HAL
open science

Cohérence à un et deux électrons en optique quantique électronique

Étienne Thibierge

To cite this version:

Étienne Thibierge. Cohérence à un et deux électrons en optique quantique électronique. Physique Quantique [quant-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2015. Français. NNT : 2015ENSL0998 . tel-01171749

HAL Id: tel-01171749

https://theses.hal.science/tel-01171749

Submitted on 6 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lyon, délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

Discipline : Physique

Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon

École doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Cohérence à un et deux électrons en optique quantique électronique

---

Présentée et soutenue publiquement le lundi 15 juin 2015 par

M. Étienne Thibierge

Directeur de thèse :

M. Pascal Degiovanni

Après l'avis de

M. Denis Feinberg

M. Sébastien Tanzilli

devant le jury composé de

M. Pascal Degiovanni,	CNRS et École Normale Supérieure de Lyon,	Directeur de thèse,
M. Denis Feinberg,	CNRS et Université de Grenoble,	Rapporteur,
M. Peter Holdsworth,	École Normale Supérieure de Lyon,	Examinateur,
M. Fabien Portier,	CEA Saclay,	Examinateur,
Mme Inès Safi,	CNRS et Université Paris Sud XI,	Examinateur,
M. Sébastien Tanzilli,	CNRS et Université Nice Sophia Antipolis,	Rapporteur.

Remerciements

Au lendemain d'une journée de soutenance bien remplie et de derniers jours trop agités, les dernières lignes manquantes à mon fichier `tex` (et bientôt `pdf/a>1.4`!) sont aussi, comme chacun sait, celles qui seront les plus lues : ces remerciements.

Le premier des mercis est évidemment pour Pascal, qui a encadré mon travail avec un enthousiasme et une sérénité jamais démentis, tout en me faisant travailler sur un sujet plein de physique et pas trop technique qui m'a parfaitement convenu. Je ne m'attarderai pas sur ses qualités scientifiques et sa capacité à enchaîner les calculs les plus imbuvables pendant des heures tout en en comprenant tout de suite le sens et les implications physiques. Il est beaucoup plus drôle d'évoquer sa personnalité de prêcheur de la sobriété heureuse et de disciple de l'iPad mini, de rappeler un léger accrochage avec un convoi funéraire sur un rond-point d'Ajaccio ou de faire part de ma découverte au détour d'un bœuf bourguignon d'un système de LED piloté par iPhone grâce auquel on éclaire son appartement en n'importe quelle couleur RGB. Merci Pascal !

Malgré un chef haut en couleur, cette thèse n'aurait pas été aussi intéressante si nous n'avions été que deux. Dario Ferraro a accompagné de près mes débuts en première année (et ma découverte de Trieste l'italo-slovène), et nos échanges ont grandement facilité mon entrée dans le travail de recherche. Les Minion–Dalton ont ensuite apporté leur rire discret et leurs blagues subtiles, ainsi qu'un certain goût pour les calculs infâmes. Je leur souhaite une bonne continuation, notamment bon courage pour se dépétrer des 6×10^5 termes du $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}$ en interaction.

Les visites chez les expérimentateurs du LPA font sans conteste partie des meilleurs moments de la thèse. Un grand merci au Talentueux Gwendal Fève et à ses ouailles, Erwann (dont le pot de thèse était le Graal à atteindre), Vincent et Arthur, pour avoir écouté nos élucubrations quadri-dimensionnelles, pour nous faire comprendre la difficulté de contrôler des électrons froids avec des fils chauds ou pour les déjeuners dans les restaurants du quartier latin. Au plaisir de se revoir dans les années à venir, Champigny n'est pas très loin de la P13.

Les questions et commentaires des membres du jury ont permis de parachever l'écriture de ce manuscrit. Merci à Denis Feinberg, Sébastien Tanzilli, Fabien Portier, Inès Safi et Peter Holdsworth d'avoir accepté d'y prendre part, et d'avoir lu le manuscrit avec soin. En outre, c'est un plaisir de retrouver en Peter et Denis deux anciens enseignants de master dont les cours ont contribué à m'intéresser à la matière condensée et au transport mésoscopique. Merci également à Micha Moskalets pour ses critiques, bien que sa visite en France n'ait pas été dans le meilleur timing par rapport à la date de remise du manuscrit.

J'ai aussi eu le bonheur d'enseigner en prépa agreg pendant trois ans, ce qui a largement confirmé que c'était la voie que je voulais suivre. Je tiens donc à commencer par remercier les agrégatifs 2013 à 2015, pour leur intérêt, leurs questions, et tout simplement pour m'avoir fait progresser comme physicien et comme enseignant. Un clin d'œil particulier à ceux qui m'ont fait l'amitié de délaisser leurs plans pour assister à la soutenance ou partager un verre de punch. Si

l'expérience a pu être aussi enrichissante, c'est parce que j'ai eu la chance de bénéficier d'une très grande confiance de la part de Philippe Odier, qui m'a permis de me lancer « pour de vrai » et envers qui je suis très reconnaissant. Par suite, Sylvain Joubaud a largement confirmé cette confiance : merci ! Je ne pourrais citer tous les collègues avec qui j'ai travaillé sans en oublier ... mais je ne peux pas ne pas mentionner Arnaud Le Diffon et Michel Fruchart qui ont été de tous les bons coups. Un double merci, même, à Arnaud, Michel et Sylvain pour leur amitié et leur soutien dans les heures sombres de ce printemps.

Une thèse, c'est aussi passer trois ans au sein d'un laboratoire : les remerciements à son directeur sont donc souvent un passage obligé et de pure forme. Ceux que j'adresse à Thierry Dauxois sont au contraire les plus sincères. Sa volonté et son aptitude pour écouter, expliquer les choses posément et porter de l'attention à tous sont très précieuses.

Une thèse, c'est encore passer trois ans dans un bureau. Pour le coup, j'ai été gâté de travailler dans une ambiance aussi agréable. Je ne décrirai ni les bureaux, ni les affichages sur les murs, ni les fenêtres les plus fréquemment ouvertes sur les PC, je me contenterai de remercier Louis-Paul, Thomas, Clément, Irénée et Arnaud, par ordre de départ puis d'arrivée ... avec un petit plus pour Clément qui a entamé sa thèse en même temps que moi et finira bientôt. Je serai heureux de retrouver Thomas parmi les profs des petites prépas de banlieue parisienne, et je souhaite toute la réussite possible aux quatre autres pour leur avenir dans la recherche.

La bonne ambiance tient aussi aux amis du labo, tout spécialement ceux de l'agreg, Michel, Pierre, Jean-Baptiste, Robin, David, Antoine, Maxime, Jean-Yo, auxquels je rajoute Clémence et Julien, et ceux du bureau du fond, Daniele, Christoph ... et Damien. Merci aussi à Arnaud pour les pauses café, et de se soucier autant de la réussite des projets des autres. Merci à Marc Magro pour ses passages réguliers dans le bureau et sa gentillesse, ainsi qu'à Seb Paulin. Un merci encore plus grand à ceux avec qui j'ai partagé mes sept années lyonnaises : Mickaël et Charlotte, David et Loren, Antoine et Sophie, Xavier, et Jean-Baptiste. J'espère que la distance entre Lyon, Marseille, Tokyo, Nancy et Champigny ne nous empêchera pas de nous revoir de temps en temps.

Merci d'ailleurs à mes nouveaux collègues pour leur accueil chaleureux, et coucou à mes élèves si Google les amène à lire ces pages plutôt que de réfléchir au prochain DM ;)

Enfin, je remercie ma famille, mes parents, mes beaux-parents, Clément, Gabriel, Anne-Lise, Thibault et Laurie pour tout ce qu'ils m'ont apporté, et pour être venu de Brétigny, Rouen ou Belfort pour m'écouter raconter un travail auquel ils n'ont pas dû comprendre grand chose.

Je ne saurai finir sans remercier Chloé d'être toujours là, tout spécialement ces derniers mois et ces derniers jours, et notre Aubin d'être un bébé super et une source d'émerveillement inépuisable (mais qui dort très bien). Avec eux à mes côtés, je sais que tout se passera très bien dans cette nouvelle vie qui s'annonce.

Lyon, le 16 juin 2015

Table des matières

1 Faire de l'optique avec des électrons **9**

1.1 La quête . . . 9

1.2 Le plateau de jeu . . . 11
1.2.1 Gaz d'électrons bidimensionnel en régime d'effet Hall quantique entier . . . 11
1.2.2 Canaux de bord . . . 11

1.3 Les héros . . . 14
1.3.1 Des grilles électrostatiques pour manipuler les canaux de bord . . . 14
1.3.2 Un condensateur mésoscopique comme source d'électrons à la demande . . . 14
1.3.3 Des contacts ohmiques pour émettre ou absorber . . . 17
1.3.4 De l'électronique rapide pour détecter les électrons . . . 18

1.4 Les points de victoire . . . 21
1.4.1 Fentes d'Young . . . 21
1.4.2 Interféromètre de Mach–Zehnder . . . 22
1.4.3 Expérience d'Hanbury Brown–Twiss . . . 24
1.4.4 Expérience de Hong–Ou–Mandel . . . 26

1.5 Le gouffre diabolique . . . 31

1.6 Plan de bataille . . . 33

2 Cohérence à un électron **35**

2.1 Cohérence optique . . . 36
2.1.1 Interférences et fonction de cohérence . . . 36
2.1.2 Fonction de cohérence du champ électromagnétique classique . . . 37
2.1.3 Fonctions de cohérence quantique de Glauber . . . 38

2.2 Électrodétection et cohérence électronique . . . 40
2.2.1 Dispositif et modèle . . . 40
2.2.2 Probabilité de détection . . . 41
2.2.3 Signal délivré par le détecteur . . . 42
2.2.4 Définition et propriétés des fonctions de cohérence à un électron . . . 44

2.3 Excès de cohérence émis par une source . . . 47
2.3.1 Cohérence de la mer de Fermi . . . 47
2.3.2 Définition de l'excès de cohérence émis par une source . . . 48
2.3.3 Excès de cohérence porté par un électron, effet de décohérence . . . 49
2.3.4 Cohérence d'une paire, statistique fermionique . . . 54

2.4 Représenter la cohérence . . . 57
2.4.1 Représentation en temps . . . 57
2.4.2 Représentation en fréquence . . . 58
2.4.3 Représentation de Wigner . . . 60

2.5 Cohérence émise par un condensateur mésoscopique . . . 64
2.5.1 Rappel des principes de fonctionnement d'un condensateur mésoscopique . 64
2.5.2 Description en termes de paquet d'ondes . . . 64
2.5.3 Description par la théorie de Floquet . . . 66

2.6 Cohérence émise par un contact ohmique commandé en tension, source leviton . . 68
2.6.1 Effet d'un contact ohmique sur la cohérence électronique . . . 68
2.6.2 Contact ohmique commandé par une tension harmonique . . . 68
2.6.3 Source leviton . . . 70

2.7 Conclusion . . . 74

3 Cohérence à deux électrons, la statistique fermionique à l'œuvre 75

3.1 Cohérence totale à deux électrons . . . 76
3.1.1 Définition et propriétés fondamentales . . . 76
3.1.2 Cohérence à deux électrons et corrélations d'électrodétection . . . 77
3.1.3 De l'importance des symétries . . . 80

3.2 Excès de cohérence à deux électrons émis par une source . . . 84
3.2.1 Cohérence à deux électrons de la mer de Fermi . . . 84
3.2.2 Quelle est vraiment la contribution d'excès ? . . . 84
3.2.3 Cas particulier d'un état vérifiant le théorème de Wick . . . 87

3.3 Exemple d'une paire d'électrons cohérente . . . 89
3.3.1 Excès de cohérence et fonction d'onde à deux électrons . . . 89
3.3.2 Visualiser la cohérence . . . 89
3.3.3 Temps de corrélation et temps de cohérence à deux électrons . . . 95

3.4 Représentations en énergie et de Wigner . . . 97
3.4.1 Représentation en énergie . . . 97
3.4.2 Représentation de Wigner . . . 102

3.5 Degré de cohérence à deux électrons, indiscernabilité et antibunching . . . 105
3.5.1 Retour sur l'optique, degrés de cohérence photoniques . . . 105
3.5.2 Degré de cohérence à deux électrons . . . 106
3.5.3 Degré de cohérence à deux électrons d'une paire d'électrons . . . 108
3.5.4 Degré de cohérence à deux électrons d'un état stationnaire . . . 111
3.5.5 Entre la paire et l'état stationnaire, un train d'électrons cohérents . . . 112

3.6 Conclusion . . . 115

4 Faire interférer pour mesurer et contrôler les cohérences 117

4.1 Que peut-on mesurer directement ? . . . 118
4.1.1 Géométrie à trois terminaux . . . 118
4.1.2 Courant résolu en temps ou en fréquence . . . 119
4.1.3 Bruit de courant et corrélations . . . 120
4.1.4 Formule de Mandel en optique quantique électronique . . . 123

4.2 Interférométrie Mach–Zehnder . . . 126
4.2.1 Rappel du dispositif . . . 126
4.2.2 Mesure de cohérence hors diagonale . . . 127
4.2.3 Franges d'interférences et spectre cannelé . . . 130

4.3 Interférométrie à deux électrons sur un contact ponctuel quantique 137
4.3.1 Cadre de l'étude 137
4.3.2 Expérience HBT électronique 141
4.3.3 Expérience HOM électronique 142
4.3.4 Tomographie d'un état électronique 145

4.4 Interférométrie non-locale à deux électrons 147
4.4.1 Interféromètre à électrons de type Franson 147
4.4.2 Mesure de cohérence hors diagonale 150
4.4.3 Détection d'intrication en fenêtre de temps 152
4.4.4 Des pistes pour d'autres protocoles et d'autres dispositifs 157

4.5 Production de cohérences non-locales par interférométrie 160
4.5.1 Cadre de l'étude 160
4.5.2 Production de cohérence à deux électrons non-locale en temps 160
4.5.3 Production de cohérence à deux électrons non-locale en espace 163

4.6 Conclusion 167

5 Conclusion **169**

5.1 Bilan 170
5.1.1 Fonctions de cohérence 170
5.1.2 Influence de la nature fermionique des électrons 170
5.1.3 Fonctions de cohérence et interférométrie 171

5.2 Questions ouvertes 172
5.2.1 Quel est le lien entre la cohérence à deux électrons et l'intrication ? 172
5.2.2 Quel est l'effet de la décohérence à deux électrons ? 173
5.2.3 Quelles sont les cohérences d'ordre supérieur générées par les interactions ? 174

5.3 La carte au trésor 175

Annexes **177**

A.1 Compléments sur les chaînes de mesure 177

A.2 Analyse de l'interféromètre de Samuelsson en termes d'intrication 182

A.3 Conventions et définitions 184

Table des figures **187**

Bibliographie **191**

Chapitre 1

Faire de l'optique avec des électrons

1.1 La quête

La physique quantique mésoscopique est celle des systèmes de taille suffisamment petite pour que les propriétés de cohérence de phase jouent un rôle important dans leur comportement sans qu'ils ne soient pour autant isolés de leur environnement. Par conséquent, il est nécessaire de les traiter avec les outils propres à la mécanique quantique. Les thématiques pouvant entrer dans ce champ vont de la spintronique à l'étude des isolants topologiques en passant par celle des systèmes hybrides électromécaniques ou des jonctions entre un supraconducteur et un métal normal ou ferromagnétique. Cette thèse concerne un autre domaine, celui du transport électronique cohérent en régime balistique.

Précisons de quoi il s'agit en s'intéressant aux longueurs pertinentes pour décrire le comportement des électrons dans un solide. La plus évidente est la longueur utile de l'échantillon L. L'échelle de longueur caractérisant la diffusion élastique des électrons sur les impuretés de l'échantillon définit le libre parcours moyen ou longueur élastique ℓ_{e}. La longueur d'onde de Fermi λ_F intervient quant à elle en tant que plus petite échelle caractéristique des phénomènes quantiques. Ceux-ci perdent de leur importance par décohérence après propagation sur une distance typique ℓ_φ, appelée longueur de cohérence de phase, dont il est compris depuis longtemps qu'elle est limitée par les interactions entre électrons, du moins tant que la température est suffisamment faible [11]. Effet plus drastique encore, l'énergie fournie à un électron est dissipée sur une longueur caractéristique ℓ_{in}, appelée longueur inélastique. Les interactions électron–électron et électron–phonon en sont responsables [14]. Les systèmes permettant d'observer du transport quantique cohérent sont ceux dans lesquels les échelles de longueur s'organisent selon la hiérarchie

$$\lambda_F \ll L \lesssim \ell_\varphi < \ell_{\mathrm{in}} \,. \tag{1.1}$$

La longueur élastique ℓ_{e} peut a priori se placer presque n'importe où dans cette hiérarchie, la longueur d'onde de Fermi demeurant la plus petite échelle.

Les effets associés à la cohérence de phase des électrons dans ces systèmes sont encore renforcés lorsque la propagation est non seulement cohérente, mais aussi balistique, c'est-à-dire telle que $L \ll \ell_{\mathrm{e}}$, et unidimensionnelle. La limite inverse $L \gg \ell_{\mathrm{e}}$ définit le régime de diffusion multiple, où des effets de localisation faible apparaissent [3]. De fortes analogies entre le régime balistique et la propagation des photons dans le vide sont manifestes, d'où la dénomination d'optique quantique électronique. Des « fibres optiques » et des « lames séparatrices semi-réfléchissantes » à électrons peuvent alors être utilisées pour caractériser des « sources d'électrons uniques ». Ces

analogies optiques sont très fructueuses pour approfondir la compréhension de la propagation des électrons dans les conducteurs quantiques jusqu'à l'échelle de la charge individuelle.

Pour les résumer en une phrase, les objectifs poursuivis en optique quantique électronique sont donc la préparation, la manipulation et la mesure de l'état quantique d'excitations constituées d'un à quelques électrons se propageant dans un conducteur quantique balistique. Bien sûr, ces objectifs contiennent plus qu'une simple transposition des concepts de l'optique à la matière condensée. En effet, des différences majeures existent entre photons et électrons. La première d'entre elles est la statistique : les électrons sont des fermions alors que les photons sont des bosons. De plus, les interactions coulombiennes entre les électrons, à commencer par ceux de la mer de Fermi de l'échantillon solide, affectent considérablement leur comportement. Comprendre où et comment ces différences se manifestent est essentiel.

Une première étape du développement de l'optique quantique électronique consiste à élaborer des sources d'électrons uniques et à décrire les états à un électron émis par ces sources. Ce travail est entamé depuis plus d'une décennie. Une partie des études menées au cours de ma thèse a permis d'avancer d'un pas supplémentaire dans cette voie en proposant une description de la cohérence électronique en termes de fonction de Wigner. Ces sources permettent ensuite de réaliser l'analogue électronique d'expériences d'optique, notamment d'interférométrie Mach–Zehnder, Hanbury Brown–Twiss et Hong–Ou–Mandel. Ces deux dernières expériences reposent sur des interférences à deux particules et posent donc la question des phénomènes à deux électrons en optique quantique électronique. En particulier, analyser en détail le rôle joué par la statistique fermionique est indispensable. Le cœur de mon travail de thèse a ainsi consisté à analyser la traduction de l'indiscernabilité entre électrons dans le formalisme des fonctions de cohérence de l'optique quantique électronique. Cette indiscernabilité entre fermions se manifeste par des propriétés d'anti-symétrie et d'antibunching. En outre, ces études permettent d'aborder la question de l'intrication entre quasi-particules dans les systèmes solides. Les propriétés d'intrication orbitales ont déjà été explorées en détail, mais à l'heure actuelle d'autres types d'intrication, notamment en fenêtre de temps, demeurent relativement peu étudiés. La fonction de cohérence à deux électrons pourrait s'avérer un outil intéressant pour avancer dans cette voie. Nous avons proposé un protocole de mesure de cette fonction de cohérence par interférométrie non-locale à deux électrons, et il semble à même de révéler l'intrication en fenêtre de temps de paires d'électrons. Enfin, nous avons cherché à développer un formalisme très général, en particulier dans lequel les effets de la décohérence pourraient être pris en compte. L'impact de ces effets sur les propriétés mono-électroniques a déjà fait l'objet de nombreux travaux tant théoriques qu'expérimentaux, mais tout reste à faire pour analyser leurs conséquences sur les phénomènes à deux électrons.

Avant d'aborder en détail le formalisme, la suite de ce chapitre introductif propose un tour d'horizon des succès de l'optique quantique électronique, en mettant l'accent sur les réalisations expérimentales et les analogies avec l'optique photonique.

1.2 Le plateau de jeu

Ce paragraphe s'inspire pour partie de la référence [140], ouvrage collectif dirigé par G. Pietryk, qui en donne une introduction qualitative et pédagogique remarquable, ainsi qu'à bien d'autres sujets.

1.2.1 Gaz d'électrons bidimensionnel en régime d'effet Hall quantique entier

Les échantillons utilisés dans les expériences sont formés d'une hétérostructure entre deux semi-conducteurs, en général AsGa–AlAsGa, dopés différemment. La différence de dopage entraîne la formation d'un puits de potentiel profond d'une centaine de nanomètres à l'interface entre les deux semi-conducteurs, et les électrons qui y sont piégés forment un gaz d'électrons bidimensionnel (2dEG) de densité de l'ordre de $10^{11}\,\mathrm{cm}^{-2}$. Ces structures sont fabriquées par épitaxie par jet moléculaire, technique qui permet une grande pureté dans les structures cristallines. En outre, le 2dEG est bien séparé des atomes donneurs, ce qui rend la densité de centres diffuseurs dans le gaz très faible. La mobilité électronique peut alors atteindre des valeurs élevées, jusqu'à 10^6–$10^7\,\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{V}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ à une température de 4 K, alors qu'elle ne vaut que $1.2\times10^3\,\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{V}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ dans du silicium à température ambiante. La longueur élastique comme la longueur de cohérence de phase peuvent quant à elles atteindre 10–20 µm, toujours à 4 K [21, 24, 61]. La lithographie à faisceau d'électrons permet de dessiner sur ces échantillons des structures plus petites, de l'ordre de quelques microns, sur lesquelles la cohérence quantique des électrons est préservée. Ces structures constituent donc le premier ingrédient nécessaire à la réalisation d'expériences d'optique quantique électronique.

Toutefois, ces expériences ne peuvent en général pas être réalisées directement dans un tel échantillon : utilisé sans précaution, la propagation n'y est pas balistique unidimensionnelle, et le paquet d'onde décrivant un électron s'étale dans toutes les directions de l'espace. Il est donc intéressant de forcer la formation de « rails » unidimensionnels le long desquels les électrons se propagent. De tels guides à électrons s'obtiennent en plaçant l'échantillon dans le régime de l'effet Hall quantique entier. Ce régime a été découvert par K. von Klitzing sur des échantillons fabriqués par G. Dorda et M. Pepper en 1980 [176], ce qui lui a permis d'être récompensé du Prix Nobel seulement cinq ans plus tard « for the discovery of quantized Hall effect ». Pour l'atteindre, le gaz bidimensionnel doit être placé à basse température, de l'ordre de 1 K, et dans un fort champ magnétique transverse, de l'ordre de quelques teslas. La conductance longitudinale du gaz bidimensionnel s'annule alors que sa conductance transverse est quantifiée en multiples de l'inverse de la résistance de Klitzing, $R_\mathrm{K} = e^2/h \simeq 25.8\,\mathrm{k}\Omega$. Exposer une théorie complète de l'effet Hall quantique entier telle que présentée dans le cours de M. Goerbig [74] sortirait largement du cadre de ce manuscrit. Sa propriété la plus importante pour l'optique quantique électronique est que le transport électronique dans l'échantillon ne se fait plus que le long de canaux chiraux et unidimensionnels suivant les bords du 2dEG, et seul cet aspect fait l'objet d'explications un peu plus détaillées.

1.2.2 Canaux de bord

L'apparition de ces canaux de bord peut se comprendre qualitativement à l'aide d'une image classique, en se rappelant que le mouvement d'un électron placé dans un champ magnétique transverse B est circulaire [14, 98]. La trajectoire est parcourue à la pulsation cyclotron,

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{e\,B}{m^*}\,, \tag{1.2}$$

où e est la charge élémentaire et m^* la masse effective de l'électron, égale à environ un quinzième de sa masse réelle dans les 2dEG utilisés. Les trajectoires possibles sont représentées sur la figure 1.1. Au centre de l'échantillon, la trajectoire est bien une orbite circulaire fermée. En

revanche, sur les bords, la trajectoire ne peut être fermée car l'électron ne peut sortir du matériau. Par conséquent, tout se passe comme s'il rebondissait sur les bords, ce qui lui permet de se propager le long de l'échantillon en longeant les bords.

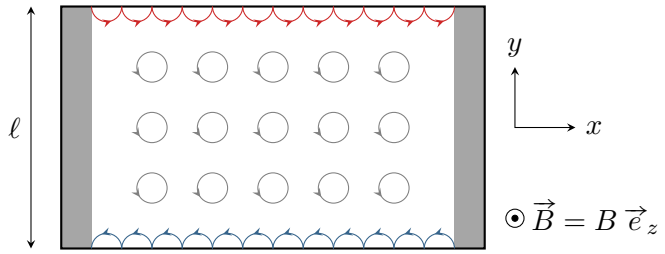


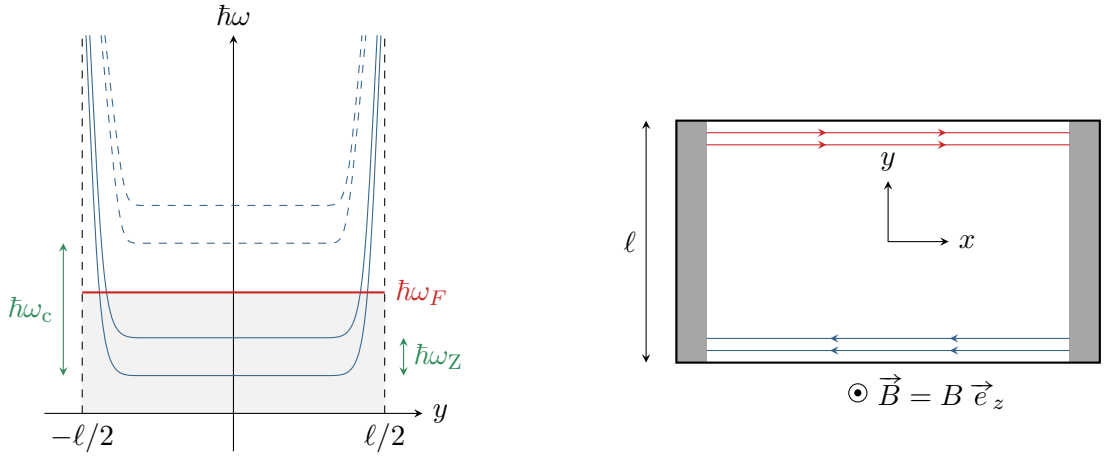
Fig. 1.1 – Modèle classique des canaux de bord. L'électron doit suivre une trajectoire circulaire, mais celle-ci ne peut pas être fermée sur les bords de l'échantillon, ce qui entraîne une propagation le long des bords de l'échantillon.

De façon un peu plus rigoureuse, une approche semi-classique [74] permet de montrer que les niveaux d'énergie accessibles aux électrons sont des niveaux de Landau, analogues à ceux d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_c, auxquels s'ajoute le potentiel de confinement des électrons dans le solide et une levée de la dégénérescence de spin d'une énergie $\hbar\omega_Z$, due à l'effet Zeeman engendré par le fort champ magnétique. Cette levée de dégénérescence implique que les niveaux sont polarisés en spin. Les niveaux d'énergie associés sont schématisés figure 1.2a. La thèse de E. Bocquillon [21] indique que pour les paramètres utilisés par le groupe de G. Fève au laboratoire Pierre Aigrain, l'échelle d'énergie cyclotron est de l'ordre de 5 meV alors que l'écart induit par effet Zeeman est de l'ordre de 0.4 meV. Néanmoins, l'écart en énergie dû à l'effet Zeeman est modifié par les interactions coulombiennes [13, 131]. L'interaction d'échange est responsable de ces effets, et par conséquent l'interaction coulombienne tend à favoriser l'alignement des spins et se traduit comme une contribution additionnelle à un écart Zeeman effectif (1).

Le remplissage successif de ces niveaux par l'ensemble des électrons du solide définit l'énergie de Fermi $\hbar\omega_F$ qui ne croise les niveaux de Landau que près du bord de l'échantillon dès lors qu'un nombre entier ν de niveaux sont remplis, ce qui justifie la dénomination d'effet Hall quantique *entier*. Ce nombre de niveaux remplis est appelé facteur de remplissage. Comme le transport électronique à basse énergie n'est possible qu'au voisinage du niveau de Fermi, on comprend ainsi qu'un nombre ν de canaux de conduction apparaît près des bords de l'échantillon. Le facteur de remplissage dépend du champ magnétique, puisque lorsque celui-ci augmente, la pulsation cyclotron augmente et certains niveaux de Landau peuvent être promus au dessus du niveau de Fermi, les empêchant de ce fait de participer au transport. En contrepartie, la dégénérescence des niveaux inférieurs augmente lorsque B augmente, c'est-à-dire que ν diminue, ce qui est indispensable puisque le nombre d'électrons dans le solide ne dépend évidemment pas du champ magnétique. Dans les expériences menées par le groupe de G. Fève, le facteur de remplissage vaut 2 ou 3. L'absence d'effet tunnel entre les canaux permet de les considérer comme isolés en termes de transport de charge (2), rendant légitime d'étudier le transport dans un canal unique. À $\nu = 2$ les deux canaux n'ont pas la même polarisation de spin, qui ne pourrait donc pas être conservée au cours du processus tunnel. À $\nu = 3$, deux canaux ont la même polarisation de spin, mais la vitesse de dérive des électrons diffère entre les canaux, ce qui rendrait impossible de conserver l'impulsion, et interdit donc l'effet tunnel.

(1). Ce mécanisme dépend du facteur de remplissage, qui n'est pas encore défini à ce stade du manuscrit : il est plus important à facteur de remplissage impair où le cœur de l'échantillon est polarisé en spin qu'à remplissage pair où il est non polarisé.

(2). Les interactions coulombiennes discutées par la suite impliquent qu'ils ne sont pas isolés en termes électromagnétiques.



(a) Niveaux d'énergie électroniques d'un échantillon soumis à un champ magnétique intense.

(b) Schéma de l'échantillon.

Fig. 1.2 – Modèle quantique des canaux de bord. (a) L'énergie dépend de la position dans la direction y. Trois contributions interviennent, celle des niveaux de Landau séparés de $\hbar\omega_c$, celle de la levée de dégénérescence par une quantité $\hbar\omega_Z$ par effet Zeeman, et celle du potentiel de confinement responsable de la dépendance spatiale. Tous les niveaux en dessous de l'énergie de Fermi $\hbar\omega_F$ sont remplis. La figure n'est pas à l'échelle, puisqu'en pratique $\hbar\omega_c \simeq 12\,\hbar\omega_Z$. (b) Par conséquent, le transport électronique n'est possible que dans des canaux chiraux qui longent les bords de l'échantillon.

Cette argumentation ne peut en fait servir que d'image qualitative : la formaliser ne permet pas d'aboutir à l'effet Hall quantique entier, mais seulement à l'effet Hall classique. Pour obtenir la quantification, il faut en plus prendre en compte les interactions entre électrons et les fluctuations du potentiel dans lequel ils évoluent. On peut alors montrer [74] que presque tous les états électroniques au niveau de Fermi sont localisés, formant des boucles de courant dans le cœur de l'échantillon. Les seuls états non localisés se trouvent sur les bords de l'échantillon, ce qui donne naissance à un nombre ν de canaux de conduction. Plusieurs études théoriques [6, 39, 172] et expérimentales [103, 178] ont discuté la structure interne des canaux de bord, qui peuvent être analysés comme des bandes incompressibles conductrices du liquide électronique séparées de bandes compressibles isolantes.

La chiralité de ces canaux est un point crucial : les électrons se propagent dans des sens opposés de part et d'autre de l'échantillon, ce qui implique que tous les canaux du même côté de l'échantillon se propagent dans le même sens. Cela a pour conséquence de diminuer drastiquement la rétrodiffusion [31], puisqu'un tel événement où un électron revient sur ses pas nécessite qu'il passe d'un bord à l'autre de l'échantillon. La longueur élastique est alors considérablement augmentée, jusqu'à atteindre une centaine de microns. En outre, des longueurs de cohérence de phase atteignant une vingtaine de microns à 20 mK ont été mesurées [145].

1.3 Les héros

Les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier constituent l'analogue électronique des fibres optiques. Intéressons-nous maintenant au cœur de la technologie mise en œuvre en optique quantique électronique pour manipuler, produire et détecter l'état quantique de quelques électrons.

1.3.1 Des grilles électrostatiques pour manipuler les canaux de bord

Une grille est simplement un contact métallique déposé à la surface de l'hétérostructure, donc hors du 2dEG. Elle est reliée à un générateur qui peut en imposer le potentiel électrique. Si celui-ci est négatif, la grille a pour effet de repousser les électrons situés dessous par influence électrostatique. En termes des niveaux d'énergie discutés précédemment, une grille a pour effet de moduler spatialement le potentiel de confinement en y ajoutant une contribution électrostatique. Comme les canaux de bords suivent les lignes isoénergétiques à l'énergie de Fermi, ils ne longent plus seulement les limites géométriques de l'échantillon mais tendent en plus à contourner les grilles polarisées négativement. Ce faisant, la géométrie des canaux de bord est contrôlable presque à volonté, ce qui permet par exemple de modifier la longueur sur laquelle les électrons se propagent pour induire une différence de marche dans un interféromètre [180] ou de boucler certains canaux sur eux-mêmes afin de limiter la décohérence [93].

En plaçant face à face deux grilles portées à un potentiel négatif, de l'ordre de quelques centaines de millivolts dans les échantillons utilisés par le groupe de G. Fève, un goulet apparaît dans le 2dEG, formant ce qu'on appelle un contact ponctuel quantique (QPC). Dans la pratique, le plus simple est de porter l'une des deux grilles à un potentiel constant et de contrôler le comportement du QPC en modulant le potentiel de la deuxième grille. Lorsque ce potentiel est très fort, le 2dEG peut être coupé en deux, au sens où les canaux de bord ne passent plus au travers du goulet. Le QPC est alors dit fermé. Le régime le plus intéressant est intermédiaire, où la hauteur de la barrière de potentiel électrostatique est telle qu'un électron peut la franchir par effet tunnel. Le canal de bord n'est alors ni totalement réfléchi, ni totalement transmis, et le comportement du QPC est décrit par les probabilités de transmission et de réflexion associées. Cet effet a été observé expérimentalement par B. van Wees [174] et modélisé théoriquement par M. Büttiker [33] à la toute fin des années 1980. La figure 1.3 schématise les deux cas possibles. Un QPC constitue donc l'analogue d'une lame semi-réfléchissante à électrons. La transition entre les régimes de QPC complètement ouvert ou fermé a lieu en changeant la tension de polarisation de quelques dizaines de millivolts.

1.3.2 Un condensateur mésoscopique comme source d'électrons à la demande

Dans le contexte de l'optique quantique électronique, parler de source d'électrons « à la demande » signifie qu'elle donne à l'expérimentateur un certain contrôle sur l'électron, notamment l'instant auquel il est émis, son énergie, et certains paramètres du paquet d'ondes qui le décrit, notamment sa durée caractéristique.

Structure du condensateur mésoscopique

La première source d'électrons à la demande a été développée au laboratoire Pierre Aigrain de l'ENS Paris par G. Fève, B. Plaçais, J.-M. Berroir et C. Glattli à partir d'idées de C. Glattli étendant des propositions théoriques de M. Büttiker [34]. La première mise en évidence du fonctionnement de la source date de 2007 [55], et elle a été largement utilisée par la suite pour mener des expériences fondatrices de l'optique quantique électronique. Pour ne citer que les réalisations les plus importantes, les effets Hanbury Brown–Twiss [25] et Hong–Ou–Mandel [22] ont été mis en évidence avec cette source. Commençons par une présentation qualitative du fonctionnement du condensateur mésoscopique, dont une vue d'artiste est représentée figure 1.4. Beaucoup plus

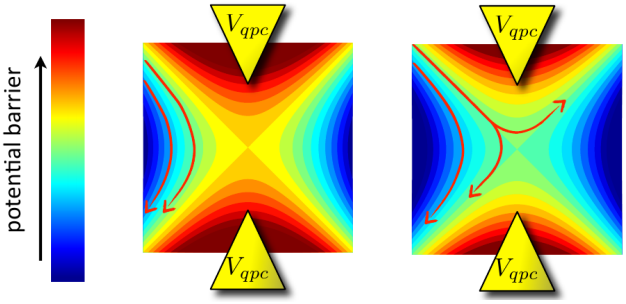


Fig. 1.3 – Barrière de potentiel générée par un contact ponctuel quantique. Par influence électrostatique, deux grilles polarisées à un potentiel négatif créent une barrière énergétique au sein du 2dEG. Pour illustration, le potentiel V_{qpc} est supposé identique sur les deux grilles. Si le potentiel est trop élevé, figure de gauche, les deux canaux de bord sont intégralement réfléchis. Si le potentiel est un peu plus faible, figure de droite, le canal externe peut être partiellement transmis par effet tunnel alors que le canal interne est intégralement réfléchi. Figure extraite de la référence [21].

de détails sont disponibles dans les thèses de E. Bocquillon [21] et V. Freulon [61], et une analyse précise des états quantiques émis sera développée au paragraphe 2.5 de ce manuscrit, page 64.

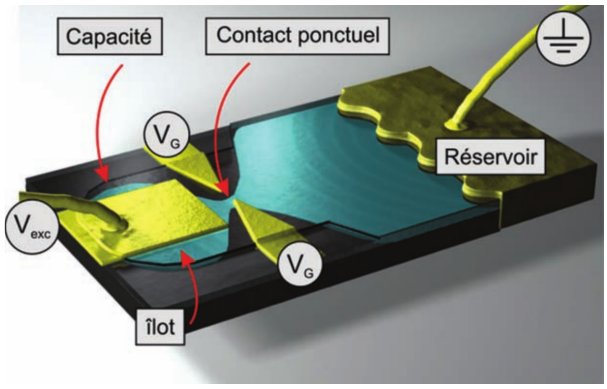


Fig. 1.4 – Vue d'artiste du condensateur mésoscopique. Une portion du gaz d'électrons bidimensionnel servant de réservoir d'électrons est isolée par l'intermédiaire d'un contact ponctuel quantique, ce qui entraîne une discrétisation de ses niveaux d'énergie. L'énergie des niveaux est contrôlée par une tension excitatrice V_{exc} alors que leur largeur est pilotée par la transmission du QPC, commandée par l'intermédiaire des tensions de grille V_{G}. Figure extraite de la référence [53].

Un condensateur mésoscopique est constitué d'une constriction du 2dEG, fermée par un QPC auquel est appliqué une tension de grille $V_{\mathrm{G}} < 0$ continue. La constriction forme alors un îlot ou boîte quantique (« quantum dot ») de surface de l'ordre de 1 µm^2, qui forme la première armature du condensateur. Le couplage avec le reste du gaz se fait par effet tunnel au travers du QPC. Étant confinés, les électrons de la boîte quantique voient leurs niveaux d'énergie quantifiés. L'énergie des niveaux de la boîte quantique est modifiable globalement par l'application d'une tension d'excitation radio-fréquence V_{exc} à une électrode de grille située au dessus de la boîte, formant la seconde armature du condensateur mésoscopique. L'écart en énergie Δ entre deux niveaux consécutifs dépend de la taille de l'ilôt, alors que la largeur intrinsèque d'un niveau dépend du couplage avec le reste du gaz, c'est-à-dire du coefficient de transmission D du QPC : plus la transmission est faible, meilleure est la résolution des niveaux. En outre, les grilles définissant le QPC assurent un écrantage efficace de la tension d'excitation. Cela rend légitime de supposer que celle-ci ne s'applique qu'aux électrons à l'intérieur de la boîte quantique mais pas au reste du gaz

bidimensionnel. Des effets potentiellement induits par un tel couplage entre la grille excitatrice et le canal de bord ont été étudiés par E. Iyoda *et al.* [97].

Dans l'expérience telle qu'elle est montée aujourd'hui [61], la tension de grille V_G imposée au QPC est de l'ordre de $-300\,\mathrm{mV}$, la tension d'excitation a pour amplitude quelques centaines de millivolts et une fréquence variant de 700 MHz à 10 GHz, alors que l'écart entre les niveaux vaut $\Delta \sim 10^{-4}\,\mathrm{eV}$. La transmission D du QPC peut être réglée librement entre 0 et 1. La température des électrons dans l'échantillon est quant à elle de l'ordre de 100 mK.

Cycle de fonctionnement

Pour que le condensateur mésoscopique fonctionne en source à électrons uniques, la tension d'excitation doit être convenablement choisie : il s'agit d'une tension créneau, d'amplitude Δ/e. Elle est souvent choisie telle que le niveau de Fermi du 2dEG soit en moyenne situé exactement entre deux niveaux consécutifs de la boîte quantique.

Un cycle de fonctionnement à quatre temps permet alors au condensateur mésoscopique de se comporter comme une source d'électrons et de trous uniques. Une période du cycle est représentée sur la figure 1.5. Lorsque la tension d'excitation passe en valeur haute, un niveau occupé de la boîte quantique est promu au dessus du niveau de Fermi (✻). L'électron franchit le QPC par effet tunnel et se propage dans le canal de bord « au dessus » de la mer de Fermi (❀). Une fois la tension d'excitation revenue en valeur basse, un niveau vacant se trouve sous le niveau de Fermi (❀). Un électron passe par effet tunnel de la mer de Fermi à ce niveau libre, ce qui a pour effet de laisser un trou dans la mer de Fermi (❄). Le cycle recommence alors. Notons que la source n'est pas une source d'électrons proprement dite, puisqu'elle émet un électron et un trou par période, mais les deux excitations sont temporellement séparées.

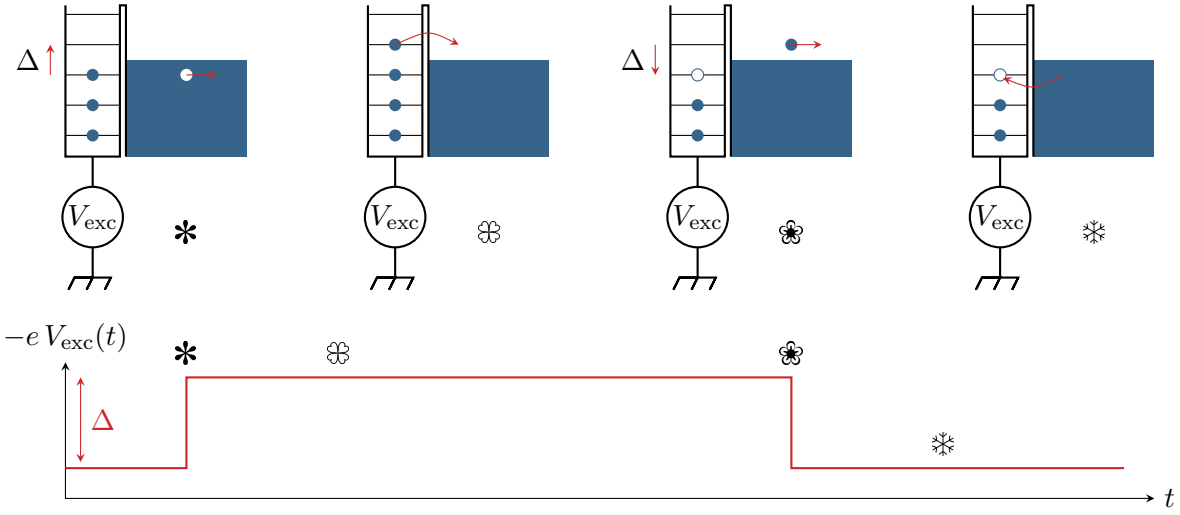


Fig. 1.5 – Schéma du cycle du condensateur mésoscopique opérant en source d'électrons. La boîte est schématisée sur la gauche des figures, alors que la mer de Fermi du gaz 2d est schématisée en bleu, sur la droite. Un électron est représenté par un rond bleu, un trou par un rond blanc. Le profil temporel de tension excitatrice est également représenté. La correspondance entre les états de la boîte quantique et la tension d'excitation est indiquée par les symboles.

Le temps de fuite d'un électron de la boîte quantique vers le gaz 2d, qui correspond à la largeur temporelle du paquet d'ondes associé, vaut [132]

$$\tau_{\mathrm{e}} = \frac{h}{\Delta}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{2}\right) , \tag{1.3}$$

ce qui constitue une limite intrinsèque à la période de la source. Si la période en question est plus faible que τ_e, alors un électron pourra ne pas être émis à chaque période, empêchant la source d'atteindre son régime de fonctionnement nominal.

Caractériser précisément le régime de fonctionnement idéal de la source a demandé un gros travail tant expérimental [117, 136, 137] que théorique [5, 76, 126, 137]. Des mesures de courant résolu en temps et de bruit basse fréquence ont permis d'établir que le cycle décrit précédemment peut être atteint, et que la source s'y comporte effectivement comme une source d'électrons et de trous à la demande lorsque la transmission D du QPC est de l'ordre de 0.4. Avec les valeurs numériques citées précédemment, les paquets d'ondes émis ont une largeur typique de l'ordre de 0.1 ns.

1.3.3 Des contacts ohmiques pour émettre ou absorber

Un contact ohmique est un élément métallique massif, formé à l'intérieur du gaz bidimensionnel par diffusion atomique au travers de l'hétérostructure. Il ne s'agit donc pas d'une grille qui est séparée du 2dEG par un isolant. Par conséquent, le contact ohmique touche pratiquement le canal de bord, ce qui entraîne un très fort couplage à la fois capacitif et tunnel entre les deux entités. Sous l'effet de ce couplage, l'état quantique des électrons du canal s'identifie à celui des électrons du contact ohmique. Les contacts ohmiques sont très utilisés car ils peuvent servir à la fois de source et de détecteur d'électrons.

Un contact ohmique comme détecteur d'excitations

Un premier modèle de contact ohmique à l'équilibre a été proposé par M. Büttiker [32]. Un contact se comporte comme un réservoir d'électrons qui absorbe toute excitation incidente et émet un état électronique d'équilibre. Le potentiel électrique du contact s'ajuste alors de façon à assurer la conservation du courant. Un contact ohmique ainsi modélisé porte le nom de sonde de tension (« voltage probe »), car mesurer son potentiel permet d'en déduire le courant dans le canal de bord incident. De tels dispositifs constituent le premier étage des chaînes de mesure couramment utilisées dans les expériences. Le principe de fonctionnement de ces chaînes est présenté au paragraphe 4.1, alors que deux exemples sont détaillés annexe A.1, page 177.

Dans les travaux les plus récents, une description effective par la théorie de la bosonisation a été proposée par A. Slobodeniuk *et al.* [162]. Elle légitime l'image de la sonde de tension dans la limite où l'échelle d'énergie thermique est grande devant l'échelle d'énergie du couplage capacitif entre le contact ohmique et le canal de bord. En ordre de grandeur, cela signifie qu'à la température de 10–100 mK la taille typique du contact ohmique doit être supérieure à 10–100 µm pour que l'image de la sonde de tension soit valide.

Un contact ohmique comme source d'excitations

Le contact ohmique peut également être relié à un générateur, qui cette fois *impose* au potentiel électrique dans le contact d'être égal à une tension de commande V pouvant dépendre du temps. En conséquence, la loi d'Ohm impose qu'un courant électrique soit créé, ou de façon plus rigoureuse que des excitations soient générées dans le canal de bord. Les variations temporelles de V déterminent alors la nature des excitations émises.

La méthode de génération d'états quantiques par des contacts ohmiques leur confère une grande souplesse, car il est relativement simple d'imposer la tension de commande. Des études numériques menées par B. Gaury *et al.* [67] indiquent par exemple qu'il serait possible de contrôler en temps réel la trajectoire d'un état émis par une impulsion de tension sur un contact ohmique, voire de stopper sa propagation [68], ou encore de contrôler en temps réel l'état d'interférence en sortie d'un interféromètre alimenté par de tels états [66].

Un contact ohmique comme source d'électrons à la demande ?

Une question naturelle est de savoir si un contact commandé peut servir de source à excitations contenant seulement un ou quelques électrons et, si oui, quelle est la tension de commande à utiliser. Le problème a été résolu mathématiquement par L. Levitov, D. Ivanov, H. Lee et G. Lesovik [96, 108], et la réponse est positive. Il faut pour cela que le contact ohmique soit commandé par une tension lorentzienne,

$$V(t) = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{t-t_0}{\tau_\mathrm{e}}\right)^2}\,, \tag{1.4}$$

et qu'elle vérifie la condition de quantification (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, e\, V(t) = n\, h\,, \quad n \in \mathbb{N}^*, \qquad \text{soit} \qquad V_0 = n\frac{h\tau_\mathrm{e}}{\pi}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.5}$$

Dans ce cas, l'état émis dans le canal est un état contenant strictement n électrons, de largeur temporelle τ_e contrôlable et émis en $t = t_0$. Cet état a été dénommé quasi-particule de Levitov ou leviton.

De nombreuses propriétés remarquables sont attachées à ces excitations. Ce sont d'abord celles qui minimisent le bruit de partition par un QPC [45, 64], grâce à l'absence de paires électron-trou qui ne contribuent qu'au bruit sans contribuer au courant. En outre, les excitations portant un nombre entier $n > 1$ d'électrons peuvent se décrire de façon simple sous la forme d'un paquet d'ondes multi-électronique cohérent [77]. Cet aspect sera discuté plus en détail au paragraphe 2.6.3, page 70. Cependant, les interactions générant des non-linéarités dans la réponse du système pourraient rendre délicate l'utilisation expérimentale de levitons [150].

Une telle source a été développée au sein du groupe de C. Glattli, au Service de Physique de l'État Condensé du CEA Saclay. Une vue d'artiste et une image obtenue par microscopie électronique à balayage de l'échantillon sont représentées figure 1.6. Le système physique est un peu différent de ceux envisagés dans ce manuscrit, puisque les excitations sont émises directement dans un gaz bidimensionnel sans champ magnétique, donc sans canaux de bord. Néanmoins, utiliser une telle source en présence d'effet Hall semble tout à fait envisageable.

Le bon fonctionnement de la source a été mis en évidence en 2013 [46] d'abord en s'assurant de la minimisation du bruit de partition dans le canal, puis par une spectroscopie du bruit de grenaille, donnant une caractérisation énergétique, et enfin par une expérience de type Hong-Ou-Mandel permettant une caractérisation temporelle du leviton émis. Par la suite, un protocole de tomographie quantique a été mis en place [78, 100].

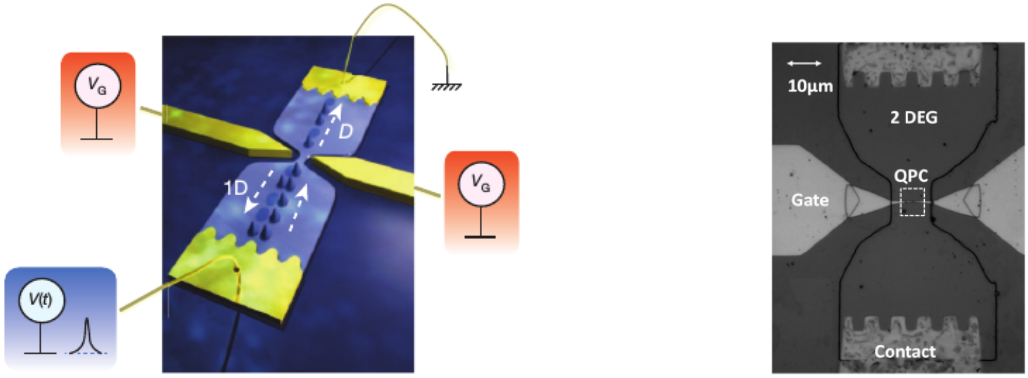
1.3.4 De l'électronique rapide pour détecter les électrons

Mesures de courant

De façon naturelle, la première quantité mesurable est le courant électrique, mais le relier aux excitations d'un canal de bord demande quelques précautions.

Un premier point évident est qu'une mesure quantique est probabiliste par essence, en conséquence de quoi une mesure unique ne peut apporter qu'une information partielle sur l'état quantique faisant l'objet de la mesure. Expérimentalement, les mesures réalisées permettent de reconstruire des valeurs moyennes d'opérateurs par moyennage statistique en réalisant la même expérience un grand nombre de fois. En pratique, les sources sont commandées périodiquement, et ce moyennage est en fait temporel, mené sur un grand nombre de périodes. Par conséquent,

(3). Par convention, $e > 0$: la charge d'un électron est donc $-e$.



(a) Vue d'artiste (b) Image par microscopie électronique à balayage

Fig. 1.6 – Source leviton. Un des contacts ohmiques est commandé par une tension lorentzienne $V(t)$ servant à émettre un leviton dans un gaz d'électrons bidimensionnel. Le leviton rencontre ensuite le QPC, contrôlé par la tension de grille V_G, où il est aléatoirement réfléchi ou transmis. Le second contact ohmique peut servir seulement à détecter le leviton, ou bien en plus émettre une autre excitation avant de servir de détecteur. Figures respectivement extraites des références [46] et [21].

les mesures ne peuvent donner accès qu'à des moyennes quantiques de l'opérateur courant électrique dans le canal. Pour être plus précis, l'étude de chaînes de mesures réelles proposée au paragraphe 4.1, page 118, montrera que la quantité mesurée est l'excès de courant moyen engendré par la présence de sources d'électrons par rapport à la situation de référence où toutes les sources sont éteintes.

À l'heure actuelle, la meilleure résolution temporelle sur des mesures directes de courant dans le domaine temporel est de l'ordre de 500 ps [116, 118]. Un dispositif de mesures résolues non pas en temps mais en fréquence a également été développé, et est présenté en détail en annexe A.1.2, page 178. Il permet d'explorer une gamme de fréquences allant de 700 MHz à 9 GHz, ce qui donne une résolution de 100 ps une fois retranscrit en termes de temps [61].

Mesures de bruit

Le bruit d'un signal quantifie les corrélations des fluctuations dudit signal autour de sa valeur moyenne. Dans le cas présent, les fluctuations de courant δi dans le canal de bord constituent la grandeur d'intérêt. Elles sont définies par

$$\delta i(t) = i(t) - \overline{i(t)}\,. \tag{1.6}$$

De façon précise, $i(t)$ est le courant mesuré à l'instant t dans une réalisation de l'expérience alors que $\overline{i(t)}$ est la moyenne statistique sur l'ensemble des réalisations du courant mesuré à l'instant t. Le moyennage statistique se fait à nouveau par moyennage temporel en reproduisant périodiquement l'expérience.

Le bruit de courant $S^{(i)}$ est alors défini comme une fonction dépendant fondamentalement de deux temps,

$$S^{(i)}(t_1, t_2) = \overline{\delta i(t_1)\,\delta i(t_2)} = \overline{i(t_1)\,i(t_2)} - \overline{i(t_1)}\;\overline{i(t_2)}\,. \tag{1.7}$$

Remarquons que comme les opérateurs courant à deux temps différents ne commutent a priori pas, la prescription d'ordre des opérateurs dans la définition du bruit de courant quantique n'est pas évidente. En outre, la mer de Fermi des conducteurs quantiques donne une contribution non nulle au bruit de courant total. La retrancher permet de définir le bruit d'excès ΔS. I. Safi et P. Joyez ont montré que $\Delta S^{(i)}(t_1, t_2) = \Delta S^{(i)}(t_2, t_1)$ tant que l'ensemble du dispositif, incluant

la ligne de mesure, fonctionne en régime linéaire [151]. La prescription d'ordre n'a alors plus d'importance pour définir le bruit d'excès.

En règle générale, les expériences permettent d'accéder à une moyenne de ce bruit sur le temps moyen $\bar{t} = (t_1 + t_2)/2$, et plus précisément à sa transformée de Fourier (4) par rapport à l'écart de temps $\tau = t_1 - t_2$. On définit ainsi une représentation fréquentielle du bruit à la pulsation ω,

$$\widetilde{S}^{(i)}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}\bar{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \, S^{(i)} \left(\bar{t} + \frac{\tau}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} \ . \tag{1.8}$$

Le bruit de courant fera l'objet de beaucoup d'intérêt au cours de ce manuscrit, et tout particulièrement au chapitre 4 traitant des protocoles de mesure des fonctions de cohérence. Plusieurs de ces protocoles consistent en effet à encoder l'information cherchée dans le bruit de courant.

(4). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.

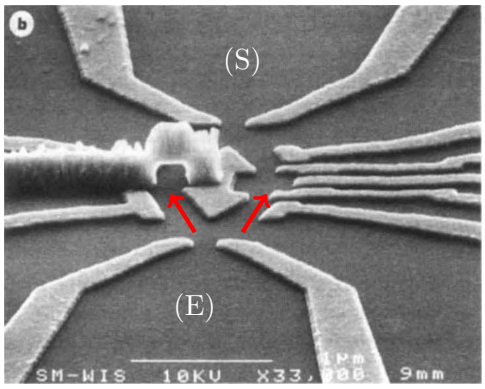
1.4 Les points de victoire

Les progrès réalisés dans la compréhension et la manipulation des outils qui viennent d'être présentés ont permis en moins de vingt ans de réaliser l'analogue électronique de plusieurs expériences d'optique fondatrices.

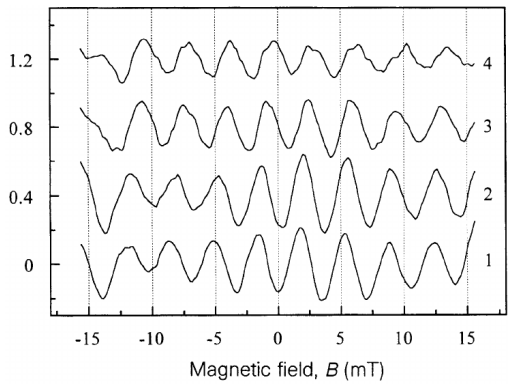
1.4.1 Fentes d'Young

Les bifentes d'Young optiques sont un interféromètre à division de front d'onde, introduit par Thomas Young au tout début du XIXe siècle pour mettre en évidence la nature ondulatoire de la lumière [181]. Un écran percé de deux fentes est placé sur le chemin de la lumière. Les ondes diffractées par chacune des fentes interfèrent en sortie, donnant lieu à une figure d'interférences observable sur un écran.

Une première expérience d'optique électronique a consisté à étudier le courant en sortie d'un interféromètre analogue à de telles fentes d'Young. Elle a été menée à l'institut Weizmann, à Tel Aviv, par le groupe de M. Heiblum en 1997 [160]. Une image de l'échantillon obtenue par microscopie électronique à balayage est représentée figure 1.7a. Celui-ci consiste en un 2dEG sur lequel sont placés des QPC pour définir les voies. De façon précise, la voie à droite sur la figure 1.7a est en fait un point quantique (« quantum dot ») dont les niveaux d'énergie sont larges, mais réglables à l'aide des multiples électrodes observables à droite de la figure. Changer la position des niveaux d'énergie a pour effet de modifier la transparence du point quantique et donc le contraste des interférences. La différence de potentiel entre les zones d'entrée et de sortie est imposée, et des effets d'interférences sont observables dans le courant de sortie. Insistons également sur le fait que dans cette expérience historique l'échantillon n'est pas placé dans le régime d'effet Hall quantique entier, et les voies sont définies directement et non pas par l'intermédiaire de canaux de bord.



(a) Image par microscopie électronique à balayage.



(b) Courant de sortie, unités arbitraires.

Fig. 1.7 – Fentes d'Young électroniques. Deux QPC isolent les drains d'entrée (E) et de sortie (S). Les fentes sont définies par un QPC à gauche de l'image et par un point quantique à droite. Les flèches rouges sur la figure indiquent les deux voies de l'interféromètre. Des interférences sont observables sur le courant de sortie en faisant varier la phase Aharonov–Bohm. Elles sont ici représentées pour différentes configuration des niveaux du point quantique, ce qui en modifie le contraste. Figures adaptées de la référence [160].

Changer la longueur des voies n'est pas aisé dans un tel dispositif, mais le déphasage entre les voies peut être modifié en appliquant un champ magnétique transverse à l'interféromètre (5). En effet, étant chargés, les électrons sont sensibles à l'effet Aharonov–Bohm [2]. Par conséquent,

(5). Le champ magnétique utilisé dans cette expérience est de l'ordre de 10 mT, donc bien inférieur à celui nécessaire pour atteindre le régime d'effet Hall quantique entier.

le déphasage entre les deux voies contient une première composante géométrique et une seconde composante Aharonov–Bohm valant

$$\phi_{\mathrm{AB}} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\,, \tag{1.9}$$

où Φ est le flux magnétique au travers de l'interféromètre et $\Phi_0 = h/e$ le quantum de flux. En agissant de la sorte, des interférences sont clairement observables sur le courant collecté par le drain de sortie, représenté figure 1.7b, lorsque le champ magnétique varie. Notons qu'il ne s'agit pas ici de mesures résolues en temps, mais seulement d'un courant moyen, l'expérience étant réalisée en régime stationnaire.

1.4.2 Interféromètre de Mach–Zehnder

Un interféromètre de Mach–Zehnder (MZI) est un interféromètre à division d'amplitude, utilisant dans sa réalisation optique deux lames semi-réfléchissantes et deux miroirs, comme représenté sur la figure 1.8. Ce dispositif a été proposé par L. Zehnder en 1891 [184] et amélioré par L. Mach (6) [114] l'année suivante.

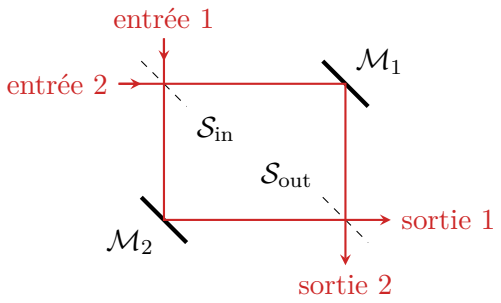


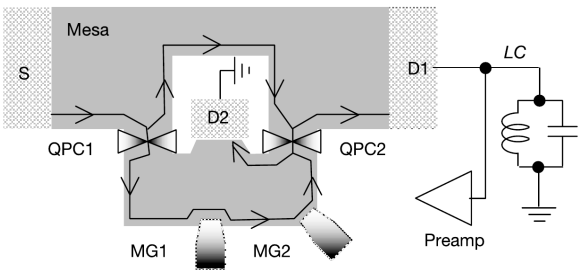
Fig. 1.8 – Interféromètre de Mach–Zehnder optique. Un faisceau lumineux entrant est séparé par une lame séparatrice d'entrée $\mathcal{S}_{\mathrm{in}}$. Les faisceaux émergents parcourent une des voies de l'interféromètre en se réfléchissant sur l'un des miroirs $\mathcal{M}_1$ ou $\mathcal{M}_2$ et sont recombinés par la lame séparatrice de sortie $\mathcal{S}_{\mathrm{out}}$. Les interférences sont observables dans les deux voies de sortie, qui sont dans des états d'interférences opposés.

Le MZI compte de multiples déclinaisons et applications (7). En optique ondulatoire classique les applications principales concernent tout le domaine de la mesure précise de déphasage, et s'étendent de la biologie ou chimie analytique [48, 123] à l'imagerie d'écoulements en aérodynamique [37] en passant par la fabrication de gravimètres de précision [9]. Le MZI joue également un rôle important en optique quantique puisqu'il constitue l'archétype de l'interféromètre à un photon. Il a pu par exemple être utilisé pour des opérations de calcul quantique sur des qubits photoniques [101] ou bien pour tester expérimentalement la limite d'Heisenberg de la mesure du déphasage entre deux états de Fock à même nombre de photons [89].

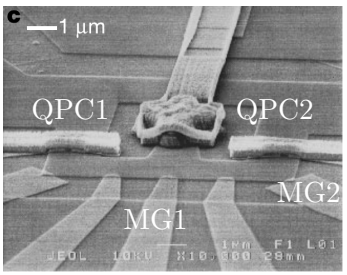
La première réalisation expérimentale d'un MZI dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique remonte à 2003, toujours dans le groupe de M. Heiblum à l'institut Weizmann [180]. Un schéma et une image au microscope électronique à balayage en sont représentés figure 1.9. Dans la version électronique, les lames séparatrices sont remplacées par des QPC et les deux voies sont maintenant deux canaux de bord différents qui suivent deux bords différents de l'échantillon. Notons que la fabrication des échantillons est rendue délicate par la nécessité d'utiliser des techniques de lithographie tridimensionnelle. Le déphasage entre les deux voies de l'interféromètre peut comme en optique être contrôlé géométriquement en modifiant la longueur d'un canal de

(6). Ludwig Mach est le fils de Ernst Mach, connu notamment pour ses travaux sur les écoulements supersoniques.
(7). Une recherche sur la base de données Web of Science avec le mot clé « Mach Zehnder » renvoie plus de 9600 résultats.

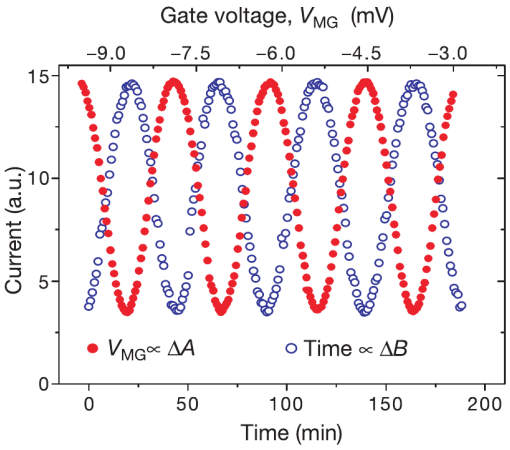
bord à l'aide d'une grille, mais aussi comme dans le cas des fentes d'Young en changeant le flux magnétique au travers de l'interféromètre. Cette fois, il s'agit de petites variations du champ imposant le régime d'effet Hall quantique entier. Remarquons qu'une modification de la longueur d'un des bras a un effet sur les deux composantes, puisqu'elle modifie l'aire de l'interféromètre et donc le flux magnétique.



(a) Schéma de l'échantillon.



(b) Image au microscope électronique à balayage.



(c) Courant de sortie en fonction du déphasage entre les deux bras.

Fig. 1.9 – Interféromètre de Mach–Zehnder à électrons. (a) Le contact ohmique S émet des excitations dans un canal de bord de l'effet Hall quantique entier. Celles-ci sont partitionnées par le QPC1 puis recombinées par le QPC2. Entre temps, la longueur du canal inférieur a pu être modulée par les grilles de modulation MG1 et MG2. Le courant est filtré et mesuré à un second contact ohmique D1, alors que le contact ohmique D2 est relié à la masse. (c) Le courant de sortie est mesuré en modifiant l'aire A de l'interféromètre ou le champ magnétique B dans lequel il est placé, et présente un effet d'interférences. Figures extraites de la référence [180].

Les deux sources de déphasage entre les voies ont été explorées et donnent lieu à des interférences sur le courant de sortie de l'interféromètre, représenté figure 1.9c. En raison des processus de décohérence dans l'interféromètre, leur visibilité dans l'expérience originale était limitée à environ 0.6. Depuis, des visibilités supérieures à 0.9 ont pu être observées [130].

Un tel interféromètre a ensuite été reproduit par plusieurs groupes expérimentaux [20, 110, 145, 144] en tant que modèle d'interféromètre à un électron, notamment afin d'y étudier les effets de décohérence. Des détails supplémentaires sur l'implémentation expérimentale de l'interféromètre sont d'ailleurs fournis par la thèse de P. Roulleau [144]. En outre, de nombreux travaux théoriques concernent l'étude des interférences dans un MZI électronique. Ceux de G. Haack *et al.* [82] sur les mesures de temps de cohérence seront présentés en détail au paragraphe 4.2.2, page 127. Mentionnons aussi ceux de I. Levkivskyi et E. Sukhorukov [109] qui s'intéressent aux

processus de décohérence, ceux de B. Gaury et X. Waintal qui proposent de contrôler en temps réel l'état d'interférence en sortie d'un MZI alimenté par des impulsions de tension [66] ou ceux très récents de G. Rossello *et al.* [143] qui étudient l'impact d'interférences à deux électrons, induits par une seconde source, sur les signaux de sortie d'un MZI.

1.4.3 Expérience d'Hanbury Brown–Twiss

Les deux expériences précédentes ont permis de révéler le comportement ondulatoire des électrons. La mécanique quantique indique que celui-ci est indissociable d'un comportement corpusculaire, que l'expérience d'Hanbury Brown et Twiss permet de mettre en évidence.

Interférométrie d'intensité et bunching de photons

Cette expérience a pourtant été conçue dans un contexte d'astrophysique. Certaines familles d'objets astrophysiques suscitaient beaucoup d'intérêt au milieu du XXe siècle, un des enjeux étant la mesure du diamètre angulaire d'étoiles afin de confirmer des modélisations théoriques. Celles-ci suggéraient des contraintes sur le diamètre des étoiles dépendant de leur composition, qui demandaient à être vérifiées. La méthode canonique consistait à mesurer leur angle de cohérence spatiale [36, 165] par étude du contraste des interférences entre les champs électromagnétiques reçus par deux télescopes. Toutefois, la grande sensibilité de cette méthode à tout processus de déphasage parasite, à commencer par la turbulence atmosphérique et toutes les déformations mécaniques, limitait fortement ses performances.

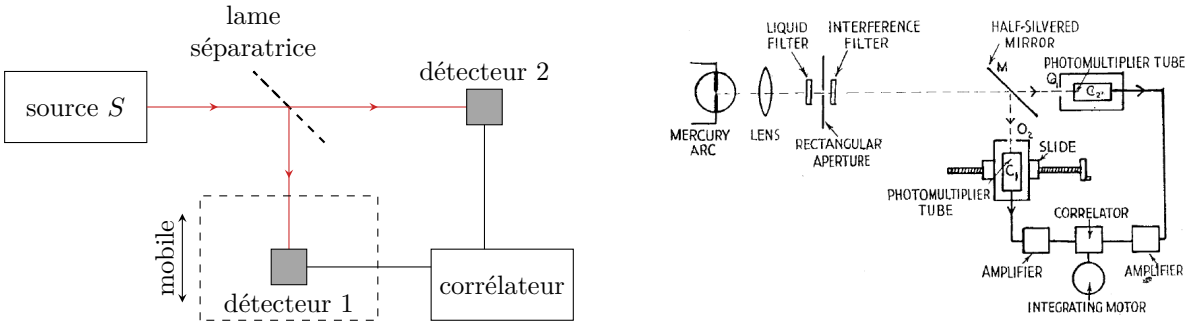
Pour contourner la difficulté, R. Hanbury Brown et R. Twiss avaient développée une méthode dite d'interférométrie d'intensité applicable dans le domaine des ondes radio [83]. Celle-ci est décrite de façon simple et pédagogique dans l'ouvrage de R. Taillet [165]. Elle consiste non plus à mesurer les fonctions de corrélations du champ électromagnétique en faisant interférer deux ondes et en mesurant l'intensité résultante, mais directement les fonctions de corrélation de l'intensité elle-même en calculant électroniquement les corrélations entre les signaux de photodétection de deux photomultiplicateurs. L'information sur le déphasage absolu entre les deux ondes (c'est-à-dire leur état d'interférence, constructif ou destructif) est perdue, en revanche celle sur leur cohérence (c'est-à-dire le contraste des interférences) est conservée. Par conséquent, l'angle de cohérence spatiale est accessible par cette méthode.

Néanmoins, si cette méthode était parfaitement admise pour les ondes radio, de fréquence de l'ordre de 100 GHz, sa validité dans le domaine des ondes optiques posait question. En effet, leurs fréquences, de l'ordre de 500 THz, sont cinq mille fois supérieures et compte tenu des faibles luminosités des objets astronomiques, seul un petit nombre de photons était reçu. La question de savoir si les événements de détection de photons d'un faisceau cohérent présentaient des corrélations ou si celles-ci étaient détruites par les fluctuations quantiques devenait donc central, et faisait l'objet d'un intense débat [27].

R. Hanbury Brown et R. Twiss ont alors réalisé en 1956 une expérience de laboratoire permettant de répondre à la question [85] dont le schéma de principe est représenté figure 1.10a. Le faisceau issu d'une source peu lumineuse S est envoyé sur une lame semi-réfléchissante. Deux détecteurs, en l'occurrence des photomultiplicateurs, sont placés dans les voies de sortie, la distance entre la lame et l'un des détecteurs étant réglable afin d'inclure un délai τ entre les deux réceptions. Les signaux de sortie des détecteurs, proportionnels à l'intensité lumineuse I qu'ils reçoivent, sont envoyés vers un corrélateur électronique qui calcule leurs corrélations croisées

$$C(\tau) = \overline{I_1(t)\, I_2(t)} \propto \overline{I_S(t-\tau)\, I_S(t)}\,. \tag{1.10}$$

Le résultat de cette expérience devenue emblématique de l'optique quantique a ainsi permis d'établir que les photons avaient tendance se regrouper, ce qui a rapidement été relié à leur



(a) Schéma de principe. (b) Schéma détaillé du dispositif.

Fig. 1.10 – Expérience historique de Hanbury Brown et Twiss. Une source cohérente S envoie un faisceau sur une lame séparatrice. Les intensités sont mesurées dans les deux voies de sortie par deux détecteurs. Le corrélateur calcule les corrélations des événements de détection. Figure (b) extraite de la référence [85].

caractère bosonique [141]. On parle d'un phénomène de bunching de photons. La phénoménologie des résultats est représentée figure 1.11. Mentionnons pour finir que cette expérience peut s'interpréter seulement en termes de corpuscules, indépendamment du caractère ondulatoire des photons. Schématiquement, la première étape de l'interprétation consiste à dire qu'un photon ne peut être détecté que d'un seul côté de la lame séparatrice, ce qui est une propriété corpusculaire. Le paradigme est donc opposé à celui révélé par un MZI à photons uniques où les propriétés ondulatoires suffisent à rendre compte des résultats.

Fig. 1.11 – Phénoménologie des résultats de l'expérience HBT photonique. En raison de leur caractère bosonique, les photons ont tendance à arriver groupés sur la lame séparatrice LS. Après partitionnement par la lame séparatrice, cela se traduit par un maximum dans les corrélations de détection C, définies équation (1.10), lorsque les détections sont simultanées, c'est-à-dire pour $\tau = 0$. La ligne pointillée représentée figure de droite est le signal qui serait obtenu en l'absence de corrélations entre photons.

Une fois la validité de la méthode établie, R. Hanbury Brown et R. Twiss l'ont appliquée avec succès à l'astronomie. Ils ont pu mesurer le diamètre apparent de l'étoile Sirius [84] avec une précision largement améliorée alors qu'ils qualifient eux-mêmes leur dispositif de « préliminaire ».

Analogue électronique

De par le statut fondamental de l'expérience HBT, des expériences analogues ont été réalisées avec les dispositifs les plus variés. À titre d'exemple, l'effet HBT a été mis en évidence pour des photons micro-ondes émis par des conducteurs cohérents [65] ou des jonctions tunnel [182]. Concernant des équivalents fermioniques, un effet HBT a par exemple été observé à la fin des années 1990 pour des flots stationnaires d'électrons dans des gaz bidimensionnels [87, 134]. Le développement du condensateur mésoscopique comme source d'électrons uniques a permis de réaliser un autre analogue de l'expérience HBT avec des particules uniques. L'expérience a été réalisée en 2011 par le groupe de G. Fève au laboratoire Pierre Aigrain [25]. Elle a contribué à éta-

blir que le régime de source d'électrons uniques du condensateur mésoscopique était effectivement atteint.

Le schéma de principe de l'expérience est celui de la figure 1.10a. Un condensateur mésoscopique utilisé dans le régime de source d'électrons uniques est placé dans une des voies d'entrée d'un QPC agissant comme lame séparatrice. Seule petite différence avec le dispositif optique, la grandeur mesurée est le bruit basse fréquence dans un des canaux de sortie du QPC au lieu des corrélations des courants dans les deux voies. Néanmoins, l'information obtenue par les deux mesures est parfaitement équivalente. Remarquons une différence de taille avec le cas photonique : dans l'expérience HBT photonique, aucun photon n'arrive par la deuxième voie d'entrée de la lame séparatrice, celle-ci étant reliée au vide. Au contraire, dans l'expérience HBT électronique, la deuxième voie d'entrée du QPC est connectée à la mer de Fermi. Par conséquent, à température finie, des interférences à deux électrons ont lieu entre les électrons émis par la source 1 et ceux de la mer de Fermi.

Contrairement aux photons dont le caractère bosonique leur impose de se regrouper, le principe de Pauli impose aux électrons, qui sont des fermions, de se dégrouper. On parle alors d'antibunching électronique. Une étude détaillée de l'expérience HBT électronique est développée au paragraphe 4.3, page 137.

1.4.4 Expérience de Hong–Ou–Mandel

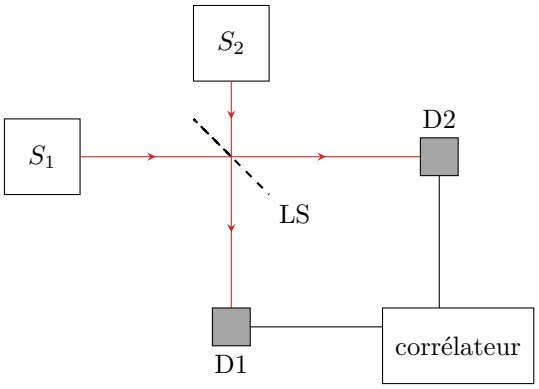
Interférences à deux photons sur une lame séparatrice

Pour aller plus loin dans l'analyse de la nature quantique des photons, une question naturelle est celle des conséquences de l'indiscernabilité de deux photons identiques. Elle a été abordée expérimentalement par C. Hong, Z. Ou et L. Mandel en 1987 [90], qui ont réalisé une expérience permettant d'envoyer deux photons identiques sur les deux voies d'entrée d'une lame séparatrice et de mesurer à nouveau les corrélations d'intensité lumineuse en sortie. Un schéma de principe et un schéma détaillé sont représentés figure 1.12.

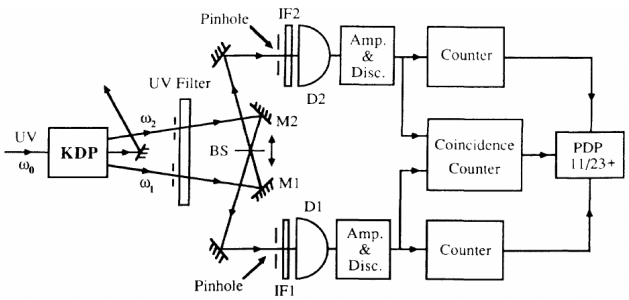
Les deux photons qui interfèrent sont des photons jumeaux issus de la conversion non-linéaire d'un photon de pompe à énergie ω_0 en deux photons d'énergies ω_1 et ω_2 vérifiant $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. Un dispositif de filtrage adéquat permet de ne garder que les photons tels que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0/2$. Émis en même temps mais dans des directions différentes, ces photons sont séparés spatialement et désynchronisés puis envoyés sur les deux voies d'entrée de la lame séparatrice avec un décalage temporel contrôlable.

Les deux photons sont identiques, donc indiscernables au sens quantique du terme. Par conséquent, lorsqu'ils arrivent simultanément sur la lame séparatrice, ils sont en mesure d'interférer. Le résultat de cette interférence est dicté par leur caractère bosonique, qui impose que les photons se regroupent dans la même voie de sortie de la lame séparatrice, comme représenté figure 1.14a. Par conséquent, les corrélations croisées d'intensité lumineuses s'annulent dans cette configuration, ce qui se traduit par la présence d'un creux au centre de la courbe représentée figure 1.12c. Au contraire, lorsque le décalage entre les deux voies est plus grand que la largeur temporelle d'un photon, ceux-ci n'interfèrent plus et les corrélations croisées d'intensité deviennent celles de photons uniques. La situation intermédiaire, où le délai entre les deux voies est faible mais non nul, conduit à des corrélations gouvernées par le recouvrement entre les deux photons.

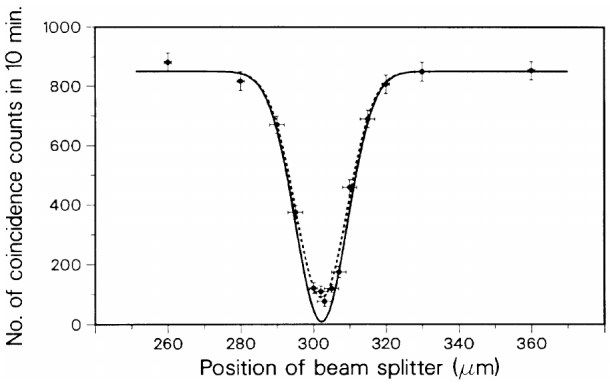
Cette fois, l'analyse des trois régimes cités montre complètement le double caractère ondulatoire et corpusculaire associé aux photons. Le point clé de l'expérience est l'indiscernabilité entre les photons qui les conduit à se regrouper en tant que particules, mais quantifier cette indiscernabilité ne peut se faire qu'en termes ondulatoires en comparant des paquets d'ondes. Pour cette raison, cette expérience a constitué une confirmation considérable pour le domaine de l'optique quantique.



(a) Schéma de principe.



(b) Schéma détaillé du dispositif.



(c) Comptage des événements de coïncidence en fonction du décalage entre les deux voies.

Fig. 1.12 – Expérience historique de Hong, Ou et Mandel. Deux photons identiques sont envoyés dans les deux voies d'entrée d'une lame séparatrice LS, éventuellement décalés dans le temps. Les intensités sont mesurées dans les voies de sortie par deux détecteurs D1 et D2, et un corrélateur électronique calcule leurs corrélations croisées. La figure (c) représente les points expérimentaux, un ajustement paramétrique en traits pointillés et la courbe prévue théoriquement en traits pleins. Figures (b) et (c) extraites de la référence [90].

Comme elle permet de quantifier le recouvrement entre l'état quantique de deux photons, l'expérience HOM sert maintenant de banc d'essai à toute source de photons indiscernables. En outre, la possibilité de générer des photons indiscernables issus de sources physiquement distinctes a également été prouvée par des expériences de ce type. Les sources étaient par exemple des boîtes quantiques (« quantum dots ») [56, 158] ou des ions piégés [19, 122]. Enfin, un effet HOM a été mis en évidence très récemment avec des atomes froids [111].

Analogue électronique

Un analogue électronique a été implémenté au sein du groupe de G. Fève en 2013 [22]. Le schéma de principe de l'expérience est celui de la figure 1.12a et une image de l'échantillon obtenue par microscopie électronique à balayage est représentée figure 1.13. Deux condensateurs mésoscopiques utilisés dans le régime de source d'électron unique sont placés dans les deux voies d'entrée d'un QPC agissant comme lame séparatrice. Les deux sources sont synchronisées en fréquence mais éventuellement décalées dans le temps, introduisant un délai entre les deux temps d'émission. Comme pour l'expérience HBT électronique, ce ne sont pas les corrélations mais le bruit à basse fréquence qui est mesuré en sortie, en l'occurrence dans le canal 3.

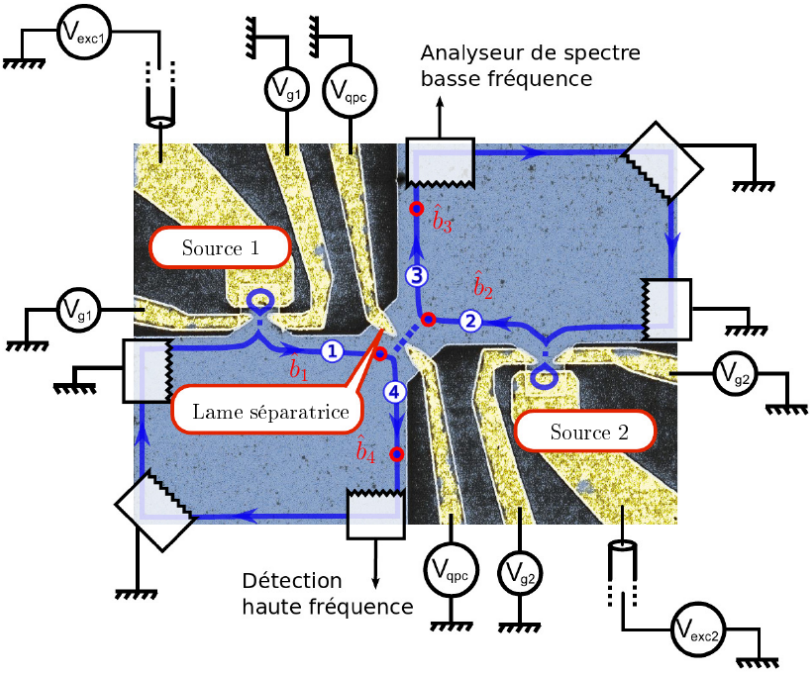
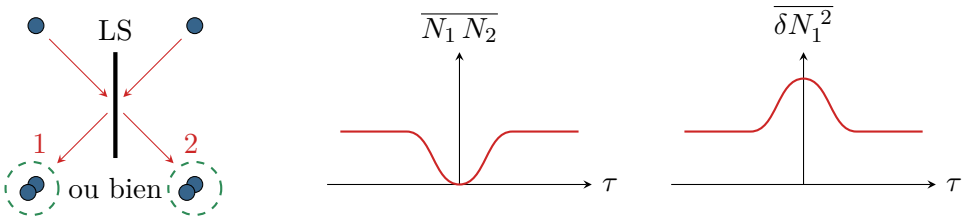


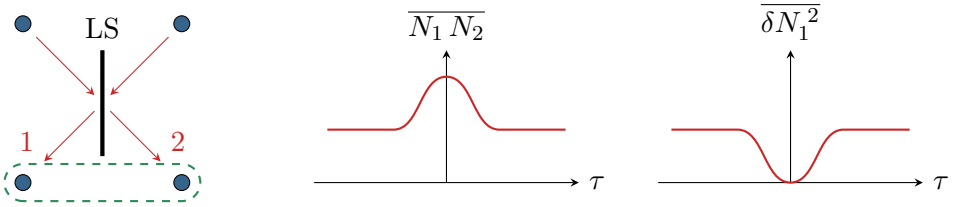
Fig. 1.13 – Vue au microscope électronique à balayage de l'échantillon pour l'expérience HOM électronique. Deux condensateurs mésoscopiques constituent deux sources synchronisées, émettant des excitations dans des canaux de bord. Les excitations émises interfèrent au niveau d'un QPC jouant le rôle de lame séparatrice. Le bruit à basse fréquence est mesuré dans le canal 3. La distance entre les sources et le QPC est de l'ordre de 3 µm. Figure extraite de la référence [120].

