1. Zone A-B (Figure 80-a) : la liaison est parfaite, et le déplacement relatif entre les deux matériaux est quasi-nul. La gaine de béton située à proximité immédiate du renfort reste saine.
2. Zone B-C (Figure 80-b) : le mouvement relatif de l'armature par rapport au béton augmente, ce qui comprime le béton situé en face des nervures de l'armature. La contrainte d'adhérence augmente, jusqu'à atteindre un pic (point C) qui correspond à la résistance maximale de l'interface.
3. Zone C-D (Figure 80-b) : des microfissures radiales s'amorcent à partir des extrémités des nervures de l'armature puis elles coalescent, provoquant progressivement la perte d'adhérence entre l'armature et le béton conduisant à un adoucissement de la loi d'adhérence.
4. Zone au-delà de D (Figure 80-c) : si le chargement est suffisamment important, la propagation des fissures entraîne la rupture de l'interface. La zone de béton située entre les deux nervures n'apporte plus aucune résistance et l'armature se comporte comme si elle était lisse. Le comportement de la liaison peut alors être assimilé à du frottement résiduel (glissement avec frottement) de l'armature dans un canal créé dans le béton.

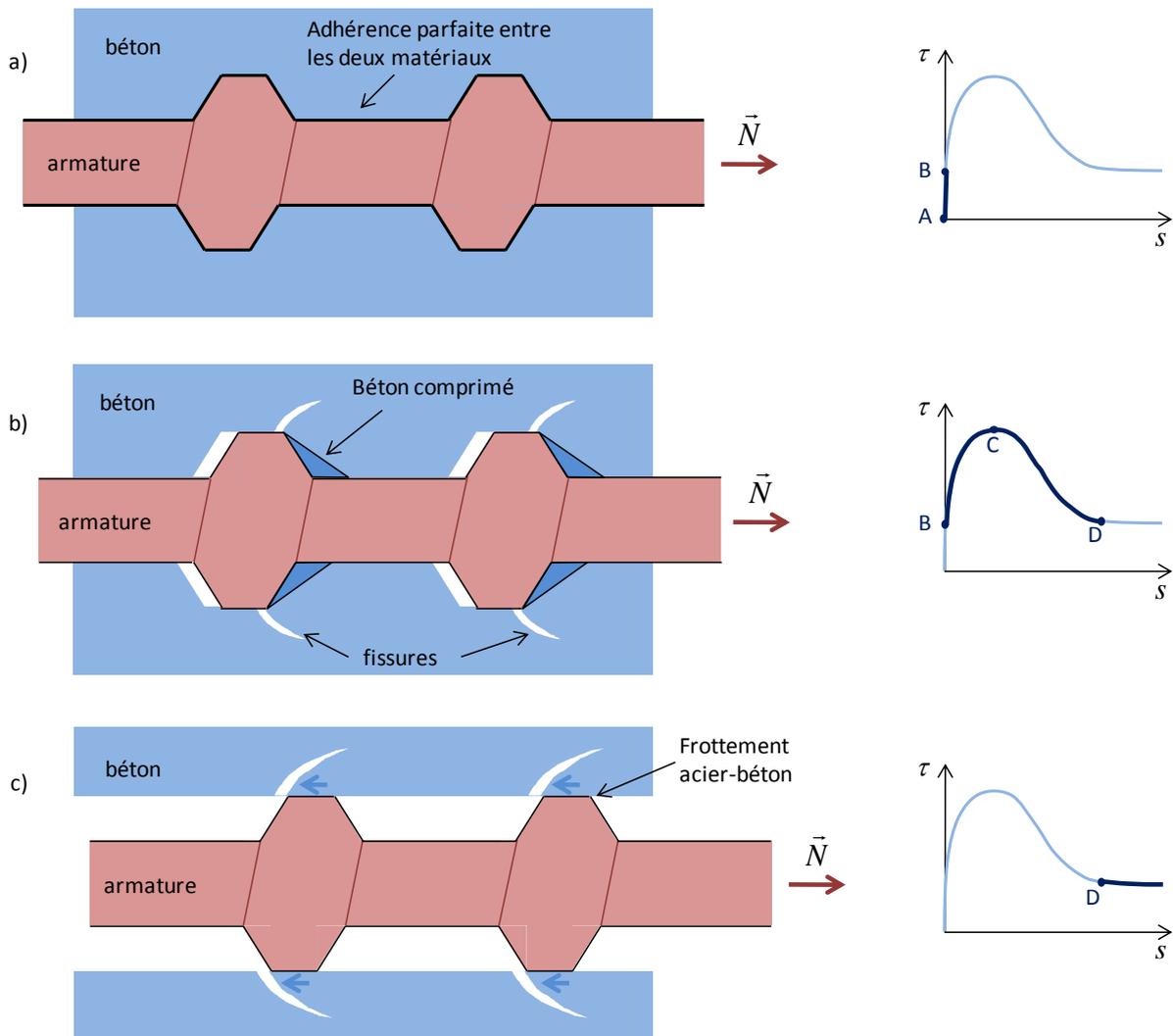


Figure 80 – Dégradation de l'interface pour une armature HA (Torre-Casanova, 2012).

La nature de la surface de l'armature a une forte influence sur le pic de résistance maximale de l'interface. Une armature de type HA (Haute Adhérence) possédant des nervures assure une résistance de la liaison beaucoup plus élevée qu'une armature dont la surface est lisse (Figure 81). Dans le cas d'une barre lisse, on peut dire que le comportement de la liaison passe de l'adhérence à la phase de frottement résiduelle sans augmentation notable de sa résistance maximale.

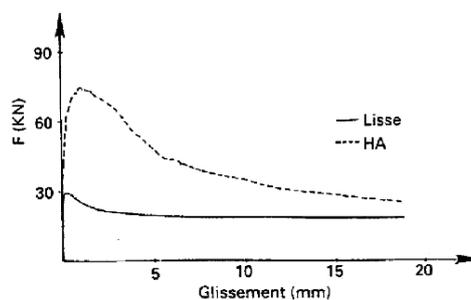


Figure 81 – Forme de la loi d'adhérence en fonction de la surface de l'armature (Hamouine et al., 1995).

Les propriétés géométriques et l'espacement des rainures ont également une influence sur la résistance maximale de la liaison. Kilic et al. (Kilic et al., 2003) montrent qu'une armature constituée

3.1 Bibliographie

de 3 ergots de forme conique et lisse par ailleurs peut produire une résistance maximale 27% plus grande que celle d'une armature nervurée sur toute sa longueur (Figure 82).

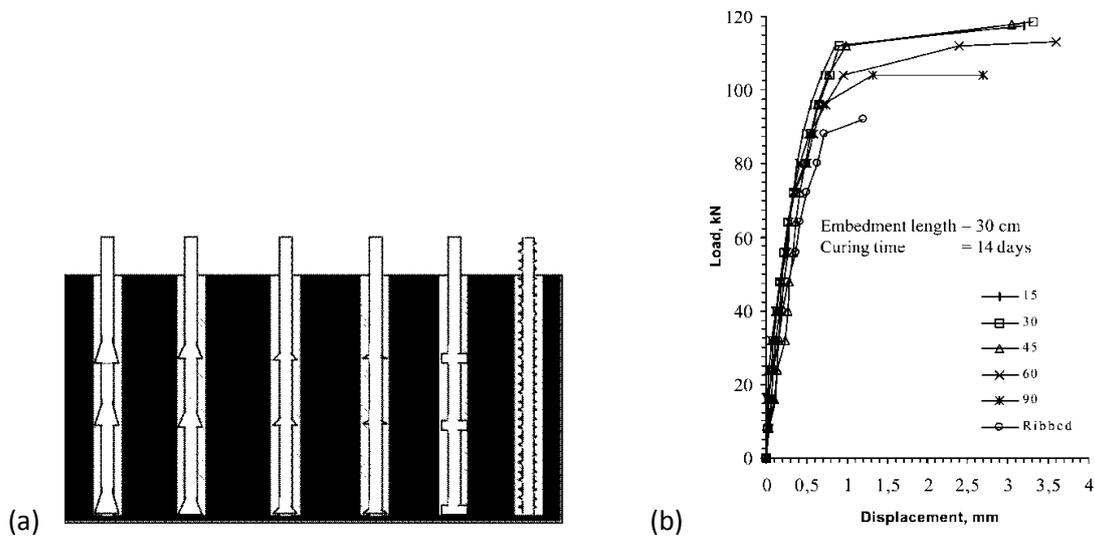


Figure 82 – Influence de la forme des ergots de l'armature sur la résistance de la liaison A-B (Kilic et al., 2003).

Les caractéristiques mécaniques du béton ont aussi une influence sur le comportement de la liaison. On a vu à l'étape 2 sur la zone BC (Figure 79) de la loi d'adhérence que le béton situé entre les nervures de l'armature était comprimé, et sur le segment CD lors de la phase 3 que des microfissures se formaient dans le béton, ce qui montre une influence des limites de compression et de traction du béton sur la résistance de l'interface.

De nombreux autres paramètres ont été étudiés sur des essais d'arrachement comme l'histoire du chargement (Eligehausen et al., 1983), le confinement (La Borderie et Pijaudier-Cabot, 1987), (Torre-Casanova, 2012), ou encore les effets d'échelle (Coronelli et al., 2001).

3.1.1.2 L'essai de tirant

Un tirant est généralement une barre parallélépipédique en béton comportant une (ou plusieurs) armature(s) longitudinale(s). Les deux extrémités de l'armature sont soumises à un chargement de traction (Figure 83) qui est transmis ensuite au béton par l'intermédiaire de l'interface acier-béton. Le chargement est appliqué d'habitude sous forme de déplacements imposés pour pouvoir étudier l'évolution de l'effort de traction dans l'armature lors de l'apparition des fissures dans le béton.



Figure 83 – Schéma de l'essai de tirant.

Sous l'effet de cette sollicitation, la contrainte de traction augmente dans la partie centrale de la poutre en béton (les extrémités de la poutre en béton sont libres) (Figure 84-a). La rupture se produit sous la forme d'une macro-fissure orthogonale à l'axe du tirant qui se propage dans la section de béton dont la limite de traction est atteinte (Figure 84-b). De part et d'autre des lèvres de la fissure, le béton se décharge immédiatement (bords libres). Cette discontinuité entraîne une redistribution des efforts de traction dans le béton. Lorsque la limite de traction du béton est atteinte dans une autre section, une autre fissure se crée (Figure 84-c), entraînant une nouvelle redistribution des

efforts dans le béton, et ainsi de suite jusqu'à ce que la distance entre les fissures voisines devienne telle que la contrainte de traction dans les fragments de béton créés n'atteigne plus sa limite de traction, et le béton n'arrive plus à fissurer (Figure 84-d). La phase de fissuration étant terminée, la majorité de l'effort appliqué est reprise par l'armature. Le comportement du tirant se rapproche alors de celui d'une barre en acier en traction (comportement élasto-plastique). A la fin de l'essai le tirant comporte un nombre fini de fissures transversantes réparties plus ou moins régulièrement selon sa longueur (Figure 85).

A la différence de l'essai d'arrachement, l'essai de tirant permet d'étudier les caractéristiques spécifiques de la fissuration multiple dans le béton produite par la présence d'une armature. De nombreuses campagnes expérimentales d'essais de tirant ont été menées pour étudier l'ordre d'apparition des fissures, leur nombre et leur espacement. On peut citer notamment les études de Farra et al. (Farra et Jaccoud, 1993), de Mivelaz (Mivelaz, 1996), de Daoud (Daoud, 2003).

Il est à noter qu'on constate une assez forte dispersion des résultats notamment sur le nombre et l'emplacement des fissures lors des essais répétitifs, ce qui montre une sensibilité du comportement de l'interface à différents facteurs comme l'hétérogénéité du béton, les imperfections de géométrie, les conditions de réalisation des éprouvettes, etc.

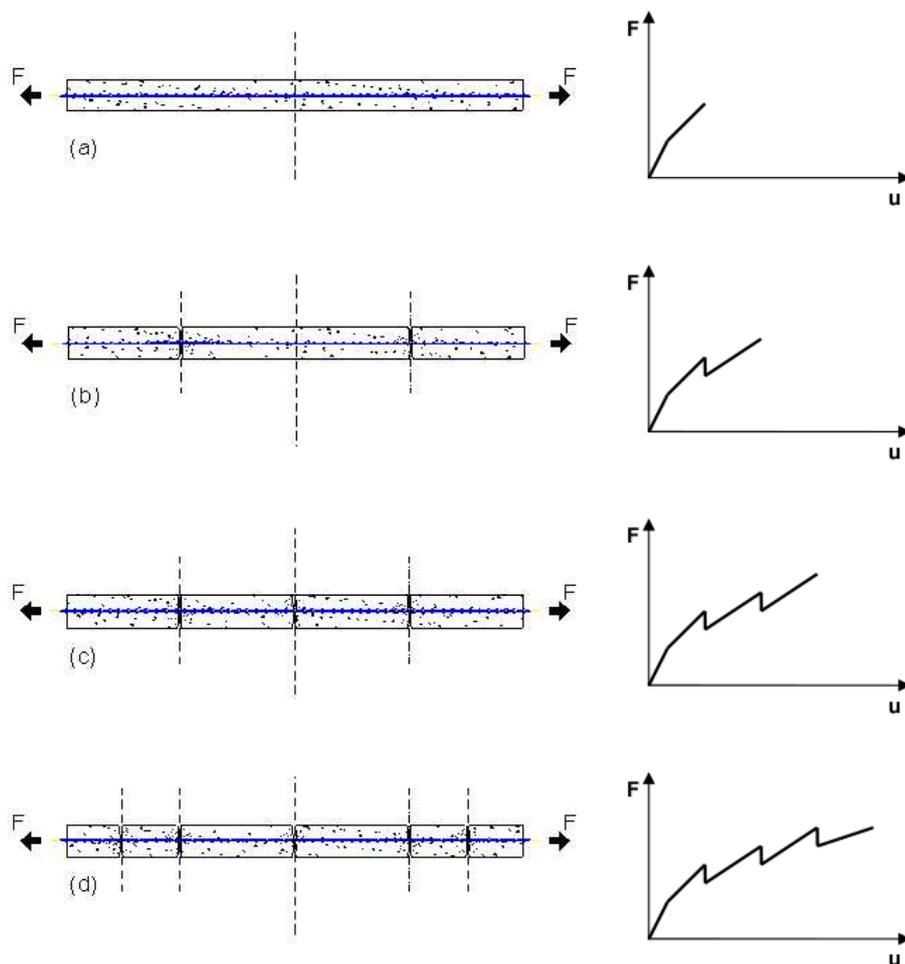


Figure 84 – Exemple d'évolution de la fissuration d'un tirant en béton armé (Dominguez, 2005).

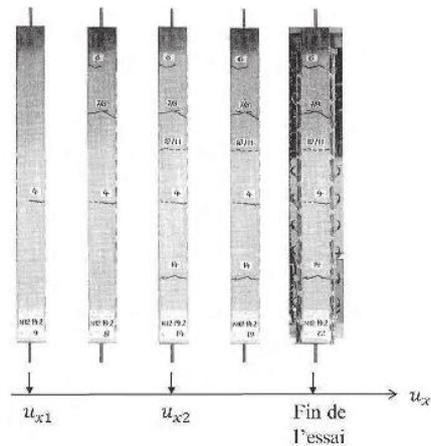


Figure 85 – Apparition progressive des fissures puis stabilisation de la fissuration (Farra et Jaccoud, 1993).

3.1.1.3 Test de poutre en flexion

Les essais sur poutre ont pour objectif d'étudier l'influence de la liaison acier-béton à l'échelle d'une structure soumise à des sollicitations de flexion (Figure 86). En présence de l'effort tranchant il est nécessaire d'ajouter des armatures transversales afin d'éviter une rupture du béton par cisaillement. Or les armatures transversales ont une influence sur l'apparition et l'espacement des fissures. Pour ne considérer qu'une seule direction d'armature, on évite les cadres dans la partie centrale de la poutre en réalisant plutôt des essais de flexion 4 points, car l'effort tranchant est alors nul au milieu de la poutre entre les deux points d'application de la force.

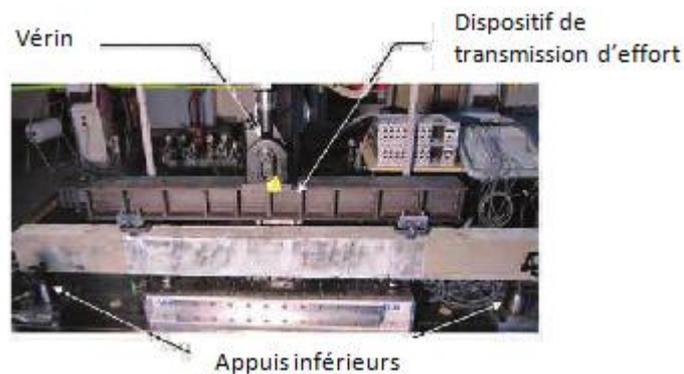


Figure 86 – Dispositif expérimental de l'essai de flexion 4 points (Torre-Casanova, 2012).

On peut citer la campagne expérimentale menée par Molina (Molina et al., 2002) qui montre que la dégradation de la liaison acier-béton entraîne l'augmentation de la flèche de la poutre. Torre-Casanova (Torre-Casanova, 2012) a étudié l'évolution de la fissuration de la partie centrale de la poutre au cours du chargement. Elle montre que les fissures sont plus ou moins régulièrement espacées et ont une ouverture assez similaire (Figure 87), même si le faciès de fissuration n'est jamais reproduit à l'identique lors des essais sur une série de poutres a priori identiques.

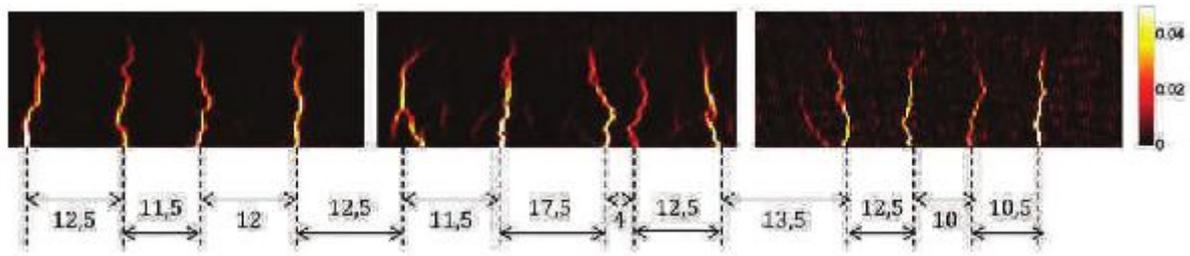


Figure 87 - Visualisation par corrélation d'images des fissures dans la poutre (Torre-Casanova, 2012).

Cependant, il paraît difficile de caractériser localement le comportement de la liaison avec ce type d'essai. Dans les premiers stades de la dégradation de la liaison, la détermination du niveau d'endommagement de l'interface autour des armatures est assez délicate.

3.1.2 Modèles discrets d'interface acier-béton

3.1.2.1 Méthodes hybrides « Lattice Discrete Particle Method » (LDPM)

Kim et al. (Kim et al., 2013) ont développé en 2D un modèle de liaison acier-béton qui prend en compte explicitement l'armature sans ajouter de degrés de liberté supplémentaires. Le béton est modélisé par un réseau de type lattice reliant des éléments rigides de forme irrégulière (Figure 88).

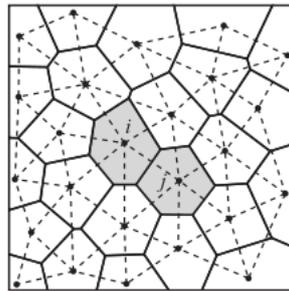


Figure 88 – Maillage du béton (Kim et Lim, 2011).

Au milieu de l'interface entre deux particules de centres i et j (point C sur la Figure 89-a), la liaison est composée de trois rigidités différentes : deux en translation (k_n, k_t) et une en rotation (k_ϕ).

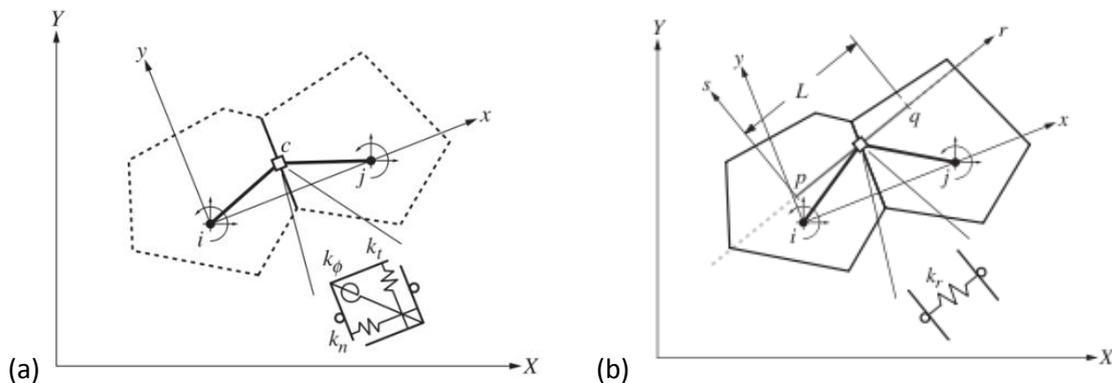


Figure 89 - Liaison entre deux éléments béton et représentation de l'armature (Kim et al., 2013).

Ce système de ressorts est connecté aux nœuds i et j par des segments rigides \overline{ic} et \overline{jc} . La rupture se produit entre les éléments rigides par dégradation des ressorts selon une loi non linéaire : endommagement pour k_n et critère de Mohr-Coulomb pour k_t . L'armature est introduite dans le

3.1 Bibliographie

modèle sous la forme d'une série de points qui symbolisent sa direction. Les points sont placés dans le modèle du béton à la position exacte où est située l'armature dans la structure étudiée. L'idée est de créer une liaison produisant le renfort apporté par l'armature du même type que celles créées entre les éléments béton (Figure 89-b). La raideur de l'armature k_r est placée à l'intersection entre le segment d'armature \overline{pq} et l'interface et reliée aux nœuds i et j par deux segments rigides. La liaison représentant l'armature agit en parallèle avec la liaison de type lattice entre les éléments béton, et la contribution de la raideur k_r à la résistance est transmise directement aux degrés de liberté des éléments béton. Donc il n'y a pas de degrés de liberté supplémentaires à prendre en compte qui seraient dus à l'introduction de l'armature.

Cependant, le fait de modéliser l'armature par des éléments liés aux nœuds des éléments béton par des relations de corps rigide interdit tout glissement entre le béton et l'armature. La liaison est alors considérée comme parfaite, ce qui limite l'étude à des structures soumises à des chargements peu endommageants. Le glissement relatif peut être simulé dans une certaine mesure en réduisant l'effort normal dans l'armature ou sa raideur (Bolander et Saito, 1998).

Dans le cadre du modèle LDPM, Cusatis et Pelessone (Cusatis et Pelessone, 2006) proposent une autre approche en intégrant dans leur modèle le maillage des aciers et le superposant avec le maillage du béton. Les armatures sont alors maillées en éléments finis poutre et placées dans le modèle béton à l'emplacement exact où elles sont dans la structure réelle. Un couplage est ensuite réalisé sur les déplacements entre les particules de béton et les nœuds des éléments acier qui les traversent. Cette solution peut poser des problèmes numériques en fonction du type de contrainte imposée. Ainsi, si on fait appel à la méthode des pénalités on devrait utiliser des raideurs de liaison très grandes pour que la contrainte soit respectée, ce qui peut mener à des instabilités au niveau de la liaison acier-béton et réduire drastiquement le pas de temps. La relation de type maître-esclave (de nature cinématique) n'impacte pas le pas de temps, mais elle ne permet pas de modéliser le glissement relatif entre la particule béton et l'élément acier. Le modèle donne néanmoins des résultats qualitativement réalistes sur des simulations d'essais d'impact, notamment en termes de perforation (Figure 90).



Figure 90 – Simulation d'une dalle en béton armé soumise à un impact (Cusatis et Pelessone, 2006).

3.1.2.2 Méthodes discrètes

Dans la plupart des modèles discrets d'interface acier-béton développés dans la littérature (Sawamoto et al., 1998), (Magnier et Donzé, 1998), (Hentz, 2003), l'armature est représentée par des éléments discrets alignés et de même rayon, dont les interactions sont représentatives du comportement d'une barre d'acier. Avec cette modélisation, l'emplacement des armatures dans la

structure réelle peut être scrupuleusement respecté. En revanche, la préparation du modèle éléments discrets pour une structure en béton armé nécessite une étape de construction de maillage ED assez complexe incluant la suppression des éléments béton qui se chevauchent avec les éléments acier et une densification du maillage béton autour de ces derniers pour combler les vides. La procédure de création automatique de maillage ED peut devenir prohibitive en termes de temps de calcul si la structure est fortement ferrillée.

Pour un maillage ED ainsi construit, des liens de type « interface » reliant des éléments discrets béton aux éléments discrets acier sont ensuite créés. Il faut alors déterminer et leur affecter une loi d'interaction non linéaire permettant de reproduire le comportement de la liaison acier-béton. Hentz propose d'appliquer à ces liaisons la même loi non linéaire que celle des liens acier-acier de l'armature de manière à modéliser la gaine de béton qui entoure l'armature lors de l'extraction dans un essai d'arrachement. Cependant, le fait d'introduire des liaisons acier-acier normales à la direction de l'armature peut être considéré comme une modélisation des nervures des armatures, ce qui est contraire à leur représentation « en ligne ». Cela peut modifier le comportement de l'interface dans le cas d'une armature lisse, comme les cadres.

Rousseau (Rousseau, 2009) a mis en œuvre une liaison acier-béton inspirée des modèles concentrés (lumped model) proposés dans le cadre éléments finis, dans lesquels on utilise un élément d'épaisseur nulle, placé entre les éléments béton et acier, en lui affectant une loi d'adhérence définie par deux composantes découplées : normale et tangentielle à la direction de l'armature. Un repère local est associé à chaque liaison acier-béton dans lequel sont calculés les efforts d'interaction selon ces deux composantes (\vec{D}_a et \vec{N}_a) (Figure 91).

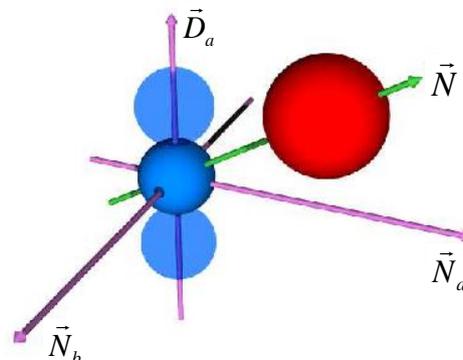


Figure 91 – Définition du repère de la liaison (Rousseau, 2009).

Avec son modèle, Rousseau a simulé des essais d'arrachement réalisés au laboratoire 3S-R à Grenoble avec plusieurs longueurs d'ancrage de l'armature. La Figure 92-a montre que le modèle numérique restitue une valeur très correcte de la force d'arrachement pour chaque longueur d'ancrage L_S . Pour $L_S = 32$ cm (longueur d'ancrage maximale), la plastification puis la rupture de l'armature relevées dans l'essai sont bien reproduites par le calcul (Figure 92-b).

3.1 Bibliographie

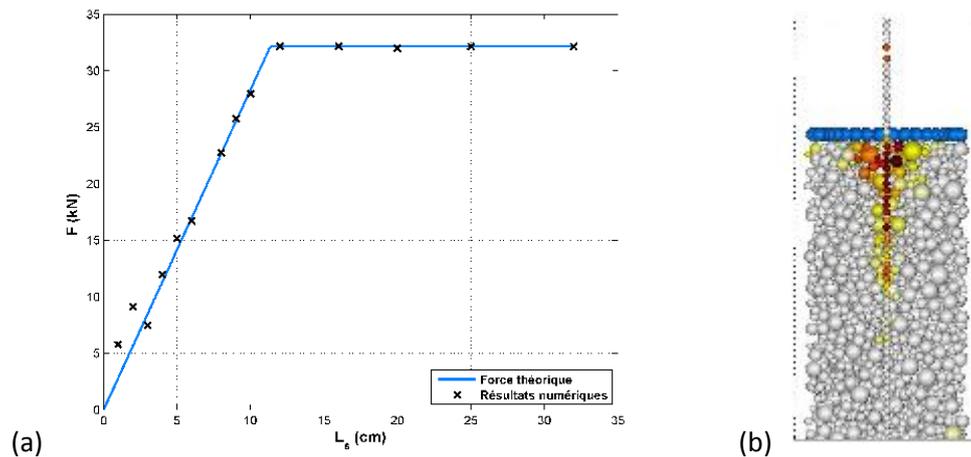


Figure 92 – (a) Force d'arrachement en fonction de L_S et (b) endommagement pour $L_S = 32$ cm.

Rousseau a également simulé deux essais de la série Meppen (Jonas et al., 1979), qui sont des essais de référence pour valider les codes de calculs dans le domaine de l'impact mou (problématique de chute d'avion). Il s'agit d'impacts d'un projectile déformable de grande taille sur des dalles épaisses en béton armé très ferrillées (voir Chapitre 4). Sur l'essai Meppen II-2, essai le moins endommageant de la série Meppen, le calcul ED fournit une assez bonne approximation de l'évolution de la flèche de la dalle au cours du temps. Etant donné la flèche très faible de la dalle mesurée lors de l'essai (quelques mm) par rapport aux dimensions de cette dernière (plusieurs mètres), il a été conclu que le modèle numérique utilisé (modélisation ED du béton) et le modèle de liaison développé permettent de restituer correctement la réponse en flexion de structures en béton armé soumises à des impacts peu sévères.

Cependant, lors de l'application de ce modèle aux simulations d'essais d'impact plus violents, comme l'essai Meppen II-5 et l'essai d'impact sur poutre (Qiu, 2010), il a été constaté que, suite à l'impact et à la déformation globale de la structure, les éléments discrets béton situés dans l'enrobage des armatures se détachaient très rapidement de leurs voisins, même dans les zones très éloignées de l'endroit de l'impact (Figure 93). Cet écaillage artificiel généralisé de la structure entraînait la mise à découvert des armatures et donc la perte totale d'adhérence entre l'acier et le béton, remettant en question le modèle de liaison développé.

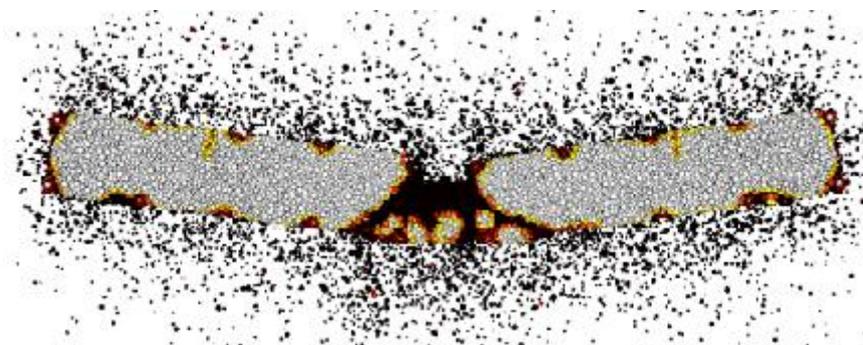


Figure 93 – Simulation d'un essai d'impact sur poutre avec le modèle A-B initial (Qiu, 2010).

Puisque les résultats globaux produits par le modèle ED restaient corrects du point de vue qualitatif (allure de la déformée de la structure, formation d'un cône de cisaillement sous le projectile), une revue critique du modèle de liaison de Rousseau nous a semblé nécessaire.

3.2 Etude du modèle de Rousseau

3.2.1 Caractéristiques générales

Le modèle de Rousseau (Rousseau, 2009) détermine les efforts d'interaction entre un béton et des armatures tous les deux modélisés en éléments discrets. L'armature est discrétisée par une séquence d'éléments alignés et de même rayon (éléments rouges sur la Figure 94). Les liaisons sont créées à l'instant initial, et chacune d'elles relie un élément discret acier I (de centre G_I) à un élément discret béton J (élément en bleu de centre G_J). En fonction de la direction \vec{N} de la liaison et de celle de l'armature \vec{D}_a un repère orthonormé local $(I, \vec{N}_a, \vec{D}_a, \vec{N}_b)$ est défini, dans lequel sont calculés les efforts d'interaction.

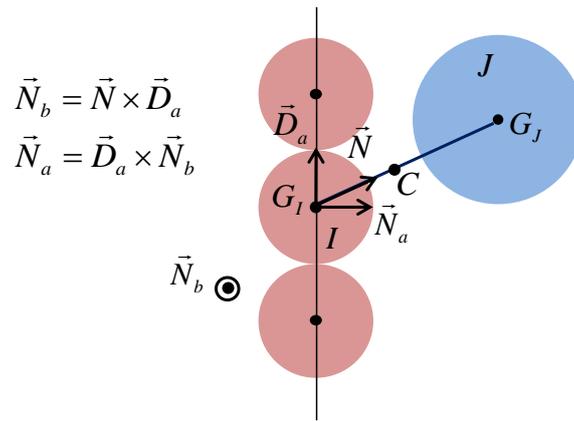


Figure 94 – Repère orthonormé local associé à la liaison acier-béton.

Comme pour les liaisons cohésives et celles de contact, on choisit un point C situé à égale distance des surfaces des deux éléments discrets de la liaison (équation (3.1)) et on y calcule les efforts d'interaction.

$$\vec{G_I C} = \left(R_I + \frac{1}{2} (\|\vec{G_I G_J}\| - (R_I + R_J)) \right) \vec{N} \quad (3.1)$$

Un ressort de raideur K_S (respectivement K_N) disposé selon le vecteur \vec{D}_a (respectivement \vec{N}_a) s'oppose au déplacement tangentiel u_s (resp. normal u_N) de l'élément discret béton par rapport à l'élément discret acier, ce qui permet de découpler les comportements normal et tangentiel de la liaison acier-béton (Figure 95-a). L'effort d'interaction est donc décomposé en un effort normal à la direction de l'armature \vec{F}_N (dirigé selon \vec{N}_a) et un effort tangentiel à la direction de l'armature \vec{F}_S (dirigé selon \vec{D}_a). La définition mathématique de ces différentes grandeurs est résumée par les équations :

$$\begin{aligned} u_N &= (\vec{N}^n - \vec{N}^0) \cdot \vec{N}_a^0 & u_S &= (\vec{N}^n - \vec{N}^0) \cdot \vec{D}_a^0 \\ \vec{F}_N^n &= -K_N u_N \vec{N}_a^0 & \vec{F}_S^n &= -K_S u_S \vec{D}_a^0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les efforts ainsi définis sont calculés au point C et ensuite reportés (appliqués) sur les deux éléments discrets de la liaison avec des signes opposés (Figure 95-b).

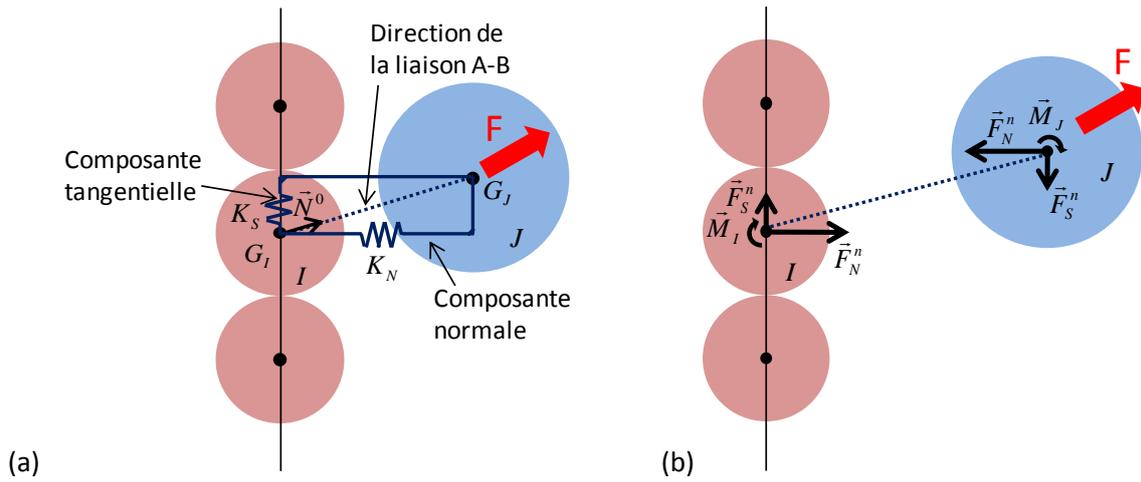


Figure 95 – Réaction de la liaison acier-béton au déplacement relatif des éléments.

Pour assurer l'équilibre de la liaison en rotation, les moments \vec{M}_I et \vec{M}_J résistants à ceux générés par les efforts \vec{F}_N^n et \vec{F}_S^n sont appliqués sur ces éléments :

$$\vec{M}_I = -\vec{G}_I\vec{C} \times (\vec{F}_S^n + \vec{F}_N^n); \quad \vec{M}_J = \vec{G}_J\vec{C} \times (\vec{F}_S^n + \vec{F}_N^n) \quad (3.3)$$

3.2.2 Prise en compte du changement de direction de l'armature

En analysant l'équation (3.2) on constate que pour déterminer les déplacements et les efforts d'interaction normal et tangentiel, la direction de l'armature à l'instant initial \vec{D}_a^0 est utilisée. Or pour une structure soumise à un impact sévère, les armatures situées dans la zone d'impact peuvent être fortement déformées par rapport à leur état initial. Il faut donc prendre en compte le changement de direction des armatures au cours du temps. Nous avons modifié le modèle initial de manière à actualiser les vecteurs \vec{D}_a et \vec{N}_a à chaque pas du calcul, ce qui permet de réactualiser le repère local à la liaison (Figure 94) et calculer correctement u_S et \vec{F}_S^n , et u_N et \vec{F}_N^n :

$$\begin{aligned} u_N &= (\vec{N}^n - \vec{N}^0) \cdot \vec{N}_a^n & u_S &= (\vec{N}^n - \vec{N}^0) \cdot \vec{D}_a^n \\ \vec{F}_N^n &= -K_N u_N \vec{N}_a^n & \vec{F}_S^n &= -K_S u_S \vec{D}_a^n \end{aligned}$$

Nous avons testé l'effet de cette correction sur un problème d'impact simple où une poutre en béton sur deux appuis renforcée par quatre armatures longitudinales est impactée en son milieu par un projectile parallélépipédique rigide (Figure 96).

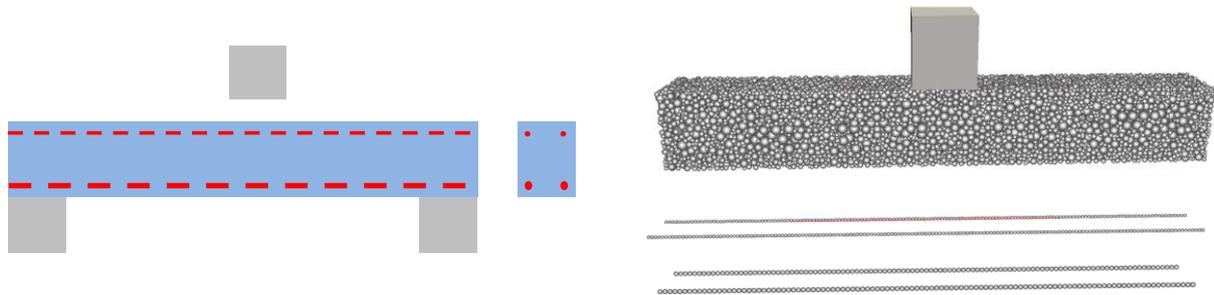


Figure 96 – Schéma du problème et maillage éléments discrets de la poutre et des armatures.

Les résultats du calcul montrent que le problème d'éjection généralisée des éléments discrets béton des bords de la poutre loin de la zone impactée est corrigé par cette modification (Figure 97-a).

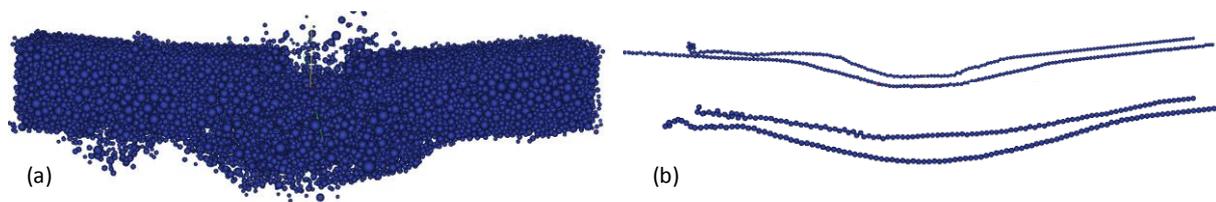


Figure 97 – Vue de la poutre et des armatures à la fin du calcul.

On constate cependant un comportement anormal des extrémités des armatures dans la partie gauche de la poutre (Figure 97-b), qui s'enroulent sur elles-mêmes.

Etant donné la complexité de la modélisation de la poutre et des phénomènes physiques non linéaires mis en jeu (endommagement du béton, grandes déformations) qui rendent délicate l'identification de la cause de l'instabilité, nous avons simulé un cas beaucoup plus simple dans lequel le béton et les armatures ne sont pas censés se déformer. Un cube de béton comportant une seule armature est soumis à l'instant initial à une vitesse de translation verticale V_0 (Figure 98).

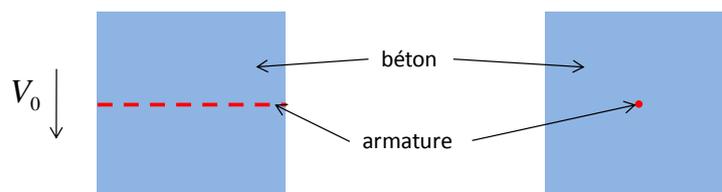


Figure 98 – Schéma du volume dans l'étude d'une translation de corps rigide.

On constate (voir Figure 99) que l'instabilité apparaît sur l'armature au cours de son déplacement et que le modèle s'endommage très vite conduisant à une rupture totale de la liaison acier-béton. On peut en conclure que le modèle initial ne respecte pas le mouvement de corps rigide, ce qui nécessite une investigation plus poussée de l'origine de cette défaillance.

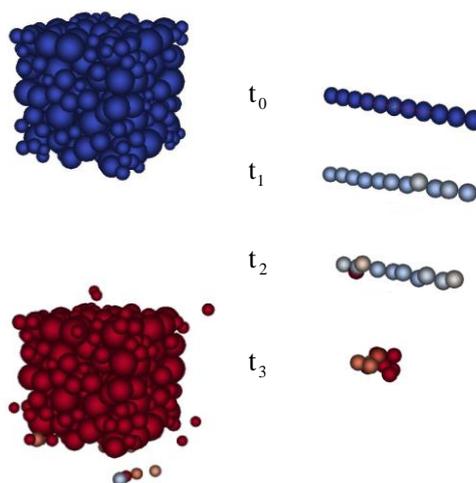


Figure 99 – Etats du béton et de l'armature à des instants successifs du calcul.

3.2.3 Etude de l'équilibre de la liaison acier-béton

Pour pouvoir faire une étude approfondie de l'évolution des efforts d'interaction au sein de la liaison acier-béton au cours du temps, nous avons créé un modèle encore plus simple appelé modèle 8-billes. La configuration choisie (Figure 100 à gauche) est composée d'une rangée d'éléments discrets acier modélisant une armature (éléments 1 à 4) et d'une rangée d'éléments discrets béton (éléments 5 à 8), reliées entre elles par des liaisons acier-béton. On applique à ce modèle une vitesse de translation initiale V_0 selon l'axe y . Le modèle se déplace mais s'endommage, les éléments discrets béton étant rapidement éjectés (Figure 100 à droite). On constate aussi que les liens cohésifs entre les éléments acier restent intègres et ces derniers toujours alignés, ne présentant pas d'effet d'enroulement. Ceci est probablement dû au fait qu'il y a beaucoup moins de liaisons acier-béton dans ce petit modèle que dans le modèle précédent où l'armature était totalement enrobée par le béton.

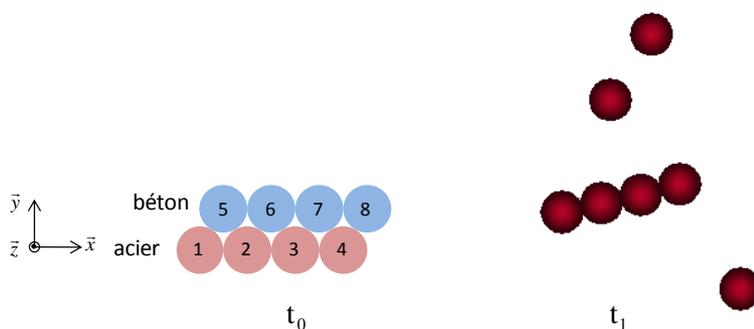


Figure 100 – Modèle 8-billes à l'instant initial et à un instant du calcul.

Si on ré-analyse le modèle de Rousseau et notamment les équations (3.3), on constate que les moments supplémentaires sont appliqués selon l'axe z sur les éléments discrets de ce petit modèle dans le but d'assurer l'équilibre des liens A-B en rotation. Cependant, le modèle de liaison considéré détermine les efforts d'interaction uniquement à partir des déplacements de translation relatifs des centres des deux éléments discrets de la liaison, autrement dit uniquement si la liaison est comprimée ou tendue, sans prendre en considération leurs rotations. Par ailleurs, aucune raideur en rotation n'est définie. Ceci est donc différent de la méthode de calcul des efforts d'interaction des liens cohésifs et de contact, issue, elle, de la mécanique des milieux granulaires, dans laquelle on considère les propriétés géométriques et cinétiques des éléments en calculant leur vitesse relative au point de contact, seuls leurs centres sont pris en compte dans ce modèle pour calculer les efforts d'interaction qui sont donc appliqués directement sur ces points. Dans le cas de la liaison A-B, il n'y a pas d'effort d'interaction qui est déterminé et exercé au point C , donc les moments calculés par les équations (3.3) devraient être nuls. On peut donc dire que le modèle de Rousseau devrait se comporter comme une barre en traction-compression attachée aux centres des éléments acier et béton par des liaisons rotules (Figure 101). Les rotations de ces éléments devraient donc être libres du point de vue de la liaison acier-béton. Par conséquent, appliquer des moments sur les éléments discrets ne permet pas d'assurer l'équilibre de la liaison en rotation. Les moments définis par les équations (3.3) et appliqués sur les éléments discrets béton et acier dans le modèle initial font tourner ces éléments inutilement et perturbent leur équilibre en rotation. En effet, ces éléments doivent être en équilibre par rapport à leurs voisins de même nature par le biais de liens cohésifs qui, eux, prennent en compte les rotations, grâce à la vitesse de glissement relative dans la méthode de

Hart (Hart et al., 1988), et à la raideur de roulement définie dans la LTM (Plassiard, 2007). Il se trouve, finalement, que les liens cohésifs acier-acier (ayant une composante en rotation) transmettent ces moments artificiels à tous les éléments discrets de l'armature, ce qui perturbe considérablement son comportement et explique son enroulement.

L'application de moments serait justifiée si on ajoutait une raideur en rotation à la liaison acier-béton, mais cela introduirait un couplage entre les deux composantes normale et tangentielle. Par ailleurs, on se rend compte que l'on ne peut pas non plus assurer l'équilibre en rotation d'une barre (Figure 101 à droite) en rajoutant des forces supplémentaires car cela rendrait le modèle non fonctionnel. Ce modèle de liaison acier-béton ne peut donc pas être équilibré en rotation. Face à cet inconvénient, nous proposerons dans la section suivante un nouveau modèle dans lequel la conservation des moments est satisfaite.

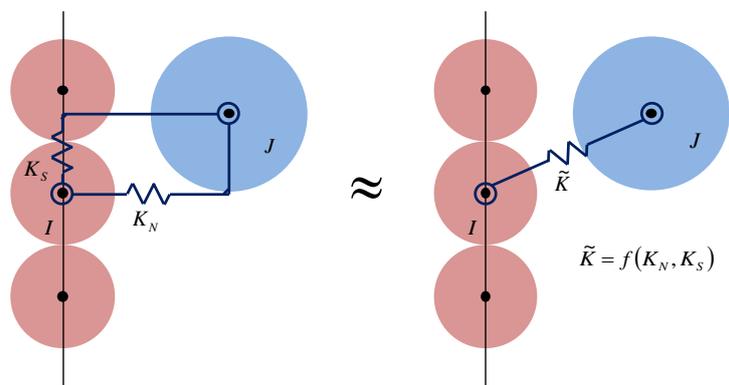


Figure 101 – Modélisation de la liaison A-B par le modèle de Rousseau (à gauche) et analogie avec une barre (à droite).

