



HAL
open science

Algèbres de Clifford conformes et orbites de points de vue d'images

Ghina El Mir

► **To cite this version:**

Ghina El Mir. Algèbres de Clifford conformes et orbites de points de vue d'images. Mathématiques générales [math.GM]. Université de La Rochelle, 2014. Français. NNT: 2014LAROS013. tel-01175003

HAL Id: tel-01175003

<https://theses.hal.science/tel-01175003>

Submitted on 10 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

ÉCOLE DOCTORALE S2IM

LABORATOIRE : Mathématiques, Image et Applications

THÈSE présentée par :

Ghina EL MIR

soutenue le : **09 Juillet 2014**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de La Rochelle**

Discipline : **Mathématiques et applications**

**Algèbres de Clifford conformes et orbites de points
de vue d'images**

JURY :

Jesús ANGULO

Chargé de Recherche HDR, École des MINES Paris-Tech, *Rapporteur*

Georges HABIB

Professeur, Université Libanaise, Fanar-Matn
Rapporteur

Romain GICQUAUD

Maître de Conférences, Université François Rabelais de Tours, *Examineur*

Philippe CARRÉ

Professeur, Université de Poitiers
Examineur

Michel BERTHIER

Professeur, Université de La Rochelle
Directeur de thèse

Christophe SAINT-JEAN

Maître de Conférences, Université de La Rochelle
Co-directeur de thèse

**ALGÈBRES DE CLIFFORD
CONFORMES ET ORBITES DE
POINTS DE VUE D'IMAGES**



Thèse préparée au
Laboratoire Mathématiques, Image et Applications
(EA 3165)
Université de La Rochelle
17 042 La Rochelle CEDEX
France

**ALGÈBRES DE CLIFFORD CONFORMES ET
ORBITES DE POINTS DE VUE D'IMAGES**

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	9
1. Introduction	11
1.1. Le contexte de la thèse.....	11
1.2. Un rapide survol de différents modèles géométriques.....	13
1.3. Les travaux de la thèse.....	20
2. Algèbres de Clifford et modèles conformes	31
2.1. Algèbres de Clifford.....	31
2.2. Les Modèles conformes.....	35
3. Modélisations dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$	47
3.1. Le modèle sténopé de caméra.....	47
3.2. Le modèle conforme de la caméra sténopée.....	52
3.3. Le groupe des changements de points de vue.....	56
4. Modélisations dans l'espace (\mathbb{R}^4, Q_β)	65
4.1. La représentation des images et des points de vue.....	65
4.2. Le groupoïde des changements de points de vue.....	68
4.3. Approche 1 versus approche 2.....	71
5. Conclusion et Perspectives	73
5.1. Conclusion.....	73
5.2. Perspectives.....	74
Bibliographie	77

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier Michel Berthier pour m'avoir offert l'opportunité de préparer une thèse dans un domaine qui me motivait depuis le master. Je le remercie également pour ses idées pertinentes qui ont permis d'améliorer significativement la thèse ainsi que pour l'effort qu'il a déployé pour bien présenter ce travail.

Je remercie aussi Christophe Saint-Jean d'être intervenu dans l'encadrement de la thèse, pour son attention à l'égard de l'avancement et du bon déroulement de la thèse et pour ses nombreux conseils tout au long de ces années de thèse.

Je tiens à remercier Jesús Angulo et Georges Habib d'avoir accepté de rapporter la thèse et d'avoir rédigé des rapports synthétiques et précis. Un grand merci aux examinateurs Philippe Carré et Romain Gicquaud pour avoir accepté de faire partie du jury, avec une attention particulière à Romain pour son soutien et pour les conversations enrichissantes qu'on a eues.

J'exprime aussi ma gratitude envers les membres du laboratoire MIA, tout particulièrement Cathy, Sylvianne et les doctorants (et ex-doctorants) du MIA qui ont partagé mon quotidien et avec qui j'ai pu passer de bons moments inoubliables à La Rochelle: Moussa, Cyrille, Charles, Andrews, Caroline, Saad et José.. Merci aux doctorants du laboratoire L3i avec lesquels j'ai partagé les soucis et les difficultés de la thèse: Dounia, Marcela, Sophea, Elodie, Maroua, Rouaa, Christophe et Audrey..

Je remercie mes copines du Liban qui m'ont soutenue de loin, tout particulièrement Rihame et sa fille Chiro.

Je n'oublierais certainement pas de remercier Mustapha Jazar qui a cru en moi depuis la licence et m'a toujours motivée pour aller loin dans mes études.

Sans doute l'extrême reconnaissance va envers mes parents et mon grand frère Chady, pour leur soutien, leur encouragement, l'aide qu'il m'ont apportée tout au long de mes études, leurs conseils, leur confiance et leur amour.

Je finis par remercier le petit bout de chou Gaspard et ma petite Cookie caline pour l'affection que j'ai ressentie à leurs côtés :)

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Le contexte de la thèse

Le problème sous-jacent auquel on s'intéresse dans cette thèse est celui de la mise en correspondance d'objets présents dans des images obtenues selon différents points de vue d'une même scène. Ce type d'appariement est au coeur d'un bon nombre de problématiques en vision par ordinateur, comme la reconstruction 3D, le suivi d'objets ou la détection de cibles... D'un point de vue heuristique, il s'agit essentiellement de comprendre comment détecter les informations qui sont invariantes par changements de points de vue.

La démarche que l'on adopte ici est par nature géométrique. Elle consiste d'abord à avoir une bonne représentation en tant qu'espace de l'ensemble des points de vue que l'on peut avoir d'une même scène. Dans ce qui suit, une scène est observée à l'aide d'une caméra sténopée ("pinhole camera"). L'ensemble des paramètres extrinsèques de cette caméra permet de décrire l'ensemble des points de vue associés à la scène. Parmi ces paramètres (voir le chapitre 3 pour une description précise), la latitude joue un rôle très particulier en tant que responsable des distorsions perspectives. Ces distorsions modifient significativement la forme des objets dans les images.

Les différentes transformations des paramètres de la caméra encodent les différents changements de points de vue. Ces derniers sont donc des transformations de l'espace précédent. D'un point de vue mathématique, on souhaite pouvoir décrire ces changements par une structure de groupe. Il y a au moins deux raisons à cela. La première est qu'une scène donnée peut être appréhendée comme une orbite sous l'action de ce groupe, avec éventuellement un élément privilégié (une forme normale) choisi par exemple comme image frontale. La seconde est liée à l'approche préconisée dans [46]. L'appariement d'images nécessite d'avoir recours à deux types de données : les détecteurs et les descripteurs. Les détecteurs repèrent des points particuliers dans les images (points d'intérêt) et les descripteurs associent des informations locales autour de ces points. Le point crucial consiste à obtenir des détecteurs et des descripteurs invariants par les opérations géométriques "naturelles" qui agissent sur les images. La théorie mathématique des groupes est un outil puissant dans ce contexte.

Plusieurs types de modélisations géométriques ont déjà été proposées utilisant la géométrie projective, la géométrie affine ou la géométrie conforme complexe (voir le paragraphe suivant pour un rapide survol). Ces géométries sont par essence “non linéaires”, ce qui complique les calculs ou les algorithmes. Une des idées clés de notre travail consiste à avoir une approche “aussi linéaire que possible” du problème.

Le parti pris que l’on adopte ici est celui de l’utilisation des algèbres de Clifford auxquelles nous consacrons le second chapitre de ce travail. Sans rentrer pour l’instant dans les détails, il s’agit de plonger un espace vectoriel muni d’une forme quadratique dans une algèbre (au sens mathématique du terme) dans laquelle on dispose des quatre opérations usuelles d’addition, de soustraction, de multiplication et de division (bien que tous les éléments non nuls ne soient pas forcément inversibles). L’outil de base est le produit dit géométrique entre deux vecteurs, qui en général est non commutatif. Les exemples les plus simples d’algèbres de Clifford sont le corps commutatif des nombres complexes et le corps non commutatif des quaternions.

Ces algèbres sont au cœur de certaines théories physiques suite notamment aux travaux de Dirac. Depuis la fin du siècle dernier elles sont de plus en plus utilisées que ce soit en traitement d’images (pour modéliser les espaces d’acquisition des images multicanaux) ou du signal (pour obtenir des généralisations monogènes du signal analytique) ou en robotique (pour le pilotage par exemple).

Ce qu’il faut retenir dans un premier temps, c’est que ce cadre mathématique permet d’encoder efficacement des transformations géométriques par des formules algébriques simples à l’instar de la formule qui décrit les rotations de l’espace à l’aide des quaternions de module 1.

L’utilisation que l’on fait dans ce travail des algèbres de Clifford diffère considérablement des approches “usuelles”. Il ne s’agit pas de modéliser les espaces d’acquisition d’images, mais de modéliser leurs domaines de définition, soit d’une certaine façon les points de vue que l’on peut avoir d’une scène. Pour cela, on se focalise sur un type particulier d’algèbres dites algèbres de Minkowski ou plus généralement algèbres de Clifford conformes. Bien que moins répandues dans la communauté de Computer Science, elles ont déjà fait l’objet de travaux en synthèse d’images par exemple (voir [17]).

Sans entrer encore une fois dans les détails (voir le chapitre 2), signalons simplement que le modèle conforme est en quelque sorte un linéarisé de l’homogénéisation classique du modèle projectif. Le plan euclidien se plonge dans un espace vectoriel de dimension 4 dont deux vecteurs codent l’origine et l’infini du plan. Ces deux vecteurs se distinguent par leur isotropie pour la métrique de Minkowski. L’image du plongement est une horosphère. En faisant varier les deux vecteurs isotropes, on obtient une famille de plongements du plan euclidien et donc d’horosphères qui représentent les différents points de vue d’une scène.

À l’aide de cette nouvelle représentation, nous obtenons une description des changements de points de vue en termes de groupes de transformations linéaires.

1.2. Un rapide survol de différents modèles géométriques

Les contributions à l'élaboration de modèles géométriques en vision sont très nombreuses : mentionnons pour exemples [19], [24], [31], [40], [41], [32], [18], [48], [49], [20], [33], [52] ou [43]... et les applications tout aussi nombreuses : de la reconstruction 3D de scènes jusqu'à la description des mécanismes neuronaux du cortex visuel... Certains de ces modèles ont naturellement permis de définir des détecteurs et des descripteurs invariants pour l'appariement d'images comme par exemple dans [52], [22] où les transformations considérées sont les transformations affines et les déplacements du plan.

Dans le contexte de notre étude, il est bon d'avoir en tête les constructions plus ou moins standard qui suivent.

1.2.1. Le plan projectif réel. — C'est le modèle par excellence qui permet de décrire la perspective. Le plan projectif réel $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ est l'espace quotient

$$(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathcal{R} \quad (1)$$

où la relation d'équivalence \mathcal{R} est définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, x = \lambda y \quad (2)$$

On note $\pi : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R}$ l'application passage au quotient et $[X : Y : Z]$ les coordonnées homogènes définies à multiplication par un scalaire non nul près, et telles qu'au moins un des X, Y ou Z est non nul. Les trois cartes affines de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ sont données par

$$\begin{aligned} \varphi_X : \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}_2\mathbb{R}, X \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_X([X : Y : Z]) &= (Y/X, Z/X) \\ \varphi_Y : \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}_2\mathbb{R}, Y \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_Y([X : Y : Z]) &= (X/Y, Z/Y) \\ \varphi_Z : \{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}_2\mathbb{R}, Z \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi_Z([X : Y : Z]) &= (X/Z, Y/Z) \end{aligned} \quad (3)$$

L'hyperplan à l'infini a pour équation $X = 0$ dans la carte φ_X , resp. $Y = 0$ dans la carte φ_Y et $Z = 0$ dans la carte φ_Z . Il apparaît donc que le plan projectif réel $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ est une variété de dimension deux. Cette variété est "loin" d'être un espace vectoriel ; en particulier, elle n'est pas orientable (car obtenue en recollant un disque et un ruban de Möbius suivant leur bord). Les calculs se font en passant systématiquement par les cartes affines.

Toute transformation linéaire A du groupe $GL(3, \mathbb{R})$ des transformations linéaires de \mathbb{R}^3 induit une transformation \tilde{A} du plan projectif par la formule : $\tilde{A}(\pi(x)) = \pi(A(x))$ (bien définie car $\pi(x) = \pi(y)$ implique que $A(x)\mathcal{R}A(y)$). En remarquant que les transformations A et λA (pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$) induisent les mêmes transformations du plan projectif, on définit le groupe des homographies de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ (ou groupe projectif) comme étant le quotient $PGL(3, \mathbb{R})$ du groupe $GL(3, \mathbb{R})$ par la relation d'équivalence \mathcal{R} .

Une des raisons qui motivent l'utilisation de ces homographies en vision par ordinateur est que ces dernières préservent l'alignement. Ceci signifie précisément que l'image d'une droite projective du plan projectif par une homographie est une droite projective. Dans

$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, ce sont les seules bijections qui préservent l'alignement. Pour plus de détails on pourra consulter [32], [24] et [9].

1.2.2. La caméra sténopée. — C'est le modèle le plus basique et le plus utilisé en vision par ordinateur depuis des années. La géométrie dans laquelle il est décrit est précisément celle du plan projectif réel $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Voici les grandes lignes, nous reviendrons plus en détails sur ce modèle dans le chapitre 3.

Il s'agit essentiellement de décrire la projection perspective qui par définition envoie un point du plan de l'objet sur le plan image (voir Fig. 1). Les points du plan de l'objet

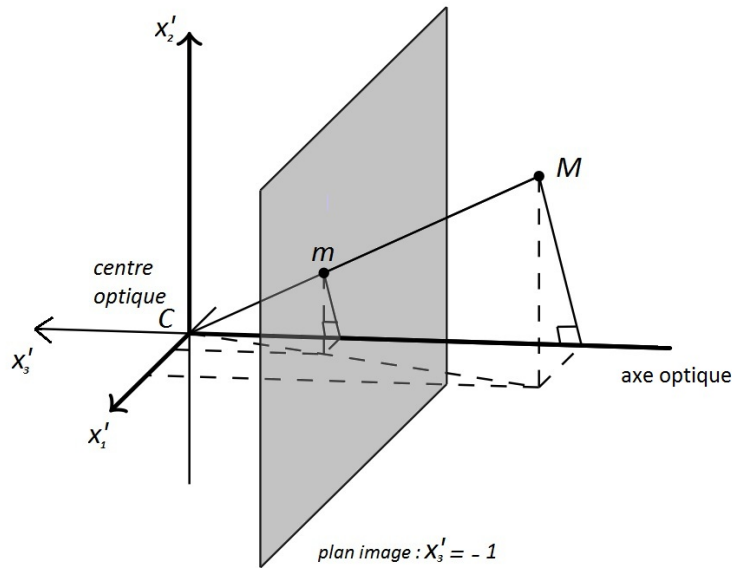


FIGURE 1. Projection perspective d'un point M de l'espace sur le plan image d'équation $x'_3 = -1$.

sont exprimés dans un premier repère de l'espace \mathbb{R}^3 noté (O, x_1, x_2, x_3) . À la caméra est associé un second repère (C, x'_1, x'_2, x'_3) de \mathbb{R}^3 dont l'origine C est le centre optique de la caméra. Ces deux repères sont reliés par une isométrie de \mathbb{R}^3 qui est la composée d'une rotation et d'une translation et qui est paramétrée par les 6 paramètres extrinsèques de la caméra.

À un point M du plan de l'objet on fait correspondre le point m du plan image intersection de ce dernier avec la droite (CM) (C est le centre optique de la caméra). La projection perspective est décrite par les coordonnées de m dans le plan image pour le repère de la caméra.

Le modèle projectif permet de formaliser les notions de points et lignes de fuite (voir Fig. 2). Considérons deux droites projectives réelles parallèles $d_1 \cup \{w\}$ and $d_2 \cup \{w\}$ contenues dans le plan projectif réel associé à l'objet, où d_1 et d_2 constituent deux droites affines de \mathbb{R}^2 et w est le point à l'infini qui représente leur direction commune. Les images de ces droites par l'homographie k_0 de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ qui relie le plan de l'objet et le

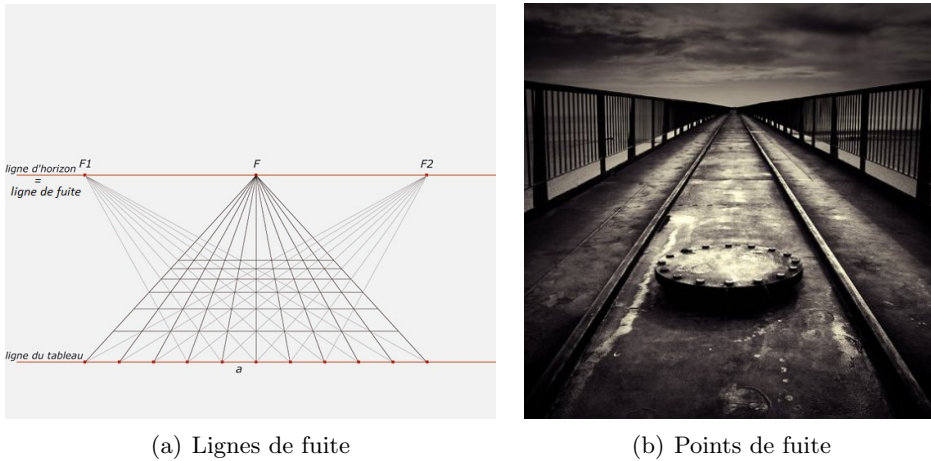


FIGURE 2. L'illustration des points et des lignes de fuites.

plan image (voir le chapitre 3 pour plus de détails) sont deux droites projectives $d'_1 \cup \{w_1\}$ et $d'_2 \cup \{w_2\}$. On vérifie que les droites affines correspondantes d'_1 et d'_2 sont parallèles dans le plan image \mathbb{R}^2 si et seulement si les droites affines d_1 et d_2 sont orthogonales à l'axe optique de la caméra. Ceci mène à la définition de point de fuite : dans le cas où les droites d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales à l'axe optique de la caméra, on appelle point de fuite le point d'intersection des droites d'_1 et d'_2 .

Chaque point de fuite représente donc une direction du plan de l'objet et l'ensemble des points de fuite est une droite affine du plan image dite ligne de fuite (voir Fig. 2). Cette dernière n'est autre que la droite d'intersection du plan image avec le plan parallèle au plan de l'objet et passant par le centre optique. C'est aussi l'image par k_0 de la droite à l'infini du plan projectif réel de l'objet. Deux droites dans le plan image qui se coupent dans la ligne de fuite correspondent à deux droites parallèles du plan de l'objet.

1.2.3. Images et géométrie projective réelle. — Si l'on se place dans le cadre de la géométrie projective réelle, il semble naturel de définir une image (en niveau de gris) par une application

$$I : D \subset \mathbb{P}_2\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (4)$$

où D est un domaine du plan projectif réel dans lequel se plonge le plan image. Le groupe des changements de points de vue est le groupe $PGL(3, \mathbb{R})$ des homographies de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Ce dernier modélise bien les distorsions perspectives de l'objet causées par les différents points de vue de la caméra. La figure 3 illustre l'action de l'homographie de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 \cos \pi/4 & -2 \sin \pi/4 & 1 \\ 2 \sin \pi/4 & 2 \cos \pi/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

L'utilisation de ce groupe pour la recherche d'invariants (détecteurs et descripteurs) par changement de points de vue n'est pas facile en général. Une façon de contourner la difficulté consiste à restreindre au plan affine (plan euclidien) \mathbb{R}^2 l'action du groupe

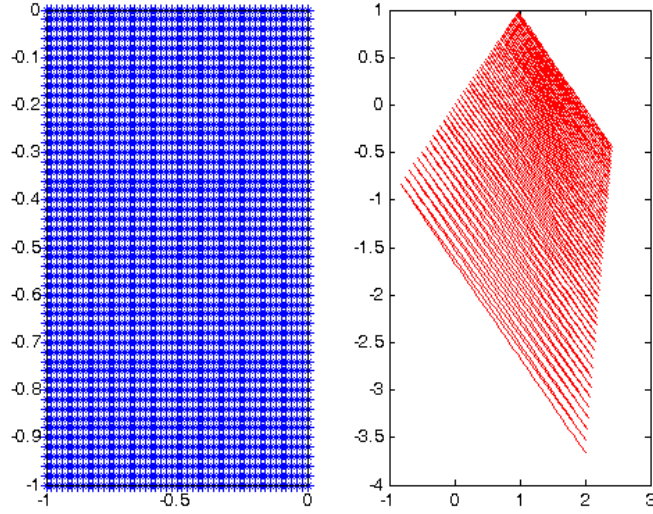


FIGURE 3. A gauche une grille de points. A droite son image par une homographie de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

des homographies du plan projectif $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$. Comme le sous-groupe des homographies qui laissent globalement invariant l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ est isomorphe (par restriction) au groupe affine $GA(\mathbb{R}^2)$ de \mathbb{R}^2 , une homographie de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ préserve le plan affine si et seulement si elle est réduite à une transformation affine de \mathbb{R}^2 .

1.2.4. Le modèle affine de la caméra. — Il s'agit donc en quelque sorte d'un modèle simplifié par rapport au modèle projectif décrit ci-dessus et dont on peut trouver des applications dans [52] ou [24] par exemple.

Comme expliqué précédemment, une transformation affine de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est la restriction à \mathbb{R}^2 d'une homographie de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ définie par une matrice 3×3 particulière, de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & t_1 \\ c & d & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Ce n'est autre que la composée d'une transformation linéaire de \mathbb{R}^2 et d'une translation. En particulier, le groupe $GA(\mathbb{R}^2)$ est de dimension 6, alors que le groupe $PGL(3, \mathbb{R})$ est de dimension 8. Il est bien connu que toute transformation affine de \mathbb{R}^2 transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles (voir Fig. 4).

Dans [52], les auteurs décrivent une image I d'un objet planaire à partir d'une image frontale I_0 de l'objet suivant la formule :

$$I \circ A = I_0, \quad (7)$$

où A est une tranformation affine (voir le chapitre 3 pour la définition d'image frontale d'un objet planaire). Ils justifient ce choix par le fait qu'une homographie de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ est localement approximée par une transformation affine de \mathbb{R}^2 , comme c'est illustré dans

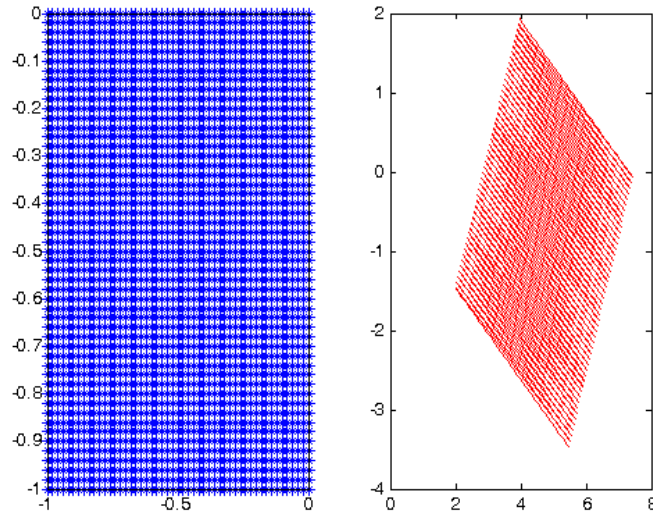


FIGURE 4. A droite l'image de la grille par une similitude affine composée d'une rotation d'angle $\pi/3$ (autour de l'origine), suivie d'une dilatation de rapport 4 (centré en l'origine) suivie d'une translation de vecteur $(4, 2)$.



FIGURE 5. Exemple d'approximation locale d'une homographie de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ par une transformation affine (extrait de [52]) : le sol est globalement déformé par une homographie mais localement, la déformation de chaque tuile est approximativement affine.

la figure 5. En effet, si k est une homographie, on obtient en appliquant la formule de Taylor Young à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
 k(x_1, x_2) &= \underbrace{k(a, b) + D_{(a,b)}k \cdot (x_1 - a, x_2 - b)}_{A(x_1, x_2)} + o(\|(x_1 - a, x_2 - b)\|) \\
 &= A(x_1, x_2) + o(\|(x_1 - a, x_2 - b)\|),
 \end{aligned} \tag{8}$$

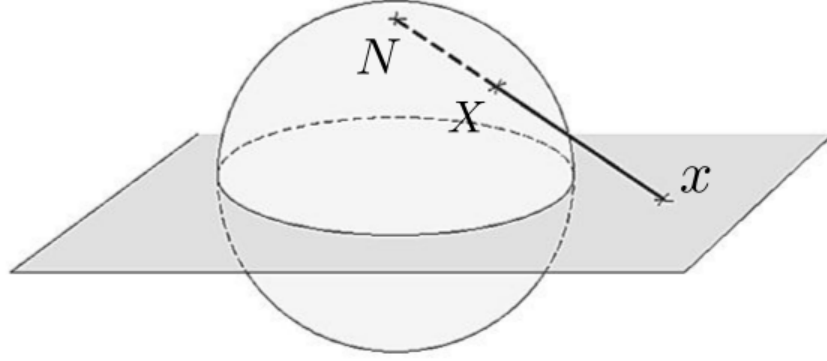


FIGURE 6. Projection stéréographique d'un point X de la sphère : c'est le point d'intersection du plan complexe avec la droite contenant X et passant par le pôle nord N .

où $D_{(a,b)}k$ est la différentielle de k en (a, b) . L'application affine A approxime donc bien k au voisinage du point (a, b) .

En restreignant les changements de points de vue aux transformations affines, c'est-à-dire en ne considérant que le seul groupe $GA(\mathbb{R}^2)$, les auteurs de [52] ont développé un algorithme appelé Affine-SIFT pour la recherche d'invariants par les transformations affines du plan. Cet algorithme est très sensible aux distorsions perspectives des objets : c'est le prix à payer pour ne pas prendre en compte l'ensemble du groupe $PGL(3, \mathbb{R})$.

1.2.5. Le modèle conforme complexe. — Il existe une alternative à l'approche précédente, c'est-à-dire à la compactification du plan euclidien par $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ et à l'utilisation du groupe $PGL(3, \mathbb{R})$ pour représenter les changements de points de vue. Dans ce paragraphe, on envisage la compactification : $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}_1\mathbb{C}$ et le groupe correspondant $PGL(2, \mathbb{C})$ (voir par exemple [48] et [49]). La droite projective complexe $\mathbb{P}_1\mathbb{C}$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ du plan \mathbb{R}^2 identifié à \mathbb{C} . Rappelons que ce compactifié peut être décrit simplement par la projection P dite stéréographique (voir Fig. 6) : l'image d'un point $X \neq N$ de la sphère S^2 (N étant le pôle nord) est l'unique point d'intersection x de la droite (NX) avec le plan. Pour calculer explicitement P^{-1} , on considère un point $x = (x_1, x_2, 0)$ et on cherche le point sur la droite $\{\lambda x + (1 - \lambda)N\}$ qui appartient à la sphère. On obtient facilement :

$$P^{-1} : x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(x_1e_1 + x_2e_2) + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}e_3. \quad (9)$$

En passant à la limite lorsque la norme de x tend vers l'infini, on constate que $P^{-1}(\infty) = N$.