Les électrons étant des fermions, les résultats sont diamétralement opposés à ceux observés pour les photons. Lorsque deux électrons parfaitement indiscernables arrivent simultanément sur le QPC, le principe de Pauli leur impose d'en sortir par deux voies différentes. Par conséquent les corrélations de courant de sortie sont maximales dans cette situation : dès qu'un électron est détecté dans une première voie, un autre l'est forcément dans la seconde. Toutefois, la quantité mesurée ne correspond pas aux corrélations mais aux fluctuations de courant dans une des voies de sortie. Celles-ci sont alors minimales, puisqu'à chaque répétition de l'expérience il y a toujours un

et un seul électron détecté. Les différences de phénoménologie entre les deux types de statistique sont représentées schématiquement sur la figure 1.14.



(a) Expérience HOM avec des bosons.



(b) Expérience HOM avec des fermions.

Fig. 1.14 – Phénoménologie des résultats de l'expérience HOM. (a) Deux bosons indiscernables doivent emprunter la même voie de sortie de la séparatrice, ce qui minimise les corrélations $\overline{N_1\,N_2}$ entre les deux voies de sortie et maximise les fluctuations $\overline{\delta N_1{}^2}$ dans une des voies. (b) Au contraire, le principe de Pauli impose que deux électrons indiscernables sortent dans deux voies différentes, ce qui maximise les corrélations entre les deux voies et minimise les fluctuations dans une des voies. Figure adaptée de la référence [22].

Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 1.15. La quantité Δq tracée est le bruit normalisé par la somme des bruits de partition de chacune des sources. Lorsque le décalage entre les temps d'émission est grand, chaque excitation est partitionnée indépendamment et le bruit normalisé tend vers 1. En revanche, lorsque l'émission par les deux sources est simultanée les fluctuations du courant de sortie doivent diminuer. Le creux attendu est bien observable, mais le bruit normalisé ne descend qu'à 0.5 alors qu'il devrait s'annuler si les deux électrons étaient complètement indiscernables. Cela indique donc que les électrons sont partiellement discernables. Cet effet est dû à la décohérence des paquets électroniques émis par les sources entre la source et le QPC.

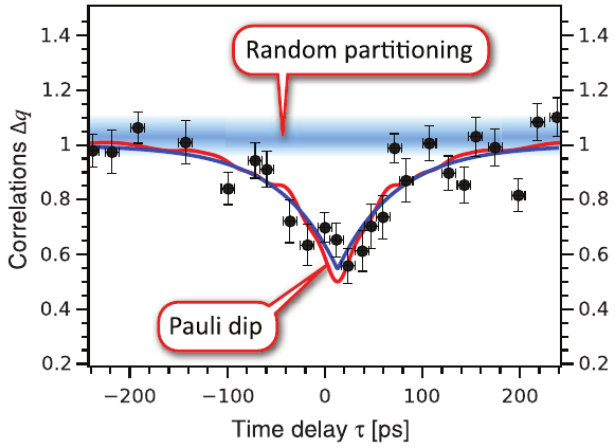


Fig. 1.15 – Résultats de l'expérience HOM électronique. Les fluctuations normalisées du courant dans le canal 3 sont représentées en fonction du délai τ entre les temps d'émission des deux sources. Les points noirs sont les résultats expérimentaux, alors que les lignes rouge et bleue sont respectivement obtenues par des modélisations des effets thermiques et de décohérence qui seront discutées au paragraphe 4.3. La ligne bleue claire indique le niveau du bruit associé au partitionnement aléatoire des électrons, obtenu par l'expérience HBT. Sa largeur renseigne sur les barres d'erreur. Figure extraite de la référence [22].

1.5 Le gouffre diabolique

Les résultats de l'expérience HOM électronique permettent d'introduire l'importance de la décohérence en optique quantique électronique, qui diminue de moitié l'ampleur de l'effet observé. Comprendre et prendre en compte cette décohérence dans les modélisations est donc un enjeu majeur, qui fait l'objet d'un intense travail tant sur le plan théorique qu'expérimental.

La décohérence est induite par les interactions coulombiennes entre l'électron d'intérêt et son environnement électromagnétique au sens large. Les autres électrons du solide y contribuent largement, à commencer par ceux de la mer de Fermi, mais les grilles servant à définir la géométrie du 2dEG jouent un rôle également. Dans les échantillons utilisés pour les expériences, l'environnement électromagnétique est dominé par l'effet des charges statiques qui est prépondérant sur celui des courants. Mathématiquement cela signifie que $\rho c \gg j$ où ρ et j sont respectivement les densités de charge et de courant, c étant la vitesse de la lumière dans le vide. Par conséquent, l'approximation adéquate pour décrire ces interactions est celle des régimes quasi-stationnaires électriques [98]. En termes d'équations de Maxwell, c'est l'équation de Maxwell–Faraday qui se simplifie en $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ alors que tous les termes de l'équation de Maxwell–Ampère doivent être conservés. Néanmoins, de multiples phénomènes d'écrantage rendent ces équations impossibles à résoudre directement. Plusieurs modèles ont alors été développés pour traiter les interactions de manière effective.

Beaucoup d'expériences étant menées à facteur de remplissage $\nu = 2$, ce cas a fait l'objet d'une attention particulière. Une phénoménologie qui se dégage est celle de la fractionnalisation des excitations [17, 106, 109, 128], schématisée figure 1.16. Ce type de comportement a été originellement identifié par I. Safi et H. Schulz dans le cadre du transport à fréquence finie dans les liquides de Luttinger à une dimension non-chiraux [149, 152, 153]. Une excitation chargée injectée dans un canal se sépare en deux modes délocalisés dans chacun des canaux, un mode chargé et un mode neutre, tout en préservant la charge de chacun des canaux. Les deux modes se propagent à des vitesses différentes, le mode de charge étant le plus rapide. Dans des canaux polarisés en spin, le mode neutre transporte le spin [77]. Des mesures d'admittance à fréquence finie [23, 61] et de bruit de courant [94] ont confirmé cette image. Ces résultats ont été appliqués à l'expérience HOM réalisée au LPA, et permettent d'interpréter les observations [177].

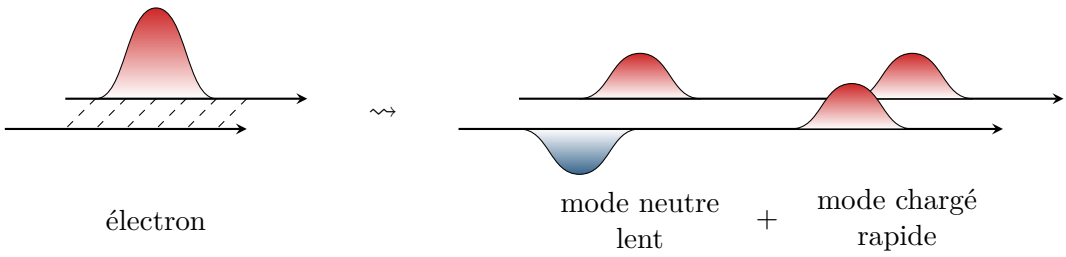


Fig. 1.16 – Fractionnalisation d'une excitation sous l'effet des interactions. L'interaction entre les canaux, symbolisées par les pointillés, entraîne une fractionnalisation des excitations en un mode neutre et un mode chargé. Un lobe rouge représente une excitation électronique et un lobe bleu une excitation de type trou. La charge de chaque canal est préservée.

De façon complémentaire, l'équipe de F. Pierre, au laboratoire de Photonique et Nanostructures, s'est attachée à étudier la relaxation en énergie de distributions stationnaires hors d'équilibre par des méthodes de spectroscopie [7, 8, 105]. Une telle séparation ne se manifeste pas du tout dans ces mesures, où les excitations injectées à haute énergie se noient dans une vague cohérente d'excitations composées d'électrons et de trous à la surface de la mer de Fermi [44].

Des travaux ont été menés sur le sujet en parallèle de ma thèse au sein de notre groupe de l'École Normale Supérieure de Lyon, principalement par D. Ferraro et dans le cadre du stage

de master 1 de B. Roussel et C. Cabart [35, 52, 147]. Ils ont permis d'unifier ces points de vue apparemment discordants et de mettre en avant des scénarios de décohérence dépendant du type d'excitation injecté. Un électron émis par le condensateur mésoscopique subit d'abord une relaxation en énergie rapide, due à des effets de décohérence extrinsèque avec son environnement, avant de se fractionnaliser sous l'effet des interactions. Au contraire, les électrons émis par la source leviton forment des états pointeurs de la décohérence due à leur environnement, et par conséquent ne sont pas soumis à une décohérence extrinsèque mais seulement à une séparation de type spin–charge liée à une décohérence intrinsèque. En d'autres termes, un électron émis dans un état pur leviton demeure dans un état pur et n'engendre pas un mélange statistique d'états, bien que l'état pur en question évolue sous l'effet des interactions [77]. J'ai eu l'occasion de contribuer à l'interprétation physique des résultats, mais je n'ai pas directement participé aux calculs analytiques ni à leur implémentation numérique. Par conséquent, j'ai choisi de ne pas présenter davantage ces aspects dans le manuscrit.

En parallèle de l'étude des mécanismes de décohérence, leurs effets ont été analysés par des mesures de contraste des interférences dans un MZI au sein de l'équipe de P. Roche, au CEA Saclay, notamment par P. Roulleau. Celles-ci ont permis de mesurer la longueur de cohérence de phase des canaux de bord [145], notamment en fonction de la température. La décohérence a également pu être contrôlée à l'aide d'un contact ohmique [146]. Pour limiter ses effets, P. Huynh *et al.* [93] ont montré que le bouclage sur lui-même du second canal permet d'améliorer la visibilité des interférences. La raison en est que le bouclage ouvre un gap dans le spectre d'excitations du canal, empêchant ainsi la formation d'excitations de basse énergie et gelant les échanges entre canaux à ces énergies.

1.6 Plan de bataille

Pour terminer ce chapitre introductif, présentons la structure du reste du manuscrit. Il se compose de cinq chapitres, dont la présente introduction et un chapitre de conclusion. À cela s'ajoute un chapitre d'annexes qui contient des développements complémentaires à ceux présentés dans le corps du manuscrit ainsi qu'un récapitulatif de l'ensemble des conventions adoptées.

Un des premiers buts de l'optique quantique électronique est d'étudier la propagation des électrons dans un conducteur cohérent à l'échelle de la charge individuelle. Le chapitre 2 du manuscrit est donc consacré à l'étude des propriétés de cohérence mono-électroniques. La notion clé d'excès de cohérence à un électron est introduite et son contenu physique est mis en lumière par l'intermédiaire de différentes représentations, en particulier sous une forme analogue à une fonction de Wigner. Les états émis par les sources à électrons implémentées expérimentalement sont ensuite analysées sous cet angle. Cette représentation en fonction de Wigner a fait l'objet d'une publication [51] dont le contenu est réparti entre ce chapitre et le chapitre 4 traitant d'interférométrie.

Le chapitre 3 est ensuite centré sur les effets à deux électrons. L'excès de cohérence à deux électrons est défini, ce qui demande des précautions en raisons d'effets de corrélation classique et d'échange quantique. Les conséquences de l'antisymétrie fermionique sont ensuite analysées en détail. Enfin, un degré de cohérence normalisé est introduit pour étudier plus directement les effets d'indiscernabilité et d'antibunching. Les concepts développés dans ce chapitre ont constitué le cœur de mon travail de thèse. Ils sont globalement nouveaux, puisque seul un unique article [124], publié quelques mois après le début de ce travail, traite de cohérence à deux électrons. Un article court [169], soumis, en présente une partie alors qu'un article long est quant à lui en préparation pour les développer plus en détails.

J'ai fait le choix de repousser la discussion des protocoles de mesures de ces quantités au chapitre 4. Ce choix est motivé par l'intérêt des deux concepts d'excès de cohérence à un et deux électrons pour comprendre pleinement les mesures de bruit mises en œuvre dans presque tous les protocoles présentés. Ce chapitre commence par une revue des techniques expérimentales existantes. La mesure d'excès de cohérence à un électron est envisagée par interférométrie Mach–Zehnder à un électron, puis par interférométrie Hong–Ou–Mandel à deux électrons, qui amène naturellement à un protocole de tomographie électronique. Un protocole de mesure de l'excès de cohérence à deux électrons est ensuite proposé par interférométrie non-locale à deux électrons, utilisant un dispositif analogue à un interféromètre de Franson. Enfin, ce chapitre présente des premières réflexions sur la production contrôlée de cohérence à deux électrons. Un autre éclairage est apporté sur l'interféromètre de Franson [59], et un second dispositif d'interférences non-locales à deux électrons suggéré par P. Samuelsson *et al.* [157] est analysé. Une part des résultats de ce chapitre est discutée dans les deux articles précédemment cités, et constitue le cœur de l'article court [169].

Chapitre 2

Cohérence à un électron

Les premiers phénomènes d'intérêt en optique quantique électronique ont trait à la propagation d'un électron unique dans un conducteur quantique. Pour les décrire sur le plan théorique, une grandeur pertinente est la fonction de cohérence à un électron, qui est au centre de ce second chapitre. Pour comprendre les origines du formalisme de l'optique quantique électronique, nous allons repartir de la description de Glauber l'optique photonique qui est présentée au paragraphe 2.1. Les analogies du paragraphe 2.2 permettant de définir la cohérence électronique apparaissent alors naturellement. Néanmoins, la présence d'une mer de Fermi dans le conducteur demande de formaliser la notion d'excès de cohérence, qui est au cœur du paragraphe 2.3, où des premiers exemples sont développés. De nouvelles représentations sont ensuite introduites et analysées au paragraphe 2.4. Elles sont complètement équivalentes les unes avec les autres, mais permettent une lecture plus ou moins naturelle de certaines informations encodées dans l'excès de cohérence. Pour terminer ce chapitre, les états quantiques que peuvent générer les sources électroniques implémentées expérimentalement sont analysés sous l'angle de l'excès de cohérence à un électron aux paragraphes 2.5 et 2.6.

2.1 Cohérence optique

2.1.1 Interférences et fonction de cohérence

La première preuve expérimentale de la nature ondulatoire de la lumière est due à T. Young, qui a mis en évidence les interférences lumineuses en 1803 [181]. Elle a confirmé la théorie ondulatoire proposée par C. Huygens au tournant des années 1680 et qu'il a formalisée en 1690 dans son *Traité sur la lumière* [92], au détriment de la théorie corpusculaire soutenue par I. Newton. Ces travaux expérimentaux ont été suivis par les travaux théoriques de A. Fresnel dans les années 1810, qui ont donné lieu à la formulation aujourd'hui traditionnelle de l'optique ondulatoire. Une formulation plus moderne, parfois appelée optique statistique, a ensuite été adoptée dans les années 1930 sous l'impulsion notamment de P. van Cittert [173] et F. Zernike [185]. Cette dernière formulation repose sur la notion de fonction de cohérence optique, que nous proposons de rappeler de façon simple. Cette notion est introduite avec toute la rigueur nécessaire dans les ouvrages de M. Born et E. Wolf [26] ou de R.-J. Champeau *et al.* [36].

Intensité lumineuse dans une expérience d'interférométrie d'amplitude

Considérons pour ce faire la situation la plus simple qui soit : deux sources ponctuelles S_1 et S_2 émettent dans le vide deux ondes lumineuses qui se superposent. Un photodétecteur D est centré en un point M du champ d'interférences, suffisamment éloigné des sources pour que les ondes puisse y être approximées par des ondes planes. Cela demande en outre que le détecteur soit de petite taille devant les distances S_1M et S_2M.

Comme la période des ondes lumineuses (10^{-14} s) est bien plus courte que le temps de réponse de l'œil humain (100 ms) et même que celui des photodétecteurs usuels (100 ns pour des photodiodes commerciales standard), le récepteur n'est a priori pas capable de suivre les variations instantanées de l'amplitude de l'onde lumineuse. Il n'est sensible qu'au flux d'énergie qu'il reçoit pendant une durée τ_d de l'ordre de son temps de réponse. L'intensité lumineuse qu'il mesure est donc proportionnelle au flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(\vec{r},t)$ convolué par sa fonction de réponse dynamique K_d, qui est non nulle sur une durée typique τ_d, et intégrée sur l'ensemble du détecteur (1). Ainsi, l'intensité lumineuse $\mathcal{I}$ mesurée à un instant $\bar{t}$ vérifie

$$\mathcal{I}(\bar{t}) \propto \int_{\bar{t}-\tau_\mathrm{d}}^{\bar{t}+\tau_\mathrm{d}} \mathrm{d}t\, K_\mathrm{d}(t-\bar{t}) \int_D \vec{\Pi}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{S}\,, \tag{2.1}$$

où $\mathrm{d}\vec{S}$ est le vecteur surface élémentaire orienté normalement par rapport au détecteur. Par la suite nous noterons $\langle\cdot\rangle_\mathrm{d}$ les grandeurs ainsi lissées par le détecteur. Conserver la dépendance en $\bar{t}$ permet de considérer de façon explicite des sources non-stationnaires ou d'impulsions. Pour une onde quasi-plane, le vecteur de Poynting est proportionnel au carré du champ électrique et ainsi, par linéarité des équations de Maxwell,

$$\mathcal{I}(\bar{t}) \propto \left\langle \left|\vec{E}_1(\vec{r},t)+\vec{E}_2(\vec{r},t)\right|^2 \right\rangle_\mathrm{d}\,, \tag{2.2}$$

où $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont les champs électriques des ondes issues de chacune des sources.

Supposons que les ondes émises par les deux sources sont polarisées de la même façon, ce qui permet d'utiliser un modèle scalaire, et qu'elles sont quasi-monochromatiques de pulsation centrale ω_0, ce qui permet d'utiliser une écriture complexe. Les ondes lumineuses sont alors décrites au niveau du détecteur par les champs complexes

$$\phi_\alpha(\vec{r},t) = \phi_\alpha(t-\tau_\alpha) = A_\alpha(t-\tau_\alpha)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0(t-\tau_\alpha)}\,, \quad \alpha = 1 \text{ ou } 2, \tag{2.3}$$

(1). En toute rigueur, l'intégration spatiale se fait par convolution avec une fonction de réponse spatiale, dépendant de la position sur le détecteur. Ici on suppose implicitement qu'elle vaut 1 sur le détecteur et 0 en dehors.

où l'on pose $\tau_\alpha = S_\alpha M/c$ le temps de propagation de l'onde lumineuse entre la source et le détecteur. Ces champs complexes s'écrivent comme le produit d'une fonction d'enveloppe A et d'une porteuse harmonique à la pulsation ω_0. La fonction d'enveloppe est une fonction lentement variable sur une durée caractéristique $\tau_\mathrm{c} \gg 1/\omega_0$, appelée temps de cohérence de la source. Les variations temporelles du module et de la phase de A sont aléatoires et ne peuvent être décrites que statistiquement. La théorie de l'optique statistique a été historiquement développée pour des ondes dont les propriétés statistiques sont stationnaires, ce qui simplifie les expressions, mais elle s'étend sans peine à des ondes aux statistiques non-stationnaires.

En toute généralité, l'intensité lumineuse s'écrit alors

$$\mathcal{I}(\bar{t}) = \mathcal{I}_1(\bar{t}) + \mathcal{I}_2(\bar{t}) + 2\,\mathrm{Re}\,\langle \phi_1(t-\tau_1)\,\phi_2^*(t-\tau_2)\rangle_\mathrm{d}\ , \tag{2.4}$$

relation connue sous le nom de formule de Fresnel. Les deux premiers termes sont les intensités issues de chacune des sources qui seraient allumées séparément, alors que le troisième terme traduit les interférences entre les deux ondes.

2.1.2 Fonction de cohérence et corrélations du champ électromagnétique classique

Toute l'information sur les interférences est alors contenue dans la fonction de cohérence mutuelle des deux ondes, définie par

$$G_{12}(\bar{t},\tau_1,\tau_2) \overset{\text{déf.}}{=} \langle \phi_1(t-\tau_1)\,\phi_2^*(t-\tau_2)\rangle_\mathrm{d} = \int_{\bar{t}-\tau_\mathrm{d}}^{\bar{t}+\tau_\mathrm{d}} \mathrm{d}t\, K_\mathrm{d}(t-\bar{t})\,\phi_1(t-\tau_1)\,\phi_2^*(t-\tau_2)\,. \tag{2.5}$$

Les résultats « habituels » s'obtiennent en considérant des sources lumineuses stationnaires (plus de dépendance en $\bar{t}$, seule la différence $\tau \overset{\text{déf.}}{=} \tau_2 - \tau_1$ demeure pertinente) et la limite où le temps de réponse du détecteur τ_d est le plus grand des temps caractéristiques du système. Dans ce cadre, la fonction de cohérence mutuelle ne dépend plus que de τ et s'écrit

$$G_{12}(\tau) = \lim_{\tau_\mathrm{d}\to\infty} \frac{1}{\tau_\mathrm{d}} \int_{-\tau_\mathrm{d}/2}^{+\tau_\mathrm{d}/2} \mathrm{d}t\,\phi_1(t)\,\phi_2^*(t-\tau)\,. \tag{2.6}$$

On y reconnaît la fonction de corrélation des deux ondes ϕ_1 et ϕ_2. En d'autres termes, une figure d'interférences matérialise les corrélations entre les deux ondes qui interfèrent. L'introduction d'une quantité normalisée, le degré de cohérence mutuelle, est alors naturelle sous la forme

$$g_{12}(\tau) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{G_{12}(\tau)}{\sqrt{G_{11}(0)\,G_{22}(0)}}\,. \tag{2.7}$$

Physiquement, l'argument du degré de cohérence mutuelle décrit l'état d'interférence, constructif ou destructif, alors que son module quantifie le contraste des interférences. Ainsi,

- ▷ si $|g_{12}(\tau)| = 1$ les interférences sont parfaitement contrastées, c'est-à-dire que les deux ondes sont parfaitement cohérentes ou encore que les champs sont parfaitement corrélés ;
- ▷ si $0 < |g_{12}(\tau)| < 1$ il y a perte de contraste, indiquant que la cohérence des ondes et la corrélation des champs ne sont plus que partielles ;
- ▷ si $|g_{12}(\tau)| = 0$ il n'y a plus d'interférences observables ce qui signifie que les deux ondes sont totalement incohérentes et leurs champ complètement décorrélés.

L'inégalité de Cauchy–Schwartz appliquée au produit scalaire défini par l'équation (2.6) empêche le module du degré de cohérence de prendre des valeurs supérieures à 1.

Le temps de cohérence des sources lumineuses classiques, par exemple des lampes à décharge, est tel que deux sources physiquement distinctes ne peuvent donner lieu à l'observation d'interférences. Les ondes émises par chacune des lampes sont complètement décorrélées, ou en d'autres

termes $|g_{12}(\tau)| = 0$ quel que soit le décalage τ. Il faut alors séparer en deux le faisceau issu d'une unique source puis le recombiner après l'avoir fait voyager le long de voies ayant des temps de parcours différents, et ainsi $\phi_2(\vec{r}, t) = \phi_1(\vec{r}, t - \tau)$. La grandeur accessible est alors la fonction d'auto-cohérence du champ ϕ_1, qui est égale à sa fonction d'auto-corrélation dans la limite précédemment mentionnée. En revanche, l'utilisation de lasers stabilisés par asservissement permet de faire interférer deux faisceaux issus de deux sources physiquement distinctes. G. Magyar et L. Mandel l'ont montré expérimentalement [115] quelques années seulement après l'apparition des premiers masers.

Ainsi, il apparaît que la mesure d'une figure d'interférences en fonction de la différence de temps de vol entre les deux voies d'une expérience d'interférométrie d'amplitude donne accès à certaines propriétés statistiques du champ électromagnétique de l'onde à partir de laquelle les interférences sont obtenues. Mesurer ces corrélations est intéressant car cela permet d'obtenir des informations sur le spectre de la source et ainsi sur les processus physiques à l'œuvre.

Le temps de cohérence de la source est défini comme étant le temps typique de décroissance du module du degré de cohérence $|g_{11}(\tau)|$. La densité spectrale de puissance émise par la source et la fonction d'auto-cohérence étant reliées par une transformation de Fourier, le temps de cohérence τ_c de la source et la largeur $\Delta\omega$ de son spectre d'émission sont reliées par $\tau_\mathrm{c} = 1/\Delta\omega$.

Une onde parfaitement monochromatique a par définition une largeur spectrale nulle, et donc un temps de cohérence infini. Cela signifie que son degré de cohérence est de module 1 pour toute valeur de τ. On retrouve donc bien qu'une telle onde permet de former des interférences parfaitement contrastées pour une différence de marche arbitrairement grande.

Prenons comme autre exemple une raie de lampe spectrale, centrée sur la pulsation ω_0. En raison de l'effet Doppler, son profil spectral est élargi sous forme d'une gaussienne et s'écrit

$$\widetilde{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\Delta\omega^2}} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right]. \tag{2.8}$$

Le degré de cohérence associé vaut

$$g(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\tau} \exp\left[-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\tau}{\tau_\mathrm{c}}\right)^2\right] \qquad \text{où} \qquad \tau_\mathrm{c} = \frac{\sqrt{8\pi\ln 2}}{\Delta\omega}. \tag{2.9}$$

En mesurant la quantité $|g(\tau)|$, qui n'est autre que le contraste local de la figure d'interférences, accessible expérimentalement, il est possible d'en déduire $\widetilde{g}(\omega)$, c'est-à-dire tout le profil de raie.

2.1.3 Fonctions de cohérence quantique de Glauber

Les développements de la physique atomique, l'émergence du concept de photon, et surtout la découverte du MASER au tournant des années 1950 ont rendu nécessaire et naturelle une description quantique de la cohérence optique. Une telle théorie a été développée par R. Glauber dans les années 1960 et formulée en 1963 dans une série de trois articles fondateurs [71, 72, 73]. Ces travaux lui ont valu le prix Nobel 2005 « for his contribution to the quantum theory of optical coherence ». L'objectif poursuivi par Glauber était de décrire d'une façon complètement quantique les propriétés statistiques des champs électromagnétiques. Les aspects présentés dans ce paragraphe sont exposés de façon concise et pédagogique dans l'ouvrage de M. Fox [58] et dans les cours de C. Cohen-Tannoudji au Collège de France [42]. Ils font l'objet d'un traitement beaucoup plus détaillé par exemple dans l'ouvrage de L. Mandel et E. Wolf [119] ou celui de M. Orszag [135].

Considérons un champ électrique polarisé dans un état de polarisation μ, décrit en un point $\vec{r}$ de l'espace par un opérateur hermitien $E_\mu(\vec{r}, t)$. La démarche de Glauber repose sur la décomposition de la transformée de Fourier temporelle (2) de $E_\mu(\vec{r}, t)$ en deux parties respectivement

(2). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.

associées aux fréquences positives et négatives,

$$E_\mu(\vec{r},t) = E_\mu^{(-)}(\vec{r},t) + E_\mu^{(+)}(\vec{r},t) \tag{2.10}$$

$$\overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \widetilde{E}_\mu(\vec{r},\omega) + \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \widetilde{E}_\mu(\vec{r},\omega)\,. \tag{2.11}$$

Ces deux parties ne sont pas indépendantes car l'hermiticité impose $\widetilde{E}_\mu(\vec{r},-\omega) = \widetilde{E}_\mu(\vec{r},\omega)^\dagger$. Physiquement, la partie $E_\mu^{(+)}(\vec{r},t)$ décrit la destruction d'un photon de polarisation μ en $(\vec{r},t)$: $E_\mu^{(+)}$ appliqué à un état à $n \geq 1$ photons le transforme en un état à $n-1$ photons. Réciproquement, $E_\mu^{(-)}$ décrit la création d'un photon.

Glauber propose ensuite d'étudier le processus de détection d'un photon par un photodétecteur ponctuel idéal dans la limite d'un couplage dipolaire perturbatif entre le champ et le détecteur. Comme nous introduirons la cohérence électronique par une approche analogue au paragraphe 2.2, nous ne présentons que les points clés du raisonnement sans détailler les calculs. Il s'agit de calculer l'amplitude puis la probabilité de transition du champ électrique d'un état à n photons vers un état à $n-1$ photons sous l'action du hamiltonien de couplage, en prenant en compte à la fois la possibilité d'une dégénérescence des états accessibles au détecteur dans un tel processus et la possibilité d'un champ électromagnétique dans un mélange statistique d'états. Au premier ordre en le couplage, la probabilité que le photodétecteur ait détecté un photon dans la fenêtre de temps $[0,t]$ s'écrit dans la limite où le temps t est suffisamment court sous la forme

$$\mathbb{P}_{[0,t]}^{(1\mathrm{ph})} = \iint_0^t \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, \mathcal{G}^{(\mathrm{ph})}(\vec{r},t_1|\vec{r},t_2)\, K_\mathrm{d}(t_1-t_2)\,. \tag{2.12}$$

Dans cette expression, $K_\mathrm{d}(t_1-t_2)$ est la fonction de réponse du détecteur, supposé stationnaire, qui inclut son efficacité, sa bande passante et sa densité d'état. La fonction $\mathcal{G}^{(\mathrm{ph})}(\vec{r},t_1|\vec{r},t_2)$ est quant à elle la fonction de cohérence photonique du premier ordre, ou fonction de cohérence à un photon, du champ électromagnétique, définie par

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{ph})}(\vec{r},t|\vec{r}\,',t') \overset{\text{déf.}}{=} \left\langle E_\mu^{(-)}(\vec{r}\,',t')\, E_\mu^{(+)}(\vec{r},t)\right\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\left[E_\mu^{(+)}(\vec{r},t)\,\rho\, E_\mu^{(-)}(\vec{r}\,',t')\right]. \tag{2.13}$$

Cette fois, la moyenne $\langle\cdot\rangle_\rho$ n'est plus un lissage par le détecteur mais une moyenne quantique sur l'état du champ électromagnétique décrit par sa matrice densité ρ. La généralisation à une décomposition quelconque sur une base de trois polarisations est directe. La fonction de cohérence du premier ordre $\underline{\mathcal{G}}^{(\mathrm{ph})}$ devient une matrice 3×3, dont les composantes $\underline{\mathcal{G}}_{\mu\,\mu'}^{(\mathrm{ph})}$ correspondant à la cohérence entre les deux polarisations μ et μ'.

Dans le cas particulier d'un détecteur résolu en temps, $K_\mathrm{d}(t_1-t_2) \propto \delta(t_1-t_2)$, et la fonction de cohérence photonique du premier ordre prise à temps égaux s'interprète comme une densité de probabilité de détection d'un photon par le détecteur.

Pour décrire l'ensemble des corrélations du champ électromagnétique (et plus seulement les corrélations à un photon), Glauber propose également d'introduire des fonctions de cohérence d'ordre $n \geq 2$, ici tensorielles, sous la forme

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{G}}^{(n\text{-ph})}&(\vec{r}_1,t_1;\,\dots\,;\vec{r}_n,t_n|\vec{r}\,'_1,t'_1;\,\dots\,;\vec{r}\,'_n,t'_n)\\ &\overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Tr}\left[\vec{E}^{(+)}(\vec{r}_n,t_n)\dots\vec{E}^{(+)}(\vec{r}_1,t_1)\,\rho\,\vec{E}^{(-)}(\vec{r}\,'_1,t'_1)\dots\vec{E}^{(-)}(\vec{r}\,'_n,t'_n)\right].\end{aligned} \tag{2.14}$$

Qualitativement, les cohérences d'ordre supérieur sont reliées aux probabilités de détection conjointe de plusieurs photons. Nous étendrons ces définitions à l'optique quantique électronique au chapitre 3.

2.2 Électrodétection et cohérence électronique

Pour introduire de façon la plus naturelle les fonctions de cohérence électronique, suivons la démarche de Glauber pour modéliser un détecteur d'électrons couplé à un canal de bord. Cette approche s'inspire directement de celle présentée par C. Cohen-Tannoudji [42] et a été introduite à quelques variations près par C. Grenier dans sa thèse [76]. Au cours de ma thèse, je l'ai étendue à la mesure de corrélations de détection, qui sera présentée au chapitre 3 pour introduire la cohérence à deux électrons.

2.2.1 Dispositif et modèle

Considérons un canal de bord couplé à un détecteur. Le fluide électronique du canal est décrit par des opérateurs de champ $\psi(x,t)$ et $\psi^\dagger(x,t)$. Par la suite, tous les opérateurs sont calculés à la position $x_{\text{dét}}$ du détecteur, supposé ponctuel, et qui sera sous-entendue tout au long du calcul pour alléger les notations. Le détecteur est quant à lui considéré comme un convertisseur d'un signal quantique, correspondant au passage d'un électron du canal dans le détecteur, décrit par des opérateurs $d(t)$ et $d^\dagger(t)$, en un signal classique, qui va être envoyé dans une chaîne de mesure classique. Comme les opérateurs $d(t)$ et $d^\dagger(t)$ concernent les électrons, ils obéissent aux relations de commutation fermioniques. L'objectif est de montrer que ce signal classique n'est en général pas relié directement au courant quantique, mais plutôt à la cohérence électronique qui se propage dans le canal.

Une fois qu'un électron est passé du canal de bord au détecteur, ce dernier est réinitialisé en un temps que l'on suppose infiniment court. En pratique, cela voudrait dire que l'électron décohère instantanément et est directement évacué via un drain, ce qui remet le détecteur à zéro aussitôt. En outre, on ne s'intéresse ici qu'à l'étape dite de *pré-mesure* selon le vocabulaire employé par M. Le Bellac [104], c'est-à-dire que le détecteur est lui-même un système quantique.

Suivant Glauber, on suppose en outre que le détecteur peut être traité comme une perturbation à la dynamique du canal de bord : c'est le cas par exemple si le couplage est de type tunnel. Le couplage entre le détecteur et le canal de bord est modélisé par l'opérateur

$$W(t) = \eta\, d^\dagger(t)\, \psi(t)\,, \tag{2.15}$$

où la constante de couplage η est supposée suffisamment petite pour que la description perturbative soit valable. Un schéma de principe du dispositif envisagé est présenté figure 2.1.

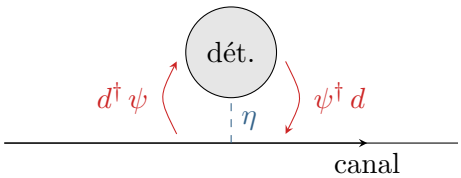


Fig. 2.1 – Schéma de principe du dispositif d'électrodétection. Le couplage tunnel entre le détecteur et le canal est caractérisé par une constante de couplage η. Le passage d'un électron du canal au détecteur est caractérisé par un opérateur $W = \eta\, d^\dagger\, \psi$, le processus inverse par l'opérateur hermitique conjugué.

2.2.2 Probabilité de détection

Plaçons-nous dans l'image d'interaction [30, 104] pour obtenir l'opérateur d'évolution du système global (électrons et détecteur) entre les instants 0 et t. Au premier ordre en η de la théorie des perturbations dépendant du temps, il s'écrit

$$U(t,0) = \mathbb{1} + \int_0^t \mathrm{d}t_1\, W(t_1) + \mathcal{O}(\eta^2)\,. \tag{2.16}$$

Cas particulier de deux états purs

Pour fixer les idées, commençons par considérer le cas le plus simple en supposant d'une part que les électrons du canal de bord et le détecteur sont initialement dans des états purs $|i_\mathrm{e}\rangle$ et $|i_\mathrm{d}\rangle$ et d'autre part que l'état du système complet est factorisé,

$$|i\rangle = |i_\mathrm{e}\rangle \otimes |i_\mathrm{d}\rangle\ . \tag{2.17}$$

Faisons également les mêmes hypothèses concernant les états finaux et posons $|f\rangle = |f_\mathrm{e}\rangle \otimes |f_\mathrm{d}\rangle$. L'hypothèse d'état pur peut facilement se lever, nous le ferons par la suite, mais nous garderons celle d'états initial et final factorisés, qui est cohérente avec l'idée d'une relaxation instantanée du détecteur.

Calculons la probabilité que le détecteur ait détecté un électron dans la fenêtre temporelle $[0,t]$. Pour que le calcul mené ici ait du sens, il faut que la fenêtre de temps considérée soit suffisamment étroite pour que la détection successive de plusieurs électrons soit négligeable (3). Cela se traduit formellement par une transition du système entre l'état $|i\rangle$ et l'état $|f\rangle$. L'amplitude de transition totale est la somme des amplitudes de transition à chaque instant, i.e.

$$\mathcal{A}^{i\to f}_{[0,t]} = \langle f\,|\,U(t,0)\,|\,i\rangle = \int_0^t \mathrm{d}t_1\, \langle f\,|\,W(t_1)\,|\,i\rangle \tag{2.18}$$

Notons que rien n'est spécifié sur la nature des états $|i\rangle$ et $|f\rangle$. Néanmoins, les seuls termes qui contribuent à $\mathcal{A}^{i\to f}_{[0,t]}$ sont ceux pour lesquels $|i\rangle$ et $|f\rangle$ se distinguent par le fait que $|f_\mathrm{d}\rangle$ compte un électron de plus que $|i_\mathrm{d}\rangle$, et inversement pour $|i_\mathrm{e}\rangle$ et $|f_\mathrm{e}\rangle$. La probabilité de transition se calcule ensuite comme étant le module carré de $\mathcal{A}^{i\to f}_{[0,t]}$,

$$\mathbb{P}^{i\to f}_{[0,t]} = \iint_0^t \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_1'\, \langle f|W(t_1)|i\rangle\, \langle i|W^\dagger(t_1')|f\rangle\ . \tag{2.19}$$

La factorisation des états $|i\rangle$ et $|f\rangle$ permet alors d'aboutir à une décomposition de l'intégrande en deux facteurs ne caractérisant que les électrons ou que le détecteur,

$$\mathbb{P}^{i\to f}_{[0,t]} = |\eta|^2 \iint_0^t \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_1'\, \langle f_\mathrm{e}|\psi(t_1)|i_\mathrm{e}\rangle\, \langle i_\mathrm{e}|\psi^\dagger(t_1')|f_\mathrm{e}\rangle \times \langle f_\mathrm{d}|d^\dagger(t_1)|i_\mathrm{d}\rangle\, \langle i_\mathrm{d}|d(t_1')|f_\mathrm{d}\rangle\ . \tag{2.20}$$

Cas de mélanges statistiques

Néanmoins, l'hypothèse d'état pur qui permet d'avoir une image simple du phénomène n'a pas grand sens physiquement. Pour avoir accès à la probabilité complète de détection, il faut moyenner celle-ci sur tous les états initiaux possibles. En outre, la détection se traduit par l'observation d'une charge dans le détecteur et pas par l'observation directe de l'état final, qui est même en général inconnu. Par conséquent, les contributions liées au passage possible dans

(3). On voit l'importance de cette hypothèse en remarquant que si la fenêtre de temps était extensible à volonté les probabilités calculées pourraient prendre des valeurs supérieures à 1.

différents états finaux se somment dans la probabilité de détection. Pour réaliser le moyennage, on suppose que le système est décrit par une matrice densité $\rho = \rho_{\mathrm{e}} \otimes \rho_{\mathrm{d}}$. Ainsi, la probabilité de détection s'écrit sous la forme

$$\mathbb{P}^{(1\mathrm{e})}_{[0,t]} = \sum_f \left\langle \mathbb{P}^{i\to f}_{[0,t]} \right\rangle_{\rho_i} . \tag{2.21}$$

Pour mener ce calcul à bien, il faut supposer que les états $|f_{\mathrm{e}}\rangle$ et $|f_{\mathrm{d}}\rangle$ forment une base orthonormée (4) de l'espace de Hilbert accessible respectivement aux électrons et au détecteur, ce qui permet d'utiliser les relations de fermeture

$$\sum_{|f_{\mathrm{e}}\rangle} |f_{\mathrm{e}}\rangle \langle f_{\mathrm{e}}| = \mathbb{1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{|f_{\mathrm{d}}\rangle} |f_{\mathrm{d}}\rangle \langle f_{\mathrm{d}}| = \mathbb{1} . \tag{2.22}$$

Dans ce cadre plus général, la probabilité totale de détection d'un électron dans la fenêtre de temps $[0,t]$ s'écrit finalement

$$\mathbb{P}^{(1\mathrm{e})}_{[0,t]} = |\eta|^2 \iint_0^t \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_1' \left\langle d(t_1')\, d^\dagger(t_1) \right\rangle_{\rho_{i,\mathrm{d}}} \left\langle \psi^\dagger(t_1')\, \psi(t_1) \right\rangle_{\rho_{i,\mathrm{e}}} . \tag{2.23}$$

Par analogie avec l'équation (2.13), page 39, définissant la cohérence à un photon, il devient naturel d'introduire la fonction de cohérence à un électron ou fonction de cohérence électronique du premier ordre d'un état caractérisé par une matrice densité ρ comme

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') \overset{\text{déf.}}{=} \left\langle \psi^\dagger(t')\, \psi(t) \right\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\left[\psi(t)\, \rho\, \psi^\dagger(t') \right] . \tag{2.24}$$

L'étude des propriétés et des informations portées par cette fonction de cohérence sont au cœur de ce chapitre. Avant de les explorer plus en avant, il est intéressant de mener l'analyse du modèle d'électrodétection proposé à son terme. Remarquons pour cela que le premier facteur du produit (2.23) ne fait intervenir que des opérateurs relatifs au détecteur. Par conséquent, il s'interprète comme étant la fonction de réponse (quantique) du détecteur (5). Posons

$$K_{\text{dét}}(t|t') = |\eta|^2 \left\langle d(t')\, d^\dagger(t) \right\rangle_{\rho_{i,\mathrm{d}}} . \tag{2.25}$$

Si les propriétés du détecteur sont stationnaires, $K_{\text{dét}}(t|t') = K_{\text{dét}}(t-t')$. Finalement, la probabilité de détection s'écrit sous la forme

$$\mathbb{P}^{(1\mathrm{e})}_{[0,t]} = \iint_0^t \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_1'\, K_{\text{dét}}(t_1 - t_1')\, \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1') . \tag{2.26}$$

La forme est donc tout à fait analogue à celle de l'équation (2.12) qui concerne les photons.

2.2.3 Signal délivré par le détecteur

Résultat général, importance de la cohérence

Les charges étant supposées rapidement évacuées par un drain, le détecteur ne délivre pas un signal $s(t)$ relié directement à la charge totale détectée mais plutôt au taux de comptage des électrons. Par conséquent, le signal s'écrit

$$s(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{(1\mathrm{e})}_{[0,t]}}{\mathrm{d}t} = \int_0^t \mathrm{d}t' \left[K_{\text{dét}}(t'-t)\, \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t'|t) + K_{\text{dét}}(t-t')\, \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') \right] \tag{2.27}$$

(4). Il faut donc considérer ici *tous* les états, et pas seulement ceux qui contribuent de façon non-nulle à la probabilité de détection.

(5). Dans le cadre des définitions qui seront posées au paragraphe 2.2.4, page 44, il s'agit d'une fonction de cohérence de type trou du premier ordre relative au détecteur.

d'où, par hermiticité,

$$s(t) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^t \mathrm{d}t'\, K_{\text{dét}}(t-t')\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t')\,. \tag{2.28}$$

Le commentaire le plus important sur ce résultat est que le signal délivré par le détecteur n'est pas directement relié au courant parcourant le canal de bord. La cohérence quantique impose une convolution plus subtile entre les propriétés du détecteur et le flux d'électrons dans le canal qu'en électronique classique linéaire. En effet, compte tenu de la propagation balistique chirale, la moyenne quantique de l'opérateur courant [(6)] dans un canal de bord est directement relié à la densité électronique moyenne via

$$\langle \hat{I}(t)\rangle_\rho = -e\,v_F\,\left\langle \psi^\dagger(t)\,\psi(t)\right\rangle_\rho = -e\,v_F\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t)\,. \tag{2.29}$$

où $-e$ est la charge d'un électron et v_F la vitesse de Fermi, c'est-à-dire la vitesse de propagation des excitations dans le canal. Cette expression est issue d'un développement à l'ordre 1 de la relation de dispersion du canal, qui vaut en particulier lorsque les interactions sont négligées. Pour aller plus loin, il est nécessaire de modéliser plus précisément le détecteur.

Modélisation simple des détecteurs

Pour commencer, considérons une première limite où le détecteur est à bande passante infinie ou autrement dit est résolu en temps, d'où l'indice « tps » utilisé. Sa fonction de réponse s'écrit alors sous la forme

$$K_{\text{tps}}(t-t') \propto \delta(t-t')\,. \tag{2.30}$$

En insérant cette forme dans l'équation (2.28), la borne inférieure de l'intégrale ne joue plus aucun rôle : on peut la remplacer par $-\infty$. Une régularisation de la distribution de Dirac par une fonction paire permet d'écrire

$$\int_{-\infty}^t \mathrm{d}t'\,\delta(t-t') = \frac{1}{2}\,. \tag{2.31}$$

L'équation (2.28) conduit alors à

$$s_{\text{tps}}(t) \propto \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t) \propto i(t)\,. \tag{2.32}$$

Ainsi, un signal proportionnel au courant est fourni par un détecteur résolu en temps. Néanmoins, une telle limite n'est évidemment pas réaliste expérimentalement où la meilleure résolution accessible à l'heure actuelle est de 500 ps. Une modélisation plus avancée devient alors nécessaire.

Pour pouvoir relier les opérateurs d et $d^\dagger$ aux propriétés physiques des détecteurs, il est nécessaire de passer dans l'espace de Fourier [(7)],

$$d(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t'}\,d(\omega') \qquad \text{et} \qquad d^\dagger(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,d^\dagger(\omega)\,. \tag{2.33}$$

On suppose alors que les composantes de Fourier s'écrivent sous la forme

$$d^\dagger(\omega) = \kappa(\omega)\,c^\dagger(\omega)\,, \tag{2.34}$$

où $c^\dagger(\omega)$ est un véritable opérateur de création d'un électron d'énergie $\hbar\omega$ dans le détecteur, pondéré par un facteur dimensionné $\kappa(\omega)$, éventuellement complexe, qui prend en compte la densité d'état dans le détecteur et l'efficacité du couplage qui peut potentiellement dépendre de

(6). Nous montrerons au paragraphe 4.1.2, page 119, que la présence d'une mer de Fermi entraîne que la quantité $\langle \hat{I}(t)\rangle_\rho$ ne correspond au courant réellement mesuré qu'à une constante additive près.

(7). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.

la fréquence. La largeur typique de $\kappa(\omega)$ n'est autre que la bande passante du détecteur. Puisque le détecteur est stationnaire,

$$\left\langle c(\omega')\, c^\dagger(\omega) \right\rangle_{\rho_{i,\mathrm{d}}} = (1 - f_{\mathrm{dét}}(\omega))\ \delta(\omega - \omega')\,, \tag{2.35}$$

où $f_{\mathrm{dét}}(\omega)$ est le nombre d'occupation dans le détecteur. Il vient alors

$$K_{\mathrm{dét}}(t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')}\, |\kappa(\omega)|^2\, (1 - f_{\mathrm{dét}}(\omega))\,. \tag{2.36}$$

Un exemple concret où ce type de modélisation est pertinent est celui d'une détection résolue en énergie : l'électron passe par effet tunnel du canal à un drain au travers d'une boîte quantique (« quantum dot ») aux niveaux d'énergie à une particule bien définis. Un tel dispositif a été utilisé par le groupe de F. Pierre au Laboratoire de Photonique et Nanostructures pour mesurer la relaxation en énergie dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier [105]. Si un seul niveau d'énergie $\hbar\omega_0$ suffit à décrire le transport, alors

$$|\kappa(\omega)|^2 = \gamma\, \delta(\omega - \omega_0)\,, \tag{2.37}$$

où γ est une constante. Dans l'expérience en question, le canal est également en régime stationnaire. L'équation (2.28) permet alors de relier le courant moyen $\bar{I}$ sortant du détecteur au nombre d'occupation $f_{\mathrm{can}}(\omega)$ des états électroniques du canal de bord,

$$\bar{I} = e\,\gamma\, [f_{\mathrm{dét}}(\omega_0) - f_{\mathrm{can}}(\omega_0)]\ . \tag{2.38}$$

Ce résultat se montre simplement, mais sa dérivation n'est pas détaillée ici car elle demande d'utiliser la représentation fréquentielle de la cohérence, qui ne sera introduite que plus tard.

2.2.4 Définitions générales et premières propriétés des fonctions de cohérence à un électron

Généralisons les définitions introduites précédemment, en considérant un fluide électronique décrit par une matrice densité ρ. Le système est constitué de canaux de bord de l'effet Hall quantique entier décrits par une variable d'espace unidimensionnelle x et un indice entier n indiquant le canal considéré. En revanche, aucune hypothèse n'est faite sur la géométrie desdits canaux, qui peuvent être bouclés sur eux-mêmes, connectés à des sources, etc.

En toute rigueur, la définition générale exige que la propagation dans les canaux de bord soit asymptotiquement libre. Par conséquent, celle-ci est balistique à la vitesse de Fermi v_F et il y a correspondance entre l'espace x et le temps t qui s'unissent dans la seule variable $x - v_F\, t$. Les interactions peuvent être prises en compte dans la théorie [44, 52, 76], mais seulement par une approche de diffusion. Cela impose à la zone d'interaction d'être de taille finie, les fonctions de cohérence n'étant calculables qu'en sortie de cette zone, une fois la propagation redevenue libre.

Cohérence d'électron, cohérence de trou

La fonction de cohérence à un électron, ou fonction de cohérence électronique du premier ordre, est définie par [76, 78, 81]

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1|1') \overset{\text{déf.}}{=} \left\langle \psi^\dagger(1')\, \psi(1) \right\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\left[\psi(1)\, \rho\, \psi^\dagger(1')\right]\ . \tag{2.39}$$

où $(1) \overset{\text{déf.}}{=} (n_1, x_1, t_1)$ et $(1') \overset{\text{déf.}}{=} (n_1', x_1', t_1')$ sont deux points de l'espace-temps. Notons que ces points ne sont pas nécessairement dans le même canal de bord. Comme un opérateur de

champ ψ ou $\psi^\dagger$ dans un système unidimensionnel est homogène à la racine carrée de l'inverse d'une longueur [(8)], la fonction de cohérence à un électron est homogène à l'inverse d'une longueur.

Puisqu'un opérateur d'annihilation d'un électron s'interprète comme un opérateur de création d'un trou, on introduit également une fonction de cohérence de type trou, définie par

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}(1|1') \overset{\text{déf.}}{=} \left\langle \psi(1')\,\rho\,\psi^\dagger(1) \right\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\left[\psi^\dagger(1)\,\rho\,\psi(1')\right] . \tag{2.40}$$

Ces deux fonctions sont reliées grâce à la relation d'anticommutation fermionique, qui concerne les opérateurs à temps égaux. Par conséquent les cohérences calculées à un même instant $t = t'$ mais en deux points différents vérifient

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(n, x, t|n', x', t) + \mathcal{G}^{(\mathrm{h})}(n', x', t|n, x, t) = \delta_{n\,n'}\,\delta(x - x') . \tag{2.41}$$

La propagation balistique permet d'écrire un lien analogue lorsque les fonctions sont calculées en un même point $x = x'$ du même canal $n = n'$, correspondant par exemple à la position d'un détecteur, mais à des temps différents,

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(n, x, t|n, x, t') + \mathcal{G}^{(\mathrm{h})}(n, x, t'|n, x, t) = \frac{1}{v_F}\,\delta(t - t') . \tag{2.42}$$

La moyenne quantique de l'opérateur densité électronique dans le canal s'obtient en considérant la partie de la fonction de cohérence à un électron que nous appellerons *diagonale*, c'est-à-dire la partie pour laquelle l'électron est détruit et créé au même point,

$$\langle \rho(n, x, t) \rangle = \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(n, x, t|n, x, t) . \tag{2.43}$$

Le nombre total d'électrons dans un canal à l'instant t s'obtient donc par une intégration sur x le long du canal, et le nombre total d'électrons dans le système par sommation sur tous les canaux.

Ce résultat a également des conséquences en termes d'interprétation physique. La partie diagonale de la cohérence s'interprète comme étant d'origine *classique*, associée simplement à la présence de charges dans le système. En revanche, la partie hors-diagonale s'interprète comme étant d'origine *quantique*, et décrit vraiment les propriétés de cohérence quantique du fluide électronique.

Cohérences et fonction de Green

Pour reprendre une terminologie plus standard en physique de la matière condensée, la fonction de cohérence électronique est directement proportionnelle à une fonction de Green [30] du fluide électronique, en l'occurrence la fonction de Green « mineure » ou « lesser » dans une terminologie anglophone. Celle-ci est définie comme

$$G_<(1, 1') = -\mathrm{i}\left\langle \psi^\dagger(1')\,\psi(1) \right\rangle = -\mathrm{i}\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1|1') . \tag{2.44}$$

La prescription d'ordre des opérateurs est ici un ordre normal par rapport au vide, où les opérateurs de création sont systématiquement placés à gauche des opérateurs d'annihilation.

Propriétés mathématiques

Une première propriété de conjugaison découle directement de la définition,

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1'|1) = \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1|1')^* . \tag{2.45}$$

(8). La dimension de l'opérateur champ se trouve en imposant que les *états* créés par application de ces opérateurs sur le vide soient sans dimension.

En outre, Glauber [72] propose une inégalité contraignant les cohérences photoniques qui est également valable pour les cohérences électroniques. L'argument central est qu'une matrice densité est un opérateur défini positif. Ainsi, pour tout opérateur A,

$$\mathrm{Tr}\left[A\,\rho\,A^{\dagger}\right] \geq 0\,. \tag{2.46}$$

En posant $A = \sum_i \lambda_i\,\psi(i)$, l'inégalité s'écrit

$$\sum_{i,j} \lambda_i\,\lambda_j^*\,\mathrm{Tr}\left[\psi(i)\,\rho\,\psi^{\dagger}(j)\right] \geq 0\,, \tag{2.47}$$

ce qui définit une forme quadratique définie positive des variables λ_i. Par conséquent, le déterminant des coefficients $\mathrm{Tr}\left[\psi(i)\,\rho\,\psi^{\dagger}(j)\right]$ est positif,

$$\det\left[\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(i|j)\right] \geq 0\,. \tag{2.48}$$

Dans le cas où seuls deux indices entrent en jeu, cela donne

$$\left|\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1|1')\right|^2 \leq \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1|1)\;\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1'|1')\,. \tag{2.49}$$

Ce résultat de type Cauchy-Schwartz donne donc une contrainte forte sur l'existence de cohérence non-diagonale : il faut qu'en chacun des temps impliqués il existe une contribution diagonale à la cohérence.

Précision sur les notations

La définition générale (2.39) de la fonction de cohérence à un électron masque l'équivalence entre espace et temps engendrée par la propagation balistique. Comme mentionné en introduction du paragraphe, hors d'une zone d'interaction que notre approche ne peut décrire directement, une seule des deux variables x ou t suffit.

En règle générale, dans la suite du manuscrit, la variable de position x est omise. L'argument pour le justifier est qu'un décalage en position se traduit directement sous forme d'un décalage temporel. Les fonctions de cohérence ne sont alors écrites qu'en termes des variables de temps et sous-entendent la variable de position,

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(x - v_F\,t|x' - v_F\,t')\,. \tag{2.50}$$

Un autre argument possible mais moins général est de supposer la variable de position fixée à la position d'un détecteur. Lorsque des canaux différents sont considérés, un indice de canal est ajouté à la variable de temps. Néanmoins, ce raccourci allégeant les notations ne doit pas faire oublier que les variables dont dépend la fonction de cohérence sont intrinsèquement des positions et que celle-ci est homogène à l'inverse d'une longueur. Cela interviendra lors du calcul des transformées de Fourier qui seront définies par rapport à la variable $x - v_F\,t$.

2.3 Excès de cohérence émis par une source

Nous allons montrer dans ce paragraphe que la quantité la plus pertinente pour décrire l'état électronique émis par une source n'est pas la cohérence totale, mais seulement une contribution propre à cette source, appelée contribution d'excès. La notion d'excès de cohérence a été introduite par C. Grenier et P. Degiovanni d'une part [76, 78] puis par G. Haack, M. Moskalets et M. Büttiker d'autre part [81].

2.3.1 Cohérence de la mer de Fermi

En optique photonique, l'état de référence du champ électromagnétique correspond à un état vide de photons. La cohérence photonique associée à cet état est donc identiquement nulle. La situation diffère en optique électronique, puisque l'état de référence qui correspond à une absence d'excitations est une mer de Fermi $|F\rangle$, état complètement intriqué formé par tous les électrons du solide. On comprend alors que la mer de Fermi possède une cohérence à un électron non-nulle, qu'il est nécessaire de prendre en compte. Cette mer de Fermi est décrite par son potentiel chimique μ.

Calculons cette cohérence en un point donné qu'on omettra comme annoncé et à deux instants $t \neq t'$. Pour mener le calcul, utilisons la transformée de Fourier (9)des opérateurs $\psi(t) \overset{\text{déf.}}{=} \psi(x - v_F\, t)$ et $\psi^\dagger(t') \overset{\text{déf.}}{=} \psi^\dagger(x' - v_F\, t')$,

$$\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t|t') = \iint \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\, v_F}\, \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi\, v_F} \left\langle \widetilde{\psi}^\dagger(\omega')\, \widetilde{\psi}(\omega) \right\rangle_F \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \omega' t')} \tag{2.51}$$

$$\text{soit} \qquad \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t|t') = \iint \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\, v_F}\, \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi\, v_F}\, \frac{v_F}{2\pi} \left\langle c^\dagger(\omega')\, c(\omega) \right\rangle_F \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \omega' t')}\ . \tag{2.52}$$

Les conventions utilisées pour définir les opérateurs $c^\dagger$ et c, décrivant la création et l'annihilation d'un électron d'énergie $\hbar\omega$, nécessitent des précisions. Pour respecter les usages concernant les relations d'anti-commutation tant dans l'espace réel que dans l'espace de Fourier,

$$\{\psi(t), \psi^\dagger(t')\} = \frac{1}{v_F}\, \delta(t - t') \qquad \text{et} \qquad \{c(\omega), c^\dagger(\omega')\} = \delta(\omega - \omega')\,, \tag{2.53}$$

les opérateurs ψ et c ne sont pas directement les transformées de Fourier l'un de l'autre, il faut y ajouter un facteur $\sqrt{2\pi/v_F}$ sous la forme

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{v_F}}\, \widetilde{\psi}(\omega)\,. \tag{2.54}$$

Commençons par le cas de la température nulle, pour lequel

$$\left\langle c^\dagger(\omega')\, c(\omega) \right\rangle_F = \Theta\left(\frac{\mu}{\hbar} - \omega\right)\, \delta(\omega - \omega')\,, \tag{2.55}$$

où Θ est la fonction de Heaviside. La présence du terme $\delta(\omega - \omega')$ permet de remarquer que la cohérence de la mer de Fermi ne dépend que de la différence des temps $\tau = t - t'$ et pas du temps moyen $\bar{t} = (t + t')/2$, ce qui est normal puisqu'il s'agit d'un état stationnaire. En régularisant l'intégrale en remplaçant $(t - t')$ par $(t - t') + \mathrm{i}0^+$, on aboutit à l'expression de la cohérence à un électron d'une mer de Fermi à température nulle de potentiel chimique μ,

$$\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t|t') = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\, v_F\, (t - t' + \mathrm{i}0^+)} \exp\left[-\mathrm{i}\, \frac{\mu}{\hbar}\, (t - t')\right] \tag{2.56}$$

(9). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.

Un calcul analogue peut être mené dans le cas d'une température électronique T non-nulle, et donne

$$\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t|t') = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\, v_F\, \tau_{\mathrm{th}}(T) \sinh\left(\frac{(t-t')}{\tau_{\mathrm{th}}} + \mathrm{i}0^+\right)} \exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{\mu}{\hbar}\,(t-t')\right] \tag{2.57}$$

où $\tau_{\mathrm{th}} = \hbar/\pi k_{\mathrm{B}} T$ est un temps caractéristique de cohérence thermique de la mer de Fermi. Sauf mention contraire, le potentiel chimique de la mer de Fermi est choisi comme référence des énergies dans toute la suite du manuscrit.

Remarquons que la cohérence de la mer de Fermi est divergente en $t = t'$ et doit régularisée par l'ajout de $\mathrm{i}0^+$. De façon précise, la divergence vient du fait que la mer de Fermi est supposée contenir un nombre infini d'électrons occupant tous les états d'énergie négative jusque $-\infty$: en fait, c'est une mer de Dirac qui a été considérée jusqu'ici. En pratique, l'échantillon est de taille finie et la mer de Fermi est une bande de largeur en énergie finie. Le terme de régularisation $\mathrm{i}0^+$ correspond à l'inverse de cette largeur en énergie. Il a donc une origine physique, et n'est pas qu'une régularisation mathématique.

2.3.2 Définition de l'excès de cohérence émis par une source

Un des enjeux de l'optique quantique électronique est de comprendre comment l'adjonction d'une source à électrons à un canal de bord modifie la cohérence électronique de ce canal. Pour cela, il est nécessaire d'isoler la contribution de la source en soustrayant celle de la mer de Fermi. Ce faisant, on définit l'excès de cohérence à un électron [78] sous la forme

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t') \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t') - \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t')\,. \tag{2.58}$$

Nous parlerons indifféremment d'excès de cohérence *porté par un état* électronique ou *émis par une source* d'excitations électroniques.

On pourrait penser que cette définition serait mal posée car les contributions de la source et de la mer de Fermi seraient entremêlées, mais il n'en est rien. La définition est en effet séquentielle :

- ▷ dans un premier temps, source éteinte, on « mesure » la cohérence $\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}$ de la mer de Fermi seule ;
- ▷ dans un second temps, source allumée, on « mesure » la cohérence totale $\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}$;
- ▷ dans un troisième temps on en déduit l'excès de cohérence dû à la source $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}$ par soustraction.

La mesure proposée ici est une mesure de théoricien : dans la pratique, nous verrons au paragraphe 4.1, page 118, que seul l'excès de cohérence est accessible à un expérimentateur.

Définir ainsi l'excès de cohérence a le mérite d'être très général, puisque la définition vaut également en présence d'interactions de toute sorte : il suffit de pouvoir isoler la source, par la pensée pour des calculs théoriques ou en l'allumant et l'éteignant pour des mesures réalistes. En particulier, cette définition ne repose pas sur le théorème de Wick et demeure bien posée en sortie d'une zone d'interactions alors que le théorème de Wick n'y est lui plus valable.

Cette définition peut se comprendre qualitativement par une image (10) reliée à l'électrodétection. Considérons la source et la mer de Fermi comme deux entités indépendantes et bien séparées, de telle sorte qu'il soit possible de compter leurs électrons. On observe un événement de détection associé aux positions et temps $(x, t|x', t')$. Pour savoir d'où vient l'électron détecté, il suffit de compter les électrons de la source et ceux de la mer de Fermi avant et après la détection. Deux processus sont possibles, donnant lieu aux deux contributions à la cohérence totale :

- ▷ ou bien l'électron détecté vient de la mer de Fermi, contribuant à $\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}$;
- ▷ ou bien il est issu de la source, contribuant alors à $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}$.

(10). Cette image peut sembler de peu d'intérêt ici, mais sera précieuse au chapitre 3, lorsqu'il sera temps de définir l'excès de cohérence à deux électrons émis par une source.

Tout au long du manuscrit, nous utiliserons également une représentation diagrammatique pour décrire de tels processus, voisine d'une représentation de Keldysh ou d'une représentation des amplitudes de Feynman. Dans cette représentation, un opérateur ψ est représenté par un trait plein orienté de la source vers le détecteur où est mesurée la cohérence alors qu'un opérateur $\psi^\dagger$ est représenté par un trait pointillé orienté en sens inverse. Les diagrammes sont à prendre au sens d'une valeur moyenne de l'opérateur total représenté. Ainsi, la cohérence totale se représente comme la somme des deux diagrammes de la figure 2.2. Des diagrammes croisés qui feraient intervenir un opérateur relatif à la source et un autre relatif à la mer de Fermi sont de valeur nulle : comme les deux entités sont séparées, elles ont un nombre d'électrons bien défini, et pour qu'un diagramme contribue il faut qu'il y ait autant de traits pleins que de traits pointillés sur chaque entité.

(a) $\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t') = \left\langle \psi^\dagger(x', t')\, \psi(x, t) \right\rangle_F$. (b) $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t') \sim \left\langle \psi^\dagger(x', t')\, \psi(x, t) \right\rangle_S$.

Fig. 2.2 – Représentation diagrammatique de la cohérence. La cohérence totale dans le canal de bord $\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t')$ est la somme des deux diagrammes, le diagramme (a) représentant la cohérence $\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}$ de la mer de Fermi (F) et le diagramme (b) l'excès de cohérence $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}$ dû à la source (S).

Remarquons que l'excès de cohérence électronique peut s'écrire sous la forme

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t') = \left\langle : \psi^\dagger(x' - v_F\, t')\, \psi(x - v_F\, t) : \right\rangle_\rho \tag{2.59}$$

où les : : désignent un ordre normal non plus par rapport au vide d'électrons mais par rapport à la mer de Fermi. Par définition, un opérateur normalement ordonné par rapport à un état est de valeur moyenne nulle sur cet état : c'est bien le cas de l'excès de cohérence lorsque l'état du fluide électronique est une simple mer de Fermi.

Enfin, par analogie avec l'optique, il est intéressant d'introduire un degré de cohérence à un électron ou degré de cohérence du premier ordre sous la forme

$$g^{(\mathrm{e})}(t|t') \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t')}{\sqrt{\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t)\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t'|t')}}\,. \tag{2.60}$$

2.3.3 Exemple de l'excès de cohérence porté par un électron, Effet de la décohérence

Considérons en guise de premier exemple un électron, bien séparé de la mer de Fermi, dont l'état quantique est décrit par une fonction d'onde. Cet exemple est certes académique plutôt qu'associé à une source réelle, qui émet un train périodique d'électrons, mais a le mérite d'être illustratif et devient pertinent dans la limite où les électrons du train sont bien séparés. Il donne également l'occasion d'introduire les échelles de temps importantes.

Excès de cohérence porté par un électron dans un paquet d'onde cohérent

Il s'agit d'étudier un électron unique dans un paquet d'onde normalisé $\phi(t)$ au dessus de la mer de Fermi. Son état quantique s'écrit

$$|\phi\rangle = \psi^\dagger[\phi]\,|F\rangle = v_F \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\, \phi(t_1)\, \psi^\dagger(t_1)\,|F\rangle \ . \tag{2.61}$$

Une nouvelle fois, des notations réduites sont adoptées en fixant la position x_1. En toute rigueur, l'état quantique doit être écrit sous la forme

$$|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(x_1 - v_F\, t_1)\, \phi(x_1 - v_F\, t_1)\, \psi^\dagger(x_1 - v_F\, t_1)\,|F\rangle \ . \tag{2.62}$$

La fonction d'onde ϕ, bien qu'écrite comme dépendant seulement d'un temps, est toujours homogène à la racine carrée de l'inverse d'une longueur ce qui est relié au fait qu'elle est normalisée à 1 sur l'ensemble de l'espace.

Le paquet d'ondes est supposé purement électronique, c'est-à-dire que ses composantes de Fourier $\widetilde{\phi}(\omega)$ s'annulent pour $\omega \leq 0$. Le système étant dans un état pur, son opérateur densité est simplement

$$\rho_\phi = |\phi\rangle\,\langle\phi| \ . \tag{2.63}$$

La fonction de cohérence à un électron s'écrit alors

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \left\langle \phi \,\middle|\, \psi^\dagger(t')\,\psi(t) \,\middle|\, \phi \right\rangle \tag{2.64}$$

$$= v_F^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, \phi^*(t_2)\, \phi(t_1) \left\langle F \,\middle|\, \psi(t_2)\, \psi^\dagger(t')\, \psi(t)\, \psi^\dagger(t_1) \,\middle|\, F \right\rangle \ . \tag{2.65}$$

Le calcul utilise ensuite le théorème de Wick [10, 30] pour décomposer le corrélateur à quatre points en somme de produits de corrélateurs à deux points. Pour que le théorème de Wick s'applique à un état, il faut d'une part que la dynamique du système soit gaussienne et d'autre part que les fluctuations de l'état en question soient elles aussi gaussiennes. Cela est en particulier le cas si le hamiltonien est un hamiltonien de particules libres et si l'état est un état thermique. Dans le cas présent, la mer de Fermi est par construction un état d'équilibre thermique. En outre, tant que les interactions sont négligées, la physique de basse énergie des états de bord de l'effet Hall quantique entier est décrite de façon effective par un hamiltonien quadratique d'électrons libres à une dimension. Par conséquent, le théorème de Wick s'applique à la mer de Fermi et à tout état construit en appliquant un produit d'opérateurs de création ou d'annihilation à la mer de Fermi.

En plus du théorème de Wick, le calcul repose sur les relations d'anti-commutation et l'hypothèse que le paquet est purement électronique. Il ne présente pas davantage de difficulté de principe. Tout calcul fait, on trouve

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t|t') + \phi(t)\,\phi^*(t')\,, \tag{2.66}$$

ce qui permet d'identifier par soustraction l'excès de cohérence à un électron associé à l'état $|\phi\rangle$,

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \phi(t)\,\phi^*(t')\,. \tag{2.67}$$

Le lien formel entre la définition de l'excès de cohérence à un électron, équation (2.67), et celle de la fonction d'auto-corrélation d'un rayonnement optique rappelé paragraphe 2.1.2, page 37, est clair. Par analogie avec l'optique ondulatoire, on comprend donc que l'excès de cohérence d'un état quantique contient toute l'information sur la capacité de cet état à interférer avec lui-même.

À titre illustratif, considérons un paquet d'onde de la forme

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{\tau_e}{\pi\, v_F}}\,\frac{1}{t + \mathrm{i}\tau_\mathrm{e}}\,, \tag{2.68}$$

où τ_e correspond à la largeur à mi-hauteur de l'enveloppe lorentzienne du paquet. Nous verrons au paragraphe 2.6.3 que ces paquets d'ondes, proposés par L. Levitov *et al.* [108, 96], décrivent le leviton $n = 1$ tel qu'il est généré par la source à électrons développée dans le groupe de C. Glattli au CEA Saclay [45, 46], présentée au paragraphe 1.3.3, page 17. Rappelons qu'il s'agit des seuls paquets d'ondes monoélectroniques à pouvoir être émis par un contact ohmique commandé en tension. Un leviton définissant un électron bien localisé en temps, cet exemple se prête bien aux représentations temporelles. L'excès de cohérence associé à un tel état $|\phi\rangle$ est représenté figure 2.3.

Prise en compte de la décohérence

Dans un échantillon solide comme ceux qui nous intéressent dans ce manuscrit, un électron dans un canal de bord ne peut pas être isolé de son environnement électromagnétique avec lequel il interagit par l'intermédiaire des interactions de Coulomb. Celles-ci sont dues aux autres électrons du canal de bord considéré, en premier lieu la mer de Fermi, à ceux des autres canaux de bord, ou encore aux grilles utilisées pour contraindre la géométrie des canaux de bord. Sans entrer dans le détail d'une modélisation avancée de la décohérence, il est possible de l'inclure partiellement et de façon phénoménologique dans la description de la cohérence à un électron en sortie de la région d'interaction.

La relaxation en énergie peut être prise en compte en supposant que la décohérence affecte l'excès de cohérence à un électron en l'atténuant d'un facteur de décohérence $\mathcal{D}(t - t')$ [44, 54]. Ainsi, en présence de décohérence,

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \mathcal{D}(t - t')\,\phi(t)\,\phi^*(t')\,. \tag{2.69}$$

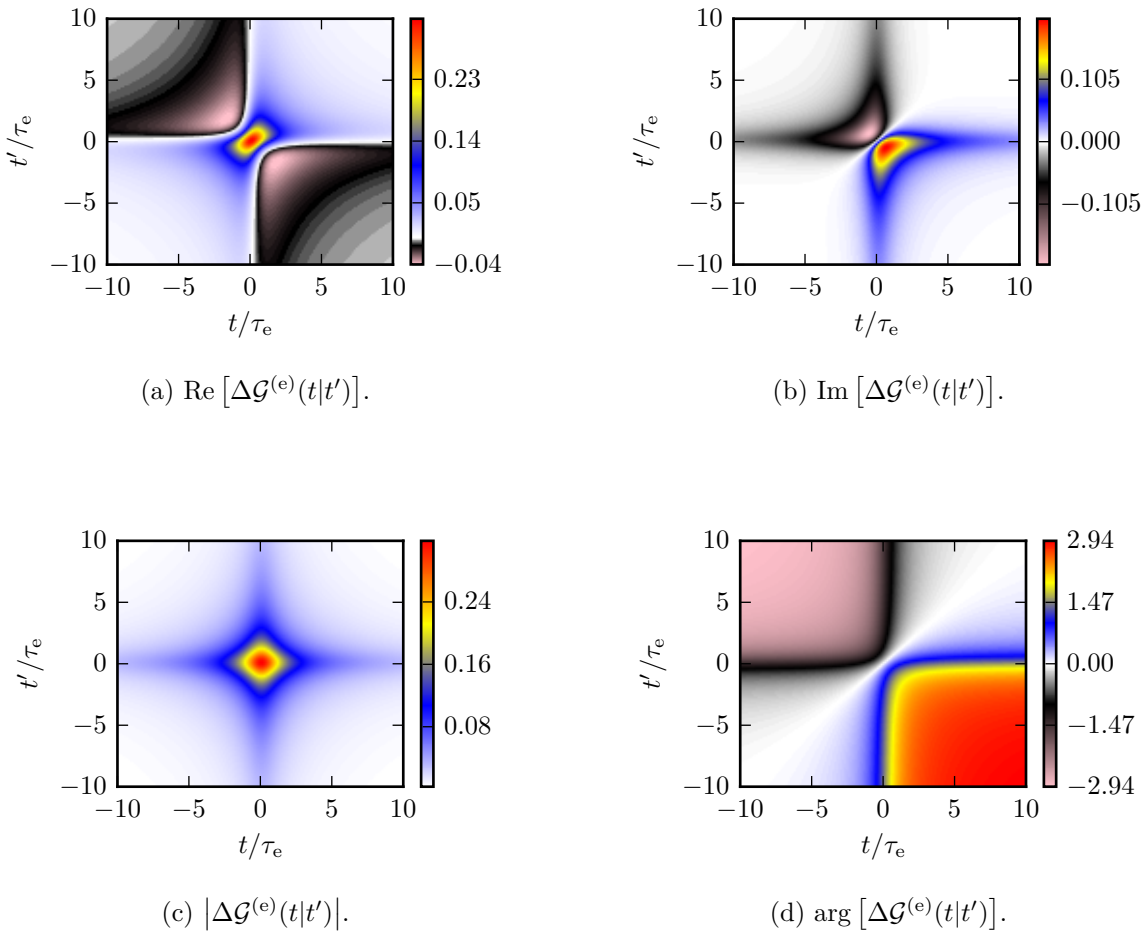
Une décohérence de ce type n'affectant pas le courant moyen, relié à la partie diagonale de l'excès de cohérence, cela impose $\mathcal{D}(0) = 1$. En outre, l'effet de la décohérence étant d'autant plus important que l'écart de temps est grand, on a $\mathcal{D}(\tau) \to 0$ lorsque $|\tau| \to \infty$. Par conséquent, la décohérence tend à compacter l'excès de cohérence le long de la droite $\tau = 0$. Une forme empirique de ce coefficient de décohérence $\mathcal{D}$ a été proposée pour interpréter quantitativement les expériences Hong–Ou–Mandel réalisées au Laboratoire Pierre Aigrain [22], qui seront présentées au paragraphe 4.3.3, page 142. Le coefficient de décohérence prend la forme

$$\mathcal{D}(\tau) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_\varphi}\right), \tag{2.70}$$

où τ_φ est un temps caractéristique de décohérence.

Cette forme est adaptée à la modélisation de l'expérience en question, mais n'a pas de raison d'être générale. Une première remarque évidente est que la phénoménologie de la séparation spin–charge, introduite au paragraphe 1.5, page 31, ne peut pas être décrite par un coefficient de décohérence effectif ayant les propriétés énoncées plus haut. Ainsi, la décohérence affecte les levitons, sensibles à une séparation spin–charge mais pas à une relaxation en énergie, par une modification effective de l'impulsion de tension les ayant générés mais ne conduit pas une décroissance exponentielle de la cohérence vis-à-vis de la variable τ [77].

Cette approche phénoménologique a été complétée par une étude quantitative et plus générale des interactions. La méthode développée au sein de notre groupe de l'ENS Lyon [44, 52, 76] repose sur le formalisme de la bosonisation et de la diffusion de magnéto-plasmons de bord.



(a) Re $\left[\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t')\right]$.

(b) Im $\left[\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t')\right]$.

(c) $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t')\right|$.

(d) arg $\left[\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t')\right]$.

Fig. 2.3 – Excès de cohérence à un électron d'un paquet leviton cohérent. La fonction de cohérence à un électron est calculée à partir de la fonction d'onde (2.68). Étant complexe, on trace d'une part les parties réelles et imaginaires, figures (a) et (b) et d'autre part le module et un argument, figures (c) et (d).

Ce formalisme a été initialement développé par I. Safi et H. Schulz pour étudier le transport à fréquence finie dans les liquides de Luttinger à une dimension non-chiraux [149, 152, 153]. Les excitations des canaux de bord sont décrites comme une onde de densité de charge, c'est-à-dire un champ bosonique appelé champ de magnéto-plasmons de bord. L'effet des interactions sur ce champ bosonique se modélise simplement par une matrice de diffusion, dépendant de l'énergie des plasmons, qui relie linéairement le champ plasmonique dans le canal de bord et l'environnement en entrée et sortie de la zone d'interactions. La figure 2.4 schématise cette approche. Un élément important et déjà mentionné plusieurs fois est qu'elle impose que la zone d'interactions soit de longueur finie, les cohérences ne pouvant être calculées que dans une zone de propagation libre. La modélisation effective des interactions permet de calculer la matrice de diffusion de plasmons, toute la difficulté consistant ensuite à exprimer les cohérences électroniques en sortie de la zone d'interaction à partir de l'expression de l'état plasmonique de sortie [44, 52]. Plusieurs propositions théoriques de scénarios de décohérence peuvent ainsi être analysées, par l'intermédiaire d'expériences de type HOM [52, 61, 177].

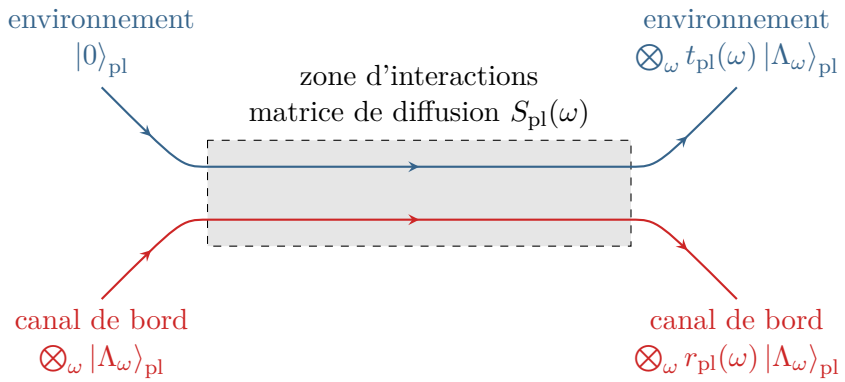


Fig. 2.4 – Schéma de principe de la modélisation des interactions. L'état du canal de bord en entrée de la zone d'interaction est décrit par un état de plasmons $|\Lambda\rangle_{\mathrm{pl}}$, alors que l'environnement, ici représenté comme un second canal de bord, est supposé vide de plasmons. Les interactions transforment alors linéairement ces états par une matrice de diffusion S_{pl} dont les coefficients de réflexion et transmission sont notés r_{pl} et t_{pl}.

Temps classique et temps quantique

À plusieurs reprises déjà nous avons mentionné l'intérêt de procéder à une rotation dans l'espace des temps en remplaçant les variables t et t' par

$$\bar{t} = \frac{t+t'}{2} \qquad \text{et} \qquad \tau = t - t'\,. \tag{2.71}$$

En effet, la dépendance en le temps moyen $\bar{t}$ contient l'information sur la dynamique du système et les grandeurs classiques. En particulier la densité d'électrons ou de façon équivalente le courant électrique sont naturellement des fonctions de $\bar{t}$ à $\tau = 0$. Au contraire, l'analogie avec l'optique ondulatoire fait comprendre que la cohérence à proprement parler est décrite par la dépendance en τ : c'est en effet cette dépendance de la fonction d'auto-corrélation d'un rayonnement qui décrit sa capacité à interférer. Par ailleurs, nous avons mentionné que la décohérence peut n'affecter que cette dépendance en τ. Par conséquent, caractériser la cohérence portée par un électron dans un paquet d'ondes électronique requiert deux échelles de temps distinctes pour décrire les dépendances en $\bar{t}$ et τ. Ces échelles de temps ont été identifiées dans les travaux de G. Haack [80, 82].

La première échelle de temps mise en jeu décrit la décroissance en $\bar{t}$. Compte tenu des informations contenues dans cette dépendance, reliée au courant électrique indépendamment de tout

effet de cohérence, on parlera d'une échelle de temps classique $T_{\mathrm{cl}}^{(1)}$. L'exposant (1) rappelle qu'on s'intéresse à la cohérence à un électron. Dans le cas d'un paquet d'ondes, ce temps correspond au temps de décroissance de son enveloppe, $T_{\mathrm{cl}}^{(1)} = \tau_{\mathrm{e}}$. Physiquement, l'échelle de temps classique est la largeur typique de l'impulsion de courant associée au passage de l'électron et est donc dans le principe expérimentalement accessible par des mesures de courant résolu en temps qui seront discutées au paragraphe 4.1.2, page 119.

La seconde échelle de temps importante décrit quant à elle la décroissance en τ. Compte tenu des informations qu'elle apporte sur la cohérence du paquet d'ondes, on parlera cette fois d'une échelle de temps quantique $T_{\mathrm{qtq}}^{(1)}$. Ce temps caractéristique est relié au temps d'enveloppe et au temps de décohérence par

$$\frac{1}{T_{\mathrm{qtq}}^{(1)}} = \frac{1}{\tau_\varphi} + \frac{1}{2\tau_{\mathrm{e}}} \,. \tag{2.72}$$

L'échelle de temps quantique $T_{\mathrm{qtq}}^{(1)}$ est également accessible expérimentalement, du moins en principe. En effet, τ_{e} s'obtient à partir de mesures de courant résolu en temps alors que τ_φ est le temps caractéristique de décroissance du degré de cohérence à un électron $g^{(\mathrm{e})}$ en fonction de τ, grandeur qui est accessible expérimentalement dans une expérience d'interférométrie de type Mach–Zehnder. Nous verrons au chapitre 4 qu'il s'agit de la visibilité des interférences observées.

L'interdépendance de ces trois échelles de temps fait écho à des résultats bien connus par exemple dans le domaine de la résonance magnétique de spin [1] ou des équations de Bloch optiques [79]. Attention toutefois aux notations qui diffèrent : l'échelle de temps classique $T_{\mathrm{cl}}^{(1)}$ est l'analogue du temps de relaxation spin–réseau T_1 de la RMN alors que le temps $T_{\mathrm{qtq}}^{(1)}$ est l'analogue du temps de relaxation spin–spin T_2 de la RMN. Dans le contexte de ce manuscrit, la notation $T^{(2)}$ est réservée aux temps caractérisant la cohérence à deux électrons qui fait l'objet du chapitre 3.

2.3.4 Exemple de l'excès de cohérence porté par une paire, Effet de la statistique fermionique

Le comportement quantique des électrons est contraint de façon drastique par leur caractère fermionique. Pour voir l'influence de ce dernier sur la cohérence à un électron, nous allons nous intéresser à la cohérence portée par des paires. Les effets de décohérence d'une paire étant plus complexes que ceux d'un électron seul, il n'est pas possible de les modéliser de façon aussi simple qu'au paragraphe précédent. On se limitera donc au cas de paires parfaitement cohérentes.

Cas d'une paire d'électrons

Considérons donc l'exemple d'une paire d'électrons dans deux paquets d'ondes ϕ_a et ϕ_b, tous deux purement électroniques, mais qui peuvent a priori avoir un recouvrement $\alpha = \langle \phi_a | \phi_b \rangle$ non-nul. L'état quantique associé s'écrit

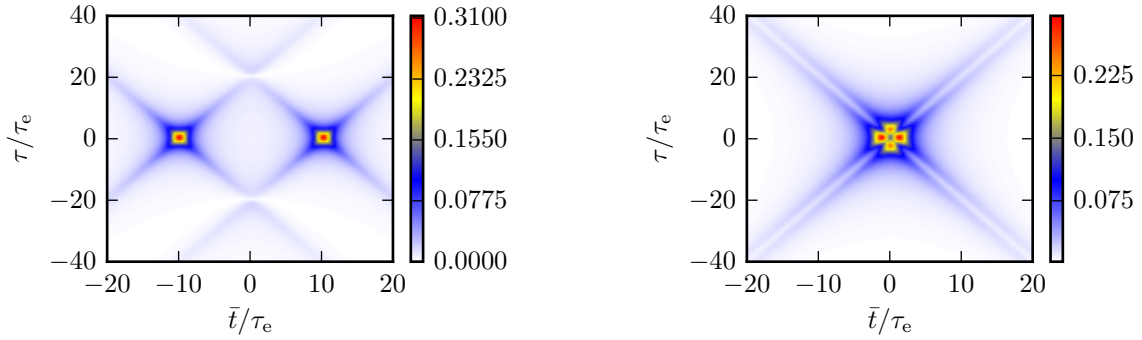
$$|\Phi_{ab}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}\, \psi^\dagger[\phi_b]\, \psi^\dagger[\phi_a]\, |F\rangle \,. \tag{2.73}$$

Le calcul de l'excès de cohérence à un électron se conduit de la même façon que précédemment à l'aide du théorème de Wick et donne

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \frac{1}{1-|\alpha|^2}\left[\phi_a(t)\,\phi_a(t') + \phi_b(t)\,\phi_b(t') - \alpha\,\phi_a(t)\,\phi_b^*(t') - \alpha^*\,\phi_b(t)\,\phi_a^*(t')\right] \,. \tag{2.74}$$

La cohérence portée par une paire d'électrons est donc la somme des cohérences portées par chacun des électrons, mais corrigée de termes proportionnels au recouvrement.

