HAL
open science

Mesures de biréfringences magnétiques dans l'hélium et le xénon gazeux, et dans le vide

Agathe Cadène

To cite this version:

Agathe Cadène. Mesures de biréfringences magnétiques dans l'hélium et le xénon gazeux, et dans le vide. Optique [physics.optics]. Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier), 2015. Français. NNT : . tel-01177973

HAL Id: tel-01177973

https://theses.hal.science/tel-01177973v1

Submitted on 17 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :
Agathe CADENE

Le jeudi 2 juillet 2015

Titre :

Mesures de biréfringences magnétiques
dans l'hélium et le xénon gazeux, et dans le vide

ED SDM : Physique - COR 02

Unité de recherche :

Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses

Directeur(s) de Thèse :

Mathilde FOUCHE - Chargée de recherche
Carlo RIZZO - Professeur

Rapporteurs :

Fabien BRETENAKER - Directeur de recherche
François NEZ - Directeur de recherche

Autre(s) membre(s) du jury :

Nicolas BILLY - Professeur
Michel LINTZ - Chargé de recherche
Pierre PUJOL - Professeur

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses de Toulouse. Je remercie son directeur, Geert Rikken, ainsi que son directeur adjoint, Oliver Portugall de m'avoir accueillie dans leur établissement et de m'avoir permis d'y travailler dans de bonnes conditions.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail : Fabien Bretenaker et François Nez, rapporteurs de cette thèse, Nicolas Billy, Michel Lintz et Pierre Pujol, président du jury. Je les remercie de l'intérêt et de l'attention qu'ils ont portés à mon travail, ainsi que pour les remarques avisées et constructives qu'ils m'ont faites.

Pour cette thèse j'ai été accueillie par l'équipe BMV.

Je souhaite tout d'abord en remercier son responsable, et mon directeur de thèse, Carlo Rizzo. Je te remercie de m'avoir accompagnée et encadrée au cours de ces trois années de thèse. J'ai beaucoup apprécié ta disponibilité au quotidien ainsi que ta franchise, qui m'ont permis d'avancer sur ce travail de recherche. Merci également pour toutes les discussions que nous avons pu avoir et aux travers desquelles j'ai beaucoup appris. Merci, en particulier, d'avoir répondu avec patience à mes questions concernant l'électrodynamique quantique. Ton humanisme et ton enthousiasme font que ça a été un plaisir de participer au projet BMV.

Mes remerciements vont ensuite à Mathilde Fouché, ma directrice de thèse. Merci Mathilde pour ces trois années au cours desquelles tu as toujours été disponible pour me guider et répondre à mes questions avec une grande rigueur. Merci de m'avoir toujours poussée à aller au fond des choses, ce qui m'a permis d'en apprendre toujours plus, et de la confiance que tu as su me donner lors de nos journées de travail en salle blanche. Enfin, merci beaucoup pour ton optimisme, ton énergie et ton enthousiasme qui font que ça a été un plaisir de travailler avec toi.

Je tiens également à remercier Rémy Battesti d'avoir été présent tout au long de cette thèse. Tu t'es toujours rendu disponible pour m'aider sur l'expérience, me guider et répondre à mes mille questions. Je te remercie d'avoir relu ce manuscrit

et de m'avoir activement aidée à la préparation de la soutenance. Merci, enfin, pour ta grande gentillesse et pour tes nombreux et précieux conseils en matière d'enseignement.

Bien entendu je n'oublie pas Paul Berceau, qui m'a précédée en tant que thésard dans l'équipe BMV. Merci Paul pour les quelques mois de travail que nous avons eu en commun lors de mon stage de master, à la fin de ta thèse, durant lesquels tu m'as initiée à l'expérience BMV avec beaucoup de pédagogie et de bonne humeur. Je te remercie aussi pour tous les conseils avisés que tu m'as donnés au cours de ces trois ans. Je t'ai souvent sollicité et tu as toujours répondu présent.

Vient enfin Alice Rivère, nouvelle thésarde de l'équipe, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler au cours de ma dernière année de thèse. Je te souhaite autant de bonheur que j'ai pu en avoir sur cette expérience et au sein de l'équipe BMV.

Je remercie également Arnaud Le Padellec, mon parrain de thèse, pour son suivi attentif du déroulement de ma thèse.

Je tiens ensuite à remercier tout le personnel du Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses de Toulouse. Tout d'abord un grand merci pour votre accueil chaleureux. Il y a eu, tous les jours de ma thèse, quelqu'un pour passer la tête par la porte de mon bureau pour dire bonjour ou quelqu'un pour me raconter une anecdote dans le couloir, et cela a contribué au plaisir que j'ai eu a travailler dans ce laboratoire.

Ce travail de thèse n'aurait pas été possible sans le soutien de l'équipe administrative et des différentes équipes techniques que je souhaite remercier ici.

Merci à Françoise, Séverine, Cécile et Catherine pour leur aide et leur efficacité en ce qui concerne les démarches administratives.

Merci à l'équipe générateurs et aimants pulsés, à l'équipe cryogénie, pression et vide, à l'équipe informatique, à l'équipe instrumentation scientifique et à l'équipe mécanique pour leur appui. Je souhaite notamment souligner le travail de Paul Frings, Jérôme Béard, Julien Billette et Bertrand Griffe en ce qui concerne les bobines et les générateurs utilisés sur l'expérience BMV, et la nouvelle version de l'expérience ; Marc Nardone, Philippe Delescluse et Abdelaziz Zitouni pour les cryostats à azote liquide et Jean-Pierre Nicolin pour le programme de commande des tirs.

Je tiens par ailleurs à remercier Gilles Bailly qui a développé la nouvelle version de l'asservissement au cours de son séjour au LNCMI. Le travail et les discussions avec Gilles ont permis de m'éclairer sur la physique des systèmes bouclés.

Un grand merci également aux différents chercheurs, et personnels techniques du LNCMI avec qui j'ai été en interaction et qui ont toujours répondu à mes sollicita-

tions avec beaucoup de gentillesse.

Enfin, je remercie tous les membres de l'équipe FFC pour leurs conseils avisés et encouragements. J'ai eu le plaisir de partager le bureau des thésards et post-docs de cette équipe : Sven, Stéphane, Francis, et Wojciech. Malgré tous vos efforts, je suis désolée d'admettre que les surfaces de Fermi restent un mystère pour moi...

Un grand merci à Antonio Rizzo d'avoir répondu avec pédagogie à toutes mes questions à propos de la chimie quantique. Il s'est toujours rendu disponible et m'a été d'une grande aide pour la rédaction de ce travail de thèse.

J'ai également l'occasion de remercier ici les enseignants dont j'ai pu suivre les cours lors de mon cursus à l'université, et qui ont su me transmettre leur goût pour la physique.

Mes derniers remerciements vont à mes amis et à ma famille pour leur soutien sans faille. Un merci tout particulier à Pierre d'avoir pris soin de moi.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Effets magnéto-optiques dans le vide et les gaz nobles 2

1.1.1 Effets Faraday et Cotton-Mouton 2

1.1.2 Effets dans le vide 4

Expression du lagrangien de Heisenberg-Euler 6

Effet Cotton-Mouton du vide 9

1.1.3 Effets dans les gaz nobles 12

Effet Faraday 12

Effet Cotton-Mouton 13

Calculs théoriques de biréfringences 14

1.2 Contexte expérimental 15

1.2.1 Interférométrie à bras séparés 15

1.2.2 Polarimétrie 17

1.2.3 Effet Cotton-Mouton du vide 18

Première expérience 18

Projets en cours 21

Résumé 22

Autres propositions 23

1.2.4 Conclusion 24

2 Dispositif expérimental **25**

2.1 Introduction 26

2.2 Le polarimètre 26

2.2.1 Biréfringence et polarisation 26

2.2.2 Schéma général du dispositif expérimental 31

2.2.3 Mesure de la polarisation à partir des intensités ordinaire et extraordinaire 33

2.3 La cavité Fabry-Perot 37

2.3.1 L'interféromètre de Fabry-Perot : généralités 37

Coefficients de transmission et de réflexion de la cavité 37

Temps de vie des photons dans la cavité 40

Déphasage accumulé dans la cavité 41
2.3.2 Caractéristiques de la cavité Fabry-Perot de l'expérience BMV 43
Miroirs de la cavité 43
Cavité en optique gaussienne 45
Finesse de la cavité 48
Biréfringence intrinsèque de la cavité 51
Filtrage de la cavité 63
2.4 Le système d'asservissement 65
2.4.1 Asservissement par la méthode de Pound-Drever-Hall 66
2.4.2 Caractéristiques de l'asservissement 71
Description du système 71
Performances 73
2.5 Le champ magnétique 78
2.5.1 Champ magnétique transverse pour la mesure de biréfringences linéaires 79
Production de champs magnétiques pulsés 79
Production d'un champ magnétique intense transverse 82
Caractéristiques des bobines X-coils 86
2.5.2 Champ magnétique longitudinal pour la mesure de biréfringences circulaires 92
2.6 L'enceinte à vide 93
2.6.1 Description 93
2.6.2 Système de pompage et de mesure de la pression 94
2.6.3 Mesures dans les gaz et dans le vide 97

3 Mesures de biréfringences magnétiques circulaires 99
3.1 Introduction 100
3.2 Acquisition et analyse des données expérimentales 101
3.2.1 Dispositif expérimental et acquisition des données 101
3.2.2 Analyse des données 102
Obtention de la constante de Verdet 102
Évaluation des incertitudes 107
3.3 Effets systématiques 109
3.3.1 Effet des gaz résiduels 109
3.3.2 Effet Faraday des miroirs de la cavité 110
Estimation de l'effet Faraday des miroirs 110
Effet systématique pour les mesures dans les gaz 113
3.4 Effet Faraday des gaz d'hélium et de xénon 114
3.4.1 Résultat dans l'hélium gazeux 114

Nos mesures 114
Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales 116
Comparaison avec les valeurs théoriques 117
Bilan 118
3.4.2 Résultat dans le xénon gazeux 119
Nos mesures 119
Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales 120
Comparaison avec les valeurs théoriques 121
Bilan 123

4 Mesures de biréfringences magnétiques linéaires 125
4.1 Introduction 126
4.2 Méthode d'analyse 126
4.2.1 Rapports des effets Cotton-Mouton et Faraday 126
4.2.2 Étude des symétries du signal mesuré 130
4.2.3 Calcul de l'ellipticité $\Psi(t)$ 132
4.2.4 Obtention de la constante Cotton-Mouton 134
4.2.5 Évaluation de l'incertitude 135
4.3 Procédure d'acquisition des données 137
4.4 Effets systématiques 138
4.4.1 Effet des gaz résiduels 139
4.4.2 Effet Cotton-Mouton des miroirs de la cavité 140
4.5 Effet Cotton-Mouton dans les gaz 141
4.5.1 Dans l'hélium gazeux 141
Nos mesures 141
Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales et théoriques 145
4.5.2 Dans le xénon gazeux 147
Nos mesures 147
Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales et théoriques 148
4.6 Effet Cotton-Mouton du vide 151
4.6.1 Nos mesures 151
Signaux bruts 151
Sélection des données pour l'analyse 153
Signal d'ellipticité $\Psi(t)$ 154
Constante Cotton-Mouton du vide 157
4.6.2 Limitations de la sensibilité en ellipticité 159
Bruit de grenaille 159
Bruit de fréquence de l'asservissement 160
4.6.3 Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales 168

5 Perspectives : vers une nouvelle version de l'expérience BMV 171
5.1 Introduction 172
5.2 Augmentation du signal à mesurer 172
5.2.1 Champ magnétique 173
5.2.2 Finesse de la cavité 174
5.3 Diminution des effets systématiques et amélioration de la sensibilité optique 175
5.3.1 Stabilité mécanique 175
5.3.2 Extinction des polariseurs et réglage fin de la biréfringence statique de la cavité 177
5.3.3 Augmentation de la puissance incidente 177
5.3.4 Amélioration du système d'asservissement 178
5.4 Sensibilité attendue 181

6 Conclusions 183

Annexes 187

Annexe A 189

Annexe B 191

Annexe C 195

Annexe D 197

Annexe E 211

Annexe F 221

Chapitre 1

Introduction

1.1 Effets magnéto-optiques dans le vide et les gaz nobles

1.1.1 Effets Faraday et Cotton-Mouton

L'interaction entre une onde lumineuse et un champ magnétique dans les milieux matériels est étudiée depuis le XIXème siècle. En 1846, M. Faraday observe que lorsqu'un faisceau linéairement polarisé traverse un milieu soumis à un champ magnétique $B_{||}$ parallèle à la direction de propagation de la lumière (appelé par la suite champ longitudinal), sa polarisation tourne d'un angle θ_{F} [1]. Depuis, cet effet est connu sous le nom d'effet Faraday. L'influence d'un champ magnétique perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière (que nous appellerons champ transverse) a été découvert plus tard, en 1901 par J. Kerr [2] et 1902 par Q. Majorana [3, 4]. Une onde polarisée linéairement qui traverse un milieu matériel soumis à un champ magnétique transverse $B_{\perp}$, voit sa polarisation devenir elliptique. Ce phénomène a été étudié en détails par A. Cotton et H. Mouton [5–10] et est aussi rapporté dans les livres de W. Voigt [11, 12]. Il est depuis appelé effet Cotton-Mouton, comme nous le ferons dans la suite de cette thèse, ou effet Voigt.

Ces deux effets sont des phénomènes de biréfringence induite par l'application d'un champ magnétique dans un milieu matériel. L'effet Faraday est représenté sur la figure 1.1a. Toute onde polarisée linéairement peut se décomposer en la somme de deux ondes : une onde polarisée circulairement droite (notée +) et une onde polarisée circulairement gauche (notée -). En présence d'un champ magnétique longitudinal, l'onde polarisée circulairement droite ne se propage pas à la même vitesse que l'onde polarisée circulairement gauche. En d'autres termes, l'indice optique vu par l'onde polarisée circulairement droite n_+ diffère de celui vu par l'onde polarisée circulairement gauche n_-. Il s'agit donc d'une biréfringence circulaire, notée Δn_{F}, induite par ce champ magnétique, avec :

$$\Delta n_{\mathrm{F}} = n_- - n_+. \tag{1.1}$$

La différence d'indices est proportionnelle au champ magnétique, telle que :

$$\Delta n_{\mathrm{F}} = k_{\mathrm{F}} B_{||}, \tag{1.2}$$

où la constante de proportionnalité k_{F} dépend du milieu de propagation. Cette biréfringence se manifeste par une rotation de la polarisation linéaire d'un angle θ_{F} donné par :

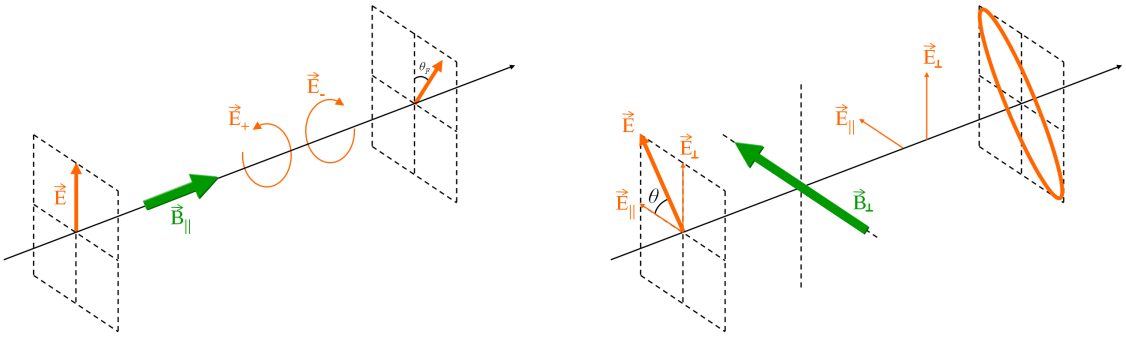
$$\theta_{\mathrm{F}} = \pi \frac{L_{\mathrm{b}}}{\lambda} \Delta n_{\mathrm{F}} = \frac{\pi k_{\mathrm{F}}}{\lambda} L_{\mathrm{b}} B_{||}, \tag{1.3}$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière et L_b est la longueur sur laquelle le champ magnétique est appliqué dans le milieu. Pour des raisons historiques, l'effet Faraday est généralement donné en fonction de la constante de Verdet V, exprimée en rad.T^{-1}.m^{-1} et définie comme suit :

$$V = \frac{\pi k_\mathrm{F}}{\lambda}, \tag{1.4}$$

d'où :

$$\theta_\mathrm{F} = V L_\mathrm{b} B_{||}. \tag{1.5}$$



(a) Effet Faraday : biréfringence circulaire induite par le champ magnétique longitudinal $B_{||}$. L'onde polarisée circulairement gauche ne se propage pas à la même vitesse que l'onde polarisée circulairement droite ce qui entraîne la rotation d'un angle θ_F de la polarisation linéaire incidente.

(b) Effet Cotton-Mouton : biréfringence linéaire induite par le champ magnétique transverse $B_\perp$. L'onde polarisée parallèlement à $B_\perp$ ne se propage pas à la même vitesse que l'onde polarisée perpendiculairement à celui-ci, ce qui transforme la polarisation linéaire incidente en polarisation elliptique.

FIGURE 1.1 – Étude de biréfringences magnétiques par polarimétrie.

L'effet Cotton-Mouton est représenté sur la figure 1.1b. Toute onde polarisée linéairement peut être décomposée suivant les deux composantes suivantes : l'une parallèle au champ magnétique transverse et l'autre perpendiculaire à celui-ci. Ces deux composantes ne se propagent pas à la même vitesse. C'est-à-dire que l'indice optique $n_{||}$ vu par l'onde polarisée parallèlement au champ est différent de l'indice $n_\perp$ vu par l'onde polarisée perpendiculairement. Il s'agit d'une biréfringence linéaire Δn_CM qui est proportionnelle au carré du champ magnétique transverse :

$$\Delta n_\mathrm{CM} = n_{||} - n_\perp = k_\mathrm{CM} B_\perp^2, \tag{1.6}$$

où la constante de proportionnalité k_CM dépend du milieu soumis au champ magnétique. Cette biréfringence induit que la polarisation est elliptique en sortie du milieu

biréfringent, d'ellipticité ψ donnée par :

$$\psi = \pi \frac{L_\mathrm{b}}{\lambda} \sin(2\theta) \Delta n_\mathrm{CM} = \pi \frac{L_\mathrm{b}}{\lambda} \sin(2\theta) k_\mathrm{CM} B_\perp^2, \tag{1.7}$$

où θ est l'angle entre la polarisation linéaire incidente et le champ magnétique transverse $B_\perp$. De la même manière que l'on définit la constante de Verdet pour l'effet Faraday, la biréfringence magnétique linéaire peut s'écrire en fonction de la constante Cotton-Mouton C_CM avec [13] :

$$C_\mathrm{CM} = \frac{k_\mathrm{CM}}{\lambda}, \tag{1.8}$$

exprimée en $\mathrm{T}^{-2}.\mathrm{m}^{-1}$. L'ellipticité est alors donnée par :

$$\psi = \pi L_\mathrm{b} \sin(2\theta) C_\mathrm{CM} B_\perp^2. \tag{1.9}$$

Au cours de cette thèse, nous avons réalisé des mesures d'effet Cotton-Mouton dans le vide. Comme nous le verrons dans la suite de cette introduction, l'effet y est achromatique. Nous avons donc choisi d'exprimer nos résultats en termes de biréfringence linéaire par unité de champ magnétique, à partir de la constante k_CM introduite dans l'équation (1.6), dont l'unité est le T^{-2}. Par abus de langage, nous l'appellerons "constante Cotton-Mouton" dans la suite de ce manuscrit. De même, k_F, exprimée en T^{-1}, sera appelée "constante Faraday". Comme nous allons le voir, l'effet Faraday n'existe pas dans le vide. Il n'y a donc aucun inconvénient à exprimer l'effet Faraday des gaz étudiés en termes de constante de Verdet, comme nous le ferons dans le chapitre 3.

1.1.2 Effets dans le vide

Classiquement, la linéarité des équations de Maxwell implique que, dans le vide, plusieurs champs électromagnétiques peuvent se superposer sans interagir. Aucun effet résultant de l'interaction d'un champ magnétique avec une onde lumineuse n'y est donc prévu. Ces effets sont prédits dans le cadre de la théorie de l'électrodynamique quantique. D'un point de vue historique, en 1934 P. Dirac établit un modèle pour le vide quantique qui est détaillé dans son rapport du 7ème conseil Solvay de Physique [14]. Celui-ci peut être représenté par une "mer" d'électrons qui occupent des états d'énergies négatives, les états d'énergies positives étant inoccupés. Cette distribution reste indétectable tant que rien ne vient la perturber car elle est uniforme dans tout l'espace. Cependant, sous l'action d'un photon d'énergie suffisante, un électron du vide peut être transféré vers un état d'énergie positive, créant ainsi

une lacune dans la gamme des énergies négatives : le positron. Ce phénomène est illustré sur la figure 1.2. En présence de champs électromagnétiques suffisamment

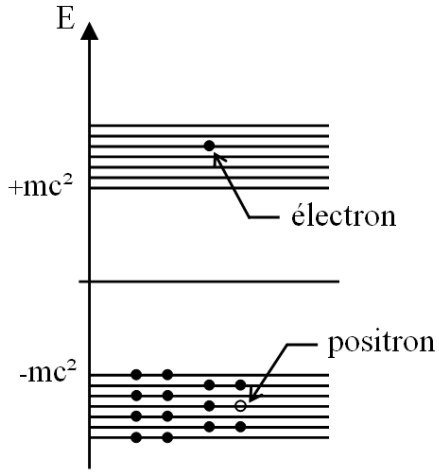


FIGURE 1.2 – Modèle du vide quantique établi par P. Dirac. Le vide peut être représenté par une "mer" d'électrons qui occupent des états d'énergies négatives. Sous l'action d'un photon d'énergie suffisante, un électron du vide peut être transféré vers un état d'énergie positive. La lacune ainsi créée est appelée positron.

importants un photon peut être absorbé dans le vide, conduisant à la création d'une paire électron-positron. Ce phénomène est tout à fait incompatible avec l'électrodynamique classique. Le champ électrique permettant la création de paires est appelé champ critique. Il est donné par [15] :

$$E_{\mathrm{cr}} = \frac{m_{\mathrm{e}}^2 c^3}{e\hbar} \simeq 1.3 \times 10^{18} \text{ V/m}, \tag{1.10}$$

où c est la vitesse de la lumière et $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π. Il correspond au champ électrique nécessaire pour créer un électron de masse m_{e} au repos sur la distance égale à la longueur Compton réduite de l'électron $\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{e}} = \lambda_{\mathrm{e}}/2\pi = \hbar/m_{\mathrm{e}}c$. On peut de la même manière définir un champ magnétique critique tel que :

$$B_{\mathrm{cr}} = \frac{E_{\mathrm{cr}}}{c} = \frac{m_{\mathrm{e}}^2 c^2}{e\hbar} \simeq 4.4 \times 10^{9} \text{ T}. \tag{1.11}$$

Il existe d'autres effets intéressants qui apparaissent pour des champs inférieurs aux champs critiques, pour lesquels il n'y pas pas de création réelle de paires électron-positron.

En 1935, H. Euler et B. Kochel publient la première formulation théorique des non-linéarités optiques dans le vide [16, 17]. L'année suivante W. Heisenberg et H. Euler présentent une étude théorique complète et établissent le lagrangien qui décrit les phénomènes de conversion lumière-matière et matière-lumière [18]. Comme

exprimé clairement dans leur publication [18], leurs calculs reposent sur le principe qu'il est impossible de dissocier les processus qui apparaissent dans le vide de ceux qui se produisent dans un milieu matériel car de la matière peut être créée dans le vide sous l'action de champs électromagnétiques suffisamment intenses. Si les champs électromagnétiques ne sont pas d'énergie suffisante pour créer une paire électron-positron réelle, ils polarisent le vide par la création de paires virtuelles. On s'attend donc à observer des effets tels que la diffusion photon-photon [19, 20] ou la biréfringence induite par un champ magnétique.

Expression du lagrangien de Heisenberg-Euler

Le lagrangien de Heisenberg-Euler $\mathcal{L}_{\mathrm{HE}}$ est un invariant relativiste. Il peut donc s'écrire comme une fonction des invariants de Lorentz $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ [15] :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HE}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j}\mathcal{F}^i\mathcal{G}^j, \tag{1.12}$$

avec

$$\mathcal{F} = \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}, \tag{1.13}$$

et

$$\mathcal{G} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(\vec{E}.\vec{B}), \tag{1.14}$$

avec $\vec{E}$ le champ électrique, $\vec{B}$ le champ magnétique. ϵ_0 et μ_0 désignent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide en l'absence de champ. Le lagrangien étant une somme de termes contenant des puissances de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, les termes qui impliquent un nombre impair de champs ne sont pas autorisés. En d'autres termes, tous les effets non-linéaires n'existent pas dans le vide. C'est par exemple le cas de l'effet Faraday présenté précédemment, qui est permis dans les milieux matériels mais pas dans le vide. La biréfringence, et donc la permittivité électrique, associées à cet effet sont proportionnelles au champ magnétique B. L'énergie est donc de la forme :

$$\vec{D}.\vec{E} = [\epsilon]E^2 \propto BE^2, \tag{1.15}$$

où $\vec{D}$ est le vecteur déplacement électrique. Elle ne peut pas être exprimée comme un produit de puissances de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Les effets qui impliquent un nombre pair de champs sont, quant-à-eux, autorisés dans le vide. En particulier, l'effet Cotton-Mouton qui

induit une biréfringence proportionnelle au carré du champ magnétique appliqué, existe dans le vide dans le cadre de l'électrodynamique quantique. Cet effet a fait l'objet d'une étude expérimentale au cours de cette thèse.

A l'ordre le plus bas, le lagrangien $\mathcal{L}_{\mathrm{HE}}$ de l'électrodynamique quantique doit être égal au lagrangien obtenu en électrodynamique classique $\mathcal{L}_0$:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}, \tag{1.16}$$

soit $c_{0,0} = 0$, $c_{1,0} = \frac{1}{2}$ et $c_{0,1} = 0$. A partir de l'équation (1.12), on calcule les vecteurs déplacement électrique $\vec{D}$ et champ magnétique $\vec{H}$ [1] [15, 21] :

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{HE}}}{\partial \vec{E}}, && (1.17)\\
&= \epsilon_0 \vec{E} && (1.18)\\
&+ \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} c_{0,1}\vec{B} + 2\epsilon_0 c_{1,1}\mathcal{G}\vec{E} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} c_{1,1}\mathcal{F}\vec{B} + 4\epsilon_0 c_{2,0}\mathcal{F}\vec{E} + 2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} c_{0,2}\mathcal{G}\vec{B} + ...\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= -\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{HE}}}{\partial \vec{B}}, && (1.19)\\
&= \frac{\vec{B}}{\mu_0} && (1.20)\\
&- \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} c_{0,1}\vec{E} - 2c_{1,1}\mathcal{G}\frac{\vec{B}}{\mu_0} + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} c_{1,1}\mathcal{F}\vec{E} - 4c_{2,0}\mathcal{F}\frac{\vec{B}}{\mu_0} + 2\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} c_{0,2}\mathcal{G}\vec{E} + ...\right).
\end{aligned}$$

On voit ici que les vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{H}$ peuvent, au premier ordre, se mettre sous la forme :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \text{et} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \tag{1.21}$$

avec $\vec{P}$ la polarisation et $\vec{M}$ l'aimantation. Le vide est donc bien polarisé et aimanté sous l'action d'un champ électromagnétique.

Le vide décrit par la théorie de l'électrodynamique classique est C, P et T invariant, c'est-à-dire invariant par inversion de la charge ($q \longrightarrow -q$), par inversion de l'espace ou parité ($x \longrightarrow -x$) et par renversement du temps ($t \longrightarrow -t$). Le tableau 1.1 résume les propriétés de symétrie des champs $\vec{E}$ (vecteur) et $\vec{B}$ (pseudovecteur)

1. Rigoureusement, $\vec{H}$ est le vecteur champ magnétique et $\vec{B}$ le vecteur induction magnétique. Quand il n'y a pas de confusion possible, $\vec{B}$ est aussi appelé vecteur champ magnétique, comme cela sera le cas dans la suite de cette thèse.

et des invariants de Lorentz $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Les symétries des champs s'obtiennent à partir des formules de Coulomb et de Biot et Savart. Les invariants $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont CPT invariants. Mais tandis que $\mathcal{F}$ est C, P et T invariant, $\mathcal{G}$ viole P et T. Cela implique que la combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ qui donne le lagrangien de l'électrodynamique quantique ne doit comporter que des puissances paires de $\mathcal{G}$. En particulier le coefficient $c_{1,1}$ de l'équation (1.12) doit être nul.

	C	P	T	CPT
$\vec{E}$	-	-	+	+
$\vec{B}$	-	+	-	+
$\mathcal{F}$	+	+	+	+
$\mathcal{G}$	+	-	-	+

TABLE 1.1 – Propriétés de symétrie des champs électrique et magnétique et des invariants de Lorentz par rapport aux transformations C, P et T.

Le calcul des coefficients $c_{i,j}$ a été réalisé par H. Euler et B. Kochel aux ordres les plus bas en champ magnétique [16], c'est-à-dire pour des champs E et B tels que :

$$E \ll E_{\mathrm{cr}} \qquad \text{et} \qquad B \ll B_{\mathrm{cr}}. \tag{1.22}$$

On se place également dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires pour laquelle les champs E et B doivent varier très lentement sur une longueur égale à la longueur de Compton réduite de l'électron $\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{e}}$ et pendant un temps $t_{\mathrm{e}} = \lambda\!\!\!^{-}_{e}/c$. Les coefficients $c_{2,0}$ et $c_{0,2}$ sont exprimés en fonction de la constante de structure fine α [16] :

$$c_{2,0} = \frac{2\alpha^2\hbar^3}{45 m_{\mathrm{e}}^4 c^5} \qquad \text{et} \qquad c_{0,2} = 7c_{2,0}. \tag{1.23}$$

On peut donc développer le lagrangien de Heisenberg-Euler qui décrit l'interaction du vide avec un champ électromagnétique. Aux ordres les plus bas, nous obtenons :

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HE}} = c_{1,0}\mathcal{F} + c_{2,0}\mathcal{F}^2 + c_{0,2}\mathcal{G}^2, \tag{1.24}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{\mu_0}\right) + \frac{2\alpha^2\hbar^3}{45 m_{\mathrm{e}}^4 c^5}\epsilon_0^2\left[(E^2 - c^2B^2)^2 + 7c^2(\vec{E}.\vec{B})^2\right], \tag{1.25}$$

$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{EK}}, \tag{1.26}$$

où $\mathcal{L}_{\mathrm{EK}}$ est appelé lagrangien d'Euler-Kochel car il correspond à celui présenté dans l'article de H. Euler et B. Kochel publié en 1935 [16]. L'expression des coefficients

suivants $c_{3,0}$, $c_{1,2}$, $c_{4,0}$, $c_{0,4}$ et $c_{2,2}$ est donnée dans les articles [18, 22, 23]. L'électrodynamique quantique est donc une théorie sans paramètres libres, pour laquelle les coefficients $c_{i,j}$ s'expriment en fonction de la constante de structure fine et d'autres constantes fondamentales. Dans les années 50, J. Schwinger, F. Dyson, S. I. Tomonaga et R. Feynman donnent la formulation actuelle de l'électrodynamique quantique qui a permis de confirmer les résultats obtenus par H. Euler et B. Kochel [24]. Le lagrangien de Heisenberg-Euler $\mathcal{L}_{\mathrm{HE}}$ a été retrouvé par J. Schwinger en 1951 [25].

Effet Cotton-Mouton du vide

Il faudra attendre les années 70 pour que le calcul de l'effet Cotton-Mouton du vide soit réalisé [23, 26]. Il est effectué d'un point de vue macroscopique, c'est-à-dire en exprimant les vecteurs polarisation et aimantation en fonction des champs électrique et magnétique [27]. Suivant les références [28] et [15], on considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide quantique soumis à un champ magnétique statique $\vec{B}_0$. Les champs associés à l'onde sont notés $\vec{E}_\omega$ et $\vec{B}_\omega$ avec $||\vec{B}_0|| \gg ||\vec{B}_\omega||$ et $||\vec{E}_\omega||/c$. A partir des équations (1.17), (1.19) et du développement de $\mathcal{L}_{\mathrm{HE}}$ donné dans l'équation (1.24), on peut écrire la polarisation $\vec{P}_{\mathrm{CM}}$ et l'aimantation $\vec{M}_{\mathrm{CM}}$ du vide. Pour cela, on remplace le champ électrique $\vec{E}$ par $\vec{E}_\omega$, et le champ magnétique $\vec{B}$ par $\vec{B}_0 + \vec{B}_\omega$. En considérant les termes qui oscillent à la pulsation ω de l'onde électromagnétique, on obtient :

$$\vec{P}_{\mathrm{CM}} = -4c_{2,0}\epsilon_0 \frac{B_0^2}{\mu_0}\vec{E}_\omega + 2c_{0,2}\epsilon_0 \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}(\vec{E}_\omega.\vec{B}_0), \tag{1.27}$$

et

$$\vec{M}_{\mathrm{CM}} = 4c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0^2}\vec{B}_\omega + 8c_{2,0}\frac{\vec{B}_0}{\mu_0^2}(\vec{B}_\omega.\vec{B}_0). \tag{1.28}$$

On considère que le champ magnétique $\vec{B}_0$ est appliqué suivant la direction $O\vec{x}$ et que l'onde lumineuse se propage perpendiculairement. D'après l'équation (1.21), les vecteurs déplacement électrique et champ magnétique s'écrivent :

$$\vec{D}_{\mathrm{CM}} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 - 4c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0} + 2c_{0,2}\frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 4c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \vec{E}_\omega, \tag{1.29}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 1 - 12c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 4c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0} \end{pmatrix} \vec{B}_\omega. \tag{1.30}$$

On définit ensuite les tenseurs permittivité $[\epsilon]$ électrique et perméabilité magnétique $[\mu]$ tels que :

$$\vec{D}_{\mathrm{CM}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{||} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix} \vec{E}_{\omega} = [\epsilon]\vec{E}_{\omega}, \tag{1.31}$$

$$\vec{B}_{\omega} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{||} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{||} \end{pmatrix} \vec{H}_{\mathrm{CM}} = [\mu]\vec{H}_{\mathrm{CM}}. \tag{1.32}$$

Les indices $||$ et $\perp$ font ici référence à une direction de polarisation $\vec{E}_{\omega}$ parallèle ou perpendiculaire au champ magnétique appliqué $\vec{B}_0$. Les composantes du tenseur permittivité électrique sont déduites des expressions (1.29) et (1.31) :

$$\epsilon_{||} = \epsilon_0 - 4c_{2,0}\epsilon_0\frac{B_0^2}{\mu_0} + 2c_{0,2}\epsilon_0\frac{B_0^2}{\mu_0}, \tag{1.33}$$

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_0 - 4c_{2,0}\epsilon_0\frac{B_0^2}{\mu_0}. \tag{1.34}$$

De la même manière, on obtient les composantes du tenseur perméabilité magnétique à partir des équations (1.30) et (1.32) :

$$\mu_{||} = \mu_0 + 4c_{2,0}B_0^2, \tag{1.35}$$

$$\mu_{\perp} = \mu_0 + 12c_{2,0}B_0^2. \tag{1.36}$$

On calcule ensuite l'indice de réfraction du milieu suivant les deux directions de polarisation :

$$n_{||} = \frac{\sqrt{\epsilon_{||}\mu_{||}}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 1 + c_{0,2}\frac{B_0^2}{\mu_0}, \tag{1.37}$$

$$n_{\perp} = \frac{\sqrt{\epsilon_{\perp}\mu_{\perp}}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 1 + 4c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0}. \tag{1.38}$$

On obtient ainsi la biréfringence Δn_{CM}, en prenant en compte que $c_{0,2} = 7c_{2,0}$ (équation (1.23)) :

$$\Delta n_{\mathrm{CM}} = n_{||} - n_{\perp} = 3c_{2,0}\frac{B_0^2}{\mu_0} = \frac{2\alpha^2\hbar^3}{15m_{\mathrm{e}}^4c^5}\frac{B_0^2}{\mu_0}. \tag{1.39}$$

Le développement du lagrangien de Heisenberg-Euler présenté dans l'équation (1.25) ne tient pas compte de tous les phénomènes microscopiques relatifs à l'interaction photon-photon dans le vide. En 1976, V. Ritus apporte des corrections de

l'ordre de 1% aux coefficients $c_{2,0}$ et $c_{0,2}$ en considérant les interactions radiatives des électrons du vide, c'est-à-dire la possibilité qu'ont l'électron et le positron d'une même paire d'échanger des photons [29]. En prenant en compte ces corrections, la biréfringence obtenue pour l'effet Cotton-Mouton du vide est :

$$\Delta n_{\mathrm{CM}} = \frac{2\alpha^2\hbar^3}{15m_{\mathrm{e}}^4c^5}\left(1+\frac{25\alpha}{4\pi}\right)\frac{B_0^2}{\mu_0}, \tag{1.40}$$

où le terme de V. Ritus correspond à une correction de 1.45% du terme principal.

En utilisant les valeurs des constantes fondamentales recommandées par le CODATA (Committee on Data for Science and Technology) [30], on obtient une valeur pour l'expression (1.40) de la biréfringence magnétique du vide. Avec :

$$\Delta n_{\mathrm{CM}} = k_{\mathrm{CM}} \times B_0^2, \tag{1.41}$$

on a :

$$k_{\mathrm{CM}} = (4.0316994 \pm 0.0000009) \times 10^{-24}\ \mathrm{T}^{-2}. \tag{1.42}$$

L'incertitude sur cette valeur est issue des incertitudes sur les constantes fondamentales et est inférieure à 0.5 ppm (parties par million). Cependant, les corrections radiatives d'ordre supérieur n'ont pas encore été calculées à ce jour. Nous ne pouvons donc pas affirmer que la prévision de l'électrodynamique quantique est connue avec une telle précision. En particulier, si l'on considère que la correction radiative en α^2 compte en proportion autant que la correction radiative en α, c'est-à-dire de l'ordre de 1.5%, on obtient $k_{\mathrm{CM}} = (4.0317 \pm 0.0009) \times 10^{-24}\ \mathrm{T}^{-2}$. La mesure de la biréfringence magnétique du vide constitue donc un véritable test de la théorie de l'électrodynamique quantique. Une précision expérimentale de l'ordre de 10^{-4} est nécessaire pour tester l'influence des processus radiatifs. Cependant, une précision de quelques pourcents permettra déjà de vérifier l'expression de la biréfringence déduite du lagrangien de Heisenberg-Euler et donnée dans l'équation (1.39).

L'électrodynamique quantique est une théorie très bien testée dans les systèmes liés comme l'atome d'hydrogène [31–34] ou dans des particules isolées et chargées comme l'électron [35–37]. Dans ces systèmes, elle intervient au travers de l'interaction de l'électron avec le vide quantique qui l'entoure. Comme nous venons de le voir, la mesure de la biréfringence magnétique du vide constitue elle aussi un test de cette théorie. Dans ce cadre, c'est directement le photon de basse énergie qui est mis en jeu. On teste donc directement le lagrangien de Heisenberg-Euler, ce qui n'a encore jamais été réalisé.

1.1.3 Effets dans les gaz nobles

Nous étudierons dans cette section des milieux non magnétiques, pour lesquels la perméabilité magnétique est considérée égale à μ_0 même en présence de champs extérieurs. Comme pour le vide, le calcul de la biréfringence dans un milieu matériel est réalisé en exprimant le tenseur permittivité électrique.

Effet Faraday

Pour obtenir le tenseur de permittivité électrique $[\epsilon]$, nous exprimons le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$ à partir du champ électrique $\vec{E}$ et de la polarisation $\vec{P}$ du milieu :

$$\vec{D} = [\epsilon]\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \tag{1.43}$$

La polarisation du milieu est reliée au moment dipolaire électrique $\vec{p}$ induit sur chaque élément via :

$$\vec{P} = n_v\vec{p}, \tag{1.44}$$

où n_v est le nombre d'éléments polarisables par unité de volume. Les composantes du moment dipolaire électrique s'expriment en fonction du tenseur de polarisabilité électrique $[\alpha]$ [38] :

$$\vec{p} = [\alpha]\vec{E}. \tag{1.45}$$

Dans un milieu isotrope, en l'absence de champ magnétique appliqué, le tenseur est diagonal : $[\alpha] = \alpha\mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ est la matrice identité. En présence d'un champ magnétique $\vec{B}_0$, des termes non diagonaux apparaissent. Pour $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$, le tenseur de polarisabilité s'écrit [39] :

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_{xy}B_0 & 0 \\ -\alpha_{xy}B_0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

au premier ordre en champ magnétique. La permittivité électrique du milieu est donc un tenseur tel que $[\epsilon] = \epsilon_0\mathbb{1} + n_v[\alpha]$.

En considérant une onde lumineuse qui se propage suivant la direction $O\vec{z}$ du champ magnétique, et en utilisant les équations de Maxwell [40], on déduit que les polarisations propres d'un tel système sont les polarisations circulaires droite et gauche [39]. L'indice vu par ces polarisations est donné par :

$$n_\pm = \sqrt{\frac{\epsilon_\pm}{\epsilon_0}} = 1 + n_v\frac{\alpha}{2\epsilon_0} \pm in_v\frac{\alpha_{xy}}{2\epsilon_0}B_0, \tag{1.47}$$

avec $\mu_+ = \mu_- = \mu_0$. Nous avons donc :

$$\Delta n_{\mathrm{F}} = i n_v \frac{\alpha_{xy}}{\epsilon_0} B_0. \tag{1.48}$$

Cette équation met en évidence la dépendance en B de la biréfringence magnétique circulaire. Dans l'approximation des gaz parfaits n_v est proportionnel à $\frac{P}{T}$, où P est la pression du gaz et T sa température. L'augmentation de la biréfringence sera donc linéaire avec celle de la pression, à une température donnée. Cette propriété a été utilisée pour les mesures d'effet Faraday dans les gaz réalisées au cours de cette thèse.

Le terme α_{xy} qui intervient dans l'expression de Δn_{F} peut être obtenu classiquement à partir du modèle de l'électron élastiquement lié [39]. La biréfringence circulaire est alors donnée par :

$$\Delta n_{\mathrm{F}} = \frac{n_v e^3}{m_e^2 \epsilon_0} \frac{\omega B_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}, \tag{1.49}$$

où e est la charge de l'électron, m_e est sa masse, et ω_0 est la pulsation de résonance de l'électron. Du point de vue quantique, Δn_{F} est obtenue en faisant la somme sur toutes les fréquences de résonances du système qui correspondent à une transition de l'électron d'un niveau n à un niveau excité j [41].

Effet Cotton-Mouton

La théorie définitive de la biréfringence linéaire induite dans le cadre de l'effet Cotton-Mouton a été établie par Buckingham et Pople en 1956 [42]. Le calcul est également détaillé dans la référence [13]. Considérons un champ magnétique $\vec{B}_0$ appliqué suivant la direction $O\vec{z}$ dans un milieu composé de systèmes à symétrie sphérique, comme les gaz rares. A l'ordre 2 en champ magnétique, le tenseur de polarisabilité électrique est donné par :

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{2}\eta_\perp B_0^2 & \alpha_{xy} B_0 & 0 \\ -\alpha_{xy} B_0 & \alpha + \frac{1}{2}\eta_\perp B_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{2}\eta_\parallel B_0^2 \end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

où $\eta_\parallel$ et $\eta_\perp$ sont les éléments du second tenseur hypersusceptibilité magnétique [2] suivant les directions parallèle et perpendiculaires au champ magnétique. L'effet de biréfringence linéaire, lorsque l'onde lumineuse se propage perpendiculairement au

2. Le tenseur d'hypersusceptibilité magnétique intervient dans le terme en $E_\alpha E_\beta B_\gamma B_\delta$ de l'énergie moléculaire, où α, β, γ et δ représentent les directions x, y et z, comme défini dans la référence [13].

champ, est donné par les termes diagonaux qui dépendent de B^2 [13]. Les polarisations propres sont alors les polarisations linéaires parallèle et perpendiculaire au champ magnétique appliqué.

Le tenseur de permittivité électrique est relié au tenseur de polarisabilité par :

$$[\epsilon] = \epsilon_0 \mathbb{1} + n_v[\alpha]. \tag{1.51}$$

Nous en déduisons les indices de réfraction vus par les deux polarisations propres :

$$n_\parallel = \sqrt{\frac{\epsilon_\parallel}{\epsilon_0}} = 1 + n_v \frac{\alpha}{2\epsilon_0} + n_v \frac{\eta_\parallel}{4\epsilon_0} B_0^2, \tag{1.52}$$

$$n_\perp = \sqrt{\frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_0}} = 1 + n_v \frac{\alpha}{2\epsilon_0} + n_v \frac{\eta_\perp}{4\epsilon_0} B_0^2, \tag{1.53}$$

avec $\mu_\parallel = \mu_\perp = \mu_0$. La biréfringence magnétique linéaire est donc :

$$\Delta n_{\mathrm{CM}} = n_v \frac{\eta_\parallel - \eta_\perp}{4\epsilon_0} B_0^2 = n_v \frac{\Delta\eta}{4\epsilon_0} B_0^2, \tag{1.54}$$

où $\Delta\eta$ est l'anisotropie d'hypersusceptibilité magnétique.

Dans cette équation la proportionnalité entre Δn_{CM} et le carré du champ magnétique apparaît. Le coefficient de proportionnalité fait intervenir directement l'anisotropie d'hypersusceptibilité. La mesure de l'effet Cotton-Mouton de gaz nobles permet d'obtenir une mesure directe de ce paramètre. Dans l'approximation des gaz parfaits, n_v est proportionnel à la pression et à l'inverse de la température. Comme pour les mesures d'effet Faraday, cette propriété a été utilisée pour les mesures d'effet Cotton-Mouton.

Calculs théoriques de biréfringences

Les expressions des biréfringences données dans les équations (1.48) et (1.54), font intervenir des grandeurs microscopiques telles que la polarisabilité électrique ou l'hypersusceptibilité magnétique. Ces grandeurs sont obtenues à partir de calculs *ab initio* de chimie quantique [43]. Plusieurs méthodes peuvent être employées comme par exemple celle de Hartree-Fock, de l'interaction de configuration ou encore des clusters couplés. L'idée est d'utiliser une base de fonctions d'ondes approchées afin de résoudre l'équation de Schrödinger. Les états propres obtenus permettent ensuite de calculer les grandeurs α et η par le biais d'opérateurs. On calcule par exemple les composantes du tenseur polarisabilité électrique comme suit [43] :

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{\hbar} \sum_{j \neq n} \frac{\omega_{jn}}{\omega_{jn}^2 - \omega^2} \mathrm{Re}\{\langle n|p_i|j\rangle\langle j|p_j|n\rangle\}, \tag{1.55}$$

où p est l'opérateur moment dipolaire électrique, $\omega/2\pi$ est la fréquence de l'onde lumineuse, $|n\rangle$ et $|j\rangle$ sont respectivement l'état de référence et l'état excité et $\hbar\omega_{jn}$ est la différence d'énergie entre ces deux états. Le calcul, plus complexe, de l'anisotropie d'hypersusceptibilité magnétique fait intervenir les opérateurs moment dipolaire électrique, moment dipolaire magnétique et aimantation diamagnétique. L'expression mathématique dans laquelle ces trois opérateurs apparaissent est détaillée dans l'article [13].

Au cours de cette thèse nous avons mesuré les effets Faraday et Cotton-Mouton de deux gaz rares : l'hélium et le xénon. Ces mesures présentent un intérêt tant du point de vue expérimental que théorique. Tout d'abord, les mesures dans de tels systèmes sont un moyen de tester l'expérience. En effet, des calculs *ab initio* de chimie quantique permettent d'obtenir les valeurs de constantes Faraday et Cotton-Mouton de systèmes "simples" comme les gaz rares. En particulier, les calculs concernant l'hélium gazeux sont considérés comme exacts par la communauté de chimie quantique. La précision donnée est, de plus, meilleure de plusieurs ordres de grandeur que l'incertitude expérimentale attendue. La mesure de l'effet Cotton-Mouton de l'hélium est donc un moyen de comparer le résultat obtenu avec notre dispositif à une référence. Par ailleurs, l'hélium est le gaz présentant les plus petits effets Faraday et Cotton-Mouton. Leur mesure permet donc d'évaluer la sensibilité de l'expérience. Le xénon est, quand à lui, le gaz rare non radioactif de numéro atomique le plus important ($Z = 54$). La mesure des biréfringences magnétiques dans ce gaz permet, dans ce cas, de tester les méthodes de calcul *ab initio*, notamment vis-à-vis de la prise en compte des effets relativistes. Ceux-ci sont traités par des termes correctifs, introduits pour tenir compte de la contraction des orbitales atomiques les plus proches du noyau.

1.2 Contexte expérimental

Deux méthodes ont été utilisées pour mesurer des biréfringences magnétiques, et en particulier celle du vide : l'interférométrie à bras séparés ou la polarimétrie. L'historique de ce type de mesures est détaillé dans les références [15] et [44].

1.2.1 Interférométrie à bras séparés

La méthode par interférométrie à bras séparés présente l'avantage de permettre de mesurer directement les indices de réfraction $n_{||}$ et $n_{\perp}$. Pour cela, on applique sur l'un des bras un champ magnétique transverse parallèle ou perpendiculaire à une polarisation linéaire incidente, tandis que sur l'autre bras aucun champ n'est appliqué.

Ces deux configurations sont représentées sur la figure 1.3 pour un interféromètre de Michelson-Morley. Le déphasage entre les faisceaux issus des deux bras est donné par :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\Delta n L_{\mathrm{b}}, \tag{1.56}$$

où λ est la longueur d'onde, L_{b} est la longueur sur laquelle le champ est appliqué et $\Delta n = n_{||} - 1$ ou $\Delta n = n_{\perp} - 1$ selon les configurations, pour une mesure dans le vide. On a ainsi accès indépendamment aux coefficients $c_{0,2}$ et $c_{2,0}$ des expressions (1.37) et (1.38).

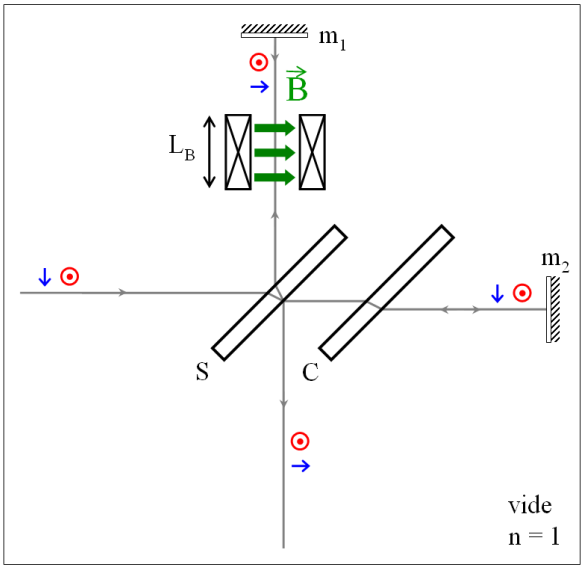


FIGURE 1.3 – Utilisation d'un interféromètre de Michelson-Morley pour la mesure d'une biréfringence linéaire. L'interféromètre est constitué de deux miroirs m_1 et m_2, d'une lame séparatrice S et d'une lame compensatrice C. Un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière est appliqué sur l'un des bras. Si les distances entre les miroirs et la lame séparatrice sont correctement ajustées, on observe une figure d'interférence en sortie de l'interféromètre (située en bas du schéma). Lorsque la polarisation incidente est parallèle au champ magnétique, on mesure l'indice de réfraction $n_{||}$ (cas représenté en bleu). Lorsqu'elle est perpendiculaire, on mesure $n_{\perp}$ (cas représenté en rouge).

Historiquement, les premières expériences réalisées utilisaient des interféromètres à bras séparés. La première rapportée est celle de E. Morley en 1898 [45] dans laquelle un interféromètre de Michelson-Morley est employé. Elle est renouvelée par C. Farr et C. Banwell en 1932 avec un interféromètre de Jamin [3] [47], puis en 1940 avec un

3. Un interféromètre de Jamin est constitué de deux lames de verre épaisses à faces parallèles, argentées sur les faces arrières et orientées à 45° du faisceau incident. Une partie du faisceau incident sur l'interféromètre est réfléchi par la face avant de la première lame, une partie par sa face arrière. Le faisceau est ainsi séparé en deux faisceaux parallèles entre les deux lames. Ils sont recombinés grâce à la deuxième lame [46].

interféromètre de Michelson-Morley [48]. Les sensibilités relatives rapportées par ces expériences sont respectivement de 10^{-8}, 5×10^{-8} et 2×10^{-9}. Depuis plusieurs autres propositions ont été publiées [49–53]. L'idée est de profiter de la grande sensibilité des interféromètres dédiés à l'observation des ondes gravitationnelles. En effet, le déphasage ϕ induit par la traversée du milieu biréfringent et donné par l'équation (1.56), peut être interprété comme un déphasage induit par une variation de longueur ΔL entre les deux bras de l'interféromètre placés dans un milieu d'indice n. Il s'écrit alors [53] :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} 2nLh. \tag{1.57}$$

Pour les détecteurs d'ondes gravitationnelles, $h = \frac{\Delta L}{L}$ est l'amplitude des ondes gravitationnelles et L est la longueur des bras, de l'ordre de quelques kilomètres. En égalisant les deux expressions des déphasages, on obtient :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{L}{L_\mathrm{b}} h. \tag{1.58}$$

Si, par simplicité, on considère que le champ magnétique est appliqué sur toute la longueur du bras, soit $L_\mathrm{b} = L$, la différence d'indice Δn mesurable avec des interféromètres à ondes gravitationnelles, est de l'ordre de h soit quelques 10^{-24}. La sensibilité nécessaire pour observer la biréfringence magnétique du vide est donc du même ordre de grandeur que celle nécessaire pour détecter les ondes gravitationnelles.

Jusqu'à ce jour, aucune mesure de la biréfringence magnétique du vide n'a été publiée à partir de ces propositions. La principale difficulté réside dans l'application d'un champ magnétique suffisamment intense sur le faisceau lumineux, le diamètre des tubes à vide des interféromètres à ondes gravitationnelles étant de l'ordre du mètre. Dans son article [53], H. Grote détaille les possibilités expérimentales pour insérer un aimant produisant un tel champ sur l'un des bras de l'interféromètre.

1.2.2 Polarimétrie

Une autre méthode consiste à mesurer la biréfringence d'un milieu à partir de la modification qu'elle entraîne sur une polarisation linéaire incidente. C'est d'ailleurs ainsi que les biréfringences circulaire et linéaire ont été étudiées initialement par M. Faraday, A. Cotton et H. Mouton [1, 5–10]. Comme présenté au paragraphe 1.1.1, l'effet Faraday entraîne une rotation d'une polarisation linéaire incidente d'un angle θ_F donné par :

$$\theta_\mathrm{F} = \pi \frac{L_\mathrm{b}}{\lambda} \Delta n_\mathrm{F}, \tag{1.59}$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière et L_b est la longueur sur laquelle le champ magnétique est appliqué dans le milieu. En ce qui concerne l'effet Cotton-Mouton, l'ellipticité ψ acquise par la polarisation est donnée par :

$$\psi = \pi \frac{L_\mathrm{b}}{\lambda} \sin(2\theta) \Delta n_\mathrm{CM}, \tag{1.60}$$

Ici, θ est l'angle entre la polarisation linéaire incidente et le champ magnétique transverse $B_\perp$. Dans ce cas la mesure de l'angle θ_F ou de l'ellipticité ψ ne donne pas accès aux indices n_+, n_- et $n_{||}$, $n_\perp$ mais à leurs différences Δn_F et Δn_CM.

On mesure donc ces biréfringences en mesurant l'angle de rotation ou l'ellipticité de la polarisation, comme représenté sur les figures 1.1a et 1.1b. C'est ce qu'ont réalisé L. Ingersoll et D. Liebengerg dans les années 1950 pour leurs articles intitulés "The Faraday effect of gases and vapors" [54–56]. Les constantes de Verdet de nombreux gaz y sont reportées en fonction de la longueur d'onde. Un faisceau lumineux est linéairement polarisé avant d'entrer dans une enceinte remplie d'un gaz et soumise à un champ magnétique statique longitudinal. Une cavité optique de type White [4] est utilisée pour augmenter le trajet optique dans le champ. L'angle de rotation θ_F est mesuré en sortie de cavité grâce à un deuxième polariseur.

Les premières mesures exhaustives d'effet Cotton-Mouton dans les gaz ont été reportées par A. Buckingham, W. Prichard et D. Whiffen en 1967 [58]. Le dispositif utilisé repose sur le même principe que celui de L. Ingersoll. Un faisceau est linéairement polarisé puis traverse une chambre où est présent un gaz soumis à un champ magnétique transverse. En sortie l'ellipticité de la polarisation est transformée en rotation par l'utilisation d'une lame quart d'onde. Un deuxième polariseur permet de mesurer la rotation de la polarisation. Dans cette expérience aucune cavité optique n'est utilisée. La sensibilité est augmentée en introduisant un modulateur d'ellipticité [5] sur le trajet optique. Il s'agit d'une technique de détection dite homodyne.

1.2.3 Effet Cotton-Mouton du vide

Première expérience

Concernant l'effet Cotton-Mouton du vide, nous avons vu précédemment que les expériences utilisant des interféromètres à bras séparés [45, 47, 48] n'ont pas atteint la sensibilité suffisante pour permettre la mesure. En 1961, T. Erber [59] fai-

4. Une cavité de type White est constituée de trois miroirs concaves de même rayon de courbure. Deux miroirs A et A' sont disposés côte à côte et font face au miroir B de telle sorte que le faisceau lumineux fasse plusieurs allers-retours entre les miroirs avant de sortir de la cavité [57].

5. Un modulateur d'ellipticité est un dispositif dont la biréfringence peut être modulée par exemple par l'application d'un champ magnétique (cellule de Faraday associée à une lame quart d'onde) ou d'une contrainte mécanique (modulateur photoélastique).

sait l'analogie entre l'effet de biréfringence magnétique prévu dans le vide et l'effet Cotton-Mouton observé dans les milieux matériels. C'est donc naturellement que les physiciens se sont tournés vers des méthodes de polarimétrie pour mesurer ce phénomène dans le vide. En 1979, E. Iacopini et E. Zavattini proposent une version améliorée de l'appareil de A. Buckingham [58], schématisée sur la figure 1.4 [60].

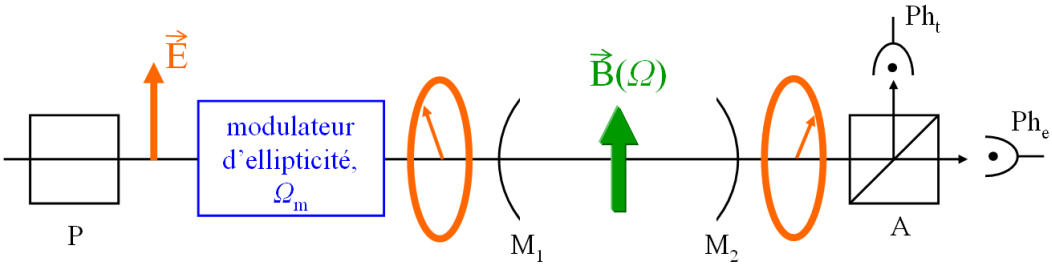


FIGURE 1.4 – Principe de l'expérience proposée par E. Iacopini et E. Zavattini [60]. La biréfringence est mesurée par polarimétrie. Un faisceau linéairement polarisée traverse un modulateur d'ellipticité qui induit une ellipticité $\eta(t)$ de fréquence $\Omega_m/2\pi$. Le faisceau traverse ensuite le milieu soumis à un champ magnétique transverse modulé à la pulsation Ω (technique hétérodyne). L'ellipticité induite par le champ est notée $\psi(t)$. Enfin, un deuxième polariseur (A) sépare les deux composantes de la polarisation : la composante parallèle à la polarisation linéaire incidente (faisceau ordinaire, mesuré par la photodiode Ph_t), et la composante qui lui est perpendiculaire (faisceau extraordinaire, mesuré par la photodiode Ph_e). Pour augmenter l'ellipticité à mesurer une cavité optique constituée des miroirs M_1 et M_2 est utilisée.

Après avoir été polarisé linéairement par le polariseur P, le faisceau traverse un modulateur d'ellipticité. L'ellipticité induite $\eta(t)$ est modulée à la pulsation Ω_m. Le faisceau se propage ensuite dans le milieu soumis à un champ magnétique transverse, modulé à la pulsation $\Omega \neq \Omega_m$. Il s'agit d'une technique de détection hétérodyne. Afin d'augmenter la longueur d'interaction avec le champ magnétique, une cavité optique est utilisée. Elle est constituée de deux miroirs qui piègent la lumière dans le champ. En sortie de cavité, un deuxième polariseur (A) sépare les deux composantes de la polarisation. L'intensité I_t du faisceau ordinaire, dont la polarisation est parallèle à la polarisation linéaire incidente, est mesurée par la photodiode Ph_t. L'intensité I_e du faisceau extraordinaire (polarisation perpendiculaire à la polarisation incidente) est mesurée par la photodiode Ph_e. On montrera que les intensités sont liées à l'ellipticité comme suit :

$$I_e = I_t \, [\sigma^2 + \Theta^2 + (\eta(t) + \psi(t))^2], \tag{1.61}$$

où Θ représente les désalignements possibles entre les différents éléments optiques (les polariseurs et le modulateur d'ellipticité en particulier), σ^2 est le taux d'extinction des polariseurs et $\psi(t)$ est l'ellipticité induite par le champ magnétique. On peut

écrire les ellipticités $\eta(t)$ et $\psi(t)$ en fonction de leur fréquence de modulation :

$$\eta(t) = \eta_0 \sin(\Omega_\mathrm{m} t), \tag{1.62}$$

$$\psi(t) = \psi_0 \sin(\Omega t + \phi), \tag{1.63}$$

où ϕ est un déphasage arbitraire, η_0 est l'amplitude de la modulation en ellipticité et ψ_0 est la grandeur reliée à la biréfringence que l'on cherche à mesurer.

C'est avec un tel dispositif qu'ont été mesurés pour la première fois les effets Cotton-Mouton du néon puis de l'hélium gazeux en 1991 [61,62]. Ces gaz présentant les plus petits effets après celui du vide, une grande sensibilité était nécessaire pour pouvoir les mesurer. Le champ magnétique était produit par deux aimants supraconducteurs dont le courant d'alimentation était modulé de façon à obtenir un champ compris entre 1.94 T et 2.48 T sur une longueur de 8.80 m. La cavité optique utilisée était une cavité multi-passages[6] permettant à la lumière de faire 36 passages dans le champ pour la mesure de l'effet du néon, et 10 passages pour l'effet de l'hélium.

En 1993, les premiers résultats concernant le vide sont publiés avec ce type de dispositif. L'expérience a été réalisée au Brookhaven National Laboratory (États-Unis) par la collaboration BFRT (Brookhaven - FermiLab - Rochester - Trieste) [63]. Deux aimants supraconducteurs de 4.4 m de long chacun produisaient un champ variant de 2.63 T à 3.87 T, à une fréquence de 32 mHz, via la modulation du courant d'alimentation des bobines. Le modulateur d'ellipticité consistait en une cellule de Faraday associée à une lame quart d'onde, avec une fréquence de modulation $\Omega_\mathrm{m}/2\pi = 312.5$ Hz. Enfin, une cavité multi-passages de 14.9 m de long permettait au faisceau de réaliser plusieurs dizaines de passages dans le champ. La sensibilité en ellipticité obtenue avec ce dispositif est de 7.9×10^{-8} rad/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$ avec 34 passages, soit une longueur d'interaction avec le champ d'environ 300 m. Cette sensibilité permit de donner une valeur pour la biréfringence magnétique du vide : $k_\mathrm{CM} = (2.2 \pm 0.8) \times 10^{-19}$ T^{-2}, avec une incertitude à 3σ[7]. Ce résultat n'est pas compatible avec la prédiction de l'électrodynamique quantique à un niveau de confiance de 99.8%, qui correspond couramment au niveau de confiance donné pour souligner l'évidence d'un signal physique. Cela montre déjà que les deux difficultés essentielles de ce type d'expériences sont la sensibilité et la gestion des effets systématiques.

6. Une cavité multi-passages est constituée de deux miroirs. Le faisceau lumineux effectue plusieurs aller-retours entre eux sans se recouvrir (cavité non-interférentielle).

7. Par abus de langage, nous appellerons dans cette thèse "incertitude à 3σ" l'incertitude élargie avec un facteur d'élargissement $k = 3$ définie dans le GUM (Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure) [64].

Projets en cours

Aujourd'hui, plusieurs expériences dont l'objectif est de mesurer l'effet Cotton-Mouton du vide sont en cours dans le monde. Elles se basent sur l'expérience proposée par E. Iacopini et E. Zavattini en 1979 [60]. Dans cette section nous établirons l'état de l'art de ces expériences au moment du début de cette thèse, en octobre 2012. Les résultats les plus récents seront commentés dans le chapitre 4.

PVLAS

Le premier projet, PVLAS (Polarizzazione del Vuoto con Laser) a commencé en 1991 au LNL, à Legnaro, en Italie. [28, 65]. La nouveauté résidait dans l'utilisation d'une cavité optique de type Fabry-Perot pour augmenter l'effet à mesurer. Son principe sera décrit en détails dans le chapitre 2. Celle employée sur cette expérience était positionnée verticalement, 6.4 m séparaient les deux miroirs et sa finesse était de 70000. Le champ magnétique était produit par un aimant supraconducteur d'une longueur de 1 m. La modulation du champ était effectuée par rotation de l'aimant autour de son axe à une fréquence de 0.3 Hz. Deux résultats ont été publiés pour la constante k_{CM} : avec un champ de 2.3 T, $k_{\mathrm{CM}} = (1.4 \pm 2.4) \times 10^{-20}$ T^{-2} et avec un champ de 5 T, $k_{\mathrm{CM}} = (2.7 \pm 1.2) \times 10^{-20}$ T^{-2}, pour un temps d'intégration de 65200 s [66]. Les valeurs sont données avec une incertitude élargie à 3σ. La valeur de k_{CM} obtenue avec un champ de 5 T n'est pas compatible avec la prédiction de l'électrodynamique quantique. Un effet systématique était donc présent lors de cette mesure. Une deuxième version de l'expérience basée à l'INFN à Ferrera, comportant deux aimants permanents de 2.3 T et 20 cm chacun, ainsi qu'une cavité Fabry-Perot de finesse 240000, a permis de publier en 2012 une nouvelle limite sur valeur de k_{CM} [67] : $k_{\mathrm{CM}} < 1.3 \times 10^{-20}$ T^{-2} à 3σ, pour un temps d'intégration de 8192 s. Ce niveau de bruit a été obtenu "quand aucun signal parasite n'est observé", selon les mots des auteurs. Cette précision confirme qu'éliminer les effets systématiques constitue une véritable difficulté lors de ces mesures.

Q & A

Commencée en 1996, une autre expérience également basée sur le principe de la référence [60], est actuellement en cours à Taiwan : le projet Q & A (Quantum electrodynamics test & search for Axion). Un champ magnétique de 2.3 T est produit par un aimant permanent de 60 cm de long. La modulation du champ est effectuée par rotation de l'aimant. Une cavité de 3.5 m de long, constituée de deux miroirs suspendus, est utilisée. La finesse rapportée est de 30000. A ce jour, aucune mesure

de la biréfringence magnétique du vide n'a été publiée. Cependant une sensibilité de 10^{-6} rad/$\sqrt{\text{Hz}}$ a été atteinte [68].

BMV

Enfin, le projet BMV (Biréfringence Magnétique du Vide), qui a débuté à Toulouse en 2000, a également pour objectif la mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide [69]. Cette expérience diffère des deux précédemment citées par l'utilisation de champs magnétiques pulsés. Cette technique développée au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses de Toulouse permet d'atteindre des champs plus intenses qu'en régime continu (de l'ordre de quelques dizaines de Tesla). L'ellipticité ψ est ici modulée naturellement par le champ magnétique. Aucune autre modulation d'ellipticité n'est ajoutée (technique homodyne) ce qui permet de limiter le nombre d'instruments d'optiques utilisés. Il a été montré que la sensibilité en ellipticité que l'on peut atteindre avec cette technique est équivalente à celle obtenue avec une détection hétérodyne [70]. Une première version de l'expérience utilisant une cavité Fabry-Perot de 2.3 m, de finesse 481000 et un champ magnétique de 6.5 T a permis de donner, en 2012, une limite sur l'effet Cotton-Mouton du vide : $k_{\text{CM}} < 1.5 \times 10^{-19}$ T^{-2} à 3σ. Ce résultat, rapporté dans l'article [71], correspond à l'analyse du meilleur tir de champ magnétique enregistré. Notons que l'analyse d'un plus grand nombre de données, détaillée dans la thèse de Paul Berceau [72], a mis en évidence l'existence d'effets systématiques sur ce dispositif. Les travaux réalisés au cours de cette thèse, et qui ont conduit à la publication d'un résultat supplémentaire, seront détaillés dans la suite de ce manuscrit.

Notons que ces trois dispositifs conçus dans le but de vérifier la prédiction de l'électrodynamique quantique ont également permis de réaliser des mesures d'effets Cotton-Mouton dans les gaz comme le diazote, la vapeur d'eau ou dans les gaz rares [71, 73–79]. Ils permettent également d'avoir accès à l'angle de rotation d'une polarisation linéaire incidente, et donc de faire des mesures d'effet Faraday [79].

Résumé

La figure 1.5 résume les résultats concernant l'effet Cotton-Mouton du vide, rapportés dans la littérature jusqu'au commencement de cette thèse en 2012. Nous pouvons noter que les principales difficultés de ces expériences résident dans l'obtention d'une sensibilité suffisante et dans la maîtrise des effets systématiques. Cela apparaît sur les résultats obtenus par le projet BFRT en 1993 [63] et par le projet PVLAS en 2008 [66] (mesure à 5 T) qui ne sont pas compatibles avec la prédiction

théorique avec une incertitude donnée à 3σ.

Les principales caractéristiques des expériences de polarimétrie sont résumées dans le tableau 1.2. Les résultats obtenus jusqu'en 2012 y sont rapportés.

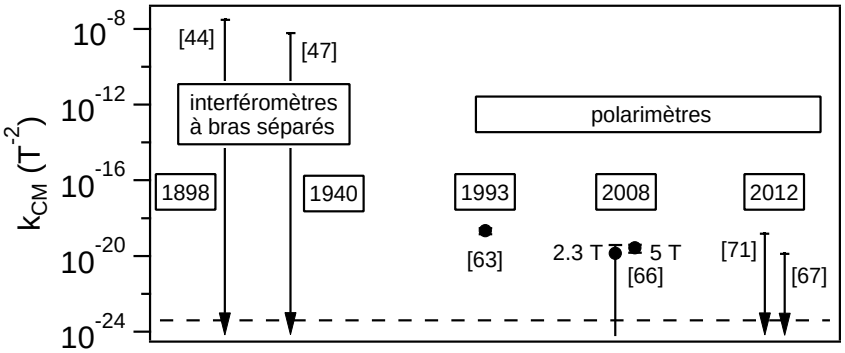


FIGURE 1.5 – Résultats publiés au commencement de cette thèse pour la mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide, avec des interféromètres à bras séparés et des expériences de polarimétrie. Les flèches correspondent à des limites de sensibilité et les ronds à des valeurs mesurées, à un niveau de confiance de 99.8%. La prédiction de l'électrodynamique quantique est représentée par la ligne pointillée.

	BFRT [63]	PVLAS [66]	PVLAS [67]	Q & A [68]	BMV [71]
Régime du champ	continu	continu	continu	continu	pulsé
Technologie	bobine supraconductrice	bobine supraconductrice	aimant permanent	aimant permanent	bobine résistive
$B^2 L_b$ (T^2.m)	4×8.8	$2.3^2 \times 1$	$2.3^2 \times 0.4$	$2.3^2 \times 0.6$	$6.5^2 \times 0.137$
Longueur cavité (m)	14.9	6.4	-	3.5	2.27
Finesse	34 réflexions (cavité multi-passage)	70000	240000	30000	481000
k_{CM} (T^{-2})	$(2.2 \pm 0.8) \times 10^{-19}$	$(1.4 \pm 2.4) \times 10^{-20}$	$< 1.3 \times 10^{-20}$	-	$< 1.5 \times 10^{-19}$

TABLE 1.2 – Caractéristiques et résultats obtenus jusqu'en 2012 par les expériences visant à mesurer la biréfringence magnétique du vide par polarimétrie. Les incertitudes ou limites de sensibilité sont données à 3σ.

Autres propositions

Plusieurs autres expériences ont été proposées dans le but de mesurer l'effet Cotton-Mouton du vide par polarimétrie. On peut citer par exemple le projet OSQAR, prévu au CERN. L'idée est d'utiliser des aimants supraconducteurs comme ceux utilisés au LHC, et qui fourniraient un champ magnétique de 9.5 T sur une

longueur de 14.3 m [80]. D'autres projets invoquent l'utilisation de lasers intenses focalisés pour créer le champ magnétique nécessaire à l'observation d'un tel phénomène [81–85]. Enfin, une autre voie serait d'utiliser le fait que l'ellipticité ψ induite par le champ magnétique est inversement proportionnelle à la longueur d'onde du faisceau lumineux (voir l'équation (1.60)). Le principe est donc d'utiliser des rayons gamma afin d'obtenir une ellipticité aussi grande que possible [86, 87]. A ce jour aucune mesure de biréfringence magnétique n'a été publiée avec de tels dispositifs.

1.2.4 Conclusion

Dans ce travail de thèse nous présenterons les mesures réalisées avec l'expérience BMV concernant les biréfringences magnétiques dans deux gaz rares : l'hélium et le xénon. Nous développerons également les résultats d'effet Cotton-Mouton du vide publiés en 2014.

Dans le chapitre 2, nous présenterons en détails le dispositif expérimental utilisé pour réaliser ces mesures. Tout d'abord, les expressions reliant les biréfringences Δn_{CM} et Δn_{F} à l'ellipticité ψ et à la rotation θ_{F} de la polarisation seront démontrées. Nous établirons également l'équation liant ψ et θ_{F} aux grandeurs mesurées expérimentalement. Nous énoncerons les principales caractéristiques de la cavité Fabry-Perot utilisée : finesse, biréfringence intrinsèque. Le système permettant d'asservir la fréquence du laser sur la résonance de la cavité sera décrit. Enfin nous nous pencherons sur la production d'un champ magnétique intense et sur les caractéristiques de l'aimant mis en place sur l'expérience.

Les chapitres 3 et 4 seront consacrés aux résultats. Dans le chapitre 3 nous traiterons des mesures de biréfringence circulaire. Après avoir détaillé la méthode d'analyse des données nous présenterons les résultats obtenus dans l'hélium et le xénon. Le chapitre 4 concerne les mesures de biréfringence linéaire. De la même manière, la méthode d'analyse sera décrite. Celle-ci a été développée de façon à limiter l'influence des effets systématiques sur la mesure d'ellipticité en jouant sur la symétrie de l'effet Cotton-Mouton vis-à-vis du champ magnétique et de la biréfringence statique de la cavité. Nous présenterons les résultats obtenus d'une part dans l'hélium et le xénon et d'autre part dans le vide. Les mesures dans les gaz seront comparées à d'autres valeurs expérimentales ainsi qu'à des valeurs issues de calculs de chimie quantique. La mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide permettra d'évaluer la sensibilité du dispositif et les facteurs qui la limitent.

Enfin, nous présenterons les perspectives envisagées par l'équipe BMV pour parvenir à la mesure de la biréfringence magnétique du vide. Nous aborderons, en particulier, les éléments clés de la deuxième version du dispositif expérimental qui est en cours d'installation.

Chapitre 2

Dispositif expérimental

2.1 Introduction

Les mesures de biréfringences circulaire et linéaire sont réalisées par analyse de la polarisation d'un faisceau lumineux. Nous établirons dans un premier temps les expressions reliant la biréfringence Δn à la rotation θ_{F} ou à l'ellipticité ψ acquise par une polarisation linéaire incidente. Nous mettrons ainsi en évidence les paramètres clés de l'expérience. Après avoir décrit le principe du dispositif, nous caractériserons les éléments essentiels qui le constituent : la cavité optique, le système d'asservissement, le champ magnétique et l'enceinte à vide.

2.2 Le polarimètre

2.2.1 Biréfringence et polarisation

Considérons une onde lumineuse se propageant dans un milieu biréfringent, suivant la direction $O\vec{z}$ d'un repère orthonormé. Cette direction correspond à l'un des axes principaux du milieu. Le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ associé à l'onde est contenu dans le plan d'onde $(O\vec{x}, O\vec{y})$, perpendiculaire à la direction de propagation. Il vibre à la pulsation ω tel que $\omega = 2\pi c/\lambda$, avec λ la longueur d'onde. Les vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et champ magnétique $\vec{B}$ sont reliés via les équations de Maxwell. L'onde peut donc être décrite par les propriétés de l'un de ces deux champs [46]. Nous utiliserons ici le champ $\vec{E}$ dont la vibration caractérise, par convention, la polarisation de l'onde.

Biréfringence circulaire

Étudions dans un premier temps le phénomène de biréfringence circulaire. Soit une onde plane linéairement polarisée suivant l'axe $O\vec{x}$. Le vecteur champ électrique $\vec{E}^{\mathrm{in}}$ s'écrit comme suit en notation complexe :

$$\vec{E}^{\mathrm{in}} = E_0 \mathrm{e}^{i\omega t}\ \vec{u}_x, \tag{2.1}$$

où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire suivant l'axe $O\vec{x}$. Cette polarisation linéaire peut se décomposer comme la somme de deux polarisations circulaires :

$$\vec{E}^{\mathrm{in}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}^{\mathrm{in}}_{+} + \vec{E}^{\mathrm{in}}_{-}). \tag{2.2}$$

Avec :

- $\vec{E}^{\mathrm{in}}_{+}$, une polarisation circulaire droite donnée par : $\vec{E}^{\mathrm{in}}_{+} = E_0 \mathrm{e}^{i\omega t}\ \vec{u}_{+}$,

– $\vec{E}_-^{\text{in}}$, une polarisation circulaire gauche donnée par : $\vec{E}_-^{\text{in}} = E_0 \mathrm{e}^{i\omega t}\ \vec{u}_-$.

$\vec{u}_+$ et $\vec{u}_-$ sont les vecteurs unitaires de la base des polarisations circulaires. Ils sont liés aux vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ du repère orthonormé par les relations suivantes :

$$\vec{u}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x - i\vec{u}_y), \tag{2.3}$$

$$\vec{u}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_x + i\vec{u}_y). \tag{2.4}$$

Lors de la propagation dans un milieu présentant une biréfringence circulaire, l'indice n_+ vu par l'onde polarisée circulaire droite diffère de celui vu par l'onde polarisée circulaire gauche n_-. Ces deux ondes ne subissent donc pas le même déphasage. En sortie du milieu, les composantes du champ électrique dans la base des polarisations circulaires s'écrivent comme suit :

$$\vec{E}_+^{\text{out}} = E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_\mathrm{b} n_+)}\ \vec{u}_+, \tag{2.5}$$

$$\vec{E}_-^{\text{out}} = E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_\mathrm{b} n_-)}\ \vec{u}_-, \tag{2.6}$$

où L_b est la longueur de milieu biréfringent traversé. Il existe donc un déphasage δ_F entre les deux composantes de la polarisation, avec :

$$\delta_\mathrm{F} = \frac{2\pi}{\lambda} L_\mathrm{b}(n_- - n_+) = \frac{2\pi}{\lambda} L_\mathrm{b} \Delta n_\mathrm{F}. \tag{2.7}$$

En sortie du milieu biréfringent, le champ électrique de l'onde lumineuse est donné par :

$$\vec{E}^{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{E}_+^{\text{out}} + \vec{E}_-^{\text{out}}), \tag{2.8}$$

soit, après quelques lignes de calcul :

$$\vec{E}^{\text{out}} = E_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{\lambda} L_\mathrm{b} \frac{n_+ + n_-}{2}} \left[\cos\left(\frac{\delta_\mathrm{F}}{2}\right) \vec{u}_x + \sin\left(\frac{\delta_\mathrm{F}}{2}\right) \vec{u}_y \right]. \tag{2.9}$$

Nous constatons ici que la polarisation, qui était initialement alignée avec l'axe $O\vec{x}$, a tourné d'un angle θ_F, avec :

$$\theta_\mathrm{F} = \frac{\delta_\mathrm{F}}{2} = \frac{\pi}{\lambda} L_\mathrm{b} \Delta n_\mathrm{F}. \tag{2.10}$$

Cet effet est assimilable à celui observé dans les milieux optiquement actifs. Il est représenté sur la figure 2.1.

La biréfringence circulaire induite par effet Faraday est proportionnelle au champ

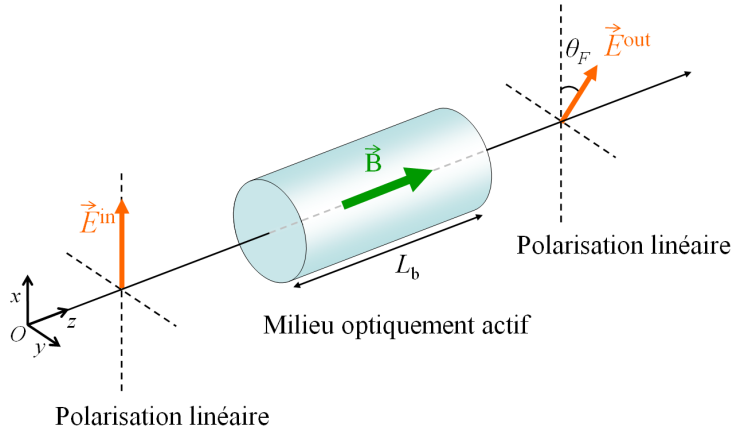


FIGURE 2.1 – Effet d'un milieu soumis à un champ magnétique longitudinal sur une polarisation linéaire. Il présente une biréfringence circulaire et peut être assimilé à un milieu optiquement actif qui entraîne une rotation d'un angle θ_{F} de la polarisation linéaire incidente.

magnétique longitudinal appliqué $B_{||}$. La constante de proportionnalité est notée k_{F} :

$$\Delta n_{\mathrm{F}} = k_{\mathrm{F}} B_{||}. \tag{2.11}$$

Si le champ magnétique est appliqué uniformément sur la longueur L_{B}, l'angle de rotation de la polarisation s'écrit :

$$\theta_{\mathrm{F}} = \frac{\pi}{\lambda} L_{\mathrm{B}} k_{\mathrm{F}} B_{||} = V L_{\mathrm{B}} B_{||}, \tag{2.12}$$

où V est la constante de Verdet définie dans l'introduction de cette thèse.

Biréfringence linéaire

Intéressons nous maintenant à l'effet d'une biréfringence linéaire sur une polarisation linéaire incidente. Le milieu biréfringent est considéré comme une lame à retard de phase possédant un axe rapide et un axe lent. Ces axes neutres sont alignés sur les directions $O\vec{x}$ et $O\vec{y}$. La polarisation linéaire incidente fait un angle θ avec l'axe $O\vec{x}$ (voir figure 2.2).

Écrivons les composantes du vecteur champ électrique :

$$\vec{E}^{\mathrm{in}} = \begin{cases} E_x^{\mathrm{in}} &= E_0 \cos\theta \mathrm{e}^{i\omega t}, \\ E_y^{\mathrm{in}} &= E_0 \sin\theta \mathrm{e}^{i\omega t}, \\ E_z^{\mathrm{in}} &= 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Ces deux composantes ne voient pas le même indice. On note $n_{||}$ l'indice associé à

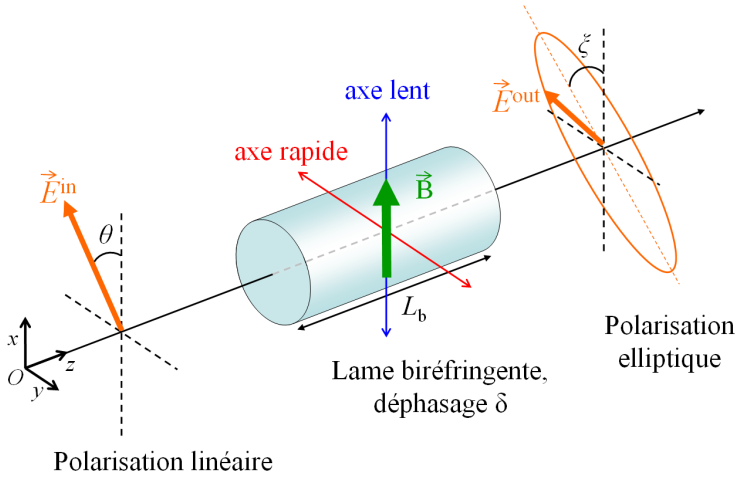


FIGURE 2.2 – Effet d'un milieu soumis à un champ magnétique transverse sur une polarisation linéaire. Il présente une biréfringence linéaire et agit donc comme une lame qui introduit un déphasage δ entre deux composantes perpendiculaires de la polarisation incidente. Il en résulte une polarisation elliptique.

l'axe lent du milieu et $n_\perp$ l'indice associé à son axe rapide. En sortie de lame le champ électrique est donc :

$$\vec{E}^{\text{out}} = \begin{cases} E_x^{\text{out}} &= E_0 \cos\theta e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_b n_{||})} \equiv E_0 \cos\theta e^{i\omega t' - i\delta_{\text{CM}}}, \\ E_y^{\text{out}} &= E_0 \sin\theta e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} L_b n_\perp)} \equiv E_0 \sin\theta e^{i\omega t'}, \\ E_z^{\text{out}} &= 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Comme précédemment L_b désigne la longueur de milieu biréfringent traversé. Nous avons changé l'origine des temps, $t' = t - \frac{2\pi}{\lambda\omega} L_b n_\perp$, pour faire apparaître le déphasage δ_{CM} entre les deux composantes :

$$\delta_{\text{CM}} = \frac{2\pi}{\lambda} L_b (n_{||} - n_\perp) = \frac{2\pi}{\lambda} L_b \Delta n_{\text{CM}}. \tag{2.15}$$

Les composantes du champ $\vec{E}^{\text{out}}$ vérifient alors l'équation suivante [46] :

$$\left(\frac{\mathfrak{Re}(E_x^{\text{out}})}{E_0 \cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{Re}(E_y^{\text{out}})}{E_0 \sin\theta}\right)^2 - \frac{2\mathfrak{Re}(E_x^{\text{out}})\mathfrak{Re}(E_y^{\text{out}})}{E_0^2 \cos\theta \sin\theta} \cos\delta_{\text{CM}} = \sin^2\delta_{\text{CM}}, \tag{2.16}$$

où $\mathfrak{Re}$ désigne la partie réelle. Cette équation est celle d'une ellipse. La polarisation linéaire incidente est donc devenue elliptique après passage dans le milieu biréfringent. Le sens de rotation de la polarisation $\vec{E}^{\text{out}}$ dépend du signe du déphasage δ_{CM} : si $0 < \delta_{\text{CM}} < \pi$ l'onde est polarisée elliptiquement droite, si $-\pi < \delta_{\text{CM}} < 0$, elle est polarisée elliptiquement gauche.

L'ellipticité ψ de la polarisation est définie comme le rapport de la longueur de

ses axes :

$$|\psi| = \frac{b}{a}, \tag{2.17}$$

pour $\psi \ll 1$, où b est la longueur du demi-petit axe et a celle du demi-grand axe. Ces notations sont illustrées sur la figure 2.3. Elle est liée au déphasage δ_{CM} et à l'angle θ comme suit [46] :

$$\sin 2\psi = \sin 2\theta \sin \delta_{\mathrm{CM}}. \tag{2.18}$$

Les déphasages, et donc les ellipticités, qui ont été mesurés pendant cette thèse sont très petits devant l'unité, typiquement inférieurs à quelques 10^{-6}. Nous pouvons donc écrire :

$$\psi = \frac{\delta_{\mathrm{CM}}}{2} \sin 2\theta = \frac{\pi}{\lambda} L_{\mathrm{b}} \sin 2\theta \Delta n_{\mathrm{CM}}. \tag{2.19}$$

Le grand axe de l'ellipse est incliné d'un angle ξ par rapport à l'axe $O\vec{x}$. Cet angle est donné par [46] :

$$\tan 2\xi = \tan 2\theta \cos \delta_{\mathrm{CM}}. \tag{2.20}$$

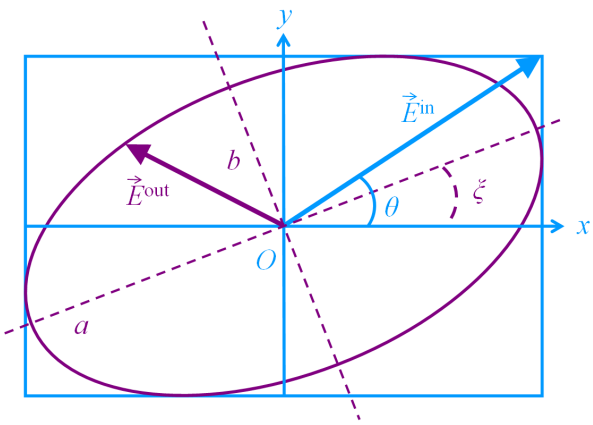


FIGURE 2.3 – En bleu : la polarisation linéaire incidente fait un angle θ avec l'axe $O\vec{x}$. En violet : la polarisation émergente est elliptique. Son demi-petit axe est noté b. Son demi-grand axe est noté a, il fait un angle ξ avec l'axe $O\vec{x}$.

La biréfringence linéaire induite par le champ magnétique transverse $B_\perp$ dans le cadre de l'effet Cotton-Mouton est proportionnelle au carré du champ, avec pour constante de proportionnalité la constante Cotton-Mouton k_{CM} :

$$\Delta n_{\mathrm{CM}} = k_{\mathrm{CM}} B_\perp^2. \tag{2.21}$$

L'ellipticité ψ s'écrit donc :

$$\psi = \frac{\pi}{\lambda} L_{\mathrm{B}} \sin 2\theta k_{\mathrm{CM}} B_{\perp}^{2}, \tag{2.22}$$

en considérant que le champ magnétique est appliqué uniformément sur la longueur L_{B}.