La droite projective complexe $\mathbb{P}_1\mathbb{C} = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathcal{R}$ est une variété complexe de dimension 1 dont les cartes sont données par :

$$\begin{aligned}\varphi_X : \{[X : Y] \in \mathbb{P}_1\mathbb{C}, X \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_X([X : Y]) &= (Y/X) \\ \varphi_Y : \{[X : Y] \in \mathbb{P}_1\mathbb{C}, Y \neq 0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_Y([X : Y]) &= (X/Y)\end{aligned}\quad (10)$$

Une homographie de $PGL(2, \mathbb{C})$ est représentée, à multiplication par un nombre complexe non nul près, par une matrice de $GL(2, \mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\quad (11)$$

ou de façon équivalente, en posant $X/Y = z$ (c'est-à-dire en se plaçant dans la carte φ_Y), par une application

$$h : z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}\quad (12)$$

avec $h(-d/c) = \infty$ et $h(\infty) = a/c$.

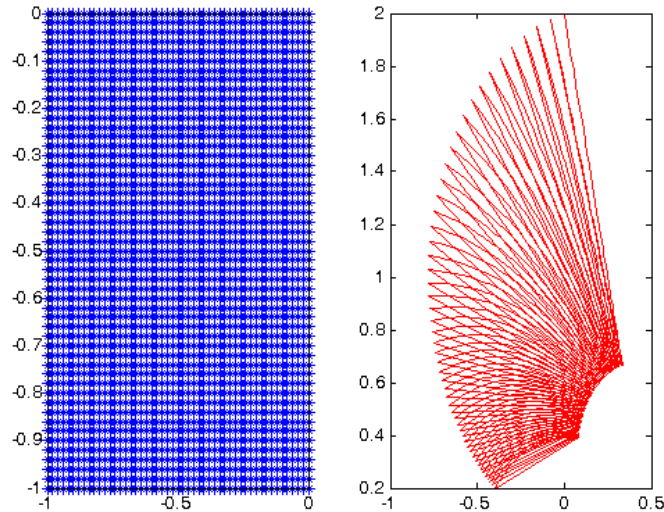


FIGURE 7. A droite l'image de la grille de gauche par la transformation de Möbius $z \mapsto (iz + 2i)/(2iz + 1)$.

On trouvera dans [49] un modèle conforme complexe de caméra qui permet de décrire les changements de points de vue par le biais des transformations de Möbius de $\mathbb{P}_1\mathbb{C}$, *i.e.* des homographies de $PGL(2, \mathbb{C})$. Dans ce modèle, une image est une application

$$\begin{aligned}I_h : h(D) \subset \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h(z) &\longmapsto I_0(z).\end{aligned}\quad (13)$$

où $I_0 : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une image de référence qui décrit l'objet planaire et $h \in PGL(2, \mathbb{C})$.

Les transformations de Möbius sont des transformations conformes, c'est-à-dire préservant les angles. Les distorsions sont donc conformes dans ce modèle. Par ailleurs, il est bien connu que les transformations de Möbius de $\mathbb{P}_1\mathbb{C}$ envoient les cercles généralisés sur eux-mêmes et donc contrairement aux homographies de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ ne conservent pas nécessairement les droites affines du plan (voir Fig. 7).

Il apparaît que ce choix de transformations ne décrit pas convenablement les changements de points de vue surtout quand elles produisent de fortes distorsions conformes.

1.3. Les travaux de la thèse

Ce rapide survol montre clairement qu'il n'est pas si facile de modéliser de façon efficiente les changements de points de vue en suivant les approches du paragraphe précédent. Ceci est dû en particulier à la nature de l'espace sur lequel on fait agir le groupe de transformations, c'est-à-dire dans ce qui précède à la nature du compactifié $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ du plan euclidien. Par ailleurs, une bonne modélisation doit nécessairement tenir compte des points à l'infini.

L'approche que l'on préconise dans cette thèse se démarque radicalement des précédentes en ce sens qu'elle utilise une représentation vectorielle de l'espace des points de vue.

1.3.1. Les algèbres de Clifford conformes. — Les algèbres de Clifford, ou algèbres géométriques, sont des outils très utilisés que ce soit en mathématiques théoriques (voir par exemple [34], [11] [36], [12], [39] ou [28]), en mathématiques appliquées, (voir par exemple [7], [38], ou [13]) ou encore en physique théorique (voir par exemple [26], [27], [25], [15] et [16]). Depuis quelques années, elles sont de plus en plus utilisées en Computer Science (voir par exemple [5], [6], [17], [8], [47], [29], [45] [51] ou [30]).

On utilise souvent ces algèbres en traitement d'images et de la vidéo pour structurer les espaces d'acquisition dans la lignée des travaux originaux représentant les couleurs par des quaternions. On dispose alors d'opérations algébriques qui permettent d'encoder efficacement des transformations géométriques par le biais du calcul dit sans coordonnées. Ce point de vue s'est révélé particulièrement bien adapté à l'étude des images *via* l'approche géométrique à *la* Beltrami (voir par exemple [3]) et offre un cadre unificateur pour les extensions en dimensions supérieures des outils du traitement du signal (comme les transformées de Fourier multi-dimensionnelles, voir [4], ou l'extension monogène du signal analytique, voir [14]).

L'utilisation que l'on en fait ici est différente : il ne s'agit pas de modéliser l'espace d'acquisition, mais de modéliser les domaines de définition des images correspondant à différents points de vue d'une même scène observée par une caméra sténopée. Pour cela, on s'intéresse aux algèbres de Clifford dites conformes (voir le chapitre 2 pour des définitions précises ainsi que [42], [41], [35]). Grosso modo ces algèbres correspondent à des espaces vectoriels \mathbb{R}^4 munis de métriques équivalentes à la métrique de Minkowski. *Le point crucial est que ce formalisme permet de gérer de façon vectorielle les points à l'infini.*

Le chapitre 2 traite plus précisément des représentations conformes généralisées qui sont la clé de voûte de la modélisation développée dans la suite. On peut résumer les résultats sous la forme suivante.

Proposition. — Une représentation conforme généralisée du plan euclidien est la donnée d'une horosphère $H(\alpha, \beta)$ de l'espace \mathbb{R}_β^4 muni de la métrique $Q_\beta = id \oplus G_\beta$ où

$$G_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (14)$$

dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . Les déplacements du plan euclidien induisent des verseurs de l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{4,\beta}$ qui sont iso-horosphériques. Ils agissent donc à représentation conforme généralisée constante. Les dilatations du plan euclidien induisent des changements de représentations conservant la métrique Q_β . Ces derniers consistent simplement à dilater le vecteur $\alpha e_{\infty,\beta}$. Enfin les rotations ρ_φ de \mathbb{R}^4 ayant pour matrice

$$Id \oplus \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (15)$$

induisent des changements de représentations qui ne préservent pas la métrique Q_β : ces derniers envoient de façon isométrique les horosphères $H(\alpha, \beta)$ sur les horosphères $H(\alpha, \beta + \varphi)$ de \mathbb{R}_β^4 et $\mathbb{R}_{\beta+\varphi}^4$ respectivement.

Signalons simplement à ce stade que l'horosphère $H(\alpha, \beta)$ de l'espace \mathbb{R}_β^4 est l'ensemble

$$H(\alpha, \beta) = \{X \in \mathbb{R}_\beta^4, X^2 = 0, X \cdot \alpha e_{\infty,\beta} = -1\} \quad (16)$$

(on note \cdot le produit scalaire associé à Q_β) où $e_{\infty,\beta}$ est le vecteur isotrope de \mathbb{R}_β^4 de coordonnées $(0, 0, \cos \beta - \sin \beta, \sin \beta + \cos \beta)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 . Le plan euclidien \mathbb{R}^2 se plonge dans une telle horosphère par

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\alpha e_{\infty,\beta} + \alpha^{-1} e_{0,\beta} \quad (17)$$

où $e_{0,\beta}$ est le vecteur isotrope de \mathbb{R}_β^4 de coordonnées $(-1/2)(0, 0, \cos \beta + \sin \beta, \sin \beta - \cos \beta)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 . Comme le laisse suggérer les notations, les vecteurs isotropes $e_{0,\beta}$ et $e_{\infty,\beta}$ représentent l'origine et l'infini du plan euclidien.

Nous reviendrons dans le chapitre 2 sur la notion de verneur ; ce qu'il est important de noter ici, c'est que les transformations naturelles du plan, en particulier les translations, deviennent linéaires et que leur composition devient particulièrement simple.

Cette proposition décrit les diverses possibilités dont on dispose pour plonger le plan euclidien dans un modèle conforme (équation (17)). C'est à travers ces différents plongements que l'on décrit les points de vue d'une scène. Les deux paramètres α et β ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) permettent d'encoder le paramètre de latitude de la caméra sténopée qui est responsable des distorsions perspectives.

1.3.2. La modélisation projective. — Avant de mettre en place la représentation conforme des images qui nous intéresse, un travail préliminaire est nécessaire pour décrire les distorsions perspectives subies par le plan de l'objet suite aux variations de la latitude de la caméra sténopée. La latitude est l'angle entre l'axe orthogonal au plan de l'objet et

l'axe optique de la caméra. Les distorsions perspectives sont codées par des homographies de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$, notées h_θ pour $\theta \in [0, \pi/2[$, de la forme

$$\begin{aligned} h_\theta : \mathbb{P}_2\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{P}_2\mathbb{R} \\ \pi(x) &\longmapsto \pi(M_\theta.x), \end{aligned} \quad (18)$$

où M_θ est la matrice 3×3 définie par

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

L'effet de telles distorsions perspectives est illustré dans la figure 8. Il est clair que si

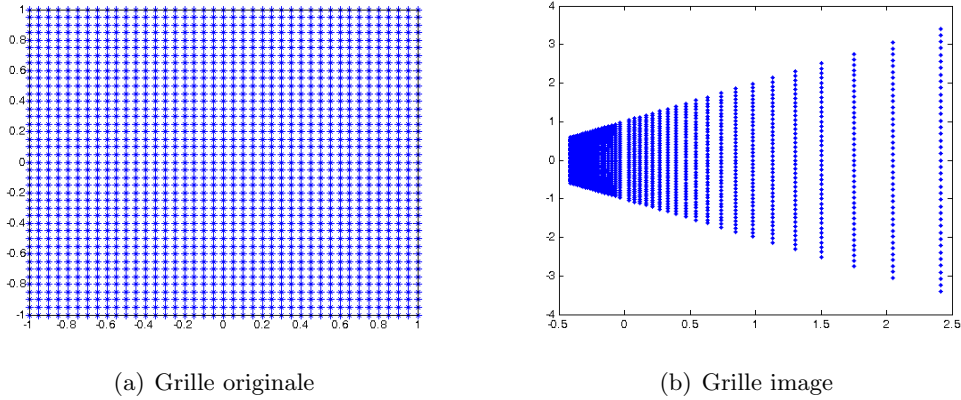


FIGURE 8. Effet d'une distorsion perspective h_θ avec $\theta = \pi/4$

$\theta = 0$, l'homographie correspondante est l'identité. On dit alors que l'image est frontale (le paramètre de latitude est nul). On adopte alors la définition suivante.

Définition (Représentation projective d'une image). — Une image est la donnée d'une application

$$I_{\psi,\theta} : R_{-\psi}h_\theta(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (20)$$

définie sur le domaine $R_{-\psi}h_\theta(\mathbb{R}^2)$ de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ où θ est la latitude de la caméra, $\psi \in [0, 2\pi[$ est l'angle de rotation de la caméra autour de l'axe optique et $R_{-\psi}$ est la rotation d'angle $(-\psi)$.

L'ensemble

$$h_\theta(\mathbb{R}^2) = \{[x_1 \cos\theta : x_2 : -x_1 \sin\theta + 1] \in \mathbb{P}_2\mathbb{R}\} \quad (21)$$

est appelé plan perspectif. Il est strictement inclus dans $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ et contient les points à l'infini de coordonnées homogènes $[\cot\theta : x_2 : 0]$. À toute image $I_{\psi,\theta}$ définie sur $R_{-\psi}h_\theta(\mathbb{R}^2)$, on associe une image frontale I_0

$$\begin{aligned} I_0 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto I_{\psi,\theta} \circ R_{-\psi}h_\theta(x). \end{aligned} \quad (22)$$

La figure 9 illustre ce principe. En s'appuyant sur la définition précédente, on introduit

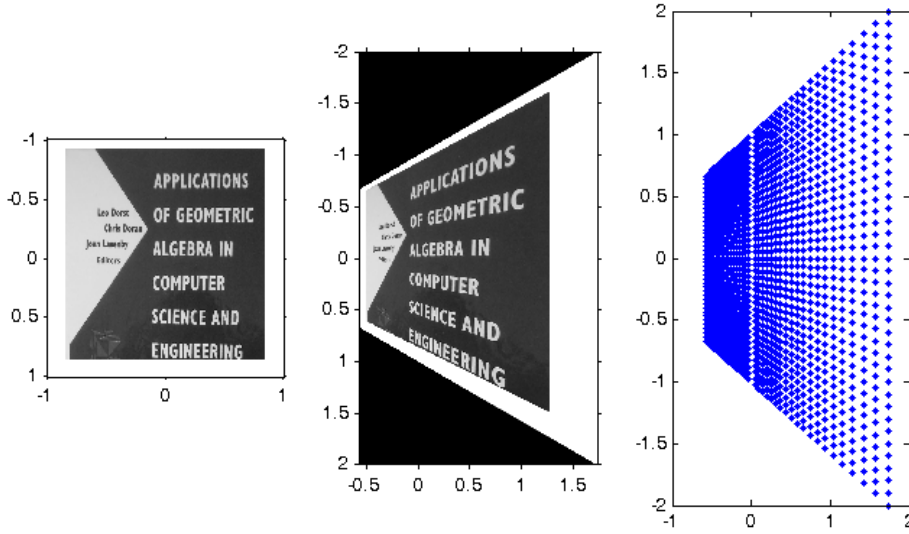


FIGURE 9. Un exemple d'une image frontale d'un objet planeaire (gauche), une vue non frontale de l'objet correspondant à la latitude $\theta = \pi/6$ (milieu) et une représentation du domaine spatial de l'image déformée (droite).

les changements de points de vue.

Définition. — Un changement de point de vue est la donnée de deux rotations de plans perspectifs $R_{-\psi_1}h_{\theta_1}(\mathbb{R}^2)$ et $R_{-\psi_2}h_{\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, et d'une homographie de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ dont la restriction

$$k : R_{-\psi_1}h_{\theta_1}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow R_{-\psi_2}h_{\theta_2}(\mathbb{R}^2) \quad (23)$$

à $R_{-\psi_1}h_{\theta_1}(\mathbb{R}^2)$ s'écrit :

$$k = R_{-\psi_2}h_{\theta_2}f(R_{-\psi_1}h_{\theta_1})^{-1} \quad (24)$$

où f est une similitude affine directe de \mathbb{R}^2 .

L'action de l'homographie k est illustrée dans la figure 10. Plus précisément, étant donné deux images I_{ψ_1, θ_1} et I_{ψ_2, θ_2} d'un objet planeaire, l'homographie k fait correspondre leurs domaines et la similitude f décrit la transformation entre les domaines des images frontales I_0^1 et I_0^2 qui leur sont associées. Ceci est représenté dans la figure 11 par un diagramme commutatif. On note dans la suite Γ l'ensemble des homographies k introduites dans la définition précédente.

1.3.3. La modélisation dans les algèbres de Clifford conformes. — L'idée clé de cette modélisation est de tirer parti des représentations conformes généralisées du plan euclidien décrites dans la proposition du paragraphe 1.3.1 pour associer aux plans perspectifs précédents des horosphères encodant les points de vue.

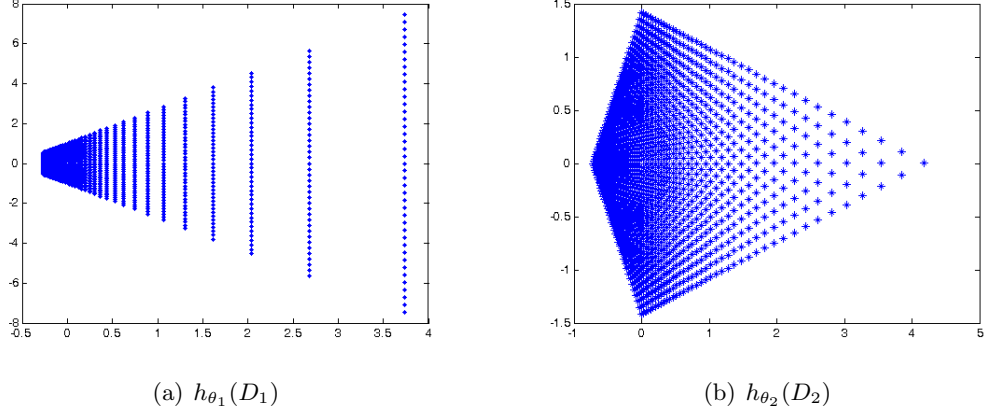


FIGURE 10. Action de l'homographie $k = h_{\theta_2} \circ f \circ h_{\theta_1}^{-1}$ modélisant un changement de point de vue (pour $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = \pi/6$ et f la rotation d'angle $3\pi/4$). Notons que D_1 and D_2 sont deux domaines du plan euclidien vérifiant $D_2 = f(D_1)$.

On l'a vu (voir aussi le chapitre 2), ces horosphères $H(\alpha, \beta)$ sont les ensembles de l'espace \mathbb{R}_β^4 définis par

$$H(\alpha, \beta) = \{X \in \mathbb{R}_\beta^4, X^2 = 0, X \cdot \alpha e_{\infty, \beta} = -1\} \quad (25)$$

où $e_{\infty, \beta}$ est le vecteur isotrope de \mathbb{R}_β^4 de coordonnées $(0, 0, \cos \beta - \sin \beta, \sin \beta + \cos \beta)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 . On leur associe les plongements $\varphi_{\alpha, \beta}$ du plan euclidien \mathbb{R}^2 définis par

$$\varphi_{\alpha, \beta}(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\alpha e_{\infty, \beta} + \alpha^{-1} e_{0, \beta} \quad (26)$$

où $e_{0, \beta}$ est le vecteur isotrope de \mathbb{R}_β^4 de coordonnées $(-1/2)(0, 0, \cos \beta + \sin \beta, \sin \beta - \cos \beta)$ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

On dispose donc de deux paramètres, α et β , pour encoder l'axe de la caméra sténopée ou plus précisément la latitude θ responsable des distorsions perspectives. À ce stade, on peut envisager deux stratégies.

1. La première consiste à n'utiliser que le seul paramètre α en supposant $\beta = 0$. L'espace \mathbb{R}_β^4 est l'espace standard de Minkowski muni de la métrique de signature $(3,1)$. Les plongements (26) deviennent

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x_1, x_2) &:= \varphi_{\alpha, 0}(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\alpha e_\infty + \alpha^{-1} e_0 \\ &:= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\alpha e_{\infty, 0} + \alpha^{-1} e_{0, 0} \end{aligned} \quad (27)$$

Soit

$$\sigma_{-\psi} = e^{\frac{\psi}{2} e_1 \wedge e_2} = \cos \frac{\psi}{2} + e_1 \wedge e_2 \sin \frac{\psi}{2}, \quad (28)$$

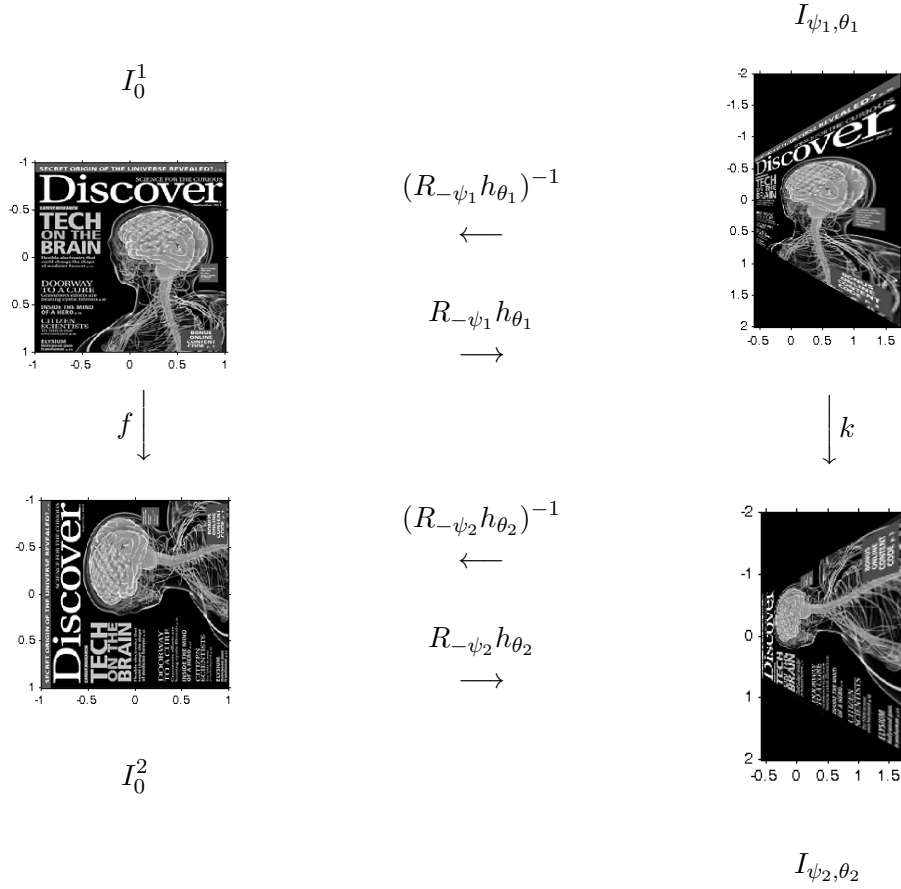


FIGURE 11. Les images I_{ψ_1, θ_1} and I_{ψ_2, θ_2} correspondent à deux vues non frontales d'un objet (à droite), leurs images frontales associées I_0^1 and I_0^2 resp. sont liées par la similitude f du plan (à gauche). Dans cet exemple on a $\theta_1 = \theta_2 = \pi/6$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$ et f est la rotation d'angle $\pi/2$.

le verveur encodant la rotation $R_{-\psi}$. On note

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\psi, \alpha_\theta}(x) &:= \sigma_{-\psi} \varphi_{\alpha_\theta}(x) \sigma_\psi \\
 &= R_{-\psi}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi}(x)]^2 \alpha_\theta e_\infty + \alpha_\theta^{-1} e_0,
 \end{aligned} \tag{29}$$

le plongement de \mathbb{R}^2 qui définit le modèle conforme de la rotation $R_{-\psi} h_\theta(\mathbb{R}^2)$ du plan perspectif $h_\theta(\mathbb{R}^2)$, où $\theta \mapsto \alpha_\theta$ est une bijection de $]0, \pi/2[$ sur \mathbb{R}_+^* . On obtient alors le résultat suivant.

Proposition (Représentations conformes des images et des changements de points de vue)

– Une image est la donnée d'un modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ d'une rotation d'un plan perspectif $R_{-\psi} h_\theta(\mathbb{R}^2)$ et d'une application $\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta}$ définie sur l'horosphère H_{α_θ}

par

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} : \{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X_{\psi, \alpha_\theta} = \varphi_{\psi, \alpha_\theta}(x) &\longmapsto I_{\psi, \theta} \circ R_{-\psi} h_\theta \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta}^{-1}(X_{\psi, \alpha_\theta}) \\ &= I_{\psi, \theta} \circ R_{-\psi} h_\theta(x), \end{aligned} \quad (30)$$

$I_{\psi, \theta}$ étant l'image projective correspondante.

– Un changement de points de vue est la donnée de deux modèles conformes $\{H_{\alpha_{\theta_1}}, \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}\}$ et $\{H_{\alpha_{\theta_2}}, \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}\}$ et d'une bijection \tilde{F} :

$$\tilde{F} = \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ f \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}^{-1} : \{H_{\alpha_{\theta_1}}, \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}\} \longrightarrow \{H_{\alpha_{\theta_2}}, \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}\}. \quad (31)$$

En d'autres termes, \tilde{F} transforme tout vecteur

$$X_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} = \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}(x) \quad (32)$$

de l'horosphère $H_{\alpha_{\theta_1}}$ en un vecteur

$$\tilde{F}(X_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}) = X_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} = \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ f(x), \quad (33)$$

de l'horosphère $H_{\alpha_{\theta_2}}$, où f est une similitude affine directe de \mathbb{R}^2 .

Cette description des images et des changements de points de vue permet d'introduire un groupe noté $C_0(3, 1)$ dont les éléments sont des transformations linéaires conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$.

Proposition (Le groupe des changements de points de vue)

– L'ensemble

$$\tilde{C}_0(3, 1) = \left\{ F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}}, \bar{\psi} \in S^1, \bar{\alpha} > 0 \right\} \quad (34)$$

est un groupe de Lie de dimension 2 constitué de transformations orthogonales de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$ correspondant aux changements de base:

$$\{e_1, e_2, e_\infty, e_0\} \longmapsto \{R_{-\bar{\psi}}(e_1), R_{-\bar{\psi}}(e_2), \bar{\alpha}e_\infty, \bar{\alpha}^{-1}e_0\} \quad (35)$$

Il agit de façon transitive sur l'ensemble des modèles conformes par

$$\begin{aligned} F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}}(\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}) &= \{H_{\bar{\alpha}\alpha_\theta}, \varphi_{\psi+\bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta}\} \\ F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} &= \varphi_{\psi+\bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} \end{aligned} \quad (36)$$

– L'ensemble

$$\hat{C}_0(3, 1) = \{F_\sigma, \sigma = \sigma_t \sigma_\gamma \sigma_\delta, \gamma \in S^1, \delta > 0, t \in \mathbb{R}^2\} \quad (37)$$

est un groupe de Lie de dimension 4 constitué de transformations conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. À toute similitude directe $f = T_t R_\gamma D_\delta$ du plan euclidien correspond un unique spineur $\sigma = \sigma_t \sigma_\gamma \sigma_\delta$ de $\hat{C}_0(3, 1)$ dont l'action par "sandwiching"

$$\begin{aligned} F_\sigma : \mathbb{R}^{3,1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3,1} \\ y + y_\infty e_\infty + y_0 e_0 &\longmapsto \delta \sigma(y + y_\infty e_\infty + y_0 e_0) \sigma^{-1} \end{aligned} \quad (38)$$

conserve tout modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ avec

$$F_\sigma \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} = \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \circ f_{\psi, \alpha_\theta} \quad (39)$$

où $f_{\psi, \alpha_\theta} = T_{t'} R_\gamma D_\delta$ et $t' = (R_\psi t) / \alpha_\theta$. Il est important de remarquer que les changements de points de vue correspondant à des dilatations D_δ sont représentés par les verseurs $\delta\sigma_\delta$.