À des fins illustratives, considérons deux paquets leviton (2.68) identiques décalés d'une quantité Δt. Le module des fonctions de cohérence associées à deux valeurs de Δt sont représentées figure 2.5. La remarque la plus importante au sujet de cet exemple est que, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, le principe de Pauli et l'antisymétrie fermionique ne conduisent pas à des signatures universelles sur l'excès de cohérence à un électron, bien loin d'annulations ou de franges d'interférences spectaculaires. Nous montrerons au chapitre suivant que de telles signatures sont en revanche manifestes sur l'excès de cohérence à deux électrons. Attention néanmoins à ne pas se méprendre : le principe de Pauli n'est évidemment pas négligeable puisqu'il empêche l'existence de paires constituées d'électrons identiques et simultanés, et plus largement contraint l'excès de cohérence par l'intermédiaire des termes impliquant le recouvrement.



(a) $\Delta t/\tau_e = 20$.

(b) $\Delta t/\tau_e = 2$.

Fig. 2.5 – Excès de cohérence d'une paire d'électrons. On représente $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\bar{t},\tau)\right|$ pour une paire de levitons $n = 1$ décalés d'une quantité Δt. La cohérence de la paire est la somme des cohérences de chaque électron, corrigée de termes liés au recouvrement.

Cas d'une paire électron-trou

Pour terminer cette série d'exemples simples, considérons non plus une paire d'électrons mais une paire électron-trou dont l'état quantique s'écrit

$$|\Phi_{e/h}\rangle = \psi[\phi_h]\,\psi^\dagger[\phi_e]\,|F\rangle\ , \tag{2.75}$$

où ϕ_h est un paquet d'onde de trou, i.e. $\widetilde{\phi}(\omega) = 0$ pour $\omega \geq 0$, et ϕ_e un paquet d'onde d'électron, i.e. $\widetilde{\phi}(\omega) = 0$ pour $\omega \leq 0$. Le recouvrement entre les deux paquets est donc nul. Grâce au théorème de Wick, aux relations d'anti-commutation fermioniques et à la nature des paquets d'ondes, l'excès de cohérence à un électron s'écrit sous la forme

$$\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t') = -\phi_h(t)\,\phi_h^*(t') + \phi_e(t)\,\phi_e^*(t')\,. \tag{2.76}$$

Pour l'illustrer, supposons que l'électron est dans une fonction d'onde leviton $n = 1$ alors que le trou est quant à lui dans une fonction d'onde leviton $n = -1$. Formellement, cela signifie qu'on considère

$$\widetilde{\phi}_h(\omega) = \widetilde{\phi}_e(-\omega) \qquad \text{d'où} \qquad \phi_h(t) = \phi_e(-t)\,. \tag{2.77}$$

Commençons par le cas où l'électron et le trou sont simultanés, c'est-à-dire $\Delta t = 0$, représenté figure 2.6. On note que $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\bar{t},\tau)\right|$ s'annule strictement tout le long de la ligne $\tau = 0$. On retrouve donc que cet état ne transporte aucun courant, ce qui est naturel puisque l'électron et le trou ont « la même forme » et passent « en même temps ». En revanche, un excès de cohérence lui est bel et bien associé, non nul dès lors que $\tau \neq 0$.

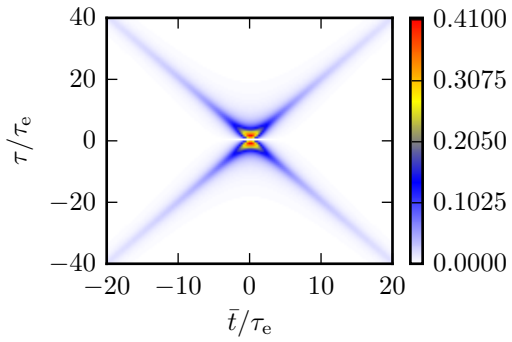
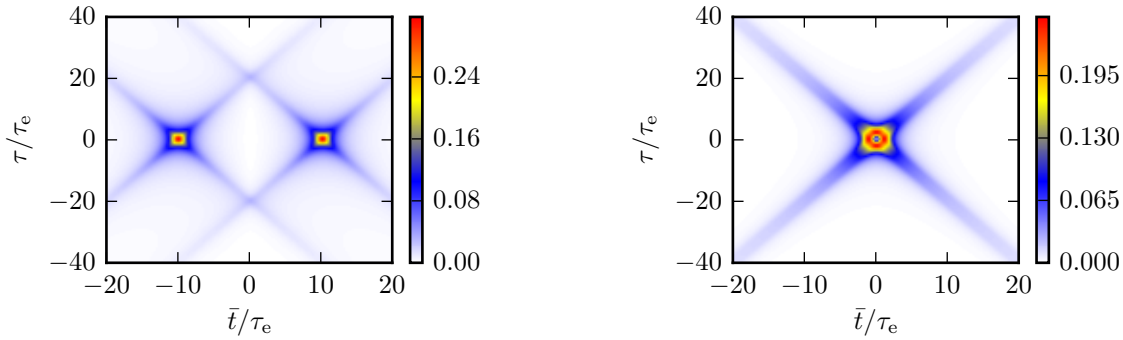


Fig. 2.6 – Excès de cohérence d'une paire électron-trou. On représente $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\bar{t},\tau)\right|$ pour une paire formée d'un électron et d'un trou émis en même temps dans une fonction d'onde leviton respectivement $n = 1$ et $n = -1$. L'annulation stricte le long de la ligne $\tau = 0$ signifie qu'aucun courant n'est transporté, mais la cohérence n'est pas nulle pour autant.

On peut enfin s'intéresser au cas où l'électron et le trou sont décalés, représenté figure 2.7. Comme l'électron et le trou sont dans des états orthogonaux, ils ne sont pas contraints principe de Pauli. Choisir les mêmes fonctions d'onde permet de comparer les figures 2.5 et 2.7 pour bien visualiser l'importance relative du caractère fermionique des électrons sur la cohérence à un électron. La vraie différence se traduit par les termes de recouvrement, qui altèrent l'excès de cohérence de la paire d'électrons lorsque Δt devient comparable à τ_e.



(a) $\Delta t/\tau_e = 20$.

(b) $\Delta t/\tau_e = 2$.

Fig. 2.7 – Excès de cohérence d'une paire électron-trou séparée. On représente $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\bar{t},\tau)\right|$ pour une paire électron-trou dans des fonctions d'onde leviton $n = 1$ et $n = -1$ séparée d'une quantité Δt. L'impulsion de courant associée au passage de chaque particule est positive car on trace le module plutôt que la partie réelle.

2.4 Représenter la cohérence

Après ces multiples définitions et exemples se pose la question de construire la meilleure représentation possible de la cohérence électronique, c'est-à-dire la représentation qui donne le plus facilement accès aux informations pertinentes sur l'état du fluide électronique.

Les représentations en temps et en énergie ont été introduites par C. Grenier dans sa thèse [76], alors que la représentation de Wigner a été proposée par P. Degiovanni quelques mois avant le début de ma thèse. J'ai contribué à la compréhension précise des informations contenues dans la représentation de Wigner, et je l'ai appliquée en collaboration avec D. Ferraro aux expériences d'interférométrie détaillées au chapitre 4.

2.4.1 Représentation en temps

Jusqu'à présent, nous avons défini la cohérence à un électron comme une fonction de deux temps, que l'on peut écrire au choix sous une forme (t, t') ou après avoir procédé à une rotation dans l'espace des temps sous la forme $(\bar{t}, \tau)$.

Cette représentation temporelle donne un accès facile à la dynamique du système par l'intermédiaire de la dépendance en $\bar{t}$. En particulier, nous avons mentionné plusieurs fois que l'excès de courant moyen résolu en temps (au sens d'une moyenne quantique sur un état ρ) apporté par une source y est directement reliée,

$$\overline{i(\bar{t})} \overset{\text{déf.}}{=} \langle \hat{I}(\bar{t}) \rangle_\rho - \langle \hat{I}(\bar{t}) \rangle_F = -e\, v_F\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(\bar{t}, \tau = 0)\,. \tag{2.78}$$

En retour, la dépendance en τ contient toute l'information sur les propriétés de cohérence, c'est notamment elle qui pilote le comportement d'une excitation dans une expérience d'interférométrie. Un autre intérêt de cette représentation concerne les états stationnaires, au premier rang desquels figure la mer de Fermi. La cohérence électronique de ces états ne dépend en effet que de la seule variable τ.

Néanmoins, cette représentation ne fournit pas un accès facile à la nature des excitations présentes dans le système. La comparaison des figures 2.5 et 2.7 qui représentent le module de l'excès de cohérence ne permet pas de déterminer de façon immédiate laquelle des deux paires contient un trou. Cette information est bien sûr contenue dans l'excès de cohérence, mais est masquée dans la dépendance en τ de sa phase, ce qui la rend moins accessible. Pour y accéder, la représentation en fréquence est plus adaptée.

Mentionnons enfin qu'un protocole proposé par G. Haack *et al.* permettrait de mesurer la cohérence électronique dans cette représentation à l'aide d'un interféromètre de Mach–Zehnder [80, 82]. Ce protocole est dans le principe très performant mais présente deux inconvénients majeurs. Le premier, fondamental, est qu'il est très sensible à tout effet de décohérence dans l'interféromètre. Le second, d'ordre pratique, est qu'il demande des mesures de courant résolu en temps, particulièrement ardues à mettre en œuvre. Un protocole plus simple sur le plan des mesures permet d'identifier les échelles de temps discutées précédemment. Les détails de ces protocoles seront discutés au paragraphe 4.2 traitant de la propagation de la cohérence dans un interféromètre de Mach–Zehnder.

2.4.2 Représentation en fréquence

Définition

La représentation fréquentielle (ou énergétique) de la cohérence est définie par une double transformée de Fourier (11) de sa représentation temporelle,

$$\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}(\omega|\omega') = v_F^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t')\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\omega' t')}\;. \tag{2.79}$$

La fonction de cohérence $\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}$ dans le domaine des énergies est homogène à une longueur (12). En termes d'opérateurs,

$$\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}(\omega|\omega') = \frac{2\pi}{v_F}\left\langle c^\dagger(\omega')\,c(\omega)\right\rangle_\rho\;, \tag{2.80}$$

où $c^\dagger$ et c sont les opérateurs de création et d'annihilation d'électrons dans le domaine des énergies, définis comme indiqué au paragraphe 2.3.1, page 47, à partir de la transformée de Fourier des opérateurs ψ et $\psi^\dagger$ par

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{v_F}}\,\widetilde{\psi}(\omega)\,. \tag{2.81}$$

Bien entendu, il est possible de procéder à une rotation dans l'espace des fréquences en posant

$$\bar{\omega} = \frac{\omega+\omega'}{2} \qquad \text{et} \qquad \Omega = \omega - \omega' \tag{2.82}$$

Ce faisant, $\bar{\omega}$ est la variable conjuguée à la différence des temps τ et Ω est la variable conjuguée au temps moyen $\bar{t}$,

$$\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}(\bar{\omega},\Omega) = v_F^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\bar{t}\,\mathrm{d}\tau\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(\bar{t},\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega}\tau+\Omega\bar{t})}\;. \tag{2.83}$$

En terme de ces variables tournées, la cohérence dans le domaine des énergies prise en $\Omega = 0$ donne accès au nombre d'occupation électronique moyen f de l'état quantique du fluide électronique à l'énergie $\bar{\omega}$.

Un protocole de tomographie quantique permettant de mesurer la fonction de cohérence électronique dans le domaine des énergies a été proposée par C. Grenier *et al.* [76, 78]. Ce protocole repose sur des interférences à deux électrons sur un contact ponctuel quantique, et sera discuté au paragraphe 4.3 traitant de ces interférences. Il est moins sensible aux effets de décohérence que les mesures par l'intermédiaire d'un MZI, ou du moins ceux-ci sont plus simples à prendre en compte, et repose sur des mesures de bruit à fréquence nulle un peu plus faciles à mettre en œuvre. Cependant, obtenir une bonne résolution sur la cohérence mesurée peut demander de multiples mesures et le protocole peut alors devenir particulièrement lourd. Indiquons pour finir qu'un protocole tout à fait analogue a été mis en œuvre très récemment, non pas dans les canaux de bord de l'effet Hall mais dans un gaz d'électrons bidimensionnel par T. Jullien *et al.* [100].

Accès à la nature des excitations monoélectroniques

Le plan des énergies peut être découpé en quatre quadrants qui donnent accès à la nature des excitations du fluide électronique véhiculant l'état quantique. On peut comprendre sur l'exemple de la paire électron–trou la façon dont l'espace de Fourier se décompose. Sur cet exemple, une double transformation de Fourier de l'équation (2.76), page 55, donne directement

$$\Delta\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}(\omega|\omega') = -\phi_{\mathrm{h}}(\omega)\,\phi_{\mathrm{h}}^*(\omega') + \phi_{\mathrm{e}}(\omega)\,\phi_{\mathrm{e}}^*(\omega')\,. \tag{2.84}$$

(11). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.
(12). Ce choix de dimension correspond à celui de la thèse de C. Grenier [76], mais diffère de celui adopté dans les articles associés [51, 78] où la vitesse de Fermi n'apparaît pas dans la définition.

L'électron ne contribue à la cohérence en énergie que dans le quadrant $(\omega \geq 0, \omega' \geq 0)$: il s'agit du quadrant associé aux *excitations de type électron*. Le trou ne contribue quant à lui que dans le quadrant $(\omega \leq 0, \omega' \leq 0)$, qui est le quadrant des *excitations de type trou*.

Quid des deux autres quadrants ? Une paire électron–trou comme celle envisagée ici n'y donne aucune contribution à la cohérence. Cela peut se voir comme une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, équation (2.49), page 46. Les excitations qui contribuent à l'excès de cohérence dans ces quadrants ne sont ni purement de type électron, ni purement de type trou, mais sont une superposition cohérente d'électrons et de trous. Le quadrant est donc attribué à la cohérence électron–trou. Le prototype d'excitation contribuant à cette cohérence serait

$$|\Phi_{\mathrm{coh}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\mathbb{1} + \psi[\phi_{\mathrm{h}}]\, \psi^{\dagger}[\phi_{\mathrm{e}}] \Big) \, |F\rangle \,. \tag{2.85}$$

Cette décomposition du plan des fréquences est résumée sur la figure 2.8. Elle permet de classifier les excitations d'un fluide électronique : connaissant l'excès de cohérence en énergie porté par un état électronique, on peut en déduire la nature des excitations le véhiculant.

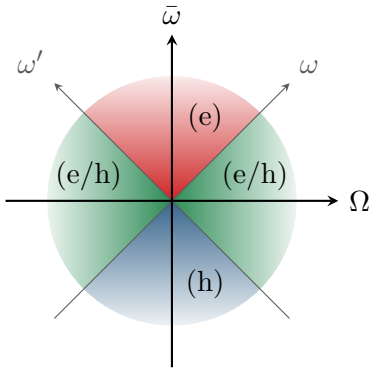


Fig. 2.8 – Décomposition des contributions à la cohérence dans le plan des fréquences. Le plan des fréquences est découpé en quatre quadrants : un quadrant (e) où contribuent les excitations de type électron, un quadrant (h) où contribuent les excitations de type trou et deux quadrants (e/h) qui mettent en jeu les cohérences électron-trou.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz obtenue équation (2.49), page 46, apporte ici une information intéressante sur l'existence de cohérences. Dans la représentation énergétique, elle s'écrit

$$\left| \widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}(\omega|\omega') \right|^2 \leq \widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}(\omega|\omega)\, \widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}(\omega'|\omega') \tag{2.86}$$

À température nulle la mer de Fermi ne contribue que dans le quadrant des trous : toute contribution dans le quadrant (e) ne peut donc venir que de la cohérence en excès. Par conséquent, si l'excès de cohérence électronique ne présente pas de contribution dans le quadrant (e), il ne peut pas en présenter dans le quadrant (e/h). Un raisonnement du même type appliqué à la cohérence des trous permet d'établir la même contrainte sur le quadrant (h). En d'autres termes, des cohérences électron–trou s'accompagnent forcément d'une contribution de l'excès de cohérence de type électron et de type trou.

Cohérence en énergie d'un état stationnaire

Représenter l'excès de cohérence dans le domaine des énergies est également particulièrement adapté pour décrire la cohérence des états stationnaires. Par définition, la cohérence électronique associée à de tels états est invariante sous une translation simultanée des deux temps t et t' par une même quantité. Par conséquent, elle ne dépend pas de la variable $\bar{t}$, mais seulement de la

variable τ. On en déduit directement que sa représentation en énergie ne dépend que de $\bar{\omega}$ et est singulière en Ω. Ainsi, elle s'écrit

$$\widetilde{\mathcal{G}}^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{stat}}(\bar{\omega},\Omega) = \frac{2\pi}{v_F} f(\bar{\omega})\,\delta(\Omega)\,, \tag{2.87}$$

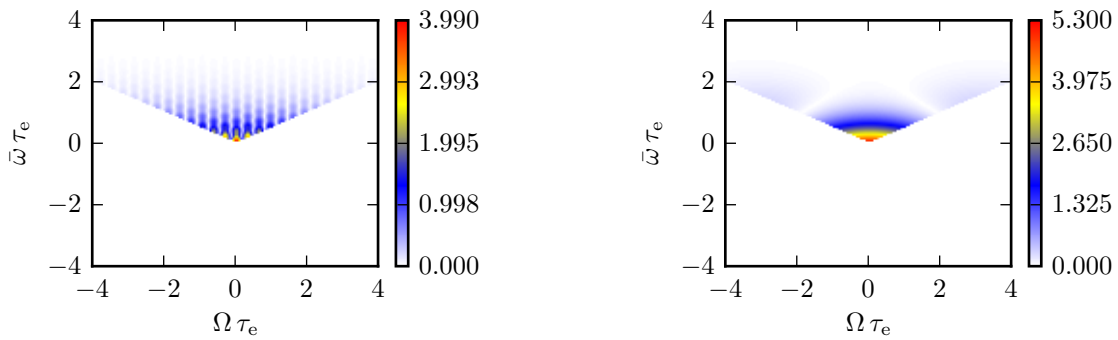
où $f(\bar{\omega})$ est le nombre d'occupation électronique à l'énergie $\hbar\bar{\omega}$ dans l'état stationnaire. Nous avons déjà établi et utilisé cette propriété à deux reprises, d'abord pour modéliser la fonction de réponse d'un détecteur stationnaire au paragraphe 2.2.3, page 42, puis pour calculer la fonction de cohérence de la mer de Fermi au paragraphe 2.3.1, page 47.

Exemples

À titre illustratif, considérons les mêmes paires qu'à la section 2.3.4. La transformée de Fourier des paquets d'ondes mis en jeu vaut

$$\widetilde{\phi}_\varepsilon(\omega) = -\mathrm{i}\sqrt{2\,v_F\,\tau_e}\,\Theta(\varepsilon\omega)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\omega\tau_\mathrm{e}}\ . \tag{2.88}$$

où $\varepsilon = 1$ pour le paquet d'ondes leviton électronique défini équation (2.68), page 51, et $\varepsilon = -1$ pour le paquet d'ondes de type trou associé défini équation (2.77), page 55. Si le centre du paquet est translaté dans le domaine temporel d'une quantité Δt, il est modulé dans le domaine des fréquences par un facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,\Delta t}$. La fonction de cohérence dans le domaine des énergies est représentée figures 2.9 et 2.10.



(a) $\Delta t/\tau_\mathrm{e} = 20$.

(b) $\Delta t/\tau_\mathrm{e} = 2$.

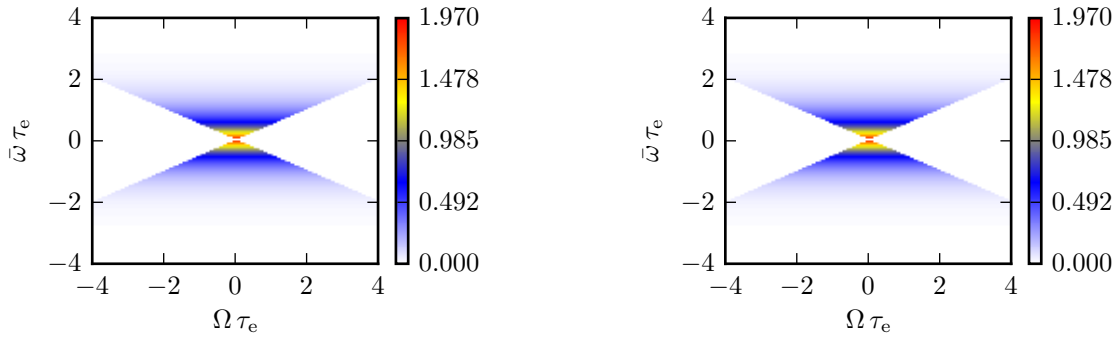
Fig. 2.9 – Excès de cohérence dans le domaine des énergies d'une paire d'électrons. On représente $\left|\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(\bar{\omega},\Omega)\right|$ pour une paire de levitons $n = 1$ décalés d'une quantité Δt. Des franges d'interférence de période $1/\Delta t$ sont visibles, elles sont dues au recouvrement.

Ainsi, représenter la cohérence dans le domaine des énergies est bien adapté pour accéder à la nature des excitations. En revanche, l'accès à la dynamique de passage des excitations est malaisé, puisque l'information sur celle-ci est masquée dans la dépendance en Ω de la phase de la fonction de cohérence.

2.4.3 Représentation de Wigner

Intérêt et définition

Compte tenu des discussions précédentes, représenter la fonction de cohérence en combinant les avantages de la représentation en temps (accès à la dynamique du système) et ceux de la représentation en énergie (accès à la nature des excitations) serait particulièrement intéressant. Pour ce faire, il convient de privilégier les variables $\bar{t}$ et $\bar{\omega}$ dans la représentation. On introduit



(a) $\Delta t/\tau_e = 20$.

(b) $\Delta t/\tau_e = 2$.

Fig. 2.10 – Excès de cohérence dans le domaine des énergies d'une paire électron-trou. On représente $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\bar{\omega},\Omega)\right|$ pour une paire électron-trou dans des fonctions d'onde leviton $n = 1$ et $n = -1$ séparée d'une quantité Δt. Comme le décalage dans le domaine temporel se traduit seulement par une modulation dans le domaine des énergies et que les deux paquets sont sans recouvrement quel que soit le décalage Δt, empêchant tout effet d'interférence, les deux figures sont identiques.

donc une nouvelle représentation de la fonction de cohérence sous la forme

$$\mathcal{W}^{(e)}(\bar{t},\bar{\omega}) = v_F \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, \mathcal{G}^{(e)}(\bar{t},\tau)\, e^{\mathrm{i}\bar{\omega}\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi\, v_F}\, \widetilde{\mathcal{G}}^{(e)}(\bar{\omega},\Omega)\, e^{-\mathrm{i}\Omega\bar{t}}\,. \tag{2.89}$$

Cette représentation définit la fonction de Wigner électronique [51], qui est une fonction sans dimension qui caractérise l'état quantique du fluide électronique. Grâce à l'hermiticité de la fonction de cohérence, équation (2.45), page 45, la fonction de Wigner a la propriété remarquable d'être à valeurs réelles.

La dénomination vient de l'analogie formelle avec la fonction de Wigner de la mécanique quantique « historique ». Eugene Wigner a introduit en 1932 [179] la fonction qui porte aujourd'hui son nom afin de relier la mécanique quantique à la mécanique analytique. En mécanique classique, une particule possède une position et une impulsion bien définies, décrites statistiquement par une distribution de probabilité sur l'espace des phases. Néanmoins, cette image n'est plus valable en mécanique quantique, où le principe d'Heisenberg empêche une particule d'être parfaitement localisée. La fonction de Wigner étend alors la notion de distribution de probabilité classique à un cadre quantique. Il s'agit d'une fonction de distribution sur l'espace des phases, à valeurs réelles, dont l'intégration sur les positions (respectivement les impulsions) donne accès à la distribution de probabilité des impulsions (respectivement des positions). La fonction de Wigner est ainsi normalisée. Néanmoins, contrairement à une distribution de probabilité classique, elle peut prendre des valeurs négatives. Formellement, la fonction de Wigner d'une particule quantique dans un état stationnaire décrit par une fonction d'onde $\psi(x)$ est définie par Wigner lui-même comme

$$W(x,p) = \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}X\, \psi\left(x+\frac{X}{2}\right)\, \psi^*\left(x-\frac{X}{2}\right)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi pX/\hbar}\,. \tag{2.90}$$

La décomposition en contribution de la mer de Fermi et contribution d'excès est bien sûr toujours valable concernant la fonction de Wigner. L'analogie entre la fonction de Wigner en position et impulsion et la fonction de Wigner électronique est particulièrement visible sur l'exemple de l'excès de cohérence d'un paquet d'onde électronique cohérent ϕ, présenté paragraphe 2.3.3,

page 49. Dans ce cas $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \phi(t)\,\phi^*(t')$, ce qui donne la fonction de Wigner en excès sous la forme

$$\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(\bar{t},\bar{\omega}) = v_F \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, \phi\left(\bar{t}+\frac{\tau}{2}\right)\phi^*\left(\bar{t}-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}\tau}\ . \tag{2.91}$$

Il n'existe à l'heure actuelle aucun protocole permettant d'accéder à la mesure de la valeur en un point $(\bar{t},\bar{\omega})$ de la fonction de Wigner dans un conducteur cohérent. De telles mesures directes ont été réalisées dans le cadre d'expériences d'électrodynamique quantique en cavité [18, 112], mais elles s'appuient sur la mesure de la parité du nombre de photons présents dans la cavité, qui est une quantité sur l'espace des états à *une* particule (13) dont l'équivalent n'est à notre connaissance pas accessible en optique quantique électronique. Un protocole de reconstruction d'une fonction de Wigner électronique inconnue par comparaison avec un jeu de fonctions de Wigner connues sera présenté au chapitre 4 sur l'interférométrie. Ce protocole repose sur des interférences à deux électrons sur un contact ponctuel quantique, et constitue une variante du protocole de tomographie précédemment mentionné. Il en a donc les mêmes avantages et inconvénients.

Notons que la notion de fonction de Wigner a connu un écho dans le domaine du traitement du signal, puisqu'elle donne accès à une représentation temps-fréquence d'un signal quelconque. On parle dans ce cadre de transformation de Wigner-Ville en hommage à Jean Ville, qui a été le premier à comprendre l'intérêt d'une telle transformation au delà du lien entre mécanique statistique et mécanique quantique [175].

Distributions marginales

Intégrer la fonction de Wigner électronique sur l'une des deux variables $\bar{t}$ ou $\bar{\omega}$ permet d'accéder à des informations physiquement pertinentes sur le comportement du système vis-à-vis de l'autre variable.

L'intégration sur les énergies $\bar{\omega}$ de la fonction de Wigner en excès donne un accès direct à l'excès de courant moyen (au sens d'une moyenne quantique) résolu en temps issu de la source, ce courant étant exprimé en unité de charge électrique,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}}{2\pi}\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(\bar{t},\bar{\omega}) = \frac{1}{-e}\,i(\bar{t})\,. \tag{2.92}$$

Réciproquement, la moyenne de la fonction de Wigner totale sur le temps $\bar{t}$ donne accès au nombre moyen d'occupation électronique à l'énergie $\hbar\bar{\omega}$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\mathrm{d}\bar{t}\,\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(\bar{t},\bar{\omega}) = f(\bar{\omega})\,. \tag{2.93}$$

Interprétation probabiliste

Compte tenu des remarques précédentes, une question naturelle à ce stade est celle de l'interprétation physique de la fonction de Wigner : s'agit-il d'un nombre d'occupation électronique dépendant du temps ? Cela donnerait une interprétation probabiliste classique à la fonction de Wigner électronique. Pour que ce soit le cas, il faudrait qu'à tout instant et pour toute énergie la fonction de Wigner soit positive

$$\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(\bar{t},\bar{\omega}) \geq 0\,. \tag{2.94}$$

En outre, il est également possible de définir une fonction de Wigner de type trou, à partir de la fonction de cohérence de type trou définie au paragraphe 2.2.4, page 44. Si l'interprétation classique existe, elle doit être valide également pour les trous, et la même inégalité doit donc

(13). Il ne s'agit donc pas de compter directement le nombre total de photons et de vérifier si c'est un multiple de 2 !

s'appliquer à la fonction de Wigner de type trou. Néanmoins, l'équation (2.42), page 45, indique que les cohérences des deux types sont reliées, ce qui se traduit en termes de fonction de Wigner par

$$\mathcal{W}^{(\mathrm{h})}(\bar{t},\bar{\omega}) = 1 - \mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(\bar{t},-\bar{\omega})\,. \tag{2.95}$$

Par conséquent, pour pouvoir être interprétée classiquement en termes de nombre d'occupation électronique dépendant du temps, la fonction de Wigner doit vérifier une double inégalité,

$$0 \leq \mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(\bar{t},\bar{\omega}) \leq 1\,. \tag{2.96}$$

Les exemples que nous développerons aux paragraphes suivant montrent que ce n'est génériquement pas le cas. Nous interpréterons alors les violations de ces inégalités comme une signature du caractère fondamentalement quantique de l'état électronique considéré.

Plutôt que d'illustrer les propriétés de la fonction de Wigner sur les mêmes exemples taillés sur mesure que précédemment, nous allons profiter d'avoir en main les trois représentations de la cohérence à un électron pour les appliquer aux états électroniques que peuvent produire les sources électroniques implémentées expérimentalement.

Les exemples présentés dans les deux paragraphes qui suivent ont été étudiés, notamment numériquement, par A. Feller et A. Ghibaudo lors de leur stage de master 1 [50, 69] juste avant le début de ma thèse. J'ai ensuite contribué à l'interprétation fine des résultats qu'ils avaient obtenus.

2.5 Cohérence émise par un condensateur mésoscopique

2.5.1 Rappel des principes de fonctionnement d'un condensateur mésoscopique

Le condensateur mésoscopique mis en œuvre au laboratoire Pierre Aigrain a été présenté au paragraphe 1.3.2, page 14. Pour mémoire, il s'agit d'une boîte quantique couplée à un canal de bord par effet tunnel dont les niveaux d'énergie varient au cours du temps sous l'effet d'une tension d'excitation.

Lorsque la tension d'excitation est une tension créneau d'amplitude et de fréquence bien choisies, le condensateur mésoscopique émet un électron dans la première demi-période suivi d'un trou dans la seconde demi-période. Le temps de fuite de cet électron de la boîte quantique vers le canal de bord vaut

$$\tau_{\mathrm{e}} = \frac{h}{\Delta}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{2}\right) , \tag{2.97}$$

où D est le coefficient de transmission du QPC délimitant la boîte et Δ l'écart entre ses niveaux d'énergie. Ce temps de fuite définit la largeur temporelle du paquet d'ondes associé. Son énergie $\hbar\omega_{\mathrm{e}}$, appelée énergie d'injection, est quant à elle reliée à l'amplitude de la tension d'excitation. Enfin, la largeur énergétique du paquet émis vaut $\hbar/\tau_{\mathrm{e}}$.

2.5.2 Description en termes de paquet d'ondes

Une description en termes de paquet d'onde de l'état émis par le condensateur mésoscopique utilisé dans le régime de source à électrons permet une première interprétation simple. Cette description est valable dans la limite où la période de la tension d'excitation est bien plus grande que le temps de fuite τ_{e} d'un électron de la boîte.

Pour prévoir la forme analytique du paquet d'onde, un modèle approché consiste à considérer que celui-ci est issu de la désexcitation d'un état parfaitement résolu en énergie à l'énergie d'injection $\hbar\omega_{\mathrm{e}}$ vers un semi-continuum d'états, restreint aux énergies positives par la présence de la mer de Fermi. L'énergie d'injection correspond à celle du niveau de la boîte quantique franchissant le niveau de Fermi au cours du cycle d'excitation, discuté au paragraphe 1.3.2, page 16. Le taux de relaxation γ_{e} n'est autre que l'inverse du temps de fuite, $\gamma_{\mathrm{e}} = 1/\tau_{\mathrm{e}}$. Les composantes de Fourier du paquet d'ondes sont alors données par [43]

$$\widetilde{\phi}(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma_{\mathrm{e}}\, v_F}{\mathcal{N}}}\, \frac{1}{(\omega - \omega_{\mathrm{e}}) + \mathrm{i}\gamma_{\mathrm{e}}/2}\, \Theta(\omega) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{N} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2\omega_{\mathrm{e}}}{\gamma_{\mathrm{e}}}\right) . \tag{2.98}$$

Il s'agit d'une lorentzienne normalisée, de largeur γ_{e} et centrée en ω_{e}. Elle est tronquée aux énergies positives, ce qui traduit la présence de la mer de Fermi du canal de bord.

Une transformée de Fourier (14) donne accès à l'expression du paquet d'onde en temps,

$$\phi(t) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\gamma_{\mathrm{e}}}{\mathcal{N}\, v_F}}\; \mathrm{e}^{-2\gamma_{\mathrm{e}}t + \mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}t}\left[\Theta(t) - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{Ei}\left(\frac{\gamma_{\mathrm{e}}}{2}t - \mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}t\right)\right] , \tag{2.99}$$

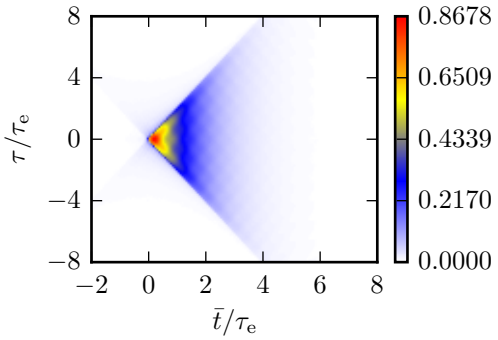
où Ei désigne la fonction exponentielle intégrale, définie [75] comme

$$\mathrm{Ei}(z) = -\int_{-z}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} . \tag{2.100}$$

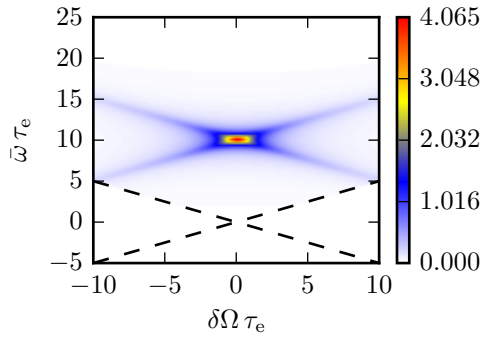
Dans la limite où l'électron est injecté à haute énergie ($\omega_{\mathrm{e}} \gg \gamma_{\mathrm{e}}$), la troncature imposée par la fonction de Heaviside dans l'équation (2.98) peut être négligée. Transcrit dans le domaine des temps, c'est le terme en exponentielle intégrale qui devient négligeable.

(14). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.

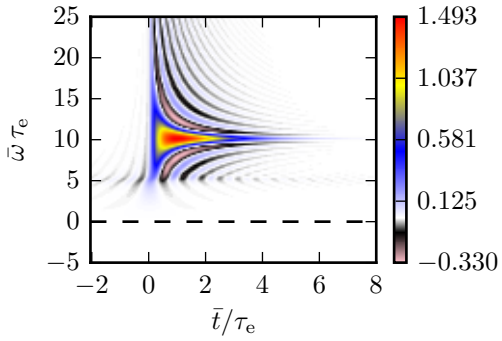
Une fois connue l'expression des paquets d'ondes, il est aisé d'en déduire l'expression des excès de cohérence dans ce cadre. Une transformation de Fourier supplémentaire permet d'aboutir à la fonction de Wigner en excès. L'excès de cohérence émis par le condensateur mésoscopique en régime de source d'électron est représenté figure 2.11 dans les trois représentations, en temps, en énergie et de Wigner. La cohérence en énergie a été calculée analytiquement grâce à l'équation (2.98) alors que les transformées de Fourier donnant accès aux représentations en temps et de Wigner ont été calculées numériquement. Des négativités et des valeurs supérieures à 1 sont présentes dans la fonction de Wigner, signature du caractère non-classique de l'état émis. Remarquons que l'excitation émise est clairement séparée de la mer de Fermi en énergie. Ainsi, elle évoque une quasi-particule de Landau à énergie parfaitement définie.



(a) $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\bar{t},\tau)\right|$



(b) $\left|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\bar{\omega},\delta\Omega)\right|$

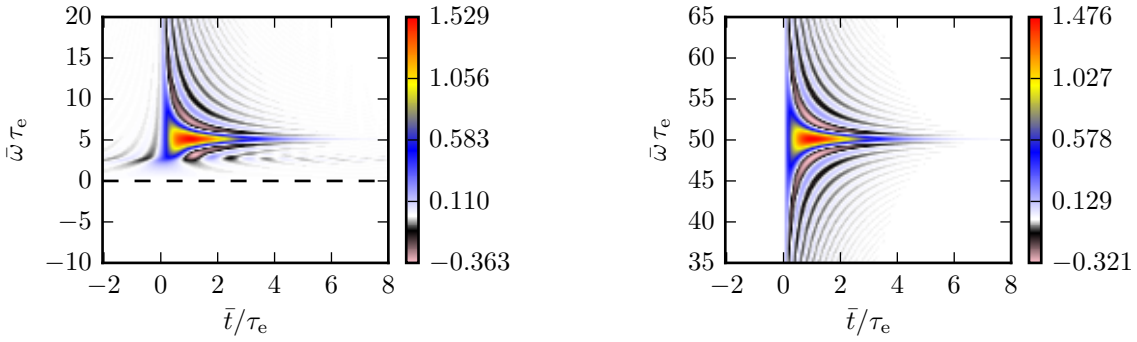


(c) $\Delta\mathcal{W}^{(e)}(\bar{t},\bar{\omega})$

Fig. 2.11 – Excès de cohérence à un électron émis par un condensateur mésoscopique. La cohérence en énergie a été calculée analytiquement grâce à l'équation (2.98), les représentations en temps et de Wigner par des transformations de Fourier numériques. L'énergie d'injection de l'électron a été prise à $\omega_e = 10\gamma_e$. Les traits pointillés noirs de la figure (b) délimitent les quadrants introduits au paragraphe 2.4.2, page 58, et ceux de la figure (c) indiquent le niveau de Fermi, pris comme référence des énergies.

L'énergie d'injection ω_e a une influence considérable sur l'allure de la fonction de Wigner émise par le condensateur mésoscopique, comme représenté figure 2.12. Compte tenu de la troncature dans l'espace de Fourier, la fonction de Wigner est presque nulle pour $\bar{\omega} \leq \omega_e/2$. Cela comprend à l'aide de la figure 2.11b : pour $\bar{\omega} < \omega_e/2$, les bras de la croix lorentzienne disparaissent. Si $\omega_e \gg \gamma_e$, la restriction aux énergies positives peut être négligée et la fonction de Wigner s'écrit analytiquement sous une forme analogue à celle d'un paquet lorentzien, qui sera calculée au paragraphe suivant, équation (2.113), page 71, en permutant le rôle joué par l'énergie et le

temps. Elle est alors symétrique par rapport à l'énergie d'injection ω_e et nulle pour $\bar{t} < 0$. Ce n'est plus le cas aux faibles énergies d'injection, figure 2.12a.



(a) $\omega_e\,\tau_e = 5$.

(b) $\omega_e\,\tau_e = 50$

Fig. 2.12 – Fonction de Wigner en excès émise par un condensateur mésoscopique. Calcul par transformée de Fourier numérique pour deux énergies d'injection différente. Lorsque $\omega_e \gg 1/\tau_e$, la fonction de Wigner est symétrique par rapport la droite $\bar{\omega} = \bar{\omega}_e$ et nulle pour $\bar{t} < 0$. Ce n'est plus le cas aux faibles énergies d'injection. Les traits pointillés noirs de la figure (a) indiquent le niveau de Fermi, pris comme référence des énergies.

2.5.3 Description par la théorie de Floquet

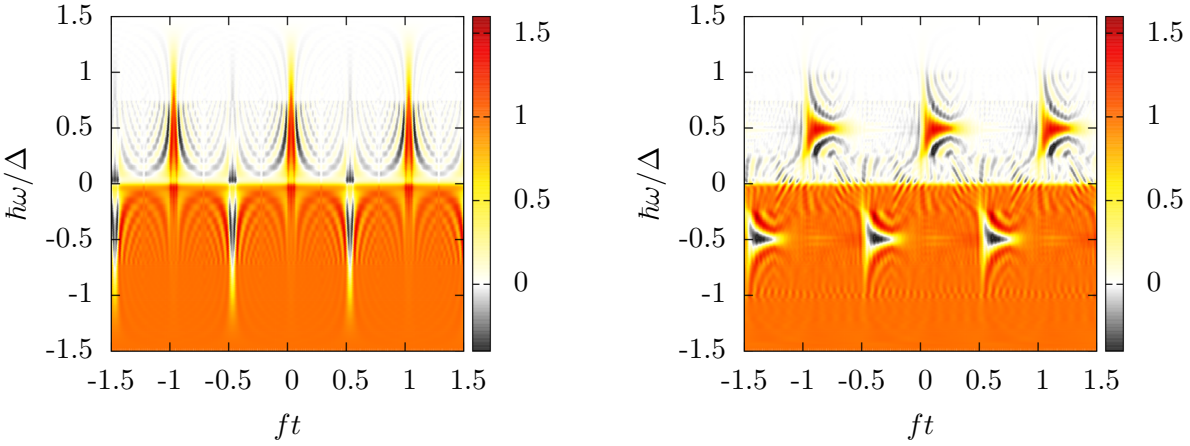
Lorsque la période de la tension d'excitation de la boîte quantique devient de l'ordre du temps de fuite τ_e d'un électron hors de la boîte, la modélisation de l'état émis en termes de paquets d'ondes bien séparés n'est plus pertinente. Décrire l'état émis exige alors d'utiliser la théorie de Floquet [57], adaptée à l'étude de systèmes quantiques forcés périodiquement. Cette théorie permet de calculer des expressions des matrices de diffusion reliant linéairement les opérateurs de champ en entrée et sortie d'un diffuseur dont les propriétés sont périodiques en temps. Elle a été appliquée par M. Moskalets et M. Büttiker aux pompes quantiques [125, 126], dont fait partie le condensateur mésoscopique. Le code écrit par C. Grenier et exploité par A. Feller et A. Ghibaudo utilise la matrice de diffusion du condensateur mésoscopique proposée par J. Gabelli [62] en le modélisant par une cavité Fabry–Pérot dans laquelle l'électron parcourt un nombre entier de tours. Ce code donne accès à la cohérence en représentation temporelle, suivi d'une transformée de Fourier pour calculer la fonction de Wigner.

L'influence de plusieurs paramètres a été étudiée, à commencer par le coefficient de transmission D du QPC. Un autre paramètre modifiable expérimentalement est la position relative des niveaux de la boîte quantique par rapport à l'énergie de Fermi, quantifiée par le paramètre $\hbar\omega_0$, qui est nul lorsque les niveaux sont symétriques par rapport à l'énergie de Fermi et qui vaut $\Delta/2$ lorsqu'un niveau de la boîte correspond au niveau de Fermi du canal de bord. Des valeurs expérimentalement réalistes ont été choisies pour les autres paramètres. La tension de commande est une tension créneau de moyenne nulle, de fréquence telle que $hf/\Delta = 0.06$, et d'amplitude crête à crête V_{cc} telle que $eV_{cc} = \Delta$. La température est prise telle que $k_B T/\Delta = 0.01$.

Lorsque la boîte quantique est complètement ouverte ($D = 1$), l'image donnée en termes de niveaux d'énergie discrets n'est pas valide. Tout se passe comme si les électrons du canal de bord ne percevaient la tension d'excitation que pendant une durée très courte τ_0 correspondant au temps de passage sous la grille. L'émission est alors concentrée aux instants où la tension d'excitation saute, alors qu'entre temps la grille n'affecte pas la cohérence du canal. Cela se comprend qualitativement en remarquant que l'émission d'une excitation se traduit par le fait qu'un électron entrant dans la boîte quantique en ressort avec une énergie différente. Lorsque la

tension appliquée à la grille ne varie pas, l'électron gagne l'énergie potentielle associée en entrant dans la boîte mais perd exactement la même en en sortant. Aucune excitation n'est donc émise. En revanche, lorsque la tension a varié pendant que l'électron était dans la boîte, le gain et la perte d'énergie en entrée et sortie ne se compensent plus. Enfin, les excitations étant résolues en temps, elles le sont moins en énergie, et l'émission se fait au voisinage de la mer de Fermi. Ces aspects sont visibles sur la figure 2.13a.

Plus le QPC servant à isoler la boîte est fermé, meilleure est la résolution en énergie des niveaux dans la boîte, et plus long est le temps de fuite d'un électron hors de la boîte. On s'attend donc à ce que la fonction de Wigner se resserre en énergie autour de l'énergie d'injection mais s'étende d'autant en temps. Cette image se retrouve figure 2.13b où la transmission D a été fixée à 0.4, ce qui correspond à peu près au point de fonctionnement optimal de la source à électrons uniques. Le régime où elle émet à chaque période un électron suivi d'un trou une demi-période plus tard est bien atteint. Les franges au voisinage de la mer de Fermi sont liées à l'émission d'une superposition cohérente d'excitations électron–trou [78], dues au fait que la période de la tension d'excitation est trop courte pour que l'électron et le trou aient le temps de s'échapper complètement à chaque cycle. Dans la représentation énergétique, ces excitations contribuent dans les quadrants (e/h) définis paragraphe 2.4.2, page 58.



(a) $D = 1$ (b) $D = 0.4$

Fig. 2.13 – Fonction de Wigner émise par un condensateur mésoscopique. La fonction de Wigner $\mathcal{W}^{(e)}(t, \omega)$ est calculée numériquement par un code reposant sur la théorie de Floquet. La tension d'excitation est un créneau de fréquence f telle que $hf/\Delta = 0.06$. Deux valeurs de la transmission du QPC sont envisagées.

2.6 Cohérence émise par un contact ohmique commandé en tension, source leviton

2.6.1 Effet d'un contact ohmique sur la cohérence électronique

Outre un condensateur mésoscopique, nous avons indiqué au chapitre introductif qu'il est possible d'utiliser un contact ohmique commandé en tension pour produire de façon contrôlée des excitations dans un canal de bord. Les principes physiques gouvernant son comportement ont été présentés au paragraphe 1.3.3, page 17. Rappelons qu'un contact ohmique est un élément métallique plongé dans le gaz bidimensionnel. Les états quantiques des électrons du contact et de ceux du canal sont identiques en raison du fort couplage entre les deux, tant par effet capacitif que par effet tunnel. Lorsqu'il est relié à un générateur lui imposant une tension de commande V, un contact ohmique agit comme une source d'excitations dans le canal de bord.

En termes de cohérence, le couplage entre le contact ohmique et le canal de bord a pour effet de modifier la cohérence du canal sous forme d'un terme de phase. L'effet physique mis en jeu est un effet Aharonov–Bohm de type électrique. Soumis au potentiel électrique $V(t)$ du contact ohmique, l'électron acquiert une phase qui lui est proportionnelle. Lorsque l'état incident est une mer de Fermi, alors l'état en sortie du contact ohmique s'écrit sous la forme

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \exp\left[\mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\int_{t'}^{t} \mathrm{d}t_1\, V(t_1)\right] \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t-t')\,. \tag{2.101}$$

Ce résultat a été exploité par C. Grenier [76] dans le cadre de la théorie de Floquet et donc pour un contact commandé par une tension périodique. Notons que si la tension de commande $V(t)$ possède une composante continue V_0, celle-ci se traduit par un terme de phase variant en $t-t'$ qui peut être incorporée dans une redéfinition du potentiel électrochimique de la mer de Fermi $\mu' = \mu - eV_0$. Dans la suite, on suppose le potentiel électrochimique ainsi redéfini et la tension de commande $V(t)$ de moyenne nulle.

2.6.2 Contact ohmique commandé par une tension harmonique

Commençons par décrire le cas d'une tension de commande harmonique, qui est à la fois intéressant en lui-même, mais également car la linéarité (supposée) du comportement du contact ohmique fait de la tension harmonique l'élément de base permettant de décrire et construire n'importe quelle tension de commande. En outre, l'état émis par un contact ohmique commandé par une tension harmonique sert d'état de référence dans le protocole de tomographie quantique, introduit par C. Grenier *et al.* [78], qui sera discuté au paragraphe 4.3.4, page 145.

Calcul de la fonction de Wigner

Dans le cas où le potentiel appliqué au contact ohmique est périodique de fréquence ν, la fonction de Wigner peut se calculer dans le cadre de la théorie du transport photo-assisté. Cette théorie a été introduite par P. Tien et J. Gordon en 1963 [170] puis appliquée aux systèmes mésoscopiques au tournant des années 2000 par M. Büttiker [139, 148]. Les quantités importantes sont les amplitudes de transition photoassistée p_n, qui quantifient l'amplitude de transition d'un électron entre un état d'énergie ε et un autre état d'énergie $\varepsilon + nh\nu$ où n est un entier relatif.

La fonction de Wigner (15) s'écrit alors sous la forme

$$\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(t,\omega) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} p_n\, p_m^*\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(n-m)\nu t}\; f_F(\omega - \pi(n+m)\nu) \tag{2.102}$$

(15). Il s'agit ici de la fonction de Wigner totale, et pas seulement de la contribution d'excès

où f_F est une fonction de distribution de Fermi, sous-entendue au potentiel chimique décalé μ'. Remarquons que l'intégrale par rapport au temps donne le nombre d'occupation électronique moyen sous la forme

$$f(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |p_n|^2 \, f_F(\omega - 2\pi n\nu)\,, \tag{2.103}$$

ce qui indique bien le sens physique de $|p_n|^2$ comme la probabilité d'un processus d'émission ou d'absorption à n photons. Dans le cas d'une tension de commande harmonique $V(t) = V_1 \cos(2\pi\nu t)$, la fonction de Wigner s'écrit en termes des fonctions de Bessel de première espèce J_n [75],

$$\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(t,\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n\left(\frac{2eV_1}{h\nu}\cos(2\pi\nu t)\right) f_F(\omega + \pi n\nu)\,. \tag{2.104}$$

Deux régimes apparaissent alors naturellement, caractérisés par le rapport $\eta = eV_1/h\nu$. La limite $\eta \gg 1$ correspond à une limite semi-classique, où les effets physiques sont dominés par des processus multi-photoniques. Au contraire, le régime $\eta \ll 1$ est de nature quantique où la physique est pilotée par les phénomènes à un photon. Notons qu'une troisième échelle d'énergie entre en jeu, d'origine thermique $k_\mathrm{B}T$, qui doit également être petite devant l'énergie $h\nu$ d'un photon pour que le régime quantique puisse être atteint.

Régime quantique

Dans le régime quantique, la condition $\eta = eV_1/h\nu \ll 1$ permet de développer la fonction de Wigner en un point donné en puissances de η.

Le terme d'ordre 0 du développement donne comme attendu la fonction de Wigner de la mer de Fermi $f_F(\omega)$, la seule fonction de Bessel non-nulle en 0 étant J_0, qui vaut 1.

Le terme du premier ordre s'écrit ensuite sous la forme

$$\left.\frac{\partial \mathcal{W}^{(\mathrm{e})}}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = [f_F(\omega - \pi\nu) - f_F(\omega + \pi\nu)]\cos(2\pi\nu t) \tag{2.105}$$

Cela traduit une modulation harmonique de la fonction de Wigner, de faible amplitude car il s'agit du terme d'ordre 1, et ayant lieu dans une gamme d'énergie $2\pi\nu$ centrée sur l'énergie de Fermi. Cette contribution est de moyenne temporelle nulle, donc sans effet sur le nombre d'occupation moyen, mais contribue au courant moyen $i(t)$. Ce dernier correspond à l'intégrale de la fonction de Wigner sur les énergies, voir équation (2.92) page 62, qui s'écrit ici au premier ordre en η

$$i(t) = \frac{e^2}{h} V(t)\,. \tag{2.106}$$

On y reconnaît le quantum de conductance e^2/h, comme attendu pour la réponse linéaire d'un canal de bord.

Le terme du second ordre traduit l'absorption d'un photon associée à la promotion d'un électron au dessus du niveau de Fermi. Il s'écrit

$$\left.\frac{\partial^2 \mathcal{W}^{(\mathrm{e})}}{\partial \eta^2}\right|_{\eta=0} = [f_F(\omega + 2\pi\nu) + f_F(\omega - 2\pi\nu) - 2\, f_F(\omega)]\cos^2(2\pi\nu t)\,. \tag{2.107}$$

Pour le comprendre, considérons la limite de température nulle. Le terme entre crochets vaut alors -1 pour $-h\nu \leq \hbar\omega \leq 0$ et 1 pour $0 \leq \hbar\omega \leq h\nu$. Remarquons que ce terme du second ordre ne modifie pas le courant moyen car son intégrale sur les énergies est nulle, mais affecte en revanche les populations des niveaux électroniques, ce qui se voit puisque son intégrale par rapport au temps est cette fois non-nulle.

Régime semi-classique

Le régime classique correspond à une tension de commande de grande amplitude eV_1, ou inversement de basse fréquence $h\nu$. Par conséquent, décrire le comportement de la fonction de Wigner à temps $\bar{t}$ fixé et sur l'échelle d'énergie eV_1 ne demande que de décrire le comportement de la fonction de cohérence $\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t,\tau)$ dans le domaine temporel sur des échelles de temps τ^* courtes, telles que $\tau^*\nu \ll 1$. Une approximation adiabatique pour laquelle la tension de commande $V(t)$ est constante à l'échelle de temps τ^* est donc une première approche pertinente pour décrire la fonction de Wigner. Cela se traduit formellement en écrivant la fonction de Wigner sous la forme d'une distribution de Fermi dont le potentiel chimique dépend du temps,

$$\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{ad}}(t,\omega) \simeq f_F\left(\omega + \frac{eV(t)}{\hbar}\right) . \tag{2.108}$$

Dans le cas où $V(t)$ est harmonique, cela donne naissance à des vagues sur la mer de Fermi, qui sont le motif principal visible figure 2.14.

Néanmoins, des corrections quantiques à cette approximation adiabatique sont à prendre en compte. Un développement limité autour du potentiel chimique dépendant du temps permet de montrer que l'échelle d'énergie $\delta\omega(t)$ sur laquelle les corrections quantiques se manifestent à un instant t donné est reliée à la dérivée seconde de la tension de commande par

$$\delta\omega(t) = \frac{\nu}{2}\left(\frac{2\pi e\,|V''(t)|}{h\nu^3}\right)^{1/3} . \tag{2.109}$$

Dans le cas de grande amplitude, les corrections quantiques s'étendent en énergie sur un domaine dont l'extension dépend du temps, et peut être sensiblement plus grande que $h\nu$. Aux instants auxquels $|V''(t)| \simeq \nu^2\, V_1$, cette extension devient de l'ordre de $eV_1/h\nu$. Dans ce cas, les corrections quantiques agissent sur la même échelle d'énergie que les vagues de la mer de Fermi et ne se limitent pas à des corrections sur la crête des vagues. Dans le cas d'une tension de commande harmonique, c'est ce que l'on obtient à chaque demi-période, pour $\nu t = q/2, q \in \mathbb{Z}$.

Notons enfin que la température a pour effet de lisser la fonction de Wigner sur une échelle d'énergie $k_{\mathrm{B}}T$, ce qui tend à faire disparaître les corrections quantiques de faible amplitude et rapidement oscillantes.

La fonction de Wigner que nous venons de discuter est présentée en régime classique figure 2.14 dans les limites basse et haute température. Dans la limite basse température, les corrections quantiques sont importantes et l'état obtenu est clairement non-classique au sens du critère (2.96). En revanche, quand la température augmente, l'état tend à devenir classique.

2.6.3 Source leviton

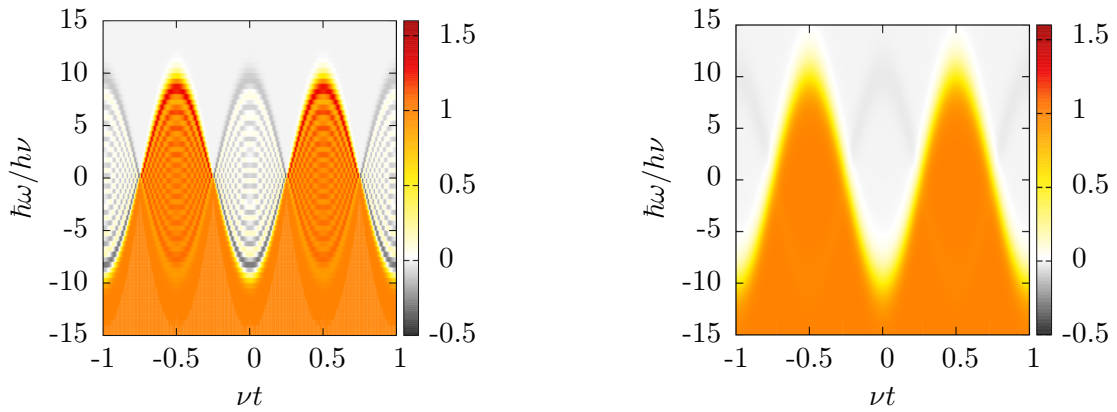
Contact ohmique commandé par une tension lorentzienne

Lorsqu'il est commandé par une tension harmonique, un contact ohmique émet une multitude de paires électron-trou cohérentes. L. Levitov, D. Ivanov, H. Lee et G. Lesovik [96, 108] ont montré qu'il pouvait également agir comme source d'excitations contenant seulement un ou quelques électrons, à condition que la tension de commande soit lorentzienne,

$$V(t) = \frac{V_0}{1+\left(\frac{t-t_0}{\tau_{\mathrm{e}}}\right)^2} , \tag{2.110}$$

et qu'elle vérifie la condition de quantification

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, e\, V(t) = n\, h\,, \quad n \in \mathbb{N}^*, \qquad \text{soit} \qquad V_0 = n\frac{h\tau_{\mathrm{e}}}{\pi}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.111}$$



(a) $k_{\mathrm{B}}T = 0$ (b) $k_{\mathrm{B}}T = 0.25eV_1$

Fig. 2.14 – Fonction de Wigner émise par un contact ohmique commandé par une tension harmonique. La tension de commande du contact ohmique est de fréquence ν d'amplitude $eV_1 = 10h\nu$. Les corrections quantiques sont visibles à température nulle, figure (a), mais sont noyées par les effets thermiques dès que la température devient comparable à l'amplitude de la tension de commande, figure (b). Une discrétisation des énergies apparaît en raison de la périodicité. L'échelle de couleur est commune aux deux figures.

Dans ce cas, l'état émis dans le canal est un état contenant strictement n électrons, de largeur typique τ_{e} et émis en $t = t_0$. Cet état a été dénommé quasi-particule de Levitov ou leviton. Il s'agit d'un état bien résolu en temps, mais dont le spectre en énergie n'est pas séparé du niveau de Fermi. Comme mentionné au paragraphe 1.3.3, page 19, une telle source a été mise en œuvre ces dernières années au sein du groupe de C. Glattli, au CEA Saclay [46].

Il est intéressant de noter que les excitations portant plus d'un électron peuvent se décrire de façon simple sous la forme d'un paquet d'ondes cohérent contenant n électrons [77]. Plus précisément, il s'agit d'un déterminant de Slater construit à partir de n fonctions d'onde monoélectroniques deux à deux orthogonales. Les composantes de Fourier de ces fonctions d'onde s'écrivent

$$\widetilde{\phi}_k(\omega) = \sqrt{2\,\tau_{\mathrm{e}}\,v_F}\,\Theta(\omega)\;\mathrm{e}^{-\omega\tau_{\mathrm{e}}}\;L_{k-1}(2\omega\tau_{\mathrm{e}}) \tag{2.112}$$

où L_k est le polynôme de Laguerre d'ordre k [75].

L'excès de cohérence à un électron porté par un leviton unique est représenté dans le domaine des temps figure 2.3, page 52. La figure 2.10, page 61, représente l'excès de cohérence en énergie porté par une paire électron–trou, dont la partie à énergie positive, $\bar{\omega} > 0$, est directement celle due au leviton unique envisagé ici.

Fonction de Wigner

La fonction de Wigner associée peut se calculer analytiquement dans le cas où un seul leviton est émis, ou bien être évaluée numériquement par la théorie de Floquet dans le cas où l'on considère un train périodique d'excitations. Pour un unique leviton de charge $-ne$, la fonction de Wigner en excès s'écrit sous la forme

$$\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(t,\omega) = \sqrt{4\pi}\,\Theta(\omega)\;\mathrm{e}^{-2\omega\tau_{\mathrm{e}}}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{k}\left(\frac{2\omega\tau_{\mathrm{e}}}{\sqrt{\omega t}}\right)^{2\ell+1}\frac{L_{k-\ell}^{(2\ell)}(4\omega\tau_{\mathrm{e}})}{\ell!}J_{\ell+\frac{1}{2}}(2\omega t)\,, \tag{2.113}$$

utilisant les fonctions de Bessel J et les polynômes de Laguerre généralisés L [75]. La fonction de Wigner en excès obtenue analytiquement est représentée figure 2.15.

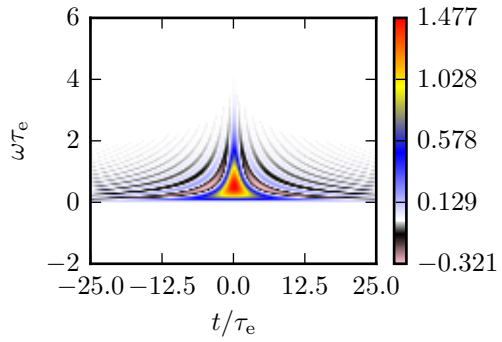


Fig. 2.15 – Fonction de Wigner en excès d'un unique leviton $n = 1$. Le leviton a pour largeur τ_e. Il s'agit d'une excitation bien localisée en temps mais mal séparée de la mer de Fermi en énergie.

Une évaluation numérique de la fonction de Wigner a été menée par A. Feller et A. Ghibaudo pour un train périodique de leviton. Cela permet de considérer le cas où la condition de quantification (2.111) n'est pas vérifiée en évaluant numériquement l'expression (2.101), page 68, à l'aide du même code Floquet précédemment mentionné. On note alors

$$\gamma = \frac{e}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, V(t)\,, \tag{2.114}$$

où $V(t)$ est toujours une tension lorentzienne. Si la condition de quantification (2.111) est vérifiée, γ est entier et est égal au nombre n d'électrons émis. Par habitude, les notations diffèrent, n n'étant utilisée que dans le cas particulier où l'état émis compte un nombre bien défini d'électrons.

La figure 2.16 présente la fonction de Wigner d'un train de levitons pour plusieurs valeurs de γ. Comme attendu, il s'agit d'excitations temporellement résolues mais dont le spectre en énergie n'est pas séparé de la mer de Fermi.

Des minima secondaires apparaissent entre les levitons constituant le train. Il s'agit de réminiscences des corrections quantiques discutées précédemment, qui interfèrent ici constructivement pour redonner une forme proche de celle d'un leviton. Comme le leviton ne peut plus être décrit par l'approximation adiabatique précédente, elles sont ici plus importantes. Une fois encore, ce sont ces corrections quantiques qui permettent à la fonction de Wigner des levitons de violer l'inégalité (2.96), signature de leur caractère non-classique.

Lorsque l'intégrale γ augmente, la fonction de Wigner s'étend vers les énergies élevées, ce qui est normal puisque l'intégrale γ est reliée à l'amplitude de la tension. L'élément le plus remarquable concerne toutefois la mer de Fermi : lorsque γ prend des valeurs entières, celle-ci n'est absolument pas modifiée par la présence des levitons, signe qu'il s'agit bien d'excitations purement électroniques. Au contraire, lorsque γ n'est pas entier des trous apparaissent dans la mer de Fermi : l'excitation ne peut plus être vue comme un ajout purement d'électrons, mais doit bien être comprise comme une excitation collective.

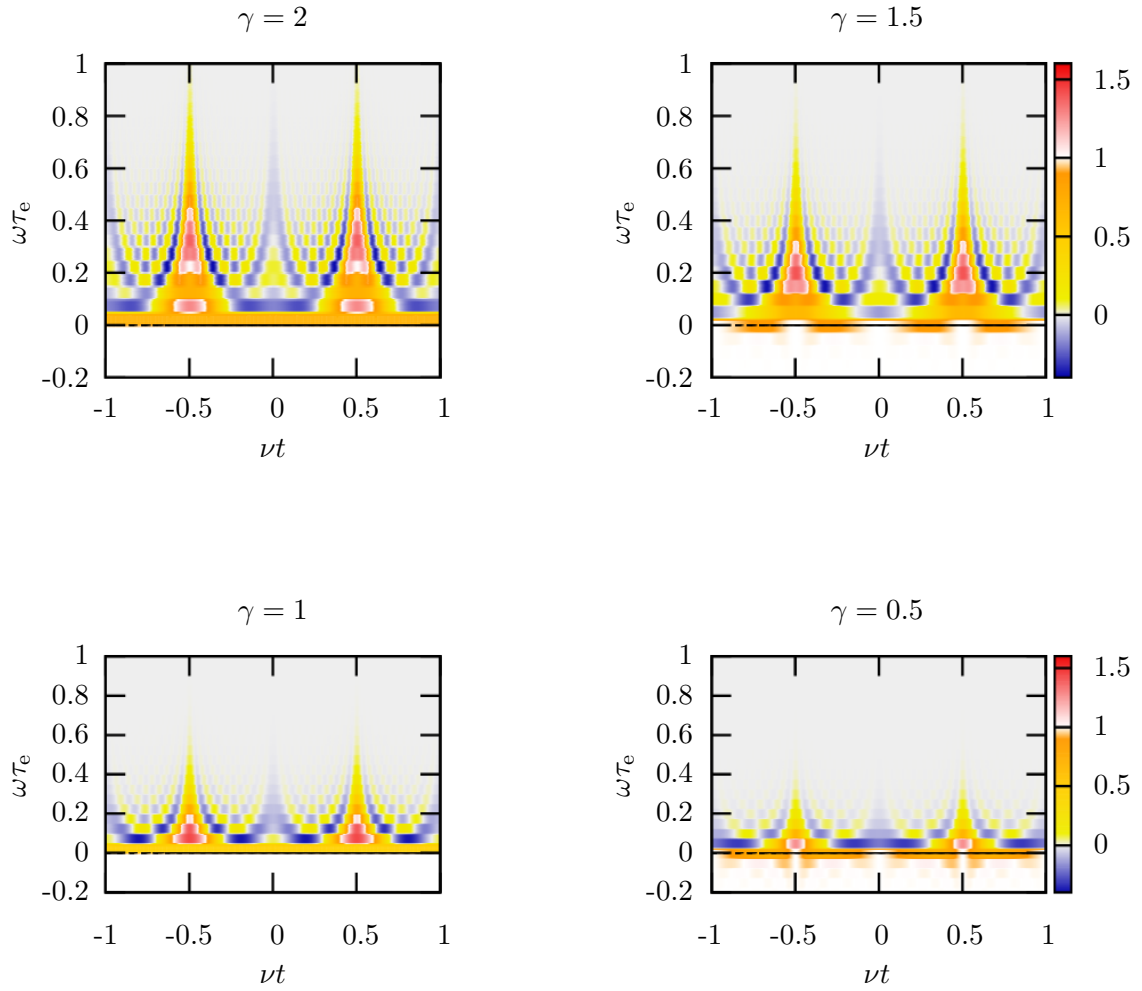


Fig. 2.16 – Fonction de Wigner d'un train de levitons. Le train a pour fréquence de répétition ν, chaque leviton ayant une largeur $\tau_e = 0.05/\nu$. Le température est prise nulle. Un décalage temporel a été ajouté de telle sorte que les levitons sont émis en $\nu t = q + 1/2, q \in \mathbb{Z}$. Plusieurs valeurs de l'intégrale γ sont envisagées pour illustrer la condition de quantification : la mer de Fermi est intacte lorsque γ est entier, mais des trous y sont créés lorsque ce n'est plus le cas. Une discrétisation des énergies apparaît en raison de la périodicité. L'échelle de couleur est commune à toutes les figures.

2.7 Conclusion

Ce premier chapitre a permis d'introduire une quantité fondamentale de l'optique quantique électronique, la fonction de cohérence à un électron. Celle-ci est définie par analogie avec la fonction de cohérence du premier ordre de Glauber qui concerne l'optique quantique photonique. Néanmoins, accéder aux propriétés de l'état émis par une source à électrons demande de retrancher à la cohérence totale la contribution de la mer de Fermi, ce qui constitue une différence fondamentale.

Pour visualiser aisément les informations contenues dans l'excès de cohérence, il est souvent utile d'en calculer des transformées de Fourier par rapport à certaines variables. Cela définit des représentations en temps et en énergie, ainsi qu'une représentation en fonction de Wigner. Elle est sans doute la plus intéressante des trois, car elle donne accès la fois à la dynamique de passage des excitations dans le canal de bord mais aussi à leur nature de type électron ou trou.

Cette représentation est bien adaptée pour étudier les états émis par les sources à un électron. Une première source, développée au Laboratoire Pierre Aigrain de l'ENS Paris, pilote à l'aide d'une tension de grille les niveaux d'une boîte quantique couplée au canal de bord par effet tunnel. Cela permet d'émettre des excitations bien résolues en énergie, qui s'apparentent à des quasi-particules de Landau. Un second type de source, développé au Service de Physique de l'État Condensé du CEA Saclay, utilise un contact ohmique commandé en tension pour émettre des excitations purement électronique appelées levitons, bien résolues en temps mais pas séparées de la mer de Fermi en énergie.

Chapitre 3

Cohérence à deux électrons, la statistique fermionique à l'œuvre

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la fonction de cohérence à un électron comme un outil de description des propriétés mono-électroniques de l'état quantique d'un fluide électronique. Nous avons montré qu'elle était particulièrement adaptée à l'étude d'excitations à une particule, constituées d'un unique électron ou d'un unique trou. En revanche, les propriétés d'indiscernabilité des électrons et de statistique fermionique ne se manifestent que de façon indirecte dans la cohérence à un électron, ce qui semble assez naturel puisqu'ils concernent par définition *plusieurs* électrons. Pour mettre davantage leur effet en évidence, nous allons introduire dans ce chapitre une fonction de cohérence d'ordre supérieur, mettant en jeu deux électrons. Mentionnons également que la fonction de cohérence à deux électrons pourrait être un outil potentiellement puissant pour analyser l'intrication à deux particules en optique quantique électronique.

Dans un premier temps, la fonction de cohérence à deux électrons est introduite en lien avec les corrélations d'événements d'électrodétection au paragraphe 3.1. L'analyse de ses propriétés de symétrie fait également l'objet d'une investigation approfondie. Comme au chapitre précédent, identifier l'effet d'une source électronique demande d'isoler sa contribution intrinsèque à la cohérence totale, ce qui devient plus subtil et fait l'objet du paragraphe 3.2. Pour mieux comprendre comment les effets précédemment identifiés se manifestent, l'exemple d'une paire cohérente d'électrons est étudiée en détail au paragraphe 3.3. Enfin, les deux derniers paragraphes 3.4 et 3.5 permettent de gagner une vision plus large sur la physique encodée dans la fonction de cohérence à deux électrons. En définir une représentation en énergie fait émerger une classification des excitations à deux particules du fluide électronique, alors que la normaliser sous la forme d'un degré de cohérence permet de mettre en évidence les effets d'indiscernabilité et d'antibunching électronique.

3.1 Cohérence totale à deux électrons

3.1.1 Définition et propriétés fondamentales

Suivant les pas de Glauber [72] et la transposition au cas électronique discutée au chapitre précédent, la fonction de cohérence à deux électrons ou fonction de cohérence du deuxième ordre d'un fluide électronique dans un état quantique décrit par une matrice densité ρ est définie par

$$\mathcal{G}^{(2e)}(1,2|1',2') \overset{\text{déf.}}{=} \left\langle \psi^\dagger(1')\,\psi^\dagger(2')\,\psi(2)\,\psi(1) \right\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\left[\psi(2)\,\psi(1)\,\rho\,\psi^\dagger(1')\,\psi^\dagger(2')\right] , \tag{3.1}$$

où comme précédemment ψ et $\psi^\dagger$ sont les opérateurs de champ du fluide électronique, et $(1) = (n_1, x_1, t_1)$, $(2) = (n_2, x_2, t_2)$, $(1') = (n'_1, x'_1, t'_1)$ et $(2') = (n'_2, x'_2, t'_2)$ sont quatre points de l'espace temps. Rappelons que dans ces notations les indices n sont des entiers définissant le canal de bord considéré alors que les variables x désignent la position dans le canal en question. Comme précédemment, nous omettrons souvent les variables de position en considérant que le caractère balistique de la propagation permet de les convertir en décalage temporel ou qu'elles sont fixées à la position de détecteurs. La fonction de cohérence à deux électrons sera alors vue comme une fonction dépendant de quatre temps. En termes de fonction de Green, il s'agit d'une fonction de Green mineure (« lesser ») à quatre points. Cette fonction de cohérence à deux électrons a été introduite quelques mois après le début du travail présenté ici par M. Moskalets pour un fluide électronique forcé périodiquement [124].

Notons qu'il est possible de définir de la même façon une fonction de cohérence à deux trous

$$\mathcal{G}^{(2h)}(1,2|1',2') \overset{\text{déf.}}{=} \left\langle \psi(1')\,\psi(2')\,\psi^\dagger(2)\,\psi^\dagger(1) \right\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\left[\psi^\dagger(2)\,\psi^\dagger(1)\,\rho\,\psi(1')\,\psi(2')\right] . \tag{3.2}$$

Cohérence à deux trous et cohérence à deux électrons ne sont pas indépendantes, puisque les relations d'anti-commutation fermionique imposent

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(2e)}(1,2|1',2') = {} & \mathcal{G}^{(2h)}(1',2'|1,2) \\ & - \delta(1-1')\,\mathcal{G}^{(h)}(2'|2) + \delta(1-2')\,\mathcal{G}^{(h)}(1'|2) \\ & - \delta(2-1')\,\mathcal{G}^{(e)}(1|2') + \delta(2-2')\,\mathcal{G}^{(e)}(1|1')\end{aligned} \tag{3.3}$$

où interviennent les fonctions de cohérence à un électron ou un trou. Dans cette équation, on emploie la notation compacte

$$\delta(1-1') \overset{\text{déf.}}{=} \delta_{n_1 n'_1}\,\delta\left[(x_1 - v_F t_1) - (x'_1 - v_F t'_1)\right] , \tag{3.4}$$

valable lorsque la propagation est balistique.

Un raisonnement identique à celui proposé au paragraphe 2.2.4, page 44, permet d'aboutir à une inégalité de type Cauchy–Schwartz concernant la cohérence à deux électrons. Une nouvelle fois, elle relie une cohérence en quatre points différents, que nous qualifierons de hors-diagonale, à deux cohérences prises en seulement deux points, que nous appellerons diagonales,

$$\left|\mathcal{G}^{(2e)}(1,2|1',2')\right|^2 \leq \mathcal{G}^{(2e)}(1,2|1,2)\,\mathcal{G}^{(2e)}(1',2'|1',2') . \tag{3.5}$$

Les relations d'anti-commutation fermionique sont lourdes de conséquences sur les propriétés de la fonction de cohérence à deux électrons. Elles feront l'objet d'une étude détaillée au paragraphe 3.1.3, page 80. Contentons-nous pour le moment d'indiquer que

$$\mathcal{G}^{(2e)}(1,2|1',2') = -\mathcal{G}^{(2e)}(1,2|2',1') = -\mathcal{G}^{(2e)}(2,1|1',2') = \mathcal{G}^{(2e)}(2,1|2',1') . \tag{3.6}$$

Ces symétries sont moins anodines qu'il n'y paraît et contraignent l'interprétation physique de la fonction de cohérence à deux électrons.

3.1.2 Cohérence à deux électrons et corrélations d'électrodétection

La fonction de cohérence à deux électrons apparaît naturellement lorsqu'il s'agit de quantifier les corrélations des événements de détection d'électrons par un détecteur quantique tel que celui envisagé au paragraphe 2.2, page 40. Une nouvelle fois, l'approche présentée ici s'inspire directement de celle proposée par C. Cohen-Tannoudji [42] pour la détection de photons.

Bref rappel du modèle

Considérons un canal de bord, décrit par des opérateurs de champ $\psi(t)$ et $\psi^\dagger(t)$, couplé à un détecteur. Le détecteur est un système quantique décrit par des opérateurs fermioniques $d(t)$ et $d^\dagger(t)$. Rappelons qu'une fois qu'un électron est passé du canal de bord vers le détecteur, ce dernier est réinitialisé en un temps que l'on suppose infiniment court. Le couplage entre le détecteur et le canal de bord se fait par effet tunnel et se modélise par l'opérateur

$$W(t) = \eta\, d^\dagger(t)\, \psi(t)\,, \tag{3.7}$$

où la constante de couplage η est supposée très petite. Un schéma de principe du dispositif envisagé est présenté figure 3.1.

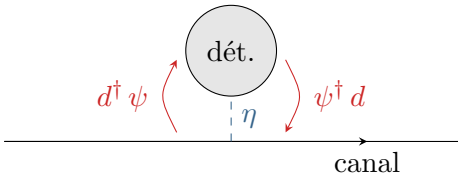


Fig. 3.1 – Schéma de principe du dispositif d'électrodétection. Le couplage tunnel entre le détecteur et le canal est caractérisé par une constante de couplage η. Le passage d'un électron du canal au détecteur est caractérisé par un opérateur $W = \eta\, d^\dagger\, \psi$, le processus inverse par l'opérateur hermitique conjugué.

Opérateur d'évolution

Écrivons à nouveau l'opérateur d'évolution du système global (électrons + canal) entre deux instants 0 et t, dans le cadre de l'image d'interaction et de la théorie des perturbations dépendant du temps. Étudier les corrélations entre deux événements de détection demande de pousser le développement au second ordre en η, ce qui s'écrit

$$U(t,0) = \mathbb{1} + \int_0^t \mathrm{d}t_1\, W(t_1) + \int_0^t \mathrm{d}t_2 \int_0^{t_2} \mathrm{d}t_1\, W(t_2)\, W(t_1) + \mathcal{O}(\eta^3)\,. \tag{3.8}$$

Restreignons-nous aux opérateurs décrivant la physique qui nous intéresse dans ce paragraphe, à savoir deux détections. La partie restreinte $U^{(2)}$ à étudier est donc

$$U^{(2)}(t,0) = \eta^2 \int_0^t \mathrm{d}t_2 \int_0^{t_2} \mathrm{d}t_1\, d^\dagger(t_2)\, \psi(t_2)\, d^\dagger(t_1)\, \psi(t_1)\,. \tag{3.9}$$

Compte tenu de la symétrie de l'intégrande vis-à-vis de l'échange entre t_1 et t_2,

$$U^{(2)}(t,0) = \frac{\eta^2}{2} \iint_0^t \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\, d^\dagger(t_2)\, \psi(t_2)\, d^\dagger(t_1)\, \psi(t_1)\,. \tag{3.10}$$

Amplitude et probabilité de transition entre deux états purs

Suivons toujours la démarche du chapitre précédent, et calculons maintenant l'amplitude de transition $\mathcal{A}^{i\to f}_{[0,t]}$ induite par $U^{(2)}(t,0)$ entre deux états purs et factorisés, $|i\rangle = |i_\mathrm{e}\rangle \otimes |i_\mathrm{d}\rangle$ et $|f\rangle = |f_\mathrm{e}\rangle \otimes |f_\mathrm{d}\rangle$. Par définition, celle-ci vaut $\langle f|U^{(2)}|i\rangle$, et s'écrit en utilisant la factorisation

$$\mathcal{A}^{i\to f}_{[0,t]} = -\frac{\eta^2}{2}\iint_0^t \mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1\ \langle f_\mathrm{d}\,|\,d^\dagger(t_2)\,d^\dagger(t_1)\,|\,i_\mathrm{d}\rangle\,\langle f_\mathrm{e}\,|\,\psi(t_2)\,\psi(t_1)\,|\,i_\mathrm{e}\rangle\ . \tag{3.11}$$

Elle n'est non nulle que si deux électrons qui étaient dans le fluide électronique en $|i\rangle$ sont passés dans le détecteur en $|f\rangle$. Le calcul de la probabilité associée s'en déduit alors simplement puisque $\mathbb{P}^{i\to f}_{[0,t]} = \left|\mathcal{A}^{i\to f}_{[0,t]}\right|^2$. Ainsi,

$$\mathbb{P}^{i\to f}_{[0,t]} = \frac{|\eta|^4}{4}\iint_0^t \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1'\,\mathrm{d}t_2'\ \langle i_\mathrm{d}\,|\,d(t_1')\,d(t_2')\,|\,f_\mathrm{d}\rangle\,\langle f_\mathrm{d}\,|\,d^\dagger(t_2)\,d^\dagger(t_1)\,|\,i_\mathrm{d}\rangle \tag{3.12a}$$

$$\times\,\langle i_\mathrm{e}\,|\,\psi^\dagger(t_1')\,\psi^\dagger(t_2')\,|\,f_\mathrm{e}\rangle\,\langle f_\mathrm{e}\,|\,\psi(t_2)\,\psi(t_1)\,|\,i_\mathrm{e}\rangle \tag{3.12b}$$

Le terme (3.12a) est propre au détecteur alors que le terme (3.12b) est propre aux électrons.

Probabilité de codétection

Une nouvelle fois, l'hypothèse d'états purs n'est pas satisfaisante physiquement. Pour accéder à la probabilité totale de détection de deux électrons dans la fenêtre de temps $[0,t]$, il faut sommer les probabilités $\mathbb{P}^{i\to f}_{[0,t]}$ sur une base orthonormée des états finaux accessibles et les moyenner sur tous les états initiaux possibles. Le moyennage se fait à l'aide de la matrice densité initiale du système, qui est toujours supposée factorisée. La probabilité de détecter deux électrons dans la fenêtre de temps $[0,t]$ s'écrit donc

$$\mathbb{P}^{(2\mathrm{e})}_{[0,t]} = \sum_f \left\langle \mathbb{P}^{i\to f}_{[0,t]}\right\rangle_{\rho_i}\ . \tag{3.13}$$

Grâce à deux relations de fermeture appliquées aux états finaux, la probabilité de détection de deux électrons dans la fenêtre de temps considérée s'écrit

$$\mathbb{P}^{(2\mathrm{e})}_{[0,t]} = \iint_0^t \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1'\,\mathrm{d}t_2'\,K^{(2\mathrm{e})}_{\text{dét}}(t_1,t_2|t_1',t_2')\,\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1',t_2')\,, \tag{3.14}$$

où $\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1',t_2')$ est la fonction de cohérence à deux électrons précédemment introduite et $K^{(2\mathrm{e})}_{\text{dét}}$ s'interprète comme une fonction de « double réponse » quantique du détecteur, définie par

$$K^{(2\mathrm{e})}_{\text{dét}}(t_1,t_2|t_1',t_2') = \frac{|\eta|^4}{4}\left\langle d(t_1')\,d(t_2')\,d^\dagger(t_2)\,d^\dagger(t_1)\right\rangle_{\rho_{i,\mathrm{d}}}\ . \tag{3.15}$$

Remarquons que cette fonction de réponse s'apparente à une fonction de cohérence à deux trous dans le détecteur. Elle n'y est néanmoins pas forcément égale, puisque la réponse du détecteur, incluse dans les opérateurs d, peut dépendre de l'énergie de l'excitation.

Les relations d'anti-commutation fermionique des opérateurs d et $d^\dagger$ imposent à la fonction de réponse à deux électrons $K^{(2\mathrm{e})}_{\text{dét}}$ de respecter certaines symétries par échange des variables [(1)]. Elle doit être anti-symétrique sous les échanges entre t_1 et t_2 d'une part et t_1' et t_2' d'autre part. Dans le cadre du modèle proposé, le détecteur se réinitialise instantanément : il est donc raisonnable

(1). Ce sont bien sûr les symétries caractéristiques de la cohérence à deux électrons, déjà mentionnées, et qui font l'objet d'une étude détaillée au paragraphe 3.1.3, page 80. Contentons-nous pour le moment d'interpréter leurs conséquences en termes de détection.

de postuler que la réponse à la première détection n'influe pas sur la deuxième, et de chercher une forme de $K_{\text{dét}}^{(2\text{e})}$ en termes de produit de fonctions de réponse à un électron $K_{\text{dét}}$. Néanmoins, il n'est pas possible en général d'écrire $K_{\text{dét}}^{(2\text{e})}$ sous la forme d'un simple produit, puisqu'un tel produit n'a pas de raison d'être déjà anti-symétrique. Par conséquent, s'il y a factorisation, $K_{\text{dét}}^{(2\text{e})}$ *doit* s'écrire

$$K_{\text{dét}}^{(2\text{e})}(t_1, t_2|t_1', t_2') = K_{\text{dét}}(t_1 - t_1')\, K_{\text{dét}}(t_2 - t_2') - K_{\text{dét}}(t_1 - t_2')\, K_{\text{dét}}(t_2 - t_1')\,. \tag{3.16}$$

Un cas particulier important est celui d'un détecteur résolu en temps, pour lequel

$$K_{\text{dét}}^{(2\text{e})}(t_1, t_2|t_1', t_2') \propto \delta(t_1 - t_1')\, \delta(t_2 - t_2') - \delta(t_1 - t_2')\, \delta(t_2 - t_1')\,. \tag{3.17}$$

Notons que la stationnarité du détecteur se traduit alors non plus par une indépendance de $K_{\text{dét}}^{(2\text{e})}$ par rapport aux variables [(2)] $\bar{t}_1$ et $\bar{t}_2$ mais par rapport à l'unique variable

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_1' + t_2 + t_2'}{4} = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2}{2}\,. \tag{3.18}$$

Corrélation de deux détections résolues en temps

Une quantité qui nous intéressera dans la suite de ce chapitre est la partie dite *diagonale* de la cohérence à deux électrons, correspondant à $\mathcal{G}^{(2\text{e})}(t_a, t_b|t_a, t_b)$ où seuls deux temps interviennent. Montrons qualitativement que celle-ci s'interprète en termes de corrélation de deux détections résolues en temps aux instants t_a et t_b.