Après la découverte de l'effet nocif des moments supplémentaires, nous avons relancé les deux simulations présentées sur la Figure 98 et la Figure 100, en désactivant l'application des moments dans la liaison acier-béton. Dans les deux cas, on constate que les modèles se translatent à la vitesse initialement imposée et conservent parfaitement leur intégrité. Il en est de même pour le modèle 8-billes soumis à un effort désaxé de manière à imposer un mouvement de rotation du modèle. En présence des moments le modèle se désintègre (Figure 102-a), alors que lorsqu'on les désactive, le modèle tourne sur lui-même en conservant pleinement son intégrité (Figure 102-b).

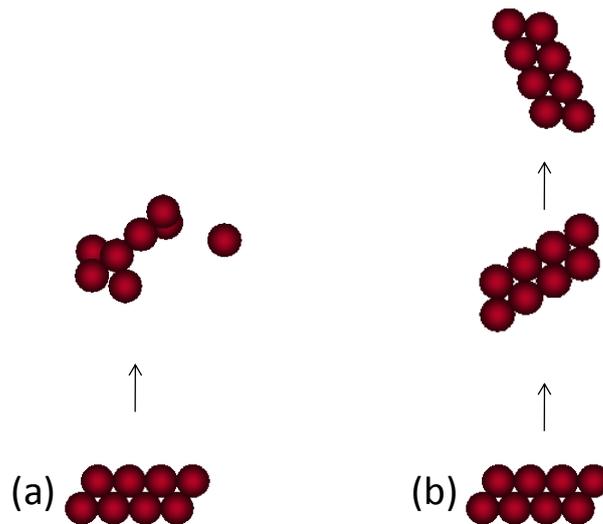


Figure 102 – Le modèle 8-billes en rotation : avec moments activés (a) et désactivés (b).

Sur la simulation de la poutre en béton armé soumise à un impact le fait de désactiver ces moments dans la liaison acier-béton améliore notablement la solution : on comparera la Figure 103 à la Figure 97-b. Néanmoins, on constate l'amorçage d'une rotation aux extrémités des armatures supérieures car l'équilibre de la liaison en rotation n'est toujours pas respecté.



Figure 103 – Vue des armatures à la fin du calcul.

3.3 Nouveau modèle de liaison A-B en modélisation ED

3.3.1 Caractéristiques générales

Face aux constats de la section précédente, nous cherchons à créer un autre modèle de liaison acier-béton qui serait équilibré à la fois en translation et en rotation et qui conserverait l'avantage principal du modèle de Rousseau : le découplage des efforts normaux et tangentiels et donc des lois de comportement respectives. On cherche aussi à conserver ses acquis - les propriétés mécaniques du modèle qui ont fait leurs preuves - et les mêmes expressions des raideurs locales et des lois de comportement non linéaires. Comme le modèle de Rousseau, ce nouveau modèle s'appuie sur la modélisation par éléments discrets du béton et des armatures.

Le nouveau modèle fait intervenir non plus deux mais trois éléments discrets : la liaison s'appuie sur un élément discret béton et deux éléments discrets acier qui encadrent directement la projection de l'élément béton sur l'armature (Figure 104). Pour illustrer les propos, la Figure 104 montre un

maillage 2D en éléments discrets avec des liaisons cohésives béton-béton et acier-acier (en traits fins) et des liaisons acier-béton du nouveau modèle (en traits épais basés sur un trait en pointillés). On montre un zoom sur la liaison acier-béton faisant intervenir les éléments i_1 , i_2 et j (Figure 104 à droite). Il est important de préciser que le lien acier-acier entre les éléments i_1 et i_2 et la liaison acier-béton, créée avec notre modèle et basée sur ces éléments, sont totalement indépendants, la liaison acier-béton étant attachée à un point géométrique situé sur l'axe de l'armature entre deux éléments discrets acier.

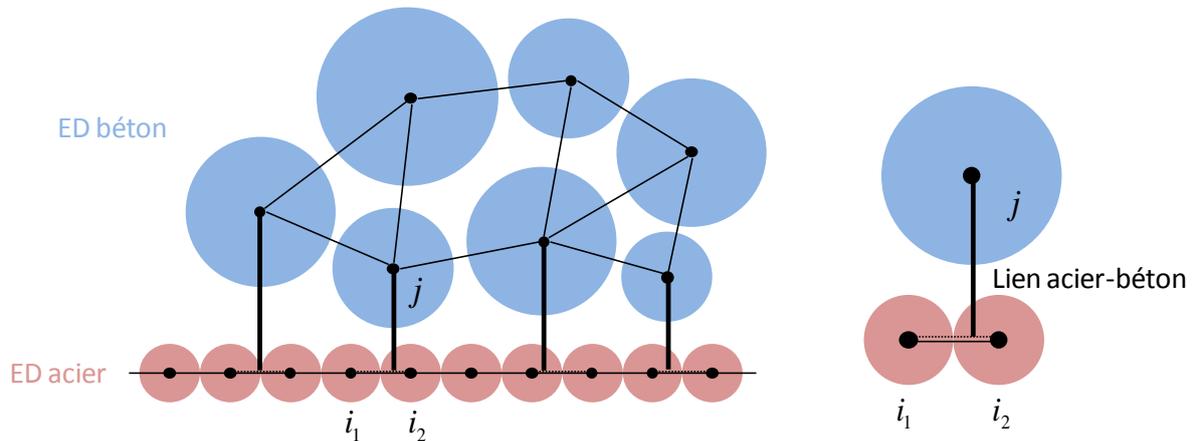


Figure 104 – Exemple de liaisons acier-béton dans un maillage éléments discrets selon le nouveau modèle.

3.3.2 Calcul des efforts d'interaction

Pour exposer le calcul des efforts d'interaction dans le nouveau modèle, on considère la liaison acier-béton créée entre les éléments i_1 , i_2 et j et illustrée sur la Figure 104 à droite. Comme dans le modèle de Rousseau, la nouvelle liaison contient une composante normale et une composante tangentielle à l'armature. Ces deux composantes sont assimilées à deux ressorts indépendants : un ressort normal et un ressort tangentiel qui se trouvent et agissent toujours dans le plan passant par les centres des trois éléments discrets impliqués.

3.3.2.1 Composante normale

Pour introduire la composante normale de la liaison, on considère le cas où l'élément béton est sollicité par une force qui le rapproche de l'armature. L'objectif de la liaison acier-béton est de s'opposer à cette sollicitation en exerçant un effort de répulsion sur les trois éléments qu'elle relie (Figure 105).

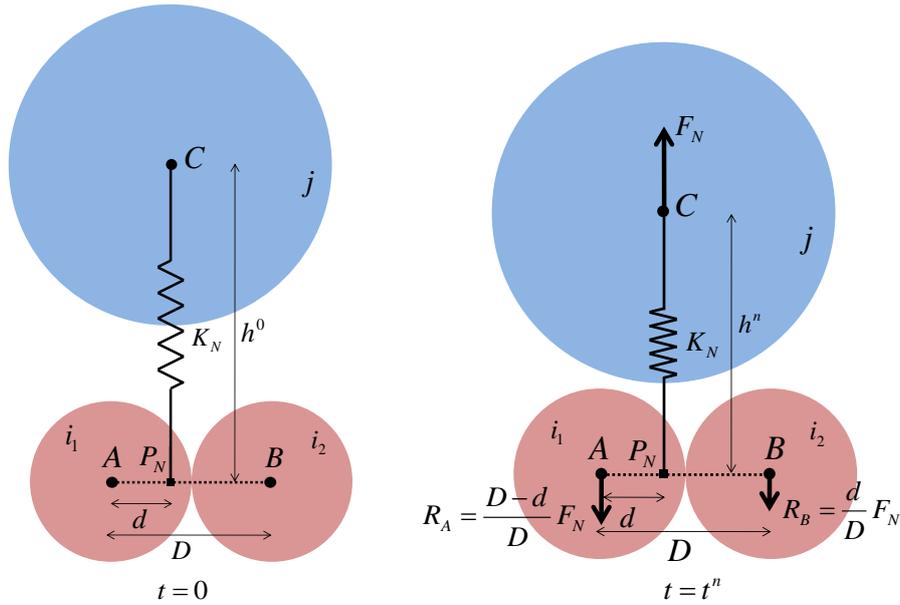


Figure 105 – Equilibre de la composante normale de la liaison acier-béton à l’instant initial (à gauche) et après la déformation (à droite).

Nous définissons tout d’abord le point P_N , point de projection orthogonale de l’élément béton j sur le segment reliant les centres des éléments acier i_1 et i_2 (les points A et B respectivement). Ce point servira à calculer à chaque instant la distance du point C (centre de l’élément j) au segment AB . L’effort de rappel du ressort de raideur K_N , qui s’oppose au rapprochement entre l’élément béton et l’armature, se calcule à partir de la variation de la longueur h^n du lien normal à l’instant courant t^n par rapport à sa longueur initiale h^0 .

$$F_N = -K_N(h^n - h^0)$$

Cet effort est appliqué en chacune des extrémités du ressort représentant la composante normale de la liaison, à savoir au centre de l’élément béton j et au point P_N . Ce dernier étant fictif, l’effort en ce point est réparti sur les éléments acier i_1 et i_2 . Cette opération se fait en écrivant l’équilibre des forces et des moments appliqués aux points A , B et C :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{int}} &= 0 \Leftrightarrow F_N - R_A - R_B = 0 \\ \sum \vec{M}_{\text{int}}^A &= \vec{0} \Leftrightarrow dF_N - DR_B = 0 \\ \sum \vec{M}_{\text{int}}^B &= \vec{0} \Leftrightarrow -(D-d)F_N + DR_A = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Après résolution de ce système, nous obtenons les efforts qui s’exercent sur les éléments acier pour que la composante normale de la liaison soit équilibrée en translation et en rotation.

$$R_A = \frac{D-d}{D} F_N ; \quad R_B = \frac{d}{D} F_N \quad (3.5)$$

Il est à noter que si l’élément béton se déplace parallèlement à l’armature, le point P_N glisse le long du segment AB . Cela ne modifie pas la valeur de la force \vec{F}_N appliquée à l’élément béton. En revanche, la répartition des forces R_A et R_B appliquées sur les éléments acier sera modifiée en accord avec la formule (3.5).

On notera aussi que l'application des formules (3.4) et (3.5) garantit que la composante normale de la liaison sera toujours équilibrée en translation et en rotation.

3.3.2.2 Composante tangentielle

On considère le cas où l'élément discret béton se déplace le long de l'armature (Figure 106). A l'instant courant t^n , cet élément s'est déplacé le long de l'armature pour se rapprocher de l'élément i_2 . Le ressort de la composante tangentielle de raideur K_S s'oppose à ce déplacement.

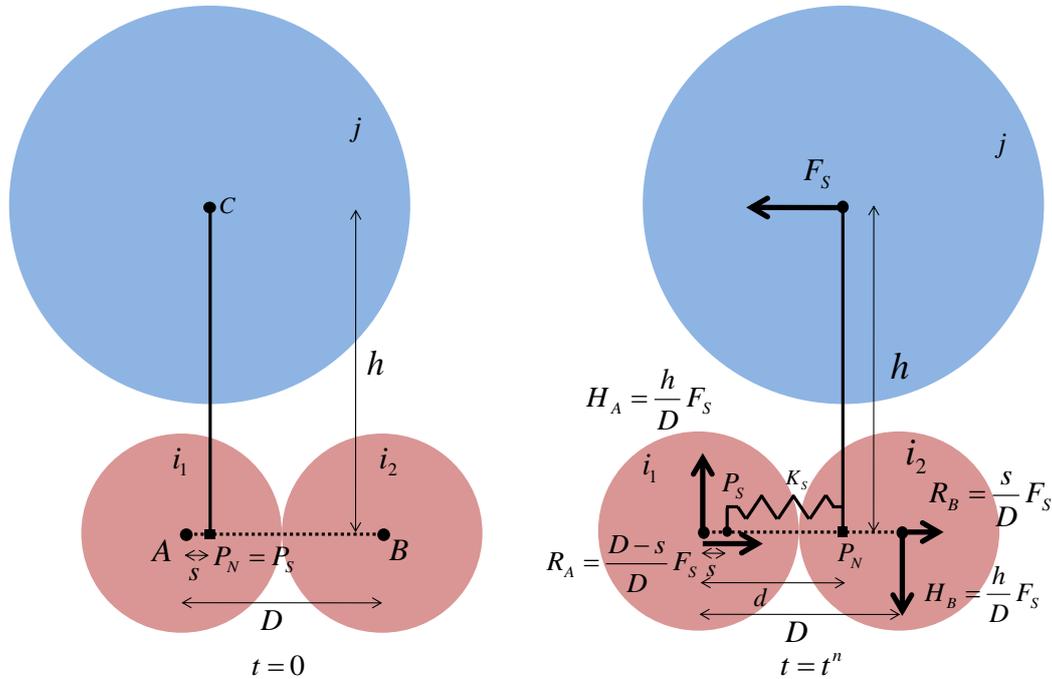


Figure 106 – Equilibre de la composante tangentielle de la liaison acier-béton à l'instant initial (à gauche) et après la déformation (à droite).

Pour mesurer ce déplacement, nous définissons le point P_S , qui est la projection de l'élément béton sur le segment AB à l'instant initial. Contrairement au point P_N qui peut se déplacer sur le segment AB car il indique à chaque instant la projection de l'élément béton sur ce segment, le point P_S reste fixe par rapport aux points A et B . Néanmoins, si le segment AB change de longueur lors de la déformation de l'armature, on repositionne le point P_S de manière à ce que le rapport des longueurs des segments AP_S et BP_S reste constant. Avec le point P_S nous pouvons calculer l'effort de rappel du ressort de la composante tangentielle :

$$F_S = -K_S(d - s)$$

L'effort F_S est appliqué aux deux extrémités de la composante tangentielle : au centre de l'élément béton et au point P_S . Ce point étant fictif sur l'armature, l'effort tangentiel est réparti sur les éléments acier i_1 et i_2 selon les poids inversement proportionnels aux distances séparant la force et les points A et B :

$$R_A = \frac{D - s}{D} F_S ; \quad R_B = \frac{s}{D} F_S$$

On se rend compte que, contrairement à la composante normale, les forces de la composante tangentielle ne sont pas équilibrées en rotation. Pour corriger cela, nous écrivons l'équilibre des

3.3 Nouveau modèle de liaison A-B en modélisation ED

moments en y introduisant deux forces supplémentaires H_A et H_B colinéaires avec la direction du lien normal :

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_{\text{int}}^A &= \vec{0} \Leftrightarrow hF_S - DH_B = 0 \\ \sum \vec{M}_{\text{int}}^B &= \vec{0} \Leftrightarrow hF_S - DH_A = 0 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$H_A = \frac{h}{D} F_S; \quad H_B = \frac{h}{D} F_S$$

Avec ces forces supplémentaires l'équilibre de la composante tangentielle en rotation est assuré sans appliquer de moments sur les éléments, ce qui est cohérent avec notre modèle qui ne prend pas en compte les rotations relatives entre les éléments de la liaison.

3.3.2.3 Test du mouvement de corps rigide

Pour tester le modèle de liaison proposé, nous avons repris les calculs sur les petits modèles soumis à une vitesse initiale (Figure 98, Figure 100 et Figure 102). Cette fois-ci nous reproduisons parfaitement leur mouvement de corps rigide.

3.3.3 Validation du modèle proposé en élasticité linéaire

Même si pour ce nouveau modèle nous avons gardé les expressions des raideurs et des lois de comportement non linéaires du modèle initial, il nous semble important de vérifier qu'il ne génère pas d'instabilités et qu'il permet de retrouver le bon comportement de flexion statique et dynamique d'une structure simple en élasticité linéaire, avant de l'appliquer à la simulation de problèmes non linéaires. On montre dans cette section les résultats de quelques cas-tests simples permettant de qualifier le modèle ED dans le régime élastique linéaire.

3.3.3.1 Poutre en flexion quasi-statique

On considère une poutre simplement appuyée constituée de béton renforcé par une armature longitudinale. La poutre est mince et sa section est constante (Figure 107).

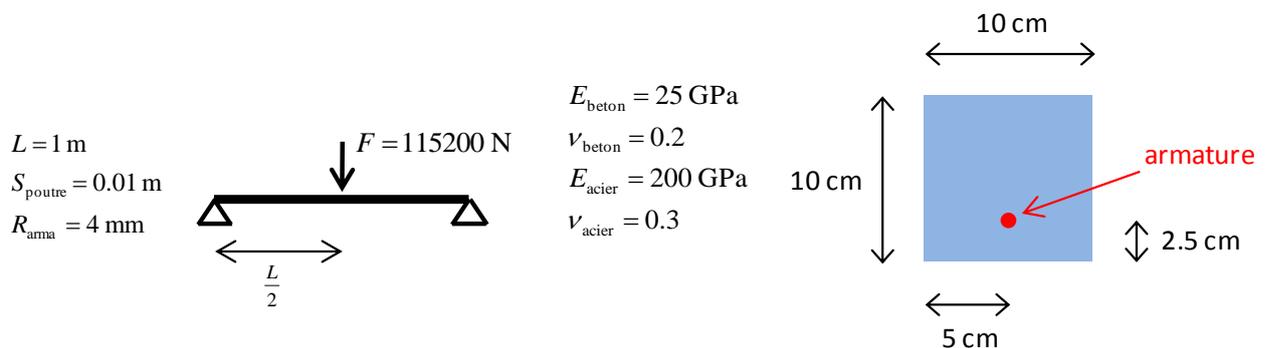


Figure 107 – Schéma du problème étudié : poutre sur deux appuis (à gauche) et détail de sa section (à droite).

Le béton, l'acier et l'interface acier-béton ont ici un comportement élastique. Avec ces hypothèses, la valeur du déplacement de flexion au milieu de la poutre est donnée par la formule :

$$y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{FL^3}{48EI} \approx 11.23 \text{ mm}$$

Dans cette formule nous avons tenu compte de la présence de l'armature dans le béton dans les paramètres E et I , désignant respectivement le module de Young et l'inertie homogénéisés.

Pour étudier l'influence de la finesse de la discrétisation, deux maillages de finesse différentes de la poutre ont été créés (Figure 108). Le premier maillage ED a été généré à partir d'un maillage EF qui avait 2 tétraèdres par côté de la section de la poutre. Ce maillage plutôt grossier permet de vérifier qualitativement le comportement de l'armature et de voir s'il n'y a pas d'instabilités qui apparaissent. Pour le deuxième maillage ED, le maillage EF initial de la poutre comportait 4 tétraèdres par côté de sa section. Il s'agit de la finesse recommandée au Chapitre 2 pour que le modèle ED béton soit représentatif du comportement macroscopique de ce matériau.

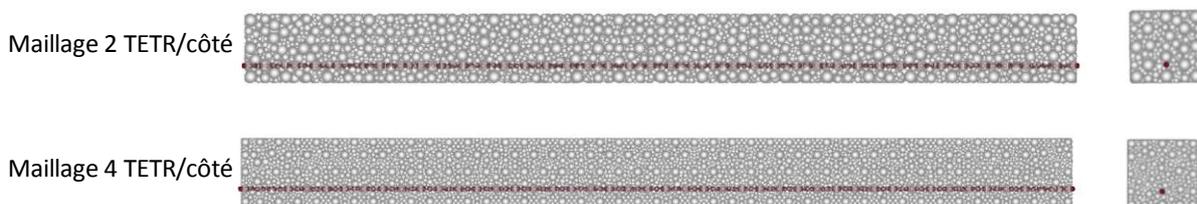


Figure 108 – Maillages éléments discrets de la poutre étudiée.

Les calculs avec EUROPLEXUS ont été réalisés ici sans ajout d'amortissement, ce qui conduit à une solution qui oscille autour de la position d'équilibre statique. Dans le calcul, la poutre est simplement posée sur deux supports de forme cubique.

On constate sur la Figure 109 (à gauche) que pour les deux maillages les extrémités de l'armature restent bien droites dans le béton. L'approximation de la flèche de la poutre s'améliore quand on raffine le maillage (Figure 109 à droite). La simulation effectuée avec le maillage 4 TETR/côté donne une très bonne approximation de la valeur moyenne de la flèche de la poutre (équation (3.6)), ce qui permet de valider en flexion statique le critère sur la finesse du maillage.

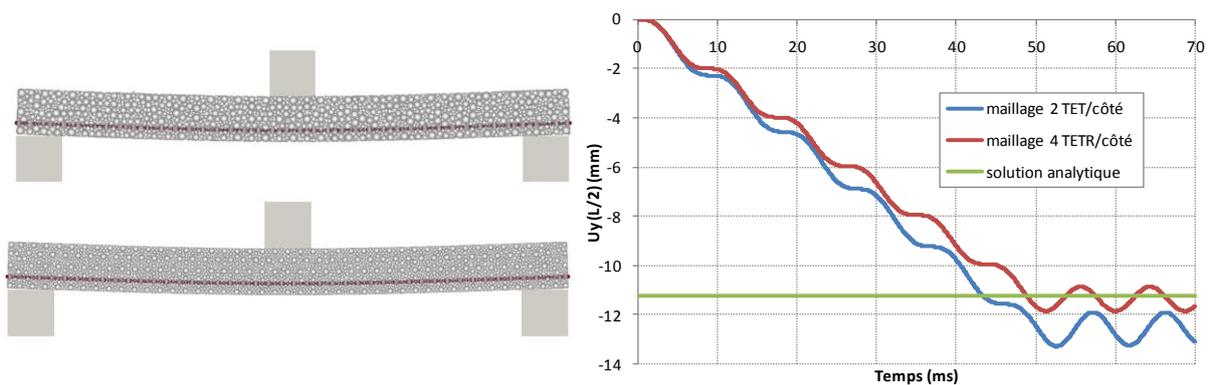


Figure 109 – Etat fléchi de la poutre (à gauche) et évolution de la flèche au cours du temps pour chaque maillage (à droite).

$$y\left(\frac{L}{2}\right)_{\text{moy}} \approx 11.4 \text{ mm} \quad (3.6)$$

3.3.3.2 Flexion dynamique

La même poutre que précédemment, dont on a encastré les extrémités pour éviter les rebonds (Figure 110), est soumise ici à un pic d'effort au début du calcul, puis laissée libre afin d'observer ses vibrations. Tous les autres paramètres sont repris de la modélisation de la poutre en flexion statique.

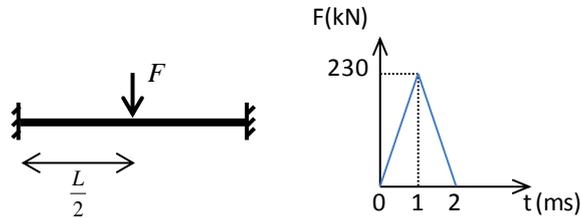


Figure 110 – Poutre en flexion encastrée à ses extrémités (à gauche) et chargement appliqué (à droite.).

Compte tenu des hypothèses retenues, la valeur analytique de la pulsation du premier mode propre est donnée par la formule :

$$\omega = 4.73^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \approx 2119.348 \text{ rad/s}$$

On en déduit la valeur de la période du premier mode propre :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2.965 \text{ ms}$$

L'évolution de la flèche au cours du temps dans le calcul est montrée sur la Figure 111. On constate que les vibrations libres de la poutre s'entretiennent après la fin du chargement. Notre modèle de liaison acier-béton ne dissipe donc pas d'énergie au cours du temps. La valeur de la période calculée à partir de la solution transitoire sur la courbe de déplacement pour la poutre maillée grossièrement (courbe bleue) est 3.29 ms, ce qui fait une erreur relative de 11.4 % par rapport à la solution analytique. Pour la poutre maillée avec 4 tétraèdres par côté, la période calculée est 3.125 ms, ce qui fait une erreur relative de 5.9%. La valeur de la période du premier mode propre de la poutre donnée par les simulations se rapproche bien de la valeur analytique à mesure que la finesse du maillage augmente. Le critère sur la finesse du maillage proposé au chapitre 2 permet donc d'avoir une bonne approximation de la première période propre des oscillations d'une poutre en régime élastique linéaire.

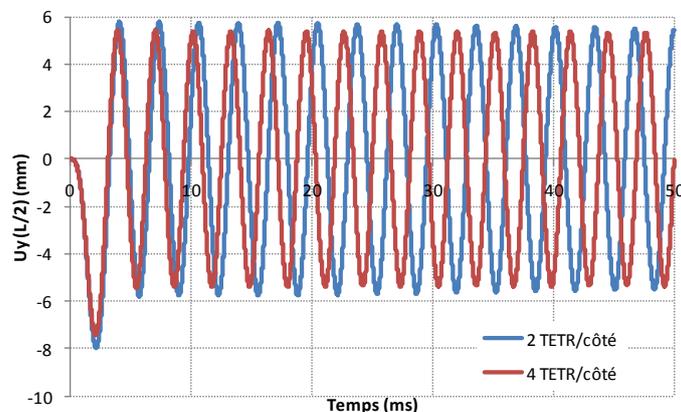


Figure 111 – Evolution de la flèche de la poutre pour chaque maillage.

3.3.3.3 Poutre soumise à un impact

Dans l'étude de la poutre en flexion dynamique, exposée au 3.3.3.2, on a encasté les extrémités de la poutre, donc il n'était pas possible de vérifier si l'instabilité pouvait se développer aux extrémités de l'armature en présence de fortes vibrations. Ici nous libérons la poutre et la soumettons à l'impact d'un projectile rigide en son milieu (Figure 112) pour observer le comportement de l'armature en présence d'un chargement dynamique.

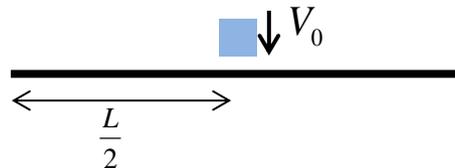


Figure 112 – Schéma d'une poutre libre soumise à un impact.

La Figure 113 montre l'état du modèle à l'instant initial et après sa translation. On constate que la poutre se translate en vibrant tout en gardant son intégrité. Les extrémités de l'armature restent bien droites dans le béton. Notre modèle de liaison acier-béton ne génère aucune instabilité en élasticité linéaire.

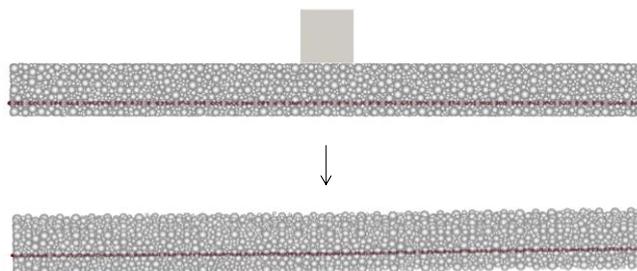


Figure 113 – Etat de la poutre à l'instant initial et à l'instant final du calcul.

3.3.4 Etude du modèle en non linéaire

Nous cherchons maintenant à simuler avec notre modèle le cas de la poutre en béton armé soumise à un impact très endommageant pour vérifier qualitativement le comportement du modèle dans des conditions extrêmes, et notamment pour contrôler sa stabilité numérique. Le béton a un comportement non linéaire décrit par le modèle présenté au chapitre 2, et pour notre modèle de liaison acier-béton nous utilisons les lois non linéaires proposées par Rousseau dans sa thèse. Le maillage de la poutre est le même que celui utilisé pour l'étude de la flexion de la poutre en quasi-statique en élasticité linéaire.

En visualisant séparément l'état du béton et de l'armature après l'impact (Figure 114-a), on constate la fracturation du béton sous le projectile, mais on voit aussi que les éléments discrets béton ne sont éjectés que dans la zone de l'impact, ce qui montre que l'instabilité du modèle initial est éliminée. Cependant, on voit sur la Figure 114-b que l'extrémité droite de l'armature s'est totalement arrachée du béton et s'est enroulée sous l'action de ce chargement sévère, malgré le fait que l'équilibre en rotation de notre modèle soit a priori assuré.

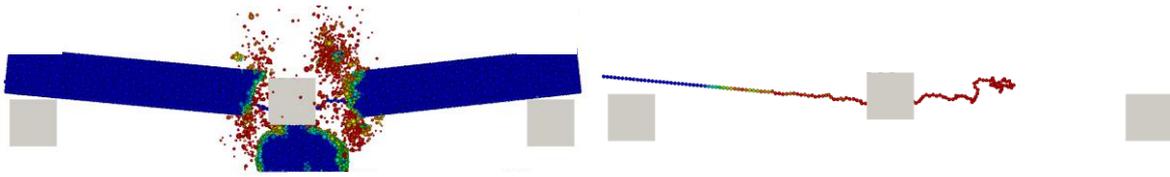


Figure 114 – (a) Endommagement du béton et (b) de l'armature.

Pour élucider ce problème, nous avons étudié la méthode de calcul des forces d'interaction dans les liaisons cohésives acier-acier, puisqu'on voit que l'enroulement de l'armature continue après la rupture de la liaison acier-béton. Tout comme les liens béton-béton, ce sont des liens cohésifs, donc on utilise la méthode proposée par Hart (Hart et al., 1988) pour calculer les efforts d'interaction dans ces liens. Nous nous sommes intéressés en particulier aux formules de première et seconde rotation proposées par Hart pour déplacer le vecteur de l'effort tangentiel cumulé dans le plan de contact à l'instant courant :

$$\vec{F}_S^{R1,n} = \vec{F}_S^n - \vec{F}_S^n \times (\vec{n}^n \times \vec{n}^{n+1}) \quad (3.7)$$

Devant exprimer une rotation, l'équation (3.7) ne devrait changer que la direction de \vec{F}_S^n entre les instants t^n et t^{n+1} , sa norme et son orthogonalité par rapport au vecteur normal au plan de contact \vec{n} devraient être conservées, ce qui peut être formalisé comme suit :

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_S^{R1,n}\| &= \|\vec{F}_S^n\| \\ \vec{F}_S^{R1,n} \cdot \vec{n}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

On a vu dans la section précédente que sous les chargements modérés le modèle amélioré restait stable, ce qui prouve que la formule de rotation (3.7) permet de satisfaire approximativement les conditions données par l'équation (3.8) lorsque le changement de direction de \vec{n} est très petit. Cela n'est pas toujours le cas notamment pour les liaisons entre les éléments acier quand l'armature est modélisée aussi en éléments discrets et que le chargement devient important conduisant à des grandes déformations.

Pour mettre en évidence la véritable nature de la transformation effectuée par l'équation (3.7), nous proposons de l'appliquer sur un exemple numérique simple dans lequel le vecteur \vec{n} change fortement entre les instants t^n et t^{n+1} (Figure 115).

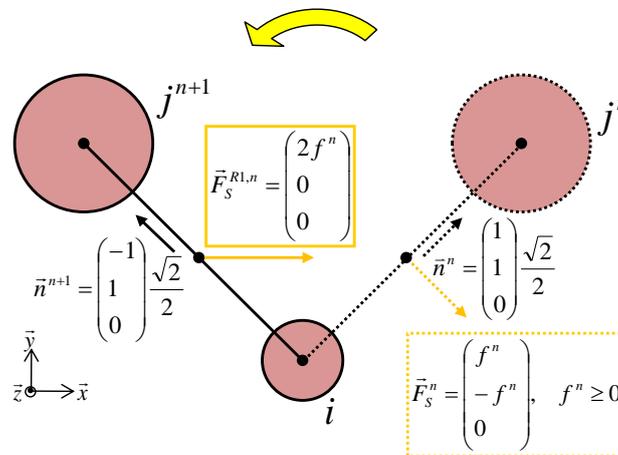


Figure 115 – Schéma de la transformation réalisée par l'équation 3.7 sur \vec{F}_S^n .

Nous supposons ici que l'élément i ne bouge pas entre ces deux instants, alors que l'élément j effectue un mouvement de rotation autour de l'élément i entre les instants t^n et t^{n+1} .

On calcule d'abord le produit vectoriel entre les vecteurs \vec{n}^n et \vec{n}^{n+1} :

$$\vec{n}^n \times \vec{n}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et ensuite le produit vectoriel entre l'effort tangentiel cumulé \vec{F}_S^n et ce vecteur :

$$\vec{F}_S^n \times (\vec{n}^n \times \vec{n}^{n+1}) = \begin{pmatrix} f^n \\ -f^n \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f^n \\ -f^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

La première rotation de l'effort tangentiel cumulé s'écrit alors :

$$\vec{F}_S^{R1,n} = \vec{F}_S^n - \vec{F}_S^n \times (\vec{n}^n \times \vec{n}^{n+1}) = \begin{pmatrix} f^n \\ -f^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -f^n \\ -f^n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate que les propriétés de la rotation pure, exprimées par les équations (3.8), ne sont pas respectées :

$$\begin{aligned} \|\vec{F}_S^{R1,n}\| &= 2f^n; \quad \|\vec{F}_S^n\| = f^n\sqrt{2} \Rightarrow \|\vec{F}_S^{R1,n}\| \neq \|\vec{F}_S^n\| \\ \vec{F}_S^{R1,n} \cdot \vec{n}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2f^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} = -f^n\sqrt{2} \neq 0 \end{aligned}$$

En fait, la norme de $\vec{F}_S^{R1,n}$ est supérieure à celle de \vec{F}_S^n , et $\vec{F}_S^{R1,n}$ n'est pas contenu dans le plan de contact fictif à l'instant t^{n+1} . Le vecteur $\vec{F}_S^{R1,n}$ a donc une composante non nulle dirigée suivant le vecteur \vec{n}^{n+1} , ce qui se traduit à chaque pas de temps par l'ajout d'un effort supplémentaire dans la direction normale au plan de contact qui vient perturber cette composante de chaque liaison cohésive acier-acier.

Nous avons donc décidé de modifier le calcul de la première rotation afin de respecter la condition 3.8. Pour cela, on s'appuie sur deux repères que l'on construit à l'aide d'opérations géométriques. On définit le vecteur normal unitaire au plan de rotation \vec{n}_p :

$$\vec{n}_p = \frac{\vec{n}^n \times \vec{n}^{n+1}}{\|\vec{n}^n \times \vec{n}^{n+1}\|}$$

Ensuite nous construisons les vecteurs unitaires \vec{n}_t^n et \vec{n}_t^{n+1} , respectivement orthogonaux à \vec{n}^n et à \vec{n}^{n+1} :

$$\begin{aligned} \vec{n}_t^n &= \vec{n}_p \times \vec{n}^n \\ \vec{n}_t^{n+1} &= \vec{n}_p \times \vec{n}^{n+1} \end{aligned}$$

Les vecteurs \vec{n}_p , \vec{n}_t^n et \vec{n}_t^{n+1} vont permettre de faire une rotation de \vec{F}_S^n au sens géométrique correct grâce à deux repères orthonormés directs (Figure 116) :

- le repère orthonormé $(\vec{n}^n, \vec{n}_t^n, \vec{n}_p)$ attaché à la liaison cohésive au temps t^n ,
- le repère orthonormé $(\vec{n}^{n+1}, \vec{n}_t^{n+1}, \vec{n}_p)$ attaché à la liaison cohésive au temps t^{n+1} .

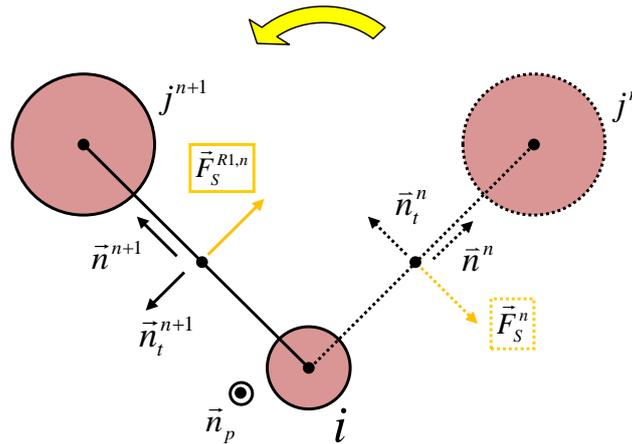


Figure 116 – Schéma des deux repères attachés à la liaison cohésive aux deux instants considérés.

Pour effectuer la rotation du vecteur \vec{F}_S^n , on conserve ses composantes suivant les vecteurs du repère $(\vec{n}^n, \vec{n}_t^n, \vec{n}_p^n)$, et on les applique aux vecteurs du repère orthonormé $(\vec{n}^{n+1}, \vec{n}_t^{n+1}, \vec{n}_p^{n+1})$:

$$\vec{F}_S^{R1,n} = (\vec{F}_S^n \cdot \vec{n}_t^n) \vec{n}_t^{n+1} + (\vec{F}_S^n \cdot \vec{n}_p^n) \vec{n}_p^{n+1}$$

On constate que la norme de \vec{F}_S^n est bien conservée lors de la rotation :

$$\|\vec{F}_S^{R1,n}\| = \left((\vec{F}_S^n \cdot \vec{n}_t^n)^2 + (\vec{F}_S^n \cdot \vec{n}_p^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\vec{F}_S^n\|$$

On voit aussi que le vecteur $\vec{F}_S^{R1,n}$ est bien orthogonal à \vec{n}^{n+1} car \vec{n}_t^{n+1} et \vec{n}_p^{n+1} le sont. La méthode géométrique présentée ici permet donc de faire tourner correctement le vecteur \vec{F}_S^n tout en vérifiant les propriétés de la rotation.

Le calcul de poutre sous impact endommageant a été relancé en prenant en compte la modification du calcul de $\vec{F}_S^{R1,n}$ (Figure 117). On voit que les éléments discrets rouges (partie centrale de l'armature) ont perdu tous les liens qui les reliaient aux ED béton à cause d'un impact sévère. En revanche, les liens A-B des ED bleus situés aux extrémités de l'armature restent sains, les extrémités de l'armature restent bien droites dans le béton aux bords de la poutre. La modification de la formule de la première rotation permet bien de supprimer complètement l'instabilité. On peut donc dire que le modèle de liaison proposé est a priori utilisable dans les calculs d'impact impliquant de grands mouvements de la matière.



Figure 117 – Vue de l'armature de la poutre à la fin du calcul.

Nous avons revisité également la formule de la seconde rotation proposée par Hart, que nous avons étendue aux grandes rotations. Cependant, cette modification n'a pas apporté d'amélioration notable pour le comportement de l'armature par rapport au résultat présenté sur la Figure 117. Les détails du calcul de généralisation de cette formule sont donc mis en annexe du mémoire.

3.3.5 Modélisation du ferrailage complexe

3.3.5.1 Modélisation des aciers par éléments discrets

La poutre en béton armé, étudiée dans la section précédente et ne comportant qu'une seule armature, est encore loin de représenter les poutres en béton armé utilisées dans des bâtiments réels ou étudiées lors des essais. En effet, dans la plupart des cas une poutre en béton armé contient plusieurs armatures longitudinales de diamètres différents, qui sont reliées par des armatures transversales comme des cadres, des épingles, etc. Formellement, la modélisation en éléments discrets alignés, que nous avons utilisée pour une seule armature, pourrait également s'appliquer après quelques modifications aux cas de figure où sont présentes plusieurs armatures longitudinales et transversales. Cependant, cette voie comporte plusieurs inconvénients que nous énumérons dans les paragraphes qui suivent.

3.3.5.1.1 Augmentation significative du coût de calcul

Les cadres et épingles sont souvent constitués des aciers lisses de faible diamètre, beaucoup plus petit que celui des aciers de flexion. Puisque la modélisation ED des armatures impose aux éléments discrets d'avoir le diamètre de la barre d'armature en question, il s'en suit le fait que ce sont les éléments discrets acier des armatures transverses qui piloteraient le pas de stabilité de tout le modèle numérique lors de l'intégration temporelle explicite, nécessitant de descendre à des pas de l'ordre d'une nanoseconde et rendant ainsi impossible la simulation de structures de taille industrielle à cause d'un temps de calcul prohibitif.

3.3.5.1.2 Augmentation significative de coût de fabrication de maillage

La création avec l'outil SpherePadder++ d'un maillage éléments discrets d'une structure de taille industrielle fortement ferrillée serait très coûteuse en temps : plusieurs dizaines de minutes, voire plusieurs heures à attendre en fonction de la complexité du ferrailage à modéliser. En outre, ces performances sont difficiles à améliorer car certaines étapes de l'algorithme de création du maillage ED de SpherePadder++ ne sont pas parallélisables.

3.3.5.1.3 Mauvaise maîtrise des propriétés de l'assemblage ED

La génération de maillage ED de la structure en béton armé passe par la création puis le remplissage des vides dans le maillage du béton dus à la suppression des ED béton pour pouvoir ajouter les éléments discrets représentant les armatures. En fonction des paramètres de SpherePadder++ et du rayon des armatures, ces vides peuvent être remplis plus ou moins bien lors de l'étape de densification du maillage ED. Il en résulte une hétérogénéité accrue du modèle éléments discrets puisque les « propriétés » de l'assemblage ED ne seront pas les mêmes à proximité des armatures et dans les zones sans ferrailage. D'où un comportement mécanique mal maîtrisé du modèle final.

3.3.5.1.4 Difficulté de connexion mécanique des différents types d'acier

Dans la réalité, les armatures transversales servent à reprendre une partie des efforts de cisaillement qui s'exercent sur la poutre, et à empêcher les armatures longitudinales de glisser. Les cadres sont attachés ou soudés aux aciers longitudinaux, ce qu'il faut reproduire dans le modèle numérique. La Figure 118 montre trois façons de relier ces deux types d'armature en modélisation par éléments discrets. La solution (a) présente l'avantage de représenter physiquement la disposition de ces deux types d'armature conforme à la réalité, et de ne pas nécessiter de développements supplémentaires dans SpherePadder++, chaque armature pouvant être considérée comme indépendante. Cependant, il faut créer des liaisons acier-acier pour relier les ED des cadres et les ED des armatures

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

longitudinales, qui seraient représentatives du mode d'attache de ces armatures dans la poutre réelle étudiée (liaisons en vert). On peut aussi superposer les ED des cadres et des aciers longitudinaux pour éviter d'avoir à créer un nouveau type de liaison (Figure 118-b et Figure 118-c), mais cela demande une modification importante de SpherePadder++, et aussi un remaillage de l'armature car les éléments discrets des cadres sont décalés.

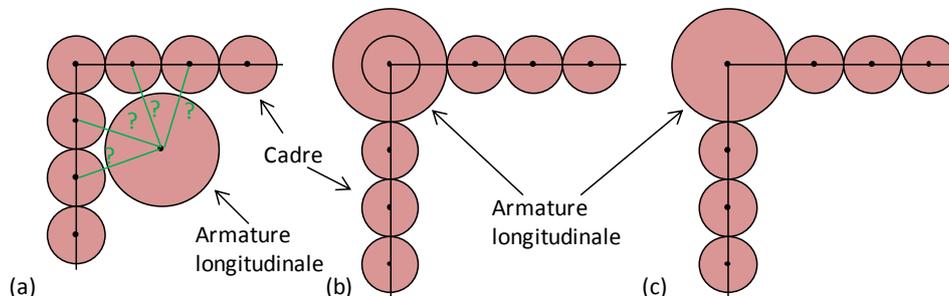


Figure 118 – Trois manières d'interconnecter les armatures longitudinales et transversales.

3.3.5.1.5 Granulométrie mal maîtrisée à l'interface armatures-béton

Un test simple dans SpherePadder++ a montré que, lors de la phase de densification, l'armature ED n'est pas assimilée à un cylindre (Figure 119) mais à une suite d'éléments discrets sphériques. Si on ne fait pas attention à la granulométrie des éléments discrets utilisés pour le béton et les aciers, il n'y aura pas de canal dans le béton permettant à l'acier de glisser après rupture des liens acier-béton car les éléments discrets de l'armature vont être retenus par les petits éléments du béton environnant. Avec un tel maillage, parler d'un modèle de liaison acier-béton avec une loi d'interaction découplée n'a plus de sens.

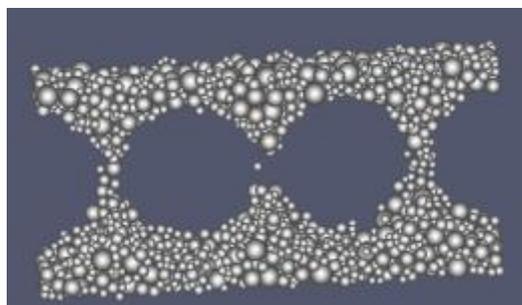


Figure 119 – Maillage ED mettant en évidence la nature de l'armature dans SpherePadder++.

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

Face aux inconvénients présentés, empêchant d'appliquer le modèle ED à la modélisation des structures industrielles fortement ferrillées, nous avons fait le choix de modéliser les armatures longitudinales et transversales en éléments finis de type poutre comme cela se fait dans les calculs éléments finis standards. Ce choix de modélisation mixte utilisant les éléments discrets pour le béton et les éléments finis pour les armatures présente plusieurs avantages :

- la création du maillage des armatures en éléments poutre peut être réalisée en utilisant les mêmes outils que pour les maillages classiques éléments finis,
- la liaison entre les armatures transversales et longitudinales est assurée par l'utilisation des nœuds communs, pratique courante lors de la construction des maillages éléments finis, ou

via une liaison acier-acier spécifique, disponible dans EUROPLEXUS, qui permet de relaxer la contrainte des nœuds coïncidents,

- le maillage ED du béton n'est plus perturbé par des trous de passage des aciers, et le remplissage des espaces vides n'est plus d'actualité, d'où une plus grande homogénéité du modèle béton et les propriétés de résistance améliorées,
- la création du maillage éléments discrets du béton seul est beaucoup plus rapide – en quelques dizaines de secondes – au lieu de plusieurs dizaines de minutes voire plusieurs heures pour un maillage d'une structure en béton armé de grandes dimensions modélisée entièrement en éléments discrets,
- l'augmentation du pas de stabilité du calcul global.

Il est important de noter que ce changement de modélisation pour les armatures ne remet pas en cause notre travail en rapport avec la liaison acier-béton proposée car cette dernière peut être facilement adaptée au nouveau contexte.

En effet, dans le cadre d'une modélisation mixte ED-EF, une liaison acier-béton relie désormais un élément discret béton j à un élément fini poutre i (Figure 120 à droite), ce qui permet de conserver pratiquement à l'identique la méthode de calcul des efforts d'interaction présentée dans la section 3.3.2. De ce fait, l'équilibre en translation et en rotation de la liaison A-B reliant ces deux éléments sera également respecté.

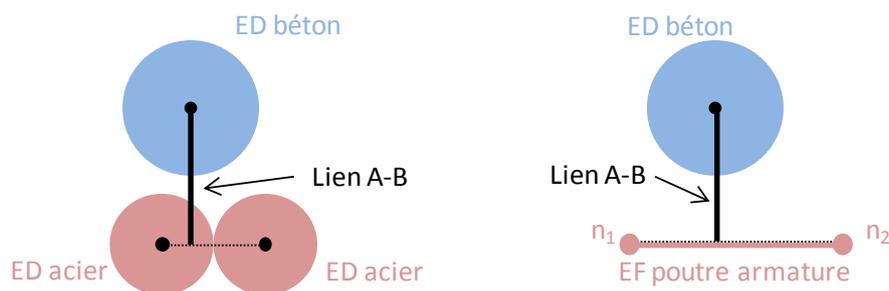


Figure 120 – Modèle de liaison « tout ED » (à gauche) et mixte ED-EF (à droite).

3.4.1 Loi de comportement de la composante normale à l'armature

3.4.1.1 Principe général

Nous conservons dans le nouveau modèle de liaison A-B le découplage des efforts d'interaction entre une composante normale et une composante tangentielle à la direction de l'armature, il nous est possible de reprendre les lois de comportement proposées dans (Rousseau, 2009) et de les appliquer directement à notre modèle.

La loi de comportement de la composante normale de la liaison acier-béton de Rousseau est présentée sur la Figure 121. Dans le régime élastique linéaire, la raideur K_N relie le déplacement normal u_N à l'effort normal F_N :

$$K_N = \frac{ES_{\text{int}}}{h^0} \quad (3.9)$$

Rousseau propose de prendre pour E de la liaison normale le module de Young du béton car la réponse de la liaison est attachée au comportement du béton à proximité de l'armature au cours de la sollicitation. En effet, pour décrire le comportement non linéaire de la couche de béton qui enrobe

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

l'armature, il est logique de partir des caractéristiques du béton. Dans la formule (3.9) S_{int} est la surface d'interaction associée à l'élément discret béton j . On posera $S_{\text{int}} = \pi R_j^2$, ce qui fait qu'un élément discret béton de taille importante opposera plus de résistance au déplacement relatif de l'armature qu'un élément discret béton petit. Pour traduire la résistance au déplacement, nous introduisons un terme dépendant de la surface de l'élément. Dans la formule (3.9) h^0 désigne la distance initiale du centre de l'élément discret béton à l'élément armature i .