– L'ensemble

$$C_0(3, 1) = \left\{ F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_\sigma, F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \in \tilde{C}_0(3, 1), F_\sigma \in \hat{C}_0(3, 1) \right\} \quad (40)$$

est un groupe de Lie de dimension 5 constitué de transformations conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Si F appartient à $C_0(3, 1)$ et $Y = y + y_\infty e_\infty + y_0 e_0$ appartient à $\mathbb{R}^{3,1}$ alors

$$F(Y) = F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_{\sigma_t \sigma_\gamma \sigma_\delta}(Y) = \delta \sigma_{-\bar{\psi}} \sigma_{\bar{\alpha}} (\sigma_t \sigma_\gamma \sigma_\delta) Y (\sigma_t \sigma_\gamma \sigma_\delta)^{-1} \sigma_{\bar{\alpha}^{-1}} \sigma_{\bar{\psi}} \quad (41)$$

où

$$\sigma_{-\bar{\psi}} = e^{\frac{\bar{\psi}}{2} e_1 \wedge e_2}, \quad \sigma_{\bar{\alpha}} = e^{-\frac{E}{2} \ln \bar{\alpha}} \quad (42)$$

et

$$\sigma_\gamma = e^{\frac{-\gamma}{2} e_1 \wedge e_2}, \quad \sigma_\delta = e^{-\frac{E}{2} \ln \delta}, \quad \sigma_t = \left(1 - \frac{1}{2} t e_\infty\right) \quad (43)$$

Notons par ailleurs $\bar{\mathbb{I}}$ l'ensemble des images au sens de la proposition précédente (équation (30)). On montre alors le résultat suivant.

Proposition (Action de $C_0(3, 1)$ sur $\bar{\mathbb{I}}$). — *En reprenant les notations ci-dessus, – L'application*

$$\varpi : C_0(3, 1) \times \bar{\mathbb{I}} \longrightarrow \bar{\mathbb{I}} \quad (44)$$

définie par

$$(F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_\sigma, \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta}) \longmapsto (F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_\sigma) * \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha} \alpha_\theta} \quad (45)$$

avec

$$\bar{I}_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha} \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha} \alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \circ f_{\psi, \alpha_\theta}^{-1} \quad (46)$$

est une action de groupe.

– Soient $\bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}$ et $\bar{J}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}$ deux images telles que

$$\bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} = I_{\psi_1, \theta_1} \circ R_{-\psi_1} h_{\theta_1} \quad (47)$$

et

$$\bar{J}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} = J_{\psi_2, \theta_2} \circ R_{-\psi_2} h_{\theta_2} \quad (48)$$

On a équivalence entre

(a) Il existe $F \in C_0(3, 1)$ tel que

$$F * \bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} = \bar{J}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \quad (49)$$

(b) Il existe $k \in \Gamma$ tel que

$$J_{\psi_2, \theta_2} = I_{\psi_1, \theta_1} \circ k^{-1} \quad (50)$$

(se reporter au chapitre 3 pour les notations).

L'intérêt de cette première approche est qu'elle permet d'encoder la latitude de la caméra *via* la bijection $\theta \longmapsto \alpha_\theta$ en restant dans l'espace de Minkowski standard (voir une nouvelle fois le chapitre 3 pour plus de détails et un énoncé général).

2. La seconde stratégie consiste à encoder le paramètre de latitude θ par le paramètre β et le zoom λ par le paramètre α , *i.e.* à poser $\beta = \theta$ et $\alpha = \lambda$. On choisit donc en quelque sorte pour direction du vecteur représentant l'infini la direction de l'axe de la caméra. On adopte alors la définition suivante.

Définition. — Une image est la donnée d'un modèle conforme généralisé $(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})$ et d'une application

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\lambda, \theta} : (H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X_{\lambda, \theta} = \varphi_{\lambda, \theta}(x) &\longmapsto I_{\lambda, \theta} \circ h_{\theta} \circ D_{\lambda^{-1}} \circ \varphi_{\lambda, \theta}^{-1}(X_{\lambda, \theta}) \\ &= I_{\lambda, \theta} \circ h_{\theta} \circ D_{\lambda^{-1}}(x), \end{aligned} \quad (51)$$

$I_{\lambda, \theta}$ étant l'image projective correspondante.

Cette modélisation, qui semble naturelle, introduit une nouvelle difficulté : les changements de points de vue ne peuvent plus être interprétés comme un groupe de transformations linéaires conformes de l'espace de Minkowski. Pour y remédier, on introduit le groupoïde \mathcal{PV} dont les objets sont les couples $(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})$ et les morphismes sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H(\lambda_1, \theta_1) & \xrightarrow{F} & H(\lambda_2, \theta_2) \\ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\lambda_2, \theta_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (52)$$

où les couples (F, f) sont de l'un des types suivants : (σ_t, T_t) , $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$, (σ_δ, id) et (ρ_φ, id) . Soit \mathcal{PV}_1 l'ensemble de ces morphismes.

Proposition. — La correspondance

$$\varpi : \mathcal{PV}_1 \times \bar{\mathbb{I}} \longrightarrow \bar{\mathbb{I}} \quad (53)$$

qui associe à tout couple $((F, f), \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1) \in \mathcal{PV}_1 \times \bar{\mathbb{I}}$ tel que

$$s(F, f) = (H(\lambda_1, \theta_1), \varphi_{\lambda_1, \theta_1}) \quad (54)$$

l'image

$$\bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2 := (F, f) * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 \quad (55)$$

est une action du groupoïde \mathcal{PV} . Cette action est au sens suivant

$$(ID, id) * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 = \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 \quad (56)$$

et

$$[(G, g) \circ (F, f)] * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 = (G, g) * [(F, f) * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1] \quad (57)$$

Dans cette proposition l'image $\bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2$ est définie par

$$\bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 \circ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} = \bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2 \circ F \circ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} \quad (58)$$

ou de façon équivalente par

$$\bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 \circ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} = \bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2 \circ \varphi_{\lambda_2, \theta_2} \circ f \quad (59)$$

Dans ce contexte, un point de vue, resp. un changement de points de vue, n'est rien d'autre qu'un objet, resp. un morphisme, de la catégorie \mathcal{PV} . Conformément à l'intuition,

- (a) Les morphismes (σ_t, T_t) et $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$ agissent à point de vue constant.
- (b) La dilatation (σ_δ, id) agit comme un changement d'échelle, *i.e.* un changement de zoom, multipliant le vecteur $\lambda e_{\infty, \theta}$ par le scalaire δ (et par suite le vecteur $\lambda^{-1} e_{0, \theta}$ par l'inverse de ce scalaire). Il est à noter que le vecteur $\lambda e_{\infty, \theta}$ étant isotrope, sa norme reste inchangée.
- (c) Les morphismes (ρ_φ, id) correspondent aux variations de l'angle "sous lequel on voit le plan euclidien".

Comme

$$\mathcal{O}((H(1, 0), \varphi_{1,0})) = \mathcal{PV}_0 \quad (60)$$

où \mathcal{PV}_0 désigne l'ensemble des objets de \mathcal{PV} , l'ensemble des images obtenues à partir de tous les points de vue d'un même objet planaire est une orbite sous l'action de \mathcal{PV}_1 par ϖ .

On retrouve le groupe $\widehat{C}_0(3, 1)$ de la stratégie précédente au travers du résultat suivant qui implique une version "réduite" du groupoïde (voir les diverses notations et définitions au chapitre 4).

Proposition. — *Si l'on choisit d'encoder les dilatations non plus par σ_δ mais par le verneur $\delta\sigma_\delta$ les points de vue et les changements de points de vue sont les objets et les morphismes du groupoïde \mathcal{PV} dont les objets sont les couples $(H(1, \theta), \varphi_{1,\theta})$ et les morphismes sont les diagrammes (σ_t, T_t) , $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$, $(\delta\sigma_\delta, D_\delta)$ et (ρ_φ, id) . Le stabilisateur de tout objet est isomorphe au groupe $\widehat{C}_0(3, 1)$.*

CHAPITRE 2

ALGÈBRES DE CLIFFORD ET MODÈLES CONFORMES

2.1. Algèbres de Clifford

On introduit dans cette section le vocabulaire et les notions de base concernant les algèbres de Clifford. Des exemples d'utilisation sont donnés dans le paragraphe 2.1.2.

2.1.1. Premières définitions. — Les données de base sont un espace vectoriel E (sur \mathbb{R} pour ce qui nous intéresse), de dimension finie, et une forme quadratique Q sur E . Le but est de définir (et de construire) une algèbre sur \mathbb{R} qui contient E et telle que si u est un vecteur de E , le produit $uu = u^2$ (qui a un sens dans l'algèbre considérée) soit égal à la valeur $Q(u)$ de la forme quadratique évaluée sur u . Rappelons qu'une algèbre est à la fois un espace vectoriel et un anneau où l'on dispose donc des quatre opérations usuelles : addition, soustraction, multiplication et division (on notera cependant que tous les éléments non nuls ne sont pas inversibles en général). Par suite, si u et v sont deux vecteurs de E plongés dans une telle algèbre, alors nécessairement : $uv + vu = 2B(u, v)$, en notant B la forme bilinéaire symétrique associée à Q . Le produit géométrique des deux vecteurs u et v est alors défini par la formule :

$$uv = B(u, v) + u \wedge v \quad (1)$$

où

$$u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu) \quad (2)$$

est la partie antisymétrique de ce dernier, appelée produit externe ou extérieur ("outer product") de u et v et

$$u \cdot v := B(u, v) = \frac{1}{2}(uv + vu) \quad (3)$$

est la partie symétrique, appelée produit interne ou produit scalaire ("inner product").

On peut remarquer rapidement que l'algèbre cherchée, si elle se doit de contenir les scalaires de \mathbb{R} et les vecteurs de E , doit également contenir d'autres types d'objets. Par exemple, si E est l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 , Q la forme quadratique euclidienne et (e_1, e_2) une base orthonormée, alors l'élément $e_1 \wedge e_2$ est de carré -1 ; il ne peut donc pas s'agir d'un scalaire ou d'un vecteur.

Il faut cependant prendre quelques précautions si l'on veut être rigoureux. Il existe en effet beaucoup d'algèbres A munies d'une application linéaire f de E dans A satisfaisant la condition $[f(u)]^2 = Q(u)$ pour tout vecteur u de E . De tels couples (A, f) sont les objets d'une catégorie et l'algèbre de Clifford de E relativement à la forme quadratique Q , notée dorénavant $(Cl(E, Q), i_{(E, Q)})$ est définie comme étant un objet initial de cette catégorie (l'application $i_{(E, Q)}$ est là pour envoyer E dans $Cl(E, Q)$). C'est dire précisément que si (A, f) est un couple comme ci-dessus, il existe un unique morphisme d'algèbres g de $Cl(E, Q)$ dans A tel que $f = g \circ i_{(E, Q)}$. Comme tout objet initial d'une catégorie, le couple $(Cl(E, Q), i_{(E, Q)})$ est défini à isomorphisme (de la catégorie) près. Nous parlerons cependant, avec un léger abus, de l'algèbre de Clifford de E en omettant l'application $i_{(E, Q)}$.

Pour construire pratiquement l'algèbre de Clifford de E , on procède de la façon suivante. Soit

$$T(E) = \mathbb{R} \oplus E \oplus (E \otimes E) \oplus \dots = \bigoplus_{i \geq 0} E^{\otimes i} \quad (4)$$

l'algèbre tensorielle de E , et soit $\mathcal{I}(E, Q)$ l'idéal bilatère de $T(E)$ engendré par les éléments de la forme $u \otimes u - Q(u)$, u appartenant à E . Notons encore $i_{(E, Q)}$ l'application composée :

$$E \longrightarrow T(E) \longrightarrow T(E)/\mathcal{I}(E, Q) \quad (5)$$

Il n'est pas trop difficile de vérifier (voir [44] pour une démonstration) que le couple $(T(E)/\mathcal{I}(E, Q), i_{(E, Q)})$ est l'algèbre de Clifford de E .

Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E , il s'agit de l'algèbre engendrée (en tant qu'algèbre) par les vecteurs e_i . Elle est de dimension 2^n et admet pour base la famille

$$\{1, e_{i_1} \dots e_{i_k}, i_1 < \dots < i_k, k \in \{1, \dots, n\}\} \quad (6)$$

Étant donné un espace vectoriel E et une forme quadratique Q sur E , il existe une unique involution $*$ qui étend à $Cl(E, Q)$ l'involution $u \mapsto -u$ de E . Elle est définie par son action sur les éléments de la base :

$$1^* = 1 \quad e_i^* = -e_i \quad (e_{i_1} \dots e_{i_k})^* = (-1)^k e_{i_1} \dots e_{i_k} \quad (7)$$

De même il existe une unique anti-involution \dagger sur $Cl(E, Q)$ telle que

$$1^\dagger = 1 \quad e_i^\dagger = e_i \quad (e_{i_1} \dots e_{i_k})^\dagger = e_{i_k} \dots e_{i_1} \quad (8)$$

Le produit externe de k vecteurs, soit la partie antisymétrique de leur produit géométrique, est par définition un k -blade (ou blade de degré k) et un k -vecteur n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire de k -blades. En particulier, un *bivecteur* est un blade de degré 2.

L'algèbre $Cl(E, Q)$ est la somme des sous-espaces (de dimension C_n^k) $Cl(E, Q)^k$ constitués des k -vecteurs. On écrit alors pour tout a de $Cl(E, Q)$

$$a = \sum_{k=0}^n \langle a \rangle_k \quad (9)$$

où $\langle a \rangle_k$ désigne la partie k -vectorielle de a .

Voici les formules qui décrivent l'ensemble des opérations possibles. Si λ est un réel et a

appartient à $Cl(E, Q)$:

$$\begin{aligned}\lambda \wedge a &= a \wedge \lambda = \lambda a \\ \lambda \cdot a &= a \cdot \lambda = 0\end{aligned}\tag{10}$$

Si $a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ et $b = b_1 \wedge \cdots \wedge b_l$ sont respectivement un k -blade et un l -blade, on définit récursivement :

$$\begin{aligned}&(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_l) \\ &= \begin{cases} ((a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) \cdot b_1) \cdot (b_2 \wedge \cdots \wedge b_l) & \text{si } k \geq l \\ (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{k-1}) \cdot (a_k \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_l)) & \text{si } k < l \end{cases}\end{aligned}\tag{11}$$

avec

$$\begin{aligned}&(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k) \cdot b_1 \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} a_1 \wedge \cdots \wedge a_{i-1} \wedge (a_i \cdot b_1) \wedge a_{i+1} \wedge \cdots \wedge a_k\end{aligned}\tag{12}$$

et

$$\begin{aligned}&a_k \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_l) \\ &= \sum_{i=1}^l (-1)^{i-1} b_1 \wedge \cdots \wedge b_{i-1} \wedge (a_k \cdot b_i) \wedge b_{i+1} \wedge \cdots \wedge b_l\end{aligned}\tag{13}$$

On vérifie aussi que

$$\begin{aligned}a \cdot b &= \langle ab \rangle_{|k-l|} \\ a \wedge b &= \langle ab \rangle_{k+l}\end{aligned}\tag{14}$$

La formule fondamentale : $u^2 = Q(u)$ montre que tout vecteur non nul et non isotrope ($Q(u) \neq 0$) est inversible avec $u^{-1} = u/Q(u)$. Un verseur est un multivecteur qui peut être exprimé (de façon non unique) comme un produit géométrique de vecteurs inversibles. Cette notion est particulièrement importante pour la suite, nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

2.1.2. Quelques exemples et compléments. — L'algèbre de Clifford de l'espace $\mathbb{R}^{p,q}$, c'est-à-dire de l'espace \mathbb{R}^n muni de la forme quadratique de signature (p, q) avec $p + q = n$ est notée $\mathbb{R}_{p,q}$.

On vérifie assez facilement que $\mathbb{R}_{0,1}$ est isomorphe au corps (commutatif) des nombres complexes et que l'algèbre $\mathbb{R}_{0,2}$ est isomorphe au corps (non commutatif) des quaternions. Les algèbres $\mathbb{R}_{1,1}$ et $\mathbb{R}_{2,0}$ sont toutes les deux isomorphes à l'algèbre $\mathbb{R}(2)$ des matrices 2×2 à coefficients réels.

L'un des intérêts des algèbres de Clifford est que le produit géométrique permet d'encoder efficacement des transformations géométriques par des formules algébriques. Voici un des exemples les plus significatifs. Soit n et u deux vecteurs de E . On suppose n non nul et non isotrope (donc inversible). On dispose d'une décomposition en partie parallèle et partie orthogonale relativement à n :

$$u = u_{\parallel} + u_{\perp}\tag{15}$$

avec

$$u_{\parallel} \wedge n = 0 \quad u_{\perp} \cdot n = 0\tag{16}$$

On vérifie que

$$u_{\perp} = (u \wedge n)n^{-1}\tag{17}$$

et

$$u_{\parallel} = (u \cdot n)n^{-1} \quad (18)$$

On en déduit que la réflexion ($u_{\perp} - u_{\parallel}$) de u par rapport à l'hyperplan orthogonal à un vecteur inversible n de E est donnée par la formule

$$s_n(u) = -nun^{-1} \quad (19)$$

De même le symétrique ($u_{\parallel} - u_{\perp}$) du vecteur u par rapport à n est donné par

$$\tilde{s}_n(u) = nun^{-1} \quad (20)$$

C'est cet exemple précis qui est à l'origine de l'appellation "verseur" (le vecteur u est "renversé" ...). La signification profonde de cette notion réside dans le théorème bien connu de Cartan Dieudonné suivant (voir par exemple [21]).

Théorème. — *Si E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension n muni d'une forme quadratique non dégénérée, alors tout élément du groupe orthogonal correspondant est la composée d'au plus n réflexions.*

On démontre à partir de ce théorème que le groupe $Pin(p, q)$ des verseurs unitaires (produits de vecteurs unitaires) est un revêtement à deux feuillets du groupe orthogonal $O(p, q, \mathbb{R})$ et que le groupe $Spin(p, q)$ des verseurs pairs unitaires (produits d'un nombre pair de vecteurs unitaires) est un revêtement à deux feuillets du groupe $SO(p, q, \mathbb{R})$. Ce dernier groupe n'est connexe que dans les cas euclidien et anti-euclidien. Sa composante connexe de l'identité $SO^+(p, q, \mathbb{R})$ est le groupe des rotations de $\mathbb{R}^{p,q}$ et est codée par son revêtement à deux feuillets *i.e* le groupe $Spin^+(p, q)$ des *spineurs* (ou "rotors") défini par

$$\begin{aligned} Spin^+(p, q) &= \{\sigma \in Spin(p, q), \sigma\sigma^{\dagger} = 1\} \\ &= \{\sigma = \prod_{i=1}^{2k} u_i, |u_i^2| = 1 \text{ et } \sigma\sigma^{\dagger} = 1\} \end{aligned} \quad (21)$$

Notons que si $p \neq 0$ et $q \neq 0$ (espace à signature mixte) alors le groupe $Spin^+(p, q)$ est strictement inclus dans $Spin(p, q)$ contrairement aux cas euclidien et anti-euclidien. Il suffit de considérer le verseur $\sigma = u_1 u_2$ produit de deux vecteurs unitaires de signatures opposées: celui-là appartient à $Spin(p, q)$ mais pas à $Spin^+(p, q)$ ($\sigma\sigma^{\dagger} = -1$).

Ce cadre mathématique trouve de nombreuses applications en traitement d'images par exemple, notamment pour étendre aux images couleurs (et plus généralement aux images multi-canaux) les définitions usuelles de transformées de Fourier. On trouvera dans [10] des exemples reposant sur des généralisations spinorielles de la notion de caractères.

Plus généralement, soit $E = a_1 \wedge \dots \wedge a_k$ un k -blade non nul et non isotrope, c'est-à-dire tel que $E^2 \neq 0$; on associe à E un unique sous-espace vectoriel qui est l'ensemble des vecteurs v solutions de l'équation

$$v \wedge E = 0 \quad (22)$$

i.e. c'est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $a_1 \dots a_k$. Soit donc E un tel k -blade et u un vecteur de $\mathbb{R}^{p,q}$. La projection $\pi_E(u)$ de u sur le sous-espace associé à E est donnée par la formule

$$\pi_E(u) = (u \cdot E)E^{-1} \quad (23)$$

et la rejection $\pi_E^\perp(u)$ de u par rapport à ce sous-espace s'écrit

$$\pi_E^\perp(u) = (u \wedge E)E^{-1} \quad (24)$$

Cette dernière opération ($\pi_E^\perp(u)$) revient à projeter u sur le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{p,q}$ orthogonal au sous-espace associé à E . L'interprétation en termes de sous-espaces des blades a déjà fait l'objet d'applications en vision par ordinateur. Si a et b sont deux blades tels que la somme des sous-espaces correspondants soit $\mathbb{R}^{p,q}$, on définit leur "meet" $a \vee b$ par la formule

$$a \vee b = (\tilde{a} \wedge \tilde{b})I_n \quad (25)$$

où

$$\tilde{a} = aI_n^{-1} \quad \tilde{b} = bI_n^{-1} \quad I_n = e_1 \cdots e_n \quad (26)$$

(I_n est le pseudo-scalaire de l'algèbre). Cette opération \vee représente l'intersection. Dans [41], l'auteur plonge le plan euclidien dans l'algèbre de Clifford \mathbb{R}_3 au moyen de l'application (dite homogénéisation)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto X = x + e_3 \end{aligned} \quad (27)$$

pour obtenir une représentation homogène du plan. Dans cette représentation, la projection perspective de X est le meet du bivecteur encodant la droite reliant X et le centre optique de la caméra sténopée et du trivecteur encodant le plan image. Si cette approche semble pertinente pour la reconstruction en dimension 3 de scènes, elle n'est pas adaptée à la description des changements de points de vue telle qu'on l'envisage dans ce travail.

2.2. Les Modèles conformes

Dans cette section, on introduit le modèle conforme de D. Hestenes (voir [35] et aussi [2]) qui est le cadre mathématique dans le lequel se situe notre approche des points de vue et des changements de points de vue. Nous décrivons ensuite une variante de ce modèle qui fait intervenir des changements de métriques.

2.2.1. Le modèle conforme usuel. — On se place dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni d'une base orthonormale (e_1, e_2) . La construction du modèle conforme $\mathbb{R}^{3,1}$ suit la même démarche que celle de la construction de l'espace projectif. Il s'agit essentiellement d'homogénéisation, à la différence près que l'espace \mathbb{R}^2 est d'abord plongé dans un espace de dimension 3 *via* l'inverse de la projection stéréographique P^{-1} définie par :

$$x_1e_1 + x_2e_2 \longmapsto \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(x_1e_1 + x_2e_2) + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}e_+ \quad (28)$$

L'élément e_+ représente le point à l'infini. L'homogénéisation est donnée par :

$$P^{-1}(x_1e_1 + x_2e_2) \longmapsto P^{-1}(x_1e_1 + x_2e_2) + e_- \quad (29)$$

Ce qui signifie que le plongement cherché est défini par :

$$x_1e_1 + x_2e_2 \longmapsto x_1e_1 + x_2e_2 + \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}(e_+ + e_-) + \frac{(e_- - e_+)}{2} \quad (30)$$

Le point à l'infini correspond dans ce modèle au vecteur $e_+ + e_-$, ce qui suggère d'introduire la notation

$$e_\infty = e_+ + e_- \quad (31)$$

De même l'origine de \mathbb{R}^2 est représentée par le vecteur

$$e_0 = (e_- - e_+)/2 \quad (32)$$

Les vecteurs e_1, e_2, e_+ et e_- engendrent l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{3,1}$ de l'espace $\mathbb{R}^{3,1}$, c'est-à-dire de l'espace \mathbb{R}^4 muni de la forme quadratique

$$Q_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

La décomposition

$$\mathbb{R}^{3,1} = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{1,1} \quad (34)$$

est appelée "conformal split" (voir plus loin). Elle est déterminée de façon unique par le pseudoscalaire

$$E = e_+e_- = e_+ \wedge e_- = e_\infty \wedge e_0 \quad (35)$$

de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,1}$ muni de la base (e_+, e_-) . Le pseudoscalaire E satisfait $E^2 = 1$. Notons que l'on vérifie facilement que (e_+, e_-) est une base telle que $e_+^2 = 1$, $e_-^2 = -1$ et $e_+ \cdot e_- = 0$, si et seulement si $e_0^2 = e_\infty^2 = 0$ (i.e. e_0 et e_∞ sont des vecteurs isotropes) et $e_\infty \cdot e_0 = -1$. On constate alors en particulier que

$$\frac{x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0}{-(x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0) \cdot e_0} = \frac{x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0}{\frac{1}{2}x^2} = e_\infty + 2 \left(\frac{x + e_0}{x^2} \right) \quad (36)$$

tend vers e_∞ lorsque x^2 tend vers l'infini, où $x = x_1e_1 + x_2e_2$.

En notant

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_\infty e_\infty + x_0e_0 \quad (37)$$

un vecteur de $\mathbb{R}^{3,1}$, on obtient

$$X = \pi_E(X) + \pi_E^\perp(X) \quad (38)$$

où

$$\pi_E(X) = (X \cdot E)E = x_\infty e_\infty + x_0 e_0 \quad (39)$$

est la projection de X sur le E -plan et

$$\pi_E^\perp(X) = (X \wedge E)E = x_1e_1 + x_2e_2 \quad (40)$$

est la réjection correspondant à ce E -plan.

Définition. — La représentation conforme du plan euclidien \mathbb{R}^2 , ou représentation homogène, associée au "conformal split" précédent est l'horosphère (voir Fig. 1 de ce chapitre)

$$\begin{aligned} H(e_\infty, e_0) &= \{X \in \mathbb{R}^{3,1}, X^2 = 0, X \cdot e_\infty = -1\} \\ &= \{x_1e_1 + x_2e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)e_\infty + e_0, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned} \quad (41)$$

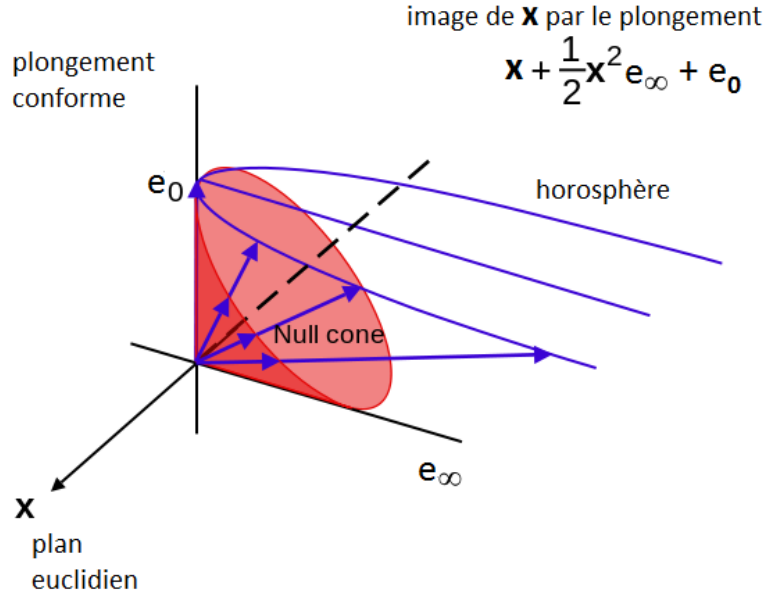


FIGURE 1. Le plongement conforme du plan euclidien.