2.2.2 Schéma général du dispositif expérimental

Les constantes k_{F} et k_{CM} que nous avons étudiées sont très faibles. Pour une pression de 1 atm, k_{F} est de l'ordre de 10^{-9} T^{-1} pour le xénon gazeux et 10^{-11} T^{-1} pour l'hélium gazeux. k_{CM} est lui d'environ 10^{-14} T^{-2} et 10^{-16} T^{-2} pour ces deux gaz. La valeur attendue dans le vide pour k_{CM} est 4×10^{-24} T^{-2}. Afin d'obtenir des angles de rotation et des ellipticités mesurables expérimentalement, il faut fixer les différents paramètres expérimentaux intervenant dans les équations (2.12) et (2.22) : λ, θ, $B_{||}$ ou $B_{\perp}$ et L_{B}.

Un schéma simplifié du dispositif expérimental est représenté sur la figure 2.4. Celui-ci a été décrit en détails dans la thèse de Paul Berceau [72]. Nous nous contenterons ici d'en aborder les éléments principaux.

Le montage est réalisé sur deux tables différentes. Le laser Nd :YAG, situé sur la table source, produit le faisceau lumineux de longueur d'onde $\lambda = 1064$ nm. Celui-ci est acheminé jusqu'à un modulateur acousto-optique (AOM) utilisé en double passage afin de préserver l'alignement dans la fibre optique monomode, lors de l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité [88]. Cette dernière fait le lien entre la table source et la table cavité. Elle est également utilisée pour filtrer spatialement le faisceau.

Le faisceau est ensuite injecté dans un modulateur électro-optique (EOM) qui est utilisé dans le système d'asservissement en fréquence afin de produire le signal d'erreur. Cet aspect sera détaillé dans le paragraphe 2.4. Après passage par un isolateur de Faraday (IF), le faisceau est acheminé vers la cavité Fabry-Perot. Une partie de la lumière est prélevée et focalisée sur la photodiode $\mathrm{Ph_i}$. L'intensité mesurée est proportionnelle à celle injectée dans la cavité. Elle est notée I_{i} et sert à asservir l'intensité du faisceau laser via l'AOM. Un télescope (T), constitué de deux lentilles, adapte ensuite le mode du faisceau à la cavité Fabry-Perot. Les miroirs d'injection $\mathrm{M_3}$ et $\mathrm{M_4}$ permettent de régler finement l'alignement du faisceau avec l'axe de la cavité. Le polariseur P permet de polariser linéairement le faisceau juste avant son entrée dans la cavité. Il est tourné de façon à orienter la polarisation incidente à $\theta = 45^{\circ}$ du champ magnétique transverse. La lumière réfléchie par le miroir d'entrée

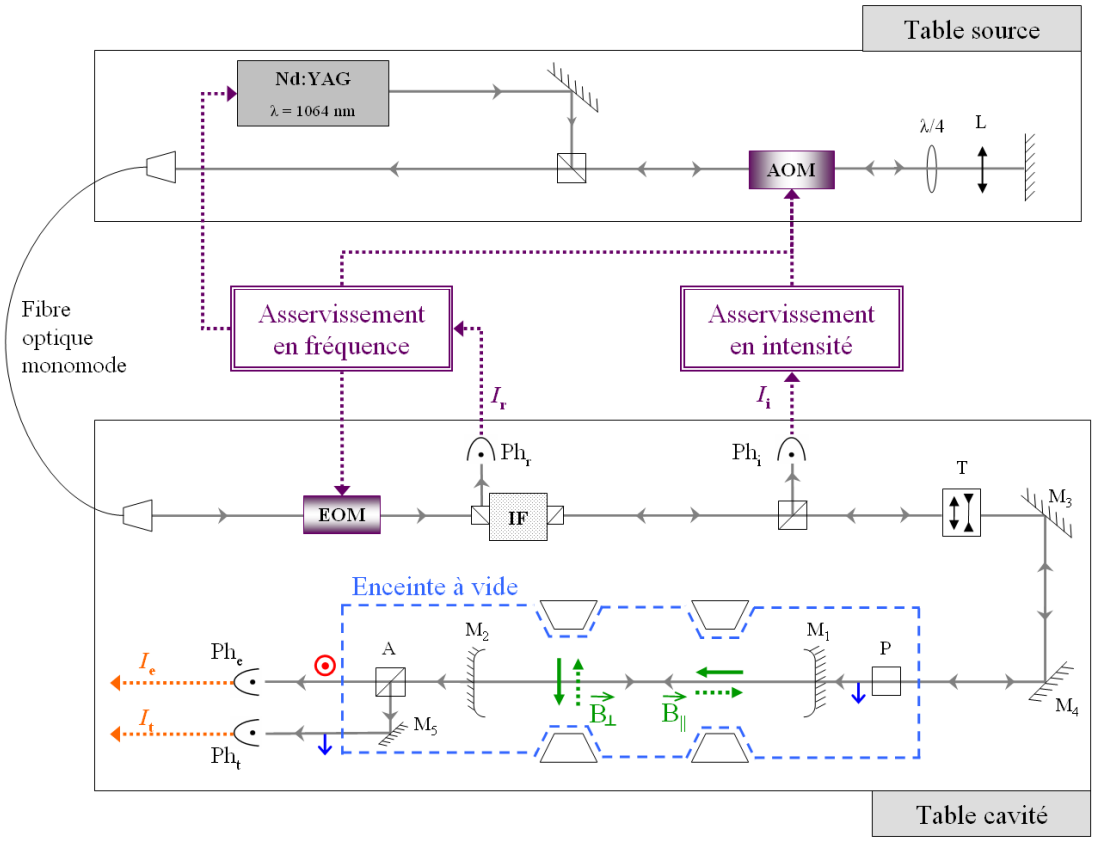


FIGURE 2.4 – Schéma général du dispositif expérimental. Le laser Nd :YAG situé sur la table source produit le faisceau à $\lambda = 1064$ nm. Celui-ci passe de la table source à la table cavité par l'intermédiaire d'une fibre optique monomode avant d'être injecté dans la cavité Fabry-Perot constituée des miroirs M_1 et M_2. Le passage par un modulateur électro-optique (EOM) et par un modulateur acousto-optique (AOM) permettent d'asservir le laser en fréquence et en intensité. Un champ magnétique transverse ou longitudinal peut être appliqué grâce à des aimants placés entre les miroirs de la cavité. Les intensités ordinaire I_t et extraordinaire I_e sont extraites par l'analyseur A et mesurées par les photodiodes Ph_t et Ph_e.

M_1 retourne à l'isolateur de Faraday IF et est focalisée sur la photodiode Ph_r. L'intensité réfléchie I_r est utilisée dans le système d'asservissement de la fréquence du laser.

La cavité Fabry-Perot est constituée de deux miroirs, notés M_1 et M_2. Elle sera décrite en détails dans le paragraphe 2.3. Deux aimants sont placés entre M_1 et M_2. Ils permettent de produire, pour l'un, un champ magnétique longitudinal $B_{||}$, et pour l'autre, un champ magnétique transverse $B_\perp$. Leurs caractéristiques seront présentées dans le paragraphe 2.5. En sortie de cavité, un analyseur A, croisé avec le polariseur P, sépare les deux composantes de la polarisation :

– le faisceau ordinaire, d'intensité I_t, de polarisation parallèle à la polarisation incidente. Il est focalisé sur la photodiode Ph_t.

– le faisceau extraordinaire, d'intensité I_e, de polarisation perpendiculaire à la polarisation incidente. Il est focalisé sur une photodiode bas bruit $\mathrm{Ph_e}$ [1].

Les caractéristiques des photodiodes sont décrites dans la thèse de Paul Berceau [72]. Le rapport des intensités extraordinaire et ordinaire est relié aux tensions V_e et V_t mesurées aux bornes des photodiodes $\mathrm{Ph_e}$ et $\mathrm{Ph_t}$ comme suit :

$$\frac{I_e}{I_t} = \frac{g_t}{g_e}\frac{V_e}{V_t}. \tag{2.23}$$

Rigoureusement, I_e et I_t sont des flux énergétiques, exprimés en Watt, que nous appelons "intensités" par abus de langage. g_t et g_e sont les facteurs de conversion en V/W des photodiodes. Leur rapport est régulièrement mesuré.

La cavité Fabry-Perot ainsi que les polariseurs P et A sont placés dans une enceinte à vide. Celle-ci est reliée à un système de pompes et de bouteilles de gaz qui permettent de réaliser des mesures dans le vide ou dans des gaz. Ce système sera décrit dans le paragraphe 2.6.

2.2.3 Mesure de la polarisation à partir des intensités ordinaire et extraordinaire

La mesure des intensités ordinaire et extraordinaire permet de remonter à l'ellipticité de la polarisation ou à l'angle qu'elle fait avec l'axe du polariseur P. Pour établir l'expression liant ces grandeurs nous utiliserons le formalisme de Jones [89].

Considérons une onde qui se propage suivant la direction $O\vec{z}$ et linéairement polarisée suivant $O\vec{x}$. Nous pouvons écrire le champ électrique associé dans le repère $(O\vec{x}, O\vec{y})$:

$$\vec{E}^{\mathrm{in}} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

L'effet Faraday induit une rotation d'un angle θ_F de la polarisation incidente. La matrice de Jones décrivant à ce phénomène est :

$$\mathbf{R}(\theta_F) = \begin{pmatrix} \cos\theta_F & -\sin\theta_F \\ \sin\theta_F & \cos\theta_F \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

où $\mathbf{R}$ est la matrice de rotation. L'effet Cotton-Mouton peut, quant à lui, être assimilé à la traversée d'une lame biréfringente qui induirait un déphasage δ [2] entre les

1. La photodiode utilisée sur l'expérience BMV est le modèle *OE-200-IN1* de la marque *LINOS*.
2. Ce déphasage était noté δ_{CM} dans la section 2.2.1, nous le notons ici δ pour plus de clarté dans les équations.

composantes rapide et lente du champ électrique incident $\vec{E}^{\text{in}}$. On note θ l'angle entre l'axe rapide de la lame et la direction $O\vec{x}$. La matrice de Jones d'un tel système s'écrit :

$$\mathbf{M}_{\text{CM}} = \mathbf{R}(-\theta)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix}\mathbf{R}(\theta), \tag{2.26}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\delta}{2}}\cos^2\theta + \mathrm{e}^{-i\frac{\delta}{2}}\sin^2\theta & -i\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} \\ -i\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} & \mathrm{e}^{-i\frac{\delta}{2}}\cos^2\theta + \mathrm{e}^{i\frac{\delta}{2}}\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Après quelques développements trigonométriques, nous obtenons :

$$\mathbf{M}_{\text{CM}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\delta}{2} + i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2} & -i\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} \\ -i\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} & \cos\frac{\delta}{2} - i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

Considérons un milieu où les deux effets sont présents. La matrice $\mathbf{M}$ décrit ce système :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\theta_{\text{F}})\mathbf{M}_{\text{CM}}, \tag{2.29}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

avec

$$A = \cos\theta_{\text{F}}[\cos\frac{\delta}{2} + i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2}] + i\sin\theta_{\text{F}}\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2}, \tag{2.31}$$

$$B = -i\cos\theta_{\text{F}}\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} - \sin\theta_{\text{F}}[\cos\frac{\delta}{2} - i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2}], \tag{2.32}$$

$$C = \sin\theta_{\text{F}}[\cos\frac{\delta}{2} + i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2}] - i\cos\theta_{\text{F}}\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2}, \tag{2.33}$$

$$D = -i\sin\theta_{\text{F}}\sin 2\theta\sin\frac{\delta}{2} + \cos\theta_{\text{F}}[\cos\frac{\delta}{2} - i\cos 2\theta\sin\frac{\delta}{2}]. \tag{2.34}$$

Nous calculons les composantes du champ électrique en sortie, grâce aux équations suivantes [90] :

$$\vec{E}_{\text{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{M}\vec{E}^{\text{in}} \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_{\text{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{M}\vec{E}^{\text{in}}. \tag{2.35}$$

Pour calculer leurs expressions nous prendrons $\delta \ll 1$ et $\theta_{\mathrm{F}} \ll 1$. Nous obtenons :

$$\vec{E}_{\mathrm{t}} = E_0 \begin{pmatrix} 1 + i\frac{\delta}{2}[\cos 2\theta + \theta_{\mathrm{F}} \sin 2\theta] \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.36}$$

$$\simeq E_0 \begin{pmatrix} 1 + i\frac{\delta}{2} \cos 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

et

$$\vec{E}_{\mathrm{e}} = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{\mathrm{F}} + i\frac{\delta}{2}[\theta_{\mathrm{F}} \cos 2\theta - \sin 2\theta] \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

$$\simeq E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{\mathrm{F}} - i\frac{\delta}{2} \sin 2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Nous en déduisons l'intensité du faisceau ordinaire :

$$I_{\mathrm{t}} = ||\vec{E}_{\mathrm{t}}||^2 = E_0^2 \left[1 + \left(\frac{\delta}{2} \cos 2\theta \right)^2 \right], \tag{2.40}$$

et celle du faisceau extraordinaire :

$$I_{\mathrm{e}} = ||\vec{E}_{\mathrm{e}}||^2 \simeq E_0^2 \left[\theta_{\mathrm{F}}^2 + \left(\frac{\delta}{2} \sin 2\theta \right)^2 \right]. \tag{2.41}$$

Le rapport des intensités extraordinaire et ordinaire s'écrit alors :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{t}}} = \frac{\theta_{\mathrm{F}}^2 + \left(\frac{\delta}{2} \sin 2\theta\right)^2}{1 + \left(\frac{\delta}{2} \cos 2\theta\right)^2}. \tag{2.42}$$

Soit, en négligeant les termes d'ordre 4, et en utilisant l'expression de l'ellipticité donnée par l'équation (2.19) :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{t}}} = \theta_{\mathrm{F}}^2 + \left(\frac{\delta}{2} \sin 2\theta \right)^2 = \theta_{\mathrm{F}}^2 + \psi^2. \tag{2.43}$$

Pour réaliser ce calcul, nous avons considéré que les polariseurs étaient parfaits. En pratique, ils présentent un défaut d'extinction σ^2 tel que, après traversée d'un milieu linéaire, homogène et isotrope, $\frac{I_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{t}}} = \sigma^2$. Nous devons prendre en compte ce défaut lors des mesures d'angle de rotation et d'ellipticité. Le rapport des intensités s'écrit donc :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t}}(t)} = \sigma^2 + \theta_{\mathrm{F}}(t)^2 + \psi(t)^2. \tag{2.44}$$

σ^2 est un paramètre statique. $\theta_{\mathrm{F}}(t)$ et $\psi(t)$ sont les effets induits par le champ magnétique qui varie au cours du temps.

Les polariseur et analyseur sont placés sur des montures rotatives. La monture du polariseur d'entrée permet de le tourner manuellement sur lui-même, avec un pas de 1.3 mrad. Cela a permis de régler à 45° l'angle θ entre l'axe du polariseur et le champ magnétique transverse, comme cela sera décrit dans la section 2.5.1. La rotation de l'analyseur est commandée électriquement via des montures piézoélectriques, avec un pas de 5 μrad. Lorsqu'il est croisé avec P, le faisceau extraordinaire le traverse sans être dévié. Le faisceau ordinaire est dévié puis extrait de l'enceinte à vide par le miroir M_5 représenté sur la figure 2.4.

Les polariseurs utilisés sur l'expérience BMV sont des prismes de Glan [3]. Leur taux d'extinction est régulièrement mesuré. Pour cela, nous les positionnons à l'extinction maximale (P $\perp$ A) et, en l'absence de cavité optique et de milieu biréfringent, nous avons :

$$\sigma^2 = \left(\frac{I_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{t}}}\right)_{\mathrm{P}\perp\mathrm{A},\ \text{sans cavité},B=0}. \tag{2.45}$$

Le rapport des intensités est obtenu à partir des tensions V_{e} et V_{t} mesurées aux bornes des photodiodes $\mathrm{Ph_e}$ et $\mathrm{Ph_t}$ et de l'équation (2.23) rappelée ici :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{t}}} = \frac{g_{\mathrm{t}}}{g_{\mathrm{e}}}\frac{V_{\mathrm{e}}}{V_{\mathrm{t}}}. \tag{2.46}$$

g_{e} et g_{t} sont les facteurs de conversion des photodiodes $\mathrm{Ph_e}$ et $\mathrm{Ph_t}$, exprimés en V/W. Le rapport $g_{\mathrm{t}}/g_{\mathrm{e}}$ est obtenu en posant que :

$$I_{\mathrm{t}}(\mathrm{P}\perp\mathrm{A}) = \frac{V_{\mathrm{t}}(\mathrm{P}\perp\mathrm{A})}{g_{\mathrm{t}}} = \frac{V_{\mathrm{e}}(\mathrm{P}\parallel\mathrm{A})}{g_{\mathrm{e}}} = I_{\mathrm{e}}(\mathrm{P}\parallel\mathrm{A}), \tag{2.47}$$

c'est-à-dire que l'intensité ordinaire mesurée à l'extinction sur la photodiode $\mathrm{Ph_t}$ est égale à l'intensité mesurée sur la photodiode $\mathrm{Ph_e}$ lorsque P et A sont parallèles. D'où :

$$\frac{g_{\mathrm{t}}}{g_{\mathrm{e}}} = \frac{V_{\mathrm{t}}(\mathrm{P}\perp\mathrm{A})}{V_{\mathrm{e}}(\mathrm{P}\parallel\mathrm{A})}. \tag{2.48}$$

Ce rapport est régulièrement mesuré, avec une incertitude relative de 1.5%.

Les taux d'extinction obtenus sont compris entre 2×10^{-8} et 1×10^{-7}. Cette dispersion est expliquée par la dépendance à l'angle d'incidence du faisceau sur les polariseurs, qui peut varier selon les conditions expérimentales.

3. Nous utilisons des polariseurs de Glan laser de la marque *Karl Lambrecht*. Le taux d'extinction annoncé par le fabriquant est de 1×10^{-6}.

Nous allons maintenant décrire un des éléments principaux du dispositif : la cavité Fabry-Perot de haute finesse.

2.3 La cavité Fabry-Perot

D'après les relations (2.10) et (2.19), l'angle de rotation et l'ellipticité à mesurer sont proportionnels à la longueur L_b de milieu biréfringent traversé. La biréfringence étant induite par un champ magnétique, L_b est limitée par le nombre et la taille des aimants utilisés.

Afin d'augmenter les effets à mesurer nous utilisons donc une cavité optique. Il s'agit d'un interféromètre constitué de deux miroirs qui permet de piéger la lumière dans le champ magnétique [46]. Ainsi on accumule l'effet du champ magnétique, et donc l'ellipticité ou la rotation de la polarisation. Par ailleurs cela permet au dispositif de tenir sur une table optique de quelques mètres de long seulement.

La cavité optique utilisée est une cavité Fabry-Perot. Il s'agit d'un élément clé de l'expérience. Nous décrirons donc ses caractéristiques en détails, après avoir rappelé quelques généralités à propos de ce type d'interféromètres.

2.3.1 L'interféromètre de Fabry-Perot : généralités

Coefficients de transmission et de réflexion de la cavité

Considérons une cavité Fabry-Perot constituée de deux miroirs M_1 et M_2, séparés d'une distance L_c. Le miroir M_j ($j = 1$ ou 2) est caractérisé par différents coefficients définis comme suit [46] :

- sa réflectivité en amplitude. On note r_j le coefficient correspondant à une onde incidente se propageant des couches vers le substrat et r'_j celui correspondant à une onde se propageant du substrat vers les couches diélectriques, comme représenté sur la figure 2.5.
- sa réflectivité en intensité $R_j = r_j^2 = r'^2_j$.
- sa transmittivité en amplitude. On note t_j le coefficient correspondant à une onde incidente se propageant des couches vers le substrat et t'_j celui correspondant à une onde se propageant du substrat vers les couches diélectriques (voir la figure 2.5).
- sa transmittivité en intensité $T_j = t_j t'_j$.
- son coefficient de pertes en amplitude p_j et en intensité $P_j = p_j^2$ tel que $R_j + T_j + P_j = 1$.

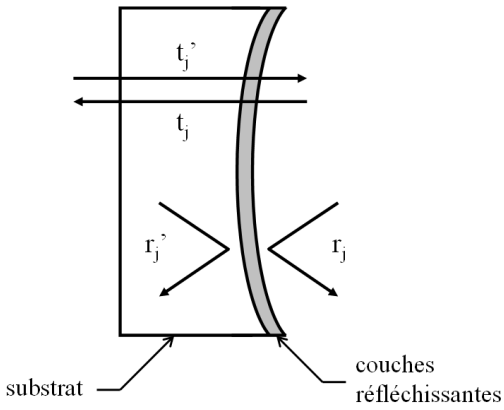


FIGURE 2.5 – Convention utilisée pour définir les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des miroirs interférentiels.

Suivant le traitement classique réalisé en optique ondulatoire [39], nous exprimons le coefficient de transmission en amplitude de la cavité :

$$t_{\mathrm{c}}(\omega) = \frac{E_{\mathrm{t}}(t)}{E_{\mathrm{i}}(t)} = \frac{t_1' t_2 \mathrm{e}^{-i\omega\frac{L_{\mathrm{c}}}{c}}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}, \tag{2.49}$$

et son coefficient de transmission en intensité :

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{c}}(\omega) &= |t_{\mathrm{c}}(\omega)|^2, & (2.50)\\ &= \frac{(t_1' t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2\left(\omega\frac{L_{\mathrm{c}}}{c}\right)}. & (2.51) \end{aligned}$$

Cette fonction est appelée fonction d'Airy. Elle est représentée sur la figure 2.6. Elle présente un maximum à la résonance, pour $\omega = q\frac{\pi c}{L_{\mathrm{c}}}$, où q est un nombre entier. Les fréquences de résonance de la cavité sont donc :

$$\nu = q\frac{c}{2L_{\mathrm{c}}} \equiv q\Delta^{\mathrm{ISL}}, \tag{2.52}$$

où $\Delta^{\mathrm{ISL}} = c/2L_{\mathrm{c}}$ est l'intervalle spectral libre de la cavité, c'est-à-dire l'intervalle de fréquence entre deux pics de résonance. A la résonance la transmission de la cavité vaut :

$$T_{\mathrm{c}} = \left(\frac{t_1' t_2}{1 - r_1 r_2}\right)^2. \tag{2.53}$$

Nous calculons la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$ du pic de résonance en appliquant la condition suivante :

$$T_{\mathrm{c}}\left(\nu = q\Delta^{\mathrm{ISL}} \pm \frac{\Delta\nu}{2}\right) = \frac{T_{\mathrm{c}}}{2}. \tag{2.54}$$

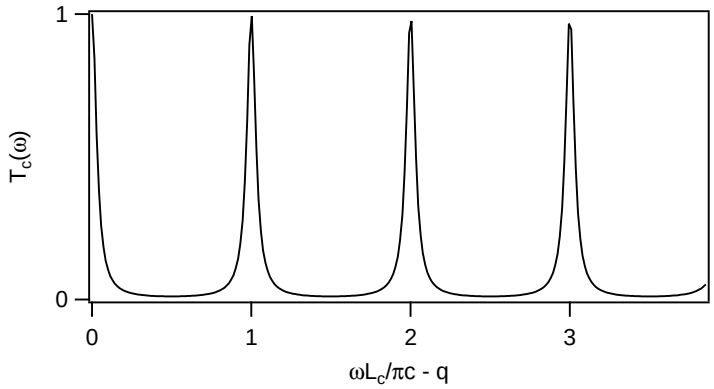


FIGURE 2.6 – Fonction d'Airy de transmission d'un interféromètre de Fabry-Perot sans pertes, en optique géométrique. Nous avons considéré que les deux miroirs ont le même coefficient de réflectivité en amplitude $r = r_1 = r_2 = 0.9$.

Pour $\Delta\nu \ll \Delta^{\mathrm{ISL}}$, nous obtenons :

$$\Delta\nu = \frac{1 - r_1 r_2}{\pi\sqrt{r_1 r_2}}\Delta^{\mathrm{ISL}}. \tag{2.55}$$

Nous pouvons à présent définir la finesse F de la cavité Fabry-Perot :

$$F = \frac{\Delta^{\mathrm{ISL}}}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}. \tag{2.56}$$

Cette grandeur est d'autant plus élevée que les coefficients de réflectivité en amplitude des miroirs M_1 et M_2 sont proches de 1.

Suivant le traitement classique, nous pouvons également écrire le coefficient de réflexion en amplitude de la cavité :

$$r_{\mathrm{c}}(\omega) = \frac{E_{\mathrm{r}}(t)}{E_{\mathrm{i}}(t)}, \tag{2.57}$$

$$= -r_1 + \frac{t'_1 t_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}, \tag{2.58}$$

et son coefficient de réflexion en intensité :

$$R_{\mathrm{c}}(\omega) = |r_{\mathrm{c}}(\omega)|^2, \tag{2.59}$$

$$= \frac{[r_1 - r_2(r_1^2 + t'_1 t_1)]^2 + 4r_1 r_2(r_1^2 + t'_1 t_1)\sin^2\left(\omega\frac{L_{\mathrm{c}}}{c}\right)}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2\left(\omega\frac{L_{\mathrm{c}}}{c}\right)}. \tag{2.60}$$

A la résonance, celui-ci vaut :

$$R_{\mathrm{c}} = \left(\frac{r_1 - r_2(r_1^2 + t_1' t_1)}{1 - r_1 r_2}\right)^2 = R_1\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\frac{t_1}{t_2}\sqrt{T_{\mathrm{c}}}\right)^2. \tag{2.61}$$

Il est utile de relier les coefficients de transmission et de réflexion à résonance de la cavité à sa finesse. Dans le cadre de notre expérience, nous pouvons considérer que les miroirs M_1 et M_2 sont identiques. Nous prendrons donc : $r_1 = r_2 = r$, $R = r^2$, $t_1 = t_2 = t$ et $T = t^2$. A partir des équations (2.53) et (2.61) et pour une réflectivité R des miroirs proche de 1 nous obtenons :

$$T_{\mathrm{c}} = \left(T\frac{F}{\pi}\right)^2, \tag{2.62}$$

et

$$R_{\mathrm{c}} = \left(1 - T\frac{F}{\pi}\right)^2. \tag{2.63}$$

Temps de vie des photons dans la cavité

La cavité Fabry-Perot permet de piéger la lumière entre les miroirs M_1 et M_2. Les photons ont donc un temps de vie dans la cavité, que nous noterons τ.

Considérons une cavité Fabry-Perot alimentée en photons par un faisceau incident. Lorsque celui-ci est coupé, l'intensité en sortie de cavité après p allers-retours des photons dans la cavité est donnée par :

$$I_p = T_2 I_{\mathrm{intra}}(r_1 r_2)^{2p}, \tag{2.64}$$

où I_{intra} est l'intensité intra-cavité au moment de la coupure, T_2 est la transmittivité en intensité du miroir de sortie et r_1 et r_2 sont les réflectivités en amplitude des miroirs. Cette expression peut se mettre sous la forme d'une exponentielle décroissante :

$$I_p = T_2 I_{\mathrm{intra}} \mathrm{e}^{2p\ln(r_1 r_2)} \equiv T_2 I_{\mathrm{intra}} \mathrm{e}^{-\frac{t_p}{\tau}}, \tag{2.65}$$

où $t_p = 2p\frac{nL_{\mathrm{c}}}{c}$ est le temps mis par la lumière pour faire p allers-retours dans une cavité de longueur L_{c}, dans un milieu d'indice n. Pour $r_1 r_2$ proche de 1, le temps de vie τ des photons dans la cavité est donc donné par :

$$\tau = -\frac{nL_{\mathrm{c}}}{c\,\ln(r_1 r_2)} \simeq \frac{nL_{\mathrm{c}}}{c(1 - r_1 r_2)}. \tag{2.66}$$

En utilisant l'expression (2.56), nous l'exprimons en fonction de la finesse de la

cavité :

$$\tau \simeq \frac{nL_{\mathrm{c}}F}{\pi c}. \tag{2.67}$$

En pratique, les mesures de finesse sont réalisées dans le vide ou dans des faibles pressions de gaz. L'indice n est donc pris égal à 1 et

$$\tau \simeq \frac{L_{\mathrm{c}}F}{\pi c}. \tag{2.68}$$

Déphasage accumulé dans la cavité

La cavité Fabry-Perot est utilisée pour augmenter l'angle de rotation ou l'ellipticité acquise par une polarisation linéaire incidente lorsqu'elle traverse un milieu biréfringent. Nous avons montré dans la section 2.2.1 que ces effets sont dus à un déphasage entre deux composantes de la polarisation. La rotation d'un angle θ_{F} de la polarisation linéaire est due à un déphasage δ_{F} entre les composantes polarisées circulairement droite et gauche (effet Faraday, biréfringence circulaire). L'ellipticité ψ est due à un déphasage δ_{CM} entre les composantes polarisées suivant l'axe rapide et l'axe lent du milieu biréfringent (effet Cotton-Mouton, biréfringence linéaire). Nous allons maintenant calculer l'effet de la cavité sur un déphasage quelconque.

Considérons un milieu biréfringent qui introduit un déphasage δ entre deux composantes de la polarisation. On peut écrire la matrice décrivant ce milieu dans la base adaptée :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Dans le cas de l'effet Faraday la base correspond à celle des polarisations circulaires droite et gauche. Pour l'effet Cotton-Mouton il s'agit de la base orthonormée donnée par les axes neutres de la lame (nous avions pris le repère $(O\vec{x}, O\vec{y})$ pour réaliser le calcul dans le paragraphe 2.2.1).

Lorsque ce milieu est placé dans une cavité Fabry-Perot constituée des miroirs M_1 et M_2, la matrice $\mathbf{M}_{\mathrm{FP}}$ du système s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathrm{FP}} &= t_1' t_2 \times \mathbf{M} && (2.70) \\ &+ t_1' t_2 r_1 r_2 \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \\ &+ t_1' t_2 (r_1 r_2)^2 \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{M} \\ &+ \ldots \\ &= t_1' t_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \sum_{p=0}^{\infty} \left[r_1 r_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\delta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\delta} \end{pmatrix} \right]^p . && (2.71) \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathrm{FP}} &= t_1' t_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\frac{\delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-r_1 r_2 \mathrm{e}^{i\delta}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\delta}} \end{pmatrix}, && (2.72)\\
&= \frac{t_1' t_2}{1-r_1 r_2} \begin{pmatrix} \frac{(1-r_1 r_2)\mathrm{e}^{i\frac{\delta}{2}}}{1-r_1 r_2 \mathrm{e}^{i\delta}} & 0 \\ 0 & \frac{(1-r_1 r_2)\mathrm{e}^{-i\frac{\delta}{2}}}{1-r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\delta}} \end{pmatrix}, && (2.73)\\
&= \frac{t_1' t_2}{1-r_1 r_2} \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathrm{FP},11} & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_{\mathrm{FP},22} \end{pmatrix}. && (2.74)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant le module et l'argument des termes $\mathrm{M}_{\mathrm{FP},11}$ et $\mathrm{M}_{\mathrm{FP},22}$:

$$|\mathrm{M}_{\mathrm{FP},11}| = |\mathrm{M}_{\mathrm{FP},22}| = \frac{1-r_1 r_2}{\sqrt{1+(r_1 r_2)^2 - 2 r_1 r_2 \cos\delta}} \simeq 1, \tag{2.75}$$

pour $\delta \ll 1$. Et :

$$\arg(\mathrm{M}_{\mathrm{FP},11}) = -\arg(\mathrm{M}_{\mathrm{FP},22}) = \frac{\delta}{2} \times \frac{1+r_1 r_2}{1-r_1 r_2} = \frac{\delta_{\mathrm{FP}}}{2}. \tag{2.76}$$

A partir de l'équation (2.56) reliant la finesse de la cavité aux coefficients de réflexion r_1 et r_2, nous déduisons le déphasage total δ_{FP} en fonction de F. Pour cela nous considérons que r_1 et r_2 sont très proches de 1. Nous obtenons :

$$\delta_{\mathrm{FP}} \simeq \frac{2F}{\pi}\delta. \tag{2.77}$$

Le déphasage entre les deux composantes de la polarisation en présence de la cavité Fabry-Perot est donc augmenté d'un facteur $2F/\pi$ par rapport à celui sans cavité.

L'angle de rotation de la polarisation observé dans le cas de l'effet Faraday est proportionnel au déphasage δ_{F} (voir l'équation (2.10)). En sortie de cavité, l'angle de rotation observé est donc :

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mathrm{F}} = \frac{2F}{\pi}\theta_{\mathrm{F}} &= \frac{2FL_{\mathrm{B}}}{\lambda} k_{\mathrm{F}} B_{||}, && (2.78)\\
&= 4\pi\tau\Delta^{\mathrm{ISL}} \frac{L_{\mathrm{B}}}{\lambda} k_{\mathrm{F}} B_{||}.
\end{aligned}$$

De même, l'ellipticité acquise par la polarisation dans le cas de l'effet Cotton-Mouton est proportionnelle au déphasage δ_{CM} (voir l'équation (2.19)). En sortie de cavité,

l'ellipticité à mesurer est donc :

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{2F}{\pi}\psi &= \frac{2FL_{\mathrm{B}}}{\lambda}k_{\mathrm{CM}}B_{\perp}^{2}\sin 2\theta, \\ &= 4\pi\tau\Delta^{\mathrm{ISL}}\frac{L_{\mathrm{B}}}{\lambda}k_{\mathrm{CM}}B_{\perp}^{2}\sin 2\theta.\end{aligned} \tag{2.79}$$

Ces deux dernières équations mettent en évidence l'importance de la cavité Fabry-Perot, et en particulier celle de sa finesse. Plus celle ci sera grande, plus les signaux que nous cherchons à mesurer seront importants.

Nous allons maintenant présenter les caractéristiques de la cavité utilisée sur l'expérience BMV. Nous nous attarderons en particulier sur la finesse, sa mesure, son ordre de grandeur. Nous aborderons également les effets de biréfringence statique des miroirs.

2.3.2 Caractéristiques de la cavité Fabry-Perot de l'expérience BMV

Miroirs de la cavité

La cavité Fabry-Perot utilisée sur l'expérience BMV est constituée de deux miroirs interférentiels plan-concaves de rayon de courbure $C_j = 8$ m, séparés d'une longueur $L_{\mathrm{c}} \sim 2.27$ m. Comme représenté sur la figure 2.7, les miroirs interférentiels sont constitués d'un empilement de couches de diélectriques déposées sur un substrat. Chaque couche est formée d'une lame d'indice élevé n_1 (supérieur à 2) et d'une lame d'indice faible n_2 (autour de 1.5). Chaque lame a une épaisseur optique de $\lambda/4$, où λ est la longueur d'onde de la lumière à laquelle le miroir est utilisé [91] :

$$n_1 h_1 = n_2 h_2 = \frac{\lambda}{4}. \tag{2.80}$$

A chaque interface, une partie de l'onde est réfléchie. Toutes les ondes réfléchies interfèrent constructivement, ce qui confère au miroir une très grande réflectivité.

L'intervalle spectral libre donné par l'équation (2.52) a été mesuré [72]. Il est de :

$$\Delta^{\mathrm{ISL}} = (65.996 \pm 0.017)\ \mathrm{MHz}, \tag{2.81}$$

ce qui équivaut à une longueur de cavité de :

$$L_{\mathrm{c}} = (2.2713 \pm 0.0006)\ \mathrm{m}. \tag{2.82}$$

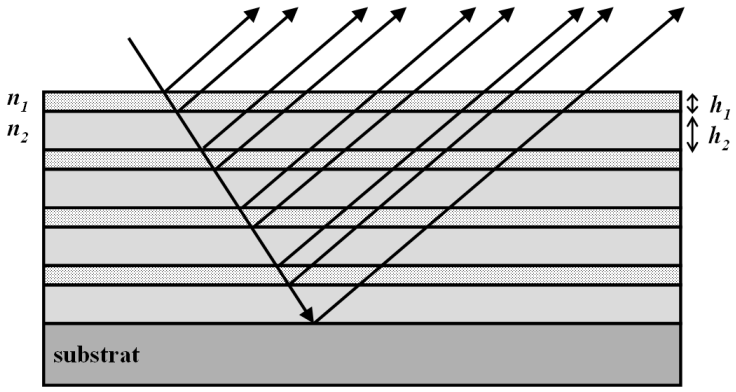
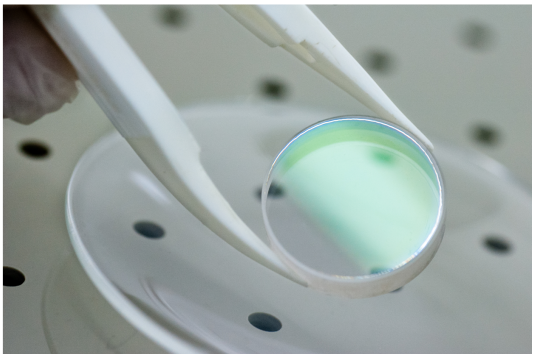


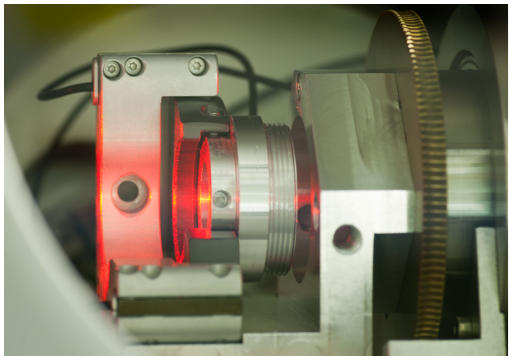
FIGURE 2.7 – Un miroir interférentiel est constitué d'une alternance de lames d'indice élevé n_1 et d'indice faible n_2, le tout reposant sur un substrat. L'épaisseur optique de chaque lame est égale à $\lambda/4$. Les ondes réfléchies à chaque interface interfèrent constructivement.

Les incertitudes sont données à 1σ.

Une photographie de l'un des miroirs est présentée sur la figure 2.8a. Son diamètre est d'un pouce. Nous pouvons le voir, à droite, inséré dans son barillet (figure 2.8b). Celui-ci est fixé à une monture qui permet de l'orienter dans les trois directions de l'espace. Une rotation manuelle permet de le faire tourner autour de l'axe $O\vec{z}$ de la cavité, avec un pas de 1 mrad. Les rotations autour des axes $O\vec{x}$ et $O\vec{y}$ sont réalisées avec un pas de 1 μrad grâce à des actionneurs piézoélectriques.



(a) Photographie d'un miroir de la cavité de l'expérience BMV.



(b) Le miroir est inséré dans un barillet, lui même fixé à une monture permettant de l'orienter.

FIGURE 2.8 – Miroirs de la cavité Fabry-Perot de l'expérience BMV et leur système de fixation.

Les miroirs utilisés ont une très grande réflectivité ($R = 0.999993$). Leur qualité est rapidement altérée par le dépôt de poussières sur les couches diélectriques. Afin de permettre l'utilisation de tels miroirs, l'expérience BMV est montée dans une salle blanche, dont une photographie est présentée sur la figure 2.9. Un système complet

de filtration de l'air, décrit dans la thèse de Paul Berceau [72], permet de conserver et de manipuler les miroirs dans de bonnes conditions afin d'obtenir une cavité de très grande finesse.

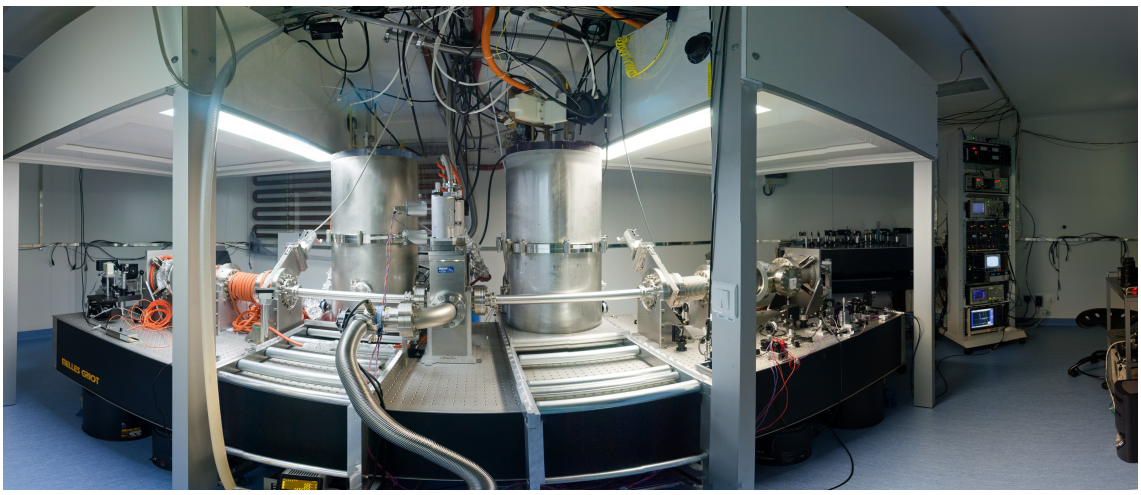


FIGURE 2.9 – Photographie de l'expérience BMV montée en salle blanche. Nous pouvons y voir la table cavité sur laquelle l'enceinte à vide est installée. Deux cryostats (ici retirés de la cavité) contiennent les aimants qui produisent le champ magnétique transverse. Deux caissons soufflants contribuent au filtrage de l'air de la pièce.

Cavité en optique gaussienne

Le rayon de courbure des miroirs, $C_j = 8$ m, permet de satisfaire le critère gaussien de stabilité de la cavité :

$$\left(1 - \frac{L_\mathrm{c}}{C_1}\right)\left(1 - \frac{L_\mathrm{c}}{C_2}\right) = 0.51 \in [0, 1]. \tag{2.83}$$

Dans le paragraphe 2.3.1, nous avons établi l'expression des fréquences de résonance d'une cavité Fabry-Perot en considérant que l'onde se propageant dans celle-ci est une onde plane, spatialement illimitée dans les directions $O\vec{x}$ et $O\vec{y}$ perpendiculaires à sa direction de propagation $O\vec{z}$. Les miroirs de la cavité ayant une taille finie, cette hypothèse n'a pas de réalité physique.

Considérons une onde de pulsation $\omega = 2\pi c/\lambda$ et de vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$. Pour une cavité formée de deux miroirs concaves, une solution de l'équation de propagation tenant compte des conditions aux limites imposées par les miroirs, est donnée par les modes gaussiens transverses électromagnétiques, notés TEM_{nm}. Le

champ électrique d'un tel mode s'écrit [92] :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{n,m}(x,y,z) &= \vec{E}_0 \frac{w_0}{w(z)} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}} H_n\left(\frac{x\sqrt{2}}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{y\sqrt{2}}{w(z)}\right) \\ &\times \mathrm{e}^{i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz + \varphi(z))}.\end{aligned} \tag{2.84}$$

Définissons les grandeurs qui interviennent dans cette équation :

– $w(z)$ représente l'extension transversale du faisceau. En prenant pour origine de l'axe $O\vec{z}$ le point où le faisceau est le plus étroit, elle est donnée par :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_\mathrm{R}^2}}. \tag{2.85}$$

w_0 est le col du faisceau ("waist" en anglais). Il est relié à la longueur de la cavité L_c et au rayon de courbure C des miroirs par l'expression suivante [93] :

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{L_\mathrm{c}}{2}\left(C - \frac{L_\mathrm{c}}{2}\right)}}. \tag{2.86}$$

Pour la cavité utilisée sur l'expérience BMV, $w(z)$ varie de $w_0 = 0.97$ mm au centre de la cavité à 1.05 mm sur les miroirs.

– $z_\mathrm{R} = \pi w_0^2/\lambda$ est appelée longueur de Rayleigh. Elle caractérise la divergence du faisceau. Suivant l'équation (2.85), le rayon du faisceau est pratiquement constant pour des distances autour de l'origine petites devant z_R. Elle est de 2.79 m.

– $R(z)$ est le rayon de courbure du faisceau, donné par :

$$R(z) = z + \frac{z_\mathrm{R}^2}{z}. \tag{2.87}$$

– La phase $\varphi(z)$ a pour expression :

$$\varphi(z) = (n+m+1)\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_\mathrm{R}}\right) \equiv (n+m+1)\varphi, \tag{2.88}$$

où φ est appelée phase de Gouy.

– H_n et H_m sont les polynômes d'Hermite de degrés n et m respectivement. Ils déterminent les variations de l'intensité dans le plan $(O\vec{x}, O\vec{y})$.

A titre d'exemple, les modes transverses électromagnétiques TEM_{00} et TEM_{01} (ou TEM_{10}) obtenus avec la cavité Fabry-Perot de l'expérience BMV sont présentés sur la figure 2.10. Afin de maximiser la transmission, il est nécessaire de privilégier la propagation d'un unique mode dans la cavité. Le mode fondamental TEM_{00} présente

un profil d'intensité symétrique par rotation autour de l'axe du faisceau. Par ailleurs il est moins étendu spatialement que les modes de degrés plus élevés. Nous cherchons donc à privilégier ce mode. Pour cela il est nécessaire d'adapter, d'une part, le mode du laser à celui de la cavité (cela est réalisé à l'aide du télescope T de la figure 2.4), et d'autre part les conditions aux limites, c'est-à-dire l'orientation relative des miroirs M_1 et M_2.

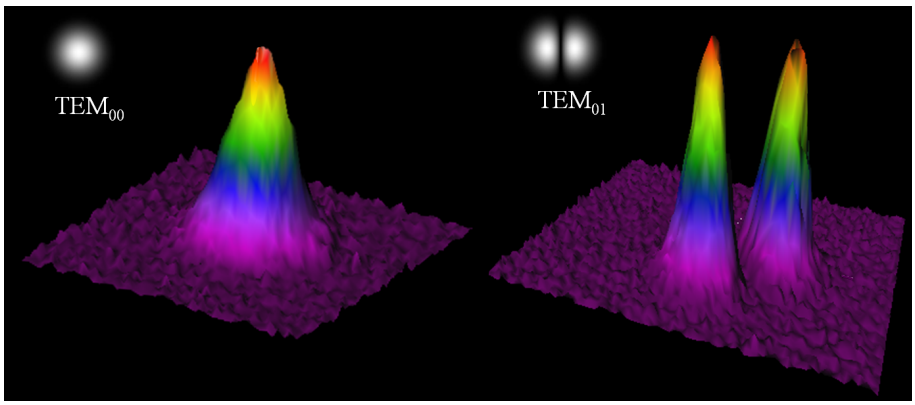


FIGURE 2.10 – Profils d'intensité des modes gaussiens transverses électromagnétiques TEM_{00} et TEM_{01} obtenus avec la cavité Fabry-Perot de l'expérience BMV.

Nous nous appuyons sur le fait que la fréquence de résonance de la cavité dépend du mode qui s'y propage. Soit ω_{nmq} la fréquence de résonance du mode TEM_{nm}. Elle est obtenue en posant que la phase du champ doit se reproduire identique à elle-même après un aller-retour dans la cavité et est donnée par [93] :

$$\omega_{nmq} = \frac{c}{L_\mathrm{c}}\left[\pi q + 2(n+m+1)\tan^{-1}\left(\frac{L_\mathrm{c}}{2z_\mathrm{R}}\right)\right]. \tag{2.89}$$

Pour un numéro de pic q, l'écart entre deux modes TEM_{nm} successifs vaut 16.3 MHz. Pour visualiser les modes pouvant se propager dans la cavité, nous balayons la fréquence du faisceau lumineux en faisant varier la tension appliquée sur la cale piézoélectrique fixée au cristal du laser. La fréquence de modulation est de 5 Hz. L'intervalle de fréquence parcouru est 150 MHz, soit plus d'un intervalle spectral libre. La variation de l'intensité ordinaire transmise nous permet de visualiser les modes TEM_{nm}. Elle est représentée sur la figure 2.11, avant optimisation de l'alignement des miroirs. Les modes TEM_{nm} apparaissent sous la forme de pics d'intensité, dont le motif se répète tous les intervalles spectraux libres. Le pic le plus à gauche correspond au mode fondamental TEM_{00}. Cette figure est à comparer avec la figure 2.6 où la transmission a été représentée en fonction de la fréquence dans le cadre de l'optique géométrique. Il n'existe alors qu'un seul pic par intervalle spectral libre, les modes TEM_{nm} étant liés au traitement gaussien de l'onde lumineuse. De plus, nous

observons sur la figure 2.11 que les pics ne sont pas symétriques. L'intensité transmise décroît exponentiellement une fois la fréquence de résonance dépassée. Cela est expliqué par le temps de vie des photons dans la cavité qui est du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de balayage de la fréquence du laser.

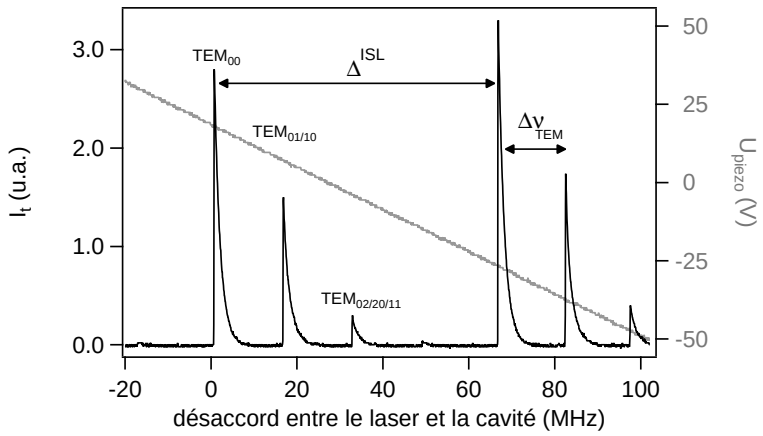


FIGURE 2.11 – La fréquence du laser est balayée sur plus d'un intervalle spectral libre par l'application d'une tension triangulaire U_{piezo} sur la cale piézoélectrique fixée au cristal du laser (courbe grise). L'intensité ordinaire transmise I_{t} présente des pics de résonance (en noir) qui correspondent à la propagation de modes gaussiens transverses électromagnétiques dans la cavité Fabry-Perot, avant optimisation de l'alignement des miroirs.

Les miroirs sont alignés grâce aux montures piézoélectriques de façon à maximiser l'intensité du pic du mode fondamental, et à minimiser l'intensité des pics correspondants à des modes supérieurs. En pratique, nous considérons que l'alignement de la cavité est satisfaisant lorsque l'intensité des modes $\text{TEM}_{01/10}$ est inférieure à un dixième de l'intensité du mode TEM_{00}, et que le pic correspondant aux modes $\text{TEM}_{02/20/11}$ a disparu. Cette étape fondamentale permet d'obtenir une intensité transmise par la cavité aussi grande que possible, lorsque la fréquence du laser est asservie sur le mode TEM_{00}. Une fois que l'alignement des miroirs de la cavité est optimisé, nous mesurons sa finesse.

Finesse de la cavité

Historiquement, le paramètre utilisé pour caractériser une cavité est sa finesse. Nous l'obtenons de façon indirecte par la mesure du temps de décroissance de l'intensité transmise I_{t}. La fréquence du laser est tout d'abord asservie sur la résonance du mode TEM_{00} de la cavité par un système qui sera décrit au paragraphe 2.4. Dans ce régime $I_{\text{t}}(t)$ est constante et égale à I_0. A l'instant t_0, l'asservissement est coupé grâce au modulateur acousto-optique. Celui-ci permet d'éteindre le faisceau en environ $\tau_{\text{AOM}} \sim 10$ ns. Pour $\tau \gg \tau_{\text{AOM}}$, I_{t} subit alors une décroissance exponentielle

de la forme :

$$I_{\mathrm{t}}(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \tag{2.90}$$

où τ est le temps de vie des photons dans la cavité. Nous rappelons qu'il s'exprime en fonction de la finesse comme suit :

$$\tau = \frac{L_{\mathrm{c}} F}{\pi c}. \tag{2.91}$$

La figure 2.12 présente l'évolution temporelle de l'intensité transmise lors d'une mesure de finesse. Cette courbe est ajustée par une fonction exponentielle décroissante. La courbe d'ajustement en pointillés se superpose parfaitement aux points expérimentaux ce qui permet de déduire le temps de vie des photons à l'intérieur de la cavité.

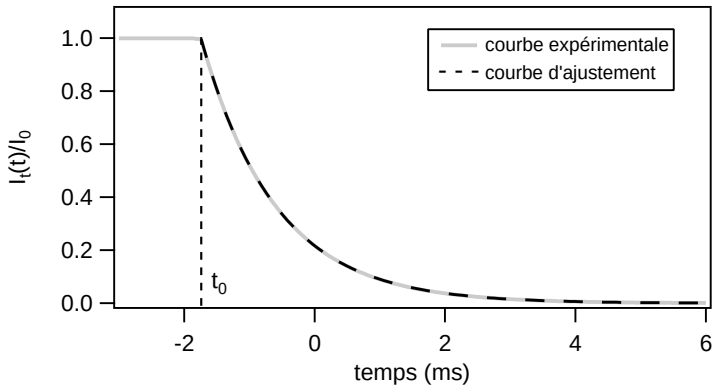


FIGURE 2.12 – Évolution temporelle de l'intensité transmise par la cavité après coupure du faisceau à l'instant t_0. L'ajustement par une décroissance exponentielle (en pointillés) se superpose parfaitement aux points expérimentaux (courbe grise).

Les miroirs utilisés au cours de cette thèse ont été fabriqués sur mesure [4]. La finesse visée lors de la fabrication était de 500000, celle garantie par le fournisseur est de 150000. La finesse maximale atteinte sur la cavité de l'expérience BMV est d'environ 480000 ce qui correspond à un temps de vie des photons τ de l'ordre de 1.2 ms. Le coefficient de réflectivité en intensité de ces miroirs est calculé à partir de l'expression (2.56). En considérant que les miroirs sont identiques, et donc $r_1 = r_2 = r$, nous obtenons $R = r^2 = 0.999993$. Les coefficients de transmission et de réflexion à résonance de la cavité ont été mesurés à partir des intensités incidente, réfléchie et transmise. Ils sont respectivement : $T_{\mathrm{c}} = 35\%$ et $R_{\mathrm{c}} = 17\%$, en considérant une adaptation parfaite du mode [5] [72]. A partir de l'équation (2.62), nous en déduisons

4. Le fabricant des miroirs est la société *ATFilms* basée aux États-Unis

5. Pour obtenir ces valeurs la cavité a été alignée au mieux sur le mode TEM_{00}. Nous avons ensuite considéré que toute l'intensité est contenue dans ce mode.

le coefficient de transmittivité en intensité : $T = 4$ ppm[6]. Les pertes en intensité sont ensuite calculées : $P = 1 - (R + T) = 3$ ppm .

En pratique, les finesses obtenues lors des mesures réalisées au cours de cette thèse varient entre 400000 et 480000, selon le jeu de miroirs utilisés. Ces grandeurs sont à comparer avec celles obtenues avec des cavités Fabry-Perot employées sur d'autres expériences dans le monde. Le tableau 2.1 résume les principales caractéristiques de cavités utilisées dans le domaine de l'optique, qui peuvent être classées en trois catégories :

- grande finesse, faible longueur. La plus grande finesse jamais publiée est de l'ordre de 1.9×10^6 avec $L_c = 4$ mm.
- finesse intermédiaire mais très grande longueur. Il s'agit des cavités utilisées sur les détecteurs d'ondes gravitationnelles, dont la longueur est de l'ordre de quelques kilomètres.
- grande finesse et longueur intermédiaire (quelques mètres), comme la cavité utilisée sur l'expérience BMV.

Catégorie de l'interféromètre	Projet	Référence	L_c (m)	Δ^{ISL} (kHz)	F	τ (μs)	$\Delta\nu$ (Hz)	Q ($\times 10^{11}$)
F grande, L_c faible	REMPE	[94]	4×10^{-3}	3.75×10^7	1 900 000	8	19 400	0.2
	SYRTE	[95]	0.1	1.5×10^6	800 000	85	1 875	1.5
F intermédiaire, L_c très grande	VIRGO	[96]	3 000	50	50	160	1 000	2.8
	LIGO	[97]	4 000	38	230	980	160	17
F grande, L_c intermédiaire	PVLAS	[98]	3.3	45 000	770 000	2 700	59	48
	Q&A	[68]	3.5	43 000	30 000	111	1 400	2.0
	BMV		2.27	66 000	481 000	1 160	137	21

TABLE 2.1 – Principales caractéristiques des meilleures cavités Fabry-Perot utilisées dans le monde dans le domaine optique ($\lambda = 850$ nm pour le projet de G. Rempe, $\lambda = 1064$ nm pour les autres). Sont reportés : la longueur de la cavité L_c, son intervalle spectral libre Δ^{ISL}, sa finesse F, le temps de vie des photons dans la cavité τ, la largeur à mi-hauteur du pic de résonance $\Delta\nu$ et le facteur de qualité de la cavité $Q = \nu/\Delta\nu$, avec $\nu = c/\lambda$ la fréquence du laser.

Comme nous le voyons dans l'équation (2.79), pour maximiser l'ellipticité Ψ que nous cherchons à mesurer, il faut que la finesse de la cavité soit aussi grande que possible. Il est également nécessaire d'avoir une longueur de cavité L_c suffisamment grande pour pourvoir insérer des aimants entre les miroirs. Le paramètre important est donc le produit $F \times L_c$, qui est inversement proportionnel à la largeur du pic de résonance $\Delta\nu = \frac{c}{2FL_c}$ et proportionnel au facteur de qualité Q, défini comme suit :

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu}, \tag{2.92}$$

6. Couramment, les transmittivités et pertes en intensité sont exprimées en ppm (parties par million), avec 1 ppm = 10^{-6}.

avec $\nu = c/\lambda$ la fréquence du laser. Nous voyons dans le tableau 2.1 que la cavité utilisée sur l'expérience BMV fait partie de celles ayant le facteur de qualité le plus élevé et la largeur de résonance la plus faible.

Nous allons maintenant décrire une autre caractéristique importante de la cavité Fabry-Perot : sa biréfringence intrinsèque.

Biréfringence intrinsèque de la cavité

L'expérience BMV est destinée à la mesure de faibles ellipticités ψ ou de faibles angles de rotation θ_{F}, induits par un champ magnétique sur une polarisation linéaire incidente. ψ et θ_{F} sont reliés au rapport des intensités extraordinaire et ordinaire par l'équation (2.44). Pour être exacte, cette équation doit prendre en compte toutes les ellipticités et tous les angles de rotation susceptibles d'apparaître sur la polarisation du faisceau, et en particulier ceux statiques dus aux miroirs de la cavité Fabry-Perot.

Modélisation de la cavité Fabry-Perot biréfringente

Il a été observé expérimentalement que les miroirs interférentiels sont intrinsèquement biréfringents. Cette biréfringence a été étudiée et mesurée par de nombreuses équipes depuis les années 1980 [99–106]. Il s'agit d'une biréfringence linéaire. Une récente étude l'attribue à la biréfringence des couches interférentielles situées près du substrat du miroir [91].

Chaque miroir M_j peut donc être modélisé par la combinaison d'un miroir non biréfringent m_j de réflectivité et transmittivité en amplitude r_j et t_j, et d'une lame biréfringente L_j (voir figure 2.13). La lame induit un déphasage δ_j entre les composantes de la polarisation parallèles à ses axes neutres. Le déphasage induit par réflexion sur un miroir est donc $2\delta_j$.

Par réflexion sur les miroirs, la polarisation linéaire devient elliptique en sortie de cavité. Nous notons Γ cette ellipticité statique. Elle s'écrit comme la somme des ellipticités Γ_j induites en sortie de cavité par chaque miroir. Cette propriété est démontrée dans l'annexe A. D'après les équations (2.19) et (2.77), Γ est reliée aux déphasages δ_1 et δ_2 comme suit [102] :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{2F}{\pi}\left[\frac{\delta_1}{2}\sin\left(2(\theta_1 - \theta_{\mathrm{p}})\right) + \frac{\delta_2}{2}\sin\left(2(\theta_2 - \theta_{\mathrm{p}})\right)\right]. \tag{2.93}$$

θ_1, θ_2 et θ_{P} sont les angles que font respectivement l'axe rapide de L_1, l'axe rapide de L_2 et la polarisation incidente avec l'axe $O\vec{x}$.

La cavité peut également être représentée, comme sur la figure 2.14, par une lame biréfringente équivalente L_{eq} placée entre les miroirs non biréfringents m_1 et

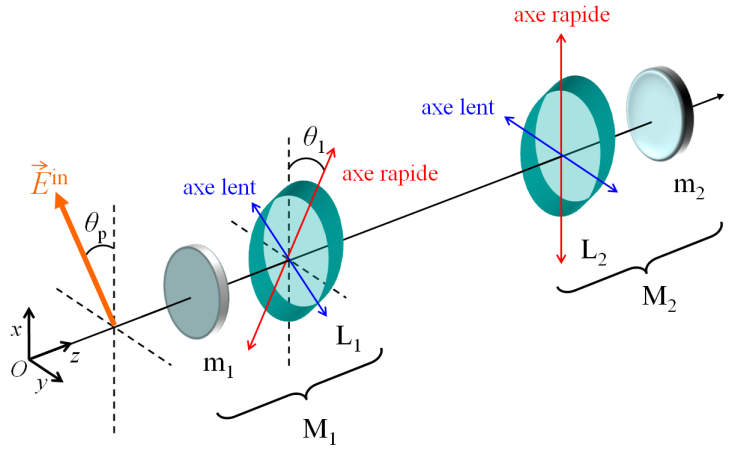


FIGURE 2.13 – Les miroirs biréfringents M_j sont modélisés par la combinaison d'un miroir non biréfringent m_j et d'une lame biréfringente L_j qui introduit un déphasage δ_j entre deux composantes perpendiculaires de la polarisation. La polarisation incidente fait un angle θ_P avec l'axe $O\vec{x}$. De même les axes rapides des lames L_1 et L_2 font respectivement des angles θ_1 et θ_2 avec $O\vec{x}$. Ici, nous avons posé $\theta_2 = 0$.

m_2. Nous calculons le déphasage induit par cette lame en utilisant les matrices de Jones [106]. Pour cela nous posons que l'axe rapide de la lame L_2 est aligné avec l'axe $O\vec{x}$, soit $\theta_2 = 0$. Suivant les axes propres de chaque lame, les matrices correspondant à L_1 et L_2 s'écrivent :

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta_1}{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta_2}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.94}$$

Dans le repère (O, x, y), la matrice de la lame équivalente à la cavité est donnée par :

$$\mathbf{L}_{\text{eq}} = \mathbf{L}_2\mathbf{R}(-\theta_1)\mathbf{L}_1\mathbf{R}(\theta_1), \tag{2.95}$$

où $\mathbf{R}$ est la matrice rotation. Après calcul nous obtenons :

$$\mathbf{L}_{\text{eq}} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_1 e^{i\frac{\delta_1+\delta_2}{2}} + \sin^2\theta_1 e^{i\frac{-\delta_1+\delta_2}{2}} & -2i\cos\theta_1\sin\theta_1\sin\frac{\delta_1}{2}e^{i\frac{\delta_2}{2}} \\ -2i\cos\theta_1\sin\theta_1\sin\frac{\delta_1}{2}e^{-i\frac{\delta_2}{2}} & \cos^2\theta_1 e^{-i\frac{\delta_1+\delta_2}{2}} + \sin^2\theta_1 e^{-i\frac{-\delta_1+\delta_2}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.96}$$

En notant δ_{eq} le déphasage induit par la lame équivalente, et θ_{eq} l'angle que fait son axe rapide avec la direction $O\vec{x}$, nous pouvons aussi écrire :

$$\mathbf{L}_{\text{eq}} = \mathbf{R}(-\theta_{\text{eq}}) \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta_{\text{eq}}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta_{\text{eq}}}{2}} \end{pmatrix} \mathbf{R}(\theta_{\text{eq}}), \tag{2.97}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta_{\text{eq}} e^{i\frac{\delta_{\text{eq}}}{2}} + \sin^2\theta_{\text{eq}} e^{-i\frac{\delta_{\text{eq}}}{2}} & -2i\cos\theta_{\text{eq}}\sin\theta_{\text{eq}}\sin\frac{\delta_{\text{eq}}}{2} \\ -2i\cos\theta_{\text{eq}}\sin\theta_{\text{eq}}\sin\frac{\delta_{\text{eq}}}{2} & \cos^2\theta_{\text{eq}} e^{-i\frac{\delta_{\text{eq}}}{2}} + \sin^2\theta_{\text{eq}} e^{i\frac{\delta_{\text{eq}}}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.98}$$

En égalisant les deux expressions de la matrice équivalente (équations (2.96) et (2.98)), et en supposant que les déphasages δ_1, δ_2 et δ_{eq} sont petits devant l'unité, nous obtenons :

$$\delta_{\text{eq}} = \sqrt{(\delta_2 - \delta_1)^2 + 4\delta_2\delta_1 \cos^2\theta_1}, \tag{2.99}$$

$$\cos 2\theta_{\text{eq}} = \frac{\delta_2 + \delta_1 \cos 2\theta_1}{\delta_{\text{eq}}}, \tag{2.100}$$

et

$$\Gamma = \frac{2F}{\pi}\frac{\delta_{\text{eq}}}{2}\sin\left(2(\theta_{\text{eq}} - \theta_{\text{P}})\right). \tag{2.101}$$

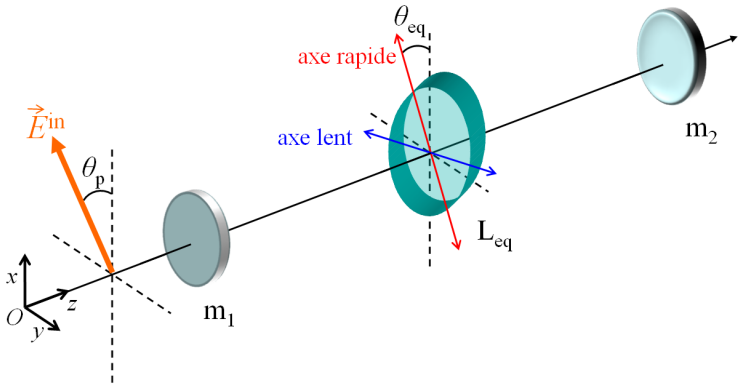


FIGURE 2.14 – Cavité Fabry-Perot modélisée par une lame biréfringente équivalente L_{eq} induisant un déphasage δ_{eq} entre deux composantes perpendiculaires de la polarisation, placée entre deux miroirs non biréfringents m_1 et m_2. L'axe rapide de L_{eq} fait un angle θ_{eq} avec l'axe $O\vec{x}$.

Même en l'absence de champ magnétique, la polarisation de la lumière (initialement linéaire) devient elliptique par réflexion sur les miroirs de la cavité. Il est donc nécessaire de compléter l'expression (2.44) donnant le rapport des intensités en introduisant le paramètre Γ.

Calcul du rapport des intensités extraordinaire et ordinaire

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.2.1, le grand axe de la polarisation elliptique n'est pas aligné avec la polarisation incidente. Il a tourné d'un angle que nous noterons ϵ, et dont nous allons calculer l'expression ici.

Les notations utilisées dans ce paragraphe correspondent à celles de la figure 2.15. Suivant la méthode employée dans la section 2.2.1, nous exprimons l'angle $(\xi - \theta_{\text{eq}})$ entre le grand axe de l'ellipse en sortie de cavité et l'axe rapide de lame

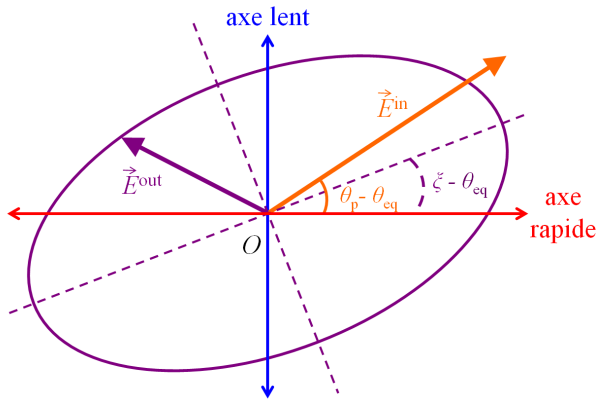


FIGURE 2.15 – En orange : la polarisation linéaire incidente fait un angle $(\theta_{\text{P}} - \theta_{\text{eq}})$ avec l'axe rapide de la lame équivalente à la cavité. En sortie de cavité, il en résulte une polarisation elliptique (représentée en violet), dont le grand axe fait un angle $(\xi - \theta_{\text{eq}})$ avec l'axe rapide.

(voir équation (2.20)) :

$$\tan 2(\xi - \theta_{\text{eq}}) = \tan 2(\theta_{\text{P}} - \theta_{\text{eq}}) \cos \frac{2F}{\pi} \delta_{\text{eq}}. \tag{2.102}$$

Nous verrons dans la suite de cette section que nous réglons expérimentalement $(\theta_{\text{P}} - \theta_{\text{eq}}) \ll 1$. L'équation (2.101) reliant l'ellipticité Γ au déphasage δ_{eq} s'écrit alors :

$$2\Gamma = 2(\theta_{\text{eq}} - \theta_{\text{P}}) \times \frac{2F}{\pi} \delta_{\text{eq}}. \tag{2.103}$$

De même, pour $\frac{2F}{\pi}\delta_{\text{eq}} \ll 1$:

$$2(\xi - \theta_{\text{eq}}) = 2(\theta_{\text{P}} - \theta_{\text{eq}}) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2F}{\pi} \delta_{\text{eq}} \right)^2 \right]. \tag{2.104}$$

A partir des équations (2.103) et (2.104), nous calculons l'angle de rotation de l'ellipse $\epsilon \equiv \xi - \theta_{\text{P}}$ en sortie de cavité :

$$\epsilon \equiv \xi - \theta_{\text{P}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{2F}{\pi} \delta_{\text{eq}}. \tag{2.105}$$

La cavité biréfringente induit donc une ellipticité Γ et une rotation statique d'un angle ϵ sur la polarisation. A partir des équations (2.44), (2.78) et (2.79), nous écrivons l'expression complète du rapport des intensités :

$$\frac{I_{\text{e}}(t)}{I_{\text{t}}(t)} = \sigma^2 + [\epsilon + \Theta_{\text{F}}(t)]^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2. \tag{2.106}$$

Remarque : Cette équation ne tient pas compte de l'angle de rotation de la polarisation associé à l'ellipticité $\Psi(t)$, dont l'expression peut être déduite de l'équation (2.20). En effet, lorsque la polarisation est réglée à $\theta = 45^\circ$ des axes propres de la lame biréfringente, ce qui est le cas lors des mesures d'effet Cotton-Mouton, cet angle est nul. Même en tenant compte de l'incertitude expérimentale sur θ il est négligeable devant ϵ.

Mesure du déphasage par réflexion induit par chaque miroir

Comme nous le voyons dans les équations (2.105) et (2.106), l'ellipticité statique Γ induite par la cavité Fabry-Perot est un paramètre important. Nous avons donc tout naturellement étudié la biréfringence intrinsèque des miroirs de la cavité en commençant par les déphasages δ_1 et δ_2 qu'ils induisent. Pour cela nous avons mesuré l'ellipticité de la polarisation en fonction des angles θ_1 et θ_2, en l'absence de champ magnétique. Le rapport des intensités est alors directement relié à l'ellipticité statique Γ :

$$\frac{I_\mathrm{e}}{I_\mathrm{t}} = \sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2. \tag{2.107}$$

A partir de l'équation (2.105) qui donne l'expression de l'angle ϵ, nous obtenons :

$$\frac{I_\mathrm{e}}{I_\mathrm{t}} = \sigma^2 + \Gamma^2\left[1 + \left(\frac{2F}{\pi}\frac{\delta_\mathrm{eq}}{2}\right)^2\right] \simeq \sigma^2 + \Gamma^2, \tag{2.108}$$

pour $\frac{2F}{\pi}\delta_\mathrm{eq} \ll 1$. La valeur de Γ est donc calculée comme suit :

$$\Gamma^2 = \frac{I_\mathrm{e}}{I_\mathrm{t}} - \sigma^2. \tag{2.109}$$

La valeur de σ^2 a été mesurée au préalable, comme décrit au paragraphe 2.2.3 (équation (2.45)).

Lors d'une première étape nous avons tourné le miroir M_2 sur lui même, le miroir M_1 étant fixé dans sa position initiale. D'après l'équation (2.93), dans l'hypothèse où le déphasage induit par le miroir reste constant lorsqu'on tourne celui-ci, c'est-à-dire que le point d'impact du faisceau sur le miroir ne change pas, l'ellipticité Γ s'écrit :

$$\Gamma = \frac{2F}{\pi}\left[A + \frac{\delta_2}{2}\sin\left(2(\theta_2 - \theta_\mathrm{p})\right)\right], \tag{2.110}$$

où $A = \frac{\delta_1}{2}\sin\left(2(\theta_1 - \theta_\mathrm{p})\right)$ est une constante.

Nous traçons :

$$G = \left(\frac{\Gamma}{2F/\pi}\right)^2 = \left[A + \frac{\delta_2}{2}\sin\left(2(\theta_2 + \theta_{2,0})\right)\right]^2, \tag{2.111}$$

en fonction de θ_2. A, δ_2 et $\theta_{2,0}$ sont les paramètres à déterminer par l'ajustement. Les points expérimentaux, ainsi que leur ajustement par l'équation (2.111), sont présentés sur la figure 2.16. Nous obtenons :

$$A = (2.89 \pm 0.08) \times 10^{-7}, \tag{2.112}$$

$$\theta_{2,0} = (-1.748 \pm 0.008) \text{ rad}, \tag{2.113}$$

$$\delta_2 = (7.5 \pm 0.2) \times 10^{-7} \text{ rad}. \tag{2.114}$$

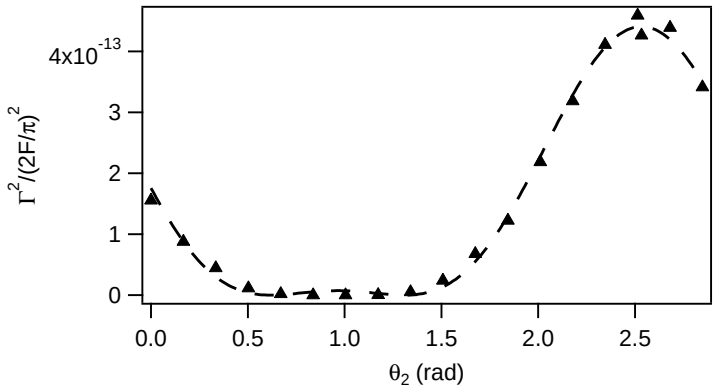


FIGURE 2.16 – Évolution de $\Gamma^2/(2F/\pi)^2$ en fonction de l'orientation du miroir M_2. Les points expérimentaux sont représentés par des triangles noirs. La courbe d'ajustement par l'équation (2.111) est superposée en pointillés.

Le miroir M_2 est ensuite fixé à la position pour laquelle Γ^2 est maximal, soit $\theta_2 + \theta_{2,0} = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. Le miroir M_1 est tourné sur lui même. Dans ce cas :

$$\Gamma = \frac{2F}{\pi}\left[\frac{\delta_1}{2}\sin\left(2(\theta_1 - \theta_\mathrm{p})\right) + \frac{\delta_2}{2}\right], \tag{2.115}$$

et nous traçons et ajustons G en fonction de θ_1 suivant l'équation :

$$G = \left(\frac{\Gamma}{2F/\pi}\right)^2 = \left[\frac{\delta_1}{2}\sin\left(2(\theta_1 + \theta_{1,0})\right) + \frac{\delta_2}{2}\right]^2. \tag{2.116}$$

Dans un premier temps nous fixons la valeur de δ_2 à la valeur obtenue précédemment (équation (2.114)). Les points expérimentaux et leur ajustement sont présentés

sur la figure 2.17. Nous obtenons :

$$\theta_{1,0} = (0.57 \pm 0.01) \text{ rad}, \tag{2.117}$$

$$\delta_1 = (6.5 \pm 0.1) \times 10^{-7} \text{ rad}. \tag{2.118}$$

Notons que d'après les équations (2.111) et (2.116) nous devons avoir $A = \frac{\delta_1}{2} \sin(\theta_{1,0})$.

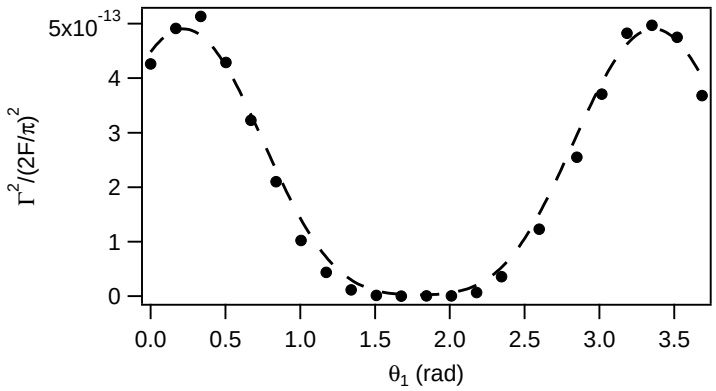


FIGURE 2.17 – Évolution de $\Gamma^2/(2F/\pi)^2$ en fonction de l'orientation du miroir M_1. Les points expérimentaux sont représentés par des ronds noirs. La courbe d'ajustement (en pointillés) par l'équation (2.116) est superposée, le paramètre δ_2 étant fixé à la valeur de l'équation (2.114).

Cela est confirmé par le calcul :

$$A = (2.89 \pm 0.08) \times 10^{-7}, \tag{2.119}$$

$$\delta_1 \sin(2\theta_{1,0}) = (2.95 \pm 0.05) \times 10^{-7}. \tag{2.120}$$

Dans un second temps nous laissons libre le paramètre δ_2 lors de l'ajustement des données expérimentales. Nous obtenons :

$$\theta_{1,0} = (0.558 \pm 0.007) \text{ rad}, \tag{2.121}$$

$$\delta_1 = (7.6 \pm 0.2) \times 10^{-7} \text{ rad}, \tag{2.122}$$

$$\delta_2 = (6.5 \pm 0.2) \times 10^{-7} \text{ rad}. \tag{2.123}$$

Ce dernier ajustement présente un meilleur χ^2 que le précédent. Nous en concluons que le déphasage induit par chaque miroir est compris entre environ 6×10^{-7} rad et 8×10^{-7} rad. Le déphasage par réflexion est donc de l'ordre de $2 \times 7 \times 10^{-7} = 1.4 \times 10^{-6}$ rad. Cette grandeur a été insérée dans les données rassemblées par Bielsa *et al.* [91]. Elle correspond au rond noir sur la figure 2.18. Les données issues de cet article sont représentées par des ronds blancs. Les ronds gris correspondent à

d'autres mesures expérimentales rapportées dans les articles [107–110] et dans la thèse [111]. Le déphasage mesuré avec les miroirs de haute finesse de l'expérience BMV suit la même tendance que les autres données expérimentales : le déphasage par réflexion δ diminue lorsque la réflectivité du miroir augmente. Cette tendance est encore inexpliquée. Elle est cependant en bon accord avec avec la modélisation proposée par les auteurs de la référence [91], représentée par la ligne pointillée. Celle-ci calcule le déphasage δ par réflexion en considérant que seule la couche interférentielle la plus proche du substrat est biréfringente, ce qui induit que δ diminue quand la réflectivité du miroir augmente.

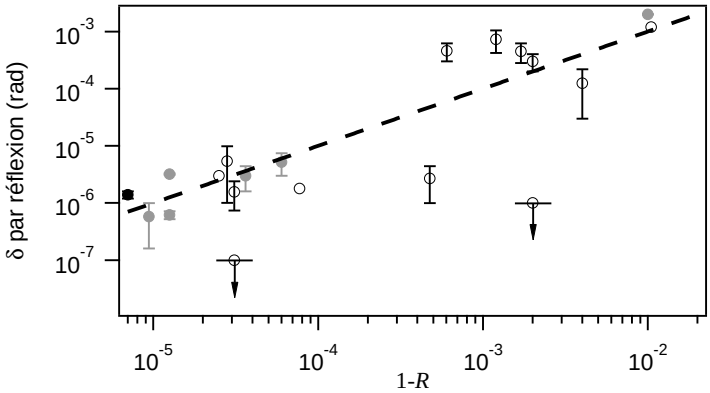


FIGURE 2.18 – Valeurs expérimentales du déphasage par réflexion induit par des miroirs biréfringents en fonction de $(1 - R)$, où R est la réflectivité en intensité des miroirs. Les ronds blancs correspondent aux données rassemblées dans la référence [91]. Les ronds gris correspondent aux mesures rapportées dans les articles [107–110] et dans la thèse [111]. Le rond noir correspond au déphasage mesuré pour les miroirs utilisés sur l'expérience BMV, avec une finesse de l'ordre de 480000. Ce point est en bon accord avec la modélisation (ligne pointillée) proposée dans la référence [91] qui ne prend en compte que la biréfringence de la couche interférentielle la plus proche du substrat.

A partir des valeurs de δ_1 et δ_2 nous pouvons estimer la valeur du déphasage induit par la lame équivalente à la cavité :

$$1 \times 10^{-7} < |\delta_{\text{eq}}| = \sqrt{(\delta_2 - \delta_1)^2 + 4\delta_1\delta_2 \cos^2(\theta_1)} < 1.4 \times 10^{-6} \text{ rad.} \qquad (2.124)$$

Évolution de la sensibilité en ellipticité en fonction de Γ

D'après l'équation (2.93), la valeur de l'ellipticité statique Γ dépend des angles θ_1 et θ_2 que font les axes des lames avec la polarisation linéaire incidente. Il est donc possible de régler la valeur de Γ en orientant les miroirs M_1 et M_2 par rapport à

la polarisation incidente. Afin de connaître la valeur de Γ qui nous permettra de réaliser des mesures dans les meilleures conditions possibles, nous allons maintenant nous intéresser à l'évolution de la sensibilité en ellipticité de l'expérience en fonction de ce paramètre. En l'absence d'effet Faraday, ce qui est le cas dans le vide, et pour des ellipticités Ψ petites devant 1 et Γ, l'intensité extraordinaire est donnée par (voir les équations (2.106) et (2.108)) :

$$I_{\mathrm{e}} \simeq I_{\mathrm{t}}(\sigma^2 + \Gamma^2) + 2\Gamma\Psi I_{\mathrm{t}} = I_{\mathrm{dc}} + 2\Gamma\Psi I_{\mathrm{t}}. \tag{2.125}$$

Dans cette équation $I_{\mathrm{dc}} = I_{\mathrm{t}}(\sigma^2 + \Gamma^2)$ est le fond continu, et $2\Gamma\Psi I_{\mathrm{t}}$ représente le signal utile qui nous permettra de calculer Ψ.

Considérons tout d'abord que la sensibilité optique est limitée par le bruit de grenaille (shot-noise), c'est-à-dire le bruit quantique de détection des photons. Celui-ci est dû à l'intensité du fond continu I_{dc}, mesurée par la photodiode $\mathrm{Ph_e}$. I_{dc} s'exprime en fonction du nombre de photons N d'énergie $h\nu$ arrivant par seconde sur la photodiode :

$$I_{\mathrm{dc}} = \eta N h\nu, \tag{2.126}$$

où η est l'efficacité quantique du photorécepteur, qui correspond au nombre d'électrons générés par nombre de photons incidents. Le nombre de photons N suit une distribution de Poisson. Il est caractérisé par un bruit de comptage $\sigma_N = \sqrt{N}$. Le bruit du signal continu est donc :

$$I_{\mathrm{dc,bruit}} = \sqrt{\eta N} h\nu = \sqrt{\eta I_{\mathrm{dc}} h\nu} = \sqrt{\eta I_{\mathrm{t}}(\sigma^2 + \Gamma^2) h\nu}. \tag{2.127}$$

Elle s'exprime en $\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Le signal utile mesuré est quant à lui donné par :

$$I_{\mathrm{signal}} = \eta \times 2\Gamma\Psi I_{\mathrm{t}}. \tag{2.128}$$

Le rapport signal sur bruit au shot-noise, noté $SNR_{\text{s-n}}$, est donc [70] :

$$SNR_{\text{s-n}} = \frac{I_{\mathrm{signal}}}{I_{\mathrm{dc,bruit}}} = \sqrt{\frac{4 I_{\mathrm{t}} \Psi^2 \eta}{h\nu} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \sigma^2}}. \tag{2.129}$$

Il est maximal lorsque $\Gamma^2 \gg \sigma^2$, comme le montre la figure 2.19 où il a été tracé en fonction de Γ^2/σ^2.

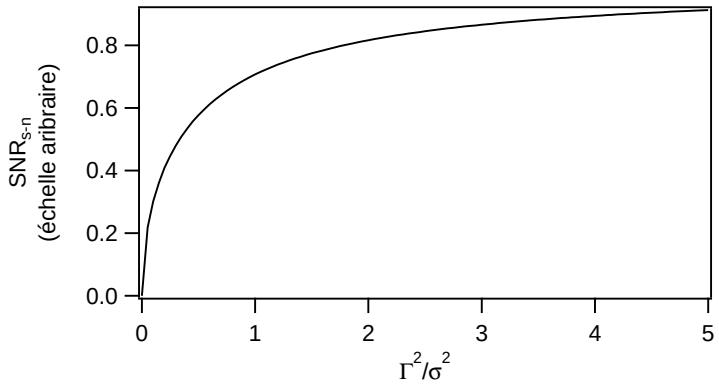


FIGURE 2.19 – Évolution du rapport signal sur bruit attendu en fonction de Γ^2/σ^2 lorsque la sensibilité est limitée par le bruit de grenaille.

La densité spectrale de puissance [7] de l'intensité extraordinaire est représentée en trait plein gris sur la figure 2.20, pour une ellipticité statique $\Gamma^2 \sim 100 \times \sigma^2$. La limite du shot-noise est figurée en pointillés. Clairement, dans ce cas, le bruit d'intensité n'est pas dominé par le bruit de grenaille. Nous avons constaté expérimentalement que, pour $\Gamma^2 \gg \sigma^2$, le bruit sur l'intensité extraordinaire est proportionnel à Γ^2. Nous le modélisons donc par [70] :

$$I_{\text{bruit}} = \gamma_{\text{fluc}}(f) \times \eta I_{\text{t}}(\Gamma^2 + \sigma^2), \tag{2.130}$$

où $\gamma_{\text{fluc}}(f)$ est un coefficient qui permet d'apparenter notre bruit à un bruit dû principalement à des fluctuations de l'ellipticité statique Γ. Comme nous le voyons sur la figure 2.20, ce coefficient augmente quand la fréquence f du signal diminue, d'où l'intérêt de moduler les signaux à une fréquence suffisamment élevée. Néanmoins, la cavité Fabry-Perot filtre l'effet du champ magnétique. Sa fréquence de coupure est de l'ordre de 70 Hz. Le meilleur compromis pour la fréquence de modulation du champ magnétique est donc de quelques dizaines de Hertz. En pratique, le champ utilisé pour les mesures d'effet Faraday est modulé sinusoïdalement à 18 Hz. La composante fréquentielle principale du champ pulsé appliqué pour les mesure d'effet Cotton-Mouton est de l'ordre de 125 Hz.

A partir des équations (2.128) et (2.130), nous écrivons le rapport signal sur bruit :

$$\begin{aligned} SNR_{\text{fluc}} &= \frac{2 I_{\text{t}} \Gamma \Psi}{\gamma_{\text{fluc}} I_{\text{t}} (\Gamma^2 + \sigma^2)}, \\ &= \frac{2\Psi}{\gamma_{\text{fluc}}} \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \sigma^2}. \end{aligned} \tag{2.131}$$

7. La racine carrée de la densité spectrale de puissance de bruit est appelée densité spectrale de puissance par abus de langage.

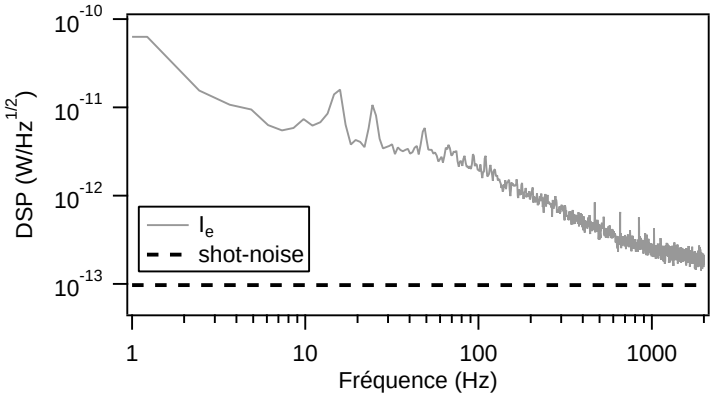


FIGURE 2.20 – Densité spectrale de puissance de l'intensité extraordinaire I_e, avec $\Gamma^2 \sim 100 \times \sigma^2$. La limite shot-noise est représentée en pointillés.

Son évolution en fonction de Γ^2/σ^2 a été tracée sur la figure 2.21. Pour $\Gamma^2 > \sigma^2$, le rapport signal sur bruit augmente quand Γ diminue. Cela a été confirmé expérimentalement au cours de la thèse de Paul Berceau par des mesures de la sensibilité en ellipticité en fonction de Γ [72]. Un maximum est atteint pour $\Gamma^2 = \sigma^2$. Dans cette configuration, le rapport signal sur bruit est de :

$$SNR_{\text{fluc}}, (\Gamma^2 = \sigma^2) = \frac{\Psi}{\gamma_{\text{fluc}}\Gamma}. \tag{2.132}$$

Nous pouvons augmenter sa valeur en diminuant l'ellipticité statique Γ, tout en gardant $\Gamma^2 = \sigma^2$.

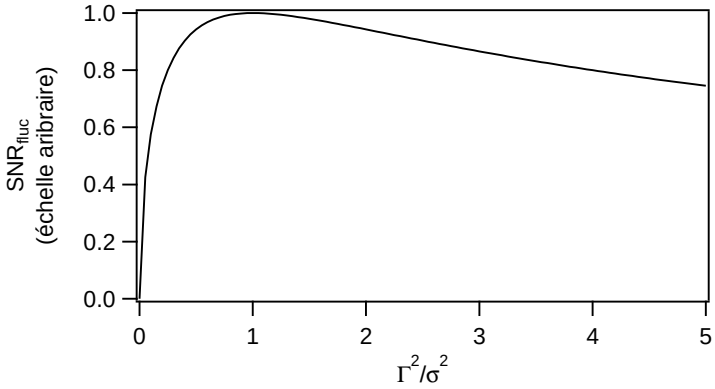


FIGURE 2.21 – Évolution du rapport signal sur bruit attendu en fonction de Γ^2/σ^2 lorsque la sensibilité est limitée par les fluctuations de l'ellipticité statique Γ.

Pour obtenir la meilleure sensibilité il faut donc être capable de maîtriser la valeur de la biréfringence statique de la cavité pour régler l'ellipticité Γ^2 de l'ordre de σ^2. Pour cela, nous avons développé une procédure de positionnement des miroirs M_1 et M_2 que nous allons décrire. Nous avons également intérêt à avoir Γ, et donc

σ^2, aussi faibles que possible pour augmenter le rapport signal sur bruit donné par l'équation (2.132).