On postule qu'en traction la composante normale de la liaison acier-béton a un comportement similaire à celui du béton en traction : au-delà d'une contrainte seuil T_N la liaison s'endommage selon une pente d'adoucissement ζ , puis rompt. Le lien normal devient alors un lien de contact entre l'élément béton et l'élément poutre afin d'empêcher leur interpénétration au cours de la simulation. Une limite en compression C_N est également introduite, au-delà de laquelle le comportement de la liaison acier-béton est plastique parfait, pour pouvoir étudier sa dissipation d'énergie en compression.

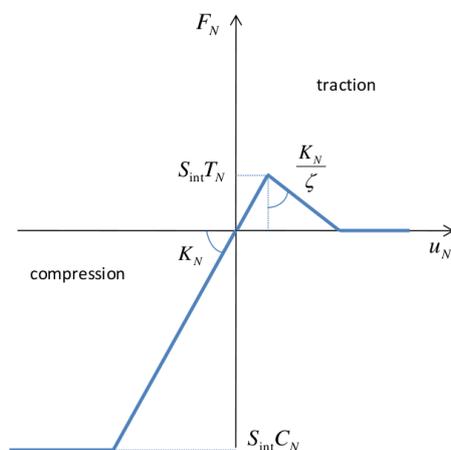


Figure 121 – Forme de la loi de comportement du lien normal proposée par Rousseau.

On n'a pas trouvé dans la littérature d'essai sollicitant uniquement la composante normale de la liaison acier-béton, ce qui rend les paramètres T_N et C_N difficiles à spécifier. La dégradation de l'interface acier-béton se produit essentiellement par la fissuration du béton, donc on peut prendre la limite de traction de la liaison acier-béton égale à celle du béton. On peut aussi prendre en compte dans T_N la limite de traction de l'acier pour représenter une contribution de l'armature à la résistance en traction de la composante normale, par exemple en faisant une moyenne des limites de traction de ces deux matériaux.

Dans notre étude nous ne considérerons pas C_N , en supposant que le comportement de la liaison en compression reste élastique linéaire. Cette hypothèse est justifiée car d'une part lors d'un impact le béton est fortement comprimé contre l'armature et d'autre part on veut éviter que l'élément discret béton s'interpénètre avec l'élément poutre.

3.4.1.2 Vérification du modèle

Lors du calcul, le lien normal peut subir plusieurs charges et décharges aussi bien en traction qu'en compression tout en devant respecter la courbe de la loi de comportement spécifiée (Figure 121). Il est donc important de mettre en œuvre avec soin la gestion automatique des différents régimes dans l'outil numérique.

Pour vérifier notre implantation dans EUROPLEXUS de la loi de comportement du lien normal, nous avons mis en œuvre un petit cas-test où la composante normale de la liaison acier-béton est sollicitée alternativement en traction et en compression. Le chargement est piloté en déplacement et s'exerce sur l'ED béton afin de pouvoir étudier l'endommagement du lien en traction (Figure 122). Comme le comportement du lien est différent en traction et en compression, on lui applique un chargement de traction, puis un chargement de compression, en alternant plusieurs phases de charge et de décharge pour contrôler la prise en compte des différentes phases de la loi. Pour chaque cas de chargement, on montre trois courbes : les courbes temporelles du déplacement imposé et de l'effort généré dans le lien, et une courbe force-déplacement. Afin de simplifier la lecture des courbes, on a numéroté les différentes phases du calcul en fonction de la monotonie du déplacement imposé, et on les a séparées par des traits verticaux en pointillés rouges. La Figure 123, la Figure 124 et la Figure 125 montrent la réponse du lien normal à un chargement qui commence par une traction ($U_z \geq 0$).

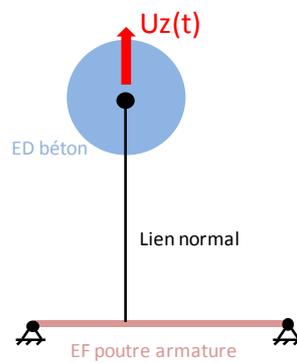


Figure 122 – Schéma d'une liaison acier-béton soumise à un déplacement imposé dans la direction normale.

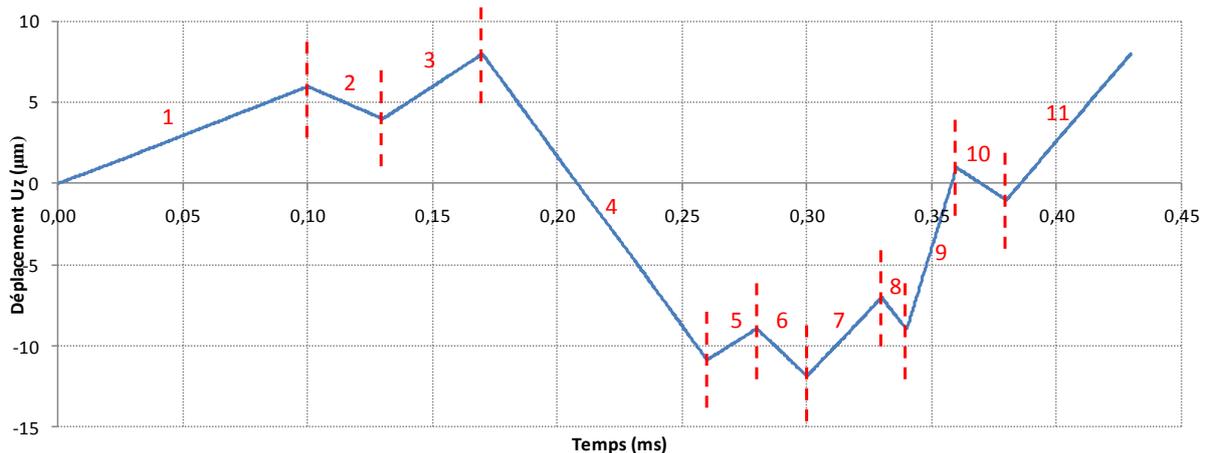


Figure 123 – Chargement en déplacement imposé sur l'ED béton au cours du temps.

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

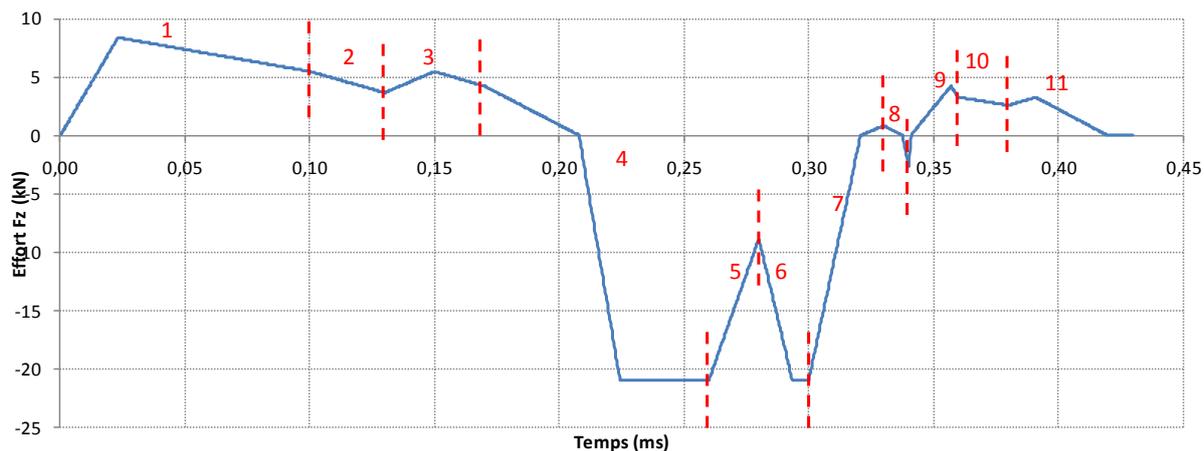


Figure 124 – Effort de réaction qu'exerce le lien sur l'ED béton au cours du temps.

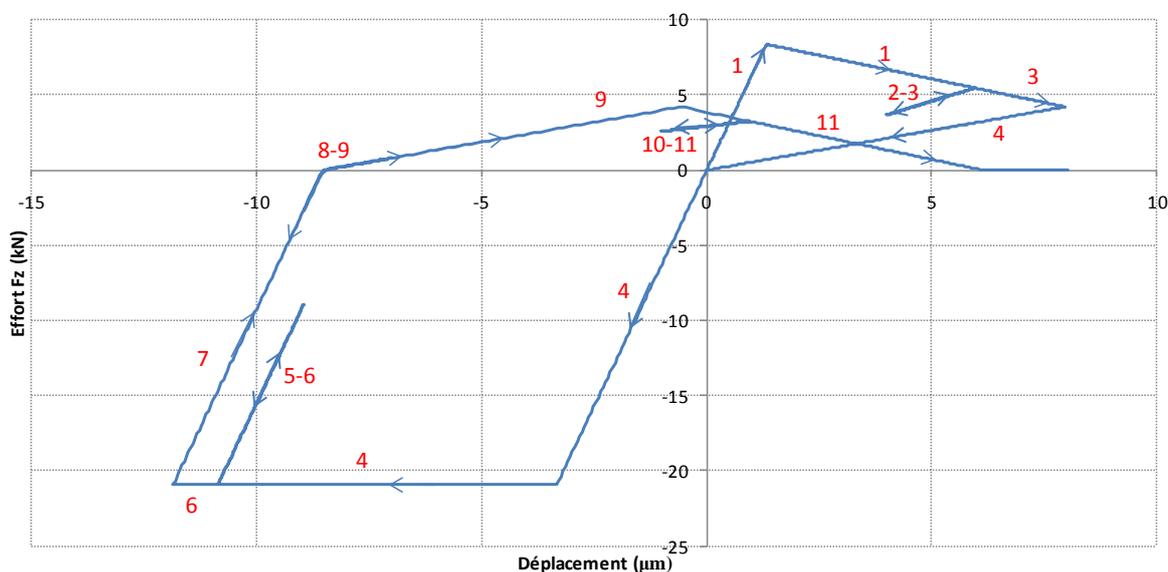


Figure 125 – Courbe force - déplacement pour le lien normal.

Pendant la première étape, on applique un déplacement suffisamment important sur l'élément béton (Figure 123) pour endommager le lien (Figure 125). Lors de la décharge/recharge 2-3 on constate que la raideur normale a diminué (Figure 125), l'endommagement de la raideur en traction est donc bien pris en compte. Au cours de la longue décharge 4 sur le lien normal, l'effort normal passe bien par l'origine du repère, ainsi la décharge se fait bien sans déformation résiduelle. La deuxième partie de l'étape de chargement 4 est une compression : il y a bien reprise de raideur lorsque le déplacement imposé change de signe, car dans la loi non linéaire pour le lien normal que l'on propose, on considère qu'il y a refermeture de fissure lors de la transition traction/compression. Le déplacement de compression imposé lors de l'étape 4 est assez important pour faire plastifier le lien normal : lors de la décharge/recharge 5-6 et de la décharge 7, on constate que la raideur utilisée est bien la raideur initiale, comme le montre la rapide charge/décharge 8-9. L'étape 9 du chargement applique à nouveau une traction qui endommage encore le lien normal : la décharge/recharge 10-11 montre que la raideur normale en traction a encore diminué. La charge finale 11 achève d'endommager le lien, qui rompt en traction. L'effort dans le lien normal devient nul.

Cette analyse détaillée des différentes phases sous les régimes de charge-décharge montre que la loi non linéaire de la composante normale de la liaison acier-béton est correctement implantée dans le code EUROPLEXUS. Quel que soit le chargement, les comportements endommageant en traction et plastique parfait en compression du lien normal sont bien pris en compte. On rappelle qu'à cause d'un manque de données expérimentales pour identifier de manière plus détaillée la forme de la loi normale, on considérera que le comportement en compression de la composante normale reste élastique linéaire.

3.4.2 Loi de comportement de la composante tangentielle

3.4.2.1 Principe général

De manière similaire à l'étude du lien normal, nous étudions maintenant la loi de comportement du lien tangentiel (Figure 126). L'étape 1 de la courbe correspond à un comportement élastique linéaire de raideur K_S qui représente la phase de l'adhérence parfaite entre l'acier et le béton. Quand les limites élastiques en contrainte, τ_e , et en déplacement, u_e , sont dépassées (étape 2), la résistance du lien augmente encore (plasticité avec écrouissage isotrope) pour représenter la résistance du béton comprimé entre les nervures de l'armature. Quand la contrainte ultime τ_u est dépassée, le lien passe dans la phase 3 et s'endommage rapidement. Dans la phase 4, la liaison acier-béton est considérée comme totalement endommagée, mais elle continue à s'opposer au glissement de l'armature (sens dépendant de la vitesse) en exerçant une contrainte résiduelle τ_r , due au frottement entre le béton et l'armature.

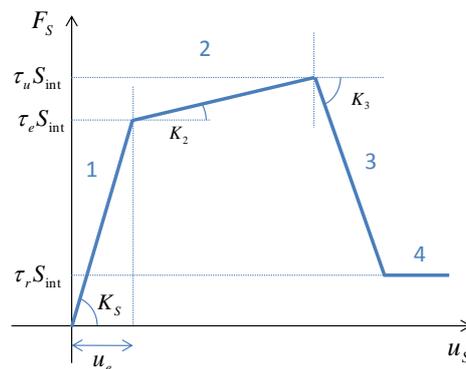


Figure 126 – Loi de comportement du lien tangentiel de la liaison acier-béton proposée par Rousseau.

Dans des essais d'arrachement et de tirant la composante tangentielle de l'interface acier-béton est fortement sollicitée. Les paramètres de la loi tangentielle de la liaison acier-béton peuvent donc être identifiés à partir de la courbe contrainte-glissement obtenue par un essai d'arrachement.

3.4.2.2 Vérification du modèle

Pour vérifier l'implantation de cette loi pour la composante tangentielle de notre modèle, on considère une liaison acier-béton soumise à un chargement dirigé dans la direction tangentielle à l'armature (Figure 127). Le chargement est piloté en déplacement et s'exerce sur l'ED béton (Figure 128). La Figure 128, la Figure 129 et la Figure 130 montrent la réponse du lien tangentiel à un chargement qui commence dans la direction des x positifs ($U_x \geq 0$).

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

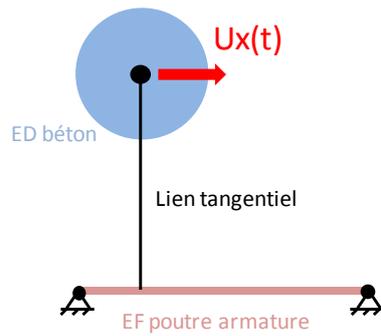


Figure 127 – Schéma de la liaison acier-béton soumise à un déplacement tangentiel imposé.

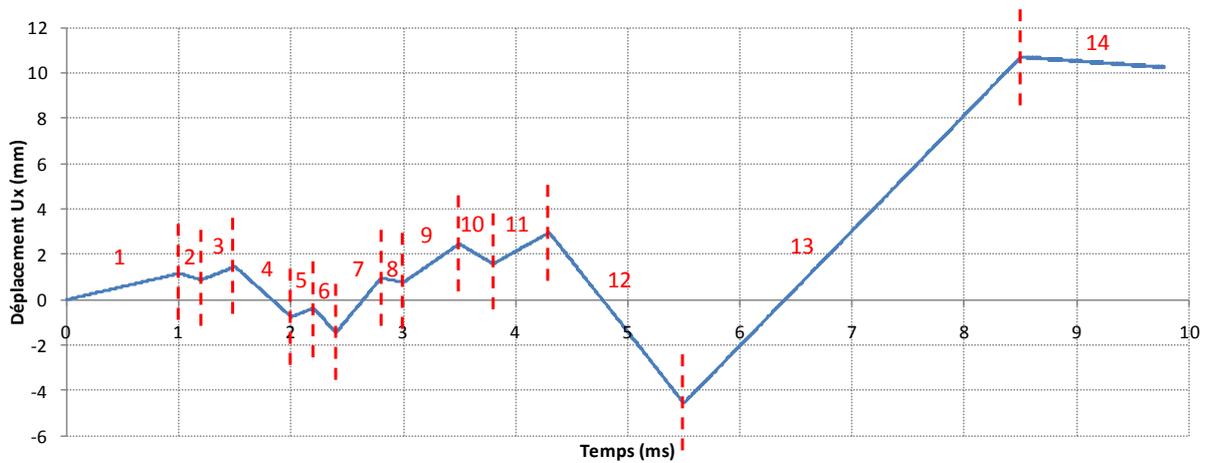


Figure 128 – Chargement en déplacement imposé Ux sur l'ED béton.

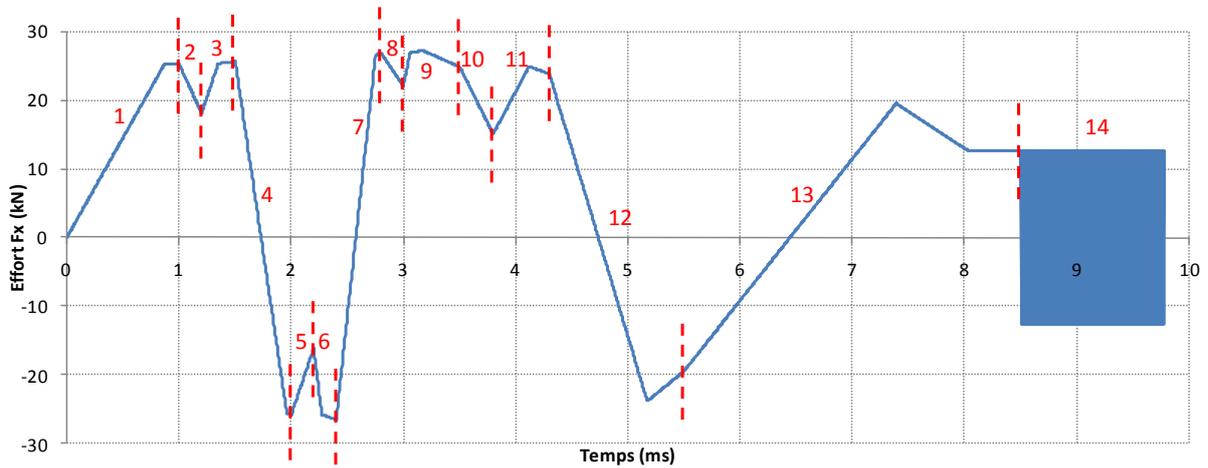


Figure 129 – Effort de réaction qui s'exerce sur l'ED béton.

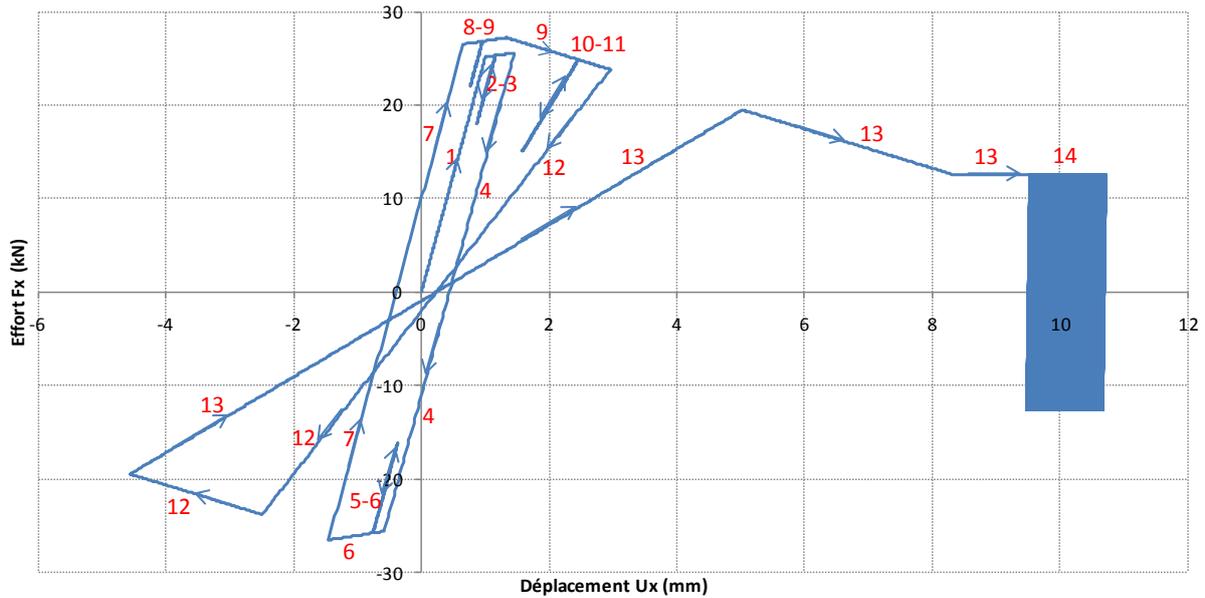


Figure 130 – Courbe force - déplacement pour le lien tangentiel.

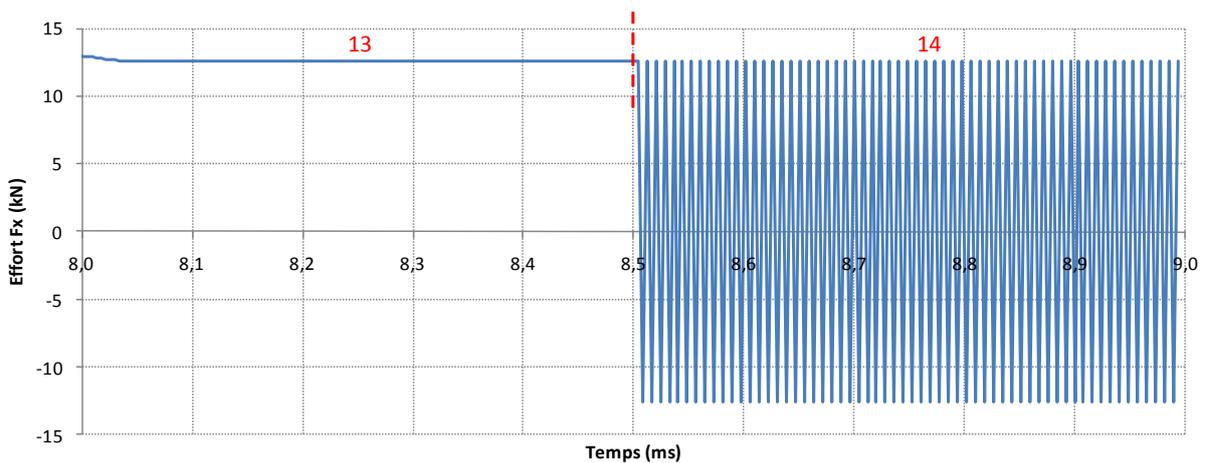


Figure 131 – Zoom de la Figure 129 sur la phase de glissement.

En suivant étape par étape les cycles de charge/décharge du lien tangentiel, on voit qu'ils sont bien gérés jusqu'au temps $t = 8,5$ ms environ (Figure 129), qui correspond à la fin du segment de chargement 13 (Figure 129 et Figure 130). Le lien tangentiel est dans la phase 4 de la loi de comportement correspondant au glissement résiduel (Figure 126). Cependant, lorsque la direction de glissement s'inverse (segment 14 sur la Figure 128), l'effort de réaction se met à osciller autour de 0 à chaque pas de temps (Figure 131), au lieu de changer une fois de signe puis de rester constant (la décharge 14 est monotone). Nous apportons une solution à ce problème dans la sous-section suivante.

3.4.2.3 Modification du traitement de la phase de glissement

L'oscillation de l'effort tangentiel vient de sa brusque variation à l'instant où a lieu la décharge (fin du segment de chargement 13, début du segment de chargement 14). Après avoir augmenté pendant la phase 13, le déplacement diminue ensuite, provoquant un changement de signe de vitesse, et donc

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

de l'effort résiduel qui en dépend (le frottement s'oppose au glissement entre l'acier et le béton) (Figure 132).

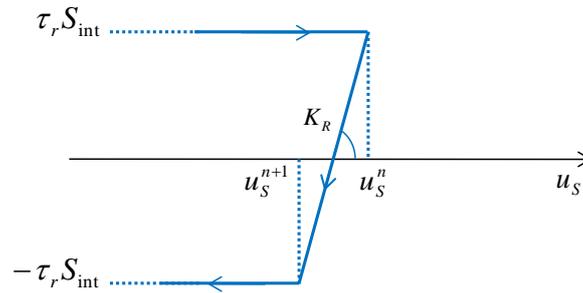


Figure 132 – Zoom sur la transition charge/décharge dans la phase 4 de la Figure 126.

On peut calculer la raideur K_r selon laquelle se fait la décharge brutale de l'effort résiduel entre les deux instants et la comparer avec la valeur de la raideur tangentielle K_S :

$$K_r = \frac{2\tau_r S_{\text{int}}}{u_S^{n+1} - u_S^n} \quad K_S = \frac{\tau_e S_{\text{int}}}{u_e}$$

La limite élastique τ_e et la contrainte résiduelle τ_r , se trouvant au numérateur, sont du même ordre de grandeur. En revanche, le terme variation du déplacement entre deux instants $u_S^{n+1} - u_S^n$, dans le dénominateur, est négligeable devant un déplacement absolu comme u_e , donc K_r est très supérieure à K_S . Or c'est bien la raideur tangentielle K_S qui est utilisée à l'instant initial pour définir le pas de temps d'intégration de la réponse du lien tangential. Donc si $K_r > K_S$ le pas de temps n'est pas assez petit pour garantir la stabilité et la précision de l'intégration temporelle dans la phase résiduelle. Nous proposons donc d'utiliser la raideur tangentielle pour la décharge dans la phase résiduelle.

La Figure 135 montre la réponse du lien tangential en prenant en compte cette modification dans la phase de glissement de la loi de comportement non linéaire (les indicateurs en rouge inférieurs à 13 sont omis pour alléger les figures, car le chargement et la réponse du lien sur cette période sont identiques à ceux représentés sur les Figure 128, Figure 129 et Figure 130). On constate que lors de la décharge 14 il n'y a plus d'oscillations sur l'effort tangential, qui diminue selon une pente de raideur K_S . Lors d'une transition charge/décharge, l'effort de frottement résiduel passe par une phase de décharge transitoire de raideur K_S où il atteint progressivement sa valeur opposée, ce qui n'est certes pas représentatif du frottement qui s'oppose systématiquement au déplacement. Néanmoins on peut dire que le fait d'avoir pris la plus grande raideur de la loi tangentielle assure que la phase transitoire reste assez brève.

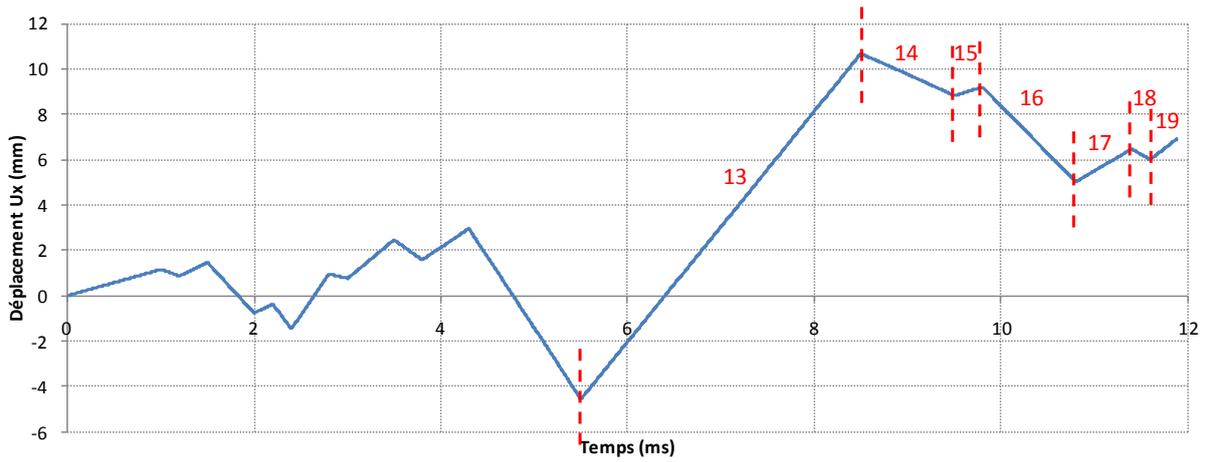


Figure 133 – Chargement en déplacement imposé U_x sur l'ED béton.

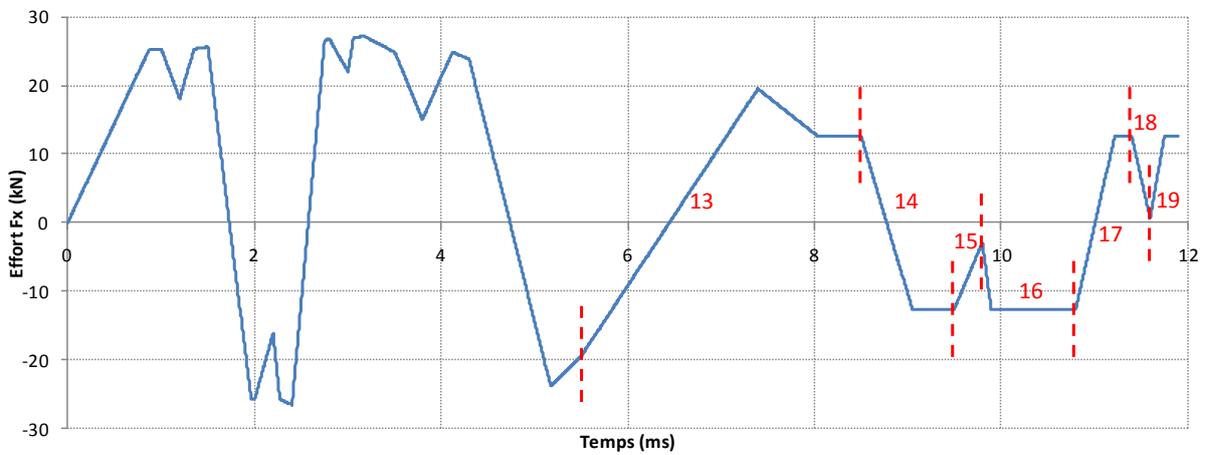


Figure 134 – Effort de réaction qui s'exerce sur l'ED béton.

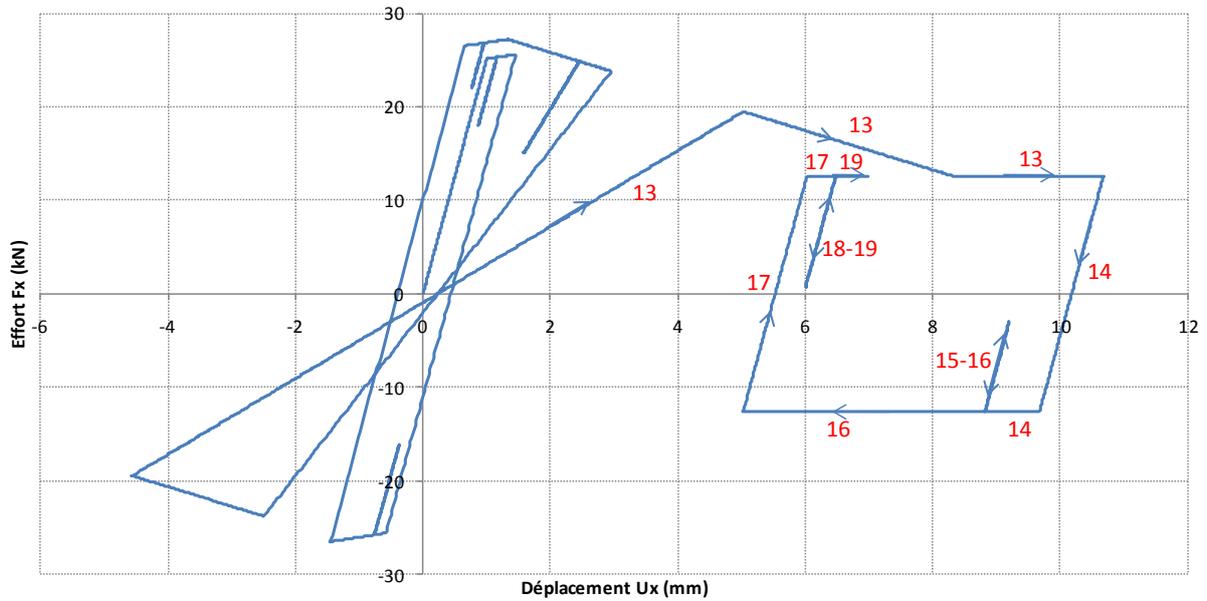


Figure 135 – Courbe force - déplacement pour le lien tangentiel.

3.4.2.4 Généralisation à un nombre de points quelconque

La loi tangentielle proposée par Rousseau (Figure 126) est une loi à 5 points délimitant 4 segments représentant chacun un comportement particulier (élasticité, plasticité, endommagement, frottement). Elle permet d’avoir une première approximation de la courbe contrainte-glisement. Cependant, la loi locale est probablement plus compliquée et nécessite plus de points pour discrétiser plus finement chacune des phases caractéristiques de son comportement non linéaire. Mais dans la pratique, la loi d’adhérence à l’échelle locale est difficile à obtenir, et on peut être amené à s’inspirer de l’allure de la loi d’adhérence globale pour déterminer la loi locale (Torre-Casanova, 2012).

A titre d’exemple, quand on compare le comportement modélisé par la courbe représentée sur la Figure 126, à celui observé lors d’essais d’arrachement expérimentaux (Hamouine et al., 1995) (Figure 136-a), on voit clairement qu’une seule pente plastique est insuffisante pour représenter finement le pic de contrainte observé sur la courbe correspondant à l’armature HA. On voit aussi que la courbe correspondant à l’armature lisse ne présente pas de phase plastique avec écrouissage positif (il y a endommagement puis glissement avec frottement après la phase élastique linéaire) alors que cette dernière est imposée dans la construction de la courbe de la Figure 126.

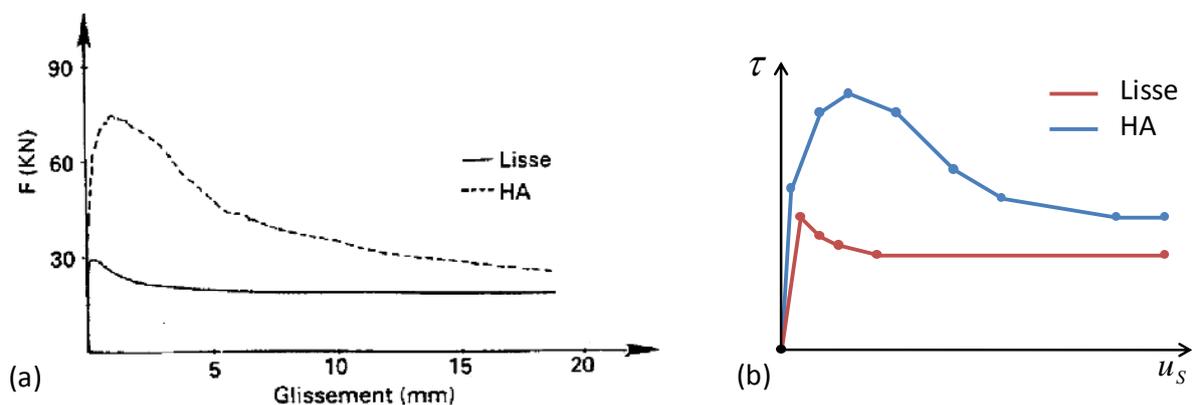


Figure 136 – (a) Courbe expérimentale (Hamouine et al., 1995) et (b) loi multipoints proposée.

Pour mieux décrire l’évolution des différentes formes/allures de la loi d’adhérence, nous proposons à l’utilisateur de fixer lui-même le nombre et la position des points nécessaires pour discrétiser la courbe. Un exemple d’une telle discrétisation des courbes expérimentales de Hamouine et al. (Figure 136-a) est montré sur la Figure 136-b, sur laquelle on a choisi 9 points pour représenter la courbe de l’acier HA et 6 points pour celle de l’acier lisse.

Nous avons implanté la loi multipoints dans notre modèle et nous l’avons testé/vérifié sur une liaison acier-béton présentée sur la Figure 127. Les résultats sont montrés sur les Figure 137, Figure 138 et Figure 139. Le chargement est composé de plusieurs cycles de charge/décharge, mais reste globalement monotone pour que l’on retrouve à la fin du calcul la courbe de la fonction $\tau = f(u_s)$ entrée initialement par l’utilisateur et symbolisée par les petits carrés rouges sur la Figure 139.

On constate sur la Figure 139 que l’approximation numérique par morceaux de la courbe passe bien par les points entrés par l’utilisateur. Dans la phase résiduelle (le dernier segment de la courbe), la décharge se fait selon la raideur K_S en accord avec la modification que l’on a proposée.

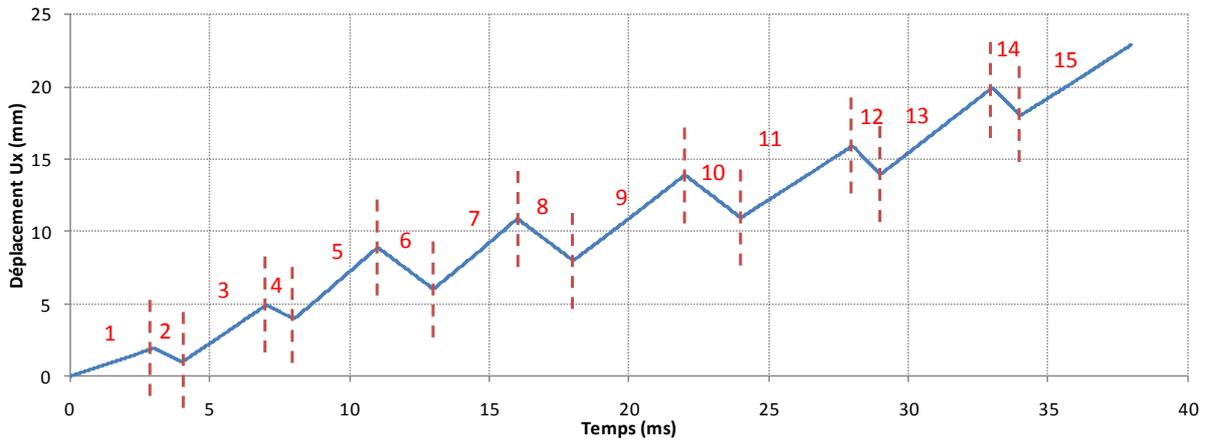


Figure 137 – Déplacement imposé à l'élément discret béton au cours du temps.

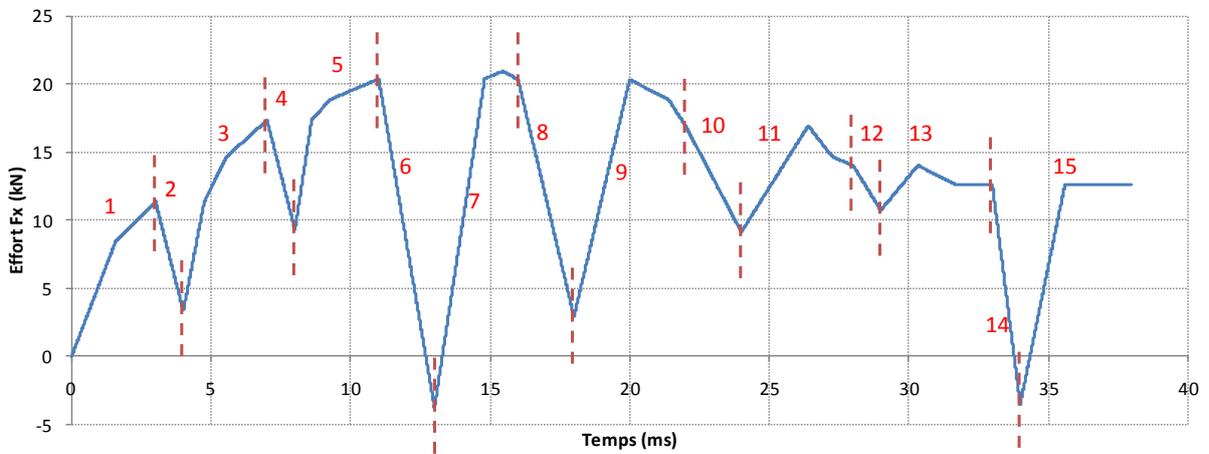


Figure 138 – Effort de réaction de la liaison tangentielle sur l'élément discret béton.

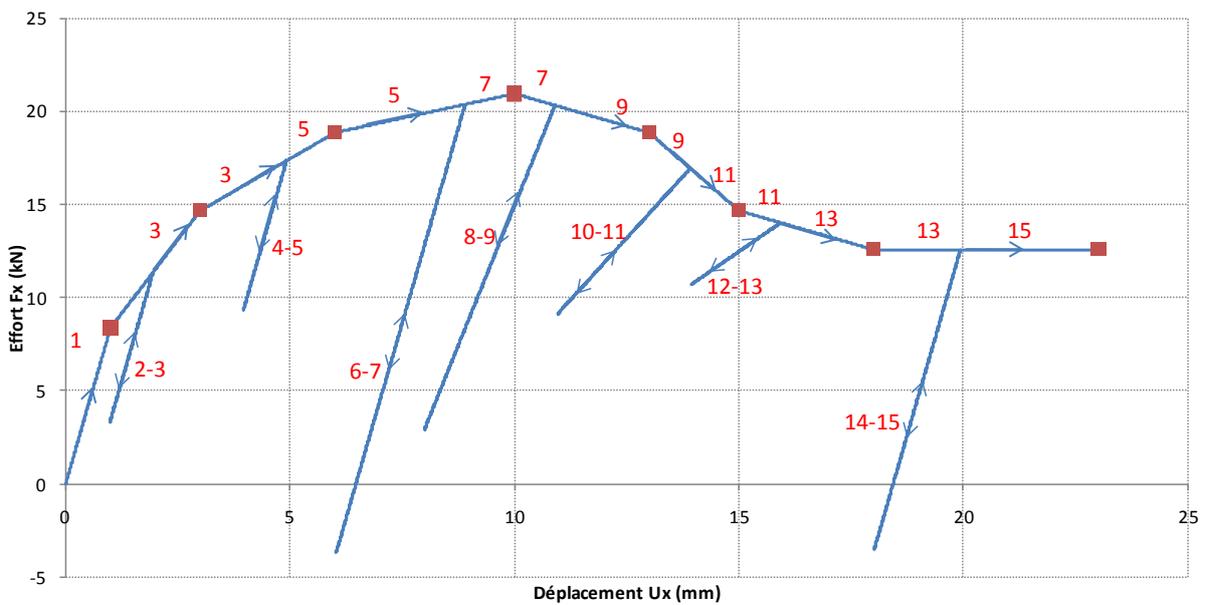


Figure 139 – Courbe force-déplacement de la liaison tangentielle multipoints.

Ces résultats montrent que la loi de comportement multipoints de la composante tangentielle est correctement implantée et peut être considérée comme opérationnelle dans notre modèle. Nous

pouvons décrire très précisément le pic de contraintes après la phase élastique et la phase adoucissante d'une loi d'adhérence. Il est également possible de différencier clairement le comportement d'une armature lisse et d'une armature haute adhérence.

3.4.3 Glissement important

Le modèle de liaison acier-béton que nous avons proposé dans ce travail repose entièrement sur les projections de l'élément discret béton sur l'élément fini poutre de l'armature d'où on tire les distances permettant de déterminer les efforts d'interaction. Dans le cas d'une structure soumise à un chargement sévère, l'interface acier-béton peut être fortement endommagée et le glissement entre l'armature et le béton devenir important. Dans notre modèle, un tel glissement se traduit par le déplacement suffisamment grand de l'élément discret béton de telle sorte que sa projection quitte l'élément fini poutre auquel il était lié à l'instant initial et se retrouve sur l'élément poutre voisin. Il faut alors étudier avec soin l'équilibre de la liaison acier-béton dans ce type de configuration, afin d'éviter l'apparition d'instabilités au cours du calcul. Comme les deux composantes (normale et tangentielle) de notre modèle de liaison acier-béton sont découplées, on peut étudier la conservation de leur équilibre séparément.

3.4.3.1 Composante tangentielle

La composante tangentielle s'oppose au glissement de l'élément béton par rapport à l'élément poutre d'armature auquel il est lié initialement au point P_S (Figure 140 au milieu). Au cours du temps, le ressort du lien tangential de raideur K_S reste attaché à l'élément poutre initial et on raisonne toujours par rapport au point P_S pour calculer le glissement u_S . Il n'y a pas de traitement supplémentaire à réaliser dans ce cas où l'élément discret béton glisse au-delà de l'élément armature $m - n$ et se projette sur l'élément poutre voisin (Figure 140 à droite).

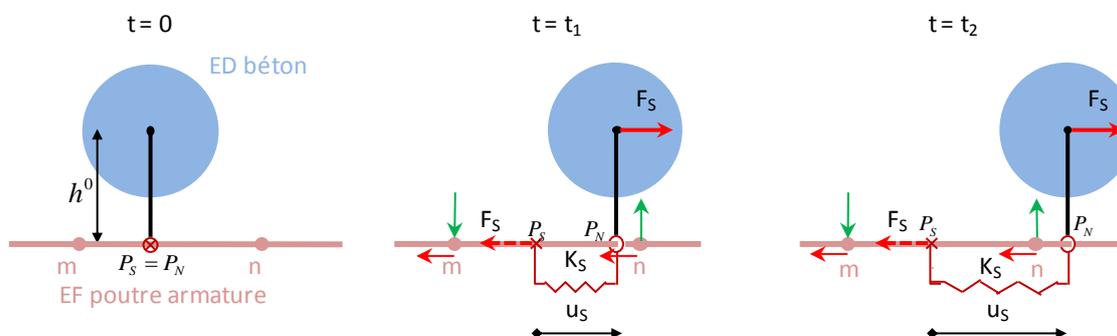


Figure 140 – Equilibre de la composante tangentielle dans le cas d'un glissement important.

3.4.3.2 Composante normale

Pour la composante normale du lien, lorsque le point P_N glisse sur l'élément poutre voisin, le lien normal interagit donc avec ce dernier. On résout alors l'équilibre en translation et en rotation du lien normal entre l'élément discret béton et l'élément poutre acier voisin $n - o$ (Figure 141 à droite).

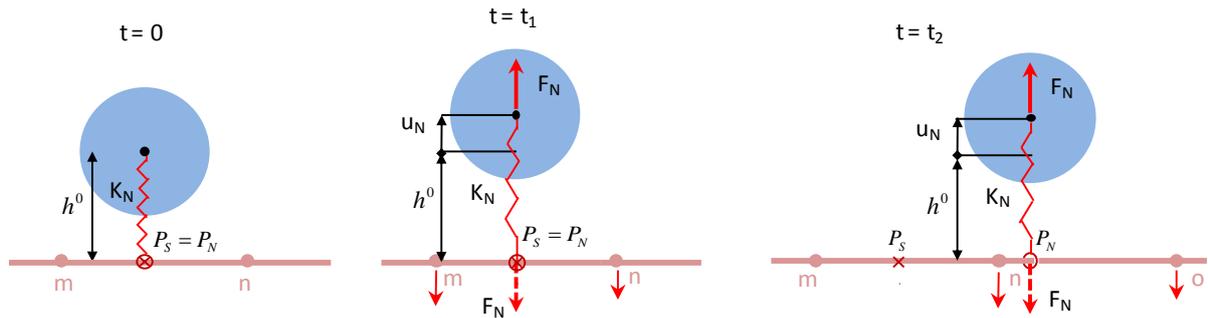


Figure 141 – Equilibre de la composante normale dans le cas d'un glissement important.

3.4.3.3 Vérification du cas de grand glissement

Pour tester la réponse du modèle dans le cas de grand glissement, on considère un problème où un élément discret béton est relié par notre modèle de liaison acier-béton à une armature maillée en 5 éléments finis poutre (Figure 142 à gauche). La résistance en flexion de l'armature longitudinale est renforcée par des armatures transversales pour minimiser son influence sur la dynamique de la liaison acier-béton. La liaison acier-béton est créée à l'instant initial entre l'élément discret béton et l'élément poutre I . On soumet l'élément béton à un effort tangentiel pour l'amener, au cours de son glissement le long de l'armature, à se projeter sur l'élément fini poutre voisin J , puis sur l'élément K . La Figure 142 à droite montre la loi de comportement prescrite à ce lien tangentiel.