Pour ce faire, considérons que le détecteur est actif *seulement* au voisinage des temps t_a et t_b, c'est-à-dire de façon précise seulement dans deux fenêtres de temps Δt_a et Δt_b telles que $\Delta t_a \ll |t_a - t_b|$ et de même pour Δt_b. Formellement, la fonction de réponse à deux électrons du détecteur s'écrit

$$\begin{aligned} K_{\text{dét}}^{(2\text{e})}(t_1, t_2|t_1', t_2') = \frac{|\eta|^4}{4} &\left[\Pi_a(t_1)\,\Pi_b(t_2) + \Pi_a(t_2)\,\Pi_b(t_1)\right]\left[\Pi_a(t_1')\,\Pi_b(t_2') + \Pi_a(t_2')\,\Pi_b(t_1')\right] \\ &\times \left[\delta(t_1 - t_1')\,\delta(t_2 - t_2') - \delta(t_1 - t_2')\,\delta(t_2 - t_1')\right]\,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

où Π_a et Π_b sont deux fonctions porte de largeur respective Δt_a et Δt_b et centrées respectivement en t_a et t_b. La forme de la fonction réponse est contrainte par les symétries qu'elle doit respecter. Comme le facteur impliquant les produits de fonctions de Dirac est anti-symétrique, il faut que celui impliquant les fonctions portes soit symétrique. Mathématiquement, il aurait été équivalent d'inverser la symétrie des deux facteurs. Physiquement, le choix est retenu car l'expression (3.19) est celle qui est obtenue en traduisant le fonctionnement du détecteur directement sur l'opérateur de couplage, c'est-à-dire en posant

$$W(t) = \eta\,[\Pi_a(t) + \Pi_b(t)]\, d^\dagger(t)\, \psi(t)\,. \tag{3.20}$$

Le premier choix me semble plus pertinent physiquement parlant, mais les deux sont parfaitement équivalents sur le plan mathématique.

Le calcul se fait en insérant l'expression de la fonction réponse (3.19) dans l'expression générale (3.14) de la probabilité de détection de deux électrons. On remarque ensuite que le produit des fonctions porte d'une part et le produit des fonctions de Dirac et de la cohérence $\mathcal{G}^{(2\text{e})}$ d'autre

(2). Ces notations standards sont définies Annexe A.3, page 184.

part sont tous les deux symétriques sous les échanges entre t_1 et t_2 et t'_1 et t'_2. Par conséquent, l'intégrale mise en jeu peut s'écrire beaucoup plus simplement sous la forme

$$\mathbb{P}^{(2e)}_{t_a,t_b} = |\eta|^4 \iint_{t_a-\Delta t_a/2}^{t_a+\Delta t_a/2} \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t'_1 \iint_{t_b-\Delta t_b/2}^{t_b+\Delta t_b/2} \mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t'_2\,\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) \times \left[\delta(t_1-t'_1)\,\delta(t_2-t'_2) - \delta(t_1-t'_2)\,\delta(t_2-t'_1)\right]. \tag{3.21}$$

Une nouvelle intégration combinée aux propriétés de symétrie de la cohérence d'ordre 2 permet d'aboutir à

$$\mathbb{P}^{(2e)}_{t_a,t_b} = 2\,|\eta|^4 \int_{t_a-\Delta t_a/2}^{t_a+\Delta t_a/2} \mathrm{d}t_1 \int_{t_b-\Delta t_b/2}^{t_b+\Delta t_b/2} \mathrm{d}t_2\,\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1,t_2)\,. \tag{3.22}$$

Enfin, pour s'intéresser spécifiquement au cas limite d'une détection parfaitement résolue aux instants t_a et t_b, on peut considérer que les fenêtres temporelles Δt_a et Δt_b sont bien plus faibles que les échelles de temps décrivant les variations de la fonction de cohérence à deux électrons. Alors,

$$\mathbb{P}^{(2e)}_{t_a,t_b} = 2\,|\eta|^4\;\Delta t_a\,\Delta t_b\,\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_a,t_b|t_a,t_b)\,. \tag{3.23}$$

Nous avons ainsi illustré sur ce modèle simple d'électrodétection qu'une mesure de corrélation résolue en temps donne accès à la partie diagonale de la fonction de cohérence à deux électrons.

Mentionnons pour terminer que nous aurions également pu étendre l'approche développée au paragraphe 2.2.3, page 42, et exprimer les corrélations du taux de comptage en prenant en compte la contribution quantique à leur origine. C'est la démarche évoquée par C. Cohen-Tannoudji [42] dans le cas photonique. Nous aurions abouti à un résultat analogue, mais j'ai choisi de privilégier la démarche ci-dessus car elle met davantage en avant le rôle joué par les symétries, bien qu'elle soit qualitative et moins rigoureuse.

3.1.3 De l'importance des symétries

Conséquences de l'anti-commutation fermionique

Comme déjà mentionné, la fonction de cohérence totale à deux électrons possède des propriétés d'antisymétrie sous l'échange de deux variables. Ces propriétés sont des conséquences des relations d'anti-commutation des opérateurs de champ fermioniques. Ainsi, en toute généralité,

$$\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1,2|1',2') = -\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1,2|2',1') = -\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(2,1|1',2') = \mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(2,1|2',1')\,. \tag{3.24}$$

En outre, par hermiticité,

$$\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1',2'|1,2) = \mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1,2|1',2')^*\,. \tag{3.25}$$

Prenant leur origine dans le caractère fermionique des électrons, ces propriétés de symétrie sont complètement intrinsèques à la cohérence d'ordre 2. En particulier, elles ne dépendent pas de la prise en compte ou non des interactions.

Propagation dans un unique canal

Pour commencer, intéressons-nous aux conséquences de ces propriétés de symétrie dans le cas de la propagation dans un canal de bord balistique. Comme déjà évoqué plusieurs fois, le caractère balistique de la propagation permet de convertir toute la dépendance spatiale le long du canal en dépendance temporelle en un unique point de mesure. Si les interactions rendent la propagation non plus balistique mais dispersive [23], les résultats discutés dans ce paragraphe ne valent a priori plus que pour la mesure en un point. Dans ces deux cas, la fonction de cohérence à deux électrons $\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t'_1,t'_2)$ dépend de quatre temps, mais les propriétés de symétrie (3.24) font

qu'une connaissance de sa valeur seulement sur une fraction de cet espace quadri-dimensionnel suffit à la déterminer totalement.

Pour préciser les conséquences de ces symétries, il est intéressant de les décrire en termes d'opérateurs agissant sur la cohérence à deux électrons. En premier lieu, notons σ_{12} l'opérateur échangeant t_1 et t_2 et σ'_{12} celui échangeant t'_1 et t'_2 :

$$\sigma_{12} : (t_1, t_2|t'_1, t'_2) \mapsto (t_2, t_1|t'_1, t'_2) \qquad \text{et} \qquad \sigma'_{12} : (t_1, t_2|t'_1, t'_2) \mapsto (t_1, t_2|t'_2, t'_1)\,. \tag{3.26}$$

L'opérateur produit $\Sigma_{12} = \sigma_{12}\,\sigma'_{12} = \sigma'_{12}\,\sigma_{12}$ décrit donc l'échange de (t_1, t'_1) avec (t_2, t'_2). La discussion du paragraphe précédent conduit à interpréter Σ_{12} comme l'opérateur décrivant l'échange des événements de détection : nous dirons donc qu'il s'agit d'un *échange classique*, alors que les échanges σ_{12} et σ'_{12} seront qualifiés de *quantiques*. L'équation (3.24) indique que la cohérence à deux électrons est transformée en son opposée sous l'action de σ_{12} et σ'_{12} alors qu'elle est invariante sous l'action de Σ_{12}. Enfin, notons C l'opérateur échangeant les temps (t_1, t_2) avec (t'_1, t'_2),

$$C : (t_1, t_2|t'_1, t'_2) \mapsto (t'_1, t'_2|t_1, t_2) \tag{3.27}$$

L'équation (3.25) indique qu'il transforme la cohérence à deux électrons en son complexe conjugué, d'où la notation C. L'équation (3.3), page 76, permet de l'interpréter qualitativement comme un échange du rôle respectif des électrons et des trous dans le processus de détection. On parlera donc d'un opérateur d'*échange électron–trou*.

S'il est naturel pour interpréter la cohérence à deux électrons en termes de détection, le jeu de variables $(t_1, t_2|t'_1, t'_2)$ utilisé jusqu'à présent n'est pas le plus adapté pour traduire mathématiquement l'effet de l'antisymétrie fermionique. Cherchons plutôt de nouvelles variables, que nous appellerons « variables réduites », qui sont non pas échangées sous l'action des opérateurs de symétrie mais qui sont ou bien transformées en leur opposée, ou bien laissées invariantes. Cela a l'avantage de fournir une interprétation géométrique simple de ces symétries dans l'espace 4d des temps. L'échange quantique σ_{12} intervertit t_1 et t_2. Par conséquent, il transforme en son opposée la variable

$$\tau_{12} = t_1 - t_2\,. \tag{3.28}$$

De même, σ'_{12} transforme en son opposée la variable

$$\tau'_{12} = t'_1 - t'_2\,. \tag{3.29}$$

Remarquons que σ_{12} (resp. σ'_{12}) laisse invariant τ'_{12} (resp. τ_{12}). Géométriquement, les opérateurs d'échange quantique s'interprètent donc comme des symétries par rapport aux hyperplans 3d d'équations respectives $\tau_{12} = 0$ et $\tau'_{12} = 0$, sur lesquels la cohérence à deux électrons s'annule en conséquence du principe de Pauli. Leur composition Σ_{12} apparaît quant à elle comme une symétrie par rapport au plan 2d d'intersection de ces hyperplans.

Par ailleurs, l'opérateur d'échange électron–trou transforme en son opposée la variable $t_1 + t_2 - t'_1 - t'_2$. Afin de construire un changement de variable unitaire, on introduit plutôt

$$\bar{\tau} = \frac{t_1 - t'_1 + t_2 - t'_2}{2} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\,. \tag{3.30}$$

La variable $\bar{\tau}$ est préservée par l'action de σ_{12} et σ'_{12}, mais τ_{12} et τ'_{12} sont interchangées sous l'action de C. Cela indique que la variable

$$\delta\tau = \tau_{12} - \tau'_{12} = t_1 - t'_1 - t_2 + t'_2 = \tau_1 - \tau_2 \tag{3.31}$$

est également changée en son opposée, alors que la variable

$$\delta\bar{t} = \frac{t_1 + t'_1}{2} - \frac{t_2 + t'_2}{2} = \bar{t}_1 - \bar{t}_2 \tag{3.32}$$

est laissée invariante. Géométriquement, C décrit donc une symétrie par rapport au plan 2d d'intersection des deux hyperplans 3d d'équations respectives $\bar{\tau} = 0$ et $\delta\bar{t} = 0$.

Pour que le changement de variable soit complet, il reste à définir une quatrième variable. Pour qu'il soit bien univoque, il n'est pas possible de conserver $\tau_{12} - \tau'_{12}$ qui n'est évidemment pas indépendante des variables déjà introduites. L'effet de toutes les symétries ayant déjà été pris en compte, on choisit la dernière variable invariante sous l'action de n'importe quel opérateur de symétrie. La combinaison linéaire qui convient, proprement normalisée, est

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t'_1 + t_2 + t'_2}{4} = \frac{\bar{t}_1 + \bar{t}_2}{2} \,. \tag{3.33}$$

Cette variable est intéressante physiquement, car elle représente le temps moyen, celui qui donne accès à une dynamique du système. En particulier, la cohérence à deux électrons d'un état stationnaire n'en dépend pas.

Ces symétries et leurs effets sont représentés schématiquement sur la figure 3.2. L'espace quadridimensionnel y est décrit comme une somme directe du plan $(\bar{t}, \bar{\tau})$ et du plan (τ_{12}, τ'_{12}). Le plan diagonal ($t_1 = t'_1$ et $t_2 = t'_2$), accessible par des mesures de corrélations résolues en temps, correspond à la somme directe des deux axes d'équation $\bar{\tau} = 0$ et $\tau_{12} = \tau'_{12}$, représentés en rouge sur la figure. Connaissant la cohérence à deux électrons en point P de l'espace 4d, représenté par ses deux projections sur les plans de la somme directe, on en déduit la cohérence à deux électrons en trois autres points par application des opérateurs d'échange, puis en quatre autres points supplémentaires par application de la conjugaison complexe. Par conséquent, connaître la cohérence en *un* point de l'espace 4d signifie qu'on la connaît en fait en *huit* points. En d'autres termes, cela signifie que la cohérence à deux électrons n'est déterminée que par un huitième de l'espace dans lequel elle vit.

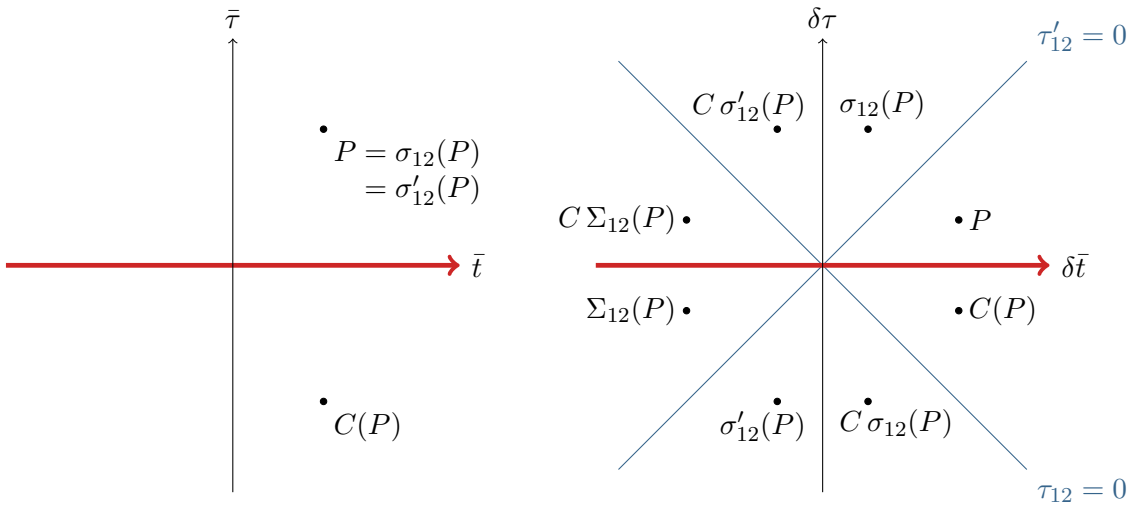


Fig. 3.2 – Décomposition de l'espace des temps 4d adaptée aux symétries de la cohérence à deux électrons. L'espace est décomposé en la somme directe du plan $(\bar{t}, \bar{\tau})$, à gauche, et du plan (τ_{12}, τ'_{12}), à droite. Le sous-espace diagonal de la cohérence, est défini par la somme directe des deux axes $\bar{\tau} = 0$ et $\delta\bar{t} = 0$, représentés en rouge. Le principe de Pauli impose l'annulation de la cohérence à deux électrons dans les deux plans d'équation $\tau_{12} = 0$ et $\tau'_{12} = 0$, représentés en bleu. Le point P est un point de l'espace 4d. Ses deux projections dans chacun des plans sont représentées, ainsi que les projections issues de l'action des opérateurs de symétrie définis dans le texte.

Ces propriétés de symétrie ont également des conséquences en termes d'interprétation physique. Nous interpréterons en effet à nouveau la partie diagonale de la cohérence à deux électrons comme étant d'origine classique, simplement liée aux corrélations du flux de charges dans le conducteur. Au contraire, la partie hors-diagonale est d'origine quantique et décrit vraiment la cohérence du conducteur. Néanmoins, la discussion menée ici montre que toute contribution à la cohérence diagonale en engendre nécessairement trois autres par application des opérateurs σ_{12}, σ'_{12} et Σ_{12}. Parmi ces trois contributions, l'une, issue de Σ_{12} est également diagonale, mais les deux autres contribuent à la cohérence hors-diagonale. Par conséquent, il faut se méfier d'une interprétation trop hâtive : une contribution à la cohérence le long de l'axe $\delta\tau$, qui pourrait paraître hors-diagonale, est en fait d'origine diagonale.

Propagation dans plusieurs canaux

Dans le cas où plusieurs canaux de propagation sont mis en jeu, les propriétés générales (3.24) et (3.25) sont bien sûr toujours vérifiées, mais ne se formulent plus de la même façon. L'information sur la position ne se limite plus à une variable scalaire, mais fait désormais intervenir un indice supplémentaire, qualifié d'orbital, qui indique le canal à considérer. Par conséquent, davantage de degrés de liberté sont accessibles, et les relations de commutation demandent de permuter non seulement les temps mais aussi les canaux.

Néanmoins, les conclusions qualitatives du paragraphe précédent tiennent encore : toute l'information sur la cohérence à deux électrons est contenue dans une portion restreinte de l'espace des configurations, celle-ci étant déterminée par les propriétés de symétrie sous l'échange des coordonnées.

3.2 Excès de cohérence à deux électrons émis par une source

3.2.1 Cohérence à deux électrons de la mer de Fermi

De la même façon qu'elle possède une cohérence à un électron non-nulle, la mer de Fermi possède une cohérence à deux électrons. Celle-ci s'obtient grâce au théorème de Wick, dont nous avons rappelé au paragraphe 2.3, page 47, pourquoi il s'applique à la mer de Fermi. Ainsi,

$$\mathcal{G}_F^{(2e)}(t_1, t_2|t_1', t_2') = \mathcal{G}_F^{(e)}(t_1|t_1')\,\mathcal{G}_F^{(e)}(t_2|t_2') - \mathcal{G}_F^{(e)}(t_1|t_2')\,\mathcal{G}_F^{(e)}(t_2|t_1')\,. \tag{3.34}$$

La mer de Fermi possède donc une cohérence à deux électrons non-nulle, mais celle-ci s'exprime uniquement en termes de sa cohérence à un électron. Ce résultat se généralise à la cohérence à un nombre quelconque d'électrons, puisqu'il résulte simplement du théorème de Wick. La présence d'une cohérence non-nulle à un nombre quelconque d'électrons n'est pas surprenante, puisque la mer de Fermi est considérée comme une mer de Dirac, c'est-à-dire un état quantique contenant une infinité d'électrons.

3.2.2 Quelle est vraiment la contribution d'excès ?

Au chapitre précédent, nous avons pu constater qu'une grandeur pertinente pour caractériser la façon dont la présence d'une source modifie les propriétés d'un canal de bord n'est pas la cohérence totale mais l'excès de cohérence à un électron, défini par soustraction,

$$\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t') = \mathcal{G}^{(e)}(t|t') - \mathcal{G}_F^{(e)}(t|t')\,. \tag{3.35}$$

Une nouvelle fois, il est intéressant de distinguer la contribution intrinsèque de la source à la cohérence à deux électrons de celle impliquant la mer de Fermi. Néanmoins, la décomposition est ici plus subtile qu'une simple soustraction,

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1', t_2') \neq \mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1', t_2') - \mathcal{G}_F^{(2e)}(t_1, t_2|t_1', t_2')\,. \tag{3.36}$$

Les résultats présentés dans ce paragraphe font écho à ceux évoqués par G. Lesovik *et al.* à propos du bruit de courant [107], où l'importance de la mer de Fermi est soulignée. Néanmoins, la formalisation est nouvelle, et la cohérence à deux électrons n'est pas définie dans l'article en question.

Analyse qualitative

L'analyse qualitative présentée ici ne vaut qu'en l'absence d'interactions dans le système, mais le résultat s'étend aux cas où des interactions sont prises en compte. En outre, elle est utile pour mettre en évidence les processus physiques à l'œuvre. Reprenons les deux outils introduits au paragraphe 2.3.2, page 48, à savoir l'image interprétant la cohérence en termes de processus de détection et les diagrammes pour représenter ces processus. Rappelons qu'il s'agit de considérer la source (S) et la mer de Fermi (F) comme deux entités indépendantes dont on peut compter le nombre d'électrons.

Considérons deux événements de détection, notés D_1 et D_2, associés à des temps (t_1, t_1') et (t_2, t_2'). Deux électrons ont été détectés, d'où viennent-ils ? Pour le savoir, il faut compter les électrons de la source et de la mer de Fermi avant et après la détection. Trois cas sont possibles :

(a) la mer de Fermi a perdu deux électrons ;
(b) la source a perdu deux électrons ;
(c) la mer de Fermi a perdu un électron et la source également.

Attention, il faut bien dire « la source a perdu » et non pas « l'électron vient de la source ». Évidemment, la distinction n'a pas lieu d'être pour les processus (a) et (b), mais elle est d'importance pour les processus impliqués dans le cas (c). Toute la discussion qui suit est représentée graphiquement sur la figure 3.3.

La contribution des processus (a) et (b) à la cohérence totale à deux électrons est propre à chaque sous-système. Ces cohérences seraient donc celles mesurées dans le cas où l'un des sous-systèmes serait « éteint » et seul l'autre demeurerait « allumé » (3). Ces contributions s'identifient donc à la cohérence à deux électrons intrinsèque à la mer de Fermi, $\mathcal{G}_F^{(2e)}$, et celle intrinsèque à la source, qui n'est autre que la contribution d'excès $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}$ cherchée.

Au contraire, le cas (c) demande des précautions car il implique simultanément la mer de Fermi et la source. Deux types de processus y contribuent. Une première possibilité est que chacun des électrons détectés provienne en propre d'un sous-système, mer de Fermi ou source. Il s'agit alors d'une contribution de *corrélations classiques*. La seconde possibilité, plus subtile, est qu'il y ait eu des interférences à deux particules entre les électrons qui ont été détectés, si bien qu'il n'est plus possible de leur attribuer une origine en propre. On parlera alors de contribution d'*échange quantique*. Des processus de ce type sont au cœur de l'effet HBT [25, 49, 85], qui a été introduit au paragraphe 1.4.3, page 24. La contribution de chacun de ces processus implique un produit entre la cohérence à un électron de la mer de Fermi $\mathcal{G}_F^{(e)}$ et l'excès de cohérence à un électron émis par la source $\Delta\mathcal{G}^{(e)}$, mais les temps mis en jeu diffèrent.

Le problème qui se pose en présence d'interactions est que la présence d'électrons excédentaires émis par la source modifie la mer de Fermi en créant à sa surface une vague d'excitations électron–trou cohérentes [52, 76]. Il n'est alors plus possible de distinguer les électrons de l'écume de cette mer de Fermi de ceux émis originellement par la source et le protocole de comptage imaginé dans cette analyse qualitative perd son sens.

Formalisation

Compte tenu de la discussion précédente, la cohérence totale se décompose sous la forme

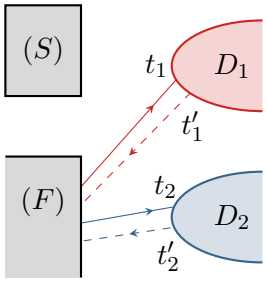
$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(2e)}(t_1,t_2|t_1',t_2') = {} & \mathcal{G}_F^{(2e)}(t_1,t_2|t_1',t_2') && \text{(3.37a)}\\
& + \Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1,t_2|t_1',t_2') && \text{(3.37b)}\\
& + \mathcal{G}_F^{(e)}(t_1|t_1')\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_2') + \mathcal{G}_F^{(e)}(t_2|t_2')\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_1') \\
& - \mathcal{G}_F^{(e)}(t_1|t_2')\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_1') - \mathcal{G}_F^{(e)}(t_2|t_1')\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_2') && \text{(3.37c)}
\end{aligned}$$

Cette équation s'interprète comme étant la *définition* mathématique de l'excès de cohérence à deux électrons $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}$ émis par la source : il s'agit de la cohérence totale à deux électrons (3.37) à laquelle on soustrait la contribution de la mer de Fermi (3.37a) et celle des termes croisés (3.37c), qui incluent les corrélations classiques et les échanges quantiques. Cette analyse permet à la définition de l'excès de cohérence à deux électrons de demeurer valide en présence d'interactions alors que l'analyse intuitive qui y a conduit ne l'est plus, puisque toutes les autres quantités intervenant sont bien définies.

Les signes intervenant devant les termes d'échange quantique peuvent paraître arbitraires. Ils sont nécessaires pour garantir les propriétés de symétrie décrites au paragraphe 3.1.3. Compte tenu de l'interprétation qualitative proposée, il faut que chacune des contributions (3.37a), (3.37b) et (3.37c) vérifie ces propriétés individuellement. Par conséquent, des signes doivent intervenir dans les termes croisés, et ont été attribués aux termes d'échange quantique, qui sont ceux pour lesquels le caractère fermionique a de l'importance.

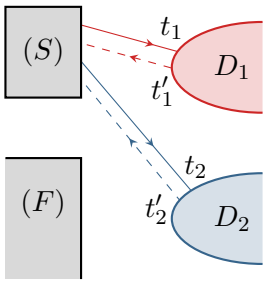
Comme pour l'excès de cohérence à un électron, cette définition ne demande dans le principe que de pouvoir éteindre la source. Elle est en effet séquentielle, au sens où toutes les quantités intervenant peuvent être obtenues les unes après les autres en n'utilisant que des quantités obtenues précédemment ou en éteignant la source. Notons également qu'elle ne repose pas sur le théorème de Wick, qui n'est plus valable dès lors que les interactions sont prises en compte. Dans

(3). Évidemment, il n'est pas possible d'éteindre la mer de Fermi. Il ne s'agit que d'une expérience de pensée !



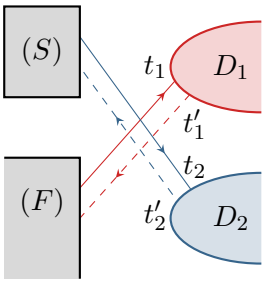
$\mathcal{G}_F^{(2e)}(t_1, t_2|t'_1, t'_2)$

(a) Contribution intrinsèque à la mer de Fermi.

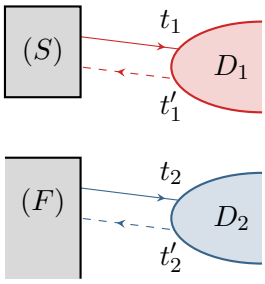


$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t'_1, t'_2)$

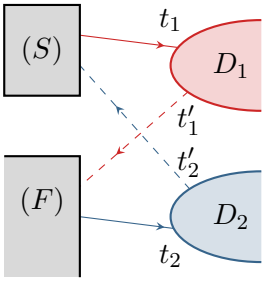
(b) Contribution intrinsèque à la source.



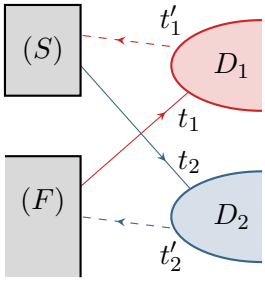
$\mathcal{G}_F^{(e)}(t_1|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t'_2)$



$\mathcal{G}_F^{(e)}(t_2|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t'_1)$



$\mathcal{G}_F^{(e)}(t_2|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t'_2)$



$\mathcal{G}_F^{(e)}(t_1|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t'_1)$

(c) Termes de corrélations classiques, en haut, et d'échange quantique, en bas.

Fig. 3.3 – Représentation diagrammatique de la cohérence à deux électrons. Un opérateur ψ est représenté par un trait plein orienté de l'émission vers la détection, alors qu'un opérateur $\psi^\dagger$ est représenté par un trait pointillé orienté en sens inverse. Plusieurs processus contribuent à la détection de deux électrons, dont les contributions sont représentées. La représentation schématique envisagée ici n'est valable qu'en l'absence d'interactions.

le cas sans interaction, le théorème de Wick s'applique et notre définition rejoint celle proposée par M. Moskalets [124], qui est moins générale (4).

Notons enfin que cette démarche se généralise à un nombre quelconque d'électrons pour définir par récurrence l'excès de cohérence à N électrons émis par une source, cette définition ne reposant que sur les excès de cohérence à $N' < N$ électrons.

Pertinence de la définition en présence d'interactions

Après avoir insisté sur le fait que la définition de l'excès de cohérence à deux électrons est bien posée mathématiquement parlant en présence d'interactions, expliquons rapidement pourquoi elle est pertinente. En première approche, on pourrait penser que puisque la décomposition qualitative perd son sens alors les termes (3.37b) et (3.37c) devraient être regroupés pour définir l'excès de cohérence à deux électrons.

Imaginons un exemple très naïf où un électron émis par une source entre dans une zone d'interactions, relaxe en énergie, et en ressort seulement accompagné d'une seule paire électron–trou ayant pris l'énergie relâchée. La présence de cette paire électron–trou est un effet des interactions, et sa présence modifie plusieurs grandeurs mesurables, comme par exemple le bruit de partitionnement en sortie d'un interféromètre HBT que nous discuterons au chapitre 4. Néanmoins, nous montrerons que ces effets ne sont pas à proprement parler des effets à deux électrons au sens où ils existent aussi pour un électron unique. Comme ils sont encodés dans notre formalisme par les termes croisés (3.37c), il nous semble raisonnable d'ôter ces termes de la définition de l'excès de cohérence à deux électrons. En revanche, ces particules supplémentaires sont cohérentes avec l'électron ayant relaxé : l'excès de cohérence à deux électrons inclut cette cohérence supplémentaire, qui est induite par les interactions.

3.2.3 Cas particulier d'un état vérifiant le théorème de Wick

Considérons un état électronique permettant d'appliquer le théorème de Wick. Rappelons qu'un tel état s'obtient par exemple par application d'un produit d'opérateurs de création et d'annihilation à la mer de Fermi en négligeant tout effet d'interactions.

La cohérence totale à deux électrons portée par cet état s'exprime alors uniquement en fonction de la cohérence totale à un électron qu'il porte, puisque

$$\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1', t_2') = \mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_1')\,\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_2') - \mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_2')\,\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_1')\,. \tag{3.38}$$

Remarquons que la structure des termes rappelle celle des termes croisés intervenant dans la décomposition générale de la cohérence à deux électrons, équation (3.37). Leur origine physique peut donc être analysée de la même façon : le premier terme décrit des corrélations classiques entre électrons et le second les processus d'échange quantique. Bien entendu, c'est cette relation qui donne la cohérence à deux électrons de la mer de Fermi, équation (3.34), page 84. Suivant M. Moskalets [124], remarquons que cette relation s'écrit sous forme d'un déterminant

$$\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1', t_2') = \det \begin{bmatrix} \mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_1') & \mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_2') \\ \mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_1') & \mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_2') \end{bmatrix}\,. \tag{3.39}$$

Plus intéressant, on montre en développant la cohérence à un électron sous la forme

$$\mathcal{G}^{(e)}(t|t') = \mathcal{G}_F^{(e)}(t|t') + \Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t') \tag{3.40}$$

puis en identifiant avec la décomposition (3.37) que cette relation tient aussi pour les excès de cohérence portés par l'état en question,

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1', t_2') = \Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_1')\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_2') - \Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_2')\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_1')\,, \tag{3.41}$$

(4). Cela contribue à justifier d'avoir attribué les signes $-$ aux termes d'échange quantique.

avec toujours les mêmes interprétations physiques. Lorsqu'elle est applicable, cette relation constitue alors un moyen simple de calculer des excès de cohérence à deux électrons. Elle sera utilisée à plusieurs reprises dans la suite de ce chapitre.

Une première conséquence de ce résultat concerne le cas d'un unique électron dans un paquet d'ondes cohérent $\phi(t)$. L'excès de cohérence à un électron porté par un tel électron, calculé au paragraphe 2.3.3, page 49, vaut

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \phi(t)\,\phi^*(t')\,. \tag{3.42}$$

Il est alors immédiat de déduire de la relation (3.41)

$$\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1, t_2|t_1', t_2') = 0\,. \tag{3.43}$$

Cela montre qu'un électron unique n'apporte aucune contribution intrinsèque à la cohérence à deux électrons, sans pour autant que les termes croisés (3.37c) intervenant dans la cohérence totale ne soient nuls. Ce résultat est un argument supplémentaire en faveur de la pertinence de la définition que nous avons choisie de l'excès de cohérence à deux électrons.

3.3 Exemple d'une paire d'électrons cohérente

Pour illustrer les propriétés de l'excès de cohérence à deux électrons, nous allons étudier de façon détaillée l'exemple le plus simple d'état à deux électrons, celui d'une paire cohérente, formée de deux paquets d'ondes $\phi_a(t)$ et $\phi_b(t)$. Pour faciliter la lecture des équations, ces paquets sont supposés orthogonaux. Le cas plus général de paquets se recouvrant ne présente pas de difficulté de principe, mais alourdit les équations et rend leur interprétation moins transparente. J'ai fait le choix de présenter les développements analytiques dans ce cadre simplifié, tout en prenant en compte le recouvrement dans les évaluations numériques.

3.3.1 Excès de cohérence et fonction d'onde à deux électrons

Considérons une paire cohérente d'électrons. L'excès de cohérence à un électron a été calculé au paragraphe 2.3.4, page 54, et vaut

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \phi_a(t)\,\phi_a^*(t') + \phi_b(t)\,\phi_b^*(t')\,. \tag{3.44}$$

L'excès de cohérence à deux électrons porté par cet état se calcule alors à nouveau grâce à l'équation (3.41), ou simplement par évaluation directe au moyen du théorème de Wick. Utilisons par exemple l'équation (3.41),

$$\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1',t_2') = \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1')\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_2') - \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2')\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_1') \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\phi_a(t_1)\,\phi_a^*(t_1') + \phi_b(t_1)\,\phi_b^*(t_1')\right] \times \left[\phi_a(t_2)\,\phi_a^*(t_2') + \phi_b(t_2)\,\phi_b^*(t_2')\right] \\ &\quad - \left[\phi_a(t_1)\,\phi_a^*(t_2') + \phi_b(t_1)\,\phi_b^*(t_2')\right] \times \left[\phi_a(t_2)\,\phi_a^*(t_1') + \phi_b(t_2)\,\phi_b^*(t_1')\right] \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$= \left[\phi_a(t_1)\,\phi_b(t_2) - \phi_b(t_1)\,\phi_a(t_2)\right] \times \left[\phi_a^*(t_1')\,\phi_b^*(t_2') - \phi_b^*(t_1')\,\phi_a^*(t_2')\right] \tag{3.47}$$

L'excès de cohérence ainsi calculé s'identifie alors à

$$\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1',t_2') = \Phi_{ab}(t_1,t_2)\,\Phi_{ab}^*(t_1',t_2')\,, \tag{3.48}$$

où Φ_{ab} est la fonction d'ondes à deux électrons construite à partir des paquets d'ondes ϕ_a et ϕ_b. Puisque les électrons sont des fermions, il s'agit d'un déterminant de Slater,

$$\Phi_{ab}(t_1,t_2) = \det\begin{bmatrix}\phi_a(t_1) & \phi_a(t_2)\\ \phi_b(t_1) & \phi_b(t_2)\end{bmatrix} = \phi_a(t_1)\,\phi_b(t_2) - \phi_b(t_1)\,\phi_a(t_2)\,. \tag{3.49}$$

L'équation (3.48) apparaît donc comme la généralisation naturelle de l'expression donnant l'excès de cohérence à un électron pour un paquet cohérent, rappelée équation (3.42), mais dans le cadre de la cohérence à deux électrons.

3.3.2 Visualiser la cohérence

Choix de représentation

Représentons cette fonction de cohérence à deux électrons dans le cas d'une paire cohérente de levitons identiques, séparés de $\Delta t = 10\,\tau_\mathrm{e}$. Les courbes sont tracées à partir de l'expression analytique d'un paquet d'ondes leviton mono-électronique, correspondant à l'équation (2.68), page 51, et largement utilisée tout au long du chapitre 2,

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{\tau_e}{\pi\,v_F}}\,\frac{1}{t+\mathrm{i}\tau_\mathrm{e}}\,. \tag{3.50}$$

La paire est centrée en $t = 0$, autrement dit le premier leviton est émis en $t = -\Delta t/2$ et le deuxième en $t = +\Delta t/2$. L'expression de l'excès de cohérence à un électron utilisée, équation (2.74), page 54, prend en compte le recouvrement, dont le module vaut environ 0.2 dans le

cas considéré. Pour visualiser les symétries de la cohérence à deux électrons, on utilise dans les tracés les variables qui leurs sont adaptées, introduites au paragraphe 3.1.3, page 80, à savoir

$$\begin{cases} \bar{t} = \dfrac{1}{4}(t_1 + t_1' + t_2 + t_2') \\ \bar{\tau} = \dfrac{1}{2}(t_1 - t_1' + t_2 - t_2') \\ \delta\bar{t} = \dfrac{1}{2}(t_1 + t_1' - t_2 - t_2') \\ \delta\tau = \quad t_1 - t_1' - t_2 + t_2' \end{cases} \tag{3.51}$$

Comme vous n'êtes pas en train de lire cette thèse sur une feuille ou un écran quadridimensionnel, nous allons devoir nous contenter de visualiser des coupes de la cohérence à deux électrons. Les figures 3.4 à 3.7 représentent différentes coupes de la même cohérence à deux électrons, et correspondent de façon plus précise à deux sommes directes différentes permettant de décrire l'espace quadridimensionnel. Des annotations sont portées pour faire le lien entre les figures. Les droites pointillées de même couleur (vert, orange, rose, violet) sont les droites d'intersection des deux plans sur lesquels elles sont tracées et sont donc confondues. Les étoiles de même couleur (violet, gris) sont quant à elles les points d'intersection des deux plans sur lesquels elles sont tracées et sont donc également confondues.

Coupe dans le plan diagonal ($\bar{\tau} = 0$, $\delta\tau = 0$), figure 3.4

Une première coupe intéressante, représentée figure 3.4, est la partie diagonale, qui donne accès aux corrélations classiques. En termes des variables réduites, il s'agit d'une coupe de l'espace 4d dans le plan $(\bar{\tau} = 0, \delta\tau = 0)$, où l'on conserve les dépendances en $\bar{t}$ et $\delta\bar{t}$.

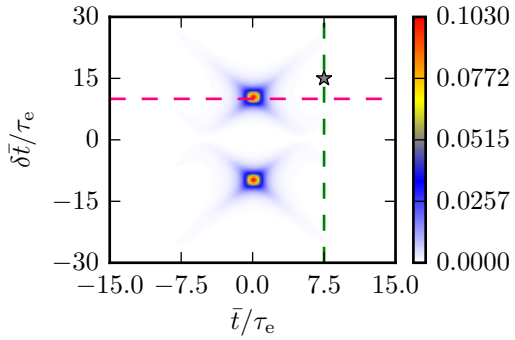


Fig. 3.4 – Excès de cohérence à deux électrons dans le plan diagonal. La coupe fait apparaître le plan diagonal $(\bar{\tau} = 0, \delta\tau = 0)$, où l'excès de cohérence à deux électrons est réel. Les deux levitons sont monoélectroniques, séparés de $\Delta t = 10\,\tau_e$. Le calcul se base sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement. Les droites pointillées rose et verte sont les deux droites d'intersection avec les deux plans présentés figure 3.7. Elles sont confondues avec les droites pointillées rose et verte de cette figure. L'étoile grise correspond quant à elle au point d'intersection le plan hors-diagonal présenté figure 3.6. L'intersection avec le plan hors-diagonal représenté figure 3.5 est située au maximum de l'excitation ($\bar{t} = 0$ et $\delta\bar{t} = \Delta t$) et n'est pas représentée.

La position des deux pics est simple à interpréter : pour qu'il y ait corrélation entre deux événements de détection, il faut que ceux-ci aient eu lieu à un temps moyen $\bar{t} = 0$, correspondant au centre de la paire, et soient séparés de $\delta\bar{t} = \pm\Delta t$. On retrouve également la nullité le long

de l'axe $\delta\bar{t} = 0$, imposée par le principe de Pauli : deux électrons ne peuvent être détectés simultanément.

Pour compléter cette coupe, il est nécessaire de représenter le plan complémentaire dans l'espace quadri-dimensionnel. Il s'agit du plan complètement hors-diagonal, où l'excès de cohérence à deux électrons est représenté en fonction de $\bar{\tau}$ et $\delta\tau$ à $\bar{t}$ et $\delta\bar{t}$ fixés.

Coupes dans le plan hors-diagonal ($\bar{t}$ et $\delta\bar{t}$ fixés), figures 3.5 et 3.6

Deux coupes différentes sont données. La première, figure 3.5, se trouve au niveau du maximum de l'excitation, c'est-à-dire en $(\bar{t} = 0, \delta\bar{t} = \Delta t)$. Qualitativement, l'allure est celle du carré de l'excès de cohérence à un électron d'un leviton représentée figure 2.3, page 52. Cela se comprend en notant qu'au voisinage de ce point un seul des deux levitons contribue majoritairement à l'excès de cohérence. La seconde coupe, figure 3.6, est décalée et se trouve en $(\bar{t} = 7.5\,\tau_{\mathrm{e}}, \delta\bar{t} = 15\,\tau_{\mathrm{e}})$, ce qui permet de voir les symétries se développer. Le plan hors-diagonal n'étant pas bien adapté aux propriétés de symétrie de la cohérence à deux électrons, il n'est toutefois pas évident d'interpréter la position des pics en ces termes.

Deux points sont malgré tout remarquables. D'une part, la propriété de conjugaison complexe se traduit dans ce plan hors-diagonal par une symétrie centrale, de centre l'origine, qui est particulièrement visible sur la figure 3.6. D'autre part, l'intersection avec les plans de Pauli où la cohérence à deux électrons s'annule est parfaitement visible, se traduisant dans la coupe particulière représentée figure 3.6 par les droites d'équation $\delta\tau = \pm 30\,\tau_{\mathrm{e}}$.

Pour voir apparaître les effets des symétries précédemment étudiées, représentons figure 3.7 les mêmes coupes que sur la figure 3.2, page 82.

Coupe dans le plan ($\delta\tau = 0$, $\delta\bar{t} = \Delta t$), figure 3.7a-c-e

Commençons par interpréter la coupe dans le plan $(\delta\tau = 0, \delta\bar{t} = \Delta t)$, représentée sur la colonne de gauche. Ce plan coupe le plan diagonal : la ligne pointillée horizontale rose représentée figure 3.4 est confondue avec la ligne pointillée rose représentée figure 3.7. Cela explique donc la position du maximum du module, correspondant à un pic de corrélation.

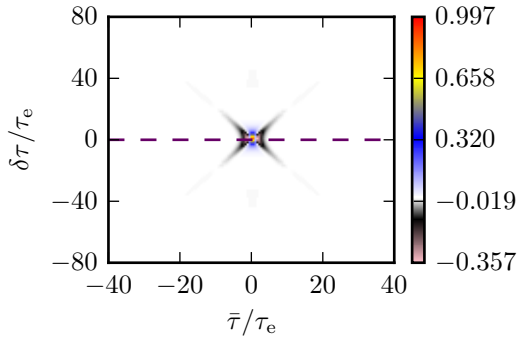
En outre, la cohérence diagonale à deux électrons est réelle, ce qui explique l'annulation de la partie imaginaire le long de la droite $\bar{\tau} = 0$. Plus généralement, comme le plan est tracé pour $\delta\tau = 0$, la conjugaison complexe se traduit par une simple symétrie par rapport à la droite $\bar{\tau} = 0$, ce qui se retrouve sur la figure 3.7c. Cette symétrie est « accidentelle », dans la mesure où elle n'existe que pour les troncatures dans le sous-espace $\delta\tau = 0$. En général, la symétrie issue de la conjugaison complexe transforme également $\delta\tau$ en $-\delta\tau$.

Enfin, l'allure correspond comme attendu au carré de la cohérence à un électron portée par un leviton, représentée figure 2.3, page 52 : la paire étant suffisamment bien séparée, on peut considérer en première approximation qu'un seul leviton contribue dans chacun des termes de l'équation (3.48).

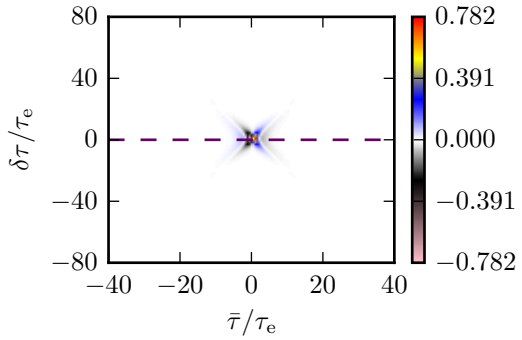
Coupe dans le plan ($\bar{t} = 7.5\,\tau_{\mathrm{e}}, \bar{\tau} = 0$), figure 3.7b-d-f

Interprétons maintenant la seconde coupe de l'espace 4d, celle dans le plan $(\bar{t} = 7.5\,\tau_{\mathrm{e}}, \bar{\tau} = 0)$, représentée sur la colonne de droite. La valeur de $\bar{t}$ a été choisie pour mettre en valeur toutes les symétries possibles : choisir la position des pics de corrélation $\bar{t} = 0$ est un cas trop particulier qui ne le permet pas.

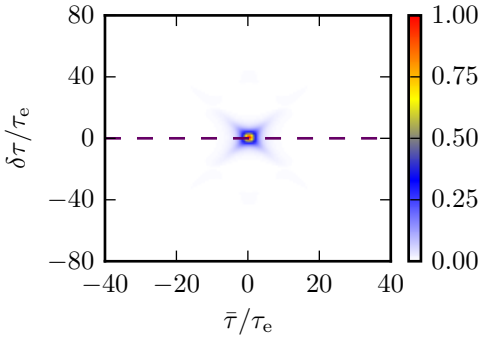
Le plan tracé coupe lui aussi le plan diagonal. La ligne pointillée verticale verte représentée figure 3.4 est confondue avec la ligne pointillée horizontale verte représentée figure 3.7. Cela explique donc la position des maxima du module le long de cette ligne, qui correspondent aux quatre bras de la croix de corrélation, ainsi que l'annulation de la partie imaginaire, figure 3.7d.



(a) Plan ($\bar{t} = 0, \delta\bar{t} = \Delta t$), partie réelle.

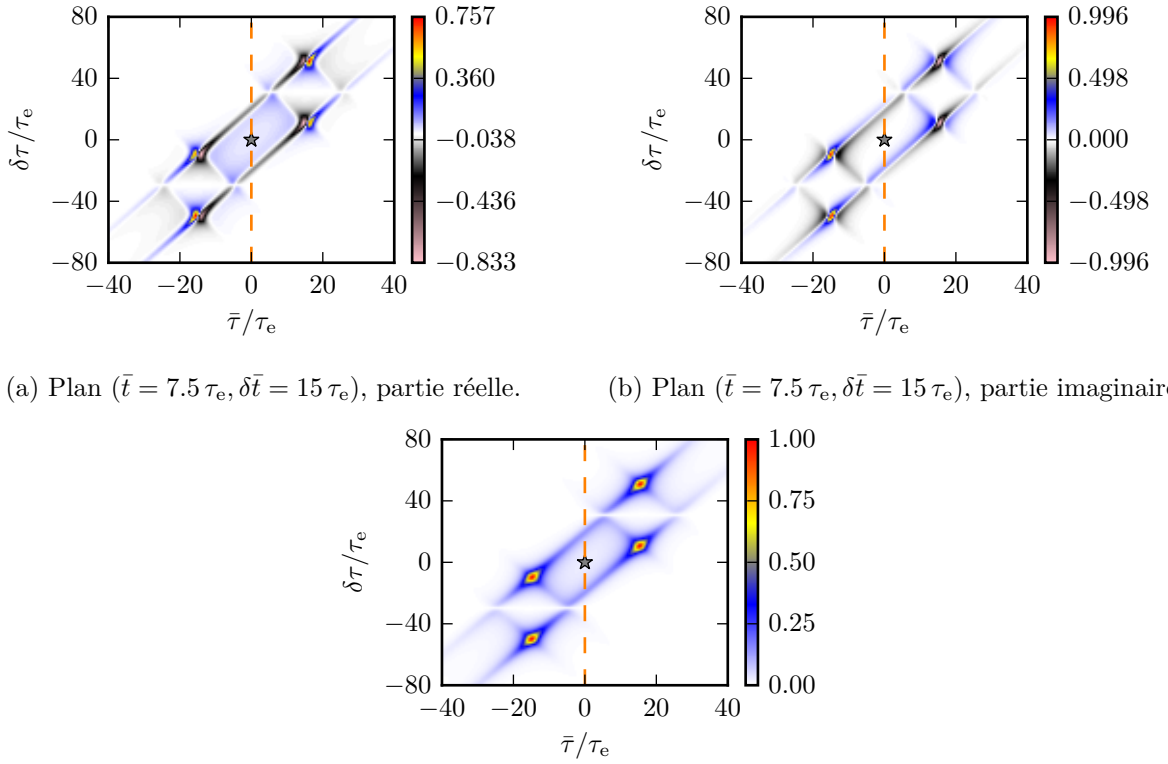


(b) Plan ($\bar{t} = 0, \delta\bar{t} = \Delta t$), partie imaginaire.



(c) Plan ($\bar{t} = 0, \delta\bar{t} = \Delta t$), module.

Fig. 3.5 – Excès de cohérence à deux électrons d'une paire de levitons dans le plan totalement hors-diagonal, première coupe. La coupe fait apparaître le plan totalement hors diagonal ($\bar{t} = 0, \delta\bar{t} = \Delta t$). Les deux levitons sont monoélectroniques, séparés de $\Delta t = 10\tau_e$. Le calcul se base sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement. La droite pointillée violette est la droite d'intersection avec le plan présenté figure 3.7. Elle est confondue avec la droite pointillée violette de cette figure. L'intersection avec le plan diagonal représenté figure 3.4 est située au centre du repère, sur le maximum de l'excitation, et n'est pas représentée. Les figures ont été normalisées par la valeur maximale du module, à savoir environ $0.1\,(v_F\,\tau_e)^{-2}$.

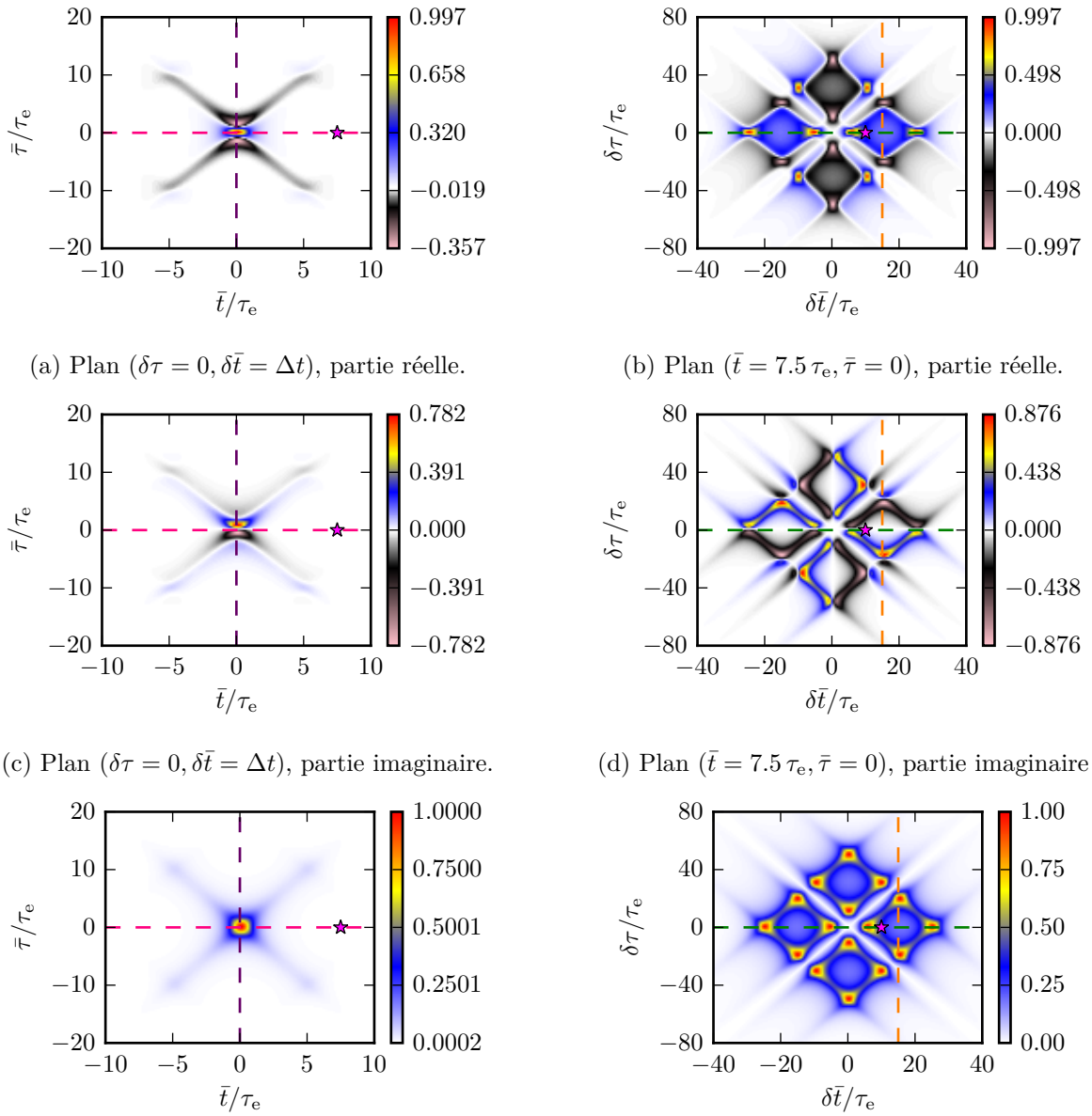


(a) Plan ($\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \delta\bar{t} = 15\,\tau_e$), partie réelle.

(b) Plan ($\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \delta\bar{t} = 15\,\tau_e$), partie imaginaire.

(c) Plan ($\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \delta\bar{t} = 15\,\tau_e$), module.

Fig. 3.6 – Excès de cohérence à deux électrons d'une paire de levitons dans le plan totalement hors-diagonal, seconde coupe. La coupe fait apparaître le plan totalement hors-diagonal ($\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \delta\bar{t} = 15\,\tau_e$). Les deux levitons sont monoélectroniques, séparés de $\Delta t = 10\tau_e$. Le calcul se base sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement. La droite pointillée orange est la droite d'intersection avec le plan présenté figure 3.7f. Elle est confondue avec la droite pointillée orange de cette figure. L'étoile grise correspond quant à elle au point d'intersection du plan diagonal, représenté figure 3.4. Les figures ont été normalisées par la valeur maximale du module, à savoir environ $3 \times 10^{-3}\,(v_F\,\tau_e)^{-2}$.



(a) Plan $(\delta\tau = 0, \delta\bar{t} = \Delta t)$, partie réelle.

(b) Plan $(\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \bar{\tau} = 0)$, partie réelle.

(c) Plan $(\delta\tau = 0, \delta\bar{t} = \Delta t)$, partie imaginaire.

(d) Plan $(\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \bar{\tau} = 0)$, partie imaginaire

(e) Plan $(\delta\tau = 0, \delta\bar{t} = \Delta t)$, module.

(f) Plan $(\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \bar{\tau} = 0)$, module.

Fig. 3.7 – Excès de cohérence à deux électrons d'une paire de levitons dans une seconde vue en coupe. Les coupes correspondent à celles de la figure 3.2, page 82, afin de mettre en évidence les symétries. Les deux levitons sont monoélectroniques, séparés de $\Delta t = 10\tau_e$. Le calcul se base sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement. Les droites pointillées rose et verte sont les deux droites d'intersection avec le plan diagonal présenté figure 3.4. Les droites pointillées violette et orange sont respectivement les droites d'intersection avec les plans anti-diagonaux présentés figure 3.5 et 3.6. Ces droites sont confondues avec les droites pointillées des dites figures. L'étoile violette correspond au point d'intersection des deux plans des colonnes de gauche et de droite. Toutes les figures ont été normalisées par la valeur maximale du module, à savoir environ $0.1\,(v_F\,\tau_e)^{-2}$ pour la représentation en coupe dans le plan $(\delta\tau = 0, \delta\bar{t} = \Delta t)$ et environ $5 \times 10^{-4}\,(v_F\,\tau_e)^{-2}$ pour la coupe dans le plan $(\bar{t} = 7.5\,\tau_e, \bar{\tau} = 0)$.

La présence d'un second pic de cohérence, en ($\delta\bar{t} = 15\,\tau_{\mathrm{e}}, \delta\tau = 20\tau_{\mathrm{e}}$), s'explique en comprenant que la croix de corrélations classique n'est que la projection d'une « croix quadridimensionnelle ». On se trouve ici sur un autre bras de la croix en question, mais qui coupe le plan anti-diagonal. Pour le voir, la ligne pointillée verticale orange représentée figure 3.7 est confondue avec la ligne pointillée verticale orange représentée figure 3.6.

Tous les autres pics de cohérence sont ensuite issus de ceux-là par symétrie, et toutes les propriétés discutées au paragraphe 3.1.3 se retrouvent. En particulier, les symétries par rapport aux diagonales changent la cohérence à deux électrons en son opposée, alors que les symétries par rapport aux axes horizontal et vertical la changent en son complexe conjugué. L'annulation sur les diagonales, conséquence du principe de Pauli, est également très visible figure 3.7f.

3.3.3 Temps de corrélation et temps de cohérence à deux électrons

Intéressons-nous pour conclure l'étude de cet exemple aux échelles de temps caractérisant la cohérence à deux électrons portée par une telle paire, ceci afin d'étendre l'analyse de G. Haack [80, 82] présentée au paragraphe 2.3.3, page 54. L'analyse est ici rendue plus complexe car quatre temps interviennent dans la cohérence à deux électrons : on peut donc s'attendre à quatre échelles de temps caractéristiques.

Considérons que ϕ_a et ϕ_b sont deux paquets d'ondes orthogonaux, centrés en $t = 0$, et translatés de $\pm\Delta t/2$. La cohérence à un électron qu'ils portent individuellement est caractérisée par les échelles de temps classiques $T^{(1)}_{\mathrm{cl},a}$ et $T^{(1)}_{\mathrm{cl},b}$, qui peuvent différer si les deux paquets diffèrent. En revanche, l'approche utilisée, reposant sur le théorème de Wick, empêche de prendre en compte tout phénomène de décohérence : pondérer la cohérence à un électron par un coefficient de décohérence phénoménologique comme envisagé au paragraphe 2.3.3 n'a plus de sens dès lors que l'on considère une paire d'électrons. Par conséquent, le temps de cohérence de phase τ_φ est infini, et l'échelle de temps quantique n'est que le double de l'échelle de temps classique en vertu de l'équation (2.72), page 54. Nous allons voir que cette simplification drastique permet de réduire le nombre d'échelles caractéristiques de quatre à une seule, que nous noterons $T^{(2)}$, à laquelle s'ajoute un temps caractéristique de corrélation T_{corr}.

Commençons par identifier ce temps décrivant les corrélations entre électrons. Il correspond à la valeur de $\delta\bar{t}$ pour laquelle les pics de corrélation se manifestent : on a donc comme attendu

$$T_{\mathrm{corr}} = \Delta t\,, \tag{3.52}$$

correspondant à la séparation entre électrons. En outre, autour de cette séparation, les corrélations décroissent sur une échelle de temps combinant les temps classiques des deux paquets,

$$\frac{2}{T^{(2)}_{ab}} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{T^{(1)}_{\mathrm{cl},a}} + \frac{1}{T^{(1)}_{\mathrm{cl},b}}\,. \tag{3.53}$$

Le facteur 2 est ajouté à la définition afin que $T^{(2)} = T^{(1)}_{\mathrm{cl}}$ si les deux paquets sont identiques.

Cette échelle de temps $T_{ab}^{(2)}$ est en fait *le* temps de cohérence quantique à deux électrons de la paire étudiée, défini de façon unique. Deux arguments permettent de le comprendre. Pour bien les visualiser, développons l'expression des fonctions d'onde à deux électrons dans l'équation (3.48),

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1,t_2|t_1',t_2') = \phi_a\left(t_1-\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_a^*\left(t_1'-\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_b\left(t_2+\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_b^*\left(t_2'+\frac{\Delta t}{2}\right) \tag{3.54a}$$

$$+\phi_b\left(t_1+\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_b^*\left(t_1'+\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_a\left(t_2-\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_a^*\left(t_2'-\frac{\Delta t}{2}\right) \tag{3.54b}$$

$$-\phi_b\left(t_1+\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_a^*\left(t_1'-\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_a\left(t_2-\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_b^*\left(t_2'+\frac{\Delta t}{2}\right) \tag{3.54c}$$

$$-\phi_a\left(t_1-\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_b^*\left(t_1'+\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_b\left(t_2+\frac{\Delta t}{2}\right)\phi_a^*\left(t_2'-\frac{\Delta t}{2}\right) \tag{3.54d}$$

Le premier point consiste à remarquer que l'ensemble de l'excès de cohérence à deux électrons est déterminé par l'unique terme (3.54a), les autres s'en déduisant par application des symétries, respectivement Σ_{12} pour (3.54b), σ_{12} pour (3.54c) et σ_{12}' pour (3.54d). Le second point est issu de l'inversion du changement de variables (3.51) et de sa substitution dans le développement (3.54). Chacune des variables naturelles intervient dans tous les paquets, ce qui, couplé aux symétries, impose que le temps caractéristique de décroissance soit le même pour chacune des variables, éventuellement à un facteur 2 près. On comprend ainsi pourquoi, dans l'exemple proposé, il n'existe qu'un seul temps de cohérence à deux électrons.

Toutefois, il est important d'insister à nouveau sur la limite fondamentale de ce résultat, qui ne prend en compte aucun processus de décohérence, qu'il s'agisse d'une décohérence homogène, où chaque électron décohère indépendamment de l'autre, ou hétérogène, impliquant les interactions entre les deux électrons.

En outre, il est évidemment possible de générer des états quantiques plus complexes qu'une simple paire, donnant naissance à plus d'un temps caractéristique de cohérence à deux électrons. À titre d'exemple, nous étudierons au paragraphe 4.4.3, page 152, une paire dont l'état est intriqué en fenêtre de temps, ce qui fait apparaître une échelle de temps supplémentaire caractérisant la cohérence à deux électrons.

3.4 Représentations en énergie et de Wigner

Comme pour la cohérence à un électron, il est intéressant de procéder à des transformations de Fourier de la cohérence à deux électrons pour accéder plus simplement aux informations qu'elle contient.

3.4.1 Représentation en énergie

Définition

La cohérence à deux électrons dans le domaine des fréquences (ou des énergies) est définie par une quadruple transformée de Fourier (5) de la représentation temporelle,

$$\widetilde{\mathcal{G}}^{(2e)}(\omega_1,\omega_2|\omega_1',\omega_2') \overset{\text{déf.}}{=} v_F^4 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1'\,\mathrm{d}t_2'\,\mathcal{G}^{(2e)}(t_1,t_2|t_1',t_2')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2-\omega_1' t_1'-\omega_2' t_2')}\ . \tag{3.55}$$

Comme attendu, $\widetilde{\mathcal{G}}^{(2e)}$ est reliée à un corrélateur à quatre points d'opérateurs de création et d'annihilation à énergie fixée,

$$\widetilde{\mathcal{G}}^{(2e)}(\omega_1,\omega_2|\omega_1',\omega_2') = \frac{4\pi^2}{v_F^2}\left\langle c^\dagger(\omega_2')\,c^\dagger(\omega_1')\,c(\omega_1)\,c(\omega_2)\right\rangle_\rho\ . \tag{3.56}$$

Les subtilités de convention qui entrent en jeu pour définir les opérateurs c sont les mêmes que précédemment, rappelées Annexe A.3, page 185.

La discussion conduisant à l'excès de cohérence à deux électrons est également valable en raisonnant non plus en termes de temps mais en termes d'énergie de détection des électrons. Par conséquent, le développement (3.37), page 85, est valable pour la cohérence dans le domaine des énergies et ne demande que de remplacer les variables de temps par les variables d'énergie.

En utilisant les variables temporelles réduites, définies équation (3.51), la représentation en fréquence s'écrit

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathcal{G}}^{(2e)}(\bar\omega,\bar\Omega,\delta\bar\omega,\delta\Omega)\\ &\qquad= \iint_{-\infty}^{+\infty} v_F^4\,\mathrm{d}\bar t\,\mathrm{d}\delta\bar t\,\mathrm{d}\bar\tau\,\mathrm{d}\delta\tau\;\mathcal{G}^{(2e)}(\bar t,\bar\tau,\delta\bar t,\delta\tau)\;\exp\left[\mathrm{i}\left(2\bar\Omega\bar t+2\bar\omega\bar\tau+\frac{1}{2}\delta\Omega\,\delta\bar t+\frac{1}{2}\delta\bar\omega\,\delta\tau\right)\right]\end{aligned} \tag{3.57}$$

où l'on introduit (6)

$$\begin{cases}\bar\omega = \dfrac{1}{4}(\omega_1+\omega_1'+\omega_2+\omega_2') = \dfrac{1}{2}\,(\bar\omega_1+\bar\omega_2)\\ \bar\Omega = \dfrac{1}{2}(\omega_1-\omega_1'+\omega_2-\omega_2') = \dfrac{1}{2}\,(\Omega_1+\Omega_2)\\ \delta\bar\omega = \dfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_1'-\omega_2-\omega_2') = \bar\omega_1-\bar\omega_2\\ \delta\Omega = \quad \omega_1-\omega_1'-\omega_2+\omega_2' \ = \Omega_1-\Omega_2\end{cases} \tag{3.58}$$

La façon dont la conjugaison des variables de Fourier s'organise est récapitulée par le tableau 3.1. Elle diffère légèrement du cas à un électron présenté au paragraphe 2.4.2, page 58. Une nouvelle fois, les variables de type « Ω » sont conjuguées aux variables de type « $\bar t$ » alors que les variables de type « $\bar\omega$ » sont conjuguées aux variables de type « τ ». En revanche, cette fois, les moyennes de deux variables de même type sont conjuguées aux moyennes des deux variables du type conjugué, et non pas à leur différence, et réciproquement. En outre, des facteurs 2 apparaissent dans la

(5). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.

(6). Les notations de la forme $\bar\omega_\alpha$ et Ω_α correspondent à celles introduites au paragraphe 2.4.2, page 58, et leurs définitions sont rappelées Annexe A.3, page 184.

Temps		Fréquence
t_1, t_2	$\leftrightarrow$	ω_1, ω_2
t'_1, t'_2	$\leftrightarrow$	ω'_1, ω'_2
$\bar{t}$	$\leftrightarrow$	$2\bar{\Omega}$
$\delta\bar{t}$	$\leftrightarrow$	$\delta\Omega/2$
$\bar{\tau}$	$\leftrightarrow$	$2\bar{\omega}$
$\delta\tau$	$\leftrightarrow$	$\delta\bar{\omega}/2$

Tab. 3.1 – Tableau récapitulatif des variables conjuguées par transformation de Fourier. Les variables de temps sont définies par l'équation (3.51), page 90, alors que les variables de fréquence sont définies par l'équation (3.58).

conjugaison. Ces variables énergétiques réduites s'interprètent grâce à l'image de la cohérence en termes de détection. Ainsi, $\bar{\omega}$ est l'énergie moyenne à laquelle ont lieu les deux événements de détection et $2\bar{\omega}$, conjuguée à la moyenne de la différence des temps $\bar{\tau}$, est l'énergie totale détectée. Par suite, $\delta\bar{\omega}$ est la différence de ces énergies. De même, $\bar{\Omega}$ est la moyenne des différences d'énergie impliquées dans chacune des détections, et $\delta\Omega$ la différence de ces différences.

Compte tenu des définitions, les propriétés de symétrie de la fonction de cohérence à deux électrons prennent la même forme qu'elles soient écrites en termes de temps ou de fréquence. En effet, les relations d'anticommutation fermionique à l'origine de ces propriétés de symétrie prennent la même forme pour les opérateurs de champ écrits en temps ou écrits en fréquence. Par conséquent, les effets du principe de Pauli dans le domaine des fréquences se déduisent directement de la discussion dans le domaine des temps. En particulier, la cohérence à deux électrons s'annule sur les plans d'équation

$$\delta\bar{\omega} = \pm\frac{1}{2}\,\delta\Omega\,. \tag{3.59}$$

Les opérateurs de symétrie associés à l'espace des fréquences seront notés d'un tilde.

Corrélations en énergie

Le plan $(\bar{\tau} = 0, \delta\tau = 0)$ de l'espace des temps quadridimensionnel a été interprété comme étant le plan diagonal, celui dans lequel sont encodées les corrélations de détection résolues en temps. Cela indique que dans l'espace des énergies ces corrélations sont encodées dans les dépendances en $\bar{\Omega}$ et $\delta\Omega$ de l'intégrale de la cohérence à deux électrons sur les variables $\bar{\omega}$ et $\delta\bar{\omega}$: on retrouve le résultat bien connu qu'une *coupe* dans l'espace des temps se traduit par une *intégrale* dans l'espace des fréquences.

Remarquons donc que dans le cas général les corrélations résolues en énergie, définies par une coupe de l'espace quadridimensionnel des fréquences dans le plan $(\bar{\Omega} = 0, \delta\Omega = 0)$, ne correspondent pas à une transformée de Fourier des corrélations résolues en temps. Ce résultat n'est une nouvelle fois pas surprenant, puisqu'il s'agit de convolutions.

Cas particulier d'un état stationnaire

La cohérence à deux électrons portée par un état stationnaire est par définition invariante sous l'action d'une translation simultanée des quatre temps. En termes des variables réduites, cela signifie qu'elle ne dépend pas du temps moyen $\bar{t}$. Elle est donc singulière dans l'espace 4d des fréquences, restreinte à l'hyperplan 3d $\bar{\Omega} = 0$. Néanmoins, contrairement au cas de la cohérence à un électron, cela ne signifie absolument pas qu'elle est totalement diagonale au sens où elle ne dépendrait que de $\bar{\omega}$ et $\delta\bar{\omega}$, puisqu'elle conserve une dépendance en $\delta\Omega$, conjuguée à la dépendance

en $\delta\bar{t}$ dans le domaine des temps. Or, en vertu des symétries, une dépendance en $\delta\bar{t}$, donc en $\delta\Omega$, est indissociable d'une dépendance en $\bar{\tau}$ et $\delta\tau$, donc en $\bar{\omega}$ et $\delta\bar{\omega}$. Par conséquent, il n'est pas possible d'interpréter la cohérence totale à deux électrons dans le domaine des énergies d'un état stationnaire comme étant un nombre d'occupation à deux électrons.

L'exemple le plus important est sans conteste la mer de Fermi. Sa cohérence à deux électrons se déduit de sa cohérence à un électron par application du théorème de Wick. L'expression dans le domaine des temps, équation (3.34), page 84, se transpose directement dans le domaine des fréquences, où

$$\widetilde{\mathcal{G}}_F^{(2e)}(\omega_1,\omega_2|\omega_1',\omega_2') = \widetilde{\mathcal{G}}_F^{(e)}(\omega_1|\omega_1')\,\widetilde{\mathcal{G}}_F^{(e)}(\omega_2|\omega_2') - \widetilde{\mathcal{G}}_F^{(e)}(\omega_1|\omega_2')\,\widetilde{\mathcal{G}}_F^{(e)}(\omega_2|\omega_1')\,. \tag{3.60}$$

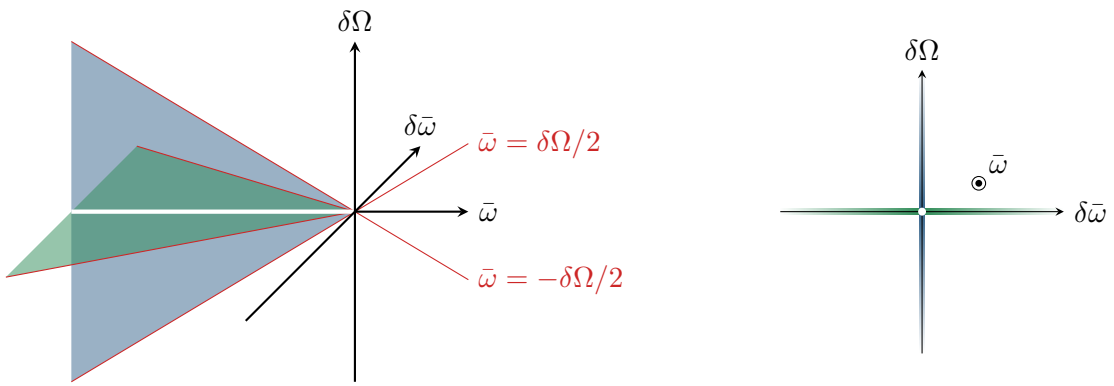
Comme la cohérence à un électron de la mer de Fermi vaut

$$\widetilde{\mathcal{G}}_F^{(e)}(\omega|\omega') = \frac{2\pi}{v_F}\, f_F\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\,\delta(\omega-\omega')\,, \tag{3.61}$$

où f_F est la fonction de distribution de Fermi–Dirac à température a priori quelconque, la cohérence à deux électrons de la mer de Fermi s'exprime en termes des variables réduites sous la forme

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{G}}_F^{(2e)}(\bar{\omega},\bar{\Omega},\delta\bar{\omega},\delta\Omega) &= \frac{4\pi^2}{v_F^2}\,\delta(\bar{\Omega})\\ &\times\left[\delta(\delta\Omega)\, f_F\left(\bar{\omega}+\frac{\delta\bar{\omega}}{2}\right) f_F\left(\bar{\omega}-\frac{\delta\bar{\omega}}{2}\right) - \delta(\delta\bar{\omega})\, f_F\left(\bar{\omega}+\frac{\delta\Omega}{2}\right) f_F\left(\bar{\omega}-\frac{\delta\Omega}{2}\right)\right]\,.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Ainsi, la cohérence à deux électrons de la mer de Fermi ne vit que dans la réunion de deux plans 2d dans l'espace 4d des fréquences. Pour se la représenter, ce n'est donc pas tant une pyramide qu'une pointe de tournevis cruciforme qu'il faut imaginer. Celle-ci est représentée figure 3.8, où pour simplifier la température est choisie nulle. Les deux termes intervenant dans l'expression de $\widetilde{\mathcal{G}}_F^{(2e)}$ sont image l'un de l'autre par application des opérateurs de symétrie $\widetilde{\sigma}_{12}$ et $\widetilde{\sigma}_{12}'$.



(a) Représentation tridimensionnelle. (b) Vue de face.

Fig. 3.8 – Cohérence à deux électrons d'une mer de Fermi à température nulle. La figure est tracée dans le sous-espace d'équation $\bar{\Omega} = 0$ où vit la cohérence à deux électrons de la mer de Fermi. Celle-ci vaut $4\pi^2$ dans chacun des plans bleu et vert, délimités par les droites rouges d'équations respectives $\bar{\omega} = \pm\delta\Omega/2$ et $\bar{\omega} = \pm\delta\bar{\omega}/2$, et est strictement nulle le long de l'intersection des plans $\delta\Omega = 0$ et $\delta\bar{\omega} = 0$. La figure (a) en donne une vue tridimensionnelle, alors que la figure (b) en propose une vue de face. L'indication de l'axe $\bar{\omega}$ a été décalée sur la figure (b) pour montrer la droite d'annulation.

La démarche se généralise en fait à n'importe quel état stationnaire, au prix de la seule substitution de la fonction de distribution de Fermi–Dirac par la fonction de distribution électronique $f(\omega)$ de l'état stationnaire étudié. En outre, une identification avec la décomposition (3.37), page 85, permet de remarquer que l'équation (3.62) est également valable pour l'excès de cohérence à deux électrons porté par l'état stationnaire, moyennant l'introduction de la fonction de distribution électronique d'excès $\delta f(\omega) = f(\omega) - f_F(\omega)$ décrivant l'état stationnaire. En effet, remplaçons $f_F(\omega)$ par $f_F(\omega) + \delta f(\omega)$ dans l'équation (3.62),

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{G}}_F^{(2e)}(\bar\omega,\bar\Omega,\delta\bar\omega,\delta\Omega) &= \frac{4\pi^2}{v_F^2}\,\delta(\bar\Omega)\\ &\times\Bigg[\delta(\delta\Omega)\,\left\{f_F\left(\bar\omega+\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)+\delta f\left(\bar\omega+\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)\right\}\times\left\{f_F\left(\bar\omega-\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)+\delta f\left(\bar\omega-\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)\right\}\\ &\quad-\delta(\delta\bar\omega)\,\left\{f_F\left(\bar\omega+\frac{\delta\Omega}{2}\right)+\delta f\left(\bar\omega+\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)\right\}\times\left\{f_F\left(\bar\omega-\frac{\delta\Omega}{2}\right)+\delta f\left(\bar\omega-\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)\right\}\Bigg].\end{aligned} \tag{3.63}$$

Quatre types de termes apparaissent en développant les produits,

- ▷ deux termes font intervenir un produit de fonctions de distribution de Fermi–Dirac et s'identifient à la fonction de cohérence à deux électrons de la mer de Fermi ;
- ▷ quatre termes font intervenir un produit de la fonction de distribution de Fermi–Dirac par la fonction de distribution d'excès et s'identifient aux termes de corrélation classique et d'échange quantique ;
- ▷ les deux termes restant font intervenir un produit de fonctions de distribution d'excès et donnent l'excès de cohérence à deux électrons porté par l'état.

Ainsi, pour un état stationnaire,

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{\mathcal{G}}^{(2e)}(\bar\omega,\bar\Omega,\delta\bar\omega,\delta\Omega) &= \frac{4\pi^2}{v_F^2}\,\delta(\bar\Omega)\\ &\times\left[\delta(\delta\Omega)\,\delta f\left(\bar\omega+\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)\,\delta f\left(\bar\omega-\frac{\delta\bar\omega}{2}\right)-\delta(\delta\bar\omega)\,\delta f\left(\bar\omega+\frac{\delta\Omega}{2}\right)\,\delta f\left(\bar\omega-\frac{\delta\Omega}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.64}$$

Classification des excitations à deux particules

Nous avons montré au paragraphe 2.4.2, page 58, que l'excès de cohérence à un électron écrit dans le domaine des énergies permet de classifier les excitations à une particule du fluide électronique. De la même façon, l'excès de cohérence à deux électrons écrit dans la représentation énergétique permet d'envisager une classification des excitations à deux particules du fluide électronique. Pour une fois, il est plus intéressant d'exprimer la cohérence à deux électrons en termes des variables initiales plutôt que des variables réduites.

Pour obtenir une première idée, commençons par analyser le plan diagonal, pour lequel $\omega_1 = \omega_1'$ et $\omega_2 = \omega_2'$. Dans l'interprétation liée à une électrodétection résolue en énergie, les énergies $\hbar\omega_1$ et $\hbar\omega_2$ sont celles de chaque particule détectée. Trois cas apparaissent alors naturellement,

- ▷ si $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 > 0$, alors deux électrons ont été détectés ;
- ▷ si $\omega_1 < 0$ et $\omega_2 < 0$, alors deux trous ont été détectés ;
- ▷ si ω_1 et ω_2 sont de signe différent, c'est-à-dire $\omega_1\,\omega_2 < 0$, alors un électron et un trou ont été détectés.

Cette décomposition donne alors un découpage du plan diagonal en quatre zones, représenté figure 3.9. Notons que la symétrie $\widetilde{\Sigma}_{12}$ préserve les zones (2e) et (2h) mais fait correspondre les deux zones (e+h) l'une avec l'autre. Il est donc naturel de regrouper ces deux zones en une seule dans l'interprétation. Remarquons que le principe de Pauli impose l'annulation stricte de la cohérence à deux électrons le long de la droite d'équation $\delta\bar\omega = 0$, c'est-à-dire de l'axe $\bar\omega$: le plan diagonal est en fait coupé en deux demi-plans séparés.

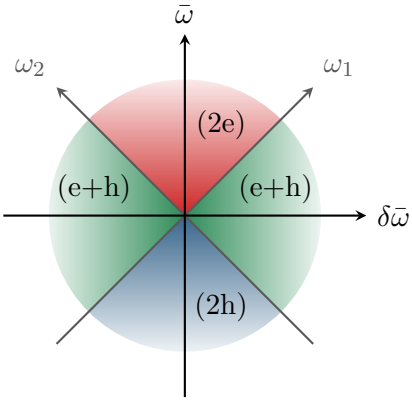


Fig. 3.9 – Nature des quasi-particules détectées en fonction des contributions à la cohérence dans le plan diagonal. Les contributions de la cohérence à deux électrons au plan diagonal définissent trois secteurs associés respectivement à des excitations de type paire d'électrons (2e), paire de trous (2h) et paire électron–trou (e+h).

Étendre la classification est nécessaire car le plan diagonal ne suffit pas à décrire l'ensemble de l'espace quadridimensionnel. Celui-ci se trouve en fait décomposé en six secteurs 4d, définis par le signe des différentes énergies mises en jeu $(\omega_1, \omega_2|\omega'_1, \omega'_2)$. Cette décomposition généralise celle présentée au paragraphe 2.4.2, page 58. Exactement comme dans le cas à un électron, connaître la cohérence à deux électrons en énergie portée par un état quantique permet d'accéder à la nature des excitations qui le véhiculent. Les différents types d'excitations à deux particules donnent naissance à différents secteurs de l'espace 4d où la cohérence est non-nulle,

- ▷ paire d'électrons (2e) : quatre énergies positives ;
- ▷ paire de trous (2h) : quatre énergies négatives ;
- ▷ paire électron–trou (e+h) : $\omega_1\omega_2 < 0$ et $\omega'_1\omega'_2 < 0$;
- ▷ cohérence entre un électron et une paire électron–trou (e+e/h) : trois énergies positives, la quatrième négative ;
- ▷ cohérence entre un trou et une paire électron–trou (h+e/h) : trois énergies négatives, la quatrième positive ;
- ▷ cohérence entre deux paires électron–trou (e+h/e+h) : ou bien $(\omega_1 > 0, \omega_2 > 0, \omega'_1 < 0, \omega'_2 < 0)$, ou bien $(\omega_1 < 0, \omega_2 < 0, \omega'_1 > 0, \omega'_2 > 0)$.

Un point important est la stabilité des différents secteurs sous l'action des opérateurs de symétrie.

Le plan diagonal ne coupe que les trois premiers secteurs : exactement comme pour les excitations à une particule, les corrélations de détections résolues en énergie ne peuvent pas révéler la cohérence entre excitations à deux particules. En outre, un raisonnement analogue à celui développé au paragraphe 2.4.2, page 58, reposant sur l'inégalité de Cauchy–Schwartz (3.5), montre qu'un état ne peut contenir de cohérence entre excitations à deux particules que s'il contient également les excitations de type paires associées.

Mentionnons pour terminer que l'accès aux *excitations* à deux particules du fluide électronique demande bien de s'intéresser à *l'excès* de cohérence à deux électrons, et pas à la cohérence à deux électrons totale. En effet, les termes de corrélation classique et d'échange quantique du développement (3.37), page 85, de la cohérence totale à deux électrons impliquent à la fois la mer de Fermi et l'excès de cohérence à un électron. Dans le cas extrême d'un état monoélectronique formé par un électron dans un paquet d'ondes cohérent, nous avons montré au paragraphe 3.2.3, page 87, que l'excès de cohérence à deux électrons est nul. Un tel état n'est donc associé à aucune excitation à deux particules. Pourtant, les termes croisés de la cohérence totale sont non-nuls dans le secteur décrivant les paires électron–trou.

3.4.2 Représentation de Wigner

Exactement comme pour la cohérence à un électron, introduisons maintenant une représentation de Wigner. Celle-ci n'a pour le moment fait l'objet que de développements très exploratoires, et la compréhension de la physique à laquelle elle permet d'accéder est loin d'être achevée. L'étude d'exemples explicites est en particulier indispensable.

Définition

Dans le but de conserver une représentation adaptée à la détection plutôt qu'aux symétries, la transformée de Fourier (7) de la cohérence à deux électrons dans l'espace des temps est prise par rapport aux variables $\tau_1 = t_1 - t_1'$ et $\tau_2 = t_2 - t_2'$. On pose donc

$$\mathcal{W}^{(2e)}(\bar{t}_1, \bar{\omega}_1; \bar{t}_2, \bar{\omega}_2) \overset{\text{déf.}}{=} v_F^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{d}\tau_2\, \mathcal{G}^{(2e)}\left(\bar{t}_1 + \frac{\tau_1}{2}, \bar{t}_2 + \frac{\tau_2}{2} \,\middle|\, \bar{t}_1 - \frac{\tau_1}{2}, \bar{t}_2 - \frac{\tau_2}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\bar{\omega}_1\tau_1 + \bar{\omega}_2\tau_2)} \,. \tag{3.65}$$

Une définition équivalente peut également être proposée à partir de la représentation en énergie, puisque

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(2e)}&(\bar{t}_1, \bar{\omega}_1\,; \bar{t}_2, \bar{\omega}_2)\\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega_1}{2\pi\, v_F} \frac{\mathrm{d}\Omega_2}{2\pi\, v_F}\, \widetilde{\mathcal{G}}^{(2e)}\left(\bar{\omega}_1 + \frac{\Omega_1}{2}, \bar{\omega}_2 + \frac{\Omega_2}{2} \,\middle|\, \bar{\omega}_1 - \frac{\Omega_1}{2}, \bar{\omega}_2 - \frac{\Omega_2}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\Omega_1\bar{t}_1 + \Omega_2\bar{t}_2)} \,.\end{aligned} \tag{3.66}$$

Remarquons qu'il s'agit d'une grandeur sans dimension.