Proposition. — L'horosphère $H(e_\infty, e_0)$ est l'intersection du cône N des vecteurs isotropes de $\mathbb{R}^{3,1}$ avec l'hyperplan \mathbb{P} , d'équation $e_\infty \cdot (X - e_0) = 0$, "normal" à e_∞ et passant par le point de coordonnées $(0, 0, -1/2, 1/2)$ correspondant au vecteur e_0 .

En effet,

$$N = \{X = (x_1, x_2, x_+, x_-), x_1^2 + x_2^2 + x_+^2 - x_-^2 = 0\} \quad (42)$$

et

$$\mathbb{P} = \{X = (x_1, x_2, x_+, x_-), x_+ - x_- + 1 = 0\} \quad (43)$$

de sorte que l'intersection $N \cap \mathbb{P}$ est constituée des points X de $\mathbb{R}^{3,1}$ de la forme

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{2} e_+ + \frac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{2} e_- \quad (44)$$

Se donner une représentation conforme du plan euclidien revient à se donner une horosphère $H(e_\infty, e_0)$ de $\mathbb{R}^{3,1}$ (cf. formule (41)). Pour cela il est nécessaire d'introduire le splitting défini par $E = e_\infty \wedge e_0$, c'est-à-dire la décomposition de $\mathbb{R}^{3,1}$ en somme directe :

$$\mathbb{R}^{3,1} = \pi_E^\perp(\mathbb{R}^{3,1}) \oplus \pi_E(\mathbb{R}^{3,1}) \quad (45)$$

Dans la suite, nous noterons

$$\varphi(e_\infty, e_0) : \mathbb{R}^2 \simeq \pi_E^\perp(\mathbb{R}^{3,1}) \longrightarrow H(e_\infty, e_0) \quad (46)$$

le plongement du plan euclidien dans sa représentation conforme défini par

$$\begin{aligned} \varphi(e_\infty, e_0)(x) &:= \varphi(e_\infty, e_0)(x_1, x_2) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)e_\infty + e_0 =: x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0 \end{aligned} \quad (47)$$

avec $e_\infty^2 = e_0^2 = 0$ et $e_\infty \cdot e_0 = -1$.

2.2.2. Les transformations de Möbius. — Un des résultats importants concernant ce modèle est qu'il permet de linéariser les transformations de Möbius. Ce qui suit est valable en toute généralité dans \mathbb{R}^n . Rappelons d'abord que le groupe de Möbius de l'espace \mathbb{R}^n est le groupe des difféomorphismes engendré par les transformations orthogonales, les dilatations, les translations et les inversions. Toute transformation de Möbius g se représente sous la forme d'une matrice de Vahlen (voir [1])

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (48)$$

par la formule

$$g(x) = (\sigma_{11}x + \sigma_{12})(\sigma_{21}x + \sigma_{22})^{-1}, \quad (49)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ où $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ et σ_{22} sont des verseurs de l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{n,0}$ satisfaisant : $\sigma_{11}\sigma_{12}^\dagger, \sigma_{12}\sigma_{22}^\dagger, \sigma_{21}\sigma_{22}^\dagger$ et $\sigma_{11}\sigma_{21}^\dagger$ appartiennent à \mathbb{R}^n et $\sigma_{11}\sigma_{22}^\dagger - \sigma_{12}\sigma_{21}^\dagger$ est un réel non nul (ici \dagger désigne l'anti-involution de l'algèbre de Clifford). On a alors le résultat suivant (voir [35]) :

Théorème. — Soit g une transformation de Möbius de matrice de Vahlen $[\sigma]$. Le verseur

$$\sigma = e_\infty(-e_0\sigma_{11} + \sigma_{12}) - e_0(\sigma_{21} + e_\infty\sigma_{22}) \quad (50)$$

satisfait

$$\sigma[x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0](\sigma^*)^{-1} = \mu_g(x)[g(x) + \frac{1}{2}g(x)^2e_\infty + e_0] \quad (51)$$

où

$$\mu_g(x) = (\sigma_{21}x + \sigma_{22})(\sigma_{21}^*x + \sigma_{22}^*)^\dagger \quad (52)$$

est la partie scalaire du produit $-e_\infty\sigma^*x\sigma^{-1}$ (ici, $*$ est l'involution de l'algèbre de Clifford).

On décrit concrètement les générateurs du groupe de Möbius de \mathbb{R}^2 de la façon suivante.

- Les réflexions : notons d'abord que $n \cdot (x - a) = 0$ est l'équation de l'hyperplan de \mathbb{R}^2 passant par a et de normal n . En posant $\delta = n \cdot a$ la n -distance séparant l'hyperplan de l'origine du plan, cette équation s'écrit $n \cdot x - \delta = 0$ et se traduit dans le modèle conforme *via* le vecteur

$$\sigma_{n,\delta} = n + \delta e_\infty \quad (53)$$

par $X \cdot \sigma_{n,\delta} = 0$. Ce même vecteur $\sigma_{n,\delta}$ décrit la réflexion $s_{n,\delta}$ par rapport à cet hyperplan à travers la formule

$$-\sigma_{n,\delta}(x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0)\sigma_{n,\delta}^{-1} = s_{n,\delta}(x) + \frac{1}{2}(s_{n,\delta}(x))^2e_\infty + e_0 \quad (54)$$

où l'on rappelle qu'une telle réflexion s'écrit

$$s_{n,\delta}(x) = -nxn + 2n\delta. \quad (55)$$

En d'autres termes, il s'agit d'une préservation de l'horosphère $H(e_\infty, e_0)$

$$-\sigma_{n,\delta}\varphi(e_\infty, e_0)(x)\sigma_{n,\delta}^{-1} = \varphi(e_\infty, e_0)(s_{n,\delta}(x)). \quad (56)$$

- Les translations : le verseur σ_a associé à une translation $\tau_a : x \mapsto x - a$ du plan est donné par

$$\sigma_a = 1 + (ae_\infty)/2 \quad (57)$$

Il s'agit bien d'un verseur puisque

$$\sigma_a = n(n + \delta e_\infty) \quad (58)$$

avec n unitaire et $a = 2\delta n$. On vérifie que

$$\left(1 + \frac{ae_\infty}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0\right)\left(1 + \frac{e_\infty a}{2}\right) = (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^2e_\infty + e_0 \quad (59)$$

Cette formule traduit le fait qu'une translation de vecteur $-a$ est obtenue par deux réflexions successives par rapport à des hyperplans parallèles orthogonaux au vecteur unitaire n et séparés d'une distance δ (avec les notations de (58)). Elle traduit également le fait que l'action du verseur σ_a préserve l'horosphère $H(e_\infty, e_0)$ ou encore que

$$\sigma_a \varphi(e_\infty, e_0)(x)(\sigma_a^*)^{-1} = \varphi(e_\infty, e_0)(x - a) \quad (60)$$

- Les rotations : soit $R(a, b)$ la rotation du plan composée des deux symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles D_a et D_b , où a et b sont des vecteurs unitaires normaux à D_a et D_b respectivement. Le verseur associé à cette rotation est

$$\sigma_{R(a,b)} = ab \quad (61)$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} ab(x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0)ba &= abxba + \frac{1}{2}(abxba)^2e_\infty + e_0 \\ &= R(a, b)(x) + \frac{1}{2}(R(a, b)(x))^2e_\infty + e_0 \end{aligned} \quad (62)$$

L'action du verseur $\sigma_{R(a,b)}$ préserve donc l'horosphère $H(e_\infty, e_0)$. De même que précédemment

$$\sigma_{R(a,b)} \varphi(e_\infty, e_0)(x)(\sigma_{R(a,b)}^*)^{-1} = \varphi(e_\infty, e_0)(R(a, b)(x)) \quad (63)$$

En particulier, à la rotation d'angle γ autour de l'origine de \mathbb{R}^2 correspond le verseur (c'est un spineur)

$$\sigma_\gamma = \exp[-(\gamma/2)e_1 \wedge e_2] = \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}(e_1 \wedge e_2) \quad (64)$$

On retrouve ici le fait que tout spineur de $\mathbb{R}_{3,1}$ est l'exponentielle d'un bivecteur, le bivecteur $e_1 \wedge e_2$ étant de carré -1 (voir les compléments du paragraphe 2.2.5).

- Les dilatations : on considère le verseur (c'est un spineur)

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \exp[(\eta/2)E] = \cosh(\eta/2) + \sinh(\eta/2)E \\ &= e^{\eta/2} \left[\frac{1+E}{2}\right] + e^{-\eta/2} \left[\frac{1-E}{2}\right] \end{aligned} \quad (65)$$

On vérifie en utilisant $E^2 = 1$ ainsi que les formules

$$Ee_\infty = -e_\infty E = -e_\infty \quad Ee_0 = -e_0 E = e_0 \quad ExE = x \quad (66)$$

que

$$\sigma_\eta e_\infty \sigma_\eta^{-1} = e^{-\eta} e_\infty \quad \text{et} \quad \sigma_\eta e_0 \sigma_\eta^{-1} = e^\eta e_0 \quad (67)$$

Ainsi

$$\sigma_\eta(x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0)\sigma_\eta^{-1} = e^\eta(e^{-\eta}x + \frac{1}{2}(e^{-\eta}x)^2e_\infty + e_0) \quad (68)$$

Soit encore

$$\sigma_\eta\varphi(e_\infty, e_0)(x)\sigma_\eta^{-1} = e^\eta\varphi(e_\infty, e_0)(e^{-\eta}x) \quad (69)$$

Pour voir l'image de x par la dilatation $D_\eta : x \mapsto e^{-\eta}x$, dans l'horosphère $H(e_\infty, e_0)$ il est donc nécessaire d'introduire le facteur d'échelle e^η . Comme

$$\sigma_\eta\varphi(e_\infty, e_0)(x)\sigma_\eta^{-1} = \varphi(e^{-\eta}e_\infty, e^\eta e_0)(x) \quad (70)$$

on peut également considérer l'image du point x par D_η comme x vue dans l'horosphère $H(e^{-\eta}e_\infty, e^\eta e_0)$.

Notons que si la dilatation est donnée par $D_\delta : x \mapsto \delta x$ où $\delta > 0$ le verueur qui lui est associé (équation (65)) s'écrit alors (pour $\delta = e^{-\eta}$)

$$\sigma_\delta = \exp[-\frac{\ln\delta}{2}E] = \cosh(\frac{\ln\delta}{2}) - \sinh(\frac{\ln\delta}{2})E. \quad (71)$$

– Les inversions : le cercle de centre c et de rayon r du plan euclidien est décrit par le vecteur

$$\sigma_{c,r} = (c + \frac{1}{2}c^2e_\infty + e_0) - \frac{1}{2}r^2e_\infty \quad (72)$$

à travers l'équation $X \cdot \sigma_{c,r} = 0$ (qui est équivalente à l'équation $(x - c)^2 = r^2$ du cercle).

L'inversion par rapport à ce cercle correspond dans le modèle conforme à la réflexion par rapport au vecteur $\sigma_{c,r}$ définie par

$$X = x + \frac{1}{2}x^2e_\infty + e_0 \mapsto -\sigma_{c,r}X\sigma_{c,r}^{-1} = X - 2(\sigma_{c,r} \cdot X)\sigma_{c,r}^{-1} \quad (73)$$

Dans le cas particulier du cercle de centre l'origine et de rayon 1, on obtient

$$-\sigma_{0,1}X\sigma_{0,1}^{-1} = x^2(x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2}e_\infty + e_0) \quad (74)$$

En notant $I(0, 1)$ l'inversion de centre l'origine et de rayon 1 :

$$-\sigma_{0,1}\varphi(e_\infty, e_0)(x)\sigma_{0,1}^{-1} = x^2\varphi(e_\infty, e_0)(I(0, 1)(x)) \quad (75)$$

Là encore, on a besoin du facteur d'échelle x^2 pour rester dans l'horosphère $H(e_\infty, e_0)$. Dans le cas général d'une inversion $I(c, r)$ de centre c et de rayon r , la formule est

$$-\sigma_{c,r}X\sigma_{c,r}^{-1} = \left(\frac{x-c}{r}\right)^2 [I(c, r)(x) + \frac{1}{2}(I(c, r)(x))^2e_\infty + e_0] \quad (76)$$

Soit

$$-\sigma_{c,r}\varphi(e_\infty, e_0)(x)\sigma_{c,r}^{-1} = \left(\frac{x-c}{r}\right)^2 \varphi(e_\infty, e_0)(I(c, r)(x)) \quad (77)$$

et dans ce cas le facteur d'échelle est $((x-c)/r)^2$. Pour mémoire

$$I(c, r)(x) = \frac{r^2}{x-c} + c \quad (78)$$

Comme précédemment on peut considérer l'image du point x sous l'inversion $I(c, r)$ comme le point x vu dans l'horosphère $H((r/(x-c))^2 e_\infty, ((x-c)/r)^2 e_0)$. Pour le voir, on peut décomposer $I(c, r)$ en la composée de la translation $x \mapsto x - c$ représentée par

$$x + \frac{1}{2}x^2 e_\infty + e_0 \in H(e_\infty, e_0) \mapsto (x - c) + \frac{1}{2}(x - c)^2 e_\infty + e_0 \in H(e_\infty, e_0) \quad (79)$$

suivie de l'inversion de centre l'origine et de rayon r représenté par le changement d'horosphères

$$(x - c) + \frac{1}{2}(x - c)^2 e_\infty + e_0 \in H(e_\infty, e_0) \mapsto (x - c) + \frac{1}{2}(x - c)^2 \left(\frac{r}{x-c}\right)^2 e_\infty + \left(\frac{x-c}{r}\right)^2 e_0 \in H\left(\left(\frac{r}{x-c}\right)^2 e_\infty, \left(\frac{x-c}{r}\right)^2 e_0\right) \quad (80)$$

suivie de la translation $x \mapsto x + c$ vue dans cette dernière horosphère, i.e. correspondant au verneur $\sigma_{-c} = 1 - (c(r/(x-c))^2 e_\infty)/2$.

2.2.3. Les splittings conformes. — Rappelons qu'un splitting conforme est la donnée d'une décomposition

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^{3,1} & \\ \pi_E^\perp \swarrow & & \searrow \pi_E \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^{1,1} \end{array} \quad (81)$$

associée à un pseudoscalaire $E = e_+ e_- = e_+ \wedge e_- = e_\infty \wedge e_0$ (cf. formules (39) et (40)). Un splitting conforme définit une représentation conforme

$$\begin{array}{ccc} & H(e_\infty, e_0) & \\ \pi_E^\perp \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \varphi(e_\infty, e_0) & & \\ & \mathbb{R}^2 & \end{array} \quad (82)$$

du plan euclidien.

La composante neutre du groupe des changements de base $(e_+, e_-) \mapsto (e'_+, e'_-)$ qui respectent la métrique de Minkowski est constituée des rotations hyperboliques

$$\begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \quad (83)$$

dans la base canonique. Ces dernières agissent sur les vecteurs e_∞ et e_0 par

$$(e_\infty, e_0) \mapsto (\alpha e_\infty, \alpha^{-1} e_0) \quad (84)$$

où $\alpha = e^\varphi$. Notons que d'après ce qui précède, on a la proposition suivante.

Proposition. — Il y a équivalence entre : (i) $H(e_\infty, e_0) \cap H(\alpha e_\infty, \alpha^{-1} e_0) \neq \emptyset$, (ii) $H(e_\infty, e_0) = H(\alpha e_\infty, \alpha^{-1} e_0)$ et (iii) $\alpha = 1$.

On obtient ainsi une famille à un paramètre d'horosphères. Parmi les transformations de Möbius du plan euclidien décrites précédemment, certaines donnent lieu à des transformations qui préservent chacune de ces horosphères, d'autres envoient une horosphère donnée sur une horosphère différente. Voici comment appliquer la formule (51) dans les cas qui nous intéressent.

D'après la formule (70), l'action du verseur σ_η induit un changement de représentations conformes

$$\begin{array}{ccc} H(e_\infty, e_0) & \xrightarrow{\sigma_\eta} & H(e'_\infty, e'_0) \\ \varphi(e_\infty, e_0) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \pi_E^\perp & & \pi_E^\perp \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \varphi(e'_\infty, e'_0) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (85)$$

avec $e'_\infty = e^{-\eta}e_\infty$ et $e'_0 = e^\eta e_0$.

De la même façon le verseur $\sigma_{0,r}$ associé à une inversion de centre l'origine et de rayon r induit un changement de représentations conformes

$$\begin{array}{ccc} H(e_\infty, e_0) & \xrightarrow{\sigma_{0,r}} & H\left(\frac{r^2}{x^2}e_\infty, \frac{x^2}{r^2}e_0\right) \\ \varphi(e_\infty, e_0) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \pi_E^\perp & & \pi_E^\perp \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \varphi\left(\frac{r^2}{x^2}e_\infty, \frac{x^2}{r^2}e_0\right) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (86)$$

Dans ce dernier cas, le facteur α de la formule (84) est une fonction du point courant x .

Pour les transformations de Möbius qui sont des déplacements du plan euclidien, la situation est différente. Les transformations correspondantes sont iso-horosphériques, c'est-à-dire fixent les horosphères $H(e_\infty, e_0)$. Dans le cas d'une translation, on a

$$\begin{array}{ccc} H(e_\infty, e_0) & \xrightarrow{\sigma_a} & H(e_\infty, e_0) \\ \varphi(e_\infty, e_0) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \pi_E^\perp & & \pi_E^\perp \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \varphi(e_\infty, e_0) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tau_a} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (87)$$

où τ_a désigne la translation $x \mapsto \tau_a(x) = x - a$.

Pour une rotation le diagramme est le suivant

$$\begin{array}{ccc} H(e_\infty, e_0) & \xrightarrow{\sigma_{R(a,b)}} & H(e_\infty, e_0) \\ \varphi(e_\infty, e_0) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \pi_E^\perp & & \pi_E^\perp \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) \varphi(e_\infty, e_0) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{R(a,b)} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (88)$$

en reprenant les notations de la formule (63).

Il apparaît donc que les verseurs σ_η et $\sigma_{0,r}$ agissent comme "des changements de représentations au dessus de l'identité" alors que les verseurs σ_a et $R_{a,b}$ agissent comme des transformations de \mathbb{R}^2 "à représentation constante".

On a vu que les changements de base qui conservent la métrique de Minkowski (les rotations hyperboliques, équation (83)) agissent par

$$(e_\infty, e_0) \mapsto (\alpha e_\infty, \alpha^{-1} e_0) \quad (89)$$

Ils correspondent donc aux changements de représentations conformes (au dessus de l'identité) induits par les dilatations (avec $e^{-\psi} = \alpha$). Nous décrivons dans le paragraphe suivant une version à deux paramètres du modèle conforme en considérant une famille de métriques sur l'espace \mathbb{R}^4 .

2.2.4. Les modèles conformes généralisés (avec changements de métriques).

— Pour β appartenant à $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on considère la rotation ρ_β de l'espace \mathbb{R}^2 de matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (90)$$

dans la base canonique.

Proposition. — La métrique G_β obtenue en transportant la métrique de Minkowski standard par la rotation ρ_β est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (91)$$

En effet

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (92)$$

Proposition. — On note

$$e_{+,\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad e_{-,\beta} = \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad (93)$$

$$e_{\infty,\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta - \sin \beta \\ \sin \beta + \cos \beta \end{pmatrix} \quad e_{0,\beta} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta + \sin \beta \\ \sin \beta - \cos \beta \end{pmatrix} \quad (94)$$

alors $e_{+,\beta}^2 = 1$, $e_{-,\beta}^2 = -1$, $e_{+,\beta} \cdot e_{-,\beta} = 0$ et $e_{\infty,\beta}^2 = e_{0,\beta}^2 = 0$, $e_{\infty,\beta} \cdot e_{0,\beta} = -1$ pour la métrique G_β .

Plus précisément, les vecteurs introduits dans la proposition précédente sont les images par la rotation ρ_β des vecteurs e_+ , e_- , e_∞ et e_0 du modèle conforme standard.

Dans la suite \mathbb{R}_β^4 désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de la métrique $Q_\beta = Id \oplus G_\beta$.

Proposition. — L'horosphère $H(e_{\infty,\beta}, e_{0,\beta})$ est définie par

$$H(e_{\infty,\beta}, e_{0,\beta}) = \{X \in \mathbb{R}_\beta^4, X^2 = 0, X \cdot e_{\infty,\beta} = -1\} \quad (95)$$

Le plongement du plan euclidien dans cette représentation conforme est donné par

$$\varphi_\beta(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)e_{\infty,\beta} + e_{0,\beta} \quad (96)$$

De plus, le groupe (la composante neutre du groupe) des transformations de l'espace \mathbb{R}^2 qui conservent G_β est le conjugué du groupe des rotations hyperboliques par la rotation ρ_β . Ce groupe est donc formé des matrices du type

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (97)$$

où β est fixé et φ appartient à \mathbb{R} .

Il est à noter que les calculs effectués dans le cas où $\beta = 0$ restent valables dans le cas général (β quelconque). En particulier, et de même que précédemment (équation (89)),

comme $E_\beta = e_{\infty,\beta} \wedge e_{0,\beta}$ satisfait $E_\beta^2 = 1$ alors la dilatation $D_\eta : x \mapsto e^{-\eta}x$ de \mathbb{R}^2 peut être vue comme la transformation

$$(e_{\infty,\beta}, e_{0,\beta}) \mapsto (\alpha e_{\infty,\beta}, \alpha^{-1} e_{0,\beta}) \quad (98)$$

au dessus de l'identité, où $\alpha = e^{-\eta}$. Cette dernière est induite par une transformation du type (97). On adopte désormais les notations suivantes :

$$\Lambda = \{\mathbb{R}_\beta^4(e_{\infty,\beta}, e_{0,\beta}), \beta \in S^1\} \quad (99)$$

désigne l'ensemble des splittings conformes avec variations de métriques. La composante neutre du groupe des transformations linéaires qui préservent Q_β est noté Iso_β . On note aussi $\mathbb{R}_{4,\beta}$ l'algèbre de Clifford associée à $(\mathbb{R}_\beta^4, Q_\beta)$. Enfin, l'horosphère de \mathbb{R}_β^4 associée à la base isotrope $\{\alpha e_{\infty,\beta}, \alpha^{-1} e_{0,\beta}\}$ de (\mathbb{R}^2, G_β) (donc correspondant aux deux paramètres α et β) est

$$H(\alpha, \beta) = H(\alpha e_{\infty,\beta}, \alpha^{-1} e_{0,\beta}) \quad (100)$$

où $e_{\infty,\beta}$ et $e_{0,\beta}$ sont donnés par les formules (94) et α appartient à \mathbb{R}_+^* .

Proposition. — Pour chaque β de S^1 :

- le produit semi-direct $(\mathbb{R}_+^* \times SO(2, \mathbb{R})) \ltimes \mathbb{R}^2$ s'identifie à un sous-groupe de Iso_β via l'application

$$D_\eta \mapsto [\sigma_\eta : H(\alpha, \beta) \longrightarrow H(e^{-\eta}\alpha, \beta)] \quad (101)$$

$$R(a, b) \mapsto [\sigma_{R(a,b)} : H(\alpha, \beta) \longrightarrow H(\alpha, \beta)] \quad (102)$$

$$\tau_a \mapsto [\sigma_a : H(\alpha, \beta) \longrightarrow H(\alpha, \beta)] \quad (103)$$

- la rotation ρ_β (cf. (90)) induit une isométrie de $H(\alpha, \varphi)$ vers $H(\alpha, \varphi + \beta)$.

Nous résumons l'ensemble de cette discussion sous la forme suivante.

Proposition. — Une représentation conforme généralisée du plan euclidien est la donnée d'une horosphère $H(\alpha, \beta)$ de l'espace \mathbb{R}_β^4 muni de la métrique $Q_\beta = Id \oplus G_\beta$ où

$$G_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (104)$$

Les déplacements du plan euclidien induisent des verseurs de l'algèbre de Clifford $\mathbb{R}_{4,\beta}$ qui sont iso-horosphériques. Ils agissent donc à représentation conforme généralisée constante. Les dilatations du plan euclidien induisent des changements de représentations conservant la métrique Q_β . Ces derniers consistent simplement à dilater le vecteur $\alpha e_{\infty,\beta}$. Enfin les rotations ρ_φ de \mathbb{R}^4 ayant pour matrice

$$Id \oplus \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (105)$$

induisent des changements de représentations qui ne préservent pas la métrique Q_β : ces derniers envoient de façon isométrique l'horosphère $H(\alpha, \beta)$ sur $H(\alpha, \beta + \varphi)$ de \mathbb{R}_β^4 et $\mathbb{R}_{\beta+\varphi}^4$ respectivement.

2.2.5. Compléments. — Reprenons l'exemple de la translation donnée par le verseur

$$\sigma_a = n(n + \delta e_\infty) = 1 + (ae_\infty)/2 \quad (106)$$

On vérifie facilement que

$$\sigma_a^{-1} = (n + \delta e_\infty)n = 1 + (e_\infty a)/2 \quad (107)$$

Cet exemple illustre bien l'intérêt de considérer le modèle conforme pour étendre aux transformations non linéaires (ici une transformation affine) le résultat décrit par le théorème de Cartan Dieudonné. Il illustre aussi la facilité avec laquelle on compose les transformations géométriques en multipliant les verseurs correspondants. En effet le verseur σ_a est le produit du verseur n avec le verseur $(n + \delta e_\infty)$. L'action de σ_a , par “sandwiching”, correspond à la composition de deux réflexions du type (55).

L'action par “sandwiching” est bien connue dans le contexte plus familier du groupe $Spin(n)$ au travers du résultat suivant : la représentation

$$p : Spin(n) \longrightarrow GL(n; \mathbb{R}) \quad (108)$$

qui à $\sigma \in Spin(n)$ associe l'application

$$\begin{aligned} p_\sigma : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \sigma u \sigma^{-1} \end{aligned} \quad (109)$$

est un morphisme de groupes surjectif de $Spin(n)$ dans $SO(n, \mathbb{R})$ de noyau isomorphe à \mathbb{Z}_2 .

Pour $n = 3$, ce résultat se traduit de la façon suivante. Soit \mathbb{H}^1 le groupe des quaternions de module 1, notons \sharp l'application qui à un vecteur $u = (u_1, u_2, u_3)$ de \mathbb{R}^3 associe le quaternion imaginaire pur $u^\sharp = iu_1 + ju_2 + ku_3$ et \flat son application réciproque. Alors l'application

$$p : \mathbb{H}^1 \longrightarrow SO(3, \mathbb{R}) \quad (110)$$

qui à $q \in \mathbb{H}^1$ associe l'application

$$p_q : u \longmapsto (q(u^\sharp)q^{-1})^\flat \quad (111)$$

est un morphisme de groupes surjectif de noyau isomorphe à \mathbb{Z}_2 .