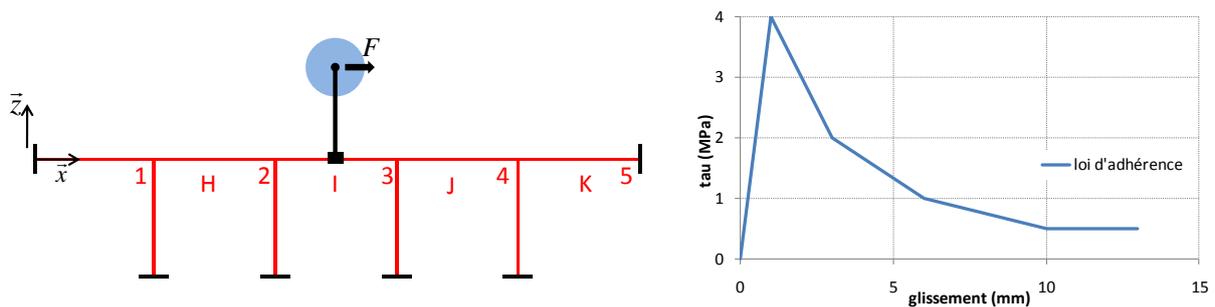


Figure 142 – Schéma du cas-test (à gauche) et loi d'adhérence de la composante tangentielle utilisée (à droite).

On constate que l'effort normal qui s'exerce sur l'élément béton reste très faible (Figure 143 à gauche). Pour l'élément I d'armature, l'effort normal qui s'exerce sur les nœuds 2 et 3 a une évolution temporelle (Figure 143 à droite) qui rappelle la forme de la loi d'adhérence de la Figure 142 (à droite) car pour équilibrer la liaison en rotation on applique sur les nœuds 2 et 3 un effort normal qui dépend de l'effort tangentiel. Lors du glissement de l'élément béton sur l'élément poutre J , on ne constate aucune perturbation sur la courbe rouge car le nœud 2 est toujours soumis uniquement à l'effort normal qui assure l'équilibre en rotation de la liaison. Les oscillations sur la courbe verte (nœud 3) restent très faibles. Pour équilibrer ces petites perturbations, l'effort normal qui s'exerce sur le nœud 4 n'est plus identiquement nul (courbe violette), ce qui montre la bonne prise en compte du changement d'élément sur lequel l'équilibre de la composante normale de la liaison est réalisé. L'équilibrage de la composante normale de la liaison acier-béton est donc bien assuré et n'entraîne pas d'instabilités lors du glissement de l'élément discret sur les éléments poutre voisins.

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

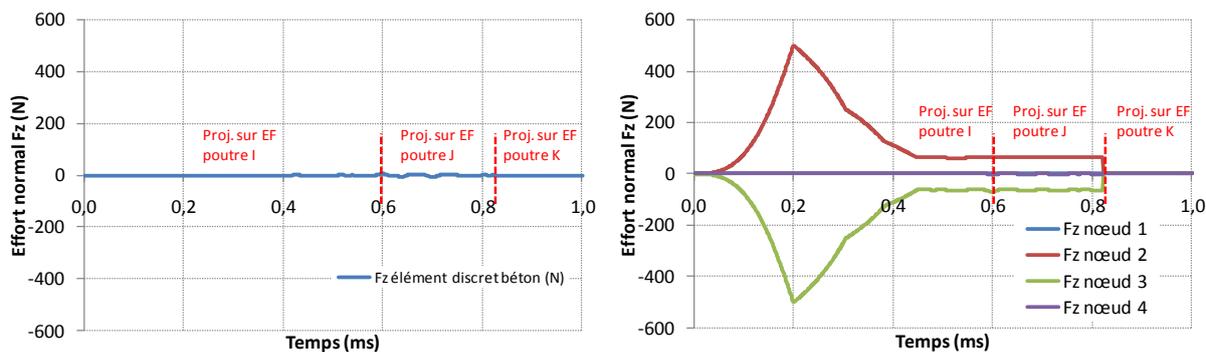


Figure 143 – Evolution de l'effort normal qui s'exerce sur l'ED béton (à gauche) et sur l'armature (à droite).

On voit sur la Figure 143 (à droite) que l'effort dans le lien normal devient nul lorsque l'élément béton change encore d'élément de projection et commence à se projeter sur l'élément poutre K. En calcul de structures de taille industrielle, on prend généralement une longueur de l'ordre de 5 cm pour discrétiser les armatures. Par ailleurs, les mesures expérimentales montrent que, dès que le glissement entre l'acier et le béton atteint 2 cm environ, on peut considérer que la liaison acier-béton a fourni l'essentiel de la résistance à l'interface et entre alors dans une phase de frottement résiduel très avancée, de telle sorte qu'on puisse la considérer comme rompue. Les simulations d'impacts sur dalles que nous allons réaliser entrent dans cette catégorie de calculs, et la longueur des éléments poutre que nous utiliserons sera supérieure à 2 cm, donc nous pouvons considérer dans notre modèle que la liaison acier-béton rompt lorsque l'élément béton se projette sur un élément poutre situé au delà des voisins immédiats de l'élément poutre auquel il est lié initialement.

3.4.4 Distance de recherche des liaisons acier-béton

Tout comme pour les liaisons cohésives entre les éléments discrets béton, il faut déterminer la dimension de la zone autour de l'armature où les liaisons acier-béton seront créées. Nous choisissons de faire dépendre la distance d'interaction D_{int} du rayon de l'armature R_a et d'un coefficient d'interaction à trouver λ_a , pour décrire l'interface sous la forme d'une couche enveloppant l'armature (équation 3.10).

$$D_{int} = \lambda_a \times R_a \quad (3.10)$$

La Figure 144 représente la zone d'interaction décrite par l'équation (3.10). Les éléments discrets béton en bleu remplissent les deux conditions pour être reliés à l'élément poutre $m - n$: ils se projettent sur cet élément et la distance de leur centre à l'armature est inférieure à D_{int} .

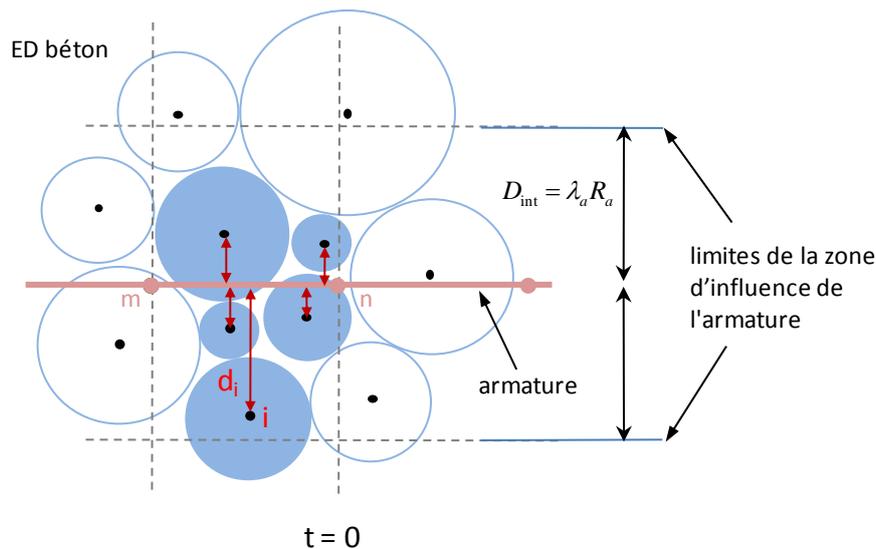


Figure 144 – Schéma du domaine d'interaction décrit par l'équation (3.10).

Puisque D_{int} influence l'épaisseur de la couche de béton représentant l'interface, elle doit aussi avoir un impact sur ses caractéristiques mécaniques, notamment le pic de résistance maximale de la loi d'adhérence. Nous avons étudié l'influence de la distance d'interaction sur la loi d'adhérence restituée par un essai d'arrachement (Figure 145).

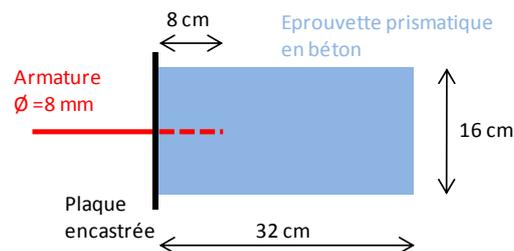


Figure 145 – Schéma de l'éprouvette utilisée pour la simulation de l'essai d'arrachement.

A cette fin, nous lançons une série de simulations d'essai d'arrachement avec la même loi d'adhérence initiale pour la liaison et en faisant varier D_{int} , afin que la loi d'adhérence « de sortie » obtenue à la fin du calcul soit la plus proche possible de la loi entrée initialement dans le jeu de données (loi « d'entrée »). Des procédures similaires d'identification de paramètres basées sur la comparaison de la loi d'adhérence de sortie à la loi d'entrée sont parfois appliquées dans la littérature lorsqu'on ne dispose pas de données expérimentales suffisantes pour caractériser la loi d'adhérence locale (Torre-Casanova, 2012).

Pour prendre en compte l'influence de la taille des éléments discrets béton, nous réalisons plusieurs maillages de l'éprouvette de finesses différentes (Figure 146).

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

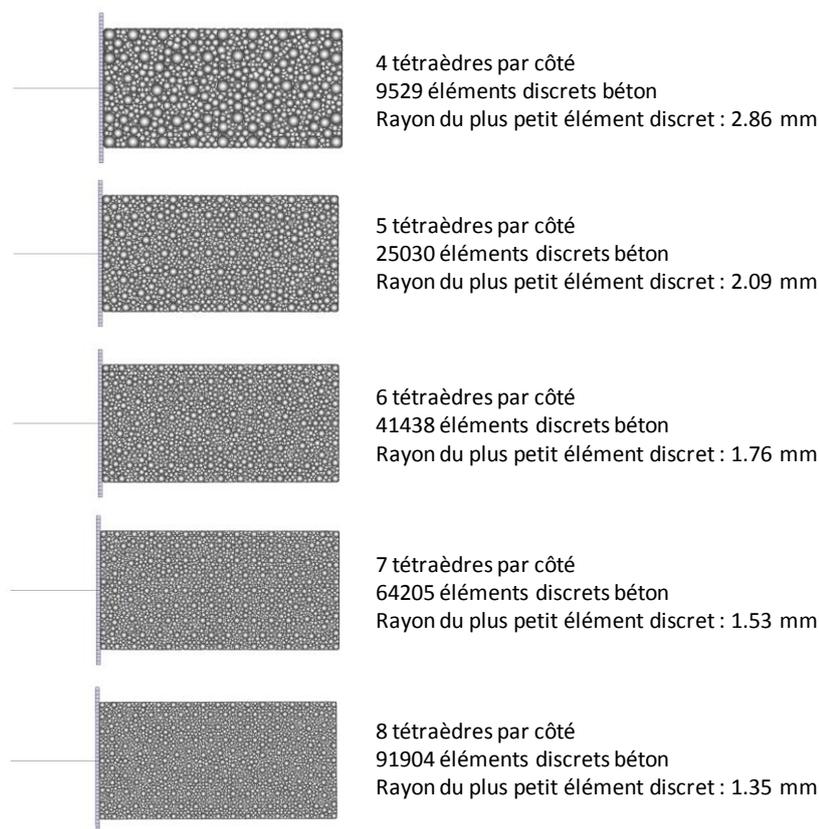


Figure 146 – Maillages ED de l'éprouvette et leurs caractéristiques.

L'étude étant purement numérique, nous prenons des caractéristiques mécaniques standard pour le béton (Tableau 6) et pour l'acier Haute Adhérence (Tableau 7-b).

Module de Young	28 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Limite de compression	27 MPa
Limite de traction	3,5 MPa

Tableau 6 – Caractéristiques mécaniques du béton.

En appliquant la procédure d'identification, nous déterminons les paramètres du modèle éléments discrets (Tableau 7-a) qui permettent de reproduire les propriétés mécaniques du béton.

(a)

Masse volumique	2500 kg/m ³
Module de Young	28 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Limite locale de traction	3 MPa
Cohésion	6 MPa
Angle de frottement interne	6°
Angle de frottement de contact	6°
Adoucissement	5

(b)

Masse volumique	7850 kg/m ³
Module de Young	210 GPa
Coefficient de Poisson	0,3
Limite élastique	550 MPa
Limite plastique	640 MPa

Tableau 7 – Paramètres du modèle : (a) éléments discrets béton et (b) éléments finis armature.

Lors d'un essai d'arrachement, la composante tangentielle est beaucoup plus sollicitée que la composante normale. Pour s'assurer que la plupart des liens A-B vont rompre suite à un glissement excessif le long de l'armature, on prend des valeurs plus importantes pour la limite de traction et

l'adoucissement de la composante normale de la liaison A-B (Figure 147-a) que celles des paramètres mécaniques identifiés du modèle de béton en traction (Tableau 7-a). Une approche similaire a été adoptée par Rousseau dans ses simulations d'essais d'arrachement.

Pour la composante tangentielle, nous prenons une courbe dont l'allure est typique de la loi d'adhérence mesurée lors d'un essai d'arrachement (Figure 147-b).

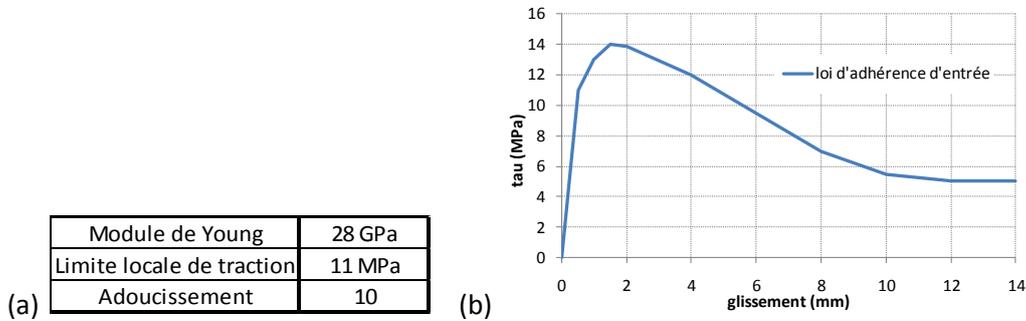


Figure 147 – Paramètres des composantes du modèle de liaison acier-béton : (a) normale et (b) tangentielle.

Pour chaque maillage éléments discrets de l'éprouvette (Figure 146), nous simulons l'essai d'arrachement de l'armature en jouant sur le paramètre λ_a de manière à ce que la courbe contrainte-glissement obtenue à la fin du calcul soit la plus proche possible de la loi d'adhérence entrée initialement dans le jeu de données (Figure 147-b).

Le résultat est montré sous la forme de points représentant le coefficient d'interaction λ_a obtenu pour chaque maillage éléments discrets en fonction du rapport entre le rayon de l'armature et celui du plus petit élément discret de ce maillage (Figure 148). On constate que le coefficient d'interaction de l'acier diminue quand la finesse du maillage éléments discrets du béton augmente, ce qui semble cohérent physiquement, car lorsque le maillage éléments discrets du béton est de plus en plus fin, les éléments discrets qui le composent sont de plus en plus petits et nombreux, donc la zone de béton autour de l'armature est de mieux en mieux décrite. On remarque que la courbe qui relie ces points peut être assez bien approchée par la courbe d'équation $f(x) = 3.2/\sqrt{x}$. Nous pouvons donc en déduire une formule qui permet de faire une bonne estimation de la taille de la zone de l'interface acier-béton en fonction du rayon de l'armature et de la finesse du maillage éléments discrets du béton donnés (équation (3.11)).

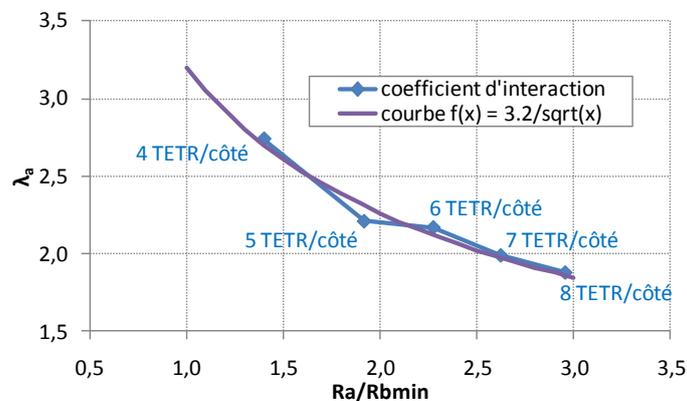


Figure 148 – Evolution du coefficient d'interaction en fonction de la finesse du maillage ED.

$$\lambda_a = 3.2 \times \frac{1}{\sqrt{\frac{R_a}{R_{bmin}}}} = 3.2 \sqrt{\frac{R_{bmin}}{R_a}} \quad (3.11)$$

3.4.5 Détermination du pas de temps d'intégration

Lorsqu'on envisage de faire des calculs avec un nouveau modèle numérique en utilisant un schéma d'intégration explicite, se pose la question importante du choix du pas de temps qui garantirait la stabilité de ces calculs. Pour le modèle ED que nous avons récupéré au début de la thèse, ces aspects n'ont pas été étudiés de manière rigoureuse. Pour calculer le pas de stabilité une formule issue du code SDEC (Magnier et Donzé, 1997) a été implantée dans EUROPLEXUS (équation (3.12)). Le pas de temps critique est associé à chaque élément I (de masse m_I , de rayon R_I et d'inertie I_I) en calculant une raideur équivalente en translation K_{tran} et une autre en rotation K_{rot} basées sur les raideurs K_N et K_S des liaisons qui le relie à ses voisins.

$$\Delta t = c_{\text{stab}} \frac{\sqrt{2}}{2} \min \left(\sqrt{\frac{m_I}{\max_k (\vec{K}_{\text{tran}}(k))}}, \sqrt{\frac{I_I}{\max_k (\vec{K}_{\text{rot}}(k))}} \right) \quad (3.12)$$

Les raideurs utilisées dans cette formule se calculent comme suit :

$$\vec{K}_{\text{tran}} = \sum_{k=1}^{\text{nbre liens}} \begin{pmatrix} K_{N,i}(n_{x,i}^2) + K_{S,i}(1 - n_{x,i}^2) \\ K_{N,i}(n_{y,i}^2) + K_{S,i}(1 - n_{y,i}^2) \\ K_{N,i}(n_{z,i}^2) + K_{S,i}(1 - n_{z,i}^2) \end{pmatrix}, \quad \vec{K}_{\text{rot}} = \sum_{k=1}^{\text{nbre liens}} \begin{pmatrix} K_{S,i}(1 - n_{x,i}^2)R_I^2 \\ K_{S,i}(1 - n_{y,i}^2)R_I^2 \\ K_{S,i}(1 - n_{z,i}^2)R_I^2 \end{pmatrix}$$

avec \vec{n} le vecteur directeur du lien reliant l'élément I à un de ses voisins J :

$$\vec{n} = \frac{\vec{IJ}}{\|\vec{IJ}\|} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

Dans (3.12), une valeur forfaitaire de 0.1 du coefficient de sécurité c_{stab} est employée conduisant à des pas de temps assez petits, considérablement plus faibles que les valeurs habituellement utilisées dans les calculs avec les éléments finis classiques.

Pour pallier ce problème, nous présentons dans cette section une étude théorique aboutissant à des conclusions claires quant aux paramètres numériques à utiliser pour garantir les résultats stables et précis. Cette étude couvre à la fois le modèle ED du béton et le modèle de la liaison A-B proposé.

3.4.5.1 Stabilité de l'intégration temporelle

Le modèle ED étudié ici peut être considéré comme un système masses-ressorts où les éléments discrets portent les masses ponctuelles et les liaisons jouent le rôle de ressorts. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à chaque élément discret, sommant des forces élémentaires et assemblant des matrices de rigidité K et de masse M on obtient le système exprimant l'équilibre dynamique de ce système :

$$M\ddot{u} + Ku = F$$

Pour résoudre numériquement ce système au cours du temps on utilise le schéma explicite des différences centrées, utilisé dans le code de dynamique rapide EUROPLEXUS. Puisque ce schéma est conditionnellement stable, le pas de temps d'intégration doit vérifier la condition (3.13) (Géradin et Rixen, 1993) pour éviter que le calcul diverge.

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega} \quad (3.13)$$

Pour estimer rigoureusement la plus grande pulsation propre ω du système, il faut former les matrices globales K et M , ce qui est rarement le cas (pour la matrice de raideur) dans les codes explicites, et résoudre ensuite le problème aux valeurs propres, ce qui n'est pas courant non plus pour les codes de dynamique rapide. Comme solution possible, on peut prendre la raideur la plus grande et la masse la plus petite du système pour calculer le pas de temps critique, mais le pas obtenu par cette méthode est trop petit, rendant impossible la simulation de structures de taille industrielle à cause d'un temps de calcul prohibitif.

Face à la difficulté de déterminer le pas de stabilité à l'échelle globale du système assemblé, il peut être intéressant de raisonner à l'échelle locale et d'estimer un pas de temps critique spécifique à chaque élément.

Au début de la thèse nous utilisons l'équation 3.12 pour déterminer le pas de temps critique au niveau de chaque ED du maillage. Dans cette formule, on calcule une raideur « équivalente » à l'ensemble des liens attachés à cet élément. L'utilisation des composantes du vecteur directeur de chaque liaison fait penser à une projection des raideurs de chaque liaison selon un plan, mais l'expression de ce dernier n'est pas claire, en tout cas elle est différente de celles des plans principaux du repère global. En outre, chaque élément discret du maillage est relié en moyenne à 12 éléments (en raison de la valeur de la coordonnée fixée au Chapitre 2). Cela signifie que le calcul de l'équilibre d'un élément par rapport à ses voisins doit passer par la résolution d'un problème hautement hyperstatique, ce qui rend assez délicat le calcul de la vraie raideur équivalente. Le paramètre c_{stab} (appelé coefficient de sécurité) est fixé par l'utilisateur pour contrôler la valeur de ce pas de temps et limiter les approximations faites pour le calculer. Etant donné l'incertitude sur le calcul des raideurs \vec{K}_{tran} et \vec{K}_{rot} dans la formule (3.12) par sécurité on a tendance à prendre des valeurs très faibles de c_{stab} , ce qui aboutit à des temps de calcul excessivement importants.

Face à ce constat, et comme chaque liaison est indépendante des autres liaisons du modèle, nous proposons de déterminer le pas de temps critique non plus au niveau de chaque élément discret mais pour chaque liaison entre deux éléments (Figure 149). Puisque ce sont les liaisons qui se déforment et non les éléments, il semble logique de déterminer un temps critique associé à la liaison afin de bien décrire l'évolution des ondes qui se propagent dans le modèle. Nous calculons donc pour chaque liaison du modèle son pas de temps critique spécifique (en utilisant la formule proposée dans (Belytschko et al., 2001)), et nous prenons le pas de temps le plus petit obtenu pour réaliser l'intégration temporelle du modèle ED.

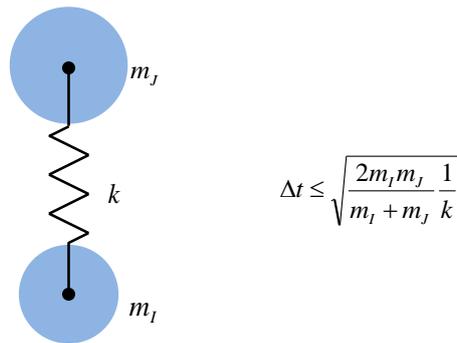


Figure 149 – Condition sur le pas de temps critique pour un système de deux masses reliées par un ressort (Belytschko et al., 2001).

3.4.5.2 Précision de l’intégration temporelle

Nous recherchons un critère portant sur le paramètre de pondération du pas de temps critique p (voir l’équation (3.14)) pour que l’intégration temporelle soit précise à une erreur donnée. L’expression de ce critère ainsi que l’erreur que l’on se donne pour définir la précision du calcul sont importants pour pouvoir décrire correctement les phénomènes physiques modélisés en utilisant le modèle mixte ED-EF.

$$\Delta t = p \sqrt{\frac{2m_I m_J}{m_I + m_J} \frac{1}{k}} \quad 0 < p \leq 1 \tag{3.14}$$

A cette fin, on considère une liaison acier-béton soumise à un chargement dynamique selon sa composante normale à la direction de l’armature (Figure 150). Pour ramener l’étude à celle d’un oscillateur à un degré de liberté, pour lequel des solutions analytiques assez simples peuvent être exhibées, les déplacements des deux nœuds de l’élément fini poutre de l’armature sont bloqués, ce qui le rend indéformable.

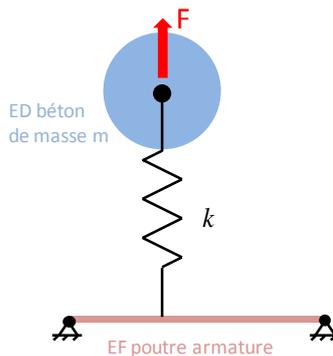


Figure 150 – Schéma de l’oscillateur à un degré de liberté étudié.

L’équation de vibration libre pour un système masse-ressort à 1 degré de liberté s’écrit :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \tag{3.15}$$

Ce système étant conservatif, sa solution est de la forme :

$$u(t) = e^{i\omega t} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.16}$$

où ω est la pulsation propre du système. En substituant (3.16) dans (3.15), on obtient :

$$(-m\omega^2 + k)e^{i\omega t} = 0$$

En remplaçant dans (3.15) l'accélération par son approximation numérique dans le cadre du schéma des différences centrées, on obtient l'équation :

$$m \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} + ku^n = 0. \quad (3.17)$$

Par analogie avec la forme de la solution donnée par (3.16), nous cherchons une solution de l'équation (3.17) sous la forme :

$$u^n = e^{i\omega_s t^n} \quad (3.18)$$

avec ω_s la pulsation restituée par le schéma des différences centrées.

Les expressions des approximations de la solution aux instants t^{n+1} et t^{n-1} s'écrivent :

$$u^{n+1} = e^{i\omega_s t^{n+1}} = e^{i\omega_s(t^n + \Delta t)} = e^{i\omega_s t^n} e^{i\omega_s \Delta t} \quad (3.19)$$

$$u^{n-1} = e^{i\omega_s t^{n-1}} = e^{i\omega_s(t^n - \Delta t)} = e^{i\omega_s t^n} e^{-i\omega_s \Delta t} \quad (3.20)$$

En reportant (3.18), (3.19) et (3.20) dans l'équation (3.17), on obtient :

$$\left(e^{i\omega_s \Delta t} - 2 + e^{-i\omega_s \Delta t} + \frac{k}{m} \Delta t^2 \right) e^{i\omega_s t^n} = 0$$

D'où

$$e^{i\omega_s \Delta t} - 2 + e^{-i\omega_s \Delta t} + \frac{k}{m} \Delta t^2 = 0$$

En utilisant la formule d'Euler, nous réécrivons l'expression précédente :

$$2 \cos \omega_s \Delta t - 2 + \frac{k}{m} \Delta t^2 = 0$$

Ou encore comme suit :

$$\cos \omega_s \Delta t = 1 - \frac{k \Delta t^2}{m \cdot 2}$$

D'où l'expression de la pulsation numérique :

$$\omega_s \Delta t = \text{Arccos} \left(1 - \frac{k \Delta t^2}{m \cdot 2} \right)$$

Compte tenu de l'expression de la pulsation dans (3.16), l'expression précédente se réécrit :

$$\omega_s \Delta t = \text{Arccos} \left(1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{2} \right) \quad (3.21)$$

En introduisant n (nombre entier), le nombre de pas de discrétisation d'une période d'oscillation T , nous pouvons exprimer le pas de temps du schéma numérique comme suit :

$$n = \frac{T}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega n} \quad (3.22)$$

En le reportant dans l'équation (3.21), nous obtenons finalement :

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

$$\omega_s \Delta t = \text{Arccos} \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2} \right)$$

Sur la Figure 151 on trace en fonction de n l'erreur entre deux solutions : exacte $\omega \Delta t$ et numérique $\omega_s \Delta t$. On voit qu'avec 6 pas d'intégration par période d'oscillation on a environ 5% d'erreur, et avec 13 pas on diminue l'erreur à 1%.

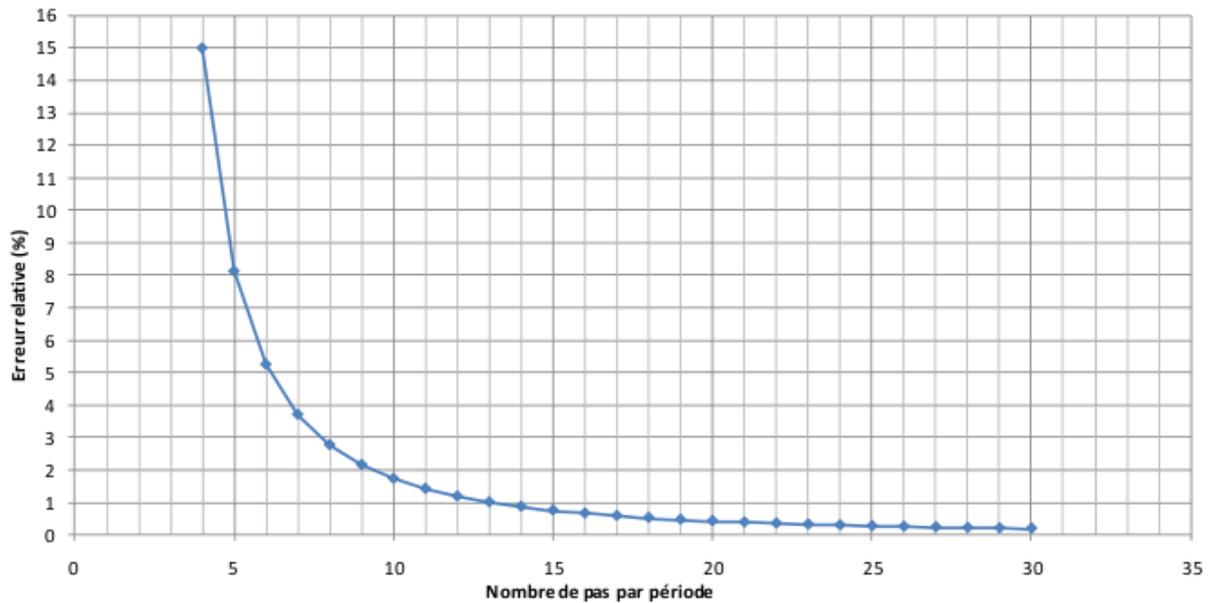


Figure 151 – Erreur sur la pulsation en fonction de la finesse de discrétisation en temps de la période par le schéma des différences centrées.

Pour être stable, la solution explicite doit vérifier la condition sur le pas de temps qui doit être inférieur au pas de temps critique :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega}$$

Par ailleurs, nous pouvons réécrire (3.22) sous forme d'une inégalité comme suit :

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{n \omega} \quad (3.23)$$

Cette condition fait apparaître un coefficient $\frac{\pi}{n}$ qui doit donc être inférieur ou égal à 1 pour que le schéma explicite reste stable. La stabilité est assurée pour $n \geq 4$, ce qui correspond à $c_{stab} \leq 0,785$.

Concernant la précision, pour avoir moins de 5% d'erreur on doit prendre $n \geq 6$ (Figure 151), ce qui se traduit par le coefficient :

$$\frac{\pi}{6} \leq 0,52$$

alors que pour avoir 1% d'erreur, on doit prendre $n \geq 13$:

$$\frac{\pi}{13} \leq 0,24$$

Le critère que nous proposons (condition (3.23)) a été obtenu par discrétisation temporelle des grandeurs cinématiques dans l'équation du Principe Fondamental de la Dynamique et par le schéma

explicite des différences centrées, ce qui a permis de faire apparaître la pulsation propre ω_s restituée par le schéma numérique d'intégration temporelle. Quand on augmente la valeur de n , l'erreur relative entre ω_s et la fréquence propre ω du système tendent vers 0, ce qui montre que le critère permet d'approcher les propriétés fréquentielles de la solution analytique. Nous allons tester dans la sous-section qui suit les capacités prédictives de ce critère sur le pas de temps à utiliser pour que la solution numérique dans le domaine temporel soit proche de la solution analytique à une erreur donnée.

3.4.5.3 Application numérique sans amortissement

Le chargement imposé ici à l'ED béton est de type Heaviside (force imposée constante F au cours du temps), afin d'exciter le système dès l'instant initial et le faire ensuite osciller avec une amplitude constante. L'évolution de l'oscillateur au cours du temps est régie par le système (3.24), obtenue en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique.

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + ku &= F \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

La solution analytique en déplacement du problème (3.24) s'écrit :

$$u(t) = \frac{F}{m\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t)), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.25}$$

Le terme ω_0 est la pulsation propre du système.

Nous lançons plusieurs simulations EUROPLEXUS avec une liaison acier-béton soumise à un chargement de type Heaviside pour différentes valeurs de n . La solution numérique du déplacement de l'élément discret béton obtenue est comparée pour chaque cas avec la solution analytique donnée par l'équation (3.25), (voir Figure 152).

On constate que pour $n = 3$ le calcul devient rapidement instable. En effet, le coefficient de stabilité $c_{stab} = \pi/3$ est supérieur à 1, ce qui explique l'apparition de l'instabilité.

La stabilité du calcul est retrouvée pour $n = 4$ ($c_{stab} = \pi/4 < 1$), mais la précision numérique est mauvaise. La solution numérique a une amplitude qui varie fortement d'une période à l'autre, et se déphase rapidement par rapport à la solution théorique.

On constate en regardant les courbes de la Figure 152 que pour $n = 6$ l'amplitude est relativement bien restituée sur les cinq premières périodes et le déphasage devient presque négligeable sur la première période des oscillations. A partir de $n = 10$, les courbes sont presque confondues sur plusieurs périodes.

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

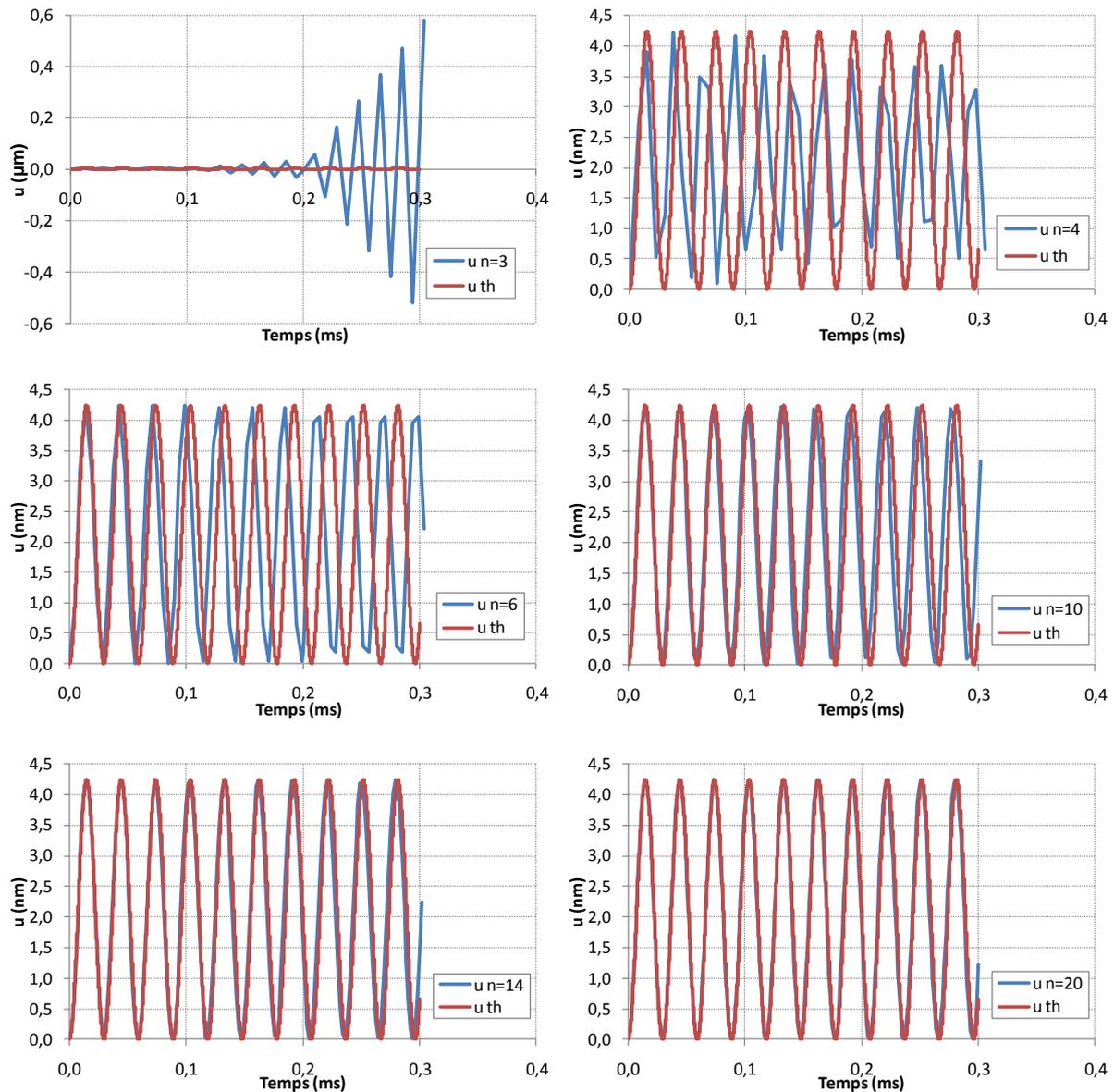


Figure 152 – Comparaison des déplacements obtenus numériquement avec la solution analytique en fonction de n .

Pour chaque simulation, nous avons calculé les erreurs relatives sur l'amplitude et la période d'oscillation de la solution numérique en déplacement (Tableau 8).

n	Erreur relative entre u_{num} et u_{th} (%)	
	amplitude	période
6	0,00015	-4,53
10	-1,11	-4,53
14	-0,8	1,83
20	-0,46	0,25

Tableau 8 – Erreurs relatives de la solution numérique pour les différentes valeurs de n .

On constate que pour $n = 6$ (ligne du Tableau 8 teintée en bleu) les erreurs relatives sur l'amplitude et sur la période sont bien inférieures à 5%, et pour $n = 14$ (ligne teintée en rouge) elles sont de l'ordre de 1%, comme les erreurs relatives déterminées pour la pulsation propre sur la Figure 151 pour les mêmes valeurs de n .

Dans les calculs d'impact, on n'a pas forcément besoin de reproduire précisément plusieurs périodes d'oscillations de la structure lorsqu'on s'intéresse à sa réponse locale. On peut donc dans ce cas prendre une valeur de n relativement faible. Néanmoins, si la réponse vibratoire doit être étudiée, on a la possibilité d'augmenter la valeur de n pour garantir aussi la précision de ce type de calcul.

3.4.5.4 Application numérique avec amortissement

Dans le cadre de notre étude, l'ajout d'amortissement dans la liaison a été envisagé dans le but de réduire éventuellement l'amplitude d'oscillations haute fréquence qui viennent parasiter sa réponse dynamique. L'amortissement doit donc être faible (régime sous-critique) : $\zeta < 1$ pour ne pas influencer la dynamique générale du système. L'amortissement visqueux se traduit par l'ajout d'un terme dépendant de la vitesse dans l'équation d'équilibre des efforts :

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku &= F \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

où c désigne le coefficient d'amortissement. En divisant par m , on peut réécrire (3.26) comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u &= \frac{F}{m}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_0} \\ u(0) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 0 \end{aligned}$$

avec ζ l'amortissement réduit du système. La nature et l'intensité de l'amortissement est déterminée par la valeur du coefficient ζ . La solution analytique est donnée par :

$$u(t) = \frac{1}{m} \frac{F}{\omega_0^2 \zeta^2 + \omega_D^2} \left(1 - e^{-\omega_0 \zeta t} \cos(\omega_D t) - \frac{\omega_0 \zeta}{\omega_D} e^{-\omega_0 \zeta t} \sin(\omega_D t) \right)$$

Nous activons l'amortissement dans la liaison acier-béton en prenant un coefficient d'amortissement réduit très faible ($\zeta = 1\%$) représentatif de la valeur qu'on lui affectera afin de limiter le bruit numérique qui peut apparaître sur les efforts dans la liaison. Nous relançons les deux simulations numériques de la réponse dynamique de la liaison ($n = 6$ et $n = 14$) (Figure 153 et Tableau 9).

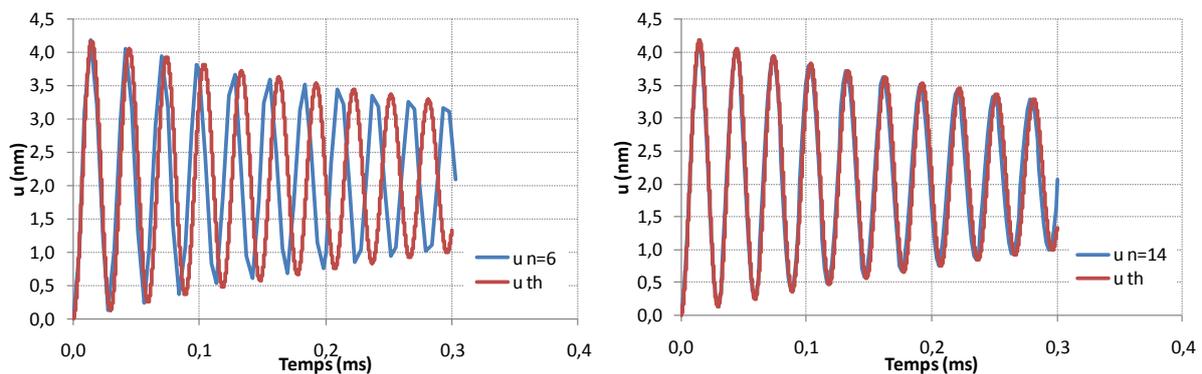


Figure 153 – Comparaison des solutions numérique et analytique pour $n = 6$ (à gauche) et $n = 14$ (à droite).

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

n	Erreur relative entre u num et uth (%)	
	amplitude	période
6	0,14	-5,48
14	-0,33	0,83

Tableau 9 – Erreur relative de la solution numérique pour $n = 6$ et $n = 14$.

Les erreurs relatives du Tableau 9 sont très proches de celles correspondant au même nombre n dans le cas non amorti (Tableau 8). On peut dire que dans le cas d'un amortissement très faible apporté à la liaison, la démarche entreprise (de (3.15) à (3.23)) permet d'obtenir un critère sur la précision de l'intégration cohérent en fréquentiel et en temporel qui ne détériore pas la précision des calculs par rapport à un système non amorti.

L'étude dynamique de la liaison acier-béton a permis de trouver une condition à imposer au pas de temps pour que l'intégration temporelle de sa réponse dynamique par le schéma des différences centrées soit précise à une erreur relative près. Le critère porte sur n , le nombre de pas de discrétisation d'une période d'oscillation de la solution en déplacement. Pour $n = 14$, les erreurs relatives sur l'amplitude et sur la période de la solution en déplacement, avec ou sans amortissement, sont de l'ordre de 1%. Par (3.23), on en déduit la valeur du paramètre c_{stab} qui pondère l'expression du pas de temps critique.

$$c_{stab} \leq \frac{\pi}{14} \approx 0.23$$

Pour satisfaire plus largement cette inégalité, nous prendrons $c_{stab} = 0.2$ pour toutes nos simulations.

Le même type d'analyse peut être effectué pour les liens cohésifs et de contact car il suffit d'encastrement un des deux ED pour se ramener à un oscillateur à un degré de liberté. Nous adopterons donc la même formule de calcul du pas de temps critique et le même coefficient c_{stab} pour définir le pas de temps d'intégration imposé par ces liens.

3.4.6 Simulation d'un essai de tirant

Pour tester la capacité de notre modèle à reproduire la fissuration du béton en présence d'une armature on considère un cas simple de tirant, dans lequel le rôle de l'interface acier-béton dans l'endommagement et la rupture du béton est prépondérant. L'essai de tirant est probablement le plus approprié pour cette étude car le chargement est appliqué directement sur l'armature dans la direction longitudinale, l'interface acier-béton est donc fortement sollicitée lors du transfert des efforts de l'armature au béton. Des phénomènes dus à la liaison acier-béton comme la redistribution des contraintes et la concentration locale des efforts de traction dans le béton peuvent être étudiés.

Dans sa thèse, Torre-Casanova (Torre-Casanova, 2012) a développé un modèle d'interface acier-béton qui utilise aussi une formulation mixte (éléments volumiques pour le béton et éléments finis barre pour les armatures) et a simulé des essais de tirant. Dans l'optique de faire une comparaison des résultats numériques obtenus par deux modèles différents, nous reprenons les paramètres géométriques et mécaniques de son modèle de tirant (Figure 154).

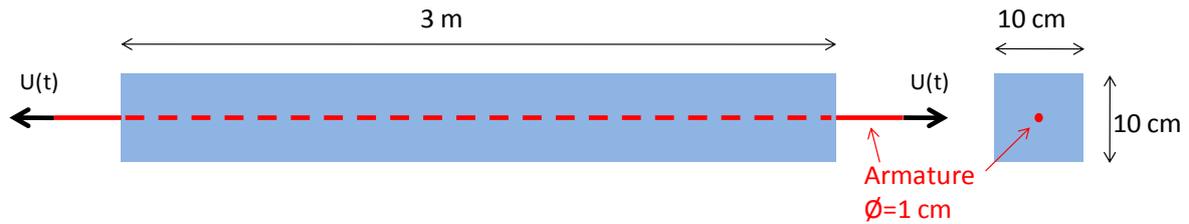


Figure 154 – Schéma du tirant étudié dans (Torre-Casanova, 2012).

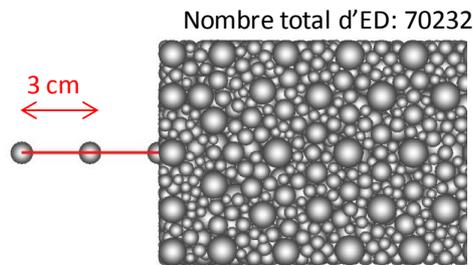


Figure 155 – Zoom sur l'extrémité gauche du maillage du tirant.

Les caractéristiques mécaniques du béton et de l'armature sont celles proposées dans (Torre-Casanova, 2012). Elles sont rappelées sur le Tableau 10. L'acier de l'armature a un comportement décrit par une loi élasto-plastique parfaite.

Module de Young	30 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Limite de compression	30 MPa
Limite de traction	2 MPa

Masse volumique	7800 kg/m ³
Module de Young	210 GPa
Coefficient de Poisson	0,3
Limite élastique	400 MPa

Tableau 10 – Caractéristiques mécaniques du béton (à gauche) et de l'armature (à droite).

Après application de la procédure d'identification, nous obtenons les paramètres de notre modèle éléments discrets (Tableau 11).

Masse volumique	2500 kg/m ³
Module de Young	30 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Limite locale de traction	2 MPa
Cohésion	6 MPa
Angle de frottement interne	6°
Angle de frottement de contact	6°
Adoucissement	2,5

Tableau 11 – Paramètres du modèle de béton utilisé pour le tirant.

Dans (Torre-Casanova, 2012), l'essai de tirant est simulé avec deux lois d'adhérence différentes : parfaite et élastique linéaire. Dans notre modèle la résistance au déplacement relatif entre l'élément poutre et l'élément discret est déterminée par des raideurs K_N et K_S . On ne peut donc pas représenter une liaison parfaite traduisant l'absence de déplacement relatif entre les deux éléments. Par conséquent, nous ne simulons l'essai de tirant qu'avec la loi d'adhérence élastique linéaire :

$$\tau = k \times g, \quad k = 10^{10} \text{Pa/m}$$

D'habitude l'essai de tirant est réalisé en statique (Farra et Jaccoud, 1993). Pour simuler cet essai en dynamique sans que le temps final de simulation soit trop important, on impose une vitesse

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

beaucoup plus élevée sur chacun des nœuds extrémité de l'armature (Figure 156), afin de conserver la symétrie et l'équilibre des efforts de part et d'autre de la poutre tant que le tirant est non fissuré. Nous vérifierons cependant la balance énergétique lors du calcul pour s'assurer que l'énergie cinétique ne soit pas trop élevée et qu'on n'est pas très loin du cadre quasi-statique.

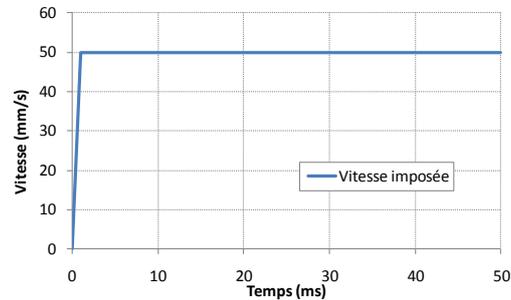


Figure 156 – Evolution de la vitesse imposée à l'extrémité de l'armature au cours du temps.