Par hermiticité de la cohérence à deux électrons, ou en d'autres termes par application de l'opérateur de conjugaison complexe C, la fonction de Wigner à deux électrons est à valeurs réelles. En outre, l'application de l'opérateur d'échange classique Σ_{12} montre que la fonction de Wigner à deux électrons est invariante par échange des deux électrons,

$$\mathcal{W}^{(2e)}(\bar{t}_1, \bar{\omega}_1; \bar{t}_2, \bar{\omega}_2) = \mathcal{W}^{(2e)}(\bar{t}_2, \bar{\omega}_2; \bar{t}_1, \bar{\omega}_2)\,. \tag{3.67}$$

Cela tend à indiquer que les variables appropriées pour la décrire au mieux sont en fait $\bar{t}$ et $\delta\bar{t}$ pour les temps et $\bar{\omega}$ et $\delta\bar{\omega}$ pour les énergies. Ce sont donc finalement les variables réduites qui réapparaissent, puisque

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega} + \frac{\delta\bar{\omega}}{2} \qquad \text{et} \qquad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega} - \frac{\delta\bar{\omega}}{2}\,, \tag{3.68}$$

alors que

$$\bar{t}_1 = \bar{t} + \frac{\delta\bar{t}}{2} \qquad \text{et} \qquad \bar{t}_2 = \bar{t} - \frac{\delta\bar{t}}{2}\,. \tag{3.69}$$

Distributions marginales

Un intérêt de la fonction de Wigner à un électron est la signification physique de ses distributions marginales, qui donnent accès au courant résolu en temps et au nombre d'occupation en énergie. En termes plus techniques, nous avons montré au paragraphe 2.4.3, page 60, qu'intégrer la fonction de Wigner par rapport à une de ses deux variables donne accès à la partie diagonale de la cohérence associée à l'autre variable.

Procédons de même pour la fonction de Wigner à deux électrons. Cette fois, en intégrant non plus sur une mais sur les deux variables du même type, on montre par le même raisonnement que

$$\iint \mathrm{d}\bar{\omega}_1\, \mathrm{d}\bar{\omega}_2\, \mathcal{W}^{(2e)}(\bar{t}_1, \bar{\omega}_1; \bar{t}_2, \bar{\omega}_2) = (2\pi v_F)^2\, \mathcal{G}^{(2e)}(\bar{t}_1, \bar{t}_2 | \bar{t}_1, \bar{t}_2) \tag{3.70}$$

$$\text{et} \qquad \iint \mathrm{d}\bar{t}_1\, \mathrm{d}\bar{t}_2\, \mathcal{W}^{(2e)}(\bar{t}_1, \bar{\omega}_1; \bar{t}_2, \bar{\omega}_2) = \frac{1}{(2\pi\, v_F)^2}\, \widetilde{\mathcal{G}}^{(2e)}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 | \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)\,. \tag{3.71}$$

(7). Les conventions de transformation de Fourier sont définies Annexe A.3, page 184.

Le résultat du chapitre précédent se généralise donc au cas de deux électrons : intégrer la fonction de Wigner donne accès à la partie diagonale de la cohérence relative aux variables de l'autre type. Dans le cas présent, la première distribution marginale décrit les corrélations de deux détections résolues en temps, qui s'apparentent aux fluctuations du courant dans le conducteur quantique, étudiées de longue date dans la communauté mésoscopique [102, 121]. La seconde distribution marginale décrit quant à elle les corrélations de deux détections résolues en énergie, qui peuvent s'identifier à un nombre d'occupation à deux particules, introduit par M. Moskalets [124] qui envisage également un dispositif simple permettant de le mesurer.

Cependant, les mêmes précautions doivent être prises que dans le cas à un électron pour interpréter la fonction de Wigner. En particulier, il ne s'agit pas d'un nombre d'occupation à deux électrons dépendant du temps.

Décomposition générale de la fonction de Wigner à deux électrons

La décomposition générale de la cohérence à deux électrons, équation (3.37), page 85, se transpose bien sûr en termes de fonction de Wigner. L'analyser sous cet angle permet de gagner un nouveau regard sur la signification physique des différents termes.

En premier lieu, la fonction de Wigner à deux électrons de la mer de Fermi se calcule directement à partir de son expression dans le domaine des énergies, équation (3.62), page 99. La transformation de Fourier donne

$$\mathcal{W}_F^{(2e)}(t_1,\omega_1;t_2,\omega_2) = f_F(\omega_1)\, f_F(\omega_2) \tag{3.72a}$$

$$- \delta(\omega_1-\omega_2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega(t_1-t_2)}\, f_F\left(\frac{\omega_1+\omega_2+\Omega}{2}\right) f_F\left(\frac{\omega_1+\omega_2-\Omega}{2}\right). \tag{3.72b}$$

Le terme (3.72a) est une simple traduction en fonction de Wigner des corrélations classiques entre électrons de la mer de Fermi. Il est intéressant de noter que le terme (3.72b), qui décrit l'échange quantique entre deux électrons, n'est non nul que pour $\omega_1 = \omega_2$. Cela indique que dans la mer de Fermi des électrons d'énergie différente sont discernables, ou en d'autres termes que l'énergie est un nombre quantique bien adapté pour décrire l'état de la mer de Fermi. L'intégrale mise en jeu est tabulée [75], ce qui permet d'écrire la fonction de Wigner à deux électrons de la mer de Fermi à température T sous la forme

$$\mathcal{W}_F^{(2e)}(t_1,\omega_1;t_2,\omega_2) = \frac{1}{\left(1+\mathrm{e}^{\hbar\omega_1/k_\mathrm{B}T}\right)\left(1+\mathrm{e}^{\hbar\omega_2/k_\mathrm{B}T}\right)} \tag{3.73a}$$

$$- 4\pi\, k_\mathrm{B}T\,\delta(\omega_1-\omega_2)\,\frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar(\omega_1+\omega_2)/k_\mathrm{B}T}-1}\,\frac{\sin\left[(\omega_1+\omega_2)(t_1-t_2)\right]}{\sinh\left(\frac{t_1-t_2}{\tau_\mathrm{th}}+\mathrm{i}0^+\right)}, \tag{3.73b}$$

où le temps de cohérence thermique $\tau_\mathrm{th} = \hbar/\pi k_\mathrm{B}T$ caractéristique de la mer de Fermi a été introduit au paragraphe 2.3.1, page 47. Le terme d'échange quantique se traduit donc sous forme d'oscillations de la fonction de Wigner à deux électrons. À énergie fixée, le décalage de temps typique sur lequel les oscillations s'amortissent est donné par le temps thermique τ_th. Par ailleurs, à décalage de temps $t_1 - t_2 = 0$, l'amplitude des oscillations croît proportionnellement à l'énergie. La contribution du terme d'échange quantique (3.73b) restreinte au plan $\omega_1 = \omega_2$ est représentée figure 3.10.

La décomposition discutée précédemment indique que des processus de corrélations classiques contribuent à la cohérence à deux électrons. Leur passage en fonction de Wigner est sans surprise

$$\mathcal{W}_\mathrm{corr}^{(2e)}(t_1,\omega_1;t_2,\omega_2) = f_F(\omega_1)\,\Delta\mathcal{W}^{(e)}(t_2,\omega_2) + f_F(\omega_2)\,\Delta\mathcal{W}^{(e)}(t_1,\omega_1)\,. \tag{3.74}$$

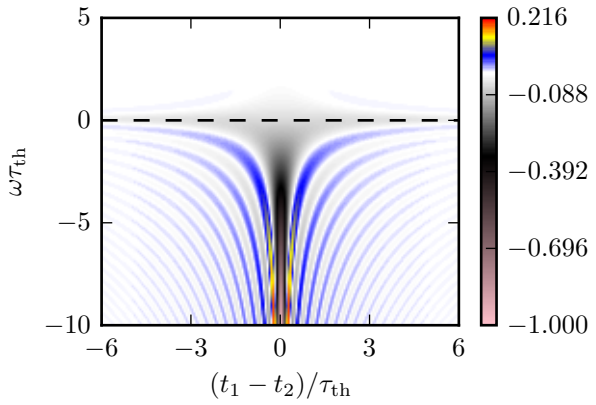


Fig. 3.10 – Contribution de l'échange quantique à la fonction de Wigner à deux électrons de la mer de Fermi. Le terme (3.73b) est calculé dans le sous-espace d'équation $\omega_1 = \omega_2 \overset{\text{déf.}}{=} \omega$ en fonction de l'écart de temps $t_1 - t_2$. Les pointillés noirs indiquent le niveau de Fermi $\omega = 0$. La figure a été normalisée par sa valeur maximale (environ 800), mais il ne s'agit pas d'une normalisation absolue.

Plus intéressant, la contribution des processus d'échange quantique à la fonction de Wigner à deux électrons s'écrit sous la forme

$$\mathcal{W}^{(2\mathrm{e})}_{\text{éch}}(t_1, \omega_1; t_2, \omega_2) = -2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau \, \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \cos\left[\Omega(t_1 - t_2) - (\omega_1 - \omega_2)\tau\right] \\ f_F\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \Omega}{2}\right) \Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}\left(\frac{t_1 + t_2 - \tau}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2 - \Omega}{2}\right). \tag{3.75}$$

La présence du préfacteur en cosinus dans l'intégrale montre que celle-ci est fortement modulée lorsque les différences de temps ou d'énergie considérées sont grandes devant l'étalement typique en l'autre variable de la fonction de Wigner d'excès injectée. En outre, ce préfacteur donne au terme d'échange des valeurs négatives autant que positives : cela confirme que la fonction de Wigner à deux électrons ne peut pas s'interpréter comme une fonction de distribution à deux électrons dépendant du temps.

Enfin, la dernière contribution est la fonction de Wigner en excès portée par l'état quantique. Dans le cas particulier d'un état stationnaire, elle s'écrit sous une forme directement analogue à l'équation (3.72) en remplaçant la fonction de distribution électronique de la mer de Fermi par la fonction de distribution électronique d'excès apportée par l'état stationnaire $\delta f(\omega) = f(\omega) - f_F(\omega)$.

3.5 Degré de cohérence à deux électrons, indiscernabilité et antibunching

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des *fonctions* de cohérence. Néanmoins, R. Glauber lui-même [72] a perçu l'intérêt d'introduire des fonctions de cohérence normalisées, appelées *degrés* de cohérence. Commençons par un retour sur la théorie photonique avant d'examiner l'information apportée par les degrés de cohérence électronique.

3.5.1 Retour sur l'optique, degrés de cohérence photoniques

Définition

Partant des fonctions de cohérence définies à tout ordre, introduites au paragraphe 2.1.3, page 38, Glauber introduit le degré de cohérence d'ordre n d'un champ électromagnétique sous la forme d'une quantité normalisée et adimensionnée, à savoir

$$g^{(n\text{-ph})}(1,\,\dots,n|1',\,\dots,n') \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\mathcal{G}^{(n\text{-ph})}(1,\,\dots,n|1',\,\dots,n')}{\prod_{j=1}^{n}\mathcal{G}^{(\text{ph})}(j|j)\,\mathcal{G}^{(\text{ph})}(j'|j')}\,, \tag{3.76}$$

où comme à l'accoutumée $j \overset{\text{déf.}}{=} (\vec{r}_j, t_j)$ désigne un point de l'espace-temps. Rappelons que la fonction de cohérence d'ordre n est définie par l'intermédiaire de l'opérateur de champ électrique $\vec{E}$, séparé en ses composantes fréquences positives $\vec{E}^{(+)}$ et négatives $\vec{E}^{(-)}$, sous la forme

$$\mathcal{G}^{(n\text{-ph})}(1,\,\dots,n|1',\,\dots,n') = \mathrm{Tr}\left[\vec{E}^{(+)}(n)\,\dots\,\vec{E}^{(+)}(1)\,\rho\,\vec{E}^{(-)}(1')\,\dots\,\vec{E}^{(-)}(n')\right]\,. \tag{3.77}$$

La fonction de cohérence d'ordre n décrit la probabilité de détection conjointe de n photons. Qualitativement, le degré de cohérence d'ordre n compare donc les probabilités de détection conjointe à ce qu'elles seraient si les événements de détection étaient deux à deux indépendants, permettant une factorisation des probabilités.

Lien à la statistique du flux de photons

En optique ondulatoire, les degrés de cohérence apportent des informations de nature statistique sur le champ électromagnétique [26, 36]. De façon analogue, les degrés de cohérence photonique apportent des informations sur les propriétés statistiques du flux de photons.

Pour les illustrer simplement, considérons d'une part un seul détecteur ponctuel situé en $\vec{r}$, ce qui permet d'omettre les variables de position, et d'autre part un champ électromagnétique dont les propriétés statistiques sont stationnaires. On s'intéresse au degré de cohérence à deux photons,

$$g^{(2\text{ph})}(\tau) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\mathcal{G}^{(2\text{ph})}(t, t+\tau|t, t+\tau)}{\mathcal{G}^{(\text{ph})}(t|t)\,\mathcal{G}^{(\text{ph})}(t+\tau|t+\tau)}\,, \tag{3.78}$$

qui ne dépend bel et bien que de τ compte tenu de l'hypothèse de stationnarité. Physiquement, $g^{(2\text{ph})}(\tau)$ compare la probabilité conditionnelle de détecter un photon en $t+\tau$ sachant qu'un photon a été détecté en t à la valeur qu'aurait cette probabilité si les deux détections étaient parfaitement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout rayonnement fluctuant, on attend [58]

$$g^{(2\text{ph})}(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 1\,, \tag{3.79}$$

indiquant la perte de corrélation aux temps longs par effet des fluctuations.

Un cas de référence correspond à un rayonnement vérifiant $g^{(2\mathrm{ph})}(\tau) = 1$ pour tout τ, pour lequel les événements de détection sont indépendants. Un tel rayonnement est dit cohérent [(8)]. Comme son nom l'indique, un champ électromagnétique dans un état cohérent est cohérent. Le flux de photons obéit alors à une statistique poissonnienne. Une distinction des rayonnements est ensuite possible en comparant la valeur limite du degré de cohérence $g^{(2\mathrm{ph})}(\tau)$ aux temps courts $\tau \to 0$ à ce cas de référence.

Dans un rayonnement pour lequel $g^{(2\mathrm{ph})}(0) > 1$, les photons ont tendance à arriver globalement groupés, phénomène dénommé *bunching*. La statistique du flux de photons d'un tel rayonnement est super-poissonnienne, ce qui signifie que les fluctuations sont plus importantes que dans le cas d'un rayonnement cohérent. Notons que tous les rayonnements obtenus par des sources thermiques classiques appartiennent à cette catégorie. À partir de l'opérateur densité d'un rayonnement thermique, on montre en effet que pour un tel rayonnement,

$$g^{(2\mathrm{ph})}(\tau) = 1 + \left|g^{(\mathrm{ph})}(\tau)\right|^2 , \tag{3.80}$$

où $g^{(\mathrm{ph})}(\tau)$ est le degré de cohérence à un seul photon, défini par

$$g^{(\mathrm{ph})}(\tau) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\mathcal{G}^{(\mathrm{ph})}(t|t+\tau)}{\sqrt{\mathcal{G}^{(\mathrm{ph})}(t|t)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{ph})}(t+\tau|t+\tau)}} . \tag{3.81}$$

Enfin, les photons d'un rayonnement vérifiant $g^{(2\mathrm{ph})}(0) < 1$ ont tendance à être séparés, ce qui porte le nom d'*antibunching*. La statistique associée est sous-poissonnienne, ce qui traduit la moindre importance des fluctuations du flux de photons par rapport au cas d'un rayonnement cohérent. Compte tenu de l'équation (3.80), un rayonnement sous-poissonnien ne peut correspondre qu'à un état du champ intrinsèquement non-classique. L'exemple emblématique de rayonnement non-classique est celui d'un état à nombre de photons défini, appelé *état nombre*. Pour un état nombre à $n \geq 2$ photons, on peut en effet montrer que

$$g^{(2\mathrm{ph})}(0) = 1 - \frac{1}{n} . \tag{3.82}$$

De façon plus précise, L. Mandel a établi un lien entre la statistique du nombre n_T de photons détectés dans une fenêtre de temps $[-T/2; T/2]$ et le degré de cohérence d'ordre deux $g^{(2\mathrm{ph})}(\tau)$ sous la forme

$$\langle n_T^2\rangle - \langle n_T\rangle^2 - \langle n_T\rangle = \frac{\langle n_T\rangle^2}{T^2}\int_{-T}^{+T} \mathrm{d}\tau \left(T - |\tau|\right)\left(g^{(2\mathrm{ph})}(\tau) - 1\right) , \tag{3.83}$$

où les moyennes sont des moyennes statistiques. Cette relation est connue sous le nom de *formule de Mandel*.

3.5.2 Degré de cohérence à deux électrons

En optique quantique électronique, la quantité d'intérêt n'est pas tant la cohérence électronique totale que l'excès de cohérence apporté par un état quantique du fluide électronique. C'est donc en ces termes que nous proposons de définir le degré de cohérence à deux électrons intrinsèque à l'état quantique en posant

$$g^{(2\mathrm{e})}(t_1, t_2) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1, t_2|t_1, t_2)}{\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_2)} . \tag{3.84}$$

(8). Glauber définit en fait un champ parfaitement cohérent comme étant un champ dont le degré de cohérence vaut 1 à tous les ordres.

C'est dans le cas général une fonction de deux temps qui jouent des rôles symétriques, puisque

$$g^{(2e)}(t_1, t_2) = g^{(2e)}(t_2, t_1)\,. \tag{3.85}$$

L'utilisation des variables réduites $\bar{t} = (t_1 + t_2)/2$ et $\tau = t_1 - t_2$ est donc la mieux adaptée. L'écart de temps τ introduit ici coïncide avec la variable réduite $\delta\bar{t}$ introduite au paragraphe 3.1.3, page 80, la notation étant changée pour respecter l'usage en optique.

L'interprétation physique du degré de cohérence à deux électrons est la même que celle du degré de cohérence photonique d'ordre 2. Avoir $g^{(2e)} = 1$ traduit l'indépendance statistique des deux événements d'électrodétection considérés, alors que des valeurs différentes sont associées à des phénomènes de bunching ou d'antibunching électronique. Remarquons que $g^{(2e)}(t, t) = 0$, signe d'un antibunching parfait, conséquence attendue du principe de Pauli.

Considérons un état vérifiant le théorème de Wick. L'excès de cohérence à deux électrons s'exprime alors sous la forme (3.41), page 87,

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1, t_2) = \Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_2) - \Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_1)\,, \tag{3.86}$$

ce qui conduit à écrire le degré de cohérence à deux électrons sous la forme

$$g^{(2e)}(t_1, t_2) = 1 - \frac{|\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_2)|^2}{\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_2)}\,. \tag{3.87}$$

Ainsi, l'information sur un éventuel bunching ou antibunching électronique est codée dans la partie hors-diagonale de la cohérence à un électron. Cela indique que bien que le degré de cohérence ne dépende que des parties diagonales des excès de cohérence à un et deux électrons, les parties hors-diagonale y ont pourtant une influence prépondérante. En revanche, l'amplitude et la nature précise du phénomène dépend également des parties diagonales, reliées au courant moyen. Si l'état quantique considéré est purement électronique, alors à tout instant $\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t|t) \geq 0$, et seul un phénomène d'antibunching peut avoir lieu.

Généraliser la formule de Mandel (3.83) en optique quantique électronique demande de prendre des précautions. On peut montrer qu'elle est formellement valable dans le cas électronique en prenant en compte le flux électronique total, c'est-à-dire en écrivant les moyennes statistiques des nombres d'électrons « détectés » dans la fenêtre de temps $[-T/2; +T/2]$ en termes de cohérences totales sous la forme

$$\langle N_T^2\rangle = v_F^2 \iint_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1, t_2) \qquad \text{et} \qquad \langle N_T\rangle = v_F \int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t\,\mathcal{G}^{(e)}(t|t)\,, \tag{3.88}$$

mais aussi en définissant le degré de cohérence à deux électrons à partir des cohérences *totales*, et pas seulement d'excès. Néanmoins cette approche est peu pertinente : la présence d'une mer de Fermi fait que les grandeurs mesurables ne sont pas les cohérences totales, mais sont reliées aux parties d'excès. Une formule de Mandel généralisée sera proposée au paragraphe 4.1.4, page 123, une fois que le lien entre les grandeurs accessibles expérimentalement et les cohérences électroniques aura été établi.

Avant cela, pour mieux comprendre cette notion de degré de cohérence à deux électrons, nous allons le calculer sur des exemples diversifiés, une paire d'électrons localisés en temps, un train d'électrons et un état stationnaire obtenu par application d'une tension continue à un contact ohmique.

3.5.3 Degré de cohérence à deux électrons d'une paire d'électrons

Reprenons l'exemple étudié de façon exhaustive au paragraphe 3.3, à savoir une paire cohérente de paquets monoélectroniques identiques, centrés sur les instants $-\Delta t/2$ et $+\Delta t/2$. Les excès de cohérence à un et deux électrons ont été calculés équations (3.44) et (3.48), page 89, ce qui permet d'en déduire directement le degré de cohérence à deux électrons.

Ce dernier est représenté figure 3.11 pour une paire de levitons monoélectroniques séparés de $\Delta t = 10\,\tau_{\mathrm{e}}$, où il est mis en vis-à-vis des termes intervenant au numérateur et au dénominateur pour comparaison. En outre, le degré de cohérence à deux électrons est représenté figure 3.12 pour des paires de levitons séparés différemment, en l'occurrence $\Delta t = 2\tau_{\mathrm{e}}$ et $\Delta t = 20\tau_{\mathrm{e}}$. Rappelons que l'expression d'un paquet d'ondes leviton, donnée équation (2.68), page 51, s'écrit

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{\tau_{\mathrm{e}}}{\pi\, v_F}}\,\frac{1}{t + \mathrm{i}\tau_{\mathrm{e}}} \tag{3.89}$$

Enfin, la figure 3.13 le représente pour une paire de paquets d'ondes émis par un condensateur mésoscopique, dont la forme a été donnée au paragraphe 2.5.2, page 64,

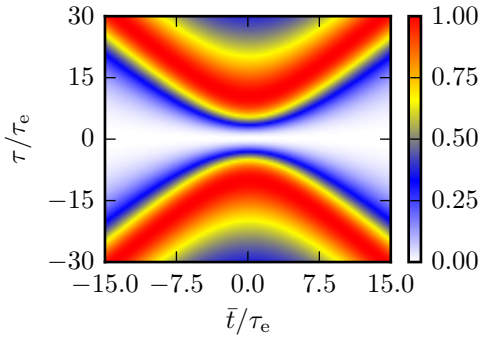
$$\phi(t) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\gamma_{\mathrm{e}}}{\mathcal{N}\, v_F}}\,\mathrm{e}^{-2\gamma_{\mathrm{e}}t + \mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}t}\left[\Theta(t) - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{Ei}\left(\frac{\gamma_{\mathrm{e}}}{2}t - \mathrm{i}\omega_{\mathrm{e}}t\right)\right]\,, \tag{3.90}$$

où Ei désigne la fonction exponentielle intégrale [75], $\gamma_{\mathrm{e}} = 1/\tau_{\mathrm{e}}$ la largeur des niveaux de la boîte quantique et ω_{e} l'énergie d'injection du paquet.

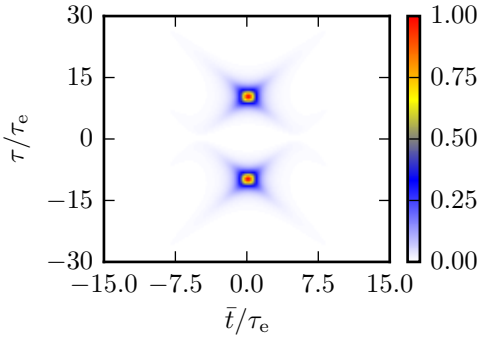
Le degré de cohérence à deux électrons présente une allure très différente de l'excès de cohérence diagonal associé. Renormaliser le terme de corrélations permet donc de mettre sur le devant de la scène de façon spectaculaire un autre type d'informations qu'il contient. Remarquons que le degré de cohérence n'a été renormalisé sur aucune des figures : il est donc toujours inférieur à 1, comme attendu sur ces exemples où les paquets sont purement électroniques. En outre, comparer les figures 3.13a et 3.13b montre que des effets peu visibles sur la cohérence à un électron peuvent modifier drastiquement le degré de cohérence à deux électrons. Dans l'exemple choisi des paquets émis par un condensateur mésoscopique, nous expliqué au paragraphe 2.5.2, page 64, que lorsque l'énergie d'injection est suffisamment élevée, le terme en exponentielle intégrale qui traduit la troncature en énergie du paquet d'onde n'a plus aucune influence sur la fonction de Wigner. En revanche, le négliger affecte fortement l'allure du degré de cohérence à deux électrons.

Un premier élément à constater sur toutes les figures est la présence d'une ligne de Pauli d'équation $\tau = 0$, qui se distingue par un antibunching parfait. Néanmoins, pour les levitons cette ligne est plutôt une vallée qui s'étend de part et d'autre d'un col. La largeur minimale du col en $\bar{t} = 0$ correspond à l'écart Δt entre les deux levitons, ou dans un contexte plus large au temps de corrélation T_{corr} introduit au paragraphe 3.3.3, page 95. Dans le cas des paquets émis par le condensateur mésoscopique, le col est réduit à un unique point en raison de la singularité dans le paquet émis, qui traduit la singularité dans la tension de grille imposée à la boîte quantique. Le temps de corrélation T_{corr} contrôle néanmoins l'écart entre les pointes des canaux sur lesquels le degré de cohérence à deux électrons est maximal, représentés en rouge sur les figures. Ces canaux sont associés à une indépendance statistique.

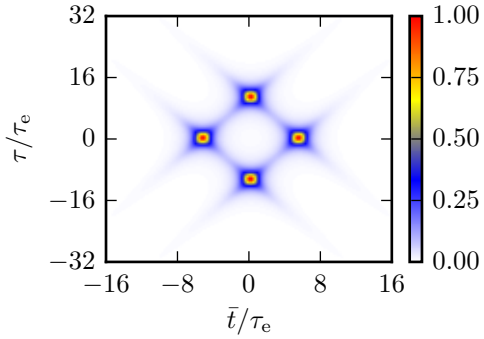
Expliquer pourquoi cette vallée de Pauli s'ouvre n'est pas si intuitif. On pourrait commencer par penser que lorsque le temps moyen de détection $\bar{t}$ est éloigné du temps auquel les paquets d'ondes sont maximaux (ici, $|\bar{t}| \gg \Delta t$) le caractère fermionique devient de moindre importance et l'effet d'antibunching s'amoindrit, mais il n'en est rien. En fait, lorsque le temps $|\bar{t}|$ augmente, la différence entre les deux fonctions d'onde décrivant les électrons est de moins en moins importante : le terme au dénominateur est dominé par $\bar{t}$, le décalage de Δt ne compte en proportion presque plus. En d'autres termes, l'indiscernabilité des électrons est renforcée lorsque $|\bar{t}|$ augmente, et l'effet du principe de Pauli l'est également. Un effet identique explique la décroissance



(a) Degré de cohérence à deux électrons $g^{(2e)}(\bar{t}, \tau)$.

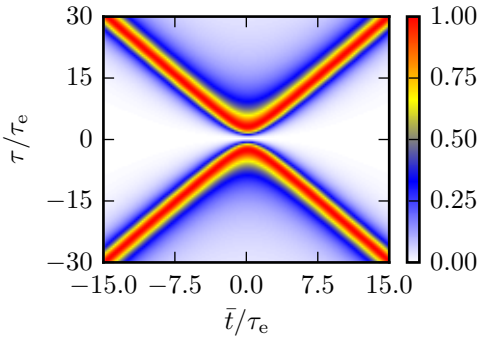


(b) $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(\bar{t}+\frac{\tau}{2}, \bar{t}-\frac{\tau}{2} \,|\, \bar{t}+\frac{\tau}{2}, \bar{t}-\frac{\tau}{2})$.

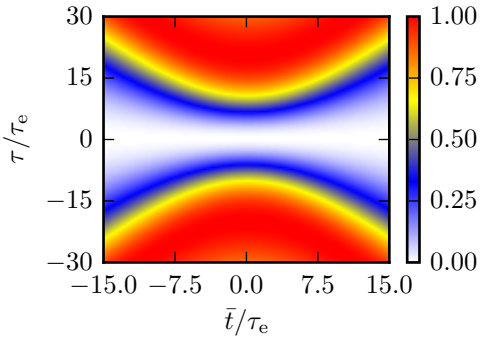


(c) $\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t+\frac{\tau}{2} \,|\, t+\frac{\tau}{2})\, \Delta\mathcal{G}^{(e)}(t-\frac{\tau}{2} \,|\, t-\frac{\tau}{2})$.

Fig. 3.11 – Degré de cohérence et corrélations d'une paire de levitons. Les deux levitons sont monoélectroniques, séparés de $\Delta t = 10\tau_e$. Le calcul se base sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement, dont le module vaut environ 0.2. Les corrélations représentées figure (b) sont le terme au numérateur. Il est normalisé, et correspond exactement à la figure 3.4, page 90. Le produit des excès de cohérence à un électron représenté figure (c) est le terme intervenant au dénominateur. Il est également normalisé.

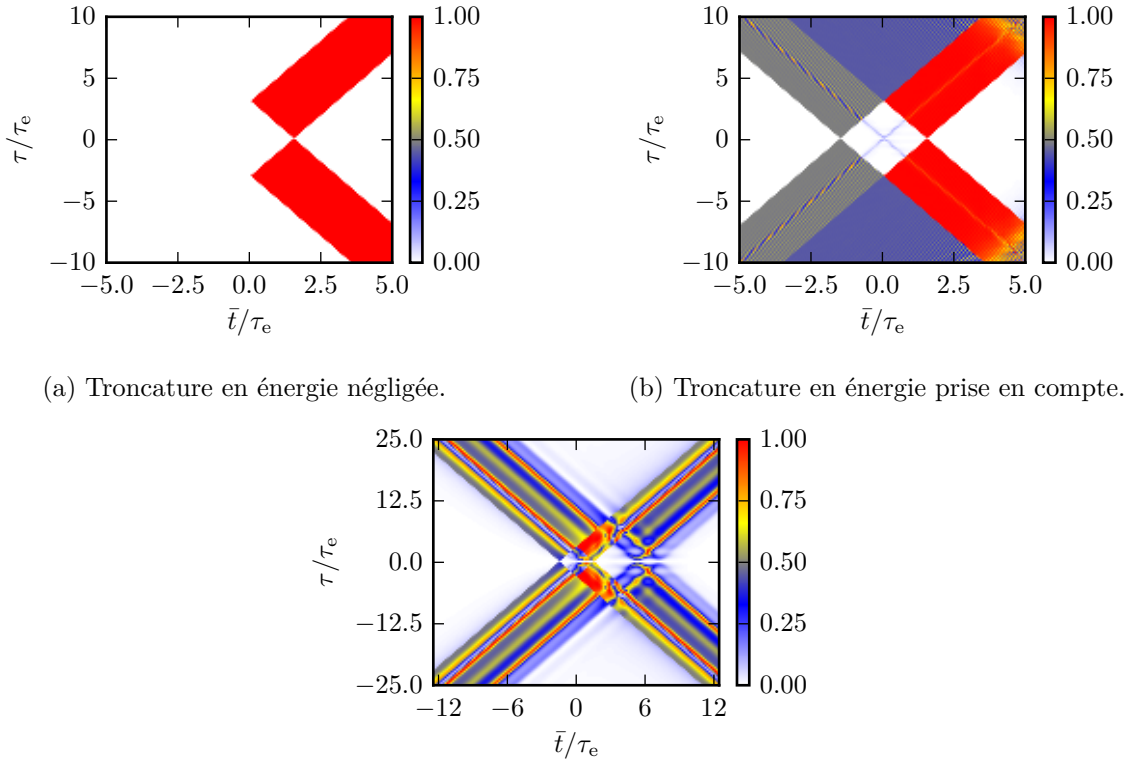


(a) $\Delta t = 2\tau_e$.



(b) $\Delta t = 20\tau_e$.

Fig. 3.12 – Degré de cohérence à deux électrons de paires de levitons. Les deux levitons sont monoélectroniques, séparés de (a) $\Delta t = 2\tau_e$, et (b) $\Delta t = 20\tau_e$. Le calcul se base sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement. Les échelles de temps sont les mêmes sur les deux figures et sur la figure 3.11.



(a) Troncature en énergie négligée.

(b) Troncature en énergie prise en compte.

(c) Paquets émis à basse énergie.

Fig. 3.13 – Degré de cohérence à deux électrons de paires de paquets émis par un condensateur mésoscopique. Les deux paquets sont monoélectroniques, séparés de $\Delta t = 3\tau_e$. Le calcul se base sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement. La figure (a) présente des paquets idéaux où la troncature en énergie (le terme en Ei) est négligée, alors que la figure (b) la prend en compte. Dans les deux cas les paquets sont émis à haute énergie $\omega_e \tau_e = 50$, correspondant à la figure 2.12b. Le recouvrement est pris en compte et son module vaut environ 0.05. La figure (c) prend en compte la troncature en énergie et représente des paquets émis à très basse énergie $\omega_e \tau_e = 3$. Le recouvrement est pris en compte et son module vaut environ 0.1.

observée lorsque $|\tau|$ augmente. L'importance de la renormalisation est ainsi mise en exergue : lorsque $|\bar{t}| \gg \tau_{\mathrm{e}}$, la probabilité d'une détection est très faible, mais ce qu'enseigne l'argument avancé est que la probabilité d'une double détection l'est encore plus que ce qu'elle serait si les électrons étaient classiques. Cet effet est d'origine quantique, et n'est pas directement visible sur la partie diagonale.

Reste désormais à comprendre l'origine des canaux apparaissant en rouge autour des droites d'équation $\tau = \pm 2\bar{t}$, associés à une indépendance statistique des deux événements. Leur largeur est contrôlée à nouveau par le temps de corrélation T_{corr}, ou plus précisément par la durée totale de la paire, ce qui ici revient au même mais aura une importance par la suite. Il est important de remarquer qu'ils ne coupent pas la droite de Pauli $\tau = 0$ en raison de l'antibunching. Ces canaux sont en fait ceux pour lesquels l'argument simple qui était faux précédemment devient valide. Le long de ces droites, un des temps de détection t_1 ou t_2 est égal à 0 alors que l'autre vaut $2\bar{t}$. Par conséquent, une des détections a lieu près du maximum d'une des fonctions d'onde alors que la seconde en est très éloignée. Les deux électrons sont donc très discernables, ce qui réduit l'influence du principe de Pauli.

3.5.4 Degré de cohérence à deux électrons d'un état stationnaire

Pour comprendre plus finement l'information portée par le degré de cohérence à deux électrons, considérons un exemple diamétralement opposé, celui d'un état stationnaire. Supposons celui-ci issu d'un contact ohmique auquel est appliqué une tension continue V_0, connecté à la mer de Fermi dont la température T est non-nulle.

L'état ainsi construit vérifie le théorème de Wick, ce qui permet de calculer directement le degré de cohérence à partir de la cohérence à un électron. Celle-ci a été calculée au paragraphe 2.3.1, page 47, et vaut

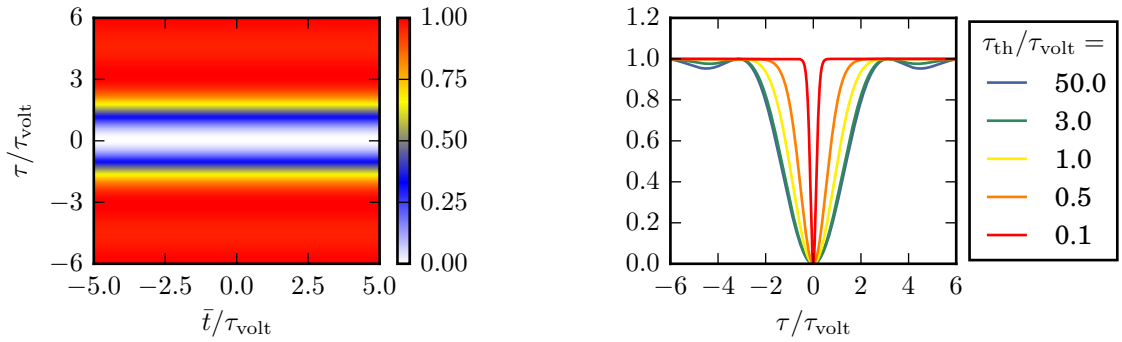
$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\, v_F\, \tau_{\mathrm{th}} \sinh\left(\frac{(t-t')}{\tau_{\mathrm{th}}} + \mathrm{i}0^+\right)} \exp\left[-2\mathrm{i}\frac{(t-t')}{\tau_{\mathrm{volt}}}\right] \tag{3.91}$$

où deux échelles de temps de cohérence apparaissent, la première $\tau_{\mathrm{th}} \overset{\text{déf.}}{=} \hbar/\pi k_{\mathrm{B}} T$ étant associée aux effets thermiques et la seconde $\tau_{\mathrm{volt}} \overset{\text{déf.}}{=} 2\hbar/eV_0$ au décalage de tension imposé par le contact ohmique. Après calcul, le degré de cohérence à deux électrons s'écrit

$$g^{(2\mathrm{e})}(\tau) = 1 - \left[\frac{\tau_{\mathrm{volt}}}{\tau_{\mathrm{th}}} \frac{\sin\left(\frac{\tau}{\tau_{\mathrm{volt}}}\right)}{\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_{\mathrm{th}}} + \mathrm{i}0^+\right)}\right]^2 . \tag{3.92}$$

Ce résultat est l'analogue direct du résultat (3.80), page 106, mais en termes d'électrons et non plus de photons. La différence vient du signe $-$, qui traduit la nature fermionique des électrons. Ce résultat est conforme à ce que l'on pouvait attendre. En effet, l'application d'une tension continue donne naissance à un état quasi-classique dans le conducteur quantique au sens du critère énoncé au paragraphe 2.4.3, page 62, stipulant que la fonction de Wigner à un électron d'un tel état est comprise entre 0 et 1. Remarquons également que ce degré de cohérence est à nouveau toujours inférieur à 1. Ainsi, seul de l'antibunching entre électrons peut avoir lieu dans un tel état stationnaire.

Le degré de cohérence à deux électrons obtenu équation (3.92) est représenté figure 3.14. La figure 3.14a en donne une représentation bidimensionnelle identique à celle des figures 3.11 et 3.12, alors que la figure 3.14b représente une coupe le long d'une ligne $\bar{t} = \mathrm{cte}$. Cette dernière figure permet également de mettre en évidence l'influence de la température sur le degré de cohérence à deux électrons.



(a) Représentation bidimensionnelle.

(b) Représentation unidimensionnelle.

Fig. 3.14 – Degré de cohérence à deux électrons d'un état stationnaire. Le degré de cohérence $g^{(2e)}(\bar{t},\tau)$ tracé correspond à l'équation (3.92). Figure (a) : représentation 2d identique à celle des figures 3.11 et 3.12, obtenue dans une limite de basse température $\tau_{\rm th} = 50\,\tau_{\rm volt}$. Figure (b) : représentation en coupe le long d'une ligne $\bar{t} = $ cte, obtenue pour différentes valeurs du temps thermique $\tau_{\rm th} = \hbar/\pi k_{\rm B}T$ indiquées en légende.

Le temps caractéristique de la cohérence à deux électrons qui apparaît dans l'équation (3.92) et sur la figure 3.14 est le plus petit des temps $\tau_{\rm volt}$ et $\tau_{\rm th}$. Dans la limite de température nulle, le temps thermique $\tau_{\rm th}$ est infini. C'est donc l'échelle de temps $\tau_{\rm volt}$ qui gouverne le degré de cohérence à deux électrons : les courbes correspondant à $\tau_{\rm th} = 50\,\tau_{\rm volt}$ et $\tau_{\rm th} = 3\,\tau_{\rm volt}$ sont pratiquement confondues. En interprétant le temps $\tau_{\rm volt}$ comme un analogue du temps de corrélation $T_{\rm corr}$ introduit sur l'exemple de la paire cohérente, on retrouve l'image bien connue qui stipule qu'un décalage de potentiel chimique, ici par une tension continue, s'interprète comme l'envoi dans le canal d'un train d'électrons régulièrement espacés de $\tau_{\rm volt}$ [121]. Toutefois, remarquons la nuance apportée par la prise en compte des effets thermiques. Le temps caractérisant le degré de cohérence à deux électrons n'est un temps de corrélation qu'à température nulle et plus largement hors de tout phénomène de décohérence. Lorsque de tels phénomènes sont pris en compte et deviennent prépondérant, c'est le temps caractéristique qui leur est associé qui gouverne le degré de cohérence, ce qui est clairement visible sur les courbes correspondant à $\tau_{\rm th} = 0.5\,\tau_{\rm volt}$ et $\tau_{\rm th} = 0.1\,\tau_{\rm volt}$. Cela permet de se rendre compte que le degré de cohérence apporte davantage d'informations qu'une mesure de corrélations classiques, puisqu'il est également affecté par la décohérence.

Mentionnons qu'une situation voisine a été étudiée très récemment par K. Thibaut *et al.* [168], qui ont mesuré les fluctuations de courant émis par une jonction tunnel métal–isolant–métal commandée en tension. Les effets des deux échelles de temps mentionnées ci-dessus se retrouvent dans leurs résultats.

3.5.5 Entre la paire et l'état stationnaire, un train d'électrons cohérents

Pour mieux comprendre comment un comportement de type tension continue peut émerger de la succession d'électrons uniques, il est instructif de considérer un cas intermédiaire entre ces deux extrêmes. Intéressons-nous donc maintenant à un train de N électrons, décrits par le même paquet d'ondes $\phi(t)$ mais séparés deux à deux d'un intervalle de temps Δt. L'état quantique s'écrit

$$|N\rangle = \psi^\dagger[\phi_N]\,\psi^\dagger[\phi_{N-1}]\,\cdots\,\psi^\dagger[\phi_1]\,|F\rangle = \overleftarrow{\prod_{n=1}^{N}}\,\psi^\dagger[\phi_n]\,|F\rangle\ , \tag{3.93}$$

avec $\phi_n(t) = \phi\,[t - (n-1)\,\Delta t]$. Dans la limite où les électrons sont bien séparés, $\Delta t \gg \tau_\mathrm{e}$, les paquets d'ondes peuvent être supposés deux à deux orthogonaux. Un tel exemple a été envisagé autour de la même problématique par M. Albert et P. Devillard [4], mais sous une approche différente, celle de la distribution des temps d'attente après partitionnement sur un QPC. La discussion proposée ici est essentiellement descriptive et la compréhension fine de cet exemple demanderait des investigations plus poussées.

Excès de cohérence à deux électrons

La discussion de la cohérence à deux électrons portée par une paire se généralise sans peine. Dans la limite des paquets orthogonaux [(9)], le théorème de Wick conduit à l'excès de cohérence à un électron porté par le train, qui vaut

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t)\,\phi_n^*(t')\,. \tag{3.94}$$

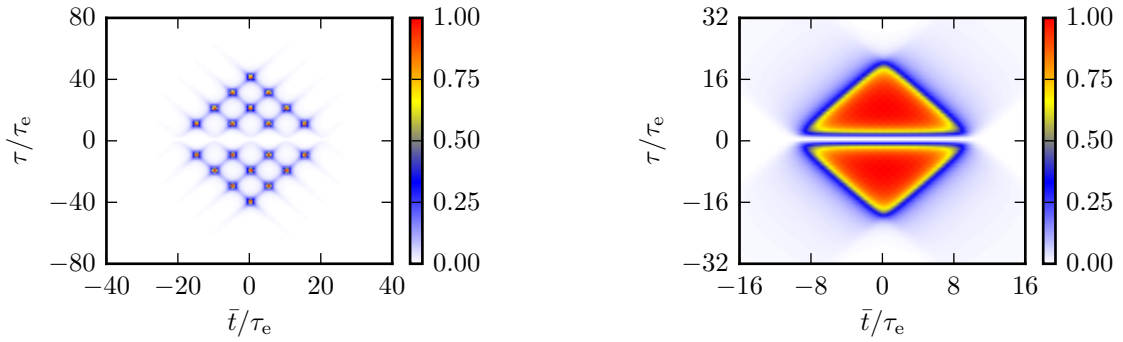
L'excès de cohérence à un électron est donc la somme des excès de cohérence à un électron portés par chaque électron du train. L'équation (3.41), page 87, qui exprime la cohérence à deux électrons en termes de cohérence à un électron pour un état vérifiant le théorème de Wick, permet alors d'en déduire directement l'excès de cohérence à deux électrons porté par le train. Ce dernier s'écrit

$$\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1',t_2') = \sum_{\substack{\text{paires}\\(nm)}} \Phi_{nm}(t_1,t_2)\,\Phi_{nm}^*(t_1',t_2')\,, \tag{3.95}$$

où Φ_{nm} désigne la fonction d'onde à deux électrons, c'est-à-dire le déterminant de Slater introduit équation (3.49), page 89, construit à partir des fonctions d'ondes à un électron ϕ_n et ϕ_m. La démonstration est analogue à celle de l'équation (3.48), page 89, donnant l'excès de cohérence à deux électrons porté par une seule paire, au prix de quelques lourdeurs dans la manipulation des indices. Indiquons notamment que tous les termes pour lesquels $n = m$ s'annulent, ce qui est conforme au principe de Pauli. Cette expression est la généralisation directe du résultat (3.94), avec pour différence la sommation sur les paires et non plus sur les électrons individuels.

Sans entrer à nouveau dans le détail des différentes coupes de la cohérence à deux électrons, calculons les corrélations de détection véhiculées par ce train. Celles-ci sont représentées figure 3.15. Elles sont représentées comme précédemment en fonction des variables $\bar{t}$ et τ, la variable τ utilisée ici s'identifiant à la variable réduite $\delta\bar{t}$ introduite au paragraphe 3.1.3, page 80. Dans l'espace quadridimensionnel, la figure représente une coupe dans le plan $(\bar{\tau} = 0, \delta\tau = 0)$. Deux limites sont envisagées, celle d'un train de quelques excitations bien séparées, $\Delta t = 10\,\tau_\mathrm{e}$, et la limite inverse où les excitations sont plus nombreuses et se recouvrent fortement, $\Delta t = \tau_\mathrm{e}$. Considérer ces deux limites de densités différentes pour le train permet de distinguer sans ambiguïté les phénomènes contrôlés par la durée totale du train de ceux pilotés par l'écart entre deux électrons consécutifs. La possibilité de détecter deux électrons aux deux extrémités du train permet à ces corrélations de se développer plus largement tant dans la direction $\bar{t}$ que dans la direction τ. La taille typique de la zone de l'espace des temps sur lequel ces corrélations sont visibles correspond à la longueur du train, $N\,\Delta t$. Lorsque les excitations sont bien séparées, les corrélations continuent de prendre la forme de pics bien localisés, rendant légitime de définir le temps de corrélation par $T_\mathrm{corr} = \Delta t$. En revanche, lorsque les excitations sont très rapprochées, les corrélations apparaissent sous la forme d'un continuum. Analyser Δt comme une échelle de temps de corrélation n'a plus de sens. Cela ne veut pas dire pour autant qu'elle n'intervient plus dans le comportement de l'état quantique, ce que permet de révéler le degré de cohérence à deux électrons.

(9). J'ai de nouveau choisi de présenter les équations dans cette approximation car elles sont plus lisibles, mais de prendre en compte le recouvrement dans les évaluations numériques.



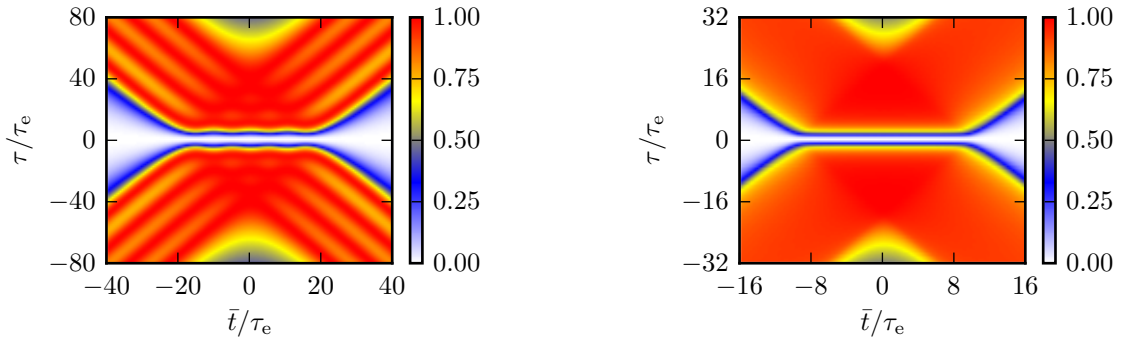
(a) Cinq levitons séparés de $\Delta t = 10\,\tau_e$.

(b) Vingt levitons séparés de $\Delta t = \tau_e$.

Fig. 3.15 – Corrélations d'un train de levitons. Coupe diagonale de l'excès de cohérence à deux électrons portée par un train de levitons. Les figures ont été normalisées. Les levitons sont monoélectroniques. Le calcul repose sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement, dont le module entre deux paquets consécutifs vaut environ 0.2 figure (a) et 0.9 figure (b). La plage de temps sur laquelle les figures sont tracées correspond à 1.6 fois la longueur du train.

Degré de cohérence à deux électrons

Le degré de cohérence à deux électrons est représenté figure 3.16. Comme attendu, un comportement mixte entre celui d'une paire et celui d'un état stationnaire est clairement visible.



(a) Cinq levitons séparés de $\Delta t = 10\,\tau_e$.

(b) Vingt levitons séparés de $\Delta t = \tau_e$.

Fig. 3.16 – Degré de cohérence à deux électrons d'un train de levitons. Les levitons sont monoélectroniques. Le calcul repose sur le théorème de Wick et prend en compte le recouvrement, dont le module entre deux paquets consécutifs vaut environ 0.2 figure (a) et 0.9 figure (b). La plage de temps sur laquelle les figures sont tracées correspond à 1.6 fois la longueur du train.

La vallée de Pauli prend la forme d'un canal étroit de longueur $N\,\Delta t$ mais de largeur Δt, indépendante de la longueur du train. Cela est en accord avec l'interprétation donnée du temps τ_{volt} dans le cas de l'état stationnaire. Au contraire, la largeur des canaux d'indépendance statistique est égale à la durée totale du train. Lorsque le train ne contient que peu d'électrons, des oscillations sont visibles dans les canaux d'indépendance statistique. Leur période correspond à l'écart entre deux électrons consécutifs. Celles-ci ne sont plus visibles lorsque le train est plus dense.

En augmentant progressivement la longueur du train d'électrons, on s'attend donc à voir la vallée de Pauli se refermer sur elle-même pour ne devenir plus qu'un canal étroit, alors que les bandes d'indépendance statistique pourront recouvrir le reste de l'espace, donnant naissance à un comportement analogue à celui d'un état stationnaire.

3.6 Conclusion

L'objet au cœur de ce deuxième chapitre est la fonction de cohérence à deux électrons. L'introduire est naturel pour analyser les corrélations des événements d'électrodétection. Comme pour la cohérence à un électron, accéder aux propriétés intrinsèques à l'état émis par une source électronique demande de retrancher les contributions mettant en jeu la mer de Fermi. La soustraction est maintenant plus subtile, car des effets de corrélation classique et d'échange quantique sont à prendre en compte. Le point fort de la méthode que nous avons proposée est sa généralité. Elle tient indépendamment de la prise en compte des interactions, et se généralise pour définir l'excès de cohérence électronique à tout ordre.

Analyser les conséquences de l'antisymétrie de Pauli, qui prend sa source dans la nature fermionique des électrons, est un point clé pour comprendre la cohérence à deux électrons. Nous avons montré que grâce à elle, il suffit de connaître la fonction de cohérence à deux électrons sur un huitième de l'espace dans lequel elle est définie pour la connaître totalement. De plus, interpréter un effet comme étant d'origine classique ou quantique demande de nouvelles précautions.

Pour mieux voir comment les effets d'indiscernabilité et d'antibunching se manifestent, nous avons étendu la démarche de R. Glauber en montrant qu'il est intéressant de normaliser l'excès de cohérence à deux électrons pour définir un degré de cohérence. Bien que contenant une information équivalente, il présente un comportement très différent des corrélations. Par exemple, cette quantité permet d'analyser comment un état stationnaire émerge d'un train d'électrons régulièrement espacés.

Chapitre 4

Faire interférer pour mesurer et contrôler les cohérences

Alors que les deux chapitres précédents étaient focalisés sur le contenu physique des fonctions de cohérence à un et deux électrons, en ne donnant qu'une image qualitative de leur lien avec les grandeurs mesurables expérimentalement, l'objet de ce chapitre est au contraire de présenter des protocoles pouvant être implémentés expérimentalement et permettant de mesurer les fonctions de cohérence. Chacun de ces protocoles propose d'exploiter de façon judicieuse des interférences quantiques à une ou deux particules. Plusieurs de ces méthodes étaient déjà connues de la communauté et ont été reformulées en termes du formalisme présenté dans les deux chapitres précédents, ce qui a permis de gagner un éclairage différent et de voir se manifester des analogies ou des extensions nouvelles. Le protocole de mesure de l'excès de cohérence à deux électrons s'inspire quant à lui de dispositifs déjà envisagés par différents groupes, mais est nouveau dans ce contexte.

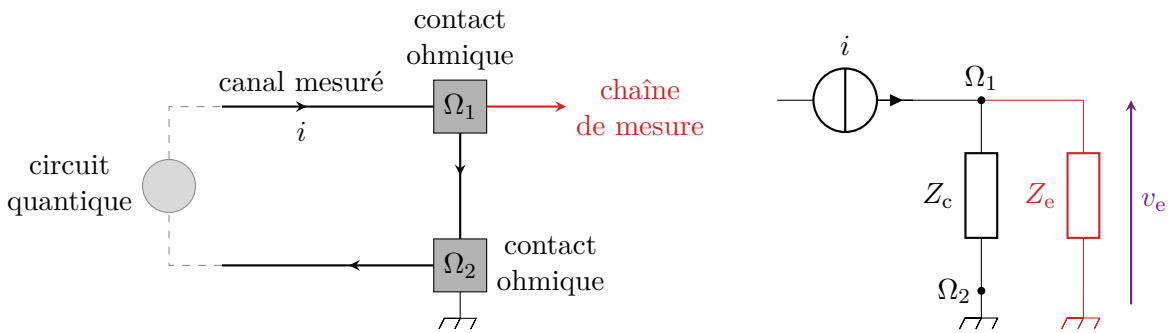
Pour commencer, il est indispensable de s'intéresser aux quantités accessibles dans les expériences, et d'établir leur lien avec les fonctions de cohérence, ce qui est présenté au paragraphe 4.1. Dans un deuxième temps, paragraphe 4.2, l'interférométrie Mach–Zehnder à un électron est analysée sous l'angle de la cohérence électronique, et plus précisément sous l'angle de la mesure de la cohérence hors-diagonale. Pour aller plus loin, il est nécessaire au paragraphe 4.3 de s'intéresser aux interférences à deux électrons sur un contact ponctuel quantique, ce qui permet de transposer à l'électronique quantique cohérente les expériences fondatrices de l'optique quantique de Hanbury Brown–Twiss et Hong–Ou–Mandel. La possibilité de mesurer l'excès de cohérence à deux électrons par interférométrie à deux particules est ensuite envisagée au paragraphe 4.4. Le dispositif proposé, proche d'un interféromètre de Franson [59], couple un interféromètre de Hanbury Brown–Twiss à deux interféromètres de Mach–Zehnder. Il permet de déduire l'excès de cohérence complet à partir de quantité résolues en temps, ou par exemple de détecter des signatures de l'intrication en fenêtre de temps à partir de quantités intégrées. Pour terminer ce chapitre, la question de la génération de cohérence à deux électrons par interférométrie est abordée au paragraphe 4.5. Un deuxième éclairage est apporté sur l'interféromètre de Franson électronique, et un autre dispositif, l'interféromètre de Samuelsson [157], est analysé sous l'angle de la cohérence à deux électrons.

4.1 Que peut-on mesurer directement ?

Commençons par relier les grandeurs directement mesurables expérimentalement aux fonctions de cohérence électronique introduites précédemment. Pour compléter ce paragraphe, des détails sur les protocoles utilisés quotidiennement par le groupe de G. Fève au laboratoire Pierre Aigrain de l'ENS Paris sont présentés Annexe A.1, page 177.

4.1.1 Géométrie à trois terminaux

Les dispositifs de mesure reposent sur une géométrie dite à trois terminaux, schématisée figure 4.1. Le principe est globalement toujours le même, mais les détails de la chaîne de mesure changent en fonction de la quantité mesurée.



(a) Schéma de principe du montage expérimental. (b) Circuit électrique équivalent.

Fig. 4.1 – Géométrie à trois terminaux. Le canal de bord est connecté à un premier contact ohmique Ω_1 dont le potentiel électrique est mesuré relativement à celui du contact ohmique Ω_2, relié à la masse. L'entrée de la chaîne de mesure est représentée en rouge. Elle est caractérisée par son impédance d'entrée Z_e alors que la portion de canal entre les contacts Ω_1 et Ω_2 est caractérisée par l'impédance Z_c. La tension d'entrée v_e est celle qui est effectivement mesurée.

Le canal dans lequel le courant i est mesuré est connecté à un premier contact ohmique Ω_1. D'après le modèle de la sonde de tension proposé par M. Büttiker [32], introduit au paragraphe 1.3.3, page 17, les électrons décohèrent dans le contact ohmique et leur état quantique est perdu : l'état en sortie du contact est un état d'équilibre au potentiel électrique v_1 du contact Ω_1, celui-ci s'ajustant pour assurer la conservation de la charge. Le potentiel v_1 est mesuré à l'aide d'une chaîne de mesure d'impédance d'entrée Z_e. Le canal de bord est ensuite connecté à un second contact ohmique Ω_2, dont le potentiel électrique est cette fois fixé et pris comme référence de masse. Le courant entrant dans le courant Ω_2 est évacué par l'intermédiaire du drain imposant la tension de masse. En sortie du contact Ω_2, l'état du fluide électronique est une mer de Fermi de potentiel nul. Le troisième terminal de la dénomination correspond au circuit quantique étudié, et plus précisément à son composant générant les excitations.

Pour utiliser des termes plus habituels d'électrocinétique, le dispositif utilisé réalise une conversion courant–tension par l'intermédiaire d'une impédance. Le circuit équivalent associé est représenté figure 4.1b. La conservation de la charge du contact Ω_1 d'une part et le choix du contact Ω_2 comme masse d'autre part imposent le potentiel v_1 par l'intermédiaire de la loi d'Ohm. Celle-ci s'écrit en remarquant que l'impédance d'entrée Z_e de la chaîne de mesure et l'impédance Z_c de la portion de gaz bidimensionnel reliant les contacts Ω_1 et Ω_2 sont montées en parallèle. Par conséquent, le courant se déduit de la mesure du potentiel d'entrée dans la chaîne de mesure v_e par

$$i = \left(\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_e}\right) v_e \,. \tag{4.1}$$

Dans les échantillons du groupe de G. Fève, l'impédance Z_c de la portion de canal de bord est purement résistive et vaut $Z_\mathrm{c} = h/(\nu e^2)$ avec ν le facteur de remplissage, et est donc de l'ordre de $10\,\mathrm{k}\Omega$. Cette expression se comprend bien en termes de conductance, puisque e^2/h est le quantum de conductance, c'est-à-dire la conductance d'un canal unique, et ν le nombre de canaux contribuant au transport, comme expliqué au paragraphe 1.2.2, page 11. La conductance totale du gaz bidimensionnel est donc $\nu e^2/h$. La chaîne de mesure de courant a une impédance d'entrée résistive de $50\,\Omega$ alors que celle de la chaîne de mesure de bruit est un résonateur passe-bande.

4.1.2 Courant résolu en temps ou en fréquence

À quelle cohérence peut-on accéder ?

Le courant électrique est la première quantité mesurable. Pour comprendre le lien avec les cohérences, qui font intervenir des opérateurs quantiques au lieu des grandeurs de l'électrocinétique classique, commençons par bien préciser de quel courant il s'agit.

Comme une mesure quantique est fondamentalement probabiliste, les mesures réalisées ne permettent que de reconstruire des valeurs moyennes d'opérateurs par moyennage statistique. En outre, le contact ohmique Ω_2 émet une mer de Fermi à potentiel électrochimique nul, qui ne contribue donc pas aux quantités mesurées. Le courant mesuré n'est en fait que l'excès de courant transporté par le canal par rapport à cette mer de Fermi de référence. Par conséquent, le courant $\overline{i(t)}$ mesuré par moyennage sur un grand nombre de répétitions de la même expérience vaut [1]

$$\overline{i(t)} = \langle \hat{I}(t) \rangle_\rho - \langle \hat{I}(t) \rangle_F \qquad \text{avec} \qquad \hat{I}(t) = -e\, v_F\, \psi^\dagger(t)\, \psi(t)\,, \tag{4.2}$$

où ρ est la matrice densité décrivant l'état quantique du canal entrant dans le contact ohmique Ω_1 et F la mer de Fermi à potentiel nul. Le chapeau a été ajouté sur $\hat{I}$ pour insister sur son caractère d'opérateur quantique. L'intérêt de cette discussion est de montrer que le courant mesuré par la chaîne de mesure est directement relié à l'excès de cohérence à un électron véhiculé par le canal d'entrée, puisque

$$\overline{i(t)} = -e\, v_F\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t)\,. \tag{4.3}$$

En pratique, pour minimiser l'influence du bruit parasite de l'environnement électromagnétique et d'éventuelles imperfections de l'échantillon, le courant $\overline{i(t)}$ est mesuré source allumée puis source éteinte, l'excès de cohérence correspondant à la différence entre les mesures dans les deux situations. La conclusion importante est que seule la partie diagonale de l'excès de cohérence à un électron est accessible par un dispositif de mesure tel que celui utilisé par le groupe de G. Fève. Remarquons que cela est en accord avec l'idée d'une décohérence rapide dans le contact ohmique : toute l'information sur la cohérence hors-diagonale est perdue.

Une question naturelle est celle du lien avec le modèle d'électrodétection utilisé pour introduire la fonction de cohérence au paragraphe 2.2, page 40. Les dispositifs sont en fait diamétralement opposés : ici, tous les électrons entrent dans le contact ohmique de détection Ω_1 alors que le couplage était supposé très faible dans le modèle précédent. Il est donc normal que les résultats diffèrent. Néanmoins, nous montrerons dans la suite de ce chapitre comment des parties hors-diagonale de la cohérence peuvent être mesurées par l'intermédiaire d'un contact ohmique.

(1). En toute rigueur, l'équation donne accès au vecteur densité de courant mesuré, dont il faut calculer le flux au travers d'une surface pour obtenir le courant électrique. La surface en question correspond à celle d'une section transverse d'une des électrodes, et ne sera plus mentionnée dans ce manuscrit.

Implémentation et limitations

La chaîne de mesure utilisée au laboratoire Pierre Aigrain, reposant sur un dispositif de détection homodyne, est discutée en détail Annexe A.1, page 178. En jouant astucieusement sur les composants utilisés, les fréquences accessibles s'étendent sur une gamme allant de 700 MHz à 9 GHz, ce qui correspond à une résolution temporelle maximale de l'ordre de 100 ps, voisine de la largeur temporelle typique des paquets d'ondes émis. Un autre dispositif, utilisant une carte d'acquisition rapide, permet de réaliser les mesures directement en temps mais ne donne pas accès à une meilleure résolution [116, 118].

Ces restrictions expérimentales rendent la mesure directe de l'excès de cohérence diagonal $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t)$ par cette méthode délicate par manque de résolution. Accéder à plus de précision est possible à l'aide d'interférences à deux particules sur une lame séparatrice dans un interféromètre de type Hong–Ou–Mandel dont le bruit de sortie est mesuré. Avant de s'y intéresser, précisons comment se font les mesures d'un tel bruit.

4.1.3 Bruit de courant et corrélations

Définition

Le bruit de courant $S^{(i)}$ a été introduit au paragraphe 1.3.4, page 18. Il est défini par

$$S^{(i)}(t_1,t_2) = \overline{\delta i(t_1)\,\delta i(t_2)} = \overline{i(t_1)\,i(t_2)} - \overline{i(t_1)}\;\overline{i(t_2)}\,. \tag{4.4}$$

où les fluctuations de courant δi dans le canal de bord constituent la grandeur d'intérêt. Une nouvelle fois, il est important d'en donner une définition précise pour faire apparaître le lien avec les fonctions de cohérence. Les fluctuations à considérer sont celles du courant i étudié précédemment. Elles sont définies par

$$\delta i(t) = i(t) - \overline{i(t)}\,. \tag{4.5}$$

De façon précise, $i(t)$ est le courant mesuré à l'instant t dans une réalisation de l'expérience alors que $\overline{i(t)}$ est la moyenne statistique sur l'ensemble des réalisations du courant mesuré à l'instant t. Le moyennage statistique se fait à nouveau par moyennage temporel en reproduisant périodiquement l'expérience.

Mesurer un bruit résolu en temps n'est pas chose aisée, et la quantité généralement mesurée est le bruit moyenné à la pulsation ω,

$$\widetilde{S}^{(i)}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\mathrm{d}\bar{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\tau\, S^{(i)}\left(\bar{t}+\frac{\tau}{2},\bar{t}-\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\ . \tag{4.6}$$

Comme la définition implique $S^{(i)}(t_1,t_2) = S^{(i)}(t_2,t_1)$ tant que les courants sont classiques alors le bruit à fréquence finie $\widetilde{S}^{(i)}(\omega)$ est nécessairement pair en fréquence.

Bruit et cohérences électroniques

Puisque une moyenne statistique permet de reconstruire une moyenne quantique, le bruit de courant $S^{(i)}$ est relié à l'opérateur courant $\hat{I}$. Néanmoins relier le bruit classique défini équation (4.4) à un bruit quantique impliquant des opérateurs n'est pas immédiat : comme les opérateurs courant à deux temps différents ne commutent a priori pas, la prescription d'ordre dans le produit $\langle\hat{I}(t_1)\,\hat{I}(t_2)\rangle$ n'est pas évidente. Une théorie de portée très générale développée par I. Safi et P. Joyez [151] permet en fait de montrer que tant que l'ensemble du dispositif, incluant la ligne de mesure, est dans un régime linéaire alors l'égalité $S^{(i)}(t_1,t_2) = S^{(i)}(t_2,t_1)$, évidente pour le bruit classique, demeure vraie pour le bruit quantique. Supposons travailler dans ce cadre, dans lequel la prescription d'ordre n'a plus d'importance.

Comme l'état de sortie du contact ohmique Ω_2 qui sert de référence est la mer de Fermi à potentiel nul, il faut soustraire sa contribution. Ce faisant, le bruit de courant s'écrit

$$S^{(i)}(t_1,t_2) = \left[\langle \hat{I}(t_1)\,\hat{I}(t_2)\rangle_\rho - \langle \hat{I}(t_1)\rangle_\rho\,\langle \hat{I}(t_2)\rangle_\rho\right] - \left[\langle \hat{I}(t_1)\,\hat{I}(t_2)\rangle_F - \langle \hat{I}(t_1)\rangle_F\,\langle \hat{I}(t_2)\rangle_F\right]. \tag{4.7}$$

Cette quantité est également désignée par le nom de « bruit d'excès », mais nous l'appellerons plus simplement « bruit ». Elle se calcule en fonction des cohérences à un et deux électrons véhiculées par le canal de bord en utilisant la définition de l'opérateur courant et la relation d'anti-commutation fermionique.

Commençons par calculer le premier terme, en l'écrivant en termes d'opérateurs de création et annihilation.

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}(t_1)\,\hat{I}(t_2)\rangle_\rho - \langle \hat{I}(t_1)\rangle_\rho\,\langle \hat{I}(t_2)\rangle_\rho &= (e\,v_F)^2 \\ &\times\left[\left\langle \psi^\dagger(t_1)\,\psi(t_1)\,\psi^\dagger(t_2)\,\psi(t_2)\right\rangle_\rho - (e\,v_F)^2\left\langle \psi^\dagger(t_1)\,\psi(t_1)\right\rangle_\rho\left\langle \psi^\dagger(t_2)\,\psi(t_2)\right\rangle_\rho\right]\end{aligned} \tag{4.8}$$

Par anti-commutation appliquée dans le premier terme,

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}(t_1)\,\hat{I}(t_2)\rangle_\rho - \langle \hat{I}(t_1)\rangle_\rho\,\langle \hat{I}(t_2)\rangle_\rho &= (e\,v_F)^2 \\ &\times\left[\frac{1}{v_F}\,\delta(t_1-t_2)\left\langle \psi^\dagger(t_1)\,\psi(t_2)\right\rangle_\rho - \left\langle \psi^\dagger(t_1)\,\psi^\dagger(t_2)\,\psi(t_1)\,\psi(t_2)\right\rangle_\rho\right. \\ &\qquad\left. - \left\langle \psi^\dagger(t_1)\,\psi(t_1)\right\rangle_\rho\left\langle \psi^\dagger(t_2)\,\psi(t_2)\right\rangle_\rho\right]\end{aligned} \tag{4.9}$$

Une nouvelle application de la relation d'anti-commutation permet d'identifier les fonctions de cohérence dans cette expression,

$$\begin{aligned}\langle \hat{I}(t_1)\,\hat{I}(t_2)\rangle_\rho - \langle \hat{I}(t_1)\rangle_\rho\,\langle \hat{I}(t_2)\rangle_\rho &= (e\,v_F)^2 \\ &\times\left[\frac{1}{v_F}\delta(t_1-t_2)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_1) + \mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1,t_2) - \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_2)\right]\end{aligned} \tag{4.10}$$

Développons ensuite les fonctions de cohérence en termes de contribution de la mer de Fermi et de contribution d'excès, équation (2.58), page 48, et (3.37), page 85, pour la cohérence à deux électrons. Néanmoins, seule une partie des différentes contributions impliquées demeure dans l'expression finale du bruit. D'une part, la soustraction du second terme de l'équation (4.7) permet de faire disparaître tous les termes n'impliquant que la mer de Fermi. D'autre part, développer le produit des cohérences à un électron permet de compenser exactement la contribution des corrélations classiques à la cohérence à deux électrons. Finalement, le bruit s'écrit en termes des excès de cohérence à un et deux électrons portés par l'état électronique sous la forme

$$S^{(i)}(t_1,t_2) = (e\,v_F)^2\left[\frac{1}{v_F}\,\delta(t_1-t_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2)\right. \tag{4.11a}$$

$$- \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_1) - \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t_2|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2) \tag{4.11b}$$

$$\left. + \Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1,t_2) - \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_2)\right]. \tag{4.11c}$$

Interprétons physiquement cette expression. Le terme (4.11a) est un bruit proportionnel au courant, donc poissonnien, qui n'est autre que le bruit de grenaille associé à la nature granulaire de la détection d'électrons. Le second terme (4.11b) décrit quant à lui le surplus de bruit dû à l'échange quantique entre les électrons de la mer de Fermi et les excitations émises par la source.

Étant linéaire par rapport à l'excès de cohérence à un électron, il agit comme une modification du bruit de grenaille. Cela se voit d'autant mieux en notant que la cohérence à un électron de la mer de Fermi calculée au paragraphe 2.3.1, page 47, contient une contribution singulière [(2)] en $t_1 = t_2$ dont l'effet est de renverser le signe du terme (4.11a). Enfin, la dernière contribution (4.11c) est une contribution d'excès au bruit de courant. Elle est engendrée par l'état quantique des électrons du canal de bord.

Corrélations

Le bruit de courant défini par l'équation (4.4) concerne un seul canal, mais il tout à fait possible de s'intéresser plutôt aux corrélations des fluctuations de courant entre deux canaux distincts. Dans la suite de ce chapitre, les deux canaux en question seront généralement les deux bras de sortie d'un interféromètre. Les corrélations entre deux canaux notés 1 et 2 sont définies par

$$S_{12}^{(i)}(t_1, t_2) = \overline{\delta i_1(t_1)\, \delta i_2(t_2)} = \overline{i_1(t_1)\, i_2(t_2)} - \overline{i_1(t_1)}\; \overline{i_2(t_2)}\,. \tag{4.13}$$

Ces corrélations mettent en jeu des fonctions de cohérence croisées entre les canaux : en plus des variables de temps, il devient nécessaire de prendre en compte des variables de position traduites ici par l'indice du canal dans lequel la mesure est effectuée. Cela simplifie beaucoup leur écriture puisque la contribution du bruit de grenaille et celle des interférences à deux particules avec la mer de Fermi disparaissent. Ainsi, les corrélations se simplifient en

$$S_{12}^{(i)}(t_1, t_2) = (e\, v_F)^2 \left[\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1\, t_1, 2\, t_2|1\, t_1, 2\, t_2) - \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1\, t_1|1\, t_1)\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(2\, t_2|2\, t_2)\right]. \tag{4.14}$$

Les fonctions de cohérence croisées sont définies conformément au paragraphe 3.1.1, page 76, sous la forme

$$\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1\, t_1, 2\, t_2|1\, t_1', 2\, t_2') = \mathrm{Tr}\left[\psi_2(t_2)\, \psi_1(t_1)\, \rho\, \psi_1^\dagger(t_1')\, \psi_2^\dagger(t_2')\right]\,, \tag{4.15}$$

où $\psi_n^\dagger$ et ψ_n sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation électronique dans le canal n. Pour alléger les notations qui seront souvent déjà lourdes, des notations aussi compactes que possible seront utilisées pour les canaux de propagation, en regroupant les indices repérant les canaux sous la forme

$$\mathcal{G}_1^{(\mathrm{e})}(t|t') \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1\, t|1\, t')\,. \tag{4.16}$$

Comme toujours, la variable de position x_n dans le canal est omise, car elle peut ou bien être transformée en décalage temporel si la propagation est balistique, ou bien correspondre à la position des détecteurs. Les contributions d'excès sont définies de la même façon que dans un canal unique, respectivement aux paragraphes 2.3.2 et 3.2.2, pages 48 et 84, sachant que la mer de Fermi ne possède aucune cohérence croisée entre canaux,

$$\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(n_1\, t_1|n_2\, t_2) = \delta_{n_1 n_2}\, \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2)\,. \tag{4.17}$$

Cela permet de simplifier considérablement l'expression (4.14) reliant les corrélations de courant aux excès de cohérence. Le déroulement de sa démonstration est tout à fait analogue à celle de l'équation (4.11).

(2). Cela se voit bien à température nulle où

$$\mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\, v_F\, (t_1 - t_2 + \mathrm{i}0^+)} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\, v_F}\, \mathrm{v.p.}\frac{1}{t_1 - t_2} + \frac{1}{2\, v_F}\, \delta(t_1 - t_2)\,. \tag{4.12}$$

Implémentations et limitations

À nouveau, pour limiter d'éventuelles erreurs systématiques de mesure, les quantités s'obtiennent en mesurant la grandeur d'intérêt source allumée puis source éteinte et en calculant la différence des deux résultats.

Le dispositif de mesure utilisé au sein du groupe de G. Fève fait l'objet d'une présentation détaillée Annexe A.1, page 179. Il ne permet de mesurer que des quantités intégrées en temps, en l'occurrence

$$\widetilde{S}^{(i)}(\omega=0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}\bar{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, S^{(i)}\left(\bar{t}+\frac{\tau}{2}, \bar{t}-\frac{\tau}{2}\right) . \tag{4.18}$$

Des mesures de bruit à haute fréquence sont réalisables par un dispositif voisin [183], mais elles souffrent de limitations en bande passante dues au caractère capacitif des câbles coaxiaux. Des mesures de bruit cette fois résolu en temps, donc sans intégration sur le temps moyen $\bar{t}$, pourraient également être accessibles de cette façon. Cependant, jouer astucieusement sur des interférences à deux particules permet à nouveau de reconstruire $S^{(i)}$ pour des valeurs du décalage τ bien plus faibles que celles qui sont accessibles par des mesures directes.

Remarquons pour terminer que quelle que soit la quantité mesurée, elle n'est reliée qu'à la partie diagonale de l'excès de cohérence à deux électrons. Il est donc une fois de plus nécessaire d'utiliser des méthodes interférométriques pour pouvoir réaliser des mesures de cohérence hors diagonale.

4.1.4 Formule de Mandel en optique quantique électronique

Proposons maintenant une généralisation de la formule de Mandel, introduite équation (3.83), page 106. Rappelons qu'il s'agit de relier les statistiques des événements de détection dans une fenêtre de temps $[-T/2, T/2]$ au degré de cohérence à deux électrons d'un état stationnaire. En optique quantique électronique, le nombre d'électrons détectés dans une fenêtre de temps et ses fluctuations sont reliées au courant et au bruit de courant intégrés sur cette fenêtre. Il est donc naturel de proposer une formule de Mandel généralisée en termes de ces quantités. Ainsi, en reprenant les notations de l'équation (3.83), page 106,

$$\langle n_T \rangle = \frac{1}{-e} \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t\, i(t) \tag{4.19}$$

$$\text{et} \qquad \langle n_T^2 \rangle - \langle n_T \rangle^2 = \frac{1}{e^2} \iint_{-T/2}^{T/2} \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, S^{(i)}(t_1, t_2) . \tag{4.20}$$

Pour un état stationnaire, l'excès de cohérence à un électron ne dépend que de la différence de temps $t_1 - t_2$, tout comme la partie diagonale de l'excès de cohérence à deux électrons. Pour aboutir à la relation voulue, il faut intégrer l'équation (4.11), page 121, par rapport aux deux temps t_1 et t_2. Remarquons pour commencer qu'en raison de l'hypothèse de stationnarité $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t)$ ne dépend pas du temps t, et est donc une constante pouvant se factoriser dans les intégrales. Par conséquent, la contribution intrinsèque (4.11c) s'écrit

$$\begin{aligned}(e\, v_F)^2 \iint_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \Big[\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1, t_2|t_1, t_2) - \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1)\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_2)\Big] \\ = I^2 \iint_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \left(g^{(2\mathrm{e})}(t_1, t_2) - 1\right) ,\end{aligned} \tag{4.21}$$

où I est le courant moyen, constant puisque l'état est stationnaire,

$$I = -e\, v_F\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t) , \tag{4.22}$$

et $g^{(2e)}(t_1, t_2)$ le degré de cohérence à deux électrons introduit au paragraphe 3.5.2, page 106, sous la forme

$$g^{(2e)}(t_1, t_2) = \frac{\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1, t_2|t_1, t_2)}{\Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_1|t_1)\ \Delta\mathcal{G}^{(e)}(t_2|t_2)}\,. \tag{4.23}$$

Introduire les variables usuelles $\bar{t} = (t_1 + t_2)/2$ et $\tau = t_1 - t_2$ dans les intégrales puis procéder à l'intégration sur $\bar{t}$, rendue simple par l'hypothèse de stationnarité, permet d'aboutir à l'analogue de la formule de Mandel généralisée en optique quantique électronique,

$$\int_{-T}^{T} \mathrm{d}\tau \Big(T - |\tau|\Big)\, S^{(i)}(\tau) = -\,e\,T\,I \tag{4.24a}$$

$$-\,2\,(e\,v_F)^2\,\mathrm{Re}\left[\int_{-T}^{T} \mathrm{d}\tau \Big(T - |\tau|\Big)\, \mathcal{G}_F^{(e)}(\tau)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}(\tau)^*\right] \tag{4.24b}$$

$$+\,I^2 \int_{-T}^{T} \mathrm{d}\tau \Big(T - |\tau|\Big)\, \Big(g^{(2e)}(\tau) - 1\Big)\,. \tag{4.24c}$$

Les différents termes correspondent à ceux de l'équation (4.11). Il ne s'agit donc pas d'une transposition directe du résultat optique (3.83), page 106. Les processus d'échange quantique possibles avec les électrons de la mer de Fermi y ajoutent une contribution supplémentaire (4.24b), dont nous avons mentionné qu'elle s'analyse comme une correction au bruit de grenaille (4.24a). Notons que les préfacteurs de la contribution singulière de la cohérence de la mer de Fermi sont tels qu'elle devient ici $2eTI$, ce qui donne au bruit de grenaille le même signe qu'en optique.

Analysons maintenant la partie régularisée du terme (4.24b), qui s'écrit comme une valeur principale de Cauchy à température nulle, en commençant par le régime où la fenêtre de temps T est grande devant les échelles de temps caractérisant la cohérence. La cohérence de la mer de Fermi, décroît sur l'échelle de temps thermique τ_{th} et en tous cas au moins aussi rapidement que $1/\tau$ aux temps longs, alors que l'excès de cohérence décroît également sur l'échelle du temps de cohérence, introduit au paragraphe 2.3.3, page 53. Par conséquent, la partie régularisée de l'intégrale (4.24b) est bornée et sa contribution devient sous-dominante par rapport à celle du bruit de grenaille, qui croît proportionnellement à T. Cette limite redonne alors la formule de Mandel de l'optique, à une correction sous-dominante près. Au contraire, lorsque la fenêtre de temps T est courte, le terme d'échange avec la mer de Fermi devient comparable au bruit de grenaille. Ce résultat fait écho aux travaux de A. Mahé *et al.* sur le bruit généré par le condensateur mésoscopique [116, 117], bien que celui-ci ne soit pas une source stationnaire. Le condensateur mésoscopique n'émet de bruit que dans une fenêtre de fréquence finie, bornée par l'écart Δ entre les niveaux de la boîte quantique. Mathématiquement, cela se traduit par la compensation à haute fréquence du bruit de grenaille par les termes d'échange avec la mer de Fermi. On peut penser qu'un résultat similaire se retrouve ici : si la fonction de distribution de l'état stationnaire est bornée à $\omega_{\max}$, alors les corrélations ne devraient plus être perceptibles lorsque la fenêtre de temps est trop courte, c'est-à-dire $T \ll 1/\omega_{\max}$. Néanmoins, une étude plus poussée reposant notamment sur des exemples explicites est nécessaire pour confirmer cette intuition qualitative.

La formule de Mandel électronique peut être simplifiée en l'écrivant en termes de mesures de corrélations. Cela demande de partitionner le canal d'intérêt sur un QPC, le second canal d'entrée du QPC étant relié à la masse : le dispositif forme alors un interféromètre HBT, représenté figure 4.2. Cet interféromètre a été introduit au paragraphe 1.4.3, page 24, et sera étudié en détails au paragraphe 4.3, page 137. Anticipons un peu sur les résultats à venir, en indiquant que les corrélations de partitionnement $S^{(i)}_{\mathrm{part}}$ entre les deux voies de sortie sont reliées aux excès de cohérence dans le canal d'entrée simplement par

$$S^{(i)}_{\mathrm{part}}(t_1, t_2) = R\,(1 - R)\,(e\,v_F)^2 \left[\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{in}}(t_1, t_2|t_1, t_2) - \Delta\mathcal{G}^{(e)}_{\mathrm{in}}(t_1|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{\mathrm{in}}(t_2|t_2)\right], \tag{4.25}$$

où R est la probabilité de réflexion du QPC. Par conséquent, il est plus simple d'écrire la formule de Mandel en terme des corrélations issues du partitionnement. Pour cela, procédons à l'intégration sur les deux temps. L'équation (4.21) permet de faire apparaître le degré de cohérence à deux électrons. Introduire les variables réduites $\bar{t} = (t_1 + t_2)/2$ et $\tau = t_1 - t_2$ et expliciter l'intégration sur le temps moyen $\bar{t}$ conduit directement à

$$\int_{-T}^{T} \mathrm{d}\tau \left(T - |\tau|\right) S_{\mathrm{part}}^{(i)}(\tau) = R\,(1-R)\,I^2 \int_{-T}^{T} \mathrm{d}\tau \left(T - |\tau|\right) \left(g_{\mathrm{in}}^{(2\mathrm{e})}(\tau) - 1\right) . \tag{4.26}$$

Les contributions du bruit de grenaille et de l'échange quantique avec la mer de Fermi n'interviennent plus.

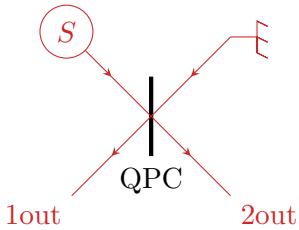


Fig. 4.2 – **Interféromètre d'Hanbury Brown–Twiss.** Le canal d'intérêt où se trouve la source S est partitionné vis-à-vis d'un second canal relié à la masse. Les corrélations sont mesurées entre les deux canaux 1out et 2out.

4.2 Interférométrie Mach–Zehnder

4.2.1 Rappel du dispositif

L'interféromètre de Mach–Zehnder électronique a été présenté au paragraphe 1.4.2, page 22. Un schéma en est représenté figure 4.3. Deux canaux d'entrée, définissant le secteur in, sont partitionnés par un premier QPC A. Les deux canaux se propagent ensuite à l'intérieur de l'interféromètre jusqu'à être recombinés par un second QPC B. La propagation dans les canaux internes à l'interféromètre se fait selon deux temps de vol différents τ_1 et τ_2. En outre, l'effet Aharonov–Bohm [2] permet de moduler le déphasage entre les deux voies au moyen du flux magnétique Φ. Aucun effet de décohérence n'est pris en compte ici, ce qui revient à supposer que la propagation dans les canaux est parfaitement balistique.

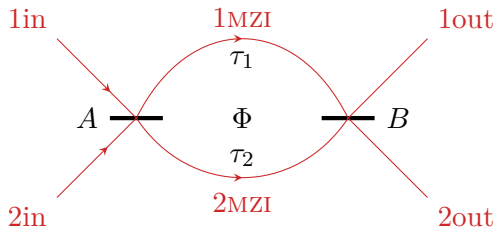


Fig. 4.3 – Interféromètre de Mach–Zehnder à électrons. Les canaux entrant dans le MZI sont indicés par « in », l'intérieur par « MZI » et en sortie par « out ». Les temps de vol dans les voies de l'interféromètre sont notés τ_1 et τ_2 et le flux magnétique traversant l'interféromètre Φ.