Positionnement des miroirs pour les mesures de biréfringence

L'objectif est, dans un premier temps, d'avoir l'ellipticité statique Γ la plus faible possible. Cela revient à avoir une lame équivalente de déphasage δ_{eq} le plus petit possible, et dont les axes neutres sont alignés avec la polarisation incidente. Pour cela nous procédons comme suit :

- Nous tournons le miroir M_2, M_1 étant fixe, afin de maximiser la valeur de Γ^2. Cela revient à placer les axes neutres M_2 à 45° de la polarisation linéaire incidente.
- Une fois M_2 fixé à cette position, nous tournons le miroir M_1 afin de maximiser la valeur de Γ^2. Cela revient à placer les axes neutres M_1 à 45° de la polarisation linéaire incidente, l'axe rapide de M_1 étant superposé à l'axe rapide de M_2.
- Nous tournons ensuite le miroir M_1 de 45° dans un sens, et le miroir M_2 de 45° dans le sens contraire.

Nous avons finalement aligné les axes neutres des miroirs avec la polarisation incidente et l'axe rapide du miroir M_1 avec l'axe lent de M_2. La configuration obtenue correspond, en suivant les notations de la figure 2.13, à :

$$\theta_{\mathrm{P}} = 0 \text{ rad } ; \ \theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad et } \theta_2 = 0 \text{ rad}, \tag{2.133}$$

ou

$$\theta_{\mathrm{P}} = 0 \text{ rad } ; \ \theta_1 = 0 \text{ rad et } \theta_2 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}. \tag{2.134}$$

La lame équivalente a maintenant comme caractéristiques :

$$|\delta_{\mathrm{eq}}| = |\delta_2 - \delta_1| \ ; \ \theta_{\mathrm{eq}} = \{0, \frac{\pi}{2}\} \text{ rad}, \tag{2.135}$$

soit $\Gamma = 0$ suivant l'équation (2.101). On tourne ensuite le miroir M_1 sur lui même de façon à obtenir $\Gamma^2 = \sigma^2$ comme recherché.

Choix du signe de Γ

Considérons le cas où nous souhaitons réaliser une mesure d'effet Cotton-Mouton. Comme nous l'avons vu dans l'équation (2.125), le signe du signal utile $2\Gamma\Psi I_{\mathrm{t}}$, qui nous permettra de remonter à l'ellipticité Ψ, dépend du signe de Γ. A partir de

l'équation (2.93), avec $\theta_{\mathrm{P}} = 0$, et $\theta_2 = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ rad, Γ s'écrit :

$$\Gamma = \frac{2F}{\pi}\frac{\delta_1}{2}\sin 2\theta_1. \tag{2.136}$$

Son signe dépend du signe de $\sin 2\theta_1$, c'est-à-dire du sens dans lequel on tourne le miroir M_1. Suivant les équations (2.133) et (2.134), nous avons $\theta_1 = 0$ ou $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ rad. Le signe de Γ de part et d'autre de son minimum n'est pas connu de façon absolue à partir de l'équation (2.136). Nous discuterons dans le chapitre 4 de la manière dont il est déterminé.

Avec cette méthode, nous maîtrisons donc parfaitement l'ellipticité statique Γ induite par la cavité biréfringente. En partant d'un réglage où $\Gamma = 0$, nous sommes capables, en tournant le miroir M_1 sur lui-même, de fixer la valeur absolue et le signe de Γ. Cette procédure est délicate car elle doit être exécutée tout en maintenant l'asservissement de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité. Elle est utilisée pour réaliser des mesures très sensibles d'ellipticité Ψ, comme il sera détaillé dans le paragraphe 4.

Filtrage de la cavité

Le rapport des intensités extraordinaire et ordinaire a été déterminé en tenant compte de la biréfringence statique de la cavité et des termes de rotation et d'ellipticité de la polarisation dus au champ magnétique. Il est donné par l'équation (2.106) rappelée ici :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t}}(t)} = \sigma^2 + [\epsilon + \Theta_{\mathrm{F}}(t)]^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2. \tag{2.137}$$

Nous allons maintenant voir que cette expression doit être ajustée pour tenir compte de l'effet de filtrage de la cavité Fabry-Perot.

La décroissance exponentielle de l'intensité ordinaire transmise après coupure du faisceau laser, observée sur la figure 2.12, est caractéristique de la réponse à un échelon descendant d'un filtre passe bas du premier ordre, dont la fonction de transfert est donnée par :

$$H_1(\nu_{\mathrm{m}}) = \frac{1}{1 + i\frac{\nu_{\mathrm{m}}}{\nu_{\mathrm{c}}}}, \tag{2.138}$$

où ν_{m} est la fréquence de modulation de l'intensité incidente sur la cavité. La cavité Fabry-Perot est donc équivalente à un tel filtre pour l'intensité I_{t}. La fréquence de

coupure ν_c est donnée par [72] :

$$\nu_c = \frac{c}{4L_cF} = \frac{1}{4\pi\tau} = \frac{\Delta\nu}{2}. \tag{2.139}$$

La réponse de l'intensité extraordinaire à une coupure brutale de l'intensité injectée dans la cavité ne suit pas la même loi que celle de I_t. La figure 2.22 présente les courbes de décroissance des intensités I_t et I_e [8].

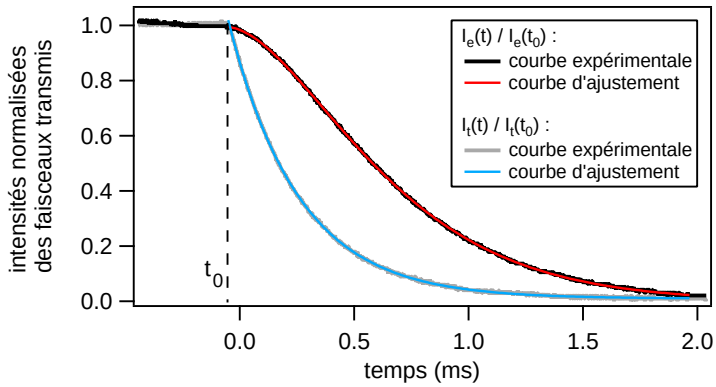


FIGURE 2.22 – Évolution temporelle des intensités I_e et I_t après coupure du faisceau incident à l'instant t_0. Elles ont été normalisées par leur valeur pour $t < t_0$. L'intensité ordinaire (courbe grise) est ajustée par une décroissance exponentielle (courbe bleue) donnée par l'équation (2.90). L'intensité extraordinaire (courbe noire) subit une décroissance plus lente. Elle est ajustée par la réponse temporelle d'un filtre passe bas du deuxième ordre à un échelon descendant, donnée par l'équation (2.141). La courbe d'ajustement (en rouge) se superpose parfaitement aux points expérimentaux.

La décroissance de I_e est plus lente que celle de I_t. Ce phénomène est expliqué par la biréfringence statique de la cavité qui alimente l'intensité du faisceau extraordinaire. I_e est donc filtrée deux fois par le filtre passe bas d'ordre un de la cavité : une fois lorsque le faisceau laser est injecté dans la cavité (filtrage subit par I_t) et une autre fois lors de l'accumulation de l'ellipticité au cours des réflexions successives de la lumière sur les miroirs biréfringents. La fonction de transfert décrivant cet effet est donc :

$$H_2(\nu_m) = H_1(\nu_m) \times H_1(\nu_m) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\nu_m}{\nu_c}\right)^2 + i\frac{2\nu_m}{\nu_c}}. \tag{2.140}$$

Cette fonction correspond à un filtre passe bas d'ordre deux, dont la réponse à un

8. Ces courbes ont été enregistrées au cours de la thèse de Paul Berceau [72] avec des miroirs de marque *Layertek* de finesse environ 100000.

échelon descendant est :

$$I_{\mathrm{e}}(t) = I_{\mathrm{e}}(t_0)\left(1 + \frac{t - t_0}{2\tau}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}. \tag{2.141}$$

Les points expérimentaux de la décroissance de I_{e} sont parfaitement ajustés par cette équation, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.22.

L'intensité extraordinaire subit, dans la cavité, un filtrage de plus que l'intensité ordinaire. Afin de pouvoir analyser leur rapport il est donc nécessaire d'appliquer un deuxième filtre sur I_{t}. Cela est fait numériquement sur le signal mesuré par la photodiode $\mathrm{Ph_t}$ à partir de la fonction de transfert donnée par l'équation (2.138) et de la fréquence de coupure de la cavité (équation (2.139)). L'expression (2.137) donnant le rapport des intensités devient donc :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + [\epsilon + \Theta_{\mathrm{F}}(t)]^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2, \tag{2.142}$$

où $I_{\mathrm{t,f}}$ est l'intensité ordinaire filtrée numériquement.

Nous avons vu dans cette section que l'utilisation d'une cavité Fabry-Perot sur l'expérience permet d'accumuler l'effet du champ magnétique, et donc d'augmenter les signaux d'ellipticité et de rotation de la polarisation que nous cherchons à mesurer. Elle impose cependant l'emploi d'un dispositif complémentaire : un système d'asservissement en fréquence, que nous allons décrire maintenant.

2.4 Le système d'asservissement

Pour que l'onde lumineuse puisse résonner dans la cavité Fabry-Perot, la condition de résonance donnant la fréquence ν de l'onde en fonction de la longueur L_{c} de la cavité doit être satisfaite :

$$\nu = q\frac{c}{2L_{\mathrm{c}}}, \tag{2.143}$$

où q est un entier. Pour satisfaire cette condition au cours du temps, nous utilisons un système d'asservissement. Celui-ci fixe la fréquence du faisceau lumineux sur une fréquence de résonance de la cavité Fabry-Perot. Pour cela, nous utilisons la méthode de Pound-Drever-Hall dont le principe est de produire un signal d'erreur $\varepsilon_{\mathrm{PDH}}$ proportionnel à l'écart $\delta\nu$ entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance.

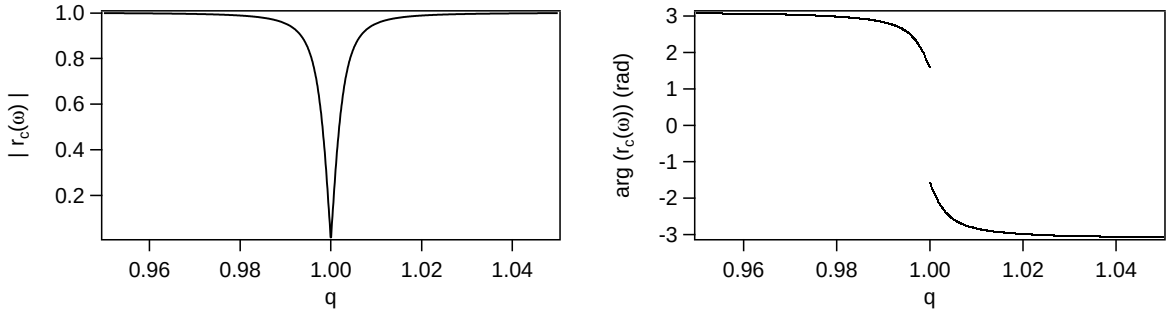
2.4.1 Asservissement par la méthode de Pound-Drever-Hall

Cette méthode a été développée en 1946 par R. V. Pound dans le but de stabiliser un oscillateur micro-ondes [112] puis a été étendue au domaine de l'optique par R. W. Drever et J. L. Hall au début des années 1980 [113]. Nous allons consacrer ce paragraphe au calcul du signal d'erreur $\varepsilon_{\mathrm{PDH}}$ produit par l'asservissement. Nous nous basons pour cela sur l'article de E. D. Black [114].

L'idée est d'utiliser le faisceau réfléchi par la cavité pour calculer l'écart entre la fréquence de résonance de la cavité et la fréquence du laser. Celui-ci est la somme de deux faisceaux : le faisceau réfléchi par le premier miroir M_1 et qui n'a pas pénétré dans la cavité et le faisceau issu de l'intensité intra-cavité transmise par M_1. Le coefficient de réflexion en amplitude de la cavité est donné par l'équation (2.58), rappelée ici :

$$r_{\mathrm{c}}(\omega) \;=\; -r_1 + \frac{t_1' t_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}, \tag{2.144}$$

Son module et sa phase sont représentés sur la figure 2.23 en fonction de la fréquence (en nombre d'intervalles spectraux libres). Contrairement au module qui est symétrique par rapport à la résonance, le signe de la phase change au passage de la résonance. En mesurant la phase du faisceau réfléchi, nous sommes donc capables de savoir de quel côté de la résonance se situe la fréquence du faisceau laser.



(a) Module (b) Phase

FIGURE 2.23 – Coefficient de réflexion en amplitude de la cavité Fabry-Perot en fonction de la fréquence exprimée en nombre q d'intervalles spectraux libres. Nous avons supposé que les deux miroirs M_1 et M_2 sont identiques, que les pertes sont nulles, et utilisé une réflectivité en amplitude $r = 0.99$.

La méthode de Pound-Drever-Hall est un moyen indirect de mesurer la phase du faisceau réfléchi. Pour ce faire, la phase du faisceau incident est modulée grâce à un modulateur électro-optique (EOM) résonant. Celui-ci est constitué d'un cristal de

MgO :$LiNbO_3$, qui, lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel, agit comme une lame à retard de phase (effet Pockels). Si l'on applique une différence de potentiel $V_1(t) = v_1 \sin \Omega t$ au modulateur électro-optique, la phase appliquée sur le faisceau laser est $\beta \sin \Omega t$. β est la profondeur de modulation. Elle est reliée à la tension de demi-onde V_π du modulateur qui est la différence de potentiel à appliquer à ses bornes pour obtenir un déphasage de π, soit :

$$\beta = \pi \frac{v_1}{V_\pi}. \tag{2.145}$$

Une attention toute particulière doit être portée à l'alignement de la polarisation incidente sur les axes neutres du modulateur électro-optique. En effet, un mauvais alignement entraîne une modulation résiduelle de l'amplitude de l'onde (RAM), qui décale le signal d'erreur de Pound-Drever-Hall [72]. Cela a pour conséquence que la fréquence du laser n'est pas asservie au sommet du pic de résonance mais sur l'un des côtés. Pour éviter cet effet, un polariseur et une lame demi-onde, placés devant le modulateur électro-optique, permettent un alignement précis de la polarisation sur ses axes neutres. Nous considérerons donc ici qu'il n'y a pas de modulation résiduelle d'amplitude, mais seulement une modulation de la phase du faisceau incident.

Après passage par le modulateur électro-optique, le champ électrique de l'onde incidente sur la cavité s'écrit :

$$E_\mathrm{i}(t) = E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)}. \tag{2.146}$$

La fréquence de modulation $\Omega/2\pi$ est choisie de telle sorte qu'elle soit plus grande que la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu \sim 100$ Hz du pic de résonance, et plus petite que l'intervalle spectral libre de la cavité $\Delta^{\mathrm{ISL}} \simeq 66$ MHz. Nous avons : $\Omega/2\pi = 10.1$ MHz.

Le champ incident peut s'écrire avec les fonctions de Bessel J_n d'ordre n comme suit [115] :

$$E_\mathrm{i}(t) = E_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \mathrm{e}^{in\Omega t}. \tag{2.147}$$

En pratique l'indice de modulation β est de l'ordre de 1, donc seules les fonctions de Bessel d'ordre 0 et ± 1 sont à prendre en compte. Sachant que $J_{-1}(\beta) = -J_1(\beta)$ [115], nous obtenons :

$$E_\mathrm{i}(t) = E_0 \big[J_0(\beta) \mathrm{e}^{i\omega t} + J_1(\beta) \mathrm{e}^{i(\omega+\Omega)t} - J_1(\beta) \mathrm{e}^{i(\omega-\Omega)t} \big]. \tag{2.148}$$

Le faisceau incident possède donc trois composantes fréquentielles :

– une porteuse, de pulsation ω et d'intensité $I_\mathrm{p} = J_0^2(\beta)|E_0|^2 = J_0^2(\beta) I_0$,

– deux bandes latérales, de pulsations $\omega + \Omega$ et $\omega - \Omega$, et d'intensité $I_{\mathrm{bl}} = J_1^2(\beta)|E_0|^2$ chacune.

Pour $\beta \simeq 1$, nous considérerons que l'intensité lumineuse est répartie entre la porteuse et les bandes latérales, d'où :

$$I_0 = I_{\mathrm{p}} + 2I_{\mathrm{bl}}. \tag{2.149}$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie par la cavité s'écrit en multipliant chaque composante fréquentielle du champ incident par le coefficient de réflexion en amplitude r_{c}, pris à la fréquence appropriée :

$$E_{\mathrm{r}}(t) = E_0\big[r_{\mathrm{c}}(\omega)J_0(\beta)\mathrm{e}^{i\omega t} + r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega)J_1(\beta)\mathrm{e}^{i(\omega+\Omega)t} - r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)J_1(\beta)\mathrm{e}^{i(\omega-\Omega)t}\big]. \tag{2.150}$$

L'intensité réfléchie est donc [9] :

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{r}}(t) &= |E_{\mathrm{r}}(t)|^2, && (2.151)\\ &= I_{\mathrm{p}}|r_{\mathrm{c}}(\omega)|^2 + I_{\mathrm{bl}}\big[|r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega)|^2 + |r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)|^2\big] \\ &\quad + 2\sqrt{I_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{bl}}}\big[\mathfrak{Re}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\}\cos\Omega t \\ &\qquad\qquad + \mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\}\sin\Omega t\big] \\ &\quad + \mathcal{O}(2\Omega). && (2.152) \end{aligned}$$

Elle est mesurée par la photodiode $\mathrm{Ph_r}$ (voir le schéma général du dispositif expérimental, figure 2.4). Les termes qui oscillent à la pulsation Ω sont issus du battement entre la porteuse et les bandes latérales. Ils contiennent l'information concernant la phase de la porteuse réfléchie.

Le signal électrique V_{r} aux bornes de la photodiode en réflexion est :

$$V_{\mathrm{r}}(t) = f_{\mathrm{r}} \times I_{\mathrm{r}}(t), \tag{2.153}$$

où f_{r} est le facteur de conversion en V/W de la photodiode. Il est multiplié via un mixeur de gain g_{m} à un signal $V_2(t) = v_2 \sin(\Omega t + \varphi_2)$. φ_2 est un paramètre que l'on ajuste expérimentalement de façon à compenser les retards accumulés lors de la propagation des signaux dans les câbles. Ainsi les deux signaux arrivant aux entrées du mixeur sont en phase. Ici nous traitons des signaux théoriques donc $\varphi_2 = 0$. Après avoir isolé la composante continue du signal en sortie du mixeur, nous obtenons le

9. Le calcul donnant cette intensité est détaillé dans l'annexe B.

signal d'erreur de Pound-Drever-Hall :

$$\varepsilon_{\mathrm{PDH}} = g_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{r}} \times 2\sqrt{I_{\mathrm{p}} I_{\mathrm{bl}}}\,\mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega) r_{\mathrm{c}}^{*}(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^{*}(\omega) r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\}. \tag{2.154}$$

Dans cette expression, le facteur $\frac{1}{2}$ issu du développement de $\sin^2 \Omega t$ est compris dans le gain du mixeur g_{m}. Un schéma de principe de la production d'un signal d'erreur par la méthode de Pound-Drever-Hall est donné sur la figure 2.24. Le signal d'erreur

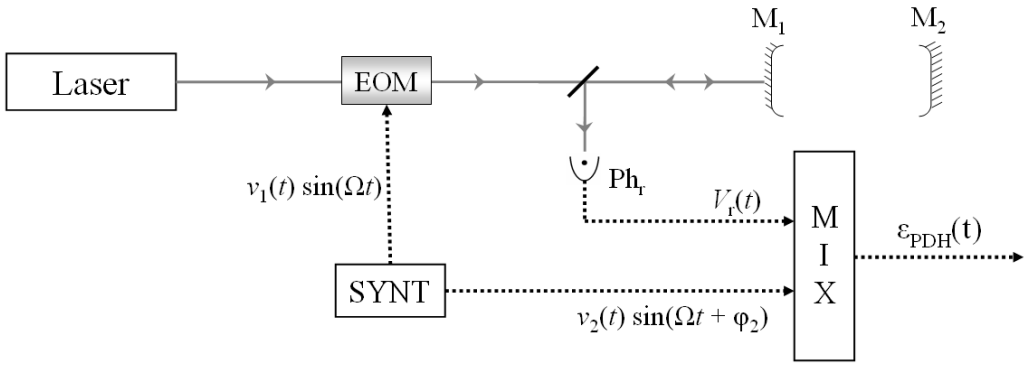


FIGURE 2.24 – Schéma de principe de la production d'un signal d'erreur par la méthode de Pound-Drever-Hall. Un synthétiseur (SYNT) applique une tension sinusoïdale de pulsation Ω aux bornes d'un modulateur électro-optique (EOM). Par effet Pockels, la phase du faisceau laser traversant l'EOM est modulée. L'intensité réfléchie par le miroir d'entrée de la cavité est collectée par la photodiode $\mathrm{Ph_r}$. Ce signal est multiplié via un mixeur (MIX) à un signal sinusoïdal de pulsation Ω, pour obtenir le signal d'erreur $\varepsilon_{\mathrm{PDH}}$.

normalisé $\underline{\varepsilon}_{\mathrm{PDH}} = \varepsilon_{\mathrm{PDH}}/2 g_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{r}} \sqrt{I_{\mathrm{p}} I_{\mathrm{bl}}}$ a été tracé sur la figure 2.25 en fonction du désaccord $\delta\nu$ entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance de la cavité, pour $\Omega = 2\pi \times 10.1$ MHz

En pratique, avec $\Omega = 2\pi \times 10.1$ MHz, les bandes latérales sont loin de la résonance. Elles sont donc totalement réfléchies par le miroir d'entrée de la cavité, soit $r_{\mathrm{c}}(\omega \pm \Omega) \simeq -1$. Dans ce cas :

$$r_{\mathrm{c}}(\omega) r_{\mathrm{c}}^{*}(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^{*}(\omega) r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega) \simeq -\big(r_{\mathrm{c}}(\omega) - r_{\mathrm{c}}^{*}(\omega)\big) \simeq -2i\,\mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)\}. \tag{2.155}$$

L'équation (2.154) devient donc :

$$\varepsilon_{\mathrm{PDH}} = -4 g_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{r}} \sqrt{I_{\mathrm{p}} I_{\mathrm{bl}}}\,\mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)\}. \tag{2.156}$$

Calculons le terme $\mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)\}$ pour une pulsation $\omega = 2\pi \times q\Delta^{\mathrm{ISL}} + \delta\omega$ proche de la

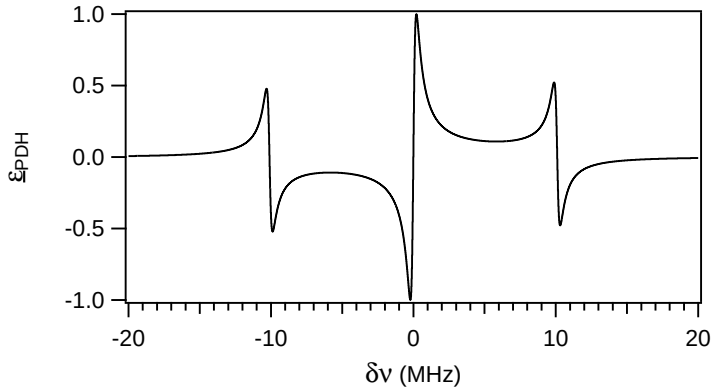


FIGURE 2.25 – Signal d'erreur de Pound-Drever-Hall normalisé $\underline{\varepsilon}_{\mathrm{PDH}} = \varepsilon_{\mathrm{PDH}}/2g_{\mathrm{m}}f_{\mathrm{r}}\sqrt{I_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{bl}}}$ en fonction du désaccord $\delta\nu$ entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance de la cavité. Pour réaliser cette courbe, les miroirs ont été supposés identiques et sans pertes. Le coefficient de réflexion en amplitude est $r = 0.99$, et la fréquence de modulation $\Omega = 2\pi \times 10.1$ MHz.

résonance. Le coefficient de réflexion en amplitude devient :

$$r_{\mathrm{c}}(\omega) = -r_1 + \frac{t_1' t_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\delta\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\delta\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}. \tag{2.157}$$

Après quelques calculs développés dans l'annexe C, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)\} &= -\frac{t_1' t_1 r_2}{(1-r_1r_2)^2 + \left(r_1 r_2 \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2} \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}, & (2.158)\\ &= -\frac{t_1' t_1 r_2}{(1-r_1r_2)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{r_1 r_2}{1-r_1 r_2}\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2} \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}. & (2.159) \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.56) qui relie la finesse de la cavité aux réflectivité r_1 et r_2, cette expression devient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)\} &= -\frac{t_1' t_1 r_2}{(1-r_1r_2)^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{r_1 r_2}F}{\pi}\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2} \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}, & (2.160)\\ &= -\frac{t_1' t_1 r_2}{(1-r_1r_2)^2} \frac{1}{1 + \left(\sqrt{r_1 r_2}\frac{2\delta\nu}{\Delta\nu}\right)^2} \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}. & (2.161) \end{aligned}$$

Près de la résonance, $\delta\nu = \frac{\delta\omega}{2\pi} \ll \frac{\Delta\nu}{2}$, donc :

$$\mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)\} = -\frac{t_1' t_1 r_2}{(1-r_1r_2)^2} \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}, \tag{2.162}$$

d'où :

$$\varepsilon_{\mathrm{PDH}} = 4 g_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{r}} \sqrt{I_{\mathrm{p}} I_{\mathrm{bl}}} \frac{t_1' t_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{2\pi}{\Delta^{\mathrm{ISL}}} \delta\nu. \tag{2.163}$$

Au voisinage de la résonance, le signal d'erreur de Pound-Drever-Hall est donc, à chaque instant t, directement proportionnel au désaccord de fréquence $\delta\nu(t)$. Nous notons :

$$\varepsilon_{\mathrm{PDH}}(t) = D g_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{r}} \delta\nu(t), \tag{2.164}$$

où D, exprimé en W/Hz, est appelé discriminant. Considérons que les deux miroirs M_1 et M_2 sont identiques, de réflectivité et transmittivité en amplitude r et t. En utilisant les équations (2.53) et (2.56) qui donnent la transmission à résonance T_{c} et l'intervalle spectral libre Δ^{ISL} de la cavité, le discriminant s'écrit :

$$D = 8 \sqrt{I_{\mathrm{p}} I_{\mathrm{bl}}} \sqrt{T_{\mathrm{c}}} \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{2.165}$$

Plus celui-ci est important, plus la sensibilité de l'asservissement sera grande. Pour une largeur de résonance $\Delta\nu$ donnée, il faut donc avoir la transmission de la cavité la plus grande possible.

A partir du système de la figure 2.24, nous avons créé un signal d'erreur, en Volt, proportionnel à un écart de fréquences optiques, en Hertz. Il doit ensuite être traité par un dispositif qui agit sur la fréquence du laser. Nous allons décrire maintenant celui utilisé sur l'expérience BMV.

2.4.2 Caractéristiques de l'asservissement

Description du système

Le schéma du dispositif d'asservissement utilisé sur l'expérience BMV est présenté sur la figure 2.26. Un synthétiseur (SYNT) produit les signaux $V_1(t)$ et $V_2(t)$ envoyés d'une part au modulateur électro-optique résonant (EOM), et d'autre part au mixeur (MIX). Le faisceau réfléchi par la cavité est collecté par la photodiode en réflexion ($\mathrm{Ph_r}$), dont le signal est multiplié par $V_2(t)$ dans le mixeur. En sortie de celui-ci, nous obtenons le signal d'erreur de Pound-Drever-Hall, $\varepsilon_{\mathrm{PDH}}$, qui est traité par trois étages proportionnels-intégrateurs en cascade.

Un dispositif proportionnel-intégrateur permet de produire une tension de commande $u(t)$ de la forme [116] :

$$u(t) = k\, \varepsilon_{\mathrm{PDH}}(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon_{\mathrm{PDH}}(t')\, \mathrm{d}t', \tag{2.166}$$

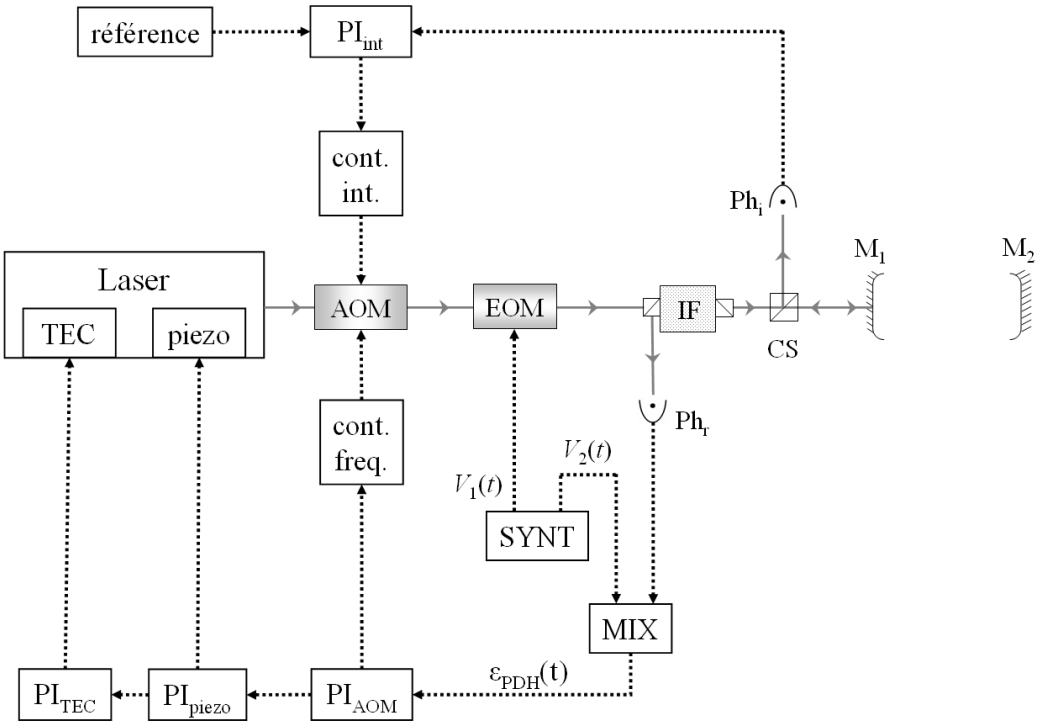


FIGURE 2.26 – Schéma du dispositif d'asservissement utilisé sur l'expérience BMV. Les signaux électroniques sont représentés en pointillés noirs et le faisceau lumineux en trait plein gris. Le signal d'erreur $\varepsilon_{\mathrm{PDH}}(t)$ de l'asservissement en fréquence est produit par la méthode de Pound-Drever-Hall via le générateur de signaux (SYNT), le mixeur (MIX), le modulateur électro-optique (EOM) et la photodiode en réflexion ($\mathrm{Ph_r}$). Il est ensuite envoyé à trois étages proportionnels-intégrateurs (PI) en cascade. Un cube séparateur (CS) permet d'extraire une fraction de l'intensité injectée dans la cavité. Celle-ci est collectée par la photodiode $\mathrm{Ph_i}$ et permet l'asservissement de l'intensité du laser via l'étage proportionnel-intégrateur ($\mathrm{PI_{int}}$).

où k est le gain et T_i est la constante d'intégration de l'étage. Ces paramètres sont optimisés de façon à minimiser le bruit du signal d'erreur lorsque la boucle est fermée, et donc à avoir un asservissement le plus stable possible. Les valeurs typiques concernant les trois étages impliqués dans l'asservissement en fréquence sont résumées dans le tableau 2.2.

Le signal d'erreur est acheminé vers le premier étage proportionnel intégrateur $\mathrm{PI_{AOM}}$. La tension de commande en sortie du $\mathrm{PI_{AOM}}$ agit sur un boîtier qui contrôle en fréquence le modulateur acousto-optique (AOM). Il contient un oscillateur contrôlé en tension (VCO) qui génère l'onde radiofréquence de pulsation Ω envoyée au modulateur acousto-optique. Cet étage effectue les corrections rapides de la fréquence du laser. Sa bande passante est de 80 kHz. Sa sortie est également envoyée au deuxième étage proportionnel intégrateur $\mathrm{PI_{piezo}}$, qui effectue des correc-

étage	k	$1/T_i$ (s^{-1})
PI_{AOM}	0.1 à 1.0	1×10^5 à 3×10^5
PI_{piezo}	0.1 à 0.5	5×10^3 à 1×10^5
PI_{TEC}	0.1 à 0.5	5×10^{-2} à 5×10^{-1}
PI_{int}	1.0 à 5.0	1×10^5 à 3×10^5

TABLE 2.2 – Valeurs typiques du gain k et du temps d'intégration T_i des étages proportionnels-intégrateurs utilisés pour les asservissement en fréquence et en intensité.

tions plus lentes, de l'ordre du kHz. Sa tension de commande est acheminée jusqu'à la cale piézoélectrique fixée au cristal du laser ainsi qu'au troisième étage proportionnel intégrateur PI_{TEC}. Ce dernier agit sur le contrôleur de température du laser (TEC) qui modifie la température du cristal du laser par effet Peltier. La bande passante de cet étage est de l'ordre du mHz, ce qui permet de compenser les dérives lentes de la fréquence du laser et de la fréquence de résonance de la cavité, essentiellement dues à des fluctuations thermiques. Les modules PI_{piezo} et PI_{TEC} ont été développés au laboratoire pour cet asservissement. Le module PI_{AOM} est un dispositif commercial [10].

L'intensité du laser est également asservie en continu. Comme cela est représenté sur les schémas des figures 2.4 et 2.26, une fraction de l'intensité injectée dans la cavité est collectée par la photodiode Ph_i, dont le signal est envoyé au module proportionnel-intégrateur PI_{int}. Les valeurs typiques de son gain et de son temps d'intégration sont présentées dans le tableau 2.2. La valeur de l'intensité injectée est comparée à une valeur de référence. Le signal de commande qui en résulte agit sur un boîtier de contrôle en intensité du modulateur acousto-optique, où la puissance de l'onde radiofréquence est ajustée de façon à maintenir l'intensité injectée constante. Elle est de l'ordre de 30 mW devant le hublot d'entrée de l'enceinte à vide.

Performances

Les performances de l'asservissement s'évaluent en mesurant la densité spectrale de puissance (DSP) du signal d'erreur ε_{PDH}. Elle est obtenue en faisant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Elle représente donc le bruit du signal à chaque fréquence f. Plus elle est élevée, plus le signal est bruité.

$\varepsilon_{PDH}(t)$ est mesuré en boucle fermée, c'est-à-dire en régime asservi, en prélevant une partie du signal en sortie du mixeur. C'est un signal électrique exprimé en V. L'unité de sa densité spectrale de puissance est donc V^2/Hz. En pratique, nous souhaitons connaître le bruit de fréquence optique (en Hz) du désaccord en fréquence $\delta\nu(t)$. Pour cela, à partir de l'expression du signal d'erreur donnée dans l'équation

10. Modèle *SIM960* de la marque *Stanford Research Systems*.

(2.164), nous exprimons la densité spectrale de puissance en Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$:

$$S_{\text{PDH}}[\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}] = \frac{\sqrt{S_{\text{PDH}}[\text{V}^2/\text{Hz}]}}{g_{\text{m}} f_{\text{r}} D}. \tag{2.167}$$

Le discriminant D est donné par l'équation (2.165), en fonction des intensités lumineuses de la porteuse et des bandes latérales. Nous allons maintenant l'exprimer en fonction des grandeurs que l'on mesure expérimentalement. Comme nous l'avons vu dans la section 2.4.1, les intensités I_{p} et I_{bl} sont données à partir des fonctions de Bessel d'ordres 0 et ± 1 :

$$I_{\text{p}} = J_0^2(\beta) I_0, \tag{2.168}$$

$$I_{\text{bl}} = J_1^2(\beta) I_0. \tag{2.169}$$

D'où :

$$\sqrt{I_{\text{p}} I_{\text{bl}}} = J_0(\beta) J_1(\beta) I_0. \tag{2.170}$$

La profondeur de modulation β a été choisie de façon à maximiser le discriminant, soit $\beta = 1.08$ [114]. Nous avons donc $\sqrt{I_{\text{p}} I_{\text{bl}}} = 0.34 \times I_0$. En régime non asservi, nous considérons que la cavité réfléchit parfaitement le faisceau incident. I_0 est donc égale à la puissance réfléchie $I_{\text{r}}^{\text{n.a.}}$. Nous avons finalement :

$$\sqrt{I_{\text{p}} I_{\text{bl}}} = 0.34 \times I_{\text{r}}^{\text{n.a.}}. \tag{2.171}$$

Dans l'expression du discriminant (équation (2.165)) le coefficient de transmission de la cavité T_{c} intervient. Il s'exprime en fonction du rapport de l'intensité transmise I_{t} (faisceau ordinaire) sur l'intensité dans la porteuse I_{p} :

$$T_{\text{c}} = \frac{I_{\text{t}}}{I_{\text{p}} \times T_{\text{hublot,1}} \times T_{\text{hublot,2}}}, \tag{2.172}$$

$$= \frac{I_{\text{t}}}{J_0^2(\beta) I_0 \times T_{\text{hublot,1}} \times T_{\text{hublot,2}}}, \tag{2.173}$$

où $J_0^2(\beta) = 0.53$. Les intensités I_{t} et I_0 étant mesurées en dehors de l'enceinte à vide, nous faisons intervenir les coefficients de transmission en intensité des hublots d'entrée et de sortie : $T_{\text{hublot,1}} = 0.85$ et $T_{\text{hublot,2}} = 0.97$.

L'expression que nous utilisons pour calculer le discriminant est donc :

$$D = 4.1 \times I_{\text{r}}^{\text{n.a.}} \times \sqrt{\frac{I_{\text{t}}}{I_0}} \times 2\pi\tau, \tag{2.174}$$

où la largeur à mi-hauteur de la résonance $\Delta\nu$ a été exprimée en fonction du temps

de vie des photons dans la cavité τ à partir de l'équation (2.139).

Les intensités sont obtenues expérimentalement avec un puissancemètre. $I_{\mathrm{r}}^{\mathrm{n.a.}}$ est la puissance mesurée devant la photodiode en réflexion en régime non asservi. I_0 et I_{t} sont les puissances mesurées respectivement devant le hublot d'entrée (soit devant M_1) et derrière le hublot de sortie de l'enceinte à vide (derrière M_2). Les paramètres expérimentaux lors de la mesure des performances de l'asservissement sont résumés dans le tableau 2.3.

T_{c}	g_{m}	f_{r} (V/W)	D (W/Hz)	τ (ms)	η
31 %	0.54	532	7.1×10^{-6}	0.954	0.8

TABLE 2.3 – Valeurs des paramètres expérimentaux utilisées pour calculer la densité spectrale du signal d'erreur et du shot-noise en $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$, lors de la mesure des performances de l'asservissement.

La valeur du discriminant donnée par l'équation (2.174) représente le gain statique du système électronique qui produit le signal d'erreur à partir du désaccord à la résonance $\delta\nu$. Elle est valable à fréquence nulle. En pratique, lorsque nous voulons calculer la densité spectrale de puissance du signal d'erreur en $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ à la fréquence f, il faut tenir compte du filtre passe bas de la cavité Fabry-Perot. Nous avons donc :

$$S_{\mathrm{PDH}}(f)[\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] = \frac{\sqrt{S_{\mathrm{PDH}}[\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}]}}{g_{\mathrm{m}} f_{\mathrm{r}} D(f)}, \tag{2.175}$$

avec

$$D(f) = \frac{D}{1 + i\frac{f}{\nu_{\mathrm{c}}}}, \tag{2.176}$$

où ν_{c} est la fréquence de coupure de la cavité donnée par l'expression (2.139).

Le module de la densité spectrale de puissance du signal d'erreur en $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ est tracée sur la figure 2.27. Il est calculé à partir des équations (2.175), (2.176) et des valeurs des paramètres expérimentaux données dans le tableau 2.3. La remontée brutale observée autour de 50 kHz correspond à une oscillation, c'est à dire une instabilité du système (critère de Nyquist [116]). La bande passante du système d'asservissement est donc inférieure à 50 kHz, de l'ordre de quelques dizaines de kHz. Elle représente la plage de fréquences sur laquelle l'asservissement est capable de corriger des perturbations. Par ailleurs, plus la bande passante est large, plus l'asservissement a de gain pour corriger les perturbations qui apparaissent à basse fréquence. Finalement, l'asservissement en fréquence est d'autant plus efficace que sa bande passante est grande.

Sur la figure 2.27 nous avons représenté la densité spectrale du shot-noise en pointillés. Elle correspond au bruit minimal atteignable, c'est à dire celui que nous

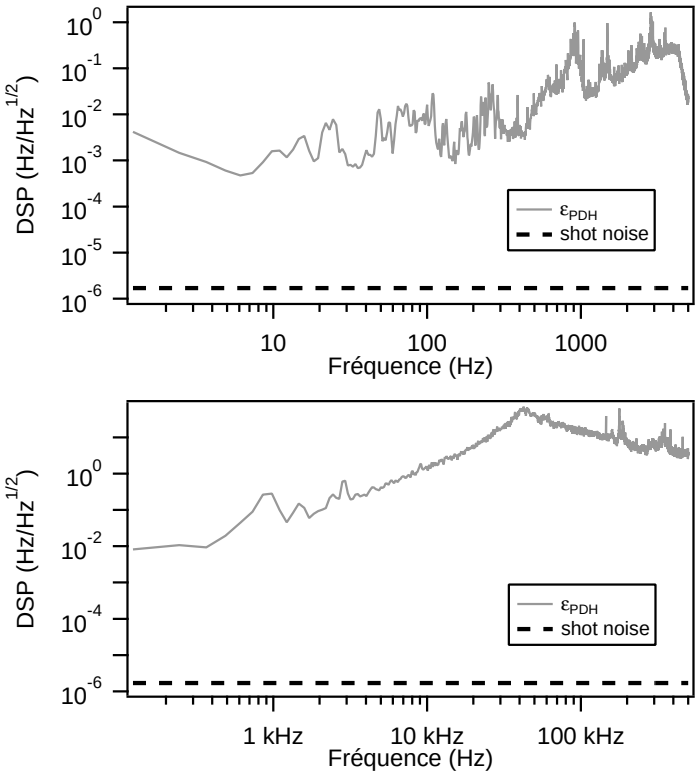


FIGURE 2.27 – Densité spectrale de puissance du signal d'erreur exprimée en $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. La courbe en pointillés correspond à la limite du shot-noise. La figure du haut correspond aux fréquences inférieures à 5 kHz, celle du bas aux fréquences comprises entre 100 Hz et 500 kHz.

aurions sur le signal d'erreur si le bruit majorant était celui de la détection des photons du faisceau réfléchi. Elle s'écrit, en $\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ [114] :

$$S_{\text{shot-noise}}[\mathrm{W}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] = \sqrt{2\eta I_{\mathrm{r}} h\nu}, \tag{2.177}$$

où η est l'efficacité quantique de la photodiode. Soit, à fréquence nulle :

$$S_{\text{shot-noise}}(f=0)[\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}] = \frac{\sqrt{2\eta I_{\mathrm{r}} h\nu}}{D}. \tag{2.178}$$

I_{r} est l'intensité réfléchie par la cavité en régime asservi. Elle est exprimée à partir du coefficient de réflexion à résonance R_{c} de la cavité défini par :

$$R_{\mathrm{c}} = \frac{I_{\mathrm{p,r}}}{I_{\mathrm{p}}}, \tag{2.179}$$

où $I_{\mathrm{p,r}}$ est l'intensité de la porteuse réfléchie. En considérant que l'intensité incidente I_0 est la somme de l'intensité de la porteuse et de l'intensité de chaque bande latérale,

$I_0 = I_\mathrm{p} + 2I_\mathrm{bl}$, l'intensité de la porteuse réfléchie est égale à $I_\mathrm{r} - 2I_\mathrm{bl}$. R_c s'écrit alors :

$$R_\mathrm{c} = \frac{I_\mathrm{r} - 2I_\mathrm{bl}}{I_\mathrm{p}}. \tag{2.180}$$

En utilisant l'expression de R_c donnée par l'équation (2.61), nous obtenons l'intensité réfléchie :

$$I_\mathrm{r} = \left((1-\sqrt{T_\mathrm{c}})^2 J_0^2(\beta) + 2J_1^2(\beta)\right) I_0, \tag{2.181}$$

$$= \left((1-\sqrt{T_\mathrm{c}})^2 \times 0.53 + 2 \times 0.22\right) I_\mathrm{r}^\mathrm{n.a.}. \tag{2.182}$$

A partir des valeurs données dans le tableau 2.3, nous évaluons le shot-noise :

$$S_\mathrm{shot\text{-}noise}(f=0) = 1.7 \times 10^{-6}\ \mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}. \tag{2.183}$$

Dans le domaine de fréquences dans lequel se situent les signaux que nous cherchons à mesurer (entre 10 et 500 Hz), la densité spectrale du signal d'erreur est aujourd'hui trois ordres de grandeur au dessus du shot-noise. Il est important de noter que, bien que nous ayons besoin d'un bon asservissement pour réaliser les mesures d'effet Faraday et Cotton-Mouton, il n'est pas indispensable que la densité spectrale de puissance du signal d'erreur soit au niveau du shot-noise. En effet, nous ne faisons pas une mesure de fréquence mais une mesure de d'ellipticité Ψ ou de rotation Θ_F de la polarisation. Ces grandeurs sont reliées au rapport des intensités extraordinaire et ordinaire filtrée par l'équation (2.142). Au premier ordre, le bruit de fréquence sur I_e est corrélé avec celui sur $I_\mathrm{t,f}$. Il ne se répercute donc pas sur $I_\mathrm{e}/I_\mathrm{t,f}$, et donc pas sur Ψ ou Θ_F. En première approximation, le bruit en fréquence provenant de l'asservissement n'est donc pas limitant pour nos mesures d'effet Faraday et Cotton-Mouton. Une étude plus détaillée de l'influence d'un bruit en fréquence sur le bruit en ellipticité sera présentée dans le chapitre 4.

Un bon asservissement est toutefois nécessaire afin de corriger en continu les perturbations qui agissent sur la longueur de la cavité, et donc de maintenir la condition de résonance tout au long de l'acquisition des données expérimentales. Cela est réalisé de façon très satisfaisante avec le système actuel. Sans perturbation particulière apportée à la cavité, le laser peut rester asservi plusieurs heures. Les performances de l'asservissement pendant l'application d'un champ magnétique pulsé dépendent de l'amplitude du champ. Elles seront présentées au cas par cas dans les paragraphes 3 et 4. Précisons juste ici que le laser est asservi pendant toute la durée de l'impul-

sion pour les mesures d'effet Cotton-Mouton réalisées dans les gaz, avec un champ magnétique atteignant 3 T. Un champ de 6.5 T est utilisé pour les mesures dans le vide. Dans ce cas, l'asservissement décroche après la fin de l'impulsion.

2.5 Le champ magnétique

Au cours de cette thèse nous avons mesuré deux types de biréfringences induites par un champ magnétique : une biréfringence circulaire (effet Faraday) et une biréfringence linéaire (effet Cotton-Mouton). D'après les équations (2.12) et (2.22), l'angle de rotation et l'ellipticité de la polarisation induits sont respectivement proportionnels au champ magnétique longitudinal $B_{||}$ et au carré du champ magnétique transverse $B_{\perp}$. Le champ magnétique doit-être dans les deux cas suffisamment intense pour permettre la mesure. Il s'agit donc d'un élément central du dispositif expérimental, que nous allons décrire en détails.

Rappelons tout d'abord quelques ordres de grandeurs. Le champ magnétique produit par le cerveau humain est de l'ordre de quelques 10^{-15} T. Celui mesuré à la surface de la Terre est de quelques dizaines de μT. Les roches de magnétite (oxyde de fer) produisent un champ permanent de quelques centaines de mT. Enfin, les champs magnétiques les plus intenses sont générés par les étoiles à neutrons et peuvent dépasser les 10^9 T.

Plusieurs moyens existent pour produire des champs magnétiques sur Terre [117]. Tout d'abord, la fabrication d'aimants permanents par des alliages de Neodyme-Fer-Bore ou Samarium-Cobalt permet d'atteindre des champs autour de 1 T. Les champs plus intenses sont générés par la circulation d'un courant dans un fil conducteur. Les champs statiques sont obtenus grâce à des bobines résistives ($B_{\max} = 35$ T au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses à Grenoble), supraconductrices ($B_{\max} \sim 20$ T) ou hybrides (association des deux techniques, $B_{\max} = 45$ T au National High Magnetic Field Laboratory à Tallahassee, Etats-Unis). Le champ maximal atteint est limité par l'échauffement du fil dans le cas de bobines résistives, ou par la valeur du champ critique qui fait disparaître la supraconductivité. La méthode utilisée pour atteindre des champs magnétiques plus intenses est de produire un champ d'une durée très courte en faisant circuler une impulsion de courant dans une bobine résistive. Ainsi, l'échauffement du fil est limité. Un champ maximal de 100.75 T a été atteint avec une technique non destructive au National High Magnetic Field Laboratory de Los Alamos, Etats-Unis. Des champs de quelques milliers de Teslas peuvent être produits avec une technique destructive utilisant la compression du flux magnétique.

Nous décrirons ici les bobines utilisées au cours de cette thèse pour réaliser des

mesures de biréfringence magnétique. Nous commencerons par l'aimant pulsé produisant le champ magnétique transverse pour les mesures d'effet Cotton-Mouton. Puis nous décrirons le solénoïde qui a été fabriqué pour les mesures d'effet Faraday et qui a été utilisé en régime sinusoïdal.

2.5.1 Champ magnétique transverse pour la mesure de biréfringences linéaires

Production de champs magnétiques pulsés

Le principe de la production de champs magnétiques pulsés est de stocker de l'énergie électrique dans un banc de condensateurs, puis de la libérer en un temps très court (de quelques microsecondes à quelques centaines de millisecondes) dans une bobine. C'est ce que nous appelons un "tir" de champ magnétique. Cette technique a permis d'atteindre un champ de 90.8 T non-destructif en configuration Faraday au LNCMI de Toulouse. Le champ magnétique est alors supérieur à 80 T pendant plus de 8 ms, ce qui est à ce jour un record mondial.

Une photographie de l'un des générateurs utilisés pour l'expérience BMV est présentée sur la figure 2.28. Le schéma électrique correspondant est présenté sur la figure 2.29. Une source de courant (chargeur) permet de charger un ensemble de modules en parallèle avec un courant I_c de quelques centaines de milliampères. Chaque module est constitué d'un condensateur (de capacité C_m) en série avec une bobine de protection d'inductance L_m. Cette dernière permet, en cas de court-circuit dans la bobine de l'expérience, d'avoir une inductance suffisante dans le circuit pour éviter l'établissement d'un courant trop important pour ses composants. La résistance de chaque module est notée R_m. Elle comprend la résistance de la bobine de protection et celles des câbles de connexion. Chaque module contient un thyristor. Il s'agit d'un interrupteur rapide basé sur la technologie des transistors et adapté à l'électronique de puissance. L'ensemble des thyristors est synchronisé à 100 ns près. Une fois les condensateurs chargés, un signal optique commande l'injection d'un courant dans leur gâchette. Ils deviennent alors passants et libèrent l'énergie dans la bobine de l'expérience.

La bobine est représentée par une résistance R_b en série avec une inductance L_b ($R_\mathrm{b} = 52$ mΩ à la température de l'azote liquide et $L_\mathrm{b} = 400$ μH, pour celle utilisée sur l'expérience BMV). Un courant d'intensité I la traverse. La tension U à ses bornes est donnée par :

$$U = L_\mathrm{b}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + R_\mathrm{b}I. \tag{2.184}$$

Leurs évolutions au cours d'un tir sont représentées sur la figure 2.30 pour une ten-

FIGURE 2.28 – Photographie de l'un des générateurs pulsés utilisés pour produire le champ magnétique transverse de l'expérience BMV. On peut y voir les condensateurs (parallélépipèdes) placés derrières les bobines de protection (cylindres), et enfin les thyristors au premier plan.

sion de charge positive. Entre t_0 et $t_{\max}$, le courant décrit le quart d'une sinusoïde correspondant au début de l'oscillation d'un circuit RLC. $t_{\max} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_\mathrm{t}C_\mathrm{t}}$, avec L_t et C_t les inductance et capacité totales du circuit. Pour $t > t_{\max}$, la tension U change de signe. La diode crowbar devient passante ce qui limite la recharge des condensateurs. L'énergie est alors dissipée dans la bobine et le courant suit une décroissance exponentielle caractéristique d'un circuit RL, avec $R = R_\mathrm{c} + R_\mathrm{b} + R_\mathrm{G} + R_\mathrm{shunt}$ et $L = L_\mathrm{b} + L_\mathrm{G}$. R_G et L_G sont respectivement les résistance et inductance du générateur. R_shunt est la résistance de shunt qui permet la mesure du courant I traversant la bobine. En cas de problème, il est possible de décharger les condensateurs dans la résistance de protection $R_\mathrm{p} = 42\ \Omega$. Le courant suit alors la décroissance exponentielle du circuit $(R_\mathrm{p} - C_\mathrm{t})$ dont le temps caractéristique est de l'ordre de la seconde.

L'expérience BMV dispose de deux générateurs, tous deux reliés à la même bobine. Le sens de branchement des thyristors est inversé d'un générateur à l'autre ce qui permet d'envoyer le courant dans un sens ou dans l'autre, dans la bobine de l'expérience. Ainsi, il est possible d'inverser le sens du champ magnétique. Le branchement vers l'un ou l'autre des générateurs est réalisé via un contacteur pneumatique de puissance commandé depuis le sas d'entrée de la salle blanche. Chaque

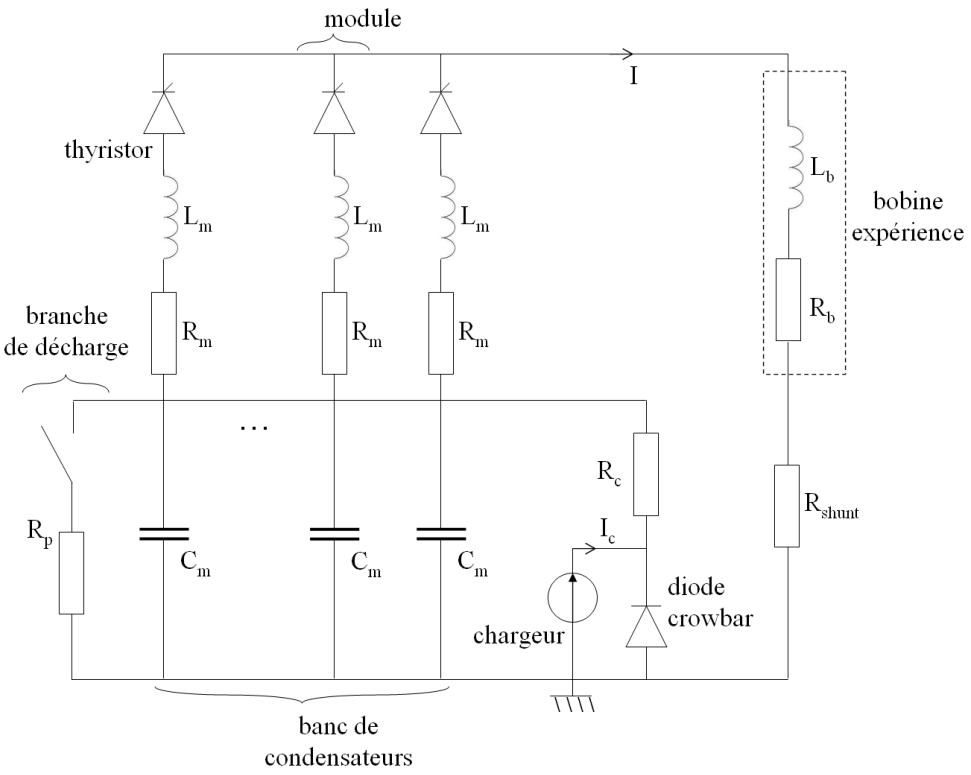


FIGURE 2.29 – Schéma électrique d'un générateur pulsé. Le banc de condensateurs est constitué de plusieurs modules chargés par une alimentation de courant. La décharge dans la bobine de l'expérience se fait par l'intermédiaire des thyristors.

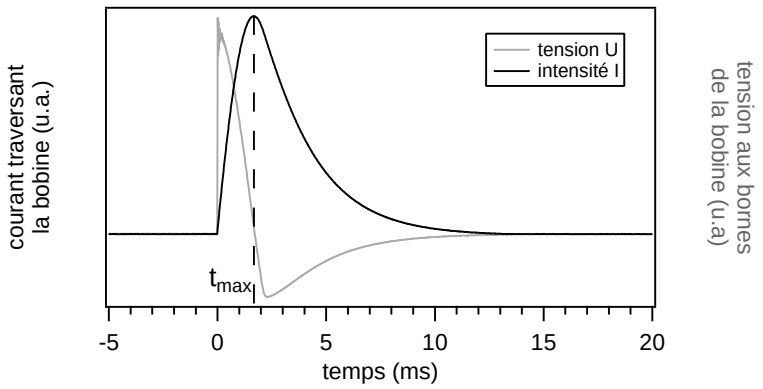


FIGURE 2.30 – Évolution du courant I traversant la bobine (en noir) et de la tension U à ses bornes au cours d'un tir de champ magnétique.

générateur comprend six modules de capacité $C_m = 880\ \mu$F, d'inductance de protection $L_m = 75\ \mu$H et de résistance $R_m \sim 30$ mΩ. La résistance de la branche crowbar est de l'ordre de 1 mΩ. La valeur de la tension de charge des générateurs dépend de la valeur du champ désiré. Elle est au maximum de 6 kV, ce qui correspond à un courant de 8 kA traversant la bobine, et à une énergie de l'ordre de 100 kJ. Le

temps de montée $t_{\max}$ du champ est d'environ 2 ms.

Production d'un champ magnétique intense transverse

La bobine X-coil

Les aimants couramment fabriqués au LNCMI de Toulouse correspondent à une configuration Faraday pour laquelle le trou de la bobine est parallèle au champ magnétique produit. Afin d'appliquer un champ magnétique transverse sur un faisceau lumineux, une bobine en X (configuration de Voigt) a été développée au laboratoire [118]. Par ailleurs, l'ellipticité Ψ à mesurer est proportionnelle à la longueur L_{b} de milieu biréfringent traversé (voir l'équation (2.19)). La biréfringence étant induite par le champ magnétique L_{b} désigne la longueur effective de la bobine, que nous noterons L_{B} et qui sera définie dans la suite de cette section. La bobine en X a donc été dessinée de façon à maximiser le paramètre $B^2 L_{\mathrm{B}}$.

Le schéma du principe de cette bobine, appelée "X-coil", est présenté sur la partie gauche de la figure 2.31. Elle est constituée de $n_{\mathrm{b}} = 2$ branches. Chaque branche comporte $n_{\mathrm{c}} = 4$ couches de $n_{\mathrm{s}} = 7$ spires contiguës de fil de cuivre. Par circulation d'un courant I, chaque branche j produit un champ B_j, dont la somme donne le champ transverse $B_\perp$. Le fil de cuivre est bobiné sur un corps en G10 (mélange de tissu de verre et d'époxy) dans lequel deux gorges ont été usinées. Le modèle en trois dimensions du corps est représenté sur la partie droite de la figure 2.31. Un trou traversant cylindrique y est également percé dans le sens de la longueur (suivant l'axe $O\vec{z}$) pour permettre le passage du faisceau laser perpendiculairement au champ magnétique. Les dimensions finales de la bobine sont : 250 mm de long, 100 mm de haut et 46 mm d'épaisseur.

La principale difficulté dans la production de champs magnétiques pulsés réside dans les forces mécaniques qui s'exercent sur la bobine au moment du tir. Dans le cas de la X-coil, elles tendent à écarter les fils de leur gorge. Elles sont maximales au centre de la bobine, là où les deux nappes de fils se croisent. Elles ont été évaluées à partir de la loi de Biot et Savart. Pour un courant de 5000 A dans la bobine (courant maximal auquel elle a été testée), la force qui s'applique sur la branche est de l'ordre de la centaine de kN. Nous voyons ici qu'il est absolument nécessaire de contraindre mécaniquement les spires de la bobine X-coil. Cela est réalisé grâce à des renforts en G10 placés autour de l'aimant, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.32. Une résine thermodurcissante (Stycast) est également directement coulée sur les fils lors du bobinage.

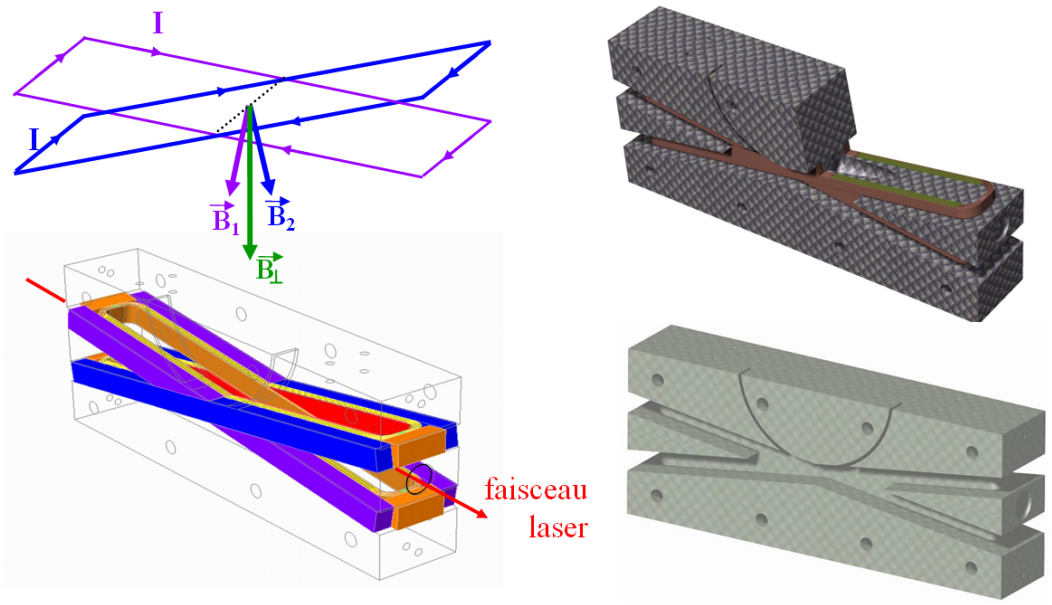


FIGURE 2.31 – Le schéma du principe de la bobine X-coil est représenté sur la partie gauche. Deux branches de spires contiguës produisent chacune un champ B_j dont la somme donne le champ transverse $B_\perp$. Les spires sont bobinées sur un corps dont la modélisation en trois dimensions est présentée sur la partie droite. On peux y voir les deux gorges servant au bobinage ainsi que le trou qui le traverse de part en part et qui permet le passage du faisceau laser perpendiculairement au champ.

Cryogénie

Lors d'un tir de champ magnétique, la bobine chauffe par effet Joule. L'échauffement ΔT se calcule en égalisant :

– l'énergie électrique W_e envoyée à la bobine :

$$W_\mathrm{e} = \int_0^\infty R_\mathrm{b}(T) I^2(t) dt, \tag{2.185}$$

où I est le courant qui traverse la bobine et $R_\mathrm{b}(T)$ est sa résistance.

– l'énergie thermique W_T :

$$W_\mathrm{T} = m_\mathrm{b} C_\mathrm{p}(T) \Delta T, \tag{2.186}$$

où $C_\mathrm{p}(T)$ est la capacité calorifique massique du cuivre à pression constante et $m_\mathrm{b} \simeq 250$ g est la masse de cuivre constituant la bobine.

La résistance de la bobine et la capacité calorifique du cuivre sont des fonctions

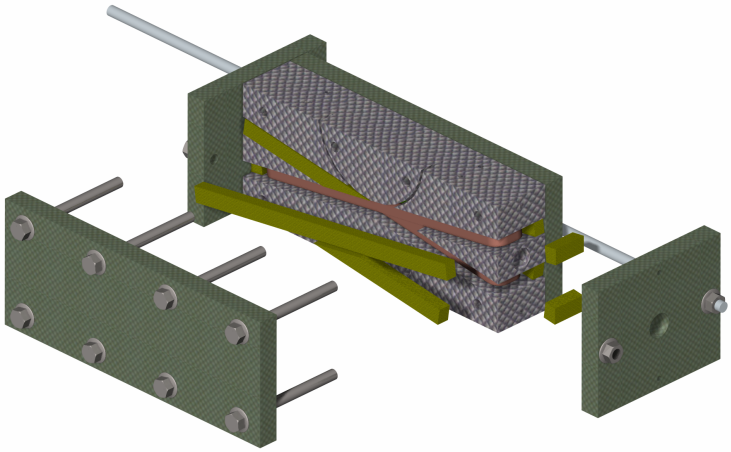


FIGURE 2.32 – Modélisation en trois dimensions de la bobine X-coil. Des plaques de G10 sont fixées autour de la bobine grâce à des tiges filetées. Ce système, associé à une résine thermodurcissante coulée sur les fils lors du bobinage, permet de contraindre mécaniquement la bobine.

de la température. A partir de leurs évolutions [119], nous obtenons une élévation de la température de 100°C, pour un tir à un courant $I = 5000$ A. Pour éviter la surchauffe du conducteur, la bobine X-coil est positionnée dans un cryostat rempli d'azote liquide ($T = -196$°C à pression atmosphérique).

Celui-ci a été fabriqué spécialement au laboratoire pour permettre le passage du faisceau laser au centre de la bobine [118]. Deux photographies sont présentées sur la figure 2.33. Sur celle de gauche, nous pouvons voir la bobine X-coil qui est placée à l'intérieur. Le cryostat a un diamètre de 60 cm et une hauteur de 1 m, soit un volume de presque 300 L. Il est constitué d'une double paroi dans laquelle le vide est fait de façon à isoler thermiquement le réservoir d'azote liquide de l'extérieur. Il est traversé de part en part par un tube en inox de 13 mm de diamètre intérieur. Celui-ci permet le passage d'un petit tube (10 mm de diamètre extérieur) de l'enceinte à vide dans lequel le faisceau laser passe. Un schéma en coupe du cryostat au niveau du tube est présenté sur la figure 2.34. Le tube de l'enceinte à vide est isolé mécaniquement du cryostat par un espace de moins de 2 mm. Cela permet d'éviter la transmission des vibrations de la bobine au système optique lors d'un tir de champ magnétique. L'isolation thermique est réalisée au niveau du cryostat grâce à deux tubes concentriques entre lesquels le vide est fait.

Le cryostat est fixé sur un bâti également isolé mécaniquement du système optique. La hauteur de la table optique est asservie à la dizaine de microns près grâce à des pieds pneumatiques. La hauteur du bâti du cryostat est ajustée grâce à des pieds à vis millimétriques. Ces deux réglages fins nous permettent d'aligner avec précision le petit tube de l'enceinte à vide par rapport au tube du cryostat dans la direction

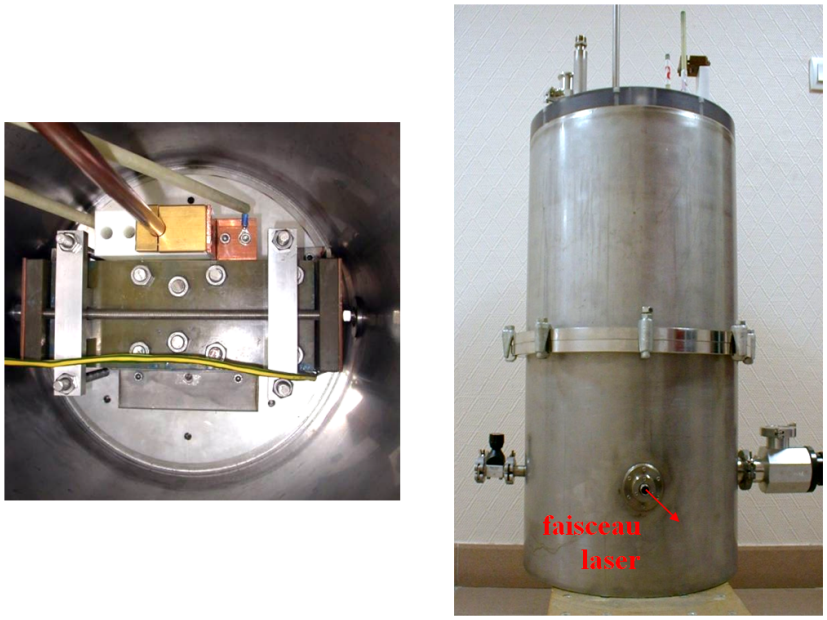


FIGURE 2.33 – Photographies du cryostat à azote liquide de la bobine X-coil. A gauche : vue du dessus, la bobine X-coil est positionnée au fond. On peut voir les plaques de G10 et les tiges filetées servant de renfort mécanique. A droite : vue de face. Le cryostat est traversé de part en part par un tube qui permet le passage du faisceau laser.

verticale. Des comparateurs micrométriques permettent de contrôler l'écart entre le bâti et la table optique. De plus, le cryostat peut pivoter sur son bâti afin de réaliser l'alignement dans la direction horizontale. Cet alignement est particulièrement important car il permet, en plus de l'isolation mécanique, de minimiser la composante longitudinale du champ magnétique produit par la bobine X-coil. Une fois le réglage optimal obtenu, le cryostat est solidement fixé sur son bâti.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, les valeurs de biréfringences magnétiques dans les gaz sont, à pression constante, dépendantes de la température. Nous avons donc réalisé des mesures de la température dans le tube qui traverse le cryostat lorsque celui-ci est rempli d'azote liquide. Le profil de température en fonction de la distance z au centre de la bobine est représenté par les ronds noirs sur la figure 2.35. Malgré le vide d'isolation thermique, la température descend jusqu'à -74°C ce qui entraîne la formation de glace et donc un contact mécanique entre le tube de l'enceinte à vide et le tube du cryostat. Afin d'y remédier, un flux d'air à température ambiante ($T \sim 20^{\circ}$C) est envoyé en continu entre les deux tubes concentriques (voir figure 2.34). Le profil de température dans ces conditions est représenté par les triangles noirs de la figure 2.35. La moyenne est de 20.5°C avec une variation de $\pm 0.5^{\circ}$C sur la zone où est appliquée le champ magnétique (la bobine X-coil est

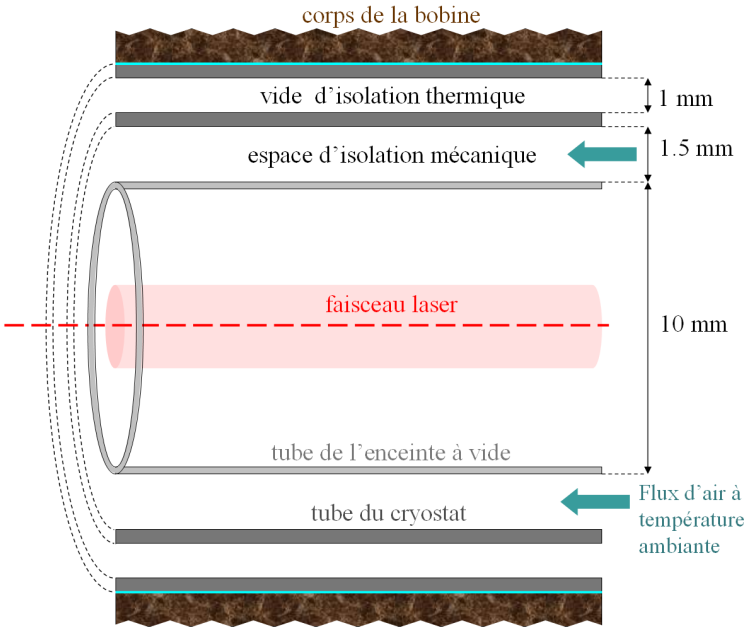


FIGURE 2.34 – Schéma en coupe du cryostat au niveau du tube qui le traverse. Le tube de l'enceinte à vide dans lequel passe le faisceau lumineux est isolé mécaniquement du cryostat. L'isolation thermique est réalisée par un vide d'isolation et par un flux continu d'air à température ambiante qui permet d'éviter la formation de glace.

représentée au centre du cryostat). Au cours d'un tir le flux d'air est interrompu afin de réaliser la mesure dans des conditions aussi calmes que possible. La température diminue alors de moins de 1°C en deux minutes, temps nécessaire pour charger le générateur et déclencher le tir. Nous pouvons donc considérer que les mesures d'effet Cotton-Mouton dans les gaz se font à $T = (293 \pm 1)$ K.

Nous avons vu que la température de la bobine peut s'élever de 100 °C au cours d'un tir. Il faut donc attendre que la bobine revienne à la température de l'azote liquide pour pouvoir réaliser un autre tir. En pratique, pour des tirs à 6.5 T (champ maximal utilisé au cours de cette thèse), la bobine met environ 10 minutes à se refroidir, ce qui correspond au temps que nous mettons pour adapter les paramètres optiques. Le taux de répétition des tirs n'est donc, aujourd'hui, pas limité par l'échauffement de la bobine.

Caractéristiques des bobines X-coils

Rapport B/I

Au cours d'un tir, la valeur du champ magnétique au centre de la bobine est

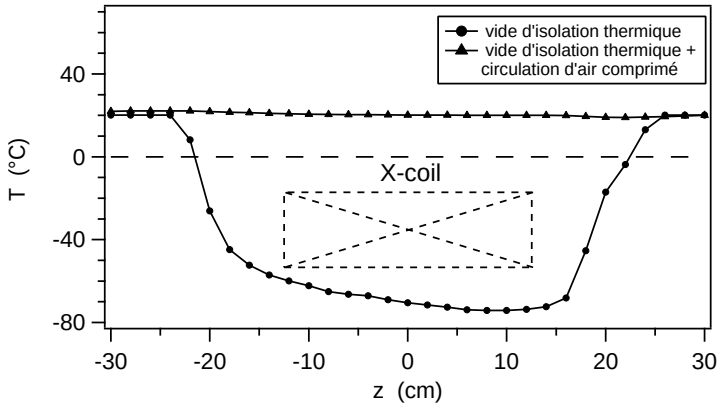


FIGURE 2.35 – Température à l'intérieur du petit tube traversant le cryostat lorsque que celui-ci est rempli d'azote liquide. Les ronds noirs correspondent à des mesures réalisées avec le vide d'isolation thermique uniquement. Les triangles correspondent à des mesures effectuées avec une circulation d'air comprimé à température ambiante entre le petit tube de l'enceinte à vide et le tube du cryostat.

déduite de la mesure du courant qui la traverse. Celui-ci est de l'ordre de quelques milliers d'ampères. Il est obtenu à partir de la mesure de la tension V_{shunt} aux bornes d'une résistance, dite "de shunt", d'environ 1 mΩ, et placée en série avec la bobine X-coil comme montré sur le schéma de la figure 2.29. Le coefficient de proportionnalité entre le champ et le courant a été déterminé de plusieurs manières.

Tout d'abord, une simulation numérique de ce facteur de forme a été réalisée par les ingénieurs du laboratoire à partir de la géométrie de la bobine en utilisant la méthode des éléments finis. Elle a donné : $B/I = 1.571$ mT/A.

Il a également été mesuré à température ambiante. Pour cela, un courant d'intensité $I(t)$ modulée a été envoyé dans la bobine X-coil. Un solénoïde de mesure appelé "bobine pick-up" a été inséré en son centre. La tension V_{pk} à ses bornes est proportionnelle à la dérivée temporelle du flux magnétique Φ_{B} :

$$V_{\text{pk}}(t) = -\frac{\partial \Phi_{\text{B}}(t)}{\partial t} = -NS\frac{\partial B(t)}{\partial t}. \tag{2.187}$$

N et S sont respectivement le nombre de spires et la section de la bobine pick-up. La valeur du produit NS a été déterminé lors de sa calibration. Le champ magnétique est déduit de l'intégration de V_{pk} :

$$B(t') = -\frac{1}{NS}\int_0^{t'} V_{\text{pk}}(t)dt. \tag{2.188}$$

Le facteur de forme obtenu est : $B/I = (1.56 \pm 0.01)$ mT/A.

Enfin, il a été mesuré en régime pulsé et à la température de l'azote liquide.

Pour ce faire, un tir de champ magnétique a été réalisé avec la bobine pick-up placée au centre de la X-coil. Le courant traversant la bobine a été obtenu via la tension de shunt, et le champ a été calculé par intégration de $V_{\mathrm{pk}}(t)$. Le rapport B/I a été déduit des valeurs maximales du courant et du champ : $B/I = B_{\mathrm{max}}/I_{\mathrm{max}} = (1.56 \pm 0.01)$ mT/A. Toutes ces valeurs étant compatibles, nous prendrons $B/I = (1.56 \pm 0.01)$ mT/A.

Le champ magnétique produit par la bobine X-coil possède aussi une composante longitudinale. Elle est expliquée par une dissymétrie des spires, due à l'épaisseur du fil de cuivre. Le facteur B/I pour la composante longitudinale est obtenu par simulation numérique. Il est de 6.69 μT/A. La composante longitudinale du champ est donc 230 fois plus faible que sa composante transverse.

Plusieurs profils temporels du champ magnétique mesurés au centre de la bobine sont présentés sur la figure 2.36, pour différentes tensions de charge du générateur. Le champ maximal produit atteint 14 T. La durée de l'impulsion est de quelques millisecondes. Elle dépend de la tension appliquée. Plus celle-ci est élevée, plus la durée du champ est faible. Cela est expliqué par l'échauffement de la bobine (et donc l'augmentation de sa résistance), qui est d'autant plus important que le courant qui la traverse est grand. Au cours de cette thèse nous avons utilisé un champ maximal de 6.5 T, qui nous a permis, tout en limitant le vieillissement de la bobine, de mettre en évidence les effets systématiques présents lors des mesures d'effet Cotton-Mouton dans le vide. Les mesures dans les gaz d'hélium et de xénon ont été réalisées avec un champ maximal de 3 T.

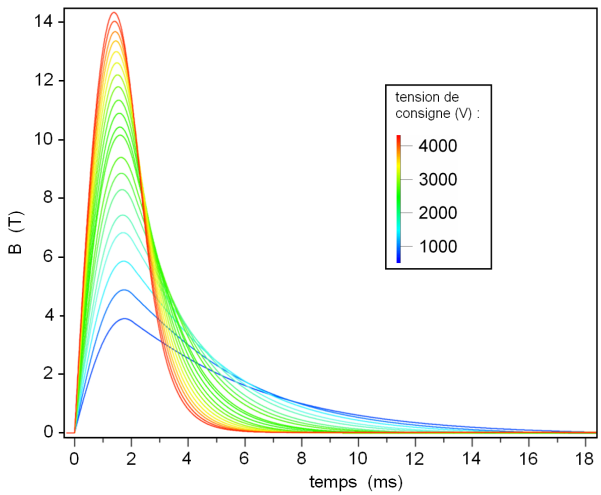


FIGURE 2.36 – Profils temporels du champ magnétique produit par la bobine X-coil en son centre en fonction de la tension de charge du générateur. Le champ maximal atteint est de 14 T.

Profil longitudinal

Le profil longitudinal du champ magnétique n'est pas uniforme. Il a été mesuré en déplaçant la bobine pick-up dans le tube qui traverse le cryostat. Deux profils, correspondant à deux séries de mesures, sont présentés sur la figure 2.37. A partir du profil moyen (trait plein), nous calculons la longueur effective L_{B} qui intervient dans l'expression de l'ellipticité donnée par l'équation (2.22). Elle est définie comme suit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B^2(z)dz = B_{\mathrm{max}}^2 L_{\mathrm{B}}, \tag{2.189}$$

où B_{max} est le champ au centre de la bobine. Elle représente la longueur qu'aurait un aimant équivalent à la bobine X-coil, mais produisant le champ B_{max} uniforme. Elle est de $L_{\mathrm{B}} = (0.137 \pm 0.003)$ m.

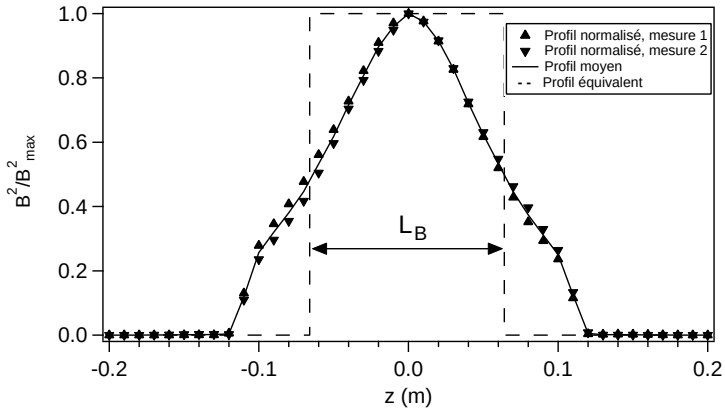


FIGURE 2.37 – Profils longitudinaux normalisés de la bobine X-coil réalisés en déplaçant une bobine pick-up calibrée suivant l'axe $O\vec{z}$ traversant la bobine. Le trait continu correspond au profil moyen. Le trait en pointillés représente le profil équivalent à un champ uniforme sur une longueur L_{B}.

Orientation de la polarisation incidente par rapport au champ

L'angle d'inclinaison du champ magnétique par rapport à la direction horizontale a été mesuré grâce à une bobine pick-up montée sur une tige rotative et placée au centre de la bobine X-coil [72]. Ces mesures ont révélé un angle d'environ 1°.

D'après l'équation (2.22), l'ellipticité Ψ induite par l'effet Cotton-Mouton est proportionnelle à $\sin 2\theta$, où θ est l'angle entre la polarisation linéaire incidente et le champ magnétique transverse. Afin de maximiser Ψ, il faut régler $\theta = 45°$. Cela a été réalisé au cours de la thèse de Paul Berceau via la mesure de l'effet Cotton-Mouton de l'air, en régime pulsé [72]. Le polariseur a, dans un premier temps, été tourné de façon à aligner au mieux la polarisation incidente avec le champ magnétique

($\theta \sim 0^\circ$). Des tirs de champ ont ensuite été effectués pour différentes orientation θ_P du polariseur autour de la position de départ. Pour chaque tir, les données ont été analysées pour obtenir Ψ. Un ajustement de l'ellipticité en fonction de θ_P a permis de connaître l'orientation du polariseur pour laquelle $\theta = 0^\circ$, c'est-à-dire pour laquelle l'ellipticité est nulle. Le polariseur a ensuite été tourné de 45° de façon à avoir $\theta = (45 \pm 1.2)^\circ$. L'incertitude sur cet angle est principalement due au système mécanique qui permet de tourner le polariseur sur lui-même. Dans ces conditions, $\sin 2\theta = 1.0000 \pm 0.0009$.

Champs magnétiques de fuite

Afin de minimiser les effets parasites lors d'un tir de champ magnétique pour la mesure d'effet Cotton-Mouton, il est nécessaire d'avoir un champ de fuite au niveau des miroirs et des photodiodes aussi petit que possible. Pour cela, des plaques de cuivre ont été placées autour de la bobine X-coil. Ces écrans cylindriques sont directement plongés dans l'azote liquide. Lors du tir de champ magnétique, des courants de Foucault s'y établissent. En vertu de la loi de Lenz, ils créent un champ magnétique qui s'oppose à celui produit par la X-coil. Les courants de Foucault pénètrent dans les écrans sur une longueur l_p appelée épaisseur de peau :

$$l_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{1}{\pi \sigma \mu_\mathrm{Cu} \nu_\mathrm{B}}}, \tag{2.190}$$

où $\sigma = 4.8 \times 10^8\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ est la conductivité du cuivre à la température de l'azote liquide [120], $\mu_\mathrm{Cu} \simeq \mu_0$ est sa perméabilité magnétique et ν_B est la fréquence caractéristique du champ produit par la X-coil. Celui-ci décrivant un quart de sinusoïde en 2 ms, nous avons $\nu_\mathrm{B} = 125$ Hz. L'épaisseur de peau est de 2 mm, c'est l'épaisseur des écrans de cuivre. L'intérêt de plonger les écrans de cuivre dans l'azote liquide est d'augmenter leur conductivité, et donc de diminuer l_p. A température ambiante, la conductivité du cuivre est de l'ordre de $6 \times 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, l'épaisseur de peau serait donc de 6 mm.

La circulation des courants de Foucault dans les écrans soumis au champ magnétique entraîne des forces de Laplace qui ont tendance à les écarter pendant la montée du champ, et à les rapprocher pendant la décroissance. En considérant que l'intensité du champ magnétique au niveau des écrans est 20 fois moins élevée qu'au centre de la bobine, on peut calculer par une simulation numérique l'amplitude de ces forces. Elles sont de l'ordre de 600 N pour un champ au centre de 10 T. Pour éviter cette "respiration" pendant le tir, les écrans de cuivre sont maintenus par des renforts mécaniques.

Malgré l'écrantage, un champ magnétique de fuite est présent à l'extérieur du cryostat. Il est de l'ordre de la centaine de microteslas au niveau des miroirs de la cavité Fabry-Perot. Son influence sera discutée dans la section 4.

Procédure de tir et acquisition des données

Les tirs de champ magnétique sont déclenchés depuis le sas de la salle blanche. Une boucle de sécurité est incluse dans le programme qui commande le tir. Elle permet de vérifier :

- que la porte entre le sas et la salle blanche est fermée à clé. Ainsi un relais pneumatique déconnecte le réseau EDF de la salle blanche et on peut appliquer une haute tension aux bornes de la bobine.
- que les portes des générateurs sont fermées à clé,
- que la bobine est bien totalement immergée dans l'azote liquide,
- que la résistance de la bobine est bien celle attendue à la température de l'azote liquide. Si elle est inférieure, il est possible qu'il existe un court circuit dans la bobine. Si elle est trop importante, il est possible que le fil de cuivre soit détérioré. De façon courante, cela permet de vérifier que la bobine s'est suffisamment refroidie depuis le dernier tir.
- que le faisceau laser est asservi sur la résonance de la cavité,
- que le système d'acquisition est prêt à se déclencher.

Une fois toutes ces conditions remplies, l'autorisation de charger est envoyée aux générateurs. La tension de consigne est choisie par l'utilisateur. Une fois les condensateurs chargés, le tir est déclenché automatiquement via les thyristors.

Plusieurs données concernant le champ magnétique sont enregistrées :

- la haute tension aux bornes de la bobine, qui permet le déclenchement de l'acquisition,
- la tension V_{shunt}, aux bornes de la résistance de shunt R_{shunt}, qui permet de calculer le courant $I = V_{\text{shunt}}/R_{\text{shunt}}$ traversant la bobine,
- la tension V_{pk} aux bornes d'une pick-up fixée sur le corps de la X-coil. Elle est l'image de la dérivée du champ transverse et permet de détecter d'éventuels problèmes au niveau de la X-coil, qui se manifesteraient par des irrégularités du signal.

Les intensités ordinaire et extraordinaire sont également enregistrées.

2.5.2 Champ magnétique longitudinal pour la mesure de biréfringences circulaires

Pour un champ magnétique donné, la biréfringence magnétique circulaire d'un gaz est un phénomène de plus grande amplitude que sa biréfringence linéaire. Il n'est donc pas nécessaire de travailler avec des champs magnétiques pulsés de plusieurs teslas pour pouvoir réaliser les mesures. Nous avons fabriqué au laboratoire un solénoïde produisant un champ de quelques milliteslas en régime continu.

Le solénoïde, de longueur $L = 297$ mm, est constitué de deux couches de $n_\mathrm{s} = 170$ spires bobinées sur un tube de 50 mm de diamètre. Le fil utilisé est du fil de cuivre de section $S = 1.8 \times 0.8$ mm^2 = 1.44 mm^2. Le champ magnétique le long de l'axe z du solénoïde est donné par :

$$B = \frac{\mu_0 n_\mathrm{s} I}{2L} \left[\frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{R_1^2 + \left(z+\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{R_1^2 + \left(z-\frac{L}{2}\right)^2}} + \frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{R_2^2 + \left(z+\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{R_2^2 + \left(z-\frac{L}{2}\right)^2}} \right], \tag{2.191}$$

où $R_1 = 25.4$ mm est le rayon moyen de la première couche et $R_2 = 26.2$ mm celui de la deuxième couche. L'origine de l'axe z est prise au centre du solénoïde.

Le rapport B/I a été déterminé expérimentalement. Le solénoïde est alimenté par une source de courant, dont l'intensité I est mesurée par un ampèremètre. Le champ B au centre est mesuré par un gaussmètre. L'ajustement linéaire des valeurs de B en fonction du courant donne : $B/I = (1.42 \pm 0.02) \times 10^{-3}$T/A, résultat compatible avec celui issu du calcul à partir de l'expression (2.191) pour $z = 0$. L'incertitude provient des incertitudes de mesure du champ et du courant. Les mesures d'effet Faraday sont réalisées en alimentant le solénoïde avec un courant sinusoïdal modulé avec une fréquence f. Le rapport B/I a été mesuré pour différentes fréquences. Il est constant jusqu'à $f \sim 50$Hz, et diminue légèrement pour des fréquences supérieures. La fréquence utilisée pour les mesures est $f \sim 18$Hz, soit $B/I = (1.42 \pm 0.02) \times 10^{-3}$T/A.

Le profil longitudinal a également été mesuré pour un courant continu $I = 1.5$ A. Il est présenté sur la figure 2.38 superposé aux points calculés à partir de l'équation (2.191). De même que pour la bobine X-coil, on définit la longueur L_B telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(z)dz = B_\mathrm{max} L_\mathrm{B}, \tag{2.192}$$

où $B_{\max}$ est le champ au centre de la bobine. Nous obtenons $L_{\mathrm{B}} = (3.08 \pm 0.06) \times 10^{-1}$ m.

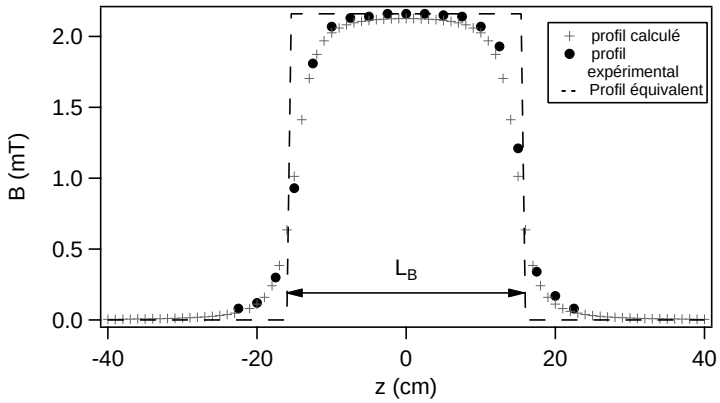


FIGURE 2.38 – Profil longitudinal du champ magnétique produit par le solénoïde pour un courant d'alimentation continu de 1.5 A. Les ronds correspondent aux données expérimentales, les croix aux valeurs calculées à partir de l'expression (2.191). Le trait en pointillés représente le profil de l'aimant équivalent qui produirait un champ uniforme sur une longueur L_{B}.