Il est notoire que l'encodage des rotations de \mathbb{R}^3 par les quaternions de module 1 est particulièrement efficace en informatique graphique (voir, par exemple, [23]). Les calculs du paragraphe 2.2.2 relèvent de la même philosophie.

Il est à noter aussi que la représentation des transformations géométriques que l'on a décrite précédemment permet d'unifier les différentes structures de groupes. Le produit semi-direct $SO(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ mélange un groupe pour la composition et un groupe pour l'addition. L'utilisation du formalisme des verseurs permet d'encoder ces deux structures différentes à l'aide du même produit.

Nous avons utilisé implicitement un des autres avantages du modèle conforme qu'il est important de souligner. Les objets classiques de la géométrie sont décrits par des éléments de l'algèbre et non plus par des équations. À titre d'exemple, la sphère de \mathbb{R}^2 de rayon r et de centre c correspond au vecteur

$$\sigma_{c,r} = c + e_0 + \frac{(c^2 - r^2)}{2} e_\infty \quad (112)$$

(voir la formule (72) du paragraphe 2.2.2). En outre, un hyperplan ayant n comme vecteur normal et une n -distance de l'origine δ est vu comme une sphère passant par le point à l'infini et est représenté par le vecteur

$$\sigma_{n,\delta} = n + \delta e_\infty \quad (113)$$

de l'équation (53).

Terminons ce chapitre par une remarque concernant la structure de l'ensemble des bivecteurs de $\mathbb{R}_{p,q}$. Le produit

$$A \times B = \frac{1}{2}(AB - BA) \quad (114)$$

où A et B sont des bivecteurs est encore un bivecteur. Ce produit est bilinéaire, anti-symétrique et satisfait l'identité de Jacobi

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C + B \times (A \times C) \quad (115)$$

L'ensemble des bivecteurs, qui est par ailleurs un espace vectoriel, est donc une algèbre de Lie. Il s'agit en fait de l'algèbre de Lie du groupe $Spin^+(p, q)$. Ainsi, l'exponentielle (au sens groupe de Lie du terme) d'un bivecteur est un spineur. Un exemple type est celui de la fomule (64) :

$$\sigma_\gamma = \exp[-(\gamma/2)e_1 \wedge e_2] \quad (116)$$

qui décrit la rotation du plan de centre l'origine et d'angle γ .

On peut exprimer l'exponentielle d'un bivecteur A suivant sa signature:

$$\exp(A) = \begin{cases} \cos \mu + A \frac{\sin \mu}{\mu} = \cos \mu + U \sin \mu & \text{si } A^2 = -\mu^2 \neq 0 \\ 1 + A & \text{si } A^2 = 0 \\ \cosh \mu + A \frac{\sinh \mu}{\mu} = \cosh \mu + U \sinh \mu & \text{si } A^2 = \mu^2 \neq 0 \end{cases} \quad (117)$$

où μ est un scalaire non nul et $U = \frac{A}{\mu}$ est un bivecteur unitaire. Ainsi, le spineur de l'exemple précédent s'écrit (comme on l'a vu dans l'équation (64))

$$\sigma_\gamma = \cos \gamma/2 - (e_1 \wedge e_2) \sin \gamma/2. \quad (118)$$

Inversement, la forme exponentielle d'un spineur n'existe pas pour toutes les signatures (p, q) , mais seulement pour les signatures euclidienne (et anti-euclidienne) ainsi que les signatures de Minkowski. En particulier, tout spineur de $\mathbb{R}_{3,1}$ est l'exponentielle d'un bivecteur:

$$Spin^+(3, 1) = \{\exp(\mu U), \mu \in \mathbb{R} \text{ et } U \text{ est un bivecteur unitaire}\} \quad (119)$$

CHAPITRE 3

MODÉLISATIONS DANS L'ESPACE DE MINKOWSKI $\mathbb{R}^{3,1}$

Une partie des travaux décrits dans ce chapitre a fait l'objet d'une communication orale lors de la conférence AGACSE de 2012 et d'une publication dans la revue *Advances in Applied Clifford Algebras* (voir [18]).

3.1. Le modèle sténopé de caméra

Cette section est consacrée à la description du modèle sténopé de caméra que nous utilisons dans la suite.

3.1.1. Les paramètres extrinsèques de la caméra. — On suppose ici que l'objet planaire d'intérêt est plongé dans le sous-espace $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ de \mathbb{R}^3 , ce dernier étant muni d'un repère orthonormé $\{O, (e_1, e_2, e_3)\}$. On note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées associées à ce repère. Nous supposons de plus que l'image $D^0 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ du plongement contient l'origine O . Dans la suite, nous appellerons repère de l'objet le repère $\{O, (e_1, e_2, e_3)\}$.

Dans ce travail, nous ne nous intéressons pas au problème de calibration. C'est pourquoi nous ne considérons que les seuls paramètres extrinsèques de caméra. Ces paramètres sont décrits de la façon suivante (voir, par exemple, [52]).

Définition. — *Les paramètres extrinsèques $(\theta, \phi, \psi, \lambda, t_1, t_2)$ du modèle sténopé de caméra sont (voir Fig. 1 de ce chapitre) :*

- la latitude qui est l'angle θ entre l'axe e_3 du repère de l'objet et l'axe optique de la caméra, avec $0 \leq \theta < \pi/2$;
- la longitude ϕ (pour $\theta \neq 0$) qui est l'angle entre l'axe e_1 du repère de l'objet et la projection orthogonale de l'axe optique sur le plan (x_1, x_2) , avec $0 \leq \phi < 2\pi$;
- l'angle ψ qui est l'angle de rotation de la caméra autour de son axe optique, avec $0 \leq \psi < 2\pi$;
- le paramètre de zoom λ , c'est-à-dire la distance entre le centre optique C de la caméra et le point d'intersection O' de l'axe optique avec le plan de l'objet, avec $\lambda > 0$;
- les deux paramètres t_1 et t_2 de la translation de la caméra parallèlement au plan (x_1, x_2) , c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{OO'} = t_1 e_1 + t_2 e_2$.

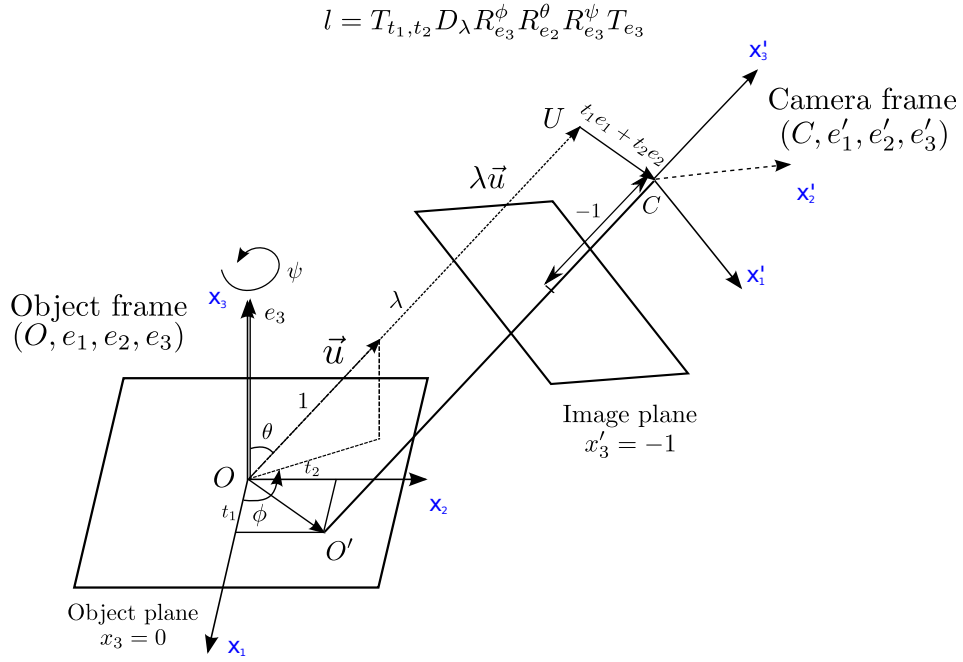


FIGURE 1. Le repère $\{O, (e_1, e_2, e_3)\}$ de l'objet, le repère $\{C, (e'_1, e'_2, e'_3)\}$ de la caméra, les 6 paramètres extrinsèques et l'expression de la transformation l en dimension 3 qui permet de passer du repère objet au repère de la caméra.

Lorsque les deux paramètres de la translation t_1 et t_2 sont nuls, les trois paramètres λ , θ et ϕ ne sont autres que les coordonnées sphériques du centre optique de la caméra. Le paramètre de zoom λ mesure évidemment l'éloignement de la caméra par rapport au plan objet. Lorsque le paramètre θ est égal à 0, on qualifie l'image de frontale ; on dit aussi que le point de vue est frontal. Si θ est non nul la longitude ϕ peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0, 2\pi[$; nous supposons que c'est également le cas lorsque l'image est frontale.

Les six paramètres du modèle sténopé de caméra sont les paramètres de la transformation en dimension 3 qui permet de passer du repère de l'objet $\{O, (e_1, e_2, e_3)\}$ au repère $\{C, (e'_1, e'_2, e'_3)\}$ de la caméra. Voici comment expliciter cette transformation :

- on commence par traduire le plan objet à l'aide de la translation T_{e_3} de vecteur e_3 ;
- on applique ensuite la rotation $R_{e_3}^{\psi}$ d'angle ψ et d'axe e_3 correspondant à la rotation de la caméra autour de son axe optique ;
- pour prendre en compte les paramètres de latitude θ et de longitude ϕ , on applique respectivement la rotation $R_{e_2}^{\theta}$, d'angle θ et d'axe e_2 , et la rotation $R_{e_3}^{\phi}$, d'angle ϕ et d'axe e_3 ;
- l'action du paramètre de zoom λ se fait au travers de la dilatation D_{λ} de rapport λ ;

La composée de ces transformations envoie l'origine O sur le point

$$U = D_{\lambda} R_{e_3}^{\phi} R_{e_2}^{\theta} R_{e_3}^{\psi} T_{e_3}(O) \quad (1)$$

tel que (voir Fig. 1)

$$\lambda \vec{u} = \vec{OU} = \lambda \sin \phi \sin \theta e_1 + \lambda \cos \phi \sin \theta e_2 + \lambda \sin \phi e_3 \quad (2)$$

– Pour terminer, on applique la translation T_{t_1, t_2} de vecteur $(t_1, t_2, 0)$.

La transformation cherchée est donc la composée

$$l = T_{t_1, t_2} D_\lambda R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi T_{e_3} \quad (3)$$

Cette transformation l n'est autre que la composée d'une rotation de dimension trois $R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi$ ayant pour angles d'Euler (ψ, θ, ϕ) et de la translation de vecteur \vec{OC} où C est l'image de O par l , *i.e.*

$$l(\vec{OM}) = R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi(\vec{OM}) + \vec{OC} \quad (4)$$

pour tout M de l'espace affine.

Le repère $\{C, (e'_1, e'_2, e'_3)\}$ de la caméra est donc défini par : $C = l(O)$ et

$$\begin{cases} e'_1 = l(e_1) - \vec{OC} = R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi(e_1) \\ e'_2 = l(e_2) - \vec{OC} = R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi(e_2) \\ e'_3 = l(e_3) - \vec{OC} = R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi(e_3) \end{cases} \quad (5)$$

Le plan image est donné dans ce repère de la caméra par l'équation $x'_3 = -1$.

Soit M un point du plan $x_3 = 0$ et soit $\vec{OM} = x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ le vecteur correspondant dans le repère de l'objet. Déterminer les coordonnées de M dans le repère de la caméra revient à déterminer les coordonnées du vecteur \vec{CM} dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Soit $\vec{OM}' = l^{-1}(\vec{OM})$. Comme

$$\vec{OM}' = R_{e_3}^{-\psi} R_{e_2}^{-\theta} R_{e_3}^{-\phi}(\vec{OM} - \vec{OC}) = R_{e_3}^{-\psi} R_{e_2}^{-\theta} R_{e_3}^{-\phi}(\vec{CM}) \quad (6)$$

et puisque la transformation $R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi$ est orthogonal, on en déduit que

$$\begin{aligned} \vec{OM}' \cdot e_i &= [R_{e_3}^{-\psi} R_{e_2}^{-\theta} R_{e_3}^{-\phi}(\vec{CM})] \cdot e_i \\ &= \vec{CM} \cdot [R_{e_3}^\phi R_{e_2}^\theta R_{e_3}^\psi(e_i)] \\ &= \vec{CM} \cdot e'_i \end{aligned} \quad (7)$$

pour $i = 1, 2, 3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{CM} &= (\vec{CM} \cdot e'_1) e'_1 + (\vec{CM} \cdot e'_2) e'_2 + (\vec{CM} \cdot e'_3) e'_3 \\ &= (\vec{OM}' \cdot e_1) e_1 + (\vec{OM}' \cdot e_2) e_2 + (\vec{OM}' \cdot e_3) e_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Ces calculs montrent que les coordonnées de M' dans le repère de l'objet coïncident avec les coordonnées de M dans le repère de la caméra ou en d'autres termes, les coordonnées du vecteur \vec{CM} dans la base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ coïncident avec les coordonnées du vecteur \vec{OM}' dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Compte tenu de (7), la projection de \vec{CM} sur le plan image $x'_3 = -1$ est identifié à la projection de \vec{OM}' sur le plan $x_3 = -1$ car ces deux plans sont canoniquement identifiés à \mathbb{R}^2 . Nous nous plaçons désormais dans le repère de l'objet.

Notons Π la projection sur le plan $x_3 = -1$ définie par

$$\Pi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = -\frac{x_1}{x_3}e_1 - \frac{x_2}{x_3}e_2 - e_3 \quad (9)$$

si $x_3 \neq 0$. Les coordonnées d'un point de l'image x_{img} dans le repère de la caméra sont données par

$$x_{img} = \Pi(x') \quad (10)$$

où $x' = l^{-1}(x)$ et ce pour tout x tel que le vecteur x' ne soit pas parallèle au plan $x_3 = -1$. On vérifie que

$$x_{img} = R_{e_3}^{-\psi}(\Pi T_{-e_3} R_{e_2}^{-\theta}) R_{e_3}^{-\phi} D_{\lambda^{-1}} T_{-t_1, -t_2}(x) \quad (11)$$

3.1.2. Les distorsions perspectives. — L'égalité précédente (11) permet d'interpréter le modèle sténopé de caméra dans l'espace homogène de dimension deux et d'introduire la notion de distorsion perspective.

L'application $\Pi T_{-e_3} R_{e_2}^{-\theta}$ envoie le vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2$ sur le vecteur de \mathbb{R}^3 de coordonnées

$$\Pi T_{-e_3} R_{e_2}^{-\theta}(x) = \frac{x_1 \cos \theta}{1 - x_1 \sin \theta} e_1 + \frac{x_2}{1 - x_1 \sin \theta} e_2 - e_3 \quad (12)$$

et ce pour $x_1 \neq 1/\sin \theta$. En omettant la dernière coordonnée, c'est-à-dire en identifiant le plan $x_3 = -1$ avec le plan euclidien, cette correspondance devient

$$x_1e_1 + x_2e_2 \mapsto \frac{x_1 \cos \theta}{1 - x_1 \sin \theta} e_1 + \frac{x_2}{1 - x_1 \sin \theta} e_2 \quad (13)$$

Pour tenir compte des points à l'infini, on considère l'homogénéisation (en ajoutant un vecteur supplémentaire noté e_3)

$$x_1e_1 + x_2e_2 + e_3 \mapsto \frac{x_1 \cos \theta}{1 - x_1 \sin \theta} e_1 + \frac{x_2}{1 - x_1 \sin \theta} e_2 + e_3 \quad (14)$$

Définition (Distorsion perspective). — *L'application*

$$h_\theta = \Pi T_{-e_3} R_{e_2}^{-\theta} \quad (15)$$

définie par

$$x_1e_1 + x_2e_2 + e_3 \mapsto \frac{x_1 \cos \theta}{1 - x_1 \sin \theta} e_1 + \frac{x_2}{1 - x_1 \sin \theta} e_2 + e_3 \quad (16)$$

est la distorsion perspective correspondant à la latitude θ . Elle est représentée par la matrice 3×3

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Évidemment, lorsque $\theta = 0$, h_θ est l'identité : il n'y a pas de distorsion perspective pour une image frontale. L'inverse de la matrice M_θ est la matrice

$$M_\theta^{-1} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (18)$$

Dans le modèle homogène on peut oublier le facteur $1/\cos\theta$; c'est la matrice représentant l'inverse h_θ^{-1} de la distorsion perspective h_θ . En reprenant la formule (11), on obtient la proposition suivante.

Proposition (Modèle sténopé de caméra). — *Une image I dans le modèle sténopé de caméra est donnée par*

$$I = I^0 \circ k_0^{-1} \quad (19)$$

où

- $I^0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une image frontale de paramètres extrinsèques $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ représentant la réflectance de l'objet (voir [46]) ;
- $k_0 = R_{-\psi} h_\theta R_{-\phi} D_{\lambda^{-1}} T$;
- T est une translation du plan ;
- R_ψ et R_ϕ sont des rotations du plan de centre l'origine et d'angle ψ et ϕ respectivement ;
- D_λ est une dilatation de centre l'origine et de rapport λ ;
- h_θ est la distorsion perspective correspondant à la latitude θ .

Nous ne considérons ici que des images en niveau de gris : I_0 est à valeurs dans \mathbb{R} . On peut facilement étendre cette proposition pour les images multi-canaux.

Comme nous l'avons déjà souligné, les distorsions perspectives vont jouer un rôle essentiel dans la suite de notre étude.

Définition. — *L'ensemble*

$$h_\theta(\mathbb{R}^2) = \{[x_1 \cos\theta : x_2 : -x_1 \sin\theta + 1] \in \mathbb{P}_2\mathbb{R}\} \quad (20)$$

est appelé plan perspectif associé à la latitude θ .

Ce plan est strictement inclus dans $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ et contient les points à l'infini de coordonnées homogènes $[\cot\theta : x_2 : 0]$ (pour $x_1 = 1/\sin\theta$).

Pour décrire complètement l'ensemble de définition d'une image dans le modèle sténopé de caméra, il faut également prendre en compte l'angle ψ de la rotation de la caméra autour de son axe. Compte tenu de la formule (19), nous adoptons les deux définitions suivantes.

Définition (Représentation projective d'une image). — *Une image est la donnée d'une application*

$$I_{\psi,\theta} : R_{-\psi} h_\theta(\mathbb{R}^2) \longmapsto \mathbb{R} \quad (21)$$

définie sur le domaine $R_{-\psi} h_\theta(\mathbb{R}^2)$ de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ où θ est la latitude de la caméra, $\psi \in [0, 2\pi[$ est l'angle de rotation de la caméra autour de l'axe optique et $R_{-\psi}$ est la rotation d'angle $(-\psi)$.

Ainsi, à toute image $I_{\psi,\theta}$ définie sur $R_{-\psi} h_\theta(\mathbb{R}^2)$, on associe une image frontale I_0 donnée par

$$\begin{aligned} I_0 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto I_{\psi,\theta} \circ R_{-\psi} h_\theta(x). \end{aligned} \quad (22)$$

Étant donné deux images I_{ψ_1, θ_1} et I_{ψ_2, θ_2} , leurs images frontales I_0^1 et I_0^2 sont liées par une similitude affine directe f tel que

$$I_0^1 = I_0^2 \circ f. \quad (23)$$

D'où la définition:

Définition. — Un changement de point de vue est la donnée de deux rotations de plans perspectifs $R_{-\psi_1} h_{\theta_1}(\mathbb{R}^2)$ et $R_{-\psi_2} h_{\theta_2}(\mathbb{R}^2)$, et d'une homographie de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ dont la restriction

$$k : R_{-\psi_1} h_{\theta_1}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow R_{-\psi_2} h_{\theta_2}(\mathbb{R}^2) \quad (24)$$

à $R_{-\psi_1} h_{\theta_1}(\mathbb{R}^2)$ s'écrit :

$$k = R_{-\psi_2} h_{\theta_2} f (R_{-\psi_1} h_{\theta_1})^{-1} \quad (25)$$

où f est une similitude affine directe de \mathbb{R}^2 .

On retrouve en particulier les 8 paramètres du groupe des homographies de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ au travers des 4 paramètres du groupe des similitudes directes et des 4 paramètres encodant les rotations des deux plans perspectifs. Les changements de points de vue au cas de deux images frontales ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) correspondent à des similitudes directes. On note Γ l'ensemble des homographies k données par les équations (24) et (25).

3.2. Le modèle conforme de la caméra sténopée

Le but ici est de représenter les homographies de Γ , c'est-à-dire les changements de points de vue, par des transformations relevant du cadre géométrique décrit dans le paragraphe 2.2.

3.2.1. Plans perspectifs et horosphères. — On adopte dans la suite de ce chapitre les notations suivantes :

$$e_{\infty, \alpha} = \alpha e_{\infty} \quad e_{0, \alpha} = \alpha^{-1} e_0 \quad (26)$$

où $\alpha \neq 0$ et e_{∞} et e_0 sont donnés respectivement par les équations (31) et (32) du paragraphe 2.2.1. Le plongement de \mathbb{R}^2 associé s'écrit

$$\varphi_{\alpha} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H_{\alpha} \quad (27)$$

avec

$$\begin{aligned} X_{\alpha} &:= \varphi_{\alpha}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) e_{\infty, \alpha} + e_{0, \alpha} \\ &:= x + \frac{1}{2} x^2 e_{\infty, \alpha} + e_{0, \alpha} \end{aligned} \quad (28)$$

et

$$H_{\alpha} = \{X \in \mathbb{R}^{3,1}, X_{\alpha}^2 = 0, X_{\alpha} \cdot e_{\infty, \alpha} = -1\} \quad (29)$$

En reprenant la description des transformations de Möbius (théorème du paragraphe 2.2.2.), on constate qu'à toute similitude directe f correspond une bijection de l'horosphère H_{α} dans elle-même,

$$X_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(x) \longmapsto \mu_{f(x)}^{-1} \sigma_{f, \alpha} X_{\alpha} (\sigma_{f, \alpha}^*)^{-1} = f(x) + \frac{1}{2} [f(x)]^2 e_{\infty, \alpha} + e_{0, \alpha} \quad (30)$$

où $\mu_{f(x)}$ est une constante (l'inverse du rapport de f) et ce pour tout $\alpha \neq 0$. Dans (30) $\sigma_{f, \alpha}$ désigne le verneur associé à f dans le modèle conforme défini par $e_{\infty, \alpha}$ et $e_{0, \alpha}$.

La restriction à \mathbb{R}^2 d'une distorsion perspective h_θ , pour $\theta \neq 0$, n'est pas une transformation de Möbius car elle produit des déformations perspectives et ne conserve par conséquent pas les angles. Il n'est donc pas possible de la représenter par l'action d'un verneur.

C'est pourquoi nous proposons dans ce qui suit d'établir une correspondance entre les plans perspectifs $h_\theta(\mathbb{R}^2)$ de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ et les horosphères H_α de $\mathbb{R}^{3,1}$ de telle sorte qu'un changement de points de vue générique avec $\theta_1 \neq \theta_2$ puisse être interprété comme une application entre deux horosphères H_{α_1} et H_{α_2} . L'idée sous-jacente est que l'ensemble des X_α pour $\alpha \neq 0$ représente l'ensemble des possibilités que l'on a de voir le vecteur x de \mathbb{R}^2 au travers de diverses représentations conformes.

Proposition. — *Toute bijection $\theta \mapsto \alpha_\theta$ définit une bijection de l'ensemble des plans perspectifs $h_\theta(\mathbb{R}^2)$ de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ vers l'ensemble des horosphères H_{α_θ} .*

À tout point $h_\theta(x)$ de $h_\theta(\mathbb{R}^2)$ on associe alors le vecteur X_{α_θ} de H_{α_θ} à travers le plongement $\varphi_{\alpha_\theta} \circ h_\theta^{-1}$ de $h_\theta(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}^{3,1}$. Lorsque $\theta = 0$ on retrouve le plongement φ_{α_0} du plan euclidien \mathbb{R}^2 . De plus, la représentation en termes de verseurs des transformations de Möbius s'applique pour tout α_θ .

Rappelons que dans le modèle homogène, la distorsion perspective h_θ est l'application

$$x_1e_1 + x_2e_2 + e_3 \mapsto x_1 \cos \theta e_1 + x_2e_2 + (1 - x_1 \sin \theta)e_3 \quad (31)$$

L'image d'un point x est donc un point à l'infini si et seulement si $(1 - x_1 \sin \theta) = 0$. Pour $\theta \neq 0$, ceci signifie que $\cot \theta$ (pour $x_1 = 1/\sin \theta$) décrit bien les images à l'infini de l'application perspective h_θ . Il semble donc naturel de privilégier la bijection

$$\begin{aligned}]0, \pi/2[&\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \theta &\longmapsto \alpha_\theta = \cot \theta \end{aligned} \quad (32)$$

Dans le cas frontal, *i.e.* $\theta = 0$, on pose $\alpha_0 = -1$. La bijection de $[0, \pi/2[$ dans $\{-1\} \cup \mathbb{R}_+^*$ ainsi construite n'est pas continue en 0. Ceci n'a pas d'incidence pour la suite. Il faut aussi noter que pour $\theta \neq 0$ cette bijection est à valeurs dans le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* ce qui est un avantage pour notre étude.

3.2.2. La représentation des images. — Compte tenu de la proposition du paragraphe 3.1.2 et de la formule (19), il est nécessaire de représenter la rotation $R_{-\psi}$ dans le modèle conforme associé à α_θ afin d'obtenir une bonne description du domaine de définition $R_{-\psi}h_\theta(\mathbb{R}^2)$ de l'image $I_{\psi,\theta}$.

Soit $F_{-\psi} : H_{\alpha_\theta} \longrightarrow H_{\alpha_\theta}$ l'application définie pour $X_{\alpha_\theta} = \varphi_{\alpha_\theta}(x)$ par

$$F_{-\psi}(X_{\alpha_\theta}) = \sigma_{-\psi}X_{\alpha_\theta}\sigma_{\psi} = R_{-\psi}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi}(x)]^2e_{\infty,\alpha_\theta} + e_{0,\alpha_\theta} \quad (33)$$

où

$$\sigma_{-\psi} = \exp \left[\frac{\psi}{2} e_1 \wedge e_2 \right] \quad (34)$$

est le verneur qui encode la rotation $R_{-\psi}$ dans le modèle conforme associé à α_θ . Le domaine $R_{-\psi}h_\theta(\mathbb{R}^2)$ est représenté par $F_{-\psi} \circ \varphi_{\alpha_\theta}(\mathbb{R}^2)$ où

$$F_{-\psi} \circ \varphi_{\alpha_\theta} = \varphi_{\alpha_\theta} \circ R_{-\psi} =: \varphi_{\psi,\alpha_\theta} \quad (35)$$

Comme $\varphi_{\psi, \alpha_\theta}(\mathbb{R}^2) = H_{\alpha_\theta}$ pour tout ψ , le domaine de définition de l'image $I_{\psi, \theta}$ est noté $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$.