Le modèle présenté ici et utilisé dans ce manuscrit et dans plusieurs travaux théoriques [51, 82, 109, 143] est celui d'un interféromètre fait de canaux unidimensionnels rigides de longueur différente plongés dans un champ magnétique entraînant un effet Aharonov–Bohm. Néanmoins, ce modèle ne décrit pas exactement l'implémentation d'un MZI dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier, puisque ces canaux sont directement dus au champ magnétique. En ce sens, compter simultanément ces canaux et la phase Aharonov–Bohm revient à prendre en compte deux fois l'effet du champ magnétique. Ainsi, la phase Aharonov–Bohm ϕ_{AB} considérée par la suite doit être comprise comme une phase additionnelle, due à une faible variation ΔB du champ magnétique autour d'un champ de référence B_0 imposant le régime d'effet Hall et définissant la géométrie de l'interféromètre. Cependant une nouvelle subtilité apparaît puisque lorsque le champ magnétique est modifié, la longueur des canaux est elle aussi légèrement modifiée. Cela peut s'intuiter à partir de la figure 1.2a, page 13 : lorsque le champ magnétique est modifié, l'énergie cyclotron l'est aussi, et la position y_{c} du canal de bord peut également changer. En pratique, la longueur des canaux est essentiellement contrainte par la géométrie de l'échantillon tant que le facteur de remplissage demeure fixé, ce qui rend légitime de ne pas prendre cet effet en compte dans la modélisation. Il constitue cependant une limite fondamentale aux protocoles présentés dans la suite de ce manuscrit.

Les QPC sont supposés idéaux, c'est-à-dire que l'effet de la décohérence induite par les interactions coulombiennes entre les deux voies se mélangeant est négligé. Ils sont décrits par leurs matrices de diffusion S_A et S_B, qui relient les opérateurs de champ en entrée et en sortie sous la forme

$$\begin{bmatrix} \psi_{\text{sortie 1}} \\ \psi_{\text{sortie 2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{R_\alpha} & \mathrm{i}\sqrt{T_\alpha} \\ \mathrm{i}\sqrt{T_\alpha} & \sqrt{R_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\text{entrée 1}} \\ \psi_{\text{entrée 2}} \end{bmatrix}, \qquad \alpha = A \text{ ou } B, \tag{4.27}$$

où R_α et $T_\alpha = 1 - R_\alpha$ sont respectivement les probabilités de réflexion et transmission du QPC α.

4.2.2 Mesure de cohérence hors diagonale

Cohérence en sortie du MZI

Considérons un cas assez général, où l'état électronique en entrée de l'interféromètre n'est spécifié que par l'intermédiaire de l'excès de cohérence à un électron qui lui est associé. Intéressons-nous au cas où la source d'intérêt est placée dans le canal 1in et le détecteur dans le canal 1out : les cohérences calculées sont sous-entendues appartenir à ces canaux. Le canal 2in est quant à lui relié à la masse.

Exprimons l'excès de cohérence en sortie de l'interféromètre en fonction de l'excès de cohérence en entrée (3). Pour simplifier mais sans perdre de généralité, supposons que la phase Aharonov–Bohm ϕ_{AB} n'est à prendre en compte que si la propagation se fait le long de la voie 1. Par application des matrices de diffusion des QPC et en prenant en compte les temps de vol différents dans les deux voies, un opérateur en sortie de l'interféromètre est relié aux opérateurs en entrée par

$$\begin{aligned}\psi_{1\mathrm{out}}(t) = {} & \sqrt{R_A\,R_B}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\;\psi_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1) - \sqrt{T_A\,T_B}\,\psi_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2) \\ & + \mathrm{i}\sqrt{T_A\,R_B}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\;\psi_{2\mathrm{in}}(t-\tau_1) + \mathrm{i}\sqrt{R_A\,T_B}\,\psi_{2\mathrm{in}}(t-\tau_2)\,.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Calculons maintenant la cohérence totale à un électron en sortie de l'interféromètre. Comme aucune cohérence croisée n'existe entre les deux canaux d'entrée, elle s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{out}}(t|t') = {} & R_A\,R_B\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t'-\tau_1) + T_A\,T_B\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2|t'-\tau_2) \\ & + T_A\,R_B\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t-\tau_1|t'-\tau_1) + R_A\,T_B\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t-\tau_2|t'-\tau_2) \\ & - \eta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t'-\tau_2) - \eta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2|t'-\tau_1) \\ & + \eta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t-\tau_1|t'-\tau_2) + \eta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t-\tau_2|t'-\tau_1)\,,\end{aligned} \tag{4.29}$$

où $\eta = \sqrt{R_A\,T_A\,R_B\,T_B}$.

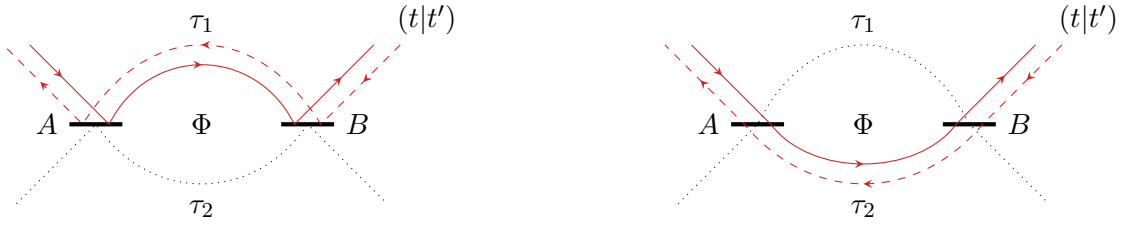
Enfin, décomposer la cohérence totale en la somme de la contribution de la mer de Fermi, identique dans tous les canaux, et de la contribution d'excès permet d'identifier l'excès de cohérence en sortie de l'interféromètre. Pour ce faire, il faut utiliser d'une part le fait que le canal 2in est relié à la masse ce qui implique que $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}} = 0$, et d'autre part que $R_A + T_A = R_B + T_B = 1$ par définition. L'excès de cohérence à un électron dans le canal 1out s'écrit finalement

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{out}}(t|t') = R_A\,R_B\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t'-\tau_1) + T_A\,T_B\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2|t'-\tau_2) \tag{4.30a}$$

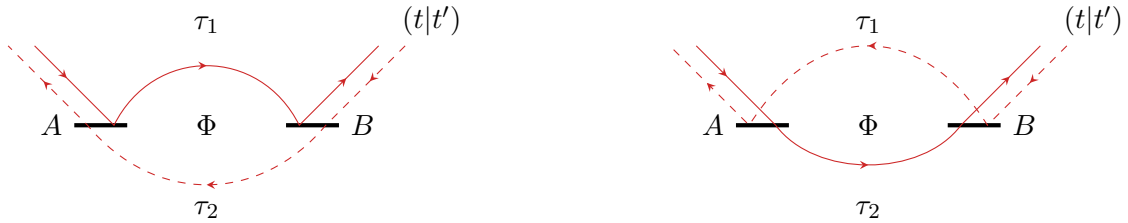
$$- \eta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t'-\tau_2) - \eta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2|t'-\tau_1)\,. \tag{4.30b}$$

Les termes (4.30a) sont d'origine classique, un canal pouvant être attribué sans ambiguïté à la propagation dans l'interféromètre. Au contraire, les termes (4.30b) impliquent de la délocalisation entre les deux canaux de l'interféromètre et sont par conséquent d'origine quantique. Seuls ces derniers sont sensibles au déphasage Aharonov–Bohm ϕ_{AB}. L'équation (4.30) prise en $t = t'$ montre ainsi qu'un interféromètre de Mach–Zehnder permet de convertir des termes de cohérence hors-diagonale en contributions à la cohérence diagonale. Ces contributions se distinguent des contributions classiques par le fait qu'elles seules sont sensibles au déphasage Aharonov–Bohm.

(3). Les notations compactes sur les canaux de propagation sont utilisées, rappelées Annexe A.3, page 184.



(a) Diagrammes représentant les termes de propagation classique.



(b) Diagrammes représentant les termes impliquant une délocalisation quantique.

Fig. 4.4 – Représentation diagrammatique de la propagation de la cohérence dans un MZI. Les quatre diagrammes représentent les quatre termes de l'équation (4.30). L'opérateur $\psi(t)$ est représenté par un trait plein orienté de l'émission vers la détection alors que l'opérateur $\psi^\dagger(t')$ est représenté par un trait pointillé orienté en sens inverse.

Protocole de mesure de cohérence hors-diagonale

L'équation (4.3) indique que la partie diagonale de la cohérence correspond au courant moyen résolu en temps, noté désormais $i(t)$ plutôt que $\overline{i(t)}$ pour alléger les notations. En supposant les deux QPC identiques et tels que $R_\alpha = T_\alpha = 1/2$, le courant en sortie de l'interféromètre vaut

$$i_{1\mathrm{out}}(t) = \frac{1}{4}\, i_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1) + \frac{1}{4}\, i_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t-\tau_2)\, e^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AB}}}\right] . \tag{4.31}$$

Par conséquent, il est dans le principe possible d'en déduire $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t-\tau_2)$, ce qui a été proposé par G. Haack *et al.* [82].

Pour une configuration donnée de l'interféromètre, c'est-à-dire τ_1 et τ_2 fixés, il faut mesurer le courant de sortie résolu en temps en fonction de la phase Aharonov–Bohm, elle-même contrôlée en changeant le champ magnétique. L'amplitude du terme d'interférences, isolable par une transformée de Fourier, donne accès au module $\left|\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t-\tau_2)\right|$. Sa phase, ou plus précisément la différence entre la phase du terme d'interférence et la phase Aharonov–Bohm donne accès à l'argument $\arg\left[\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t-\tau_2)\right]$. Reproduire l'expérience pour différentes configurations de l'interféromètre, modifiable par exemple avec des grilles comme dans l'expérience du groupe de M. Heiblum [180], permet dans le principe de reconstruire l'excès de cohérence à un électron point par point.

Ce protocole est intéressant dans le principe, mais délicat à mettre en œuvre. Il demande en effet des mesures de courant résolu en temps dont nous avons expliqué au paragraphe 4.1.2, page 119, qu'elles sont délicates à réaliser avec une bonne précision. Surtout, comme il repose sur des interférences à un électron, ce protocole est particulièrement sensible à la décohérence à l'intérieur du MZI. En présence de décohérence, l'équation (4.31) n'est plus valable et le courant de sortie est relié de façon bien plus complexe à la cohérence d'entrée, celle-ci étant altérée par décohérence.

Remarquons que l'échelle de temps quantique $T^{(1)}_{\mathrm{qtq}}$, décrivant la décroissance en la variable réduite τ de l'excès de cohérence est directement accessible par cette méthode en mesurant la décroissance en fonction du délai $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ entre les deux voies de l'interféromètre. Cependant, il est plus simple en pratique d'extraire de mesures la visibilité (synonyme du contraste) plutôt que l'amplitude du terme d'interférence. Cette visibilité vaut

$$V(t, \tau_1, \tau_2) = \left| \frac{\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1|t-\tau_2)}{\sqrt{i_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1)\, i_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2)}} \right| . \tag{4.32}$$

Notons qu'elle correspond exactement au module du degré de cohérence à un électron en entrée de l'interféromètre, introduit équation (2.60), page 49. Dans le cas d'un état d'entrée non-stationnaire, la visibilité dépend bien séparément des trois temps. Si l'état est stationnaire, alors la dépendance se réduit à celle en $\Delta\tau$. La division par le courant rend la visibilité insensible aux variations de l'enveloppe, et sa décroissance en $\Delta\tau$ ne dépend plus que du temps de cohérence de phase τ_φ introduit au paragraphe 2.3.3, page 54.

Pour contourner la difficulté des mesures résolues en temps, G. Haack *et al.* ont montré [82] qu'il était possible d'extraire des informations sur les temps de cohérence de phase à partir de mesures intégrées, demandant une résolution moindre, à savoir le courant moyen ou le bruit à fréquence nulle dans le canal de sortie 1out. À titre d'exemple, le courant moyen sortant dans une des voies est représenté en fonction de la différence de temps de vol $\Delta\tau$ entre les deux voies sur la figure 4.5. L'enveloppe des oscillations décroît sur un temps caractéristique correspondant au temps classique $T^{(1)}_{\mathrm{class}}$.

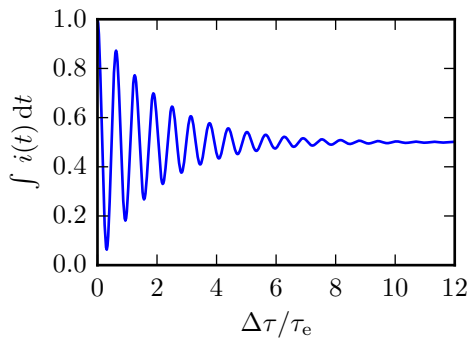


Fig. 4.5 – Courant moyen en sortie d'un MZI en fonction du retard entre les deux voies. L'exemple choisi est celui d'un paquet émis par le condensateur mésoscopique d'énergie d'injection $\omega_{\mathrm{e}} = 10/\tau_{\mathrm{e}}$. La phase Aharonov–Bohm est prise nulle, ainsi les interférences sont parfaitement constructives en $\Delta\tau = 0$.

Analogie avec l'optique ondulatoire

La perte de contraste local des interférences lorsque le délai $\Delta\tau$ augmente est un effet de cohérence temporelle, dû à la largeur spectrale de la source. Ce phénomène est analogue au brouillage des franges en sortie d'un interféromètre de Michelson éclairé par une lumière polychromatique, par exemple issue d'une source de lumière blanche comme une lampe quartz–iode. Ces aspects sont très bien expliqués dans l'ouvrage de E. Hecht [86] ainsi que dans celui de S. Houard [91] où ils sont illustrés de nombreuses photos.

Néanmoins, le courant est ici formé d'impulsions, à la différence de l'optique ondulatoire pour laquelle nous avons indiqué au paragraphe 2.1.2, page 37, qu'il est presque toujours sous-entendu que le rayonnement est stationnaire. Remarquons alors que l'analogue de l'intensité lumineuse telle qu'on l'étudie dans un laboratoire d'enseignement est le courant *moyenné* dans le temps, et

pas le courant *résolu* en temps. Pour le dire différemment, les variations temporelles d'intensité lumineuse à l'échelle du temps de cohérence temporelle de la source sont imperceptibles, celui-ci étant typiquement de l'ordre de 1 ns à 1 µs. En revanche, le spectre lumineux est bien directement analogue au nombre d'occupation $f(\omega)$ sans processus de moyennage supplémentaire.

Dans le cas électronique, la différence de phase associée à la propagation entre les deux voies vient aussi de la phase Aharonov–Bohm, qui n'a pas d'équivalent en optique ondulatoire. Ainsi, le déphasage peut être modifié à différence de temps vol constante, donc à facteur de cohérence temporelle égal, ce qui n'est a priori pas possible en optique ondulatoire.

Enfin, la perte de visibilité des interférences par effet de décohérence le long de chacune des voies de l'interféromètre se rencontre également en optique ondulatoire. Elle n'est pas visible dans un laboratoire d'enseignement, mais devient critique en particulier en astronomie lorsque les bras des interféromètres sont très longs. La perte de cohérence est due aux fluctuations de l'indice de l'air, liées à la turbulence atmosphérique, et éventuellement à des vibrations mécaniques parasites. C'est d'ailleurs pour contourner ces difficultés que R. Hanbury Brown et R. Twiss ont développé leur interféromètre [84] basé sur l'interférométrie d'intensité et non plus l'interférométrie d'amplitude.

4.2.3 Franges d'interférences et spectre cannelé

Fonction de Wigner en sortie du MZI

Utiliser les fonctions de Wigner permet de gagner un point de vue complémentaire et instructif sur cette expérience d'interférométrie. En conservant pour simplifier les hypothèses sur les QPC, l'équation (4.30) écrite en termes de fonctions de Wigner devient

$$\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{out}}(t,\omega) = \frac{1}{4}\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_1,\omega) + \frac{1}{4}\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t-\tau_2,\omega) \tag{4.33a}$$

$$+\frac{1}{2}\cos\left[\omega(\tau_1-\tau_2)+\phi_{\mathrm{AB}}\right]\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}\left(t-\frac{\tau_1+\tau_2}{2},\omega\right) \tag{4.33b}$$

Sans surprise, les termes classiques (4.33a) se traduisent par une simple translation temporelle de la fonction de Wigner d'entrée d'une quantité correspondant au temps de vol dans chacun des bras du MZI. En revanche, la délocalisation quantique donne une contribution (4.33b) qui mérite plus d'attention. La fonction de Wigner d'entrée apparaît à nouveau, mais cette fois translatée temporellement d'une quantité correspondant à la moyenne des temps de vol τ_1 et τ_2. En outre, les interférences se traduisent par une modulation en énergie de période $2\pi/\left|\tau_1-\tau_2\right|$, commandée par la différence de temps de vol entre les deux bras. Changer la phase Aharonov–Bohm modifie la phase globale de cette modulation.

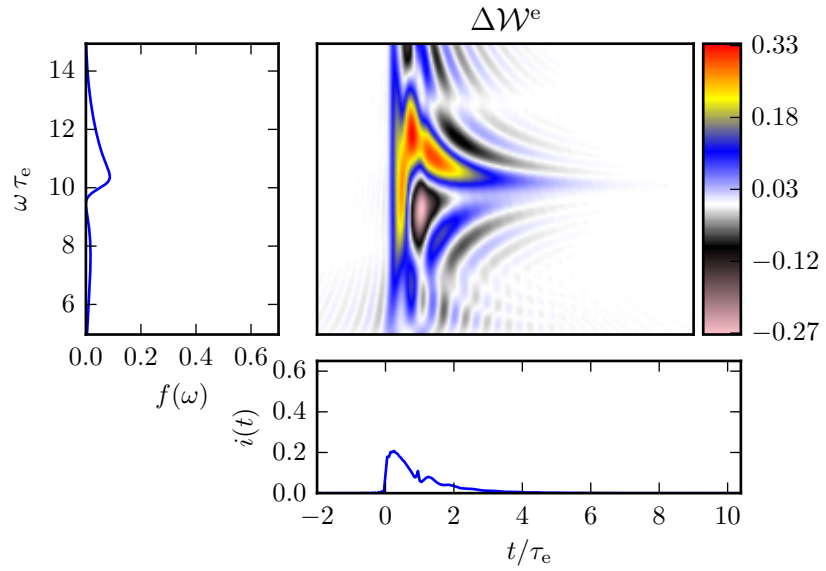
Deux régimes se dégagent naturellement, en comparant la largeur en temps de la fonction de Wigner, qui n'est autre que le temps classique $T^{(1)}_{\mathrm{class}}$ correspondant à la durée caractéristique de l'enveloppe du paquet d'ondes, à la différence de temps de vol $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ entre les deux voies de l'interféromètre.

Premier cas : délai court, $\Delta\tau \lesssim T^{(1)}_{\mathrm{class}}$

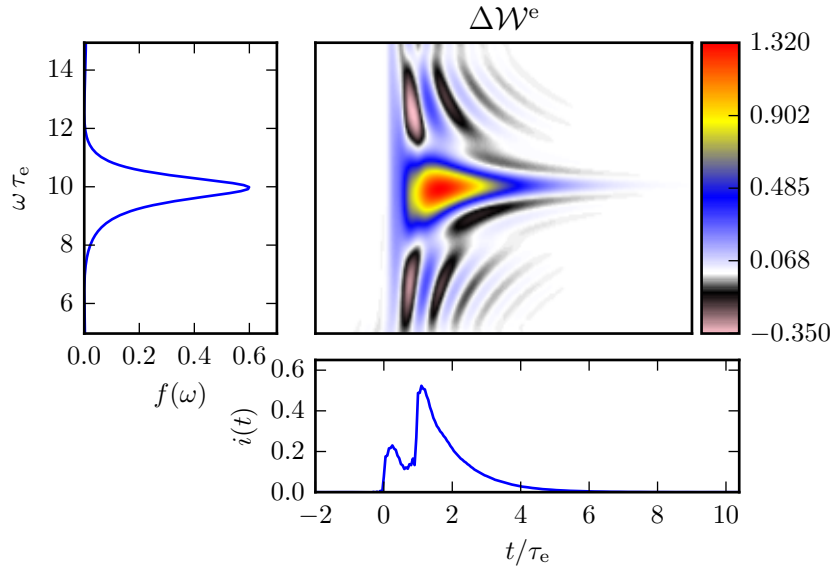
Commençons par analyser le cas $\Delta\tau \lesssim T^{(1)}_{\mathrm{class}}$, pour lequel les trois termes de l'équation (4.33) se recouvrent de façon conséquente. La fonction de Wigner en sortie de l'interféromètre et ses distributions marginales sont représentées figure 4.6.

La fonction de Wigner apparaît sous la forme d'un seul motif, ressemblant [(4)] à celui de la fonction de Wigner d'entrée représentée figure 2.11, page 65. Des modifications de ce motif liées

(4). La « ressemblance » ou la « modération » des effets est discutable : il s'agit surtout de comparer le cas des délais court et long, et la ressemblance est à comprendre comparativement au cas du délai long discuté par la suite.



(a) $\phi_{\mathrm{AB}} = 0$, d'où $\cos(\omega_{\mathrm{e}}\Delta\tau + \phi_{\mathrm{AB}}) \simeq -0.85$.



(b) $\phi_{\mathrm{AB}} = \pi$, d'où $\cos(\omega_{\mathrm{e}}\Delta\tau + \phi_{\mathrm{AB}}) \simeq 0.85$.

Fig. 4.6 – Fonction de Wigner en sortie d'un MZI pour lequel $\Delta\tau = \tau_{\mathrm{e}}$. L'exemple choisi est celui d'un paquet émis par le condensateur mésoscopique d'énergie d'injection $\omega_{\mathrm{e}} = 10/\tau_{\mathrm{e}}$. La fonction de Wigner en entrée est représentée figure 2.11, page 65. La fonction de Wigner en sortie est représentée sur le panneau central en fonction de t et ω. Les deux autres panneaux représentent ses distributions marginales : le panneau de gauche représente le nombre d'occupation moyen $f(\omega)$ alors que le panneau du bas représente le courant moyen $i(t)$. Les axes des panneaux coïncident mais pas l'échelle de couleur pour une meilleure lisibilité.

aux interférences sont visibles mais modérées, en revanche l'amplitude globale de la fonction de Wigner varie très fortement en fonction de la phase Aharonov–Bohm.

Le courant de sortie de l'interféromètre, obtenu en intégrant la fonction de Wigner par rapport aux énergies, est lui aussi fortement affecté par les interférences, principalement dans son amplitude mais aussi dans sa dépendance en temps. Dans le cas du paquet d'ondes émis par le condensateur mésoscopique, son allure ne peut varier que pour $t \geq \Delta\tau/2$, car un seul terme, associé à une propagation classique, peut se manifester aux temps inférieurs. Le courant moyen en sortie de l'interféromètre, intégré sur le temps, est représenté en fonction de la phase Aharonov–Bohm figure 4.7. Il présente les oscillations caractéristiques du phénomène d'interférences. Bien sûr, le courant résolu en temps $i(t)$ ne présente pas de telles oscillations au cours du temps auxquelles on pourrait naïvement penser : l'état d'interférence dépend du décalage $\Delta\tau$ et de la phase Aharonov–Bohm ϕ_{AB}, mais pas du temps.

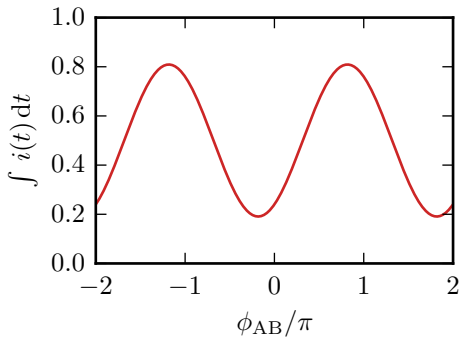


Fig. 4.7 – Courant moyen en sortie d'un MZI en fonction de la phase Aharonov–Bohm. L'exemple choisi est celui d'un paquet émis par le condensateur mésoscopique d'énergie d'injection $\omega_{\mathrm{e}} = 10/\tau_{\mathrm{e}}$. La différence de temps de vol entre les deux voies est prise égale à τ_{e}. Par effet de cohérence temporelle, le contraste des interférences est inférieur à 1.

Enfin, le nombre d'occupation $f(\omega)$, qui s'obtient en moyennant la fonction de Wigner par rapport au temps, est bien sûr lui aussi affecté en amplitude par les interférences, mais demeure essentiellement composé d'un seul pic, centré au voisinage de l'énergie d'injection ω_{e} mais légèrement décalé. Cela se comprend par le fait que la modulation en énergie du terme d'interférences (4.33b) se fait sur une période en énergie $2\pi/\Delta\tau$, plutôt grande devant la largeur en énergie $1/\tau_{\mathrm{e}}$ du paquet émis. Par conséquent, cette modulation a un effet presque constant à l'échelle du spectre de l'excitation.

Reformulons ces résultats en termes d'optique ondulatoire. L'intensité lumineuse, analogue au courant moyen, présente des interférences bien contrastées par rapport à la phase Aharonov–Bohm. Cela s'explique par le fait que le délai (ou la différence de chemin optique) est comparable au temps (ou à la longueur) de cohérence temporelle de la source. En revanche, le spectre en sortie, contient une seule couleur majoritaire. En considérant des interférences en lumière blanche, le régime atteint est celui qui permet d'observer des teintes de Newton [86, 91]. Attention cependant, la phase Aharonov–Bohm n'ayant pas d'analogue optique, il n'est pas possible de modifier l'intensité d'une teinte de Newton de la sorte.

Second cas : délai long, $\Delta\tau \gg T^{(1)}_{\text{class}}$

Analysons maintenant le second cas, pour lequel $\Delta\tau \gg T^{(1)}_{\text{class}}$. La fonction de Wigner en sortie de l'interféromètre et ses distributions marginales sont représentées figure 4.8.

La fonction de Wigner apparaît désormais sous la forme de trois motifs nettement séparés, ce qui diffère complètement de la fonction de Wigner en entrée de l'interféromètre. Chaque motif correspond à l'un des termes de l'équation (4.33), page 130. Seul le motif central, issu du terme d'interférences, est modifié par la phase Aharonov–Bohm. En outre, ce motif est fortement modulé en énergie, ce qui est attendu car cette fois la période $2\pi/\Delta\tau$ de la modulation (4.33b) est bien plus faible que la largeur en énergie $1/\tau_{\text{e}}$ du paquet émis. Remarquons enfin les ordres de grandeur en amplitude. La fonction de Wigner prend ici des valeurs fortement négatives, signe du caractère fortement quantique de l'état généré. Une interprétation quasi-classique de cet état est donc impossible.

Le courant de sortie n'est quant à lui plus affecté par les interférences. Seuls deux pics sont visibles, associés au passage de deux électrons décalés, chaque électron étant dans un même paquet. La modulation rend en fait nulle l'intégrale du pic central sur les énergies, indépendamment de la phase Aharonov–Bohm. Bien entendu, il en est de même pour le courant moyen.

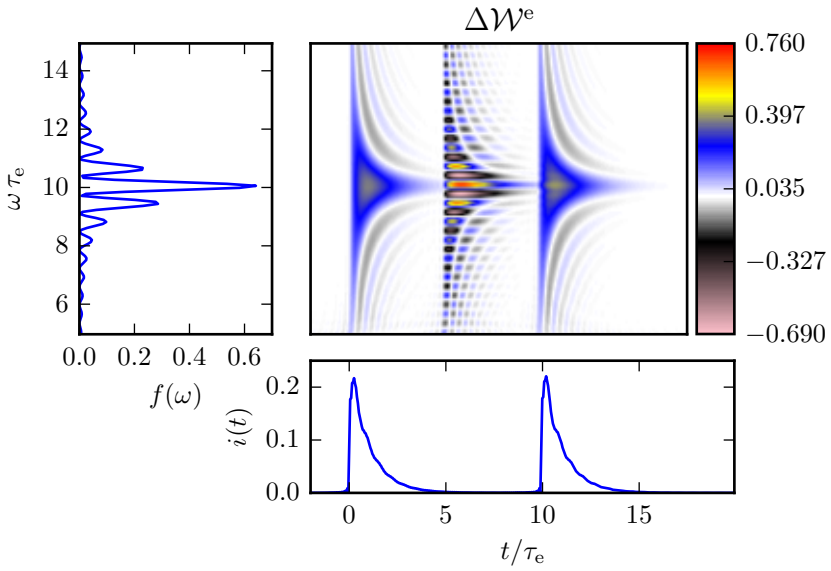
En revanche, de fortes oscillations sont présentes dans le nombre d'occupation $f(\omega)$. Celles-ci prennent à nouveau leur source dans la modulation en énergie du motif central. Comme prévu, les nombres d'occupation obtenus pour les deux valeurs de la phase Aharonov–Bohm considérées sont complémentaires l'un de l'autre, c'est-à-dire que leur somme correspond au nombre d'occupation d'entrée. Une première conclusion d'importance est que l'absence d'effet des interférences sur le courant ne signifie absolument pas que ces interférences sont complètement sans effet ! Ceux-ci se retrouvent simplement sur le nombre d'occupation. Notons que ceci confirme l'impossibilité d'une interprétation quasi-classique, mentionnée plus haut. Un tel nombre d'occupation ne peut pas être simplement associé au passage de deux électrons décalés comme peuvent l'être les impulsions de courant. Remarquons que ce résultat indique qu'un MZI peut s'interpréter comme un filtre en énergie pour les électrons incidents [143].

En optique ondulatoire, le régime observé ici correspond à celui du blanc d'ordre supérieur, atteint lorsque le délai (ou la différence de marche) est bien plus grand que le temps (ou la longueur) de cohérence temporelle de la source. Dans ce cas, l'intensité lumineuse sur l'écran est uniforme, mais le spectre apparaît sous forme d'un spectre cannelé, où ne figurent pas toutes les couleurs (5).

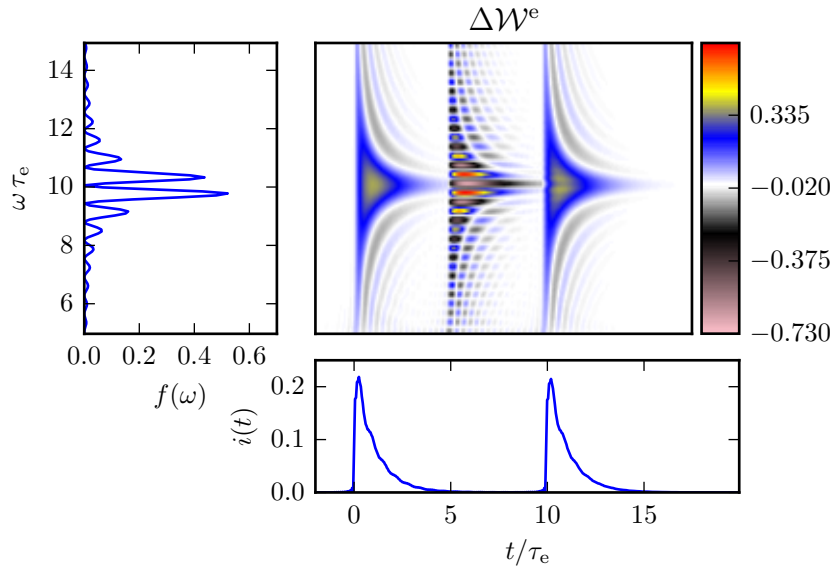
Observation expérimentale d'un nombre d'occupation cannelé

L'observation pratique de telles cannelures risque d'être rendue délicate en raison de la décohérence à l'intérieur de l'interféromètre. En gardant l'exemple du condensateur mésoscopique et en étant plutôt optimiste, l'extension temporelle τ_{e} du paquet émis est de l'ordre de 50 ps. En considérant la vitesse de Fermi de l'ordre de $10^5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, le paquet a une extension spatiale $\ell_{\text{e}} = v_F\,\tau_{\text{e}}$ de l'ordre de 5 µm. Or les mesures réalisées par P. Roulleau *et al.* [145] montrent qu'à la température de 20 mK la longueur de cohérence de phase ℓ_φ est au mieux de l'ordre de 20 µm. La différence de marche $10\,\ell_{\text{e}}$ envisagée précédemment est donc loin d'être accessible sans forte perte de cohérence. Celle-ci se traduisant par une destruction de la superposition quantique encodée dans le terme d'interférence, les cannelures dans le nombre d'occupation seraient bien moins prononcées. Des dispositifs de protection contre la décohérence ont été proposées [8, 93, 129], mais leurs performances actuelles ne rendent pas encore le régime du blanc d'ordre supérieur accessible avec une source à électrons uniques.

(5). La lumière en sortie n'apparaît blanche que parce que l'œil humain n'est pas apte à distinguer d'aussi fines nuances de couleur. En d'autres termes, il n'est pas assez résolu spectralement. Le livre de S. Houard [91] propose une excellente introduction à ce sujet.



(a) $\phi_{\mathrm{AB}} = 0$.



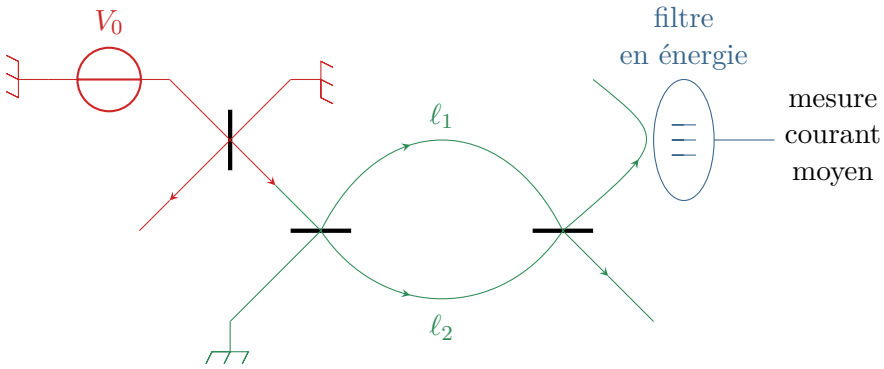
(b) $\phi_{\mathrm{AB}} = \pi$.

Fig. 4.8 – Fonction de Wigner en sortie d'un MZI pour lequel $\Delta\tau = 10\,\tau_{\mathrm{e}}$. L'exemple choisi est celui d'un paquet émis par le condensateur mésoscopique d'énergie d'injection $\omega_{\mathrm{e}} = 10/\tau_{\mathrm{e}}$. La fonction de Wigner en entrée est représentée figure 2.11, page 65. La fonction de Wigner en sortie est représentée sur le panneau central en fonction de t et ω. Les deux autres panneaux représentent ses distributions marginales : le panneau de gauche représente le nombre d'occupation moyen $f(\omega)$ alors que le panneau du bas représente le courant moyen $i(t)$. Les axes des panneaux coïncident mais pas l'échelle de couleur pour une meilleure lisibilité.

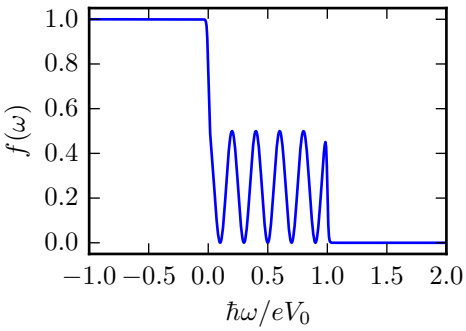
Pour pouvoir atteindre un tel régime, il faut que la période de la modulation en énergie $h/\Delta\tau$ soit nettement inférieure à la largeur en énergie de l'état émis. Une solution plus pertinente pour observer un tel effet serait donc d'utiliser une distribution stationnaire hors équilibre, par exemple celle produite par un QPC sur lequel est envoyé l'état produit par un contact ohmique polarisé par une tension continue V_0 [105]. Sa largeur en énergie $\hbar\,\Delta\omega = e\,|V_0|$ est contrôlable simplement par l'intermédiaire de la tension appliquée. En fixant la différence de marche $\Delta\ell$ à 5 µm, la modulation a pour période en énergie $h\,v_F/\Delta\ell$. Pour que la largeur en énergie $\hbar\,\Delta\omega$ contienne cinq périodes de la modulation, il faut choisir

$$\frac{h\,v_F}{\Delta\ell} = \frac{1}{5}e\,|V_0| \qquad \text{soit} \qquad |V_0| = 5\,\frac{h\,v_F}{e\,\Delta\ell}\,. \tag{4.34}$$

Numériquement, cela donne $|V_0| \simeq -0.6\,\mathrm{mV}$, ce qui est tout à fait accessible. Une température de 20 mK donnant un lissage en énergie sur une échelle environ 200 fois plus faible, les effets devraient être visibles bien qu'atténués par la décohérence. Un schéma de principe du montage envisagé et le nombre d'occupation électronique calculé en sortie sont représentés sur la figure 4.9. Le montage proposé envisage d'utiliser des filtres en énergie tels que ceux développés dans le groupe de F. Pierre [7] au Laboratoire de Photonique et Nanostructures, à Marcoussis. Néanmoins, même dans ce cas, les interactions coulombiennes affecteraient considérablement le contraste des cannelures.



(a) Schéma de principe du montage expérimental.



(b) Nombre d'occupation électronique en sortie, calculé en l'absence d'interactions.

Fig. 4.9 – Nombre d'occupation électronique en sortie d'un MZI alimenté par une distribution en double marche. L'étage de formation de la distribution hors équilibre est représenté en vert. Elle est formée par partitionnement sur un QPC de transmission prise égale à 1/2 d'une distribution elle-même obtenue par application d'une tension $V_0 = -0.6\,\mathrm{mV}$ à un contact ohmique. Elle est envoyée dans un MZI, en rouge, de différence de marche $\Delta\ell = 5\,\mu\mathrm{m}$ à la vitesse de Fermi $v_F = 1 \times 10^5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. La détection se fait par l'intermédiaire d'un filtre en énergie, en bleu. La température est prise égale à 20 mK.

4.3 Interférométrie à deux électrons sur un contact ponctuel quantique

4.3.1 Cadre de l'étude

Considérons maintenant les dispositifs permettant de réaliser des interférences à deux électrons, par l'intermédiaire d'expériences de type Hanbury Brown–Twiss et Hong–Ou–Mandel électroniques. La phénoménologie et les réalisations de ces expériences ont été présentées dans le chapitre introductif, aux paragraphes 1.4.3, page 24, et 1.4.4, page 26. Les deux dispositifs étant très proches, leur discussion est menée simultanément.

Rappelons qu'il s'agit de faire interférer des électrons au niveau d'un QPC. Une image par microscopie électronique à balayage de l'échantillon permettant de réaliser l'expérience et un schéma de principe introduisant les notations sont représentés figure 4.10. Ces électrons sont amenés par deux canaux de bord 1in et 2in, dans lesquels sont placées des sources électroniques. Ce paragraphe se place dans un cadre général, en considérant que l'état électronique dans les canaux d'entrée n'est spécifié que par l'intermédiaire des excès de cohérence qu'il transporte. En sortie du QPC, le bruit de courant est mesuré dans le canal 2out.

L'analogue électronique de l'expérience HOM est obtenu lorsque les deux sources sont utilisées. Pour obtenir l'analogue de l'expérience HBT, une des deux sources doit être éteinte. Nous supposerons que c'est celle du canal 2in, dont l'état est alors simplement une mer de Fermi.

Calcul des cohérences en sortie

Calculer le bruit basse fréquence dans le canal 2out demande donc de calculer les excès de cohérence à un et deux électrons dans le canal en question, qui interviennent sous la forme donnée par l'équation (4.11), page 121. Ces excès de cohérence s'obtiennent par combinaison linéaire des excès de cohérence dans les deux voies d'entrée, les coefficients de la combinaison étant donnés par la matrice de diffusion du QPC,

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{R} & \mathrm{i}\sqrt{T} \\ \mathrm{i}\sqrt{T} & \sqrt{R} \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad R = 1 - T\,. \tag{4.35}$$

Pour simplifier les notations, les excès de cohérence sont exprimés directement en sortie du QPC en fonction de ceux directement en entrée. Aucun décalage temporel dû à la propagation n'est pris en compte.

Commençons par calculer l'excès de cohérence à un électron. Les canaux étant alimentés par des sources physiquement distinctes, ils ne possèdent aucune cohérence croisée, c'est-à-dire [(6)]

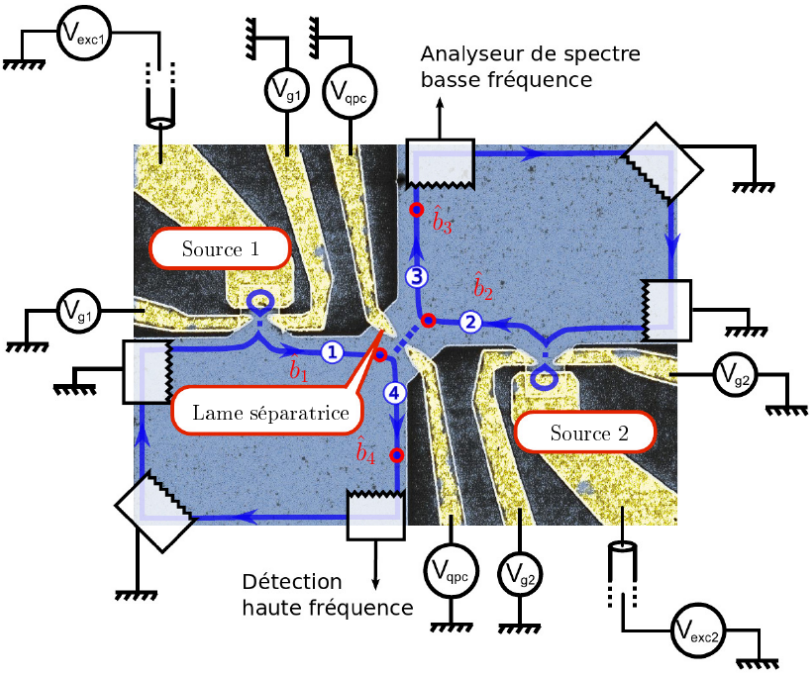
$$\forall t, t', \qquad \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{in}}(1\,t|2\,t') = 0\,. \tag{4.36}$$

Par conséquent,

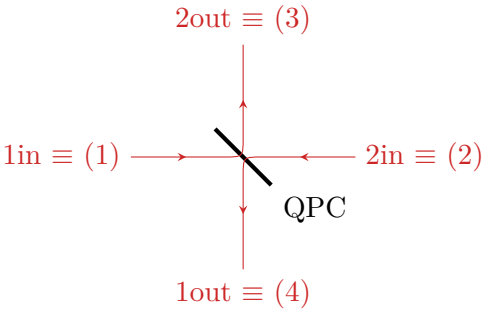
$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{out}}(t|t') = T\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t|t') + R\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t|t')\,. \tag{4.37}$$

Le calcul de l'excès de cohérence à deux électrons demande quelques précautions supplémentaires. En effet, la présence de deux sources entraîne l'apparition d'un excès de cohérence à deux électrons croisée entre les canaux. Cet excès de cohérence croisée est l'analogue dans le cas multi-canaux des contributions du type $\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_F\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}$ dans le cas à un canal, faisant intervenir simultanément la mer de Fermi et la source, comme il a été discuté au paragraphe 3.2.2,

(6). Pour alléger les écritures, les notations compactes sur les canaux de propagation sont utilisées, rappelées Annexe A.3, page 184.



(a) Vue au microscope électronique à balayage de l'échantillon pour l'expérience Hong–Ou–Mandel électronique.



(b) Schéma des notations.

Fig. 4.10 – Dispositif d'interférences à deux électrons sur un QPC. Les notations diffèrent sur la figure (a), extraite de la référence [120], et sur la figure (b) qui introduit les notations utilisées dans le texte. Deux condensateurs mésoscopiques dans les voies 1in et 2in constituent deux sources synchronisées, émettant des excitations dans des canaux de bord. Les excitations émises interfèrent au niveau d'un QPC jouant le rôle de lame séparatrice. Le bruit à basse fréquence est mesuré dans le canal 2out.

page 84. Néanmoins, comme ces contributions croisées ne font pas intervenir la mer de Fermi, elles contribuent à l'excès de cohérence. Ainsi,

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(1\,t_1;2\,t_2|1\,t'_1;2\,t'_2) = \Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_1|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_2|t'_2)\,, \tag{4.38}$$

auxquelles s'ajoutent les trois autres contributions obtenues par application des opérateurs de symétrie,

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(1\,t_1;2\,t_2|2\,t'_1;1\,t'_2) = -\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_1|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_2|t'_2)\,, \tag{4.39}$$

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(2\,t_1;1\,t_2|1\,t'_1;2\,t'_2) = -\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_2|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_1|t'_2)\,, \tag{4.40}$$

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(2\,t_1;1\,t_2|2\,t'_1;1\,t'_2) = \Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_2|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_1|t'_1)\,. \tag{4.41}$$

En revanche, compte tenu de l'indépendance des sources, toutes les cohérences totales ou d'excès faisant intervenir trois fois l'un des canaux 1in ou 2in et une fois l'autre sont nulles.

Calculons maintenant l'excès de cohérence à deux électrons en sortie. Par application de la matrice de diffusion du QPC, la cohérence totale à deux électrons en sortie s'écrit (7)

$$\mathcal{G}^{(2e)}_{2\text{out}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) = T^2\,\mathcal{G}^{(2e)}_{1\text{in}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) + R^2\mathcal{G}^{(2e)}_{2\text{in}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) \tag{4.42a}$$

$$\begin{aligned} &+ R\,T\,\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(1\,t_1;2\,t_2|1\,t'_1;2\,t'_2) \\ &+ R\,T\,\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(2\,t_1;1\,t_2|2\,t'_1;1\,t'_2) \end{aligned} \tag{4.42b}$$

$$\begin{aligned} &+ R\,T\,\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(2\,t_1;1\,t_2|1\,t'_1;2\,t'_2) \\ &+ R\,T\,\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(1\,t_1;2\,t_2|2\,t'_1;1\,t'_2) \end{aligned} \tag{4.42c}$$

Appliquer la décomposition générale (3.37), page 85, à chacun des termes de l'équation (4.42) permet d'identifier l'excès de cohérence à deux électrons $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{2\text{out}}$ sous la forme

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{2\text{out}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) = T^2\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{1\text{in}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) + R^2\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{2\text{in}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) \tag{4.43a}$$

$$\begin{aligned} &+ R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(1\,t_1;2\,t_2|1\,t'_1;2\,t'_2) \\ &+ R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(2\,t_1;1\,t_2|2\,t'_1;1\,t'_2) \end{aligned} \tag{4.43b}$$

$$\begin{aligned} &+ R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(2\,t_1;1\,t_2|1\,t'_1;2\,t'_2) \\ &+ R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{in}}(1\,t_1;2\,t_2|2\,t'_1;1\,t'_2) \end{aligned} \tag{4.43c}$$

Trois ingrédients permettent de faire émerger ce résultat. Le premier est l'équation (4.37) qui donne l'excès de cohérence à un électron. Le deuxième est la nullité de la cohérence croisée de la mer de Fermi entre deux canaux différents. Le troisième est l'unitarité de la matrice de diffusion du QPC grâce à laquelle $R + T = 1$.

En utilisant les expressions des excès de cohérence à deux électrons en fonction des excès de cohérence à un électron, il vient finalement

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{2\text{out}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) = T^2\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{1\text{in}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) + R^2\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{2\text{in}}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) \tag{4.44a}$$

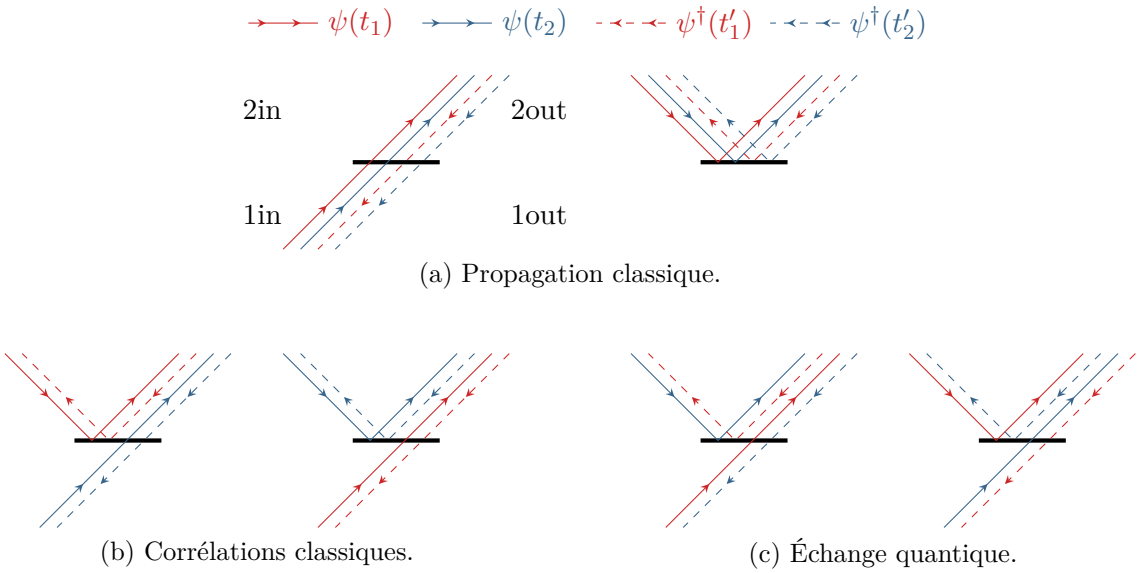
$$+ R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_1|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_2|t'_2) + R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_2|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_1|t'_1) \tag{4.44b}$$

$$- R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_2|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_1|t'_2) - R\,T\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1\text{in}}(t_1|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2\text{in}}(t_2|t'_1) \tag{4.44c}$$

Notons que des signes apparaissent dans les termes d'échange quantique (4.44c) lorsque la cohérence à deux électrons est exprimée en termes des cohérences à un électron. Ces signes $-$ sont

(7). Les termes de cohérences croisées nulles n'ont pas été écrit.

bien sûr issus de la statistique fermionique, et sont indispensables pour que l'excès de cohérence à deux électrons vérifie les propriétés de symétrie développées au paragraphe 3.1.3, page 80. Pour y voir plus clair, tous les processus donnant naissance à chacun des termes de l'équation (4.44) sont représentés sur la figure 4.11. Des expressions analogues peuvent bien sûr être écrites pour les excès de cohérence dans le canal 1out et entre canaux de sortie.



(a) Propagation classique.

(b) Corrélations classiques.

(c) Échange quantique.

Fig. 4.11 – Cohérence à deux électrons en sortie d'un QPC. La numérotation des six termes correspond à celle l'équation (4.44). Le trait plein noir représente le QPC. Comme tout au long du manuscrit, les opérateurs d'annihilation sont représentés par des lignes pleines orientées de la source vers la détection alors que les opérations de création sont représentés par des lignes pointillées orientées en sens inverse. Les lignes rouges représentent les temps indicés 1 et les lignes bleues les temps indicés 2.

Remarquons que même si aucun excès de cohérence à deux électrons n'existe dans les canaux d'entrée, le QPC en génère dans les canaux de sortie à partir des excès de cohérence à *un* électron présents dans les canaux d'entrée. Ceci constitue donc un premier moyen de produire un excès de cohérence à deux électrons contrôlé, aspect qui sera développé au paragraphe 4.5. En outre, de l'excès de cohérence croisée à deux électrons est également généré entre les canaux, et pas seulement par des processus de corrélations classiques ou d'échange quantique. Une autre formulation de la même remarque consiste à dire qu'un QPC encode dans l'excès de cohérence à deux électrons en sortie l'information sur l'excès de cohérence à un électron en entrée.

Bruit de courant en sortie

Exprimons maintenant le bruit de courant résolu en temps $S_{2\mathrm{out}}(t,t')$ dans le canal de sortie 2out par l'intermédiaire de l'équation (4.11), page 121, à partir des cohérences qui viennent d'être calculées. Plus précisément, cette équation indique que la quantité $S_{2\mathrm{out}}(t,t')$ est *l'excès* de bruit dans le canal 2out en comparant la situation où au moins une des deux sources est allumée par rapport à la situation où les deux sources sont éteintes [(8)]. Ce bruit vaut

$$\begin{aligned} S_{2\mathrm{out}}(t,t') = (e\,v_F)^2 \Big[& \frac{1}{v_F}\,\delta(t-t')\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{out}}(t|t') \\ & - \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_F(t|t')\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{out}}(t'|t) - \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_F(t'|t)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{out}}(t|t') \\ & + \Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}_{2\mathrm{out}}(t,t'|t,t') - \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{out}}(t|t)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{out}}(t'|t') \Big]\,. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Usuellement, le bruit de courant $S_{2\mathrm{out}}$ est exprimé en fonction des bruits de courant dans les canaux d'entrée sous la forme [51, 78]

$$S_{2\mathrm{out}}(t,t') = T^2\,S_{1\mathrm{in}}(t,t') + R^2\,S_{2\mathrm{in}}(t,t') + RT\,Q(t,t')\,. \tag{4.46}$$

Le terme additionnel $Q(t,t')$ quantifie la contribution des interférences à deux électrons au bruit dans le canal de sortie. Il provient de l'excès de cohérence à deux électrons croisée entre les canaux 1in et 2in. Son écriture la plus compacte fait intervenir la cohérence à un trou, introduite au paragraphe 2.2.4, page 44,

$$\begin{aligned} Q(t,t') = (e\,v_F)^2 & \Big[\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{2\mathrm{in}}(t'|t) + \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t'|t)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\Big] \\ & - \Big[\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{F,1\mathrm{in}}(t'|t)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{F,2\mathrm{in}}(t'|t) + \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{F,2\mathrm{in}}(t'|t)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{F,1\mathrm{in}}(t'|t)\Big] \end{aligned} \tag{4.47}$$

Cette expression est établie sous une forme très voisine [(9)] dans la thèse de C. Grenier [76]. La démonstration se mène simplement à partir de l'expression des bruits en termes de valeurs moyennes d'opérateurs auxquels est appliquée la matrice de diffusion du QPC. Une remarque d'importance concerne l'absence des cohérences à deux électrons d'entrée dans cette expression. Bien que traduisant des interférences à deux électrons, le bruit additionnel ne permet de faire ressortir que les propriétés de cohérence à un électron dans les canaux d'entrée.

4.3.2 Expérience HBT électronique

Commençons par analyser l'expérience HBT électronique, dans laquelle seule la source 1 est active, ce qui implique

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t'|t) \neq 0 \qquad \text{mais} \qquad \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t'|t) = 0\,. \tag{4.48}$$

Expérimentalement, les sources sont des sources d'électrons uniques, ne produisant donc pas d'excès de cohérence à deux électrons, conformément au résultat (3.2.3), page 87 [(10)]. Par conséquent,

$$Q_{\mathrm{HBT}}(t,t') = (e\,v_F)^2 \Big[\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{F,2\mathrm{in}}(t'|t) + \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\,\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{F,2\mathrm{in}}(t'|t)\Big]\,. \tag{4.49}$$

(8). Les quantités notées ici S par souci de cohérence des notations tout au long du manuscrit correspondent aux quantités notées ΔS dans les références [51, 78]

(9). C. Grenier l'établit pour le bruit total au lieu du bruit d'excès, ce qui se traduit par l'absence de la soustraction des termes dus à la mer de Fermi.

(10). Ce n'est cependant d'aucune importance pour calculer la contribution Q_{HBT}, dans laquelle les termes associés n'interviennent pas.

Expérimentalement, seule la contribution moyennée par rapport au temps $\bar{t} = (t + t')/2$ et transformée de Fourier par rapport au temps $\tau = t - t'$ est accessible, définie équation (4.6), page 120,

$$\widetilde{Q}_{\mathrm{HBT}}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}\bar{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, Q_{\mathrm{HBT}}\left(\bar{t} + \frac{\tau}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} \,. \tag{4.50}$$

En exprimant les cohérences de trou en termes des cohérences électroniques par la relation (2.42), page 45, puis en calculant la transformée de Fourier, l'excès de bruit HBT à fréquence finie s'écrit

$$\widetilde{Q}_{\mathrm{HBT}}(\omega) = -e\, v_F\, \bar{I}_{1\mathrm{in}} - e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\, \chi_\omega(\Omega)\, \delta f_{1\mathrm{in}}(\Omega)\,, \tag{4.51}$$

où $\bar{I}_{1\mathrm{in}}$ est le courant moyenné dans le temps parcourant le canal 1in, $\delta f_{1\mathrm{in}}$ le nombre d'occupation en excès dans le canal 1in et $\chi_\omega(\Omega)$ une fonction caractéristique du canal 2in définie par

$$\chi_\omega(\Omega) = f_{F,2\mathrm{in}}(\Omega - \omega) + f_{F,2\mathrm{in}}(\Omega + \omega)\,. \tag{4.52}$$

Il s'agit d'une fonction de type double marche, valant 2 pour $\Omega \ll -|\omega|$, 1 pour $|\Omega| \lesssim |\omega|$ et enfin 0 pour $\Omega \gg |\omega|$. Les frontières entre les domaines ont pour largeur typique $k_{\mathrm{B}}T/\hbar$.

Le premier terme de l'équation (4.51) est le bruit poissonien, caractéristique du partitionnement aléatoire des excitations parcourant le canal 1in. Sa contribution ne dépend pas de la fréquence ω, signe (ou conséquence) du fait qu'il s'agit d'un bruit blanc.

Le signe $-$ intervenant devant le second terme est une conséquence du caractère fermionique des excitations. Contrairement au cas des bosons, un phénomène d'antibunching est à l'œuvre : deux excitations de même type arrivant simultanément sur le QPC tendent à en partir par deux voies de sortie différentes. Si le calcul avait été mené avec des opérateurs bosoniques, ce signe serait devenu un signe $+$.

Enfin, remarquons que le courant moyen compte le nombre total d'excitations véhiculées dans le canal 1in, et peut donc s'écrire comme une somme du nombre d'occupation à toutes les fréquences. Par conséquent,

$$\widetilde{Q}_{\mathrm{HBT}}(\omega) = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\, [1 - \chi_\omega(\Omega)]\, \delta f_{1\mathrm{in}}(\Omega)\,. \tag{4.53}$$

Cela indique que le bruit HBT à fréquence finie ω compte la somme du nombre d'excitations de type trous d'énergie inférieure ω et du nombre d'excitations de type électrons d'énergie supérieure à ω. Cette expression généralise à fréquence finie le résultat à fréquence nulle utilisé par E. Bocquillon *et al.* [25] pour caractériser le fonctionnement du condensateur mésoscopique en tant que source d'électrons uniques.

4.3.3 Expérience HOM électronique

Passons maintenant à l'étude de l'expérience HOM électronique. Désormais, les deux sources sont actives et des excès de cohérence à un électron sont présents dans les deux canaux d'entrée du QPC. Développer l'expression des cohérences en termes de mer de Fermi et de contribution d'excès dans l'équation (4.47) indique queles interférences à deux électrons contribuent au bruit en sortie sous la forme

$$Q_{\mathrm{tot}}(t,t') = (e\, v_F)^2 \Big[\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{2\mathrm{in}}(t'|t) + \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\, \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t'|t) \tag{4.54a}$$

$$+ \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\, \mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{F,2\mathrm{in}}(t'|t) + \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\, \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{F,2\mathrm{in}}(t'|t) \tag{4.54b}$$

$$+ \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t'|t)\, \mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{F,1\mathrm{in}}(t'|t) + \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}_{2\mathrm{in}}(t'|t)\, \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{F,1\mathrm{in}}(t'|t) \Big] \tag{4.54c}$$

Les termes (4.54b) et (4.54c) décrivent les contributions au bruit de sortie de l'effet HBT lorsque seule une des deux sources est en fonctionnement. Le terme restant (4.54a) définit donc la contribution HOM au bruit de sortie dans le canal 2out, qui s'écrit

$$Q_{\mathrm{HOM}}(t,t') = -(e\,v_F)^2 \left[\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t'|t)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t|t') + \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t|t')\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t'|t)\right] , \tag{4.55}$$

où les excès de cohérence de type trou ont été remplacés par les excès de cohérence électronique grâce à la relation (2.42) [(11)], page 45, qui indique que $\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = -\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{h})}(t'|t)$. Le bruit HOM à fréquence finie s'exprime plus naturellement en termes des fonctions de Wigner,

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}_{\mathrm{HOM}}(\omega) = -e^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \Big[&\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t,\Omega)\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t,\Omega+\omega) \\ &+ \Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{1\mathrm{in}}(t,\Omega+\omega)\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}_{2\mathrm{in}}(t,\Omega)\Big] .\end{aligned} \tag{4.56}$$

Le sens physique de cette expression apparaît alors clairement : le bruit HOM est non-nul dès lors que les excitations envoyées par les deux sources se recouvrent à un décalage en fréquence près, correspondant à la fréquence de mesure.

Les mesures réalisées jusqu'à présent au laboratoire Pierre Aigrain [22, 61] sont des mesures de bruit à fréquence nulle où les deux sources émettent des états identiques mais dont les temps d'émission sont décalés d'une quantité τ. La quantité mesurée est donc

$$Q_{\mathrm{HOM}}(\tau) = -2e^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(t-\tau,\Omega)\,\Delta\mathcal{W}^{(\mathrm{e})}(t,\Omega) . \tag{4.57}$$

Plus précisément, il s'agit du bruit total Q calculé équation (4.54) normalisé par la somme des deux contributions de type HBT (4.54b) et (4.54c),

$$\Delta q(\tau) = \frac{Q_{\mathrm{tot}}(\tau)}{Q_{\mathrm{HBT},1} + Q_{\mathrm{HBT},2}} = 1 - \frac{Q_{\mathrm{HOM}}(\tau)}{Q_{\mathrm{HBT},1} + Q_{\mathrm{HBT},2}} . \tag{4.58}$$

Dans le cas sans interaction où les états émis par les sources sont deux états purs $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$, le bruit normalisé s'écrit sous la forme

$$\Delta q = 1 - |\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2 , \tag{4.59}$$

qui indique clairement que l'effet HOM fermionique se traduit par un antibunching et une diminution du bruit. Dans la limite où les deux états sont identiques, le bruit normalisé descend rigoureusement à zéro lorsqu'ils sont émis en même temps, signe qu'à chaque collision sur le QPC les deux excitations empruntent chacune une voie de sortie différente. Attention néanmoins, la séparation spin–charge induite par les interactions, introduite au paragraphe 1.5, page 31, peut entraîner un bunching entre électrons [177]. Cet effet a été observé expérimentalement [61, 120] et se traduit par des valeurs supérieures à 1 du bruit normalisé, obtenues pour un décalage temporel non nul, alors que sa valeur à décalage nul demeure inférieure à 1.

En calculant le recouvrement à partir de l'expression analytique des paquets émis par le condensateur mésoscopique, équation (2.98), page 64, le bruit normalisé s'écrit

$$\Delta q(\tau) = 1 - \mathrm{e}^{-|\tau|/\tau_{\mathrm{e}}} . \tag{4.60}$$

Les résultats expérimentaux [22] du bruit normalisé tracé en fonction du délai entre les temps d'émission des deux sources sont représentés figure 4.12. Même lorsque les sources sont synchronisées, le bruit normalisé ne descend pas en dessous de 0.5 environ. Cela donne un ordre de

(11). La distribution de Dirac provient des cohérences de la mer de Fermi, et n'intervient donc pas dans les parties d'excès.

grandeur de l'importance de la décohérence entre les sources et le QPC, distants d'environ 3 µm. Ces effets peuvent être pris en compte de façon effective en pondérant l'excès de cohérence à un électron par l'introduction d'un coefficient de décohérence,

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') = \mathcal{D}(t-t')\,\phi(t)\,\phi^*(t') \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{D}(t-t') = \mathrm{e}^{-|\tau|/\tau_\varphi}\,, \tag{4.61}$$

où τ_φ est le temps de cohérence de phase introduit au paragraphe 2.3.3, page 51. Le bruit normalisé s'écrit alors

$$\Delta q(\tau) = 1 - \gamma\,\mathrm{e}^{-|\tau|/\tau_\mathrm{e}}\,, \tag{4.62}$$

faisant intervenir une visibilité

$$\gamma = \frac{\tau_\varphi/2\tau_\mathrm{e}}{1+\tau_\varphi/2\tau_\mathrm{e}}\,. \tag{4.63}$$

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec comme valeur $\tau_\varphi = 100\,\mathrm{ps}$. Des travaux sont en cours au sein de la collaboration 1shot [12] pour confirmer ces résultats phénoménologiques par une approche quantitative des interactions. Celle utilisée dans notre groupe de l'ENS Lyon est introduite au paragraphe 2.3.3, page 51.

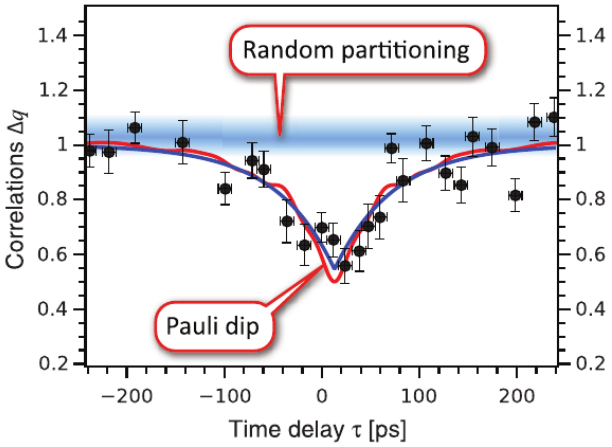


Fig. 4.12 – Résultats de l'expérience HOM électronique. Le bruit normalisé Δq, introduit équation (4.58), est représenté en fonction du délai τ entre les temps d'émission des deux sources. Les points noirs sont les résultats expérimentaux, la ligne rouge est obtenue par la théorie de Floquet à température non nulle alors que la ligne bleue prend en compte la décohérence de façon effective selon l'équation (4.62). La ligne bleue claire indique le niveau du bruit de partitionnement aléatoire, sa largeur renseignant sur les barres d'erreur. Figure extraite de la référence [22].

Remarquons pour terminer qu'en principe, sans décohérence, envoyer sur le QPC deux états identiques dont les temps d'émission sont décalés d'une quantité τ contrôlée et mesurer le bruit normalisé permet de reconstruire point à point le paquet d'ondes émis par l'intermédiaire de sa fonction d'auto-corrélation. En d'autres termes, le bruit normalisé mesure ici la ressemblance du paquet d'ondes avec lui-même décalé dans le temps. Cette idée s'étend en suggérant que le paquet peut être reconstruit en le comparant non pas à lui-même, mais à des états de référence, bien connus et bien maîtrisés, qui seraient envoyés dans le second canal. Cette idée mène au protocole de tomographie quantique, originellement proposé par C. Grenier *et al.* [76, 78] dans le cadre de la représentation fréquentielle de la cohérence, introduite au paragraphe 2.4.2, page 58. Nous allons ici le discuter en termes de fonctions de Wigner.

(12). La collaboration réunit le groupe de G. Fève au laboratoire Pierre Aigrain de l'ENS Paris, celui de T. Martin au Centre de Physique Théorique de l'université de Marseille et celui de P. Degiovanni au laboratoire de physique de l'ENS Lyon.

4.3.4 Tomographie d'un état électronique

Objectif

La tomographie est une technique d'imagerie, très utilisée par exemple dans le domaine médical, permettant de reconstruire une image en volume par une série de mesures effectuées par tranches et depuis l'extérieur. Dans le contexte de la mécanique quantique, il s'agit de faire interférer un état quantique inconnu avec un jeu d'états quantiques bien caractérisés et de reconstruire l'état quantique inconnu à partir des différentes figures d'interférences obtenues. La problématique consiste à trouver une source adaptée, capable de générer efficacement les différents états de référence par des variations de paramètres extérieurs facilement contrôlables. Des mesures de fonction de Wigner sont désormais bien maîtrisées dans le cadre de l'optique quantique photonique [18, 113, 163] par un procédé dit de tomographie homodyne, qui compare l'état inconnu à un faisceau laser de référence.

Dans le cas présent, l'objectif est de reconstruire la fonction de Wigner électronique en excès $\Delta\mathcal{W}_1^{(\mathrm{e})}$, inconnue, arrivant par le canal 1in d'un interféromètre HOM en contrôlant une source placée dans le canal 2in, qui émet elle une fonction de Wigner en excès $\Delta\mathcal{W}_2^{(\mathrm{e})}$ connue. Les « figures d'interférences » mentionnées sont ici des mesures de bruit basse fréquence, défini équation (4.56),

$$\widetilde{Q}_{\mathrm{HOM}}(\omega{=}0) = -2e^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \Delta\mathcal{W}_{1\mathrm{in}}^{(\mathrm{e})}(t,\Omega)\, \Delta\mathcal{W}_{2\mathrm{in}}^{(\mathrm{e})}(t,\Omega)\,. \tag{4.64}$$

Utilisation d'un contact ohmique commandé en tension

Une première idée consiste à utiliser comme source un contact ohmique commandé par une tension constante V_0, qui permet de parcourir l'ensemble de l'espace des états à un électron. Sa fonction de Wigner ne dépend pas du temps, et n'est autre qu'une distribution de Fermi à potentiel électrochimique $\mu' = \mu - e\,V_0$, où μ est le potentiel chimique de la mer de Fermi de référence. Lorsque le potentiel électrochimique passe de μ' à $\mu'+\delta\mu'$, l'intégrale donnant le bruit de sortie contient une contribution supplémentaire d'une fine tranche en fréquence d'épaisseur $\delta\mu'/\hbar$. Par conséquent, la variation du bruit de sortie est proportionnelle à la population des états à un électron du canal 1in dont l'énergie est comprise entre μ' et $\mu'+\delta\mu'$. Si un tel état est peuplé, un effet d'antibunching a lieu sur le QPC et le bruit de sortie n'est pas modifié. En revanche, si un tel état est vide, les excitations du canal 2in sont partitionnées aléatoirement et le bruit de sortie augmente. On remonte donc par cette méthode au nombre d'occupation électronique, c'est-à-dire à la fonction de Wigner intégrée sur le temps, dont l'incrément $\delta\mu'$ donne la résolution. Cette idée est mise en œuvre dans la technique de spectroscopie du bruit de grenaille, d'abord introduite dans le contexte de mesures de bruit photo-assisté [139, 161] puis plus récemment dans celui de l'optique quantique électronique [78, 127]. Néanmoins, une telle méthode ne permet bien sûr pas d'obtenir la dépendance en temps de la fonction de Wigner. Il faut pour cela utiliser une source non-stationnaire comme référence, comme par exemple un contact ohmique commandé par une tension dépendant du temps.

Considérons donc que le contact ohmique est commandé par une tension harmonique,

$$V(t) = V_0 + V_1 \cos(2\pi\,\nu\,t)\,. \tag{4.65}$$

La fonction de Wigner émise a été discutée au paragraphe 2.6.2, page 68. Dans la limite quantique d'une tension de faible amplitude, la fonction de Wigner en excès au premier ordre en $\alpha = eV_1/h\nu \ll 1$ vaut

$$\Delta\mathcal{W}_{2\mathrm{in}}^{(\mathrm{e})}(t,\omega) = \alpha\,[f_F(\omega-\pi\nu) - f_F(\omega+\pi\nu)]\cos(2\pi\nu t)\,, \tag{4.66}$$

où f_F est le nombre d'occupation électronique d'une mer de Fermi de potentiel électrochimique μ'. Le terme entre crochets est nul pour $|\omega| \gg \pi\nu$ et vaut 1 pour $|\omega| \lesssim \pi\nu$, la largeur de la transition entre ces deux régimes valant $k_\mathrm{B}T$. L'équation (4.64) indique alors que la variation du bruit HOM lorsqu'une tension harmonique de faible amplitude est appliquée dans la voie 2in renseigne sur la transformée de Fourier par rapport au temps de la fonction de Wigner du canal 1in. Plus précisément, elle est reliée à l'intégrale en énergie de cette transformée de Fourier sur une fenêtre de largeur $2\pi\nu$ centrée sur le potentiel électrochimique $\mu - eV_0$.

En changeant la composante continue V_0 à fréquence fixée, puis en réitérant le processus pour différentes fréquences, la fonction de Wigner du canal 1in peut alors être reconstruite. Le détail des mesures à effectuer et des étapes de reconstruction de l'état du canal 1in, proposé par C. Grenier *et al.*, fait l'objet de la référence [78] et d'un chapitre et d'une annexe de la référence [76]. Un protocole tout à fait analogue a été mis en œuvre très récemment par T. Jullien *et al.* [100] en adaptant le protocole général proposé par C. Grenier aux états générés par des impulsions de tension. Précisément, T. Jullien *et al.* ont appliqué les formules générales au cas particulier où l'état électronique être décrit par une impulsion de tension, donc par des amplitudes de transition photo-assistées introduites au paragraphe 2.6, page 68, et sont remontés directement à ces amplitudes à partir des mesures de bruit.

Protocoles alternatifs

Bien que génériquement applicable dans toute situation, le protocole présenté ci-dessus peut être très lourd à mettre en œuvre car chaque point de mesure demande une mesure de bruit précise, nécessitant un moyennage sur une longue durée. De plus, obtenir une bonne résolution sur la fonction de Wigner reconstruite peut demander un échantillonnage important. L'intérêt d'utiliser des états quantiques de référence différents, adaptés au signal à reconstruire, apparaît donc clairement. Bien sûr, cela demande une connaissance a priori du signal « inconnu » pour pouvoir déterminer la famille d'états quantiques de référence la mieux adaptée. Pour une mise en œuvre expérimentale, cette connaissance a priori inclut également une modélisation des effets de la décohérence sur l'état quantique d'entrée. Cette idée rejoint la problématique de l'acquisition comprimée (« compressed sensing ») d'un signal [47], qui cherche la famille de référence de façon à minimiser le nombre de mesures pour reconstruire le signal voulu avec une précision donnée. Les signaux à considérer sont ici quantiques, mais le cœur de la méthode consiste à mesurer le recouvrement entre deux signaux, le signal inconnu et un signal connu, ce qui est exactement encodé dans le bruit de sortie à fréquence nulle d'un interféromètre HOM. Des développements théoriques intéressants sont donc envisageables dans cette voie, et pourraient bénéficier d'un dialogue fructueux avec des communautés travaillant autour des thématiques du traitement du signal.

En revanche, les applications expérimentales sont forcément limitées par le petit nombre de sources qui permettent d'émettre des états quantiques bien contrôlés. En particulier, les états émis par le condensateur mésoscopique ne peuvent pas être considérés comme bien contrôlés, car ils subissent une forte décohérence entre le condensateur et le QPC. En fait, un des buts poursuivis par le groupe de G. Fève est d'appliquer le protocole de tomographie à l'étude de cette décohérence. Les états émis par un contact ohmique commandé en tension constituent de meilleurs candidats, qui peuvent être qualifiés de bien contrôlés dans une certaine mesure. Une tension de commande harmonique est d'ailleurs à la base du protocole générique. En effet, bien que les états associés pâtissent également de la décohérence, des mesures de courant à fréquence finie ou d'admittance à fréquence finie, difficiles mais accessibles [21, 23], permettent de quantifier en partie ces effets.

4.4 Interférométrie non-locale à deux électrons

Les interféromètres étudiés jusqu'à présent ne permettent d'accéder qu'à des informations sur la cohérence à un électron émise par une source. Cherchons maintenant comment mesurer un excès de cohérence à deux électrons.

4.4.1 Interféromètre à électrons de type Franson

Élaboration du dispositif

Ce paragraphe propose une élaboration pas à pas du dispositif envisagé. Le schéma du dispositif complet est présenté figure 4.13, où se trouvent notamment toutes les notations utiles.

Parmi les quantités mesurables expérimentalement présentées au paragraphe 4.1, page 118, seules les mesures de bruit ou de corrélations impliquent l'excès de cohérence à deux électrons. Elles vont donc être au cœur du dispositif. Cependant, l'équation (4.11), page 121,

$$S(t_1,t_2) = (e\,v_F)^2 \Big[\frac{1}{v_F}\,\delta(t_1-t_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2) \tag{4.67a}$$

$$- \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_1) - \mathcal{G}_F^{(\mathrm{e})}(t_2|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_2) \tag{4.67b}$$

$$+ \Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1,t_2) - \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t_2|t_2)\Big]\,. \tag{4.67c}$$

indique que le bruit de courant $S(t_1,t_2)$ dans un seul canal implique une contribution (4.67b) issue d'interférences quantiques entre la mer de Fermi et les excitations émises par la source. Distinguer cette contribution de celle intrinsèque à la cohérence à deux électrons n'est pas simple. Par conséquent, il est préférable de mesurer les corrélations $S_{12}(t_1,t_2)$ entre les courants dans deux canaux différents puisque l'équation (4.14), page 122, indique que son lien aux cohérences est plus simple. En effet,

$$S_{12}(t_1,t_2) = (e\,v_F)^2 \Big[\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1\,t_1,2\,t_2|1\,t_1,2\,t_2) - \Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1\,t_1|1\,t_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(2\,t_2|2\,t_2)\Big]\,, \tag{4.68}$$

mais le second terme implique des cohérences d'ordre 1 qui sont mesurables séparément, puisqu'il s'agit seulement de mesurer les courants dans les deux canaux.

Ainsi, pour mesurer l'excès de cohérence à deux électrons, il faut le répartir du canal 1s dans lequel la source se trouve vers deux canaux différents appelés 1in et 2in. Cela se fait à l'aide d'un interféromètre HBT, où les excitations issues de la source sont partitionnées dans les voies de sortie d'un QPC labellé QPC0. La seconde voie d'entrée du QPC0, notée 2s, est reliée à la masse, si bien qu'elle n'apporte aucun excès de cohérence. L'excès de cohérence à deux électrons croisé entre les voies de sortie du QPC0 s'écrit alors simplement

$$\Delta\mathcal{G}_{\mathrm{in}}^{(2\mathrm{e})}(1\,t_1,2\,t_2|1\,t_1',2\,t_2') = R_0\,T_0\,\Delta\mathcal{G}_{\mathrm{1s}}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1',t_2')\,, \tag{4.69}$$

en utilisant à nouveau les notations compactes. Comme les corrélations de courant n'impliquent que les termes diagonaux, il est dès lors possible d'accéder à la partie diagonale $\Delta\mathcal{G}_{\mathrm{1s}}^{(2\mathrm{e})}(t_1,t_2|t_1,t_2)$ mais toujours pas à la partie hors-diagonale.

Pour aller plus loin, il faut adjoindre dans les voies de sortie du QPC0 un dispositif capable d'assurer la conversion des composantes hors-diagonales en composantes diagonales. Comme expliqué au paragraphe 4.2.2, page 127, les travaux de G. Haack *et al.* [82] indiquent qu'un MZI permet de réaliser une telle conversion dans le domaine des temps. Par conséquent, le dispositif se compose de deux interféromètres de Mach–Zehnder placés dans les deux voies de sortie d'un interféromètre de Hanbury Brown et Twiss. Notons que le même principe pourrait s'appliquer dans le domaine des énergies en remplaçant les MZI par un « convertisseur énergétique » des composantes hors-diagonales en diagonales, qui demeure à trouver.

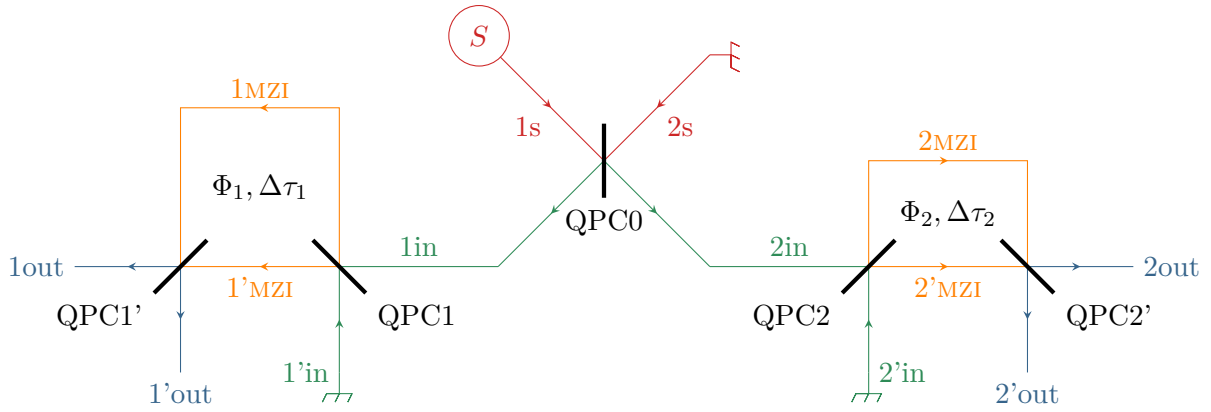


Fig. 4.13 – Schéma de principe du dispositif de mesure de cohérence à deux électrons. Les électrons émis par la source S sont partitionnés par le QPC0. Deux MZI différents sont placés dans les voies de sortie du QPC, décrits par des temps de vol $\Delta\tau$ et des flux magnétiques Φ différents. Les corrélations de courant sont mesurées entre les voies de sortie 1out et 2out. Le dispositif est divisé en quatre secteurs, représentés sur le schéma par des couleurs différentes.

Ce dispositif est voisin de l'interféromètre de Franson optique, que J. Franson a proposé [59] et mis en œuvre [60] pour étudier une intrication entre photons impliquant des variables autres que la polarisation, en l'occurrence l'énergie. Quelques années plus tard, J. Brendel *et al.* [28] ont utilisé cet interféromètre pour étudier un autre type d'intrication appelé intrication en fenêtre de temps (« time-bin entanglement »). Nous y reviendrons au paragraphe 4.4.3. Depuis, de multiples implémentations ont été proposées dans le domaine de l'optique, par exemple en remplaçant les MZI par des interféromètres de Michelson ou pour prouver la robustesse des corrélations quantiques notamment à des fins de communication quantique [29, 142, 167, 171].

Des dispositifs proches ont été proposés dans le domaine de la physique de la matière condensée depuis une décennie, par exemple pour sonder la cohérence des paires électron–trou émises par une jonction entre semi-conducteurs [159] ou celle des paires de Cooper [70]. V. Chirolli *et al.* [38] ont suggéré d'utiliser simultanément un dispositif analogue et une source à électrons uniques pour quantifier l'intrication en fenêtre de temps de l'électron et du trou qui se suivent. J. Splettstößer *et al.* [164] ont quant à eux envisagé de l'utiliser pour intriquer orbitalement deux électrons issus de deux sources différentes. La preuve d'une telle intrication serait la mesure d'un effet Aharonov–Bohm à deux particules, visible non pas sur le courant mais sur ses corrélations.

Nature des phénomènes mis en jeu

Avant de calculer explicitement les cohérences électroniques en sortie, montrons que ce dispositif permet de réaliser des interférences à deux électrons non-locales. Pour ce faire, utilisons l'image de la cohérence liée à la détection développée aux paragraphes 2.3.2, page 48, et 3.2.2, page 84.

Imaginons que la source S émet une paire d'électrons séparés d'une quantité Δt bien plus grande que le temps de cohérence $T^{(1)}$ de chacun des électrons. Supposons de plus que les deux MZI sont identiques, et que leur différence de temps de vol $\Delta\tau$ correspond précisément à Δt. Par conséquent, aucun effet d'interférence d'un électron avec lui-même ne peut avoir lieu dans les MZI.

Plusieurs chemins de propagation au travers du dispositif peuvent alors donner lieu à une détection simultanée de deux électrons dans les voies 1out et 2out. Ceux-ci sont représentés fi-

gure 4.14. Les deux premiers, figure 4.14a, sont des processus classiques où un trajet dans l'interféromètre peut être attribué sans ambiguïté à chacun des électrons. Les deux autres, figure 4.14b, traduisent quant à eux des interférences à deux électrons : lors du processus de détection, ce sont les opérateurs décrivant deux électrons différents qui sont associés. Néanmoins, ces interférences se manifestent aux deux extrémités de l'interféromètre, et sont donc qualifiées de non-locales.

(a) Propagation classique.

(b) Interférences à deux électrons.

Fig. 4.14 – Interférences non-locales à deux électrons dans un interféromètre de type Franson. Comme tout au long du manuscrit, un opérateur annihilation est représenté par une ligne pleine orientée de la source vers la détection alors qu'un opérateur destruction est représenté par une ligne pointillée orientée en sens inverse. Cette fois, les couleurs sont associées non pas à la détection mais à l'émission, c'est pourquoi les lignes ne sont pas rouges et bleues comme sur les autres diagrammes. Les lignes oranges décrivent le premier électron émis et les lignes vertes le second. Pour qu'un diagramme contribue à la détection simultanée, il faut que les lignes oranges empruntent les voies longues des interféromètres et les lignes vertes les voies courtes. Une détection simultanée dans les deux voies de sortie peut provenir de deux processus classiques ou de deux processus provenant d'interférences à deux électrons non-locales, au sens où les deux électrons interfèrent sur deux QPC séparés.

Analysons maintenant comment se manifestent ces interférences. Notons d'abord qu'elles n'apparaissent *pas* dans les courants de sortie, mais seulement dans leurs corrélations. En effet, le courant électrique ne fait intervenir que les excès de cohérence à un électron, pour lesquels de tels processus n'existent pas. Comme les MZI sont supposés tels que $\Delta\tau \gg T^{(1)}$, les interférences à un électron sont inopérantes dans le dispositif envisagé et le courant ne dépend pas des phases Aharonov–Bohm associées à chacun des MZI. En revanche, les processus d'interférences représentés figure 4.14b impliquent une double délocalisation électronique entre les bras des deux interféromètres, et vont donc être sensibles aux phases Aharonov–Bohm. Par conséquent, les corrélations entre les voies de sortie sont modulées par les flux magnétiques, ce que J. Splettstößer *et al.* ont établi par le biais de la théorie de Floquet pour une source périodique [164].

Dans le cadre plus général envisagé par la suite, aucune des hypothèses simplificatrices mentionnées au début de ce paragraphe n'a de raison d'être valable. La source émet un état absolument quelconque, les MZI peuvent différer, et la différence de temps de vol entre les deux bras des interféromètres est quelconque également, ces derniers pouvant même être équilibrés. Cependant, les détails du calcul permettront de montrer que les interférences non-locales à deux électrons sont bien le point clé du dispositif, celui qui permet d'accéder à la cohérence hors-diagonale.