L'échauffement du solénoïde a été calculé par la même méthode que celle décrite pour la bobine X-coil. Pour un courant maximal de 3 A, il est inférieur à 4°C au bout de 5 minutes. Il n'est donc pas nécessaire de placer le solénoïde dans un cryostat pour les mesures d'effet Faraday. Compte tenu de la durée des acquisitions, et de la température ambiante dans la salle blanche, nous considérons raisonnablement que les mesures d'effet Faraday dans les gaz se font à $T = (294 \pm 1)$ K.

Le champ magnétique longitudinal produit n'est pas écranté. Le champ résiduel au niveau du miroir le plus proche ($z \sim 75$ cm) est calculé à partir de l'équation (2.191). Il est de 3.6×10^{-7} T.A^{-1}. Son influence sera discutée dans le chapitre 3.

2.6 L'enceinte à vide

2.6.1 Description

L'enceinte à vide repose sur la table optique "cavité" de la figure 2.4. Elle est constituée de quatre chambres, comme indiqué sur la figure 2.39. La première, située juste après le hublot par lequel entre le faisceau laser, contient le polariseur P. Environ quarante centimètres après, une deuxième chambre contient le miroir M_1 de la cavité Fabry-Perot. Le miroir M_2 est placé à une distance $L_{\mathrm{c}} \simeq 2.27$ m de M_1 dans la troisième chambre. Enfin, l'analyseur se trouve dans la dernière, environ 20 cm plus loin. La longueur de l'enceinte à vide est d'environ 3 m, et son volume de

l'ordre de 20 dm^3. Les chambres qui contiennent les miroirs sont reliées par des tubes en acier inoxydable amagnétique et des soufflets. Au milieu de l'enceinte, une croix fixe permet de stabiliser la structure et de brancher des pompes ou des bouteilles de gaz. Le tube le plus proche de M_1 a un diamètre externe de 10 mm qui lui permet de passer à travers le cryostat de la bobine X-coil. Le solénoïde est placé autour du deuxième tube, de diamètre externe 38 mm.

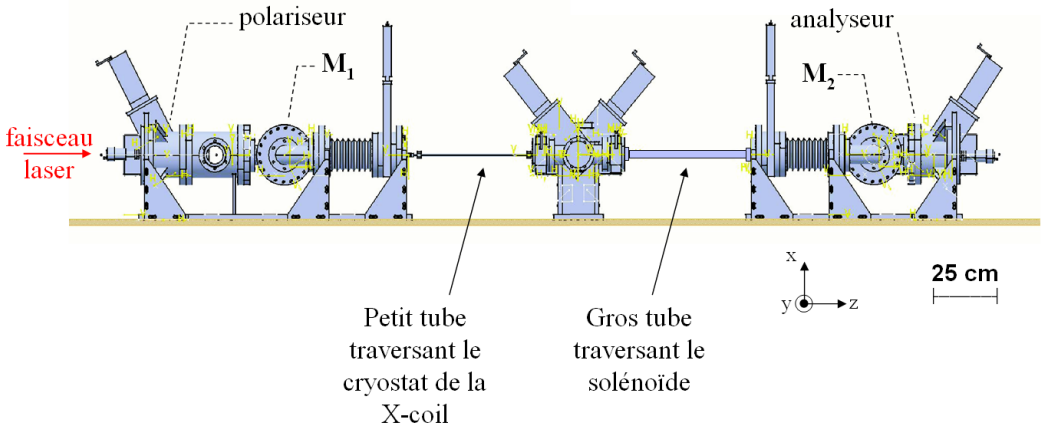


FIGURE 2.39 – Schéma de l'enceinte à vide qui repose sur la table cavité.

Le schéma de la table optique est présenté sur la figure 2.40. Elle mesure 3.6 m de long pour 1 m de large. Elle repose sur des pieds pneumatiques qui permettent d'isoler la table des vibrations du sol. Leur hauteur est asservie de façon à éviter tout contact mécanique avec le bâti du cryostat comme précisé dans la section 2.5.1.

2.6.2 Système de pompage et de mesure de la pression

Le pompage de l'enceinte est réalisé grâce à trois types de pompes. Une pompe primaire sèche à spirales [11] est reliée à la croix centrale par l'intermédiaire d'une pompe turbomoléculaire [12]. Trois pompes ioniques [13] sont fixées sur l'enceinte : une sur la croix centrale et les deux autres sur les chambres contenant le polariseur et l'analyseur.

La pompe primaire permet d'obtenir un vide l'ordre de quelques mbar. Sa vitesse de pompage est $v_\mathrm{p} = 3\ \mathrm{m}^3.\mathrm{h}^{-1}$. Le temps nécessaire pour passer de la pression $P_1 = 1$ bar à la pression $P_2 = 10$ mbar est donné par [121] :

$$t = \frac{V_\mathrm{tot}}{v_\mathrm{p}} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right), \tag{2.193}$$

11. Modèle *IDP-3* de la marque *Agilent*.
12. Modèle *Turbo V70* de la marque *Varian*.
13. Modèle *VacIon Plus 55* de la marque *Varian*.

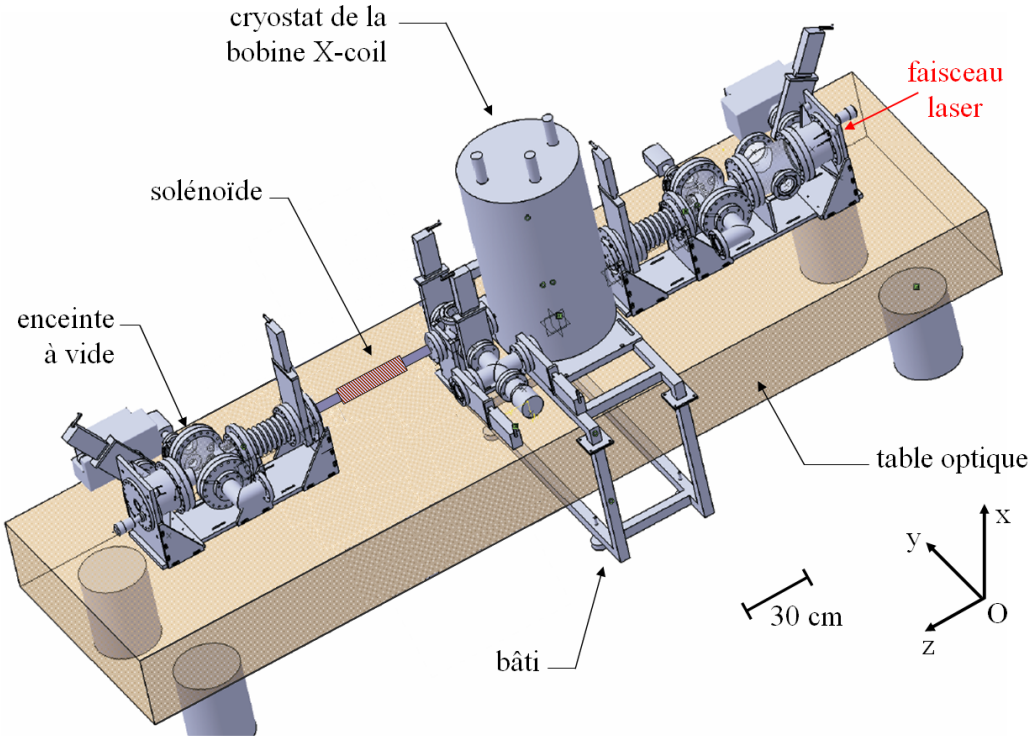


FIGURE 2.40 – Schéma de la table optique sur laquelle est fixée l'enceinte à vide. On peut y voir le solénoïde placé autour du gros tube, et le cryostat de la bobine X-coil autour du petit. Le cryostat repose sur un bâti qui ne fait aucun contact mécanique avec la table optique.

où $V_{\text{tot}} \sim 20$ dm^3 est le volume total de l'enceinte à vide. Cette expression ne tient pas compte des phénomènes de dégazages. Il est de l'ordre de deux minutes. Dans cette première phase, la vitesse de pompage n'est pas limitée par la conductance des tubes de l'enceinte mais par la vitesse de la pompe primaire.

La pompe turbomoléculaire permet d'atteindre quelques 10^{-7} mbar. Sa vitesse de pompage est de l'ordre de quelques litres par seconde pour des pressions de l'ordre du mbar. Elle atteint $v_{\text{t}} = 70$ L.s^{-1} à partir de 10^{-3} mbar. Le temps nécessaire pour passer de 10^{-3} mbar à 10^{-7} mbar est ici limité par la conductance du petit tube [14] qui traverse le cryostat de la bobine X-coil. La vitesse effective de pompage est donnée par [121] :

$$v_{\text{e}} = \left(\frac{1}{v_{\text{t}}} + \frac{1}{C_{\text{tube}}}\right)^{-1} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}, \tag{2.194}$$

Le temps nécessaire pour faire diminuer la pression de 10^{-3} mbar à 10^{-7} mbar dans la moitié de l'enceinte située après le petit tube est de l'ordre de 10 minutes (sans

14. Pour la pression à laquelle la pompe turbomoléculaire est lancée, cette conductance est calculée en régime moléculaire [121].

tenir compte du dégazage).

Afin de diminuer ce temps de pompage, un tombac a été installé en parallèle du petit tube (non visible sur la figure 2.40). Sa conductance, en tenant compte des tubes de raccord à l'enceinte, est $C_{\text{tombac}} = 1.8 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-1}. Lorsque plusieurs canalisations sont en parallèle, la conductance totale du système s'écrit comme la somme des conductances des différentes canalisations [121]. Nous avons donc :

$$C_{\text{tot}} = C_{\text{tube}} + C_{\text{tombac}} = 3.3 \times 10^{-4} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}, \tag{2.195}$$

et une vitesse effective de pompage de 3.3×10^{-4} m^3.s^{-1}. Le temps nécessaire pour atteindre 10^{-7} mbar est donc divisé par deux.

La conductance du gros tube autour duquel est placé le solénoïde est de 8.6×10^{-3} m^3.s^{-1}. Le temps nécessaire pour diminuer la pression de 10^{-3} mbar à 10^{-7} mbar dans la moitié de l'enceinte située derrière est de l'ordre de quelques dizaines de secondes. Il n'est donc pas nécessaire de placer un tombac en parallèle.

Enfin, les pompes ioniques ont une vitesse de pompage de 0.55 L.s^{-1}. Elles permettent d'entretenir le vide à des pressions autour de 10^{-7} mbar (ultravide) lors des mesures de biréfringence magnétique dans le vide.

Pour descendre à des pressions inférieures (10^{-8} à 10^{-9} mbar), il est nécessaire d'étuver la cavité pour accélérer la libération des différentes molécules (de l'eau essentiellement) adsorbées sur les parois en inox de l'enceinte à vide. Pour cela, un câble chauffant a été enroulé autour des chambres et des tubes de l'enceinte.

La mesure de la pression est réalisée grâce à deux types de jauges :
- deux jauges à diaphragme sont placées aux extrémités du petit tube.
- trois jauges ioniques sont placées au niveau de la croix centrale et des chambres contenant les miroirs.

Un analyseur de gaz résiduel peut également être mis en place au centre de l'enceinte. Il permet de connaître la composition du gaz résiduel.

Le dégazage sans étuvage a été évalué de différentes manières :
- en mesurant la pression d'équilibre atteinte après plusieurs jours de pompage,
- en mesurant la remontée de la pression après avoir arrêté la pompe ionique de l'une des chambres contenant les miroirs,
- en mesurant la remontée de la pression dans les différents éléments de l'enceinte isolés par des vannes, toutes pompes éteintes.

Le taux de dégazage obtenu est de l'ordre de quelques 10^{-7} mbar.L.s^{-1} au niveau des chambres et de quelques 10^{-6} mbar.L.s^{-1} à quelques 10^{-5} mbar.L.s^{-1} au niveau de la croix centrale, selon le nombre d'heure pendant lesquelles l'enceinte a été

pompée au préalable. Cette différence est expliquée par le fait, parmi les nombreuses connexions présentes sur la croix centrale, certaines de type KF pour des raisons de commodité. La vitesse de dégazage est donc de quelques mbar par heure au centre de l'enceinte. Cela a été pris en compte lors des mesures dans l'hélium et le xénon (pour lesquelles aucune pompe n'est en fonctionnement) qui ont été réalisées suffisamment rapidement pour pouvoir négliger l'effet du gaz dégazé dans l'enceinte. Lors des mesures dans le vide, les pompes ioniques sont en marche de façon à évacuer les gaz désorbés. Le dégazage de l'enceinte à vide n'a donc pas affecté les mesures de biréfringences magnétiques que nous avons effectuées.

2.6.3 Mesures dans les gaz et dans le vide

Avant toute mesure de biréfringence, l'enceinte à vide est pompée grâce aux pompes primaire et turbomoléculaire jusqu'à des pressions de quelques 10^{-7} mbar. Des bouteilles de gaz sous pression sont raccordées à l'enceinte au niveau de la croix centrale. Elles permettent l'injection de gaz par l'intermédiaire de détendeurs et de microfuites. Cette manipulation doit être réalisée avec une grande précaution. En effet, une injection trop rapide de gaz dans l'enceinte détériore les miroirs de façon irréversible, ce qui se traduit par une diminution de leur finesse qui passe de 480000 à moins de 300000. Nous avons réalisé des mesures dans des gaz d'hélium et de xénon de haute pureté (supérieure à 99.9999% pour la bouteille d'hélium et supérieure à 99.998 % pour la bouteille de xénon) à différentes pressions. Entre deux mesures, l'enceinte est pompée jusqu'à quelques 10^{-7} mbar. Lors des mesures dans le vide, les pompes ioniques fonctionnent en continu ce qui permet d'avoir une pression de quelques 10^{-7} mbar. Une bouteille de diazote est également connectée à l'enceinte. Elle permet de faire remonter la pression à 1 bar lorsqu'il est nécessaire de l'ouvrir (pour changer les miroirs par exemple).

L'enceinte à vide a été dessinée de façon à minimiser l'influence des perturbations dues au champ magnétique sur le signal mesuré. Cependant, nous observons sur la densité spectrale de puissance du signal d'erreur de l'asservissement présentée sur la figure 2.27, des structures qui correspondent à des résonances propres de l'enceinte. Ces résonances peuvent être excitées par l'application d'un champ magnétique pulsé via différents phénomènes. Tout d'abord, le tir de champ magnétique s'accompagne d'une onde acoustique due au tir qui se propage dans l'air jusqu'aux chambres qui contiennent les miroirs de la cavité optique. Si l'on considère que les miroirs sont situés à environ 1 m de la bobine X-coil, la vitesse du son dans l'air étant de 340 $m.s^{-1}$, l'onde acoustique doit mettre environ 3 ms pour arriver jusqu'au miroir. Cet ordre de grandeur est en accord avec les mesures réalisées avec un accéléromètre et

présentées dans la thèse de Paul Berceau [72].

De plus, le petit tube en inox qui traverse la bobine X-coil est soumis à un champ magnétique variable de quelques teslas. Il s'y établit des courants de Foucault, par induction magnétique, dont l'intensité est proportionnelle à $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$. Le petit tube est alors soumis à une force de Laplace F_{L} proportionnelle à $B \times I$ soit :

$$F_{\mathrm{L}} \propto B \times \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \tag{2.196}$$

Une solution pour éviter ce phénomène est de remplacer le petit tube en inox par un tube en verre. Cela pose certaines difficultés sur notre expérience car, en cas de défaillance des pieds pneumatiques de la table optique, un tube en verre se briserait à l'intérieur du cryostat, ce qui détériorerait de façon irréversible les miroirs de la cavité. D'autre part, le diamètre interne des tubes en verre en notre possession est tel que les caractéristiques de la cavité Fabry-Perot étaient dégradées en termes de finesse et de transmission. Les mesures ont donc été réalisées avec un tube en inox. L'influence de l'excitation des résonances mécaniques de l'enceinte à vide par le champ magnétique pulsé sera détaillée dans le chapitre 4.

Nous venons de décrire et de caractériser les principaux éléments du dispositif expérimental. Nous allons maintenant présenter les différentes mesures de biréfringences magnétiques réalisées avec celui-ci au cours de cette thèse.

Chapitre 3

Mesures de biréfringences magnétiques circulaires

3.1 Introduction

Nous présenterons dans ce chapitre les mesures de la constante de Verdet réalisées dans deux gaz nobles : l'hélium et le xénon. Ces mesures présentent deux principaux intérêts.

Tout d'abord, elles permettent d'évaluer l'effet systématique dû à l'effet Faraday lors des mesures d'effet Cotton-Mouton dans les gaz, qui seront détaillées dans le chapitre 4. Rappelons ici l'expression du rapport des intensités extraordinaire I_{e} et ordinaire I_{t}, développée dans le chapitre précédent (équation (2.142)) :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + \underbrace{[\epsilon + \Theta_{\mathrm{F}}(t)]^2}_{\text{terme de rotation}} + \underbrace{[\Gamma + \Psi(t)]^2}_{\text{terme d'ellipticité}} . \tag{3.1}$$

σ^2 est le taux d'extinction des polariseurs. $I_{\mathrm{t,f}}$ est l'intensité ordinaire filtrée pour tenir compte du filtre passe bas d'ordre un de la cavité Fabry-Perot (voir paragraphe 2.3.2). Θ_{F} est l'angle de rotation de la polarisation dû à un effet Faraday. Il est proportionnel à la constante de Verdet V. Ψ est l'ellipticité due à un effet Cotton-Mouton. Elle est proportionnelle à la constante k_{CM}. ϵ et Γ sont les termes de rotation et d'ellipticité statiques dus à la biréfringence de la cavité Fabry-Perot. Lors des mesures d'effet Cotton-Mouton, un champ magnétique transverse est appliqué par la bobine X-coil. Le champ a également une composante longitudinale (parallèle à la direction de propagation de la lumière), de par la géométrie de la bobine et une éventuelle imperfection d'alignement entre son axe et le faisceau lumineux, ce qui entraîne un effet parasite : l'effet Faraday. Nous verrons par la suite que l'effet Faraday a une contribution non négligeable au signal global lors des mesures d'effet Cotton-Mouton dans les gaz d'hélium et de xénon. Mesurer leur constante de Verdet permet donc de quantifier l'effet systématique attendu.

Par ailleurs, les constantes de Verdet de ces gaz nobles font l'objet de calculs *ab initio* de chimie quantique. La comparaison entre notre valeur expérimentale et la prédiction théorique permet donc de tester les méthodes de calculs, notamment vis-à-vis de la prise en compte de la corrélation électronique et des effets relativistes.

Nous détaillerons dans un premier temps la procédure d'acquisition des données et la méthode d'analyse. L'effet systématique principal à considérer lors de ces mesures est l'effet Faraday des miroirs. Nous rapporterons ici une estimation de leur constante de Verdet, puis nous quantifierons l'effet systématique induit. Les résultats expérimentaux obtenus dans l'hélium et le xénon seront ensuite exposés, puis comparés à d'autres mesures et aux prédictions de chimie quantique.

3.2 Acquisition et analyse des données expérimentales

3.2.1 Dispositif expérimental et acquisition des données

Le champ magnétique longitudinal est produit par le solénoïde décrit dans la section 2.5.2. Il est inséré autour du gros tube de l'enceinte à vide comme nous pouvons le voir sur les figures 2.39 et 2.40. Le champ magnétique est modulé à la fréquence $\nu = 18$ Hz. La valeur efficace du courant est mesurée par un ampèremètre placé entre le solénoïde et la source de courant alternative qui l'alimente. Nous en déduisons la valeur du champ en utilisant le facteur de forme donné dans le paragraphe 2.5.2 : $B/I = (1.42 \pm 0.02) \times 10^{-3}$T/A. Les données sont enregistrées pour différentes valeurs du courant comprises entre 0 à 3 A d'amplitude, ce qui correspond à un champ maximal de 4.3 mT.

La constante de Verdet du gaz est mesurée à différentes pressions P. Avant la première injection d'hélium ou de xénon, l'enceinte à vide est pompée jusqu'à quelques 10^{-7} mbar. Le gaz est ensuite injecté via le système de détendeur et microfuites décrit dans le paragraphe 2.6.3. Les mesures à une pression donnée étant réalisées en quelques minutes, l'enceinte n'est pas pompée entre deux pressions. De l'hélium ou du xénon est directement réintroduit pour atteindre la pression désirée, mesurée grâce aux jauges à diaphragme. Comme précisé précédemment, la température du gaz à l'intérieur du solénoïde lors des mesures est $T = (294 \pm 1)$ K. Nous obtenons donc la constante de Verdet à la température T et à la pression P, notée $V(T, P)$, exprimée en rad.T^{-1}.m^{-1}. Dans le domaine de températures et pressions pour lequel le gaz peut être considéré comme parfait, $V(T, P)$ est relié à la constante normalisée à $T_0 = 273.15$ K et à 1 atm, notée V^{N}, comme suit :

$$V(T, P) = V^{\mathrm{N}} \times \frac{T_0}{T} \times P. \tag{3.2}$$

V^{N} est exprimée en rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}. Nous définissons également la constante de Verdet $V^{\mathrm{n}}(T)$ à la température T et à 1 atm telle que :

$$V(T, P) = V^{\mathrm{n}}(T) \times P. \tag{3.3}$$

$V^{\mathrm{n}}(T)$ est exprimée en rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}. Pour chaque pression P nous réalisons une mesure de finesse par mesure du temps de vie des photons dans la cavité, comme décrit dans la section 2.3.2.

Lors des mesures, les intensités extraordinaire I_{e} et ordinaire I_{t} sont enregistrées

via un oscilloscope différentiel. L'intensité ordinaire est ensuite filtrée numériquement par un filtre passe-bas du premier ordre équivalent à la cavité Fabry-Perot, comme décrit dans le paragraphe 2.3.2.

3.2.2 Analyse des données

Obtention de la constante de Verdet

Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, l'angle de rotation Θ_{F} de la polarisation linéaire incidente dû à l'effet Faraday est obtenu à partir du rapport des intensités extraordinaire I_{e} et ordinaire filtrée $I_{\mathrm{t,f}}$ qui s'écrit :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + [\epsilon + \Theta_{\mathrm{F}}(t)]^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2. \tag{3.4}$$

Les expressions de Θ_{F} et Ψ ont été obtenues dans le chapitre 2. Nous les rappelons ici :

$$\Theta_{\mathrm{F}} = \frac{2F}{\pi}\theta_{\mathrm{F}} = \frac{2FL_{\mathrm{B}}}{\pi}V(T,P)B, \tag{3.5}$$

F est la finesse de la cavité Fabry-Perot. θ_{F} est l'angle dont à tourné la polarisation linéaire incidente après un passage dans le champ magnétique. L_{B} est la longueur effective du solénoïde. Sa mesure est détaillée dans la section 2.5.2. Nous avons $L_{\mathrm{B}} = (3.08 \pm 0.06) \times 10^{-1}$ m. B est le champ magnétique longitudinal produit par le solénoïde sur le faisceau lumineux. Notons que l'effet Faraday peut également être donné par la constante Faraday k_{F}, avec :

$$k_{\mathrm{F}}(T,P) = \frac{\lambda}{\pi}V(T,P), \tag{3.6}$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière.

De la même manière nous écrivons l'ellipticité induite par un champ magnétique transverse $B_{\perp}$:

$$\Psi = \frac{2FL_{\mathrm{B},\perp}}{\lambda}k_{\mathrm{CM}}(T,P)B_{\perp}^2 \sin(2\theta), \tag{3.7}$$

La composante transverse du champ provient de la géométrie du solénoïde et des imprécisions d'alignement entre son axe et le faisceau lumineux. θ est l'angle qu'elle fait avec la polarisation linéaire incidente. $L_{\mathrm{B},\perp}$ est la longueur effective du solénoïde pour l'effet Cotton-Mouton. Elle est obtenue à partir de l'équation (2.189). Vu le profil longitudinal quasi rectangulaire présenté sur la figure 2.38, nous prendrons $L_{\mathrm{B},\perp} = L_{\mathrm{B}}$. $k_{\mathrm{CM}}(T,P)$ est la constante d'effet Cotton-Mouton à la température T et à la pression P, exprimée en T^{-2}.

En développant l'équation (3.4), nous obtenons :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}}{I_{\mathrm{t,f}}} = \underbrace{\sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2}_{\text{terme statique}} + \underbrace{2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}} + \Theta_{\mathrm{F}}^2}_{\text{effet Faraday}} + \underbrace{2\Gamma\Psi + \Psi^2}_{\text{effet Cotton-Mouton}} . \tag{3.8}$$

Pour évaluer l'importance du signal Cotton-Mouton par rapport au signal Faraday, nous calculons le rapport suivant :

$$R_{\mathrm{F/CM}} = \frac{2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}} + \Theta_{\mathrm{F}}^2}{2\Gamma\Psi + \Psi^2}, \tag{3.9}$$

où Θ_{F} et Ψ sont obtenus à partir des équations (3.5) et (3.7).

Lors de l'acquisition des données expérimentales, l'ellipticité statique due à la cavité Γ était de l'ordre de 3×10^{-3} rad. Le déphasage δ_{eq} étant de quelques 10^{-7} rad, nous obtenons l'angle ϵ à partir de l'équation (2.105) : $\epsilon \sim 40$ μrad. Pour calculer l'ellipticité induite, nous avons besoin d'évaluer la composante transverse du champ magnétique. Prenons $B_{\perp} \sin(2\theta) = B$. Ce postulat correspond au cas le plus défavorable pour lequel le champ contribue autant à l'effet Faraday qu'à l'effet Cotton-Mouton. Les valeurs prises pour les constantes $V(T,P)$ et $k_{\mathrm{CM}}(T,P)$ sont calculées à partir des valeurs V^{N} et $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ théoriques publiées dans la littérature, grâce à l'équation (3.2) (une expression similaire peut être établie pour la constante k_{CM}). Le tableau 3.1 résume les différents paramètres expérimentaux lors des mesures dans l'hélium et dans le xénon. Pour ces deux gaz, le signal qui correspond à l'effet Faraday est au moins un million de fois plus important que celui correspondant à l'effet Cotton-Mouton. Il est donc justifié de négliger l'ellipticité Ψ dans l'équation (3.4), d'où :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + \Gamma^2 + [\epsilon + \Theta_{\mathrm{F}}(t)]^2. \tag{3.10}$$

	hélium	xénon
T (K)	294	
$B_0 = B_{\perp,0} \sin(2\theta)$ (mT)	4.3	
$L_{\mathrm{B}} \simeq L_{\mathrm{B},\perp}$ (m)	3.08×10^{-1}	
Γ (rad)	3×10^{-3}	
ϵ (rad)	40×10^{-6}	
P (atm)	30×10^{-3}	3×10^{-3}
F	465000	475000
V^{N} (rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1})	3.72×10^{-5}, [122]	3.46×10^{-3}, [122]
$k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ (T^{-2}.atm^{-1})	2.40×10^{-16}, [123]	2.67×10^{-14}, [124]
$R_{\mathrm{F/CM}}$	1×10^6	7×10^6

TABLE 3.1 – Paramètres expérimentaux pour le calcul du rapport $R_{\mathrm{F/CM}}$.

Le champ magnétique appliqué est modulé sinusoïdalement à la fréquence ν :

$$B(t) = B_0 \sin(2\pi\nu t + \phi). \tag{3.11}$$

L'angle de rotation Θ_{F} est donc donné par :

$$\Theta_{\mathrm{F}}(t) = \Theta_{\mathrm{F},0} \sin(2\pi\nu t + \phi), \tag{3.12}$$

$$\text{avec } \Theta_{\mathrm{F},0} = \frac{2FL_{\mathrm{b}}}{\pi} V(T,P) B_0. \tag{3.13}$$

L'équation (3.10) peut se décomposer suivant sa composante continue et ses composantes aux fréquences ν et 2ν, qui sont résumées dans le tableau 3.2.

fréquence	amplitude
DC	$\sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2 + \frac{\Theta_{\mathrm{F},0}^2}{2}$
ν	$2\epsilon\Theta_{\mathrm{F},0}$
2ν	$\frac{\Theta_{\mathrm{F},0}^2}{2}$

TABLE 3.2 – Amplitude des composantes du rapport des intensités extraordinaire et ordinaire.

La fréquence de modulation ν a été prise égale à 18 Hz. Le temps caractéristique de variation du champ magnétique est comparable au temps de vie τ des photons dans la cavité qui est de l'ordre de la milliseconde. Les photons sont donc soumis à un champ moyen au cours de leur passage dans la cavité. Pour tenir compte de cet effet, il faut appliquer au champ magnétique le filtre passe-bas d'ordre 1 de la cavité Fabry-Perot [125]. Le champ filtré B_{f} s'écrit :

$$B_{\mathrm{f}}(t) = \frac{B_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2}} \sin\left(2\pi\nu t + \phi - \operatorname{artan}\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)\right), \tag{3.14}$$

où ν_{c} est la fréquence de coupure de la cavité. Les trois composantes fréquentielles du rapport $I_{\mathrm{e}}/I_{\mathrm{t,f}}$ s'écrivent donc :

$$A_{\mathrm{DC}} = \sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2 + \frac{\Theta_{\mathrm{F},0}^2}{2}, \tag{3.15}$$

$$A_{\nu}(t) = \frac{2\epsilon\Theta_{\mathrm{F},0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2}} \sin\left[2\pi\nu t + \phi - \operatorname{artan}\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)\right], \tag{3.16}$$

$$A_{2\nu}(t) = -\frac{\Theta_{\mathrm{F},0}^2}{2\left(1 + \left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2\right)} \cos\left[4\pi\nu t + 2\phi - 2\operatorname{artan}\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)\right]. \tag{3.17}$$

Nous notons

$$A_{\nu,0} = \frac{2\epsilon\Theta_{\mathrm{F},0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2}} \qquad \text{et} \qquad A_{2\nu,0} = \frac{\Theta^2_{\mathrm{F},0}}{2\left(1+\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2\right)}, \tag{3.18}$$

les amplitudes correspondantes. Dans les articles [79] et [126], dans lesquels nous présentons les mesures des effets Faraday de l'hélium et du xénon gazeux, l'expression de l'amplitude $A_{2\nu,0}$ diffère de celle de l'équation (3.18). Nous avions alors appliqué le filtre passe bas de la cavité au signal $\Theta^2_{\mathrm{F}}(t)$. Dans l'analyse exposée ici, le filtre passe bas est appliqué puis le signal est mis au carré pour obtenir $A_{2\nu,0}$. Compte tenu de la fréquence ν de modulation du champ magnétique à laquelle nous avons travaillé, les résultats obtenus avec ces deux analyses sont compatibles en considérant les incertitudes à 1σ.

Dans un premier temps, la composante continue du rapport des intensités est soustraite. Nous obtenons la fonction $f(t)$ calculée comme suit :

$$f(t) = \frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} - \left\langle \frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} \right\rangle \equiv \frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} - A_{\mathrm{DC}}, \tag{3.19}$$

où $\left\langle \frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} \right\rangle$ représente la valeur moyenne de $\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)}$. Les amplitudes des composantes fréquentielles à ν et 2ν sont obtenues à partir de la transformée de Fourier de $f(t)$. Elle est présentée sur la figure 3.1 pour une acquisition dans 60 mbar d'hélium, et un champ de 4.3 mT. Deux pics sont présents à 18 Hz et 36 Hz, dont les amplitudes correspondent à $A_{\nu,0}$ et $A_{2\nu,0}$.

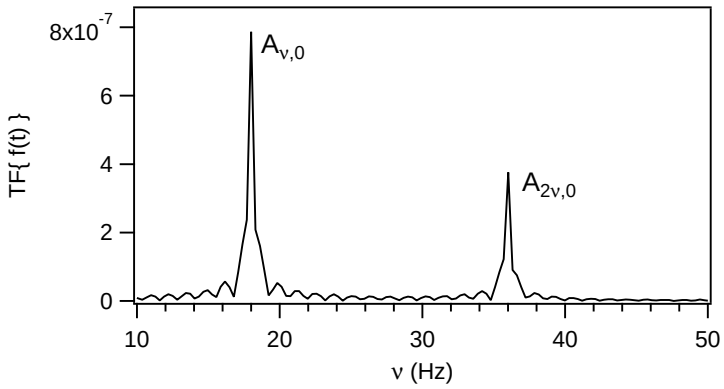


FIGURE 3.1 – Transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ calculée à partir de l'équation (3.19), pour une acquisition dans un gaz d'hélium à $P \simeq 60$ mbar, et un champ de 4.3 mT produit par le solénoïde. Les composantes fréquentielles $A_{\nu,0}$ et $A_{2\nu,0}$ apparaissent aux fréquences 18 Hz et 36 Hz.

$A_{\nu,0}$ dépend de l'angle ϵ qui est dû à la biréfringence statique de la cavité optique. D'après l'équation (2.105), il est proportionnel au déphasage δ_{eq} induit par la cavité qui n'est pas connu avec précision. L'amplitude du pic à la fréquence ν ne permet donc pas de remonter précisément à la constante de Verdet du gaz.

L'amplitude $A_{2\nu,0}$ ne dépend que de $\Theta_{\mathrm{F},0}$. C'est donc celle qui sera utilisée pour obtenir V. A partir des équations (3.13) et (3.18), elle s'écrit :

$$A_{2\nu,0} = \frac{1}{2\left(1+\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2\right)}\left(\frac{2FL_{\mathrm{b}}}{\pi}\right)^2 V^2(T,P)B_0^2 \equiv K_{\mathrm{V}}B_0^2. \tag{3.20}$$

Elle est mesurée pour différentes valeurs du champ magnétique puis tracée en fonction de B_0. La constante de proportionnalité K_{V} est déduite de l'ajustement par un polynôme du second degré des points expérimentaux. Nous avons, dans un premier temps, utilisé un polynôme de la forme : $K_0 + K_1B_0 + K_{\mathrm{V}}B_0^2$. Nous avons vérifié que K_0 et K_1 étaient compatibles avec zéro (le "fond" de la transformée de Fourier de $f(t)$ ayant été au préalable soustrait), avant de réaliser l'ajustement final par $K_{\mathrm{V}}B_0^2$. Les points expérimentaux et la courbe d'ajustement finale, obtenus pour les mesures dans 60×10^{-3} atm d'hélium, sont présentés sur la figure 3.2.

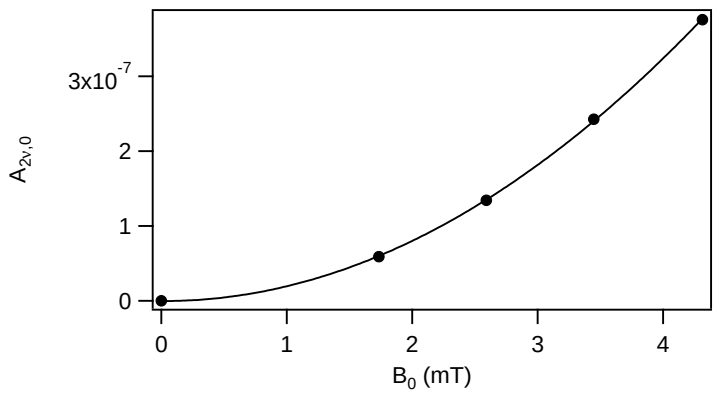


FIGURE 3.2 – Amplitude de la composante à la fréquence 2ν de la fonction $f(t)$ en fonction du champ magnétique. Les ronds noirs représentent les points expérimentaux pour une pression de 60×10^{-3} atm d'hélium. Le trait plein correspond à l'ajustement par un polynôme du second degré.

Le constante de Verdet $V(T,P)$ est ensuite calculée à partir de K_{V} :

$$V(T,P) = \sqrt{2K_{\mathrm{V}}}\sqrt{1+\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2}\,\frac{\pi}{2FL_{\mathrm{b}}}. \tag{3.21}$$

Il est préférable de l'exprimer en fonction des paramètres mesurés expérimentale-

ment, comme le temps de vie τ des photons dans la cavité, soit :

$$V(T,P) = \sqrt{2K_{\mathrm{V}}}\sqrt{1+(4\pi\tau\nu)^2}\frac{1}{4\tau\Delta^{\mathrm{ISL}}L_{\mathrm{b}}}. \tag{3.22}$$

$V(T,P)$ est obtenu suivant cette procédure pour différentes pressions P. Les valeurs sont tracées en fonction de P puis ajustées par une droite pour obtenir $V^{\mathrm{n}}(T)$ exprimé en rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}, tel que :

$$V(T,P) = V^{\mathrm{n}}(T) \times P. \tag{3.23}$$

Ces courbes seront présentées pour l'hélium et le xénon dans la section 3.4.

Évaluation des incertitudes

Le tableau 3.3 résume les incertitudes de type A et B à prendre en compte pour le calcul de l'incertitude sur $V^{\mathrm{n}}(T)$. Conformément à la convention utilisée dans le GUM (Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure) [64], les incertitudes de type A sont celles évaluées par une analyse statistique. Elles concernent le temps de vie des photons dans la cavité et les données issues d'un ajustement. Les incertitudes de type B sont évaluées par d'autres moyens, comme la calibration ou la résolution d'un instrument de mesure par exemple. Elles portent sur les caractéristiques de la bobine (le champ B qu'elle produit et sa longueur effective L_{B}), la longueur d'onde du laser, l'intervalle spectral libre de la cavité ou encore la pression du gaz dans l'enceinte. Il existe également une incertitude de type B sur K_{V} dont l'origine va être discutée dans ce paragraphe.

A partir de l'équation (3.22), nous calculons l'incertitude de type A correspondant à chaque point $V(T,P)$ comme suit :

$$\Delta V(T,P)^{\mathrm{A}} = \sqrt{\left(\frac{\partial V(T,P)}{\partial K_{\mathrm{V}}}\Delta K_{\mathrm{V}}^{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(\frac{\partial V(T,P)}{\partial \tau}\Delta\tau\right)^2}, \tag{3.24}$$

$$= V(T,P)\sqrt{\left(\frac{\Delta K_{\mathrm{V}}^{\mathrm{A}}}{2K_{\mathrm{V}}}\right)^2 + \left(\left[\frac{(4\pi\tau\nu)^2}{1+(4\pi\tau\nu)^2} - 1\right]\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2}. \tag{3.25}$$

$\Delta K_{\mathrm{V}}^{\mathrm{A}}$ est l'incertitude de type A donnée par l'ajustement de $A_{2\nu,0}$ en fonction de B_0 présenté sur la figure 3.2. τ est mesuré pour chaque pression. L'incertitude relative $\frac{\Delta\tau}{\tau}$ sur le temps de vie des photons a été évaluée expérimentalement. Plusieurs mesures de τ ont été effectuées dans les mêmes conditions expérimentales. Une analyse statistique a montré que sa variation est inférieure à 2%. Elle s'explique par des fluctuations thermiques ou des vibrations mécaniques qui peuvent faire varier très

Paramètre	Incertitude relative de type A	Incertitude relative de type B
τ	2.0×10^{-2}	
K_{V}	hélium : $\sim 1.7 \times 10^{-2}$	3.2×10^{-2}
	xénon : $\sim 2.6 \times 10^{-3}$	3.2×10^{-2}
L_{b}		1.9×10^{-2}
Δ^{ISL}		3×10^{-4}
P		2×10^{-3}

TABLE 3.3 – Incertitudes à 1σ utilisées pour le calcul de l'incertitude sur la constante de Verdet.

légèrement le point d'impact du laser sur les miroirs, et donc la réflectivité perçue.

L'ajustement linéaire de $V(T,P)$ en fonction de la pression est pondéré par l'incertitude $\Delta V(T,P)^{\mathrm{A}}$ associée à chaque point expérimental. L'incertitude donnée par l'ajustement sur $V^{\mathrm{n}}(T)$ est notée $\Delta V^{\mathrm{n}}(T)^{\mathrm{A}}$, avec :

$$\frac{\Delta V^{\mathrm{n}}(T)^{\mathrm{A}}}{V^{\mathrm{n}}(T)} \sim 1.5\%. \tag{3.26}$$

Cette incertitude tient compte des incertitudes de type A sur K_{V} et τ, via la pondération de l'ajustement.

Enfin, l'incertitude de type B sur $V^{\mathrm{n}}(T)$ est calculée à partir de l'expression de $V^{\mathrm{n}}(T)$ extraite des équations (3.22) et (3.23). Elle s'exprime comme suit, à partir des incertitudes rapportées dans le tableau 3.3 :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V^{\mathrm{n}}(T)^{\mathrm{B}}}{\Delta V^{\mathrm{n}}(T)} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta K_{\mathrm{V}}^{\mathrm{B}}}{2K_{\mathrm{V}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\Delta^{\mathrm{ISL}})}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L_{\mathrm{b}}}{L_{\mathrm{b}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2}, \\ &= 2.5\%. \end{aligned} \tag{3.27}$$

$\Delta K_{\mathrm{V}}^{\mathrm{B}}/K_{\mathrm{V}}$ est l'incertitude relative de type B sur K_{V}. Elle est obtenue en sommant quadratiquement :

- l'incertitude relative sur le rapport des facteurs de conversion g_{e} et g_{t} des photodiodes $\mathrm{Ph_e}$ et $\mathrm{Ph_t}$ (voir l'équation (2.23)), de 1.5%,
- l'incertitude relative sur le facteur B/I du solénoïde, de 1.4%,

L'incertitude sur le temps de vie des photons dans la cavité τ induit une incertitude sur le filtrage de l'intensité ordinaire I_{t}, la fréquence de coupure ν_{c} étant fonction de τ. En pratique, l'incertitude qui en résulte sur K_{V} est négligeable devant celles sur le champ et les facteurs de conversion des photodiodes. Elle n'est donc pas prise en compte dans ce calcul.

L'incertitude finale sur $V^{\mathrm{n}}(T)$ est obtenue en sommant quadratiquement les incertitudes de type A et B :

$$\Delta V^{\mathrm{n}}(T) = \sqrt{[\Delta V^{\mathrm{n}}(T)^{\mathrm{A}}]^2 + [\Delta V^{\mathrm{n}}(T)^{\mathrm{B}}]^2}. \tag{3.28}$$

3.3 Effets systématiques

Nous évaluerons dans cette section les effets systématiques qui sont présents lors de la mesure de la constante de Verdet de l'hélium et du xénon : l'effet Faraday du gaz résiduel présent dans l'enceinte à vide et l'effet Faraday des miroirs de la cavité.

3.3.1 Effet des gaz résiduels

Avant les mesures de l'effet Faraday de l'hélium ou du xénon gazeux, l'enceinte à vide est pompée jusqu'à une pression de quelques 10^{-7} mbar. L'hélium ou le xénon sont ensuite injectés au fur et à mesure pour réaliser des acquisitions pour différentes pressions. Des mesures réalisées avec un analyseur de gaz résiduels ont permis de connaître les principaux gaz présents dans l'enceinte lorsque la pression est de l'ordre de 10^{-7} mbar. Ils sont résumés dans le tableau 3.4 avec leurs fractions molaires et leurs constantes de Verdet.

gaz	fraction molaire (%)	V^{N} (rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1})	$V(T,P)$ (rad.T^{-1}.m^{-1})
N_2	45	5.2×10^{-4}	2.2×10^{-10}
H_2	40	5.1×10^{-4}	1.9×10^{-10}
H_2O	10	4.6×10^{-4}	4.3×10^{-11}
O_2	2	9×10^{-4}	1.7×10^{-11}
Ar	1.5	7.5×10^{-4}	1.0×10^{-11}
CO_2	1.5	7.7×10^{-4}	1.1×10^{-11}
C_nH_m	< 0.5	$< 4 \times 10^{-3}$	1.9×10^{-11}

TABLE 3.4 – Principaux gaz résiduels présents dans l'enceinte à vide pompée à une pression de 10^{-7} mbar et leurs constantes de Verdet à $\lambda = 1064$ nm. Elles sont issues d'une extrapolation des valeurs expérimentales des références [55] et [56]. C_nH_m désigne différents hydrocarbures, dont des traces ont été détectées. La dernière colonne correspond à leur contribution à l'effet Faraday lorsque la pression de dégazage dans l'enceinte est de 10^{-3} mbar.

Pour calculer l'effet Faraday dû aux gaz résiduels, nous devons tenir compte du dégazage de l'enceinte à vide. Il était de l'ordre de 10^{-3} mbar par heure lors des mesures. L'acquisition des données d'effet Faraday dans l'hélium et le xénon, pour toutes les pressions, a nécessité moins d'une heure. Dans la colonne de droite

du tableau, nous avons rapporté la contribution de chaque gaz résiduel à l'effet Faraday, au bout d'une heure de dégazage. Les constantes $V(T, P)$ y sont calculées pour $T = 294$ K et $P = 10^{-3}$ mbar à partir de l'équation (3.2). Finalement, la constante de Verdet des gaz résiduels au bout d'une heure de dégazage de l'enceinte à vide est de l'ordre de :

$$V_{\text{gaz résiduels}} \simeq 5 \times 10^{-10} \text{rad.T}^{-1}.\text{m}^{-1}. \tag{3.29}$$

Cette valeur est à comparer avec les constantes de Verdet $V(T, P)$ qui correspondent aux plus petites pressions d'hélium et de xénon mesurées. Elles sont d'environ :

- 4×10^{-7} rad.T^{-1}.m^{-1} pour 10 mbar d'hélium,
- 4×10^{-6} rad.T^{-1}.m^{-1} pour 1 mbar de xénon.

L'effet Faraday induit par le dégazage de l'enceinte à vide est trois à quatre ordres de grandeur inférieur à ceux que nous cherchons à mesurer. Il sera donc négligé.

3.3.2 Effet Faraday des miroirs de la cavité

Tout matériau soumis à un champ magnétique longitudinal présente un effet Faraday. Un effet systématique à prendre en considération lors des mesures d'effet Faraday dans les gaz est donc la rotation de la polarisation linéaire incidente par effet Faraday des instruments d'optique placés à proximité du solénoïde. Le plus proche est le miroir M_2 de la cavité Fabry-Perot. Nous avons donc mesuré la constante de Verdet des miroirs utilisés sur l'expérience, et en avons déduit l'effet systématique induit.

Estimation de l'effet Faraday des miroirs

Principe

Afin d'estimer l'effet Faraday des miroirs utilisés sur la cavité Fabry-Perot, nous avons usiné une gorge dans le barillet qui maintient le miroir. Du fil de cuivre de diamètre 125 μm a été bobiné dans cette gorge de façon à appliquer un champ magnétique longitudinal directement sur le miroir.

Une photographie du barillet utilisé est présentée sur la figure 3.3. Le rapport B/I a été mesuré de la même manière que celle décrite pour la calibration du solénoïde dans la section 2.5.2. Il est de :

$$\frac{B}{I} \simeq 3.39 \times 10^{-3} \text{ T.A}^{-1}. \tag{3.30}$$

FIGURE 3.3 – Photographie d'un barillet de miroir utilisé pour la mesure de l'effet Faraday des miroirs de la cavité. Un fil de cuivre est bobiné de façon à appliquer un champ magnétique longitudinal directement sur le miroir.

La procédure d'acquisition et d'analyse des données expérimentales est la même que celle décrite dans la section 3.2. Le champ magnétique B est modulé à la fréquence $\nu = 18$ Hz. La transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ est représentée sur la figure 3.4. La sensibilité n'étant pas suffisante pour observer la composante à 2ν, seule la composante à ν apparaît. Son amplitude est donnée par :

$$A_{\nu,0,\mathrm{m}} = \frac{2\epsilon\Theta_{\mathrm{F},0,\mathrm{m}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2}} \tag{3.31}$$

avec

$$\Theta_{\mathrm{F},0,\mathrm{m}} = \frac{F}{\pi} V_{\mathrm{m}} B_0. \tag{3.32}$$

Un seul miroir étant soumis au champ longitudinal, le facteur $\frac{2F}{\pi}$, qui correspond à l'amplification de l'effet par la cavité optique, a été remplacé par $\frac{F}{\pi}$. V_{m} est la constante de Verdet par réflexion du miroir, exprimée en rad.T^{-1}.

Nous avons alimenté la bobine avec un courant d'amplitude comprise entre 50 mA et 100 mA, ce qui correspond à un champ compris entre 175 μT et 340 μT. Nous avons constaté un échauffement rapide du fil de cuivre de quelques degrés, ce qui entraîne des variations de la biréfringence statique du miroir. Les mesures ont donc été réalisées en appliquant le courant pendant quelques secondes. Nous avons attendu que la bobine soit redescendue à température ambiante avant de l'alimenter à nouveau en courant.

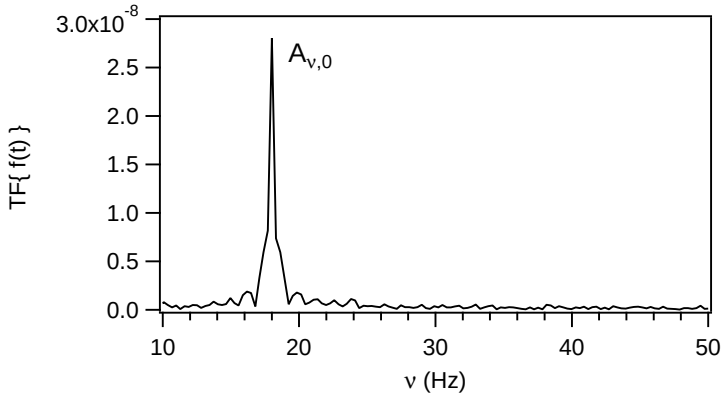


FIGURE 3.4 – Transformée de Fourier de la fonction $f(t)$ calculée à partir de l'équation (3.19) pour un miroir de la cavité soumis à un champ longitudinal d'amplitude $B_0 = 0.254$ mT et modulé à $\nu = 18$ Hz. Seule la composante fréquentielle à ν est visible.

Résultats

La constante de Verdet a été déterminée de deux manières : en mesurant l'amplitude du pic à la fréquence ν en fonction de l'angle ϵ pour un champ magnétique fixé, et en la mesurant en fonction de B_0 pour ϵ fixé.

i) Amplitude du pic à ν en fonction de ϵ

L'amplitude B_0 du champ magnétique est fixée à 0.254 mT. L'angle ϵ est réglé en tournant l'analyseur par rapport au polariseur, la position $\epsilon = 0$ correspondant à une disparition du pic à la fréquence ν. Les points expérimentaux sont ajustés par $K_{\mathrm{V,m}}|\epsilon|$ comme présenté sur la figure 3.5, avec

$$V_{\mathrm{m}} = \frac{K_{\mathrm{V,m}}}{4\tau\Delta^{\mathrm{ISL}}B_0}\sqrt{1+(4\pi\tau\nu)^2}. \tag{3.33}$$

Nous obtenons $V_{\mathrm{m}} \simeq 10^{-6}$ rad.T^{-1} par réflexion.

ii) Amplitude du pic à ν en fonction de B_0

Dans un second temps, ϵ a été fixé à 190 μrad. $A_{\nu,0,\mathrm{m}}$ est mesurée en fonction de l'amplitude B_0 du champ magnétique. Les points expérimentaux sont présentés sur la figure 3.6. Un ajustement linéaire par $K'_{\mathrm{V,m}}B_0$ permet de remonter à la constante de Verdet :

$$V_{\mathrm{m}} = \frac{K'_{\mathrm{V,m}}}{4\tau\Delta^{\mathrm{ISL}}\epsilon}\sqrt{1+(4\pi\tau\nu)^2}. \tag{3.34}$$

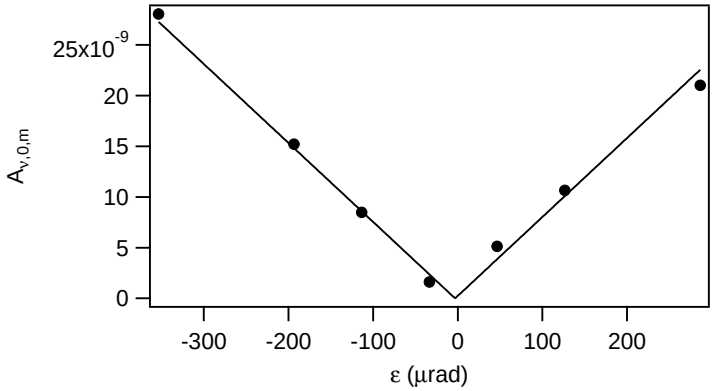


FIGURE 3.5 – Amplitude $A_{\nu,0,\mathrm{m}}$ du pic à la fréquence ν de la fonction $f(t)$ en fonction de l'angle ϵ pour $B_0 = 0.254$ mT. Les ronds noirs représentent les points expérimentaux et le trait plein à la courbe d'ajustement.

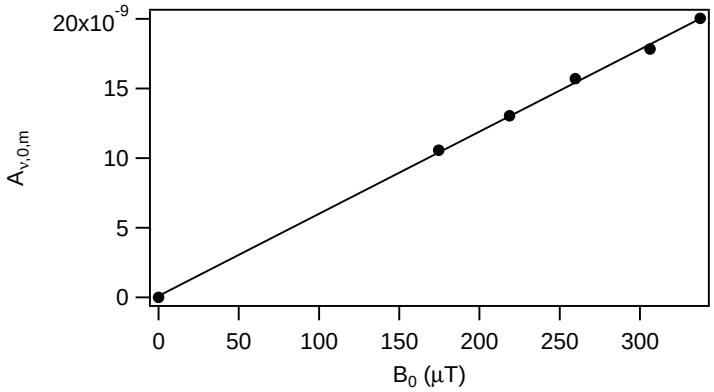


FIGURE 3.6 – Amplitude $A_{\nu,0,\mathrm{m}}$ du pic à la fréquence ν de la fonction $f(t)$ en fonction de l'amplitude B_0 du champ magnétique pour $\epsilon = 190$ μrad. Les ronds noirs représentent les points expérimentaux et le trait plein à la courbe d'ajustement.

Nous obtenons $V_\mathrm{m} \simeq 10^{-6}$ rad.T^{-1} par réflexion, ce qui est en accord avec le résultat précédent, comme attendu.

La constante de Verdet V_m des miroirs utilisés sur l'expérience BMV est donc de l'ordre de 10^{-6} rad.T^{-1} par réflexion. Notre objectif étant de donner une estimation, nous n'avons pas poussé l'analyse jusqu'au calcul des incertitudes. Cette valeur est du même ordre de grandeur que d'autres mesures expérimentales publiées dans la littérature et résumées dans le tableau 3.5.

Effet systématique pour les mesures dans les gaz

Le miroir M_2 de la cavité Fabry-Perot est situé à $z \sim 75$ cm du centre du solénoïde qui produit le champ magnétique longitudinal B pour les mesures dans les

Référence	Dispositif	Finesse	V (rad.T^{-1} par réflexion)
[127]	un miroir $\lambda = 514.5\,\mathrm{nm}$	1 réflexion	3.7×10^{-6}
[66]	Fabry-Perot $\lambda = 1064\,\mathrm{nm}$	70000	2×10^{-7}
Ce travail	Fabry-Perot $\lambda = 1064\,\mathrm{nm}$	476000	$\sim 1 \times 10^{-6}$

TABLE 3.5 – Valeurs expérimentales de constantes de Verdet par réflexion de miroirs interférentiels.

gaz. D'après l'équation (2.191) qui donne la valeur de B en fonction de la distance z, le champ résiduel sur le miroir est de 3.6×10^{-7} T.A^{-1}. Le courant maximal traversant le solénoïde a une amplitude de 3 A, soit un champ $B_\mathrm{m} = 1.1\ \mu$T sur M_2.

L'amplitude du pic à la fréquence 2ν induit par un tel champ est donnée par :

$$A_{2\nu,0,\mathrm{m}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\left(\frac{2\nu}{\nu_\mathrm{c}}\right)^2}} \left(\frac{F}{\pi}\right)^2 V_\mathrm{m}^2 B_\mathrm{m}^2 \sim 1.3 \times 10^{-14}, \tag{3.35}$$

avec une $F = 465000$. Cette valeur est à comparer aux amplitudes obtenues, pour un même courant d'alimentation, dans les gaz d'hélium et de xénon. Les mesures ont été réalisées avec une pression minimale de 10 mbar d'hélium et de 1 mbar de xénon. Les amplitudes $A_{2\nu,0}$ correspondantes sont respectivement de 1.1×10^{-8} et 7.9×10^{-7}. Dans les deux cas, la contribution de l'effet du miroir M_2 est négligeable devant celle du gaz. Le miroir M_1 étant positionné à environ 1.5 m du centre du solénoïde, sa contribution est encore plus faible que celle de M_2. L'effet Faraday des miroirs de la cavité ne sera donc pas pris en compte lors de l'analyse.

3.4 Effet Faraday des gaz d'hélium et de xénon

3.4.1 Résultat dans l'hélium gazeux

Nos mesures

La constante de Verdet $V(T, P)$ de l'hélium a été mesurée à $T = (294 \pm 1)$ K pour des pressions comprises entre 10 mbar et 60 mbar. La finesse moyenne était alors de 465000, le temps de vie des photons étant mesuré avant chaque acquisition à une pression P. Les valeurs obtenues sont présentées sur la figure 3.7 en fonction de la pression. L'incertitude de type A sur chaque point expérimental, représenté par un rond noir, est calculée à partir de l'expression (3.24).

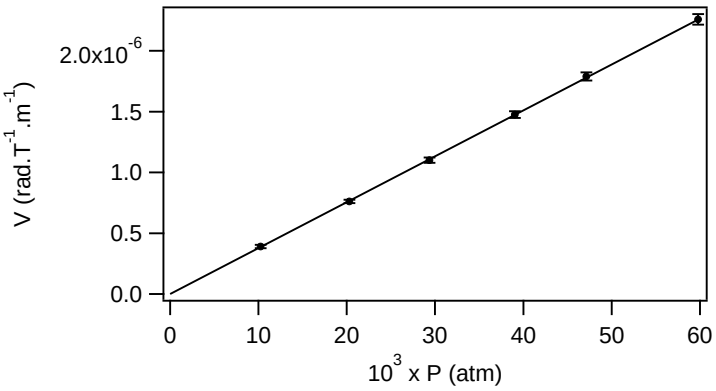


FIGURE 3.7 – Constante de Verdet $V(T, P)$ mesurée dans un gaz d'hélium en fonction de la pression. Les ronds noirs représentent les points expérimentaux avec leur incertitude de type A à 1σ. La droite en trait plein correspond à l'ajustement linéaire en fonction de la pression.

Dans le domaine de pressions étudié, l'hélium se comporte comme un gaz parfait. Nous observons donc une augmentation linéaire de la constante de Verdet avec P, conformément à l'équation (3.3). L'ajustement linéaire des données expérimentales est superposé en trait plein sur la figure 3.7. Nous obtenons :

$$V^{\mathrm{n}}(T = 294\ \mathrm{K}) = (3.77 \pm 0.06) \times 10^{-5}\ \mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}. \tag{3.36}$$

L'incertitude donnée ici est celle de type A issue de l'ajustement. L'ordonnée à l'origine est compatible avec zéro à 1σ. En utilisant les équations (3.27) et (3.28), nous calculons l'incertitude totale sur la constante de Verdet. Finalement :

$$V^{\mathrm{n}}(T = 294\ \mathrm{K}) = (3.77 \pm 0.11) \times 10^{-5}\ \mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}. \tag{3.37}$$

Afin de comparer cette mesure à d'autres valeurs expérimentales ou théoriques, nous la normalisons à $T_0 = 273.15$ K. La constante de Verdet normalisée V^{N} est calculée comme suit :

$$V^{\mathrm{N}} = V^{\mathrm{n}}(T)\frac{T}{T_0}. \tag{3.38}$$

Nous obtenons :

$$V^{\mathrm{N}} = (4.06 \pm 0.12) \times 10^{-5}\ \mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}. \tag{3.39}$$

A partir de cette valeur, nous calculons la constante de Faraday à $T_0 = 273.15$ K :

$$k_{\mathrm{F}}^{\mathrm{N}} = (1.37 \pm 0.04) \times 10^{-11}\ \mathrm{T^{-1}.atm^{-1}}. \tag{3.40}$$

Ce résultat a fait l'objet d'une publication [79] donnée dans l'annexe D.

Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales

La publication la plus récente et la plus exhaustive présentant des mesures précises des constantes de Verdet de différents gaz, dont l'hélium, est celle de L. Ingersoll et H. Liebenberg en 1956 [55]. Les mesures ont été réalisées pour différentes longueurs d'ondes, allant de 363.5 nm à 900 nm. Les points expérimentaux sont représentés sur la figure 3.8. Aucune valeur n'est donnée à 1064 nm. Cependant il est possible de faire une extrapolation pour l'obtenir.

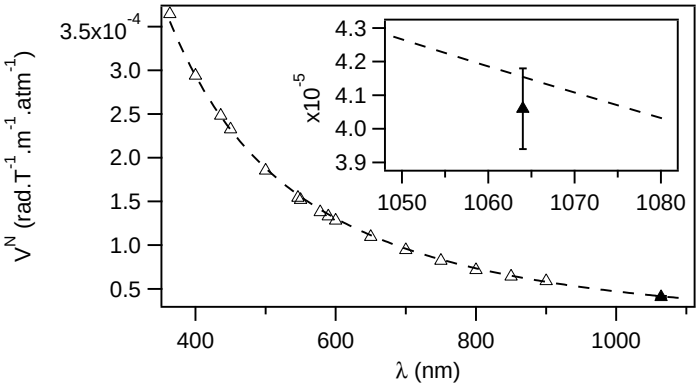


FIGURE 3.8 – Valeurs expérimentales de la constante de Verdet de l'hélium en fonction de la longueur d'onde à $T_0 = 273.15$ K. Les triangles blancs correspondent aux valeurs de la référence [55]. Leur ajustement par a/λ^2 est représenté en pointillés. Le triangle noir correspond à notre mesure, la barre d'erreur représente l'incertitude à 1σ. L'encart est un zoom autour de $\lambda = 1064$ nm.

La constante de Verdet est liée à l'indice de réfraction de la lumière n comme suit [128, 129] :

$$V \propto \nu \frac{\partial n}{\partial \nu}, \tag{3.41}$$

où $\nu = c/\lambda$ est la fréquence de l'onde lumineuse. D'après la loi de Cauchy, l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde s'écrit :

$$n = n_0 + \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + ... \tag{3.42}$$

ce qui donne pour la constante de Verdet :

$$V \propto \frac{a}{\lambda^2} + \frac{2b}{\lambda^4} + ... \tag{3.43}$$

Les constantes de Verdet de la référence [55] sont ajustées par a/λ^2. La courbe d'ajustement, représentée en pointillés sur la figure 3.8, se superpose parfaitement

aux données expérimentales. Il n'est donc pas nécessaire de rajouter le terme en $2b/\lambda^4$. La valeur à $\lambda = 1064$ nm déduite de cette extrapolation est :

$$V^{\mathrm{N}} = (4.15 \pm 0.05) \times 10^{-5} \text{ rad.T}^{-1}\text{.m}^{-1}\text{.atm}^{-1}. \tag{3.44}$$

L'incertitude a été calculée en sommant quadratiquement l'incertitude donnée par l'ajustement avec celle typique d'une mesure, qui est inférieure à 1% selon les auteurs. Il faut cependant certainement ajouter une incertitude due au fait que ces mesures ne sont pas absolues. En effet, l'appareil a été étalonné par la mesure de l'effet Faraday de l'eau. Les constantes de Verdet données pour les gaz sont calculées par rapport à une valeur de référence, qui est la constante de Verdet de l'eau. Au contraire, la mesure que nous avons réalisée au cours de cette thèse est absolue.

Notre mesure est donc compatible à 1σ avec la valeur expérimentale publiée par L. Ingersoll et H. Liebenberg [55].

Comparaison avec les valeurs théoriques

Les valeurs théoriques les plus récentes de la constante de Verdet de l'hélium ont été publiées par U. Ekström *et al.* en 2005 [122] et I. Savukov en 2012 [129].

Dans la référence [122] la constante de Verdet est calculée par une méthode Hartree-Fock. Deux types de calculs sont réalisés : en tenant compte ou non des effets relativistes. Dans le cas de l'hélium gazeux, les résultats diffèrent de moins de 0.03%. Les valeurs sont données à $T_0 = 273.15$ K pour différentes longueurs d'ondes comprises entre 400 nm et 1064 nm. Elles sont représentées par des ronds gris sur la figure 3.9. La valeur obtenue à $\lambda = 1064$ nm est [1] :

$$V^{\mathrm{N}} = 3.72 \times 10^{-5} \text{ rad.T}^{-1}\text{.m}^{-1}\text{.atm}^{-1}. \tag{3.45}$$

Cette valeur est tout juste compatible à 3σ avec notre mesure, et n'est pas compatible à 3σ avec celle publiée par L. Ingersoll et H. Liebenberg [55]. Un écart de 8% est constaté. Les auteurs soulignent que, l'objectif de l'article étant d'évaluer l'influence des corrections relativistes, la méthode utilisée ne tient pas compte de la corrélation électronique, qui a pourtant un effet important sur la valeur obtenue pour la constante de Verdet [130]. En effet, dans la méthode de Hartree-Fock, les répulsions entre les électrons de l'atome ne sont pas incluses avec précision : on considère chaque électron placé dans un champ moyen généré par les autres électrons.

1. La valeur donnée ici ne correspond pas à celle publiée dans l'article [79], qui fait le bilan des constantes de Verdet expérimentales et théoriques de l'hélium. La valeur donnée dans l'article [79] est erronée. En effet, elle a été déduite de celle publiée par U. Ekström [122], en considérant que le calcul a été réalisé pour $T = 298$ K, alors qu'il l'a été pour $T_0 = 273.15$ K.

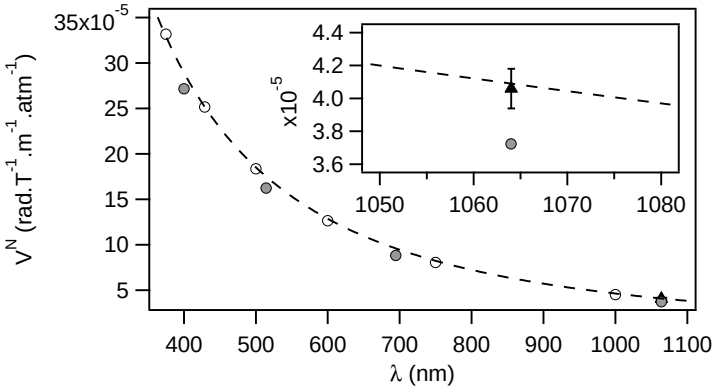


FIGURE 3.9 – Valeurs théoriques de la constante de Verdet de l'hélium en fonction de la longueur d'onde à $T_0 = 273.15$ K. Les ronds gris correspondent aux valeurs de la référence [122]. Les ronds blancs correspondent aux valeurs de la référence [129]. Leur ajustement par a/λ^2 est représenté en pointillés. Le triangle noir correspond à notre mesure, la barre d'erreur représente l'incertitude à 1σ. L'encart est un zoom autour de $\lambda = 1064$ nm.

Les calculs de la référence [129] utilisent la méthode d'interaction de configuration. Celle-ci prend en compte les répulsions électroniques de façon plus précise que la méthode de Hartree-Fock, via la corrélation électronique. Les effets relativistes sont également inclus dans le calcul. Les valeurs de la constante de Verdet sont données à $T_0 = 273.15$ K, pour différentes longueurs d'ondes allant de 375 nm à 1000 nm. Elles sont représentées sur la figure 3.9 par les ronds blancs. Leur ajustement par une fonction de la forme a/λ^2 est superposé en pointillés. Il permet d'obtenir V^{N} à $\lambda = 1064$ nm :

$$V^{\mathrm{N}} = (4.09 \pm 0.02) \times 10^{-5} \text{ rad.T}^{-1}\text{.m}^{-1}\text{.atm}^{-1}. \tag{3.46}$$

L'incertitude est donnée par l'ajustement. Cette valeur est compatible à 1σ avec notre mesure, ce qui semble montrer l'importance de prendre en compte la corrélation électronique.

Bilan

Les valeurs expérimentales et théoriques de la constante de Verdet de l'hélium gazeux à $\lambda = 1064$ nm et $T_0 = 273.15$ K sont résumées dans le tableau 3.6.

Un très bon accord est observé entre notre mesure et la valeur expérimentale publiée dans la référence [55]. L'accord avec les valeurs issues de calculs de chimie quantique est réalisé à 1σ lorsque les effets de corrélation électronique sont pris

Référence	$10^5 \times V^{\mathrm{N}}$ (rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1})	Remarques
Théorie		
[122]	3.72	sans corrélation électronique
[129]	4.09 ± 0.02	valeur extrapolée
Expérience		
[55]	4.15 ± 0.05	valeur extrapolée et non absolue
ce travail, [79]	4.06 ± 0.12	

TABLE 3.6 – Bilan des valeurs expérimentales et théoriques de la constante de Verdet de l'hélium gazeux à $\lambda = 1064$ nm et $T_0 = 273.15$ K.

en compte [129]. D'après les résultats obtenus dans la référence [122], les effets relativistes sont négligeables pour le calcul de la constante de Verdet dans ce gaz.

3.4.2 Résultat dans le xénon gazeux

Nos mesures

Nous avons mesuré la constante de Verdet du xénon gazeux pour des pressions allant de 1 mbar à 5 mbar et à $T = (294 \pm 1)$ K. La finesse a été mesurée pour chaque pression. Elle était en moyenne de 475000. Les valeurs obtenues en fonction de la pression sont représentées sur la figure 3.10. L'incertitude sur chaque point expérimental, représenté par un rond noir, est calculée à partir de l'expression (3.24).

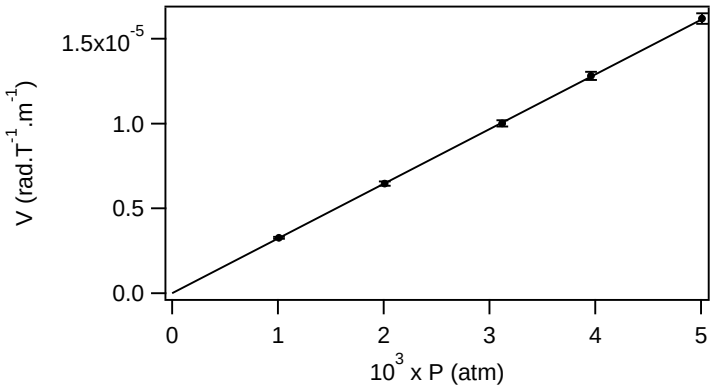


FIGURE 3.10 – Constante de Verdet $V(T, P)$ mesurée dans un gaz de xénon en fonction de la pression. Les ronds noirs représentent les points expérimentaux avec leur incertitude de type A à 1σ. La droite en trait plein correspond à l'ajustement linéaire en fonction de la pression.

L'ajustement linéaire de $V(T, P)$ en fonction de la pression nous permet d'obtenir

la constante de Verdet à $T = (294 \pm 1)$ K :

$$V^{\mathrm{n}}(T = 294\ \mathrm{K}) = (3.22 \pm 0.10) \times 10^{-3}\ \mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}. \tag{3.47}$$

L'ordonnée à l'origine est compatible avec zéro à 1σ. Cette valeur est normalisée à $T_0 = 273.15$ K à partir de l'expression (3.38). Nous obtenons :

$$V^{\mathrm{N}} = (3.47 \pm 0.10) \times 10^{-3}\ \mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}, \tag{3.48}$$

soit

$$k_{\mathrm{F}}^{\mathrm{N}} = (1.17 \pm 0.03) \times 10^{-9}\ \mathrm{T^{-1}.atm^{-1}}. \tag{3.49}$$

Les incertitudes ont été calculées comme décrit dans la section 3.2.2.

Cette mesure a fait l'objet d'un article publié en 2015 dans *The Journal of Chemical Physics* et donné dans l'annexe F.

Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales

Les valeurs expérimentales les plus récentes publiées concernant la constante de Verdet du xénon sont celles de l'article de L. Ingersoll et H. Liebenberg [55]. Elles sont données pour des longueurs d'ondes comprises entre 363.5 nm et 987.5 nm et sont représentées sur la figure 3.11.

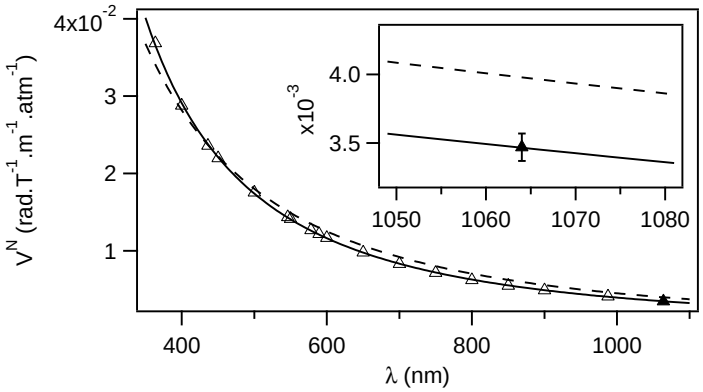


FIGURE 3.11 – Valeurs expérimentales de la constante de Verdet du xénon en fonction de la longueur d'onde à $T_0 = 273.15$ K. Les triangles blancs correspondent aux valeurs de la référence [55]. Leur ajustement par a/λ^2 est représenté en pointillés. Il ne s'adapte pas parfaitement aux données expérimentales. Un meilleur accord est obtenu avec un ajustement du type $a/\lambda^2 + 2b/\lambda^4$, représenté en trait plein. Le triangle noir correspond à notre mesure, la barre d'erreur représente l'incertitude à 1σ. L'encart est un zoom autour de $\lambda = 1064$ nm.

Les points issus de la référence [55] sont dans un premier temps ajustés par une fonction de la forme a/λ^2. L'ajustement est tracé en pointillés sur la figure 3.11. Il

ne s'adapte pas parfaitement aux données expérimentales. Un meilleur accord est obtenu par un ajustement de la forme $a/\lambda^2 + 2b/\lambda^4$, conformément à l'équation (3.43). La valeur à $\lambda = 1064$ nm et $T_0 = 273.15$ K en est déduite :

$$V^{\mathrm{N}} = (3.46 \pm 0.04) \times 10^{-3}\ \mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}. \tag{3.50}$$

L'incertitude sur cette valeur est calculée comme précédemment, en sommant quadratiquement l'incertitude due à l'ajustement et l'incertitude expérimentale de 1% donnée par les auteurs. Comme dans le cas de l'hélium gazeux, ce résultat n'est pas absolu. Il est calculé à partir d'une calibration de l'appareil par des mesures dans l'eau.

En considérant les incertitudes à 1σ, notre mesure est en accord avec la valeur extrapolée de la référence [55].

Comparaison avec les valeurs théoriques

Les valeurs théoriques les plus récentes de la constante de Verdet du xénon sont représentées sur la figure 3.12 pour $\lambda = 1064$ nm et $T_0 = 273.15$ K. Différentes méthodes de calcul ont été utilisées faisant intervenir (icônes noires) ou non (icônes blanches) les effets relativistes et prenant en compte (ronds) ou non (triangles) la corrélation électronique. Notre valeur expérimentale est représentée en trait plein, avec l'incertitude associée à 1σ en pointillés. Ces valeurs sont résumées dans le tableau 3.7.

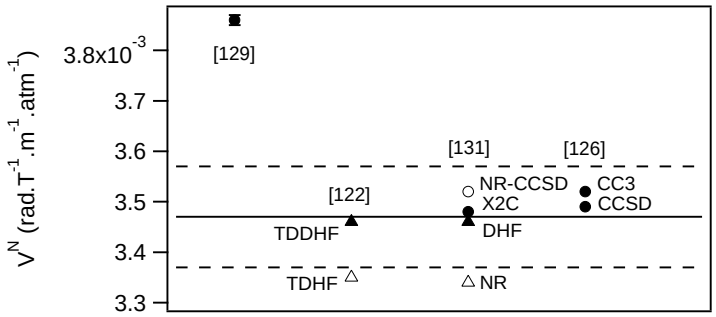


FIGURE 3.12 – Valeurs théoriques de la constante de Verdet du xénon à $\lambda = 1064$ nm et $T_0 = 273.15$ K. Les icônes noires correspondent aux calculs relativistes, les blanches aux calculs non-relativistes. Les ronds représentent les calculs prenant en compte la corrélation électronique. Les triangles représentent les valeurs n'en tenant pas compte. Notre valeur expérimentale est représentée par un trait plein, avec l'incertitude associée à 1σ en pointillés.

Dans l'article de I. Savukov [129], le calcul de la constante de Verdet est réalisé

par une méthode d'interaction de configuration (CI), prenant en compte les effets de corrélation électronique et et les effets relativistes. Plusieurs valeurs sont données pour des longueurs d'ondes comprises entre 375 nm et 1000 nm. L'extrapolation par une fonction de la forme $a/\lambda^2 + 2b/\lambda^4$ nous permet d'obtenir une valeur à $\lambda = 1064$ nm :

$$V^{\mathrm{N}} = (3.86 \pm 0.01) \times 10^{-3}\ \mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}, \tag{3.51}$$

où l'incertitude est calculée à partir des incertitudes sur a et b données par l'ajustement. Cette valeur n'est pas compatible à 3σ avec notre mesure.

Dans l'article de E. Ekström *et al.* [122], deux calculs sont réalisés par la méthode de Hartree-Fock (sans corrélation électronique). La première (TDHF) ne considère pas les effets relativistes alors que la seconde (TDDHF) en tient compte. Les valeurs obtenues sont résumées dans le tableau 3.7.

S. Ikäläinen *et al.* [131] donnent quatre valeurs pour la constante de Verdet, qui sont rapportées dans le tableau 3.7 :

- calcul non-relativiste et sans corrélation électronique (NR) utilisant la méthode de Hartree-Fock,
- calcul non-relativiste, avec corrélation électronique (NR-CCSD) utilisant la méthode des clusters couplés,
- calcul relativiste et sans corrélation électronique (DHF) (méthode de Hartree-Fock),
- calcul relativiste, avec corrélation électronique (X2C), utilisant une méthode exacte à deux composantes.

Nos activités expérimentales ont été conduites en collaboration avec S. Coriani et A. Rizzo pour ce qui concerne les aspects théoriques. En particulier, ils ont réalisé des calculs originaux en utilisant la méthode des clusters couplés, qui ont donné lieu à une publication commune [126]. Leurs calculs tiennent compte des effets relativistes et de la corrélation électronique. Leurs résulats sont rapportés dans le tableau 3.7.

Concernant les valeurs données dans les références [122] et [131], nous constatons un meilleur accord avec les données expérimentales lorsque les effets relativistes sont pris en compte dans les calculs de chimie quantique. Cela est confirmé par les valeurs obtenues dans la référence [126], compatibles à 1σ avec notre mesure. Contrairement au cas de l'hélium, les effets relativistes ne sont donc pas négligeables dans l'atome de xénon qui est le gaz rare non-radioactif de numéro atomique le plus important. Il faut par ailleurs noter que la corrélation électronique a également un effet important sur la constante de Verdet. Si l'on considère les calculs non-relativistes réalisés par S. Ikäläinen *et al.*, un meilleur accord est obtenu avec les valeurs expérimentales

lorsque la corrélation électronique est prise en compte (NR-CCSD, accord à 1σ) que lorsque ce n'est pas le cas (NR, accord à 2σ).

Bilan

Les valeurs expérimentales et théoriques de la constante de Verdet du xénon gazeux à $\lambda = 1064$ nm et $T_0 = 273.15$ K sont résumées dans le tableau 3.7.

Référence	$10^3 \times V^{\mathrm{N}}$ (rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1})	Remarques
Théorie		
[129]	3.86 ± 0.01	CI, valeur extrapolée
[122]	3.35	TDHF
[122]	3.46	TDHF
[131]	3.34	NR
[131]	3.48	X2C
[131]	3.46	DHF
[131]	3.52	NR-CCSD
[126]	3.49	CCSD
[126]	3.52	CC3
Expérience		
[55]	3.46 ± 0.04	valeur extrapolée et non absolue
ce travail, [126]	3.47 ± 0.10	

TABLE 3.7 – Bilan des valeurs expérimentales et théoriques de la constante de Verdet du xénon gazeux à $\lambda = 1064$ nm et $T_0 = 273.15$ K.

Notre mesure est en accord à 1σ avec la valeur expérimentale rapportée dans la référence [55]. La comparaison avec les valeurs théoriques a permis de mettre en évidence l'importance de la prise en compte des effets relativistes dans les calculs de chimie quantique concernant cet atome. La corrélation électronique a elle aussi un effet non négligeable, comme c'est le cas pour les calculs de constante de Verdet de l'hélium.

Nous allons maintenant décrire les mesures de biréfringence linéaire que nous avons réalisées au cours de cette thèse, dans des gaz d'hélium et de xénon, et dans le vide.

Chapitre 4

Mesures de biréfringences magnétiques linéaires

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats obtenus concernant l'effet Cotton-Mouton de l'hélium, du xénon et du vide. Nous décrirons dans un premier temps la méthode d'analyse des données que nous avons développée. Elle permet de minimiser les effets systématiques et de mettre en évidence le signal Cotton-Mouton. Les mesures présentées ici sont absolues, aucune calibration préalable du dispositif n'est nécessaire. Une mesure préliminaire dans un gaz dont l'effet Cotton-Mouton est connu est requise uniquement pour déterminer le signe de la constante Cotton-Mouton k_{CM}.

Cette méthode a permis de mesurer l'effet de l'hélium, qui est le plus petit après celui du vide. Cette mesure présente un grand intérêt car elle permet d'évaluer la sensibilité de l'appareil expérimental. En effet, l'hélium étant le gaz rare de plus petit numéro atomique, les calculs *ab initio* sont considérés comme exacts par la communauté de chimie quantique. La comparaison de notre mesure avec la prédiction théorique constitue donc un test de notre dispositif expérimental, en vue de réaliser des mesures d'effet Cotton-Mouton dans le vide. Nous avons également effectué des mesures dans le xénon. La comparaison du résultat obtenu avec la prédiction théorique consiste ici en un test des calculs de chimie quantique.

Les mesures dans le vide ont conduit au premier résultat obtenu avec ce dispositif expérimental. L'analyse détaillée des données a permis de mettre en évidence ses limitations. Cela nous a amené à dessiner une version améliorée du montage, dont les éléments principaux seront décrits dans le prochain chapitre.

4.2 Méthode d'analyse

4.2.1 Rapports des effets Cotton-Mouton et Faraday

Considérons un faisceau laser se propageant dans un milieu soumis au champ magnétique produit par la bobine X-coil, décrite dans la section 2.5.1. La principale composante du champ est transverse (perpendiculaire à la direction de propagation du faisceau lumineux). Nous la noterons B. Comme précisé dans le paragraphe 2.5.1, il existe également une composante longitudinale de ce champ, environ 230 fois plus faible, due à la géométrie de la bobine [118]. Elle peut également provenir d'un alignement imparfait entre le faisceau lumineux et l'axe de la bobine. Vu les contraintes d'alignement, nous l'évaluons à environ un soixantième de la composante transverse. Nous noterons $B_{||}$ le champ longitudinal.

Comme rappelé dans le chapitre précédent, le rapport de l'intensité extraordi-

naire I_{e} sur l'intensité ordinaire filtrée $I_{\mathrm{t,f}}$ s'écrit :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + [\epsilon + \Theta_{\mathrm{F}}(t)]^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2, \tag{4.1}$$

$$= \underbrace{\sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2}_{\text{terme statique}} + \underbrace{2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}} + \Theta_{\mathrm{F}}^2}_{\text{effet Faraday}} + \underbrace{2\Gamma\Psi + \Psi^2}_{\text{effet Cotton-Mouton}}, \tag{4.2}$$

avec

$$\Psi(t) = \frac{2FL_{\mathrm{B}}}{\lambda}\sin(2\theta)k_{\mathrm{CM}}B^2(t), \tag{4.3}$$

et

$$\Theta_{\mathrm{F}}(t) = \frac{2FL_{\mathrm{B},||}}{\pi}VB_{||}(t). \tag{4.4}$$

$I_{\mathrm{t,f}}$ est calculée en appliquant le filtre passe-bas d'ordre 1 équivalent à la cavité sur I_{t} (voir paragraphe 2.3.2). F est la finesse de la cavité. L_{B} et $L_{\mathrm{B},||}$ sont les longueurs effectives de la bobine X-coil, calculées comme suit à partir du profil longitudinal présenté sur la figure 2.37 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B^2(z)dz = B_{\mathrm{max}}^2 L_{\mathrm{B}}, \tag{4.5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(z)dz = B_{\mathrm{max}} L_{\mathrm{B},||}, \tag{4.6}$$

où B_{max} est le champ au centre de la bobine. Nous avons $L_{\mathrm{B}} = (0.137 \pm 0.003)$ m et $L_{\mathrm{B},||} = (0.172 \pm 0.004)$ m. θ est l'angle entre la polarisation linéaire incidente et le champ magnétique transverse. Comme présenté dans le paragraphe 2.5.1, il a été réglé à $(45 \pm 1.2)^{\circ}$. Ψ est l'ellipticité que nous cherchons à mesurer pour obtenir la constante Cotton-Mouton k_{CM}. Θ_{F} est l'angle de rotation de la polarisation dû à l'effet Faraday induit par la composante longitudinale du champ magnétique. V est la constante de Verdet du milieu.

Précisons ici que, dans le cadre des mesures dans les gaz, les notations k_{CM} et V, utilisées dans les équations (4.3) et (4.4), concernent les constantes données à la température $T = (293 \pm 1)$ K et à la pression P. Nous les noterons alors $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ et $V(T, P)$. Elles sont exprimées respectivement en T^{-2} et $\mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}}$ et sont reliées aux constantes normalisées à $P = 1$ atm et $T_0 = 273.15$ K, $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ et V^{N}, par :

$$k_{\mathrm{CM}}(T, P) = k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}} \times \frac{T_0}{T} \times P \qquad \text{et} \qquad V(T, P) = V^{\mathrm{N}} \times \frac{T_0}{T} \times P. \tag{4.7}$$

$k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ est exprimée en $\mathrm{T^{-2}.atm^{-1}}$, et V^{N}, en $\mathrm{rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1}}$. Nous avons montré dans l'introduction de cette thèse que, dans le vide, l'effet Faraday est nul. La constante Cotton-Mouton sera alors notée k_{CM}.

Dans le cadre des mesures de biréfringences circulaires présentées dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il était possible de négliger l'effet Cotton-Mouton parasite devant l'effet Faraday que nous cherchions à mesurer. Afin de savoir s'il est possible de négliger l'effet Faraday (parasite) lors des mesures d'effet Cotton-Mouton, nous évaluons le rapport défini comme suit à partir de l'équation (4.2) :

$$R_{\mathrm{CM/F}} = \frac{2\Gamma\Psi + \Psi^2}{2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}} + \Theta_{\mathrm{F}}^2}. \tag{4.8}$$

Mesures dans les gaz

Les différents paramètres expérimentaux concernant les mesures dans l'hélium et le xénon sont rapportés dans le tableau 4.1. Le champ magnétique produit par la bobine X-coil est de 3 T, soit une composante longitudinale autour de 60 mT. L'ellipticité statique Γ est de l'ordre de 1×10^{-3}, et la finesse d'environ 440000. Ψ et Θ_{F} sont calculés à partir des expressions (4.3) et (4.4). Les constantes $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ et de $V(T, P)$ à la température T et à la pression P sont obtenues à partir des constantes normalisées $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ et V^{N} grâce aux relations données dans l'équation (4.7). Pour les pressions typiques auxquelles nous avons réalisé les mesures, le rapport $R_{\mathrm{CM/F}}$ est de l'ordre de 10^{-4}. L'effet Faraday n'est donc absolument pas négligeable devant l'effet Cotton-Mouton pour les mesures dans les gaz d'hélium et de xénon.

	hélium	xénon
T (K)	293	
B (T)	3	
L_{B} (m)	0.137	
$B_{\|\|}$ (T)	60×10^{-3}	
$L_{\mathrm{B},\|\|}$ (m)	0.172	
Γ (rad)	8×10^{-4}	1×10^{-3}
ϵ (rad)	10×10^{-6}	15×10^{-6}
P (atm)	300×10^{-3}	6×10^{-3}
F	438000	440000
V^{N} (rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1})	4.06×10^{-5}	3.47×10^{-3}
$k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ (T^{-2}.atm^{-1})	2.40×10^{-16} [123]	2.67×10^{-14} [124]
$R_{\mathrm{CM/F}}$	1×10^{-4}	1×10^{-4}

TABLE 4.1 – Paramètres expérimentaux pour le calcul du rapport des effets Cotton-Mouton et Faraday dans l'hélium et le xénon. Les constantes de Verdet sont celles mesurées au cours de cette thèse et rapportées dans le chapitre 3.

Mesures dans le vide

Lors des mesures dans le vide, il existe deux sources d'effet Faraday :
- celui des gaz résiduels dû au champ longitudinal produit au centre de la bobine X-coil,
- celui des miroirs soumis au champ magnétique de fuite longitudinal.

Évaluons dans un premier temps l'angle de rotation dû aux gaz résiduels. Les principaux gaz présents dans l'enceinte à vide, lorsque celle-ci est pompée jusqu'à $P = 10^{-7}$ mbar, sont rappelés dans le tableau 4.2, avec leurs fractions molaires et leurs constantes de Verdet. Le champ magnétique transverse utilisé pour les tirs dans le vide est de 6.5 T, soit un champ longitudinal $B_{||}$ inférieur à 140 mT. Avec une finesse moyenne de 445000 pour ces mesures, l'effet Faraday du gaz résiduel entraîne une rotation d'un angle $\Theta_{\mathrm{F,gaz\ résiduel}}$ de l'ordre de 3×10^{-8}rad.

gaz	fraction molaire (%)	V^{N} (rad.T^{-1}.m^{-1}.atm^{-1})
N_2	45	5.2×10^{-4}
H_2	40	5.1×10^{-4}
H_2O	10	4.6×10^{-4}
O_2	2	9×10^{-4}
Ar	1.5	7.5×10^{-4}
CO_2	1.5	7.7×10^{-4}
C_nH_m	< 0.5	

TABLE 4.2 – Principaux gaz résiduels présents dans l'enceinte à vide pompée à une pression de 10^{-7} mbar et leurs constantes de Verdet à $\lambda = 1064$ nm. Elles sont issues d'une extrapolation des valeurs expérimentales des références [55] et [56]. C_nH_m désigne différents hydrocarbures, dont des traces ont été détectées.