Il est à noter que le verseur $\sigma_{-\psi}$ est indépendant du modèle conforme dans lequel on se place.

Définition. — Une image est la donnée d'un modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ d'une rotation d'un plan perspectif $R_{-\psi} h_\theta(\mathbb{R}^2)$ et d'une application $\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta}$ définie sur l'horosphère H_{α_θ} par

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} : \{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X_{\psi, \alpha_\theta} = \varphi_{\psi, \alpha_\theta}(x) &\longmapsto I_{\psi, \theta} \circ R_{-\psi} h_\theta \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta}^{-1}(X_{\psi, \alpha_\theta}) \\ &= I_{\psi, \theta} \circ R_{-\psi} h_\theta(x), \end{aligned} \quad (36)$$

$I_{\psi, \theta}$ étant l'image projective correspondante.

Le vecteur $X_{\psi, \alpha_\theta} = \varphi_{\psi, \alpha_\theta}(x)$ représente le point $R_{-\psi} h_\theta(x)$ du domaine de définition de $I_{\psi, \theta}$. Le point $x = R_\psi \pi_E^{-1}(X_{\psi, \alpha_\theta})$ est le point du domaine de l'image frontale I_0 qui correspond à X_{ψ, α_θ} , puisqu'il correspond à $R_{-\psi} h_\theta(x)$.

Soit $\bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}$ et $\bar{I}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}$ deux images d'un objet planaire avec

$$\bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}(R_{-\psi_1}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi_1}(x)]^2 e_{\infty, \alpha_{\theta_1}} + e_{0, \alpha_{\theta_1}}) = I_{\psi_1, \theta_1} \circ R_{-\psi_1} h_{\theta_1}(x) \quad (37)$$

et

$$\bar{I}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}(R_{-\psi_2}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi_2}(x)]^2 e_{\infty, \alpha_{\theta_2}} + e_{0, \alpha_{\theta_2}}) = I_{\psi_2, \theta_2} \circ R_{-\psi_2} h_{\theta_2}(x) \quad (38)$$

Notons I_0^1 et I_0^2 les images frontales correspondantes. Comme ces deux images frontales sont associées au même objet planaire, il existe une similitude directe f telle que

$$I_0^1 = I_0^2 \circ f \quad (39)$$

et l'homographie k de $\mathbb{P}_2 \mathbb{R}$ qui relie I_{ψ_1, θ_1} et I_{ψ_2, θ_2} est l'application (équation (25))

$$k : R_{-\psi_1} h_{\theta_1}(x) \longmapsto x \longmapsto f(x) \longmapsto R_{-\psi_2} h_{\theta_2}[f(x)] \quad (40)$$

Dans la représentation de la définition précédente, cette dernière application devient

$$\varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ f \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}^{-1} : \{H_{\alpha_{\theta_1}}, \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}\} \longrightarrow \{H_{\alpha_{\theta_2}}, \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}\} \quad (41)$$

d'où la proposition

Proposition. — Un changement de points de vue est la donnée de deux modèles conformes $\{H_{\alpha_{\theta_1}}, \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}\}$ et $\{H_{\alpha_{\theta_2}}, \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}\}$ et d'une bijection \tilde{F} :

$$\tilde{F} = \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ f \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}^{-1} : \{H_{\alpha_{\theta_1}}, \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}\} \longrightarrow \{H_{\alpha_{\theta_2}}, \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}}\}. \quad (42)$$

En d'autres termes, \tilde{F} transforme tout vecteur

$$X_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} = \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}(x) \quad (43)$$

de l'horosphère $H_{\alpha_{\theta_1}}$ en un vecteur

$$\tilde{F}(X_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}) = X_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} = \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ f(x), \quad (44)$$

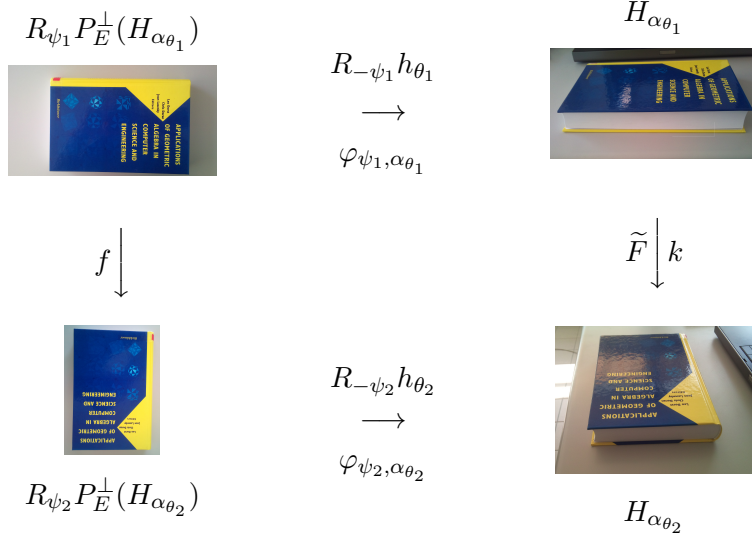


FIGURE 2. Un changement de point de vue: on voit dans la première ligne une image I_{ψ_1, θ_1} (en haut à droite) et l'image frontale qui lui est associée I_0^1 (en haut à gauche), pareil pour la 2ème ligne: une image I_{ψ_2, θ_2} (en bas à droite) et son image frontale I_0^2 (en bas à gauche). Les transformations projectives et conformes qui relient ces images sont indiquées.

de l'horosphère $H_{\alpha_{\theta_2}}$, où f est une similitude affine directe de \mathbb{R}^2

On a donc le diagramme commutatif suivant (voir aussi Fig. 2)

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\alpha_{\theta_1}} & \xrightarrow{\tilde{F}} & H_{\alpha_{\theta_2}} \\
 \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} \uparrow \downarrow R_{\psi_1} \pi_E^\perp & & R_{\psi_2} \pi_E^\perp \uparrow \downarrow \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2
 \end{array} \tag{45}$$

Les deux bases isotropes $\{e_{\infty, \alpha_{\theta_1}}, e_{0, \alpha_{\theta_1}}\}$ et $\{e_{\infty, \alpha_{\theta_2}}, e_{0, \alpha_{\theta_2}}\}$ de $\mathbb{R}^{1,1}$ encodent les latitudes θ_1 et θ_2 des distorsions perspectives des deux images. Les angles ψ_1 et ψ_2 correspondent aux rotations de la caméra autour de son axe optique. La similitude f , qui dépend de 4 paramètres, relie les deux images frontales par la formule (39). On retrouve ainsi les 8 paramètres des homographies de $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$.

Il est facile de vérifier que

$$\tilde{F}(X_{\alpha_{\theta_1}}) \cdot \tilde{F}(Y_{\alpha_{\theta_1}}) = \delta^2 X_{\alpha_{\theta_1}} \cdot Y_{\alpha_{\theta_1}} \tag{46}$$

pour tout $X_{\alpha_{\theta_1}}$ et $Y_{\alpha_{\theta_1}}$ dans $H_{\alpha_{\theta_1}}$ (où δ est le rapport de f) et que \tilde{F} est la restriction à $H_{\alpha_{\theta_1}}$ d'une transformation conforme de $\mathbb{R}^{3,1}$. On détaillera ce dernier point dans la section suivante tout en construisant un groupe de transformations linéaires conformes de $\mathbb{R}^{3,1}$ tel que l'ensemble des restrictions de ces éléments à des horosphères coïncide

avec l'ensemble des changements \tilde{F} de points de vue .

On peut résumer l'ensemble de ce qui précède au travers de la proposition suivante.

Proposition (Modèle conforme de la caméra sténopée). — *Une image est la donnée d'une application*

$$\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} : \{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (47)$$

définie par

$$X_{\psi, \alpha_\theta} \longmapsto \bar{I}_{0, \alpha_0} \circ F_0^{-1}(X_{\psi, \alpha_\theta}) = I^0 \circ \pi_E^\perp \circ F_0^{-1}(X_{\psi, \alpha_\theta}) \quad (48)$$

où

— $\bar{I}_{0, \alpha_0} : \{H_{\alpha_0}, \varphi_{0, \alpha_0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la représentation conforme de l'image frontale I^0 définie par

$$X_0 = x + \frac{1}{2}x^2 e_{\infty, \alpha_0} + e_{0, \alpha_0} \longmapsto \bar{I}_{0, \alpha_0}(X_0) = I^0 \circ \pi_E^\perp(X_0) = I^0(x) \quad (49)$$

— la bijection F_0 de $\{H_{\alpha_0}, \varphi_{0, \alpha_0}\}$ dans $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ envoie X_0 sur

$$F_0(X_0) = R_{-\psi} f_0(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi} f_0(x)]^2 e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta} \quad (50)$$

(avec $f_0 = R_{-\phi} D_{\lambda^{-1}} T$) représente l'homographie $k_0 = R_{-\psi} h_\theta R_{-\phi} D_{\lambda^{-1}} T$ de Γ (en reprenant les notations de la proposition du paragraphe 3.1.2, cf. formule (19)).

3.3. Le groupe des changements de points de vue

L'objectif de cette partie est de décrire les changements de points de vue comme un sous-groupe $C_0(3, 1)$ du groupe $C(3, 1)$ des transformations linéaires conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$.

L'homographie

$$k = R_{-\psi_2} h_{\theta_2} f (R_{-\psi_1} h_{\theta_1})^{-1} \quad (51)$$

peut être décomposée en deux représentations projectives de changements de points de vue k_1 et k_2 :

$$k = k_1 \circ k_2 \quad (52)$$

où

$$k_1 = R_{-\psi_2} h_{\theta_2} \circ (R_{-\psi_1} h_{\theta_1})^{-1} \quad (53)$$

et

$$k_2 = R_{-\psi_1} h_{\theta_1} \circ f \circ (R_{-\psi_1} h_{\theta_1})^{-1} \quad (54)$$

De la même façon, la bijection

$$\tilde{F} = \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ f \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}^{-1} \quad (55)$$

peut être décomposée en

$$\tilde{F} = \tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2 \quad (56)$$

où

$$\tilde{F}_1 = \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}^{-1} \quad (57)$$

et

$$\tilde{F}_2 = \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} \circ f \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}}^{-1} \quad (58)$$

3.3.1. Le groupe $\tilde{C}_0(3, 1)$ des bijections du type \tilde{F}_1 . — Nous commençons par la modélisation des changements de points de vue qui sont réduits à des applications entre horosphères associées à des plongements distincts tels que la similitude f est l'identité. Avec les notations introduites ci-dessus, ce sont donc les applications du type \tilde{F}_1 (cf formule (57)).

On considère le changement de points de vue

$$\tilde{F}_{\psi_1 \rightarrow \psi_2}^{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2} : \{H_{\alpha_1}, \varphi_{\psi_1, \alpha_1}\} \longrightarrow \{H_{\alpha_2}, \varphi_{\psi_2, \alpha_2}\} \quad (59)$$

défini par

$$R_{-\psi_1}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi_1}(x)]^2 e_{\infty, \alpha_1} + e_{0, \alpha_1} \longmapsto R_{-\psi_2}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi_2}(x)]^2 e_{\infty, \alpha_2} + e_{0, \alpha_2} \quad (60)$$

Il s'agit alors de trouver une transformation linéaire conforme de l'espace de Minkowski

$$F_{\psi_1 \rightarrow \psi_2}^{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2} : \mathbb{R}^{3,1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3,1} \quad (61)$$

dont la restriction à l'horosphère $\{H_{\alpha_1}, \varphi_{\psi_1, \alpha_1}\}$ est $\tilde{F}_{\psi_1 \rightarrow \psi_2}^{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2}$. Compte tenu de (60), l'application $F_{\psi_1 \rightarrow \psi_2}^{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2}$ n'est autre que le changement de base dans $\mathbb{R}^{3,1}$

$$\{R_{-\psi_1}(e_1), R_{-\psi_1}(e_2), e_{\infty, \alpha_1}, e_{0, \alpha_1}\} \longmapsto \{R_{-\psi_2}(e_1), R_{-\psi_2}(e_2), e_{\infty, \alpha_2}, e_{0, \alpha_2}\} \quad (62)$$

ou encore

$$\{e_1, e_2, e_{\infty}, e_0\} \longmapsto \{R_{-\bar{\psi}}(e_1), R_{-\bar{\psi}}(e_2), e_{\infty, \bar{\alpha}}, e_{0, \bar{\alpha}}\} \quad (63)$$

(cf. les notations (31) et (32) du paragraphe 2.2.1), avec $\bar{\psi} = \psi_2 - \psi_1$ et $\bar{\alpha} = \alpha_2 / \alpha_1$. En notant $F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}}$ l'application de $\mathbb{R}^{3,1}$ dans $\mathbb{R}^{3,1}$ définie par

$$F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}}(y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_{\infty} e_{\infty} + y_0 e_0) = y_1 R_{-\bar{\psi}}(e_1) + y_2 R_{-\bar{\psi}}(e_2) + y_{\infty} e_{\infty, \bar{\alpha}} + y_0 e_{0, \bar{\alpha}} \quad (64)$$

ceci nous amène à la proposition suivante.

Proposition. — *L'ensemble*

$$\tilde{C}_0(3, 1) = \left\{ F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}}, \bar{\psi} \in S^1, \bar{\alpha} > 0 \right\} \quad (65)$$

(où $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) est un groupe de Lie de dimension 2 constitué de transformations orthogonales de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Il agit de façon transitive sur l'ensemble des modèles conformes par

$$\begin{aligned} F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}}(\{H_{\alpha_{\theta}}, \varphi_{\psi, \alpha_{\theta}}\}) &= \{H_{\bar{\alpha}\alpha_{\theta}}, \varphi_{\psi+\bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_{\theta}}\} \\ F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ \varphi_{\psi, \alpha_{\theta}} &= \varphi_{\psi+\bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_{\theta}} \end{aligned} \quad (66)$$

En d'autres termes, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_{\alpha_{\theta}} & \xrightarrow{F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}}} & H_{\bar{\alpha}\alpha_{\theta}} \\ \varphi_{\psi, \alpha_{\theta}} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\psi+\bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_{\theta}} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (67)$$

3.3.2. Le groupe $\widehat{C}_0(3, 1)$ des bijections du type \widetilde{F}_2 . — Nous traitons ici le cas des changements de points de vue correspondant à l'action d'une similitude f lorsque le plongement $\varphi_{\psi, \alpha_\theta}$ reste inchangé. Ce sont donc les applications du type \widetilde{F}_2 (équation (58)).

Soit

$$\widetilde{F}_f : \{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\} \longrightarrow \{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\} \quad (68)$$

l'application définie par

$$R_{-\psi}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi}(x)]^2 e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta} \longmapsto R_{-\psi}(f(x)) + \frac{1}{2}[R_{-\psi}(f(x))]^2 e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta} \quad (69)$$

où

$$f = T_t R_\gamma D_\delta \quad (70)$$

est une similitude directe de \mathbb{R}^2 . La similitude

$$g_f = R_{-\psi} f R_\psi = T_{R_{-\psi} t} R_\gamma D_\delta \quad (71)$$

associée à f est représentée dans le modèle conforme du plan euclidien associé à $e_{\infty, \alpha_\theta}$ et e_{0, α_θ} par le spineur (voir le paragraphe 2.2.2.)

$$\sigma_{\psi, \alpha_\theta} = \left(1 - \frac{1}{2} R_{-\psi} t e_{\infty, \alpha_\theta}\right) e^{\frac{-\gamma}{2} e_1 \wedge e_2} e^{-\frac{E}{2} \ln \delta} \quad (72)$$

où $E = e_{\infty, \alpha_\theta} \wedge e_{0, \alpha_\theta} = e_\infty \wedge e_0$ qui agit par “sandwiching” sur $\mathbb{R}^{3,1}$

$$\delta \sigma_{\psi, \alpha_\theta} \left(y + \frac{1}{2} y^2 e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta}\right) \sigma_{\psi, \alpha_\theta}^{-1} = g_f(y) + \frac{1}{2} [g_f(y)]^2 e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta} \quad (73)$$

ce qui nous conduit à la proposition suivante.

Proposition. — *Toute similitude directe f de rapport δ est représentée dans le modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ de la rotation du plan perspectif $R_{-\psi} h_\theta(\mathbb{R}^2)$ par le spineur*

$$\sigma_{\psi, \alpha_\theta} = \left(1 - \frac{1}{2} R_{-\psi} t e_{\infty, \alpha_\theta}\right) e^{\frac{-\gamma}{2} e_1 \wedge e_2} e^{-\frac{E}{2} \ln \delta} \quad (74)$$

qui code la similitude $R_{-\psi} f R_\psi$ dans le modèle conforme du plan euclidien \mathbb{R}^2 associé à $e_{\infty, \alpha_\theta}$ et e_{0, α_θ} . On a de plus

$$\delta \sigma_{\psi, \alpha_\theta} \left(R_{-\psi}(x) + \frac{1}{2} [R_{-\psi}(x)]^2 e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta}\right) \sigma_{\psi, \alpha_\theta}^{-1} = R_{-\psi}(f(x)) + \frac{1}{2} [R_{-\psi}(f(x))]^2 e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta} \quad (75)$$

Le spineur

$$\widehat{\sigma} = \sigma_\gamma \sigma_\delta \quad (76)$$

où

$$\sigma_\gamma = e^{\frac{-\gamma}{2} e_1 \wedge e_2} \quad (77)$$

et

$$\sigma_\delta = e^{-\frac{E}{2} \ln \delta} \quad (78)$$

représente la similitude $\widehat{f} = R_\gamma D_\delta$ dans le modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ mais également dans le modèle conforme standard $\{H_1, \varphi_{0,1}\}$ correspondant au plan perspectif $h_{\pi/4}(\mathbb{R}^2)$ (le modèle conforme de \mathbb{R}^2 associé aux vecteurs e_∞ et e_0). Notons que dans ce chapitre, les dilatations D_δ sont codées au travers des verseurs $\delta \sigma_\delta$: dans l'équation (75) on

multiplie à gauche par δ . Nous traiterons dans le chapitre 4 le cas où elles sont codées par les verseurs σ_δ .

Le spineur

$$\sigma_t = \left(1 - \frac{1}{2}te_\infty\right) \quad (79)$$

représente la translation T_t dans le modèle conforme standard $\{H_1, \varphi_{0,1}\}$. Comme

$$1 - \frac{1}{2}te_\infty = 1 - \frac{1}{2}R_{-\psi}t'e_{\infty, \alpha_\theta} \quad (80)$$

avec $t' = (R_\psi t)/\alpha_\theta$, on constate que le spineur

$$\sigma = \sigma_t \widehat{\sigma} \quad (81)$$

représente la similitude

$$f_{\psi, \alpha_\theta} = T_{t'} R_\gamma D_\delta \quad (82)$$

dans le modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ de $R_{-\psi}h_\theta(\mathbb{R}^2)$. En d'autres termes

$$\begin{aligned} \delta\sigma(R_{-\psi}(x) + \frac{1}{2}[R_{-\psi}(x)]^2e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta})\sigma^{-1} = \\ R_{-\psi}(f_{\psi, \alpha_\theta}(x)) + \frac{1}{2}[R_{-\psi}(f_{\psi, \alpha_\theta}(x))]^2e_{\infty, \alpha_\theta} + e_{0, \alpha_\theta} \end{aligned} \quad (83)$$

Ceci permet d'avoir une expression canonique dans la base du modèle conforme standard des spineurs impliqués. Nous aurons besoin dans la suite de la proposition suivante.

Proposition. — Avec les notations de (77), (78) et (79),

- les spineurs σ_γ et σ_δ commutent ;
- le spineur σ_t commute faiblement avec les spineurs σ_γ et σ_δ , i.e.

$$\sigma_t \sigma_\gamma = \sigma_\gamma \left(1 - \frac{1}{2}R_{-\gamma}te_\infty\right) \quad (84)$$

$$\sigma_t \sigma_\delta = \sigma_\delta \left(1 - \frac{t}{2\delta}e_\infty\right) \quad (85)$$

Au terme de cette discussion, on obtient le résultat suivant.

Proposition. — L'ensemble

$$\widehat{C}_0(3, 1) = \{F_\sigma, \sigma = \sigma_t \sigma_\gamma \sigma_\delta, \gamma \in S^1, \delta > 0, t \in \mathbb{R}^2\} \quad (86)$$

est un groupe de Lie de dimension 4 constitué de transformations conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. À toute similitude directe $f = T_{t'} R_\gamma D_\delta$ du plan euclidien correspond une unique spineur $\sigma = \sigma_t \sigma_\gamma \sigma_\delta$ de $\widehat{C}_0(3, 1)$ dont l'action par "sandwiching"

$$\begin{aligned} F_\sigma : \mathbb{R}^{3,1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{3,1} \\ y + y_\infty e_\infty + y_0 e_0 &\longmapsto \delta\sigma(y + y_\infty e_\infty + y_0 e_0)\sigma^{-1} \end{aligned} \quad (87)$$

conserve tout modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ avec

$$F_\sigma \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} = \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \circ f_{\psi, \alpha_\theta} \quad (88)$$

où $f_{\psi, \alpha_\theta} = T_{t'} R_\gamma D_\delta$ et $t' = (R_\psi t)/\alpha_\theta$.

En d'autres termes, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_{\alpha_\theta} & \xrightarrow{F_\sigma} & H_{\alpha_\theta} \\ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_{\psi, \alpha_\theta}} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (89)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la matrice de l'application F_σ dans la base $\{e_1, e_2, e_\infty, e_0\}$ du modèle conforme standard est donnée par

$$B_\sigma = \begin{pmatrix} \delta \cos \gamma & -\delta \sin \gamma & 0 & t_1 \\ \delta \sin \gamma & \delta \cos \gamma & 0 & t_2 \\ \delta(t_1 \cos \gamma + t_2 \sin \gamma) & \delta(-t_1 \sin \gamma + t_2 \cos \gamma) & \delta^2 & \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (90)$$

où $t = t_1 e_1 + t_2 e_2$. En particulier, la matrice associée à F_{σ_δ} est

$$B_{\sigma_\delta} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (91)$$

ce que nous allons utiliser par la suite.

3.3.3. Le groupe $C_0(3, 1)$ des changements de points de vue. — Nous décrivons maintenant le groupe de tous les changements de points de vue $\tilde{F} = \tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2$.

Notons $F_{\bar{\alpha}}$ l'application $F_{0, \bar{\alpha}}$ i.e. pour $\bar{\psi} = 0$ (cf. le paragraphe 3.3.1.) :

$$F_{\bar{\alpha}}(y + y_\infty e_\infty + y_0 e_0) = y + y_\infty e_{\infty, \bar{\alpha}} + y_0 e_{0, \bar{\alpha}} \quad (92)$$

Proposition. — Les transformations $F_{\bar{\alpha}}$ et $F_{\hat{\sigma}}$ commutent pour tous $\bar{\alpha}$, γ et δ .

Rappelons que

$$\hat{\sigma} = \sigma_\gamma \sigma_\delta = e^{-\frac{\gamma}{2} e_1 \wedge e_2} e^{-\frac{E}{2} \ln \delta} \quad (93)$$

On vérifie facilement en posant $Y = y + y_\infty e_\infty + y_0 e_0$ que

$$\begin{aligned} F_{\bar{\alpha}} \circ F_{\hat{\sigma}}(Y) &= \delta F_{\bar{\alpha}}[\hat{\sigma} y \hat{\sigma}^{-1} + y_\infty \hat{\sigma} e_\infty \hat{\sigma}^{-1} + y_0 \hat{\sigma} e_0 \hat{\sigma}^{-1}] \\ &= \delta F_{\bar{\alpha}}[\hat{\sigma} y \hat{\sigma}^{-1} + y_\infty \delta e_\infty + y_0 \delta^{-1} e_0] \\ &= \delta[\hat{\sigma} y \hat{\sigma}^{-1} + y_\infty \delta e_{\infty, \bar{\alpha}} + y_0 \delta^{-1} e_{0, \bar{\alpha}}] \\ &= \delta[\hat{\sigma} y \hat{\sigma}^{-1} + y_\infty \hat{\sigma} e_{\infty, \bar{\alpha}} \hat{\sigma}^{-1} + y_0 \hat{\sigma} e_{0, \bar{\alpha}} \hat{\sigma}^{-1}] \\ &= F_{\hat{\sigma}} \circ F_{\bar{\alpha}}(Y) \end{aligned} \quad (94)$$

On en déduit en particulier que

$$F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} = F_{\bar{\alpha}} \circ F_{\sigma_{-\bar{\psi}}} = F_{\sigma_{-\bar{\psi}}} \circ F_{\bar{\alpha}} \quad (95)$$

où

$$\sigma_{-\bar{\psi}} = e^{\frac{\bar{\psi}}{2} e_1 \wedge e_2} \quad (96)$$

Proposition. — Les transformations $F_{\bar{\alpha}}$ et F_{σ_t} commutent faiblement, i.e.

$$F_{\bar{\alpha}} \circ F_{\sigma_t} = F_{\sigma_{\bar{t}}} \circ F_{\bar{\alpha}} \quad (97)$$

où $\bar{t} = \bar{\alpha}t$.

En effet,

$$F_{\sigma_{\bar{t}}} \circ F_{\bar{\alpha}}(Y) = F_{\sigma_{\bar{t}}}(y + y_{\infty}e_{\infty, \bar{\alpha}} + y_0e_{0, \bar{\alpha}}) \quad (98)$$

Comme

$$\sigma_{\bar{t}} = (1 - \frac{1}{2}\bar{t}e_{\infty}) = (1 - \frac{1}{2}te_{\infty, \bar{\alpha}}) \quad (99)$$

on vérifie que

$$\sigma_{\bar{t}}(y + y_{\infty}e_{\infty, \bar{\alpha}} + y_0e_{0, \bar{\alpha}})\sigma_{\bar{t}}^{-1} = y + y_0t + [y \cdot t + y_{\infty} + y_0\frac{t^2}{2}]e_{\infty, \bar{\alpha}} + y_0e_{0, \bar{\alpha}} \quad (100)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} F_{\bar{\alpha}} \circ F_{\sigma_t}(Y) &= F_{\bar{\alpha}}(y + y_0t + [y \cdot t + y_{\infty} + y_0\frac{t^2}{2}]e_{\infty} + y_0e_0) \\ &= y + y_0t + [y \cdot t + y_{\infty} + y_0\frac{t^2}{2}]e_{\infty, \bar{\alpha}} + y_0e_{0, \bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (101)$$

d'où la proposition.

Nous avons vu que la transformation $F_{\sigma_{\delta}}$ définie par

$$Y \mapsto \delta\sigma_{\delta}Y\sigma_{\delta}^{-1} \quad (102)$$

a pour matrice

$$B_{\sigma_{\delta}} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (103)$$

Ceci implique que pour $\delta = \bar{\alpha}$, le “sandwiching”

$$Y \mapsto \sigma_{\bar{\alpha}}Y\sigma_{\bar{\alpha}}^{-1} \quad (104)$$

coïncide avec l'application $F_{\bar{\alpha}}$.