Sur la Figure 157, nous montrons l'état d'endommagement du béton du tirant à des instants successifs. Entre les instant t_0 et t_1 , le comportement du tirant est élastique, aucune fissure n'apparaît. La phase de fissuration commence à l'instant t_1 , avec deux premières fissures qui apparaissent respectivement au premier quart et à la moitié du tirant. Des macro-fissures continueront à apparaître jusqu'à l'instant t_4 . Après l'instant t_4 , il n'y a plus de nouvelles fissures qui apparaissent dans le tirant : on en déduit que la phase de macro-fissuration du tirant est terminée. Désormais l'essentiel de la résistance au déplacement imposé sera assuré par l'armature qui va plastifier quand le chargement devient important. On peut le voir dans la phase finale de la courbe bleue sur la Figure 159, qui montre que l'effort de réaction sur le nœud extrémité de l'armature reste constant tandis que le nœud continue de se déplacer, ce qui atteste du régime plastique de l'armature.

Pour l'état final considéré, on a représenté sur la Figure 158 l'état de contrainte longitudinale dans l'armature, et on constate que cette contrainte atteint bien la limite plastique de l'acier dans les zones où le béton s'est fissuré.

Sur la Figure 158 on a également montré le champ de déplacement longitudinal U_x dans le béton du tirant et on voit que ce champ est discontinu à chaque fissure, ce qui signifie que ces dernières se sont bien propagées sur toute la section du tirant, formant ainsi des blocs séparés de béton comme ce qui est constaté expérimentalement (Farra et Jaccoud, 1993). Le tirant comporte un nombre fini de macro-fissures réparties assez régulièrement sur sa longueur : ce résultat est constaté dans (Farra, 1995). On peut en déduire que le modèle de liaison A-B proposé transmet bien les efforts entre l'armature et le béton jusqu'à la rupture de ce dernier, et notre modèle de béton reproduit bien sa rupture fragile en traction.

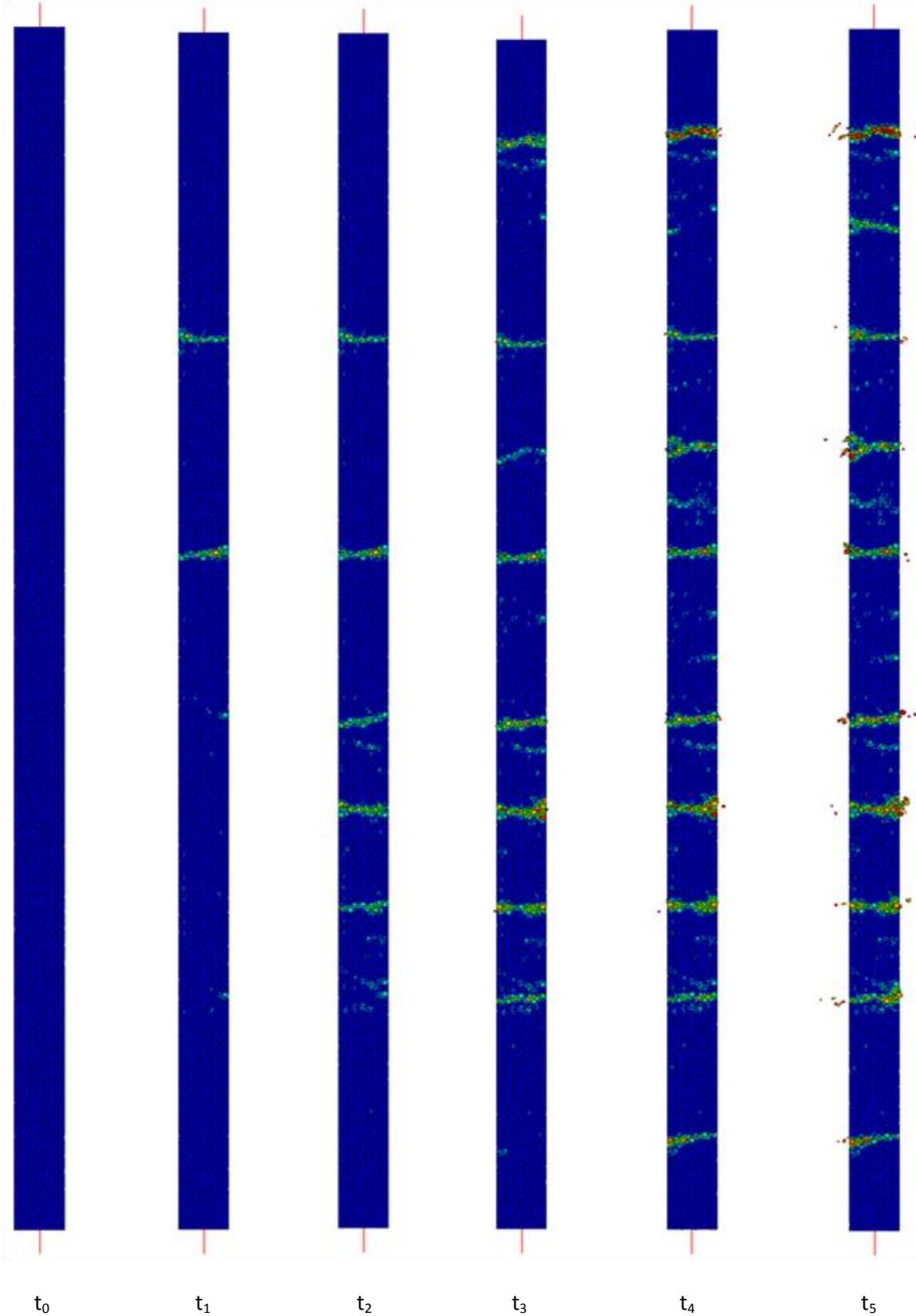


Figure 157 – Etat d’endommagement du béton du tirant à des instants successifs du calcul.

3.4 Nouveau modèle de liaison A-B dans un cadre mixte ED-EF

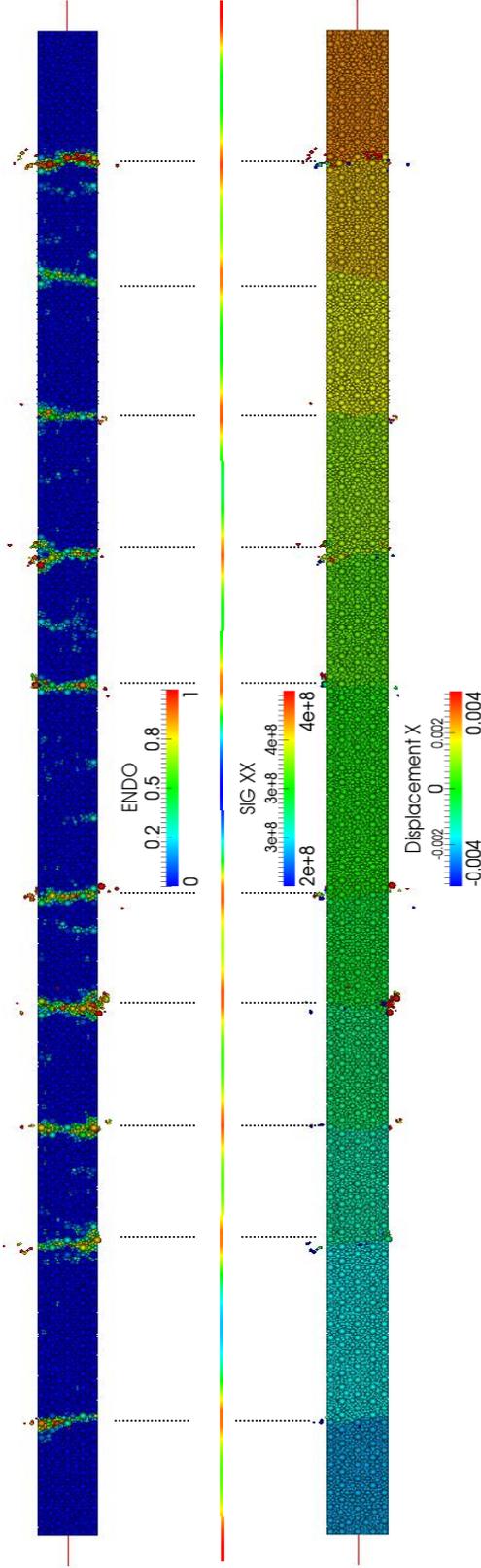


Figure 158 – Vue en vis-à-vis de l’endommagement dans le tirant, de la plasticité de l’armature et des blocs de béton à la fin du calcul.

Pour examiner l'évolution du transfert des efforts entre l'armature et le béton du tirant, nous traçons la courbe force-déplacement du nœud extrémité de l'armature soumis à un déplacement imposé (Figure 159). Ce résultat est comparé à la courbe issue des résultats numériques obtenus dans (Torre-Casanova, 2012) avec un code statique. On observe que les deux courbes ont une évolution très similaire dans la phase élastique (déplacement inférieur à 0.8 mm). Quand la phase de fissuration commence avec une première fissure, on observe une chute importante de l'effort de réaction (rupture fragile du béton) pour les deux courbes, puis un comportement monotone croissant entre chaque apparition de fissure pour la courbe rouge et une évolution assez chahutée mais globalement croissante de la courbe bleue. Les oscillations de la courbe bleue s'expliquent par des effets dynamiques dus au schéma explicite utilisé et aux cassures du béton qui rompent l'équilibre quasi-statique, alors que la courbe rouge a été obtenue dans le cadre d'un calcul statique.

Lorsque la phase de fissuration du béton se termine et que l'armature commence à plastifier, nous observons que la courbe bleue tend progressivement vers la courbe rouge et l'amplitude de ses oscillations diminue. Dans cette dernière phase, les oscillations de la courbe bleue sont écrêtées quand elles dépassent 31 kN, la limite de plasticité parfaite de l'armature. On constate donc qu'on arrive bien à retrouver la phase élastique du comportement du tirant et la phase de plastification de l'armature avec notre modèle de liaison acier – béton.

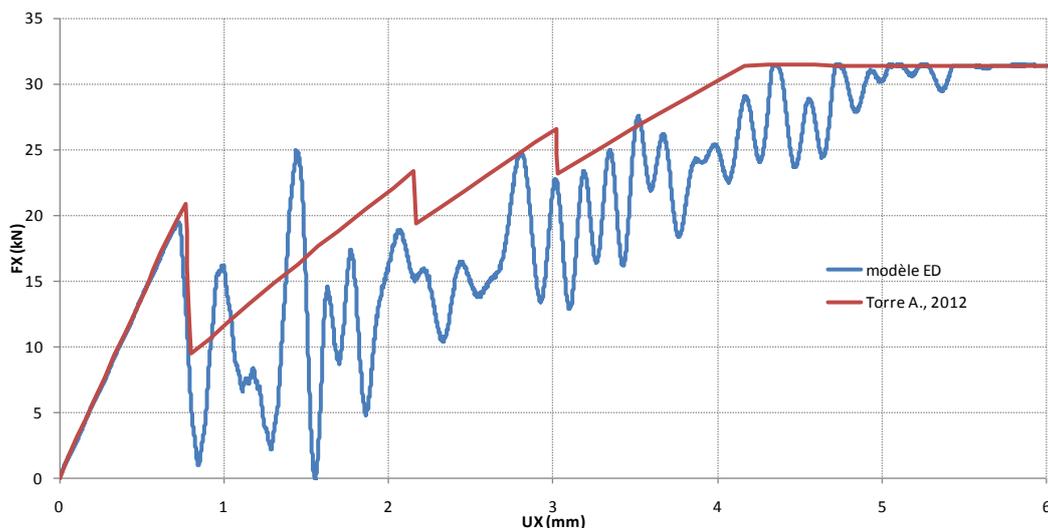


Figure 159 – Courbe force-déplacement de l'extrémité chargée du tirant.

Les modèles de béton et de liaison acier-béton que nous proposons permettent de reproduire qualitativement le comportement du béton et de l'armature sur une simulation d'un essai de tirant. Le comportement fragile du béton est bien restitué : un nombre fini de macro-fissures apparaissent et sont disposées assez régulièrement sur la longueur du tirant. Par ailleurs, les blocs de béton créés restent intègres (sans fissures intermédiaires ni endommagement). Le transfert des efforts entre l'acier et le béton est correctement représenté ainsi que la répartition de ces efforts le long de l'armature avec plastification de cette dernière dans les zones fissurées où le béton est rompu.

3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre nos travaux sur la modélisation de l'interaction entre l'acier et le béton. Après une étude bibliographique sur les modèles de liaison acier-béton « discrets » développés dans la littérature, nous avons exposé le cadre théorique du modèle proposé par J. Rousseau qui repose sur une modélisation en ED sphériques du béton et des armatures et qui permet un découplage de la liaison A-B en deux composantes normale et tangentielle. Nous avons présenté les améliorations que nous avons apporté à ce modèle en prenant en compte, dans le calcul des efforts d'interaction dans la liaison, le changement de direction de l'armature au cours de la déformation de la structure. Cependant, via une étude approfondie du calcul des efforts générés par la liaison, nous avons montré que l'équilibre en rotation de ce modèle de liaison ne peut être assuré sans perturber sa réponse normale et tangentielle, ce qui le rend instable même lors d'un mouvement de corps rigide.

Face à ce constat, nous avons proposé un nouveau modèle qui relie un ED béton à deux ED acier, dans lequel l'équilibre en rotation est assuré par la résolution d'un système isostatique simple. Ce nouveau modèle garde la propriété importante de la liaison qui consiste en un découplage des efforts normal et tangentiel. Après sa mise en œuvre dans EUROPLEXUS, le modèle a été évalué sur des cas-tests simples montrant un comportement dépourvu d'instabilités aussi bien pour des mouvements de corps rigides (translation et/ou rotation d'ensemble) que lors d'une flexion d'une poutre renforcée par une armature longitudinale. Nous avons cependant mis en évidence des inconvénients dus à la représentation par des éléments discrets des armatures empêchant la modélisation de structures en béton armé densément ferrillées.

Pour s'affranchir de ces problèmes, nous avons proposé et mis en œuvre une nouvelle modélisation de liaison A-B reposant sur la modélisation ED du béton et une modélisation éléments finis poutre des armatures longitudinales et transversales. On évite ainsi les inconvénients dus à la modélisation ED des armatures, tout en gardant les avantages du précédent modèle : équilibre de la liaison en rotation et découplage des composantes. Nous avons associé un comportement physique paramétrable à notre liaison acier-béton selon chacune de ses composantes : loi d'adhérence multipoints pour la liaison tangentielle, loi élastique en compression et adoucissante en traction pour la liaison normale. Sur des problèmes simples impliquant une seule liaison A-B sous un chargement judicieusement choisi, nous avons montré que le modèle mixte ED-EF de la liaison proposé et implanté dans EUROPLEXUS permet de gérer correctement l'ensemble des régimes impliquant plusieurs phases de charges et décharges aussi bien en traction qu'en compression. Sur une simulation d'un essai d'arrachement, nous avons réalisé une étude de l'influence de la finesse du maillage ED sur le coefficient d'interaction qui détermine la zone de création des liens A-B autour des armatures.

Une étude à la fois théorique et numérique sur la stabilité et la précision du modèle de la liaison a aussi été réalisée qui a permis d'obtenir un critère que doit vérifier le pas de temps pour que l'intégration temporelle soit stable et précise à une erreur relative donnée. Nous avons ajouté dans le modèle de liaison un amortissement numérique permettant en cas de besoin d'atténuer des oscillations hautes fréquences de la solution dynamique. Nous avons également traité le cas de grands glissements en introduisant la possibilité pour les éléments béton impliqués dans les liaisons A-B de pouvoir glisser le long de l'armature.

La simulation de l'essai de tirant avec le modèle proposé montre sa capacité à reproduire le transfert des efforts entre le béton et l'armature au niveau de l'interface acier-béton, ce qui conduit à l'apparition d'un nombre fini de macro-fissures le long du tirant. Le modèle numérique reproduit correctement la plastification de l'armature aux endroits où se trouvent des macro-fissures, montrant que seul l'acier travaille dans ces zones pour résister à la traction. Cette évaluation de notre modèle est essentiellement qualitative. Le chapitre suivant va présenter l'application du modèle mixte ED-EF à la simulation des essais d'impact sur structures de taille industrielle, où les comparaisons quantitatives avec les mesures expérimentales seront réalisées pour montrer les capacités prédictives de ce modèle.

Chapitre 4

Simulation d'impacts sur des structures en béton armé

4.1 Introduction

Nous avons consacré les deux chapitres précédents à la présentation de deux ingrédients-clés du cadre numérique que nous avons développé dans cette thèse : le modèle éléments discret (ED) de béton et le modèle mixte EF-ED de la liaison acier-béton. Pour chacun de ces modèles, nous avons montré sur des cas-tests de complexité croissante leur capacité à représenter de manière réaliste les principaux phénomènes physiques qui caractérisent le comportement du béton dans les régimes linéaire et non linéaire et de la liaison armature-béton.

Dans ce dernier chapitre, nous appliquons l'outil que nous avons développé à la simulation de vraies structures en béton armé dans toute leur complexité. Cependant, il ne s'agit pas de montrer des calculs illustratifs (qualitatifs) sur des structures réelles de grande taille comme des bâtiments industriels, car ce ne serait pas très approprié pour un travail de thèse. L'objectif ici est de simuler de manière détaillée quelques essais connus réalisés sur des structures en béton armé, ce qui nous permettra, d'une part, de valider l'ensemble de notre approche numérique et, d'autre part, de recueillir des éléments pour définir les pistes d'amélioration des modèles que nous avons mis en œuvre.

Nous présentons d'abord la simulation d'un essai de choc mou résultant d'une chute gravitaire (vitesse d'impact de 5.425 m/s) d'un projectile lourd sur une poutre en béton armé. Cet essai a été réalisé au CEA dans le cadre de la thèse d'Armand Leroux (Leroux, 2012).

La deuxième simulation présentée concerne l'essai II-4 de la campagne expérimentale Meppen (Jonas et al., 1979). Ces essais d'impact mou ont été conçus pour être représentatifs de la chute d'avion sur bâtiment nucléaire, et ils sont utilisés pour benchmarquer et valider les codes de calcul du domaine accidentel (IRIS, 2010). Dans ces essais, un projectile de grande taille très déformable percute une dalle épaisse en béton armé très ferrillée. On reste donc dans le cadre d'un choc mou mais on monte considérablement en vitesse (impact à 250 m/s environ). La structure impactée n'est plus une poutre mais une dalle densément ferrillée et ayant des conditions d'appui complexes.

La troisième simulation réalisée concerne la modélisation d'un choc dur avec notre modèle, pour estimer ses capacités à reproduire le comportement d'une structure soumise à ce type de choc. La

simulation des chocs durs est un besoin exprimé à terme par EDF, et ce premier calcul permettra de donner des pistes à développer pour en améliorer la modélisation par éléments discrets.

4.2 Impact mou sur poutre

4.2.1 Description de l'essai

En 2011, le laboratoire d'études de Dynamique (DYN) du CEA à Saclay a lancé une campagne expérimentale d'essais d'impacts mous sur des poutres en béton armé pour compléter sa base de résultats de référence destinée à valider les modèles de béton implantés dans ses codes de calcul. Ces essais ont été réalisés à l'aide de la tour de chute gravitaire guidée ORION, qui permet de larguer un projectile d'une masse maximale de 900 kg depuis une hauteur allant jusqu'à 8 m (Figure 160 à gauche).



Figure 160 – Tour de chute ORION (à gauche), poutre en béton armé en position pour l'essai d'impact (à droite), (Piteau et Valin, 2011).

En dessous de la tour de chute, on installe la poutre en position pour l'essai d'impact (Figure 160 à droite). On distingue :

- la poutre en béton armé,
- un tampon en nid d'abeille aluminium posé en face supérieure de la poutre,
- deux appuis semi-cylindriques en face inférieure de la poutre,
- deux sangles de précontrainte assurant le non décollement de la poutre,
- deux plaques d'about aux extrémités latérales de la poutre, sur lesquelles sont soudées les armatures afin d'empêcher qu'elles ne glissent.

L'essai d'impact consiste à lâcher un projectile rigide de 311 kg sur la partie centrale supérieure de la poutre. La hauteur initiale du projectile par rapport à la poutre est de 1.5 m, sa vitesse à l'instant où il percute la poutre est de 5.425 m/s. Le rôle du tampon est d'écarter le pic d'effort afin de reproduire l'impact d'un projectile déformable, correspondant à un cas de type « choc mou ».

4.2 Impact mou sur poutre

Nous nous intéressons ici à l'essai sur une poutre dite « courte » dont les caractéristiques sont les suivantes (Figure 161) :

- longueur totale (avec les plaques d'about) de 1300 mm,
- distance entre les appuis de 1000 mm,
- section droite de la poutre 200 mm x 150 mm,
- présence de deux armatures inférieures HA12, deux armatures supérieures HA8 et de cadres lisses $\varnothing 6$ mm.

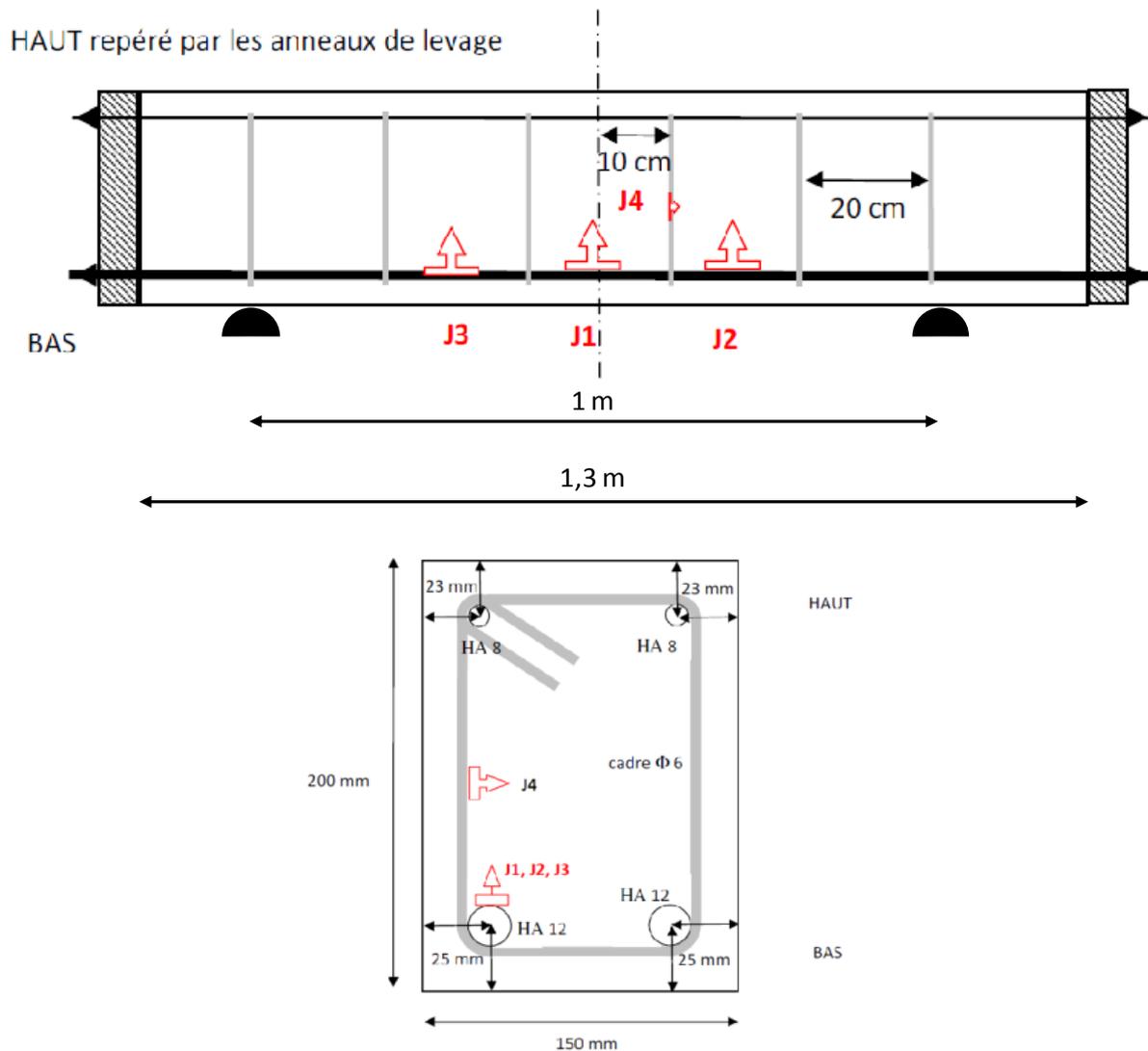


Figure 161 – Géométrie de la poutre et plan du ferrailage de la section (Piteau et Valin, 2011).

Les essais sont instrumentés de manière à récupérer l'évolution de :

- la flèche de la poutre, mesurée au centre de la face inférieure,
- la flèche de la poutre en un point excentré de 150 mm selon l'axe de la poutre en face inférieure,
- l'effort au moment de l'impact mesuré sur le projectile par un accéléromètre,
- la vitesse du projectile,
- la déformation des armatures en 4 zones distinctes (Figure 161 en haut).

En outre, à l'issue de l'essai, la hauteur résiduelle du tampon est également mesurée.

Il est à noter que l'essai d'impact a été précédé des essais de caractérisation du béton en compression et des essais d'arrachement réalisés au LMT Cachan, permettant ainsi d'avoir des éléments relativement fiables pour renseigner le modèle numérique.

4.2.2 Modélisation numérique

4.2.2.1 Maillage

Afin de reproduire au mieux les conditions de l'essai, nous avons réalisé une modélisation assez fine et détaillée du dispositif expérimental modélisant explicitement ses différents composants (Figure 162). Le béton de la poutre est représenté à l'aide du modèle ED, les autres parties étant modélisées dans le cadre EF classique.

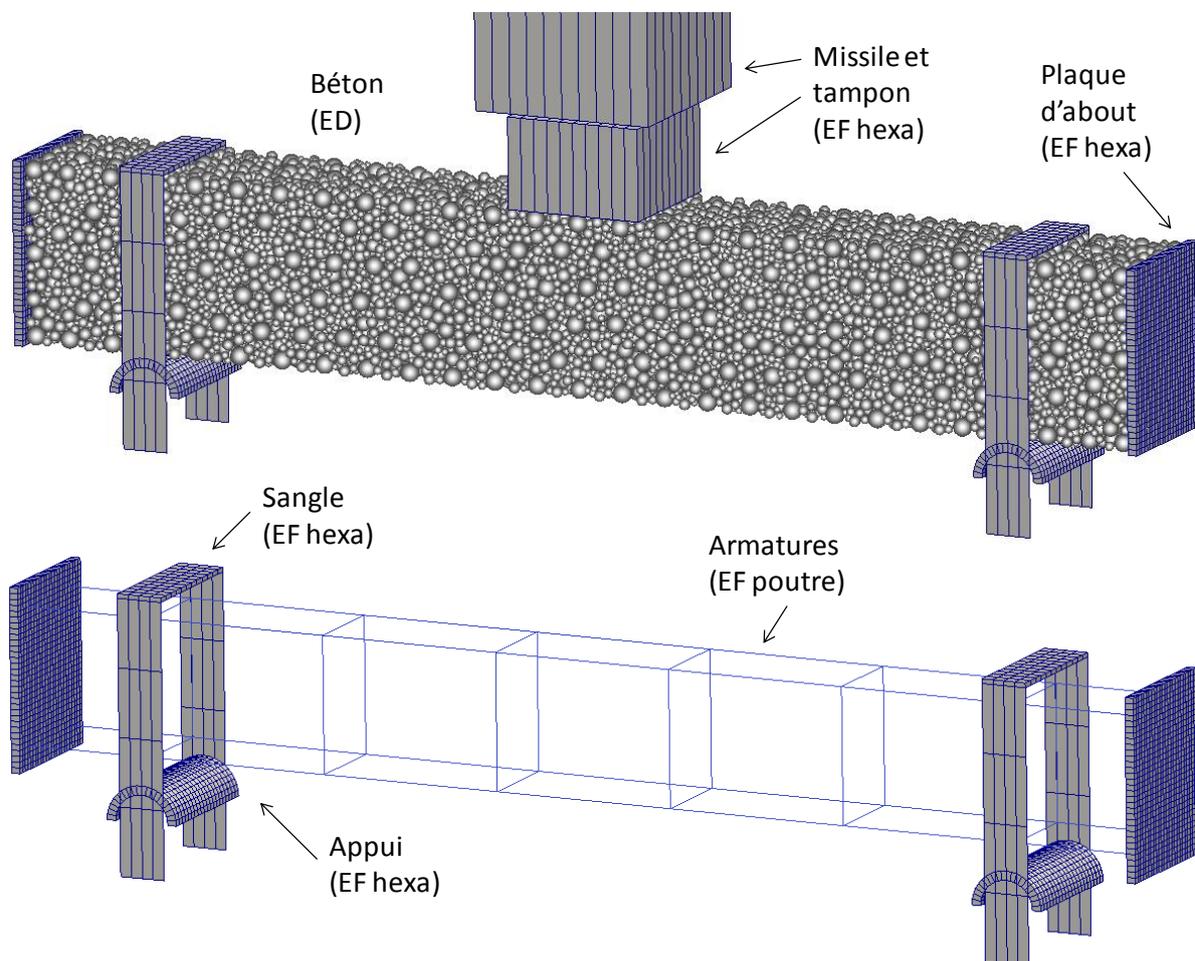


Figure 162 – Maillage de la poutre, du tampon et du missile avec (en haut) et sans le maillage du béton (en bas).

Les appuis en demi-cylindres sont maillés en hexaèdres et on leur affecte un comportement élastique. Leur base est bloquée, alors qu'on prescrit des conditions de contact unilatéral entre leur surface supérieure et le béton de la poutre. Les sangles sont modélisées sans la précontrainte. Leurs extrémités inférieures sont encastées et on traite du contact unilatéral entre la partie horizontale et la poutre en béton.

4.2 Impact mou sur poutre

Le projectile et le tampon sont discrétisés à l'aide d'une couche d'éléments volumiques allongés dans la direction de l'impact car ils ont essentiellement un comportement unidimensionnel.

Pour représenter le soudage entre les extrémités des armatures représentées par les éléments finis poutres et les plaques d'about modélisées en volumique, les nœuds géométriquement coïncidents de leurs maillages sont mergés. Puisque les plaques d'about et les appuis sont en acier et donc sont beaucoup plus rigides que le béton, nous leur affectons le comportement élastique linéaire.

4.2.2.2 Modélisation du tampon

Lors de l'impact, la force transmise à la poutre dépend fortement de la réponse du tampon en nid d'abeille aluminium car une partie non négligeable de l'énergie cinétique du projectile est dissipée par l'écrasement du tampon. Il est donc important de bien connaître et représenter son comportement. Préalablement à la tenue des essais de chute sur les poutres, une étude expérimentale (Piteau et Valin, 2011) a été réalisée afin de déterminer le matériau adéquat pour le tampon, avec comme critères l'obtention d'un plateau d'effort stable et d'amplitude maîtrisée. La caractérisation du tampon a été faite en situation réelle, c'est-à-dire lors d'un essai de chute similaire à celui réalisé sur les poutres, pour disposer de courbes expérimentales mesurant l'effort et l'écrasement qu'il subit.

L'essai de caractérisation du tampon a été simulé numériquement avec EUROPLEXUS dans (Idoux, 2013). Le résultat obtenu en termes de force est comparé avec le résultat expérimental sur la Figure 163. On retrouve notamment la pente initiale de montée en effort (1) jusqu'au plateau d'effort grâce au recalage du module d'Young, puis la valeur correcte de ce plateau (2) grâce au recalage de la contrainte seuil d'écoulement plastique. Les trois paramètres significatifs identifiés pour le tampon dans cette étude sont le module d'Young (valeur de 45 GPa), la contrainte seuil d'écoulement plastique (valeur de 4,8 MPa) et le coefficient de Poisson pris à une valeur nulle car le tampon s'écrase sans subir de déformation transverse.

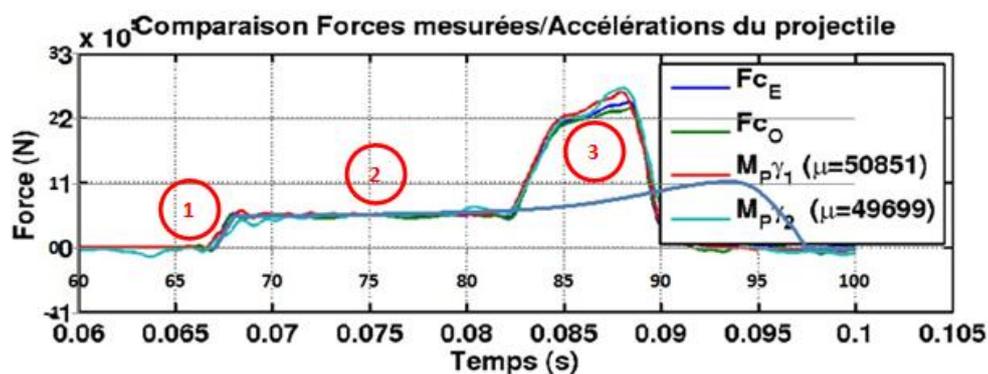


Figure 163 – Identification du comportement du tampon. La courbe numérique en bleu est superposée par transparence (Idoux, 2013).

4.2.2.3 Modélisation des armatures

L'acier des armatures et des cadres a été caractérisé au préalable des essais d'impact (Leroux, 2012) (Figure 164). A partir de ces courbes, on définit les valeurs moyennes des paramètres mécaniques pour chaque type d'armature que l'on va modéliser (Tableau 12).

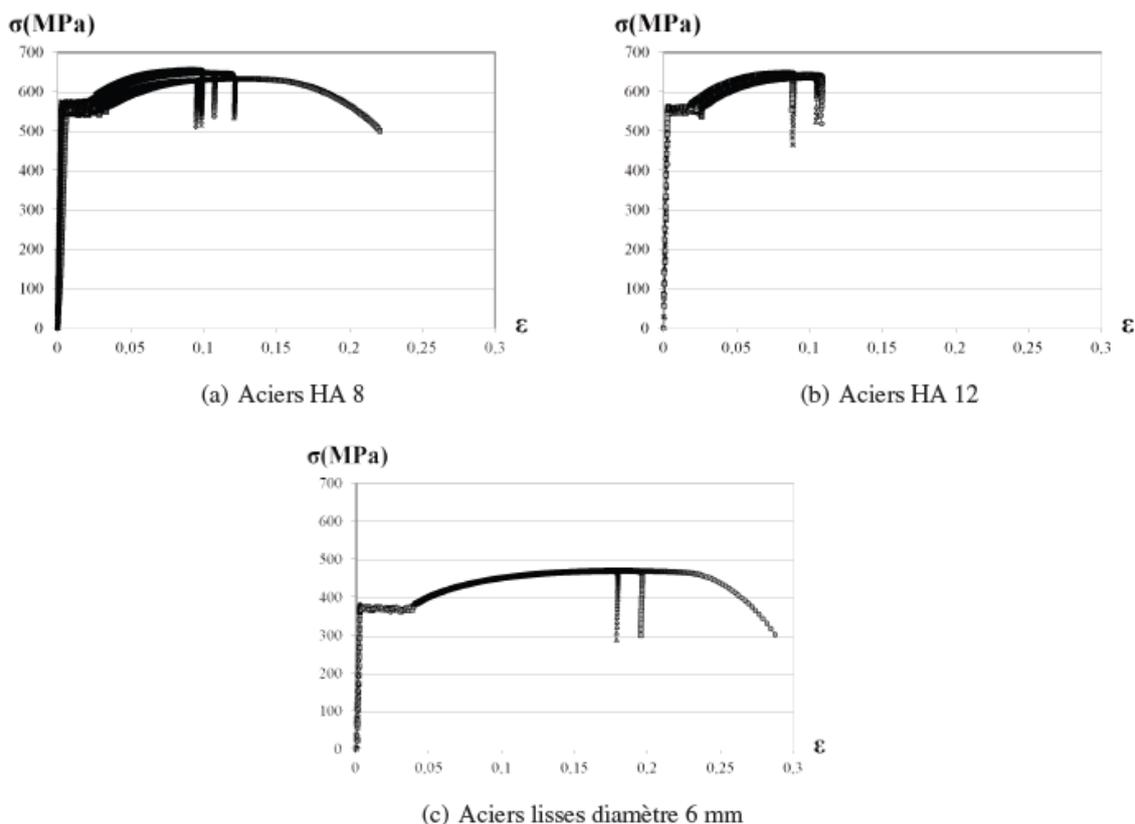


Figure 164 – Courbes de caractérisation des aciers (Leroux, 2012).

	E (GPa)	Re (MPa)	Rm (MPa)	Allongement à rupture (%)
Cadres lisses Ø6 mm	194,1	368,5	472,9	17,9
Fers supérieurs HA8	206,1	553,3	647,7	10,5
Fers inférieurs HA12	181,3	548,0	646,2	9,7

Tableau 12 – Caractérisation des armatures et des cadres (Leroux, 2012).

Nous représentons le comportement des armatures longitudinales et des cadres par une loi élasto-plastique à écrouissage isotrope sur la base du critère de Von Mises. L'effet de la vitesse de déformation n'est pas modélisé ici car il a été montré dans (Idoux, 2013) que cet effet a peu d'influence sur les résultats.

4.2.2.4 Modélisation du béton

Le comportement du béton utilisé pour les deux poutres courtes dans l'essai d'impact a été identifié sur des essais de compression simple (Piteau et Valin, 2011) (Figure 165). En appliquant la procédure d'identification des paramètres non linéaires (Chapitre 2) de notre modèle de béton, nous déterminons la courbe contrainte-déformation la plus proche (courbe bleue épaisse) des courbes expérimentales. Le jeu de paramètres obtenu est récapitulé dans le Tableau 13.

4.2 Impact mou sur poutre

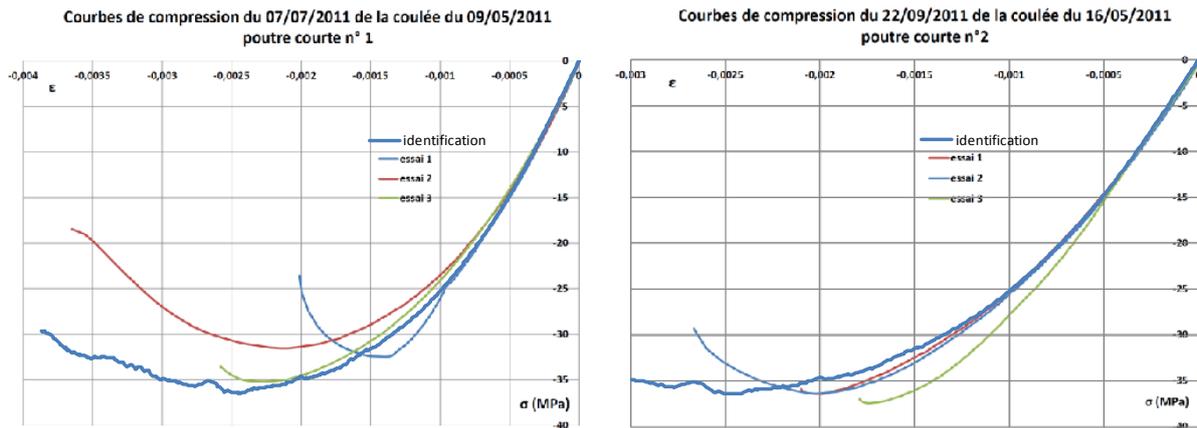


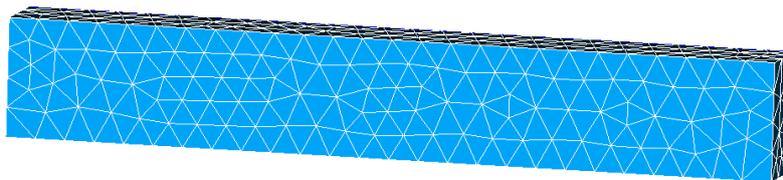
Figure 165 – Comportement expérimental du béton en compression et identification numérique.

Masse volumique	2300 kg/m ³
Module de Young	30 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Limite locale de traction	3 MPa
Cohésion	4,7 MPa
Angle de frottement interne	15°
Angle de frottement de contact	15°
Adoucissement	10

Tableau 13 – Paramètres du modèle ED du béton.

Pour étudier l'influence sur les résultats de la finesse du maillage éléments discrets, nous avons créé deux maillages ED de la poutre. Le premier maillage, plus grossier, a été réalisé en prenant 4 tétraèdres dans la direction de l'épaisseur de la poutre pour le maillage EF initial utilisé en entrée de l'outil SpherePadder++ (Figure 166).

4 TETR / côté: 2214 EF



24677 ED

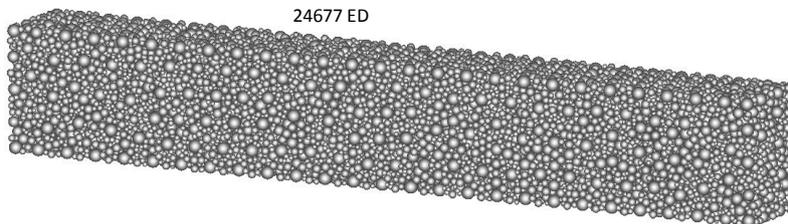


Figure 166 – Maillage 1 (4 tétraèdres) : maillage EF initial (en haut) et maillage ED final (en bas).

Le second maillage, plus fin, comporte 6 tétraèdres dans la direction de l'épaisseur de la poutre (Figure 167).

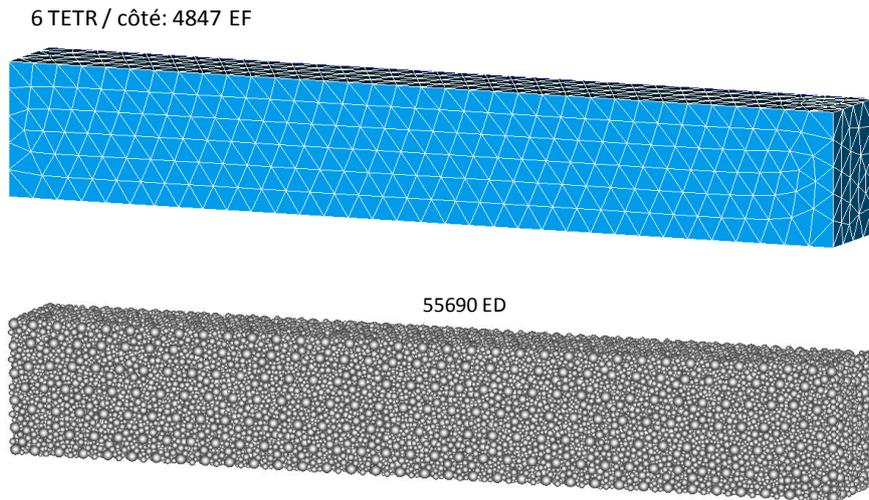


Figure 167 – Maillage 2 (6 tétraèdres) : maillage EF initial (en haut) et maillage ED final (en bas).

4.2.2.5 Modélisation de l'interface acier-béton

Au préalable de l'essai d'impact, des essais d'arrachement ont été réalisés dans (Leroux, 2012) pour évaluer la loi d'adhérence entre l'acier et le béton (Figure 168). La machine d'essai permet d'appliquer un effort de traction F sur l'armature. Au cours du chargement, on mesure le déplacement Δ_s de l'extrémité libre de l'armature. Avant coulage du béton, deux gaines de PVC ont été placées à chaque extrémité de l'acier, afin de s'affranchir des problèmes de bord (contraintes de compression dans le béton).

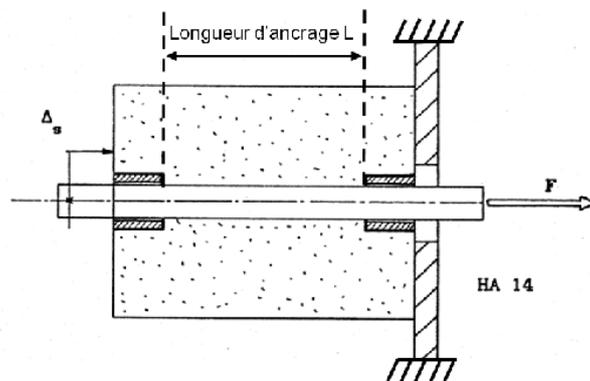


Figure 168 – Schéma de l'essai d'arrachement réalisé dans (Leroux, 2012).

Les deux diamètres d'acier HA, correspondant à ceux des armatures supérieures et inférieures (8 mm et 12 mm) présentes dans la poutre ont été testés avec comme résultat la loi d'adhérence reliant l'effort au déplacement relatif à l'interface (Figure 169). A partir de ces lois d'adhérence, en faisant l'hypothèse que le comportement local de la liaison est proche de celui obtenu globalement, nous définissons la composante tangentielle de notre modèle de liaison acier-béton grâce à la loi multipoints (chapitre 3).

4.2 Impact mou sur poutre

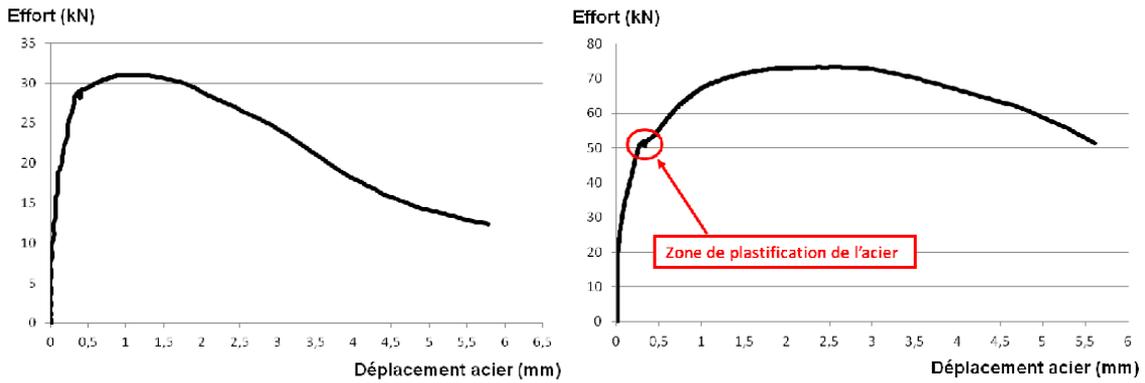


Figure 169 – Lois d'adhérence pour l'armature HA8 (à gauche) et l'armature HA12 (à droite).

Nous transformons l'effort mesuré dans l'essai en une contrainte tangentielle, en gardant sur l'axe de l'abscisse le déplacement relatif à l'interface. Les lois pour les trois types d'armatures (HA8, HA12 et cadres lisses 6 mm) que nous introduisons dans le calcul ont la forme présentée sur la Figure 170.

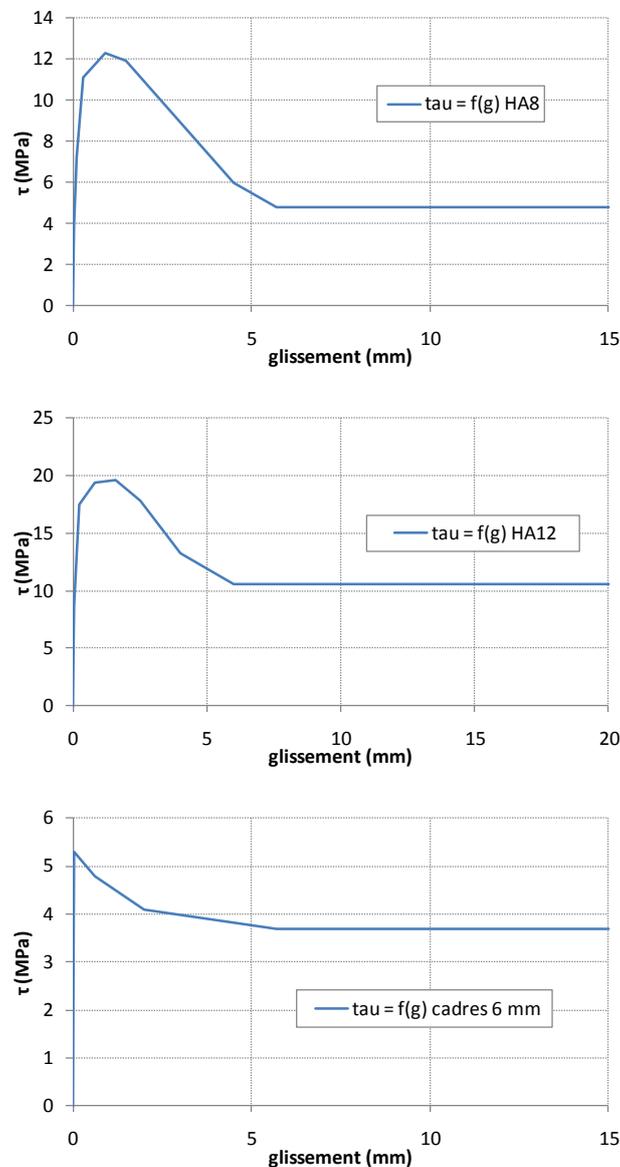


Figure 170 – Lois d'adhérence utilisées dans le calcul : HA8 (en haut), HA12 (au milieu), acier lisse (en bas).