La constante de Verdet des miroirs est d'environ 10^{-6} rad.T^{-1} par réflexion (voir les résultats présentés dans la section 3.3.2). Le champ magnétique de fuite a été mesuré au niveau des miroirs. Sa composante longitudinale est de l'ordre de 60 μT lors d'un tir à 6.5 T. L'angle de rotation qu'il induit sur la polarisation linéaire incidente est donc $\Theta_{\mathrm{F,miroirs}} \sim 20$ μrad.

A partir des valeurs obtenues pour $\Theta_{\mathrm{F,gaz\ résiduel}}$ et $\Theta_{\mathrm{F,miroirs}}$, nous évaluons le rapport $R_{\mathrm{CM/F}}$ dans le cas des mesures dans le vide. Pour cela, nous utilisons la valeur attendue de la constante Cotton-Mouton : $k_{\mathrm{CM}} \simeq 4 \times 10^{-24}$ T^{-2}. En considérant les valeurs typiques d'ellipticité statique $\Gamma \sim 8 \times 10^{-4}$ rad, soit $\epsilon \sim 10 \times 10^{-6}$ rad, nous obtenons : $R_{\mathrm{CM/F}} \sim 5 \times 10^{-5}$. Là encore, l'effet Faraday n'est pas négligeable devant l'effet Cotton-Mouton à mesurer.

Dans le cadre des mesures d'effet Cotton-Mouton que nous avons réalisées au cours de cette thèse, l'effet Faraday est un effet parasite qu'il n'est pas possible de négliger. Il est par ailleurs difficile de le réduire expérimentalement car il est dû au champ longitudinal produit intrinsèquement par la bobine X-coil et aux imperfections d'alignement de son axe avec le faisceau lumineux. Il faut donc être capable de distinguer les différents effets dans le signal brut par une méthode appropriée d'acquisition et d'analyse des données expérimentales. Cela a été réalisé en étudiant les propriétés de symétrie des effets Faraday et Cotton-Mouton vis-à-vis de deux paramètres expérimentaux : le signe de l'ellipticité statique Γ due à la cavité Fabry-Perot et la direction du champ magnétique $\vec{B}$.

4.2.2 Étude des symétries du signal mesuré

Les propriétés de symétrie des différents termes dépendant du champ de l'équation (4.2), vis-à-vis du signe de Γ et de la direction du champ magnétique, sont résumées dans le tableau 4.3. Les termes dont le signe ne change pas par changement de signe de Γ, ou de la direction de $\vec{B}$ sont dits pairs. Leur symétrie est notée $+$. Ceux dont le signe change sont dits impairs. Leur symétrie est notée $-$.

terme	signe de Γ	direction de $\vec{B}$
$2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}}$	-	-
Θ_{F}^2	$+$	$+$
$2\Gamma\Psi$	-	$+$
Ψ^2	$+$	$+$

TABLE 4.3 – Propriétés de symétrie des différents termes dépendant du champ de l'équation (4.2), vis-à-vis du signe de Γ et de la direction de $\vec{B}$. Le signe $+$ représente un terme pair, le signe $-$ un terme impair.

D'après l'équation (2.105), l'angle ϵ est directement proportionnel à Γ. Le terme $2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}}$, comme le terme $2\Gamma\Psi$, est donc impair vis-à-vis du changement de signe de Γ. Les termes Θ_{F}^2 et Ψ^2 sont pairs, car ils ne font intervenir ni Γ ni ϵ. Les termes proportionnels à une puissance paire du champ magnétique (Θ_{F}^2, $2\Gamma\Psi$ et Ψ^2) sont pairs vis-à-vis de son changement de direction. $2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}}$ est proportionnel à $B_{||}$, il présente donc une symétrie impaire pour ce paramètre.

Dans l'équation (4.2), aucun terme avec une symétrie $+$ par rapport au signe de Γ et $-$ par rapport à la direction de $\vec{B}$ n'apparaît. Un tel terme représenterait un effet proportionnel à une puissance impaire du champ, se produisant hors de la cavité. En effet, le signe de Γ n'ayant pas d'influence, ce phénomène ne doit pas impliquer les miroirs de la cavité. Il peut par exemple s'agir de l'effet du champ

sur les photodiodes qui enregistrent les intensités ordinaire et extraordinaire [72]. Modélisons cet effet par un gain $g(B)$ dépendant du champ. A partir de l'équation (4.2), le rapport des intensités extraordinaire et ordinaire s'écrit :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = [1 + g(B)] \times \left[\sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2 + 2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}}(t) + \Theta_{\mathrm{F}}^2(t) + 2\Gamma\Psi(t) + \Psi^2(t)\right]. \quad (4.9)$$

Le terme $g(B) \times [\sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2]$ est de symétrie paire vis-à-vis du changement de signe de Γ et impaire vis-à-vis du changement de la direction de $\vec{B}$. Nous le noterons $f(B,t)$. Ce terme doit être rajouté à l'équation (4.2) qui devient :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2 + 2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}}(t) + \Theta_{\mathrm{F}}^2(t) + 2\Gamma\Psi(t) + \Psi^2(t) + f(B,t). \quad (4.10)$$

L'équation (4.9) fait également intervenir d'autres termes de symétries $-+$ et $--$ (le premier signe correspond à la parité vis-à-vis du changement de signe de Γ, le second à celle vis-à-vis du changement de la direction de $\vec{B}$). Ces termes impliquent Θ_{F} et Ψ, ils sont donc d'ordre supérieur par rapport à $f(B,t)$ et ne sont pas rajoutés à l'équation (4.2).

Afin d'isoler l'ellipticité Ψ que nous cherchons à mesurer, nous calculons la fonction $Y(t)$ à partir du rapport des intensités :

$$Y(t) = \frac{\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} - A_{\mathrm{DC}}}{2|\Gamma|}. \quad (4.11)$$

$A_{\mathrm{DC}} = \sigma^2 + \epsilon^2 + \Gamma^2$ est la composante continue du signal. Elle est obtenue en calculant la valeur moyenne du rapport des intensités, avant l'application du champ magnétique :

$$A_{\mathrm{DC}} = \left\langle \frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} \right\rangle_{t<t_0}, \quad (4.12)$$

où t_0 est l'instant où le tir est déclenché. Nous en déduisons également la valeur absolue de l'ellipticité statique de la cavité :

$$|\Gamma| = \sqrt{A_{\mathrm{DC}} - (\sigma^2 + \epsilon^2)} \simeq \sqrt{A_{\mathrm{DC}} - \sigma^2}. \quad (4.13)$$

L'angle ϵ est d'une dizaine de μrad. ϵ^2 est donc négligeable devant σ^2 qui est au minimum de quelques 10^{-8}. Pour calculer la valeur absolue de Γ, nous avons besoin de connaître σ^2. Ce paramètre est donc mesuré avant chaque série de tirs. Pour cela, nous orientons les miroirs de la cavité selon la procédure décrite au paragraphe 2.3.2

de façon à avoir $\Gamma = 0$. Le rapport des intensités est alors directement égal à σ^2 :

$$\sigma^2 = \left(\frac{I_\mathrm{e}}{I_\mathrm{t}}\right)_{\Gamma=0}. \tag{4.14}$$

En développant l'expression (4.11), nous faisons apparaître plusieurs composantes de symétries différentes sur le signal $Y(t)$:

$$Y(t) = \underbrace{\gamma\Psi(t)}_{-+} + \underbrace{\frac{\Theta_\mathrm{F}^2(t) + \Psi^2(t)}{2|\Gamma|}}_{++} + \underbrace{\gamma\frac{|\epsilon|\ \Theta_\mathrm{F}(t)}{|\Gamma|}}_{--} + \underbrace{\frac{f(B,t)}{2|\Gamma|}}_{+-}, \tag{4.15}$$

où $\gamma = +1$ si $\Gamma > 0$ et $\gamma = -1$ si $\Gamma < 0$. Le premier signe correspondant à la parité vis-à-vis du changement de signe de Γ, le second à celle vis-à-vis du changement de la direction de $\vec{B}$.

4.2.3 Calcul de l'ellipticité $\Psi(t)$

Afin d'isoler le signal $\Psi(t)$ de l'équation (4.15), nous effectuons des tirs dans quatre catégories, en faisant varier les paramètres expérimentaux à notre disposition :

- catégorie ">>" : tirs pour $\Gamma > 0$ ($\gamma = +1$), $\vec{B}$ parallèle à la direction $O\vec{x}$,
- catégorie "><" : tirs pour $\Gamma > 0$ ($\gamma = +1$), $\vec{B}$ anti-parallèle à la direction $O\vec{x}$,
- catégorie "<<" : tirs pour $\Gamma < 0$ ($\gamma = -1$), $\vec{B}$ anti-parallèle à la direction $O\vec{x}$.
- catégorie "<>" : tirs pour $\Gamma < 0$ ($\gamma = -1$), $\vec{B}$ parallèle à la direction $O\vec{x}$,

Le réglage du signe de Γ est fait par rotation du miroir M_1 de la cavité, comme décrit dans la section 2.3.2. La direction du champ magnétique est choisie en sélectionnant l'un ou l'autre des deux générateurs pour alimenter la bobine X-coil (voir le paragraphe 2.5.1).

Pour chaque tir, nous calculons la fonction $Y(t)$ à partir de l'expression (4.11). Les $Y(t)$ des tirs appartenant à une même catégorie sont ensuite moyennés. Nous obtenons ainsi quatre signaux :

$$\begin{aligned}
Y_{>>} &= +\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{>>}}\right\rangle(\Theta_\mathrm{F}^2 + \Psi^2) + \left\langle\frac{1}{\Gamma_{>>}}\right\rangle|\epsilon|\Theta_\mathrm{F} + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{>>}}\right\rangle f(B),\\
Y_{><} &= +\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{><}}\right\rangle(\Theta_\mathrm{F}^2 + \Psi^2) - \left\langle\frac{1}{\Gamma_{><}}\right\rangle|\epsilon|\Theta_\mathrm{F} - \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{><}}\right\rangle f(B),\\
Y_{<<} &= -\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<<}}\right\rangle(\Theta_\mathrm{F}^2 + \Psi^2) + \left\langle\frac{1}{\Gamma_{<<}}\right\rangle|\epsilon|\Theta_\mathrm{F} - \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<<}}\right\rangle f(B),\\
Y_{<>} &= -\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<>}}\right\rangle(\Theta_\mathrm{F}^2 + \Psi^2) - \left\langle\frac{1}{\Gamma_{<>}}\right\rangle|\epsilon|\Theta_\mathrm{F} + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<>}}\right\rangle f(B).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Dans ces équations, $\langle 1/\Gamma_{\mathrm{j}}\rangle$, avec j = >>, ><, <<, <>, est la valeur moyenne des $1/|\Gamma|$ des tirs de la catégorie j. Les signaux Y_{j} dépendent du temps via Θ_{F}, Ψ et $f(B)$ qui font intervenir le champ magnétique pulsé. Pour alléger les notations, cette dépendance a été sous-entendue. Cela sera également le cas dans la suite de cette section.

L'objectif est de calculer Ψ à partir de $Y_{>>}$, $Y_{><}$, $Y_{<<}$ et $Y_{<>}$. Dans le cas idéal où

$$\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle, \tag{4.17}$$

l'ellipticité Ψ est donnée par :

$$\Psi = \frac{1}{4}\left(Y_{>>} + Y_{><} - Y_{<<} - Y_{<>}\right). \tag{4.18}$$

En pratique, les valeurs des $\langle 1/\Gamma_{\mathrm{j}}\rangle$ diffèrent légèrement. Dans un premier temps nous avons développé une méthode d'analyse approchée basée sur le fait que ces différences sont faibles. Elle a été mise en oeuvre dans les articles [79] et [132] qui présentent nos résultats obtenus dans l'hélium et dans le vide. Au cours de cette thèse, nous avons également mis en place une méthode exacte que nous allons développer maintenant.

Posons :

$$\Psi = A \times Y_{>>} + B \times Y_{><} + C \times Y_{<<} + D \times Y_{<>}. \tag{4.19}$$

D'après les équations (4.16) nous avons :

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Psi \times [A + B - C - D] \\
&+ \frac{1}{2}(\Theta_{\mathrm{F}}^2 + \Psi^2) \times \left[A\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle + B\left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle + C\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle + D\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle\right] \\
&+ |\epsilon|\Theta_{\mathrm{F}} \times \left[A\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle - B\left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle + C\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle - D\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle\right] \\
&+ f(B) \times \left[A\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle - B\left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle - C\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle + D\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle\right].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Trouver les coefficients A, B, C et D revient à résoudre le système de quatre équations à quatre inconnues suivant :

$$\begin{cases}
A + B - C - D = 1, \\
A\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle + B\left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle + C\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle + D\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle = 0, \\
A\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle - B\left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle + C\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle - D\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle = 0, \\
A\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle - B\left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle - C\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle + D\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle = 0.
\end{cases} \tag{4.21}$$

Après résolution, nous obtenons :

$$A = \frac{bcd}{cd(a+b)+ab(c+d)}, \tag{4.22}$$

$$B = \frac{acd}{cd(a+b)+ab(c+d)}, \tag{4.23}$$

$$C = -\frac{abd}{cd(a+b)+ab(c+d)}, \tag{4.24}$$

$$D = -\frac{abc}{cd(a+b)+ab(c+d)}, \tag{4.25}$$

avec $a = \left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle$, $b = \left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle$, $c = \left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle$ et $d = \left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle$.

Ainsi, à partir des Y_{j} et $\left\langle \frac{1}{\Gamma_{\mathrm{j}}} \right\rangle$ calculés pour chaque catégorie, et des équations (4.19) et (4.22) à (4.25), nous calculons l'ellipticité Ψ de façon exacte. Notons que si $a = b = c = d$, alors $A = 1/4$, $B = 1/4$, $C = -1/4$ et $D = -1/4$ et nous retrouvons l'expression de l'ellipticité donnée dans l'équation (4.18).

L'incertitude de type A sur $\Psi(t)$ est évaluée à chaque instant t_i. Pour cela, nous calculons l'incertitude à chaque instant sur les valeurs moyennes $Y_{\mathrm{j}}(t)$:

$$\Delta Y_{\mathrm{j}}(t_i) = \frac{\sigma_{\mathrm{j}}(t_i)}{N_{\mathrm{j}}}. \tag{4.26}$$

N_{j} est le nombre de tirs réalisés dans la catégorie j. $\sigma_{\mathrm{j}}(t_i)$ est l'écart type des valeurs de $Y(t_i)$ des tirs de la catégorie j, à l'instant t_i. Nous obtenons ensuite l'incertitude sur l'ellipticité :

$$\Delta\Psi(t_i) = \sqrt{\left[A\Delta Y_{>>}(t_i)\right]^2 + \left[B\Delta Y_{><}(t_i)\right]^2 + \left[C\Delta Y_{<<}(t_i)\right]^2 + \left[D\Delta Y_{<>}(t_i)\right]^2}. \tag{4.27}$$

4.2.4 Obtention de la constante Cotton-Mouton

L'ellipticité de la polarisation est reliée à la constante Cotton-Mouton k_{CM} comme suit :

$$\Psi(t) = \frac{2FL_{\mathrm{B}}}{\lambda} \sin(2\theta) k_{\mathrm{CM}} B^2(t). \tag{4.28}$$

La durée d'un tir de champ magnétique est de quelques millisecondes, soit du même ordre de grandeur que le temps de vie τ des photons dans la cavité. Les photons sont donc soumis à un champ moyen au cours de leur propagation dans la cavité [70]. Pour tenir compte de ce phénomène, le carré du champ magnétique qui intervient dans l'équation (4.28) doit être remplacé par un champ magnétique filtré B_{f}^2 [71] :

$$\Psi(t) = \frac{2FL_{\mathrm{B}}}{\lambda} \sin(2\theta) k_{\mathrm{CM}} B_{\mathrm{f}}^2(t). \tag{4.29}$$

$B_{\mathrm{f}}^2(t)$ est calculé en filtrant numériquement le carré du champ magnétique par le filtre passe bas d'ordre 1 de la cavité Fabry-Perot, de fréquence de coupure $\nu_{\mathrm{c}} = 1/4\pi\tau$. La fonction de transfert d'un tel filtre est donnée par l'expression (2.138).

L'ellipticité $\Psi(t)$ est ajustée par une fonction de la forme $\alpha B_{\mathrm{f}}^2(t)$. La constante Cotton-Mouton est ensuite calculée à partir du paramètre α donné par l'ajustement :

$$k_{\mathrm{CM}} = \frac{\alpha\lambda}{2FL_{\mathrm{B}}}\frac{1}{\sin(2\theta)} = \frac{\alpha}{4\pi\tau\Delta^{\mathrm{ISL}}}\frac{\lambda}{L_{\mathrm{B}}}\frac{1}{\sin(2\theta)}, \tag{4.30}$$

où $\Delta^{\mathrm{ISL}} = (65.996 \pm 0.017)$ MHz est l'intervalle spectral libre de la cavité.

Pour les mesures dans les gaz, cette procédure est répétée pour différentes pressions P. La constante Cotton-Mouton donnée par l'équation (4.30) est $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$, mesurée à la température T et à la pression P. Dans le régime des gaz parfaits, $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ est proportionnelle à la pression, avec :

$$k_{\mathrm{CM}}(T, P) = k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{n}}(T) \times P. \tag{4.31}$$

Les valeurs de $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ sont tracées en fonction de la pression. Un ajustement linéaire permet de déduire $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{n}}(T)$ exprimée en $\mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}$.

4.2.5 Évaluation de l'incertitude

L'incertitude sur la constante Cotton-Mouton est calculée à partir des incertitudes sur les paramètres qui interviennent dans l'équation (4.30). Elles sont résumées dans le tableau 4.4.

L'incertitude de type A sur α est celle donnée par l'ajustement de $\Psi(t)$ par αB_{f}^2. L'incertitude relative de type B sur α est obtenue en sommant quadratiquement :

- l'incertitude relative de 1.5% sur le rapport des facteurs de conversion des photodiodes $\mathrm{Ph_e}$ et $\mathrm{Ph_t}$, donné dans l'équation (2.23),
- l'incertitude relative sur le facteur B/I de la bobine X-coil. Celui-ci a été déterminé de différentes manières détaillées dans la section 2.5.1. Il est de (1.56 ± 0.01) mT/A soit une incertitude de 0.7%. Comme le champ intervient au carré, nous considérons une incertitude relative de 1.4%.
- l'incertitude relative de 0.8% due au filtrage de I_{t} et de B^2. Elle est issue de l'incertitude sur la fréquence de coupure du filtre passe bas de la cavité Fabry-Perot, elle-même due à l'incertitude sur le temps de vie des photons dans la cavité. Elle a été déterminée au cours de la thèse de Paul Berceau en considérant une variation de 2% de τ [72].

Paramètre	Incertitude relative de type A	Incertitude relative de type B
τ	2×10^{-2}	
α	hélium : $\sim 8 \times 10^{-4}$	2.2×10^{-2}
	xénon : $\sim 7 \times 10^{-4}$	2.2×10^{-2}
	vide : $\sim 4 \times 10^{-1}$	2.2×10^{-2}
L_{B}		2.2×10^{-2}
Δ^{ISL}		3×10^{-4}
$\sin(2\theta)$		9×10^{-4}
λ		$< 5 \times 10^{-4}$

TABLE 4.4 – Incertitudes à 1σ utilisées pour le calcul de l'incertitude sur la constante Cotton-Mouton.

Mesure dans le vide

L'incertitude relative sur k_{CM} est calculée en sommant quadratiquement les incertitudes de types A et B données dans le tableau 4.4.

Mesure dans un gaz

Il faut ici tenir compte du fait que les mesures ont été réalisées à différentes pressions, et donc pas dans les mêmes conditions expérimentales. L'incertitude $\Delta k_{\mathrm{CM}}(T,P)^{\mathrm{A}}$ de type A sur chaque $k_{\mathrm{CM}}(T,P)$ est calculée à partir des incertitudes de type A sur τ et α rapportées dans le tableau 4.4 :

$$\frac{\Delta k_{\mathrm{CM}}(T,P)^{\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{CM}}(T,P)} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha^{\mathrm{A}}}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2}. \tag{4.32}$$

Les valeurs de $k_{\mathrm{CM}}(T,P)$ sont ensuite ajustées linéairement en fonction de la pression P pour obtenir $k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)$. Contrairement à ce qui a été réalisé pour les mesures de constante de Verdet (voir le paragraphe 3.2.2), l'ajustement n'est pas pondéré par les $\Delta k_{\mathrm{CM}}(T,P)^{\mathrm{A}}$. En effet, dans le cas des mesures d'effet Cotton-Mouton, les valeurs de $k_{\mathrm{CM}}(T,P)$ présentent une dispersion plus grande que l'incertitude de type A associée à chaque point. Cela est illustré sur les figures 4.5 et 4.7 du paragraphe suivant, où $k_{\mathrm{CM}}(T,P)$ est tracé en fonction de la pression. L'incertitude de type A associée à $k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)$ est donc la somme quadratique de celle donnée par l'ajustement linéaire avec la pression et de celle sur le temps de vie des photons dans la cavité, l'incertitude

de type A sur α étant négligeable :

$$\frac{\Delta k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)^{\mathrm{A}}}{k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)} = \sqrt{\left(\frac{\Delta k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)^{\mathrm{ajustement}}}{k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2}. \tag{4.33}$$

Elle est de l'ordre de 10% pour les mesures dans l'hélium gazeux, et de l'ordre de 15% pour celles dans le xénon, principalement due à $\Delta k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)^{\mathrm{ajustement}}$.

L'incertitude de type B sur $k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}$ est calculée en sommant quadratiquement les incertitudes de type B rapportées dans le tableau 4.4, et l'incertitude sur la pression, avec $\frac{\Delta P}{P} = 2 \times 10^{-3}$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)^{\mathrm{B}}}{k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha^{\mathrm{B}}}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L_{\mathrm{B}}}{L_{\mathrm{B}}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\Delta^{\mathrm{ISL}})}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\theta}{\tan 2\theta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2}, \\ &= 3.1\%. \end{aligned} \tag{4.34}$$

L'incertitude finale sur $k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)$ est obtenue en sommant quadratiquement les incertitudes de type A et B :

$$\Delta k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T) = \sqrt{[\Delta k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)^{\mathrm{A}}]^2 + [\Delta k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)^{\mathrm{B}}]^2}. \tag{4.35}$$

4.3 Procédure d'acquisition des données

Le champ magnétique transverse est produit par la bobine X-coil, dont les caractéristiques ont été décrites en détails dans la section 2.5.1. La bobine est traversée par le petit tube de l'enceinte à vide comme cela est représenté sur les figures 2.39 et 2.40. Les tirs de champ magnétique effectués pour les mesures dans les gaz atteignent 3 T au maximum du champ pulsé. Dans le vide, le champ maximal est de 6.5 T.

Pour les mesures dans les gaz, l'enceinte à vide est pompée jusqu'à quelques 10^{-7} mbar avant chaque série de tirs à une pression P. Le gaz est ensuite injecté et sa pression contrôlée. La température T du gaz à l'intérieur du petit tube est de (293 ± 1) K. Lors des mesures dans le vide, les trois pompes ioniques décrites dans le paragraphe 2.6.2 sont en marche. Elles permettent de maintenir un vide de l'ordre de 10^{-7} mbar. Le temps de vie des photons dans la cavité optique est mesuré par décroissance de l'intensité transmise, avant chaque série à une pression P pour les mesures dans les gaz, et très régulièrement lors des mesures dans le vide. Nous en déduisons la finesse à partir de la relation (2.91).

Avant chaque tir, le miroir M_1 est tourné sur lui même. Nous le plaçons dans un premier temps de façon à annuler la biréfringence statique de la cavité. L'ellipticité statique Γ est alors nulle et l'intensité extraordinaire est minimale. Conformément à

l'équation (4.14), le rapport des intensités $\frac{I_e}{I_t}$ nous donne la valeur du taux d'extinction des polariseurs. M_1 est ensuite tourné de nouveau de façon à ajuster la valeur et le signe de Γ. Nous réglons Γ^2 = quelques σ^2 = quelques 10^{-8} pour obtenir la sensibilité en ellipticité maximale, comme montré dans la section 2.3.2.

Le signe de Γ de part et d'autre du minimum de l'intensité extraordinaire (correspondant à $\Gamma = 0$) est déterminé par des mesures préliminaires d'effet Cotton-Mouton dans le diazote. La constante Cotton-Mouton de ce gaz est de $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}} = -(2.15 \pm 0.09) \times 10^{-13}$ $\mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}$ [71]. En comparant le signe de $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ donné dans la littérature et le signe de l'ellipticité que nous mesurons, nous déduisons le signe de Γ, et donc le signe de la constante Cotton-Mouton de l'hélium ou du xénon gazeux. L'objectif des mesures dans le vide étant d'évaluer la sensibilité du dispositif, le procédé de calibration du signe n'a pas été effectué. Nous donnerons donc la valeur absolue de la constante Cotton-Mouton du vide.

La procédure de tir correspond à celle décrite au paragraphe 2.5.1. Le tir est commandé depuis le sas de la salle blanche via un programme qui vérifie la boucle de sécurité de l'expérience (niveau d'azote dans le cryostat, isolation électrique de la salle blanche, résistance de la bobine...). L'un ou l'autre des deux générateurs est connecté à la bobine, de façon à réaliser des tirs pour les deux directions du champ magnétique. Les intensités ordinaire et extraordinaire sont enregistrées, ainsi que la tension aux bornes de la résistance de shunt, qui nous permet de remonter à la valeur du courant qui traverse la bobine (voir section 2.5.1). Le champ magnétique est calculé à partir du courant et du facteur de forme B/I. L'analyse est ensuite réalisée à partir de ces données comme décrit dans le paragraphe 4.2.

Après avoir évalué les effets Cotton-Mouton systématiques, nous présentons les résultats obtenus dans deux gaz rares : l'hélium et le xénon, puis ceux obtenus dans le vide.

4.4 Effets systématiques

Les biréfringences magnétiques linéaires que nous avons mesurées au cours de cette thèse étant très faibles (quelques 10^{-16} $\mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}$ pour l'hélium, quelques 10^{-14} $\mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}$ pour le xénon et quelques 10^{-24} T^{-2} pour le vide), nous devons considérer les différents effets systématiques présents sur le signal d'ellipticité. En particulier, deux effets Cotton-Mouton se superposent à celui des gaz d'hélium, de xénon ou du vide : l'effet du gaz résiduel présent dans l'enceinte, et l'effet des miroirs de la cavité Fabry-Perot qui sont soumis à un champ magnétique de fuite.

4.4.1 Effet des gaz résiduels

Avant l'injection d'hélium ou de xénon, et pour les mesures dans le vide, la pression dans l'enceinte à vide est de quelques 10^{-7} mbar. Les gaz alors présents dans l'enceinte sont rappelés dans le tableau 4.5 avec leur fraction molaire. Nous avons rapporté dans la colonne de droite leurs contributions à l'effet Cotton-Mouton à $T = 293$ K, calculées à partir de l'équation (4.7). Finalement la biréfringence magnétique linéaire due aux gaz résiduels, à $P = 10^{-7}$ mbar, est de l'ordre de :

$$k_{\text{CM, gaz résiduels}} \simeq -1 \times 10^{-23}\ \text{T}^{-2}, \tag{4.36}$$

principalement due au diazote et au dioxygène.

gaz	fraction molaire (%)	k^{N}_{CM} ($\text{T}^{-2}.\text{atm}^{-1}$)	Référence	$k_{\text{CM}}(T,P)$ (T^{-2})
N_2	45	-2.1×10^{-13}	[71]	-9×10^{-24}
H_2	40	8.6×10^{-15}	[13]	3×10^{-25}
H_2O	10	7.4×10^{-15}	[77]	7×10^{-26}
O_2	2	-2.5×10^{-12}	[133]	-5×10^{-24}
Ar	1.5	9.1×10^{-15}	[134]	1×10^{-26}
CO_2	1.5	-4.6×10^{-13}	[78]	-6×10^{-25}
C_nH_m	< 0.5	$< 10^{-11}$	[13]	$< 5 \times 10^{-24}$

TABLE 4.5 – Principaux gaz résiduels présents dans l'enceinte à vide pompée à une pression de 10^{-7} mbar et leurs constantes k^{N}_{CM} à $T_0 = 273.15$ K. C_nH_m désigne différents hydrocarbures, dont des traces ont été détectées. La dernière colonne correspond à leur contribution à l'effet Cotton-Mouton lorsque la pression dans l'enceinte est de 10^{-7} mbar.

Dans les gaz, les mesures ont été réalisées pour des pressions minimales d'hélium et de xénon de 40 mbar et 3 mbar respectivement, ce qui correspond à des biréfringences de l'ordre de 9×10^{-18} T^{-2} et 7×10^{-17} T^{-2}. L'effet du gaz résiduel, au moins cinq ordres de grandeur plus faible, est donc négligeable devant les effets à mesurer. Ce calcul ne tient néanmoins pas compte du dégazage des parois de l'enceinte à vide, qui était de l'ordre de 10^{-3} mbar par heure lors de ces mesures. Au bout d'une heure, temps maximal nécessaire pour enregistrer les données pour une pression, la biréfringence magnétique linéaire due au gaz résiduel est d'environ 1×10^{-19} T^{-2}. Elle est de l'ordre de 1% de la biréfringence minimale mesurée dans l'hélium et de 0.1% de celle mesurée dans le xénon. L'effet du dégazage sera donc négligé par la suite.

En ce qui concerne les mesures dans le vide, nous verrons dans le paragraphe 4.6, que l'effet du gaz résiduel est également négligeable compte tenu de la sensibilité de notre dispositif expérimental.

4.4.2 Effet Cotton-Mouton des miroirs de la cavité

Les miroirs, soumis au champ magnétique de fuite transverse, sont également responsables d'un effet Cotton-Mouton. Nous avons enregistré les champs au niveau des miroirs M_1 et M_2 de la cavité Fabry-Perot au cours d'un tir à 6.5 T. Ils sont représentés sur la figure 4.1. Le champ magnétique généré par la bobine X-coil en son centre est superposé en pointillés, en unités arbitraires. Les champs de fuite sont retardés par rapport à celui-ci. Cela est dû à l'écrantage par les plaques du cuivre placées autour de la bobine. Le champ de fuite au niveau de M_1 est d'environ 280 μT, ce qui correspond à une atténuation d'un facteur 20000 du champ de la bobine X-coil. Le miroir M_2 est plus éloigné de la bobine que M_1. Il est donc soumis à un champ plus atténué, d'un facteur 150000 environ, de l'ordre de 40 μT.

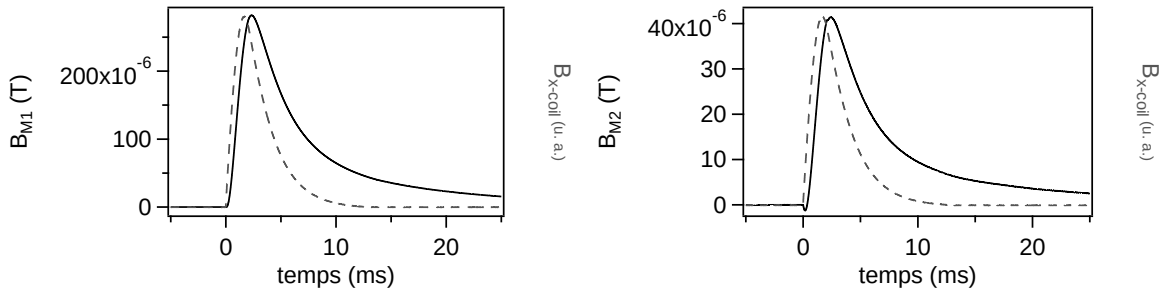


FIGURE 4.1 – Les champs magnétiques transverses de fuite au cours d'un tir à 6.5 T sont représentés en trait plein, au niveau du miroir M_1 à gauche et au niveau du miroir M_2 à droite. Le champ produit par la bobine X-coil en son centre est superposé en unités arbitraires en pointillés.

L'effet Cotton-Mouton de miroirs interférentiels de haute réflectivité, du même type que ceux utilisés sur l'expérience BMV, a été mesuré expérimentalement par G. Bialolenker *et al.* [135]. La finesse de la cavité était alors de 145000. L'ellipticité induite par l'application d'un champ magnétique transverse sur de tels miroirs est de l'ordre de $\psi_{1\ \text{réflexion}} \sim 10^{-9}$ rad.T^{-2} par réflexion, principalement due aux couches interférentielles. Nous calculons l'ellipticité Ψ_{miroirs} induite par les champs magnétiques de fuite lors des mesures dans le vide comme suit :

$$\Psi_{\text{miroirs}} = \frac{2F}{\pi}\left(B_{\text{M1}}^2 + B_{\text{M2}}^2\right) \times \psi_{1\ \text{réflexion}}, \tag{4.37}$$

où $B_{\text{M1}} \sim 280\ \mu$T et $B_{\text{M2}} \sim 40\ \mu$T. Elle est de l'ordre de 2×10^{-11} rad, pour une finesse typique de 445000.

Les ellipticités correspondant aux plus faibles pressions de d'hélium et de xénon que nous avons mesurées sont respectivement de l'ordre de 9×10^{-6} rad et 8×10^{-5} rad. L'ellipticité due à l'effet Cotton-Mouton des miroirs, qui est inférieure à 2×10^{-11}

rad (les tirs étant réalisés à 3 T dans les gaz, les champs de fuite sur les miroirs sont inférieurs à ceux présentés sur la figure 4.1), est donc négligeable devant l'effet de l'hélium ou du xénon. Nous verrons dans la section 4.6 qu'elle est également négligeable dans le vide.

4.5 Effet Cotton-Mouton dans les gaz

4.5.1 Dans l'hélium gazeux

Nos mesures

Nous avons mesuré la constante Cotton-Mouton $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ pour des pressions comprises entre 40 mbar et 540 mbar. La finesse a été mesurée pour chaque pression P. Elle était en moyenne de 438000. Pour chaque pression nous avons réalisé des tirs dans chacune des quatre catégories présentées précédemment : $>>$, $><$, $<<$, $<>$, où le premier symbole représente le signe de Γ, et le second la direction de $\vec{B}$. Deux à quatre tirs sont effectués par catégorie.

Signaux bruts

Nous présentons sur la figure 4.2 les intensités ordinaire $I_{\mathrm{t}}(t)$ et extraordinaire $I_{\mathrm{e}}(t)$ enregistrées au cours d'un tir de champ magnétique de valeur maximale 3 T, dans 240 mbar d'hélium. L'intensité ordinaire $I_{\mathrm{t,f}}(t)$ filtrée est superposée en pointillés. Nous avons également tracé l'évolution temporelle du carré du champ magnétique B^2 et du carré du champ magnétique filtré B_{f}^2. Comme nous le voyons, le filtrage donne un signal atténué et retardé par rapport à B^2.

Le champ magnétique est déclenché à $t_0 = 0$ ms. On remarque que I_{t} subit une chute de quelques pourcents à partir de $t \sim 15$ ms. Néanmoins la cavité reste asservie et le signal revient à sa valeur maximale après quelques dizaines de millisecondes. En ce qui concerne I_{e}, nous observons clairement un signal corrélé au tir de champ magnétique. Des oscillations apparaissent sur les intensités I_{t} et I_{e} autour de $t = 12$ ms, soit à la fin de l'impulsion de champ magnétique. Leur période indique qu'elles font partie des résonances de l'enceinte à vide observées autour de 1 kHz sur la densité spectrale du signal d'erreur de l'asservissement de la figure 2.27. Elles sont dues à une onde acoustique qui se propage de la bobine X-coil jusqu'aux chambres de l'enceinte à vide et se répercute sur la position des miroirs. Si l'asservissement ne corrige pas parfaitement cette perturbation, la transmission de la cavité et donc les intensités I_{t} et I_{e} varient. De plus, si les miroirs bougent, le point d'impact du faisceau sur ceux-ci change. L'ellipticité statique Γ varie alors ce qui entraîne des

instabilités sur l'intensité extraordinaire. Pour s'affranchir de ces effets, les signaux seront analysés jusqu'à $t_{\text{fin}} = 10$ ms après le début du champ magnétique.

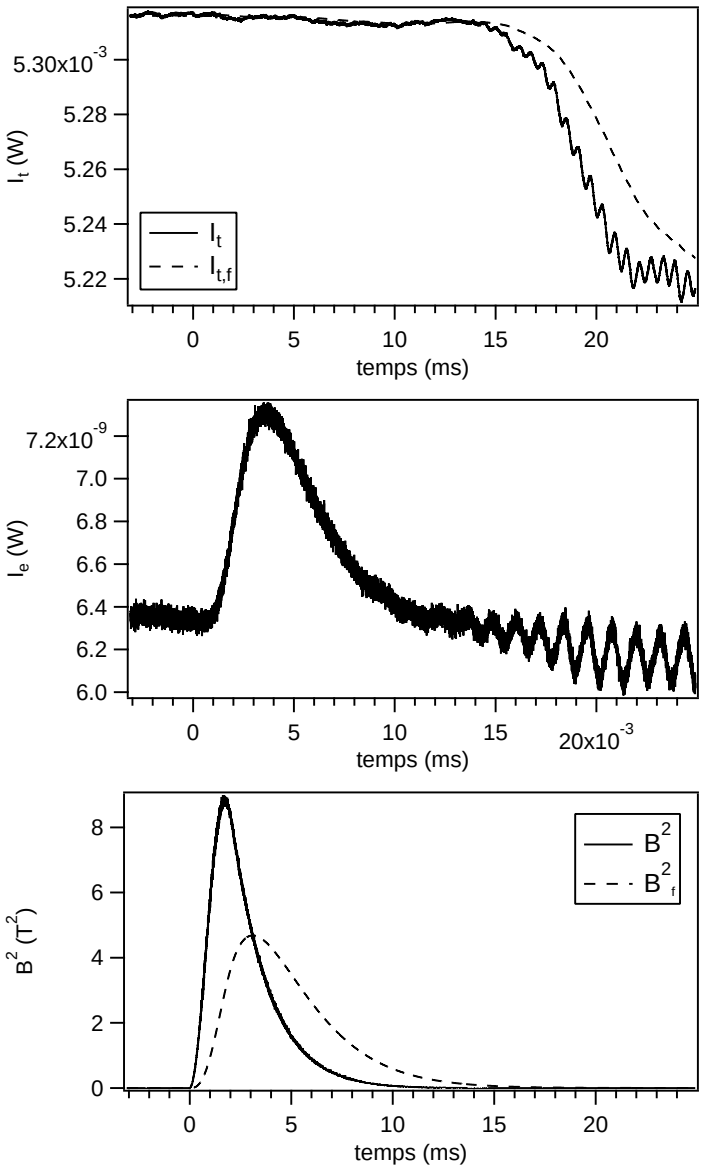


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle des intensités ordinaire I_{t}, extraordinaire I_{e} et du carré du champ magnétique en fonction de temps au cours d'un tir de champ à 3 T, dans 240 mbar d'hélium. L'intensité ordinaire $I_{\text{t,f}}$ et le carré du champ magnétique B_{f}^2 sont superposés en pointillés. Ils sont issus du filtrage de I_{t} et de B^2 par le filtre passe bas d'ordre 1 équivalent à la cavité Fabry-Perot.

A_{DC} et $|\Gamma|$, donnés par les équations (4.12) et (4.13), sont calculés à partir des données enregistrées entre $t_{\text{début}} = -3.1$ ms et le début du champ à $t_0 = 0$ ms. L'instant $t_{\text{début}}$ a été choisi identique à celui pris pour l'analyse des données dans le vide. Il permet d'avoir suffisamment de points pour pouvoir calculer une valeur significative de A_{DC} et de $|\Gamma|$, tout en évitant les phénomènes de dérives des intensités

qui peuvent apparaître sur des durées plus longues.

Signaux $Y_{\mathrm{j}}(t)$

Nous calculons les signaux $Y_{>>}(t)$, $Y_{><}(t)$, $Y_{<<}(t)$ et $Y_{<>}(t)$ qui correspondent aux moyennes des $Y(t)$ par catégories. Ils sont représentés en gris sur la figure 4.3 pour une pression $P \simeq 240$ mbar. L'incertitude à 1σ, obtenue à partir de l'équation (4.26) apparaît en gris plus clair. Elle correspond à la dispersion des Y calculés pour chaque tir de la catégorie. Nous avons superposé en pointillé l'ellipticité $\gamma\Psi(t)$ attendue à une telle pression. Ce signal est positif pour $\Gamma > 0$ et négatif pour $\Gamma < 0$. Il a été calculé à partir de la valeur théorique de la constante Cotton-Mouton donnée dans la référence [123]. Il apparaît clairement que l'ellipticité Ψ n'est pas la composante principale du signal Y, comme discuté dans la section 4.2.2. Nous observons également que $Y_{>>}(t)$, $Y_{><}(t)$, $Y_{<<}(t)$ et $Y_{<>}(t)$ ne suivent pas la même évolution au cours du temps. Cela confirme qu'ils sont la combinaison de plusieurs signaux de symétries différentes par rapport au signe de Γ et à la direction de $\vec{B}$, conformément à l'expression donnée dans l'équation (4.15).

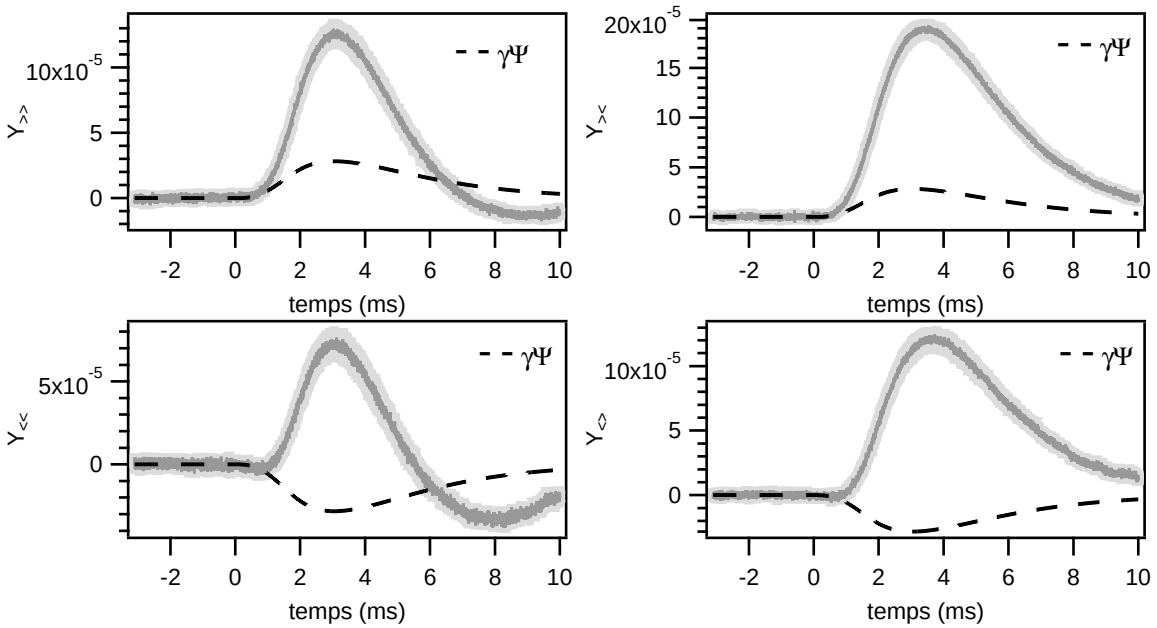


FIGURE 4.3 – $Y_{>>}(t)$, $Y_{><}(t)$, $Y_{<<}(t)$ et $Y_{<>}(t)$ obtenus dans une pression $P \simeq 240$ mbar d'hélium. L'incertitude à 1σ sur le signal apparaît en gris clair. L'ellipticité $\gamma\Psi(t)$ attendue à une telle pression est superposée en pointillés.

Ellipticité $\Psi(t)$

A partir de $Y_{>>}(t)$, $Y_{><}(t)$, $Y_{<<}(t)$ et $Y_{<>}(t)$, des valeurs moyennes $\left\langle \frac{1}{\Gamma_{>>}} \right\rangle$, $\left\langle \frac{1}{\Gamma_{><}} \right\rangle$, $\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<<}} \right\rangle$ et $\left\langle \frac{1}{\Gamma_{<>}} \right\rangle$, et des équations (4.19) et (4.22)-(4.25), nous calculons l'ellipticité $\Psi(t)$ pour chaque pression P. Son évolution temporelle est représentée en gris sur la figure 4.4 pour $P \simeq 240$ mbar. L'incertitude à 1σ, calculée à partir de l'expression (4.27), est figurée en gris plus clair. Ce signal est ajusté par une fonction de la forme αB_{f}^2. L'ajustement est superposé en pointillés. Nous en déduisons la constante Cotton-Mouton $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ à partir de l'expression (4.30).

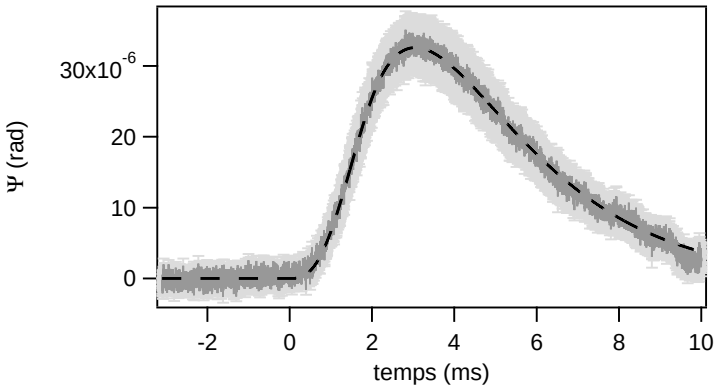


FIGURE 4.4 – Évolution temporelle de l'ellipticité $\Psi(t)$ obtenue pour une pression $P \simeq 240$ mbar. Les incertitudes à 1σ sont représentées en gris clair. L'ajustement par une fonction de la forme αB_{f}^2 est superposé en pointillés.

Constante Cotton-Mouton en fonction de la pression

La procédure précédente a été répétée pour chaque pression. Les valeurs de $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ que nous avons obtenues sont tracées en fonction de P sur la figure 4.5. L'incertitude de type A sur chaque valeur a été calculée à partir de l'équation (4.32). Nous constatons que la dispersion des $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ est supérieure à l'incertitude de type A calculée sur chaque valeur. Cette incertitude semble donc être sous-estimée. Nous voyons ici l'importance de réaliser la mesure de la constante Cotton-Mouton à plusieurs pressions. Nous ajustons les valeurs de $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ par une droite et nous obtenons :

$$k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{n}}(T) = (2.45 \pm 0.25) \times 10^{-16}\ \mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}, \tag{4.38}$$

à $T = (293 \pm 1)$ K. L'ordonnée à l'origine est compatible à 1σ avec zéro. L'ajustement est superposé en trait plein aux données expérimentales sur la figure 4.5. Nous avons également représenté en gris la zone correspondant à l'intervalle de confiance à 1σ donné par l'ajustement.

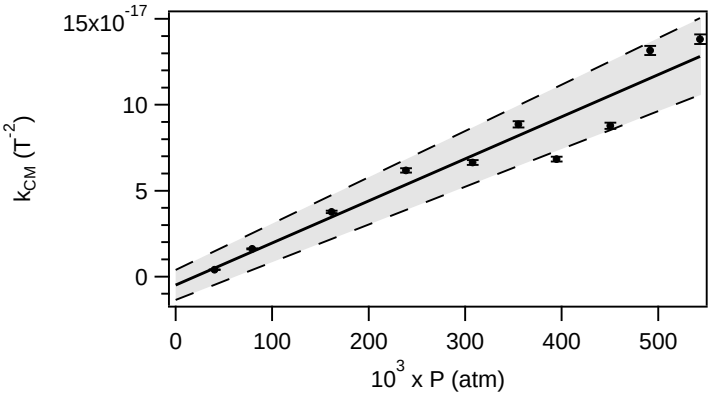


FIGURE 4.5 – Constantes Cotton-Mouton $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ mesurées dans un gaz d'hélium en fonction de la pression. Les ronds noirs représentent les points expérimentaux avec leur incertitude de type A à 1σ. Le trait plein correspond à l'ajustement linéaire en fonction de la pression. La partie grisée correspond à la zone de confiance à 1σ donnée par l'ajustement.

L'incertitude finale sur $k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)$ est calculée en prenant en compte les incertitudes de type A sur l'ajustement en fonction de la pression et sur le temps de vie des photons dans la cavité, et les incertitudes de type B (voir les équations (4.33) et (4.34)). Nous obtenons la constante Cotton-Mouton à $T = (293 \pm 1)$ K :

$$k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T) = (2.45 \pm 0.27) \times 10^{-16}\ \mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}. \tag{4.39}$$

La constante $k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}}$ à $T_0 = 273.15$ K est calculée comme suit :

$$k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}} = k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)\frac{T}{T_0}, \tag{4.40}$$

d'où :

$$k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}} = (2.63 \pm 0.29) \times 10^{-16}\ \mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}. \tag{4.41}$$

Ce résultat a fait l'objet d'une publication en 2013 dans *Physical Review A* [79] donnée dans l'annexe D. L'analyse présentée dans cet article diffère quelque peu de celle décrite dans ce chapitre comme nous l'avons expliqué précédemment (voir le paragraphe 4.2.3). La valeur de $k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}}$ qui y est donnée est compatible à 1σ avec la valeur obtenue ici.

Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales et théoriques

Les valeurs expérimentales de la constante Cotton-Mouton $k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}}$ de l'hélium, à $T_0 = 273.15$ K, sont reportées sur la figure 4.6, en fonction de la longueur d'onde (en haut) et à $\lambda = 1064$ nm (en bas). Une mesure a été publiée à $\lambda = 514.5$ nm [62], une à $\lambda = 532$ nm [75], une à $\lambda = 790$ nm [134] et une à $\lambda = 1064$ nm [75]. Notre mesure est la deuxième à cette longueur d'onde. Tous ces résultats sont résumés dans le

tableau 4.6.

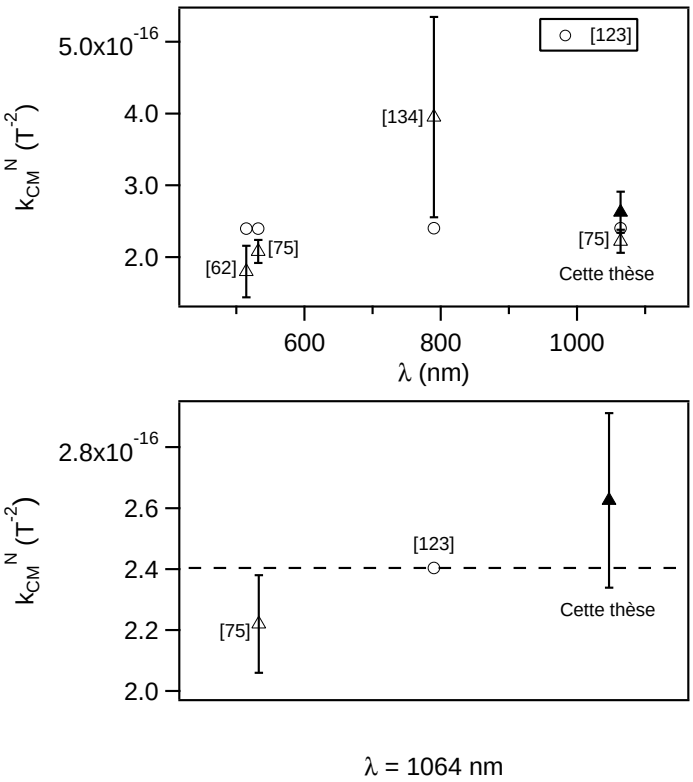


FIGURE 4.6 – Comparaison des valeurs reportées de la constante Cotton-Mouton $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ de l'hélium, à $T_0 = 273.15$ K en fonction de la longueur d'onde (en haut) et à $\lambda = 1064$ (en bas). Les triangles blancs correspondent aux valeurs expérimentales issues de la littérature, le triangle noir à la mesure réalisée au cours de cette thèse. La ligne pointillée et les ronds blancs représentent les prédictions théoriques.

Les valeurs théoriques de $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ à chaque longueur d'onde sont issues de la référence [123] qui utilise la méthode des clusters couplés. La base de fonctions d'ondes employée est la plus étendue possible et la valeur de $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ considérée comme exacte. Elles sont représentées par les ronds blancs sur la figure 4.6, et rapportées dans le tableau 4.6. Notre mesure est la première valeur expérimentale compatible à 1σ avec cette prédiction théorique. Cela prouve que notre dispositif se révèle capable de mesurer avec exactitude des biréfringences de l'ordre de quelques 10^{-16} $\mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}$. Cet étalonnage constitue un véritable test de notre appareil et de la méthode d'analyse, qui sont dédiés à la mesure de la biréfringence magnétique du vide.

λ (nm)	**Résultats expérimentaux** Référence	$10^{16} \times k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ (T^{-2})	**Prédiction théorique** [123] $10^{16} \times k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ (T^{-2})
514.5	[62]	1.80 ± 0.36	2.3959
532	[75]	2.08 ± 0.16	2.3966
790	[134]	3.95 ± 1.40	2.4018
1064	[75]	2.22 ± 0.16	2.4036
1064	Cette thèse	2.63 ± 0.29	2.4036

TABLE 4.6 – Bilan des valeurs expérimentales et théoriques de la constante $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ de l'hélium gazeux à $T_0 = 273.15$ K.

4.5.2 Dans le xénon gazeux

Nos mesures

Nous avons mesuré la constante Cotton-Mouton du xénon gazeux pour des pressions allant de 3 mbar à 8 mbar. Deux jeux de miroirs ont été utilisés, de finesses moyennes 400000 et 480000. Des tirs ont été réalisés pour les quatre catégories présentées précédemment et l'ellipticité $\Psi(t)$ a été calculée pour chaque pression à partir des signaux $Y_{>>}(t)$, $Y_{><}(t)$, $Y_{<<}(t)$ et $Y_{<>}(t)$ et des équations (4.19) et (4.22)-(4.25). Comme pour l'hélium, les données ont été analysées entre $t_{\text{début}} = -3.1$ ms et $t_{\text{fin}} = 10$ ms. L'ajustement par le champ magnétique $B_{\mathrm{f}}^2(t)$ nous a permis de déduire la constante la constante Cotton-Mouton à $T = (293 \pm 1)$ K, pour chaque pression. Les valeurs obtenues sont présentées sur la figure 4.7.

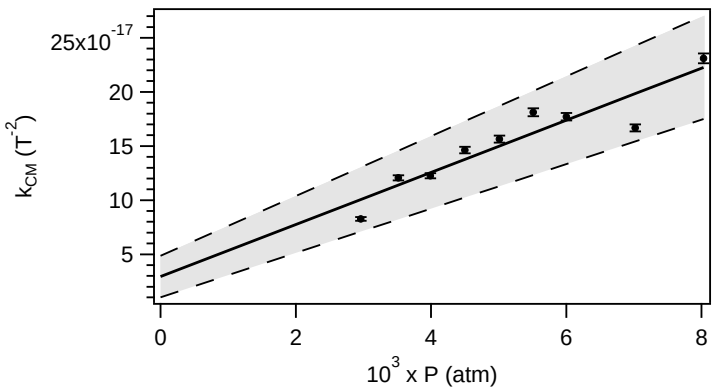


FIGURE 4.7 – Constantes Cotton-Mouton $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ mesurées dans un gaz de xénon en fonction de la pression. Les ronds noirs représentent les points expérimentaux avec leur incertitude de type A à 1σ. Le trait plein correspond à l'ajustement linéaire en fonction de la pression. La partie grisée correspond à la zone de confiance à 1σ donnée par l'ajustement.

Comme pour les mesures dans l'hélium, la dispersion des valeurs de $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ est plus grande que l'incertitude de type A sur chaque point ce qui confirme la nécessité de faire des mesures à plusieurs pressions. Les valeurs de $k_{\mathrm{CM}}(T, P)$ sont

ajustées linéairement en fonction de la pression. L'ajustement est superposé aux points expérimentaux sur la figure 4.7. Nous obtenons :

$$k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T) = (2.41 \pm 0.36) \times 10^{-14}\ \mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}. \tag{4.42}$$

L'ordonnée à l'origine est compatible avec zéro à 2σ. Nous avons également représenté en gris la zone correspondant à l'intervalle de confiance à 1σ donné par l'ajustement.

L'incertitude finale sur $k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T)$ est calculée en prenant en compte les incertitudes de type A sur l'ajustement en fonction de la pression et sur le temps de vie des photons dans la cavité, et les incertitudes de type B (voir les équations (4.33) et (4.34)). Nous obtenons la constante Cotton-Mouton à $T = (293 \pm 1)$ K :

$$k^{\mathrm{n}}_{\mathrm{CM}}(T) = (2.41 \pm 0.37) \times 10^{-14}\ \mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}, \tag{4.43}$$

La valeur à $T_0 = 273.15$ K est calculée à partir de l'expression (4.40) :

$$k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}} = (2.59 \pm 0.40) \times 10^{-14}\ \mathrm{T}^{-2}.\mathrm{atm}^{-1}. \tag{4.44}$$

Ce résultat a fait l'objet d'un article publié en 2015 dans *The Journal of Chemical Physics* [126] et donné dans l'annexe F.

Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales et théoriques

Les valeurs expérimentales de la constante Cotton-Mouton $k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}}$ du xénon, reportées dans la littérature, sont représentées sur la figure 4.8, en fonction de la longueur d'onde (en haut), et à $\lambda = 1064$ nm (en bas). Une mesure a été publiée à $\lambda = 514.5$ nm [136]. La valeur à $\lambda = 632.8$ nm est rapportée dans la référence [137] comme une communication privée de W. Hüttner. Enfin, une mesure a été publiée à $\lambda = 1064$ nm [73, 76]. Notre mesure est la deuxième à cette longueur d'onde, compatible à 1σ avec la valeur expérimentale de la référence [76]. Ces valeurs sont également résumées dans le tableau 4.7.

Notre mesure est assortie d'une incertitude de 15%, supérieure aux incertitudes des autres valeurs expérimentales rapportées. En particulier les valeurs à 514.5 nm et 632.8 nm ont des incertitudes de 4% et 5%. Aucune information (dispositif, nombre de pressions mesurées, bilan d'incertitudes) n'est donnée concernant la mesure à $\lambda = 632.8$ nm. La valeur publiée à $\lambda = 514.5$ nm est issue d'une seule mesure, à une pression de 1 atm. Par ailleurs, elle est obtenue en comparant le signal mesuré à celui obtenu pour un gaz de diazote, dans les mêmes conditions de température et de pression. Autrement dit, la constante Cotton-Mouton du diazote est prise comme

référence en supposant qu'elle est sans incertitude. Il est donc justifié de penser que l'incertitude associée à cette valeur est sans doute sous-estimée. La valeur publiée à $\lambda = 1064$ nm (références [73, 76]) a une incertitude de 9%. Elle est issue de la moyenne pondérée de mesures à deux pressions seulement. Nous avons réalisé des mesures absolues à 9 pressions différentes, et un bilan d'incertitudes complet. La dispersion des valeurs que nous avons obtenues en fonction de la pression montre la difficulté de ces mesures, et l'importance d'en réaliser pour un nombre suffisant de pressions afin de pouvoir faire un ajustement linéaire et, ainsi, avoir une bonne estimation de l'incertitude.

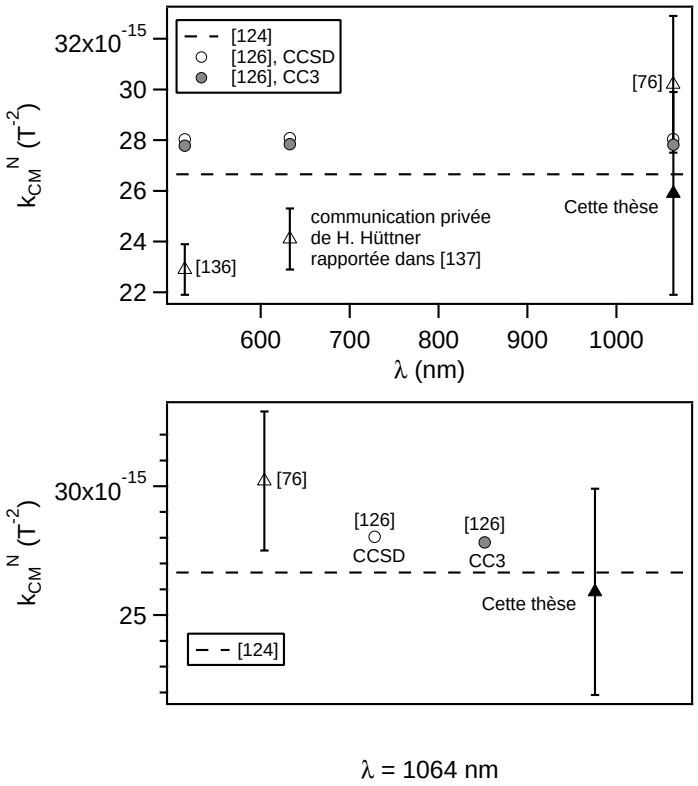


FIGURE 4.8 – Comparaison des valeurs reportées de la constante Cotton-Mouton $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ du xénon, à $T_0 = 273.15$ K, en fonction de la longueur d'onde (en haut) et à $\lambda = 1064$ nm (en bas). Les triangles blancs correspondent aux valeurs expérimentales issues de la littérature, le triangle noir à la mesure réalisée au cours de cette thèse. La ligne pointillée et les ronds gris et blancs représentent les prédictions théoriques.

D. Bishop et S. Cybulski ont publié une valeur théorique de la constante Cotton-Mouton du xénon à $\lambda = \infty$, en utilisant la méthode du champ auto-consistant (SCF, pour Self Consistent Field) [124]. Elle est représentée par la ligne pointillée sur la figure 4.8 et rapportée dans le tableau 4.7. Leurs calculs ne tiennent pas compte de la corrélation électronique ni des effets relativistes. Notre mesure est compatible à 1σ avec leur prédiction. Dans le cadre d'une collaboration avec notre équipe, A.

Rizzo et S. Coriani ont réalisé des calculs originaux avec la méthode des clusters couplés (méthode qui inclut la corrélation électronique), et en prenant en compte les effets relativistes. Deux niveaux d'approximation ont été utilisés, CCSD et CC3, selon le nombre d'excitations incluses dans les calculs. Les valeurs qu'ils ont obtenues à $\lambda = 514.5$ nm, $\lambda = 632.8$ nm et $\lambda = 1064$ nm, sont rapportées dans notre article commun publié dans *The Journal of Chemical Physics* [126] et dans le tableau 4.7. Elles sont représentées par les ronds blancs (CCSD) et gris (CC3) sur la figure 4.8. Notre mesure est également compatible à 1σ avec leur valeur théorique à $\lambda = 1064$ nm.

L'écart entre les prédictions théoriques de la constante Cotton-Mouton tenant compte de la corrélation électronique et des effets relativistes (CCSD et CC3) et celle ne tenant compte d'aucun des deux (SCF) est d'environ 5%. Le même ordre de grandeur est obtenu pour les valeurs théoriques de la constante de Verdet qui sont rapportées dans le tableau 3.7 (valeurs notées NR et CCSD ou CC3). Il semble donc que l'impact de la corrélation électronique et des effets relativistes soit équivalent sur les calculs de constante de Verdet et de constante Cotton-Mouton. Notre incertitude expérimentale de 15% ne permet pas de discriminer les différentes prédictions théoriques. La valeur expérimentale publiée par M. Bregant *et al.* [76] est compatible à 2σ avec les deux types de prédictions théoriques.

Notons ici que la valeur expérimentale publiée à $\lambda = 514.5$ nm [136] n'est pas compatible à 3σ avec les prédictions théoriques. La valeur à $\lambda = 632.8$ nm [137] est compatible à 3σ avec la prédiction de D. Bishop et S. Cybulski [124] et tout juste non compatible à 3σ avec les valeurs de A. Rizzo et S. Coriani. Cela semble confirmer que les incertitudes expérimentales associées à ces mesures sont sous-estimées.

λ (nm)	**Résultats expérimentaux**		**Prédiction théorique**		
	Référence	$10^{14} \times k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ (T^{-2})	Référence	$10^{14} \times k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ (T^{-2})	
				CCSD	CC3
514.5	[136]	2.29 ± 0.10	[126]	2.803	2.778
632.8	W. Hüttner	2.41 ± 0.12	[126]	2.808	2.784
1064	[73, 76]	3.02 ± 0.27	[126]	2.804	2.782
1064	Cette thèse	2.59 ± 0.40	[126]	2.804	2.782
				SCF	
∞			[124]	2.665	

TABLE 4.7 – Bilan des valeurs expérimentales et théoriques de la constante Cotton-Mouton $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ du xénon gazeux à $T_0 = 273.15$ K. La valeur expérimentale de W. Hüttner est rapportée dans [137].

4.6 Effet Cotton-Mouton du vide

La mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide représente l'objectif principal de l'expérience BMV. Les mesures précédentes, et en particulier celles dans l'hélium, ont permis de valider le dispositif expérimental et la méthode d'analyse. Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus dans le vide. Rappelons que l'effet que nous cherchons à mesurer est huit ordres de grandeur inférieur à celui observable dans 1 atm d'hélium gazeux. Les mesures dans le vide seront donc sensibles à des effets qui n'apparaissaient pas sur les signaux enregistrés dans les gaz.

4.6.1 Nos mesures

Les résultats présentés ici correspondent à un total 194 tirs dans le vide, répartis sur 9 jours d'acquisition de données et dans les quatre catégories mentionnées dans la section 4.2.3. La finesse moyenne lors de ces acquisitions était de 445000. L'objectif de ces mesures étant de connaître la sensibilité du dispositif expérimental, nous n'avons pas réalisé de calibration du signe de la constante Cotton-Mouton par la mesure de l'effet dans un gaz. Nous donnerons donc ici la valeur absolue de la constante Cotton-Mouton du vide.

Signaux bruts

Nous présentons sur la figure 4.9 l'évolution des intensités ordinaire $I_{\mathrm{t}}(t)$, extraordinaire $I_{\mathrm{e}}(t)$ et ordinaire filtrée $I_{\mathrm{t,f}}(t)$, et du carré du champ magnétique non filtré $B^2(t)$ et filtré $B^2_{\mathrm{f}}(t)$, au cours d'un tir à 6.5 T. Au bout de quelques millisecondes, des oscillations apparaissent sur les intensités. Elles sont dues, comme lors des mesures dans les gaz, à une onde sonore provoquée par le tir de champ, qui atteint les miroirs de la cavité et les fait bouger. L'asservissement en fréquence du laser permet de maintenir la résonance entre la cavité et l'onde lumineuse pendant quelques millisecondes. Autour de 10 ms, les tensions de commande de l'asservissement, envoyées au laser et au modulateur acousto-optique (voir le schéma de la figure 2.26), atteignent leurs valeurs maximales. Les variations de la longueur de la cavité ne sont alors plus suivies par la fréquence du laser. La condition de résonance de la cavité Fabry-Perot n'étant plus satisfaite, I_{e} et I_{t} deviennent nulles.

Pour mieux cerner l'aspect temporel de la perturbation nous observons le signal de commande envoyé par le dispositif d'asservissement en fréquence à la cale piézoélectrique fixée au cristal du laser. Son évolution temporelle au cours d'un tir à 6.5 T est représentée sur la figure 4.10. Le tir de champ est déclenché à $t_0 = 0$ ms. Jusqu'à $t = 3.1$ ms, la commande a une amplitude de variation de quelques cen-

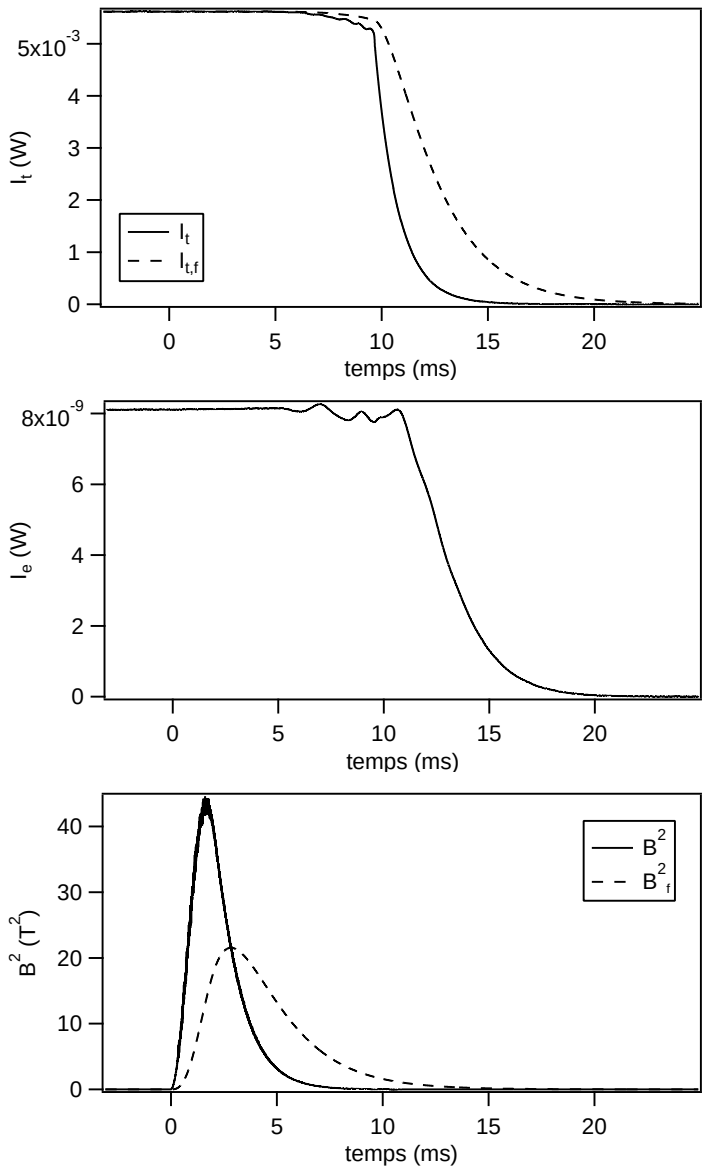


FIGURE 4.9 – Évolution temporelle des intensités ordinaire I_{t}, extraordinaire I_{e} et du carré du champ magnétique en fonction de temps au cours d'un tir de champ à 6.5 T. L'intensité ordinaire filtrée $I_{\mathrm{t,f}}$ et le carré du champ magnétique filtré B_{f}^2 sont superposés en pointillés.

taines de millivolts, ce qui correspond au fonctionnement normal de l'asservissement dans un régime calme, pour lequel aucune perturbation particulière n'est appliquée à la cavité. A partir de $t = 3.1$ ms, nous remarquons un changement brutal de son comportement qui se matérialise par des oscillations. Cette évolution est la marque claire de l'action d'une perturbation extérieure sur la cavité. Le temps qu'elle met pour atteindre les miroirs est en accord avec l'ordre de grandeur présenté dans le paragraphe 2.6.3 et avec les mesures réalisées avec un accéléromètre au cours de la thèse de Paul Berceau [72].

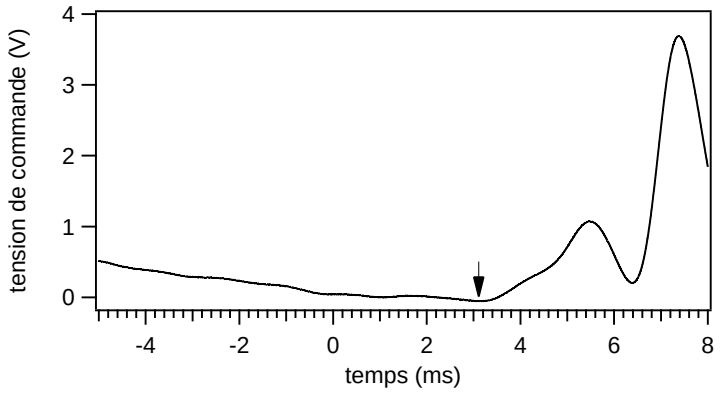


FIGURE 4.10 – Évolution temporelle de la tension de commande envoyée à la cale piézoélectrique fixée au cristal du laser par le système d'asservissement en fréquence. Le tir de champ magnétique est déclenché à $t_0 = 0$ ms. La flèche indique l'instant auquel la perturbation acoustique due à l'impulsion de champ arrive sur les miroirs de la cavité.

Pour ne pas tenir compte de la perturbation acoustique et éviter toute variation importante de Γ, les signaux sont tronqués à l'instant $t_{\text{fin}} = 3.1$ ms. Le carré du champ magnétique filtré atteint son maximum à $t_{\text{max}} = 2.8$ ms. Les données sont donc analysées sur toute la montée du champ magnétique. Par symétrie, les valeurs de A_{DC} et $|\Gamma|$, données par les équations (4.12) et (4.13), sont calculées entre $t_{\text{début}} = -3.1$ ms et $t_0 = 0$ ms.

Sélection des données pour l'analyse

La biréfringence statique de la cavité Fabry-Perot, et donc l'ellipticité statique Γ, présentent parfois des dérives qui entraînent des variations de l'intensité extraordinaire d'amplitudes comparables à celles dues à l'effet du vide.

Afin d'obtenir les signaux les plus propres possibles, nous sélectionnons les tirs dont l'ellipticité peut être considérée comme stable avant le déclenchement du champ magnétique (soit pour $t_{\text{début}} = -3.1$ ms $< t < t_0 = 0$ ms). Pour cela, à partir de l'équation (4.2) qui donne le rapport des intensités, nous calculons pour chaque tir $\Psi(t < t_0)$, telle que :

$$\Psi(t < t_0) = \sqrt{\left\langle \frac{I_{\text{e}}(t)}{I_{\text{t,f}}(t)} \right\rangle_{t<t_0} - (\sigma^2 + \Gamma^2)}. \tag{4.45}$$

Les valeurs de σ^2 et Γ sont calculées à partir des équations (4.14) et (4.13). L'angle statique ϵ présent dans l'équation (4.2) est ici négligé devant $(\sigma^2 + \Gamma^2)$. En l'absence de champ magnétique $\Theta_{\text{F}}(t < t_0)$ est nul.

L'ellipticité $\Psi(t < t_0)$ obtenue ainsi doit être nulle en moyenne. Nous calculons l'histogramme des points qui la composent (3100 points, la période d'échantillonnage

des données étant de 1 μs). Deux histogrammes typiques sont présentés sur la figure 4.11. Leur ajustement par une gaussienne est superposé en pointillé. L'histogramme de la figure de gauche correspond à une distribution normale, centrée sur zéro. Les données qui présentent ce type d'histogramme sont sélectionnées pour l'analyse. L'histogramme de la figure de droite ne correspond pas à une distribution normale. Cela est expliqué par une variation de l'ellipticité statique Γ, qui correspond généralement à une dérive, avant le tir. Plus généralement, tous les tirs dont l'histogramme de l'ellipticité $\Psi(t < t_0)$ n'est pas correctement ajusté par une gaussienne ne sont pas sélectionnés pour l'analyse. En effet, il est impossible, dans ce cas, de donner une valeur significative de Γ ni d'être certain que ce paramètre n'a pas encore varié de façon importante pendant le tir.

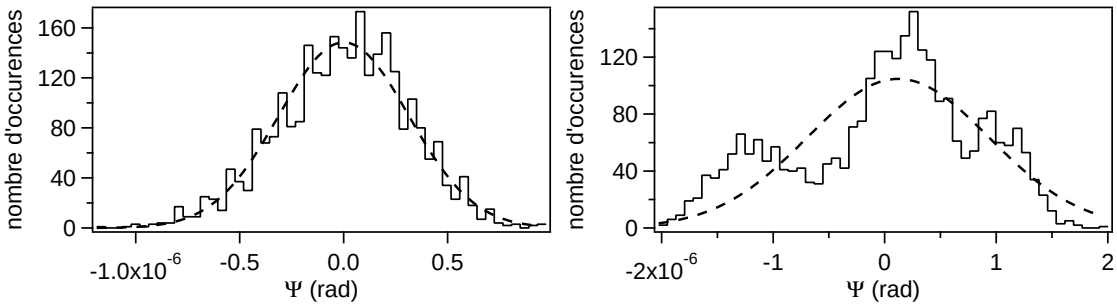


FIGURE 4.11 – Histogrammes des valeurs prises par l'ellipticité $\Psi(t)$ au cours des 3.1 ms précédant le déclenchement du champ magnétique et calculée à partir de l'équation (4.45). Les courbes en pointillés représentent leur ajustement par une gaussienne. A gauche : l'histogramme correspond à une distribution normale, le tir est retenu pour l'analyse. A droite : l'histogramme ne correspond pas à une distribution normale, le tir n'est pas retenu pour l'analyse.

Finalement, 101 tirs sur les 194 réalisés sont utilisés pour l'analyse, répartis comme suit dans les quatre catégories :

- $\Gamma > 0$ et $\vec{B}$ parallèle à la direction $O\vec{x}$ (>>) : 36 tirs,
- $\Gamma > 0$ et $\vec{B}$ anti-parallèle à la direction $O\vec{x}$ (><) : 13 tirs,
- $\Gamma < 0$ et $\vec{B}$ anti-parallèle à la direction $O\vec{x}$ (<<) : 18 tirs,
- $\Gamma < 0$ et $\vec{B}$ parallèle à la direction $O\vec{x}$ (<>) : 34 tirs.

Signal d'ellipticité $\Psi(t)$

Nous présentons en gris sur la figure 4.12 les signaux $Y_{>>}(t)$, $Y_{><}(t)$, $Y_{<<}(t)$ et $Y_{<>}(t)$, obtenus pour chaque catégorie. L'incertitude à 1σ apparaît en gris plus clair. Elle a été calculée à partir de l'équation (4.26). Comme dans le cadre des mesures dans les gaz, ces quatre signaux ne suivent pas la même évolution temporelle. Ils sont donc la combinaison de plusieurs effets de symétries différentes par rapport au

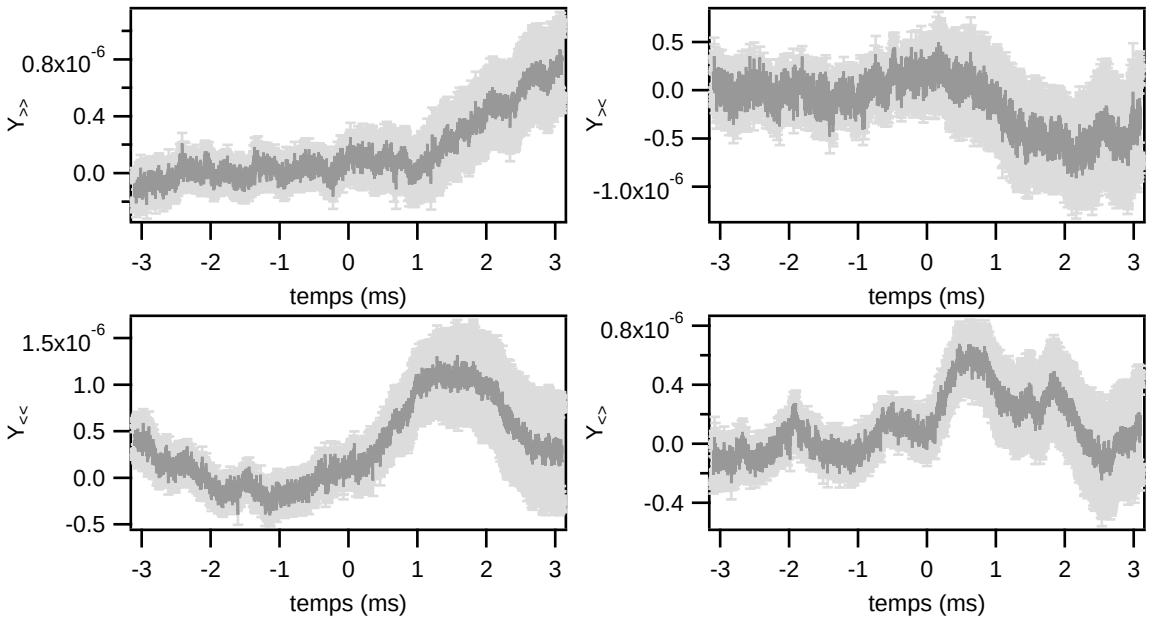


FIGURE 4.12 – $Y_{>>}(t)$, $Y_{><}(t)$, $Y_{<<}(t)$ et $Y_{<>}(t)$ obtenus lors des mesures dans le vide. L'incertitude à 1σ sur le signal apparaît en gris clair.

signe de l'ellipticité statique et à la direction du champ magnétique.

A partir des $Y_{\mathrm{j}}(t)$ et des valeurs moyennes $\left\langle \frac{1}{\Gamma_{\mathrm{j}}} \right\rangle$ de chaque catégorie j, nous calculons l'ellipticité $\Psi(t)$ via les équations (4.19) et (4.22) à (4.25). Son évolution temporelle est représentée sur la figure 4.13, avec les incertitudes à 1σ en gris clair.

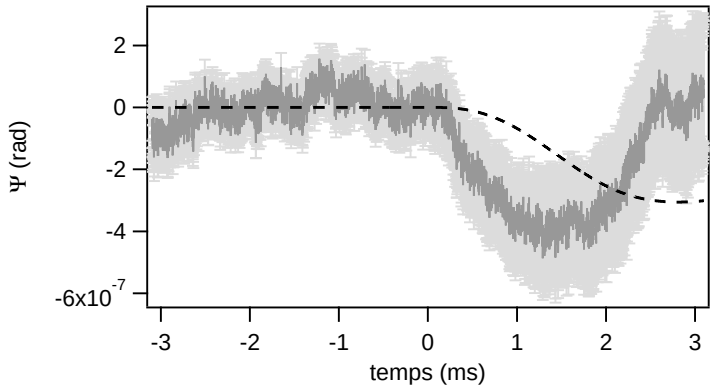


FIGURE 4.13 – Évolution temporelle de l'ellipticité $\Psi(t)$ obtenue à partir des tirs dans le vide. L'incertitude à 1σ est représentée en gris clair. L'ajustement par une fonction de la forme αB_{f}^2 est superposé en pointillés.

Nous observons un effet qui débute avec le déclenchement du tir de champ magnétique, à $t_0 = 0$ ms. Ce signal ne suit pas l'évolution temporelle du carré du champ magnétique filtré, qui atteint son maximum à $t = 2.8$ ms. Néanmoins, nous

pouvons évaluer l'amplitude de cet effet en termes de biréfringence magnétique. Pour cela, nous ajustons $\Psi(t)$ par une fonction de la forme $\alpha B_{\mathrm{f}}^2(t)$. La constante Cotton-Mouton k_{CM} équivalente à l'effet est déduite de la valeur de α donnée par l'ajustement à partir de l'équation (4.30). L'ajustement est superposé en pointillés à $\Psi(t)$ sur la figure 4.13. Nous obtenons :

$$|k_{\mathrm{CM}}| = (1.27 \pm 0.05) \times 10^{-19}\ \mathrm{T}^{-2}. \tag{4.46}$$

L'incertitude est donnée à 1σ. Nous voyons très clairement que nous sommes en présence d'un effet systématique qui a les propriétés de symétrie d'un effet Cotton-Mouton, bien qu'il n'en ait pas la forme temporelle.

Le signal observé sur la figure 4.13 s'apparente à une oscillation à une fréquence de quelques centaines de hertz. Or, nous savons que l'enceinte à vide présente des résonances mécaniques (elles apparaissent sur la densité spectrale du signal d'erreur de l'asservissement de la figure 2.27). Pour les situer plus en détails, nous avons tracé la densité spectrale de puissance de l'intensité extraordinaire, enregistrée en l'absence de champ magnétique. Elle est présentée sur la figure 4.14. Plusieurs pics apparaissent entre 100 Hz et 600 Hz. Ils correspondent à des résonances mécaniques du dispositif, qui peuvent être excitées par le tir de champ magnétique.

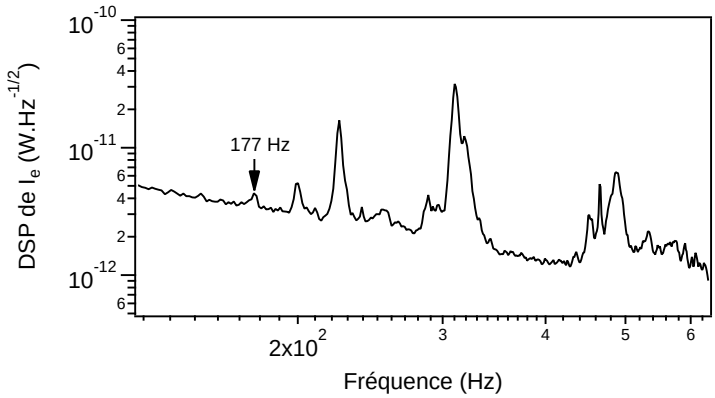


FIGURE 4.14 – Densité spectrale de puissance de l'intensité extraordinaire en l'absence de champ magnétique. Les différents pics correspondent à des résonances mécaniques de l'enceinte à vide. La flèche indique la fréquence de résonance qui correspond au meilleur ajustement de l'oscillation observée sur le signal d'ellipticité.

L'oscillation de l'ellipticité observée sur la figure 4.13 correspond donc vraisemblablement à une résonance mécanique du montage, provoquée par l'impulsion de champ magnétique. Cet effet démarrant avec le champ magnétique, nous l'attribuons à l'effet d'induit dans le petit tube en inox qui traverse la bobine X-coil. Comme nous l'avons vu dans la section 2.6.3, le champ magnétique induit une force de Laplace F_{L}

proportionnelle à $B \times \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$. L'effet d'induit est donc pair vis-à-vis du changement de direction du champ magnétique. Cette force excite une des résonances mécaniques de l'enceinte à vide ce qui se répercute sur les miroirs, connectés au corps de l'enceinte à vide par leur système de fixation. Il se mettent à osciller, entraînant une variation de l'ellipticité statique Γ qui se traduit par le signal systématique de symétrie $-+$ observé sur la figure 4.13.

Constante Cotton-Mouton du vide

Afin de soustraire le signal systématique provoqué par l'excitation de l'une des résonances mécaniques de l'enceinte à vide, le signal d'ellipticité est ajusté par une fonction sinus, commençant à $t_0 = 0$ ms. La fréquence f du sinus est fixée aux fréquences de résonances observées sur la densité spectrale de puissance de l'intensité extraordinaire. L'ajustement donnant le meilleur χ^2 est obtenu pour $f = 177$ Hz, qui correspond au pic indiqué par une flèche sur la figure 4.14. Il est superposé à l'ellipticité $\Psi(t)$ sur la figure 4.15.

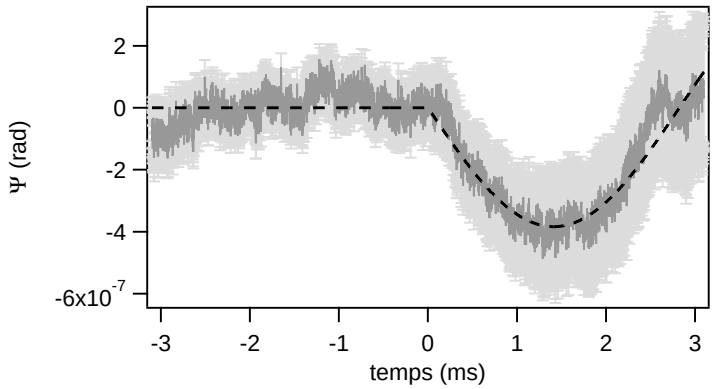


FIGURE 4.15 – Ajustement (en pointillés) de l'ellipticité $\Psi(t)$ (en gris) par un sinus de fréquence $f = 177$ Hz et commençant à $t_0 = 0$ ms.

Les résidus de cet ajustement sont représentés sur la figure 4.16. L'incertitude à 1σ a été calculée à partir de l'incertitude sur $\Psi(t)$ et de l'incertitude sur l'amplitude de la fonction sinus. Ils sont ajustés par une fonction de la forme αB_{f}^2, dont la courbe est représentée en pointillés sur la figure 4.16. A partir de l'équation (4.30), nous déduisons la constante Cotton-Mouton du vide de la valeur de α. Nous obtenons :

$$|k_{\mathrm{CM}}| = (3.8 \pm 2.0) \times 10^{-21}\ \mathrm{T}^{-2}. \tag{4.47}$$

L'incertitude est donnée à 1σ. Ce résultat est compatible à 2σ avec la prédiction de l'électrodynamique quantique, qui est de $4 \times 10^{-24}\ \mathrm{T}^{-2}$.

L'analyse précédente permet d'obtenir la constante k_{CM} en deux étapes : nous

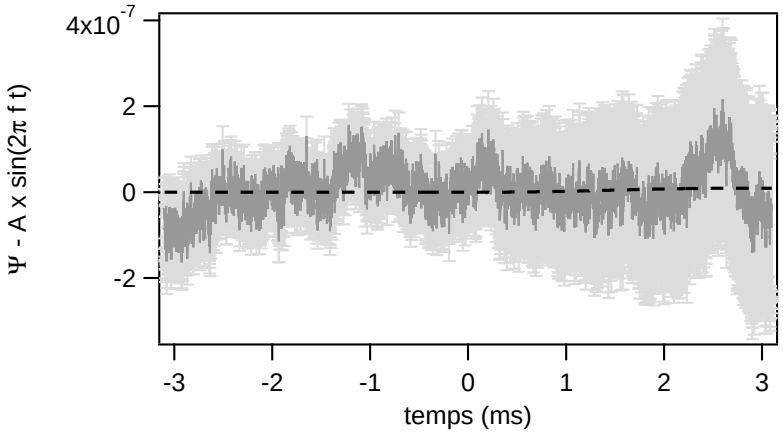


FIGURE 4.16 – Résidus de l'ajustement de l'ellipticité $\Psi(t)$ par une fonction sinus de fréquence $f = 177$ Hz. L'incertitude à 1σ est représentée en gris clair. L'ajustement de ces résidus par αB_{f}^2 est superposé en pointillés.

commençons par soustraire le signal parasite, puis nous ajustons l'effet Cotton-Mouton. Cela suppose que l'effet systématique est prépondérant par rapport à l'effet Cotton-Mouton. Nous pouvons nous affranchir de cette hypothèse en ajustant l'ellipticité $\Psi(t)$ par une combinaison linéaire d'une fonction sinus de fréquence $f = 177$ Hz, et de αB_{f}^2. Nous obtenons une deuxième valeur pour l'effet Cotton-Mouton :

$$|k_{\mathrm{CM}}| = (6.1 \pm 2.5) \times 10^{-21}\ \mathrm{T}^{-2}. \tag{4.48}$$

L'incertitude, donnée à 1σ, a été calculée suivant la procédure décrite au paragraphe 4.2.5. Cette valeur est compatible à 3σ avec la prédiction théorique. Une incertitude étendue à 3σ correspond à un niveau de confiance de 99.8% et est couramment utilisée pour souligner l'évidence d'un signal non-nul, en cas de non-compatibilité avec zéro.