Proposition. — L'ensemble

$$C_0(3, 1) = \left\{ F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_{\sigma}, F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \in \tilde{C}_0(3, 1), F_{\sigma} \in \hat{C}_0(3, 1) \right\} \quad (105)$$

est un groupe de Lie de dimension 5 constitué de transformations conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Si F appartient à $C_0(3, 1)$ et $Y = y + y_{\infty}e_{\infty} + y_0e_0$ appartient à $\mathbb{R}^{3,1}$ alors

$$F(Y) = F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_{\sigma_t\sigma_{\gamma}\sigma_{\delta}}(Y) = \delta\sigma_{-\bar{\psi}}\sigma_{\bar{\alpha}}(\sigma_t\sigma_{\gamma}\sigma_{\delta})Y(\sigma_t\sigma_{\gamma}\sigma_{\delta})^{-1}\sigma_{\bar{\alpha}}^{-1}\sigma_{-\bar{\psi}} \quad (106)$$

où

$$\sigma_{-\bar{\psi}} = e^{\frac{\bar{\psi}}{2}e_1 \wedge e_2}, \quad \sigma_{\bar{\alpha}} = e^{-\frac{E}{2}\ln \bar{\alpha}} \quad (107)$$

et

$$\sigma_{\gamma} = e^{\frac{-\gamma}{2}e_1 \wedge e_2}, \quad \sigma_{\delta} = e^{-\frac{E}{2}\ln \delta}, \quad \sigma_t = (1 - \frac{1}{2}te_{\infty}) \quad (108)$$

En d'autres termes, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} & H_{\alpha_\theta} & \xrightarrow{F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_\sigma} & H_{\bar{\alpha}\alpha_\theta} & \\ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \uparrow & & & & \uparrow \varphi_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_{\psi, \alpha_\theta}} & & \mathbb{R}^2 & \end{array} \quad (109)$$

La composition dans $C_0(3, 1)$ est donnée par

$$(F_{\bar{\psi}_2, \bar{\alpha}_2} \circ F_{\sigma_2}) \circ (F_{\bar{\psi}_1, \bar{\alpha}_1} \circ F_{\sigma_1}) = F_{\bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2, \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1} \circ F_\sigma \quad (110)$$

où σ dépend de σ_1 , σ_2 , $\bar{\psi}_1$ et $\bar{\alpha}_1$ (d'après les résultats de commutativité faible des spineurs). Si σ_2 ne code pas une translation alors tous les spineurs commutent et donc $\sigma = \sigma_2 \sigma_1$.

Il est à noter que les spineurs $\sigma_{\bar{\alpha}}$ et $\delta\sigma_\delta$ agissent de manière différente. Le spineur $\delta\sigma_\delta$ code la dilatation $y \mapsto \delta y$ du plan euclidien. Le spineur $\sigma_{\bar{\alpha}}$ code la transformation orthogonale de l'espace de Minkowski correspondant au changement de base $(e_{\infty, \alpha_\theta}, e_{0, \alpha_\theta}) \mapsto (e_{\infty, \bar{\alpha}\alpha_\theta}, e_{0, \bar{\alpha}\alpha_\theta})$. Le produit $\delta\sigma_{\bar{\alpha}}\sigma_\delta$ possède bien deux paramètres.

3.3.4. L'action du groupe $C_0(3, 1)$ sur $\bar{\mathbb{I}}$. — Nous notons ici

$$\bar{\mathbb{I}} = \{\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta}, \alpha_\theta \in \mathbb{R}_+^*, \psi \in S^1\} \quad (111)$$

l'ensemble des images au sens de la définition du paragraphe 3.2.2 (équation (36)). L'objectif est d'expliciter l'action

$$C_0(3, 1) \times \bar{\mathbb{I}} \longrightarrow \bar{\mathbb{I}} \quad (112)$$

du groupe des changements de points de vue sur l'ensemble des images.

Soient

$$F = F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_\sigma \quad (113)$$

appartenant à $C_0(3, 1)$ et

$$\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} : \{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (114)$$

appartenant à $\bar{\mathbb{I}}$. On a

$$F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_\sigma \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} = \varphi_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} \circ f_{\psi, \alpha_\theta} \quad (115)$$

ce qui amène à définir l'image

$$\bar{I}_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} : \{H_{\bar{\alpha}\alpha_\theta}, \varphi_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta}\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (116)$$

par

$$\bar{I}_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} \circ f_{\psi, \alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \quad (117)$$

soit encore

$$\bar{I}_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi + \bar{\psi}, \bar{\alpha}\alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \circ f_{\psi, \alpha_\theta}^{-1} \quad (118)$$

On rappelle que f_{ψ, α_θ} est la similitude représentée par σ dans le modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi, \alpha_\theta}\}$ par $F_\sigma \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} = \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \circ f_{\psi, \alpha_\theta}$ ou par l'équation (115).

Ainsi

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{\psi+\bar{\psi},\bar{\alpha}\alpha_\theta} \left[R_{-(\psi+\bar{\psi})}(x) + \frac{1}{2}[R_{-(\psi+\bar{\psi})}(x)]^2 e_{\infty,\bar{\alpha}\alpha_\theta} + e_{0,\bar{\alpha}\alpha_\theta} \right] \\ &= \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta} \left[R_{-\psi}(f_{\psi,\alpha_\theta}^{-1}(x)) + \frac{1}{2}[R_{-\psi}(f_{\psi,\alpha_\theta}^{-1}(x))]^2 e_{\infty,\alpha_\theta} + e_{0,\alpha_\theta} \right] \end{aligned} \quad (119)$$

Proposition (Action de $C_0(3,1)$ sur $\bar{\mathbb{I}}$). — *En reprenant les notations ci-dessus,*
– L'application

$$\varpi : C_0(3,1) \times \bar{\mathbb{I}} \longrightarrow \bar{\mathbb{I}} \quad (120)$$

définie par

$$(F_{\bar{\psi},\bar{\alpha}} \circ F_\sigma, \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta}) \longmapsto (F_{\bar{\psi},\bar{\alpha}} \circ F_\sigma) * \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi+\bar{\psi},\bar{\alpha}\alpha_\theta} \quad (121)$$

avec

$$\bar{I}_{\psi+\bar{\psi},\bar{\alpha}\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi+\bar{\psi},\bar{\alpha}\alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi,\alpha_\theta} \circ f_{\psi,\alpha_\theta}^{-1} \quad (122)$$

est une action de groupe.

– Soit $\bar{I}_{\psi_1,\alpha_{\theta_1}}$ et $\bar{J}_{\psi_2,\alpha_{\theta_2}}$ deux images de $\bar{\mathbb{I}}$ telles que

$$\bar{I}_{\psi_1,\alpha_{\theta_1}} \circ \varphi_{\psi_1,\alpha_{\theta_1}} = I_{\psi_1,\theta_1} \circ R_{-\psi_1} h_{\theta_1} \quad (123)$$

et

$$\bar{J}_{\psi_2,\alpha_{\theta_2}} \circ \varphi_{\psi_2,\alpha_{\theta_2}} = J_{\psi_2,\theta_2} \circ R_{-\psi_2} h_{\theta_2} \quad (124)$$

On a équivalence entre

1. Il existe $F \in C_0(3,1)$ tel que

$$F * \bar{I}_{\psi_1,\alpha_{\theta_1}} = \bar{J}_{\psi_2,\alpha_{\theta_2}} \quad (125)$$

2. Il existe $k \in \Gamma$ tel que

$$J_{\psi_2,\theta_2} = I_{\psi_1,\theta_1} \circ k^{-1} \quad (126)$$

Il est clair que si $F^1 = F_{\bar{\psi}_1,\bar{\alpha}_1} \circ F_{\sigma_1}$ et $F^2 = F_{\bar{\psi}_2,\bar{\alpha}_2} \circ F_{\sigma_2}$ sont deux éléments de $C_0(3,1)$, alors

$$[F^2 \circ F^1] * \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta} = F^2 * [F^1 * \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta}] \quad (127)$$

En effet, d'une part

$$[F^2 \circ F^1] * \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi+\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_2,\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1\alpha_\theta} \quad (128)$$

avec

$$\bar{I}_{\psi+\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_2,\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi+\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_2,\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1\alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi,\alpha_\theta} \circ [f_{\psi+\bar{\psi}_1,\bar{\alpha}_1\alpha_\theta}^2 \circ f_{\psi,\alpha_\theta}^1]^{-1} \quad (129)$$

où

- f_{ψ,α_θ}^1 est la similitude représentée par σ_1 dans le modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi,\alpha_\theta}\}$
- $f_{\psi+\bar{\psi}_1,\bar{\alpha}_1\alpha_\theta}^2$ est la similitude représentée par σ_2 dans le modèle conforme $\{H_{\bar{\alpha}_1\alpha_\theta}, \varphi_{\psi+\bar{\psi}_1,\bar{\alpha}_1\alpha_\theta}\}$

Et d'autre part

$$F^2 * [F^1 * \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta}] = F^2 * [\bar{I}_{\psi+\bar{\psi}_1,\bar{\alpha}_1\alpha_\theta}] \quad (130)$$

avec

$$\bar{I}_{\psi+\bar{\psi}_1,\bar{\alpha}_1\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi+\bar{\psi}_1,\bar{\alpha}_1\alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi,\alpha_\theta} \circ (f_{\psi,\alpha_\theta}^1)^{-1} \quad (131)$$

Soit encore

$$F^2 * [F^1 * \bar{I}_{\psi,\alpha_\theta}] = \bar{I}_{\psi+\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_2,\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1\alpha_\theta} \quad (132)$$

avec

$$\begin{aligned} & \bar{I}_{\psi+\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_2, \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi+\bar{\psi}_1+\bar{\psi}_2, \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_1 \alpha_\theta} = \bar{I}_{\psi+\bar{\psi}_1, \bar{\alpha}_1 \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi+\bar{\psi}_1, \bar{\alpha}_1 \alpha_\theta} \circ (f_{\psi+\bar{\psi}_1, \bar{\alpha}_1 \alpha_\theta}^2)^{-1} \\ & = \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \circ (f_{\psi, \alpha_\theta}^1)^{-1} \circ (f_{\psi+\bar{\psi}_1, \bar{\alpha}_1 \alpha_\theta}^2)^{-1} = \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta} \circ \varphi_{\psi, \alpha_\theta} \circ [f_{\psi+\bar{\psi}_1, \bar{\alpha}_1 \alpha_\theta}^2 \circ f_{\psi, \alpha_\theta}^1]^{-1} \end{aligned} \quad (133)$$

Supposons maintenant qu'il existe $F = F_{\bar{\psi}, \bar{\alpha}} \circ F_\sigma$ appartenant à $C_0(3, 1)$ tel que

$$F * \bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} = \bar{J}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \quad (134)$$

On a donc

$$\bar{I}_{\bar{\psi}+\psi_1, \bar{\alpha} \alpha_{\theta_1}} \circ \varphi_{\bar{\psi}+\psi_1, \bar{\alpha} \alpha_{\theta_1}} = \bar{J}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \quad (135)$$

soit encore

$$\bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} \circ (f_{\psi, \alpha_\theta})^{-1} = \bar{J}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \quad (136)$$

et par suite

$$I_{\psi_1, \theta_1} \circ R_{-\psi_1} h_{\theta_1} \circ (f_{\psi, \alpha_\theta})^{-1} = J_{\psi_2, \theta_2} \circ R_{-\psi_2} h_{\theta_2} \quad (137)$$

Finalement

$$I_{\psi_1, \theta_1} = J_{\psi_2, \theta_2} \circ R_{-\psi_2} h_{\theta_2} \circ f_{\psi, \alpha_\theta} \circ (R_{-\psi_1} h_{\theta_1})^{-1} = J_{\psi_2, \theta_2} \circ k \quad (138)$$

Réciproquement, s'il existe

$$k = R_{-\psi_2} h_{\theta_2} \circ f \circ (R_{-\psi_1} h_{\theta_1})^{-1} \quad (139)$$

tel que

$$I_{\psi_1, \theta_1} \circ k^{-1} = J_{\psi_2, \theta_2} \quad (140)$$

alors il existe un unique élément de $C_0(3, 1)$ tel que

$$F \circ \varphi_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} = \varphi_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \circ f \quad (141)$$

ou encore

$$F * \bar{I}_{\psi_1, \alpha_{\theta_1}} = \bar{J}_{\psi_2, \alpha_{\theta_2}} \quad (142)$$

Définition. — L'orbite $\mathcal{O}(\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta})$ d'une image $\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta}$ sous l'action du groupe $C_0(3, 1)$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}(\bar{I}_{\psi, \alpha_\theta}) = \left\{ \bar{I}'_{\psi', \alpha_{\theta'}} \in \bar{\mathbb{I}}, \bar{I}'_{\psi', \alpha_{\theta'}} = F * \bar{I}_{\psi, \alpha_\theta}, F \in C_0(3, 1) \right\} \quad (143)$$

Il apparaît donc que l'ensemble des images obtenues à partir de tous les points de vue d'un même objet planaire est une orbite sous l'action d'un groupe de transformations linéaires conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$.

CHAPITRE 4

MODÉLISATIONS DANS L'ESPACE (\mathbb{R}^4, Q_β)

Ce chapitre aborde la représentation des différents points de vue de la caméra à partir des modèles conformes généralisés et des propositions du paragraphe 2.2.4. décrivant ces modèles et leurs différentes transformations.

4.1. La représentation des images et des points de vue

Nous l'avons vu, une représentation conforme généralisée du plan euclidien est la donnée d'une horosphère

$$H(\alpha, \beta) = H(\alpha e_{\infty, \beta}, \alpha^{-1} e_{0, \beta}) = \{X \in \mathbb{R}_\beta^4, X^2 = 0, X \cdot \alpha e_{\infty, \beta} = -1\} \quad (1)$$

où

$$e_{\infty, \beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta - \sin \beta \\ \sin \beta + \cos \beta \end{pmatrix} \quad e_{0, \beta} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \beta + \sin \beta \\ \sin \beta - \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

et \mathbb{R}_β^4 est l'espace \mathbb{R}^4 muni de la métrique $Q_\beta = id \oplus G_\beta$ où

$$G_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

On a donc en particulier $\mathbb{R}_0^4 = \mathbb{R}^{3,1}$. Le plongement du plan euclidien pour cette représentation est donné par

$$\varphi_{\alpha, \beta}(x_1, x_2) = x + \frac{1}{2}x^2\alpha e_{\infty, \beta} + \alpha^{-1}e_{0, \beta} := x_1e_1 + x_2e_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\alpha e_{\infty, \beta} + \alpha^{-1}e_{0, \beta} \quad (4)$$

4.1.1. La catégorie des modèles conformes généralisés. — Nous notons \mathcal{PV} la catégorie dont les objets sont les couples $(H(\alpha, \beta), \varphi_{\alpha, \beta})$ comme ci-dessus et les morphismes les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H(\alpha_1, \beta_1) & \xrightarrow{F} & H(\alpha_2, \beta_2) \\ \varphi_{\alpha_1, \beta_1} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\alpha_2, \beta_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (5)$$

représentés par les couples (F, f) de l'un des trois types suivants.

1. Les morphismes (σ_t, T_t) et $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$ correspondant aux déplacements du plan euclidien :

$$\begin{array}{ccc} H(\alpha, \beta) & \xrightarrow{\sigma_t} & H(\alpha, \beta) \\ \varphi_{\alpha, \beta} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\alpha, \beta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_t} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{ccc} H(\alpha, \beta) & \xrightarrow{\sigma_\gamma} & H(\alpha, \beta) \\ \varphi_{\alpha, \beta} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\alpha, \beta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{R_\gamma} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (7)$$

où

$$\sigma_t = 1 - (t\alpha e_{\infty, \beta})/2 \quad (8)$$

et

$$\sigma_\gamma = \exp[-(\gamma/2)e_1 \wedge e_2] \quad (9)$$

2. Les morphismes (σ_δ, id) donnés par

$$\begin{array}{ccc} H(\alpha, \beta) & \xrightarrow{\sigma_\delta} & H(\delta\alpha, \beta) \\ \varphi_{\alpha, \beta} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\delta\alpha, \beta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (10)$$

où

$$\sigma_\delta = \exp[-(E_\beta/2) \ln \delta] \quad (11)$$

et

$$E_\beta = e_{\infty, \beta} \wedge e_{0, \beta} \quad (12)$$

3. Les morphismes (ρ_φ, id) des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H(\alpha, \beta) & \xrightarrow{\rho_\varphi} & H(\alpha, \beta + \varphi) \\ \varphi_{\alpha, \beta} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\alpha, \beta + \varphi} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (13)$$

où ρ_φ est la rotation de \mathbb{R}^4 ayant pour matrice

$$id \oplus \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (14)$$

dans la base $\{e_1, e_2, e_+, e_-\}$ de \mathbb{R}^4 .

Les morphismes du type 2 et ceux du type 3 n'affectent que le choix de l'horosphère dans laquelle le plan euclidien est plongé (ils sont "au dessus de l'identité"). Nous verrons dans le paragraphe 4.1.2 que l'introduction de cette catégorie permet d'étendre le cadre

d'étude introduit dans le chapitre 3. Rappelons ici que dans la catégorie \mathcal{PV} on dispose d'une composition

$$\begin{array}{ccccc} H(\alpha_1, \beta_1) & \xrightarrow{F} & H(\alpha_2, \beta_2) & \xrightarrow{G} & H(\alpha_3, \beta_3) \\ \varphi_{\alpha_1, \beta_1} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\alpha_2, \beta_2} & & \uparrow \varphi_{\alpha_3, \beta_3} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (15)$$

notée $(G \circ F, g \circ f)$ qui est associative et telle que pour tout objet $(H(\alpha, \beta), \varphi_{\alpha, \beta})$ il existe un unique morphisme identité :

$$\begin{array}{ccc} H(\alpha, \beta) & \xrightarrow{ID} & H(\alpha, \beta) \\ \varphi_{\alpha, \beta} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\alpha, \beta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (16)$$

4.1.2. Les distorsions perspectives et les changements de métriques. — Dans toute cette partie, pour alléger les notations, nous supposons que le paramètre ψ du modèle sténopé est nul. On traiterait de façon analogue le cas général. Comme dans le chapitre précédent, il s'agit d'interpréter une image projective

$$I_\theta : h_\theta(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (17)$$

où $h_\theta(\mathbb{R}^2)$ est le plan perspectif associé à la latitude θ ou encore à la distorsion perspective h_θ , avec $\theta \in [0, \pi/2[$.

L'idée la plus naturelle, mais qui nécessite le travail préliminaire ci-dessus, est de modéliser le vecteur unitaire de l'axe optique correspondant au point de vue frontal de référence par le vecteur e_∞ du modèle conforme standard. D'autre part, il s'agit de traduire l'effet d'une latitude $\theta \neq 0$ (d'un zoom $\lambda > 0$ resp.) par une rotation d'angle θ (une dilatation de rapport λ) du vecteur e_∞ .

Ceci se traduit par le fait d'encoder le paramètre de latitude θ par le paramètre β , *i.e.* de poser $\beta = \theta$. On choisit en quelque sorte pour direction du vecteur représentant l'infini, la direction de l'axe de la caméra. D'autre part, on code le paramètre λ du zoom par α en posant $\alpha = \lambda$. Lorsque $\theta = \beta = 0$, *i.e.* lorsque l'image est frontale, le plongement que l'on considère est le plongement du modèle conforme standard.

Si θ est non nul, on choisit comme vecteur représentant l'infini, l'image par la rotation ρ_β , d'angle $\beta = \theta$, du vecteur e_∞ du modèle conforme standard, la rotation ρ_β ayant pour matrice

$$id \oplus \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (18)$$

Cependant, comme cette transformation ne préserve pas la métrique de Minkowski de l'espace $\mathbb{R}^{3,1}$, l'image du vecteur e_∞ par ρ_β n'est pas isotrope pour cette dernière métrique. Pour obtenir une famille (à deux paramètres) de plongements conformes, il est donc nécessaire de transporter la métrique usuelle de Minkowski par la rotation ρ_β . Cette dernière est précisément Q_β (cf. la formule (3)).

Il est important de souligner que par construction la rotation ρ_β est une isométrie de $\mathbb{R}^{3,1} = \mathbb{R}_0^4$ vers \mathbb{R}_β^4 , et ce pour tout β . On a par ailleurs la proposition suivante.

Proposition. — Pour chaque θ appartenant à l'intervalle $[0, \pi/2[$ et λ dans \mathbb{R}_+^* l'application

$$\varphi_{\lambda, \theta}(x) = x + \frac{1}{2}x^2\lambda e_{\infty, \theta} + \lambda^{-1}e_{0, \theta} \quad (19)$$

réalise un plongement isométrique du plan euclidien dans \mathbb{R}_θ^4 .

On vérifie en effet facilement que le plongement conforme standard $\varphi(e_\infty, e_0)$ du plan euclidien est isométrique. Plus précisément

$$[\varphi(e_\infty, e_0)(x) - \varphi(e_\infty, e_0)(y)]^2 = -2[\varphi(e_\infty, e_0)(x)] \cdot [\varphi(e_\infty, e_0)(y)] = (x - y)^2 \quad (20)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$. On adopte alors la définition suivante.

Définition. — Une image est la donnée d'un modèle conforme généralisé $(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})$ et d'une application

$$\begin{aligned} \bar{I}_{\lambda, \theta} : (H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X_{\lambda, \theta} = \varphi_{\lambda, \theta}(x) &\longmapsto I_{\lambda, \theta} \circ h_\theta \circ D_{\lambda^{-1}} \circ \varphi_{\lambda, \theta}^{-1}(X_{\lambda, \theta}) \\ &= I_{\lambda, \theta} \circ h_\theta \circ D_{\lambda^{-1}}(x), \end{aligned} \quad (21)$$

$I_{\lambda, \theta}$ étant l'image projective correspondante.

Dans ce contexte, un point de vue, resp. un changement de points de vue, n'est rien d'autre qu'un objet, resp. un morphisme, de la catégorie \mathcal{PV} (d'où le choix de la notation). Conformément à l'intuition,

1. Les morphismes de type 1 agissent à point de vue constant.
2. La dilatation D_δ agit comme un changement d'échelle, *i.e.* un zoom, multipliant le vecteur $\lambda e_{\infty, \theta}$ par le scalaire δ (et par suite le vecteur $\lambda^{-1}e_{0, \theta}$ par l'inverse de ce scalaire). Il est à noter que le vecteur $\lambda e_{\infty, \theta}$ étant isotrope, sa norme reste inchangée.
3. Les morphismes de type 3 correspondent aux variations de l'angle "sous lequel on voit le plan euclidien".

Si cette modélisation semble plus naturelle, elle introduit une complexité supplémentaire : les changements de points de vue ne peuvent plus être interprétés comme un groupe de transformations linéaires conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. En outre, à chaque θ correspond un espace \mathbb{R}_θ^4 dans lequel se plonge le modèle conforme qui code le point de vue. On peut cependant remédier à cette difficulté.

4.2. Le groupoïde des changements de points de vue

4.2.1. Groupoïdes *versus* groupes. — La catégorie \mathcal{PV} a une propriété particulière : tous les morphismes (F, f) sont des isomorphismes. Dans le premier cas les morphismes réciproques sont les morphismes (σ_{-t}, T_{-t}) et $(\sigma_{-\gamma}, R_{-\gamma})$, dans le deuxième cas ce sont les morphismes $(\sigma_{\delta^{-1}}, id)$ et dans le troisième les morphismes $(\rho_{-\gamma}, id)$. Il s'agit donc d'un groupoïde au sens suivant.

Définition. — Un groupoïde est une "petite" catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes.

Les groupoïdes apparaissent comme une généralisation des groupes : un groupoïde dont l'ensemble des objets est un singleton est un groupe. Un exemple familier est le groupoïde fondamental de Poincaré (qui généralise le groupe fondamental de Poincaré).

L'intérêt d'introduire cette notion est qu'elle permet de pallier la difficulté mentionnée à la fin du paragraphe précédent. Pour mieux le comprendre, il est important de remarquer que toute action d'un groupe G sur un ensemble X donne naissance à un groupoïde. En effet, soit

$$G \times X \longrightarrow X \quad (22)$$

une telle action, alors on définit à partir de cette dernière un groupoïde \mathcal{G} dont l'ensemble \mathcal{G}_0 des objets est l'ensemble X et les morphismes de x vers y , où x et y appartiennent à \mathcal{G}_0 les éléments (s'il y en a) de G qui envoient x sur y . La notion de groupoïde généralise en ce sens la notion d'action de groupe.

Comme dans tout groupoïde, on dispose dans \mathcal{PV} de deux applications s (comme source) et b (comme but)

$$\mathcal{PV}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{array} \mathcal{PV}_0 \quad (23)$$

où \mathcal{PV}_0 , resp. \mathcal{PV}_1 , désigne l'ensemble des objets, resp. l'ensemble des morphismes de \mathcal{PV} . L'application s , resp. b , associe à tout morphisme son objet de départ, resp. son objet d'arrivée. Ces deux applications permettent de définir l'orbite d'un objet sous l'action du groupoïde : il s'agit de l'ensemble

$$\mathcal{O}((H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})) = b \circ s^{-1}\{(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})\} \quad (24)$$

En d'autres termes, un morphisme $(F, f) \in \mathcal{PV}_1$ agit sur son objet de départ

$$s(F, f) = (H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta}) \quad (25)$$

en l'envoyant sur son objet d'arrivée $b(F, f)$. On a alors

$$\mathcal{O}((H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})) = \mathcal{PV}_0 \quad (26)$$

On définit également le stabilisateur d'un objet par

$$\mathcal{S}((H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})) = \{(F, f) \in \mathcal{PV}_1, s(F, f) = b(F, f) = (H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})\} \quad (27)$$

Il s'agit d'un groupoïde sur le seul objet $(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})$; c'est donc un groupe.

Si l'on choisit de faire agir les morphismes de dilatation non plus par le "sandwiching" associé à σ_δ mais en utilisant $\delta\sigma_\delta$ comme dans le chapitre 3, alors le stabilisateur de tout objet $(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})$ est engendré par les morphismes (σ_t, T_t) , $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$ et $(\delta\sigma_\delta, D_\delta)$. Il est donc isomorphe au groupe $\widehat{C}_0(3, 1)$. Dans ce cas, on peut se limiter aux seuls objets du type $(H(1, \theta), \varphi_{1, \theta})$.

Proposition. — *Si l'on choisit d'encoder les dilatations par le verneur $\delta\sigma_\delta$ les points de vue et les changements de points de vue sont les objets et les morphismes du groupoïde \mathcal{PV} dont les objets sont les couples $(H(1, \theta), \varphi_{1, \theta})$ et les morphismes sont les diagrammes (σ_t, T_t) , $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$, $(\delta\sigma_\delta, D_\delta)$ et (ρ_φ, id) . Le stabilisateur de tout objet est isomorphe au groupe $\widehat{C}_0(3, 1)$.*

Les morphismes (ρ_φ, id) représentent en quelque sorte l'action des rotations sur les horosphères $H(1, \theta)$. Ils se substituent donc aux éléments du groupe $\tilde{C}_0(3, 1)$ (pour $\bar{\psi} = 0$) c'est-à-dire à l'action des verseurs $\sigma_{\bar{\alpha}}$. Dans tous les cas, les transformations que l'on considère sont linéaires.