4.4.2 Mesure de cohérence hors diagonale

Propagation de l'excès de cohérence à deux électrons dans l'interféromètre

Expliquons maintenant comment reconstruire l'excès de cohérence à deux électrons du canal d'entrée 1s pour quatre temps arbitraires. Pour cela, exprimons l'excès de cohérence à deux électrons croisé entre les voies de sortie 1out et 2out en fonction de celui émis par la source dans la voie d'entrée 1s. Un raisonnement combinatoire simple montre que seize termes sont à prendre en compte. En termes de diagrammes, il s'agit de tracer la trajectoire des lignes bleues et rouges dans l'interféromètre sachant que les quatre lignes partent de la voie 1s, et qu'une ligne pleine doit être appariée à une ligne pointillée sur les voies 1out et 2out, peu importent les couleurs. Contrairement à l'exemple simplifié détaillé précédemment, comme aucune hypothèse sur les échelles de temps n'est faite, tous les diagrammes contribuent potentiellement aux corrélations en sortie.

Afin d'alléger des écritures déjà lourdes, les QPC 1 et 1' sont supposés identiques, de même que les QPC 2 et 2'. En outre, les voies courtes des MZI 1 et 2 sont supposées de même longueur, ce qui permet de redéfinir l'origine des temps entre le secteur de la source et le secteur de sortie de telle sorte que le temps de vol nécessaire pour aller de la source aux détecteurs en passant par les voies courtes n'apparaît dans aucune des équations.

Les termes peuvent être classés en fonction de leur dépendance en les phases Aharonov–Bohm. Certains des termes détaillés ci-dessous sont illustrés par les diagrammes de la figure 4.15. Les quatre premiers termes sont classiques, c'est-à-dire qu'un chemin au travers de l'interféromètre peut être attribué sans ambiguïté à chacun des électrons. Par conséquent, ils n'impliquent aucune délocalisation et ne dépendent d'aucune des phases Aharonov–Bohm, d'où la notation 0AB, [13]

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{out,0AB}}(1\,t_1, 2\,t_2|1\,t'_1, 2\,t'_2) = R_0\,T_0\,{T_1}^2\,{T_2}^2\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1, t_2|t'_1, t'_2) \tag{4.70a}$$
$$+ R_0\,T_0\,R_1^2\,{T_2}^2\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1 - \Delta\tau_1, t_2|t'_1 - \Delta\tau_1, t'_2) \tag{4.70b}$$
$$+ R_0\,T_0\,{T_1}^2\,R_2^2\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1, t_2 - \Delta\tau_2|t'_1, t'_2 - \Delta\tau_2) \tag{4.70c}$$
$$+ R_0\,T_0\,{T_1}^2\,{T_2}^2\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1 - \Delta\tau_1, t_2 - \Delta\tau_1|t'_1 - \Delta\tau, t'_2 - \Delta\tau) \tag{4.70d}$$

La seconde catégorie de termes contient ceux pour lesquels un seul des deux électrons détectés a été délocalisé dans l'interféromètre. Huit termes en font partie et présentent une dépendance en une seule des phases Aharonov–Bohm,

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{out,1AB}}(1\,t_1, 2\,t_2|1\,t'_1, 2\,t'_2) = \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,{T_2}^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1, t_2|t'_1 - \Delta\tau_1, t'_2) \tag{4.71a}$$
$$- \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,{T_2}^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1 - \Delta\tau_1, t_2|t'_1, t'_2) \tag{4.71b}$$
$$+ \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,{T_1}^2\,R_2\,T_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_2}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1, t_2|t'_1, t'_2 - \Delta\tau_2) \tag{4.71c}$$
$$- \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,{T_1}^2\,R_2\,T_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1, t_2 - \Delta\tau_2|t'_1, t'_2) \tag{4.71d}$$
$$+ \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,R_2^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_1}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1, t_2 - \Delta\tau_2|t'_1 - \Delta\tau_1, t'_2 - \Delta\tau_2) \tag{4.71e}$$
$$- \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,R_2^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1 - \Delta\tau_1, t_2 - \Delta\tau_2|t'_1, t'_2 - \Delta\tau_2) \tag{4.71f}$$
$$+ \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,R_1^2\,R_2\,T_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_2}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1 - \Delta\tau_1, t_2|t'_1 - \Delta\tau_1, t'_2 - \Delta\tau_2) \tag{4.71g}$$
$$- \mathrm{i}\,R_0\,T_0\,R_1^2\,R_2\,T_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{1s}}(t_1 - \Delta\tau_1, t_2 - \Delta\tau_2|t'_1 - \Delta\tau_1, t'_2) \tag{4.71h}$$

Enfin la troisième famille de termes implique une double délocalisation des électrons dans les

(13). Les notations compactes sur les canaux de propagation sont utilisées, rappelées Annexe A.3, page 184.

deux MZI. Quatre termes y contribuent, et les deux phases Aharonov–Bohm sont impliquées,

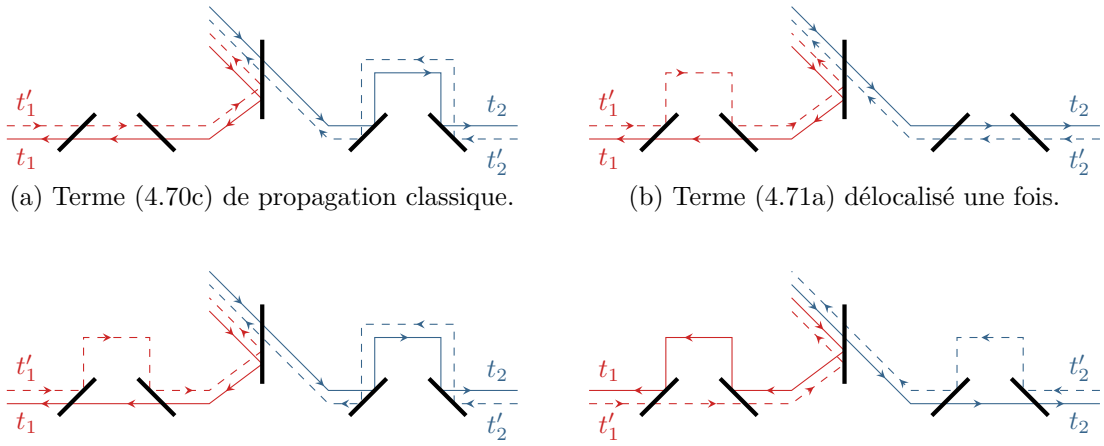
$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{out,2AB}}(1\,t_1, 2\,t_2|1\,t'_1, 2\,t'_2) =$$

$$R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,R_2\,T_2\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{1s}(t_1-\Delta\tau_1, t_2-\Delta\tau_2|t'_1, t'_2) \tag{4.72a}$$

$$+\,R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,R_2\,T_2\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{1s}(t_1, t_2|t'_1-\Delta\tau_1, t'_2-\Delta\tau_2) \tag{4.72b}$$

$$+\,R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,R_2\,T_2\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{1s}(t_1-\Delta\tau_1, t_2|t'_1, t'_2-\Delta\tau_2) \tag{4.72c}$$

$$+\,R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,R_2\,T_2\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\phi_1+\phi_2)}\,\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{1s}(t_1, t_2-\Delta\tau_2|t'_1-\Delta\tau_1, t'_2) \tag{4.72d}$$



(a) Terme (4.70c) de propagation classique.

(b) Terme (4.71a) délocalisé une fois.

(c) Terme (4.71e) délocalisé une fois.

(d) Terme (4.72c) délocalisé deux fois.

Fig. 4.15 – Exemples de propagation des cohérences dans un interféromètre de Franson électronique. Quatre termes de propagation sont illustrés, un par nombre de délocalisation. Comme tout au long du manuscrit, un opérateur annihilation est représenté par une ligne pleine orientée de la source vers la détection alors qu'un opérateur destruction est représenté par une ligne pointillée orientée en sens inverse. Les couleurs reprennent leur signification habituelle : les lignes bleues décrivent la détection associée aux temps (t_1, t'_1) et les lignes rouges celle associée aux temps (t_2, t'_2).

Extraction de l'excès de cohérence hors-diagonal des mesures de bruit

Revenons à l'objectif initial de mesurer l'excès de cohérence à deux électrons hors diagonal dans le canal d'entrée 1s à l'aide du dispositif qui vient d'être étudié.

Une première étape consiste à mesurer l'excès de cohérence à deux électrons diagonal en temps et croisé entre les voies de sortie 1out et 2out. En vertu des équations (4.14), page 122, et (4.3), page 119, cet excès de cohérence est relié aux quantités mesurables que sont les corrélations et les courants moyens résolus en temps par

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\mathrm{out}}(1\,t_1, 2\,t_2|1\,t_1, 2\,t_2) = \frac{1}{(e\,v_F)^2}\left[S_{1\mathrm{out}\,2\mathrm{out}}(t_1, t_2) + i_{1\mathrm{out}}(t_1)\,i_{2\mathrm{out}}(t_2)\right]. \tag{4.73}$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous appellerons cet excès de cohérence simplement « l'excès de cohérence de sortie », sous-entendant son caractère diagonal en temps et croisé en canaux.

Cet excès de cohérence de sortie contient les seize contributions listées précédemment. Cependant, seuls les termes 2AB de l'équation (4.72) portent une information sur la cohérence du canal 1s pour quatre temps différents. Il faut donc isoler leur contribution à l'excès de cohérence de sortie de celle des termes moins intéressants. Pour ce faire, il suffit d'en calculer la double transformée de Fourier par rapport aux phases Aharonov–Bohm ϕ_1 et ϕ_2 et d'isoler les

harmoniques dépendant des deux phases. En pratique, cela demande de reproduire les mesures pour différentes valeurs des champs magnétiques. Ce faisant, connaissant les caractéristiques des différents QPC, on accède à tous les excès de cohérence du canal 1s impliqués dans (4.72) pour une configuration donnée des temps de vol.

Enfin, pour obtenir une mesure complète de l'excès de cohérence à deux électrons hors diagonal il faut modifier la différence de temps de vol entre les voies des interféromètres, ce qui peut se faire par exemple à l'aide de grilles électrostatiques. Il faut alors reproduire les mesures d'excès de cohérence de sortie pour différents champs magnétiques dans cette nouvelle configuration.

En résumé, le protocole proposé est le suivant :

- ▷ à géométrie fixée, mesurer les corrélations et les courants de sortie pour différentes valeurs des flux magnétiques traversant les interféromètres ;
- ▷ en déduire l'excès de cohérence de sortie, dont une double transformée de Fourier permet d'extraire l'excès de cohérence $\Delta\mathcal{G}_{1\mathrm{s}}^{(2\mathrm{e})}$ pour les quatre configurations de temps de l'équation (4.72) ;
- ▷ modifier la géométrie des interféromètres par application de tensions de grille et réitérer le processus permet de reconstruire $\Delta\mathcal{G}_{1\mathrm{s}}^{(2\mathrm{e})}$ point par point.

Remarquons que ce sont les termes 2AB qui encodent la possibilité d'interférences à deux électrons non-localisées. Ce phénomène est donc bien au cœur du protocole de mesure envisagé.

Le protocole proposé permet donc dans le principe de déduire l'excès de cohérence à deux électrons émis par une source pour quatre temps arbitraires à partir de mesures de bruit et de courant résolues en temps. Néanmoins, il souffre des mêmes limitations que celui proposé par G. Haack *et al.* [82] pour mesurer l'excès de cohérence à un électron par l'intermédiaire d'un MZI. Sur le plan de la mise en œuvre, des mesures résolues en temps sont très difficiles à réaliser, les mesures de bruit encore davantage [183] que les mesures de courant, et faire varier indépendamment les deux phases Aharonov–Bohm n'est surement pas simple. Sur le plan fondamental, les mesures proposées ici sont très sensibles à la décohérence dans les MZI.

4.4.3 Détection d'intrication en fenêtre de temps

Illustrons maintenant les mesures réalisables avec un interféromètre de Franson électronique en proposant une expérience de révélation d'intrication en fenêtre de temps.

Paire intriquée en fenêtre de temps vs. mélange de paires décalées

Considérons une paire d'électrons, dont les états individuels sont notés $|\phi_a\rangle$ et $|\phi_b\rangle$ avec

$$|\phi_\alpha\rangle = \psi^\dagger[\phi_\alpha]\,|F\rangle = v_F \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t_1\, \phi_\alpha(t_1)\, \psi^\dagger(t_1)\,|F\rangle\ , \qquad \alpha = a, b\,, \tag{4.74}$$

conformément à l'équation (2.61), page 50. L'état quantique de la paire (en première quantification) est donc

$$|\Phi_{ab}\rangle = |\phi_a\rangle \otimes |\phi_b\rangle - |\phi_b\rangle \otimes |\phi_a\rangle\ , \tag{4.75}$$

pour respecter l'antisymétrie fermionique. Cet état n'est pas factorisable en première quantification, mais ne peut pas pour autant être considéré comme intriqué, car en seconde quantification il s'écrit simplement

$$|\Phi_{ab}\rangle = \psi^\dagger[\phi_a]\,\psi^\dagger[\phi_b]\,|F\rangle\ . \tag{4.76}$$

Considérons maintenant que les électrons peuvent également être dans les états $|\phi_{a'}\rangle$ et $|\phi_{b'}\rangle$ correspondent aux états $|\phi_a\rangle$ et $|\phi_b\rangle$ décalés dans le temps d'une quantité ΔT_{int}. Dans ce deuxième cas, l'état quantique de la paire est

$$|\Phi_{a'b'}\rangle = |\phi_{a'}\rangle \otimes |\phi_{b'}\rangle - |\phi_{b'}\rangle \otimes |\phi_{a'}\rangle\ . \tag{4.77}$$

La paire est alors dite intriquée en fenêtre de temps si son état quantique est une superposition des états décalés,

$$|\Phi_{\text{int}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\Phi_{ab}\rangle + |\Phi_{a'b'}\rangle \Big) . \tag{4.78}$$

Un tel état n'est pas factorisable en seconde quantification, il s'agit donc bel et bien d'un état de paire intriqué. La variable intriquée est la fenêtre de temps dans laquelle les deux électrons sont émis, ou bien autour de $-\Delta T_{\text{int}}/2$, ou bien autour de $+\Delta T_{\text{int}}/2$. Cet état est un état pur, bien différent d'un état mélange décrit par la matrice densité

$$\rho_{\text{mél}} = \frac{1}{2}\Big(|\Phi_{ab}\rangle \langle\Phi_{ab}| + |\Phi_{a'b'}\rangle \langle\Phi_{a'b'}| \Big) . \tag{4.79}$$

La différence entre l'état mélange et l'état intriqué apparaît sur l'excès de cohérence à deux électrons porté par les paires. Dans le cas de l'état pur intriqué l'excès de cohérence à deux électrons vaut

$$\Delta\mathcal{G}^{(2\text{e})}_{\text{int}}(t_1, t_2|t'_1, t'_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{paires}\\(ij)}} \sum_{\substack{\text{paires}\\(mn)}} \Phi_{ij}(t_1, t_2)\, \Phi^*_{mn}(t'_1, t'_2) , \tag{4.80}$$

où les deux sommes portent sur les deux paires (ab) et $(a'b')$ et comme à l'accoutumée Φ_{ij} désigne la fonction d'onde à deux électrons, c'est-à-dire le déterminant de Slater, construit sur les fonctions d'ondes ϕ_i et ϕ_j. Une cohérence à deux électrons entre la paire et la paire décalée intervient donc. Au contraire, l'excès de cohérence porté par le mélange n'est autre que la somme probabiliste des excès de cohérence portés par chacune des paires,

$$\Delta\mathcal{G}^{(2\text{e})}_{\text{mél}}(t_1, t_2|t'_1, t'_2) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{paires}\\(ij)}} \Phi_{ij}(t_1, t_2)\, \Phi^*_{ij}(t'_1, t'_2) . \tag{4.81}$$

Il s'agit donc d'une somme de contributions factorisées par rapport à chaque paire, bien différente de l'équation (4.80) où des termes impliquant des paires différentes apparaissent.

Des paires intriquées en fenêtre de temps ont déjà été produites à partir de photons [28, 166, 167]. Pour ce faire, un cristal non-linéaire est éclairé par un laser impulsionnel de pompe. À chaque absorption d'un photon par le cristal non-linéaire, deux photons sont créés en conservant l'énergie et l'impulsion du photon incident. Pour créer une paire intriquée, le photon de pompe est envoyé dans un MZI avant de passer au travers du cristal non-linéaire. La différence de temps de vol entre les deux voies contrôle le délai ΔT_{int} entre les deux fenêtres de temps.

Pour créer une paire électron–trou intriquée en fenêtre de temps à partir d'un condensateur mésoscopique, L. Chirolli *et al.* [38] proposent de choisir la période de la tension de grille commandant les niveaux de la boîte quantique bien plus petite que le temps de fuite τ_{e} d'un électron hors de la boîte. Toutefois, l'intrication crée est plus subtile que le cas discuté précédemment, puisque trois états de paire entrent en jeu et non pas deux comme il vient d'être discuté. Les deux fenêtres de temps sont deux cycles d'excitation successifs. L'électron et le trou peuvent alors être émis dans chacune des fenêtres de temps, mais l'électron est nécessairement émis avant le trou. L'état peut s'écrire sous la forme d'une superposition de trois états, schématisée figure 4.16, dont les auteurs montrent qu'elle est bien intriquée en fenêtre de temps en étudiant une inégalité CHSH [41] adéquate. Compte tenu de l'hypothèse sur la période et le temps de fuite, l'émission de cet état est un processus perturbatif du second ordre. Notons en outre que contrairement au dispositif envisagé par ces auteurs qui séparent spatialement l'électron et le trou en utilisant un QPC polarisé par une tension variable comme porte, la voie de sortie du QPC0 n'a pas d'importance ici, et une polarisation constante permettant un comportement en barrière tunnel indépendante du temps suffit.

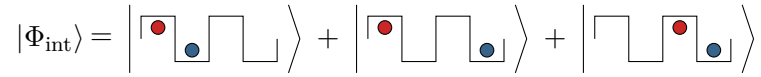


Fig. 4.16 – État intriqué en fenêtres de temps. Représentation symbolique de l'état étudié par V. Chirolli *et al.* [38], émis par un condensateur mésoscopique dont le QPC est presque fermé. Un électron, en rouge, est émis avant un trou, en bleu, mais ils ne sont pas nécessairement émis dans la même période du cycle d'excitation, schématisé en noir. Les auteurs se restreignent au cas de l'émission dans deux cycles consécutifs.

Enfin, une autre proposition pour générer des paires de particules intriquées en fenêtre de temps dans un système solide a été formulée par P. Hofer et M. Büttiker [88]. Néanmoins, elle se fait dans des canaux de bord non pas chiraux mais hélicaux, ceux de l'effet Hall quantique de spin, et donc dans un système différent de ceux envisagés dans cette thèse.

Signaux expérimentaux

Pour correspondre aux techniques expérimentales et faciliter les représentations graphiques, considérons non pas les corrélations de courant résolues en temps à la sortie de l'interféromètre mais les corrélations à fréquence nulle, qui s'obtiennent par intégration sur les deux variables temporelles. Suite à une double transformation de Fourier par rapport aux flux magnétiques, les quatre contributions sont séparables. Calculons donc la fraction de bruit basse fréquence associée au seul terme (4.72a),

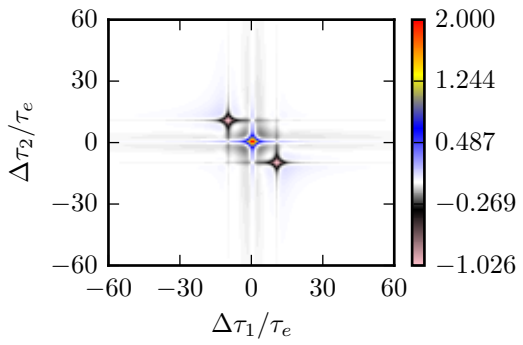
$$S_{2\text{AB}}(\Delta\tau_1, \Delta\tau_2) = (e\, v_F)^2 \iint \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\, \Delta\mathcal{G}^{(2\text{e})}_{\text{out}}(1, t_1 - \Delta\tau_1; 2, t_2 - \Delta\tau_2 | 1, t_1; 2, t_2)\,. \tag{4.82}$$

Remarquons que cette fraction de bruit peut s'écrire comme une transformée de Fourier de la fonction de Wigner à deux électrons sous la forme

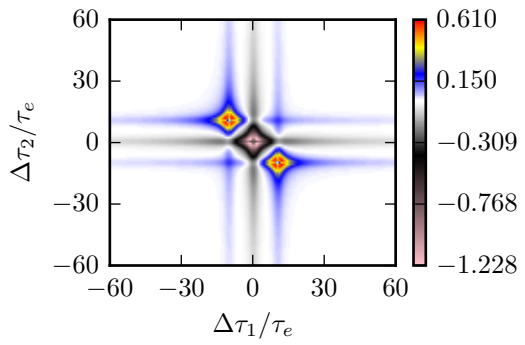
$$S_{2\text{AB}}(\Delta\tau_1, \Delta\tau_2) = (e\, v_F)^2 \iint \mathrm{d}\bar{t}_1\, \mathrm{d}\bar{t}_2 \iint \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_1}{2\pi} \frac{\mathrm{d}\bar{\omega}_2}{2\pi}\, \Delta\mathcal{W}^{(2\text{e})}(\bar{t}_1, \bar{\omega}_1; \bar{t}_2, \bar{\omega}_2)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\omega}_1\, \Delta\tau_1 + \bar{\omega}_2\, \Delta\tau_2)}\,. \tag{4.83}$$

Sur le plan théorique, calculer $S_{2\text{AB}}(\Delta\tau_1, \Delta\tau_2)$ pour $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$ de signe quelconque revient à considérer l'ensemble des contributions à l'équation (4.72), une contribution étant associée à chaque quadrant. Compte tenu de l'intégration temporelle, choisir par exemple $\Delta\tau_1 < 0$ et $\Delta\tau_2 > 0$ revient en fait à s'intéresser à $\Delta\mathcal{G}^{(2\text{e})}_{\text{out}}(1, t_1; 2, t_2 - \Delta\tau_2 | 1, t_1 - \Delta\tau_1; 2, t_2)$ pour des différences de temps de vol positives. Par ailleurs, comme l'excès de cohérence à deux électrons est calculé dans des canaux différents, les propriétés d'antisymétrie n'ont pas les mêmes conséquences que pour l'exemple détaillé au paragraphe 3.3, page 89. Leur seule conséquence immédiate est qu'un changement de signe simultané de $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$ laisse l'excès de cohérence invariant, ce qui se traduit par une symétrie des quadrants $(\Delta\tau_1 > 0, \Delta\tau_2 > 0)$ et $(\Delta\tau_1 < 0, \Delta\tau_2 < 0)$ d'une part et $(\Delta\tau_1 > 0, \Delta\tau_2 < 0)$ et $(\Delta\tau_1 < 0, \Delta\tau_2 > 0)$ d'autre part.

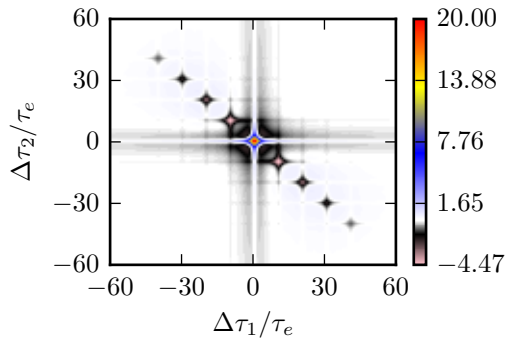
La figure 4.17 représente la partie réelle et la partie imaginaire de la fraction de bruit basse fréquence $S_{2\text{AB}}(\Delta\tau_1, \Delta\tau_2)$ pour plusieurs exemples. Tous les exemples sont construits à partir de levitons mono-électroniques, décalés de $\Delta t = 10\,\tau_{\text{e}}$. L'expression des paquets d'ondes est donnée équation (2.68), page 51. Le premier exemple envisagé, figures 4.17a et 4.17b est celui d'une simple paire ou d'un mélange statistique de paires décalées. En fait, considérer un mélange statistique ou une simple paire ne modifie pas l'allure de la figure : l'intégration temporelle dans la définition de $S_{2\text{AB}}$ entraîne une perte de l'information concernant le temps d'émission. Le deuxième exemple, figures 4.17c et 4.17d, est celui d'un train de cinq levitons consécutifs. Enfin, le cas d'une paire intriquée en fenêtres de temps séparées de $\Delta T_{\text{int}} = 30\,\tau_{\text{e}}$, équation (4.80), est représenté sur les figures 4.17e et 4.17f.



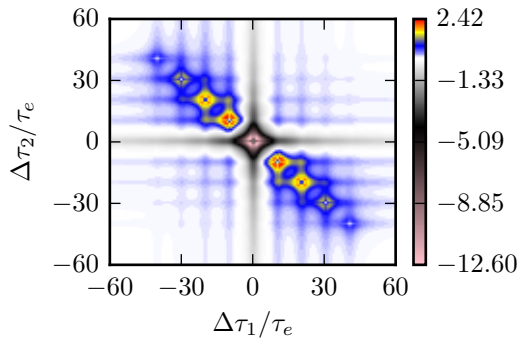
(a) Paire simple ou mélange, partie réelle.



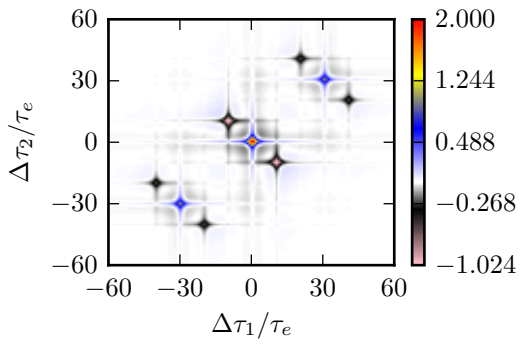
(b) Paire simple ou mélange, partie imaginaire.



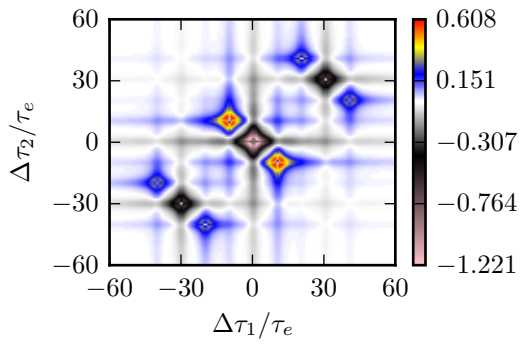
(c) Train de cinq levitons, partie réelle.



(d) Train de cinq levitons, partie imaginaire.



(e) Paire intriquée, partie réelle.



(f) Paire intriquée, partie imaginaire.

Fig. 4.17 – Fraction de bruit mesurée en sortie d'un interféromètre de type Franson. La fraction de bruit basse fréquence $S_{2\mathrm{AB}}$ en unité de $(e\,v_F)^2$ telle qu'elle est accessible en sortie d'un interféromètre de Franson est représentée en fonction des différences de temps de vol $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$. Trois exemples sont analysés. Tous les exemples sont formés à partir de levitons mono-électroniques, décalés de $\Delta t = 10\,\tau_\mathrm{e}$, dont l'expression du paquet d'ondes est donnée équation (2.68), page 51. Figures (a) et (b) : mélange statistique de paires décalées, l'écart entre les paires mélangées ne joue aucun rôle en raison de l'intégration temporelle. Le signal est donc le même que pour une simple paire. Figures (c) et (d) : train de cinq levitons. Figures (e) et (f) : paire intriquée en fenêtre de temps, au sens de l'équation (4.78), page 153, l'intervalle entre les deux fenêtres de temps valant $\Delta T_\mathrm{int} = 30\,\tau_\mathrm{e}$.

Les trois types d'états présentent un pic central en $\Delta\tau_1 \simeq \Delta\tau_2 \simeq 0$, dont l'amplitude est égale au double du nombre de paires d'électrons émises. Le double vient du fait que les paires sont normalisées à 2. En outre, la fraction de bruit $S_{2\mathrm{AB}}$ est réelle au centre de ce pic central, ce qui ne fait que traduire le fait que l'excès de cohérence diagonal l'est. La présence d'un tel pic est due aux interférences à un électron au sein des MZI, qui sont possibles puisque les différences de temps de vol $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$ sont alors suffisamment faibles. La largeur du pic central renseigne ainsi sur les temps de cohérence à un électron $T^{(1)}_{\mathrm{qtq}}$ des électrons impliqués dans la paire. Remarquons également que si le bruit avait été calculé en lieu et place des corrélations de courant, ce pic n'apparaîtrait pas. En effet, les interférences à un électron interviennent dans les termes de courant qui seraient soustraits.

Ce pic central est accompagné de plusieurs pics symétriques, de signe opposé au pic central. Ces pics s'étendent sur toute la durée du train d'électrons. Dans le cas des paires, ces pics sont donc localisés en $\Delta\tau_1 \simeq -\Delta\tau_2 \simeq \pm\Delta t$. Comme mentionné précédemment, le fait qu'ils soient symétriques est une conséquence des symétries générales de la cohérence à deux électrons. Ces pics secondaires proviennent des interférences non-locales entre deux électrons décalés, qui sont représentées figure 4.14b, page 149. Ils constituent donc une signature des corrélations classiques présentes dans la paire ou le train d'électrons. Le fait que les signes des décalages $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$ soient opposés peut se comprendre à l'aide de la figure 4.14b. Pour que des interférences à deux électrons aient lieu en sortie de l'interféromètre entre deux électrons différents du train, il faut que les lignes pleines et pointillées soient organisées différemment dans les MZI, et donc que les décalages interviennent différemment. En conclusion, l'information inscrite le long de la diagonale $\Delta\tau_2 = -\Delta\tau_1$ de la fraction de bruit basse fréquence est une information de nature classique sur les corrélations portées par l'état. Néanmoins l'effet physique à l'origine du pic central et des pics secondaires diffère.

Au contraire, le cas de la paire intriquée en fenêtre de temps révèle que les pics présents dans la direction classique sont dupliqués de part et d'autre de la droite d'équation $\Delta\tau_2 = -\Delta\tau_1$, en $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2 = \pm\Delta T_{\mathrm{int}}$. Ces pics dupliqués sont la signature d'une cohérence supplémentaire présente dans l'état quantique, associée à l'intrication en fenêtre de temps. Une extrapolation de la figure 4.14 permet à nouveau de s'en rendre compte. Qualitativement, si des contributions se manifestent pour ce réglage de l'interféromètre, cela signifie que les électrons émis en $-\Delta T_{\mathrm{int}}/2$ peuvent interférer avec ceux émis en $\Delta T_{\mathrm{int}}/2$ mais dans une configuration où les deux lignes de même type (pleines ou pointillées) empruntent les mêmes voies (courte ou longue). Le diagramme est donc différent de celui donnant accès aux corrélations classiques, et le fait que de telles contributions apparaissent montre bien l'existence d'une cohérence supplémentaire dans la paire. En résumé, l'information portée par la diagonale $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$ de la fraction de bruit basse fréquence est bel et bien de nature quantique. Par conséquent, c'est la présence de contributions autour de cette diagonale et éloignées de la seconde diagonale qui permet de révéler une intrication en fenêtre de temps dans l'état d'entrée de l'interféromètre. Remarquons en outre que l'échelle de temps associée ΔT_{int} caractérise ici véritablement la cohérence à deux électrons et n'est plus seulement caractéristique des paquets d'électrons individuels, au contraire des échelles de temps discutées sur l'exemple d'une paire au paragraphe 3.3.3, page 95.

Signature d'intrication en fenêtre de temps

Pour bien illustrer les différents aspects, les figures 4.17e et 4.17f ont été tracées dans le cas où le délai ΔT_{int} entre les deux fenêtres de temps intriquées est bien plus grand que le temps de corrélation $T_{\mathrm{corr}} = \Delta t$ des paires et que le temps de cohérence [14] à un électron $T^{(1)} = \tau_{\mathrm{e}}$. Dans le cas où ces deux échelles deviennent comparables, distinguer l'échelle de temps d'intrication est moins direct car les différents pics dans les différentes directions se recouvrent.

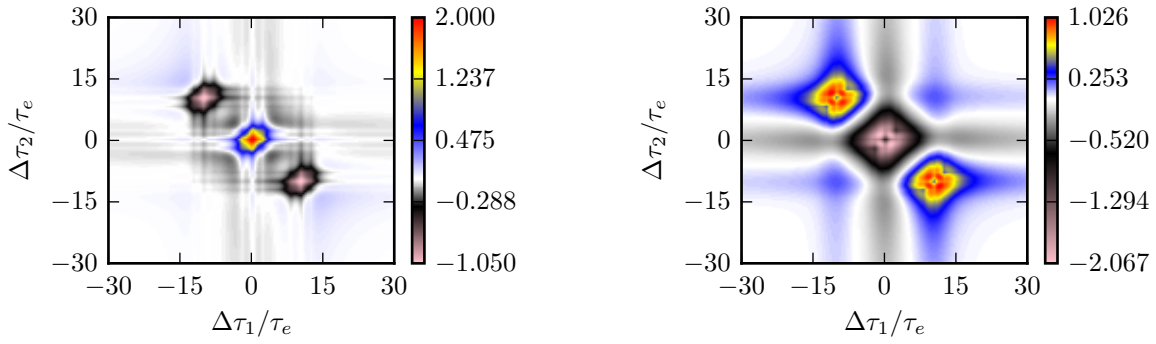
(14). Comme aucun effet de décohérence n'est pris en compte ici, il s'agit indifféremment du temps classique ou du temps quantique.

La discussion du paragraphe 3.3.3, page 95, a montré que l'excès de cohérence à deux électrons a toujours au moins une extension dans la direction quantique $T_{ab}^{(2)}$ qui combine les deux durées de chacun des paquets a et b,

$$\frac{2}{T_{ab}^{(2)}} = \frac{1}{T_a^{(1)}} + \frac{1}{T_b^{(1)}} \,. \tag{4.84}$$

Cela se traduit directement sur la fraction de bruit basse fréquence, dont le pic central s'étend toujours sur une échelle de temps $T_{ab}^{(2)}$ dans la direction quantique, c'est-à-dire le long de la diagonale $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$. Le point clé est que cette extension est alors la même le long de la diagonale classique, identifiée comme étant $\Delta\tau_1 = -\Delta\tau_2$. Par conséquent, cette discussion suggère que comparer les extensions du pic central dans les deux directions classique et quantique permet d'identifier la présence d'intrication en fenêtre de temps. Une extension dans la direction quantique plus grande que dans la direction classique serait alors le signe d'une intrication en fenêtres de temps. Néanmoins, cette image simple demande à être confirmée par une analyse plus approfondie.

À titre d'exemple, la figure 4.18 représente la fraction de bruit basse fréquence pour une paire intriquée en fenêtres de temps séparées de $\Delta T_{\text{int}} = 2\,\tau_{\text{e}}$. Les différents pics sont confondus, mais ils sont plus étendus dans la direction quantique que dans la direction classique.



(a) Partie réelle.

(b) Partie imaginaire.

Fig. 4.18 – Fraction de bruit mesurée en sortie d'un interféromètre de type Franson pour une paire intriquée en fenêtre de temps rapprochée. La fraction de bruit basse fréquence $S_{2\text{AB}}$ en unité de $(e\,v_F)^2$ telle qu'elle est accessible en sortie d'un interféromètre de Franson est représentée en fonction des différences de temps de vol $\Delta\tau_1$ et $\Delta\tau_2$. L'exemple choisi est celui d'une paire de levitons séparés de $\Delta t = 10\,\tau_{\text{e}}$ mais intriquée en fenêtres de temps avec un décalage $\Delta T_{\text{int}} = 2\,\tau_{\text{e}}$.

4.4.4 Des pistes pour d'autres protocoles et d'autres dispositifs

Vers d'autres protocoles

Pour contourner la difficulté de la prise en compte de la décohérence dans les MZI de l'interféromètre de Franson, d'autres dispositifs doivent être envisagés, toujours pour transformer une cohérence hors-diagonale en cohérence diagonale qui puisse être mesurée entre les voies de sortie.

Des mesures de cohérence en énergie ne sont pas encore envisageables, car le dispositif capable d'assurer la conversion de composantes hors-diagonale en énergie en composantes diagonales manque encore à ce jour. Seules les corrélations en énergie peuvent être mesurées entre deux voies par exemple à l'aide de filtres en énergie [7]. Cette idée a été mise en avant sous une forme différente par M. Moskalets [124].

Une autre piste qui mériterait d'être explorée consisterait à étendre le protocole de tomographie discuté au paragraphe 4.3.4, page 145, en se basant sur le dispositif représenté figure 4.19.

Les deux MZI y sont remplacés par deux interféromètres HOM dont la seconde voie d'entrée est alimentée par deux sources bien contrôlées. Il s'agirait ensuite de mesurer les corrélations non plus des courants de sortie mais des bruits de sortie du QPC. Un tel protocole serait bien plus robuste vis-à-vis de la décohérence mais les mesures de corrélation des bruits de courant seraient en contrepartie beaucoup plus difficiles à mettre en œuvre.

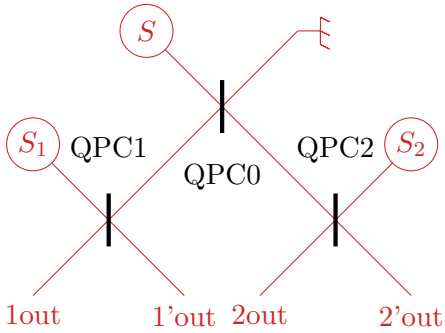


Fig. 4.19 – Tomographie de la cohérence à deux électrons. Les deux MZI sont remplacés par deux interféromètres HOM dont les secondes voies d'entrée sont alimentées par des sources électroniques produisant des états bien caractérisés.

Importance des différents éléments du dispositif

Pour se convaincre qu'un interféromètre comme celui proposé ici est malgré tout nécessaire pour accéder aux quantités voulues, imaginons d'autres dispositifs alternatifs et analysons les raisons pour lesquelles ils ne sont pas satisfaisants. Remarquons d'abord que la clé du succès de l'interféromètre de Franson à électrons est qu'une mesure de la dépendance en les phases Aharonov–Bohm est exactement équivalente à une mesure de la façon dont les cohérences ont été retardées dans les différentes voies. En d'autres termes, deux chemins de propagation différents pour les cohérences, c'est-à-dire deux diagrammes différents, n'ont jamais la même dépendance en les phases Aharonov–Bohm. Un dispositif permettant les mêmes mesures doit remplir une condition analogue.

Envisageons d'abord un dispositif sans QPC central, où les deux MZI seraient montés en série et le bruit mesuré dans une des voies de sortie du dispositif. À première vue, ce dispositif semble raisonnable puisqu'il permet également d'introduire deux délais différents avec deux phases pour les distinguer. Néanmoins, ce dispositif est rendu inopérant par le fait que la correspondance n'est pas univoque. Montrons-le en raisonnant en termes de diagrammes, représentés figure 4.20, en imaginant que les lignes pointillées suivent les chemins courts et que les chemins longs sont suivis par une ligne pleine seulement dans chaque interféromètre. Alors, le diagramme (a) où la même ligne pleine emprunte les deux chemins longs a la même dépendance en les phases Aharonov–Bohm $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}$ que le diagramme (b) où une ligne pleine emprunte la première voie longue et la seconde ligne pleine la seconde voie longue. Traduit en termes de cohérences, cela signifie que la contribution $\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1-\Delta\tau_1-\Delta\tau_2, t_2|t_1,t_2)$ ne peut être distinguée de celle $\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(t_1-\Delta\tau_1, t_2-\Delta\tau_2|t_1,t_2)$.

Envisageons pour finir la possibilité de substituer aux MZI des boîtes quantiques isolées du reste du gaz bidimensionnel par un QPC, polarisées par une tension de grille constante. Ces mêmes boîtes constituent l'élément de base du condensateur mésoscopique, présenté au paragraphe 1.3.2, page 14, mais la tension de polarisation dépend du temps. De telles cavités ont un comportement en partie analogue à celui d'un interféromètre de Fabry–Pérot : un électron y entre, y réalise un certain nombre de tours où il acquiert une phase par effet Aharonov–Bohm électrique et en ressort. Comparativement à un interféromètre de MZI, réaliser de telles cavités dans un gaz bidimensionnel est beaucoup plus simple car elles ne demandent qu'une lithographie

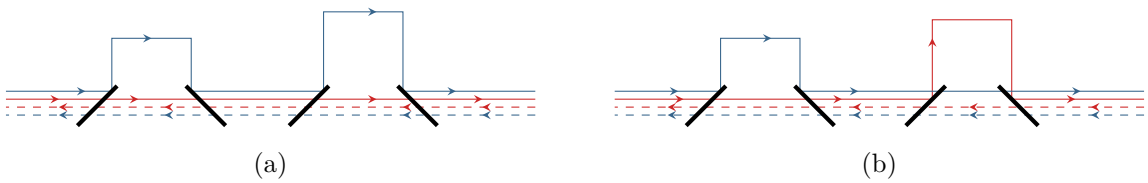


Fig. 4.20 – MZI montés en série. Un double MZI ne permet pas de distinguer les chemins de propagation (a) et (b) par une transformée de Fourier par rapport aux flux magnétiques. Comme tout au long du manuscrit, un opérateur annihilation est représenté par une ligne pleine orientée de la source vers la détection alors qu'un opérateur destruction est représenté par une ligne pointillée orientée en sens inverse. Les lignes bleues décrivent la détection associée aux temps (t_1, t_1') et les lignes rouges celle associée aux temps (t_2, t_2').

bidimensionnelle, au lieu de la construction d'un pont utilisé comme drain pour évacuer les électrons d'une des voies de sortie du MZI. Malheureusement, la phase acquise par une paire ligne pleine et ligne pointillée ne dépend que de la différence entre le nombre de tours parcouru par ces lignes dans la cavité, et pas du nombre de tour dans l'absolu. Par conséquent, toutes les contributions du type $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}(t_1 - p\,\Delta\tau_1; t_2 - q\,\Delta\tau_2 | t_1' - p'\,\Delta\tau_1; t_2' - q'\,\Delta\tau_2)$ sont indiscernables pour les différences $(p - p')$ et $(q - q')$ constantes. Toutefois, des informations partielles devraient être accessibles par l'intermédiaire d'un tel dispositif. Les identifier demande une analyse plus approfondie.

4.5 Production de cohérences non-locales par interférométrie

Jusqu'à présent, ce manuscrit s'est focalisé sur l'étude en toute généralité de la cohérence à deux électrons, de ses propriétés et de sa mesure, mais ces propriétés génériques n'ont été illustrées que sur des états simples, de type paires d'électrons. Ce paragraphe aborde maintenant la question de la production contrôlée d'une cohérence à deux électrons à partir des états émis par les sources à électrons uniques dont l'implémentation expérimentale a déjà été réalisée. Un enjeu important est la création de cohérence hors-diagonale, aussi bien en temps qu'orbitale.

4.5.1 Cadre de l'étude

Considérons deux sources d'électrons uniques S_1 et S_2, par exemple deux condensateurs mésoscopiques ou deux sources leviton. Le cas de deux sources montées en série dans un même canal a été étudié par M. Moskalets [124], ici les sources sont supposées placées dans deux canaux différents 1 et 2. S'agissant de sources à électrons uniques, elles émettent un excès de cohérence à un électron dans leur propre canal, mais aucun excès de cohérence à deux électrons. Les deux sources sont physiquement distinctes, l'excès de cohérence croisée entre les canaux où elles se trouvent est donc nul,

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1\,t|2\,t') = 0\,. \tag{4.85}$$

Un effet de corrélation classique entre les deux sources donne lieu à un excès de cohérence à deux électrons valant [(15)]

$$\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}(1\,t_1, 2\,t_2|1\,t_1', 2\,t_2') = \Delta\mathcal{G}_1^{(\mathrm{e})}(t_1|t_1')\,\Delta\mathcal{G}_2^{(\mathrm{e})}(t_2|t_2')\,. \tag{4.86}$$

Néanmoins, celui-ci peut être qualifié de diagonal en temps car il est maximal à temps égaux $t_1 \simeq t_1'$ et $t_2 \simeq t_2'$. En effet, les études de la source LPA et de la source leviton menées respectivement aux paragraphes 2.5 et 2.6, pages 64 et 68, montrent que la cohérence à un électron émise par ces sources est maximale sur la diagonale. Cet excès de cohérence sera également qualifié de diagonal en canal, car ces maxima sont présents lorsque la détection est effectuée dans les mêmes canaux.

Une première question naturelle est celle de la génération d'un état à deux électrons, présentant un « vrai » excès de cohérence à deux électrons, à partir de deux sources indépendantes. En outre, il est intéressant de se demander comment construire un état portant un excès de cohérence à deux électrons présentant des contributions importantes en dehors de la diagonale, que ce soit en temps ou en position.

Les études menées dans les paragraphes précédents de ce chapitre donnent déjà une bonne idée des méthodes à employer. Pour obtenir un état portant un excès de cohérence à deux électrons, il faut donner aux électrons émis par les deux sources la possibilité d'interférer, c'est-à-dire d'aboutir au même point de l'espace–temps par deux chemins quantiques indiscernables. Par conséquent, les dispositifs étudiés dans ce chapitre font partie des interféromètres à deux électrons. De plus, pour qu'un excès de cohérence diagonal soit rendu hors-diagonal, il faut forcément autoriser une délocalisation électronique. Le dispositif le plus simple réalisant cette délocalisation est un QPC utilisé en lame séparatrice, qui est donc au cœur des dispositifs envisagés.

4.5.2 Production de cohérence à deux électrons non-locale en temps

Analysons pour commencer comment produire une cohérence à deux électrons, dans un seul canal, qui soit hors-diagonale en temps, à partir de deux sources d'électrons uniques différentes En d'autres termes, montrons comment générer une cohérence à deux électrons qui soit maximale en quatre temps choisis arbitrairement.

(15). Les notations compactes sur les canaux de propagation sont utilisées, rappelées Annexe A.3, page 184.

Interféromètre de Franson inversé

Pour produire une telle cohérence à volonté, l'interféromètre de Franson introduit comme outil de mesure au paragraphe 4.4, page 147, peut être utilisé en sens inverse pour devenir un outil de fabrication de cohérence à deux électrons. Le comprendre ne demande en fait que d'inverser l'analyse présentée au paragraphe en question.

Le dispositif modifié est représenté figure 4.21, à comparer à la figure 4.13, page 148, qui représente l'interféromètre de Franson utilisé comme détecteur. Au lieu d'une seule source inconnue placée dans une des voies d'entrée du QPC0, ce sont maintenant deux sources à électrons uniques, connues, qui sont placées dans une des voies d'entrée de chaque MZI. Les deux autres voies d'entrées sont reliées à la masse. Toutes les hypothèses utilisées au paragraphe 4.4 sont conservées : les QPC 1 et 1' d'une part, 2 et 2' d'autre part, sont identiques, et l'origine des temps est redéfinie en sortie pour ne pas avoir à prendre en compte le temps de vol par les voies courtes des interféromètres, qui sont supposées de même longueur.

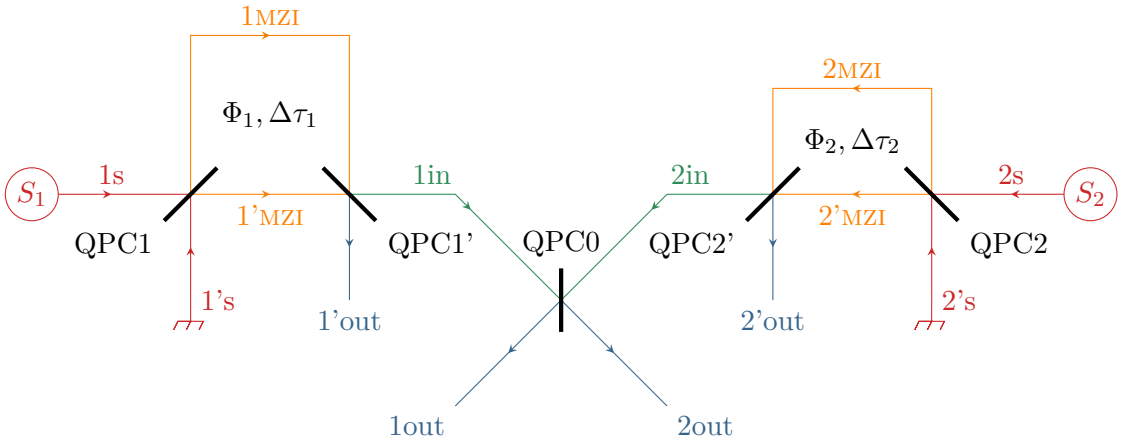


Fig. 4.21 – Interféromètre de Franson inversé. Deux sources S_1 et S_2 sont connectées aux voies d'entrée de deux MZI. Ces MZI sont décrits par des temps de vol $\Delta\tau$ et des flux magnétiques Φ différents. Deux des voies de sortie de ces MZI sont ensuite envoyées sur un QPC. Le dispositif est divisé en quatre secteurs, représentés sur le schéma par des couleurs différentes.

Cohérence générée en sortie

Chacun des blocs ayant été étudié séparément du point de vue des lois de transformation des cohérences, le calcul ne présente pas de difficulté. Un point important à noter pour que les résultats précédents s'appliquent directement concerne l'indépendance des bras 1 et 2 du dispositif. Elle implique d'une part la nullité de l'excès de cohérence croisée à un électron et d'autre part le fait que l'excès de cohérence croisée à deux électrons ne contient que le terme de corrélations de l'équation (4.86).

Le premier bloc du dispositif est constitué des MZI. L'expression de la cohérence en sortie d'un MZI a été obtenue au paragraphe 4.2.2, page 127. Celle-ci est la somme de quatre contributions, deux étant de nature classique, équation (4.87a), et deux de nature quantique, équation (4.87b), impliquant une délocalisation entre les deux voies de l'interféromètre. En supposant instantanée la propagation dans la voie courte des interféromètres, ce qui revient à redéfinir l'origine des temps, l'excès de cohérence à un électron dans le canal n-in, $n = 1$ ou 2, et donc reliée à l'excès de cohérence émis par la source n par

$$\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{n\text{-in}}(t|t') = R_n^{\,2}\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{n\text{-s}}(t-\Delta\tau_n|t'-\Delta\tau_n) + T_n^{\,2}\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{n\text{-s}}(t|t') \tag{4.87a}$$

$$- R_n\,T_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_n}\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{n\text{-s}}(t-\Delta\tau_n|t') - R_n\,T_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_n}\,\Delta\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}_{n\text{-s}}(t|t'-\Delta\tau_n)\,. \tag{4.87b}$$

Le second bloc du dispositif est constitué du simple QPC0, qui joue ici le rôle d'un interféromètre HOM. La quantité d'intérêt est l'excès de cohérence à deux électrons, elle seule est donc calculée. Comme les deux voies d'entrée du QPC ne possèdent pas de cohérence croisée, l'excès de cohérence à deux électrons dans une voie de sortie correspond exactement à celui qui a été calculé au paragraphe 4.3.1, page 137, à savoir

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{2out}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) = R_0\,T_0\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1in}(t_1|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2in}(t_2|t'_2) + R_0\,T_0\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1in}(t_2|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2in}(t_1|t'_1) \tag{4.88a}$$

$$- R_0\,T_0\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1in}(t_2|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2in}(t_1|t'_2) - R_0\,T_0\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1in}(t_1|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2in}(t_2|t'_1)\,. \tag{4.88b}$$

Les termes (4.88a) décrivent les processus de corrélations classiques alors que les termes (4.88b) sont associés aux processus d'échange quantique. Rappelons que le signe $-$ devant les termes d'échange quantique prend sa source dans l'antisymétrie fermionique et est indispensable pour que l'excès de cohérence à deux électrons vérifie les propriétés détaillées au paragraphe 3.1.3, page 80.

Le même raisonnement qu'au chapitre précédent indique que les termes permettant de générer une cohérence à quatre temps différents sont ceux qui impliquent une délocalisation dans chacun des MZI. Leur contribution aux signaux expérimentaux de sortie est isolable par transformation de Fourier par rapport aux phases Aharonov–Bohm associées à chacun des interféromètres. Concentrons-nous sur le terme dépendant de ces phases par un facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}$, noté $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\phi_1+\phi_2}$. Il s'écrit

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{2out,\phi_1+\phi_2}(t_1,t_2|t'_1,t'_2) = \eta\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}\Big[&\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_1-\Delta\tau_1|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2s}(t_2-\Delta\tau_2|t'_2)\\ &+\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_2-\Delta\tau_1|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2s}(t_1-\Delta\tau_2|t'_1)\\ &-\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_2-\Delta\tau_1|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2s}(t_1-\Delta\tau_2|t'_2)\\ &-\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_1-\Delta\tau_1|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{2s}(t_2-\Delta\tau_2|t'_1)\Big]\,,\end{aligned} \tag{4.89}$$

où $\eta = R_0\,T_0\,R_1\,T_1\,R_2\,T_2$. Remarquons que la présence de quatre termes dans l'équation (4.89) ne fait que traduire les propriétés de symétrie de la cohérence à deux électrons. L'excès de cohérence à un électron émis par les sources est maximal lorsque le temps moyen $\bar{t}_1$ ou $\bar{t}_2$ correspond aux instants d'émission des sources, notés t_{1s} et t_{2s}, et lorsque la différence des temps τ_1 ou τ_2 est nulle. Pour que l'excès de cohérence à deux électrons soit maximal en quatre temps quelconques, notés $(t_a,t_b|t'_a,t'_b)$, il faut donc choisir la différence de temps de vol dans les MZI égale à la différence des temps de détection et le temps d'émission des sources égal à la moyenne de temps de détection. Plusieurs combinaisons conviennent pour cela, par exemple, au temps de propagation dans les voies courtes près,

$$\begin{cases}\Delta\tau_1 = t_a - t'_a\\ \Delta\tau_2 = t_b - t'_b\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\begin{cases}t_{1s} = t'_a\\ t_{2s} = t'_b\end{cases} \tag{4.90}$$

Une nouvelle fois, la pluralité de choix équivalents est liée aux propriétés de symétrie. La discussion du paragraphe 3.1.3, page 80, indique en effet qu'imposer la position d'un maximum impose en fait la position de huit maximums. Par conséquent, huit combinaisons des différences de temps de vol et des temps d'émission permettent d'aboutir au même résultat.

4.5.3 Production de cohérence à deux électrons non-locale en espace

Intéressons nous maintenant au cas inverse, à savoir produire un excès de cohérence à deux électrons potentiellement diagonal en temps mais délocalisé dans quatre canaux. Une première possibilité évidente représentée figure 4.22 consiste à placer deux QPC dans chacune des voies de sortie d'un troisième QPC. Les électrons émis sont bien délocalisés dans quatre canaux, générant un excès de cohérence croisée non nul. Cependant l'arrière-pensée gouvernant ces réflexions est l'étude de l'intrication en optique quantique électronique, pour laquelle ce dispositif est de peu d'intérêt. Nous allons plutôt analyser en termes de cohérences à deux électrons un autre interféromètre, dont le fonctionnement repose à nouveau sur des interférences non-locales à deux électrons.

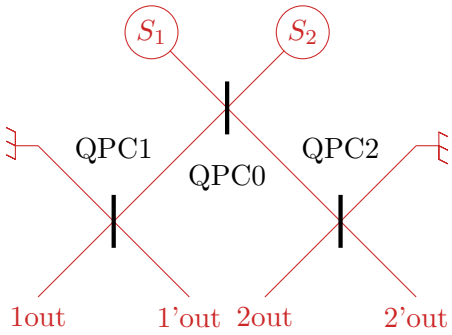


Fig. 4.22 – Dispositif de double délocalisation. Deux QPC 1 et 2 sont placés dans les deux voies de sortie d'un QPC0, alimenté par deux sources d'électrons uniques S_1 et S_2.

Interféromètre de Samuelsson

Le dispositif que nous allons considérer a été proposé en 2004 par P. Samuelsson, E. Sukhorukov et M. Büttiker [157] afin de mettre en évidence des interférences à *deux* électrons alors que les interférences à *un* électron sont impossibles. Il permet de reproduire l'interféromètre astronomique d'Hanbury Brown et Twiss [84]. Une implémentation expérimentale en a été réalisée dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier dès 2007 [130] au sein du groupe de M. Heiblum, à l'institut Weizmann de Tel-Aviv.

La figure 4.23 représente un schéma du dispositif, que nous appellerons interféromètre de Samuelsson. Le dispositif présente une géométrie en carré, un QPC étant placé à chaque sommet. Il est divisé en trois secteurs, source (s), intérieur (in) et de sortie (out). Un flux magnétique traverse la boucle fermée définissant le secteur in. Il en résulte une phase Aharonov–Bohm ϕ associée à la propagation le long des canaux de ce secteur, supposée équirépartie le long de chaque voie du secteur.

Deux sources sont placées dans les voies d'entrée 1s et 4s, mais la géométrie du dispositif est telle que les électrons émis par ces sources ne peuvent interférer avec eux-mêmes. En revanche, les QPC 13 et 24 permettent de faire interférer les excitations entrant par le canal 1s avec celles entrant par le canal 4s, donnant lieu à des interférences non-locales à deux électrons. Exactement comme pour l'interféromètre de Franson, ces interférences à deux électrons peuvent être étudiées par des mesures de corrélation des courants de sortie dans les voies 1out et 4out par exemple. Une représentation diagrammatique des processus donnant lieu à ces interférences est représentée figure 4.24. Néanmoins, ces aspects ne vont pas être étudiés avec plus de détails dans ce paragraphe où l'accent va être porté sur la génération de cohérence à deux électrons délocalisée entre les quatre canaux du secteur out.

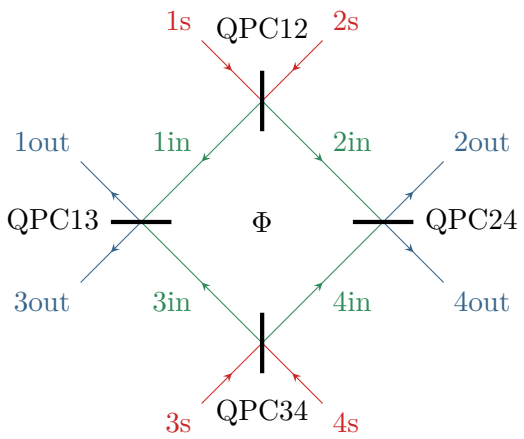


Fig. 4.23 – Interféromètre de Samuelsson. Les QPC 12 et 34 permettent de partitionner les excitations émises par les sources placées dans les canaux du secteur s, alors que les QPC 13 et 24 permettent de recombiner des excitations provenant de sources différentes. Les QPC sont numérotés à partir des numéros des canaux qu'ils combinent.

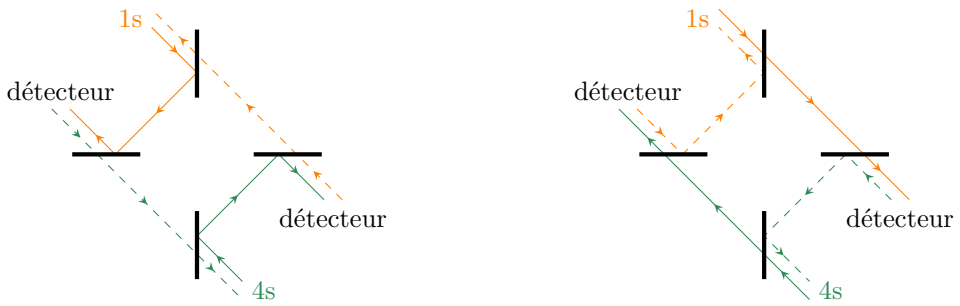


Fig. 4.24 – Interférences non-locales à deux électrons dans un interféromètre de Samuelsson. Un opérateur annihilation est représenté par une ligne pleine orientée de la source vers la détection alors qu'un opérateur destruction est représenté par une ligne pointillée orientée en sens inverse. Cette fois, les couleurs sont associées non pas à la détection mais à l'émission. Les lignes oranges, respectivement vertes, décrivent l'électron émis par la source placée dans le canal 1s, respectivement 4s. Une détection simultanée dans les voies 1out et 4out peut provenir de processus classiques non représentés ou de deux processus provenant d'interférences à deux électrons non-locales, au sens où les deux électrons interfèrent sur deux QPC séparés.

Cohérence générée entre les voies de sortie

Calculons l'excès de cohérence à deux électrons $\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{out}}(1\,t_1, 2\,t_2|3\,t'_1, 4\,t'_2)$ généré par le dispositif entre les quatre voies de sortie. Ce calcul ne présente à nouveau aucune difficulté car aucune cohérence croisée n'existe entre les canaux 1 et 2 d'une part et 3 et 4 d'autre part. Les QPC 12 et 34 sont supposés identiques, de probabilités de réflexion et transmission R et T, de même que les QPC 13 et 24, de probabilités de réflexion et transmission R' et T'.

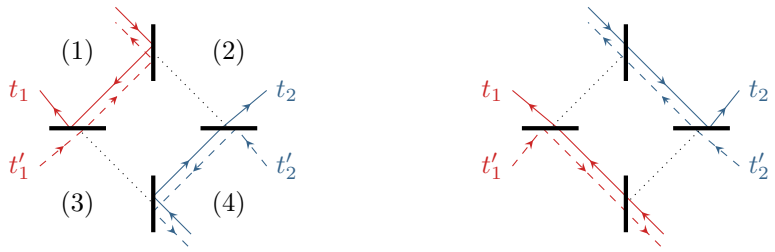
Comme les sources placées dans les voies 1s et 4s sont des sources d'électrons uniques, elles n'émettent aucun excès de cohérence à deux électrons. Par conséquent, seuls quatre termes contribuent à l'excès de cohérence à deux électrons étudié, schématisés sur la figure 4.24. Cet excès de cohérence s'écrit

$$\Delta\mathcal{G}^{(2e)}_{\text{out}}(1\,t_1, 2\,t_2|3\,t'_1, 4\,t'_2) =$$

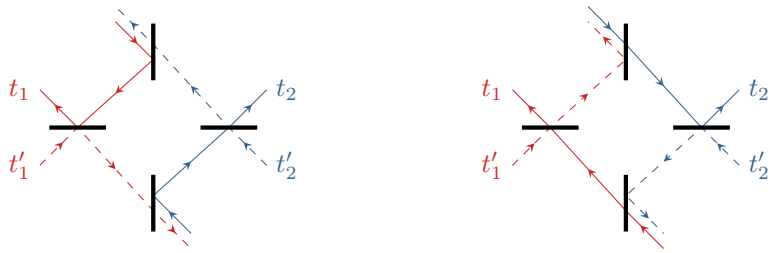
$$R^2\,R'\,T'\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_1|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{4s}(t_2|t'_2) + T^2\,R'\,T'\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_2|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{4s}(t_1|t'_1) \tag{4.91a}$$

$$-\,\eta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_1|t'_2)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{4s}(t_2|t'_1) - \eta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{1s}(t_2|t'_1)\,\Delta\mathcal{G}^{(e)}_{4s}(t_1|t'_2)\,. \tag{4.91b}$$

Les deux premières contributions, équation (4.91a) et figure 4.25a, sont de nature classique, au sens où une trajectoire peut être attribuée sans ambiguïté à chacun des électrons dans le secteur in avant que chaque électron soit individuellement partitionné sur les QPC 13 et 24. Deux autres contributions sont de nature quantique, équation (4.91b) et figure 4.25b, où les deux électrons sont délocalisés dans le secteur in avant que des interférences non-locales n'aient lieu au niveau des QPC 13 et 24, déterminant les contributions dans chacune des voies de sortie. Les contributions quantiques se distinguent par leur dépendance en la phase Aharonov–Bohm.



(a) Corrélations classiques.



(b) Échange quantique.

Fig. 4.25 – Représentation diagrammatique des termes contribuant à la cohérence à deux électrons en sortie d'un interféromètre de Samuelsson. Un opérateur annihilation est représenté par une ligne pleine orientée de la source vers la détection alors qu'un opérateur destruction est représenté par une ligne pointillée orientée en sens inverse. Les lignes rouges décrivent la détection associée aux temps (t_1, t'_1) et les lignes bleues celle aux temps (t_2, t'_2). La cohérence à deux électrons en sortie de l'interféromètre de Samuelsson contient des contributions provenant de corrélations classiques et d'échange quantique, ces dernières associées aux interférences à deux électrons.

4.6 Conclusion

Les protocoles de mesure des excès de cohérence constituent le cœur de ce chapitre. Mesurer un excès de cohérence diagonal est relativement accessible aux technologies actuelles, qu'il s'agisse d'une cohérence à un ou deux électrons, dans l'espace des temps ou des énergies. En effet, les mesures de courant résolu en temps ou en énergie dans une géométrie à trois terminaux permettent un accès direct à l'excès de cohérence diagonale à un électron associé. De même, des mesures de bruit résolu en temps, bien que particulièrement délicates, sont directement reliées à l'excès de cohérence diagonale à deux électrons.

Mesurer une contribution hors-diagonale à l'excès de cohérence demande donc de la convertir en une contribution diagonale, ce que permet l'interférométrie. L'interférométrie à un électron permise par un MZI permet d'encoder dans le courant résolu en temps des contributions des cohérences hors-diagonale, accessibles par leur dépendance particulière en la phase Aharonov–Bohm caractérisant l'interféromètre. Il est aussi particulièrement intéressant de faire interférer deux électrons sur un QPC dans une expérience de type HOM. Alors, les corrélations entre les voies de sortie renseignent sur le recouvrement des fonctions de Wigner des deux électrons ayant interféré. Cette méthode est au cœur d'un protocole de tomographie, dont nous avons proposé une reformulation en termes de fonction de Wigner. Celle-ci ouvre la voie à de nouveaux développements en lien avec des problématiques de traitement du signal.

Pour accéder à l'excès de cohérence à deux électrons, un dispositif plus complexe doit être envisagé, sous la forme d'un interféromètre de type Franson, qui combine un interféromètre HBT et deux MZI dans les voies de sortie. Nous avons établi que par ce biais, les corrélations résolues en temps entre les voies de sortie des MZI contiennent toute l'information sur l'excès de cohérence à deux électrons envoyé en entrée de l'interféromètre HBT. En outre, nous avons montré que des mesures de corrélations basse fréquence, plus simples, permettent néanmoins d'extraire certaines informations, par exemple sur la présence d'intrication en fenêtre de temps. Néanmoins, le point faible majeur de cet interféromètre est sa grande sensibilité aux effets de décohérence.

Chapitre 5

Conclusion

Cette thèse s'inscrit dans l'étude du transport électronique cohérent en physique quantique mésoscopique, en se plaçant à l'échelle de la charge individuelle. Les excitations émises par des sources d'électrons se propagent dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier, faisant apparaître des analogies fortes avec l'optique quantique photonique, mais aussi des différences profondes liées à la statistique fermionique, à la présence de la mer de Fermi, et aux interactions coulombiennes auxquelles sont sensibles les électrons. Mon travail de thèse a contribué à développer un formalisme, celui des cohérences électroniques, analogue à celui des cohérences photoniques construit par R. Glauber, et à comprendre les informations physiques qu'elles encodent.

Plutôt qu'un résumé linéaire du manuscrit, j'ai choisi d'en proposer une lecture plus transverse au paragraphe 5.1. Trois volets apparaissent naturellement, concernant respectivement le contenu physique des fonctions de cohérences et les moyens de le révéler, l'influence de la nature fermionique des électrons sur les cohérences électroniques, et la possibilité d'utiliser des interférences électroniques pour mesurer et modifier ces cohérences. Ce travail a permis de faire émerger un certain nombre de questions ouvertes qui sont posées au paragraphe 5.2, dont la réponse semble accessible à partir des fondations posées au cours de cette thèse. Enfin, je tenterai au paragraphe 5.3 de donner une vision d'ensemble du paysage de l'optique quantique électronique.

5.1 Bilan

5.1.1 Fonctions de cohérence

Analyser le contenu physique porté par les fonctions de cohérence électronique a constitué un premier pan du travail de thèse. Un point important est qu'elles caractérisent l'ensemble des électrons de l'échantillon, incluant ceux de la mer de Fermi. Extraire une contribution intrinsèque à une source ou un état électronique demande de soustraire la contribution de la mer de Fermi à la cohérence totale. Dans le cas de la cohérence à deux électrons, il faut également ôter les contributions dues aux phénomènes de corrélations et d'échange quantique entre la mer de Fermi et la source. L'excès de cohérence est ainsi défini en toute généralité, ce qui va plus loin que des définitions reposant sur le théorème de Wick.

Le formalisme des fonctions de cohérence permet d'accéder directement aux observables habituelles de la physique mésoscopique, typiquement d'une part le courant électrique et ses fluctuations et d'autre part le nombre d'occupation en énergie. Néanmoins, ces fonctions de cohérence permettent d'accéder à plus que cela. En effet, toute l'information sur la cohérence électronique, reliée à la possibilité qu'ont un ou deux électrons d'interférer individuellement ou entre eux, est contenu dans les excès de cohérence.

Toutefois, lire directement ces informations sur des équations contenant de multiples termes, et même sur des courbes ou des figures colorées, n'est pas immédiat. Représenter la cohérence de manière adaptée aux effets étudiés est crucial. Ainsi, une partie de mon travail de thèse a consisté à comprendre une représentation mixte en énergie et temps de l'excès de cohérence à un électron, en termes de fonction de Wigner [51]. La nature mixte des variables dont elle dépend et le fait qu'elle soit à valeurs réelles la rend très visuelle et permet de condenser en une seule représentation des informations qui peuvent être moins apparentes dans une représentation à deux temps ou deux énergies. Cette image a d'ailleurs été exploitée avec profit pour comprendre la nature des scénarios de décohérence impactant les excitations mono-électroniques émises par le condensateur mésoscopique ou la source leviton, travail qui a été mené au sein de notre groupe lyonnais en parallèle de ma thèse [52]. C'est la même idée de recherche des représentations adaptées qui a mené à la définition des variables réduites permettant de visualiser de façon spectaculaire les symétries de la fonction de cohérence à deux électrons. Cela amène naturellement au deuxième volet de mon travail, centré sur l'impact du caractère fermionique.

5.1.2 Influence de la nature fermionique des électrons

La compréhension des manifestations du caractère fermionique des électrons est un des enjeux importants de l'optique quantique électronique. C'est également une des principales motivations qui a conduit à l'étude de la cohérence à deux électrons. En effet, l'antisymétrie fermionique ne se traduit pas au travers d'effets universels sur la structure générale des fonctions de cohérence à un électron, même si bien sûr elle contraint fortement les états électroniques.

Au contraire, la nature fermionique des électrons a des conséquences remarquables et très générales sur la structure des fonctions de cohérence à deux électrons. Comme elles dépendent de quatre variables, les définir demande d'étudier un espace à quatre dimensions. Or nous avons montré au cours de cette thèse que la connaissance de la cohérence à deux électrons sur seulement un huitième de cet espace quadridimensionnel suffit à la reconstruire sur l'ensemble de l'espace en appliquant opérateurs de symétrie. En outre, certaines symétries sont en fait des antisymétries, donnant naissance à des plans sur lesquels la fonction de cohérence à deux électrons s'annule strictement, ce qui se relie directement au principe d'exclusion de Pauli.

En outre, la statistique du flux d'électrons est également impactée par leur caractère fermionique. Ces effets se décrivent dans le langage des cohérences électroniques par l'intermédiaire du degré de cohérence à deux électrons, qui permet de quantifier les corrélations de deux événements

de détection. Comme attendu, le principe de Pauli empêche deux électrons d'être détectés au même endroit au même instant. Étudier le degré de cohérence à deux électrons a également permis de montrer le résultat moins intuitif que l'effet d'antibunching est renforcé lorsque le temps de détection s'éloigne des temps d'émission des électrons.

5.1.3 Fonctions de cohérence et interférométrie

Le formalisme des fonctions de cohérence prend tout son sens pour modéliser des expériences d'interférométrie. J'ai travaillé sur deux familles d'expériences permettant de réaliser respectivement des interférences à un et deux électrons.

L'interférométrie à un électron consiste à délocaliser un électron entre deux voies de propagation avant de le faire interférer avec lui-même. Elle est analogue à l'interférométrie d'amplitude en optique. L'interféromètre de Mach–Zehnder s'inscrit dans cette catégorie. L'analogie avec l'optique ondulatoire nous a notamment permis de comprendre l'apparition de cannelures dans le nombre d'occupation électronique lorsque la différence de marche entre les deux voies du MZI est plus grande que la longueur de cohérence temporelle de la source électronique [51].

En interférométrie à deux électrons, un électron n'interfère plus avec lui-même mais avec un autre électron dont l'état n'est pas discernable au sens quantique du terme. Cette fois, ce sont les expériences de type interférométrie d'intensité qui en constituent l'analogue optique. Une part du travail a consisté à revisiter les expériences d'interférométrie locale, HBT et HOM, avec les nouveaux outils de fonction de Wigner et de fonction de cohérence à deux électrons que nous avons développés. Un des points marquants de cette partie du travail est la reformulation du protocole de tomographie quantique dérivé de l'expérience HOM en termes de traitement du signal, qui apparaît naturellement.

Conformément à l'intuition issue de la transposition de l'optique, la notion de cohérence à deux électrons s'est également révélée adaptée pour décrire les expériences d'interférométrie non-locale. À ce titre, une bonne part de mon travail a consisté à analyser l'interféromètre de Franson électronique. Nous avons pu comprendre comment celui-ci pouvait être exploité pour mesurer un excès de cohérence à deux électrons, au moins dans le principe, et les informations partielles qui pouvaient être extraites de quantités dont la mesure apparaît réaliste [169]. Motivés par l'étude de l'intrication d'excitations en optique quantique électronique, nous avons entamé une première analyse d'interféromètres à deux électrons non-locaux utilisés comme générateurs d'états dont l'excès de cohérence à deux électrons est dans une certaine mesure contrôlable.

5.2 Questions ouvertes

5.2.1 Quel est le lien entre la cohérence à deux électrons et l'intrication ?

Une question qui naît de l'étude des interféromètres à deux électrons est celle du lien entre la cohérence à deux électrons et l'intrication entre excitations élémentaires du fluide électronique en optique quantique électronique. Mentionnons d'emblée que ce sujet est délicat, et l'intrication dans les systèmes solides fait l'objet de beaucoup d'attention depuis plusieurs années [12, 15]. L'intrication orbitale dans des systèmes mésoscopiques a déjà été largement étudiée, notamment sous l'impulsion de M. Büttiker, G. Lesovik et T. Martin, en lien avec la violation d'inégalités de Bell [40, 154, 155, 156]. En particulier, l'interféromètre de Samuelsson [130, 157] étudié au paragraphe 4.5.3, page 163, rentre dans ce cadre. En outre, l'interféromètre de Franson envisagé au paragraphe 4.4 permet de révéler l'intrication en fenêtres de temps par l'intermédiaire de mesures de cohérence à deux électrons. Il est donc légitimer de se demander si l'interféromètre de Franson inversé utilisé comme générateur de cohérences est aussi un générateur d'intrication en fenêtre de temps. Une première idée naturelle est de chercher si l'information sur l'intrication portée par l'état des deux électrons peut être encodée dans la partie hors-diagonale de l'excès de cohérence à deux électrons.

Une approche de l'intrication orbitale est de considérer les deux excitations non pas directement comme les qubits mais comme les marqueurs de l'état des qubits. Cette idée est celle qui est mise à profit dans l'analyse de l'interféromètre de Samuelsson sous forme de qubit sur rail [95], développée annexe A.2, page 182. Les qubits sont les deux paires de voie de l'interféromètre, et l'état du qubit est matérialisé par la présence ou non d'un électron dans la voie. Les résultats de P. Samuelsson *et al.* [157] indiquent clairement que l'intrication générée dans leur dispositif prend sa source dans les interférences à deux électrons, qui sont elles reliées à l'excès de cohérence hors-diagonal. Cette approche est naturelle mais elle ne peut pas s'adapter au cas où l'on cherche à analyser l'intrication des excitations dans un même canal.

L'intrication en fenêtre de temps a quant à elle fait l'objet d'une attention moindre. L'état intriqué en fenêtre de temps considéré comme exemple dans l'étude de l'interféromètre de Franson est le plus simple qui soit. Néanmoins, L. Chirolli *et al.* [38] ont montré que l'intrication en fenêtre de temps pouvait prendre des formes plus subtiles. L'exemple de paire intriquée qu'ils considèrent est celui d'une paire électron–trou (1) émise par un condensateur mésoscopique dont le QPC est presque fermé (2). Les deux fenêtres de temps sont deux cycles d'excitation successifs. L'électron et le trou peuvent alors être émis dans chacune des fenêtres de temps, mais l'électron est nécessairement émis avant le trou. L'état peut s'écrire sous la forme d'une superposition de trois états, schématisée figure 5.1, dont les auteurs montrent qu'elle décrit une intrication à deux qubits en étudiant une inégalité CHSH [41] adéquate.

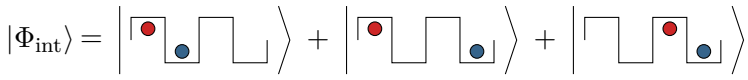


Fig. 5.1 – État intriqué en fenêtre de temps. Représentation symbolique de l'état étudié dans la référence [38], émis par un condensateur mésoscopique de QPC presque fermé. Un électron, en rouge, est émis avant un trou, en bleu, mais ils ne sont pas nécessairement émis dans la même période du cycle d'excitation, schématisé en noir.

(1). Les deux particules composant la paire sont donc parfaitement discernables.
(2). La structure et le fonctionnement du condensateur mésoscopique ont été introduits au paragraphe 1.3.2, page 14.

Les qubits sont cette fois matérialisés par l'électron et le trou, et l'état du qubit est associé à la fenêtre de temps. Ainsi, en notant $|\uparrow\rangle$ la première fenêtre de temps et $|\downarrow\rangle$ la seconde, l'état représenté figure 5.1 s'écrit

$$|\Phi_3\rangle \propto |\uparrow\rangle_{\mathrm{e}} \otimes |\uparrow\rangle_{\mathrm{h}} + |\uparrow\rangle_{\mathrm{e}} \otimes |\downarrow\rangle_{\mathrm{h}} + |\downarrow\rangle_{\mathrm{e}} \otimes |\downarrow\rangle_{\mathrm{h}} \ . \tag{5.1}$$

Une étude détaillée de cet état en termes de cohérence électronique est tout à fait faisable et pourrait constituer un autre exemple intéressant.

5.2.2 Quel est l'effet de la décohérence sur la cohérence à deux électrons ? Comment le modéliser simplement ?

Modéliser la décohérence induite par les interactions coulombiennes est l'un des points clés de l'optique quantique électronique. Beaucoup de travaux ont été réalisés dans ce sens, par l'exemple par l'intermédiaire de la théorie de la bosonisation, et ont permis de gagner une compréhension relativement avancée en termes de perte de cohérence d'une excitation mono-électronique. Néanmoins, comprendre les aspects à plusieurs particules de la décohérence demande de sonder les cohérences électroniques d'ordre supérieur. Ces aspects devraient être étudiés dans le cadre de la thèse de C. Cabart, qui prend la suite de mon travail.

Proposer une description phénoménologique pertinente de la décohérence dans le cadre de la cohérence à deux électrons serait un premier pas nécessaire avant d'entamer des calculs nécessairement ardus. Une étape préliminaire consisterait à envisager l'effet d'une décohérence de paire sur les exemples simples d'une paire ou d'un train d'électron. Dans ce cas, chaque électron voit sa cohérence individuelle préservée, mais la cohérence entre deux électrons du train est altérée. Un premier modèle qui pourrait être envisagé pour cela consisterait à introduire des fluctuations dans l'écart Δt séparant deux électrons, décrites par une densité de probabilité $P(\Delta t)$ faisant intervenir une échelle de temps probabiliste τ_{p}, caractérisant sa largeur typique. Il serait alors intéressant de comprendre où et comment cette échelle de temps supplémentaire intervient dans la cohérence à deux électrons portée par le train.

En outre, il serait également intéressant de voir précisément comment se manifeste la transition entre un train d'excitations régulièrement espacées et la formation d'un mélange statistique d'excitations dont le temps d'émission est inconnu. Il est clair que la frontière entre ces deux domaines se trouve au moment où l'incertitude sur le décalage temporel entre deux électrons séparés par N autres électrons du train est de l'ordre de Δt. Cela se voit sur les corrélations, donc sur la partie diagonale de la cohérence à deux électrons, mais comprendre comment cela se traduit en termes de cohérence hors-diagonale demande à être précisé, et pourrait sans doute permettre de gagner un regard plus profond sur les symétries.

Un autre point d'entrée vers le problème consiste à étudier la robustesse d'une paire d'électrons dans une superposition cohérente d'états, par exemple intriquée en fenêtre de temps. Une intuition à confirmer serait que la cohérence entre les deux états superposés se perd plus rapidement que la cohérence interne à chaque état de paire individuel.

Au delà des ces approches phénoménologiques, des calculs rigoureux seront nécessaires pour comprendre comment les interactions coulombiennes affectent la cohérence à deux électrons. L'approche utilisée jusqu'à présent dans notre groupe de l'ENS Lyon [52] pourrait se généraliser, mais les calculs seront rendus bien plus difficiles. Ces études peuvent aussi s'inscrire dans un cadre plus large, en posant la question des cohérences induites par les interactions.

5.2.3 Quelles sont les cohérences d'ordre supérieur portées par les excitations générées par les interactions ?

Les interactions se traduisent par la génération d'une multitude d'excitations cohérentes, aussi bien de type électron que de type trou, ce qui se traduit par l'apparition de cohérences d'ordre supérieur. Calculer et comprendre ces cohérences serait important notamment en vue de futures approches expérimentales. Deux pistes pourraient constituer une première approche simple de cette problématique.

La première consisterait à calculer les cohérences induites par une séparation de type spin–charge, dont la phénoménologie a été présentée au paragraphe 1.5, page 31. Une approche purement descriptive pourrait même sans doute déjà apporter des informations intéressantes sur le plan de la physique et constituer un premier guide pour des calculs plus poussés.

Une deuxième idée d'apparence simple serait de construire pas à pas un état analogue à celui que les interactions pourraient qualitativement générer. En envoyant en entrée de la zone d'interactions un état résolu en énergie, il s'agirait de considérer d'abord l'état formé de cet électron ayant commencé à relaxer en énergie associé à un plasmon portant l'énergie manquante, puis de rajouter à la main des plasmons par récurrence. Des calculs préliminaires ont été entamés dans cette direction au cours de la thèse, mais ils ne sont en fait immédiats ni à mener ni à interpréter. Cette approche est donc à approfondir.

5.3 La carte au trésor

Les titres de mon premier chapitre reprenaient la métaphore du jeu. Pour terminer, révélons donc l'état de la carte au trésor de l'optique quantique électronique que ce manuscrit a, j'espère, permis de révéler, et qu'il me semble plus efficace de dessiner plutôt que d'expliquer par de longs discours.

Au début de ma thèse, la partie de la carte concernant la physique à une particule était déjà connue en bonne partie. J'ai pu contribuer à la compléter à travers le formalisme de la fonction de Wigner, adaptée à la visualisation, alors qu'une modélisation quantitative des effets de décohérence dans l'expérience HOM du groupe de G. Fève est en cours de développement au sein de l'équipe. L'essentiel de mon travail a consisté à explorer la partie de la carte sur la physique à deux particules, où nous avons pu révéler l'importance de l'antisymétrie fermionique et proposer une mesure d'excès de cohérence à deux électrons par interférométrie d'amplitude. Enfin, la décohérence à deux particules et l'intrication demeurent des terres mal connues et qui restent à dévoiler.

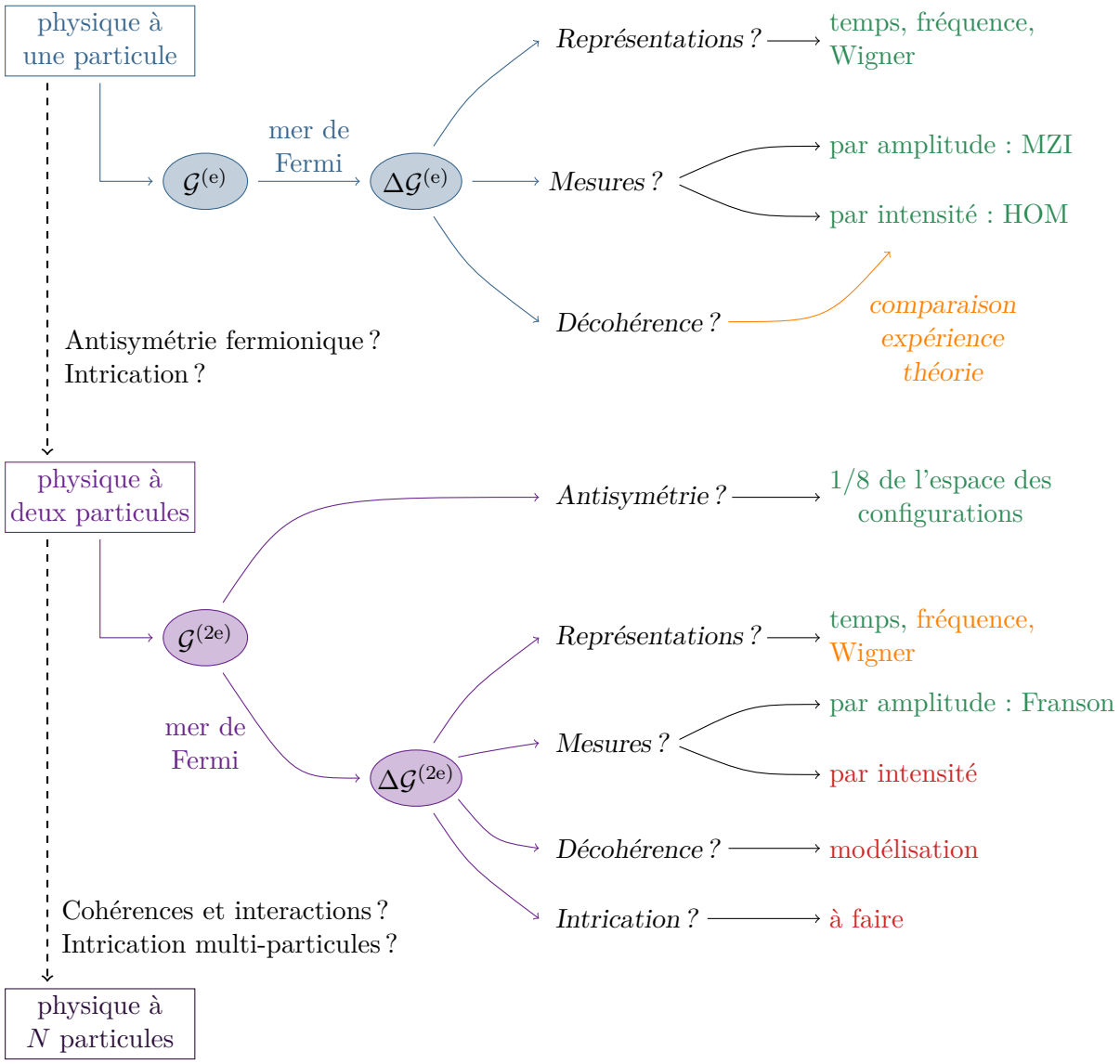


Fig. 5.2 – Carte de l'optique quantique électronique.