Pour définir les paramètres de la composante normale de la liaison, nous nous sommes basés sur les paramètres locaux du béton. Seule la limite de traction de l'interface a été prise plus grande pour prendre en compte la contribution de l'armature.

Module de Young	30 GPa
Limite locale de traction	6 MPa
Adoucissement	10

Tableau 14 – Paramètres de la loi normale de notre modèle de liaison acier-béton.

4.2.2.6 Modélisation du contact

Les conditions de contact unilatéral ont été modélisées dans 8 zones distinctes correspondant aux interfaces entre les différentes parties du modèle : missile-tampon, tampon-béton, sangles-béton, plaques d'about-béton et appuis-béton (Figure 171). Le contact entre éléments discrets et éléments finis est assuré par la méthode des surfaces glissantes disponible dans EUROPLEXUS.

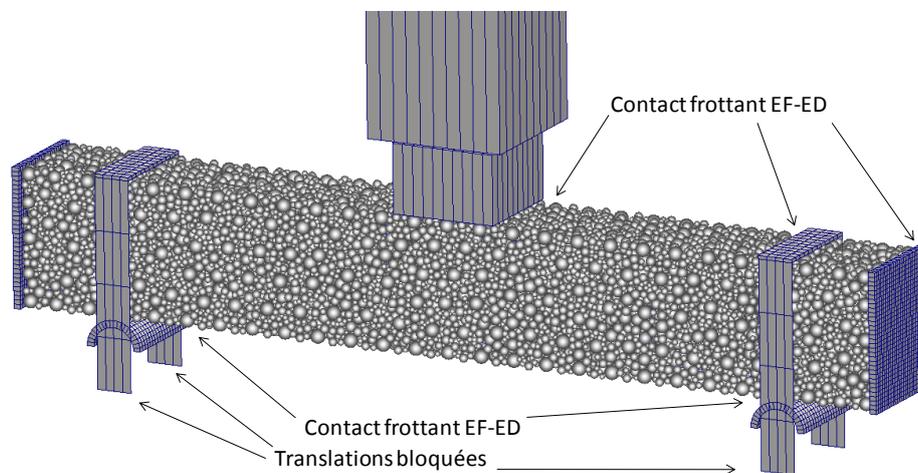


Figure 171 – Interfaces de contact entre les différents composants modélisés.

Le contact est frottant, il est donc nécessaire de définir les différents coefficients de frottement sur chaque interface. Il est montré dans (Idoux, 2013) que le frottement aux interfaces a une influence sur la flèche de la poutre et sur la force de contact : sans frottement, on observe une chute du plateau d'effort non retrouvée en essai, et l'obtention d'une flèche maximale beaucoup plus grande. Nous prenons le coefficient de frottement entre l'acier et le béton de 0.45.

4.2.3 Résultats

4.2.3.1 Modèle avec le maillage 1 (4 tétraèdres)

4.2.3.1.1 Endommagement

On montre sur la Figure 172 l'état d'endommagement de la poutre pendant les instants successifs du calcul.

4.2 Impact mou sur poutre

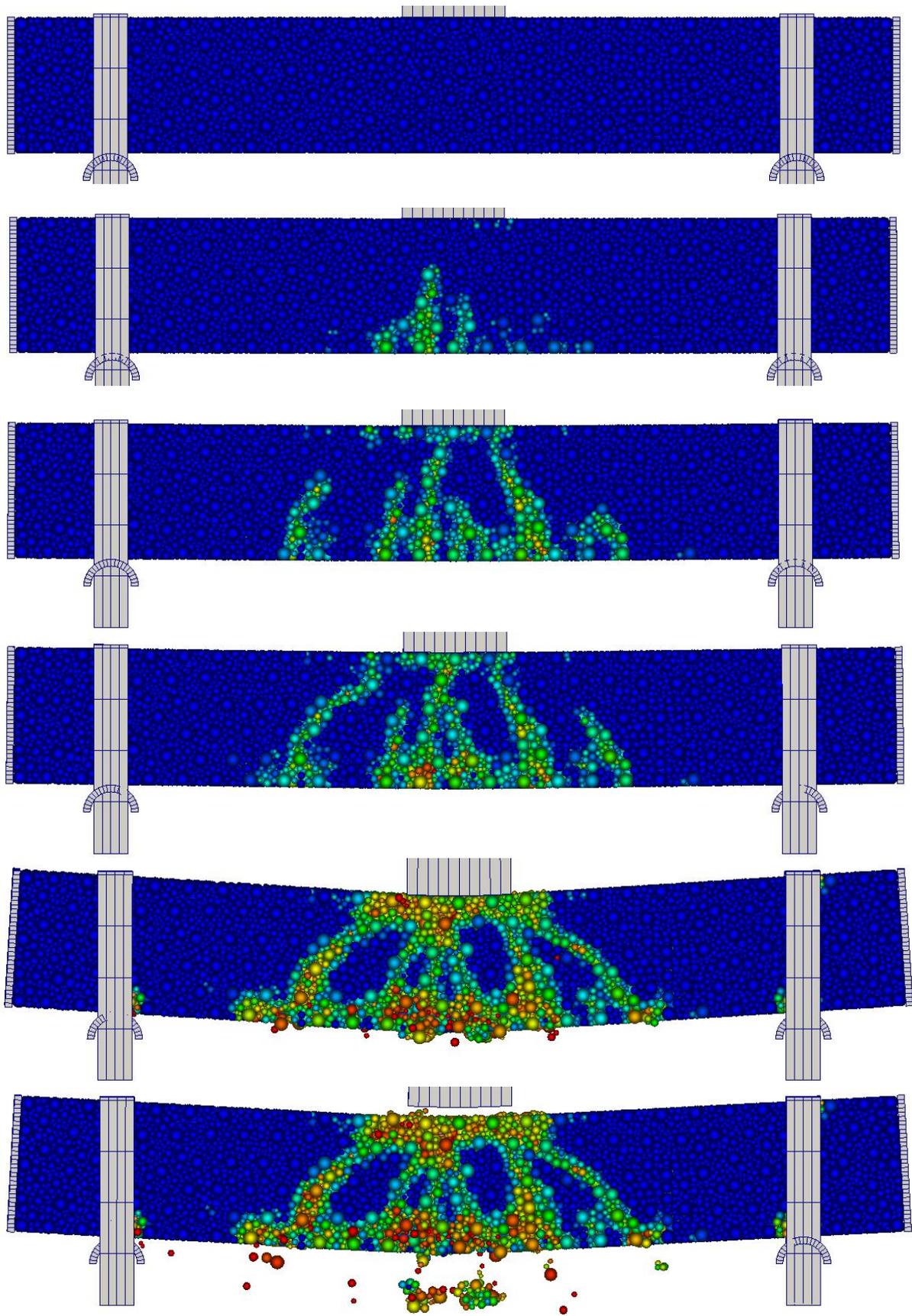


Figure 172 – Etat d'endommagement de la poutre à des instants successifs du calcul.

Au début, le premier foyer d'endommagement apparaît au milieu de la fibre inférieure de la poutre et se propage jusqu'à la fibre neutre. La flexion est donc la sollicitation la plus forte, ce qui montre que la structure réagit de manière globale à l'impact. L'endommagement continue ensuite à se propager dans la direction verticale jusqu'à la fibre supérieure. D'autres foyers d'endommagement apparaissent de part et d'autre de la zone centrale endommagée et rejoignent la fibre supérieure en direction oblique. On voit que vers la fin du calcul la courbure de la poutre est suffisamment importante pour être distinguée à l'œil nu. Néanmoins, la poutre conserve son intégrité et arrête le projectile, qui rebondit ensuite comme dans l'essai.

On constate que l'endommagement se propage au cours du chargement de la fibre inférieure à la fibre supérieure de la poutre selon quelques directions privilégiées dont la forme rappelle les trajets de fissures : on peut comparer cet état avec le faciès de fissuration, relevé dans l'essai, caractérisé par la présence d'une fissure verticale au milieu de la poutre et plusieurs fissures obliques plus ou moins visibles (Figure 173). L'endommagement prédit par la simulation se produit essentiellement dans la zone centrale de la poutre délimitée par des fissures obliques, le reste de la poutre demeurant pratiquement intact, sauf au niveau des appuis (Figure 172).



Figure 173 – Faciès de fissuration de la poutre à la fin de l'essai (Leroux, 2012).

Comme il a déjà été signalé aux chapitres 2 et 3, il n'est pas aisé de donner une interprétation physique claire des résultats du calcul ED affichant un endommagement du modèle. Puisque cet endommagement est calculé pour chaque élément discret comme un ratio entre le nombre de liens présents (non cassés) à l'instant donné et le nombre de liens à l'instant initial, on obtient un aspect « diffus » de ce champ traduisant son caractère non local. Néanmoins, l'endommagement ED est un bon indicateur pour repérer les zones où le béton est amené à se dégrader, et avec un maillage suffisamment fin, le modèle ED permet une restitution assez fidèle (en termes d'emplacement, d'orientation et de forme) des discontinuités réelles comme les macro-fissures.

Afin de mieux interpréter les résultats du calcul ED et notamment l'aspect anisotrope de l'endommagement local du béton, nous avons mis en œuvre dans EUROPLEXUS un post-traitement spécifique permettant de visualiser dans SALOME l'état des liens cohésifs béton-béton au cours du calcul. On rappelle que le calcul ED se fait dans EUROPLEXUS à chaque pas de temps en deux étapes : on calcule d'abord les forces d'interaction inter-éléments au niveau des liens (calcul local), en intégrant leurs lois de comportement normale et tangentielle, puis ces forces sont additionnées pour chaque élément discret et la résolution de l'équilibre global se fait sur les éléments discrets qui sont porteurs de masse et d'inertie (les ED sont vus alors comme les nœuds dans le calcul éléments finis). Dans la structure informatique du modèle ED utilisé dans EUROPLEXUS, les éléments discrets disposent d'un support géométrique (le maillage ED) tandis que les liens n'ont pas de support

4.2 Impact mou sur poutre

géométrique propre et chaque lien n'est repéré que par les numéros de deux éléments discrets qu'il relie.

Nous avons donc créé en sortie du calcul EUROPLEXUS des entités de maillage fictifs de type segment à deux nœuds et nous avons écrit pour ces éléments les champs résultats propres aux liens. Ce post-traitement permet de tracer l'état des liens (niveau d'endommagement) au cours du calcul (Figure 174 en haut). On peut aussi voir les liens complètement rompus et enlevés du calcul (Figure 174 en bas). Les liens marqués en bleu correspondent aux liens rompus entre éléments qui restent à proximité de leur position initiale dans le modèle. Pour les éléments discrets qui se sont beaucoup éloignés après la rupture de lien cohésif, les liens rompus sont marqués en rouge.

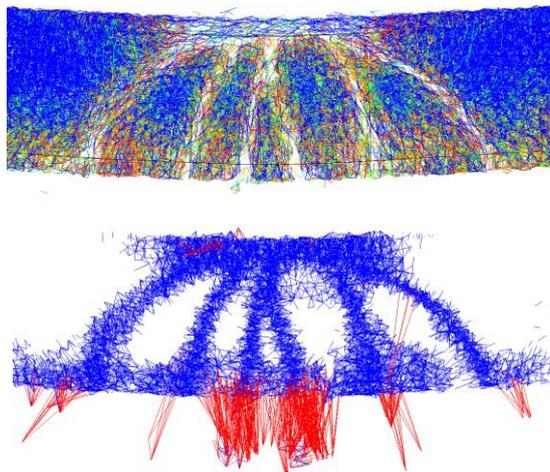


Figure 174 – Endommagement des liens béton-béton (en haut) et liens rompus à la fin du calcul (en bas).

Cette nouvelle sortie permet de mieux visualiser les directions de microfissuration ainsi que les macro-fissures ouvertes.

4.2.3.1.2 Comportement global

Pour caractériser le comportement global de la poutre au cours de l'impact, on a tracé sur la Figure 175 l'évolution de la flèche (déplacement vertical au centre) de la poutre, de la force d'impact et des déformations des jauges attachées aux armatures. Les courbes rouges sont celles obtenues expérimentalement, et les courbes bleues sont celles restituées par notre modèle au cours du calcul.

Il faut signaler que lors de l'essai, l'acquisition des données a débuté avant même que le projectile soit lâché d'une hauteur de 1.5 m, ce qui explique que la partie pertinente des courbes expérimentales ne commence qu'après un offset de 40 ms environ. Dans notre modélisation, pour éviter le calcul de la phase du vol libre, nous avons placé le projectile juste au dessus du tampon et nous lui avons imposé la vitesse qu'il a juste avant d'impacter la poutre (soit 5.425 m/s). Pour que la comparaison entre les courbes expérimentales et numériques soit facilitée, on a translaté les courbes expérimentales de la valeur de l'offset et on a pris le même intervalle de représentation temporelle pour les courbes expérimentales et numériques.

L'allure temporelle de la flèche que nous obtenons est assez proche de celle de l'essai (Figure 175 en haut), notre modèle capte bien la déflexion de la poutre sous l'effet de l'impact, puis l'état déformé résiduel, avec une petite surestimation de l'amplitude.

La valeur du plateau de la force d'impact est également assez bien reproduite tant du point de vue de l'amplitude que de la phase de déchargement (Figure 175 au milieu).

Un autre résultat important est qu'on retrouve également le niveau de déformation des aciers inférieurs au niveau de la jauge J1 située au centre de la poutre, où une fissure est relevée dans l'essai et dans le calcul (Figure 175 en bas et Figure 176). En revanche, les déformations au niveau des autres jauges sont sous-estimées. Cela s'explique par le fait que dans le calcul les macro-fissures obliques ne sont pas localisées exactement à l'endroit de l'emplacement des jauges.

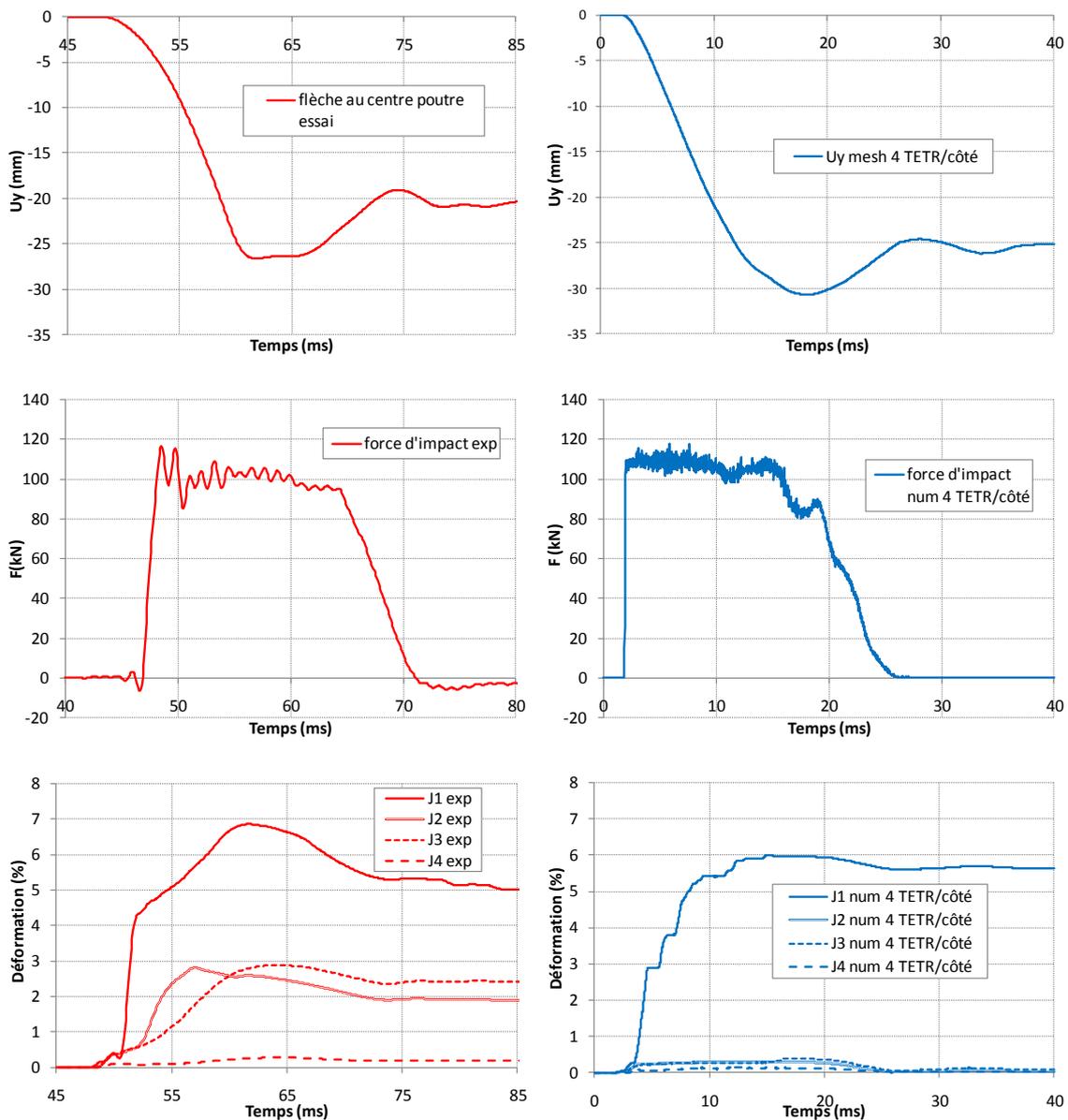


Figure 175 – Modèle 4 tétraèdres : comparaison des courbes expérimentales (à gauche) et numériques (à droite).

4.2 Impact mou sur poutre

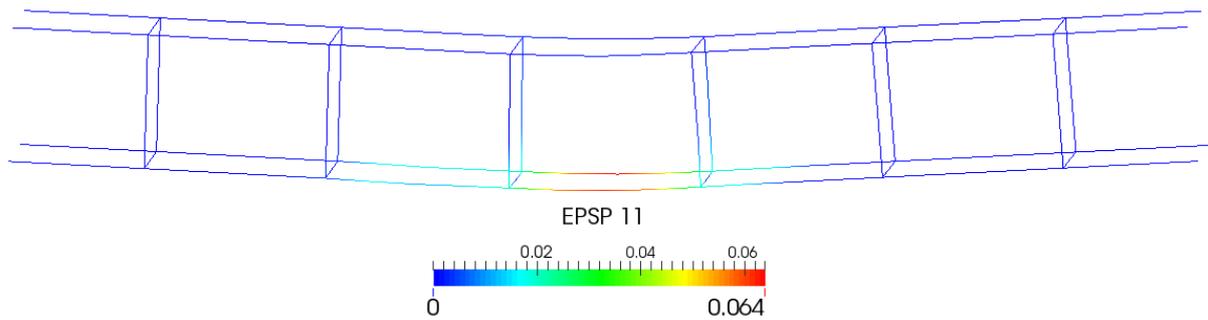


Figure 176 - Déformation plastique des armatures à l'instant final.

4.2.3.2 Modèle avec le maillage 2 (6 tétraèdres)

Avec un maillage plus fin, on remarque que la description du faciès de fissuration est légèrement modifiée : on distingue la macro-fissure verticale et plusieurs macro-fissures obliques de part et d'autre (Figure 177 et Figure 178) comme celles observées lors de l'essai (Figure 173).

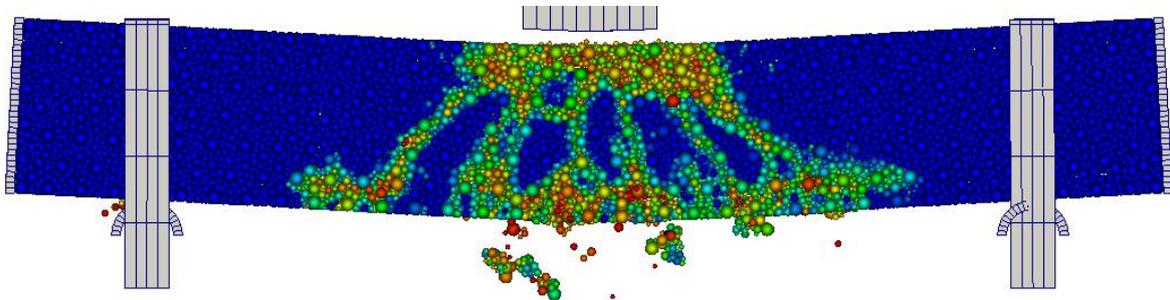


Figure 177 – Etat d'endommagement de la poutre à la fin du calcul.

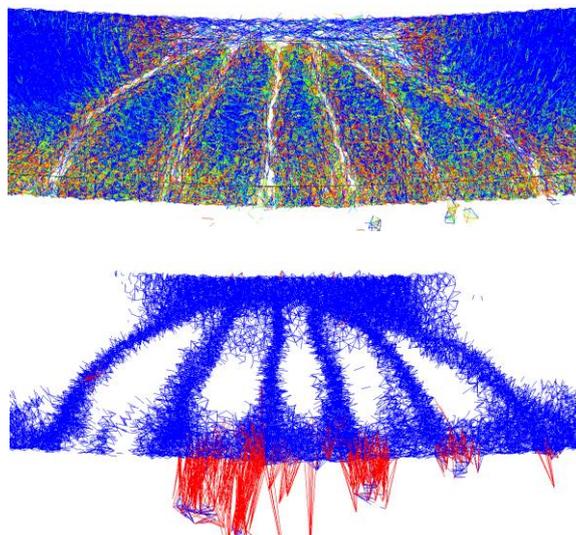


Figure 178 – Endommagement des liens cohésifs (en haut) et liens rompus à la fin du calcul (en bas).

L'allure temporelle de la flèche obtenue par le calcul avec le maillage 2 est en bon accord avec la courbe expérimentale (Figure 179), se rapprochant plus de celle de l'essai en comparaison avec le calcul 1. La force d'impact est toujours bien restituée par notre modèle. Il en est de même pour l'amplitude de la déformation de la jauge J1, mais aussi pour la jauge J2 car la répartition des fissures a un petit peu changé.

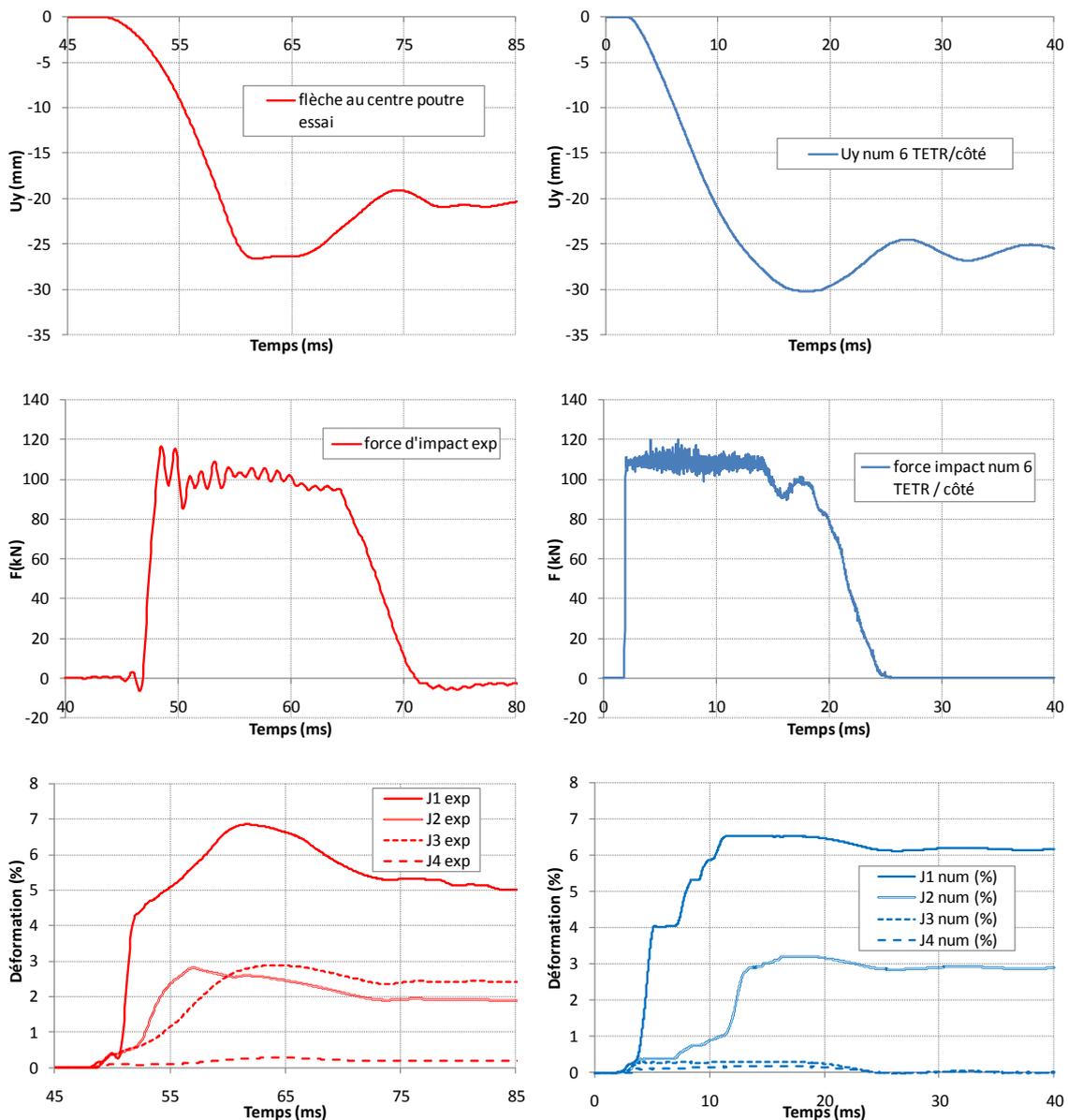


Figure 179 – Modèle 6 tétraèdres : comparaison des courbes expérimentales (à gauche) et numériques (à droite).

On constate que les résultats numériques s'améliorent lorsqu'on raffine le maillage ED. Les directions de propagation des macro-fissures sont plus proches de celles de l'essai et les grandeurs comme la flèche de la poutre, la force d'impact et la déformation des armatures inférieures se rapprochent de celles mesurées au cours de l'essai.

Notre modèle est capable de prédire, avec une précision satisfaisante, la réponse d'une poutre en béton armé soumise à un choc mou. Il faut signaler que les deux calculs ont été réalisés avec le même jeu de paramètres locaux du modèle ED du béton, ce qui permet de valider notre conclusion sur les paramètres d'identification (chapitre 2). On peut dire que notre modèle ED de béton garde le même comportement global lorsqu'on raffine le maillage. Il n'est pas nécessaire de raffiner le maillage davantage car les résultats globaux et locaux sont raisonnablement corrects.

Après cette étape de validation sur un calcul de poutre, nous passons à la simulation d'un essai Meppen dans la section suivante.

4.3 Impact mou sur dalle : essai MEPPEN II-4

4.3.1 Description de l'essai

Les essais Meppen ont été réalisés à la fin des années 70 en Allemagne pour étudier la résistance des structures en béton armé face au risque de chute d'avion et servir de base de validation des codes de dynamique rapide dans le domaine du choc mou. Chaque essai consiste à tirer un projectile déformable, le « missile » (un tube en acier de masse 1000 kg environ), contre une dalle en béton armé (de côtés 6 m x 6.5 m) (Figure 180). Une série de 21 tirs a été réalisée en faisant varier la vitesse d'impact du projectile (de 172 m/s à 260 m/s) et l'épaisseur de la dalle (de 50 cm à 90 cm).

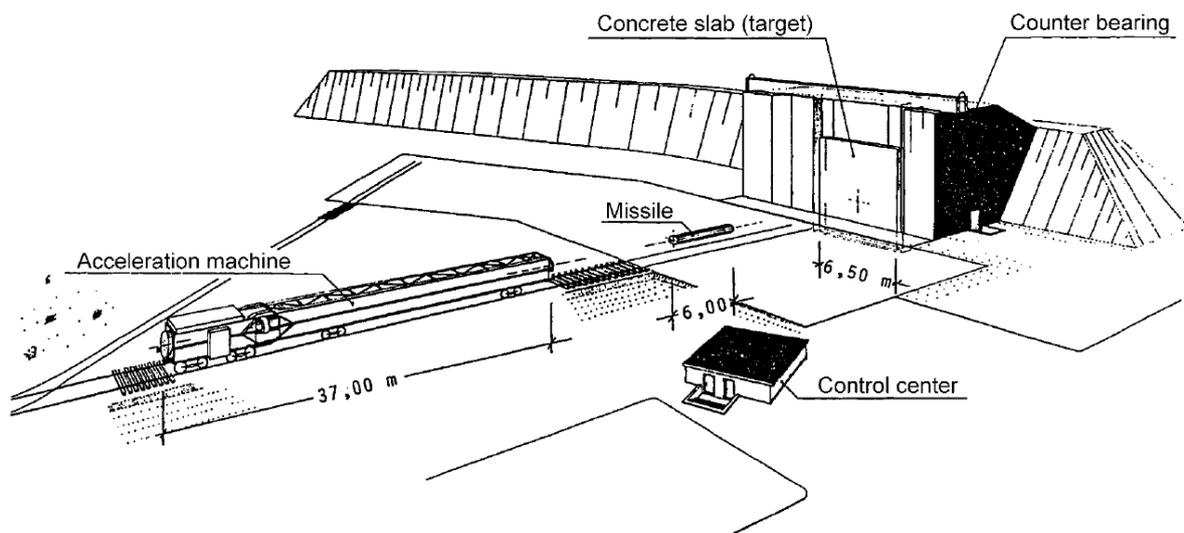


Figure 180 – Installation utilisée pour les essais Meppen.

Les dalles utilisées, épaisses, de grande taille et fortement ferrillées, sont représentatives d'une paroi externe de structure de protection en béton armé. Les vitesses des projectiles allant jusqu'à 260 m/s sont du même ordre de grandeur que celles de la plupart des avions de ligne dont la vitesse est de l'ordre de Mach 0.85. D'après la classification des impacts en fonction du critère défini par Koechlin (Koechlin, 2007), les impacts sur les dalles Meppen sont des chocs mous puisque le projectile, ayant une forme d'un long tube à paroi mince, est beaucoup plus déformable que la cible. Les essais Meppen sont considérés comme des essais de référence sur l'impact mou réalisés à une échelle proche de celle de la structure de protection réelle.

Au cours du benchmark international IRIS (IRIS, 2010), initié par l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economiques) et l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire, France), les équipes de recherches disposant de modèles numériques capables de simuler des impacts sur des structures en béton armé ont été invitées à confronter leurs modèles numériques sur plusieurs essais, dont un essai de la série Meppen pour étalonner leurs modèles.

Les différentes vitesses imposées au projectile et les épaisseurs choisies pour la dalle dans chacun des essais ont permis d'obtenir des états de dégradation différents de la dalle. En recoupant les différents résultats, notamment en analysant les trajectoires de propagation des fissures, Jonas (Jonas et al., 1982) et Nachtsheim (Nachtsheim et al., 1984) ont constaté que la perforation lors d'un choc mou se produisait toujours selon le même processus, et ils ont établi un scénario de perforation

(voir Chapitre 1, Figure 18). La Figure 181 représente un classement de tous les essais Meppen par ordre croissant de l'état d'endommagement final de la dalle selon les différents stades de dégradation de ce scénario.

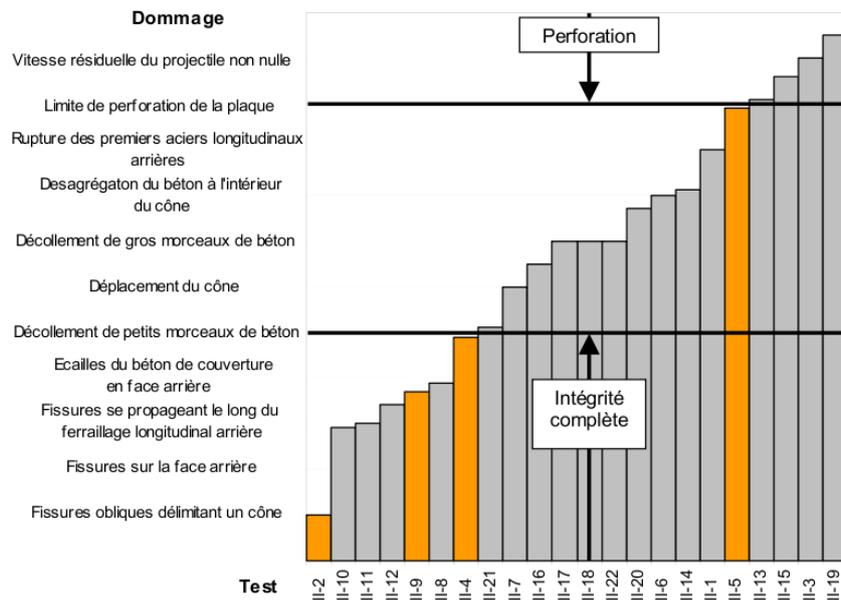


Figure 181 – Etat d'endommagement des dalles des différents essais Meppen (Nachtsheim et al., 1984).

Avant de choisir l'essai que nous voulons simuler dans la série Meppen, nous remarquons deux différences importantes des cas Meppen par rapport à l'essai d'impact sur poutre simulé dans la section précédente.

La première différence, évidente, est d'ordre géométrique car on passe d'une poutre à une dalle dont les modes de déformations et l'état de contraintes sont plus complexes que dans une poutre. On change aussi d'échelle en passant d'une petite poutre d'essai à une grosse dalle représentative d'une structure industrielle (Figure 182).

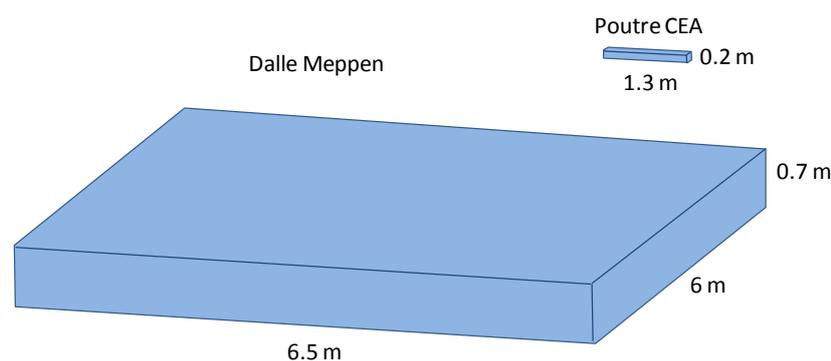


Figure 182 – Comparaison des dimensions de la poutre CEA et de la dalle Meppen.

La deuxième différence importante porte sur l'intensité du chargement subi par la structure. L'essai d'impact sur la poutre CEA peut être considéré comme un impact basse vitesse. Dans les essais Meppen, les projectiles utilisés sont 3 fois plus lourds et plus de 30 fois plus rapides (Tableau 15). L'énergie cinétique du projectile est donc beaucoup plus importante lors des essais Meppen que lors

4.3 Impact mou sur dalle : essai MEPPEN II-4

de l'essai CEA d'impact sur poutre, ce qui génère des effets dynamiques beaucoup plus importants à l'échelle du béton et de la dalle.

	Projectile	
	Essai CEA	Essai Meppen
Masse (kg)	311	950 à 1050
V (m/s)	5,4	172 à 260

Tableau 15 – Comparaison des projectiles utilisés pour les impacts sur la poutre CEA et sur la dalle Meppen.

Compte tenu de ces deux différences qui vont sûrement avoir une forte influence sur les résultats, nous préférons choisir un essai de la série Meppen où l'état d'endommagement final de la dalle ne serait pas radicalement différent de celui de la poutre CEA, en évitant ainsi un calcul franchement perforant où tout serait rompu et dont la validité serait difficile à évaluer. Nous décidons de simuler l'essai Meppen II-4 où la dalle conserve son intégrité globale (pas de rupture d'aciers ni de détachement de morceaux de béton) mais ayant un état d'endommagement final suffisamment avancé pour que la face arrière de la dalle soit bien fissurée.

4.3.2 Modélisation de l'essai

Comme pour la poutre CEA, nous avons fait une modélisation très détaillée du dispositif expérimental afin de minimiser les incertitudes dues à une mauvaise représentation des conditions aux limites.

4.3.2.1 La dalle

La dalle est rectangulaire de dimensions 6 m x 6.5 m x 0.7 m (Figure 180). Elle est maintenue en position verticale par une série de cylindres d'appui tout le long de son pourtour et par des barres de précontrainte DYWIDAG (Figure 183).

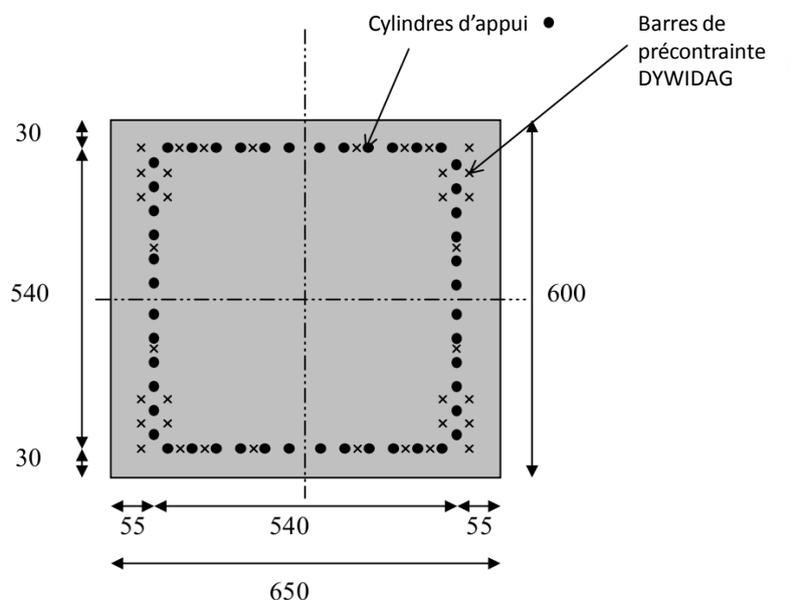


Figure 183 – Géométrie de la dalle Meppen utilisée pour l'essai (dimensions en cm) (Koechlin, 2007).

Pour obtenir le maillage ED du béton de la dalle, on maille d'abord la dalle en tétraèdres de manière à placer quatre couches d'éléments selon son épaisseur. Ce maillage éléments finis est ensuite donné

à SpherePadder++ pour générer le maillage éléments discrets. Le maillage obtenu (Figure 184) est le plus conséquent de tous ceux utilisés pendant ce travail, contenant 305071 ED.

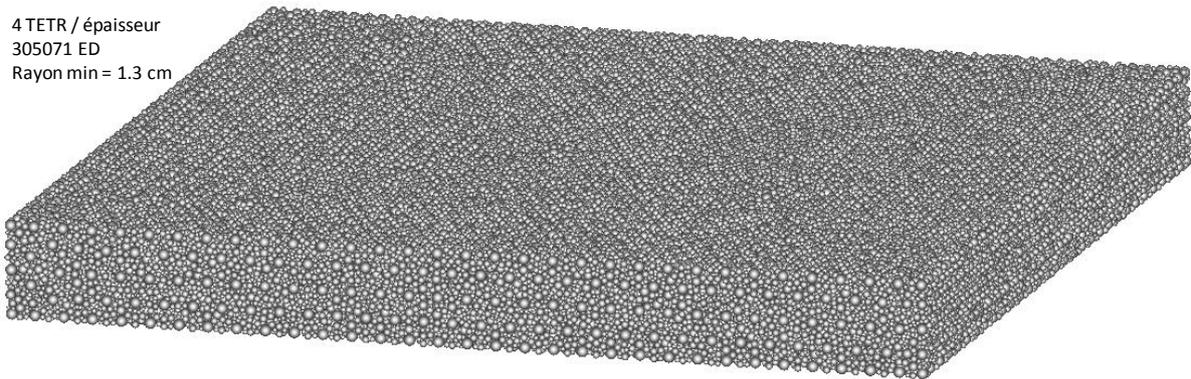


Figure 184 – Maillage ED de la dalle Meppen.

Le béton utilisé est assez classique (un module de Young de 30 GPa, une limite de compression de 35 MPa et une limite en traction 10 fois plus faible). Nous appliquons la procédure d'identification sur un échantillon ED prismatique extrait de la dalle. Les paramètres de notre modèle ED de béton obtenus sont récapitulés dans le Tableau 16.

Masse volumique	2300 kg/m ³
Module de Young	30 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Limite locale de traction	3 MPa
Cohésion	6 MPa
Angle de frottement interne	15°
Angle de frottement de contact	15°
Adoucissement	10

Tableau 16 – Paramètres du modèle ED du béton.

4.3.2.2 Ferrailage

La dalle contient deux nappes de ferrailage (Figure 185 à gauche) : une près de la face avant de la dalle, celle impactée par le projectile, et l'autre près de la face arrière de la dalle. Elles sont reliées par des armatures transversales (Figure 185 à droite). Il faut signaler que dans l'essai le pas des armatures de flexion de la face arrière n'est pas régulier (deux par deux). Pour faciliter la construction du maillage, on va le négliger et prendre un pas constant unique respectant le taux de ferrailage longitudinal spécifié dans le rapport de l'essai.

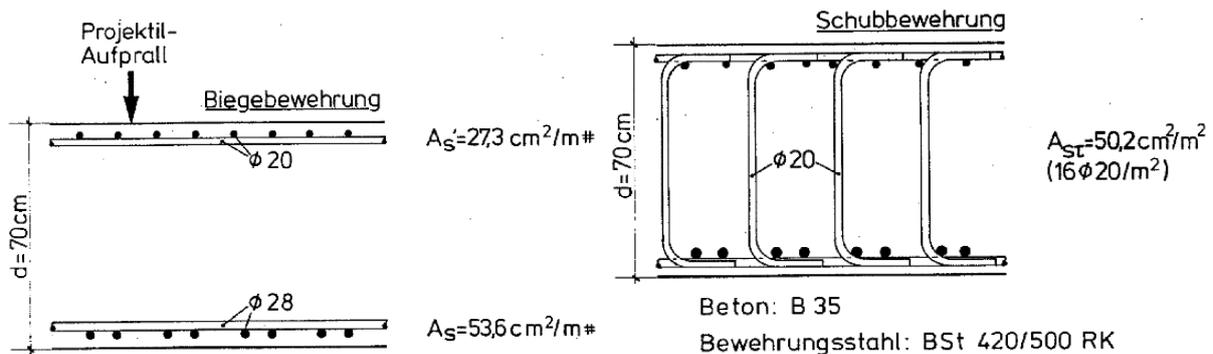


Figure 185 – Disposition des armatures longitudinales (à gauche) et transversales (à droite).

4.3 Impact mou sur dalle : essai MEPPEN II-4

Les aciers longitudinaux et transverses sont maillés en éléments finis poutre avec une longueur d'élément minimale de 5 cm (Figure 186).

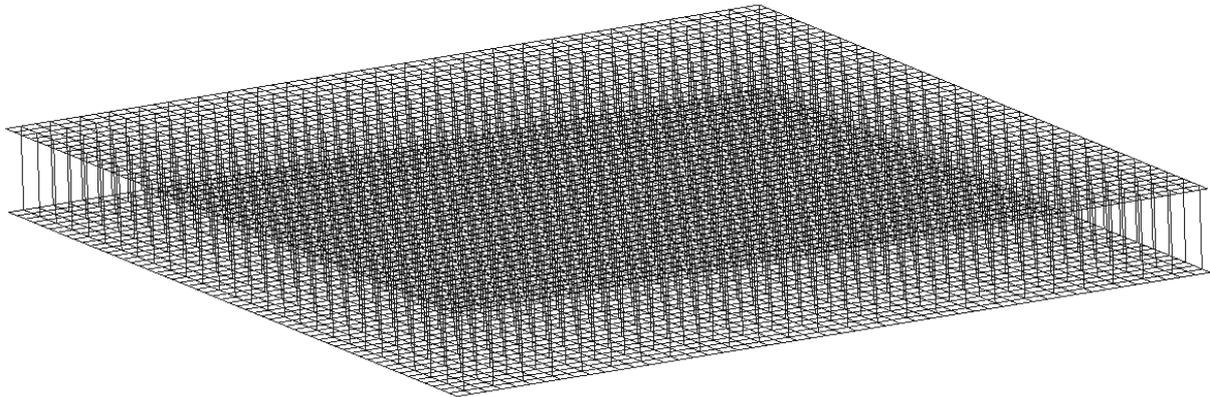


Figure 186 – Maillage du ferrailage en éléments finis poutres.

Les caractéristiques mécaniques de l'acier des armatures sont montrées sur la Figure 187. Nous représentons le comportement des armatures et des épingles par une loi élasto-plastique à écrouissage isotrope basée sur le critère de Von Mises.

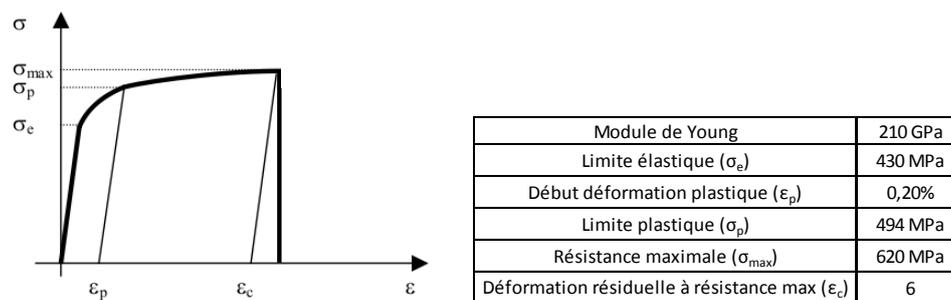


Figure 187 – Comportement schématique des aciers en traction (Rousseau, 2009).

4.3.2.3 Interface acier-béton

Les caractéristiques de l'interface acier-béton ne sont pas connues pour les essais Meppen, et on n'a pas trouvé dans la littérature d'essais d'arrachement réalisés avec des diamètres d'armatures aussi importants : 2 cm et 2.8 cm. Pour définir les paramètres de la liaison acier-béton, nous nous sommes inspirés des paramètres que l'on a utilisés pour la poutre CEA.

4.3.2.4 Modélisation du projectile

Le missile est un cylindre creux (tube à paroi mince) en acier d'une longueur totale de 6 m et d'un diamètre extérieur de 60 cm (Figure 188). Etant donné l'épaisseur faible de sa paroi (7 et 10 mm) et les déformations importantes subies par le projectile au cours de l'impact, on le maillait très finement (taille de maille de 2 cm) en éléments finis coque (coque épaisse de Mindlin-Reissner) et on lui applique les conditions de l'auto contact, car lorsque le projectile s'écrase sur la dalle, il se déforme par flambement dynamique en créant une série de plis sur plus des deux tiers de sa longueur initiale.

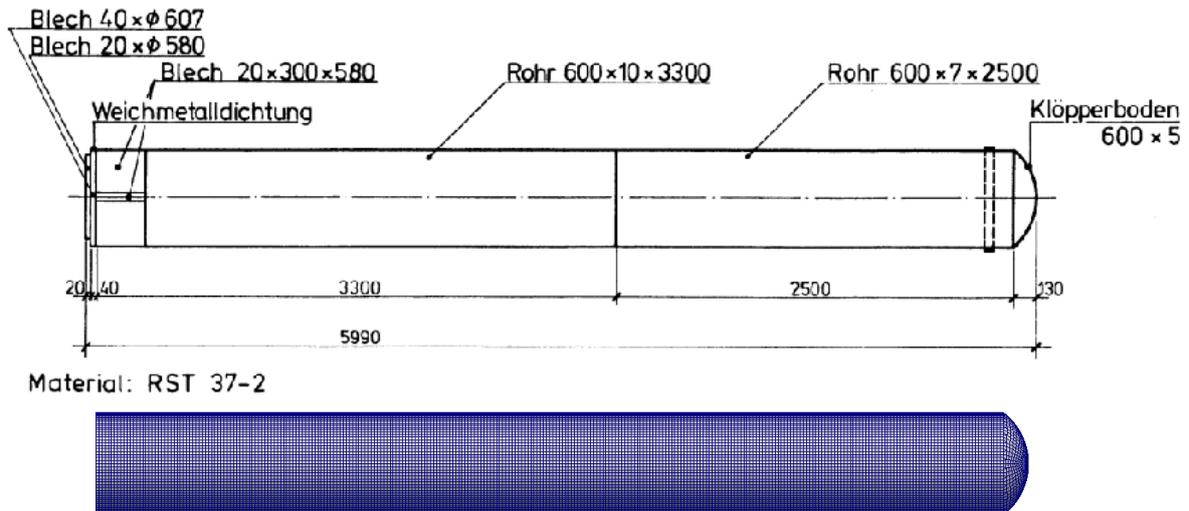


Figure 188 – Géométrie (en haut) et maillage (en bas) du projectile.