Ces deux résultats montrent que le niveau de bruit en ellipticité de ce dispositif est de quelques 10^{-21} T^{-2}. La valeur centrale dépend de la procédure d'ajustement des données. Ils ont fait l'objet d'une publication en janvier 2014 dans *The European Physical Journal D* [132], donnée dans l'annexe E. Comme dans le cas de la mesure de l'effet Cotton-Mouton de l'hélium, les résultats présentés dans l'article ont été obtenus avec une procédure d'analyse permettant de calculer l'ellipticité $\Psi(t)$ de façon approchée. Les valeurs de $|k_{\mathrm{CM}}|$ qui y sont rapportées sont compatibles à 1σ avec celles présentées dans cette thèse, et l'ordre de grandeur de la sensibilité y est identique. Nous allons maintenant évaluer les différents facteurs qui contribuent à sa limitation.

4.6.2 Limitations de la sensibilité en ellipticité

Nous avons vu dans le chapitre 2 que, pour une ellipticité statique Γ^2 grande devant la taux d'extinction σ^2 des polariseurs, la sensibilité en ellipticité du dispositif est limitée par les fluctuations de la biréfringence de la cavité. La sensibilité optimale est obtenue pour $\Gamma^2 = \sigma^2$. Nous nous sommes donc placés dans cette configuration pour les mesures d'effet Cotton-Mouton. Nous pouvons maintenant comparer notre sensibilité à la limite donnée par le bruit de grenaille de la détection de l'intensité extraordinaire.

Bruit de grenaille

Le facteur ultime qui limite la sensibilité en ellipticité est le bruit de grenaille ou shot-noise, c'est-à-dire le bruit quantique de la détection des photons. Le rapport signal sur bruit dans ce cas a été calculé dans la section 2.3.2. Nous le rappelons ici :

$$SNR_{\text{s-n}} = \sqrt{\frac{4I_{\text{t}}\Psi^2\eta}{h\nu}\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2+\sigma^2}}, \tag{4.49}$$

où η est l'efficacité quantique de la photodiode en extinction et $h\nu$ est l'énergie du photon. L'ellipticité minimale $\Psi_{\text{s-n}}$ qu'il est alors possible de mesurer avec un rapport signal sur bruit de 1 est de :

$$\Psi^{\text{s-n}} = \sqrt{\frac{h\nu}{4I_{\text{t}}\eta}\frac{\Gamma^2+\sigma^2}{\Gamma^2}}. \tag{4.50}$$

Pour une intensité ordinaire transmise I_{t} d'environ 6 mW, et $\Gamma^2 \simeq \sigma^2$, elle est d'environ :

$$\Psi^{\text{s-n}} \simeq 4 \times 10^{-9}\ \text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}. \tag{4.51}$$

Pour pouvoir comparer l'ellipticité au shot-noise à la sensibilité du dispositif expérimental, nous devons calculer sa sensibilité en ellipticité Ψ^{sens} en rad/$\sqrt{\text{Hz}}$. Elle est obtenue comme suit :

$$\Psi^{\text{sens}}[\text{rad}/\sqrt{\text{Hz}}] = \Psi^{\text{lim}} \times \sqrt{t_{\text{analyse}}}. \tag{4.52}$$

t_{analyse} est la durée totale sur laquelle les données ont été analysées. Nous avons analysé 101 tirs pendant 3.1 ms après le début du champ magnétique, d'où : $t_{\text{analyse}} = 3.1 \times 10^{-1}$ s. Ψ^{lim} est l'ellipticité minimale que nous sommes capables de mesurer. Elle est reliée à l'incertitude Δk_{CM} sur la constante Cotton-Mouton par :

$$\Psi^{\text{lim}} = \frac{2FL_{\text{B}}}{\lambda}B^2_{\text{f, max}}\Delta k_{\text{CM}}. \tag{4.53}$$

$B^2_{\mathrm{f,\,max}} = 21.5\ \mathrm{T}^2$ est le maximum de $B^2_{\mathrm{f}}(t)$ lors d'un tir à 6.5 T.

Finalement, la sensibilité en ellipticité du dispositif expérimental est :

$$\Psi^{\mathrm{sens}} \simeq 4 \times 10^{-9}\ \mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}, \tag{4.54}$$

avec $\Delta k_{\mathrm{CM}} = 2.5 \times 10^{-21}\ \mathrm{T}^{-2}$, soit du même ordre de grandeur que le shot-noise. Cette sensibilité a pu être atteinte grâce à la maîtrise de la biréfringence statique de la cavité qui a été réglée de façon à avoir $\Gamma^2 \simeq \sigma^2$. Pour l'améliorer, il faudra diminuer la limite du shot-noise. Cela sera réalisé en augmentant la puissance incidente sur la cavité, et donc l'intensité transmise I_{t}. Il sera alors nécessaire de considérer les autres sources de bruit. Nous allons en particulier nous intéresser à l'influence d'un bruit de fréquence de l'asservissement sur l'ellipticité d'un faisceau se propageant dans la cavité Fabry-Perot biréfringente.

Bruit de fréquence de l'asservissement

Au premier ordre, un asservissement imparfait de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité n'induit pas de bruit en ellipticité. Cependant, des effets d'ordre supérieur existent et sont une cause de limitation de la sensibilité en ellipticité du dispositif expérimental. Ils sont dus à la biréfringence statique des miroirs de la cavité Fabry-Perot. Nous présenterons ici les résultats de la modélisation d'un bruit de fréquence sur un faisceau lumineux se propageant dans une cavité Fabry-Perot biréfringente.

Fréquences de résonance des faisceaux ordinaire et extraordinaire

Rappelons la modélisation de la cavité Fabry-Perot présentée dans la section 2.3.2. Chaque miroir de la cavité peut-être décomposé en un miroir non biréfringent m_j et une lame L_j qui introduit un déphasage δ_j entre les composantes de la polarisation parallèles à ses axes neutres. La cavité est donc équivalente à une lame L_{eq} de déphasage δ_{eq} placée entre deux miroirs non biréfringents. Comme décrit dans la section 2.3.2, les miroirs sont positionnés de façon à aligner leurs axes neutres avec la polarisation linéaire incidente, l'axe rapide de M_1 (ou L_1) étant superposé à l'axe lent de M_2 (ou L_2). Le miroir M_1 est ensuite tourné sur lui même pour régler la biréfringence statique de la lame équivalente. Cette configuration est représentée sur la figure 4.17. L'ellipticité statique de la polarisation en sortie de cavité est donnée par :

$$\Gamma = \frac{2F}{\pi}\frac{\delta_{\mathrm{eq}}}{2}\sin 2\theta_{\mathrm{eq}}, \tag{4.55}$$

où F est la finesse de la cavité. Nous rappelons que δ_{eq} et θ_{eq} sont reliés aux carac-

téristiques des lames L_1 et L_2 comme suit [106] :

$$\delta_{\mathrm{eq}} = \sqrt{(\delta_2 - \delta_1)^2 + 4\delta_2\delta_1 \cos^2\theta_1}, \tag{4.56}$$

$$\cos 2\theta_{\mathrm{eq}} = \frac{\delta_2 + \delta_1 \cos 2\theta_1}{\delta_{\mathrm{eq}}}, \tag{4.57}$$

en s'appuyant sur les notations de la figure 4.17.

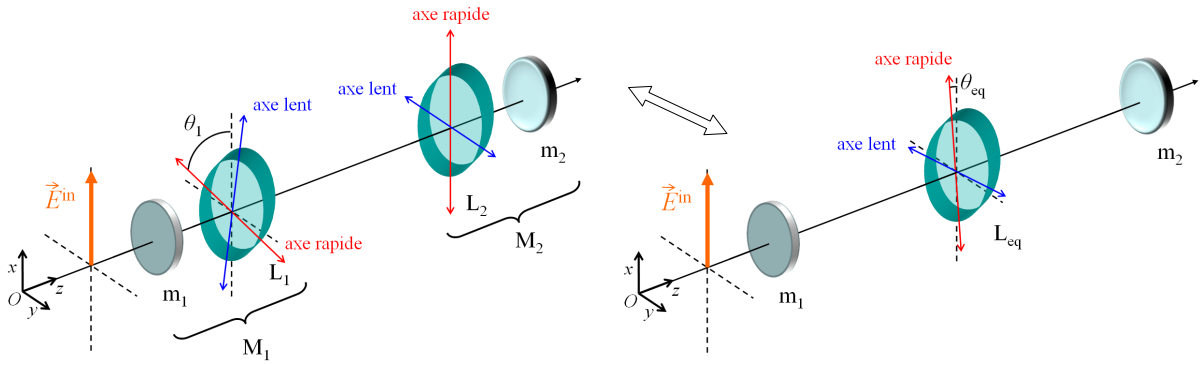


FIGURE 4.17 – Modélisation de la cavité Fabry-Perot biréfringente. Les lames L_1 et L_2 sont positionnées comme décrit dans la section 2.3.2, de façon à pouvoir régler l'ellipticité statique Γ en tournant le miroir M_1 (ou L_1) sur lui-même.

Lorsqu'ils se propagent dans la cavité biréfringente, les faisceaux ordinaire et extraordinaire ne voient pas le même indice. La longueur effective de la cavité étant donnée par nL_{c}, où n est l'indice optique perçu par la lumière et L_{c} est la longueur de la cavité, elle dépend de la direction de polarisation de l'onde. Cela a pour conséquence que les faisceaux ordinaire et extraordinaire n'ont pas la même fréquence de résonance dans la cavité Fabry-Perot. Pour obtenir un ordre de grandeur de la différence de fréquence $\delta\nu_{\text{t-e}} = \nu_{\mathrm{t}} - \nu_{\mathrm{e}}$, nous considérons que le déphasage de la lame équivalente à la cavité s'écrit :

$$\delta_{\mathrm{eq}} = \frac{2\pi}{\lambda} L_{\mathrm{b}}(n_{\mathrm{o}} - n_{\mathrm{e}}), \tag{4.58}$$

où n_{o} et n_{e} sont les indices vus par les faisceaux ordinaire et extraordinaire, et L_{b} est l'épaisseur de la lame biréfringente. $\lambda = \frac{c}{\nu}$ est la longueur d'onde du faisceau, avec $\nu = q \times \frac{c}{2L_{\mathrm{c}}}$ (q est un entier) la fréquence de résonance de la cavité non-biréfringente, définie dans la section 2.3.1. La fréquence de résonance du faisceau ordinaire est :

$$\nu_{\mathrm{t}} = q \times \frac{c}{2(L_{\mathrm{c}} + n_{\mathrm{o}}L_{\mathrm{b}})} \simeq q \times \frac{c}{2L_{\mathrm{c}}} \times \left(1 - n_{\mathrm{o}}\frac{L_{\mathrm{b}}}{L_{\mathrm{c}}}\right). \tag{4.59}$$

De même, la fréquence de résonance du faisceau extraordinaire est donnée par :

$$\nu_{\mathrm{e}} \simeq q \times \frac{c}{2L_{\mathrm{c}}} \times \left(1 - n_{\mathrm{e}}\frac{L_{\mathrm{b}}}{L_{\mathrm{c}}}\right). \tag{4.60}$$

Nous avons donc :

$$|\delta\nu_{\text{t-e}}| \simeq q \times \frac{c}{2L_{\mathrm{c}}} \times \frac{\lambda}{2L_{\mathrm{c}}}\frac{|\delta_{\mathrm{eq}}|}{\pi} \simeq \Delta^{\mathrm{ISL}} \times \frac{|\delta_{\mathrm{eq}}|}{\pi}, \tag{4.61}$$

où $\Delta^{\mathrm{ISL}} = \frac{c}{2L_{\mathrm{c}}}$ est l'intervalle spectral libre de la cavité. Pour la cavité utilisée au cours de cette thèse, $\Delta^{\mathrm{ISL}} \simeq 66$ MHz, et $|\delta_{\mathrm{eq}}| \sim 10^{-7}$ rad, la différence de fréquence de résonance entre les faisceaux ordinaire et extraordinaire est de l'ordre du hertz.

Pour calculer cette différence plus rigoureusement, nous devons exprimer les transmissions en intensité $T_{\mathrm{c,t}}$ et $T_{\mathrm{c,e}}$ des faisceaux ordinaire et extraordinaire.

Soit

$$\vec{E}_{\mathrm{i}}(t) = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \tag{4.62}$$

le champ électrique qui décrit l'onde incidente sur la cavité, de pulsation ω. Le champ électrique en sortie de cavité s'écrit :

$$\vec{E}_{\mathrm{s}}(t,\omega) = \mathbf{E}_{\mathrm{s}}(t,\omega)\vec{E}_{\mathrm{i}}, \tag{4.63}$$

avec

$$\mathbf{E}_{\mathrm{s}}(t,\omega) = t_1' t_2 \times \sum_{p=0}^{\infty} (r_1 r_2)^p \mathrm{e}^{-i\omega\frac{L_{\mathrm{c}}}{c}(2p+1)} \mathbf{L}_{\mathrm{eq}}^{2p+1}. \tag{4.64}$$

r_1, r_2, t_1' et t_2 sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des miroirs de la cavité, définis dans la section 2.3. $\mathbf{L}_{\mathrm{eq}}$ est la matrice décrivant la lame biréfringente. Dans le repère orthonormé donné par ses axes, elle s'écrit :

$$\mathbf{L}_{\mathrm{eq}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\delta_{\mathrm{eq}}/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\delta_{\mathrm{eq}}/2} \end{pmatrix}. \tag{4.65}$$

Nous obtenons les transmissions $T_{\mathrm{c,t}}$ et $T_{\mathrm{c,e}}$ grâce aux expressions suivantes :

$$T_{\mathrm{c,t}}(\omega) = \left| \frac{1}{E_0 \mathrm{e}^{i\omega t}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}(-\theta_{\mathrm{eq}})\mathbf{E}_{\mathrm{s}}(t,\omega)\mathbf{R}(\theta_{\mathrm{eq}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2, \tag{4.66}$$

$$T_{\mathrm{c,e}}(\omega) = \left| \frac{1}{E_0 \mathrm{e}^{i\omega t}} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}(-\theta_{\mathrm{eq}})\mathbf{E}_{\mathrm{s}}(t,\omega)\mathbf{R}(\theta_{\mathrm{eq}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2, \tag{4.67}$$

où $\mathbf{R}(\theta_{\mathrm{eq}})$ est la matrice rotation d'angle θ_{eq}.

Les transmissions $T_{\mathrm{c,t}}(\omega)$ et $T_{\mathrm{c,e}}(\omega)$ sont tracées sur la figure 4.18. Elles sont maximales pour les fréquences ν_{t} et ν_{e} respectivement. Dans la configuration dans laquelle nous avons réalisé les mesures d'effet Cotton-Mouton dans le vide (le miroir M_1 était alors tourné de façon à avoir Γ^2 de l'ordre de quelques 10^{-7}), l'écart $\delta\nu_{\text{t-e}} = \nu_{\mathrm{t}} - \nu_{\mathrm{e}}$ est d'environ 1 Hz. Rappelons que la largeur à mi-hauteur du pic de résonance de la cavité Fabry-Perot est d'environ 150 Hz. Les pics d'Airy des faisceaux ordinaire et extraordinaire sont donc décalés d'une fréquence $\delta\nu_{\text{t-e}}$ comme représenté sur la figure 4.18 (pour des raisons de clarté, l'écart $\delta\nu_{\text{t-e}}$ a été volontairement surestimé sur cette figure).

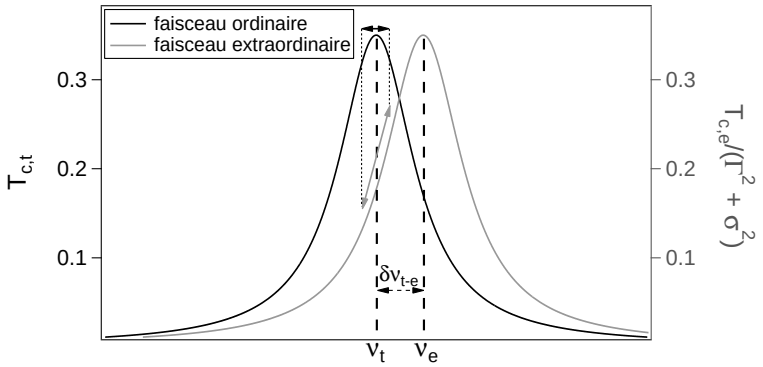


FIGURE 4.18 – Pics de résonance des faisceaux extraordinaire et ordinaire. Pour des raisons de clarté, l'écart $\delta\nu_{\text{t-e}}$ entre les fréquences de résonance des deux faisceaux a été volontairement surestimé par rapport à la largeur de la fonction d'Airy, par rapport à la situation effective sur l'expérience BMV. L'amplitude du bruit de fréquence dû à l'asservissement est symbolisé par les doubles flèches.

L'asservissement fixe la fréquence du laser sur la fréquence de résonance ν_{t} du faisceau ordinaire, avec une amplitude de bruit symbolisée par la double flèche noire. Ce bruit se traduit par une variation des l'intensités I_{t} et I_{e}. Si les pics de résonance des intensités ordinaire et extraordinaire sont superposés, le bruit sur I_{e} est corrélé au bruit sur I_{t}, au filtrage de la cavité près. Le bruit de fréquence s'annule donc dans le rapport $I_{\mathrm{e}}/I_{\mathrm{t,f}}$. C'est ce que nous avons considéré au cours des chapitres précédents. Si les deux pics de résonances sont décalés, nous voyons sur la figure 4.18 que les bruits sur I_{e} (représenté par la double flèche grise) et I_{t} ne sont plus identiques. Cela se traduit par un bruit d'ellipticité que nous avons modélisé.

Influence sur l'ellipticité mesurée

L'asservissement de l'expérience BMV fixe la fréquence du laser sur la fréquence de résonance du faisceau ordinaire $\nu_{\mathrm{t}} = q\frac{c}{2L_{\mathrm{c,0}}}$ (q est un entier et $L_{\mathrm{c,0}}$ est la longueur moyenne de la cavité) avec un bruit $z(t)$. Ce bruit, qui représente l'écart entre la

fréquence du laser et la fréquence de résonance du faisceau ordinaire dans la cavité, a été calculé s'appuyant sur la densité spectrale de puissance du signal d'erreur. Sa dispersion est représentée sur la figure 4.19. L'écart type des valeurs est de 74 Hz, soit de l'ordre de la largeur à mi-hauteur du pic de résonance de la cavité.

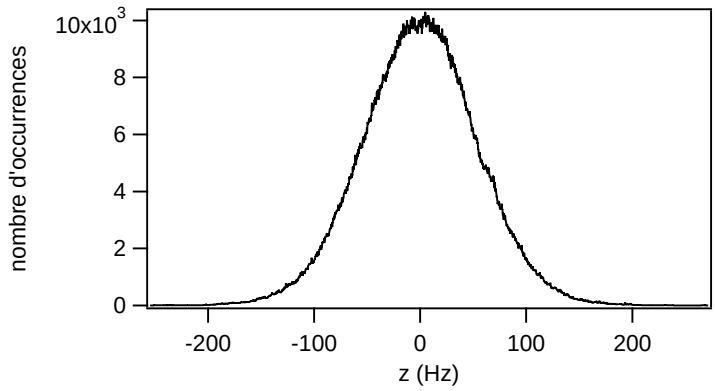


FIGURE 4.19 – Dispersion des valeurs de l'écart z entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance du faisceau ordinaire dans la cavité Fabry-Perot biréfringente. $z(t)$ est issu d'une modélisation numérique du système d'asservissement décrit dans le chapitre 2.

Pour calculer I_e et I_t, nous considérons que la fréquence du laser est fixée à ν_t et indépendante du temps, et que la longueur de la cavité Fabry-Perot varie au cours du temps, avec :

$$L_\mathrm{c}(t) = q \times \frac{c}{2(\nu_\mathrm{t} + z(t))}. \tag{4.68}$$

Nous exprimons le champ électrique en sortie de cavité :

$$\vec{E}_\mathrm{s}(t,\omega) = \mathbf{E}_\mathrm{s}(t,\omega)\vec{E}_\mathrm{i}, \tag{4.69}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_\mathrm{s}(t) = E_0 t_1' t_2 \mathbf{L}_\mathrm{eq} \mathrm{e}^{i2\pi\nu_\mathrm{t}\left(t - \frac{L_\mathrm{c}[t-L_\mathrm{c,0}/c]}{c}\right)} \\
+\ & E_0 t_1' t_2 r_1 r_2 \mathbf{L}_\mathrm{eq}^3 \mathrm{e}^{i2\pi\nu_\mathrm{t}\left(t - \frac{L_\mathrm{c}[t-L_\mathrm{c,0}/c]+L_\mathrm{c}[t-2L_\mathrm{c,0}/c]+L_\mathrm{c}[t-3L_\mathrm{c,0}/c]}{c}\right)} \\
+\ & E_0 t_1' t_2 (r_1 r_2)^2 \mathbf{L}_\mathrm{eq}^5 \mathrm{e}^{i2\pi\nu_\mathrm{t}\left(t - \frac{L_\mathrm{c}[t-L_\mathrm{c,0}/c]+L_\mathrm{c}[t-2L_\mathrm{c,0}/c]+L_\mathrm{c}[t-3L_\mathrm{c,0}/c]+L_\mathrm{c}[t-4L_\mathrm{c,0}+L_\mathrm{c}[t-5L_\mathrm{c,0}/c]/c]}{c}\right)} \\
+\ & \ldots
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Soit

$$\mathbf{E}_\mathrm{s}(t) = E_0 T \mathrm{e}^{i2\pi\nu_\mathrm{t} t} \sum_{p=0}^{\infty} R^p \mathbf{L}_\mathrm{eq}^{2p+1} \prod_{n=1}^{2p+1} \mathrm{e}^{-i2\pi\nu_\mathrm{t}\frac{L_\mathrm{c}[t-nL_\mathrm{c,0}/c]}{c}}, \tag{4.71}$$

où $T = t_1' t_2$ et $R = r_1 r_2$. Dans les équations précédentes $L_\mathrm{c}[t - nL_\mathrm{c,0}/c]$ désigne la longueur de la cavité prise à l'instant $(t - nL_\mathrm{c,0}/c)$. Notons que le temps mis par

la lumière pour faire un aller dans la cavité est considéré comme constant et égal à $L_{\mathrm{c},0}/c$.

Nous calculons ensuite les intensités ordinaire et extraordinaire :

$$I_{\mathrm{t}}(t) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{R}(-\theta_{\mathrm{eq}})\mathbf{E}_{\mathrm{s}}(t)\mathbf{R}(\theta_{\mathrm{eq}}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2, \tag{4.72}$$

$$I_{\mathrm{e}}(t) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathbf{R}(-\theta_{\mathrm{eq}})\mathbf{E}_{\mathrm{s}}(t)\mathbf{R}(\theta_{\mathrm{eq}}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2. \tag{4.73}$$

Les évolutions temporelles des intensités ordinaire et extraordinaire ont été calculées numériquement à partir des expressions (4.72) et (4.73). Elles sont représentées sur la figure 4.20. L'intensité ordinaire filtrée $I_{\mathrm{t,f}}$ est superposée en pointillés. Les paramètres utilisés pour cette simulation sont ceux correspondants aux mesures d'effet Cotton-Mouton dans le vide : la finesse de la cavité a été fixée à 445000, et l'ellipticité statique Γ^2 à 8×10^{-7}. L'intensité ordinaire moyenne est de l'ordre de 5 mW et son écart type d'environ 10^{-4} mW, ce qui correspond à une variation relative de 2×10^{-5}. Ces ordres de grandeurs sont en bon accord avec ceux observés expérimentalement. La variation relative de l'intensité extraordinaire simulée est de quelques 10^{-6}. Expérimentalement, elle est plutôt autour de 10^{-4}. Cette différence s'explique par le fait que la simulation ne considère que du bruit de fréquence sur les intensités.

A partir de l'expression générale donnée dans l'équation (2.142), nous écrivons le rapport des intensités valable dans le cadre de cette simulation :

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = [\Gamma + \Psi(t)]^2 \simeq \Gamma^2 + 2\Gamma\Psi(t). \tag{4.74}$$

La simulation ne prend pas en compte un défaut d'extinction des polariseurs. Le terme σ^2 de l'équation (2.142) n'apparaît donc pas ici. Nous avons également négligé les termes de rotation de la polarisation, statiques et dépendant du temps, en considérant que $\epsilon \ll \Gamma$ pour un déphasage induit par la lame équivalente $\delta_{\mathrm{eq}} \sim 10^{-7} \ll 1$. $\Psi(t)$ est l'ellipticité induite par le bruit de fréquence sur l'asservissement. Elle est calculée comme suit :

$$\Psi(t) = \frac{\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} - \Gamma^2}{2\Gamma}, \tag{4.75}$$

où Γ est la valeur moyenne de $\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t}}(t)}$ sur les 3.1 premières millisecondes du signal simulé. Elle est représentée sur la figure 4.21. Pour évaluer l'effet systématique induit, nous ajustons le signal simulé par αB_{f}^2, où $B_{\mathrm{f}}^2(t)$ est le carré du champ magnétique filtré

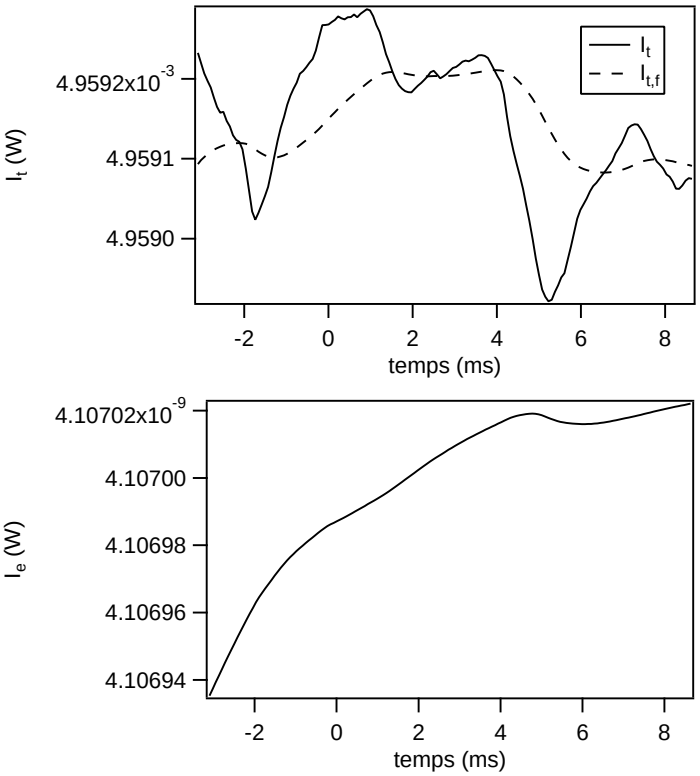


FIGURE 4.20 – Évolutions temporelles des intensités ordinaire (en haut) et extraordinaire (en bas), calculées numériquement en considérant que le faisceau lumineux se propage dans une cavité Fabry-Perot biréfringente et que sa fréquence est asservie sur la fréquence de résonance du faisceau ordinaire avec un bruit de fréquence $z(t)$. L'intensité ordinaire filtrée $I_{\mathrm{t,f}}$ est superposée à I_{t} en pointillés.

pour un tir à 6.5 T. L'ajustement est superposé en pointillés. Nous obtenons :

$$\alpha^{\mathrm{ass}} = (-2.31 \pm 0.2) \times 10^{-10} \text{ rad.T}^{-2}, \tag{4.76}$$

A partir de l'équation (4.30), nous calculons la constante k_{CM} correspondant à 1 tir de champ magnétique :

$$k^{\mathrm{ass}}_{\mathrm{CM,\ 1\ tir}} = (-2.0 \pm 0.2) \times 10^{-21} \text{ T}^{-2}. \tag{4.77}$$

L'incertitude est donnée à 1σ en ne considérant que l'incertitude sur α donnée par l'ajustement. Pour la comparer à la valeur expérimentale donnée dans l'équation (4.48) et obtenue avec $N = 101$ tirs de champ magnétique, nous ramenons la valeur expérimentale à 1 tir comme suit :

$$k_{\mathrm{CM,\ 1\ tir}} = k_{\mathrm{CM,\ N\ tirs}} \times \sqrt{N}. \tag{4.78}$$

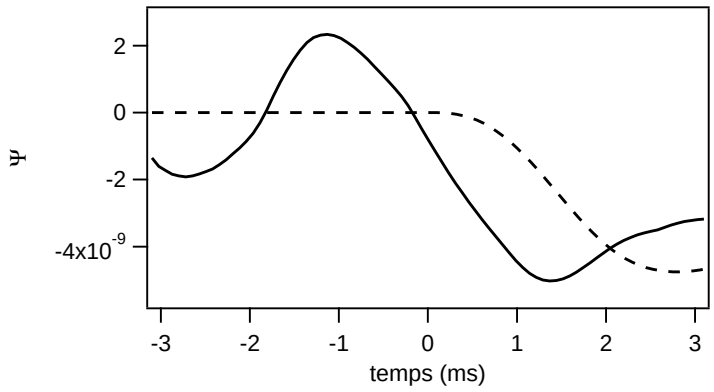


FIGURE 4.21 – Ellipticité calculée à partir de l'équation (4.75) et des intensités issues de la modélisation numérique de l'influence d'un bruit de fréquence de l'asservissement sur un faisceau résonant dans une cavité Fabry-Perot biréfringente. L'ajustement par une fonction de la forme αB_{f}^2 est superposé en pointillés.

Nous obtenons :

$$|k_{\mathrm{CM,\ 1\ tir}}^{\mathrm{exp}}| = (6.1 \pm 2.5) \times 10^{-20}\ \mathrm{T}^{-2}, \tag{4.79}$$

soit un ordre de grandeur au dessus de l'effet du à un bruit de fréquence de l'asservissement.

Un asservissement imparfait de la fréquence du laser sur la résonance de la cavité optique biréfringente est donc responsable d'un bruit en ellipticité que nous calculons comme suit :

$$\Psi^{\mathrm{ass}} = \alpha^{\mathrm{ass}} B_{\mathrm{f,\ max}}^2 \times \sqrt{t_{\mathrm{analyse}}}, \tag{4.80}$$

où $B_{\mathrm{f,\ max}}^2 = 21.5\ \mathrm{T}^2$ est le maximum de $B_{\mathrm{f}}^2(t)$ lors d'un tir à 6.5 T, et $t_{\mathrm{analyse}} = 3.1$ ms. Avec l'asservissement utilisé sur l'expérience BMV, il est d'environ :

$$\Psi^{\mathrm{ass}} \simeq 3 \times 10^{-10}\ \mathrm{rad}/\sqrt{\mathrm{Hz}}. \tag{4.81}$$

Actuellement, cet effet n'est pas gênant car la sensibilité est à la limite du shot-noise donnée dans l'équation (4.51), un ordre de grandeur au dessus. Cependant, il sera à considérer si l'intensité transmise par la cavité augmente et donc que la limite du shot-noise diminue. Il est donc nécessaire d'avoir un asservissement aussi stable que possible pour les mesures finales de l'effet Cotton-Mouton du vide. Une amélioration du système d'asservissement actuel sera présentée dans les perspectives de cette thèse.

4.6.3 Comparaison avec d'autres valeurs expérimentales

Rappelons la valeur de la constante Cotton-Mouton du vide mesurée au cours de cette thèse :

$$|k_{\mathrm{CM}}| = (6.1 \pm 2.5) \times 10^{-21}\ \mathrm{T}^{-2}, \tag{4.82}$$

avec une incertitude à 1σ. Ce résultat est le premier publié par le projet BMV. Il est représenté sur la figure 4.22, avec les résultats obtenus jusqu'alors par le groupe PVLAS, le seul ayant déjà publié sur le sujet. A cette date, notre mesure correspondait au meilleur résultat publié pour la mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide. L'une des principales difficultés qui transparaît de valeurs expérimentales de la figure 4.22 est la maîtrise des effets systématiques, qui apparaissent notamment dans la valeur à 5 T donnée en 2008 par le projet PVLAS [66]. Leur valeur publiée en 2012 correspond à un niveau de bruit mesuré lorsqu'"aucun effet parasite n'est observé" [67]. L'effet parasite mis en évidence au cours de cette thèse sur le dispositif BMV a pu être attribué à une résonance mécanique du système, et a pu être soustrait. La présence d'effets systématiques constitue donc l'une des principales difficultés des expériences dédiées à la mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide.

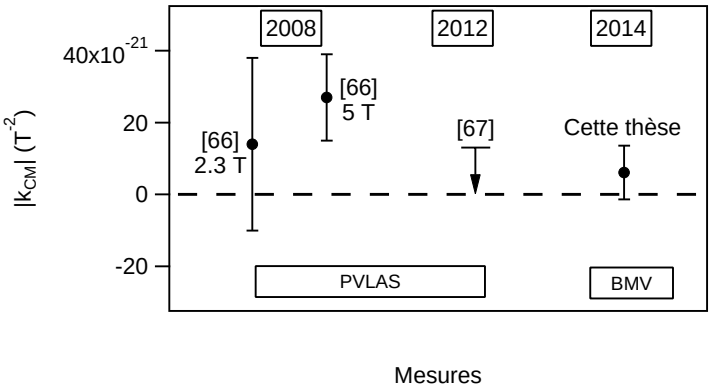


FIGURE 4.22 – Valeurs expérimentales de la constante Cotton-Mouton du vide obtenues par polarimétrie par les projets PVLAS et BMV jusqu'à la publication du résultat de cette thèse [132]. Les incertitudes et le niveau de bruit représenté par la flèche sont donnés à 3σ.

Après notre publication, le projet PVLAS a publié, avec une deuxième version de leur dispositif expérimental, un résultat à un facteur 50 seulement de la prédiction de l'électrodynamique quantique : $k_{\mathrm{CM}} = (0.4 \pm 2) \times 10^{-22}\ \mathrm{T}^{-2}$, avec une incertitude à 1σ [138]. Les principales caractéristiques de leur expérience sont résumées dans le tableau 4.8. Nous y avons également rapporté celles de l'expérience BMV.

L'expérience PVLAS fonctionne en régime continu. On définit donc leur sensibi-

lité en ellipticité Ψ^{sens} en rad/$\sqrt{\text{Hz}}$ par :

$$\Psi^{\text{sens}} = \sqrt{t_{\text{int}}} \times \Psi^{\text{lim}}, \tag{4.83}$$

pour un rapport signal sur bruit égal à 1. t_{int} est le temps d'intégration nécessaire pour pourvoir mesurer l'ellipticité Ψ^{lim}. Ψ^{lim} est calculée comme suit :

$$\Psi^{\text{lim}} = \frac{2F}{\lambda} B^2 L_{\text{B}} \times \Delta k_{\text{CM}}, \tag{4.84}$$

où Δk_{CM} est l'incertitude donnée sur k_{CM}.

Pour notre expérience réalisée en régime pulsé, il est plus adapté d'exprimer la sensibilité Ψ^{sens} en radians par tir. Elle est définie par :

$$\Psi^{\text{sens}} = \sqrt{N} \times \Psi^{\text{lim}}, \tag{4.85}$$

où N est le nombre de tirs nécessaire pour atteindre la résolution Ψ^{lim}.

Nous avons également calculé l'ellipticité correspondant à l'effet Cotton-Mouton du vide, qui serait à mesurer avec le dispositif actuel (finesse, aimants), et le temps d'intégration ou le nombre de tirs nécessaires pour parvenir à la mesure. Ces valeurs sont résumées dans les dernières lignes du tableau 4.8. Il apparaît clairement que les dispositifs actuels nécessitent une intégration trop importante : environ 20000 jours pour le projet PVLAS et 4×10^6 journées d'acquisition (en comptant 10 tirs par jour) pour le projet BMV.

L'article du groupe PVLAS [138] rapporte que la sensibilité de leur dispositif est limitée par des variations de la biréfringence statique de leur cavité optique dues à des effets thermiques. Ils précisent que des efforts seront faits pour augmenter la sensibilité, mais sans donner de détails sur les éléments du dispositif qui seront améliorés.

Les résultats présentés au cours de ce chapitre permettent de conclure que la sensibilité de l'expérience BMV est, à ce jour, essentiellement limitée par des vibrations mécaniques des supports des miroirs. Elles sont fort probablement dues à un induit dans le petit tube en inox qui traverse la bobine X-coil. Celui-ci excite une des résonances mécaniques de l'enceinte à vide à laquelle sont fixés les miroirs de la cavité optique. Lorsque cet effet systématique est soustrait, la limite shot-noise est atteinte. Cependant, la priorité est à la maîtrise des effets systématiques. Pour cela, une version améliorée de l'expérience a été dessinée. Elle est actuellement en cours d'installation. Nous en décrirons les principaux éléments dans les perspectives de cette thèse. Elle permettra d'améliorer la stabilité mécanique, tout en augmentant la finesse de la cavité et le champ magnétique. La limite du shot-noise pourra être

	PVLAS (2014) [138]	BMV ce travail
Dispositif expérimental		
Régime du champ	continu	pulsé
Technologie	aimant permanent	bobine résistive
$B^2 L_{\mathrm{B}}$ (T^2.m)	10.25	3
Longueur cavité (m)	3.3	2.27
Finesse	670 000	445 000
Sensibilité actuelle		
Ψ^{sens}	2.2×10^{-6} rad/$\sqrt{\mathrm{Hz}}$	6.3×10^{-8} rad par tir
intégration	7.6×10^{5} s	101 tirs
$\lvert k_{\mathrm{CM}} \rvert$ mesurée (T^{-2})	$(0.4 \pm 2.0) \times 10^{-22}$	$(6.1 \pm 2.5) \times 10^{-21}$
Signal correspondant à l'effet du vide		
Ψ_{vide} (rad)	5.2×10^{-11}	1.0×10^{-11}
intégration nécessaire	1.8×10^{9} s $\sim 2 \times 10^{4}$ jours	4×10^{7} tirs $\sim 4 \times 10^{6}$ jours

TABLE 4.8 – Caractéristiques et résultats obtenus à ce jour par les expériences PVLAS et BMV qui visent à mesurer la biréfringence magnétique du vide par polarimétrie. L'incertitude sur la constante Cotton-Mouton est donnée à 1σ.

diminuée en augmentant la puissance incidente sur la cavité. Un asservissement plus stable sera également mis en place. Comme nous allons le voir, cette deuxième version du dispositif expérimental devrait permettre d'atteindre la sensibilité nécessaire à la mesure de la biréfringence magnétique du vide.

Chapitre 5

Perspectives : vers une nouvelle version de l'expérience BMV

5.1 Introduction

Au cours de cette thèse, nous avons obtenu une première valeur pour l'effet Cotton-Mouton du vide :

$$|k_{\mathrm{CM}}| = (6.1 \pm 2.5) \times 10^{-21}\ \mathrm{T}^{-2}. \tag{5.1}$$

Cette valeur étant à la limite du shot-noise, elle sera améliorée en augmentant la puissance incidente sur la cavité. Cependant, nous avons mis en évidence la présence d'un effet systématique dû à l'excitation d'une résonance mécanique de l'enceinte à vide par l'impulsion de champ. La priorité est donc à la réduction de cet effet. De plus, la sensibilité actuelle étant à trois ordres de grandeur de la prédiction de l'électrodynamique quantique, le nombre de tirs nécessaires à la mesure serait de l'ordre de 4×10^7, ce qui est techniquement irréalisable.

Afin de parvenir à la mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide, une deuxième génération de l'expérience devra être mise en place. Différents éléments de ce nouveau dispositif ont été développés au cours de cette thèse. Celui-ci est actuellement en cours d'installation dans la salle blanche. Il comprend un système d'asservissement plus stable et une nouvelle bobine en X. Toute l'enceinte à vide a également été redessinée. Les modifications ont été apportées en tenant compte des facteurs qui limitent la sensibilité en ellipticité du dispositif actuel. Nous décrirons, dans les prochains paragraphes, les principaux éléments de cette nouvelle version de l'expérience que nous appellerons "BMV II", financée dans le cadre d'un projet soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche.

5.2 Augmentation du signal à mesurer

Comme vu précédemment, l'effet Cotton-Mouton que nous cherchons à mesurer dans le vide se traduit par une ellipticité Ψ de la polarisation donnée par :

$$\Psi = \frac{2FL_{\mathrm{B}}}{\lambda} k_{\mathrm{CM}} B^2 \sin 2\theta, \tag{5.2}$$

où F est la finesse de la cavité, λ la longueur d'onde de la lumière, B le champ magnétique transverse, L_{B} la longueur effective de la bobine et θ l'angle entre la polarisation linéaire incidente et le champ magnétique. Dans le vide, $k_{\mathrm{CM}} \simeq 4 \times 10^{-24}$ T^{-2}. Pour avoir une ellipticité Ψ mesurable expérimentalement, les paramètres $B^2 L_{\mathrm{B}}$ et F doivent être aussi grands que possible. Nous allons présenter maintenant les améliorations du dispositif expérimental qui conduiront à leur augmentation.

5.2.1 Champ magnétique

Sur la première version de l'expérience, le champ transverse était produit par la bobine X-coil qui a été décrite dans le chapitre 2. Pour les mesures dans le vide, le champ maximal atteignait alors 6.5 T sur une longueur effective $L_{\mathrm{B}} = 13.7$ cm.

Afin d'augmenter l'ellipticité induite par l'effet Cotton-Mouton, la deuxième version du dispositif expérimental prévoit la mise en place d'une nouvelle bobine en X appelée "XXL-coil". Cette bobine a été conçue, fabriquée et testée au laboratoire. Son installation dans la salle blanche est prévue prochainement. Son principe est identique à celui de la bobine X-coil. Une photographie et un schéma sont présentés sur la figure 5.1. Ses dimensions sont 72 cm de long, 23 cm de haut et 22 cm d'épaisseur. Elle a permis d'atteindre un champ de rupture de 31.7 T. Les forces qui s'appliquent sur les renforts mécaniques sont alors de l'ordre de 700 kN. Elle sera associée à un générateur 6 MJ pour produire un champ magnétique maximal de 21 T (qui correspond à moins de 70% du champ de rupture), pour un courant de 24000 A la traversant. La structure interne du générateur permettra de faire des tirs pour les deux directions du champ magnétique.

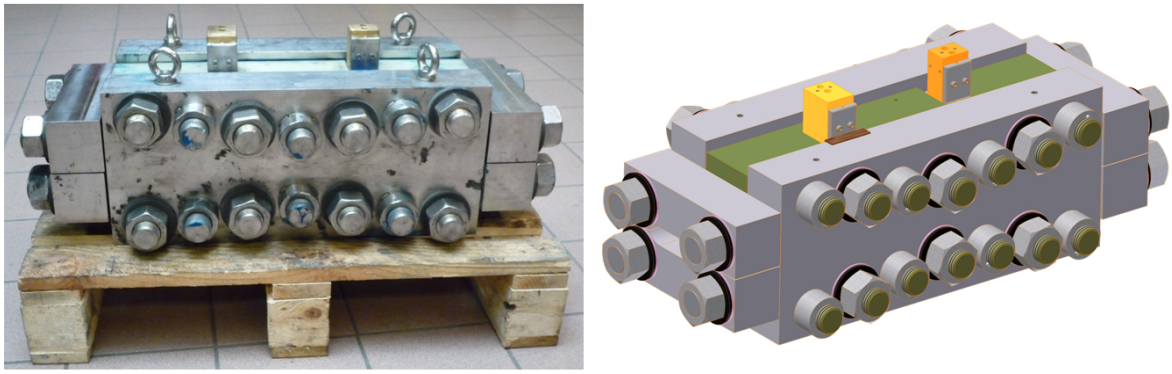


FIGURE 5.1 – Photographie et schéma de la bobine XXL-coil. Ses dimensions sont 72 cm de long, 23 cm de haut et 22 cm d'épaisseur.

Le profil longitudinal de la bobine XXL-coil a été mesuré en régime pulsé, en déplaçant une bobine de mesure dans le trou qui la traverse de part en part. Il est représenté sur la figure 5.2. Sa longueur effective L_{B} a été calculée comme pour la bobine X-coil, à partir de l'équation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B^2(z)dz = B_{\mathrm{max}}^2 L_{\mathrm{B}}, \tag{5.3}$$

où B_{max} est le champ au centre de la bobine. $L_{\mathrm{B}} = (31.9 \pm 0.4)$ cm, correspond à la longueur qu'aurait un aimant équivalent qui produirait le champ B_{max} uniforme.

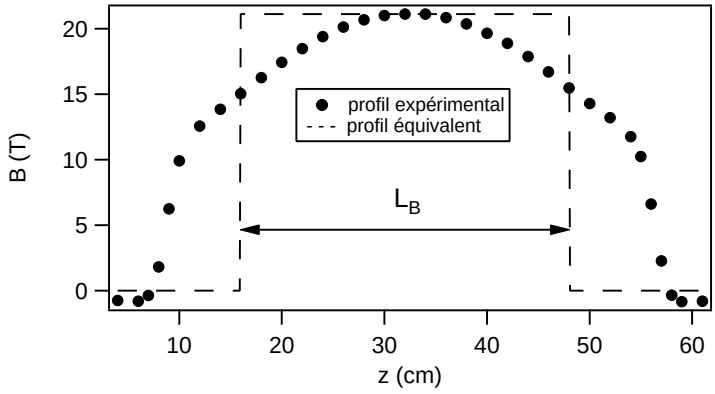


FIGURE 5.2 – Profil longitudinal de la bobine XXL-coil. Il a été mesuré en régime pulsé pour un champ maximal de 21 T. Le trait en pointillés représente le profil équivalent à un champ uniforme sur une longueur L_{B}.

Finalement, le facteur $B^2 L_{\mathrm{B}}$ de la bobine XXL-coil est de 141 T^2.m, soit 24 fois plus élevé que celui de la X-coil. Le gain effectif sur l'ellipticité doit tenir compte de la durée de l'impulsion et du filtrage de la cavité. Il sera calculé dans la section 5.4.

La bobine XXL-coil sera placée dans un cryostat à azote liquide de 77 cm de diamètre et de 97 cm de haut, soit un volume de 450 L. Il sera posé sur un bâti mécaniquement isolé de la table optique, comme pour le dispositif décrit dans le chapitre 2. Le poids total du cryostat, avec la bobine et l'azote liquide, est de l'ordre de 850 kg. La salle blanche étant située au premier étage du bâtiment, son sol a dû être renforcé pour pourvoir supporter une telle charge.

5.2.2 Finesse de la cavité

L'ellipticité Ψ induite par l'effet Cotton-Mouton du vide, et donnée par l'équation (5.2), sera augmentée grâce à de nouveaux miroirs interférentiels pour la cavité Fabry-Perot. Ceux-ci seront fabriqués dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire des Matériaux Avancés. L'objectif est d'obtenir une cavité de finesse 1 000 000 qui permettra d'augmenter Ψ d'un facteur 2 par rapport à l'expérience actuelle.

Par ailleurs, une étude approfondie de la biréfringence statique de tels miroirs sera conduite. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, lorsque la sensibilité est limitée par le bruit en ellipticité, il faut diminuer l'ellipticité statique Γ pour l'améliorer. Nous avons donc intérêt à utiliser des miroirs interférentiels de biréfringence la plus faible possible pour maximiser la sensibilité en ellipticité de l'expérience. L'évolution du déphasage induit par réflexion sur un miroir en fonction de sa réflectivité en intensité est représentée sur la figure 2.18 du chapitre 2. Les points expérimentaux suivent une tendance selon laquelle la biréfringence statique

des miroirs diminue lorsque leur réflectivité augmente. Un tel comportement a pu être modélisé par les auteurs de l'article [91] en considérant que seule la couche la plus proche du substrat est biréfringente. Le procédé de fabrication des miroirs sera ajusté afin de diminuer la biréfringence de cette couche. La sensibilité en ellipticité du dispositif devrait donc être améliorée grâce à la diminution de la biréfringence statique des miroirs.

5.3 Diminution des effets systématiques et amélioration de la sensibilité optique

Au cours de cette thèse, nous avons mis en évidence la présence d'effets systématiques lors des mesures en champ magnétique pulsé. Ceux-ci devraient être réduits grâce à une nouvelle enceinte à vide qui permettra de découpler mécaniquement la cavité optique des perturbations extérieures. La sensibilité optique sera également améliorée grâce à ce dispositif, associé à une augmentation de la puissance incidente sur la cavité et à un asservissement plus stable de la fréquence du laser.

5.3.1 Stabilité mécanique

Comme l'ont montré les résultats obtenus lors de la mesure de l'effet Cotton-Mouton dans le vide, la stabilité mécanique de l'enceinte à vide, et en particulier celle du système de maintien des miroirs, est un point clé du dispositif expérimental. Nous avons, en effet, mis en évidence que plusieurs phénomènes dus au champ magnétique pulsé (onde acoustique, induit dans le petit tube) se répercutent sur la position des miroirs. Les modifications de la biréfringence et du couplage de la cavité qui en découlent sont la source d'effets systématiques qu'il est nécessaire de minimiser.

Pour éliminer au maximum ces effets systématiques, une nouvelle enceinte à vide a été dessinée. Elle est actuellement en cours d'installation dans la salle blanche. Elle est constituée de deux cloches vissées directement sur la table optique, comme représenté sur la figure 5.3. La première cloche contient le miroir d'entrée de la cavité Fabry-Perot et le polariseur. La seconde contient le miroir de sortie et l'analyseur. La longueur L_c de la cavité est d'environ 1.6 m. Chaque cloche comprend plusieurs raccords qui permettront de brancher les différentes pompes et bouteilles de gaz. Les gros hublots visibles sur l'avant des cloches servent à accéder aux miroirs et aux polariseurs. Le cryostat qui contient la bobine XXL-coil est placé entre les deux cloches. Il est traversé par un petit tube de l'enceinte à vide.

Sur la première version du montage, chaque miroir était monté à l'extrémité

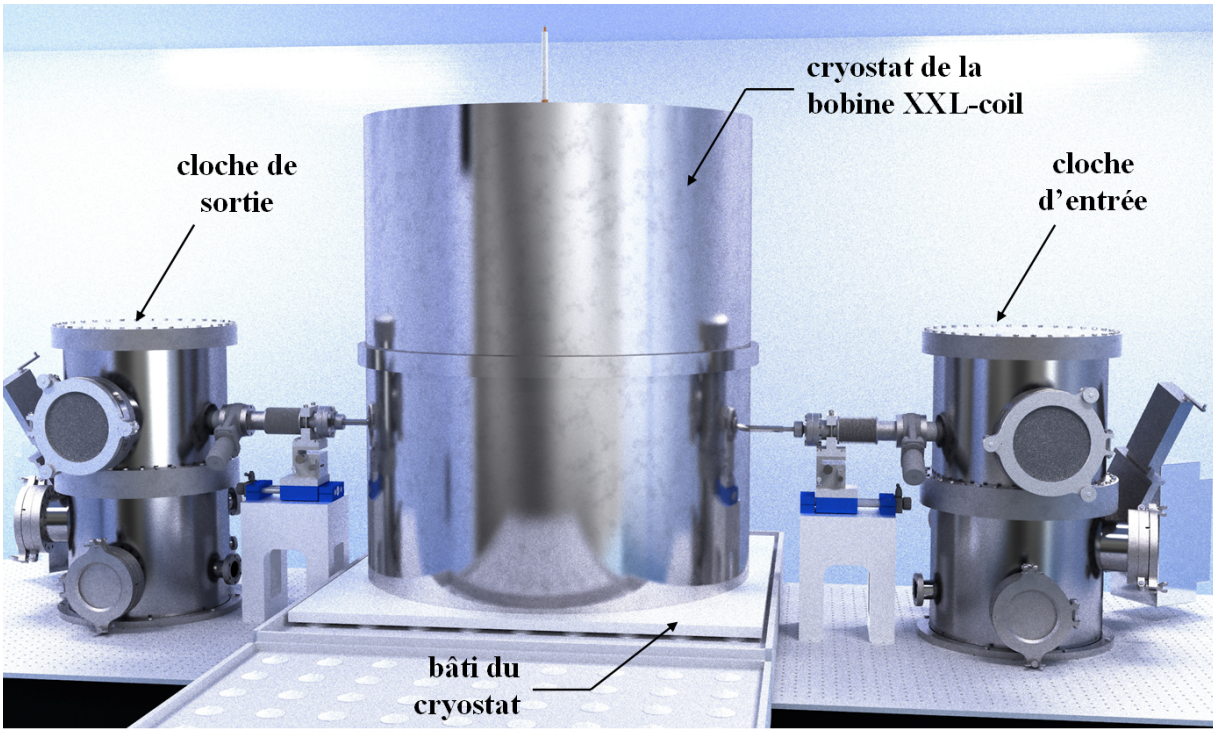


FIGURE 5.3 – Nouvelle enceinte à vide de l'expérience BMV. Nous pouvons voir deux cloches à vide dans lesquelles sont placés, pour l'une le miroir d'entrée de la cavité M_1 et le polariseur P, pour l'autre le miroir de sortie M_2 et l'analyseur A. Le cryostat qui contient la bobine XXL-coil repose sur un bâti positionné entre les deux cloches. Il est traversé par un petit tube de l'enceinte à vide.

d'un cylindre, d'une vingtaine de centimètres de long, lui même fixé à une équerre en aluminium d'environ 1 cm d'épaisseur vissée à la table optique. Il en résultait un porte-à-faux important qui s'est traduit par un couplage mécanique entre la cavité optique et les perturbations extérieures qui agissent sur l'enceinte à vide (onde acoustique ou induit dus au champ magnétique par exemple). Afin de minimiser ce couplage sur la deuxième version du dispositif, les miroirs et polariseurs sont montés sur des plots directement fixés sur une table de rehausse en inox d'environ 30 kg. La rehausse est vissée au fond de la cloche à vide. De cette façon, le porte-à-faux est limité et tout le système de maintien des miroirs est sous-vide. Ainsi, la perturbation acoustique due au tir de champ magnétique ne devrait pas induire de perturbation sur la cavité Fabry-Perot. Le petit tube de l'enceinte qui traverse la bobine n'étant plus directement relié au système de maintien des miroirs, l'effet d'induit observé auparavant lors d'un tir de champ magnétique ne devrait pas se répercuter sur la cavité. De plus, comme les miroirs sont fixés sur des supports plus rigides, l'ellipticité statique Γ due à la biréfringence de la cavité devrait également être plus stable. Cela devrait nous permettre de rejeter moins de tirs lors de l'analyse des données d'effet Cotton-Mouton. Par ailleurs, l'ellipticité Ψ induite par le champ magnétique

est donnée par le terme $2\Gamma\Psi$ du rapport des intensités (voir l'équation (2.142)). Le signal à mesurer étant proportionnel à Γ, si ce paramètre est plus stable la sensibilité de l'appareil sera meilleure.

5.3.2 Extinction des polariseurs et réglage fin de la biréfringence statique de la cavité

Comme sur la première version de l'expérience, les polariseurs sont placés dans des montures qui permettent de les tourner sur eux-mêmes grâce à des actionneurs piézoélectriques. Deux autres actionneurs piézoélectriques par polariseur, qui n'étaient pas présents sur la version initiale du dispositif, servent à les orienter dans les deux autres directions de l'espace. Ce système permettra de régler précisément l'angle d'incidence du faisceau sur les polariseurs et de diminuer leur taux d'extinction σ^2. Sur la première version de l'expérience, nous avons mesuré des σ^2 de quelques 10^{-8} au minimum. L'angle d'incidence du faisceau n'était alors pas optimisé. Avec le nouveau système, nous pourrons ajuster finement l'orientation des polariseurs pour nous placer à incidence normale. Nous espérons alors obtenir des taux d'extinction se rapprochant des quelques 10^{-10} rapportés dans les références [139] et [140].

Ce point est particulièrement important car, comme nous l'avons vu dans la section 2.3.2, la sensibilité en ellipticité est optimale lorsque $\Gamma^2 = \sigma^2$, et s'améliore lorsque Γ^2 diminue. Pour augmenter la sensibilité de l'expérience, nous avons donc intérêt à avoir σ^2 aussi faible que possible. Ce paramètre dépend fortement de l'angle d'incidence du faisceau sur les polariseurs, d'où l'intérêt de pouvoir les orienter dans toutes les directions.

Les miroirs sont placés dans des nouvelles montures qui permettent de les orienter dans les trois directions de l'espace grâce à des actionneurs piézoélectriques. Les mouvements sont commandés numériquement et la position optimale peut être mémorisée. Grâce à ces montures nous pourrons ajuster précisément et de façon reproductible la valeur et le signe de l'ellipticité statique Γ. Il est également envisagé d'automatiser la procédure d'alignement des miroirs pour obtenir, à un Γ donné, la meilleure cavité possible en termes de couplage.

5.3.3 Augmentation de la puissance incidente

La nouvelle enceinte à vide a été conçue de façon à être aussi mécaniquement stable que possible. Elle minimise le porte-à-faux sur les miroirs de la cavité et les isole des perturbations acoustiques et des effets d'induits sur le petit tube qui traverse la bobine. Par ailleurs, les montures des miroirs et des polariseurs permettront de

maîtriser les valeurs du taux d'extinction σ^2 et de l'ellipticité statique Γ. Toutes ces améliorations devraient permettre de diminuer les effets systématiques observés sur la première version de l'expérience et d'améliorer la sensibilité en ellipticité d'un ordre de grandeur.

Il sera alors nécessaire de diminuer la limite de sensibilité due au shot-noise, donnée par :

$$\Psi^{\text{s-n}} = \sqrt{\frac{h\nu}{4I_{\text{t}}\eta}\frac{\Gamma^2+\sigma^2}{\Gamma^2}}. \tag{5.4}$$

Cela sera réalisé en augmentant la puissance incidente sur la cavité. Les mesures présentées dans cette thèse ont été réalisées avec une puissance incidente de l'ordre de 30 mW, dont la moitié est contenue dans les bandes latérales servant pour l'asservissement de la fréquence du laser. Considérons que la puissance du laser est augmentée d'un facteur 10. Dans ce cas, nous nous placerons à $\Gamma^2 \gg \sigma^2$ pour avoir un rapport signal sur bruit optimal et la sensibilité en ellipticité au shot-noise sera alors d'environ 1×10^{-9} rad/$\sqrt{\text{Hz}}$, en considérant une transmission de 35%, soit :

$$\Psi^{\text{s-n}} \simeq 2 \times 10^{-8} \text{ rad par tir}, \tag{5.5}$$

si chaque tir est analysé sur une durée de 3.1 ms. Cette valeur correspond à la limite ultime de sensibilité en ellipticité du dispositif expérimental.

5.3.4 Amélioration du système d'asservissement

Nous avons vu dans les chapitres précédents que l'asservissement de la fréquence du laser n'est, aujourd'hui, pas un paramètre limitant du dispositif expérimental. En effet, nous avons montré que les mesures d'effet Cotton-Mouton du vide étaient essentiellement limitées par des perturbations mécaniques induites sur la cavité Fabry-Perot au cours d'un tir de champ magnétique. Une fois ces perturbations soustraites, la limite du shot-noise est atteinte. Cependant, les effets liés au manque de rigidité de l'enceinte à vide devraient être réduits dans le nouveau dispositif et une augmentation de l'intensité incidente sur la cavité abaissera la limite du shot-noise. Il sera alors utile d'améliorer l'asservissement en termes de bande passante et de bruit de fréquence. Pour cela, un nouveau système a été développé au cours de la troisième année de cette thèse.

Description

Le nouveau système d'asservissement est basé, comme la version décrite dans la section 2.4, sur la méthode de Pound-Drever-Hall dont le principe est schématisé

sur la figure 2.24. Brièvement, le signal d'erreur est envoyé vers plusieurs étages proportionnels-intégrateurs (PI) positionnés en cascade comme sur le schéma de la figure 2.26. Ils agissent sur les trois actionneurs présentés dans la section 2.4 : le modulateur acousto-optique (AOM), la cale piézoélectrique et le contrôleur de température du laser. Les paramètres de ces étages ont été calculés et ajustés de façon à avoir une bande passante et un gain aussi élevés que possible. Les principales différences par rapport à la première version de l'asservissement sont la mise en place de trois systèmes proportionnels-intégrateurs en cascade sur l'étage qui agit sur l'AOM, et l'intégration d'un filtre réjecteur de bande dans l'étage qui opère sur la cale piézoélectrique du laser. En effet, celle-ci présente des résonances que nous avons mesurées entre 100 kHz et 400 kHz. Le filtre permet de couper ces composantes fréquentielles en entrée de l'étage, ce qui empêche le système d'osciller aux fréquences de résonance de la cale, et donc permet d'avoir une bande passante plus large.

Une fonction d'asservissement automatique a également été mise en place. Elle balaye la fréquence du laser et lance la boucle d'asservissement dès qu'une résonance de la cavité est rencontrée. Ce dispositif présente le grand avantage d'asservir le laser très rapidement, en quelques secondes typiquement. De plus, si l'asservissement décroche (lorsque les miroirs sont tournés pour régler la biréfringence de la cavité ou après un tir de champ magnétique par exemple), il est retrouvé automatiquement ce qui apporte un grand confort dans la réalisation des réglages et des mesures. Par ailleurs, il est possible d'asservir le laser depuis l'extérieur de la salle blanche ce qui permettra d'automatiser la procédure d'acquisition des données.

Performances

La densité spectrale de puissance du signal d'erreur du nouvel asservissement a été mesurée. Pour la calculer nous utilisons les équations (2.167) et suivantes du paragraphe 2.4. Les principaux paramètres sont résumés dans le tableau 5.1 (asservissement II). Nous avons également rappelé les paramètres concernant l'asservissement décrit dans le chapitre 2 (asservissement I) pour comparaison. La transmission et la valeur du discriminant sont sensiblement les mêmes pour les deux asservissements. La principale différence réside dans le gain du mixeur, qui est beaucoup plus élevé sur la nouvelle version.

Les densités spectrales des signaux d'erreur obtenus avec les deux asservissements sont représentées sur la figure 5.4. La limite du shot-noise, calculée à partir de l'expression (2.178), est figurée en pointillés. Elle est de 1.7×10^{-6} rad/$\sqrt{\text{Hz}}$.

La densité spectrale de puissance obtenue avec le nouvel asservissement est un à deux ordres de grandeur en dessous de celle correspondant au premier système. Le

Asservissement	T_c	g_m	f_r (V/W)	D (W/Hz)	τ (ms)
asservissement I	31%	0.54	532	7.1×10^{-6}	0.954
asservissement II	33%	8	532	7.2×10^{-6}	0.954

TABLE 5.1 – Principaux paramètres de l'asservissement qui permettent de calculer la densité spectrale du signal d'erreur en Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$. "asservissement I" désigne l'asservissement présenté dans le chapitre 2. "asservissement II" désigne la nouvelle version.

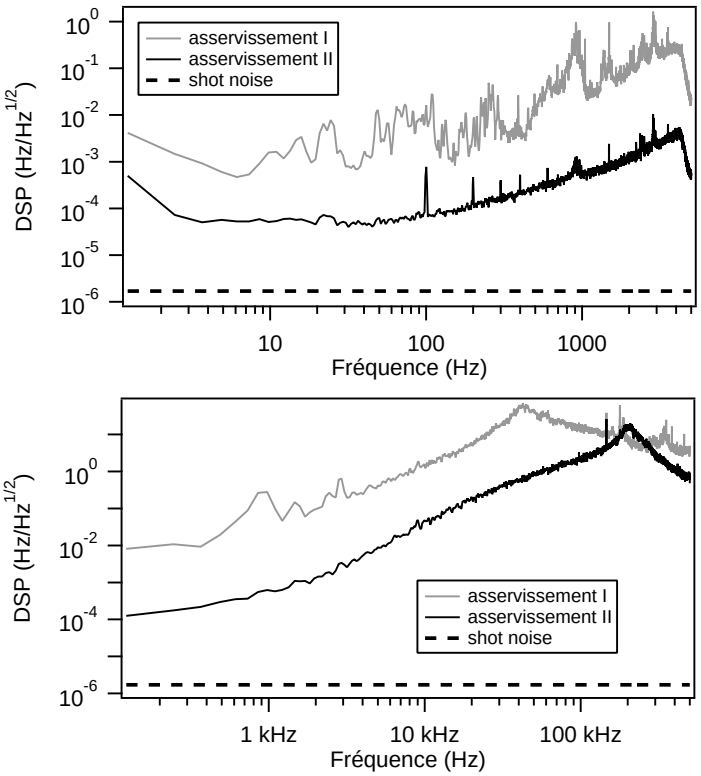


FIGURE 5.4 – Densités spectrales de puissance des signaux d'erreurs, exprimées en Hz/$\sqrt{\text{Hz}}$, et mesurées pour les deux versions de l'asservissement : en gris, "asservissement I" décrit dans le chapitre 2 ; en noir, "asservissement II" développé pour la nouvelle version de l'expérience BMV. La courbe en pointillés correspond à la limite du shot-noise. La figure du haut correspond aux fréquences inférieures à 5 kHz, celle du bas aux fréquences comprises entre 100 Hz et 500 kHz.

signal d'erreur est donc moins bruité. Étant donné qu'il est proportionnel à l'écart $\delta\nu$ entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance de la cavité (voir l'équation (2.164)), cela signifie que la fréquence du laser est mieux corrigée par cet asservissement. Puisque le bruit de fréquence du faisceau lumineux est inférieur, la limite de sensibilité due à l'asservissement, qui était de l'ordre de 3×10^{-10} rad/$\sqrt{\text{Hz}}$ avec la première version, sera abaissée. Par ailleurs, la bande passante, caractérisée par la remontée brusque de la densité spectrale de puissance du signal d'erreur, a été repoussée de quelques dizaines de kHz à plus de 100 kHz (voir la figure 5.4). Cette

grande bande passante représente d'autant plus de gain pour corriger les perturbations qui peuvent apparaître à basse fréquence, par exemple celles induites par l'impulsion de champ magnétique. Cela a pu être confirmé par l'enregistrement des intensités ordinaire et extraordinaire au cours d'un tir de champ magnétique, sur la première version de l'enceinte à vide (présentée sur les figures 2.39 et 2.40). Nous avons vu précédemment que le premier asservissement décroche lors d'un tir à 6.5 T. Cela est illustré sur la figure 4.9. Avec le nouveau système, le faisceau laser reste asservi tout au long du tir, preuve que les perturbations dues au champ magnétique sont mieux corrigées.

La nouvelle version de l'asservissement est donc plus performante. D'une part la densité spectrale de son signal d'erreur est plus basse, à basse fréquence, que celle obtenue avec le premier système. D'autre part, sa bande passante plus large lui permet de mieux corriger les perturbations mécaniques qui apparaissent sur les miroirs de la cavité. Cela a été constaté lors du travail dans la salle blanche : le laser ne se désasservit que très rarement. Il reste, par exemple, asservi lorsque les miroirs sont tournés sur eux-mêmes pour le réglage de la biréfringence statique de la cavité, ce qui n'était pas le cas avec le premier asservissement. La stabilité au cours d'un tir de champ magnétique est également meilleure, le laser restant asservi tout au long de l'impulsion. Ce système, associé aux différents éléments décrits précédemment devraient permettre d'atteindre la sensibilité nécessaire à la mesure de la biréfringence magnétique du vide.

5.4 Sensibilité attendue

Le perfectionnement du dispositif expérimental devrait conduire à une amélioration de la sensibilité de l'expérience pour la mesure d'effet Cotton-Mouton. Cette amélioration a deux origines :

- la diminution des effets systématiques et l'amélioration de la sensibilité optique Ψ^{sens} jusqu'à quelques 10^{-8} radians par tir grâce à l'augmentation de la puissance incidente sur la cavité, à la nouvelle enceinte à vide qui sera plus stable mécaniquement, aux nouveaux dispositifs d'orientation des miroirs de la cavité et des polariseurs, et au nouveau système d'asservissement,
- l'augmentation de l'ellipticité Ψ_{vide} induite par l'effet Cotton-Mouton du vide grâce à l'augmentation du champ magnétique, de la longueur L_{B} et de la finesse de la cavité.

Les principales caractéristiques des deux versions de l'expérience BMV sont résumées dans le tableau 5.2. La version notée "BMV I" correspond à celle décrite dans

le chapitre 2 qui a conduit aux résultats présentés dans cette thèse. La version notée "BMV II" est celle en cours d'installation et dont les principaux éléments viennent d'être présentés. Le maximum du carré du champ filtré $B^2_{\mathrm{f,max}}$ a été obtenu à partir du champ magnétique produit par la bobine (6.5 T pour la bobine X-coil, 21 T pour la XXL-coil) en tenant compte du filtrage de la cavité. Celui-ci est relié à la longueur L_{c} de la cavité et à sa finesse F à partir de l'équation (2.139).

	BMV I	BMV II
Paramètres expérimentaux		
F	445 000	1 000 000
L_{c} (m)	2.27	1.6
$B^2_{\mathrm{f,max}}$ (T^2)	21.5	310
L_{B} (m)	0.137	0.319
Sensibilité en ellipticité		
Ψ^{sens} (rad par tir)	6.3×10^{-8}	2×10^{-8}
Signal correspondant à l'effet du vide		
Ψ_{vide} (rad)	1.0×10^{-11}	7.4×10^{-10}
nombre de tirs nécessaires	4×10^{7}	730

TABLE 5.2 – Principaux paramètres expérimentaux des deux versions de l'expérience BMV et calcul du nombre de tirs nécessaires à l'observation de l'effet Cotton-Mouton du vide.

L'ellipticité Ψ_{vide} est calculée à partir de la constante k_{CM} du vide, d'environ 4×10^{-24} T^{-2}, et de l'équation (5.2). Le nombre de tirs nécessaires à la mesure est obtenu à partir de l'équation (4.85). Finalement, le nouveau dispositif expérimental devrait permettre d'atteindre un rapport signal sur bruit de 1 pour la mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide en environ 700 tirs de champ magnétique. A terme, la procédure de tir sera automatisée. Il sera alors possible de réaliser environ 10 tirs par heure, en tenant compte du refroidissement de la bobine entre deux impulsions de champ, soit près d'une centaine de tirs par jour. La mesure de l'effet Cotton-Mouton du vide devrait alors être possible en quelques journées d'acquisition de données.

Chapitre 6

Conclusions

Au cours de cette thèse, nous avons mesuré deux types de biréfringences magnétiques : la biréfringence circulaire induite par un champ magnétique longitudinal, également appelée effet Faraday, et la biréfringence linéaire induite par un champ magnétique transverse, ou effet Cotton-Mouton. Ces mesures ont été conduites sur le dispositif expérimental du projet BMV, dont l'objectif principal est de mesurer l'effet Cotton-Mouton du vide prévu dans le cadre de la théorie de l'électrodynamique quantique.

Le chapitre 2 de cette thèse a été consacré à la description exhaustive du dispositif expérimental. Après avoir donné le principe des mesures de biréfringences par polarimétrie, nous avons étudié en détails un des éléments clés de ce dispositif : la cavité Fabry-Perot. Celle-ci fait partie des cavités optiques ayant la finesse la plus élevée au monde. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la biréfringence statique des miroirs, que nous avons quantifiée. Une procédure d'alignement des miroirs a été développée au cours de cette thèse afin de maîtriser la valeur et le signe de l'ellipticité de la polarisation Γ qu'elle induit. De cette façon, nous avons pu nous placer dans les conditions optimales de sensibilité en ellipticité. Le système d'asservissement ainsi que les aimants utilisés ont été décrits. L'enceinte à vide, qui a permis de réaliser des mesures dans le vide et dans des gaz, a également été présentée.

Les chapitres 3 et 4 ont été dédiés à la présentation des mesures de biréfringences magnétiques réalisées au cours de cette thèse. Le chapitre 3 concerne les mesures d'effet Faraday dans deux gaz nobles : l'hélium et le xénon. Nous avons, dans un premier temps, détaillé la méthode d'acquisition et d'analyse des données expérimentales avant d'exposer les résultats obtenus. La comparaison de nos valeurs expérimentales avec des prévisions de chimie quantique ont permis de montrer l'importance de la prise en compte de la corrélation électronique dans les calculs *ab initio*. Nous avons également mis en évidence que, dans le xénon, gaz rare non radioactif de numéro atomique le plus important, les effets relativistes devaient être inclus dans les calculs pour obtenir un meilleur accord entre théorie et expérience.

Dans le chapitre 4, nous avons présenté les mesures d'effet Cotton-Mouton dans les gaz d'hélium et de xénon et dans le vide, que nous avons réalisées en régime pulsé au cours de cette thèse. Pour y parvenir, une méthode d'analyse innovante a été développée. Elle permet d'annuler certains effets systématiques en jouant sur leur symétrie par rapport à deux paramètres expérimentaux : le signe de l'ellipticité statique Γ due à la biréfringence intrinsèque de la cavité, et la direction du champ magnétique $\vec{B}$. Grâce à cette méthode nous avons pu mesurer l'effet Cotton-Mouton

de l'hélium, qui est le plus petit après celui du vide. La valeur que nous avons obtenue est la première compatible à 1σ avec la valeur théorique prévue par les calculs *ab initio* de chimie quantique, et considérée comme exacte. Cette mesure nous a permis de tester la sensibilité de notre dispositif expérimental, et de valider la procédure d'analyse. Le résultat obtenu dans le xénon gazeux est en accord avec les prédictions théoriques. Il s'agit d'une mesure absolue de l'effet Cotton-Mouton du xénon, et seulement la deuxième valeur publiée à 1064 nm.

Des mesures ont finalement été réalisées dans le vide. Elles ont conduit au premier résultat publié avec cette expérience :

$$|k_{\mathrm{CM}}| = (6.1 \pm 7.5) \times 10^{-21}\ \mathrm{T}^{-2}, \tag{6.1}$$

avec une incertitude étendue à 3σ. Au moment de sa publication, ce résultat représentait la meilleure mesure pour l'effet Cotton-Mouton du vide. Il est présenté sur la figure 6.1 avec les valeurs publiées à ce jour par d'autres expériences visant à mesurer la biréfringence magnétique du vide par polarimétrie ([63] : collaboration BFRT ; [66], [67] et [138] : groupe PVLAS) . Rappelons que la valeur publiée en 2012 par le groupe PVLAS correspond à un niveau de bruit obtenu "quand aucun signal parasite n'est observé" [67]. Nos mesures nous ont permis de mettre en évidence que

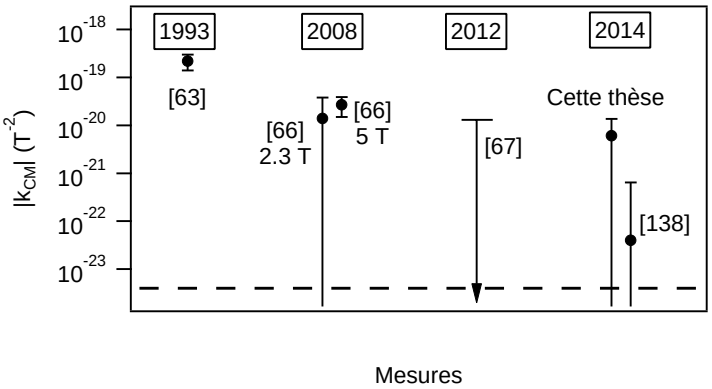


FIGURE 6.1 – Valeurs expérimentales de la biréfringence magnétique du vide obtenues par polarimétrie. Les incertitudes et le niveau de bruit (flèche) sont donnés à 3σ.

la sensibilité de l'expérience est aujourd'hui limitée par la stabilité mécanique de l'enceinte à vide sur laquelle les miroirs de la cavité sont fixés. Cette étude a conduit au dessin d'une nouvelle version du dispositif expérimental dont les principaux éléments ont été décrits dans le chapitre 5.

Le nouveau dispositif expérimental est actuellement en cours d'installation dans la salle blanche. Il est constitué d'un système d'asservissement plus stable. L'enceinte à vide et le système de fixation des miroirs ont été conçus de façon à être les

plus rigides possible. Cela, associé une augmentation de la puissance incidente sur la cavité et à des montures de miroirs et de polariseurs qui permettront de les orienter dans les trois directions de l'espace, permettra d'améliorer la sensibilité en ellipticité jusqu'à quelques 10^{-8} radians par tir. Une nouvelle bobine, appelée XXL-coil, va très prochainement être mise en place dans le but de produire un champ magnétique pulsé de 21 T sur une longueur effective de 31.9 cm. Enfin, une collaboration avec le Laboratoire des Matériaux Avancés de Lyon prévoit la fabrication de miroirs de très haute réflectivité, l'objectif visé étant une cavité Fabry-Perot de finesse 1 000 000. Compte tenu de toutes ces améliorations, la mesure de la biréfringence magnétique du vide devrait être réalisée en quelques journées d'acquisition de données.

Une fois l'installation du nouveau dispositif expérimental finalisée, une première étape consistera à effectuer des mesures en champ pulsé dans le vide, avec la polarisation incidente parallèle au champ magnétique transverse. Dans ces conditions, l'ellipticité due à l'effet Cotton-Mouton est nulle et il sera possible d'identifier les éventuels effets systématiques. Il conviendra alors de les minimiser. Une fois la sensibilité nécessaire obtenue, la polarisation incidente sera réglée à 45° du champ magnétique (ellipticité due à l'effet Cotton-Mouton maximale) et l'effet Cotton-Mouton de l'hélium gazeux sera mesuré. Cette étape permettra de valider le dispositif expérimental. Des mesures seront ensuite conduites dans le vide. Quelques centaines de tirs à 21 T devraient permettre de tester la prédiction de l'électrodynamique quantique.

Concernant les mesures de biréfringences magnétiques dans les gaz nobles, pour pouvoir discriminer les différentes méthodes de calcul de chimie quantique qui tiennent compte des effets relativistes et de la corrélation électronique, il faudrait être capable de mesurer des biréfringences avec une incertitude inférieure à 1% . Cet ordre de grandeur de précision nécessite un travail important compte tenu des différentes sources d'incertitudes expérimentales, en particulier celle sur la dispersion des mesures en fonction de la pression dans le cas des mesures d'effet Cotton-Mouton. Il est également envisagé de s'orienter vers des mesures de cet effet dans d'autres gaz, qui pourront donner lieu à nouveau à des collaborations avec des équipes théoriciennes de chimie quantique.

Annexes

A - Ellipticité de la polarisation après passage par deux lames biréfringentes

B - Asservissement par la méthode de Pound-Drever-Hall : calcul de l'intensité réfléchie par la cavité Fabry-Perot

C - Asservissement par la méthode de Pound-Drever-Hall : calcul de la partie imaginaire du coefficient de réflexion en amplitude de la cavité Fabry-Perot

D - Faraday and Cotton-Mouton effects of helium at $\lambda = 1064$ nm

A. Cadène, D. Sordes, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, et C. Rizzo,
Phys. Rev. A **88**, 043815 (2013).

E - Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields : status of the BMV experiment

A. Cadène, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, et C. Rizzo,
Eur. Phys. J. D **68**, (2014).

F - Circular and linear magnetic birefringences in xenon at $\lambda = 1064$ nm

A. Cadène, M. Fouché, A. Rivère, R. Battesti, S. Coriani, A. Rizzo, et C. Rizzo,
J. Chem. Phys. **142**, 124313 (2015).

Annexe A

Ellipticité de la polarisation après passage par deux lames biréfringentes

Considérons le système constitué de deux lames biréfringentes L_1 et L_2, de déphasages δ_1 et δ_2, représenté sur la figure 2. L'axe rapide de la lame L_1 fait un angle θ_1 avec l'axe $O\vec{x}$ du repère orthonormé (O, x, y, z). L'axe rapide de la lame L_2 est aligné avec l'axe $O\vec{x}$.

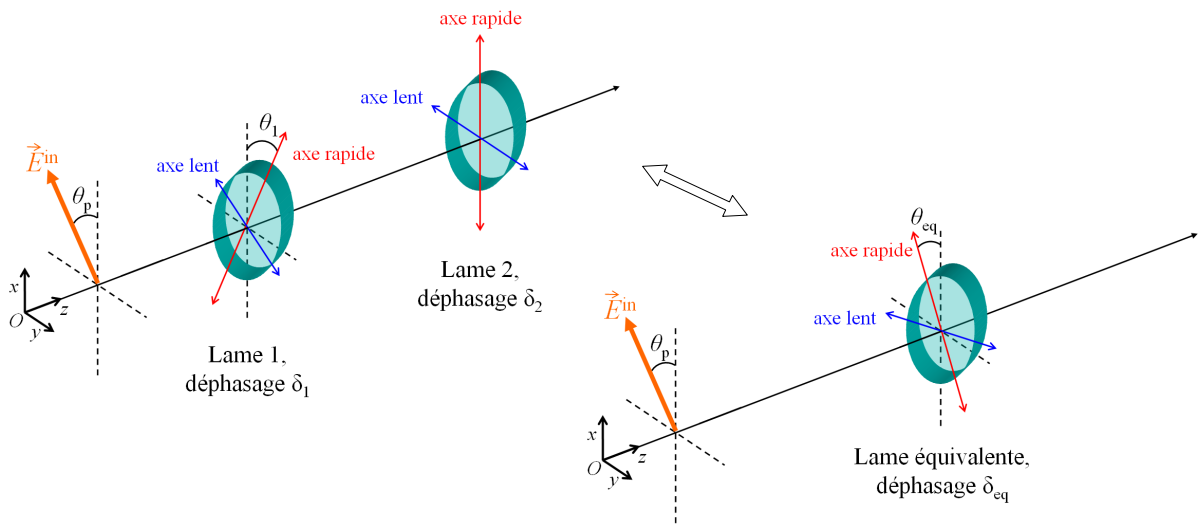


FIGURE 2 – Système constitué de deux lames biréfringentes de déphasages δ_1 et δ_2, équivalent à une lame biréfringente de déphasage δ_{eq}.

Ce système est équivalent à une lame de déphasage δ_{eq}, dont l'axe rapide fait un angle θ_{eq} avec l'axe $O\vec{x}$. δ_{eq} et θ_{eq} sont donnés par [106] :

$$\delta_{eq} = \sqrt{(\delta_2 - \delta_1)^2 + 4\delta_2\delta_1 \cos^2\theta_1}, \tag{2}$$

$$\cos 2\theta_{eq} = \frac{\delta_2 + \delta_1 \cos 2\theta_1}{\delta_{eq}}, \tag{3}$$

pour δ_1, δ_2 et $\delta_{eq} \ll 1$.

Soit une polarisation linéaire incidente, faisant un angle θ_{P} avec l'axe $O\vec{x}$. Après passage par la lame équivalente, la polarisation est elliptique. Nous noterons son ellipticité ψ_{eq} avec :

$$\psi_{\mathrm{eq}} = \frac{\delta_{\mathrm{eq}}}{2} \sin\left(2(\theta_{\mathrm{eq}} - \theta_{\mathrm{P}})\right). \tag{4}$$

Nous cherchons à montrer que :

$$\psi_{\mathrm{eq}} = \psi_1 + \psi_2, \tag{5}$$

avec

$$\psi_1 = \frac{\delta_1}{2} \sin\left(2(\theta_1 - \theta_{\mathrm{P}})\right) \tag{6}$$

$$\psi_2 = \frac{\delta_2}{2} \sin\left(2(\theta_2 - \theta_{\mathrm{P}})\right) = -\frac{\delta_2}{2} \sin\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right). \tag{7}$$

Pour cela, dans l'équation (4), nous remplaçons δ_{eq} par son expression issue de l'équation (3). Nous obtenons :

$$\psi_{\mathrm{eq}} = \frac{\delta_2 + \delta_1 \cos 2\theta_1}{2 \cos 2\theta_{\mathrm{eq}}} \sin\left(2(\theta_{\mathrm{eq}} - \theta_{\mathrm{P}})\right), \tag{8}$$

soit en développant le sinus :

$$\psi_{\mathrm{eq}} = \frac{\delta_2 + \delta_1 \cos 2\theta_1}{2 \cos 2\theta_{\mathrm{eq}}} \left[\sin\left(2\theta_{\mathrm{eq}}\right) \cos\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right) - \cos\left(2\theta_{\mathrm{eq}}\right) \sin\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right)\right], \tag{9}$$

$$= -\frac{\delta_2}{2} \sin\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right) - \frac{\delta_1}{2} \cos\left(2\theta_1\right) \sin\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right) + \frac{\delta_{\mathrm{eq}}}{2} \sin\left(2\theta_{\mathrm{eq}}\right) \cos\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right). \tag{10}$$

Or

$$\delta_{\mathrm{eq}}^2 \sin^2\left(2\theta_{\mathrm{eq}}\right) = \delta_{\mathrm{eq}}^2 \left[1 - \cos^2\left(2\theta_{\mathrm{eq}}\right)\right], \tag{11}$$

soit, en utilisant l'expression de $\cos\left(2\theta_{\mathrm{eq}}\right)$ donnée dans l'équation (3) :

$$\delta_{\mathrm{eq}}^2 \sin^2\left(2\theta_{\mathrm{eq}}\right) = \delta_1^2 \sin^2\left(2\theta_1\right). \tag{12}$$

L'équation (10) devient alors :

$$\psi_{\mathrm{eq}} = -\frac{\delta_2}{2} \sin\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right) - \frac{\delta_1}{2} \cos\left(2\theta_1\right) \sin\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right) + \frac{\delta_1}{2} \sin\left(2\theta_1\right) \cos\left(2\theta_{\mathrm{P}}\right), \tag{13}$$

$$= \psi_1 + \psi_2. \tag{14}$$

L'ellipticité après passage par les deux lames est donc la somme des ellipticités induites par chaque lame, lorsque leurs déphasages sont petits devant 1.

Annexe B

Asservissement par la méthode de Pound-Drever-Hall : calcul de l'intensité réfléchie par la cavité Fabry-Perot

Le champ électrique de l'onde réfléchie par la cavité est donné par :

$$E_{\mathrm{r}}(t) = E_0\big[r_{\mathrm{c}}(\omega)J_0(\beta)\mathrm{e}^{i\omega t} + r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega)J_1(\beta)\mathrm{e}^{i(\omega+\Omega)t} - r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)J_1(\beta)\mathrm{e}^{i(\omega-\Omega)t}\big], \quad (15)$$

où ω est la pulsation de l'onde lumineuse, $\Omega/2\pi$ la fréquence à laquelle elle est modulée et β est la profondeur de modulation. r_{c} est le coefficient de réflexion en amplitude de la cavité. L'intensité réfléchie est calculée comme suit :

$$I_{\mathrm{r}}(t) = E_{\mathrm{r}}(t) \times E_{\mathrm{r}}^*(t), \quad (16)$$

où $E_{\mathrm{r}}^*(t)$ est le complexe conjugué de $E_{\mathrm{r}}(t)$. D'où :

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{r}}(t) &= E_0^2|r_{\mathrm{c}}(\omega)|^2 J_0^2(\beta) \quad (17)\\ &+ E_0^2 r_{\mathrm{c}}(\omega) r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) J_0(\beta) J_1(\beta)\mathrm{e}^{-i\Omega t}\\ &- E_0^2 r_{\mathrm{c}}(\omega) r_{\mathrm{c}}^*(\omega-\Omega) J_0(\beta) J_1(\beta)\mathrm{e}^{i\Omega t}\\ &+ E_0^2 r_{\mathrm{c}}^*(\omega) r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega) J_0(\beta) J_1(\beta)\mathrm{e}^{i\Omega t}\\ &+ E_0^2|r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega)|^2 J_1^2(\beta)\\ &- E_0^2 r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega) r_{\mathrm{c}}^*(\omega-\Omega) J_1^2(\beta)\mathrm{e}^{2i\Omega t}\\ &- E_0^2 r_{\mathrm{c}}^*(\omega) r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega) J_0(\beta) J_1(\beta)\mathrm{e}^{-i\Omega t}\\ &- E_0^2 r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega) J_1^2(\beta)\mathrm{e}^{-2i\Omega t}\\ &+ E_0^2|r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)|^2 J_1^2(\beta). \end{aligned}$$

En introduisant les intensités dans la porteuse $I_\mathrm{p} = E_0^2 J_0(\beta)$ et dans les bandes latérales $I_\mathrm{bl} = E_0^2 J_1(\beta)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_\mathrm{r}(t) &= I_\mathrm{p}|r_\mathrm{c}(\omega)|^2 \\ &+ \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega)\mathrm{e}^{-i\Omega t} \\ &- \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t} \\ &+ \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega+\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t} \\ &+ I_\mathrm{bl}|r_\mathrm{c}(\omega+\Omega)|^2 \\ &- I_\mathrm{bl} r_\mathrm{c}(\omega+\Omega) r_\mathrm{c}^*(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{2i\Omega t} \\ &- \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{-i\Omega t} \\ &- I_\mathrm{bl} r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{-2i\Omega t} \\ &+ I_\mathrm{bl}|r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)|^2, \end{aligned} \tag{18}$$

soit en négligeant les termes qui oscillent à 2Ω :

$$\begin{aligned} I_\mathrm{r}(t) &= I_\mathrm{p}|r_\mathrm{c}(\omega)|^2 + I_\mathrm{bl}\left[|r_\mathrm{c}(\omega+\Omega)|^2 + |r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)|^2\right] \\ &+ \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega)\mathrm{e}^{-i\Omega t} - \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t} \\ &+ \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega+\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t} - \sqrt{I_\mathrm{p} I_\mathrm{bl}} r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{-i\Omega t}. \end{aligned} \tag{19}$$

Calculons maintenant

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Re} \quad \{r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega) - r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)\}\cos\Omega t \\ &= \mathfrak{Re}\{r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega)\}\cos\Omega t - \mathfrak{Re}\{r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)\}\cos\Omega t, \\ &= \frac{1}{4}\left[r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega) + r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega+\Omega))\right]\left[\mathrm{e}^{i\Omega t} + \mathrm{e}^{-i\Omega t}\right] \\ &- \frac{1}{4}\left[r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega) + r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega-\Omega))\right]\left[\mathrm{e}^{i\Omega t} + \mathrm{e}^{-i\Omega t}\right], \end{aligned} \tag{20}$$

et

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Im} \quad \{r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega) - r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega)\}\sin\Omega t \\ &= -\frac{1}{4}\left[r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega+\Omega) - r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega+\Omega))\right]\left[\mathrm{e}^{i\Omega t} - \mathrm{e}^{-i\Omega t}\right] \\ &+ \frac{1}{4}\left[r_\mathrm{c}^*(\omega) r_\mathrm{c}(\omega-\Omega) - r_\mathrm{c}(\omega) r_\mathrm{c}^*(\omega-\Omega))\right]\left[\mathrm{e}^{i\Omega t} - \mathrm{e}^{-i\Omega t}\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

D'où

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{Re}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\}\cos\Omega t \\
+ \quad & \mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\}\sin\Omega t \\
= \quad & \frac{1}{2}r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega)\mathrm{e}^{-i\Omega t} - \frac{1}{2}r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t} \\
+ \quad & \frac{1}{2}r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega)\mathrm{e}^{i\Omega t} - \frac{1}{2}r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\mathrm{e}^{-i\Omega t}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Finalement, l'intensité réfléchie donnée par l'équation (19) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{r}}(t) &= I_{\mathrm{p}}|r_{\mathrm{c}}(\omega)|^2 + I_{\mathrm{bl}}\left[|r_{\mathrm{c}}(\omega+\Omega)|^2 + |r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)|^2\right] \\
&+ 2\sqrt{I_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{bl}}}\big[\mathfrak{Re}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\}\cos\Omega t \\
&+ \mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)r_{\mathrm{c}}^*(\omega+\Omega) - r_{\mathrm{c}}^*(\omega)r_{\mathrm{c}}(\omega-\Omega)\}\sin\Omega t\big].
\end{aligned} \tag{23}$$

Annexe C

Asservissement par la méthode de Pound-Drever-Hall : calcul de la partie imaginaire du coefficient de réflexion en amplitude de la cavité Fabry-Perot

Considérons une onde lumineuse de pulsation $\omega = 2\pi \times q\Delta^{\mathrm{ISL}} + \delta\omega$ proche de la pulsation de résonance de la cavité Fabry-Perot. Le coefficient de réflexion en amplitude de la cavité s'écrit :

$$r_{\mathrm{c}}(\omega) = -r_1 + \frac{t_1' t_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\delta\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\delta\omega\frac{2L_{\mathrm{c}}}{c}}}, \tag{24}$$

$$= -r_1 + \frac{t_1' t_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}}}{1 - r_1 r_2 \mathrm{e}^{-i\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}}}. \tag{25}$$

En développant au premier ordre les termes exponentiels, nous obtenons :

$$r_{\mathrm{c}}(\omega) = -r_1 + t_1' t_1 r_2 \frac{1 - i\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}}{1 - r_1 r_2 + r_1 r_2 i\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}}, \tag{26}$$

$$= -r_1 + t_1' t_1 r_2 \frac{(1 - r_1 r_2) - r_1 r_2 \left(\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2 - i\frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}}{(1 - r_1 r_2)^2 + \left(r_1 r_2 \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2}. \tag{27}$$

D'où

$$\mathfrak{Im}\{r_{\mathrm{c}}(\omega)\} = -\frac{t_1' t_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2 + \left(r_1 r_2 \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}\right)^2} \frac{\delta\omega}{\Delta^{\mathrm{ISL}}}. \tag{28}$$

Annexe D

Faraday and Cotton-Mouton effects of helium at $\lambda = 1064$ nm

A. Cadène, D. Sordes, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, et C. Rizzo,
Phys. Rev. A **88**, 043815 (2013).