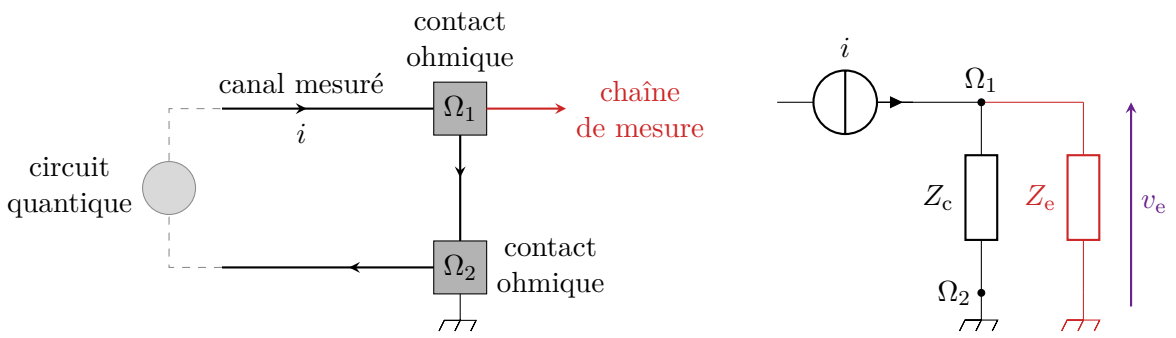
Annexes

A.1 Compléments sur les chaînes de mesure

Cette annexe présente de façon détaillée les chaînes de mesure de courant à fréquence finie et de bruit basse fréquence développées par la groupe de physique mésoscopique du laboratoire Pierre Aigrain de l'ENS Paris. Elle constitue un complément à la discussion du paragraphe 4.1, page 118. Bien plus d'informations sont fournies par les thèses successives de A. Mahé [116], F. Parmentier [136], E. Bocquillon [21] et V. Freulon [61].

A.1.1 Géométrie à trois terminaux

Comme expliqué au paragraphe 4.1, page 118, les deux dispositifs reposent sur une géométrie dite à trois terminaux, schématisée figure A.1.



(a) Schéma de principe du montage expérimental. (b) Circuit électrique équivalent.

Fig. A.1 – Géométrie à trois terminaux. Le canal de bord est connecté à un premier contact ohmique Ω_1 dont le potentiel électrique est mesuré relativement à celui du contact ohmique Ω_2, relié à la masse. L'entrée de la chaîne de mesure est représentée en rouge. Elle est caractérisée par son impédance d'entrée Z_e alors que la portion de canal entre les contacts Ω_1 et Ω_2 est caractérisée par l'impédance Z_c. La tension d'entrée v_e est celle qui est effectivement mesurée.

Cette géométrie permet de réaliser une conversion courant–tension par l'intermédiaire d'une impédance, puisque

$$i = \left(\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_e}\right) v_e \,. \tag{A.2}$$

Deux termes contribuent à cette impédance, d'une part l'impédance Z_c du 2dEG compris entre les contacts ohmiques Ω_1 et Ω_2 et d'autre part l'impédance d'entrée Z_e de la chaîne de mesure. Les échantillons étant placés dans le régime de l'effet Hall quantique entier, l'impédance Z_c de la portion de canal de bord est directement reliée au nombre de canaux de conduction, introduit

paragraphe 1.2.2, page 11. Elle purement résistive et vaut $Z_c = h/(\nu e^2)$ avec ν le facteur de remplissage et est donc de l'ordre de $10\,\mathrm{k}\Omega$. La chaîne de mesure de courant a une impédance d'entrée résistive de $50\,\Omega$ alors que celle de la chaîne de mesure de bruit est un résonateur passe-bande.

A.1.2 Mesure de courant à fréquence finie

Les mesures de courant à fréquence finie reposent sur un dispositif de détection homodyne développé au laboratoire Pierre Aigrain [138]. Celui-ci a été conçu pour étudier le régime linéaire des circuits RC et RL quantiques [62, 63] et a permis mettre en évidence le caractère de source à électron unique du condensateur mésoscopique [55]. Il a également été utilisé pour mesurer la relation de dispersion des canaux de bord [23], mettant en évidence le régime de couplage fort entre canaux dû aux interactions. Plus généralement, il est utilisé pour étalonner tous les nouveaux échantillons. Un schéma d'ensemble du dispositif est représenté sur la figure A.2.

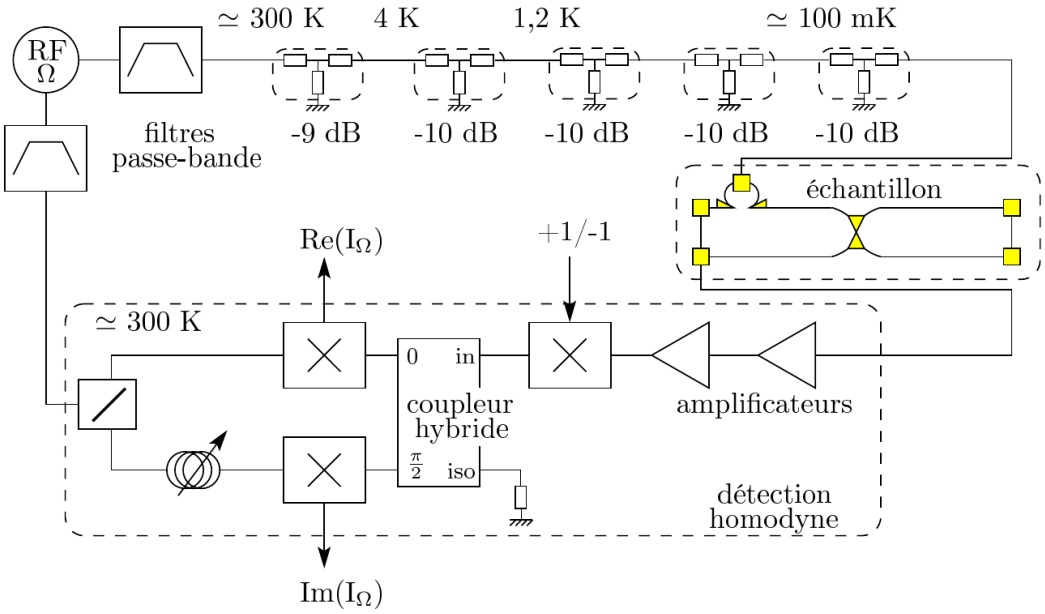


Fig. A.2 – Schéma du dispositif de mesure de courant à fréquence finie. Le générateur de tension radiofréquence émet un signal de pulsation Ω, atténué et refroidi jusqu'à commander la tension de grille de la boîte quantique. Le courant de sortie de l'échantillon est amplifié puis séparé en deux composantes en quadrature de phase par le coupleur hybride. Une double détection synchrone utilisant la tension radiofréquence permet de mesurer les parties réelle et imaginaire du courant de sortie de l'échantillon. Figure extraite de la référence [61].

En régime linéaire, le courant émis par le condensateur mésoscopique dans son fonctionnement nominal (tension de grille créneau) peut être reconstruit en lui appliquant une succession de tensions de grille harmoniques et en procédant à une somme pondérée des réponses. Le générateur de tension radiofréquence associé à des filtres passe-bande crée une tension V_{RF} harmonique de fréquence Ω, qui est utilisée à la fois comme tension de grille de la boîte quantique et comme tension de référence des dispositifs de détection synchrone. Avant d'être appliquée à la boîte quantique, cette tension de commande est atténuée et refroidie.

Le courant dans le canal est converti en tension par une résistance de $50\,\Omega$. La tension du contact ohmique Ω_1 est ensuite mesurée par le dispositif de détection homodyne, précédé d'un dispositif d'adaptation d'impédance non représenté sur la figure A.2. Comme le condensateur mésoscopique émet un électron ou un trou par demi-période à une fréquence f de l'ordre de 1 GHz, le courant i est de l'ordre de $e\,f \sim 10^{-10}$ A. En négligeant l'admittance du canal de bord devant

celle de la chaîne de mesure dans l'équation (A.2), la tension d'entrée v_e est de l'ordre de 10^{-8} V. Une telle tension ne peut être mesurée directement et doit donc être amplifiée avant d'être mesurée.

Pour s'affranchir de tout effet de décalage statique, la tension amplifiée est ensuite modulée à une fréquence $f_{\mathrm{mod}} = 1\,\mathrm{kHz}$ par le modulateur $+1/-1$, puis séparée par un coupleur hybride en deux composantes de même amplitude mais en quadrature de phase, c'est-à-dire déphasées de $\pi/2$ l'une par rapport à l'autre. Deux dispositifs de détection synchrone sont utilisés pour les mesurer. Les tensions de sortie du coupleur hybride sont d'abord multipliées par la tension radiofréquence V_{RF}, ce qui réalise l'homodynage, et leur composante à la fréquence f_{mod} est mesurée. Celles-ci donnent directement accès aux parties réelle et imaginaire (3) du courant de sortie de l'échantillon, ou de façon équivalente à son amplitude et à sa phase.

En pratique, de nombreuses précautions sont à prendre sur les bandes passantes des filtres et des composants pour que les mesures ne soient pas polluées par des harmoniques d'ordre supérieur qui seraient émises par le générateur radiofréquence et insuffisamment filtrées. En jouant astucieusement sur les composants utilisés, les fréquences accessibles s'étendent sur une gamme allant de 700 MHz à 9 GHz, ce qui correspond à une résolution temporelle maximale de l'ordre de 100 ps, voisine de la largeur temporelle typique des paquets d'ondes émis.

A.1.3 Mesure de bruit à basse fréquence

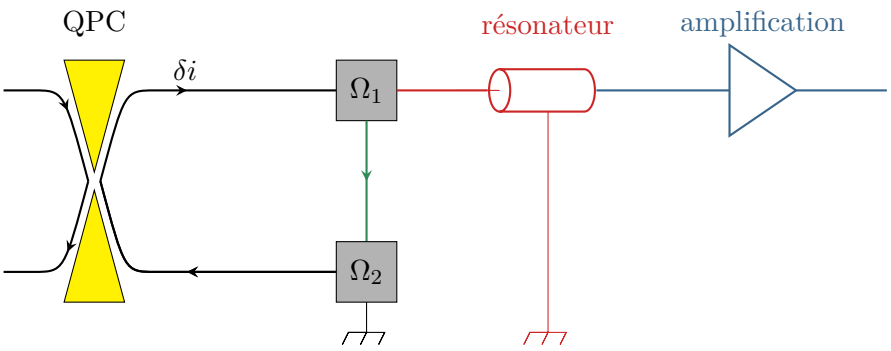
Un schéma de principe du dispositif de mesure de bruit utilisé au laboratoire Pierre Aigrain est représenté figure A.3a alors qu'un modèle électrocinétique équivalent est représenté figure A.3b. Ce dispositif fait depuis plusieurs années l'objet de développements importants au sein de l'équipe [138]. Une partie conséquente du travail de thèse de V. Freulon [61] a consisté à y ajouter des amplificateurs ultra bas bruit améliorant considérablement ses performances. L'objectif est de mesurer les composantes à basse fréquence du bruit $S^{(i)}(\omega)$ des fluctuations δi du courant dans un canal de bord, générées par exemple par le partitionnement d'excitations sur un contact ponctuel quantique. Le courant délivré par la source est de l'ordre de $e\,f$, où f est la fréquence de la tension de commande de la boîte quantique. Le calcul théorique [5] et la mesure [117] de la densité spectrale de bruit (4) émise par le condensateur mésoscopique montrent qu'elle est de l'ordre de $\sqrt{e^2 f} \simeq 5 \times 10^{-15}\,\mathrm{A \cdot Hz^{-1/2}}$ pour $f = 1\,\mathrm{GHz}$.

Dans le cas présent, l'impédance à l'origine de la conversion courant-tension est simplement la résistance R_c du canal de bord, de l'ordre de $10\,\mathrm{k\Omega}$. Le potentiel du contact ohmique Ω_1 est ensuite envoyé en entrée d'un amplificateur par l'intermédiaire d'un résonateur dont le comportement électrocinétique est assimilable à celui d'un condensateur de capacité C de l'ordre de 100 pF monté en parallèle d'une bobine d'inductance $L = 132\,\mu\mathrm{H}$. Le condensateur est en fait le câble coaxial de transmission alors que la bobine a été ajoutée à dessein pour faciliter les mesures. L'ajout du résonateur permet en effet de constituer un filtre passe-bande de fréquence centrale 1.49 MHz et de bande passante 300 kHz qui coupe le domaine basse fréquence dans lequel l'environnement électromagnétique parasite contribue majoritairement. En l'absence de bobine, le condensateur seul ne réalise qu'un filtre passe-bas, et les mesures sont davantage polluées par le bruit basse fréquence dû à l'environnement. Enfin, la tension de sortie du résonateur est amplifiée, d'abord par un amplificateur ultra bas bruit à froid (1 K) puis par un second amplificateur (5) cette fois à chaud (300 K). Pour simplifier la figure A.3, un seul amplificateur a été représenté.

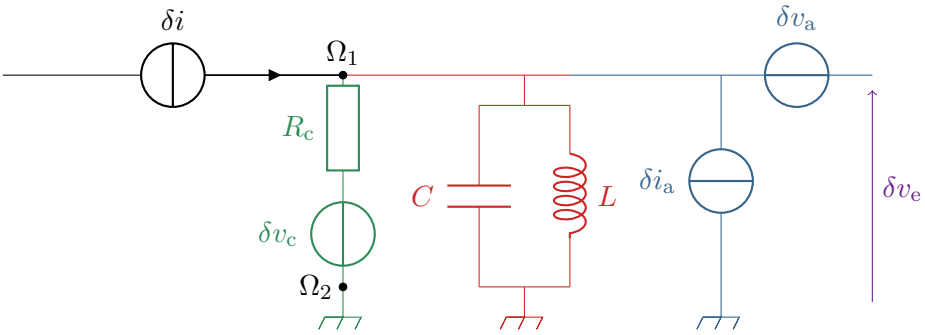
(3). Plus précisément, il s'agit des parties réelle et imaginaire de la représentation complexe du courant de sortie de l'échantillon. Celui-ci est une grandeur physique classique, donc réelle, mais pas du tout une fonction de cohérence ou une fonction d'onde qui serait intrinsèquement complexe.

(4). Rappelons que la densité spectrale de bruit correspond à la raciné carrée du module du bruit en fréquence, défini équation (4.6), page 120.

(5). En fait deux chaînes de deux amplificateurs sont montées en parallèle comme nous le comprendrons bientôt.



(a) Schéma de principe du montage expérimental.



(b) Circuit électrique équivalent.

Fig. A.3 – Principe des mesures de bruit. Un courant de fluctuations δi est généré, par exemple ici par partitionnement sur un QPC. Il est mesuré dans une géométrie à trois terminaux. La conversion courant-tension est effectuée par la résistance du canal de bord, en vert, qui ajoute un bruit thermique en tension δv_c. La transmission se fait par l'intermédiaire d'un résonateur supposé non bruyant, en rouge, et la tension mesurée est amplifiée, en bleu. L'amplification ajoute une contribution de fluctuations de courant δi_a et une contribution de fluctuations de tension δv_a. Les fluctuations de tension δv_e sont mesurées par un corrélateur dont la contribution aux fluctuations est négligeable et leur transformée de Fourier calculée numériquement.

En termes de signal, la portion de canal entre les contacts ohmiques Ω_1 et Ω_2 contribue aux fluctuations de courant par un bruit Johnson–Nyquist [99, 133] caractéristique d'une résistance à température finie. Celui-ci se modélise par l'ajout d'une source de tension aléatoire, de moyenne nulle et de fluctuations δv_c. Il s'agit d'un bruit blanc, de densité spectrale de bruit valant

$$\sqrt{S_\mathrm{c}^{(v)}} = \sqrt{4\,R_\mathrm{c}\,k_\mathrm{B}T} \simeq 2\times10^{-10}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{Hz}^{-1/2} \quad \text{soit} \quad \sqrt{S_\mathrm{c}^{(i)}} \simeq 2\times10^{-14}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{Hz}^{-1/2}\,, \tag{A.3}$$

en considérant la température égale à 100 mK.

Les amplificateurs contribuent également aux fluctuations mesurées. La contribution d'un amplificateur se modélise par l'ajout de deux sources décorrélées, l'une de tension de fluctuations δv_a et l'autre de courant δi_a. En première approximation, ces deux bruits sont des bruits blancs, dont les densités spectrales valent respectivement

$$\sqrt{S_\mathrm{a}^{(v)}} \simeq 3\times10^{-10}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{Hz}^{-1/2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{S_\mathrm{a}^{(i)}} \simeq 4\times10^{-15}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{Hz}^{-1/2}\,. \tag{A.4}$$

Le bruit en tension vaut $3\times10^{-14}\,\mathrm{A}\cdot\ \mathrm{Hz}^{-1/2}$ une fois converti en courant par la résistance du canal R_c. Ces fluctuations sont celles des amplificateurs à froid qui correspondent à l'état de l'art technologique. Il est possible de s'affranchir des fluctuations de tension δv_a ajoutées par les amplificateurs en envoyant le signal d'intérêt dans deux amplificateurs montés en parallèle et en mesurant non plus l'auto-corrélation de la tension de sortie de l'amplificateur mais les corrélations croisées des tensions de sorties des deux amplificateurs. En contrepartie, les fluctuations de courant δi_a ajoutées par les amplificateurs sont doublées, mais demeurent d'un ordre de grandeur plus faibles que celles qui ont été éliminées [138].

Toutes les sources de fluctuations étant décorrélées, le bruit mesuré, correspondant aux fluctuations δv_e, est la somme des bruits associés à chacune des causes qui viennent d'être discutées,

$$S_\mathrm{e}^{(v)}(\omega) = |Z(\omega)|^2\left(S^{(i)}(\omega) + 2S_\mathrm{a}^{(i)}(\omega)\right) + S_\mathrm{c}^{(v)}(\omega)\,, \tag{A.5}$$

où Z est l'impédance totale du résonateur monté en parallèle du canal de bord. Les trois contributions étant du même ordre de grandeur, celle d'intérêt $S^{(i)}$ se déduit en calculant la différence des bruits mesurés lorsque la source est allumée et éteinte.

Sans entrer dans les détails du calcul présentés par ailleurs [61, 120], isoler le bruit d'intérêt $S^{(i)}$ des deux autres avec un rapport signal sur bruit (6) de l'ordre de 100 demande une cinquantaine de minutes. À titre de comparaison, une même mesure demandait une vingtaine d'heures avant l'ajout des amplificateurs ultra bas bruit par V. Freulon. Des effets de dérive lente des différents paramètres compliquaient alors les mesures.

(6). Le « signal » est ici ... un bruit, en l'occurrence $S^{(i)}$ alors que le « bruit » est la somme $2S_\mathrm{a}^{(i)} + S_\mathrm{c}^{(v)}/\,|Z|^2$.

A.2 Analyse de l'interféromètre de Samuelsson en termes d'intrication

Cette annexe propose une analyse de l'interféromètre de Samuelsson introduit au paragraphe 4.5.3, page 163, comme un générateur d'excès de cohérence à deux électrons en termes d'intrication. Dans leur article original [157], P. Samuelsson *et al.* proposent d'ailleurs d'utiliser leur dispositif dans une configuration très déséquilibrée, où $R \ll 1$, pour générer des paires électron–trou intriquées au dessus d'un vide effectif [15].

L'approche suivie ici consiste à analyser l'interféromètre de Samuelsson comme un système de qubits sur rail [95], où une source effective émet une paire de quanta sur deux voies différentes. L'état de chacun des quanta encode l'état de chacun des qubits. Le dispositif analysé sous cette forme est représenté figure A.4. La source de paires est composée des canaux du secteur s, alors que les paires de canaux pairs p = (1in, 3in) et impairs i = (2in, 4in) forment les deux voies. Le quanta envoyé dans la voie paire est dans l'état haut $|\uparrow\rangle_\mathrm{p}$ si un électron se trouve dans la voie 1in et dans l'état bas $|\downarrow\rangle_\mathrm{p}$ si un électron se trouve dans la voie 3in. De même, les états $|\uparrow\rangle_\mathrm{i}$ (resp. $|\downarrow\rangle_\mathrm{i}$) correspondent à la présence d'un électron dans le canal 2in (resp. 4in). Ce faisant, tous les outils sont présents pour générer une intrication habituelle à deux qubits, obtenue en sélectionnant *a posteriori* les événements où un électron a été détecté dans chaque secteur p ou i. Les QPC 13 et 24 interviennent dans l'analyse de cette intrication, où ils agissent comme des opérateurs de rotation unitaire sur les qubits effectifs. En effet, leur matrice de diffusion est unitaire et peut donc s'interpréter comme une matrice de rotation,

$$S_\mathrm{QPC} = \begin{bmatrix} \sqrt{R} & \mathrm{i}\sqrt{T} \\ \mathrm{i}\sqrt{T} & \sqrt{R} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{i}\sin\theta \\ \mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \tag{A.6}$$

Par la suite les angles de rotation des QPC 13 et 24 sont notés θ_i et θ_p.

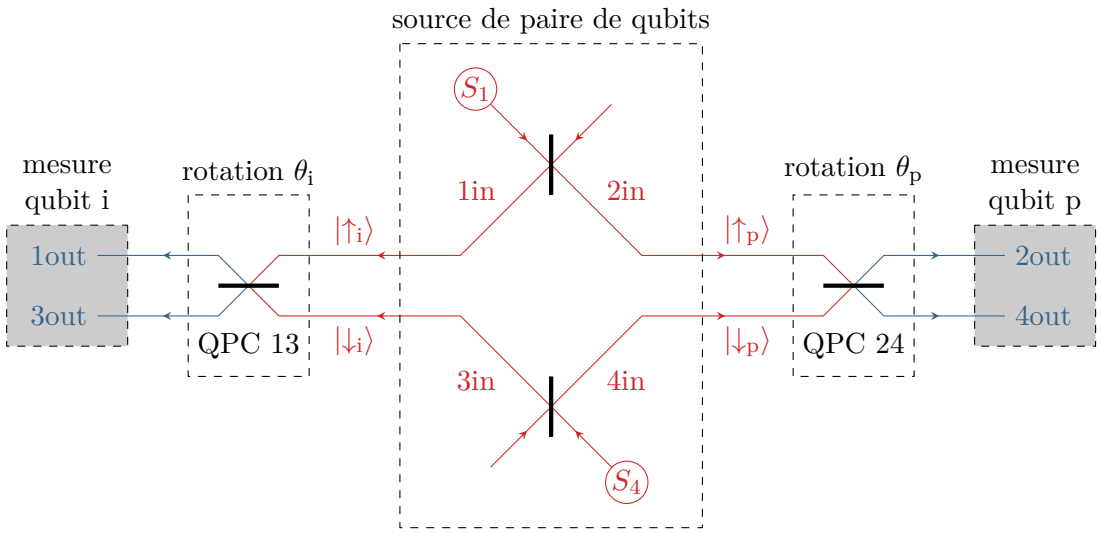


Fig. A.4 – Interféromètre de Samuelsson comme source d'intrication. Les secteurs s et in sont analogues à une source de qubits intriqués émis sur deux rails différents, notés p et i. Les QPC 13 et 24 interviennent en tant qu'opérateurs de rotation, nécessaire à l'analyse de l'état intriqué.

Les tests d'intrication reposent sur la comparaison de valeurs prédites par la théorie quantique à celles prédites par des théories classiques à variables cachées sous forme d'inégalités, la plus célèbre étant celle de Bell [16]. Par la suite, J. Clauser, M. Horne, A. Shimony et R. Holt [41] ont proposé une inégalité, équivalente et plus simple à tester, reposant sur des mesures de corrélations $\mathcal{C}(\theta_\mathrm{i}, \theta_\mathrm{p})$ de deux variables ne pouvant prendre que les valeurs ± 1 sur lesquelles deux

paramètres, ici θ_i et θ_p, peuvent intervenir. Toute théorie à variables cachées prédit que pour n'importe quel quadruplet $(\theta_\mathrm{i}, \theta'_\mathrm{i}, \theta_\mathrm{p}, \theta'_\mathrm{p})$ on aura

$$-2 \leq \mathcal{C}(\theta_\mathrm{i}, \theta_\mathrm{p}) + \mathcal{C}(\theta'_\mathrm{i}, \theta'_\mathrm{p}) + \mathcal{C}(\theta'_\mathrm{i}, \theta_\mathrm{p}) - \mathcal{C}(\theta_\mathrm{i}, \theta'_\mathrm{p}) \leq 2\,. \tag{A.7}$$

Si cette inégalité, appelée inégalité CHSH, n'est pas vérifiée, alors l'état est intriqué vis-à-vis du degré de liberté sur lequel interviennent les paramètres θ_i et θ_p. Les mesures de corrélation entre les détections électroniques dans les voies de sortie p et i permettent de reconstruire un corrélateur $\mathcal{C}$ par rapport auquel une inégalité CHSH peut être testée [40, 157]. Il vaut

$$\mathcal{C}(\theta_\mathrm{i}, \theta_\mathrm{p}) = \langle (n_{1\mathrm{out}} - n_{3\mathrm{out}})\,(n_{2\mathrm{out}} - n_{2\mathrm{out}}) \rangle\ , \tag{A.8}$$

où n_α est le nombre d'électrons détecté à chaque réalisation de l'expérience dans le canal α.

Il est alors possible d'écrire le corrélateur $\mathcal{C}$ en termes des excès de cohérence à deux électrons sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\theta_\mathrm{i}, \theta_\mathrm{p}) = \iint \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' \Big[&\Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}_{\mathrm{out}}(1\,t, 2\,t'|1\,t, 2\,t') + \Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}_{\mathrm{out}}(3\,t, 4\,t'|3\,t, 4\,t') \\ &- \Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}_{\mathrm{out}}(3\,t, 2\,t'|3\,t, 2\,t') - \Delta\mathcal{G}^{(2\mathrm{e})}_{\mathrm{out}}(1\,t, 4\,t'|1\,t, 4\,t') \Big]\,.\end{aligned} \tag{A.9}$$

P. Samuelsson *et al.* ont établi que dans le cas dissymétrique qu'ils étudient, l'inégalité CHSH peut être violée dès lors que les deux QPC du secteur in ne sont ni totalement fermés, ni totalement ouverts. Les processus à l'origine de cette intrication sont les interférences à deux électrons permises par la géométrie du dispositif. Traduit dans le formalisme des cohérences électroniques, l'intrication est codée par les parties hors-diagonales de la cohérence à deux électrons.

A.3 Conventions et définitions

A.3.1 Notations

Le symbole $\overset{\text{déf.}}{=}$ signifie « égal par définition ».

Pour deux variables x et x', on utilise de façon quasi-systématique les variables

$$\bar{x} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{x + x'}{2} \qquad \text{et} \qquad X \overset{\text{déf.}}{=} x - x' \tag{A.10}$$

issues d'une rotation de l'espace dans lequel vivent les variables (x, x'). Pour des temps, la notation τ est préférée à T.

Une fonction d'onde associée à une propagation balistique ne dépend que d'une variable, à savoir $x - v_F t$ où v_F est la vitesse de Fermi à laquelle a lieu la propagation. Les fonctions d'onde ne sont toutefois écrites qu'en termes de variables temporelles afin de simplifier les notations,

$$\phi(t) \overset{\text{déf.}}{=} \phi(x - v_F\, t)\,. \tag{A.11}$$

Les raccourcis sont les mêmes pour les fonctions de cohérence, par exemple

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(t|t') \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(x - v_F\, t|x' - v_F\, t')\,. \tag{A.12}$$

À plusieurs reprises les systèmes considérés font intervenir plusieurs canaux de propagation. Des notations compactes sont alors utilisées pour limiter autant que possible les redondances. Par exemple, pour un canal repéré par l'indice 1, on note

$$\mathcal{G}_1^{(\mathrm{e})}(t|t') \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1\, t|1\, t')\,. \tag{A.13}$$

Dans le même ordre d'idée, lorsque le dispositif est décomposé en plusieurs secteurs le label de celui-ci peut être indiqué en indice. Par exemple, pour deux canaux 1 et 2 dans un secteur s,

$$\mathcal{G}_{\mathrm{s}}^{(\mathrm{e})}(1\, t|2\, t') \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{G}^{(\mathrm{e})}(1\mathrm{s}\, t|2\mathrm{s}\, t')\,. \tag{A.14}$$

A.3.2 Transformée de Fourier

Convention de définition

Soit $f(x)$ une fonction ou un opérateur et $\widetilde{f}(k)$ sa transformée de Fourier. On adopte les conventions suivantes :

$$f(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \widetilde{f}(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{f}(k) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{A.15}$$

La convention est dictée par l'équation d'Heisenberg qui impose la dynamique des opérateurs. En conséquence cette définition,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kx} = 2\pi\, \delta(k)\,. \tag{A.16}$$

Transformée de Fourier avec les notations compactes

L'usage de notations réduites des variables dont dépendent les fonctions d'onde et les fonctions de cohérence demande des précautions dans l'usage des transformées de Fourier. En effet, la

transformée de Fourier est calculée par rapport à la variable de position $x - v_F\, t$. Par conséquent, des vitesses de Fermi v_F apparaissent dans la définition

$$\phi(t) = \frac{1}{v_F} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\, \widetilde{\phi}(\omega)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\phi}(\omega) = v_F \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, \phi(t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ . \tag{A.17}$$

Cela permet en outre de garantir que deux fonctions transformées de Fourier l'une de l'autre ont des dimensions inversées.

Le même choix de conventions s'applique également aux fonctions de cohérence électronique. Cela leur confère les mêmes unités que dans la thèse de C. Grenier [76], mais en revanche la convention choisie est différente dans les articles associés [51, 52, 78].

Transformée de Fourier des opérateurs champ

Les opérateurs champs dans l'espace réel

$$\psi(t) \overset{\text{déf.}}{=} \psi(x - v_F\, t) \qquad \text{et} \qquad \psi^\dagger(t) \overset{\text{déf.}}{=} \psi^\dagger(x - v_F\, t) \tag{A.18}$$

sont homogènes à la racine carrée de l'inverse d'une longueur. Les opérateurs champs dans l'espace de Fourier sont notés $c(\omega)$ et $c^\dagger(\omega)$ mais ne sont pas directement les transformées de Fourier des opérateurs ψ et $\psi^\dagger$, il faut y ajouter un facteur $\sqrt{2\pi/v_F}$ sous la forme

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{2\pi}{v_F}}\, \widetilde{\psi}(\omega)\,. \tag{A.19}$$

Ce choix de convention est adopter pour respecter les usages concernant les relations d'anti-commutation tant dans l'espace réel que dans l'espace de Fourier,

$$\{\psi(t), \psi^\dagger(t')\} = \frac{1}{v_F}\, \delta(t - t') \qquad \text{et} \qquad \{c(\omega), c^\dagger(\omega')\} = \delta(\omega - \omega')\,. \tag{A.20}$$

Ce faisant, les opérateurs champs dans l'espace de Fourier sont homogènes à la racine carrée d'un temps.

A.3.3 Normalisation des fonctions d'ondes

La normalisation des fonctions d'onde n'a de sens que sur tout l'espace à un instant donné. Cette thèse concernant des systèmes unidimensionnels, on utilise la convention

$$\forall t, \qquad \int \mathrm{d}x\ |\phi(x,t)|^2 = 1\,. \tag{A.21}$$

Par conséquent, une fonction d'onde est homogène à la racine carrée de l'inverse d'une longueur. Néanmoins, l'usage des notations compactes peut tendre à masquer les dimensions.

En conséquence des conventions de transformée de Fourier, une fonction d'onde à un électron ϕ est normalisée de façon différente dans l'espace des temps et dans l'espace des énergies. En utilisant les notations réduites (A.11),

$$v_F \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ |\phi(t)|^2 = 1 \qquad \text{alors que} \qquad \frac{1}{v_F} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\, |\widetilde{\phi}(\omega)|^2 = 2\pi\,. \tag{A.22}$$

En plus des fonctions d'ondes à une particule qui viennent d'être discutées, la norme d'un état contenant N électrons est prise égale à N.

A.3.4 Abréviations

▷ HBT : Hanbury Brown–Twiss ;
▷ HOM : Hong–Ou–Mandel ;
▷ MZI : interféromètre de Mach–Zehnder (« Mach–Zehnder interferometer ») ;
▷ QPC : contact ponctuel quantique (« quantum point contact ») ;
▷ 2dEG : gaz d'électrons bidimensionnel (« two-dimensionnal electron gas »).

Table des figures

1.1 Modèle classique des canaux de bord 12
1.2 Modèle quantique des canaux de bord 13
1.3 Barrière de potentiel générée par un contact ponctuel quantique 15
1.4 Vue d'artiste du condensateur mésoscopique 15
1.5 Schéma du cycle du condensateur mésoscopique opérant en source d'électrons . . 16
1.6 Source leviton 19
1.7 Fentes d'Young électroniques 21
1.8 Interféromètre de Mach–Zehnder optique 22
1.9 Interféromètre de Mach–Zehnder à électrons 23
1.10 Expérience historique de Hanbury Brown et Twiss 25
1.11 Phénoménologie des résultats de l'expérience HBT photonique 25
1.12 Expérience historique de Hong, Ou et Mandel 27
1.13 Vue au microscope électronique à balayage de l'échantillon pour l'expérience HOM électronique 28
1.14 Phénoménologie des résultats de l'expérience HOM 29
1.15 Résultats de l'expérience HOM électronique 30
1.16 Fractionnalisation d'une excitation sous l'effet des interactions 31

2.1 Schéma de principe du dispositif d'électrodétection 40
2.2 Représentation diagrammatique de la cohérence 49
2.3 Excès de cohérence à un électron d'un paquet leviton cohérent 52
2.4 Schéma de principe de la modélisation des interactions 53
2.5 Excès de cohérence d'une paire d'électrons 55
2.6 Excès de cohérence d'une paire électron-trou 56
2.7 Excès de cohérence d'une paire électron-trou séparée 56
2.8 Décomposition des contributions à la cohérence dans le plan des fréquences . . . 59
2.9 Excès de cohérence dans le domaine des énergies d'une paire d'électrons 60
2.10 Excès de cohérence dans le domaine des énergies d'une paire électron-trou 61

2.11 Excès de cohérence à un électron émis par un condensateur mésoscopique 65
2.12 Fonction de Wigner en excès émise par un condensateur mésoscopique 66
2.13 Fonction de Wigner émise par un condensateur mésoscopique 67
2.14 Fonction de Wigner émise par un contact ohmique commandé par une tension harmonique 71
2.15 Fonction de Wigner en excès d'un unique leviton $n = 1$ 72
2.16 Fonction de Wigner d'un train de levitons 73

3.1 Schéma de principe du dispositif d'électrodétection 77
3.2 Décomposition de l'espace des temps 4d adaptée aux symétries de la cohérence à deux électrons 82
3.3 Représentation diagrammatique de la cohérence à deux électrons 86
3.4 Excès de cohérence à deux électrons dans le plan diagonal 90
3.5 Excès de cohérence à deux électrons d'une paire de levitons dans le plan totalement hors-diagonal, première coupe 92
3.6 Excès de cohérence à deux électrons d'une paire de levitons dans le plan totalement hors-diagonal, seconde coupe 93
3.7 Excès de cohérence à deux électrons d'une paire de levitons dans une seconde vue en coupe 94
3.8 Cohérence à deux électrons d'une mer de Fermi à température nulle 99
3.9 Nature des quasi-particules détectées en fonction des contributions à la cohérence dans le plan diagonal 101
3.10 Contribution de l'échange quantique à la fonction de Wigner à deux électrons de la mer de Fermi 104
3.11 Degré de cohérence et corrélations d'une paire de levitons 109
3.12 Degré de cohérence à deux électrons de paires de levitons 109
3.13 Degré de cohérence à deux électrons de paires de paquets émis par un condensateur mésoscopique 110
3.14 Degré de cohérence à deux électrons d'un état stationnaire 112
3.15 Corrélations d'un train de levitons 114
3.16 Degré de cohérence à deux électrons d'un train de levitons 114

4.1 Géométrie à trois terminaux 118
4.2 Interféromètre d'Hanbury Brown–Twiss 125
4.3 Interféromètre de Mach–Zehnder à électrons 126
4.4 Représentation diagrammatique de la propagation de la cohérence dans un MZI . 128
4.5 Courant moyen en sortie d'un MZI en fonction du retard entre les deux voies . . 129
4.6 Fonction de Wigner en sortie d'un MZI pour lequel $\Delta\tau = \tau_{\mathrm{e}}$ 131
4.7 Courant moyen en sortie d'un MZI en fonction de la phase Aharonov–Bohm . . . 132
4.8 Fonction de Wigner en sortie d'un MZI pour lequel $\Delta\tau = 10\,\tau_{\mathrm{e}}$ 134

4.9 Nombre d'occupation électronique en sortie d'un MZI alimenté par une distribution en double marche . . . 136
4.10 Dispositif d'interférences à deux électrons sur un QPC . . . 138
4.11 Cohérence à deux électrons en sortie d'un QPC . . . 140
4.12 Résultats de l'expérience HOM électronique . . . 144
4.13 Schéma de principe du dispositif de mesure de cohérence à deux électrons . . . 148
4.14 Interférences non-locales à deux électrons dans un interféromètre de type Franson 149
4.15 Exemples de propagation des cohérences dans un interféromètre de Franson électronique . . . 151
4.16 État intriqué en fenêtres de temps . . . 154
4.17 Fraction de bruit mesurée en sortie d'un interféromètre de type Franson . . . 155
4.18 Fraction de bruit mesurée en sortie d'un interféromètre de type Franson pour une paire intriquée en fenêtre de temps rapprochée . . . 157
4.19 Tomographie de la cohérence à deux électrons . . . 158
4.20 MZI montés en série . . . 159
4.21 Interféromètre de Franson inversé . . . 161
4.22 Dispositif de double délocalisation . . . 163
4.23 Interféromètre de Samuelsson . . . 164
4.24 Interférences non-locales à deux électrons dans un interféromètre de Samuelsson . 164
4.25 Représentation diagrammatique des termes contribuant à la cohérence à deux électrons en sortie d'un interféromètre de Samuelsson . . . 166

5.1 État intriqué en fenêtre de temps . . . 172
5.2 Carte de l'optique quantique électronique . . . 175
A.1 Géométrie à trois terminaux . . . 177
A.2 Schéma du dispositif de mesure de courant à fréquence finie . . . 178
A.3 Principe des mesures de bruit . . . 180
A.4 Interféromètre de Samuelsson comme source d'intrication . . . 182

Bibliographie

[1] A. Abragam. *Principles of Nuclear Magnetic Resonance*. Oxford University Press, 1985.

[2] Y. Aharonov et D. Bohm. « Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory ». In : *Physical Review* 115 (août 1959), p. 485–491. doi : 10.1103/PhysRev.115.485.

[3] E. Akkermans et G. Montambaux. *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, 2007. isbn : 9781139463997.

[4] M. Albert et P. Devillard. « Waiting time distribution for trains of quantized electron pulses ». In : *Physical Review B* 90 (juil. 2014), p. 035431. doi : 10.1103/PhysRevB.90.035431.

[5] M. Albert, C. Flindt et M. Büttiker. « Accuracy of the quantum capacitor as a single-electron source ». In : *Physical Review B* 82 (juil. 2010), p. 041407. doi : 10.1103/PhysRevB.82.041407.

[6] I. L. Aleiner et L. I. Glazman. « Novel edge excitations of two-dimensional electron liquid in a magnetic field ». In : *Physical Review Letters* 72 (mai 1994), p. 2935–2938. doi : 10.1103/PhysRevLett.72.2935.

[7] C. Altimiras, H. Le Sueur, U. Gennser, A. Cavanna, D. Mailly et F. Pierre. « Non-equilibrium edge-channel spectroscopy in the integer quantum Hall regime ». In : *Nature Physics* 6 (oct. 2010), p. 34–39. doi : doi:10.1038/nphys1429.

[8] C. Altimiras, H. Le Sueur, U. Gennser, A. Cavanna, D. Mailly et F. Pierre. « Tuning Energy Relaxation along Quantum Hall Channels ». In : *Physical Review Letters* 105 (nov. 2010), p. 226804. doi : 10.1103/PhysRevLett.105.226804.

[9] P. A. Altin, M. T. Johnsson, V. Negnevitsky, G. R. Dennis, R. P. Anderson, J. E. Debs, S. S. Szigeti, K. S. Hardman, S. Bennetts, G. D. McDonald, L. D. Turner, J. D. Close et N. P. Robins. « Precision atomic gravimeter based on Bragg diffraction ». In : *New Journal of Physics* 15.2 (2013), p. 023009.

[10] A. Altland et B. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2006. isbn : 9780521845083.

[11] B. L. Altshuler, A. G. Aronov et D. E. Khmelnitsky. « Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation ». In : *Journal of Physics C : Solid State Physics* 15.36 (1982), p. 7367. doi : 10.1088/0022-3719/15/36/018.

[12] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh et V. Vedral. « Entanglement in many-body systems ». In : *Review of Modern Physics* 80 (mai 2008), p. 517–576. doi : 10.1103/RevModPhys.80.517.

[13] Tsuneya Ando et Yasutada Uemura. « Theory of Oscillatory g-Factor in an MOS Inversion Layer under Strong Magnetic Fields ». In : *Journal of the Physical Society of Japan* 37.4 (1974), p. 1044–1052. doi : 10.1143/JPSJ.37.1044.

[14] N. W. Ashcroft et N. D. Mermin. *Solid State Physics*. 33e éd. HRW international editions. Holt, Rinehart et Winston, 2011. isbn : 9780030839931.

[15] C. W. J. Beenakker. « Electron-hole entanglement in the Fermi sea ». In : *Quantum Computers, Algorithms and Chaos, International School of Physics Enrico Fermi, vol. 162*. Sous la dir. de G. Casati, D.L. Shepelyansky, P. Zoller et G. Benenti. IOS Press, 2006. arXiv : cond-mat/0508488.

[16] J. S. Bell. « On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox ». In : *Physics* 1.3 (1964), p. 195–200.

[17] E. Berg, Y. Oreg, E.-A. Kim et F. von Oppen. « Fractional Charges on an Integer Quantum Hall Edge ». In : *Physical Review Letters* 102 (juin 2009), p. 236402. doi : 10.1103/PhysRevLett.102.236402.

[18] P. Bertet, A. Auffèves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J.-M. Raimond et S. Haroche. « Direct Measurement of the Wigner Function of a One-Photon Fock State in a Cavity ». In : *Physical Review Letters* 89 (oct. 2002), p. 200402. doi : 10.1103/PhysRevLett.89.200402.

[19] J. Beugnon, M. P. A. Jones, J. Dingjan, B. Darquié, G. Messin, A. Browaeys et P. Grangier. « Quantum interference between two single photons emitted by independently trapped atoms ». In : *Nature* 440 (avr. 2006), p. 779–782. doi : 10.1038/nature04628.

[20] E. Bieri, M. Weiss, O. Göktas, M. Hauser, C. Schönenberger et S. Oberholzer. « Finite-bias visibility dependence in an electronic Mach-Zehnder interferometer ». In : *Physical Review B* 79 (juin 2009), p. 245324. doi : 10.1103/PhysRevB.79.245324.

[21] E. Bocquillon. « Electron quantum optics in quantum Hall edge channels ». Thèse de doct. École Normale Supérieure de Paris et Université Pierre et Marie Curie - Parix VI, oct. 2012.

[22] E. Bocquillon, V. Freulon, J.-M. Berroir, P. Degiovanni, B. Plaçais, A. Cavanna, Y. Jin et G. Fève. « Coherence and Indistinguishability of Single Electrons Emitted by Independent Sources ». In : *Science* 339.6123 (2013), p. 1054–1057. doi : 10.1126/science.1232572.

[23] E. Bocquillon, V. Freulon, J.-M. Berroir, P. Degiovanni, B. Plaçais, A. Cavanna, Y. Jin et G. Fève. « Separation of neutral and charge modes in one-dimensional chiral edge channels ». In : *Nature Communications* 4 (mai 2013), p. 1839. doi : 10.1038/ncomms2788.

[24] E. Bocquillon, V. Freulon, F. D. Parmentier, J.-M. Berroir, B. Plaçais, C. Wahl, J. Rech, T. Jonckheere, T. Martin, C. Grenier, D. Ferraro, P. Degiovanni et G. Fève. « Electron quantum optics in ballistic chiral conductors ». In : *Annalen der Physik* 526.1-2 (2014), p. 1–30. issn : 1521-3889. doi : 10.1002/andp.201300181.

[25] E. Bocquillon, F. D. Parmentier, C. Grenier, J.-M. Berroir, P. Degiovanni, D. C. Glattli, B. Plaçais, A. Cavanna, Y. Jin et G. Fève. « Electron Quantum Optics : Partitioning Electrons One by One ». In : *Physical Review Letters* 108 (mai 2012), p. 196803. doi : 10.1103/PhysRevLett.108.196803.

[26] M. Born et E. Wolf. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7e éd. Cambridge University Press, 1999. isbn : 9780521642224.

[27] E. Brannen et H. I. Ferguson. « The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays ». In : *Nature* 178 (oct. 1956), p. 481–482. doi : 10.1038/178481a0.

[28] J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel et H. Zbinden. « Pulsed Energy-Time Entangled Twin-Photon Source for Quantum Communication ». In : *Physical Review Letters* 82 (mar. 1999), p. 2594–2597. doi : 10.1103/PhysRevLett.82.2594.

[29] J. Brendel, E. Mohler et W. Martienssen. « Experimental Test of Bell's Inequality for Energy and Time ». In : *Europhysics Letters* 20.7 (déc. 1992), p. 575. doi : doi : 10.1209/0295-5075/20/7/001.

[30] H. Bruus et K. Flensberg. *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics : An Introduction*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, 2004. isbn : 9780198566335.

[31] M. Büttiker. « Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors ». In : *Physical Review B* 38 (nov. 1988), p. 9375–9389. doi : 10.1103/PhysRevB.38.9375.

[32] M. Büttiker. « Coherent and sequential tunneling in series barriers ». In : *IBM Journal of Research and Development* 32 (jan. 1988), p. 63–75. issn : 0018-8646. doi : 10.1147/rd.321.0063.

[33] M. Büttiker. « Quantized transmission of a saddle-point constriction ». In : *Physical Review B* 41 (avr. 1990), p. 7906–7909. doi : 10.1103/PhysRevB.41.7906.

[34] M. Büttiker, H. Thomas et A. Prêtre. « Mesoscopic capacitors ». In : *Physics Letters A* 180.4–5 (1993), p. 364–369. issn : 0375-9601. doi : 10.1016/0375-9601(93)91193-9.

[35] C. Cabart. « Vie et mort des excitations monoélectroniques dans un conducteur quantique ». Rapport de stage de M1, École Normale Supérieure de Lyon. Stage réalisé au laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon. Juil. 2013.

[36] R.-J. Champeau, R. Carpentier et I. Lorgeré. *Ondes lumineuses : Propagation, optique de Fourier, cohérence*. De Boeck Supérieur, 2009. isbn : 9782804158897.

[37] R. Chevalerias, Y. Latron et C. Veret. « Methods of Interferometry Applied to the Visualization of Flows in Wind Tunnels ». In : *Journal of the Optical Society of America* 47.8 (août 1957), p. 703–704. doi : 10.1364/JOSA.47.000703.

[38] L. Chirolli, V. Giovannetti, R. Fazio et V. Scarani. « Time-bin entanglement of quasiparticles in semiconductor devices ». In : *Physical Review B* 84 (19 nov. 2011), p. 195307. doi : 10.1103/PhysRevB.84.195307.

[39] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii et L. I. Glazman. « Electrostatics of edge channels ». In : *Physical Review B* 46 (août 1992), p. 4026–4034. doi : 10.1103/PhysRevB.46.4026.

[40] N. M. Chtchelkatchev, G. Blatter, G. B. Lesovik et T. Martin. « Bell inequalities and entanglement in solid-state devices ». In : *Physical Review B* 66 (oct. 2002), p. 161320. doi : 10.1103/PhysRevB.66.161320.

[41] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony et R. A. Holt. « Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories ». In : *Physical Review Letters* 23 (oct. 1969), p. 880–884. doi : 10.1103/PhysRevLett.23.880.

[42] C. Cohen Tannoudji. *II. Signaux de photodétection : théorie sans photons et avec photons*. Cours au collège de France, 1979. url : http://www.phys.ens.fr/~cct/college-de-france/1979-80/1979-80.htm.

[43] C. Cohen-Tannoudji et P. Avan. « Discrete state coupled to a continuum. Continuous transition between the Weisskopf-Wigner exponential decay and the Rabi oscillation ». In : *Etats atomiques et moléculaires couplés à un continuum*. Éditions du CNRS, 1977.

[44] P. Degiovanni, C. Grenier et G. Fève. « Decoherence and relaxation of single-electron excitations in quantum Hall edge channels ». In : *Physical Review B* 80 (déc. 2009), p. 241307. doi : 10.1103/PhysRevB.80.241307.

[45] J. Dubois, T. Jullien, C. Grenier, P. Degiovanni, P. Roulleau et D. C. Glattli. « Integer and fractional charge Lorentzian voltage pulses analyzed in the framework of photon-assisted shot noise ». In : *Physical Review B* 88 (août 2013), p. 085301. doi : 10.1103/PhysRevB.88.085301.

[46] J. Dubois, T. Jullien, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, Y. Jin, W. Wegscheider, P. Roulleau et D. C. Glattli. « Minimal-excitation states for electron quantum optics using levitons ». In : *Nature* 502 (oct. 2013), p. 659. doi : 10.1038/nature12713.

[47] Y. C. Eldar et G. Kutyniok. *Compressed Sensing : Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2012. isbn : 9781107005587.

[48] W. Fan, I. M. White, S. I. Shopova, H. Zhu, J. D. Suter et Y. Sun. « Sensitive optical biosensors for unlabeled targets : A review ». In : *Analytica Chimica Acta* 620.1—2 (2008), p. 8–26. issn : 0003-2670. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.aca.2008.05.022.

[49] U. Fano. « Quantum Theory of Interference Effects in the Mixing of Light from Phase-Independent Sources ». In : *American Journal of Physics* 29.8 (1961), p. 539–545. doi : http://dx.doi.org/10.1119/1.1937827.

[50] A. Feller. « Approche temps-fréquence de la cohérence des électrons dans un conducteur quantique ». Rapport de stage de L3, École Normale Supérieure de Lyon. Stage réalisé au laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon. Juil. 2012.

[51] D. Ferraro, A. Feller, A. Ghibaudo, É. Thibierge, E. Bocquillon, G. Fève, C. Grenier et P. Degiovanni. « Wigner function approach to single electron coherence in quantum Hall edge channels ». In : *Physical Review B* 88 (nov. 2013), p. 205303. doi : 10.1103/PhysRevB.88.205303.

[52] D. Ferraro, B. Roussel, C. Cabart, É. Thibierge, G. Fève, C. Grenier et P. Degiovanni. « Real-Time Decoherence of Landau and Levitov Quasiparticles in Quantum Hall Edge Channels ». In : *Physical Review Letters* 113 (oct. 2014), p. 166403. doi : 10.1103/PhysRevLett.113.166403.

[53] G. Fève, J.-M. Berroir, D. C. Glattli et B. Plaçais. « Un condensateur quantique pour des électrons à la demandes ». In : *Images de la physique* (juin 2009), p. 55–62. url : http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/couv-PDF/IdP2009/Article_08.pdf.

[54] G. Fève, P. Degiovanni et T. Jolicoeur. « Quantum detection of electronic flying qubits in the integer quantum Hall regime ». In : *Physical Review B* 77 (jan. 2008), p. 035308. doi : 10.1103/PhysRevB.77.035308.

[55] G. Fève, A. Mahé, J.-M. Berroir, T. Kontos, B. Plaçais, D. C. Glattli, A. Cavanna, B. Etienne et Y. Jin. « An On-Demand Coherent Single-Electron Source ». In : *Science* 316.5828 (2007), p. 1169–1172. doi : 10.1126/science.1141243.

[56] E. B. Flagg, A. Muller, S. V. Polyakov, A. Ling, A. Migdall et G. S. Solomon. « Interference of Single Photons from Two Separate Semiconductor Quantum Dots ». In : *Physical Review Letters* 104 (avr. 2010), p. 137401. doi : 10.1103/PhysRevLett.104.137401.

[57] G. Floquet. « Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques ». In : *Annales de l'École Normale Supérieure* 12 (1883), p. 47–88. URL : http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__47_0.

[58] M. Fox. *Quantum Optics : An Introduction.* Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2006. ISBN : 9780191524257.

[59] J. D. Franson. « Bell inequality for position and time ». In : *Physical Review Letters* 62 (mai 1989), p. 2205–2208. DOI : 10.1103/PhysRevLett.62.2205.

[60] J. D. Franson. « Two-photon interferometry over large distances ». In : *Physical Review A* 44 (oct. 1991), p. 4552–4555. DOI : 10.1103/PhysRevA.44.4552.

[61] V. Freulon. « Étude de la décohérence de paquets d'ondes monoélectroniques dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier ». Thèse de doct. École Normale Supérieure de Paris et Université Pierre et Marie Curie - Parix VI, oct. 2014.

[62] J. Gabelli, G. Fève, J.-M. Berroir, B. Plaçais, A. Cavanna, B. Étienne, Y. Jin et D. C. Glattli. « Violation of Kirchhoff's Laws for a Coherent RC Circuit ». In : *Science* 313.5786 (2006), p. 499–502. DOI : 10.1126/science.1126940.

[63] J. Gabelli, G. Fève, T. Kontos, J.-M. Berroir, B. Plaçais, D. C. Glattli, B. Etienne, Y. Jin et M. Büttiker. « Relaxation Time of a Chiral Quantum $R-L$ Circuit ». In : *Physical Review Letters* 98 (avr. 2007), p. 166806. DOI : 10.1103/PhysRevLett.98.166806.

[64] J. Gabelli et B. Reulet. « Shaping a time-dependent excitation to minimize the shot noise in a tunnel junction ». In : *Physical Review B* 87 (fév. 2013), p. 075403. DOI : 10.1103/PhysRevB.87.075403.

[65] J. Gabelli, L.-H. Reydellet, G. Fève, J.-M. Berroir, B. Plaçais, P. Roche et D. C. Glattli. « Hanbury Brown–Twiss Correlations to Probe the Population Statistics of GHz Photons Emitted by Conductors ». In : *Physical Review Letters* 93 (juil. 2004), p. 056801. DOI : 10.1103/PhysRevLett.93.056801.

[66] B. Gaury et X. Waintal. « Dynamical control of interference using voltage pulses in the quantum regime ». In : *Nature Communications* 5 (mai 2014), p. 3844. DOI : doi:10.1038/ncomms4844.

[67] B. Gaury, J. Weston, M. Santin, M. Houzet, C. Groth et X. Waintal. « Numerical simulations of time-resolved quantum electronics ». In : *Physics Reports* 534.1 (jan. 2014), p. 1–37. ISSN : 0370-1573. DOI : http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2013.09.001.

[68] B. Gaury, J. Weston et X. Waintal. « Stopping electrons with radio-frequency pulses in the quantum Hall regime ». In : *Physical Review B* 90 (16 oct. 2014), p. 161305. DOI : 10.1103/PhysRevB.90.161305.

[69] A. Ghibaudo. « Approche temps-fréquence de la cohérence des électrons dans un conducteur quantique ». Rapport de stage de M1, École Normale Supérieure de Lyon. Stage réalisé au laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon. Juil. 2012.

[70] V. Giovannetti et K. Yuasa. « Probing Cooper pairs with Franson interferometry ». In : *Physical Review B* 86 (sept. 2012), p. 115429. DOI : 10.1103/PhysRevB.86.115429.

[71] R. J. Glauber. « Coherent and Incoherent States of the Radiation Field ». In : *Physical Review* 131 (sept. 1963), p. 2766–2788. DOI : 10.1103/PhysRev.131.2766.

[72] R. J. Glauber. « Photon Correlations ». In : *Physical Review Letters* 10 (fév. 1963), p. 84–86. DOI : 10.1103/PhysRevLett.10.84.

[73] R. J. Glauber. « The Quantum Theory of Optical Coherence ». In : *Physical Review* 130 (juin 1963), p. 2529–2539. DOI : 10.1103/PhysRev.130.2529.

[74] M. O. Goerbig. « Quantum Hall Effects ». In : *ArXiv e-prints* (sept. 2009). arXiv : 0909.1998 [cond-mat.mes-hall].

[75] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products.* 7e éd. Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2007. isbn : 9780123736376.

[76] C. Grenier. « Electronic quantum optics ». Thèse de doct. École Normale Supérieure de Lyon, juin 2011. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00617869.

[77] C. Grenier, J. Dubois, T. Jullien, P. Roulleau, D. C. Glattli et P. Degiovanni. « Fractionalization of minimal excitations in integer quantum Hall edge channels ». In : *Physical Review B* 88 (août 2013), p. 085302. doi : 10.1103/PhysRevB.88.085302.

[78] C. Grenier, R. Hervé, E. Bocquillon, F. D. Parmentier, B. Plaçais, J.-M. Berroir, G. Fève et P. Degiovanni. « Single-electron quantum tomography in quantum Hall edge channels ». In : *New Journal of Physics* 13 (sept. 2011), p. 093007. doi : 10.1088/1367-2630/13/9/093007.

[79] G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre. *Introduction aux lasers et à l'optique quantique.* Cours de l'École polytechnique. Ellipses, 1997. isbn : 9782729857783.

[80] G. Haack. « Coherence of single and many particle states in mesoscopic systemes ». Thèse de doct. Université de Genève, juin 2012. url : http://archive-ouverte.unige.ch/unige:22610.

[81] G. Haack, M. Moskalets et M. Büttiker. « Glauber coherence of single-electron sources ». In : *Physical Review B* 87 (mai 2013), p. 201302. doi : 10.1103/PhysRevB.87.201302.

[82] G. Haack, M. Moskalets, J. Splettstösser et M. Büttiker. « Coherence of single-electron sources from Mach-Zehnder interferometry ». In : *Physical Review B* 84 (août 2011), p. 081303. doi : 10.1103/PhysRevB.84.081303.

[83] R. Hanbury Brown et R. Q. Twiss. « A new type of interferometer for use in radio astronomy ». In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 45.366 (1954), p. 663–682. doi : 10.1080/14786440708520475.

[84] R. Hanbury Brown et R. Q. Twiss. « A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius ». In : *Nature* 178 (nov. 1956), p. 1046–1048. doi : 10.1038/1781046a0.

[85] R. Hanbury Brown et R. Q. Twiss. « Correlation between photons in two coherent beams of light ». In : *Nature* 177 (jan. 1956), p. 27–32. doi : 10.1038/177027a0.

[86] E. Hecht. *Optics.* Pearson Education. Addison-Wesley, 2002. isbn : 9780321188786.

[87] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland et C. Schönenberger. « The Fermionic Hanbury Brown and Twiss Experiment ». In : *Science* 284.5412 (1999), p. 296–298. doi : 10.1126/science.284.5412.296.

[88] P. P. Hofer et M. Büttiker. « Emission of time-bin entangled particles into helical edge states ». In : *Physical Review B* 88 (déc. 2013), p. 241308. doi : 10.1103/PhysRevB.88.241308.

[89] M. J. Holland et K. Burnett. « Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit ». In : *Phys. Rev. Lett.* 71 (août 1993), p. 1355–1358. doi : 10.1103/PhysRevLett.71.1355.

[90] C. K. Hong, Z. Y. Ou et L. Mandel. « Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference ». In : *Physical Review Letters* 59 (nov. 1987), p. 2044–2046. doi : 10.1103/PhysRevLett.59.2044.

[91] S. Houard. *Optique : une approche expérimentale et pratique.* de Boeck, 2011. isbn : 978-2-8041-6339-6.

[92] C. Huygens. *Traité de la lumière. Où sont expliquées les causes de ce qui lui arrive dans la réflexion et dans la réfraction et particulièrement dans l'étrange réfraction du cristal d'Islande.* Sous la dir. de Pierre Vander Aa. Université de Gand, 1690. URL : http://books.google.fr/books?id=No8PAAAAQAAJ.

[93] P.-A. Huynh, F. Portier, H. Le Sueur, G. Faini, U. Gennser, D. Mailly, F. Pierre, W. Wegscheider et P. Roche. « Quantum Coherence Engineering in the Integer Quantum Hall Regime ». In : *Physical Review Letters* 108 (juin 2012), p. 256802. DOI : 10.1103/PhysRevLett.108.256802.

[94] H. Inoue, A. Grivnin, N. Ofek, I. Neder, M. Heiblum, V. Umansky et D. Mahalu. « Charge Fractionalization in the Integer Quantum Hall Effect ». In : *Physical Review Letters* 112 (16 avr. 2014), p. 166801. DOI : 10.1103/PhysRevLett.112.166801.

[95] R. Ionicioiu, G. Amaratunga et F. Udrea. « Quantum computation with ballistic electrons ». In : *International Journal of Modern Physics B* 15.02 (2001), p. 125–133. DOI : 10.1142/S0217979201003521.

[96] D. A. Ivanov, H. Lee et L. S. Levitov. « Coherent states of alternating current ». In : *Physical Review B* 56 (sept. 1997), p. 6839–6850. DOI : 10.1103/PhysRevB.56.6839.

[97] E. Iyoda, T. Kato, K. Koshino et T. Martin. « Dephasing in single-electron generation due to environmental noise probed by Hong-Ou-Mandel interferometry ». In : *Physical Review B* 89 (mai 2014), p. 205318. DOI : 10.1103/PhysRevB.89.205318.

[98] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics.* 3e éd. John Wiley & Sons, 1999. ISBN : 0-471-30932-X.

[99] J. B. Johnson. « Thermal Agitation of Electricity in Conductors ». In : *Physical Review* 32 (juil. 1928), p. 97–109. DOI : 10.1103/PhysRev.32.97.

[100] T. Jullien, P. Roulleau, B. Roche, A. Cavanna, Y. Jin et D. C. Glattli. « Quantum tomography of an electron ». In : *Nature* 514 (oct. 2014), p. 603–607. DOI : doi:10.1038/nature13821.

[101] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling et G. J. Milburn. « Linear optical quantum computing with photonic qubits ». In : *Review of Modern Physics* 79 (jan. 2007), p. 135–174. DOI : 10.1103/RevModPhys.79.135.

[102] R. Landauer. « The noise is the signal ». In : *Nature* 392 (avr. 1998), p. 659. DOI : 10.1038/33551.

[103] I. A. Larkin et J. H. Davies. « Edge of the two-dimensional electron gas in a gated heterostructure ». In : *Physical Review B* 52 (août 1995), R5535–R5538. DOI : 10.1103/PhysRevB.52.R5535.

[104] M. Le Bellac. *Physique quantique.* 2e éd. Savoirs actuels. EDP sciences, 2007. ISBN : 978-2868839985.

[105] H. Le Sueur, C. Altimiras, U. Gennser, A. Cavanna, D. Mailly et F. Pierre. « Energy Relaxation in the Integer Quantum Hall Regime ». In : *Physical Review Letters* 105 (juil. 2010), p. 056803. DOI : 10.1103/PhysRevLett.105.056803.

[106] H. C. Lee et S.-R. Eric Yang. « Spin–charge separation in quantum Hall edge liquids ». In : *Physical Review B* 56 (déc. 1997), R15529–R15532. DOI : 10.1103/PhysRevB.56.R15529.

[107] G. B. Lesovik, A. V. Lebedev et G. Blatter. « Wave function collapse in a mesoscopic device ». In : *Phys. Rev. B* 71 (mar. 2005), p. 125313. DOI : 10.1103/PhysRevB.71.125313.

[108] L. S. Levitov, H. Lee et G. B. Lesovik. « Electron counting statistics and coherent states of electric current ». In : *Journal of Mathematical Physics* 37.10 (1996), p. 4845–4866. doi : http://dx.doi.org/10.1063/1.531672.

[109] I. P. Levkivskyi et E. V. Sukhorukov. « Dephasing in the electronic Mach-Zehnder interferometer at filling factor $\nu = 2$ ». In : *Physical Review B* 78 (juil. 2008), p. 045322. doi : 10.1103/PhysRevB.78.045322.

[110] L. V. Litvin, H.-P. Tranitz, W. Wegscheider et C. Strunk. « Decoherence and single electron charging in an electronic Mach-Zehnder interferometer ». In : *Physical Review B* 75 (jan. 2007), p. 033315. doi : 10.1103/PhysRevB.75.033315.

[111] R. Lopes, A. Imanaliev, A. Aspect, M. Cheneau, D. Boiron et C. I. Westbrook. « Atomic Hong–Ou–Mandel experiment ». In : *Nature* 520 (avr. 2015), p. 66–68. doi : 10.1038/nature14331.

[112] L. G. Lutterbach et L. Davidovich. « Method for Direct Measurement of the Wigner Function in Cavity QED and Ion Traps ». In : *Physical Review Letters* 78 (mar. 1997), p. 2547–2550. doi : 10.1103/PhysRevLett.78.2547.

[113] A. I. Lvovsky et M. G. Raymer. « Continuous-variable optical quantum-state tomography ». In : *Reviews of Modern Physics* 81 (mar. 2009), p. 299–332. doi : 10.1103/RevModPhys.81.299.

[114] L. Mach. « Über einen Interferenzrefraktor ». In : *Zeitschrift für Instrumentenkunde* 12 (1892), p. 89–93.

[115] G. Magyar et L. Mandel. « Interference fringes produced by superposition of two independent maser light beams ». In : *Nature* 198 (1963), p. 255.

[116] A. Mahé. « Bruit de charge d'une source d'électrons uniques subnanoseconde ». Thèse de doct. École Normale Supérieure de Paris et Université Pierre et Marie Curie - Parix VI, nov. 2009.

[117] A. Mahé, F. D. Parmentier, E. Bocquillon, J.-M. Berroir, D. C. Glattli, T. Kontos, B. Plaçais, G. Fève, A. Cavanna et Y. Jin. « Current correlations of an on-demand single-electron emitter ». In : *Physical Review B* 82 (20 nov. 2010), p. 201309. doi : 10.1103/PhysRevB.82.201309.

[118] A. Mahé, F. D. Parmentier, G. Fève, J.-M. Berroir, T. Kontos, A. Cavanna, B. Étienne, Y. Jin, D. C. Glattli et B. Plaçais. « Subnanosecond Single Electron Source in the Time-Domain ». In : *Journal of Low Temperature Physics* 153.5-6 (2008), p. 339–349. issn : 0022-2291. doi : 10.1007/s10909-008-9839-x.

[119] L. Mandel et E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. isbn : 9780521417112.

[120] A. Marguerite. « Interférences à deux électrons ». Rapport de stage de M2, École Normale Supérieure de Lyon. Stage réalisé au laboratoire Pierre Aigrain, École Normale Supérieure de Paris. Juil. 2013. url : http://www.ens-lyon.fr/DSM/SDMsite/M2/stages_M2/Marguerite2013.pdf.

[121] T. Martin et R. Landauer. « Wave-packet approach to noise in multichannel mesoscopic systems ». In : *Physical Review B* 45 (jan. 1992), p. 1742–1755. doi : 10.1103/PhysRevB.45.1742.

[122] P. Maunz, D. L. Moehring, S. Olmschenk, K. C. Younge, D. N. Matsukevich et C. Monroe. « Quantum interference of photon pairs from two remote trapped atomic ions ». In : *Nature Physics* 3 (juin 2007), p. 538–541. doi : 10.1038/nphys644.

[123] C. McDonagh, C.S. Burke et B.D. MacCraith. « Optical Chemical Sensors ». In : *Chemical Reviews* 108.2 (2008), p. 400–422. doi : 10.1021/cr068102g.

[124] M. Moskalets. « Two-electron state from the Floquet scattering matrix perspective ». In : *Physical Review B* 89 (jan. 2014), p. 045402. doi : 10.1103/PhysRevB.89.045402.

[125] M. Moskalets et M. Büttiker. « Floquet scattering theory of quantum pumps ». In : *Phys. Rev. B* 66 (nov. 2002), p. 205320. doi : 10.1103/PhysRevB.66.205320.

[126] M. Moskalets et M. Büttiker. « Time-resolved noise of adiabatic quantum pumps ». In : *Physical Review B* 75 (jan. 2007), p. 035315. doi : 10.1103/PhysRevB.75.035315.

[127] M. Moskalets et M. Büttiker. « Spectroscopy of electron flows with single- and two-particle emitters ». In : *Physical Review B* 83 (jan. 2011), p. 035316. doi : 10.1103/PhysRevB.83.035316.

[128] I. Neder. « Fractionalization Noise in Edge Channels of Integer Quantum Hall States ». In : *Physical Review Letters* 108 (mai 2012), p. 186404. doi : 10.1103/PhysRevLett.108.186404.

[129] I. Neder, F. Marquardt, M. Heiblum, D. Mahalu et V. Umansky. « Interference between two indistinguishable electrons from independent sources ». In : *Nature Physics* 3 (juin 2007), p. 534–537. doi : 10.1038/nphys627.

[130] I. Neder, N. Ofek, Y. Chung, M. Heiblum, D. Mahalu et V. Umansky. « Interference between two indistinguishable electrons from independent sources ». In : *Nature* 448 (mai 2007), p. 333–337. doi : 10.1038/nature05955.

[131] R. J. Nicholas, R. J. Haug, K. von Klitzing et G. Weimann. « Exchange enhancement of the spin splitting in a GaAs-$Ga_xAl_{1-x}As$ heterojunction ». In : *Physical Review B* 37 (jan. 1988), p. 1294–1302. doi : 10.1103/PhysRevB.37.1294.

[132] S. E. Nigg et M. Büttiker. « Quantum to classical transition of the charge relaxation resistance of a mesoscopic capacitor ». In : *Physical Review B* 77 (fév. 2008), p. 085312. doi : 10.1103/PhysRevB.77.085312.

[133] H. Nyquist. « Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors ». In : *Physical Review* 32 (juil. 1928), p. 110–113. doi : 10.1103/PhysRev.32.110.

[134] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu et Y. Yamamoto. « Hanbury Brown and Twiss-Type Experiment with Electrons ». In : *Science* 284.5412 (1999), p. 299–301. doi : 10.1126/science.284.5412.299.

[135] M. Orszag. *Quantum Optics – Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. isbn : 9783540727071.

[136] F. D. Parmentier. « Short-time Hanbury-Brown and Twiss correlation of a single-electron beam in ballistic conductors ». Thèse de doct. École Normale Supérieure de Paris et Université Pierre et Marie Curie - Parix VI, oct. 2010.

[137] F. D. Parmentier, E. Bocquillon, J.-M. Berroir, D. C. Glattli, B. Plaçais, G. Fève, M. Albert, C. Flindt et M. Büttiker. « Current noise spectrum of a single-particle emitter : Theory and experiment ». In : *Physical Review B* 85 (avr. 2012), p. 165438. doi : 10.1103/PhysRevB.85.165438.

[138] F. D. Parmentier, A. Mahé, A. Denis, J.-M. Berroir, D. C. Glattli, B. Plaçais et G. Fève. « A high sensitivity ultralow temperature RF conductance and noise measurement setup ». In : *Review of Scientific Instruments* 82 (jan. 2011), p. 013904. doi : 10.1063/1.3518945.

[139] M. H. Pedersen et M. Büttiker. « Scattering theory of photon-assisted electron transport ». In : *Physical Review B* 58 (nov. 1998), p. 12993–13006. doi : 10.1103/PhysRevB.58.12993.

[140] G. Pietryk, éd. *Panorama de la physique*. 2e éd. Belin, déc. 2012. isbn : 2701165008.

[141] E. M. Purcell. « The Question of Correlation between Photons in Coherent Light Rays ». In : *Nature* 178 (déc. 1956), p. 1449–1450. doi : 10.1038/1781449a0.

[142] G. Ribordy, J. Brendel, J.-D. Gautier, N. Gisin et H. Zbinden. « Long-distance entanglement-based quantum key distribution ». In : *Physical Review A* 63 (déc. 2000), p. 012309. doi : 10.1103/PhysRevA.63.012309.

[143] G. Rosselló, F. Battista, M. Moskalets et J. Splettstösser. « Interference and multiparticle effects in a Mach-Zehnder interferometer with single-particle sources ». In : *Physical Review B* 91 (mar. 2015), p. 115438. doi : 10.1103/PhysRevB.91.115438.

[144] P. Roulleau. « Quantum coherence in the integer quantum Hall regime ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, nov. 2008. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00348151.

[145] P. Roulleau, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, G. Faini, U. Gennser et D. Mailly. « Direct Measurement of the Coherence Length of Edge States in the Integer Quantum Hall Regime ». In : *Physical Review Letters* 100 (mar. 2008), p. 126802. doi : 10.1103/PhysRevLett.100.126802.

[146] P. Roulleau, F. Portier, P. Roche, A. Cavanna, G. Faini, U. Gennser et D. Mailly. « Tuning Decoherence with a Voltage Probe ». In : *Physical Review Letters* 102 (juin 2009), p. 236802. doi : 10.1103/PhysRevLett.102.236802.

[147] B. Roussel. « Vie et mort des excitations monoélectroniques dans un conducteur quantique ». Rapport de stage de M1, École Normale Supérieure de Lyon. Stage réalisé au laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon. Juil. 2013.

[148] V. S. Rychkov, M. L. Polianski et M. Büttiker. « Photon-assisted electron-hole shot noise in multiterminal conductors ». In : *Physical Review B* 72 (oct. 2005), p. 155326. doi : 10.1103/PhysRevB.72.155326.

[149] I. Safi. « A dynamic scattering approach for a gated interacting wire ». In : *The European Physical Journal B* 12.3 (1999), p. 451–455. issn : 1434-6028. doi : 10.1007/s100510051026.

[150] I. Safi. « Time-dependent Transport in arbitrary extended driven tunnel junctions ». In : *ArXiv e-prints* (jan. 2014). arXiv : 1401.5950.

[151] I. Safi et P. Joyez. « Time-dependent theory of non-linear response and current fluctuations ». In : *Physical Review B* 84 (nov. 2011), p. 205129. doi : 10.1103/PhysRevB.84.205129.

[152] I. Safi et H. J. Schulz. « Transport in an inhomogeneous interacting one-dimensional system ». In : *Physical Review B* 52 (24 déc. 1995), R17040–R17043. doi : 10.1103/PhysRevB.52.R17040.

[153] I. Safi et H. J. Schulz. « Transport Through a Single-Band Wire Connected to Measuring Leads ». In : *Quantum Transport in Semiconductor Submicron Structures*. Sous la dir. de Bernhard Kramer. T. 326. NATO ASI Series. Springer Netherlands, 1996, p. 159–172. isbn : 978-94-010-7287-8. doi : 10.1007/978-94-009-1760-6_6.

[154] P. Samuelsson et M. Büttiker. « Dynamic generation of orbital quasiparticle entanglement in mesoscopic conductors ». In : *Physical Review B* 71 (24 juin 2005), p. 245317. doi : 10.1103/PhysRevB.71.245317.

[155] P. Samuelsson et M. Büttiker. « Quantum state tomography with quantum shot noise ». In : *Physical Review B* 73 (jan. 2006), p. 041305. doi : 10.1103/PhysRevB.73.041305.

[156] P. Samuelsson, E. V. Sukhorukov et M. Büttiker. « Orbital Entanglement and Violation of Bell Inequalities in Mesoscopic Conductors ». In : *Physical Review Letters* 91 (oct. 2003), p. 157002. doi : 10.1103/PhysRevLett.91.157002.

[157] P. Samuelsson, E. V. Sukhorukov et M. Büttiker. « Two-Particle Aharonov-Bohm Effect and Entanglement in the Electronic Hanbury Brown–Twiss Setup ». In : *Physical Review Letters* 92 (jan. 2004), p. 026805. doi : 10.1103/PhysRevLett.92.026805.

[158] C. Santori, D. Fattal, J. Vuckovic, G. S. Solomon et Y. Yamamoto. « Indistinguishable photons from a single-photon device ». In : *Nature* 419 (oct. 2002), p. 594–597. doi : 10.1038/nature01086.

[159] V. Scarani, N. Gisin et S. Popescu. « Proposal for Energy-Time Entanglement of Quasiparticles in a Solid-State Device ». In : *Physical Review Letters* 92 (avr. 2004), p. 167901. doi : 10.1103/PhysRevLett.92.167901.

[160] R. Schuster, E. Buks, M. Heiblum, D. Mahalu, V. Umansky et H. Shtrikman. « Phase measurement in a quantum dot via a double-slit interference experiment ». In : *Nature* 385 (jan. 1997), p. 417–420. doi : 10.1038/385417a0.

[161] A. V. Shytov. « Structured energy distribution and coherent ac transport in mesoscopic wires ». In : *Physical Review B* 71 (fév. 2005), p. 085301. doi : 10.1103/PhysRevB.71.085301.

[162] A. O. Slobodeniuk, I. P. Levkivskyi et E. V. Sukhorukov. « Equilibration of quantum Hall edge states by an Ohmic contact ». In : *Physical Review B* 88 (oct. 2013), p. 165307. doi : 10.1103/PhysRevB.88.165307.

[163] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer et A. Faridani. « Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography : Application to squeezed states and the vacuum ». In : *Physical Review Letters* 70 (mar. 1993), p. 1244–1247. doi : 10.1103/PhysRevLett.70.1244.

[164] J. Splettstösser, M. Moskalets et M. Büttiker. « Two-Particle Nonlocal Aharonov Bohm Effect from Two Single-Particle Emitters ». In : *Physical Review Letters* 103 (7 août 2009), p. 076804. doi : 10.1103/PhysRevLett.103.076804.

[165] R. Taillet. *Optique physique*. de Boeck, 2006. isbn : 978-2-8041-5036-5.

[166] J.-S. Tanzilli. « Optique intégrée pour les communications quantiques ». Thèse de doct. Université de Nice–Sophia Antipolis, fév. 2002. url : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008814.

[167] R. T. Thew, S. Tanzilli, W. Tittel, H. Zbinden et N. Gisin. « Experimental investigation of the robustness of partially entangled qubits over 11 km ». In : *Physical Review A* 66 (6 déc. 2002), p. 062304. doi : 10.1103/PhysRevA.66.062304.

[168] K. Thibault, J. Gabelli, C. Lupien et B. Reulet. « Pauli-Heisenberg Oscillations in Electron Quantum Transport ». In : *Physical Review Letters* 114 (juin 2015), p. 236604. doi : 10.1103/PhysRevLett.114.236604.

[169] É. Thibierge, D. Ferraro, B. Roussel, C. Cabart, A. Marguerite, G. Fève et P. Degiovanni. « Two-electron coherence and time-bin entanglement detection in electron quantum optics ». Pre-print arXiv:1503.07446. Mar. 2015. url : http://arxiv.org/pdf/1503.07446.pdf.

[170] P. K. Tien et J. P. Gordon. « Multiphoton Process Observed in the Interaction of Microwave Fields with the Tunneling between Superconductor Films ». In : *Physical Review* 129 (jan. 1963), p. 647–651. doi : 10.1103/PhysRev.129.647.

[171] W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden et N. Gisin. « Experimental demonstration of quantum correlations over more than 10 km ». In : *Physical Review A* 57 (mai 1998), p. 3229–3232. doi : 10.1103/PhysRevA.57.3229.

[172] V. Tsemekhman, K. Tsemekhman, C. Wexler, J. H. Han et D. J. Thouless. « Theory of the breakdown of the quantum Hall effect ». In : *Physical Review B* 55 (avr. 1997), R10201–R10204. doi : 10.1103/PhysRevB.55.R10201.

[173] P. H. van Cittert. « Die Wahrscheinliche Schwingungsverteilung in Einer von Einer Lichtquelle Direkt Oder Mittels Einer Linse Beleuchteten Ebene ». In : *Physica* 1 (1934), p. 201–210. doi : 10.1016/S0031-8914(34)90026-4.

[174] B. J. van Wees, L. P. Kouwenhoven, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. E. Mooij, C. T. Foxon et J. J. Harris. « Quantized conductance of magnetoelectric subbands in ballistic point contacts ». In : *Physical Review B* 38 (août 1988), p. 3625–3627. doi : 10.1103/PhysRevB.38.3625.

[175] J. Ville. « Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique ». In : *Câbles et transmissions* 2 (1948), p. 61–74.

[176] K. von Klitzing, G. Dorda et M. Pepper. « New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance ». In : *Phys. Rev. Lett.* 45 (6 août 1980), p. 494–497. doi : 10.1103/PhysRevLett.45.494.

[177] C. Wahl, J. Rech, T. Jonckheere et T. Martin. « Interactions and Charge Fractionalization in an Electronic Hong-Ou-Mandel Interferometer ». In : *Physical Review Letters* 112 (jan. 2014), p. 046802. doi : 10.1103/PhysRevLett.112.046802.

[178] Y. Y. Wei, J. Weis, K. von Klitzing et K. Eberl. « Edge Strips in the Quantum Hall Regime Imaged by a Single-Electron Transistor ». In : *Physical Review Letters* 81 (août 1998), p. 1674–1677. doi : 10.1103/PhysRevLett.81.1674.

[179] E. Wigner. « On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium ». In : *Physical Review* 40 (juin 1932), p. 749–759. doi : 10.1103/PhysRev.40.749.

[180] J. Yang, C. Yunchul, D. Sprinzak, M. Heiblum, D. Mahalu et H. Shtrikman. « An electronic Mach–Zehnder ». In : *Nature* 422 (mar. 2003), p. 415–418. doi : doi : 10.1038/nature01503.

[181] T. Young. *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts*. 1804. doi : 10.5962/bhl.title.22458. url : http://www.biodiversitylibrary.org/item/63005.

[182] E. Zakka-Bajjani, J. Dufouleur, N. Coulombel, P. Roche, D. C. Glattli et F. Portier. « Experimental Determination of the Statistics of Photons Emitted by a Tunnel Junction ». In : *Physical Review Letters* 104 (mai 2010), p. 206802. doi : 10.1103/PhysRevLett.104.206802.

[183] E. Zakka-Bajjani, J. Ségala, F. Portier, P. Roche, D. C. Glattli, A. Cavanna et Y. Jin. « Experimental Test of the High-Frequency Quantum Shot Noise Theory in a Quantum Point Contact ». In : *Physical Review Letters* 99 (déc. 2007), p. 236803. doi : 10.1103/PhysRevLett.99.236803.

[184] L. Zehnder. « Ein neuer Interferenzrefraktor ». In : *Zeitschrift für Instrumentenkunde* 11 (1891), p. 275–285.

[185] F. Zernike. « The concept of degree of coherence and its application to optical problems ». In : *Physica* 5 (août 1938), p. 785–795. DOI : 10.1016/S0031-8914(38)80203-2.

Résumé

Cette thèse se place dans le domaine du transport quantique cohérent, et vise à développer un formalisme adapté à la modélisation d'expériences réalisées dans les canaux de bord de l'effet Hall quantique entier. Ce formalisme repose sur les analogies entre ces expériences et celles de l'optique quantique photonique. Le manuscrit commence donc par préciser ce contexte en proposant un tour d'horizon des enjeux, des outils et des succès de l'optique quantique électronique.

La première partie du travail traite des propriétés de cohérence mono-électronique et introduit la notion clé d'excès de cohérence à un électron. Plusieurs représentations sont proposées et analysées, permettant d'accéder aux informations physiques contenues dans la fonction de cohérence. Les états émis par des sources à électrons utilisées par plusieurs groupes expérimentaux sont ensuite analysés sous cet angle.

Les effets à deux électrons sont au cœur de la seconde partie. L'excès de cohérence à deux électrons est défini en prenant en compte les effets de corrélation classique et d'échange quantique. Les conséquences de l'anti-symétrie fermionique sont également analysées en détail, montrant une redondance dans les informations encodées dans la cohérence à deux électrons. Enfin, un degré de cohérence normalisé est introduit pour étudier plus directement les effets d'indiscernabilité et d'anti-bunching.

La mesure et la manipulation de la cohérence électronique par interférométrie sont abordées dans la troisième partie. Dans un premier temps, le lien entre les fonctions de cohérence électronique et les quantités directement accessibles dans les expériences est établi, ce qui justifie le besoin de protocoles plus complexes. La mesure d'excès de cohérence à un électron est alors envisagée par interférométrie Mach–Zehnder à un électron, puis par interférométrie Hong–Ou–Mandel à deux électrons, ce qui suggère une interprétation plus simple d'un protocole de tomographie électronique établi en 2011. Un protocole de mesure de l'excès de cohérence à deux électrons est ensuite proposé par interférométrie de type Franson, étendant les idées relatives à la mesure de cohérence à un électron par un interféromètre de Mach–Zehnder. Enfin, une vision complémentaire est apportée sur l'interféromètre de Franson, en utilisant celui-ci cette fois pour générer une cohérence à deux électrons non locale.

Mots clés

Transport quantique cohérent, optique quantique, cohérence quantique, statistique fermionique, interférences à un électron, interférences à deux électrons.