4.3.2.5 Modélisation des appuis

Pendant l'essai, la dalle est maintenue en position verticale par une série d'appuis cylindriques répartis sur son pourtour en face arrière, et par des barres de précontrainte DYWIDAG (Figure 189). La plupart des auteurs (Nachtsheim et Stangenberg, 1982) modélisent ces conditions par une ligne d'appuis simple ce qui permet d'éviter d'avoir à mailler tous les cylindres d'appui. Cependant, dans le cas d'une modélisation ED, la largeur de la ligne d'appui peut avoir une influence sur les résultats. Dans sa thèse, Frangin (Frangin, 2008) montre qu'une largeur égale à 4.5 fois le rayon moyen des ED permet de bien approximer une condition d'appui linéique sur des éléments discrets.

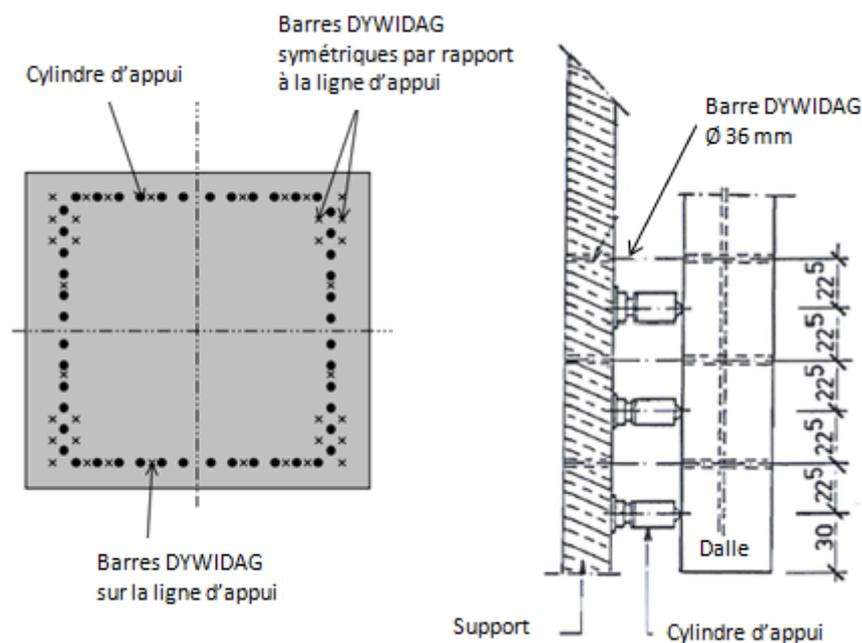


Figure 189 – Supports de la dalle : positions des cylindres et câbles (à gauche), zoom sur les cylindres (à droite).

Nous pensons que bloquer les éléments discrets de la dalle ne correspond pas aux conditions d'appuis de l'essai et que cela risque de fragiliser le béton dans les zones d'appuis lors de la déformation. On préfère modéliser explicitement mais de façon simplifiée chacune des quatre lignes

4.3 Impact mou sur dalle : essai MEPPEN II-4

de cylindres en les représentant par quatre parallélépipèdes ayant la largeur égale au diamètre des cylindres et l'épaisseur égale à leur longueur. On mettra les conditions de contact entre ces parallélépipèdes (discrétisés en éléments finis) et la dalle ED (Figure 190). Par ailleurs, on discrétise aussi les barres DYWIDAG (repérées par des croix sur la Figure 189 à gauche) et leurs plaques d'ancrage, et on leur affecte un comportement d'un acier doux élastique linéaire. L'ensemble du maillage des conditions d'appuis est montré sur la Figure 190. Le contact frottant est prescrit entre les parties EF et ED : appuis-dalle, plaques d'ancrage-dalle.

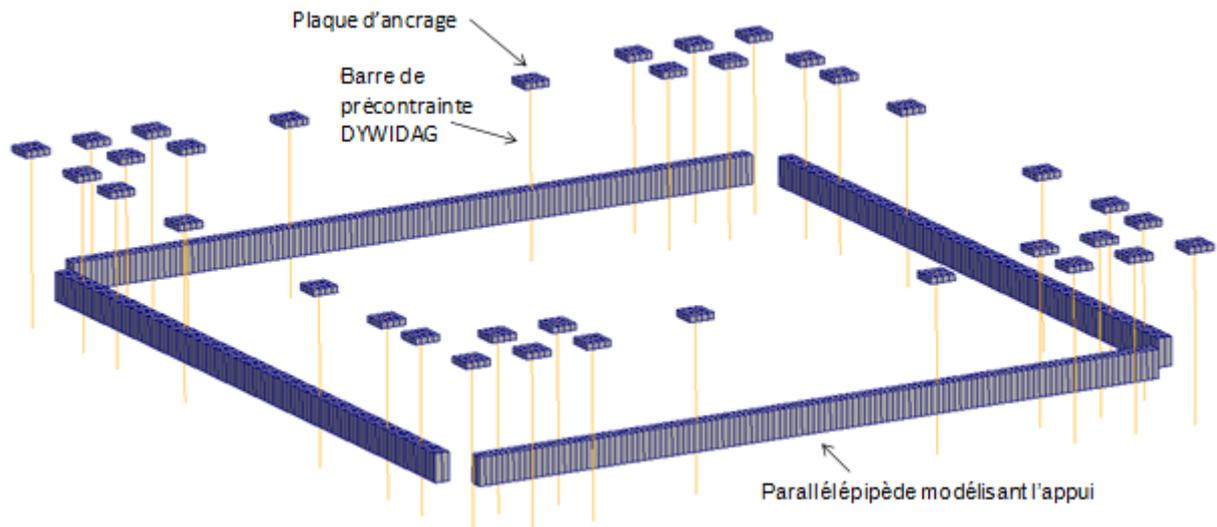


Figure 190 – Vue du maillage des appuis, des barres de précontrainte et de leurs plaques d'ancrage.

La Figure 191 montre le modèle complet construit pour l'essai Meppen, avec la disposition des différents éléments au début du calcul, et notamment du projectile par rapport à la dalle.

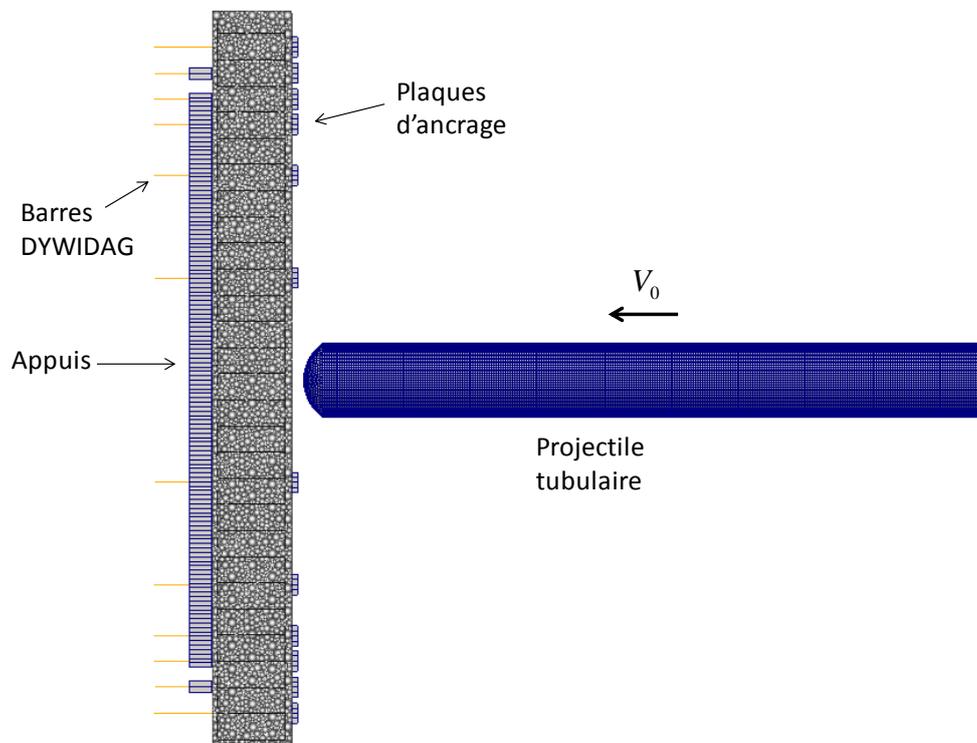


Figure 191 – Modèle mixte ED-EF réalisé pour simuler l'essai Meppen II-4.

4.3.3 Résultats

4.3.3.1 Sans effet de vitesse

En faisant la simulation de l'essai Meppen avec la même loi de comportement que pour le cas de l'impact sur poutre CEA, on constate que le béton s'endommage totalement sous le projectile : tous les éléments discrets situés dans cette zone ont perdu leurs liens cohésifs qu'ils avaient avec leurs voisins (Figure 192 en haut et à droite). Les deux nappes des aciers longitudinaux sont déchirées par le projectile. Le modèle tel quel prédit une perforation totale de la dalle.

Or dans l'essai II-4 la dalle garde son intégrité globale et arrête le projectile. Sur les photos de l'état de la dalle à la fin de l'essai, on voit que du béton d'enrobage a été éjecté de la zone impactée de la face avant (Figure 193 à gauche), mais on distingue très bien le quadrillage des aciers de la nappe de ferrailage avant, qui sont restés intacts. La face arrière, bien que fortement fissurée, retient le béton de l'enrobage et ne découvre pas les armatures, même dans la zone située juste sous l'impact (Figure 193 à droite).

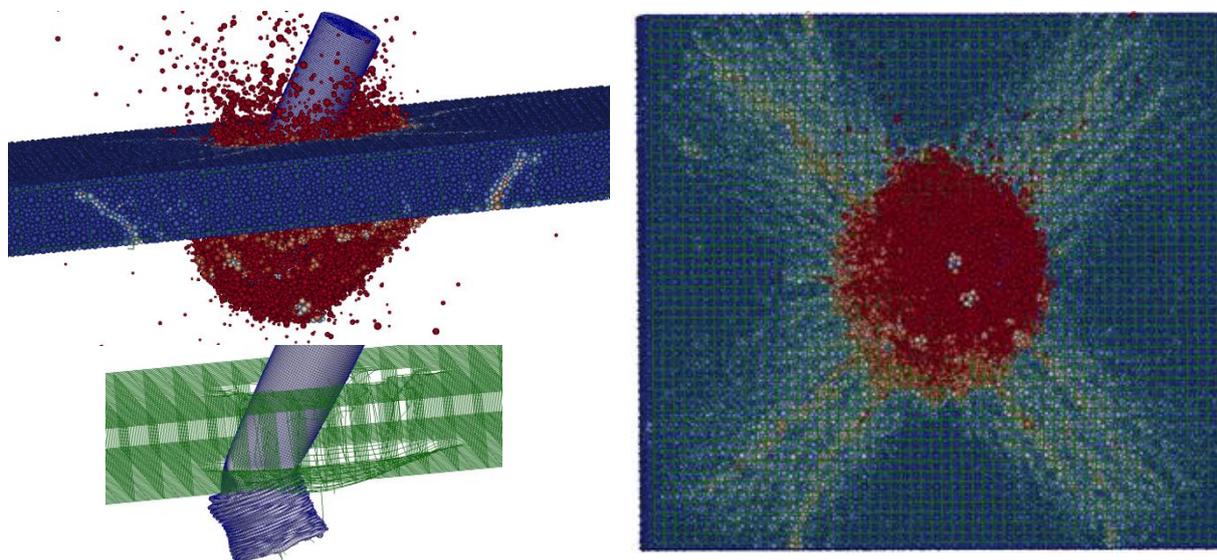


Figure 192 – Position du projectile vis-à-vis de la dalle à la fin du calcul (vue avec et sans béton, à gauche) et endommagement du béton en face arrière (à droite).

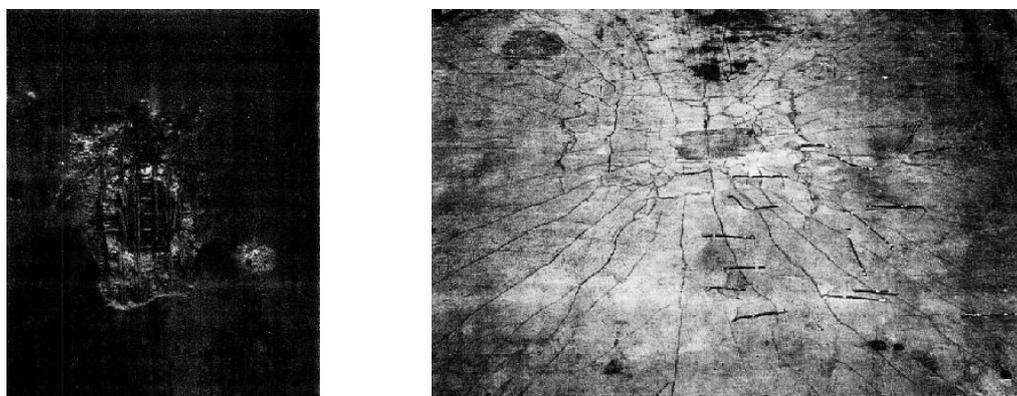


Figure 193 – Endommagement de la dalle à la fin de l'essai : face avant (à gauche), face arrière (à droite).

On voit clairement que, même si l'on reste ici dans le domaine du choc mou, les effets dynamiques subis par le béton sont beaucoup plus importants que précédemment à cause d'un impact très

rapide et intense. La loi de comportement statique que nous avons utilisé pour le béton n'est pas appropriée dans le cas Meppen.

4.3.3.2 Prise en compte de l'effet de vitesse

Comme nous l'avons déjà signalé au Chapitre 1, l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement du béton en traction est très importante. Les essais mettant en œuvre des vitesses de déformation du béton de l'ordre de 100 s^{-1} montrent que la résistance dynamique en traction peut être 10 fois plus importante que sa valeur « statique ». A partir de ces résultats d'essais, des lois empiriques reliant la limite de traction dynamique à la vitesse de déformation ont été proposées. La loi développée par le CEB (Comité Euro-international du Béton) est de cette forme. Cependant, de telles lois font intervenir les valeurs globales de la limite de traction et de la déformation du béton, qui sont difficiles à appliquer directement à notre modèle de béton dans lequel la résistance est exprimée au niveau des liaisons cohésives entre les éléments. Hentz (Hentz, 2003) a proposé de modifier cette loi en faisant dépendre la limite de traction locale T du béton à la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ de chaque liaison cohésive :

$$\frac{T_{\text{DYN}}}{T_{\text{STAT}}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_{\text{STAT}}, & \dot{\epsilon}_{\text{STAT}} = 10^{-6} \text{ s}^{-1} \\ \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{\text{STAT}}}\right)^{\delta} & \text{si } \dot{\epsilon}_{\text{STAT}} < \dot{\epsilon} \leq 1, & \delta = 0.033 \\ \theta \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_{\text{STAT}}}\right)^{\frac{1}{3}} & \text{si } \dot{\epsilon} > 1, & \log \theta = 6\delta - 2 \end{cases}$$

Dans cette expression $\dot{\epsilon}_{\text{STAT}}$ est le seuil en dessous duquel la vitesse de déformation est considérée comme trop faible pour introduire un effet dynamique en traction.

Pour calculer $\dot{\epsilon}$, nous avons utilisé la formule suivante basée sur la variation de la longueur de la liaison entre deux instants l^n et l^{n+1} séparés par un pas de temps Δt :

$$\dot{\epsilon} = \frac{l^{n+1} - l^n}{l^0 \Delta t}$$

En fonction de l'encadrement de la valeur de la vitesse de déformation on peut calculer le rapport entre T_{DYN} et T_{STAT} (appelé « Dynamic Increase Factor », DIF en anglais), et connaissant T_{STAT} en déduire T_{DYN} . Hentz (Hentz, 2003) a simulé des essais de traction dynamique aux barres de Hopkinson en prenant en compte l'effet de vitesse avec cette formule et les résultats sont très satisfaisants. Dans ses simulations, les contraintes dans le béton lors de la rupture et les positions des macro-fissures dans l'éprouvette étaient proches de celles observées lors de l'essai.

Nous avons donc implanté la formule proposée par Hentz dans la loi de comportement normale du lien cohésif de notre modèle ED béton. Cependant, T apparaît aussi dans les expressions des fonctions seuil du critère de Mohr-Coulomb (chapitre 2). Il faut donc tenir compte de l'influence de l'effet de vitesse sur la loi tangentielle, afin de respecter la cohérence de ce critère. Par ailleurs, Erzar et Forquin (Erzar et Forquin, 2014) montrent que le comportement en cisaillement du béton dépend aussi de sa vitesse de déformation, un DIF pouvant atteindre 2, alors qu'en traction le DIF peut atteindre 10. Pour respecter cette condition, nous bornons le DIF à 2 en cisaillement. Le critère de Mohr-Coulomb « dynamique » est montré en rouge sur la Figure 194. La limite de traction T_{STAT} est

multipliée par le DIF pour obtenir T_{DYN} , la limite de traction locale prenant en compte l'effet de vitesse.

Des simulations numériques d'essais de Hopkinson ont révélé que $\dot{\epsilon}$ est très chahuté au cours du calcul (Omar, 2014), ce qui engendre des perturbations importantes de la loi de comportement adoucissante en traction (retour radial trop brusque, forte variation de l'endommagement). Pour limiter ces oscillations, nous avons introduit un filtre à effet retard sur la vitesse de déformation, basé sur celui utilisé dans le code de calcul RADIOSS (RADIOSS, 2009).

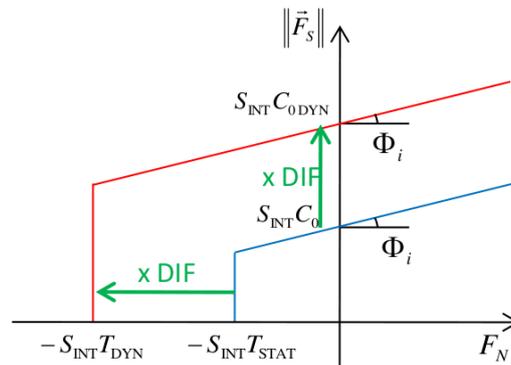


Figure 194 – Schéma du modèle de Mohr-Coulomb modifié par la loi à effet de vitesse.

Avec la loi de béton ainsi modifiée, nous avons relancé le calcul Meppen II-4 (Figure 195). Nous voyons que cette fois seuls quelques éléments discrets à la surface impactée de la dalle sont éjectés lors de l'impact. En face arrière, les fissures diagonales se sont propagées mais sont loin d'avoir atteint les bords. Le béton de la dalle résiste bien au droit de l'impact, avec un niveau d'endommagement inférieur à celui de l'essai. La prise en compte de l'effet de vitesse par la formule de Hentz a nettement augmenté la résistance du béton. La dalle conserve son intégrité, mais cette fois elle est aussi trop résistante.

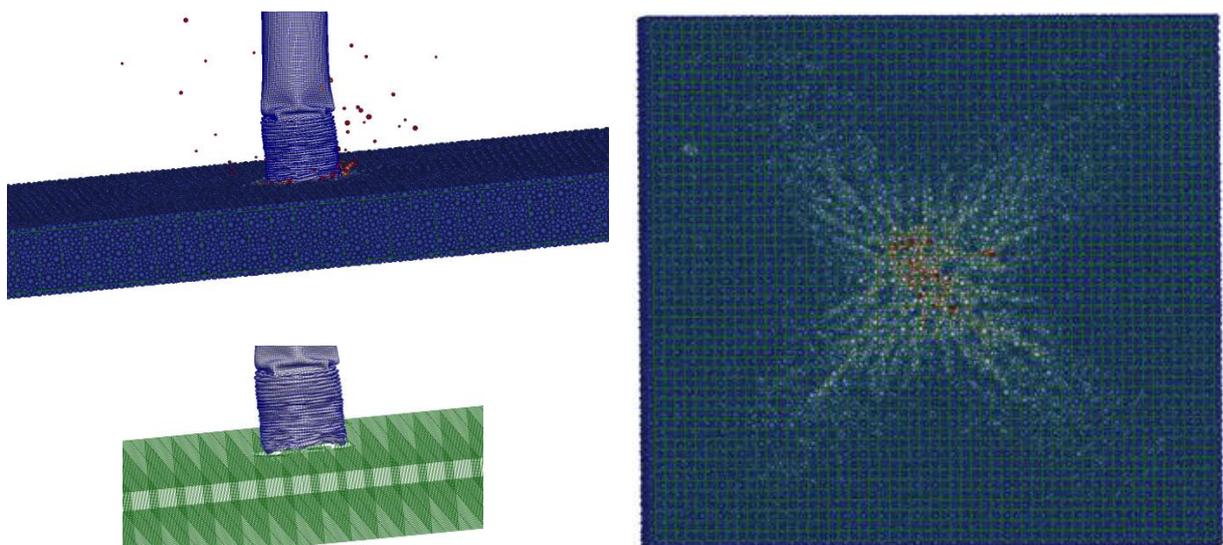


Figure 195 – Position du projectile et endommagement de la dalle en prenant en compte l'effet de vitesse du béton.

Nous avons lancé un troisième calcul en diminuant l'exposant δ (valeur originelle de 0.033) dans la formule de Hentz :

$$\delta = 0.026$$

Le résultat est montré sur la Figure 196.

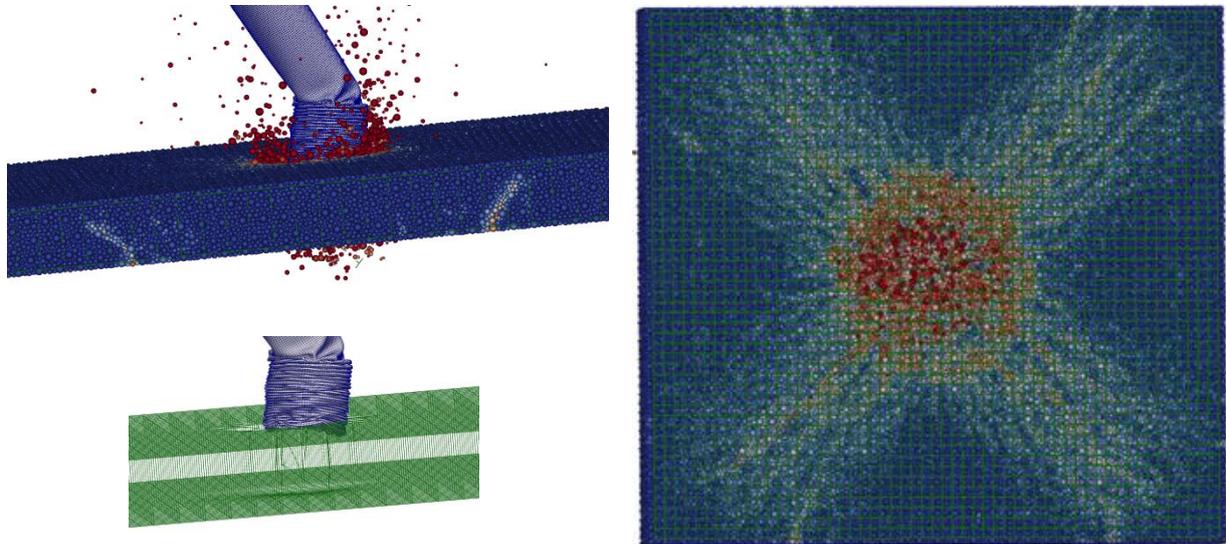


Figure 196 – Position du projectile et endommagement de la dalle en baissant l'influence de l'effet de vitesse.

Le béton s'est endommagé davantage. Sur la face avant de la dalle il y a plus d'éléments discrets éjectés, l'état d'endommagement de la zone d'enrobage ressemble à ce qui est observé lors de l'essai. En face arrière, on observe des réseaux de fissures diagonales qui se propagent jusqu'aux bords de la dalle (Figure 196 à droite). Certaines de ces fissures atteignent même les bords latéraux de la dalle (Figure 197).

Les découpes des dalles (Figure 198 et Figure 199) montrent la formation d'un cône de béton par la propagation de fissures obliques dont l'inclinaison rappelle celles des fissures de l'essai. Dans la zone sous l'impact, on constate l'amorçage et la propagation de fissures obliques délimitant un cône. Cependant, le cône obtenu par le calcul semble plus endommagé que lors de l'essai. On observe aussi un léger écaillage de la face arrière de la dalle que l'on ne retrouve pas dans l'essai.

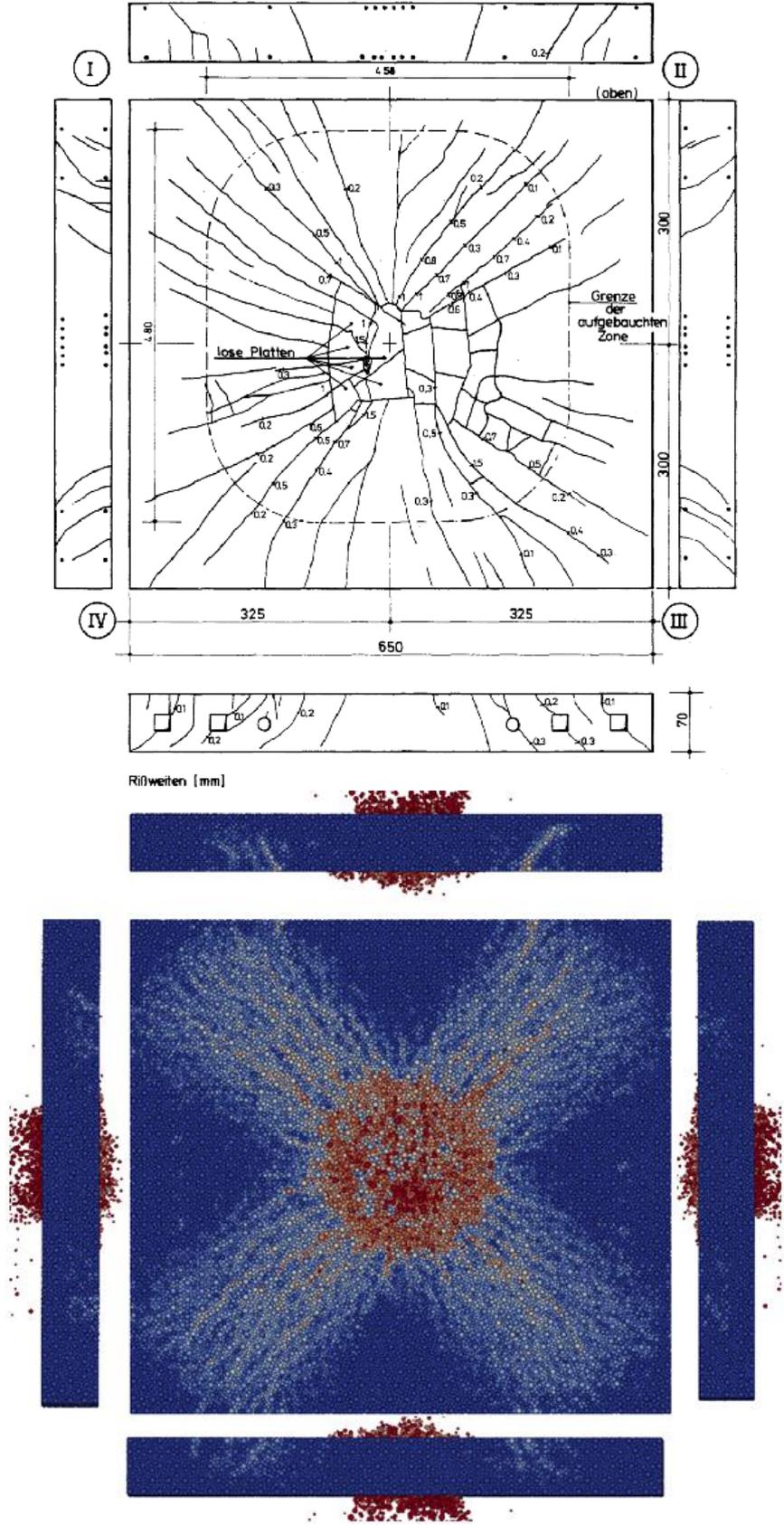


Figure 197 – Etat de fissuration final de la face arrière et des faces latérales de la dalle dans l'essai et dans le calcul.

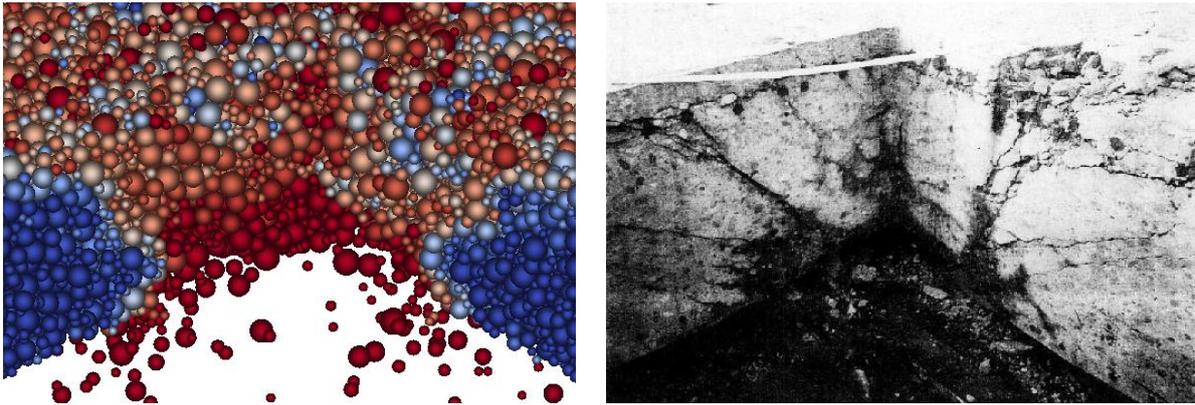


Figure 198 – Comparaison calcul (à gauche) – essai (à droite) du cône de fissuration de la dalle.

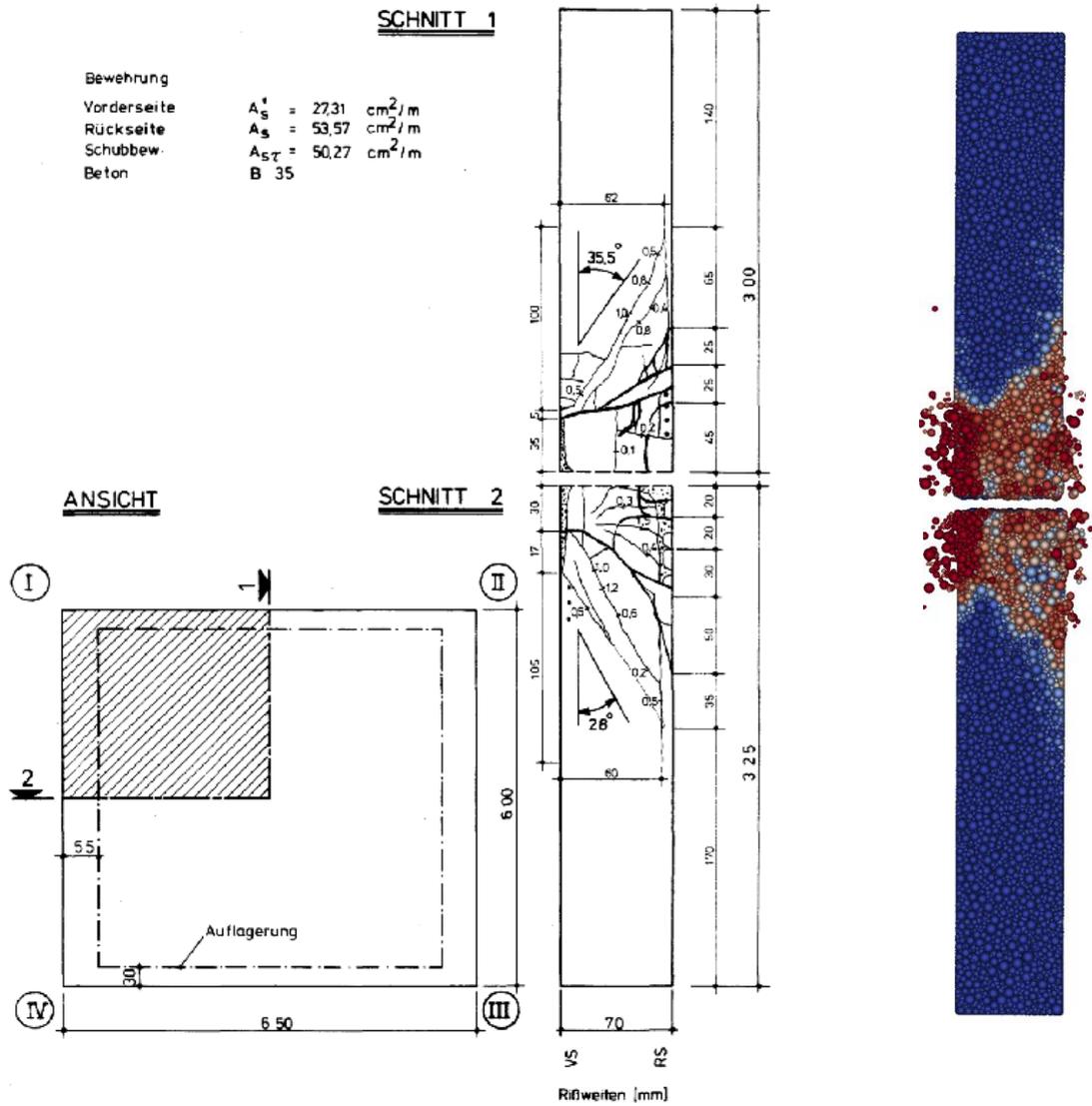


Figure 199 – Comparaison essai – calcul de l'état d'endommagement (coupes d'un quartier de la dalle).

Le projectile s'est déformé sous forme de plis circulaires successifs sur les deux tiers de sa surface comme lors de l'essai, ce qui montre le bon transfert des efforts entre le projectile et la dalle.

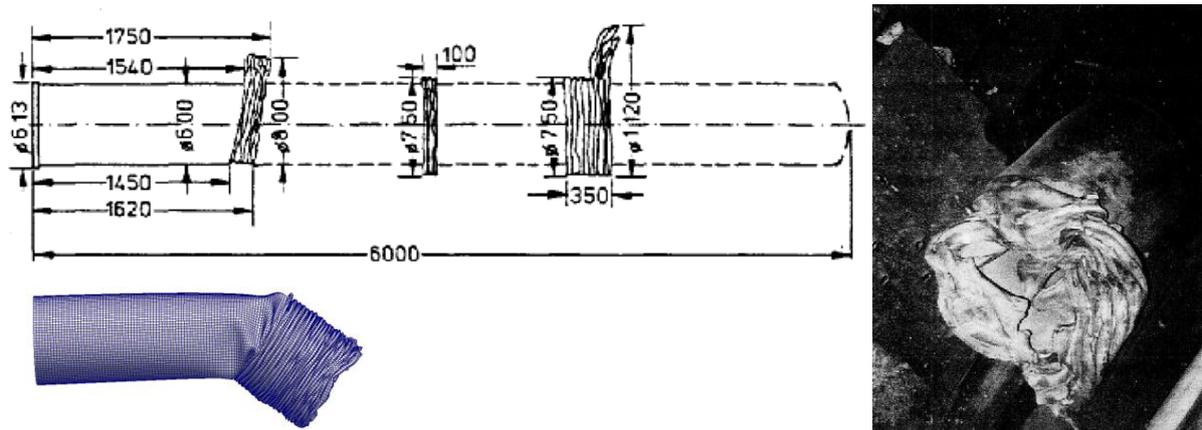


Figure 200 – Déformée du missile à la fin du calcul (en bas à gauche) et à la fin de l'essai (en haut à gauche, et à droite).

Nous pouvons donc conclure que notre modèle est capable de reproduire qualitativement la réponse d'une dalle en béton armé soumise à un impact sévère : la dalle résiste au projectile, on met en évidence un cône de fissuration oblique dans la zone sous l'impact et on arrive à capter les fissures diagonales qui se propagent en face arrière de la dalle, dont certaines débouchant sur les faces latérales de la dalle. En modifiant légèrement l'exposant dans la loi régissant l'effet de vitesse, nous sommes parvenus à encadrer la solution expérimentale, ce qui montre la nécessité de prendre en compte la vitesse de déformation du béton dans sa loi de comportement lorsque l'impact se produit à haute vitesse. Le fait d'avoir dû modifier, même légèrement, l'exposant de la loi à effet de vitesse montre que ses paramètres doivent être identifiés avec soin.

Pour obtenir un modèle de béton prédictif en dynamique, le travail sur la prise en compte de l'effet de vitesse doit être poursuivi avec notamment une validation du modèle sur des essais dynamiques plus élémentaires impliquant des chargements rapides.

4.4 Impact dur sur poutre

Pour aller un peu plus loin dans l'exploration des limites du modèle de béton que nous utilisons actuellement, nous avons simulé un essai d'impact dur sur une poutre en béton armé.

Cet essai a été réalisé au CEA/DYN en 2009 (Piteau et Valin, 2009) pour obtenir des données expérimentales permettant de valider les modèles matériaux utilisés dans les calculs de structures en béton armé sous chargements accidentels de type choc à basse vitesse (chute de colis).

Une série d'essais de 4 chocs durs ont été réalisés sur des poutres de longueur et de ferrailage différents. Nous étudions ici uniquement le cas de poutre courte (poutre n° 3) dont la rupture se produit par formation de cône de cisaillement.

4.4 Impact dur sur poutre

La géométrie et les propriétés mécaniques de la poutre ainsi que les conditions expérimentales sont pratiquement les mêmes que dans l'essai d'impact mou que nous avons étudié précédemment, excepté sur quatre points :

- il n'y a pas de tampon entre le projectile métallique compact et la poutre ; il a été inséré juste une fine couche de polystyrène pour éviter un impact ponctuel car la tête du projectile a une légère courbure,
- la poutre ne comporte pas d'armatures transversales,
- le projectile a une masse de 103,7 kg et une vitesse au moment de l'impact de 8,29 m/s,
- la poutre est tenue par un dispositif de supportage composé de tiges métalliques permettant une reprise d'efforts verticaux dans les deux sens⁶.

A la fin de l'essai, l'état d'endommagement de la poutre au droit de l'impact se caractérise par la création et un léger détachement d'un cône, sans rupture des aciers longitudinaux (Figure 201). On constate que le béton est endommagé à l'intérieur du cône car on voit à l'œil nu quelques fissures plus ou moins verticales mais qui ne sont pas très ouvertes. Le mode de rupture principal se fait en cisaillement par détachement du cône, ce qui est facilité par l'absence de ferrailage transverse.



Figure 201 – Endommagement de la poutre n°3 dans l'essai.

Lorsque nous simulons cet essai sans prendre en compte l'effet de vitesse, la poutre ne résiste pas car le béton se désintègre complètement dans la zone de l'impact et laisse passer le projectile (Figure 202).

⁶ Dans notre modélisation de cet essai nous avons gardé les sangles pour maintenir la poutre sur appuis. Ceci est acceptable puisque a priori les conditions aux limites ne jouent pas beaucoup lors d'un choc dur car la rupture est locale : elle se produit par cisaillement et non par flexion où toute la structure est impliquée.

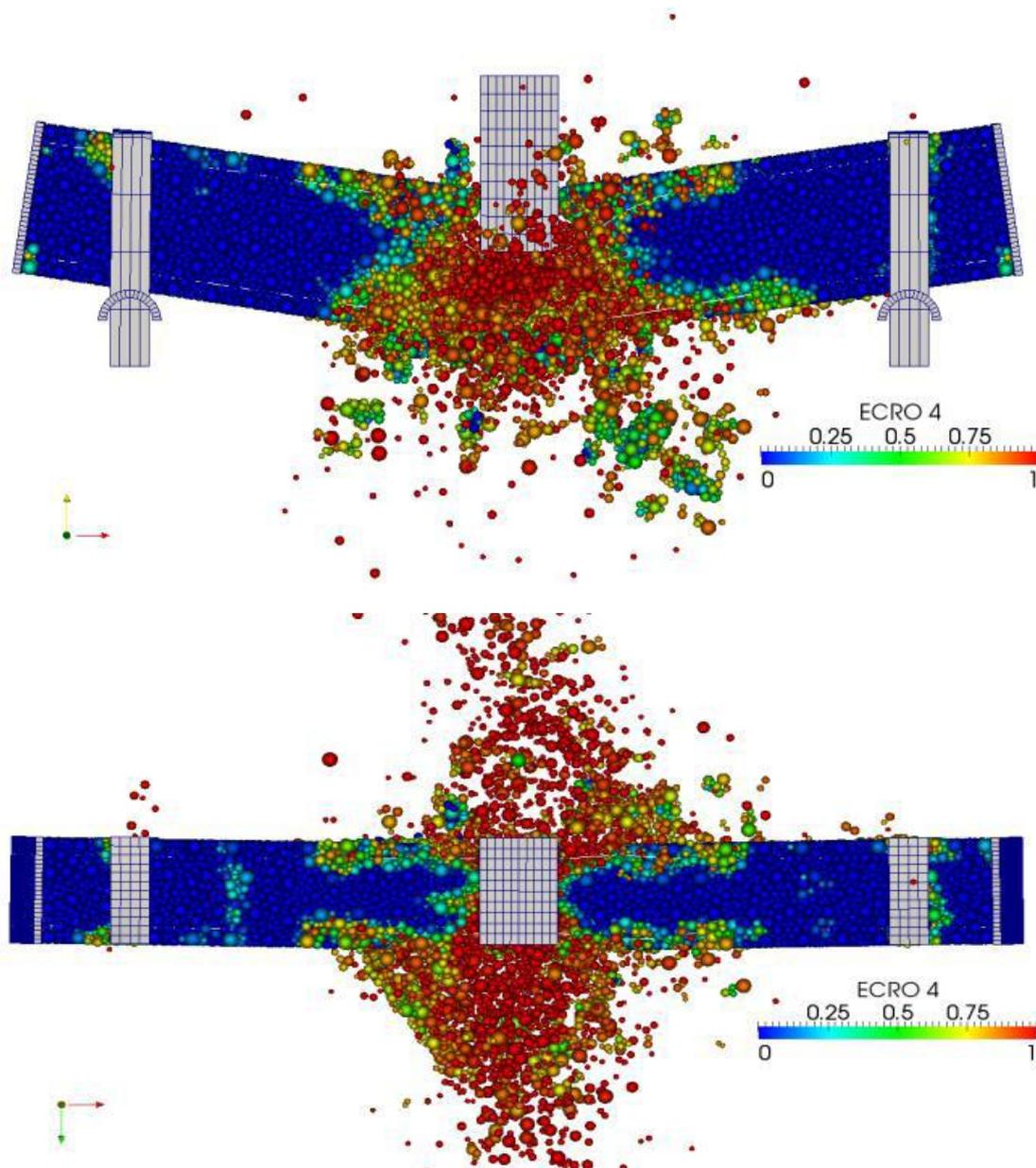


Figure 202 – Endommagement du modèle ED-EF dans le calcul sans prise en compte de l'effet de vitesse, vue de front (en haut) et de dessus (en bas).

Sur la Figure 202 on voit une autre conséquence de la fragilité excessive du modèle du béton sous le choc dur : il s'agit du déboutonnage des armatures. En effet, puisque le béton enrobant les aciers supérieurs est éjecté, le projectile entre en contact directement avec les armatures et les déforme de manière importante, cela sollicite l'interface acier-béton et la fait casser au-delà de la zone d'impact.

Si on augmente artificiellement la limite de traction du béton dans le calcul, en la passant par exemple de 3.5 MPa à 7 MPa, le modèle numérique devient très résistant et arrête le projectile (Figure 203). Mis à part l'endommagement diffus qui paraît excessif sous le projectile, on voit que la réponse de la poutre s'est nettement améliorée : l'endommagement se résume à quelques fissures localisées délimitant un cône de cisaillement qui ressemble à celui constaté dans l'essai.

4.4 Impact dur sur poutre

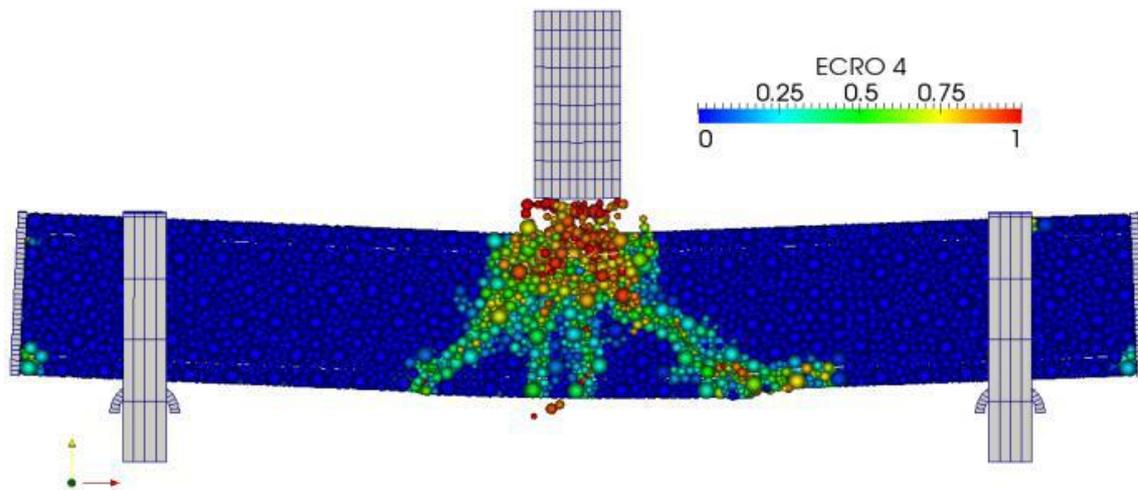


Figure 203 – Endommagement du modèle ED-EF dans le calcul sans prise en compte de l'effet de vitesse, $T=7$ MPa.

Cependant, une telle modification uniforme de la limite de traction sur tout le modèle n'est pas justifiée car le béton est principalement sollicité dans la zone centrale.

Nous avons refait le calcul en rajoutant l'effet de vitesse qui agit sur les liens qui subissent une déformation rapide. La poutre résiste et arrête le projectile, mais on relève un état d'endommagement plus avancé que précédemment, avec rupture de nombreux liens dans la zone centrale mais également loin de l'impact (Figure 204 en haut). Cependant, comme nous l'avons déjà signalé, le post-traitement du champ d'endommagement ED ne renseigne pas sur les plans réels de rupture. En utilisant le post-traitement spécifique de détection de fragments, que nous avons mis en œuvre, nous constatons que plusieurs fragments de béton (amas de béton n'ayant plus de liens entre eux) se forment rappelant, ensemble, la géométrie d'un cône de cisaillement (Figure 204 en bas). Ce cône commence à se détacher, car on voit deux légères brisures sur la surface inférieure de la poutre, mais reste finalement solidaire de la poutre car retenu par les aciers inférieurs.