Faraday and Cotton-Mouton effects of helium at $\lambda = 1064$ nm

A. Cadène, D. Sordes, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, and C. Rizzo*

Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses, UPR 3228, CNRS-UPS-UJF-INSA, 31400 Toulouse, France

(Received 24 July 2013; published 10 October 2013)

We present measurements of the Faraday and the Cotton-Mouton effects of helium gas at $\lambda = 1064$ nm. Our apparatus is based on an up-to-date resonant optical cavity coupled to longitudinal and transverse magnetic fields. This cavity increases the signal to be measured by more than a factor of 270 000 compared to the one acquired after a single passage of light in the magnetic field region. We have reached a precision of a few percent for both the Faraday and the Cotton-Mouton effect. Our measurements give the experimental value of the Faraday effect at $\lambda = 1064$ nm. This value is compatible with the theoretical prediction. Concerning the Cotton-Mouton effect, our measurement agrees at better than 1σ with theoretical predictions.

DOI: 10.1103/PhysRevA.88.043815 PACS number(s): 42.25.Lc, 78.20.Ls, 12.20.−m

I. INTRODUCTION

In 1845 Faraday discovered that a magnetic field affects the propagation of light in a medium [1]. In particular, he observed that a magnetic field parallel to the light wave vector **k** induces a polarization rotation of linearly polarized light. This effect is known now as the Faraday effect. With such experiments, Faraday was looking for proof that light and magnetic fields have a common origin. These revolutionary findings represented one of the most important steps towards Maxwell's theory of electromagnetism.

At the very beginning of the 20th century, Kerr [2] and Majorana [3] discovered that linearly polarized light, propagating in a medium in the presence of a magnetic field, also acquires an ellipticity when the field is perpendicular to **k**. In the following years, this phenomenon was studied in detail by Cotton and Mouton [4] and it is known now as the Cotton-Mouton effect.

The Faraday and Cotton-Mouton effects are both due to the fact that the magnetic field creates an anisotropy in the medium which then becomes birefringent. The term "birefringent" indicates that different states of polarization do not have the same propagation velocity. The Faraday effect corresponds to a magnetic circular birefringence, i.e., the index of refraction n_- for left circularly polarized light is different from the index of refraction n_+ for right circularly polarized light. The difference $\Delta n_{\mathrm{F}} = n_- - n_+$ is proportional to the longitudinal magnetic field $B_\parallel$:

$$\Delta n_{\mathrm{F}} = k_{\mathrm{F}} B_\parallel, \tag{1}$$

where k_{F} is the circular magnetic birefringence per tesla. On the other hand, the Cotton-Mouton effect corresponds to a magnetic linear birefringence, i.e., the index of refraction $n_\parallel$ for light polarized parallel to the magnetic field is different from the index of refraction $n_\perp$ for light polarized perpendicular to the magnetic field. The difference $\Delta n_{\mathrm{CM}} = n_\parallel - n_\perp$ is proportional to the square of the transverse magnetic field $B_\perp^2$:

$$\Delta n_{\mathrm{CM}} = k_{\mathrm{CM}} B_\perp^2, \tag{2}$$

where k_{CM} is the linear magnetic birefringence per tesla squared.

Such magnetic birefringences are usually very small ($\Delta n_{\mathrm{F}}, \Delta n_{\mathrm{CM}} \ll 1$) for magnetic fields available in laboratories, especially in the case of dilute matter. Magnetic birefringence measurements are therefore an experimental challenge. The value of the birefringence depends on microscopic matter response properties like (hyper)susceptibilities. In the case of dilute matter, these responses can be calculated *ab initio* using the computational methods developed in the framework of quantum chemistry [5]. Experimental measurements are then a fundamental test of our knowledge of the interaction of electromagnetic fields and matter.

Among all known gases, helium presents the smallest Faraday and Cotton-Mouton effects. *Ab initio* calculations of the helium Faraday effect at $\lambda = 1064$ nm, with λ the light wavelength, have been published only recently [6]. From the experimental point of view, Faraday effect measurements in helium date back to the 1950s [7], but not at $\lambda = 1064$ nm. The Cotton-Mouton effect in helium was first measured at $\lambda = 514.5$ nm in 1991 [8]. At the same time, the first numerical calculation at a different wavelength in the coupled Hartree-Fock approximation was published [9]. Actually, these two first values were not in agreement. While some other theoretical calculations exist in the literature [10], to our knowledge only three more experimental values have been published since 1991 [8,11,12], with only one at $\lambda = 1064$ nm [12].

Ab initio calculations of both the Faraday and Cotton-Mouton effects of helium are benchmark tests for computational methods. In practice they can be considered as error-free, especially when compared with the error bars associated with the experimental values. Experimental measurement precision has therefore to be as good as possible to be able to test the different computational methods.

Experimentally, one generally measures the Faraday effect by measuring the polarization rotation angle θ_{F}, related to the circular birefringence by the formula

$$\theta_{\mathrm{F}} = \pi \frac{L_B}{\lambda} \Delta n_{\mathrm{F}}, \tag{3}$$

where L_B is the length of the magnetic field region. The Cotton-Mouton effect is measured through the induced ellipticity related to the linear birefringence by the formula

$$\psi = \pi \frac{L_B}{\lambda} \Delta n_{\mathrm{CM}} \sin 2\theta_{\mathrm{P}}, \tag{4}$$

*carlo.rizzo@lncmi.cnrs.fr

 ©2013 American Physical Society

where θ_P is the angle between the light polarization and the magnetic field. Experiments are difficult because one needs a high magnetic field coupled to optics designed to detect very small variations of light velocity. One also needs an L_B as large as possible. To this end, optical cavities are used to trap light in the magnetic field region and therefore increase the ellipticity to be measured (see, e.g., Ref. [8]).

In this paper, we present measurements of the Faraday and Cotton-Mouton effects of helium gas at $\lambda = 1064$ nm. Our apparatus is based on an up-to-date resonant optical cavity coupled to longitudinal and transverse magnetic fields. This cavity increases the signal to be measured by more than a factor of 270 000 compared to the one acquired after a single passage of light in the magnetic field region. This allows us to reach a measurement precision of a few percent for both the Faraday and Cotton-Mouton effects. Our results are finally compared to the theoretical predictions and they agree to within better than 1σ.

II. EXPERIMENTAL SETUP AND SIGNAL ANALYSIS

A. Apparatus

Our apparatus is described in detail in Refs. [13,14]. Briefly, as shown in Fig. 1, 30 mW of linearly polarized light provided by a Nd:YAG laser ($\lambda = 1064$ nm) is injected into a high-finesse Fabry-Pérot cavity consisting of the mirrors M_1 and M_2. The laser frequency is locked onto the cavity using the Pound-Drever-Hall method [15]. To this end, the laser passes through an electro-optic modulator creating sidebands at 10 MHz. The beam reflected by the cavity is detected by the photodiode Ph_r. This signal is used to adjust the laser frequency with a bandwidth of 80 kHz via an acousto-optic modulator and with a bandwidth of a few kilohertz via the piezoelectric element of the laser. A slow control with a bandwidth of a few millihertz is also applied by the Peltier element of the laser.

Before entering the optical cavity, the light is linearly polarized by the polarizer P. The light transmitted by the cavity is then analyzed with the analyzer A crossed at maximum extinction. Both polarizations are extracted: parallel and perpendicular to P. The extraordinary beam (power I_e), corresponding to the light polarization perpendicular to P, is collected by the low-noise photodiode Ph_e, while the ordinary beam (power I_t), corresponding to the light polarization parallel to P, is detected by Ph_t. All the optical components from the polarizer P to the analyzer A are placed in a high-vacuum chamber which can be filled with high-purity gases. During this work, magneto-optical measurements have been done using a bottle of helium gas with a global purity higher than 99.9999%. This bottle is connected to the chamber through a leak valve allowing injection of less than 10^{-3} atm of gas.

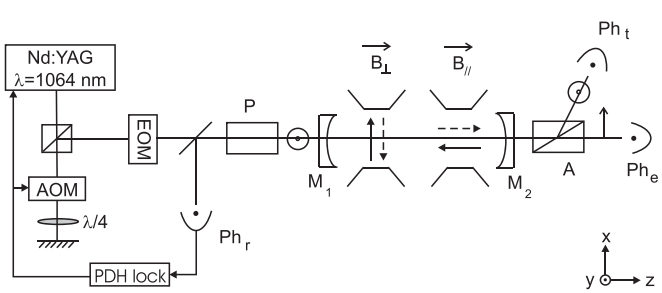


FIG. 1. Experimental setup. EOM, electro-optic modulator; AOM, acousto-optic modulator; PDH, Pound-Drever-Hall; Ph, photodiode; P, polarizer; A, analyzer. See text for more details.

Magnets providing a field perpendicular to the light wave vector **k** and a field parallel to **k** surround the vacuum pipe. The transverse magnetic field ($\mathbf{B}_\perp \perp \mathbf{k}$) used for Cotton-Mouton effect measurements is created by pulsed coils as described in Refs. [14,16] and briefly detailed in Sec. IV A. For the Faraday effect measurements, a modulated longitudinal magnetic field ($\mathbf{B}_\parallel \parallel \mathbf{k}$) is applied via a solenoid. More details are given in Sec. III A.

B. Fabry-Pérot cavity

A key element of the experiment is the Fabry-Pérot cavity. Its aim is to accumulate the effect of the magnetic field by trapping the light between two ultrahigh-reflectivity mirrors M_1 and M_2. The length of the cavity is $L_c = (2.2713 \pm 0.0006)$ m. This corresponds to a cavity free spectral range of $\Delta^{FSR} = c/2nL_c = (65.996 \pm 0.017)$ MHz, with c the speed of light in vacuum and n the index of refraction of the medium in which the cavity is immersed. This index of refraction will be considered equal to 1. All these parameters and their uncertainties were measured previously. Details concerning the measurement are given in Ref. [13]. Using the Jones matrix formalism, we can calculate the total acquired ellipticity due to the Cotton-Mouton effect, $\Psi(t)$. It is linked to the ellipticity without any cavity, $\psi(t)$, by

$$\Psi(t) = \frac{2F}{\pi}\psi(t). \tag{5}$$

Likewise, the total rotation angle $\Theta_F(t)$ due to the Faraday effect is

$$\Theta_F(t) = \frac{2F}{\pi}\theta_F(t), \tag{6}$$

where F is the finesse of the cavity and $\theta_F(t)$ the rotation angle without any cavity.

1. Cavity birefringence

The cavity induces a total static ellipticity Γ. This is due to the mirrors' intrinsic phase retardation [17]. Each mirror can be regarded as a wave plate and a combination of both wave plates gives a single wave plate. The total phase retardation δ_{eq} and the axis orientation of the wave plate equivalent to the cavity depend on the phase retardation of each mirror and on their relative orientation [18,19]. Thus the value of Γ can be adjusted by rotating the mirrors M_1 and M_2 around the z axis corresponding to the axis of light propagation.

We first set $\Gamma = 0$. To this end, we align the axis of the equivalent wave plate on the incident polarization. This is done by rotating the mirrors while the laser frequency is locked onto the cavity. As the polarizers are crossed at maximum extinction, we can measure the extinction ratio σ^2 of the

polarizers by measuring the following ratio:

$$\sigma^2 = \left.\frac{I_e}{I_t}\right|_{\Gamma=0}. \tag{7}$$

The value of σ^2 is regularly measured, in particular before each shot for the Cotton-Mouton effect measurements. This extinction ratio can typically vary from 4×10^{-7} to 8×10^{-7}.

As shown in Ref. [14], because of the ellipticity noise, the optical sensitivity improves when Γ decreases. Starting from $\Gamma = 0$ and rotating M_1 in the clockwise or counterclockwise direction, we choose the sign of Γ as well as its value, with typically $\Gamma^2 \sim \sigma^2$. The sign of Γ is known by filling the vacuum chamber with nitrogen gas and by measuring its Cotton-Mouton effect, whose sign and value are perfectly known. This measurement has already been done with this apparatus and the results are reported in Ref. [13]. We performed several measurements with different signs and values of Γ, showing that this parameter is perfectly controlled. The value and the sign of Γ are set before each magnetic shot.

The static birefringence of the cavity changes the incident linear polarization into an elliptical polarization of ellipticity Γ. But it also induces a rotation angle ϵ of the major axis of the ellipse compared with the polarizer axis. The value of this angle can be calculated by considering the Fabry-Pérot cavity as an equivalent wave plate of phase retardation δ_{eq}. The angle between the incident linear polarization and the fast axis of the equivalent wave plate corresponds to φ, as represented in Fig. 2. The ellipticity induced by the wave plate is given by

$$\Gamma = \frac{\sin(2\varphi)\sin(\delta_{eq})}{2}. \tag{8}$$

As we set $\Gamma \ll 1$, the fast axis is almost aligned with P and thus we have $\varphi \ll 1$. Assuming that $\delta_{eq} \ll 1$, we get

$$\varphi = \frac{\Gamma}{\delta_{eq}}. \tag{9}$$

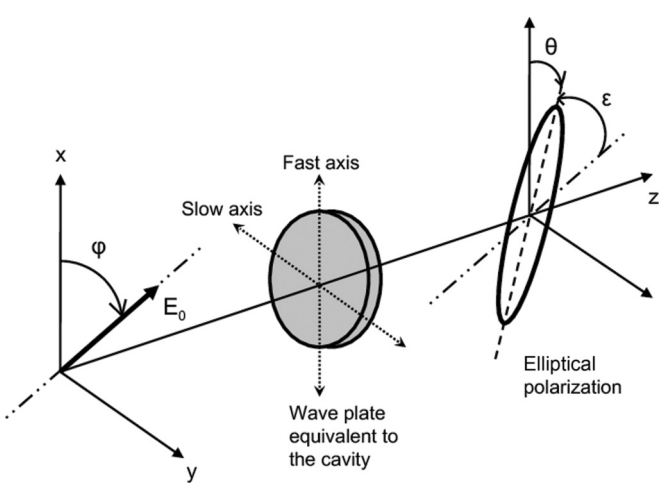


FIG. 2. Rotation of the major axis of the elliptical polarization due to the static birefringence of the Fabry-Pérot cavity.

We also have

$$\tan(2\theta) = \tan(2\varphi)\cos(\delta_{eq}), \tag{10}$$

$$\theta = \varphi\left(1 - \frac{\delta_{eq}^2}{2}\right), \tag{11}$$

where θ is the angle between the major axis of the ellipse and the fast axis of the wave plate. Combining Eqs. (9) and (11), we obtain the angle ϵ between the major axis of the elliptical polarization and the incident linear polarization:

$$\epsilon = \theta - \varphi = -\frac{\Gamma\delta_{eq}}{2}. \tag{12}$$

The value of the phase retardation of our cavity is about $|\delta_{eq}| \sim 0.1$ rad. This has been inferred by measuring the value of Γ as a function of the mirrors' orientation, as explained in detail in Ref. [17]. With a typical value of $|\Gamma|$ varying from 8×10^{-4} to 3×10^{-3}, we obtain $40 < |\epsilon| < 150$ μrad.

2. *Cavity finesse and cavity filtering*

The finesse of the cavity is inferred from the measurement of the photon lifetime τ inside the cavity. At $t = t_0$ the intensity of the laser, previously locked onto the cavity resonance, is switched off. The exponential decay of the intensity of the ordinary beam for $t > t_0$ is fitted with

$$I_t(t) = I_t(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau} \tag{13}$$

to obtain τ. The cavity finesse is related to the photon lifetime through

$$F = \frac{\pi c \tau}{L_c}. \tag{14}$$

The value of the photon lifetime is regularly checked during data taking. In this experiment, it ranges from 1.06 to 1.12 ms, corresponding to a finesse of 438 000 to 465 000. During a run of data taking, the relative variation of the photon lifetime does not exceed 2% at the 1σ confidence level.

Due to the photon lifetime, the cavity acts as a first-order low-pass filter, as explained in detail in Ref. [20]. Its complex response function $H(\nu)$ is given by

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + i\frac{\nu}{\nu_c}}, \tag{15}$$

with ν the frequency and $\nu_c = 1/4\pi\tau \simeq 70$ Hz the cavity cutoff frequency. This filtering has to be taken into account in particular for the time-dependent magnetic field applied inside the Fabry-Pérot cavity.

The cavity also acts as a first-order low-pass filter for the ordinary beam $I_t(t)$ compared to the beam incident on the cavity. But, due to the cavity birefringence, the cavity acts as a second-order low-pass filter for the extraordinary beam $I_e(t)$. This effect is explained in detail in Ref. [20]. The second-order low-pass filter represents the combined action of two successive identical first-order low-pass filters. Their complex response function is given by Eq. (15). While the first one characterizes the usual cavity behavior, we can interpret the second filter in terms of pumping or filling: due to the mirror birefringence, some photons of the ordinary beam are gradually converted into the extraordinary beam at each reflection. Thus, if we want to directly compare $I_t(t)$ and $I_e(t)$,

we have to apply the first-order low-pass filter to $I_t(t)$. The filtered signal $I_{t,f}(t)$ is then used for the analysis.

C. Signals

The ellipticity $\Psi(t)$ and the rotation of the polarization $\Theta_F(t)$ induced by the transverse and the longitudinal magnetic fields can be related to the ratio of the extraordinary and ordinary powers as follows:

$$\frac{I_e(t)}{I_{t,f}(t)} = \sigma^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2 + [\epsilon + \Theta_F(t)]^2. \tag{16}$$

This formula, which can be obtained using the Jones formalism, clearly shows that our experiment is sensitive to both ellipticities and rotations.

III. FARADAY EFFECT OF HELIUM GAS

As stated above, the Faraday effect corresponds to a magnetic circular birefringence Δn_F induced by a longitudinal magnetic field $B_\parallel$. From Eqs. (1), (3), and (6), we deduce that the polarization rotation to be measured depends on k_F as follows:

$$\Theta_F(t) = 2F\frac{L_B}{\lambda}k_F B_\parallel(t). \tag{17}$$

For historical reasons, the Faraday effect is usually given in terms of the Verdet constant V [21], which is related to the Faraday constant by

$$V = \frac{\pi k_F}{\lambda}. \tag{18}$$

Equation (17) becomes

$$\Theta_F(t) = \frac{2F}{\pi}V B_\parallel(t) L_B. \tag{19}$$

A. Magnetic field

To measure the Faraday effect, we need a longitudinal magnetic field. It is delivered by a 300-mm-long solenoid. Its diameter is 50 mm and it corresponds to 340 loops of copper wire. The magnetic field profile along the longitudinal z axis has been measured with a gaussmeter. Figure 3 shows the normalized profile. We define $B_{\parallel,0}$ as the maximum magnetic field, thus at the center of the coil, and L_B as the equivalent magnetic length such that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_\parallel(z)dz \equiv B_{\parallel,0}L_B. \tag{20}$$

This equivalent magnetic length has been calculated by numerically integrating the measured field. Taking into account the experimental uncertainties, we obtain $L_B = (0.308 \pm 0.006)$ m at 1σ. We can reach a maximum magnetic field of about 4.3 mT corresponding to an injected current of 3 A.

To measure the magnetic field during operation, we measure the current injected into the coil. The form factor $B_\parallel/I$ has been determined experimentally using the gaussemeter and an ammeter. This form factor remains constant for frequency modulation ranging from dc to 50 Hz. Finally we have estimated the relative uncertainty $u(B_\parallel)/B_\parallel = 1.4\%$ at 1σ, taking into account the uncertainties coming from the gaussmeter and the ammeter and from a possible small misalignment of the laser beam inside the solenoid.

Faraday effect measurements were performed at room temperature $T = 293$ K in an air-conditioned room. When a current is injected into the solenoid, the temperature increases inside the coil. Nevertheless, for a maximum current of 3 A, the increase is lower than 2 K. This will be taken into account in the final uncertainty.

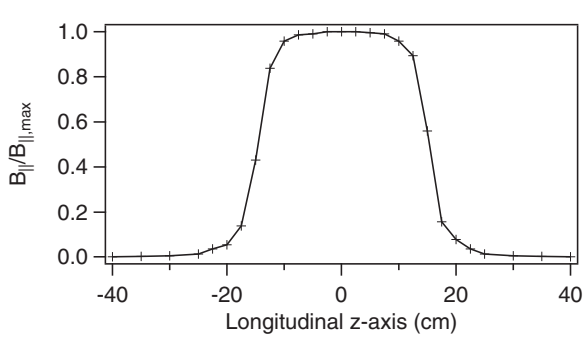


FIG. 3. Normalized profile of the longitudinal magnetic field inside the solenoid along the longitudinal z axis. The crosses correspond to the measurements.

B. Analysis of Faraday signal

The magnetic field at the center of the coil is modulated at the frequency ν: $B_\parallel = B_{\parallel,0}\sin(2\pi\nu t + \phi)$. The rotation of the polarization due to the Faraday effect is thus given by

$$\Theta_F = \Theta_0 \sin(2\pi\nu t + \phi), \tag{21}$$

with

$$\Theta_0 = \frac{2F}{\pi}V B_{\parallel,0}L_B. \tag{22}$$

Expanding Eq. (16), we obtain

$$\frac{I_e(t)}{I_{t,f}(t)} = \sigma^2 + \epsilon^2 + 2\epsilon\Theta_F(t) + \Theta_F^2(t) + \Gamma^2 + 2\Gamma\Psi(t) + \Psi^2(t). \tag{23}$$

We define the ratio between the Faraday and the Cotton-Mouton signals as

$$R_{F/CM} = \frac{2\epsilon\Theta_F + \Theta_F^2}{2\Gamma\Psi + \Psi^2}. \tag{24}$$

For the Faraday measurements, our typical static ellipticity is $\Gamma = 3 \times 10^{-3}$ rad, and Eq. (12) gives $|\epsilon| = 150$ μrad. We evaluate the value of $R_{F/CM}$ using the theoretical values of the Verdet and Cotton-Mouton constants of helium which are given later in this article. For this experiment, our typical helium pressure is 30×10^{-3} atm and the cavity finesse is of the order of 465 000, corresponding to a cavity cutoff frequency of about 70 Hz. The solenoid mainly induces a longitudinal magnetic field, but, for the sake of argument, let us perform the calculation with the same value 4.3 mT for the longitudinal and the transverse magnetic fields. One gets $R_{F/CM} \sim 10^6$. The Cotton-Mouton effect is thus negligible. Equation (23) thus becomes

$$\frac{I_e(t)}{I_{t,f}(t)} = \sigma^2 + \Gamma^2 + [\epsilon + \Theta_F(t)]^2. \tag{25}$$

This equation results in three main frequency components:

$$I_{\rm dc} = \sigma^2 + \Gamma^2 + \epsilon^2 + \frac{\Theta_0^2}{2}, \tag{26}$$

$$I_\nu = \frac{2\epsilon\Theta_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2}} \sin\left[2\pi\nu t + \phi - \arctan\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right], \tag{27}$$

$$I_{2\nu} = -\frac{\Theta_0^2}{2\sqrt{1+\left(\frac{2\nu}{\nu_c}\right)^2}} \cos\left[4\pi\nu t + 2\phi - \arctan\left(\frac{2\nu}{\nu_c}\right)\right]. \tag{28}$$

As mentioned before, the cavity acts as a first-order low-pass filter, with a cavity cutoff frequency ν_c. This filtering has been taken into account in Eqs. (27) and (28).

The amplitude of the ν component, I_ν depends on Θ_0 but also on ϵ, whose value is not precisely known. On the other hand, $I_{2\nu}$ depends only on Θ_0. Consequently it is the only component used to measure the Verdet constant. The amplitude of the 2ν frequency component, proportional to $(B_{\|,0}L_B)^2$, is measured as a function of the magnetic field amplitude. We fit our data with $K_V B_{\|,0}^2$. The Verdet constant V finally depends on the measured experimental parameters as follows, using Eq. (22) and the amplitude of the 2ν component given in Eq. (28):

$$V(T,P) = \sqrt{\frac{K_V}{2}}\frac{[1+(8\pi\tau\nu)^2]^{1/4}}{2\tau\Delta^{\rm FSR}L_B}. \tag{29}$$

C. Results

1. Our result

We report in Fig. 4 the Fourier transform of the $I_e/I_{t,f} - I_{dc}$ signal with about 60×10^{-3} atm of helium and with $B_{\|,0}L_B = 1.3 \times 10^{-3}$ T m. The magnetic frequency modulation is fixed to $\nu = 18$ Hz in order to have the 2ν frequency lower than the cavity cutoff frequency. We can observe both components at frequencies ν and 2ν. During the Faraday data taking, the photon lifetime was $\tau = (1.12 \pm 0.02)$ ms corresponding to a cavity finesse of $(465\,000 \pm 8000)$.

We plot in Fig. 5 the amplitude of the 2ν component as a function of $B_{\|,0}$. We fit our data by a quadratic law $K_V B_{\|,0}^2$. We also study the ν frequency component as a function of the magnetic field amplitude. According to the relation (27), we obtain a linear dependence. By fitting these data by a linear equation and using the value of the Verdet constant measured with the 2ν frequency component, we infer the value of the ϵ parameter. We obtain $\epsilon \simeq 10^{-4}$ rad, in agreement with the value calculated with Eq. (12).

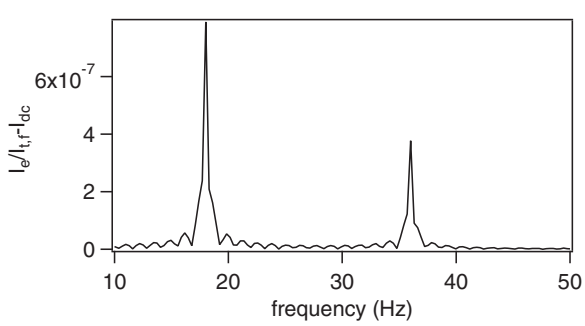


FIG. 4. Fourier transform of $I_e/I_t - I_{dc}$ with about 60×10^{-3} atm of helium and with $B_{\|,0}L_B = 1.3 \times 10^{-3}$ T m. The magnetic frequency modulation is $\nu = 18$ Hz.

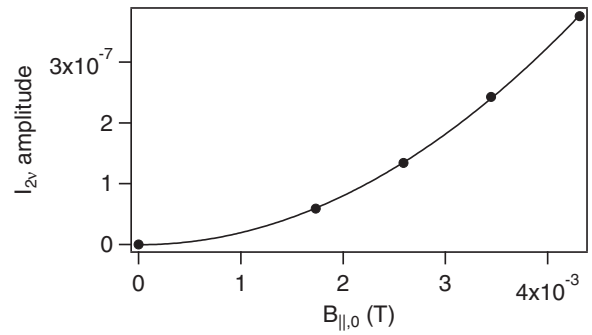


FIG. 5. Amplitude of the 2ν frequency component as a function of $B_{\|,0}$ with about 60×10^{-3} atm of helium. The solid line corresponds to a quadratic fit of the experimental data.

We performed Faraday constant measurements at different pressures from 10^{-2} to 6×10^{-2} atm. They are summarized in Fig. 6. We measure the gas pressure in the chamber with pressure gauges which have a relative uncertainty given by the manufacturer of 0.2%. In this range of pressure, helium can be considered as an ideal gas and the pressure dependence of the Verdet constant is thus linear. As shown in Fig. 6, our data are correctly fitted by a linear equation. Its V-axis intercept is consistent with zero within the uncertainties. Its slope gives the normalized Verdet constant at $\lambda = 1064$ nm and at $T = (294 \pm 1)$ K:

$$V = (3.87 \pm 0.12) \times 10^{-5}\ {\rm atm^{-1}\,rad\,T^{-1}\,m^{-1}}. \tag{30}$$

With a scale law on the gas density and considering an ideal gas, this corresponds to a normalized Verdet constant at $T = 273.15$ K of

$$V = (4.17 \pm 0.13) \times 10^{-5}\ {\rm atm^{-1}\,rad\,T^{-1}\,m^{-1}}. \tag{31}$$

The uncertainty is given at 1σ. It is calculated from the relative A- and B-type uncertainties summarized in Table I and detailed in Ref. [13]. Using Eq. (18), we can also give the normalized Faraday constant. At $T = 273.15$ K, one gets

$$k_{\rm F} = (1.41 \pm 0.04) \times 10^{-11}\ {\rm atm^{-1}\,T^{-1}}. \tag{32}$$

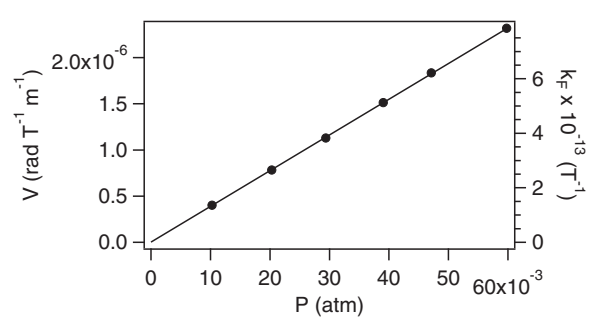


FIG. 6. Verdet constant of helium as a function of pressure. The solid line corresponds to a linear fit of the experimental data.

TABLE I. Parameters and their respective relative A- and B-type uncertainties at 1σ that have to be measured to infer the value of the normalized Verdet constant V.

Parameter	Relative A-type uncertainty	Relative B-type uncertainty
τ	2×10^{-2}	
K_V	8×10^{-3}	
$B_{\parallel,0}$		1.4×10^{-2}
L_B		2.0×10^{-2}
Δ^{FSR}		3×10^{-4}
P		2×10^{-3}

2. *Comparison*

Our value of the normalized Verdet constant can be compared to other published values. Reference [7] presents the most extensive experimental values in helium. They have been measured at different wavelengths, from 363 to 900 nm, and they correspond to the open triangles in Fig. 7 at $T = 273.15$ K. As stated by the authors in Refs. [7,22], "the average absolute probable error is considered to be about 1%," but "the scale of measurement was determined by a comparison of these results with accepted values for water." This is an important difference from our experiment since we do not need to calibrate our setup with another gas. All parameters on which the measured Verdet constant depends are accurately monitored, yielding therefore a Verdet constant of high precision.

As far as we know, no value has been reported at 1064 nm, our working wavelength. Nevertheless, it can be quadratically interpolated from the data of Ref. [7] with a fit A/λ^2 (solid line in Fig. 7). This gives a normalized Verdet constant at $\lambda = 1064$ nm and $T = 273.15$ K of $V = (4.15 \pm 0.05) \times 10^{-5}$ atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1}. The uncertainty is the one given by the fit. This value is compatible with ours, which is represented as the open circle in the inset of Fig. 7.

We finally compared our value with the theoretical predictions at $T = 273.15$ K. The most recent ones were published in 2005 [6] exploiting a four-component Hartree-Fock calculation and in 2012 [23] using a relativistic particle-hole configuration-interaction method. Reference [6] gives values at different wavelengths that are plotted in Fig. 7 with the filled points. The value at $\lambda = 1064$ nm is $V = 4.06 \times 10^{-5}$ atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1} and it is plotted in Fig. 7 with the filled point. Reference [23] does not give a value at 1064 nm, but it can be obtained by a quadratic interpolation of the data provided by the author. One obtains $V = (4.09 \pm 0.02) \times 10^{-5}$ atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1}, with an uncertainty given by the fit. Both theoretical values are compatible with our experimental Verdet constant. All these theoretical and experimental values are summarized in Table II.

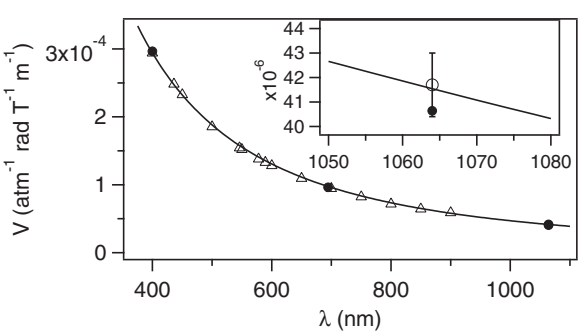


FIG. 7. △: Experimental values of helium normalized Verdet constant at $T = 273.15$ K reported in Ref. [7] for wavelengths from 363 to 900 nm. These values are fitted by the law A/λ^2 (solid line). ○: Our experimental value at $T = 273.15$ K. •: Theoretical predictions at $T = 273.15$ K reported in Ref. [6]. Inset: Zoom around $\lambda = 1064$ nm. The error bar corresponds to the 1σ uncertainty of our measurement.

TABLE II. Experimental and theoretical values of the normalized Verdet constant at $T = 273.15$ K, $\lambda = 1064$ nm and with uncertainties at 1σ.

Ref.	$V \times 10^5$ (atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1})	Remarks
	Theory	
[6]	4.06	
[23]	4.09 ± 0.02	Quadratically interpolated.
	Experiment	
[7]	4.15 ± 0.05	Quadratically interpolated. Not absolute: scaled to water.
This work	4.17 ± 0.13	

IV. COTTON-MOUTON EFFECT OF HELIUM GAS

The Cotton-Mouton effect consists in a linear birefringence Δn_{CM} induced by a transverse magnetic field $B_\perp$. From Eqs. (4) and (5) we deduce that the ellipticity $\Psi(t)$ to be measured is linked to k_{CM} by

$$\Psi(t) = 2F\frac{L_B}{\lambda}k_{\mathrm{CM}}B_\perp^2(t)\sin 2\theta_{\mathrm{P}}. \tag{33}$$

The angle θ_{P} is adjusted to 45° with the experimental procedure explained in Ref. [13].

A. Magnetic field

One can see that Ψ is proportional to $B_\perp^2 L_B$. In order to have Ψ as high as possible, we have to maximize this parameter. This is fulfilled using pulsed fields delivered by one magnet, named the "X-coil", especially designed by the Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses (LNCMI). The principle of this magnet and its properties are described in detail in Refs. [14,16]. It can provide a maximum field of more than 14 T over an equivalent length L_B of 0.137 m [13]. The high-voltage connections can be remotely switched to reverse the direction of the field. Thus we can set **B** parallel or antiparallel to the x direction, as shown in Fig. 1.

The pulsed coil is immersed in a liquid-nitrogen cryostat to limit its heating. A pause between two pulses is necessary to let the magnet cool down to the equilibrium temperature. We do not need to use the coil at its maximum field since the sensitivity of our experiment is largely sufficient. We have chosen to apply a maximum field of 3 T in order to limit the aging of the magnet. From one shot to another, a relative

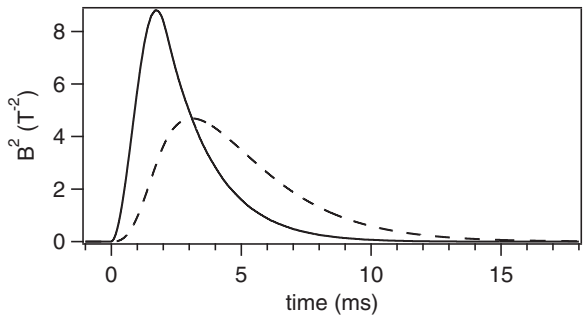


FIG. 8. Square of the magnetic field amplitude as a function of time for a maximum field of 3 T. Solid black curve, $B_\perp^2$; dashed curve, $B_{\perp,\mathrm{f}}^2$.

variation of the maximum of the field lower than 1.5% was observed due to variation of the power supply voltage.

The pulse duration is less than 10 ms, with the maximum of the field reached within 2 ms. Since the pulse duration is of the same order of magnitude as the photon lifetime inside the cavity, the filtering of the Fabry-Pérot cavity has to be taken into account for the magnetic field, as we said in Sec. II B2. We calculate the filtered field $B_{\perp,\mathrm{f}}^2$ from $B_\perp^2$ by using the first-order low-pass filter corresponding to the cavity. The time profiles of $B_\perp^2$ and $B_{\perp,\mathrm{f}}^2$ are shown in Fig. 8, for a maximum field of 3 T.

B. Analysis of Cotton-Mouton signal

As mentioned in Sec. II C, the ratio of the powers I_e and $I_{\mathrm{t,f}}$ is linked to the birefringence $\Psi(t)$ to be measured as follows:

$$\frac{I_\mathrm{e}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2 + [\epsilon + \Theta_\mathrm{F}(t)]^2, \tag{34}$$

where $\Theta_\mathrm{F}(t)$ is the rotation angle due to the longitudinal component of the pulsed magnetic field inducing a Faraday effect in helium. This component $B_\parallel(t)$ is first due to the X structure of the coil. It is around 230 times smaller than the transverse field, i.e., around 10 mT for a pulse of 3 T. Moreover a contribution to $B_\parallel$ appears if the cryostat is not perfectly aligned with the optical axis. The diameter of the cryostat is 60 cm. A typical misalignment of 2 mm over this length, i.e., around 3 mrad, leads to a longitudinal component of 10 mT. Finally the estimated longitudinal magnetic field is about 20 mT. It can be present during a shot over an equivalent length $L_B = 0.137$ m.

Using Eq. (19) and the value of the Verdet constant given in Eq. (30), we can calculate the rotation of the polarization Θ_F due to $B_\parallel$. It is about 30 mrad per atmosphere of helium gas. We then calculate the ratio of the Faraday effect to the Cotton-Mouton effect, $R_{\mathrm{F/CM}}$, given by Eq. (24). Since the static ellipticity is typically $|\Gamma| \simeq 8 \times 10^{-4}$ rad corresponding to $\epsilon \simeq 40\,\mu$rad as stated in Sec. II B1, this ratio goes from 200 at 40×10^{-3} atm to 2600 at 550×10^{-3} atm. This shows that the Faraday effect component is not negligible and thus needs to be taken into account.

From Eq. (34), we obtain

$$\frac{I_\mathrm{e}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + \Gamma^2 + \epsilon^2 + 2\Gamma\Psi(t) + \Psi^2(t) + 2\epsilon\Theta_\mathrm{F}(t) + \Theta_\mathrm{F}^2(t). \tag{35}$$

This formula shows that the angle ϵ carries the Faraday effect of the gas. During a Cotton-Mouton effect measurement we want to have the Faraday effect as small as possible. We therefore minimize ϵ before the shot, once the value of Γ is set, by turning the analyzer A. As we can see in Fig. 2, this consists in aligning A, which was initially adjusted at 90° compared to the incident polarization, on the minor axis of the elliptical polarization. Nevertheless, in order to take into account the imperfections of this experimental adjustment, we still keep ϵ in the formula, assuming that $\epsilon^2 \ll \Gamma^2$.

To extract the ellipticity $\Psi(t)$, we calculate the following $Y(t)$ function:

$$Y(t) = \frac{\frac{I_\mathrm{e}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} - I_\mathrm{dc}}{2|\Gamma|} = \gamma\Psi(t) + \frac{\Psi^2(t)}{2|\Gamma|} + \gamma\frac{|\epsilon|\Theta_\mathrm{F}(t)}{2|\Gamma|} + \frac{\Theta_\mathrm{F}^2(t)}{2|\Gamma|}, \tag{36}$$

where γ corresponds to the sign of Γ. I_dc is the static signal:

$$I_\mathrm{dc} = \sigma^2 + \Gamma^2 + \epsilon^2 = \left\langle \frac{I_\mathrm{e}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} \right\rangle_{t<0}, \tag{37}$$

and it is measured just before each shot, the magnetic field being applied at $t = 0$. We also measure the extinction ratio σ^2 before each shot using the experimental procedure described in Sec. II B1. The absolute value of the static ellipticity is then calculated as follows:

$$|\Gamma| = \sqrt{\left\langle \frac{I_\mathrm{e}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} \right\rangle_{t<0} - \sigma^2}. \tag{38}$$

Two parameters are adjustable in the experiment: the sign γ of the static ellipticity Γ and the direction of the transverse magnetic field. We acquire signals for both signs of Γ and both directions of **B**: parallel to x is denoted as >0 and antiparallel is denoted as <0. This gives four data series: ($\Gamma > 0$, $B_\perp > 0$), ($\Gamma > 0$, $B_\perp < 0$), ($\Gamma < 0$, $B_\perp < 0$), and ($\Gamma < 0$, $B_\perp > 0$). For each series, signals calculated with Eq. (36) are averaged and denoted as $Y_{\gg}$, $Y_{><}$, $Y_{\ll}$, and $Y_{<>}$. The first subscript corresponds to $\Gamma > 0$ or $\Gamma < 0$ while the second one corresponds to **B** parallel or antiparallel to x.

The Y signals are the sum of different effects with different symmetries, denoted as S:

$$\begin{aligned} Y_{\gg} &= a_{\gg}S_{++} + b_{\gg}S_{+-} + c_{\gg}S_{--} + d_{\gg}S_{-+}, \\ Y_{><} &= a_{><}S_{++} - b_{><}S_{+-} - c_{><}S_{--} + d_{><}S_{-+}, \\ Y_{\ll} &= a_{\ll}S_{++} - b_{\ll}S_{+-} + c_{\ll}S_{--} - d_{\ll}S_{-+}, \\ Y_{<>} &= a_{<>}S_{++} + b_{<>}S_{+-} - c_{<>}S_{--} - d_{<>}S_{-+}. \end{aligned} \tag{39}$$

The first subscript in S corresponds to the symmetry with respect to the sign of Γ and the second one with respect to the direction of **B**. The subscript + indicates an even parity while the subscript − indicates an odd parity. In practice $w_{\gg} \simeq w_{><} \simeq w_{\ll} \simeq w_{<>}$ (with $w = a$, b, c, or d) depend on the experimental parameters. These values are not perfectly equal because the experimental parameters slightly vary from one shot to another, in particular the value of $|\Gamma|$.

Possible physical effects contributing to the different S signals are summarized in Table III. The S_{+-} signal does not appear in Eq. (36) but it has to be taken into account. It

TABLE III. Possible physical effects contributing to the S signals.

S signal	Physical effect
$S_{++}(t)$	$\Theta_F^2(t)$, $\Psi^2(t)$
$S_{+-}(t)$	**B** effects on photodiodes
$S_{--}(t)$	$\gamma\Theta_F(t)$
$S_{-+}(t)$	$\gamma\Psi(t)$

corresponds to a signal with odd parity towards the direction of **B** and even parity towards the sign of Γ that could be, for example, a spurious effect on the photodiodes $\mathrm{Ph_t}$ and $\mathrm{Ph_e}$ induced by the magnetic field.

Linear combinations of the Y signals allow the effects corresponding to the different symmetries to be highlighted:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{Y_{\gg} + Y_{><} + Y_{\ll} + Y_{<>}}{4},\\
&= \bar{a}S_{++} + \Delta b_1 S_{+-} + \Delta c_1 S_{--} + \Delta d_1 S_{-+},\\
J_2 &= \frac{Y_{\gg} - Y_{><} - Y_{\ll} + Y_{<>}}{4},\\
&= \bar{b}S_{+-} + \Delta a_2 S_{++} + \Delta c_2 S_{--} + \Delta d_2 S_{-+},\\
J_3 &= \frac{Y_{\gg} - Y_{><} + Y_{\ll} - Y_{<>}}{4},\\
&= \bar{c}S_{--} + \Delta a_3 S_{++} + \Delta b_3 S_{+-} + \Delta d_3 S_{-+},\\
J_4 &= \frac{Y_{\gg} + Y_{><} - Y_{\ll} - Y_{<>}}{4},\\
&= \bar{d}S_{-+} + \Delta a_4 S_{++} + \Delta b_4 S_{+-} + \Delta c_4 S_{--},
\end{aligned} \tag{40}$$

with $\Delta w_i \simeq 0$ ($w = a$, b, c, or d and $i = 1$, 2, 3, or 4). The signal we want to measure is $\Psi(t)$ which corresponds to the main part of $S_{-+}(t)$, and is thus proportional to $B_{\perp,\mathrm{f}}^2$. We can write

$$\begin{aligned}
J_4 &= \alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2 + \Delta a_4 S_{++} + \Delta b_4 S_{+-} + \Delta c_4 S_{--}\\
&\simeq \alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2.
\end{aligned} \tag{41}$$

We fit the function J_4 with $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$ to obtain α. The Cotton-Mouton constant k_{CM} finally depends on the measured experimental parameters as follows:

$$k_{\mathrm{CM}}(T,P) = \frac{\alpha}{4\pi\tau\Delta^{\mathrm{FSR}}}\frac{\lambda}{L_B}\frac{1}{\sin 2\theta_{\mathrm{P}}}. \tag{42}$$

The terms T and P correspond to the gas temperature and pressure.

C. Results

1. Our result

We have taken data for helium pressures ranging from 40×10^{-3} to 550×10^{-3} atm. Before injecting the gas, we pumped the vacuum chamber and the initial pressure was about 10^{-10} atm. Several series of four shots ($\Gamma > 0$, $B_\perp > 0$; $\Gamma > 0$, $B_\perp < 0$; $\Gamma < 0$, $B_\perp < 0$; and $\Gamma < 0$, $B_\perp > 0$) were acquired for each pressure. The vacuum chamber was pumped between two measurements at different pressures, which made them totally independent. The temperature of the gas during the magnetic pulse was measured previously [13] and was $T = (293 \pm 1)$ K. For this set of measurement the mean photon lifetime inside the cavity is $\tau = (1.06 \pm 0.02)$ ms, corresponding to a finesse of $438\,000 \pm 8000$.

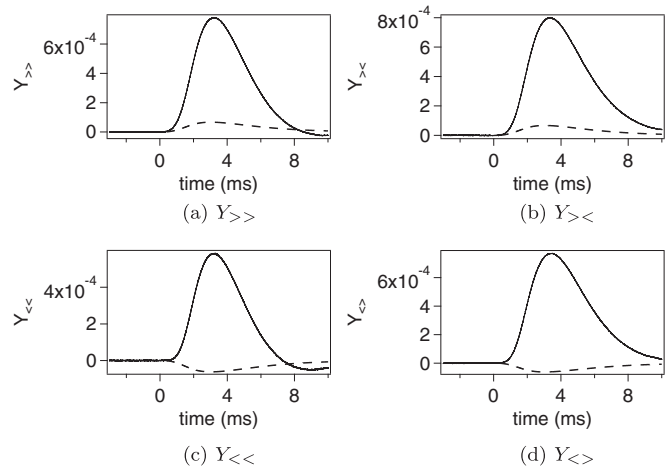


FIG. 9. Time evolution of the $Y(t)$ signals at a pressure of 550×10^{-3} atm. Solid black curve, experimental data; dashed curve, expected signal from the theoretical prediction considering only the Cotton-Mouton effect.

The signals $Y_{\gg}$, $Y_{><}$, $Y_{\ll}$, and $Y_{<>}$ obtained for a pressure of 550×10^{-3} atm are plotted in Fig. 9. We calculate the signals expected from the theoretical prediction considering only the Cotton-Mouton effect [5]. The theoretical signals (dashed line) are superimposed on the experimental data (solid line). One can see that the Y signals do not match at all with the expected signals. A more refined study is thus needed to extract the Cotton-Mouton effect. The Y signals are in fact linear combinations of different effects with different symmetries with respect to the sign of Γ and the direction of **B**, as predicted in Eqs. (39).

We then calculate the corresponding J signals, plotted in Fig. 10. In order to validate the physical origin of J_1, J_2, J_3, and J_4, we have studied the evolution of the values of their maxima as a function of pressure. They are shown in Fig. 11. In this range of pressure, helium can be considered as an ideal gas and the pressure dependence of the Faraday and Cotton-Mouton effects is thus linear. We see that the maxima of J_3 and

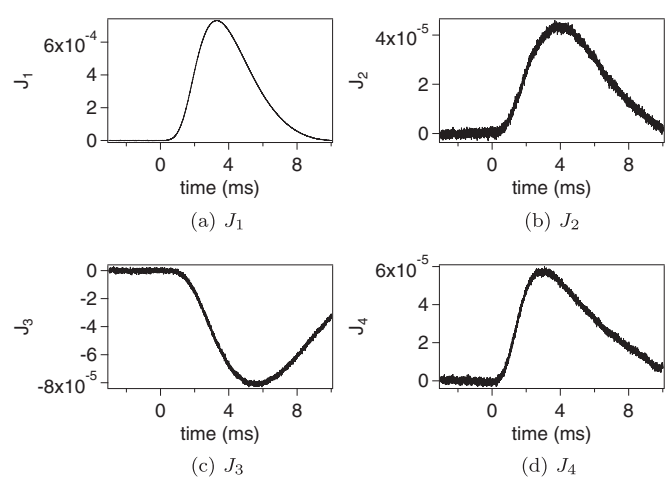
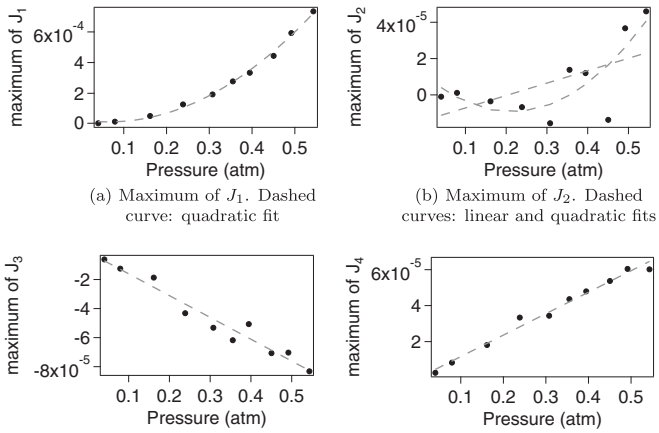


FIG. 10. Time evolution of the $J(t)$ signals at a pressure of 550×10^{-3} atm.



(a) Maximum of J_1. Dashed curve: quadratic fit

(b) Maximum of J_2. Dashed curves: linear and quadratic fits

(c) Maximum of J_3. Dashed curve: linear fit

(d) Maximum of J_4. Dashed curve: linear fit

FIG. 11. Evolution of the maximum of the $J(t)$ signals as a function of pressure.

J_4 are proportional to the pressure, which is consistent with the Faraday effect due to the residual longitudinal magnetic field $B_\parallel$ and the Cotton-Mouton effect due to the transverse magnetic field $B_\perp$. The maximum of J_1 increases with the square of the pressure. This confirms that this signal contains the terms Θ_F^2 and Ψ^2. The value of the J_2 maximum does not have a clear dependence on the pressure. Moreover the shape of $J_2(t)$ is not the same from one pressure to another. Finally, the J_2 signals can be fitted by a linear combination of J_1, J_3, and J_4. Thus, we deduce that J_2 is essentially a linear combination of the other signals, and that the signal $\overline{b}S_{+-}$ is almost zero.

Thus we can write

$$\begin{aligned} J_1 &\simeq \overline{a}S_{++}, \quad J_2 \simeq \Delta a_2 S_{++} + \Delta c_2 S_{--} + \Delta d_2 S_{-+}, \\ J_3 &\simeq \overline{c}S_{--}, \quad J_4 \simeq \overline{d}S_{-+}. \end{aligned} \tag{43}$$

The main contribution to J_4 comes from the Cotton-Mouton effect. We thus fit $J_4(t)$ with $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2(t)$. The value of k_{CM} is then calculated using Eq. (42).

For the lowest pressures, the Cotton-Mouton signal, proportional to $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$, also decreases. In this case, $\Delta a_4\, S_{++}$ and $\Delta c_4\, S_{--}$ are not completely negligible compared to $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$. This is shown in Fig. 12 where a typical signal obtained for a helium pressure of 162×10^{-3} atm is plotted. We see that the

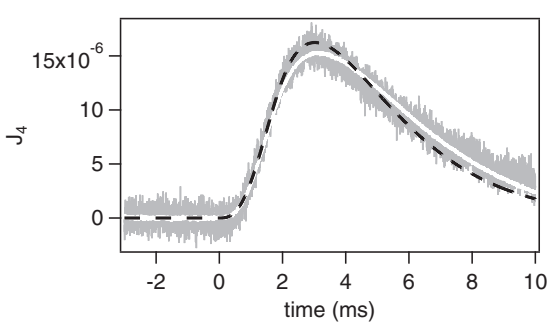


FIG. 12. Gray: Time evolution of J_4 for a pressure of 162×10^{-3} atm. Black dashed curve: fit with $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$. White solid curve: fit with $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2 + \alpha_1 J_1 + \alpha_3 J_3$, the value of α being fixed at the value obtained with the previous fit $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$.

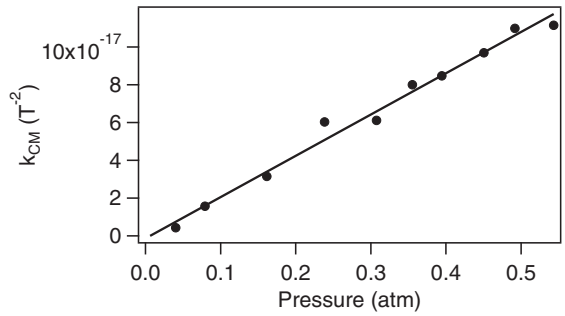


FIG. 13. Linear magnetic birefringence of helium gas as a function of pressure. The solid line corresponds to a linear fit of the experimental data.

fit of J_4 with $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$ does not perfectly match the experimental data. To obtain a better fit, we have to add parameters. To this end, we first fix the value of α at the value obtained with the first fit $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$. Then we fit J_4 with $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2 + \alpha_1 J_1 + \alpha_3 J_3$. J_2 is not used in this fit because, as we said before, it is mainly a linear combination of the other signals. One can see in Fig. 12 that this fit now matches the data much better. We can conclude that, in this case, we have

$$J_4 = \alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2 + \Delta a_4 S_{++} + \Delta c_4 S_{--} \tag{44}$$

$$= \alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2 + \frac{\Delta a_4}{\overline{a}} J_1 + \frac{\Delta c_4}{\overline{c}} J_3, \tag{45}$$

with $\alpha_2 = \Delta a_4/\overline{a}$ and $\alpha_3 = \Delta c_4/\overline{c}$. This fit procedure repeated for each pressure shows that we always have α_2 and α_3 lower than 0.1.

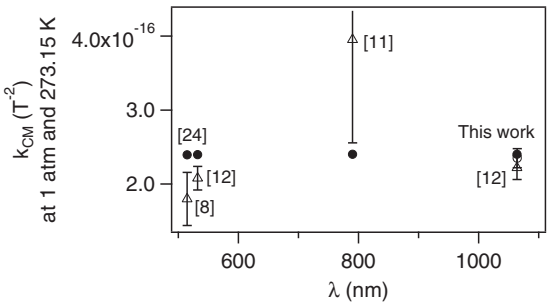
The value of k_{CM} as a function of the pressure is shown in Fig. 13. A linear fit of this data gives $k_{\mathrm{CM}} = (2.19 \pm 0.09) \times 10^{-16}\ \mathrm{T}^{-2}\ \mathrm{atm}^{-1}$ at $T = (293 \pm 1)$ K. Its k_{CM}-axis intercept is consistent with zero within the uncertainties.

The A-type uncertainties come from the fit and from the photon lifetime with a relative variation lower than 2%. The B-type uncertainties have been evaluated previously and detailed in Ref. [13]. They essentially come from the length of the magnetic field L_B. They are summarized in Table IV. We obtain for the value of the Cotton-Mouton constant at $T = (293 \pm 1)$ K

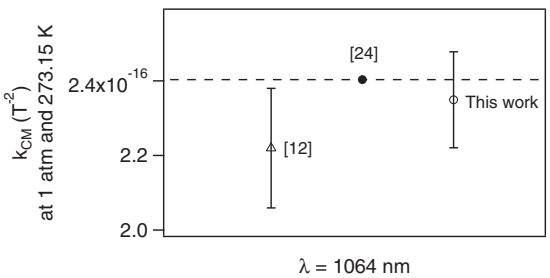
$$k_{\mathrm{CM}} = (2.19 \pm 0.12) \times 10^{-16}\ \mathrm{T}^{-2}\ \mathrm{atm}^{-1}. \tag{46}$$

TABLE IV. Parameters that have to be measured to infer the value of the Cotton-Mouton constant k_{CM} and their respective relative B-type uncertainties at 1σ.

Parameter	Typical value	Relative B-type uncertainty
α	10^{-5} rad T^{-2}	2.2×10^{-2}
Δ^{FSR}	65.996 MHz	3×10^{-4}
L_B	0.137 m	2.2×10^{-2}
λ	1064.0 nm	$<5 \times 10^{-4}$
$\sin 2\theta_{\mathrm{P}}$	1.0000	9×10^{-4}
Total		3.1×10^{-2}



(a) Reported values for λ ranging from 514.5 nm to 1064 nm



(b) Summary of the two values at λ = 1064 nm

FIG. 14. Comparison of reported values of the Cotton-Mouton effect of helium gas. △, experimental values of helium Cotton-Mouton constant reported in Refs. [8,11,12]; ○, our experimental value; • and dashed line, theoretical predictions reported in Ref. [24].

The value of k_{CM} normalized at 273.15 K is calculated with a scale law on the gas density:

$$k_{CM} = (2.35 \pm 0.13) \times 10^{-16}\ \mathrm{T}^{-2}\,\mathrm{atm}^{-1}, \tag{47}$$

at λ = 1064 nm, taking into account the uncertainty on the temperature.

2. *Comparison*

The value of the Cotton-Mouton effect in helium is calculated very precisely by *ab initio* quantum chemistry computational methods [5]. Theoreticians concentrate on the calculation of the hypermagnetizability anisotropy $\Delta\eta$ while experimentalists measure the birefringence $\Delta n_{CM} = k_{CM} B^2$. The Cotton-Mouton constant k_{CM} is linked to $\Delta\eta$ by [10]

$$k_{CM}\ (\mathrm{atm}^{-1}\,\mathrm{T}^{-2}) = \frac{6.18381 \times 10^{-14}}{T}\Delta\eta\ (\mathrm{a.u.}). \tag{48}$$

Few experiments have been realized to measure the Cotton-Mouton effect of helium. The results are summarized in Table V. The theoretical values correspond to those of Ref. [24]. The latter have been obtained using the full configuration-interaction (FCI) method and the most extended wave function basis. They are expected therefore to be very accurate.

Our result is compatible at better than 1σ with the theoretical prediction. In Fig. 14 we summarize the results for the Cotton-Mouton measurements at 273.15 K.

V. DISCUSSIONS AND CONCLUSION

In this paper we report a measurement of the Faraday and Cotton-Mouton effects at λ = 1064 nm. Both measurements have precisions that are of the order of a few percent, corresponding to one of the most precise birefringence measurements. Our measurements are also in agreement with theory at better than 1σ. It is worthwhile to stress that our Faraday measurement is absolute, while previous results [7,22] were given with respect to the Faraday effect of water.

TABLE V. Experimental and theoretical values of the Cotton-Mouton constant for helium gas. Values are normalized for a temperature of 273.15 K and a pressure of 1 atm. Uncertainties are given at 1σ.

Experimental results			Theoretical prediction [24]
Ref.	λ (nm)	$10^{16}k_{CM}$ (T^{-2})	$10^{16}k_{CM}$ (T^{-2})
[8]	514.5	1.80 ± 0.36	2.3959
[12]	532	2.08 ± 0.16	2.3966
[11]	790	3.95 ± 1.40	2.4018
[12]	1064	2.22 ± 0.16	2.4036
This work	1064	2.35 ± 0.13	2.4036

Our Cotton-Mouton measurement agrees well with the recent theoretical prediction obtained using theFCI method and the most extended wave function basis. This solves the problem of the discrepancy between experiment and theory originating from the first 1991 measurements and calculation [10] and that still persisted (see Table V).

The measurement of such small Cotton-Mouton effects, like that of helium, is important not only to test the quantum chemistry predictions. It is also a crucial test for the apparatuses devoted to the search for vacuum magnetic birefringence. Quantum electrodynamics predicts that a vacuum, like any other centrosymmetric medium, should exhibit a Cotton-Mouton effect [25]. This fundamental prediction has not yet been experimentally proven. Several attempts have been made and a few are still under way [25]. The vacuum Cotton-Mouton effect should be about eight orders of magnitude smaller than that of helium at 1 atm. Measurement of the Cotton-Mouton effect of helium is therefore compulsory in the search to improve the sensitivity of such apparatuses.

Our experimental method based on pulsed fields coupled to a Fabry-Pérot cavity seems very appropriate to reach the sensitivity needed for vacuum measurement. The measurements reported here validate the whole procedure of data taking and signal analysis that allow isolation of the main effect from the spurious ones due to signal symmetries. They are therefore a significant step in the road towards vacuum linear magnetic birefringence.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank all the members of the BMV Collaboration, and in particular J. Béard, J. Billette, P. Frings, B. Griffe, J. Mauchain, M. Nardone, J.-P. Nicolin, and G. Rikken for strong support. We are also indebted to the whole technical staff of LNCMI. We are grateful to A. Rizzo for discussions and useful suggestions on the manuscript, and T. Achilli for contributing to the Faraday measurements as a summer student. We acknowledge the support of the Fondation pour la Recherche IXCORE and the ANR-Programme non Thématique (Grant No. ANR-BLAN06-3-139634).

[1] M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. London **136**, 1 (1846).
[2] J. Kerr, Br. Assoc. Rep. 568 (1901).
[3] Q. Majorana, Rend. Accad. Lincei **11**, 374 (1902); C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Paris **135**, 159 (1902).
[4] A. Cotton and H. Mouton, C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. **141**, 317 (1905); **142**, 203 (1906); **145**, 229 (1907); C. R. Hebd. Séances Ann. Chem. Phys. **11**, 145 (1907).
[5] A. Rizzo and S. Coriani, Adv. Quantum Chem. **50**, 143 (2005).
[6] U. Ekström, P. Norman, and A. Rizzo, J. Chem. Phys. **122**, 074321 (2005).
[7] L. R. Ingersoll and D. H. Liebenberg, J. Opt. Soc. Am. **46**, 538 (1956).
[8] R. Cameron, G. Cantatore, A. C. Melissinos, Y. Semertzidis, H. Halama, D. Lazarus, A. Prodell, F. Nezrick, P. Micossi, C. Rizzo, G. Ruoso, and E. Zavattini, Phys. Lett. A **157**, 125 (1991).
[9] M. J. Jamieson, Chem. Phys. Lett. **183**, 9 (1991).
[10] C. Rizzo, A. Rizzo, and D. M. Bishop, Int. Rev. Phys. Chem. **16**, 81 (1997).
[11] K. Muroo, N. Ninomiya, M. Yoshino, and Y. Takubo, J. Opt. Soc. Am. B **20**, 2249 (2003).
[12] M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. Di Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, V. Lozza, E. Milotti, E. Polacco, G. Raiteri, G. Ruoso, E. Zavattini, and G. Zavattini, Chem. Phys. Lett. **471**, 322 (2009).
[13] P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, and C. Rizzo, Phys. Rev. A **85**, 013837 (2012).
[14] R. Battesti, B. Pinto Da Souza, S. Batut, C. Robilliard, G. Bailly, C. Michel, M. Nardone, L. Pinard, O. Portugall, G. Trénec, J.-M. Mackowski, G. L. Rikken, J. Vigué, and C. Rizzo, Eur. Phys. J. D **46**, 323 (2008).
[15] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. Ford, A. Munley, and H. J. Ward, Appl. Phys. B: Photophys. Laser Chem. **31**, 97 (1983).
[16] S. Batut, J. Mauchain, R. Battesti, C. Robilliard, M. Fouché, and O. Portugall, IEEE Trans. Appl. Supercond. **18**, 600 (2008).
[17] F. Bielsa, A. Dupays, M. Fouché, R. Battesti, C. Robilliard, and C. Rizzo, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **97**, 457 (2009).
[18] D. Jacob, M. Vallet, F. Bretenaker, A. Le Floch, and M. Oger, Opt. Lett. **20**, 671 (1995).
[19] F. Brandi, F. Della Valle, A. M. De Riva, P. Micossi, F. Perrone, C. Rizzo, G. Ruoso, and G. Zavattini, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **65**, 351 (1997).
[20] P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, F. Bielsa, J. Mauchain, and C. Rizzo, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **100**, 803 (2010).
[21] E. Verdet, C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. **39**, 548 (1854).
[22] L. R. Ingersoll and D. H. Liebenberg, J. Opt. Soc. Am. **44**, 566 (1954).
[23] I. M. Savukov, Phys. Rev. A **85**, 052512 (2012).
[24] S. Coriani, C. Hättig, and A. Rizzo, J. Chem. Phys. **111**, 7828 (1999).
[25] R. Battesti and C. Rizzo, Rep. Prog. Phys. **76**, 016401 (2013).

Annexe E

Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields : status of the BMV experiment

A. Cadène, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, et C. Rizzo,
Eur. Phys. J. D **68**, (2014).

Eur. Phys. J. D (2014) 68: 16
DOI: 10.1140/epjd/e2013-40725-9

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D

Regular Article

Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields: status of the BMV experiment

Agathe Cadène, Paul Berceau, Mathilde Fouché, Rémy Battesti, and Carlo Rizzo[a]

Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses (UPR 3228, CNRS-UPS-UJF-INSA), 31400 Toulouse Cedex, France

Received 18 November 2013
Published online 23 January 2014 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2014

Abstract. We present the current status of the BMV experiment. Our apparatus is based on an up-to-date resonant optical cavity coupled to a transverse magnetic field. We detail our data acquisition and analysis procedure which takes into account the symmetry properties of the raw data with respect to the orientation of the magnetic field and the sign of the cavity birefringence. The measurement result of the vacuum magnetic linear birefringence k_{CM} presented in this paper was obtained with about 200 magnetic pulses and a maximum field of 6.5 T, giving a noise floor of about 8×10^{-21} T^{-2} at 3σ confidence level.

1 Introduction

It is known since the beginning of the 20th century that any medium shows a linear birefringence in the presence of a transverse external magnetic field $\boldsymbol{B}$. This effect is usually known as the Cotton-Mouton (CM) effect (see Ref. [1] and references therein). The existence of such a magnetic linear birefringence has also been predicted in vacuum around 1970 in the framework of quantum electrodynamics (QED) [2,3]. It is one of the non-linear optical effects described by the Heisenberg-Euler effective lagrangian (see Ref. [4] and references therein) and it can be seen as the result of the interaction of the external magnetic field with quantum vacuum fluctuations. In a vacuum therefore the index of refraction $n_{\parallel}$ for light polarized parallel to $\boldsymbol{B}$ is expected to be different from the index of refraction $n_{\perp}$ for light polarized perpendicular to $\boldsymbol{B}$ such that [4]:

$$\Delta n_{\mathrm{CM}} = n_{\parallel} - n_{\perp}, \tag{1}$$

$$= k_{\mathrm{CM}} B^2. \tag{2}$$

At the first order in the fine structure constant α, k_{CM} can be written as:

$$k_{\mathrm{CM}} = 2\alpha^2\hbar^3/15\mu_0 m_{\mathrm{e}}^4 c^5, \tag{3}$$

with $\hbar$ the Planck constant over 2π, m_{e} the electron mass, c the speed of light in vacuum, and μ_0 the magnetic constant. Using the CODATA recommended values for fundamental constants [5], one obtains:

$$k_{\mathrm{CM}} \sim 4.0 \times 10^{-24}\ \mathrm{T}^{-2}. \tag{4}$$

In spite of several experimental attempts, the experimental proof of such a very fundamental QED prediction is still lacking [4]. All recent experiments, both completed or running, measure Δn_{CM} via the ellipticity ψ induced on a linearly polarized light propagating in the birefringent vacuum:

$$\psi = \pi k_{\mathrm{CM}} \frac{L_B}{\lambda} B^2 \sin 2\theta_{\mathrm{P}}, \tag{5}$$

where λ is the light wavelength, L_B is the path length in the magnetic field, and $\theta_{\mathrm{P}} = 45°$ is the angle between the light polarization and the birefringence axis. This equation clearly shows that the critical experimental parameter is the product $B^2 L_B$. In order to increase the ellipticity to be measured, one usually uses an optical cavity to store light in the magnetic field region as long as possible. The total acquired ellipticity Ψ is linked to the ellipticity ψ acquired in the absence of cavity and depends on the cavity finesse F as:

$$\Psi = \frac{2F}{\pi}\psi. \tag{6}$$

After the theoretical calculations in the 70s, a first measurement of the k_{CM} value was published by the BFRT collaboration [6]. It was based on a superconducting magnet providing a maximum field of 3.9 T, and a multipass optical cavity. Spurious signals were always present (see table V(b) in [6]). Final results gave $k_{\mathrm{CM}} = (2.2 \pm 0.8) \times 10^{-19}$ T^{-2} at 3σ confidence level for 34 refections inside the cavity, and $k_{\mathrm{CM}} = (3.2 \pm 1.3) \times 10^{-19}$ T^{-2} for 578 reflections. In 2008 a new measurement was published by the PVLAS collaboration using a Fabry-Pérot optical cavity and a superconducting magnet providing a 2.3 T field: $k_{\mathrm{CM}} = (1.4 \pm 2.4) \times 10^{-20}$ T^{-2} at 3σ [7]. The same experiment at 5 T gave $k_{\mathrm{CM}} = (2.7 \pm 1.2) \times 10^{-20}$ T^{-2} at 3σ. More recently a new version of the PVLAS apparatus based on two 2.5 T permanent magnets and a Fabry-Pérot optical cavity reached a noise floor corresponding to $k_{\mathrm{CM}} = 1.3 \times 10^{-20}$ T^{-2} at 3σ, but "only when no

[a] e-mail: carlo.rizzo@lncmi.cnrs.fr

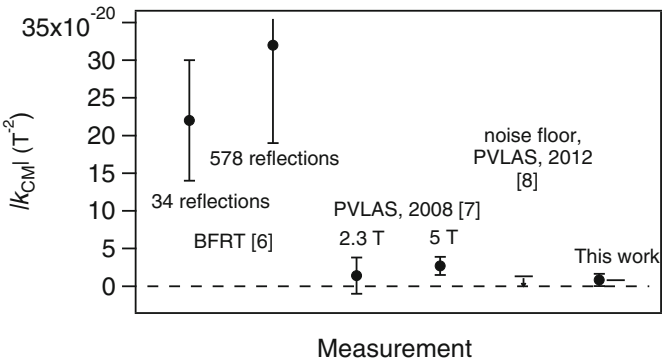


Fig. 1. Comparison of reported absolute values of the vacuum magnetic linear birefringence and their uncertainties represented at 3σ.

spurious signal was observed" [8]. All over our paper, we give error bars at 3σ corresponding to a confidence level of 99.8%, that usually indicates an evidence for a non-zero signal. All these measurements are summarized in Figure 1. This clearly shows that vacuum CM measurements are true experimental challenges and that one has to focus not only on getting the best optical sensitivity and maximizing the signal to be measured, but also on minimizing all the unwanted systematic effects by decoupling the apparatus from their sources and by performing an appropriate data analysis.

In this paper we present a measurement of k_{CM} obtained using the first generation setup of the BMV *(Biréfringence Magnétique du Vide)* experiment at the National High Magnetic Field Laboratory of Toulouse, France – (LNCMI-T) [9]. The novelty of this experiment is the use of pulsed magnetic fields. This method allows to provide the highest magnetic fields in terrestrial laboratories without destroying the coil itself [4]. Our apparatus is also based on the use of an infrared Fabry-Pérot cavity among the sharpest in the world [10]. We calibrated our experiment using nitrogen gas [10], and recently published a high precision measurement of the Cotton-Mouton effect of helium gas compatible with the theoretical prediction [11]. We present our data acquisition and analysis procedure that takes into account the symmetry properties of the raw data with respect to the orientation of the magnetic field and the sign of the cavity birefringence. The measurement result of the vacuum magnetic linear birefringence k_{CM} presented in this paper was obtained with about 200 magnetic pulses and a maximum field of 6.5 T. It corresponds to the best noise floor ever reached. It is therefore a clear validation of our innovative experimental method.

2 Experimental setup

2.1 Apparatus

Our experimental setup is described in reference [11]. As shown in Figure 2, 30 mW of a linearly polarized Nd:YAG laser beam ($\lambda = 1064$ nm) goes through an acousto-optic modulator (AOM) used in double pass for an adjustment

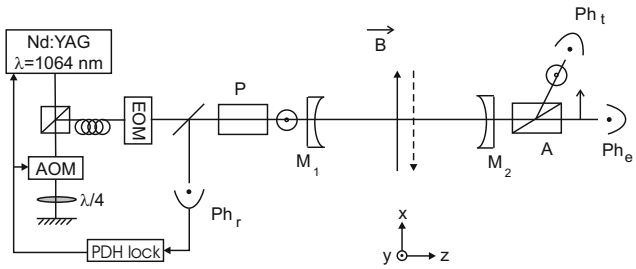


Fig. 2. Experimental setup. EOM, electro-optic modulator; AOM, acousto-optic modulator; PDH, Pound-Drever-Hall; Ph, photodiode; P, polarizer; A, analyzer. See text for more details.

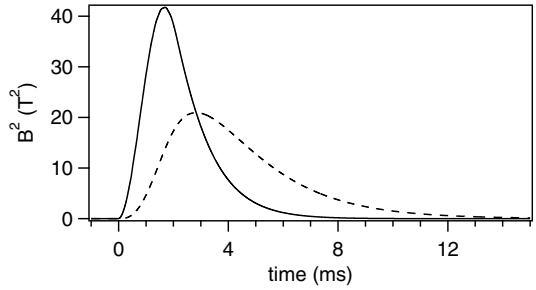


Fig. 3. Square of the magnetic field amplitude as a function of time for a maximum field of 6.5 T. Solid black curve, B^2; dashed curve, B_{f}^2.

of the laser frequency. It is then injected into a monomode optical fiber before entering a high finesse Fabry-Pérot cavity of length $L_{\mathrm{c}} = 2.27$ m, consisting of the mirrors M_1 and M_2. This corresponds to a cavity free spectral range of $\Delta^{\mathrm{FSR}} = c/2L_{\mathrm{c}} = 65.996$ MHz. The laser passes through an electro-optic modulator (EOM) creating sidebands at 10 MHz. We analyze the beam reflected by the cavity on the photodiode $\mathrm{Ph_r}$. This signal is used to lock the laser frequency to the cavity resonance frequency using the Pound-Drever-Hall method [12], via the acousto-optic modulator and the piezoelectric and Peltier elements of the laser.

To measure the ellipticity induced by the Cotton-Mouton effect one needs a transverse magnetic field as high as possible. This is fulfilled using pulsed fields delivered by one magnet, named X-coil, especially designed in our laboratory. The principle of this magnet and its properties are described in details in references [9,13]. It can provide a maximum field of more than 14 T over an equivalent length L_B of 0.137 m [10]. Data have been taken with a maximum magnetic field of 6.5 T reached within 1.70 ms while the total duration of a pulse is less than 10 ms as shown in Figure 3. Moreover, we can remotely switch the high-voltage connections to reverse $\boldsymbol{B}$ in order to set it parallel or antiparallel to the x direction. The maximum repetition rate is 6 pulses per hour.

We infer the cavity finesse from the measurement of the photon lifetime τ [10]. Its value is regularly checked during data taking and we get $\tau = 1.07$ ms. The corresponding finesse is:

$$F = \frac{\pi c \tau}{L_{\mathrm{c}}}. \tag{7}$$

We get $F = 445\,000$ with a relative variation that does not exceed 6% at the 3σ confidence level. This corresponds to a cavity linewidth $\Delta\nu = c/2FL_c$ of 148 Hz. This is one of the sharpest infrared cavity in the world [10].

Before entering the Fabry-Pérot cavity, light is polarized by the polarizer P. The beam transmitted by the cavity is then analyzed by the analyzer A crossed at maximum extinction. We extract both polarizations: parallel and perpendicular to P. The extraordinary ray, whose polarization is perpendicular to the incident polarization, is detected by the photodiode $\mathrm{Ph_e}$ (power I_e), while the ordinary ray, whose polarization is parallel to the incident polarization, is detected by $\mathrm{Ph_t}$ (power I_t).

All the optical devices from the polarizer to the analyzer are placed in an ultrahigh-vacuum chamber. During operation, the pressure inside the UHV vessel was about 10^{-7} mbar. We have monitored the vacuum quality with a residual gas analyzer. Residual gases can cause a measurable CM effect. Most important contributions come from N_2 and O_2 leading to a k_{CM} of 1.5×10^{-23} T^{-2}. Moreover dielectric mirrors also induce a CM effect corresponding to an ellipticity of 8×10^{-10} rad T^{-2} per reflection, as reported in reference [14]. The stray transverse magnetic field at the mirror position is smaller than 150 μT, giving in our case $k_{CM} < 1 \times 10^{-24}$ T^{-2}. We expect these CM effects to be smaller than the measured noise floor.

2.2 Signals

The ellipticity $\Psi(t)$ induced by the transverse magnetic field is related to the ratio of the extraordinary and ordinary powers as follows:

$$\frac{I_e(t)}{I_{t,f}(t)} = \sigma^2 + [\Gamma + \Psi(t)]^2, \simeq \sigma^2 + \Gamma^2 + 2\Gamma\Psi(t) \text{ for } \Psi \ll \Gamma, \quad (8)$$

with σ^2 the polarizer extinction ratio and Γ the total static ellipticity. This static ellipticity is due to the mirrors' intrinsic phase retardation [15]. Each mirror can be regarded as a wave plate. The combination of both wave plates gives a single wave plate with a total phase retardation and an axis orientation that depend on each mirror phase retardation and on their relative orientation [16,17]. Thus, we adjust the value of Γ by rotating the mirrors M_1 and M_2 around the z-axis corresponding to the axis of light propagation.

To measure the polarizer extinction ratio, we first set $\Gamma = 0$, with no magnetic field. We get $I_e/I_{t,f} = \sigma^2 \sim 7 \times 10^{-7}$. Then, to reach the best sensitivity, we need $\Gamma^2 \sim \sigma^2$ [9]. Starting from $\Gamma = 0$ and rotating M_1 in the clockwise or counterclockwise direction, we choose the value of Γ, as well as its sign determined by CM measurements in nitrogen and helium gas. The measurement of σ^2 and the adjustment of the value and sign of Γ are done before each magnetic pulse.

Due to the photon lifetime, the cavity acts as a first order low pass filter, as explained in details in reference [18]. Its complex response function $H(\nu)$ is given by:

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + i\frac{\nu}{\nu_c}}, \quad (9)$$

with ν the frequency and $\nu_c = 1/4\pi\tau \simeq 74$ Hz the cavity cutoff frequency. This filtering has to be taken into account in particular for the time dependent magnetic field applied inside the Fabry-Pérot cavity. The ellipticity Ψ induced by the external magnetic field is thus proportional to B_f^2:

$$\Psi(t) = \alpha B_f^2(t), \quad (10)$$

where the filtered field B_f^2 is calculated from B^2 taking into account the cavity filtering. The time profile of B_f^2 is plotted in Figure 3 with the dashed curve. In particular, the cavity filtering induces an attenuation and a shift of the maximum. The cavity filtering has also to be applied to I_t as explained in details in references [11,18].

The calculated signals used for the analysis are described in details in reference [11]. In order to extract the ellipticity $\Psi(t)$ from equation (8), we calculate the following $Y(t)$ signal after each pulse:

$$Y(t) = \frac{\frac{I_e(t)}{I_{t,f}(t)} - I_{dc}}{2\,|\,\Gamma\,|}, \quad (11)$$

$$\simeq \gamma\Psi(t), \quad (12)$$

where γ corresponds to the sign of Γ. We calculate the static signal $I_{dc} = \sigma^2 + \Gamma^2$ before the pulse as follows:

$$I_{dc} = \left\langle \frac{I_e(t)}{I_{t,f}(t)} \right\rangle \Bigg|_{t_\Gamma < t < 0}, \quad (13)$$

where t_Γ corresponds to the beginning of the analysis and $t = 0$ to the beginning of the applied magnetic field. The absolute value of the cavity ellipticity is measured a few milliseconds before each magnetic pulse thanks to the following equation:

$$|\Gamma| = \sqrt{\left\langle \frac{I_e(t)}{I_{t,f}(t)} \right\rangle \Bigg|_{t_\Gamma < t < 0} - \sigma^2}. \quad (14)$$

Signals $Y(t)$ are collected for both signs of Γ and for both directions of $\boldsymbol{B}$: parallel to x is denoted as >0 and antiparallel is denoted as <0. This gives four data series: ($\Gamma > 0$, $B > 0$), ($\Gamma > 0$, $B < 0$), ($\Gamma < 0$, $B < 0$) and ($\Gamma < 0$, $B > 0$). For each series, signals calculated with equation (11) are averaged and denoted as $Y_{\gg}$, $Y_{><}$, $Y_{\ll}$ and $Y_{<>}$. The first subscript corresponds to $\Gamma > 0$ or < 0 and the second one corresponds to $\boldsymbol{B}$ parallel or antiparallel to x.

3 Data analysis and results

The raw signals, such as $I_t(t)$, $I_e(t)$, $B(t)$ or the cavity locking signal, are recorded 25 ms before the beginning of the magnetic field and 25 ms after. A typical cavity locking

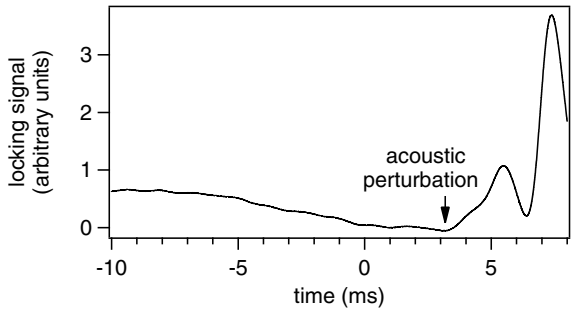


Fig. 4. Time evolution of the locking signal during a magnetic pulse. The magnetic field is applied at $t = 0$ ms.

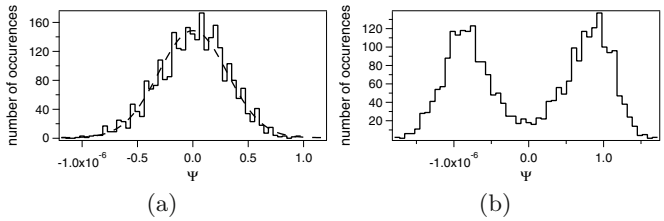


Fig. 5. Typical histogram of $\Psi(t)$ before the magnetic pulse. (a) The histogram can be fitted by a gaussian function (dashed curve): the shot is selected. (b) Rejected shot.

signal is plotted in Figure 4. We clearly see a perturbation which begins at about 3.2 ms. This corresponds to the acoustic perturbation triggered at $t = 0$ by the magnetic pulse. This perturbation travels trough the air to the mirror mounts. We have confirmed the arrival time on the mirror mounts with accelerometers. This perturbation induces an ellipticity noise which degrades our sensitivity. We have thus decided to stop the analysis at $t = 3.1$ ms. Symmetrically, we start the analysis at $t_\Gamma = -3.1$ ms. It also allows to avoid drifts and long time variations of Γ.

For each pulse applied in vacuum, we first calculate the $|\Gamma|$ value following equation (14). To check that this corresponds to a meaningful value, we plot the histogram of the following signal for $t_\Gamma < t < 0$:

$$\Psi(t) = \sqrt{\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} - \sigma^2} - \Gamma. \tag{15}$$

This corresponds to 3100 values acquired every 1 μs. With white noise and because no induced ellipticity is present at $t < 0$, the histogram is centered on 0 and corresponds to a gaussian distribution, as shown in Figure 5a.

However, some of the histograms cannot be fitted by a gaussian function, as shown in Figure 5b. The main origin of this type of distributions is mechanical oscillations of the setup induced by the environment and leading to static ellipticity fluctuations, event if the magnetic field is not applied. These mechanical oscillations can be directly observed on the power spectral density (PSD) of the ellipticity Ψ in the absence of the magnetic field, as shown in Figure 6. In the case corresponding to Figure 5b, we cannot give a statistical and significant value of Γ. The

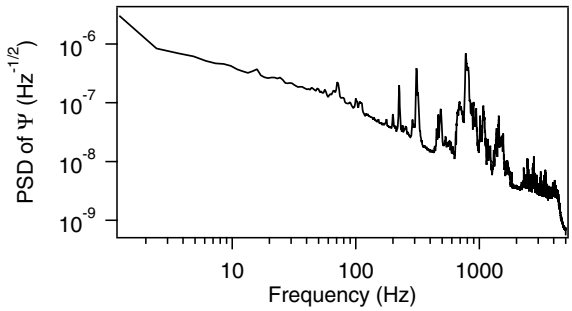


Fig. 6. Power spectral density of Ψ in the absence of the magnetic field. We observe the different mechanical resonances of the setup.

corresponding shots are thus rejected. Finally we selected 101 pulses. It should be noted that this selection is performed for $t < 0$, thus before the magnetic pulse. We do not select or reject pulses with an analysis on the signal we want to measure, thus induced by the magnetic field at $t > 0$.

From the 101 selected pulses, we calculate the signals $Y_{\gg}$, $Y_{><}$, $Y_{\ll}$, and $Y_{<>}$, denoted by Y_j with $j = \gg, ><, \gg, <>$. As explained in Section 2.2, they correspond to the average of the $Y(t)$ signals calculated with equation (11) for each of the four series. The Y_j uncertainties are calculated at each time t_i, $\Delta Y_j(t_i) = \sigma_j(t_i)/\sqrt{N_j}$, with $\sigma_j(t_i)$ the standard deviation of the $Y_j(t_i)$ distribution and N_j the number of shots for the j series.

As explained in details in reference [11], one has to consider systematic effects that mimic the CM effect we want to measure. We thus analyze our data following a general expression taking into account the symmetry properties of Y_j towards experimental parameters:

$$\begin{aligned}
Y_{\gg} &= a_{\gg}S_{++} + b_{\gg}S_{+-} + c_{\gg}S_{--} + d_{\gg}S_{-+},\\
&= a_{\gg}S_{++} + b_{\gg}S_{+-} + c_{\gg}S_{--} + \Psi,\\
Y_{><} &= a_{><}S_{++} - b_{><}S_{+-} - c_{><}S_{--} + d_{><}S_{-+},\\
&= a_{><}S_{++} - b_{><}S_{+-} - c_{><}S_{--} + \Psi,\\
Y_{\ll} &= a_{\ll}S_{++} - b_{\ll}S_{+-} + c_{\ll}S_{--} - d_{\ll}S_{-+},\\
&= a_{\ll}S_{++} - b_{\ll}S_{+-} + c_{\ll}S_{--} - \Psi,\\
Y_{<>} &= a_{<>}S_{++} + b_{<>}S_{+-} - c_{<>}S_{--} - d_{<>}S_{-+},\\
&= a_{<>}S_{++} + b_{<>}S_{+-} - c_{<>}S_{--} - \Psi.
\end{aligned}$$

The S functions correspond to a given symmetry towards the sign of Γ and the direction of $\boldsymbol{B}$. The first subscript $+$ (resp. $-$) indicates an even (resp. odd) parity with respect to the sign of Γ. The same convention is used for the second subscript corresponding to $\boldsymbol{B}$. Each S function has a different physical origin which are summarized in Table 1. CM effect signal contributes to S_{-+} since it depends on the cavity birefringence Γ and on the square of the magnetic field amplitude as shown in equations (5) and (12). We can thus replace dS_{-+} by $\gamma\Psi$.

Table 1. Possible physical effects contributing to the S signals. The $\Theta_{\rm F}$ signal corresponds to a polarization rotation angle due to the circular birefringence induced by a longitudinal magnetic field (Faraday effect).

S signal	Physical effect
$S_{++}(t)$	g $\Theta_{\rm F}^2(t)$, $\Psi^2(t)$
$S_{+-}(t)$	$\boldsymbol{B}$ effects on photodiodes
$S_{--}(t)$	$\gamma\Theta_{\rm F}(t)$
$S_{-+}(t)$	$\gamma\Psi(t)$

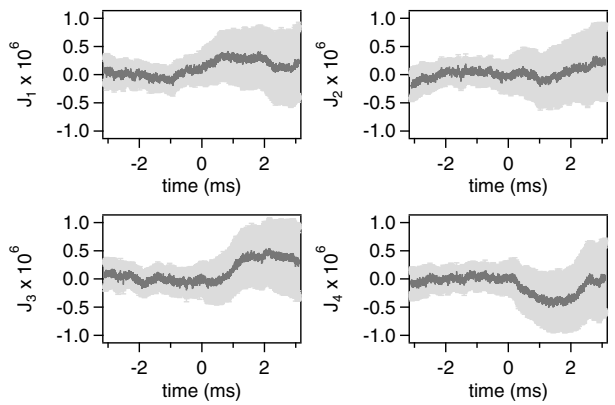


Fig. 7. Time evolution of J_1, J_2, J_3 and J_4 (dark grey curve) and their uncertainties at 3σ confidence level (light grey).