Si l'on choisit d'encoder les dilatations par le verseur σ_δ , ce qui semble plus naturel dans ce contexte, on obtient une description légèrement différente.

Proposition. — *Si l'on choisit d'encoder les dilatations par le verseur σ_δ les points de vue et les changements de points de vue sont les objets et les morphismes du groupoïde \mathcal{PV} dont les objets sont les couples $(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda, \theta})$ et les morphismes sont les diagrammes (σ_t, T_t) , $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$, (σ_δ, id) et (ρ_φ, id) . Le stabilisateur de tout objet est engendré par (σ_t, T_t) et $(\sigma_\gamma, R_\gamma)$ et représente donc le groupe des déplacements du plan.*

Pour les deux choix possibles, l'orbite du point de vue frontal $(H(1, 0), \varphi_{1,0})$ est

$$\mathcal{O}((H(1, 0), \varphi_{1,0})) = \mathcal{PV}_0 \quad (28)$$

4.2.2. L'action de \mathcal{PV} sur les images. — Comme dans le chapitre 3, on note

$$\bar{\mathbb{I}} = \{\bar{I}_{\lambda, \theta}, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in S^1\} \quad (29)$$

l'ensemble des images (dans la pratique θ appartient à $[0, \pi/2[$) avec $\bar{I}_{\lambda, \theta}$ donnée par l'équation (21). Le but ici est de définir une action du groupoïde \mathcal{PV} sur l'ensemble $\bar{\mathbb{I}}$.

Soit donc $\bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1$ une image définie sur l'objet $(H(\lambda_1, \theta_1), \varphi_{\lambda_1, \theta_1})$ et soit (F, f) un morphisme de \mathcal{PV} tel que

$$s(F, f) = (H(\lambda_1, \theta_1), \varphi_{\lambda_1, \theta_1}) \quad (30)$$

Ce morphisme agit suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H(\lambda_1, \theta_1) & \xrightarrow{F} & H(\lambda_2, \theta_2) \\ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} \uparrow & & \uparrow \varphi_{\lambda_2, \theta_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (31)$$

et il est donc naturel de considérer l'image $\bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2$ définie sur l'objet $(H(\lambda_2, \theta_2), \varphi_{\lambda_2, \theta_2})$ de telle sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{R} & & \\ & \nearrow \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 & & \nwarrow \bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2 & \\ H(\lambda_1, \theta_1) & \xrightarrow{F} & & \xrightarrow{F} & H(\lambda_2, \theta_2) \\ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} \uparrow & & & & \uparrow \varphi_{\lambda_2, \theta_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad (32)$$

Cela revient à définir $\bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2$ par

$$\bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^1 \circ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} = \bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^2 \circ F \circ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} \quad (33)$$

ou de façon équivalente par

$$\bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1} \circ \varphi_{\lambda_1, \theta_1} = \bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^{-2} \circ \varphi_{\lambda_2, \theta_2} \circ f \quad (34)$$

Proposition. — *Considérons la correspondance*

$$\varpi : \mathcal{PV}_1 \times \bar{\mathbb{I}} \longrightarrow \bar{\mathbb{I}} \quad (35)$$

qui associe à tout couple $((F, f), \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1})$ de $\mathcal{PV}_1 \times \bar{\mathbb{I}}$ vérifiant

$$s(F, f) = (H(\lambda_1, \theta_1), \varphi_{\lambda_1, \theta_1}) \quad (36)$$

l'image

$$\varpi((F, f), \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1}) = (F, f) * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1} = \bar{I}_{\lambda_2, \theta_2}^{-2} \quad (37)$$

C'est une action du groupoïde \mathcal{PV} sur $\bar{\mathbb{I}}$ au sens où

$$(ID, id) * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1} = \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1} \quad (38)$$

et

$$[(G, g) \circ (F, f)] * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1} = (G, g) * [(F, f) * \bar{I}_{\lambda_1, \theta_1}^{-1}] \quad (39)$$

où $(G, g) \circ (F, f)$ vérifie l'équation (15).

Le fait que

$$\mathcal{O}((H(1, 0), \varphi_{1,0})) = \mathcal{PV}_0 \quad (40)$$

se traduit de la façon suivante : l'ensemble des images obtenues à partir de tous les points de vue d'un même objet planaire est une orbite sous l'action de \mathcal{PV}_1 par ϖ . L'objet planaire est alors encodé par l'orbite

$$\mathcal{O}(\bar{I}_{1,0}) = \{\bar{I}_{\lambda, \theta} = (F, f) * \bar{I}_{1,0} \in \bar{\mathbb{I}} \text{ tel que } s(F, f) = (H(1, 0), \varphi_{1,0})\} \quad (41)$$

de son image frontale “de référence”

$$\bar{I}_{1,0} : (H(1, 0), \varphi_{1,0}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (42)$$

$$\varphi_{1,0}(x) \longmapsto I^0(x) \quad (43)$$

(I^0 est l'image frontale introduite dans le chapitre 3 pour représenter la réflectance de l'objet).

4.3. Approche 1 versus approche 2

On termine ce chapitre par le tableau ci-dessous correspondant à une comparaison entre les deux approches expliquées dans les chapitres 3 et 4 pour la modélisation des points de vue et des changements de points de vue:

	LE GROUPE $C_0(3,1)$	LE GROUPOÏDE \mathcal{PV}
Domaine de θ	$]0, \frac{\pi}{2}[$ $\theta \neq 0$	S^1 θ quelconque
Modélisation de θ	choix d'une bijection $\theta \mapsto \alpha_\theta$ $\alpha_\theta = \cot \theta$	plus naturelle action de $\theta =$ rotation de e_∞
Modélisation des dilatations de rapport δ	transformations de \mathbb{R}^2 $x \mapsto \delta x$	changement du zoom $\lambda e_\infty \mapsto \delta \lambda e_\infty$
Modélisation des changs. de pts. de vue	sous-groupe de $C(3,1)$	morphismes du groupeïde \mathcal{PV}

CHAPITRE 5

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

5.1. Conclusion

Dans cette thèse, nous avons tiré parti du modèle conforme de D. Hestenes afin de construire des représentations d'images et des changements de points de vue dans un cadre géométrique puissant. Dans un premier temps, nous parvenons d'une part à interpréter le modèle sténopé de caméra dans la géométrie conforme, et d'autre part à décrire les changements de points de vue par un groupe de transformations linéaires et conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Une approche plus générale nous permet de modéliser les points de vue et les changements de points de vue par les objets et les morphismes d'un groupoïde.

L'idée de base est de modéliser les différents points de vue d'images d'une manière vectorielle, ce qui suggère de s'intéresser aux domaines de définition des images et de plonger ces derniers dans un espace vectoriel de dimension 4. Ainsi, les changements de points de vue s'identifient aux transformations "naturelles" de cet espace. Les calculs préliminaires dans la géométrie projective réelle nous permettent de définir une image comme étant une application $I_{\psi,\theta} : R_{-\psi} h_{\theta}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ où h_{θ} désigne la distorsion perspective paramétrée par la latitude θ de la caméra et $R_{-\psi}$ est une rotation du plan.

Afin d'encoder le domaine de l'image $I_{\psi,\theta}$ (particulièrement le paramètre θ responsable des déformations perspectives), nous introduisons une généralisation du modèle conforme usuel du plan euclidien. Celle-ci consiste à faire varier la métrique de l'espace \mathbb{R}^4 au travers d'une rotation ρ_{β} de \mathbb{R}^2 et à considérer, pour chaque métrique G_{β} de \mathbb{R}^2 obtenue en transportant la métrique de Minkowski par ρ_{β} , les vecteurs isotropes $\alpha e_{\infty,\beta}$ et $\alpha^{-1} e_{0,\beta}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Ces derniers définissent une famille à deux paramètres d'horosphères $H(\alpha, \beta)$ c'est à dire une famille de représentations conformes généralisées de \mathbb{R}^2 .

L'étape suivante revient à la mise en oeuvre des modèles conformes généralisés pour la représentation d'images et des changements de points de vue. Pour cela, nous introduisons deux méthodes:

La première consiste à réduire la métrique Q_β à la métrique de Minkowski en posant $\beta = 0$ et à coder la latitude θ au moyen du scalaire α noté alors α_θ . Le domaine de définition de $I_{\psi,\theta}$ est alors représenté par une horosphère H_{α_θ} munie du plongement $\varphi_{\psi,\alpha_\theta}$ associé qui code aussi le paramètre ψ . Il semble alors naturel de voir une image comme une application définie sur le modèle conforme $\{H_{\alpha_\theta}, \varphi_{\psi,\alpha_\theta}\}$ de $R_{-\psi}h_\theta(\mathbb{R}^2)$, et un changement de point de vue comme un changement de modèles conformes. Ces représentations nous permettent de linéariser les changements de points de vue en les encodant par un groupe $C_0(3,1)$ de transformations linéaires et conformes de $\mathbb{R}^{3,1}$ qui agit sur l'ensemble $\bar{\mathbb{I}}$ des images conformes et le décompose en des orbites.

La seconde méthode est en quelque sorte une généralisation de la première pour laquelle une image (pour $\psi = 0$) est définie sur une horosphère $H(\alpha, \beta)$ telle que:

- $\beta = \theta$ code la latitude de la caméra, ce qui revient à “représenter la direction de l’axe optique par la direction du vecteur à l’infini”,
- le paramètre α code le zoom λ de l’image comme étant “une dilatation du point à l’infini $e_{\infty,\beta}$ ”.

Nous construisons dans cette approche un groupoïde \mathcal{PV} dont les objets sont les modèles conformes généralisés $(H(\lambda, \theta), \varphi_{\lambda,\theta})$ et les morphismes sont des diagrammes (F, f) . Les points de vue sont représentés par les objets de \mathcal{PV} et les changements de points de vue sont décrits par ces morphismes. Comme dans la première méthode, on définit aussi l’action de ce groupoïde sur l’ensemble des représentations conformes des images à travers l’action de ces morphismes.

5.2. Perspectives

La suite de cette thèse consiste à considérer ces formalismes de modélisations des points de vue pour la recherche d’invariants par changements de points de vue, ceci en appliquant une technique introduite dans [46]. Pour cela, on veut généraliser cette dernière méthode afin de l’appliquer dans le cadre conforme dans lequel on se situe. D’après les travaux de cette thèse, on peut procéder selon deux manières: soit on considère la première approche dans laquelle les changements de points de vue sont donnés par le groupe $C_0(3,1)$, soit la deuxième où les changements de points de vue correspondent aux morphismes du groupoïde \mathcal{PV} . Sachant que les deux raisonnements sont “similaires”, on suppose dans la suite que les changements de points de vue sont décrits par $C_0(3,1)$.

Il s’agit de définir un détecteur covariant qui permet d’associer à toute image un élément canonique du groupe vérifiant la condition de covariance. L’élément canonique est défini comme étant un point critique du détecteur. Ceci permet de définir un descripteur invariant complet (voir [50]) sous l’action de ce groupe en faisant agir sur chaque image l’inverse de son élément canonique. Dans ce qui suit, on annule le paramètre ψ de l’image.

Plus précisément, le but est de trouver une fonctionnelle Φ définie sur $\bar{\mathbb{I}}$ et satisfaisant:

$$\Phi(\bar{I}_{\alpha_{\theta_1}}) = \Phi(\bar{I}_{\alpha_{\theta_2}}) \iff \exists F \in C_0(3,1) \text{ tel que } F * \bar{I}_{\alpha_{\theta_1}} = \bar{I}_{\alpha_{\theta_2}}. \quad (1)$$

pour tout $\bar{I}_{\alpha_{\theta_1}}$ et $\bar{I}_{\alpha_{\theta_2}}$ dans $\bar{\mathbb{I}}$. Cette fonctionnelle Φ est appelée invariant complet par l'action de $C_0(3,1)$ sur $\bar{\mathbb{I}}$. Pour cela, S. Soatto propose de rechercher d'abord un détecteur covariant *i.e* une autre fonctionnelle $\Psi : \bar{\mathbb{I}} \times C_0(3,1) \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable (par rapport à une paramétrisation de $C_0(3,1)$) et vérifiant

1. l'existence de l'élément canonique: pour tout $\bar{I}_{\alpha_\theta} \in \bar{\mathbb{I}}$, il existe $\bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta}) \in C_0(3,1)$ tel que

$$\nabla \Psi(\bar{I}_{\alpha_\theta}, \bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})) = 0. \quad (2)$$

Cet élément $\bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})$ du groupe est dit élément canonique de \bar{I}_{α_θ} ,

2. la condition de transversalité : la matrice Hessienne de Ψ est non dégénérée *i.e*

$$\det[H_\Psi(\bar{I}_{\alpha_\theta}, \bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta}))] \neq 0, \quad (3)$$

pour tout couple $(\bar{I}_{\alpha_\theta}, \bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta}))$ vérifiant (2),

3. la condition de covariance : si $\nabla \Psi(\bar{I}_{\alpha_\theta}, \bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})) = 0$ alors on a

$$\nabla \Psi(F * \bar{I}_{\alpha_\theta}, F \circ \bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})) = 0 \quad (4)$$

pour tout $F \in C_0(3,1)$.

Par le théorème des fonctions implicites, la condition de transversalité assure l'unicité de l'élément canonique $\bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})$ pour toute image \bar{I}_{α_θ} . D'autre part, la condition de covariance implique que l'élément canonique de $F * \bar{I}_{\alpha_\theta}$ est

$$\bar{F}(F * \bar{I}_{\alpha_\theta}) = F \circ \bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta}), \quad (5)$$

pour tout $F \in C_0(3,1)$.

Afin de passer au "langage" des fibrés ce qui pourra être utile pour la suite, étant donné un détecteur covariant Ψ , on pose $\bar{\mathbb{I}} = \coprod_i \mathcal{O}(\bar{I}_{\alpha_\theta}^i)$ l'union disjointe des orbites, pour $\alpha_\theta > 0$ fixé. L'ensemble des éléments canoniques des images de $\bar{\mathbb{I}}$ correspond alors à une section du fibré $\coprod_i \mathcal{O}(\bar{I}_{\alpha_\theta}^i) \times C_0(3,1)$ sur $\coprod_i \mathcal{O}(\bar{I}_{\alpha_\theta}^i)$, ayant le groupe $C_0(3,1)$ comme fibre. Cette section est alors définie par

$$\begin{aligned} S : \coprod_i \mathcal{O}(\bar{I}_{\alpha_\theta}^i) &\longrightarrow \coprod_i \mathcal{O}(\bar{I}_{\alpha_\theta}^i) \times C_0(3,1) \\ F * \bar{I}_{\alpha_\theta}^i &\longmapsto (F * \bar{I}_{\alpha_\theta}^i, \bar{F}(F * \bar{I}_{\alpha_\theta}^i)) \end{aligned} \quad (6)$$

Le descripteur canonisé associé au détecteur covariant Ψ ci-dessus est défini par

$$\Phi(\bar{I}_{\alpha_\theta}) = [\bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})]^{-1} * \bar{I}_{\alpha_\theta}. \quad (7)$$

On l'a déjà dit, il s'agit de faire agir sur toute image l'inverse de son élément canonique. En effet, il est clair que comme

$$\begin{aligned} \Phi(F * \bar{I}_{\alpha_\theta}) &= [F \circ \bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})]^{-1} * [F * \bar{I}_{\alpha_\theta}] \\ &= [\bar{F}(\bar{I}_{\alpha_\theta})]^{-1} * \bar{I}_{\alpha_\theta} \\ &= \Phi(\bar{I}_{\alpha_\theta}) \end{aligned} \quad (8)$$

alors Φ est bien invariant sous l'action de $C_0(3, 1)$. Il est complet par définition et vérifie bien donc l'équation (1). On se rend compte alors que l'étape la plus importante revient à la recherche de la fonctionnelle Ψ .

Nous proposons alors de généraliser le détecteur covariant de la méthode SIFT [37] dans laquelle le groupe en question est le groupe des translations et des dilatations du plan euclidien. Il s'agit de la fonctionnelle obtenue par la convolution du laplacien du noyau gaussien

$$G(x, t, \delta) = \frac{1}{2\pi\delta} \exp\left(-\frac{|x-t|^2}{2\delta^2}\right), \quad (9)$$

avec l'image, sachant que (t, δ) correspond à une translation et une dilatation du plan, et $x \in \mathbb{R}^2$. Comme ce détecteur dépend du point x , le descripteur associé est un descripteur local autour de x . Notre objectif est de trouver une généralisation du noyau gaussien pour laquelle le groupe qui agit sera $C_0(3, 1)$ et aboutissant au travers de calculs efficaces à un détecteur covariant. Le point crucial est que notre groupe correspond à des fonctions linéaires et conformes ce qui facilitera les calculs en question.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.V. Ahlfors. *Möbius transformations in several dimensions*. Ordway professorship lectures in mathematics. University of Minnesota, School of Mathematics, 1981.
- [2] P. Anglès. Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une métrique de type (p, q) . *Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique*, 33(1):33–51, 1980.
- [3] T. Batard. *Géométrie différentielle des fibrés vectoriels et algèbres de Clifford appliquées au traitement d'images multicanaux*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2009.
- [4] T. Batard and M. Berthier. A Riemannian Fourier transform *via* Spin representations. In Frank Nielsen and Frédéric Barbaresco, editors, *Geometric Science of Information - First International Conference, GSI 2013*, volume 8085 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 131–139, Paris, France, August 28-30 2013. Springer.
- [5] T. Batard, C. Saint-Jean, and M. Berthier. A metric approach to nD images edge detection with Clifford algebras. *J. Mathematical Imaging and Vision*, 33:296–312, 2009.
- [6] T. Batard, C. Saint-Jean, and M. Berthier. Clifford-Fourier transform for color image processing. In Eduardo Bayro-Corrochano and Gerek Scheuermann, editors, *Geometric Algebra Computing in Engineering and Computer Science*, pages 135–162. Springer London, 2010.
- [7] W-E. Baylis. *Clifford (Geometric) Algebras with Applications to Physics, Mathematics, and Engineering*. Birkhäuser, 1999.
- [8] E. Bayro-Corrochano. *Geometric Computing for Wavelet Transforms, Robot Vision, Learning, Control and Action*. Springer Verlag, 2010.
- [9] M. Berger. *Geometry 1*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [10] M. Berthier. Spin geometry and image processing. To appear in *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24, June 2014.

- [11] C. Chevalley. *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras*. New edition edition, 31 december 1995.
- [12] W-K. Clifford. Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, 1:350–358, 1878.
- [13] E-B. Corrochano. *Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*. Birkhäuser, 2001.
- [14] G. Demarcq, L. Mascarilla, M. Berthier, and P. Courtellemont. The color monogenic signal: Application to color edge detection and color optical flow. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40:269–284, 2011.
- [15] C. Doran. *Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics*. PhD thesis, University of Cambridge, 1994.
- [16] C. Doran and A. Lasenby. *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, 2007.
- [17] L. Dorst, D. Fontijne, and S. Mann. *Geometric Algebra for Computer Science : An Object-Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann, 2009.
- [18] G. El Mir, C. Saint-Jean, and M. Berthier. Conformal geometry for viewpoint change representation. *Advances in Applied Clifford Algebras*, October 2013.
- [19] O. Faugeras, Q-T. Luong, and T. Papadopoulou. *The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern The Formation of Images of A Scene and Some of Their Applications*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2001.
- [20] D. Forsyth, J-L. Mundy, A. Zisserman, and C-M. Brown. Projectively invariant representations using implicit algebraic curves. *Image Vision Comput.*, 9(2):130–136, 1991.
- [21] J. Gallier. *Geometric Methods and Applications: For Computer Science and Engineering*. Springer Science+Business Media, LLC, 2011.
- [22] F. Gourd, J-P. Gauthier, and H. Younes. Une méthode d'invariants de l'analyse harmonique en reconnaissance de formes. *Traitement du Signal*, 6:161–178, 1989.
- [23] A.J. Hanson. *Visualizing Quaternions*. The Morgan Kaufmann Series in Interactive 3D Technology. Elsevier Science, 2006.
- [24] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, second edition, 2004.
- [25] D. Hestenes. *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach, 1992.
- [26] D. Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics (Fundamental Theories of Physics)*. Springer; 2nd edition, 1999.
- [27] D. Hestenes and G. Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Kluwer Academic Publishers, 1987.

- [28] D. Hestenes and R. Ziegler. Projective geometry with Clifford algebra. *Acta Applicandae Mathematicae*, 23:25–63, 1991.
- [29] E. Hitzler, T. Nitta, and Y. Kuroe. Applications of Clifford’s geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23:377–404, June 2013.
- [30] E. Hitzler and S-J. Sangwine. *Quaternion and Clifford Fourier Transforms and Wavelets*. Birkhäuser Verlag, 2013.
- [31] R. Horaud and O. Monga. *Vision par ordinateur: outils fondamentaux*. Traité des nouvelles technologies: Série Informatique. Hermès, 1995.
- [32] R-G. Jürgen. *Perspectives on Projective Geometry, A Guided Tour Through Real and Complex Geometry*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [33] R. Kimmel. *Numerical Geometry of Images : Theory, Algorithms, and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [34] H-B. Lawson and M-L. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1989.
- [35] H. Li, D. Hestenes, and A. Rockwood. Generalized homogeneous coordinates for computational geometry. In G. Sommer, editor, *Geometric computing with Clifford algebra*, pages 27–59. Springer-Verlag, 2001.
- [36] P. Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors (London Mathematical Society Lecture Note Series)*. Cambridge University Press, 2 edition, May 7 2001.
- [37] D. G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 2(60):91–110, 2004.
- [38] B. Mawardi and E. Hitzler. Clifford Fourier transformation and uncertainty principle for the Clifford geometric algebra $Cl_{3,0}$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 16:4161, 2006.
- [39] A. Moroianu. Une approche spinorielle à la géométrie riemannienne. Soutenance d’Habilitation à diriger les recherches, Université Paris VII, May 2003.
- [40] J. L. Mundy and A. Zisserman. Appendix - projective geometry for machine vision. In J. L. Mundy and A. Zisserman, editors, *Geometric invariance in computer vision*, pages 463–519. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1992.
- [41] C. Perwass. *Applications of geometric algebra in computer vision*. PhD thesis, University of Cambridge, 2000.
- [42] C. Perwass and D. Hildenbrand. Aspects of geometric algebra in Euclidean, projective and conformal space. Technical Report 0310, Christian-Albrechts University, 2003.
- [43] J. Petitot. *Neurogéométrie de la Vision - Modèles Mathématiques et Physiques des Architectures Fonctionnelles*. Ecole polytechnique edition, 2009.

- [44] M. Postnikov and V. Shokurov. *Lie Groups and Lie Algebras*. Lectures in geometry. URSS, 1994.
- [45] S-J. Sangwine and T-A. Ell. Colour image filters based on hypercomplex convolution. *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings*, 147, Issue: 2:89–93, April 2000.
- [46] S. Soatto. Steps towards a theory of visual information: Active perception, signal-to-symbol conversion and the interplay between sensing and control. arxiv:1110.2053, October 2011.
- [47] G. Sommer. *Geometric Computing with Clifford Algebras*. Springer Berlin Heidelberg, May 22 2001.
- [48] J. Turski. Projective Fourier analysis for patterns. *Pattern Recognition*, 33(12):2033–2043, December 2000.
- [49] J. Turski. Geometric Fourier analysis for computational vision. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, Volume 11, Issue 1:1–23, 2005.
- [50] N-J. Vilenkin. *Special Functions and the Theory of Group Representations*. Translations of Mathematical Monographs. vol 22. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1968.
- [51] J-A. Vince. *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer-Verlag TELOS, Santa Clara, CA, USA, 2008.
- [52] G. Yu and J-M. Morel. ASIFT: An Algorithm for Fully Affine Invariant Comparison. *Image Processing On Line*, 1, 2011.

Algèbres de Clifford conformes et orbites de points de vue d'images

Résumé : L'objectif de ce travail est de décrire des modélisations des points de vue et des changements de points de vue d'images d'un objet planaire dans les algèbres de Clifford conformes. Nous généralisons le modèle conforme de l'espace euclidien à travers une famille à deux paramètres d'horosphères, chacune d'entre elles étant plongée dans l'espace \mathbb{R}^4 muni d'une métrique équivalente à la métrique de Minkowski. Nous décrivons par la suite deux approches pour mettre en oeuvre ces modèles conformes généralisés pour les représentations d'images. L'idée de base est d'encoder les distorsions perspectives de l'objet causées par la variation du paramètre de latitude de la caméra au travers des paramètres d'une horosphère. La première approche consiste à considérer les horosphères de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$ pour encoder les points de vue. Les changements de points de vue sont alors linéarisés à travers un groupe de transformations linéaires et conformes de $\mathbb{R}^{3,1}$. Cette approche est ensuite généralisée en décrivant les points de vue à travers les objets d'un groupoïde dont les morphismes sont des diagrammes commutatifs qui représentent les changements de points de vue. Ainsi, une image conforme est décrite par une application définie sur une horosphère à deux paramètres. L'action du groupoïde sur l'ensemble des images conformes nous conduit à associer à tout objet planaire l'orbite de toutes ses images conformes obtenues à partir de tous les points de vue.

Mots clés : Algèbres de Clifford, modèle conforme généralisé, horosphère, point de vue d'image, modèle sténopé, distorsions perspectives, action de groupe, groupoïde, orbite.

Conformal Clifford algebras and image viewpoints orbit

Abstract : Our purpose in this work is to introduce representations of image viewpoints and viewpoint changes of a planar object in conformal Clifford algebras.

Our important preliminary contribution is a generalization of the conformal model of the Euclidean space through a two-parameter family of horospheres. Each one of these is embedded into the space \mathbb{R}^4 equipped with a metric equivalent to the Minkowski metric. We describe two approaches that make use of these generalized conformal models for image representations. These are based on modelings of perspective distortions of the object caused by a variation of the latitude angle of the camera through the horosphere parameters. First, we model the image viewpoints by the horospheres of the Minkowski space $\mathbb{R}^{3,1}$. In this setting, the viewpoint changes are linearized through a group of linear conformal transformations of $\mathbb{R}^{3,1}$. Next, this approach is generalized by describing the viewpoints through the objects of a groupoid whose morphisms are commutative diagrams that model the viewpoint changes. A conformal image is then described as a map defined on a two-parameter horosphere. The action of the groupoid on the set of conformal images leads us to associate with every planar object the orbit of its conformal images from all viewpoints.

Keywords : Clifford algebras, generalized conformal model, horosphere, image viewpoint, pinhole model, perspective distortions, group action, groupoid, orbit.

Laboratoire Mathématiques, Image et Applications
Avenue Michel Crépeau
17042 La Rochelle Cedex 01