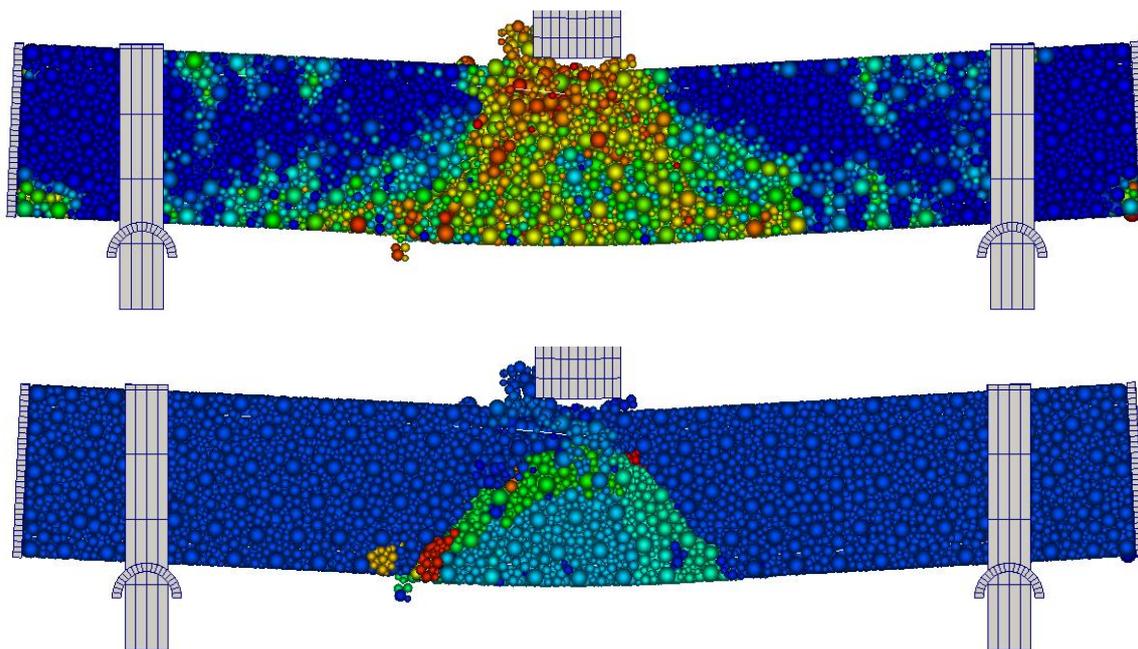


Figure 204 – Endommagement du modèle ED-EF dans le calcul avec prise en compte de l'effet de vitesse.

Cependant, on voit que l'ouverture de ce cône n'est pas aussi grande que dans l'essai (le comportement dynamique en cisaillement n'est pas encore bien maîtrisé), et on constate que le béton s'est encore endommagé (effrité) sous le projectile, ce qui indique que le modèle actuel est encore trop fragile en compression.

L'algorithme de détection de fragments nécessite lui aussi une validation plus poussée sur des essais de fragmentation bien maîtrisés, car le nombre de fragments créés paraît un peu excessif.

Pour améliorer les résultats numériques, on devrait probablement utiliser un maillage plus fin aussi bien pour le béton que pour les armatures où la taille de maille de 5 cm a été utilisée, ce qui ne permet pas de reproduire une forte courbure locale de l'armature supérieure sous le projectile que l'on peut observer sur la Figure 201.

Néanmoins, même si le calcul surestime le déplacement maximal mesuré dans l'essai au droit de l'impact l'ordre de grandeur est respecté : sur la Figure 205 nous comparons le déplacement du nez du projectile après être entré en contact avec la dalle (entre la phase de vol libre et la phase de rebond) et la flèche calculée.

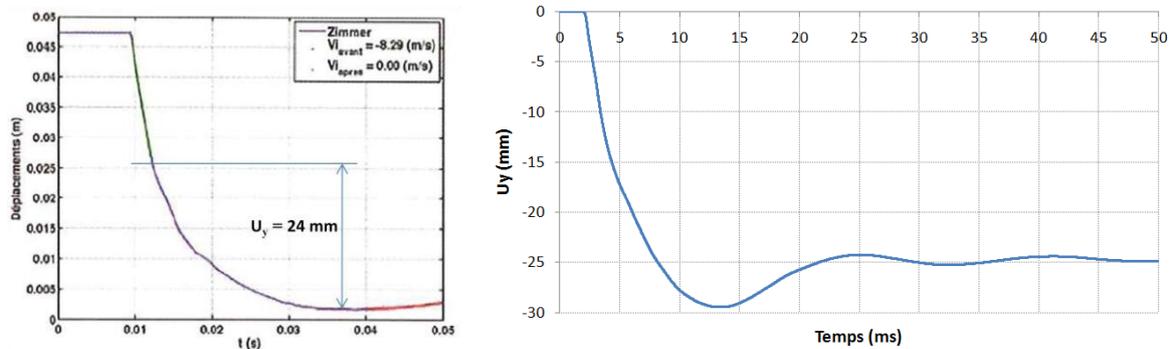


Figure 205 – Comparaison du déplacement du projectile au cours de l'essai (à gauche) et de la flèche obtenue numériquement en prenant en compte l'effet de vitesse (à droite).

4.5 Conclusion

Etant donné la complexité du problème d'impact, nous avons adopté une démarche progressive dans la modélisation de ce problème en simulant d'abord un essai sur poutre puis un essai sur dalle. Dans tous les calculs présentés dans ce chapitre, nous avons réalisé une modélisation très fine et détaillée de la structure mais aussi des conditions expérimentales afin de limiter les incertitudes liées au chargement et aux conditions aux limites.

La simulation de la poutre CEA soumise à un choc mou a montré clairement que notre modèle est adapté et capable de simuler précisément le faciès de fissuration local de la poutre. Par un post-traitement spécifique, nous avons montré notamment que la rupture se produit bien par propagation de macro-fissures de la fibre inférieure vers la fibre supérieure de la poutre. Notre modèle donne également une bonne approximation des grandeurs globales, notamment de la flèche de la poutre et de la force d'impact. Ces bons résultats ont été obtenus avec la loi de comportement quasi-statique du béton dans notre modèle (sans dépendance à l'effet de vitesse), ce qui semble montrer qu'elle suffit pour modéliser des impacts à basse vitesse. On peut dire que notre modèle est

4.5 Conclusion

validé et a une bonne capacité prédictive sur des problèmes de poutres en béton armé soumises à des chocs mous.

Nous sommes ensuite passés à la simulation d'un cas beaucoup plus conséquent, la simulation d'un essai d'impact mou sur une dalle fortement armée issu de la série des essais Meppen. La prise en compte de l'effet de vitesse sur la résistance en traction du béton s'est révélée essentielle pour obtenir des résultats qualitativement proches de ceux de l'essai. Notre modèle prédit notamment l'arrêt du projectile et la non perforation de la dalle, mais aussi la propagation de fissures le long du ferrailage en face arrière de la dalle et la formation d'un cône de fissuration au droit de l'impact. Néanmoins, une identification plus fine des paramètres de la liaison acier-béton et de la loi à effet de vitesse doit être réalisée avant de se lancer dans une étude plus quantitative.

Un des souhaits exprimés par EDF est de pouvoir simuler des chocs durs avec notre modèle dans le but de développer un outil capable de couvrir un plus grand spectre d'impacts. Sur la simulation de l'essai d'impact dur sur une poutre réalisé au CEA, notre modèle restitue le cône de cisaillement et une bonne estimation de la flèche de la poutre. Néanmoins, bien que la poutre conserve son intégrité, le béton situé dans ce cône est fortement endommagé, ce qui nécessite des études supplémentaires sur le comportement du béton notamment en compression.

Conclusion générale et perspectives

Conclusions

La présente thèse a été lancée à la suite d'une série de travaux antérieurs à EDF R&D et au Laboratoire 3S-R sur la méthode des éléments discrets (ED), notamment via la thèse de J. Rousseau, qui ont mis en place un cadre numérique et informatique permettant de modéliser un comportement endommageant d'une structure en béton armé soumise à un impact. Cependant, un certain nombre de difficultés techniques majeures subsistait empêchant d'appliquer la méthode ED à la résolution de problèmes pratiques à l'échelle industrielle. Nous avons démarré ce travail de thèse en essayant de lever ces difficultés en proposant des solutions permettant de maîtriser le calcul des structures en béton armé par la méthode des éléments discrets sphériques.

Notre première action a consisté en des tentatives de correction/amélioration du modèle de liaison acier-béton introduit dans le code EUROPLEXUS lors de la précédente thèse. Ce modèle, reliant les éléments discrets de béton et d'armature a d'abord été modifié afin de prendre en compte, dans le calcul des efforts, le changement de direction de l'armature au cours de la déformation de la structure. Cependant, d'autres problèmes de conception de ce modèle ont été détectés, notamment un non respect de l'équilibre en rotation, ce qui le rendait instable dès l'apparition de déformations importantes ou même lors d'un mouvement de corps rigide (translation et/ou rotation d'ensemble), provoquant un départ massif d'éléments discrets béton ayant des liaisons avec les aciers.

Pour remédier à cela, nous avons proposé un nouveau modèle de liaison A-B stable et robuste, tout en restant dans le cadre de la modélisation ED pour le béton et le ferrailage. Le nouveau modèle fait intervenir non plus deux mais trois éléments discrets : la liaison s'appuie sur un élément discret béton et deux éléments discrets acier qui encadrent directement la projection de l'élément béton sur l'armature. Nous avons vérifié sur plusieurs cas-tests statiques et dynamiques que le nouveau modèle ne génère pas d'instabilités car il est dûment équilibré à la fois en translation et en rotation.

Face au besoin de modéliser un ferrailage complexe des structures industrielles, nous avons constaté les limitations du modèle « tout ED » où la représentation ED des armatures complexifie énormément le modèle et pénalise la résolution numérique. Nous avons alors décidé de modéliser les armatures en éléments finis poutre, comme cela se fait dans les calculs éléments finis standards, et nous avons modifié notre modèle de liaison pour l'adapter à ce changement. Le modèle final repose sur la modélisation ED du béton, permettant de profiter de la nature « discrète » de cette formulation, et sur la modélisation EF poutre des armatures, donnant la possibilité de représenter toute la complexité du ferrailage que l'on rencontre dans les structures industrielles en béton armé. On évite ainsi les inconvénients dus à la modélisation ED des armatures, tout en gardant les avantages du précédent modèle : équilibre de la liaison en translation et en rotation et découplage

des composantes normale et tangentielle. Nous avons réalisé une étude à la fois théorique et numérique sur la stabilité et la précision du modèle proposé qui a permis d'obtenir un critère que doit vérifier le pas de temps, pour que l'intégration temporelle soit stable et précise à une erreur relative donnée. La simulation de l'essai de tirant avec le modèle proposé montre sa capacité à reproduire le transfert des efforts entre le béton et l'armature au niveau de l'interface acier-béton, ce qui conduit à l'apparition d'un nombre fini de macro-fissures le long du tirant. Le modèle numérique reproduit correctement la plastification de l'armature aux endroits où se trouvent des macro-fissures, montrant que seul l'acier travaille dans ces zones pour résister à la traction.

Même si le sujet principal de notre travail concerne la modélisation de la liaison acier-béton, nous avons consacré du temps pour étudier et maîtriser la modélisation du béton seul, puisqu'il n'est pas raisonnable d'entamer le calcul de structures en béton armé en maîtrisant uniquement les questions liées à la liaison acier-béton et en délaissant les aspects relatifs à la modélisation du comportement du béton lui-même. Ainsi, pour répondre à la question sur la convergence au maillage de la méthode ED sphérique, nous avons réalisé une étude numérique sur une série d'échantillons ED maillés de plus en plus finement. En appliquant une procédure d'identification pour déterminer les paramètres locaux de ces modèles, nous avons montré que les jeux de paramètres obtenus sont peu dépendants de la finesse du maillage éléments discrets ainsi que du mailleur employé pour fabriquer le maillage tétraédrique utilisé en entrée de l'outil SpherePadder++. Grâce à cette étude il a été possible de déterminer une discrétisation minimale nécessaire au modèle ED pour pouvoir reproduire le comportement macroscopique du béton dans le domaine élastique linéaire.

En simulant un essai de fendage d'une éprouvette cylindrique, nous avons montré que notre modèle ED reproduit correctement la rupture fragile du béton en traction : l'éprouvette se fend selon son diamètre en deux demis-cylindres. La valeur de la limite globale de traction du béton calculée au cours de la simulation est très proche de celle mesurée expérimentalement.

Dans le but de tester la capacité du modèle ED à représenter le comportement du béton sous chargement multiaxial, nous avons simulé un essai de Nooru-Mohamed avec un chargement combiné de cisaillement/traction, et en faisant varier l'intensité du chargement de cisaillement. Pour chaque cas de charge, nous avons comparé les directions de propagation des fissures obtenues numériquement avec celles issues de l'essai et avons constaté que le modèle ED que nous employons reproduit fidèlement les trajets de propagation des fissures observés expérimentalement.

Mis en œuvre dans EUROPLEXUS et testé sur des cas-tests élémentaires, le modèle mixte ED-EF a été ensuite appliqué à la simulation de vraies structures en béton armé dans toute leur complexité. Nous avons simulé de manière détaillée quelques essais connus réalisés sur des structures en béton armé pour valider l'ensemble de notre approche numérique et recueillir des éléments pour définir les pistes d'amélioration des modèles que nous avons mis en œuvre.

Tout d'abord, nous avons réalisé la simulation d'un essai de choc mou résultant d'une chute gravitaire (vitesse d'impact de 5.425 m/s) d'un projectile lourd sur une poutre en béton armé. Ce calcul a pu être mené avec une version parallèle d'EUROPLEXUS, car nous avons parallélisé le nouveau modèle de liaison. Des résultats qualitativement et quantitativement réalistes ont été obtenus. Notamment, le calcul produit un champ d'endommagement qui se concentre selon quelques directions privilégiées dont la forme rappelle les trajets de fissures et que l'on peut comparer avec le faciès de fissuration relevé dans l'essai, caractérisé par la présence d'une fissure

verticale au milieu de la poutre et plusieurs fissures obliques. Notre modèle donne également une bonne approximation des grandeurs globales, notamment de la flèche de la poutre et de la force d'impact. Ces bons résultats ont été obtenus avec la loi de comportement quasi-statique du béton dans notre modèle (sans dépendance à l'effet de vitesse), ce qui semble montrer qu'elle suffit pour modéliser des impacts à basse vitesse.

La deuxième simulation réalisée concerne l'essai II-4 de la campagne expérimentale Meppen. Ces essais d'impact mou ont été conçus pour être représentatifs de la chute d'avion sur bâtiment nucléaire, et ils sont utilisés pour benchmarker et valider les codes de calcul du domaine accidentel. En faisant la simulation de l'essai Meppen avec la même loi de comportement que pour le cas de l'impact sur poutre CEA, nous avons trouvé que le béton s'endommageait totalement sous le projectile : tous les éléments discrets situés dans cette zone avaient perdu leurs liens cohésifs. Les deux nappes des aciers longitudinaux étaient déchirées par le projectile. Le modèle tel quel prédit une perforation totale de la dalle, ce qui n'était pas le cas dans l'essai. On voit clairement que, même si l'on reste ici dans le domaine du choc mou, les effets dynamiques subis par le béton dans l'essai Meppen sont beaucoup plus importants que précédemment à cause d'un impact très rapide et intense. La loi de comportement statique que nous avons utilisé pour le béton n'est pas appropriée dans le cas Meppen (impact mou à grande vitesse).

Nous avons donc réalisé un développement ponctuel pour améliorer le modèle ED du béton en dynamique en programmant la formule CEB, tenant compte de l'effet de vitesse de déformation en traction, et mettant en place un filtrage temporel sur les vitesses (utilisées dans le calcul du taux de déformation) pour contrer le caractère oscillant chahuté du champ de vitesse en présence de chocs. Par manque de temps, l'effet de vitesse n'a pas été pleinement testé et validé sur des essais appropriés, ce qui reste à faire. Néanmoins, l'effet qualitatif de cette modification est parfaitement visible car, dans le calcul avec la loi de béton modifiée, la dalle conserve son intégrité et arrête le projectile. Avec des paramètres de la formule CEB légèrement modifiés on arrive à reproduire la formation d'un cône de béton sous le projectile ainsi que le réseau de fissures diagonales qui se propagent jusqu'aux bords de la dalle en face arrière.

La troisième simulation a été réalisée pour estimer les capacités de notre modèle mixte à reproduire le comportement d'une structure soumise à un choc dur. Nous avons simulé un essai d'impact dur sur une poutre en béton armé. Comme pour l'essai Meppen, lorsqu'on simule cet essai sans prendre en compte l'effet de vitesse, la poutre ne résiste pas car le béton se désintègre complètement dans la zone de l'impact et laisse passer le projectile. Quand on refait le calcul en rajoutant l'effet de vitesse, qui agit sur les liens qui subissent une déformation rapide, la poutre résiste et arrête le projectile. Même si le calcul surestime le déplacement normal au droit de l'impact mesuré dans l'essai, l'ordre de grandeur est respecté. En utilisant le post-traitement spécifique de détection de fragments, que nous avons mis en œuvre, on constate que plusieurs fragments de béton (amas de béton n'ayant plus de liens entre eux) se forment rappelant, ensemble, la géométrie d'un cône de cisaillement. Cependant, on voit que l'ouverture de ce cône n'est pas aussi grande que dans l'essai, et on constate que le béton s'est encore endommagé (effrité) sous le projectile, ce qui indique que le modèle actuel est encore trop fragile en compression. L'algorithme de détection de fragments nécessite lui aussi une validation plus poussée sur des essais de fragmentation bien maîtrisés, car le nombre de fragments créés paraît un peu excessif. La simulation des chocs durs est un besoin exprimé à terme

par EDF, ce premier calcul permet donc de donner des pistes à développer pour en améliorer la modélisation par éléments discrets.

Pour achever le bilan des simulations réalisées, il faut noter que des modèles de complexité industrielle ont été mis en œuvre montrant leur faisabilité avec les capacités actuelles d'EUROPLEXUS. Ainsi pour simuler l'essai Meppen, a été mis en place un modèle numérique mixte contenant 305071 éléments discrets (béton), 30180 EF poutre (armatures, barres DIWIDAG), 32241 EF coque (projectile), 1576 EF volumiques (appuis) pour le total de 2181252 DDL et 1767282 liaisons. Pour simuler 40 ms de temps physique, correspondant à la durée de l'impact, le calcul EUROPLEXUS, fait en parallèle avec la version développement officielle, a nécessité 4 heures de temps CPU (sur 32 processeurs) avec un pas de temps de stabilité de l'ordre de 1 μ s.

Quant aux développements informatiques réalisés pendant cette thèse, il faut signaler qu'ils ont été tous restitués dans la version de développement officielle du code EUROPLEXUS avec l'aide des encadrants de la thèse. Certains d'entre eux seulement en version séquentielle, comme par exemple l'algorithme de recherche de fragments ou le post-traitement spécifique permettant de visualiser dans SALOME l'état des liens cohésifs béton-béton, ce qui nécessite un travail d'industrialisation ultérieur.

Perspectives

Les progrès accomplis permettent d'ores et déjà d'utiliser la méthode des éléments discrets implantée dans EUROPLEXUS pour réaliser des simulations réalistes sur structures en béton armé dans le domaine des chocs mous à vitesses modérées. Il est cependant trop tôt pour dire que cette approche est complètement opérationnelle sur une large gamme de problèmes d'impact. On peut indiquer plusieurs pistes pour les travaux de recherche ultérieurs.

Pour que cette approche puisse couvrir également le domaine des impacts durs, il faut maîtriser l'effet de vitesse de déformation en traction et améliorer le comportement du modèle ED de béton en compression dynamique, avec une validation poussée par rapport aux essais de type impact dur et notamment en présence de la perforation par poinçonnement.

Pour disposer d'un outil de simulation permettant de traiter des structures en béton armé jusqu'à la ruine complète (modéliser les états ultimes du béton armé avec des grandes déformations et ruptures des aciers), le modèle de liaison acier-béton que nous avons développé devrait également être calibré et validé sur des essais de fragmentation avec rupture des aciers transversaux et/ou longitudinaux.

Les lois d'adhérence des aciers, que nous avons proposées sur la base des essais d'arrachement des armatures à faible diamètre, doivent être ajustées et validées sur des essais d'arrachement d'armatures de plus grand diamètre (voir le ferrailage des dalles Meppen).

La composante normale de la liaison acier-béton est difficile à maîtriser car on n'a pas trouvé dans la littérature d'essai sollicitant uniquement cette composante. Cependant, on peut tenter d'améliorer le modèle existant en remarquant que l'écaillage du béton dans la simulation d'une structure en béton armé est plus fort que dans l'essai correspondant, cela montre que le comportement de la liaison acier-béton pourrait dépendre de l'effet de vitesse. On pourrait alors prendre une loi du

même type que la loi normale du lien cohésif béton-béton mais avec une limite de traction locale plus importante que celle du béton pour tenir compte de l'armature. Cette idée est également évoquée par d'autres auteurs comme Kim (Kim et al., 2013).

Une étape-clé de l'approche ED est la procédure d'identification des paramètres locaux du modèle en linéaire et en non-linéaire pour qu'il puisse reproduire le comportement macroscopique du matériau béton. Pour faire ce recalage actuellement, on lance plusieurs calculs EUROPLEXUS pour simuler les essais de traction simple et de compression simple sur un échantillon numérique et on modifie les paramètres de calcul manuellement. Il est possible d'automatiser cette procédure via une plate-forme de recalage automatique.

Concernant les travaux informatiques, qui pourraient grandement améliorer les performances de l'outil actuel, on peut indiquer la mise en place d'un équilibrage dynamique des charges entre processeurs en présence d'une macro-fissuration avancée, qui permettra de réduire le temps de calcul en mettant à jour régulièrement le découpage du domaine lors du calcul parallèle.

Il est également souhaitable de paralléliser l'algorithme de détection de fragments de béton qui n'est implanté actuellement qu'en séquentiel.

Bibliographie

Agardh, L., & Laine, L. (1999). 3D FE-simulation of high-velocity fragment perforation of reinforced concrete slabs. *International Journal of Impact Engineering*, 22, 911-922.

ASN. (s.d.). *Enceinte de confinement*. Récupéré sur www.asn.fr.

Azéma, E. (2007). *Etude numérique des matériaux granulaires à grains polyédriques: rhéologie quasi-statique, dynamique vibratoire, application au procédé de bourrage du ballast*. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2.

Babuska, I., & Melenk, J. M. (1997). The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 (4), 727-758.

Bardet, J. P. (1994). Observations on the effects of particle rotations on the failure of idealized granular materials. *Mechanics of Materials*, 18, 159-182.

Barenblatt, G. I. (1960). On the wedging of brittle bodies, Original Research Article. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24, 993-1015.

Belytschko, T., Liu, W. K., & Moran, B. (2001). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons Ltd.

Berriaud, C., Sokolovsky, A., Gueraud, R., Dulac, J., & Labrot, R. (1978). Local behaviour of reinforced concrete walls under missile impact. *Nuclear engineering and design*, 45 (2), 457-469.

Bertei, A., Chueh, C. C., Pharoah, J. G., & Nicolella, C. (2014). Modified collective rearrangement sphere-assembly algorithm for random packings of nonspherical particles: Towards engineering applications. *Powder Technology*, 253, 311-324.

Bischoff, P. H., & Perry, S. H. (1991). Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Material and Structures*, 24, 425-450.

Bischoff, P. H., & Perry, S. H. (1995). Impact behavior of plain concrete loaded in uniaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics*, 121 (6), 685-693.

Bolander, J. E., & Saito, S. (1998). Fracture analyses using spring networks with random geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 61, 569-591.

Brara, A., & Klepaczko, J. (2006). Experimental characterization of concrete in dynamic tension. *Mechanics of Materials*, 38 (3), 253-267.

Bibliographie

- Burlion, N. (1998). *Compaction des bétons: éléments de modélisation et caractérisation expérimentale*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure, Cachan.
- Caleyron, F. (2012). *Simulation numérique par la méthode SPH de fuites de fluide consécutives à la déchirure d'un réservoir sous impact*. Thèse de doctorat, INSA Lyon.
- Camacho, G. T., & Ortiz, M. (1996). Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures* , 33, 2899-2938.
- Camborde. (1999). *Modélisation du comportement dynamique du béton - Application aux problèmes d'impacts et d'explosions*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes.
- Cambou, B., Dubujet, P., Emeriault, F., & Sidoroff, F. (1995). Homogenization for granular materials. *Eur. J. Mech., A/Solids* , 14 (2), 255-276.
- CERIB. (s.d.). *Etat des textes normatifs français et européens sur les béton en Juillet 2009*. Récupéré sur www.cerib.com: www.cerib.com/frontoffice/betons.r3103_p64_l1.htm
- Chambart, M. (2009). *Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine*. Thèse de doctorat.
- Ciantia, M., Arroyo, M., Calvetti, F., & Gens, A. (2014). Particle failure in DEM models of crushable soil response. *NUMGE* , 345-350.
- Coronelli, D., Gambarova, P. G., & Ravazzani, P. (2001). Size effect in steel-concrete bond: test results and modelling for smooth bars. *Fracture Mechanics of Concrete Structures (Framcos)* , 669-676.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Uber die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Math. Ann.* , 100.
- Cundall, P. A., & Strack, O. D. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique* , 29 (1), 47-65.
- Cusatis, G., & Pelessone, D. (2006). Mesolevel simulation of reinforced concrete structures under impact loadings. *Proceedings of the EURO-C 2006 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures.*, (pp. 63-70). Mayrhofen, Tyrol, Austria.
- Cusatis, G., Mencarelli, A., Pelessone, D., & Baylot, J. (2011). Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete. II: Calibration and Validation. *Cement and Concrete Composites* , 33, 891-905.
- Cusatis, G., Pelessone, D., & Mencarelli, A. (2011). Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete. I: Theory. *Cement and Concrete Composites* , 33, 881-890.
- Daoud, A. (2003). *Etude expérimentale de la liaison entre l'acier et le béton autoplaçant - contribution à la modélisation numérique de l'interface*. Thèse de doctorat, INSA de Toulouse.
- Desrues, J., & Viggiani, G. (2004). Strain localization in sand: an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. *Int. J. Numer. Ana. Methods Geomech.* , 4, 279-321.

Bibliographie

- Dominguez, N. (2005). *Etude de la Liaison Acier-Béton: de la Modélisation du Phénomène à la Formulation d'un Élément Fini Enrichi "Béton Armé"*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, LMT.
- Donev, A., Torquato, S., Stillinger, F., & Connelly, R. (2004). A linear programming algorithm to test for jamming in hard-sphere packings. *Journal of Computational Physics*, 197 (1), 139-166.
- Donzé, F. V., Magnier, S. A., Daudeville, L., Mariotti, C., & Davenne, L. (1999). Study of the behaviour of concrete at high strain rate compressions by a discrete element method. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 125 (10), 1154-1163.
- Donzé, F. V., Richefeu, V., & Magnier, S. A. (2008). Advances in Discrete Element Method Applied to Soil, Rock and Concrete mechanics. *The Electronic Journal of Geotechnical Engineering*.
- Donzé, F., Magnier, S. A., Daudeville, L., Mariotti, C., & Davenne, L. (1999). Numerical study of compressive behavior of concrete at high strain rates. *ASCE J. of Eng. Mech.*, 125 (10), 1154-1163.
- Ehlers, W., & Scholz, B. (2007). An inverse algorithm for the identification and the sensitivity analysis of the parameters governing micropolar elasto-plastic granular material. *Arch. Appl. Mech.*, 77, 911-931.
- Eligehausen, R., Popov, E. P., & Bertero, V. V. (1983). *Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations*. University of California, National Science Foundation.
- Erzar, B., & Forquin, P. (2014). Analysis and modelling of the cohesion strength of concrete at high strain rates. *International Journal of Solids and Structures*, 51 (14), 2559-2574.
- Farra, B. (1995). *Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec l'armature sur la fissuration*. thèse de doctorat, EPFL.
- Farra, B., & Jaccoud, J. P. (1993). *Influence du béton et de l'armature sur la fissuration des structures en béton*. Rapport des essais de tirants sous déformation imposée de courte durée, EPF de Lausanne.
- Favier, J. F., Abbaspour-Fard, M. H., Kremmer, M., & Raji, A. O. (1999). Shape representation of Axisymmetrical, non-spherical Particles in Discrete Element Simulation using multi-element model particles. *International Journal for Computer-aided Engineering and Software*, 16 (4), 467-480.
- Forquin, P., Gary, G., & Gatuingt, F. (2008). A testing technique for concrete under confinement at high rates of strain. *International Journal of Impact Engineering*, 35 (6), 425-446.
- Frangin, E. (2008). *Adaptation de la méthode des éléments discrets à l'échelle de l'ouvrage en béton armé*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.
- Fries, T., & Matthies, H. (2003). *Classification and overview of meshfree methods*. Rapport technique, Technical University Braunschweig, Brunswick, Germany.
- Fujiwara, Y., Takeuchi, N., Shiomi, T., & Kambayashi, A. (2013). Discrete crack modelling of RC structure using hybrid-type penalty method. *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures*, 3 (2), 263-274.

Gabet, T. (2006). *Comportement triaxial du béton sous fortes contraintes: influence du trajet de chargement*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Gasser, T. C., & Holzapfel, G. A. (2006). 3D Crack propagation in unreinforced concrete. A two-step algorithm for tracking 3D crack paths. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 5198-5219.

Gatuingt, F., & Pijaudier-Cabot, G. (2002). Coupled damage and plasticity modelling in transient dynamic analysis of concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26, 1-24.

Géradin, M., & Rixen, D. (1993). *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. Masson.

Hamouine, A., Lorrain, M., & Elgonnoui, M. (1995). Etude de la résistance à l'arrachement de barres enrobées dans du béton hautes performances. *Materials and Structures*, 28 (10), 569-574.

Han, K., Feng, Y. T., & Owen, D. R. (2005). Sphere packing with a geometric based compression algorithm. *Powder Technology*, 155 (1), 33-41.

Hart, R., Cundall, P., & Lemos, J. (1988). Formulation of a three-dimensional distinct element model - part 2: Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks. *International Journal of Rock Mechanics Min. Sci. and geomec. abstr.*, 25, 117-125.

Hentz, S. (2003). *Modélisation d'une structure en béton armé soumise à un choc par la méthode des éléments discrets sphériques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

Hentz, S., Daudeville, L., & Donzé, F. V. (2003). Modélisation du comportement dynamique du béton par la méthode des éléments discrets. *Revue Française de Génie Civil*, 7 (10), 1325-1347.

Hillerborg, A., Modeer, M., Petersson, P. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773-781.

Huang, F., Wu, H., Jin, Q., & Zhang, Q. (2005). A numerical simulation on the perforation of reinforced concrete targets. *International Journal of Impact Engineering*, 32, 173-187.

Huang, H. (1999). *Discrete Element Modeling of Tool-Rock Interaction*. Thèse de doctorat, University of Minnesota.

Idoux, L. (2013). *Projet Dynamique Rapide - Modélisation des conditions expérimentales des essais de chute sur des poutres en béton armé issus de la thèse d'Armand Leroux et simulation avec la loi DADC*. EDF, T62.

INRIA projet GAMMA. (s.d.). (INRIA) Récupéré sur INRIA projet GAMMA: <http://www.rocq.inria.fr/gamma/Patrick.Laug/logiciels/blsurf/INDEX.html>

IRIS. (2010). *Improving Robustness assessment methodologies for structures Impacted by missileS*. Numerical Simulation Reports, OECD, Nuclear Energy Agency.

Bibliographie

- Iwashita, K., & Oda, M. (1998). Rolling resistance at contacts in simulation of shear and development by DEM. *Journal of Engineering Mechanics*, 124, 285-292.
- Jamet, P., Millard, A., & Nahas, G. (1984). Triaxial behaviour of a micro-concrete complete stress-strain for confining pressures ranging from 0 to 100 MPa. *International Conference on Concrete under Multiaxial Conditions. 1*, pp. 133-140. Toulouse: Presses de l'Université Paul Sabatier.
- Janach, W. (1976). The role of bulking in brittle failure of rocks under rapid compression. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 13, 177-186.
- Jerier, J. F., Imbault, D., Donze, F. V., & Doremus, P. (2009). A geometric algorithm based on tetrahedral meshes to generate a dense polydisperse sphere packing. *Granular Matter*, 11 (1), 43-52.
- Jivkov, A. P., Engelberg, D. L., Stein, R., & Petkovski, M. (2013). Pore space and brittle damage evolution in concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 110, 378-395.
- Jodrey, W., & Tory, E. (1985). Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Physical Review A*, 32, 2347-2351.
- Jonas, W., Meschkat, R., Riech, H., & Rüdiger, E. (1979). Experimental investigations to determine the kinetic ultimate bearing capacity of reinforced concrete slabs subject to deformable missiles j8/5. *5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*. Berlin, Allemagne.
- Jonas, W., Rüdiger, E., Gries, M., Riech, H., & Rützel, H. (1982). *Kinetische grenztragfähigkeit von stahlbetonplatten*. Rapport technique RS 162, Hochtief AG.
- Kennedy, R. (1976). A review of procedures for the analysis and design of concrete structures to resist missile impact effects. *Nuclear Engineering and Design*, 37, 183-203.
- Kilic, A., Yasar, E., & Atis, C. D. (2003). Effect of a bar shape on the pull-out capacity of fully-grouted rockbolts. *Tunneling and Underground Space Technology*, 18 (1), 1-6.
- Kim, K., & Lim, Y. M. (2011). Simulation of rate dependent fracture in concrete using an irregular lattice model. *Cement and Concrete Composites*, 33, 949-955.
- Kim, K., Bolander, J. E., & Lim, Y. M. (2013). Failure simulation of RC structures under highly dynamic conditions using random lattice models. *Computers and Structures*, 125, 127-136.
- Koechlin, P. (2007). *Modèle de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou*. Thèse de doctorat, UPMC.
- Kozicki, J., & Donzé, F. V. (2009). YADE-OPEN DEM: an open-source software using a discrete element method to simulate granular material. *Engineering Computations*, 26 (7), 786-805.
- La Borderie, C., & Pijaudier-Cabot, G. (1987). *Etude expérimentale du comportement des matériaux renforcés*. Rapport LMT Cachan.

- Legrain, G. (2006). *Extension de l'approche X-FEM aux grandes transformations pour la fissuration des milieux hyperélastiques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- Leppanen, J. (2006). Concrete subjected to projectile and fragment impact: Modelling of crack softening and strain rate dependency in tension. *International Journal of Impact Engineering* , 32, 1828-1841.
- Leroux, A. (2012). *Modèle multiaxial d'endommagement anisotrope: gestion numérique de la rupture et application à la ruine de structures en béton armé sous impact*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- Li, Q. M., Reid, S. R., Wen, H. M., & Telford, A. R. (2005). Local impact effects of hard missiles on concrete targets. *International Journal of Impact Engineering* , 32 (1-4), 224-284.
- Li, S., & Liu, W. (2004). *Meshfree particle methods*. (Springer, Éd.)
- Li, X., Chu, X., & Feng, Y. T. (2005). A discrete particle model and numerical modeling of the failure modes of granular materials. *International Journal for Computer-aided Engineering and Software* , 22 (8), 894-920.
- Liao, C. L., Chang, T. P., Young, D. H., & Chang, C. S. (1997). Stress-strain relationship for granular materials based on the hypothesis of best fit. *Int. J. Solids Structures* , 34 (31-32), 4087-4100.
- Lubachevsky, B., & Stillinger, F. (1990). Geometric properties of random disk packings. *Journal of Statistical Physics* , 60 (5-6), 561-583.
- Magnier, S. A., & Donzé, F. V. (1997). *Discrete Element Project*. Rapport n°2, Université du Québec.
- Magnier, S. A., & Donzé, F. V. (1998). Numerical simulations of impacts using a discrete element method. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* , 3 (3), 257-276.
- Malvar, L., & Crawford, J. E. (1998). Dynamic increase factors for concrete. *28th Department of Defense Explosives Safety Seminar*. Orlando, FL.
- Masoero, E., Del Gado, E., Pellenq, R., Ulm, F. J., & Yip, S. (2012). Nanostructure and nanomechanics of cement: polydisperse colloidal packing. *Phys. Rev. Lett.* , 109 (155503).
- Masurel, A. (2011). *Recherche des caractéristiques d'un Volume Élémentaire Représentatif de béton maillé en éléments discrets en élasticité linéaire*. Rapport de stage, EDF.
- Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de doctorat, UPMC, Paris.
- Michaut, V. (2011). *Modélisation de la fragmentation dynamique par la méthode des éléments discrets*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris.
- Mivelaz, P. (1996). *Étanchéité des structures en béton armé : fuite au travers d'un élément fissuré*. Thèse de doctorat, EPFL, Lausanne.
- Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal in Numerical Methods for Engineering* , 46, 131-150.

Bibliographie

- Molina, M., Gutierrez, J. P., & Garcia, M. D. (2002). Evaluation of reinforced concrete structures with partial loss of concrete/steel bond. *In Bond in Concrete* , 182-189.
- Mueller, G. E. (2005). Numerically packing spheres in cylinders. *Powder Technology* , 159 (2), 105-110.
- Nachtsheim, W., & Stangenberg, F. (1981). Impact of deformable missiles on reinforced concrete plates-comparisational calculations of Meppen tests j7/3. *6th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*. Paris, France.
- Nachtsheim, W., & Stangenberg, F. (1982). Interpretation of results of meppen slab tests-comparison with parametric investigations. *Nuclear Engineering and Design* , 75, 283-290.
- Nachtsheim, W., Stangenberg, F., van Exel, C., & Gurski, B. (1984). *Analysen und Auswertungen zu den Meppener Plattenversuchen - Anprall deformierbarer Projektile auf Stahlbetonplatten*. Schnellenbach und Partner, BMFT-Vorhaben 150410, Abschlußbericht - Zerna.
- Nooru-Mohamed, M. B. (1992). *Mixed mode fracture of concrete: an experimental approach*. Phd Thesis, Delft Institute of Technology, The Netherlands.
- O'Connor, R. M. (1996). *A distributed discrete element modeling environment - algorithms, implementations and applications*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Oda, M., Konishi, J., & Nemat-Nasser, S. (1982). Experimental micromechanical evaluation of strength of granular materials: effects of particular rolling. *Mech. Mater.* , 1, 269-283.
- Omar, A. (2014). *Modélisation par la méthode des éléments discrets du comportement fortement endommagé des ouvrages industriels en béton sous chargements dynamiques sévères*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Ouadfel, H., & Rothenburg, L. (1999). An algorithm for detecting inter-ellipsoid contacts. *Computers and Geotechnics* , 24 (4), 245-263.
- Ozbolt, J., Sharma, A., Irhan, B., & Sola, E. (2014). Tensile behavior of concrete under high loading rates. *International Journal of Impact Engineering* , 69, 55-68.
- Phoummavong, V. (2003). *Caractéristiques principales du béton durcissant*. Récupéré sur la.refer.org: www.la.refer.org/materiaux/chapitre_six_six.html
- Pijaudier-Cabot, G. et Bazant, Z. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, 55:2,287.
- Piteau, P., & Valin, T. (2011). *Essais d'impact à basse vitesse sur des poutres en béton armé - deuxième série d'essais : "chocs mous"*. Rapport technique de CEA/DEN/DANS/DM2S/SEMT/DYN/RT/11-041/A.
- Piteau, P., & Valin, T. (2009). *Essais d'impact à basse vitesse sur des poutres en béton armé*. Rapport DM2S, CEA/DEN/DM2S/SEMT/DYN/09-024/A.

Bibliographie

- Plassiard, J. P. (2007). *Modélisation par la méthode des éléments discrets d'impacts de blocs rocheux sur des structures de protection de type merlons*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Polanco-Loria, M., Hopperstad, O., Borvic, T., & Berstad, T. (2008). Numerical predictions of ballistic limits for concrete slabs using a modified version of the HJC concrete model. *International Journal of Impact Engineering*, 35 (5), 290-303.
- Potyondy, D., Cundall, P. A., & Lee, C. A. (1996). Modelling rock using bonded assemblies of circular particles. *Rock Mechanics Tools and Techniques*, 1937-1944.
- Prado, E., & Van Mier, J. (2003). Effect of particle structure on mode I fracture process in concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 1793-1807.
- Qiu, G. (2010). *Modélisation de structures en béton armé sous l'impact d'un projectile déformable. Approche mixte éléments discrets/éléments finis*. Rapport de stage, Ecole Polytechnique.
- RADIOSS. (2009). *Large Displacement Finite Element Analysis (PART 2), RADIOSS THEORY MANUAL v10.0*. Altair Engineering, Inc.
- Ramtani, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Thèse de doctorat, UPMC.
- Réthoré, J., Gravouil, A., & Combescure, A. (2005). An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63 (5), 631-659.
- Riera, J. (1968). On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces. *Nuclear Engineering and Design*, 8, 415-426.
- Rocco, C., Guinea, G. V., Planas, J., & Elices, M. (1999). Size effect and boundary conditions in the Brazilian test: Experimental verification. *Materials and Structures*, 32, 210-217.
- Rossi, P., Van Mier, J. G., Toutlemonde, F., Le Maou, F., & Boulay, C. (1994). Effect of loading rate on the strength of concrete subjected to uniaxial tension. *Materials and Structures*, 27 (5), 260-264.
- Rousseau, J. (2009). *Modélisation numérique du comportement dynamique de structures sous impact sévère avec un couplage éléments discrets / éléments finis*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Safa, K. (2008). *Mise au point d'un essai de compaction dynamique. Application au béton*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- Salot, C., Gotteland, P., & Villard, P. (2009). Influence of relative density on granular materials behavior: DEM simulations of triaxial tests. *Granular Matter*.
- Sawamoto, Y., Tsubota, H., Kasai, Y., Koshika, N., & Morikawa, H. (1998). Analytical studies on local damage to reinforced concrete structures under impact loading by discrete element method. *Nuclear Engineering and Design*, 179, 157-177.

Bibliographie

- Schlängen, E., & Van Mier, J. (1992). Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. *Materials and Structures*, 25 (153), 534-542.
- Schöberl, J., Gerstmayr, J., & Gaisbauer, R. (s.d.). *hp-FEM Project*. (Johannes Kepler University Linz) Récupéré sur hp-FEM Project: <http://www.hpfem.jku.at/netgen/>
- Shiu, W. J. (2008). *Impact de missiles rigides sur structures en béton armé: analyse par la méthode des éléments discrets*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Siavelis, M. (2011). *Modélisation numérique X-FEM de grands glissements avec frottement le long d'un réseau de discontinuités*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- Siiria, S., & Yliruusi, J. (2007). Particle packing simulations based on newtonian mechanics. *Powder Technology*, 174 (3), 82-92.
- Smith, J., Cusatis, G., Pelessone, D., Landis, E., O'Daniel, J., & Baylot, J. (2014). Discrete modelling of ultra-high-performance concrete with application to projectile penetration. *International Journal of Impact Engineering*, 65, 13-32.
- Sugano, T., Tsubota, H., Kasai, Y., Koshika, N., Itoh, C., Shirai, K., et al. (1993b). Local damage to reinforced concrete structures caused by impact of aircraft engine missiles - Part 2. *Nuclear Engineering and Design*, 140, 407-423.
- Sugano, T., Tsubota, H., Kasai, Y., Koshika, N., Ohnuma, H., Von Risemann, W. A., et al. (1993a). Local damage to reinforced concrete structures caused by impact of aircraft engine missiles - Part 1. *Nuclear Engineering and Design*, 140, 387-405.
- Sugano, T., Tsubota, H., Kasai, Y., Koshika, N., Orui, S., Von Risemann, W. A., et al. (1993c). Full-scale aircraft impact test for evaluation of impact force. *Nuclear Engineering and Design*, 140, 373-385.
- Symonds, P. S. (1965). *Behavior of Materials under Dynamic Loading*. (ASME, Éd.) N. Huffington.
- Tavarez, F. (2005). *Discrete element method for modeling solid and particular materials*. PhD Thesis, University of Wisconsin-Madison.
- Teng, T., Chu, Y., Chang, F., Shen, B., & Cheng, D. (2008). Development and validation of numerical model of steel fiber reinforced concrete for high-velocity impact. *Computational Material Science*, 42 (90-99).
- Terrien, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *Bulletin de liaison des Ponts et Chaussées* (105), 65-72.
- Ting, J. M., Khwaja, M., Meachum, L. R., & Rowell, J. D. (1993). An ellipse-based discrete element model for granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 17, 603-623.
- Torre-Casanova, A. (2012). *Prise en compte de la liaison acier-béton pour le calcul de structures industrielles*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Bibliographie

Toutlemonde, F. (1995). *Résistance au choc des structures en béton; du comportement du matériau au calcul des ouvrages*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Zhou, F., Molinari, J. F., & Ramesh, K. T. (2005). A cohesive model based fragmentation analysis: effects of strain rate and initial defects distribution. *International Journal of Solids and Structures* , 42, 5181-5207.

Zhu, H. P., & Yu, A. B. (2006). A theoretical analysis of the force models in discrete element method. *Powder Technology* , 161, 122-129.

Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method* (éd. 5e édition, Vol. 1). Butterworth-Heinemann.

Modification du calcul de la seconde rotation

Le calcul de l'effort tangentiel de la liaison cohésive se fait de manière incrémentale à partir de l'effort tangentiel cumulé à l'instant précédent que l'on transporte dans le plan de contact actuel par deux rotations (Hart, 1988). La première rotation a été présentée au chapitre 2, nous détaillons dans cette section la modification que nous proposons pour le calcul de la seconde rotation.

La formule qui effectue la seconde rotation tient compte des rotations des éléments dans la direction \vec{n}^{n+1} (pivotement). On calcule la composante normale de la vitesse de rotation moyenne $\vec{\Omega}_p$:

$$\vec{\Omega}_p = \left(\frac{1}{2} (\vec{\Omega}(I/0) + \vec{\Omega}(J/0)) \cdot \vec{n}^{n+1} \right) \vec{n}^{n+1}$$

On applique la rotation sur $\vec{F}_S^{R1,n}$.

$$\vec{F}_S^{R2,n} = \vec{F}_S^{R1,n} - \vec{F}_S^{R1,n} \times \vec{\Omega}_p \Delta t$$

Par un exemple simple comme celui utilisé pour la première rotation, on peut montrer que la formule de la seconde rotation est valable uniquement dans le cas où les rotations des éléments discrets sont très faibles. Nous proposons de généraliser cette formule pour pouvoir traiter les cas où les rotations ne seraient pas négligeables. La Figure 206 montre une vue de la liaison dans le plan de contact. Entre les instants t^n et t^{n+1} , les éléments I et J ont tourné dans la direction normale au plan de contact ce qui se traduit par une composante de la vitesse de rotation normale au plan de contact non nulle $\vec{\Omega}_p$. Nous proposons de bâtir un nouveau trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{n}^{n+1}, \vec{n}_s, \vec{n}_t)$ basé sur les vecteurs $\vec{F}_S^{R1,n}$ et \vec{n}^{n+1} .

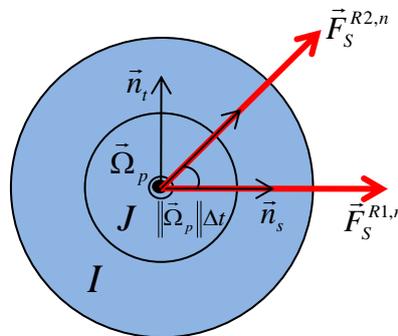


Figure 206 - Schéma de la seconde rotation de l'effort tangentiel cumulé.

$$\vec{n}_s = \frac{\vec{F}_S^{R1,n}}{\|\vec{F}_S^{R1,n}\|} \quad \vec{n}_t = \vec{n}^{n+1} \times \vec{n}_s$$

Dans ce trièdre, la rotation de $\vec{F}_S^{R1,n}$ autour de $\vec{\Omega}_p \Delta t$ est exprimée exactement :

$$\vec{F}_S^{R2,n} = \|\vec{F}_S^{R1,n}\| (\cos(\|\vec{\Omega}_p\| \Delta t) \vec{n}_s + \sin(\|\vec{\Omega}_p\| \Delta t) \vec{n}_t)$$

On remplace \vec{n}_s et \vec{n}_t par leurs expressions respectives en fonction de $\vec{F}_S^{R1,n}$ et \vec{n}^{n+1} :

$$\begin{aligned} \vec{F}_S^{R2,n} &= \|\vec{F}_S^{R1,n}\| \cos(\|\vec{\Omega}_p\| \Delta t) \frac{\vec{F}_S^{R1,n}}{\|\vec{F}_S^{R1,n}\|} \\ &\quad + \|\vec{F}_S^{R1,n}\| \sin(\|\vec{\Omega}_p\| \Delta t) \vec{n}^{n+1} \times \frac{\vec{F}_S^{R1,n}}{\|\vec{F}_S^{R1,n}\|} \end{aligned}$$

Après simplification par la norme de $\vec{F}_S^{R1,n}$, il reste :

$$\vec{F}_S^{R2,n} = \cos(\|\vec{\Omega}_p\| \Delta t) \vec{F}_S^{R1,n} + \sin(\|\vec{\Omega}_p\| \Delta t) \vec{n}^{n+1} \times \vec{F}_S^{R1,n}$$

On remarque que quand on fait tendre $\|\vec{\Omega}_p\|$ vers 0, pour se placer dans le cas des petites rotations, on retrouve l'expression de la formule de la seconde rotation proposée par Hart :

$$\vec{F}_S^{R2,n} = \vec{F}_S^{R1,n} + \|\vec{\Omega}_p\| \Delta t \vec{n}^{n+1} \times \vec{F}_S^{R1,n} = \vec{F}_S^{R1,n} + \vec{\Omega}_p \Delta t \times \vec{F}_S^{R1,n}$$