The S functions are then extracted with a linear combination of $Y_{\rm j}$ as follows:

$$\begin{aligned}
J_1 &\equiv \frac{Y_{\gg}+Y_{><}+Y_{\ll}+Y_{<>}}{4},\\
&= \overline{a}\ S_{++}+\Delta b_1\ S_{+-}+\Delta c_1\ S_{--}+\Delta d_1\ S_{-+},\\
J_2 &\equiv \frac{Y_{\gg}-Y_{><}-Y_{\ll}+Y_{<>}}{4},\\
&= \Delta a_2\ S_{++}+\overline{b}\ S_{+-}+\Delta c_2\ S_{--}+\Delta d_2\ S_{-+},\\
J_3 &\equiv \frac{Y_{\gg}-Y_{><}+Y_{\ll}-Y_{<>}}{4},\\
&= \Delta a_3\ S_{++}+\Delta b_3\ S_{+-}+\overline{c}\ S_{--}+\Delta d_3\ S_{-+},\\
J_4 &\equiv \frac{Y_{\gg}+Y_{><}-Y_{\ll}-Y_{<>}}{4},\\
&= \Delta a_4\ S_{++}+\Delta b_4\ S_{+-}+\Delta c_4\ S_{--}+\overline{d}\ S_{-+}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

$J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ and $J_4(t)$ are plotted in Figure 7. Their uncertainties are calculated from the $Y_{\rm j}$ uncertainties. The weighting parameters a, b, c and d depend on the experimental adjustment from pulse to pulse and from day to day. Their relative variations are small: $\Delta a/\overline{a}$, $\Delta b/\overline{b}$, $\Delta c/\overline{c}$, $\Delta d/\overline{d} \ll 1$. Δa, Δb and Δc are mainly due to the Γ variation from one shot to another and we can precisely calculate them since Γ is measured for each shot. We obtain $\Delta a_4/\overline{a} = 5.97\times10^{-2}$, $\Delta b_4/\overline{b} = -7.67\times10^{-2}$ and $\Delta c_4/\overline{c} = -8.27\times10^{-2}$. These values are of the same order of magnitude as the one obtained during the CM measurement of helium gaz [11]. Δd is independent of the Γ variation. It mainly comes from a variation of the magnetic field from one pulse to another. As the B relative variation is small compared to the Γ relative variation we consider $\Delta d \simeq 0$. The variation of Ψ is thus neglected.

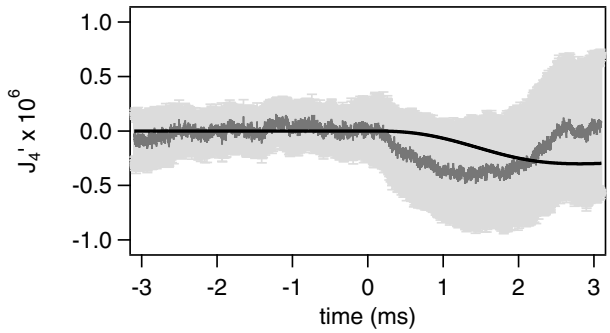


Fig. 8. Dark grey curve: time evolution of J_4' and its 3σ uncertainties (light grey). Black curve: $\alpha B_{\rm f}^2$ function superimposed to guide the eyes.

We thus write:

$$\begin{aligned}
J_1 &\simeq \overline{a}\ S_{++},\\
J_2 &\simeq \overline{b}\ S_{+-},\\
J_3 &\simeq \overline{c}\ S_{--},\\
J_4 &\simeq \frac{\Delta a_4}{\overline{a}}J_1+\frac{\Delta b_4}{\overline{b}}J_2+\frac{\Delta c_4}{\overline{c}}J_3+\Psi. \qquad (17)
\end{aligned}$$

We then calculate:

$$\begin{aligned}
J_4' &\equiv J_4-\left[\frac{\Delta a_4}{\overline{a}}J_1+\frac{\Delta b_4}{\overline{b}}J_2+\frac{\Delta c_4}{\overline{c}}J_3\right],\\
&\simeq \Psi, \qquad (18)
\end{aligned}$$

which corresponds to the Cotton-Mouton signal. It is plotted in Figure 8 together with a $\alpha B_{\rm f}^2$ function superimposed to guide the eyes. Nevertheless, we see that the major component of J_4' is not $\alpha B_{\rm f}^2$ but a supplementary systematic effect.

As said before, the setup is subject to several mechanical resonances which can be excited both by the environment and the magnetic field. The latter could thus trigger a mechanical oscillation of the setup at $t=0$. We try to fit J_4' by a sine function starting at $t=0$. The fit gives a frequency of (180 ± 3) Hz and it is superimposed to J_4' in Figure 9a. We finally fit the residues by $\alpha B_{\rm f}^2$. The fit is superimposed to the residues of J_4' in Figure 9b. The Cotton-Mouton constant $k_{\rm CM}$ is deduced from the measured experimental parameters as follows [10]:

$$k_{\rm CM} = \frac{\alpha}{4\pi\tau\Delta^{\rm FSR}}\frac{\lambda}{L_B}\frac{1}{\sin 2\theta_{\rm P}}. \qquad (19)$$

We obtain:

$$k_{\rm CM} = (-0.9\pm6.2)\times10^{-21}\,{\rm T}^{-2}, \qquad (20)$$

at 3σ confidence level. As said before we give error bars at 3σ corresponding to a confidence level of 99.8%, that usually indicates an evidence for a non-zero signal. The uncertainty takes into account the A-type and B-type uncertainties. The A-type uncertainties come from the fit

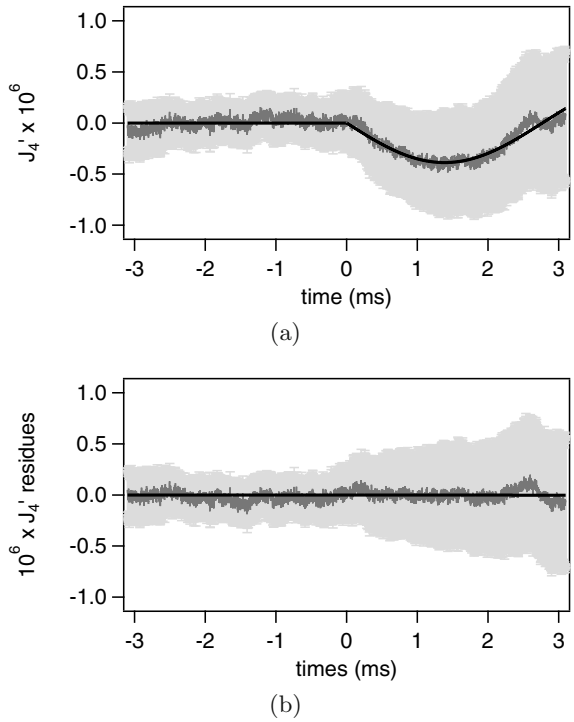


Fig. 9. Time evolution of J_4' and its residues (dark grey). The 3σ uncertainties are superimposed in light grey. (a) Time evolution of J_4'. Black curve: Fit with a sine function at 180 Hz. (b) Time evolution of the residues of J_4'. Black curve: Fit with αB_{f}^2.

and from the photon lifetime with a relative variation lower than 6% at 3σ. The B-type uncertainties have been evaluated previously and detailed in reference [10]. They essentially come from the length of the magnetic field L_B with a relative uncertainty of 6.6% at 3σ. The value of equation (20) gives an estimate of our noise floor, which is half the one of the PVLAS collaboration in 2012 obtained with an integration time of 8192 s [8].

In order to assess more precisely the physical origin of the systematic effect, we zoom in the power spectral density of Ψ, depicted in Figure 6, on the frequencies around 180 Hz. We find several resonances at 177 Hz, 200 Hz and above. The signal J_4' is then fitted by a sine function but with the frequency fixed to each of the resonance frequencies. The best fit, corresponding to the best χ^2, is obtained for 177 Hz, which is compatible with the frequency given by the previous fit. Fitting the residues by αB_{f}^2 gives our final value for the CM constant:

$$k_{\mathrm{CM}} = (5.1 \pm 6.2) \times 10^{-21}\,\mathrm{T}^{-2}, \tag{21}$$

at 3σ confidence level.

On the other hand, if we fit the data corresponding to Figure 8 with the sum of the sine function of 177 Hz frequency and αB_{f}^2, we obtain:

$$k_{\mathrm{CM}} = (8.3 \pm 8.0) \times 10^{-21}\,\mathrm{T}^{-2}, \tag{22}$$

at 3σ confidence level.

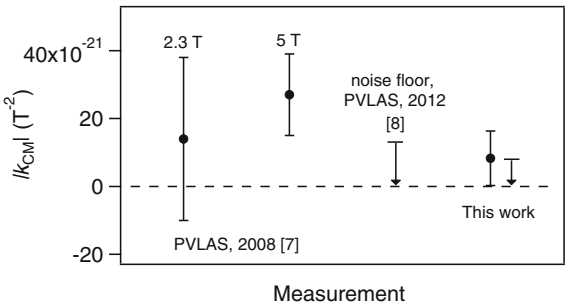


Fig. 10. Comparison of the latest absolute reported values of the vacuum CM effect. Error bars are given at 3σ. This work: black dot, value obtain with the fit combining the sine function at 177 Hz and the αB_{f}^2 function; arrow, noise floor of $8.0 \times 10^{-21}\,\mathrm{T}^{-2}$.

All this shows that our noise floor given by the uncertainties is of a few $10^{-21}\,\mathrm{T}^{-2}$ while the central value depends on the fitting procedure. Establishing what is the most statistically appropriate fitting procedure is out of the scope of this paper. Our goal is to report on our noise floor and to highlight the main contributions to systematic effects in order to improve the overall sensitivity of the next version of the apparatus.

Nevertheless, for the sake of comparison we show in Figure 10 our typical value given in equation (22) together with the already published values. We see that our value is slightly better than the previous one.

4 Conclusions and perspectives

We presented the last advances of our BMV apparatus in terms of the best noise floor of vacuum magnetic birefringence ever realized. Our result validates our experimental method based on pulsed fields. In particular, it proves that the sensitivity obtained in a single pulse compensates the loss of duty cycle. To reach the QED value, the needed improvement is of three orders of magnitude. This is not conceivable with this first-generation experiment. Our strategy is therefore to increase the magnetic field thanks to the pulsed technology. At the moment, we have $B^2 L_B = 5.8\ \mathrm{T}^2$ m but we conceptualized and tested a pulsed coil that has already reached a $B^2 L_B$ higher than 300 T^2 m. Two coils of this type will be inserted in the experiment in the near future. This essential step really makes the vacuum birefringence measurement within our reach.

On the other hand, our analysis has allowed us to identify some systematic effects. Obviously, a special care will be devoted to limit them in order to improve the accuracy. The magnetic field induces an excitation on the setup which resonates at different frequencies. Since it affects the signal J_4, the resonance at 177 Hz has an odd symmetry with respect to the sign of Γ. This implies that it concerns the mirror mounts. In order to get rid of this effect, a new setup was designed, providing a better magnetic insulation of the mirrors. It will also provide a better acoustic insulation of the mirror mounts, improving the overall sensitivity and decreasing the number of rejected

shots. Moreover in the new version of our setup we will be able to measure the ellipticity both with θ_P equal to 0° (no induced ellipticity) and 45° (maximal induced ellipticity). This will allow us to subtract from the raw data the systematic effects that do not depend on the polarization direction, as the sine function at 177 Hz.

We thank all the members of the BMV collaboration, and in particular J. Béard, J. Billette, P. Frings, B. Griffe, J. Mauchain, M. Nardone, J.-P. Nicolin and G. Rikken for strong support. We are also indebted to the whole technical staff of LNCMI. We acknowledge the support of the *Fondation pour la recherche IXCORE* and the *ANR-Programme non Thématique* (Grant No. ANR-BLAN06-3-139634).

References

1. C. Rizzo, A. Rizzo, D.M. Bishop, Int. Rev. Phys. Chem. **16**, 81 (1997)
2. Z. Bialynicka-Birula, I. Bialynicki-Birula, Phys. Rev. D **2**, 2341 (1970)
3. V.I. Ritus, Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys. **42**, 774 (1975)
4. R. Battesti, C. Rizzo, Rep. Prog. Phys. **76**, 016401 (2013)
5. P.J. Mohr, B.N. Taylor, D.B. Newell, Rev. Mod. Phys. **84**, 1527 (2012)
6. R. Cameron, G. Cantatore, A.C. Melissinos, G. Ruoso, Y. Semertzidis, H.J. Halama, D.M. Lazarus, A.G. Prodell, F. Nezrick, C. Rizzo, E. Zavattini, Phys. Rev. D **47**, 3707 (1993)
7. E. Zavattini, G. Zavattini, G. Ruoso, G. Raiteri, E. Polacco, E. Milotti, V. Lozza, M. Karuza, U. Gastaldi, G. Di Domenico, F. Della Valle, R. Cimino, S. Carusotto, G. Cantatore, M. Bregant, Phys. Rev. D **77**, 032006 (2008)
8. G. Zavattini, U. Gastaldi, R. Pengo, G. Ruoso, F. Della Valle, E. Milotti, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1260017 (2012)
9. R. Battesti, B. Pinto Da Souza, S. Batut, C. Robilliard, G. Bailly, C. Michel, M. Nardone, L. Pinard, O. Portugall, G. Trénec, J.-M. Mackowski, G.L.J.A. Rikken, J. Vigué, C. Rizzo, Eur. Phys. J. D **46**, 323 (2008)
10. P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, C. Rizzo, Phys. Rev. A **85**, 013837 (2012)
11. A. Cadène, D. Sordes, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, C. Rizzo, Phys. Rev. A **88**, 043815 (2013)
12. R.W.P. Drever, J.L. Hall, F.V. Kowalski, J. Hough, G.M. Ford, A.J. Munley, H. Ward, Appl. Phys. B **31**, 97 (1983)
13. S. Batut, J. Mauchain, R. Battesti, C. Robilliard, M. Fouché, O. Portugall, IEEE Trans. Appl. Supercond. **18**, 600 (2008)
14. G. Bialolenker, E. Polacco, C. Rizzo, G. Ruoso, Appl. Phys. B **68**, 703 (1999)
15. F. Bielsa, A. Dupays, M. Fouché, R. Battesti, C. Robilliard, C. Rizzo, Appl. Phys. B **97**, 457 (2009)
16. D. Jacob, M. Vallet, F. Bretenaker, A. Le Floch, M. Oger, Opt. Lett. **20**, 671 (1995)
17. F. Brandi, F. Della Valle, A.M. De Riva, P. Micossi, F. Perrone, C. Rizzo, G. Ruoso, G. Zavattini, Appl. Phys. B **65**, 351 (1997)
18. P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, F. Bielsa, J. Mauchain, C. Rizzo, Appl. Phys. B **100**, 803 (2010)

Annexe F

Circular and linear magnetic birefringences in xenon at $\lambda = 1064$ nm

A. Cadène, M. Fouché, A. Rivère, R. Battesti, S. Coriani, A. Rizzo, et C. Rizzo, *J. Chem. Phys.* **142**, 124313 (2015).

THE JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS **142**, 124313 (2015)

Circular and linear magnetic birefringences in xenon at λ = 1064 nm

Agathe Cadène,[1] Mathilde Fouché,[1] Alice Rivère,[1] Rémy Battesti,[1] Sonia Coriani,[2,3] Antonio Rizzo,[4] and Carlo Rizzo[1,a)]

[1]*Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses (UPR 3228, CNRS-UPS-UJF-INSA), 143 Avenue de Rangueil, 31400 Toulouse, France*

[2]*Dipartimento di Scienze Chimiche e Farmaceutiche, Università degli Studi di Trieste, via Giorgieri 1, 34127 Trieste, Italy*

[3]*Aarhus Institute of Advanced Studies, Aarhus University, DK-8000 Aarhus C, Denmark*

[4]*Istituto per i Processi Chimico-Fisici del Consiglio Nazionale delle Ricerche (IPCF-CNR), Area della Ricerca, via G. Moruzzi 1, I-56124 Pisa, Italy*

(Received 19 January 2015; accepted 11 March 2015; published online 30 March 2015)

The circular and linear magnetic birefringences corresponding to the Faraday and the Cotton-Mouton effects, respectively, have been measured in xenon at λ = 1064 nm. The experimental setup is based on time dependent magnetic fields and a high finesse Fabry-Pérot cavity. Our value of the Faraday effect is the first measurement at this wavelength. It is compared to theoretical predictions. Our uncertainty of a few percent yields an agreement at better than 1σ with the computational estimate when relativistic effects are taken into account. Concerning the Cotton-Mouton effect, our measurement, the second ever published at λ = 1064 nm, agrees at better than 1σ with theoretical predictions. We also compare our error budget with that established for other experimental published values. © *2015 AIP Publishing LLC.* [http://dx.doi.org/10.1063/1.4916049]

I. INTRODUCTION

Magnetic birefringence corresponds to an anisotropy of the (generally complex) refractive index induced in a medium by a magnetic field.[1,2] A circular birefringence arises when the magnetic field changes the angular velocity of the two eigen modes of polarization in which a linearly polarized beam is split, without deforming them. The net result is a rotation of the plane of linear polarization, a phenomenon also seen in the absence of external fields in chiral samples (natural optical rotation). When the presence of the external magnetic field yields a different phase of two perpendicular components of the linear polarization vector, the net result is the appearance of an ellipticity, and we are observing an example of linear birefringence.

Two well known examples of magnetic birefringences are the Faraday and the Cotton-Mouton effects. The former corresponds to a circular birefringence induced by a longitudinal magnetic field $B_{\parallel}$ (aligned parallel to the direction of propagation of light). After going through the birefringent medium, the real part of the index of refraction for left circularly polarized light n_- is different from that for right circularly polarized light n_+. The difference $\Delta n_F = n_- - n_+$ is proportional to $B_{\parallel}$,

$$\Delta n_F = k_F B_{\parallel}, \tag{1}$$

k_F being the circular magnetic birefringence per unit magnetic field intensity. For historical reason, the Faraday effect is usually given in terms of the Verdet constant,

$$V = \frac{\pi k_F}{\lambda}, \tag{2}$$

where λ is the light wavelength. On the other hand, the Cotton-Mouton effect corresponds to a linear magnetic birefringence induced by a transverse magnetic field $B_{\perp}$. The field induces a difference between the real parts of the refraction index for light polarized parallel $n_{\parallel}$ with respect to that polarized perpendicular to the magnetic field $n_{\perp}$. The difference $\Delta n_{CM} = n_{\parallel} - n_{\perp}$ is proportional to the square of the magnetic field,

$$\Delta n_{CM} = k_{CM} B_{\perp}^2, \tag{3}$$

with k_{CM} the linear magnetic birefringence per square unit magnetic field intensity.

For the Cotton-Mouton effect, k_{CM} has two contributions, the first one due to the distortion of the electronic structure while the second one corresponds to a partial orientation of the molecules. When working in the conditions of constant volume, the orientational contribution is proportional to the inverse of the temperature T, and it usually dominates, often hiding the first temperature independent contribution. For axial molecules, for example, k_{CM} is given by the expression[3]

$$k_{CM} = \frac{\pi N_A}{V_m 4\pi\epsilon_0}\left(\Delta\eta + \frac{2}{15 k_B T}\Delta\alpha\Delta\chi\right). \tag{4}$$

Above N_A is the Avogadro constant, V_m the molar volume, k_B the Boltzmann constant, ϵ_0 the electric constant, $\Delta\eta$ the frequency dependent hypermagnetizability anisotropy, $\Delta\alpha$ the optical electric dipole polarizability anisotropy, and $\Delta\chi$ the magnetic susceptibility anisotropy. For spherical molecules or for atoms, such as xenon, however, the temperature dependent contribution vanishes. Measurements on noble gases, for example, allow to focus on the hypermagnetizability anisotropy $\Delta\eta$ term. On the other hand, since the Langevin-type orientational term vanishes, the magnetic birefringence is much lower than the one observed in nonspherical molecules.

a)Electronic mail: carlo.rizzo@lncmi.cnrs.fr

 © 2015 AIP Publishing LLC

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

From an experimental point of view, measurements on such gases require a very sensitive apparatus, with a Δn_{CM} of the order of 10^{-16} for helium and 10^{-14} for xenon at 1 atm and with a magnetic field of 1 T. In comparison, Δn_{F} is typically 10^5 bigger.

The computational determination of the Verdet constant and of the Cotton-Mouton effect requires the far-from-trivial calculation of higher-order response functions,[2,3] and it has often served as a test bed for the validation of new electronic structure methods. For atoms, in order to obtain accurate results, one must properly account for the appropriate description of one-electron (basis set), N-electron (correlation), and relativistic effects. As far as correlation is concerned, coupled cluster (CC) methods are nowadays among the most accurate tools in electronic structure theory.[4,5] Both birefringences treated here, and in particular, the Cotton-Mouton effect, require a good description of the outer valence space of the system at hand. Therefore, the presence of diffuse functions in the one-electron basis set is mandatory.[2,4] Whereas for light atoms, relativistic corrections are minor, their importance increases and they become significant for heavier atoms. For example, Ekström *et al.*[6] have calculated that for helium, the relativistic effects add −0.03% to the non-relativistic Verdet value. For xenon, the heaviest non-radioactive noble atom, relativistic corrections add 3%–4%, depending on the chosen wavelength. In this case, relativistic effects cannot be ignored in accurate calculations.

In this article, we report both measurements and calculations of Faraday and Cotton-Mouton effects at $\lambda = 1064$ nm. We perform the first measurement of the Faraday effect of xenon at this wavelength, and our estimate bears an uncertainty of a few percent. Concerning the Cotton-Mouton effect, our measurement, the second ever published at $\lambda = 1064$ nm, agrees at better than 1σ with theoretical predictions and we also compare our error budget with that established for other experimental published values. Our theoretical predictions, that can be considered of state-of-the-art quality, were obtained at the coupled cluster singles and doubles (CCSD)[7–9] and coupled cluster singles, doubles and approximate triples (CC3)[10–13] levels of theory, and they include estimates of relativistic effects. For both effects, our theoretical predictions are within 1σ of our experimental data.

II. EXPERIMENTAL SETUP

A. Principle of the measurement

Experimentally, we determine the Faraday and the Cotton-Mouton effects by measuring, respectively, the rotation induced by a longitudinal magnetic field and the ellipticity induced by a transverse magnetic field on an incident linear polarization. For small angles, the induced rotation θ_{F} depends on the circular birefringence as follows:

$$\theta_{\mathrm{F}} = \pi \frac{L_B}{\lambda} \Delta n_{\mathrm{F}}, \tag{5}$$

where L_B is the length of the magnetic field region. The induced ellipticity ψ_{CM} is related to the linear birefringence by the formula,

$$\psi_{\mathrm{CM}} = \pi \frac{L_B}{\lambda} \Delta n_{\mathrm{CM}} \sin 2\theta_{\mathrm{P}}, \tag{6}$$

where θ_{P} is the angle between the light polarization and the magnetic field.

B. General setup

The apparatus has already been described in detail elsewhere.[14,15] Briefly, light comes from a Nd:YAG laser at $\lambda = 1064$ nm (see Fig. 1). It is linearly polarized by a first polarizer P, before going through either a transverse or a longitudinal magnetic field. The polarization is then analyzed by a second polarizer A, crossed at maximum extinction compared to P. The beam polarized parallel to the incident beam, reflected by the polarizer A as the ordinary ray, is collected by the photodiode $\mathrm{Ph_t}$. Its power is denoted by I_{t}. The beam polarized perpendicular to the incident beam (power I_{e}), corresponding to the extraordinary ray that passes through the polarizer A, is collected by the low noise and high gain photodiode $\mathrm{Ph_e}$.

This setup has been designed to measure the linear magnetic birefringence of vacuum[16] and its sensitivity allows to perform precise measurements on gases.[15,17] All the optical components from A to P are placed in an ultrahigh-vacuum chamber. To perform birefringence measurement on gases, we fill the vacuum chamber with a high-purity gas. For this particular measurement, we have used a bottle of xenon with a global purity higher than 99.998%.

C. Fabry-Pérot cavity

Magnetic birefringence measurements on dilute gases are difficult, especially at low pressure, because one has to detect very small variations of light polarization. To increase the measured signal, one needs high magnetic fields. One also needs an as large as possible path length in the field L_B (cf. Eqs. (5) and (6)). To this end, optical cavities are used to trap light in the magnetic field region and therefore enhance the signal to be measured.

As shown in Fig. 1, the cavity is formed by two mirrors $\mathrm{M_1}$ and $\mathrm{M_2}$, placed at both sides of the magnetic field region. The laser frequency is locked to the cavity resonance frequency, using the Pound-Drever-Hall technique.[18] The electro-optic modulator generates 10 MHz sidebands, and the signal reflected by the cavity is detected by the photodiode $\mathrm{Ph_r}$. The laser frequency is adjusted with the acousto-optic modulator, the piezoelectric, and the Peltier elements of the laser.

This cavity increases the distance traveled by light in the magnetic field by a factor $2F/\pi$, where F is the cavity finesse. Therefore, the rotation induced by the longitudinal magnetic field becomes

$$\Theta_{\mathrm{F}}(t) = \frac{2F}{\pi} \theta_{\mathrm{F}}(t), \tag{7}$$

with θ_{F} the rotation acquired without any cavity. In the same way, the ellipticity induced by the transverse magnetic field

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

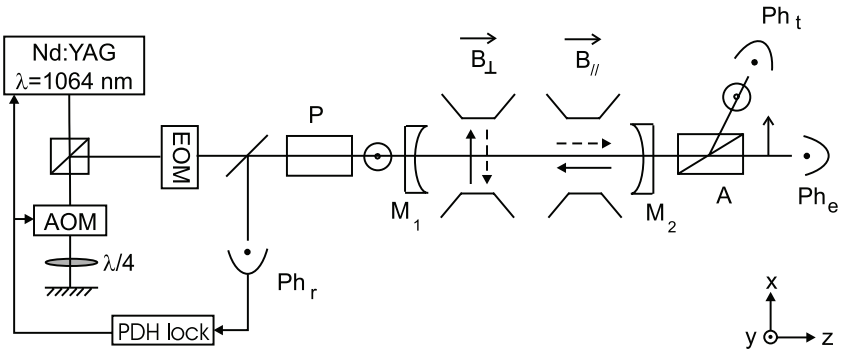


FIG. 1. Experimental setup. EOM = electro-optic modulator; AOM = acousto-optic modulator; PDH = Pound-Drever-Hall; Ph = photodiode; P = polarizer; and A = analyzer. See text for more details.

becomes

$$\Psi_{\mathrm{CM}}(t) = \frac{2F}{\pi}\psi_{\mathrm{CM}}(t), \tag{8}$$

with ψ_{CM} denoting the ellipticity acquired without any cavity. The cavity finesse is inferred from the measurement of the photon lifetime τ inside the cavity,[19]

$$F = 2\pi\Delta^{\mathrm{FSR}}\tau, \tag{9}$$

with Δ^{FSR} as the cavity free spectral range. For the Faraday effect, the cavity finesse was about $F = 475\,000$. For the Cotton-Mouton effect, two sets of mirrors were used with a respective finesse of about 400 000 and 480 000.

D. Raw signals

We measure the circular and the linear magnetic birefringence by measuring the ratio $I_{\mathrm{e}}/I_{\mathrm{t}}$,

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + [\Gamma + \Psi_{\mathrm{CM}}(t)]^2 + [\epsilon + \Theta_{\mathrm{F}}(t)]^2. \tag{10}$$

As said previously, I_{e} (I_{t}) corresponds to the power of light polarized perpendicular (parallel) to the incident beam. The subscript f indicates that we need to take into account the cavity filtering, as explained in detail in the previous papers.[15,19] The term σ^2 corresponds to the extinction ratio of polarizers P and A, Γ is the total static ellipticity due to the cavity mirrors, and ϵ is the static angle between the major axis of the elliptical polarization and the incident polarization. The extinction ratio and the static birefringence are measured before each magnetic pulse. The static angle ϵ can be estimated but its value is not needed for the analysis.

III. CIRCULAR MAGNETIC BIREFRINGENCE

A. Magnetic field

The magnetic field is generated by a solenoid previously used for Faraday effect measurement in helium.[15] Its characteristics have already been explained in detail.[15] Here, we just briefly recall its main features. It generates a longitudinal magnetic field with an equivalent length $L_B = (0.308 \pm 0.006)$ m at 1σ. This magnetic field is modulated at the frequency $\nu = 18$ Hz: $B_{\|} = B_{\|,0}\sin(2\pi\nu t + \phi)$. The rotation of the polarization due to the Faraday effect is thus given by

$$\Theta_{\mathrm{F}} = \Theta_0 \sin(2\pi\nu t + \phi), \tag{11}$$

$$\text{with } \Theta_0 = \frac{2F}{\pi} V B_{\|,0} L_B. \tag{12}$$

B. Data analysis

Expanding Eq. (10), the raw signal becomes

$$\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} = \sigma^2 + \Gamma^2 + \epsilon^2 + 2\epsilon\Theta_{\mathrm{F}}(t) + \Theta_{\mathrm{F}}^2(t). \tag{13}$$

This gives three main frequency components: a DC signal, a signal at the frequency ν, and a signal at the double frequency 2ν. To measure the Verdet constant, we use the amplitude of the signal at 2ν[15]

$$A_{2\nu} = \frac{\Theta_0^2}{2\sqrt{1 + \left(\frac{2\nu}{\nu_{\mathrm{c}}}\right)^2}}, \tag{14}$$

where $\nu_{\mathrm{c}} = 1/4\pi\tau$ is the cavity cutoff frequency, introduced to take into account the cavity filtering.[19] $A_{2\nu}$ is measured for different magnetic field amplitudes, from 0 to about 50 $\times 10^{-3}$ T. The whole is fitted by $K_V B_{\|,0}^2$. The Verdet constant finally depends on the measured experimental parameters as follows:

$$V(T,P) = \sqrt{\frac{K_V}{2}}\frac{\left[1 + (8\pi\tau\nu)^2\right]^{1/4}}{2\tau\Delta^{\mathrm{FSR}}L_B}, \tag{15}$$

where T and P are, respectively, the temperature and pressure of the gas.

C. Measurement and error budget

The A- and B-type uncertainties associated to the measurement of V are detailed in Table I.[15,17] They are given at 1σ (coverage factor $k = 1$). The A-type uncertainty is dominated by the photon lifetime uncertainty. The main contributions to the B-type uncertainty come from the uncertainty of the magnetic length and of the fit constant K_V which includes the B-type uncertainty of the magnetic field and of the photodiodes conversion factor.[17]

We have measured the Verdet constant in xenon at $T = (294 \pm 1)$ K and for 5 pressures from 1.01×10^{-3} to 5.01×10^{-3} atm. In this range of pressure, xenon can be considered as an ideal gas and the Verdet constant is thus proportional to

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

TABLE I. Parameters and their respective relative A- and B-type uncertainties at 1σ that have to be measured to infer the value of the Verdet constant V. Typical values are given at $P = 5\times10^{-3}$ atm.

Parameter	Typical value	Relative A-type uncertainty	Relative B-type uncertainty
τ (ms)	1.14	2.0×10^{-2}	
K_V (rad T^{-1})	1.07	3×10^{-3}	3.2×10^{-2}
Δ^{FSR} (MHz)	65.996		3×10^{-4}
L_B (m)	0.308		1.9×10^{-2}
$V\times10^5$ (rad T^{-1} m^{-1})	1.66	1.8×10^{-2}	2.5×10^{-2}

the pressure. Data are fitted by a linear equation,

$$V(T,P) = V^{\mathrm{n}}P, \tag{16}$$

giving a normalized Verdet constant (P = 1 atm) at λ = 1064 nm and T = (294 ± 1) K,

$$V^{\mathrm{n}} = (3.31 \pm 0.09)\times10^{-3}\ \mathrm{atm}^{-1}\ \mathrm{rad\ T}^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}. \tag{17}$$

The uncertainty is given at 1σ and is detailed in Table II. With a scale law on the gas density, this corresponds to a normalized Verdet constant at T = 273.15 K of

$$V^{\mathrm{N}} = (3.56 \pm 0.10)\times10^{-3}\ \mathrm{atm}^{-1}\ \mathrm{rad\ T}^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}. \tag{18}$$

Using Eq. (2), we can also give the normalized Faraday constant at T = 273.15 K,

$$k_{\mathrm{F}}^{\mathrm{N}} = (1.21 \pm 0.03)\times10^{-9}\ \mathrm{atm}^{-1}\ \mathrm{T}^{-1}. \tag{19}$$

IV. LINEAR MAGNETIC BIREFRINGENCE

A. Magnetic field

The transverse magnetic field $B_\perp$ is generated by an X-Coil, specially designed by the High Magnetic Field National Laboratory (LNCMI-Toulouse, France) for the measurement of the vacuum magnetic birefringence. This coil has been presented and discussed in great detail in several previous papers.[14,20] Very briefly, the magnet delivers a pulsed magnetic field over an equivalent length L_B of 0.137 m. The total duration of the pulse is about 10 ms with a maximum reached within 2 ms. For the present measurements, a maximum magnetic field of 3 T has been used. Finally, the high-voltage connections can be remotely switched to reverse the direction of the field.

TABLE II. Parameters and their respective relative A- and B-type uncertainties at 1σ that have to be measured to infer the value of the normalized Verdet constant V^{n}. The uncertainty given by the linear fit takes into account the A-type uncertainty of V.

Parameter	Typical value	Relative A-type uncertainty	Relative B-type uncertainty
$V\times10^5$ (rad T^{-1} m^{-1})	1.66	1.8×10^{-2}	2.5×10^{-2}
$P\times10^3$ (atm)	5		2×10^{-3}
Linear fit$\times10^3$ (atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1})	3.31	1.5×10^{-2}	
$V^{\mathrm{n}}\times10^3$ (atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1})	3.31	1.5×10^{-2}	2.5×10^{-2}

Thus, we can set $\mathbf{B}_\perp$ parallel or antiparallel to the x direction, as shown in Fig. 1.

B. Data analysis

The data analysis follows the one described for the Cotton-Mouton effect measurement in helium.[15] We will, however, detail the main steps, since a slightly different method was used in the present case.

To extract the ellipticity $\Psi_{\mathrm{CM}}(t)$ from Eq. (10), we calculate the following $Y(t)$ function:

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{\frac{I_{\mathrm{e}}(t)}{I_{\mathrm{t,f}}(t)} - I_{\mathrm{DC}}}{2|\Gamma|} \\ &= \gamma\Psi_{\mathrm{CM}}(t) + \frac{\Psi_{\mathrm{CM}}^2(t)}{2|\Gamma|} + \gamma\frac{|\epsilon|\Theta_{\mathrm{F}}(t)}{2|\Gamma|} + \frac{\Theta_{\mathrm{F}}^2(t)}{2|\Gamma|}, \end{aligned} \tag{20}$$

where γ stands for the sign of Γ. I_{DC} is the static signal measured just before the application of the magnetic field. The absolute value of the static ellipticity $|\Gamma|$ is also measured before each pulse.

Two parameters are adjustable in the experiment: the sign γ of the static ellipticity Γ and the direction of the transverse magnetic field. We acquire signals for both signs of Γ and both directions of $\mathbf{B}_\perp$: parallel to x is denoted as > 0 and antiparallel is denoted as < 0. This gives four data series: ($\Gamma > 0$, $B_\perp > 0$), ($\Gamma > 0$, $B_\perp < 0$), ($\Gamma < 0$, $B_\perp < 0$), and ($\Gamma < 0$, $B_\perp > 0$).

For each series, signals calculated with Eq. (20) are averaged and denoted as $Y_{>>}$, $Y_{><}$, $Y_{<<}$, and $Y_{<>}$. The first subscript corresponds to $\Gamma > 0$ or < 0 while the second one corresponds to $\mathbf{B}_\perp$ parallel or antiparallel to x. This average function can be written in a more general form than the one of Eq. (20). It is the sum of different effects with different symmetries, denoted as s

$$\begin{aligned} Y_{>>} &= +\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{>>}}\right\rangle s_{++} + \left\langle\frac{1}{\Gamma_{>>}}\right\rangle s_{--} + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{>>}}\right\rangle s_{+-}, \\ Y_{><} &= +\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{><}}\right\rangle s_{++} + \left\langle\frac{1}{\Gamma_{><}}\right\rangle s_{--} + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{><}}\right\rangle s_{+-}, \\ Y_{<<} &= -\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<<}}\right\rangle s_{++} + \left\langle\frac{1}{\Gamma_{<<}}\right\rangle s_{--} + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<<}}\right\rangle s_{+-}, \\ Y_{<>} &= -\Psi + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<>}}\right\rangle s_{++} + \left\langle\frac{1}{\Gamma_{<>}}\right\rangle s_{--} + \frac{1}{2}\left\langle\frac{1}{\Gamma_{<>}}\right\rangle s_{+-}. \end{aligned} \tag{21}$$

The first subscript in s corresponds to the symmetry with respect to the sign of Γ and the second one to the symmetry with respect to the direction of $\mathbf{B}_\perp$. The subscript + indicates an even parity while the subscript − indicates odd parity. The ratio $\langle 1/\Gamma\rangle$ is the average of $1/|\Gamma|$ measured during corresponding series. The terms Ψ_{CM}^2 and Θ_{F}^2 are included in s_{++}, $\gamma|\epsilon|\Theta_{\mathrm{F}}$ included in s_{--}, and s_{+-} corresponds to a spurious signal with an odd parity towards the direction of $\mathbf{B}_\perp$ and an even parity with respect to the sign of Γ. The ellipticity $\gamma\Psi_{\mathrm{CM}}$ corresponds to s_{-+}.

From this set of four equations with four unknown quantities (Ψ_{CM}, s_{++}, s_{--}, and s_{+-}), we extract $\Psi_{\mathrm{CM}}(t)$, which is fitted by $\alpha B_{\perp,\mathrm{f}}^2$. The cavity filtering should again be taken into account, as indicated by the subscript f.[15,19] The Cotton-Mouton constant k_{CM} finally depends on the measured

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

TABLE III. Parameters that have to be measured to infer the value of the Cotton-Mouton constant k_{CM} and their respective relative A- and B-type uncertainties at 1σ. Typical values are given at $P = 8\times10^{-3}$ atm.

Parameter	Typical value	Relative A-type uncertainty	Relative B-type uncertainty
τ (ms)	1.14	2.0×10^{-2}	
$\alpha\times10^5$ (T^{-2})	2.82	2.8×10^{-4}	2.2×10^{-2}
Δ^{FSR} (MHz)	65.996		3×10^{-4}
L_B (m)	0.137		2.2×10^{-2}
λ (nm)	1064.0		$<5\times10^{-4}$
$\sin 2\theta_P$	1.0000		9×10^{-4}
$k_{CM}\times10^{16}$ (T^{-2})	2.31	2.0×10^{-2}	3.1×10^{-2}

experimental parameters as follows:

$$k_{CM}(T,P) = \frac{\alpha}{4\pi\tau\Delta^{FSR}}\frac{\lambda}{L_B}\frac{1}{\sin 2\theta_P}. \tag{22}$$

C. Measurement and error budget

The A- and B-type uncertainties associated to the measurement of k_{CM} are detailed in Table III and are given at 1σ. The B-type uncertainties have been evaluated previously and detailed in Ref. 17. They essentially come from the length of the magnetic field L_B and the fit constant α.

We have measured the Cotton-Mouton constant in xenon at $T = (293 \pm 1)$ K and for nine pressures ranging from 3×10^{-3} to 8×10^{-3} atm. The data as a function of the pressure are fitted by a linear equation, and we obtain for the value of the Cotton-Mouton constant at $P = 1$ atm,

$$k^{n}_{CM} = (2.41 \pm 0.37)\times10^{-14}\ T^{-2}\ atm^{-1}. \tag{23}$$

The uncertainty given at 1σ is detailed in Table IV. The dominant uncertainty comes from the linear fit of the Cotton-Mouton constant versus pressure (A-type). The value of k^{n}_{CM} normalized at 273.15 K is calculated with a scale law on the gas density,

$$k^{N}_{CM} = (2.59 \pm 0.40)\times10^{-14}\ T^{-2}\ atm^{-1}. \tag{24}$$

V. OUR CALCULATIONS

The Verdet constant and the Cotton-Mouton birefringence were computed within Coupled Cluster response theory,[4,5] at the CCSD[7–9] and CC3[10–13] levels of approximation. Specifically, the Verdet constant was obtained from the following frequency-dependent quadratic response function:[4,21–23]

$$V(\omega) = C\omega\langle\langle\mu_x;\mu_y,L_z\rangle\rangle_{\omega,0}, \tag{25}$$

with $C = \frac{Ne}{8m_e\epsilon_0c_0} = 0.912\,742\times10^{-7}$ in atomic units, N the number density ($N = \frac{P}{k_BT}$ for ideal gases), e the elementary charge, m_e the electron mass, c_0 the speed of light *in vacuo*, $\omega/2\pi$ the frequency of the probing light, and μ_x and L_z are Cartesian components of the electric dipole and angular momentum operators, respectively. The hypermagnetizability anisotropy $\Delta\eta$ entering the Cotton-Mouton birefringence in Eq. (4) (the only term contributing for atoms) is given by the combination of a quadratic and a cubic response functions,[3]

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= -\frac{1}{4}\langle\langle\mu_x;\mu_x,L_z,L_z\rangle\rangle_{\omega,\omega,0} - \frac{1}{4}\langle\langle\mu_x;\mu_x,\Theta_{xx}\rangle\rangle_{\omega,0}\\ &\equiv \Delta\eta^p + \Delta\eta^d,\end{aligned} \tag{26}$$

with Θ_{xx} the xx Cartesian component of the traceless quadrupole operator. At the CC3 level, calculations were performed at three different wavelengths, namely, 1064, 632.8, and 514.5 nm. At the CCSD level, we computed the dispersion coefficients, as done in our previous study,[24] i.e., for the Verdet constant,

$$V(2n) = 2nS(-2n-2); \tag{27}$$

$$V(\omega) = C\sum_{n=1}^{\infty}\omega^{2n}V(2n); \tag{28}$$

whereas for the Cotton-Mouton constant,

$$\Delta\eta(2n) = -\frac{1}{4}[(2n+1)(2n+2)S(-2n-4) + B(2n)]; \tag{29}$$

$$\Delta\eta(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega^{2n}\Delta\eta(2n). \tag{30}$$

Above, $S(k)$ is the Cauchy moment,

$$S(k) = \sum_{m\neq0} 2\omega_{m0}^{k+1}\langle 0 \mid \mu_z \mid m\rangle\langle m \mid \mu_z \mid 0\rangle, \tag{31}$$

with $\hbar\omega_{m0}$ indicating the excitation energy from the ground state 0 to the excited state(s) m, and $B(2n)$ being the dispersion coefficient introduced when expanding, for frequencies below the lowest excitation energy, the electric dipole–electric dipole–electric quadrupole quadratic response function $B_{x,x,xx}(-\omega;\omega,0) = \langle\langle\mu_x;\mu_x,\Theta_{xx}\rangle\rangle_{\omega,0}$ in a convergent power series in the circular frequency ω,

$$B_{x,x,xx}(-\omega;\omega,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega^{2n}B(2n). \tag{32}$$

For further details on how the above Cauchy moments and dispersion coefficients of the given quadratic response function are computed within coupled cluster response theory, the reader should refer to Refs. 24–26.

Relativistic effects were approximately accounted for by employing relativistic effective core potentials (ECPs)[27] and specifically pseudo-potentials (PPs). "Small core" effective pseudo-potentials were used to describe the 28 inner electrons (that is, the [Ar]$3d^{10}$ core), whereas the remaining 26 valence

TABLE IV. Parameters and their respective relative A- and B-type uncertainties at 1σ that have to be measured to infer the value of the normalized Cotton-Mouton constant k^{n}_{CM}.

Parameter	Typical value	Relative A-type uncertainty	Relative B-type uncertainty
$k_{CM}\times10^{16}$ (T^{-2})	2.31	2.0×10^{-2}	3.1×10^{-2}
$P\times10^3$ (atm)	5		2×10^{-3}
Linear fit$\times10^{14}$ (T^{-2} atm^{-1})	2.41	1.5×10^{-1}	
$k^{n}_{CM}\times10^{14}$ (T^{-2} atm^{-1})	2.41	1.5×10^{-1}	3.1×10^{-2}

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

TABLE V. Dispersion coefficients of the Verdet and Cotton-Mouton response functions at the CCSD level of theory (atomic units).

n	$B(2n)$	$S(-2n-4)$	$S(-2n-2)$	$V(2n)$	$\Delta\eta(2n)$
			aug_cc_pvqz_pp		
0	−654.894 71	126.505 95			100.470 70
1	−8 903.382 5	763.598 99	126.505 95	253.011 90	−64.951 345
2	−92 298.251	5 369.048 6	763.598 99	3 054.396 0	−17 193.302
3	−860 869.9	41 692.560	5 369.048 6	32 214.292	−368 478.36
4			41 692.560	333 540.48	
			d-aug_cc_pvqz_pp		
0	−739.156 30	126.971 74			121.303 23
1	−9 822.912 7	774.871 90	126.971 74	253.943 48	131.112 47
2	−106 369.19	5 553.232 1	774.871 90	3 099.487 6	−15 056.943
3	−1 074 975.1	44 095.369	5 553.232 1	33 319.393	−348 591.39
4			44 095.369	352 762.95	
			t-aug_cc_pvqz_pp		
0	−748.341 87	126.919 27			123.625 83
1	−9 940.721 8	774.472 34	126.919 27	253.838 54	161.763 43
2	−107 513.63	5 551.377 1	774.472 34	3 097.889 4	−14 756.921
3	−1 084 127.2	44 088.280	5 551.377 1	33 308.263	−346 204.12
4			44 088.280	352 706.24	

electrons were correlated as in standard non-relativistic calculations. The basis sets used were constructed starting from the singly augmented aug_cc_pvxz_pp (x = t,q) sets of Peterson *et al.*[28] Since single augmentation is usually not sufficient to ensure converged results, at least for the Cotton-Mouton birefringence, additional sets of diffuse functions were added by applying an even-tempered generation formula commonly used for this purpose to the orbital functions describing the valence electrons, while retaining the pseudo-potential of the original set. The resulting sets are labeled d-aug and t-aug, for double and triple augmentation, respectively.

Where pseudo-potentials parametrically account for relativistic effects on the innermost orbitals, other relativistic effects (e.g., higher-order and picture change effects, and spin-orbit coupling) could play a significant role.[29,30] When dealing with valence properties like electric hyperpolarizabilities, the higher-order relativistic effects and picture change effects (for the dipole operator and also the electron-electron interaction) are expected to be not so important. Also, spin-orbit coupling should be quite weak. Both the Faraday and Cotton Mouton birefringences, however, involve the magnetic dipole operator. In general, relativistic effects on magnetic properties can be more significant and more difficult in terms of picture change (the operators look different in relativistic and non-relativistic theory, and this may require a correction of the property operator that one uses as a perturbation).[29,30]

Nonetheless, also given that the most stringent requirement in terms of basis set convergence is the inclusion of

TABLE VI. CC3 values of the response function components (in atomic units) involved in the Verdet and Cotton-Mouton birefringences. The Verdet constant $V^{\mathrm{N}}(\omega)$ is given in atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1} and the Cotton-Mouton constant $k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}$ is in T^{-2} atm^{-1} at 273.15 K.

λ (nm)	$\langle\langle\mu_x;\mu_y,L_z\rangle\rangle_{\omega,0}$	$V^{\mathrm{N}}(\omega)\times10^3$	$\langle\langle\mu_x;\mu_x,\Theta_{xx}\rangle\rangle_{\omega,0}$	$\langle\langle\mu_x;\mu_x,L_z,L_z\rangle\rangle_{\omega,\omega,0}$	$\Delta\eta$	$k_{\mathrm{CM}}^{\mathrm{N}}\times10^{14}$
			aug_cc_pvqz_pp			
1064	11.1587	3.505	−668.242	272.564	98.9195	2.239
632.8	19.5823	10.35	−700.706	308.069	98.1593	2.222
514.5	24.9438	16.22	−728.260	339.617	97.1607	2.200
			d-aug_cc_pvqz_pp			
1064	11.2155	3.522	−755.936	274.099	120.459	2.727
632.8	19.6927	10.40	−791.994	310.285	120.427	2.726
514.5	25.0963	16.32	−822.705	342.514	120.048	2.718
			t-aug_cc_pvqz_pp			
1064	11.2127	3.521	−765.680	274.031	122.912	2.782
632.8	19.6878	10.40	−802.186	310.210	122.994	2.784
514.5	25.0901	16.31	−833.274	342.435	122.710	2.778

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

diffuse functions as in the case of the electric hyperpolarisability, it is reasonable to assume that both properties are essentially valence properties, for which picture change effects are typically small, and we reckon therefore that the use of (PP)ECPs can be considered accurate enough.

The results obtained in the x = q basis sets are summarized in Tables V and VI, for CCSD and CC3, respectively.

All calculations were performed with the Dalton code.[31]

VI. RESULTS AND DISCUSSION

A. Faraday effect

1. Experiments

We can compare our value of the normalized Verdet constant to the other published values. The most extensive experimental compilation of Verdet constants has been reported by Ingersoll and Liebenberg in 1956, for several gases including xenon[32] for wavelengths ranging from 363.5 to 987.5 nm, with a total uncertainty of about 1%. These values are plotted in Fig. 2.

No datum has ever been reported for $\lambda = 1064$ nm. Nevertheless, we can extrapolate its value from the points of Fig. 2, by fitting the data with a function of form $V = A/\lambda^2 + B/\lambda^4$ (solid curve in Fig. 2).[32,33] A supplementary systematic uncertainty should also be added, since the authors measured the ratio between Faraday effects in xenon and in distilled water and rescaled their measurements with accepted values for water.[32,33] Thus, it does not correspond to absolute measurements of the Faraday effect, contrary to ours.

At $\lambda = 1064$ nm and $T = 273.15$ K, we obtain $V^{\mathrm{N}} = (3.46 \pm 0.04) \times 10^{-3}$ atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1}. The 1σ uncertainty includes the one given by the fit. This value is compatible with our experimental value (Eq. (18)), represented as the open circle in Fig. 2 and as the straight and dashed lines in Fig. 3.

2. Theory

We can also compare our experimental value with theoretical predictions (both ours and from the literature), plotted in Fig. 3 and summarized in Table VII at 1 atm, 273.15 K and with the gas number density of an ideal gas. To convert from theoretical results given in atomic units into the units used

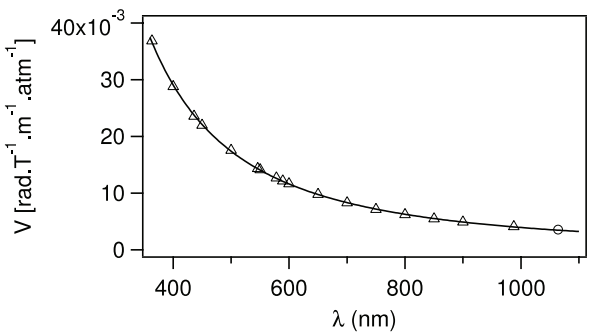


FIG. 2. △: Experimental values of xenon normalized Verdet constant at $T = 273.15$ K reported by Ingersoll and Liebenberg[32] for wavelengths ranging from 363 nm to 987.5 nm. These values are fitted by the law $A/\lambda^2 + B/\lambda^4$ (solid line). ○: Our experimental value at $T = 273.15$ K.

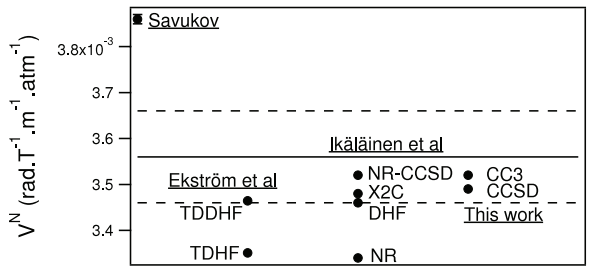


FIG. 3. Normalized Verdet constant of xenon at $T = 273.15$ K at $\lambda = 1064$ m. Solid line: Our experimental mean value. Dashed lines: Our experimental value with 1σ uncertainty. Points: Theoretical predictions (both ours and from the literature). See text and Table VII for the references.

experimentally, we exploited the relation

$$V\ (\mathrm{atm}^{-1}\ \mathrm{rad\ T}^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}) = V\ (\mathrm{a.u.}) \times 8.039\,617 \times 10^4. \tag{33}$$

Our experimental value is compatible within 1σ with our "best" coupled cluster results (t-aug_cc_pvqz_pp basis) and also with the most complete theoretical predictions by Ekström *et al.*[6] and by Ikäläinen *et al.*[34] (see below), and within 3σ with that of Savukov.[35]

The uncertainty of a few percent obtained on our experimental value allows to comment on the agreement with theoretical predictions as a function of the theoretical approximation or model. Savukov[35] has used a relativistic particle-hole configuration interaction (CI) method. He does not give a value at 1064 nm, but the latter can be interpolated, as done with the previous experimental data of Ingersoll and Liebenberg,[32] obtaining the value of Table VII, with an uncertainty given by the fit. The agreement between Savukov's interpolated result and experiment is only within 3σ, even if relativistic effects are taken into account. Ekström *et al.*[6] have used the non-relativistic time-dependent Hartree-Fock (TDHF in Fig. 3) and the relativistic time-dependent Dirac-Hartree-Fock (TDDHF in Fig. 3). There is clearly a better

TABLE VII. Experimental and theoretical values of the normalized Verdet constant at $T = 273.15$ K, $\lambda = 1064$ nm, with uncertainties at 1σ.

References	$V^{\mathrm{N}} \times 10^3$ (atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1})	Remarks
Experiment		
Ingersoll *et al.*[32]	3.46 ± 0.04	Interpolated with $A/\lambda^2 + 2B/\lambda^4$. Scaled to water.
This work	3.56 ± 0.10	
Theory		
Savukov[35]	3.86 ± 0.01	Interpolated in this work with $A/\lambda^2 + B/\lambda^4$.
Ekström *et al.*[6]	3.35	TDHF
Ekström *et al.*[6]	3.46	TDDHF
Ikäläinen *et al.*[34]	3.34	NR
Ikäläinen *et al.*[34]	3.48	X2C
Ikäläinen *et al.*[34]	3.46	DHF
Ikäläinen *et al.*[34]	3.52	NR-CCSD
This work	3.49	CCSD/t-aug_cc_pvqz_pp
This work	3.52	CC3/t-aug_cc_pvqz_pp

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

TABLE VIII. Experimental (uncertainties of 1σ) and theoretical values of the Cotton-Mouton constant of xenon at $T = 273.15$ K.

References	λ (nm)	$k^{N}_{CM} \times 10^{14}$ (T^{-2} atm^{-1})
Experiment		
Carusotto *et al.*[36]	514.5	(2.29 ± 0.10)
Hüttner[37]	632.8	(2.41 ± 0.12)
Bregant *et al.*[38,39]	1064	(3.02 ± 0.27)
This work	1064	(2.59 ± 0.40)
Theory		
Bishop *et al.*[40]	∞	2.665
This work, CCSD/t-aug_cc_pvqz_pp	514.5	2.803
This work, CCSD/t-aug_cc_pvqz_pp	632.8	2.808
This work, CCSD/t-aug_cc_pvqz_pp	1064	2.804
This work, CC3/t-aug_cc_pvqz_pp	514.5	2.778
This work, CC3/t-aug_cc_pvqz_pp	632.8	2.784
This work, CC3/t-aug_cc_pvqz_pp	1064	2.782

agreement (better than 1σ) between their calculations and our experimental value when relativistic effects are taken into account. Finally, Ikäläinen *et al.*[34] have used the non-relativistic Hartree-Fock method (NR in Fig. 3), the exact two-component method (X2C in Fig. 3), and the fully relativistic four-component method (DHF in Fig. 3). The same authors also report (in the supplementary material[34]) a non-relativistic CCSD result (NR-CCSD in Fig. 3). While their uncorrelated results confirm that relativistic effects should be taken into account to improve agreement with experiment, their non-relativistic CCSD result highlights how the inclusion of correlation effects is equally important. Also worth noticing is the rather poor performance of the Becke Lee Yang and Parr (BLYP) and its 3-parameters variant (B3LYP) functionals, which overestimate the value of the Verdet constant in both non-relativistic and relativistic calculations. This also applies for the Becke-Half-and-Half-LYP functional (BHandHLYP) in the relativistic calculations, whereas the non-relativistic BHandHLYP value is still within 1σ of our experimental result (see Table S5 of the supplementary material of Ref. 34).

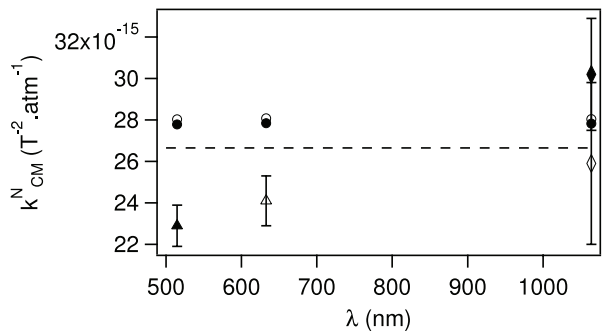


FIG. 4. Reported values of Cotton-Mouton constant of xenon for λ ranging from 514.5 nm to 1064 nm and with 1σ uncertainty. Experimental values: black triangle: Carusotto *et al.*,[36] open triangle: Hüttner (private communication by Bishop *et al.*),[37] black diamond: Bregant *et al.*,[38,39] and open diamond: this work. Theoretical predictions: dashed line: self-consistent-field (SCF) method for λ = ∞ by Bishop,[40] open circle: this work, CCSD, and black circle: this work, CC3.

B. Cotton Mouton effect

1. Experiments

Only a few measurements of the Cotton-Mouton effect in xenon have been discussed in the literature. There is one at λ = 514.5 nm by Carusotto *et al.*,[36] one at λ = 632.8 nm by Hüttner (reported as a private communication by Bishop *et al.*),[37] and finally one at λ = 1064 nm by Bregant *et al.*[38,39] Our experimental value, referring to λ = 1064 nm is compatible within 1σ with the data of Refs. 38 and 39. The set of results is shown in Table VIII and plotted as a function of the wavelength in Fig. 4.

Our measurement has an uncertainty of about 15%. This value, which is larger than that of the other reported values, especially those given for wavelengths of 514.5 nm and 632.8 nm, was established via a complete error budget. Note that no information is available on the setup, the number of pressures, the error budget, and the evaluation of the uncertainty for the value reported at λ = 632.8 nm by Bishop *et al.*[37] as a private communication of Hüttner. The value reported at λ = 514.5 nm by Carusotto *et al.*[36] was measured only at 1 atm, and by comparing the observed magnetic birefringence with that of nitrogen under the same experimental conditions, therefore taking as a reference, assumed as free of uncertainty, the Cotton-Mouton constant of nitrogen. It is safe to say therefore that the uncertainty associated to their datum might be underestimated. Finally, the value reported by Bregant *et al.*[38,39] at λ = 1064 nm corresponds to the weighted average between measurements at two different pressures (9 pressures for our measurement) and the uncertainty is similar to ours.

2. Theory

The Cotton-Mouton constant k_{CM} is linked to $\Delta\eta$ by the relationship[3]

$$k_{CM}\ (\mathrm{atm}^{-1}\ \mathrm{T}^{-2}) = \frac{6.183\,81 \times 10^{-14}}{T}\Delta\eta\ (\mathrm{a.u.}). \quad (34)$$

Only one theoretical prediction has been published so-far for the Cotton-Mouton effect in xenon.[40] The calculation of Bishop and Cybulski was performed at the SCF level of approximation, and it yielded the static hypermagnetizability anisotropy $\Delta\eta$. As stated by the authors, relativistic effects were not taken into account, even though the authors expected them to play a substantial role. Our experimental value agrees with that theoretical prediction within 1σ.

Our computed coupled cluster results, both CCSD and CC3, in the largest (t-aug_cc_pvqz_pp) basis sets for the three wavelengths at which experimental results are available are given in Table VIII. Both the CCSD and CC3 values at 1064 nm are well within 1σ of our experimental measurement, and just within 1σ of the result by Bregant *et al.*[38,39] At 632.8 nm, the agreement of our CC3 value with the experimental result of Hüttner[37] is just outside 3σ. At 514.5 nm, our computed values fall well outside 3σ of the estimate of Carusotto *et al.*[36] This apparently confirms that the error associated to this measured value might be underestimated.

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

VII. CONCLUSION

We have carried out a thorough analysis of the Faraday (circular) and Cotton Mouton (linear) birefringences of xenon, at a wavelength of 1064 nm. The study involves both an experimental segment, exploiting the capabilities of a state-of-the-art optical setup, and a computational element, where sophisticated wavefunction structure and optical response models (and with an estimate of the effect of relativity) were employed.

Our experimental estimate for the normalized Verdet constant of xenon at a temperature of 273.15 K and $\lambda = 1064$ nm, $V^{\mathrm{N}} = (3.56 \pm 0.10) \times 10^{-3}$ atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1}, is very well reproduced by our theoretical approach, which yields a value ($V^{\mathrm{N}} = 3.52 \times 10^{-3}$ atm^{-1} rad T^{-1} m^{-1} using the CC3 approximation) within 1σ of the measured datum.

With respect to the Cotton Mouton effect, at $T = 273.15$ K and $\lambda = 1064$ nm, experiment yields a normalized constant $k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}} = (2.59 \pm 0.40) \times 10^{-14}$ atm^{-1} T^{-2}, whereas we compute (again with our most sophisticated model, CC3) a value of $k^{\mathrm{N}}_{\mathrm{CM}} = 2.78 \times 10^{-14}$ atm^{-1} T^{-2}, therefore within 1σ of experiment.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank all the members of the BMV collaboration, and in particular J. Béard, J. Billette, P. Frings, B. Griffe, J. Mauchain, M. Nardone, J.-P. Nicolin, and G. Rikken for strong support. We are also indebted to the whole technical staff of LNCMI. Sonia Coriani acknowledges useful discussions with Lucas Visscher and Trond Saue. We acknowledge the support of the *Fondation pour la recherche IXCORE* and the *Agence National de la Recherche* (Grant No. ANR-14-CE32-0006).

[1]L. D. Barron, *Molecular Light Scattering and Optical Activity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
[2]A. Rizzo and S. Coriani, "Birefringences: A challenge for both theory and experiment," Adv. Quantum Chem. **50**, 143–184 (2005).
[3]C. Rizzo, A. Rizzo, and D. M. Bishop, "The Cotton-Mouton effect in gases: Experiment and theory," Int. Rev. Phys. Chem. **16**, 81–111 (1997).
[4]T. Helgaker, S. Coriani, P. Jørgensen, K. Kristensen, J. Olsen, and K. Ruud, "Recent advances in wave function-based methods of molecular-property calculations," Chem. Rev. **112**, 543–631 (2012).
[5]O. Christiansen, C. Hättig, and P. Jørgensen, "Response functions from Fourier component variational perturbation theory applied to a time-averaged quasienergy," Int. J. Quantum Chem. **68**, 1–52 (1998).
[6]U. Ekström, P. Norman, and A. Rizzo, "Four-component Hartree–Fock calculations of magnetic-field induced circular birefringence—Faraday effect—in noble gases and dihalogens," J. Chem. Phys. **122**, 074321 (2005).
[7]G. D. Purvis and R. J. Bartlett, "A full coupled cluster singles and doubles model: The inclusion of disconnected triples," J. Chem. Phys. **76**, 1910 (1982).
[8]H. Koch, A. S. de Meras, T. Helgaker, and O. Christiansen, "The integral-direct coupled cluster singles and doubles model," J. Chem. Phys. **104**, 4157 (1996).
[9]C. Hättig, O. Christiansen, H. Koch, and P. Jørgensen, "Frequency-dependent first hyperpolarizabilities using coupled cluster quadratic response theory," Chem. Phys. Lett. **269**, 428 (1997).
[10]H. Koch, O. Christiansen, P. Jørgensen, A. Sanchez de Merás, and T. Helgaker, "The CC3 model: An iterative coupled cluster approach including connected triples," J. Chem. Phys. **106**, 1808 (1997).
[11]O. Christiansen, H. Koch, and P. Jørgensen, "Response functions in the CC3 iterative triple excitation model," J. Chem. Phys. **103**, 7429 (1995).
[12]J. Gauss, O. Christiansen, and J. F. Stanton, "Triple excitation effects in coupled-cluster calculations of frequency-dependent hyperpolarizabilities," Chem. Phys. Lett. **296**, 117 (1998).
[13]F. Pawlowski, "Development and implementation of CC3 response theory for calculation of frequency-dependent molecular properties. Benchmarking of static molecular properties," Ph.D. thesis (Aarhus University, 2004).
[14]R. Battesti, B. Pinto Da Souza, S. Batut, C. Robilliard, G. Bailly, C. Michel, M. Nardone, L. Pinard, O. Portugall, G. Trénec, J.-M. Mackowski, G. L. Rikken, J. Vigué, and C. Rizzo, "The BMV experiment: A novel apparatus to study the propagation of light in a transverse magnetic field," Eur. Phys. J. D **46**, 323–333 (2008).
[15]A. Cadène, D. Sordes, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, and C. Rizzo, "Faraday and Cotton-Mouton effects of helium at $\lambda = 1064$ nm," Phys. Rev. A **88**, 043815 (2013).
[16]A. Cadène, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, and C. Rizzo, "Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields: Status of the BMV experiment," Eur. Phys. J. D **68**, 16 (2014).
[17]P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, and C. Rizzo, "Magnetic linear birefringence measurements using pulsed fields," Phys. Rev. A **85**, 013837 (2012).
[18]R. V. Pound, "Electronic frequency stabilization of microwave oscillators," Rev. Sci. Instrum. **17**, 490–505 (1946).
[19]P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, F. Bielsa, J. Mauchain, and C. Rizzo, "Dynamical behaviour of birefringent Fabry-Pérot cavities," Appl. Phys. B: Lasers Opt. **100**, 803–809 (2010).
[20]S. Batut, J. Mauchain, R. Battesti, C. Robilliard, M. Fouché, and O. Portugall, "A transportable pulsed magnet system for fundamental investigations in quantum electrodynamics and particle physics," IEEE Trans. Appl. Supercond. **18**, 600–603 (2008).
[21]S. Coriani, C. Hättig, P. Jørgensen, A. Halkier, and A. Rizzo, "Coupled cluster calculations of Verdet constants," Chem. Phys. Lett. **281**, 445–451 (1997).
[22]S. Coriani, C. Hättig, P. Jørgensen, A. Halkier, and A. Rizzo, "Erratum: "Coupled cluster calculations of Verdet constants" [Chem. Phys. Lett. **281**, 445 (1997)]," Chem. Phys. Lett. **293**, 324 (1998).
[23]S. Coriani, P. Jørgensen, O. Christiansen, and J. Gauss, "Triple excitation effects in coupled cluster calculations of Verdet constants," Chem. Phys. Lett. **330**, 463–470 (2000).
[24]S. Coriani, C. Hättig, and A. Rizzo, "The electric-field-gradient-induced birefringence of Helium, Neon, Argon, and SF_6," J. Chem. Phys. **111**, 7828–7836 (1999).
[25]C. Hättig, O. Christiansen, and P. Jørgensen, "Cauchy moments and dispersion coefficients using coupled cluster linear response theory," J. Chem. Phys. **107**, 10592 (1997).
[26]C. Hättig and P. Jørgensen, "Dispersion coefficients for first hyperpolarizabilities using coupled cluster quadratic response theory," Theor. Chem. Acc. **100**, 230 (1998).
[27]M. Dolg, "Effective core potentials," in *Modern Methods and Algorithms of Quantum Chemistry*, NIC Series Vol. 1, edited by J. Grotendorst (John von Neumann Institute for Computing, Jülich, 2000), pp. 479–508.
[28]K. Peterson, D. Figgen, E. Goll, H. Stoll, and M. Dolg, "Systematically convergent basis sets with relativistic pseudopotentials. II. Small-core pseudopotentials and correlation consistent basis sets for the post-d group 16-18 elements," J. Chem. Phys. **119**, 11113 (2003).
[29]T. Saue, "Spin-interactions and the non-relativistic limit of electrodynamics," Adv. Quantum Chem. **48**, 383–405 (2005).
[30]T. Saue, "Relativistic Hamiltonians for chemistry: A primer," ChemPhysChem **12**, 3077–3094 (2011).
[31]K. Aidas, C. Angeli, K. L. Bak, V. Bakken, R. Bast, L. Boman, O. Christiansen, R. Cimiraglia, S. Coriani, P. Dahle, E. K. Dalskov, U. Ekström, T. Enevoldsen, J. J. Eriksen, P. Ettenhuber, B. Fernández, L. Ferrighi, H. Fliegl, L. Frediani, K. Hald, A. Halkier, C. Hättig, H. Heiberg, T. Helgaker, A. C. Hennum, H. Hettema, E. Hjertenæs, S. Høst, I.-M. Høyvik, M. F. Iozzi, B. Jansik, H. J. A. Jensen, D. Jonsson, P. Jørgensen, J. Kauczor, S. Kirpekar, T. Kjærgaard, W. Klopper, S. Knecht, R. Kobayashi, H. Koch, J. Kongsted, A. Krapp, K. Kristensen, A. Ligabue, O. B. Lutnæs, J. I. Melo, K. V. Mikkelsen, R. H. Myhre, C. Neiss, C. B. Nielsen, P. Norman, J. Olsen, J. M. H. Olsen, A. Osted, M. J. Packer, F. Pawlowski, T. B. Pedersen, P. F. Provasi, S. Reine, Z. Rinkevicius, T. A. Ruden, K. Ruud, V. Rybkin, P. Salek, C. C. M. Samson, A. S. de Merás, T. Saue, S. P. A. Sauer, B. Schimmelpfennig, K. Sneskov, A. H. Steindal, K. O. Sylvester-Hvid, P. R. Taylor, A. M. Teale, E. I. Tellgren, D. P. Tew, A. J. Thorvaldsen, L. Thøgersen, O. Vahtras, M. A. Watson, D. J. D. Wilson, M. Ziolkowski, and H. Ågren, "The Dalton quantum chemistry program system," WIREs: Comput. Mol. Sci. **4**, 269–284 (2014).

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

[32]L. R. Ingersoll and D. H. Liebenberg, "Faraday effect in gases and vapors II," J. Opt. Soc. Am. **46**, 538–542 (1956).
[33]L. Rosenfeld, "Zur Theorie des Faradayeffekts," Z. Phys. **57**, 835 (1929).
[34]S. Ikäläinen, P. Lantto, and J. Vaara, "Fully relativistic calculations of Faraday and nuclear spin-induced optical rotation in xenon," J. Chem. Theory Comput. **8**, 91 (2012).
[35]I. M. Savukov, "Particle-hole configuration-interaction polarizabilities and Verdet constants of noble-gas atoms," Phys. Rev. A **85**, 052512 (2012).
[36]S. Carusotto, E. Iacopini, E. Polacco, F. Scuri, G. Stefanini, and E. Zavattini, "Measurement of the magnetic birefringence of noble gases," J. Opt. Soc. Am. B **1**, 635–640 (1984).
[37]D. M. Bishop and J. Pipin, "Hypermagnetizability anisotropy (Cotton-Mouton effect) for the rare gases and methane," Chem. Phys. Lett. **186**, 195–197 (1991).
[38]M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. Di Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, E. Milotti, E. Polacco, G. Ruoso, E. Zavattini, and G. Zavattini, "Measurement of the Cotton-Mouton effect in krypton and xenon at 1064 nm with the PVLAS apparatus," Chem. Phys. Lett. **392**, 276–280 (2004).
[39]M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. Di Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, V. Lozza, E. Milotti, E. Polacco, G. Raiteri, G. Ruoso, E. Zavattini, and G. Zavattini, "Erratum: 'Measurement of the Cotton-Mouton effect in krypton and xenon at 1064 nm with the PVLAS apparatus' [Chem. Phys. Lett. **392**, 276 (2004)] and 'A precise measurement of the Cotton-Mouton effect in neon' [Chem. Phys. Lett. **410**, 288 (2005)]," Chem. Phys. Lett. **477**, 415 (2009).
[40]D. M. Bishop and S. M. Cybulski, "Calculation of electromagnetic properties of the noble gases," Chem. Phys. Lett. **211**, 255–258 (1993).

This article is copyrighted as indicated in the article. Reuse of AIP content is subject to the terms at: http://scitation.aip.org/termsconditions. Downloaded to IP: 130.120.44.165 On: Tue, 31 Mar 2015 08:46:04

Bibliographie

[1] M. Faraday, "Experimental Researches in Electricity. Nineteenth Series", *Phil. Trans. R. Soc.* **136**, 1 (1846).

[2] J. Kerr, *Br. Assoc. Rep.* **568**, (1901).

[3] Q. Majorana, *Rend. Accad. Lincei* **11**, 374 (1902).

[4] Q. Majorana, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Paris* **135**, 159 (1902).

[5] A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci., Paris* **141**, 317 (1905).

[6] A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci., Paris* **141**, 349 (1905).

[7] A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci., Paris* **142**, 203 (1906).

[8] A. Cotton et H. Mouton, *C. R. Hebd. Séances Acad. Sci., Paris* **145**, 229 (1907).

[9] A. Cotton et H. Mouton, *Ann. Chem. Phys.* **11**, 145 (1907).

[10] A. Cotton et H. Mouton, *Ann. Chem. Phys.* **11**, 289 (1907).

[11] W. Voigt, *Magneto- und Elecktrooptik* (Leipzig, B. G. Teubner, 1908).

[12] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik)* (Leipzig, Berlin, B. G. Teubner, 1910).

[13] C. Rizzo, A. Rizzo, et D. M. Bishop, "The Cotton-Mouton effect in gases : experiment and theory", *Int. Rev. Phys. Chem.* **16**, 81 (1997).

[14] P. A. M. Dirac, "Théorie du positron", *Rapport du 7me Conseil Solvay de Physique, Structure et Propriétés des Noyaux Atomiques* **203**, (1934).

[15] R. Battesti et C. Rizzo, "Magnetic and electric properties of a quantum vacuum", *Rep. Prog. Phys.* **76**, 016401 (2013).

[16] H. Euler et B. Kochel, "Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie", *Naturwiss.* **23**, 246 (1935).

[17] H. Euler, "Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie", *Annalen der Physik* **418**, 398 (1936).

[18] W. Heisenberg et H. Euler, "Folgerungen aus der Diracschen, Theorie des Positrons", *Zeitschrift für Physik* **98**, 714 (1936).

[19] O. Halpern, "Scattering Processes Produced by Electrons in Negative Energy States", *Phys. Rev.* **44**, 855 (1933).

[20] G. Breit et J. A. Wheeler, "Collision of Two Light Quanta", *Phys. Rev.* **46**, 1087 (1934).

[21] V. B. Berestetskii, E. Lifshitz, et L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics - Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics - Vol. 4*, 2nd éd. (Pergamon, 1982).

[22] V. Weisskopf, *K. Dan. Vidensk. Selskl. Mat-Fys. Medd.* **14**, 6 (1936).

[23] Z. Bialynicka-Birula et I. Bialynicki-Birula, "Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field", *Phys. Rev. D* **2**, 2341 (1970).

[24] R. Karplus et M. Neuman, "Non-Linear Interactions between Electromagnetic Fields", *Phys. Rev.* **80**, 380 (1950).

[25] J. Schwinger, "On gauge invariance and vacuum polarization", *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).

[26] S. L. Adler, "Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field", *Ann. Phys.* **67**, 599 (1971).

[27] J. M. Jauch et K. M. Watson, "Phenomenological Quantum-Electrodynamics", *Phys. Rev.* **74**, 950 (1948).

[28] D. Bakalov, F. Brandi, G. Cantatore, G. Carugno, S. Carusotto, F. Della Valle, A. M. D. Riva, U. Gastaldi, E. Iacopini, P. Micossi, E. Milotti, R. Onofrio, R. Pengo, F. Perrone, G. Petrucci, E. Polacco, C. Rizzo, G. Ruoso, E. Zavattini, et G. Zavattini, "Experimental method to detect the magnetic birefringence of vacuum", *Quantum and Semiclass. Opt.* **10**, 239 (1998).

[29] V. I. Ritus, "Lagrangian of an intense electromagnetic field and quantum electrodynamics at short distances", *Sov. Phys. JETP* **42**, 774 (1976).

[30] P. J. Mohr, B. N. Taylor, et D. B. Newell, "CODATA recommended values of the fundamental physical constants : 2010", *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1527 (2012).

[31] F. Biraben, "Spectroscopy of atomic hydrogen", *Eur. Phys. J. Special Topics* **172**, 109 (2009).

[32] M. Fischer, N. Kolachevsky, M. Zimmermann, R. Holzwarth, T. Udem, T. W. Hänsch, M. Abgrall, J. Grünert, I. Maksimovic, S. Bize, H. Marion, F. P. D. Santos, P. Lemonde, G. Santarelli, P. Laurent, A. Clairon, C. Salomon, M. Haas, U. D. Jentschura, et C. H. Keitel, "New Limits on the Drift of Fundamental Constants from Laboratory Measurements", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 230802 (2004).

[33] O. Arnoult, F. Nez, L. Julien, et F. Biraben, "Optical frequency measurement of the 1S-3S two-photon transition in hydrogen", *Eur. Phys. J. D* **60**, 243 (2010).

[34] C. G. Parthey, A. Matveev, J. Alnis, B. Bernhardt, A. Beyer, R. Holzwarth, A. Maistrou, R. Pohl, K. Predehl, T. Udem, T. Wilken, N. Kolachevsky, M. Abgrall, D. Rovera, C. Salomon, P. Laurent, et T. W. Hänsch, "Improved Measurement of the Hydrogen 1S-2S Transition Frequency", *Phys. Rev. Lett.* **107**, 203001 (2011).

[35] D. Hanneke, S. Fogwell, et G. Gabrielse, "New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant", *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (2008).

[36] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, et G. Gabrielse, "Cavity control of a single-electron quantum cyclotron : Measuring the electron magnetic moment", *Phys. Rev. A* **83**, 052122 (2011).

[37] R. Bouchendira, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, F. Nez, et F. Biraben, "New Determination of the Fine Structure Constant and Test of the Quantum Electrodynamics", *Phys. Rev. Lett.* **106**, 080801 (2011).

[38] A. D. Buckingham et P. J. Stephens, "Magnetic Optical Activity", *Ann. Rev. Phys. Chem.* **17**, 399 (1966).

[39] J.-P. Pérez, *Optique, Fondements et Applications*, 7 éd. (Dunod, 2004).

[40] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2 éd. (Wiley (New York), 1975).

[41] R. Feynman, R. Leighton, et M. Sands, *The Feynman lectures on physics - Vol. 1* (Addison-Wesley publishing company, 1963).

[42] A. D. Buckingham et J. A. Pople, "A Theory of Magnetic Double Refraction", *Proc. Phys. Soc. B* **69**, 1133 (1956).

[43] A. Rizzo et S. Coriani, dans *Response Theory and Molecular Properties (A Tribute to Jan Linderberg and Poul Jørgensen)*, Vol. 50 de *Advances in Quantum Chemistry*, (Academic Press, 2005), pp. 143–184.

[44] C. Rizzo, "L'effet Cotton-Mouton du vide : un siècle d'histoire", *Bulletin de la S.F.P.* **122**, 8 (1999).

[45] E. W. Morley, H. T. Eddy, et D. C. Miller, *Bul. Western Reserve U.* **1**, 50 (1898).

[46] M. Born et E. Wolf, *Principles of optics*, 6 éd. (Pergamon Press, 1983).

[47] C. C. Farr et C. J. Banwell, "Velocity of Propagation of Light in Vacuo in a Transverse Magnetic Field", *Proc. R. Soc. Lond. A* **137**, 275 (1932).

[48] C. J. Banwell et C. C. Farr, "Further Investigation of the Velocity of Propagation of Light in vacuo in a Transverse Magnetic Field", *Proc. R. Soc. Lond. A* **175**, 1 (1940).

[49] A. M. Grassi Strini, G. Strini, et G. Tagliaferri, "Testability of non-linear electrodynamics", *Phys. Rev. D* **19**, 2330 (1979).

[50] W.-T. Ni, K. Tsubono, N. Mio, K. Narihara, S.-C. Chen, S.-K. King, et S.-S. Pan, "Test of quantum electrodynamics using ultra-high sensitive interferometers", *Mod. Phys. Lett. A* **6**, 3671 (1991).

[51] G. Zavattini et E. Calloni, "Probing for new physics and detecting non-linear vacuum QED effects using gravitational wave interferometer antennas", *Eur. Phys. J. C* **62**, 459 (2009).

[52] B. Döbrich et H. Gies, "Interferometry of light propagation in pulsed fields", *Europhys. Lett.* **87**, 21002 (2009).

[53] H. Grote, "On the possibility of vacuum QED measurements with gravitational wave detectors", *Phys. Rev. D* **91**, 022002 (2015).

[54] L. R. Ingersoll et D. H. Liebenberg, "The Faraday Effect in Gases and Vapors. I", *J. Opt. Soc. Am.* **44**, 566 (1954).

[55] L. R. Ingersoll et D. H. Liebenberg, "Faraday Effect in Gases and Vapors. II", *J. Opt. Soc. Am.* **46**, 538 (1956).

[56] L. R. Ingersoll et D. H. Liebenberg, "Faraday Effect in Gases and Vapors. III", *J. Opt. Soc. Am.* **48**, 339 (1958).

[57] J. U. White, "Long Optical Paths of Large Aperture", *J. Opt. Soc. Am.* **32**, 285 (1942).

[58] A. D. Buckingham, W. H. Prichard, et D. H. Whiffen, "Magnetic birefringence of some diamagnetic gases", *Trans. Faraday Soc.* **63**, 1057 (1967).

[59] T. Erber, "Velocity of light in a magnetic field", *Nature* **190**, 25 (1961).

[60] E. Iacopini et E. Zavattini, "Experimental method to detect the vacuum birefringence induced by a magnetic field", *Phys. Lett. B* **85**, 151 (1979).

[61] R. Cameron, H. Halama, F. A. Nezrick, C. Rizzo, E. Zavattini, A. Prodell, G. Cantatore, A. C. Melissinos, J. Rogers, et Y. Semertzidis, "Measurement of the magnetic birefringence of neon gas", *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 520 (1991).

[62] R. Cameron, G. Cantatore, A. C. Melissinos, Y. Semertzidis, H. Halama, D. Lazarus, A. Prodell, F. Nezrick, P. Micossi, C. Rizzo, G. Ruoso, et E. Zavattini, "First measurement of the magnetic birefringence of helium gas", *Phys. Lett. A* **157**, 125 (1991).

[63] R. Cameron, G. Cantatore, A. C. Melissinos, G. Ruoso, Y. Semertzidis, H. J. Halama, D. M. Lazarus, A. G. Prodell, F. Nezrick, C. Rizzo, et E. Zavattini, "Search for nearly massless, weakly coupled particles by optical techniques", *Phys. Rev. D* **47**, 3707 (1993).

[64] Bureau International des Poids et Mesures, "*Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure*", (2008) http ://www.bipm.org.

[65] D. Bakalov, G. Cantatore, G. Carugno, S. Carusotto, P. Favaron, F. Della Valle, I. Gabrielli, U. Gastaldi, E. Iacopini, P. Micossi, E. Milotti, R. Onofrio, R. Pengo, F. Perrone, G. Petrucci, E. Polacco, C. Rizzo, G. Ruoso, E. Zavattini, et G. Zavattini, "PVLAS : Vacuum Birefringence and production and detection of nearly massless, weakly coupled particles by optical techniques. ", *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **35**, 18 (1994).

[66] E. Zavattini, G. Zavattini, G. Ruoso, G. Raiteri, E. Polacco, E. Milotti, V. Lozza, M. Karuza, U. Gastaldi, G. D. Domenico, F. Della Valle, R. Cimino, S. Carusotto, G. Cantatore, et M. Bregant, "New PVLAS results and limits on magnetically induced optical rotation and ellipticity in vacuum", *Phys. Rev. D* **77**, 032006 (2008).

[67] G. Zavattini, U. Gastaldi, R. Pengo, G. Ruoso, F. Della Valle, et E. Milotti, "Measuring the magnetic birefringence of vacuum : the PVLAS experiment", *Int. J. Mod.Phys. A* **27**, 1260017 (2012).

[68] H.-H. Mei, W.-T. Ni, S.-J. Chen, et S.-S. Pan, "Axion search with Q & A experiment", *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 983 (2010).

[69] S. Askenazy, J. Billette, P. Dupre, P. Ganau, J. Mackowski, J. Marquez, L. Pinard, O. Portugall, D. Ricard, G. L. J. A. Rikken, C. Rizzo, G. Trenec, et J. Vigué, "A 25 T dipole pulsed magnet to study the magnetic birefringence of vacuum : the BMV project", *AIP Conf. Proc.* **564**, 115 (2001).

[70] R. Battesti, B. Pinto Da Souza, S. Batut, C. Robilliard, G. Bailly, C. Michel, M. Nardone, L. Pinard, O. Portugall, G. Trénec, J.-M. Mackowski, G. L. J. A. Rikken, J. Vigué, et C. Rizzo, "The BMV experiment : a novel apparatus to study the propagation of light in a transverse magnetic field", *Eur. Phys. J. D* **46**, 323 (2008).

[71] P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, et C. Rizzo, “Magnetic linear birefringence measurements using pulsed fields”, *Phys. Rev. A* **85**, 013837 (2012).

[72] P. Berceau, *Propagation de photons sous champs magnétiques intenses. Etude expérimentale de la biréfringence magnétique du vide.*, Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, (2012) tel-00766215 version 1.

[73] M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. D. Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, E. Milotti, E. Polacco, G. Ruoso, E. Zavattini, et G. Zavattini, “Measurement of the Cotton-Mouton effect in krypton and xenon at 1064 nm with the PVLAS apparatus”, *Chem. Phys. Lett.* **392**, 276 (2004).

[74] M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. D. Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, E. Milotti, E. Polacco, G. Ruoso, E. Zavattini, et G. Zavattini, “A precise measurement of the Cotton-Mouton effect in neon”, *Chem. Phys. Lett.* **410**, 288 (2005).

[75] M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. D. Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, V. Lozza, E. Milotti, E. Polacco, G. Raiteri, G. Ruoso, E. Zavattini, et G. Zavattini, “New precise measurement of the Cotton-Mouton effect in helium”, *Chem. Phys. Lett.* **471**, 322 (2009).

[76] M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. D. Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, V. Lozza, E. Milotti, E. Polacco, G. Raiteri, G. Ruoso, E. Zavattini, et G. Zavattini, “Erratum to "Measurement of the Cotton-Mouton effect in krypton and xenon at 1064 nm with the PVLAS apparatus" [Chem. Phys. Lett. 392 (2004) 276] and "A precise measurement of the Cotton-Mouton effect in neon" [Chem. Phys. Lett. 410 (2005) 288]”, *Chem. Phys. Lett.* **477**, 415 (2009).

[77] F. Della Valle, A. Ejlli, U. Gastaldi, G. Messineo, E. Milotti, R. Pengo, L. Piemontese, G. Ruoso, et G. Zavattini, “Measurement of the Cotton-Mouton effect of water vapour”, *Chem. Phys. Lett.* **592**, 288 (2014).

[78] H.-H. Mei, W.-T. Ni, S.-J. Chen, et S.-S. Pan, “Measurement of the Cotton-Mouton effect in nitrogen, oxygen, carbon dioxide, argon, and krypton with the Q & A apparatus”, *Chem. Phys. Lett.* **471**, 216 (2009).

[79] A. Cadène, D. Sordes, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, et C. Rizzo, “Faraday and Cotton-Mouton effects of helium at λ=1064 nm”, *Phys. Rev. A* **88**, 043815 (2013).

[80] P. Pugnat, M. Král, A. Siemko, L. Duvillaret, M. Finger, et J. Zicha, “Feasibility study of an experiment to measure the vacuum magnetic birefringence”, *Czechoslovak Journal of Physics* **55**, A389 (2005).

[81] A. N. Luiten et J. C. Petersen, “Detection of vacuum birefringence using intense laser pulses”, *Phys. Lett. A* **330**, 429 (2004).

[82] A. N. Luiten et J. C. Petersen, “Erratum to : "On detection of vacuum birefringence using intense laser pulses" [Phys. Lett. A 330 (2004) 429]”, *Phys. Lett. A* **346**, 385 (2005).

[83] T. Heinzl, B. Liesfeld, K.-U. Amthor, H. Schwoerer, R. Sauerbrey, et A. Wipf, “On the observation of vacuum birefringence”, *Opt. Commun.* **267**, 318 (2006).

[84] H. Gies, “Strong laser fields as a probe for fundamental physics”, *Eur. Phys. J. D* **55**, 311 (2009).

[85] S. Villalba-Chávez et C. Müller, “Searching for minicharged particles via birefringence, dichroism and Raman spectroscopy of the vacuum polarized by a high-intensity laser wave”, *Ann. Phys.* **339**, 460 (2013).

[86] G. Cantatore, F. Della Valle, E. Milotti, L. Dabrowski, et C. Rizzo, “Proposed measurement of the vacuum birefringence induced by a magnetic field on high energy photons”, *Phys. Lett. B* **265**, 418 (1991).

[87] T. N. Wistisen et U. I. Uggerhøj, “Vacuum birefringence by Compton backscattering through a strong field”, *Phys. Rev. D* **88**, 053009 (2013).

[88] E. A. Donley, T. P. Heavner, F. Levi, M. O. Tataw, et S. R. Jefferts, “Double-pass acousto-optic modulator system”, *Rev. Sci. Instrum.* **76**, 063112 (2005).

[89] R. C. Jones, “A New Calculus for the Treatment of Optical Systems”, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 488 (1941).

[90] A. Yariv et P. Yey, *Photonics, optical electronics in modern communication* (Oxford University Press, 2007).

[91] F. Bielsa, A. Dupays, M. Fouché, R. Battesti, C. Robilliard, et C. Rizzo, “Birefringence of interferential mirrors at normal incidence”, *Appl. Phys. B* **97**, 457 (2009).

[92] G. Grynberg, A. Aspect, et C. Fabre, *Introduction aux lasers et à l'optique quantique* (Ellipses, 1997).

[93] H. Kogelnik et T. Li, “Laser Beams and Resonators”, *Appl. Opt.* **5**, 1550 (1966).

[94] G. Rempe, R. Lalezari, R. J. Thompson, et H. J. Kimble, "Measurement of ultralow losses in an optical interferometer", *Opt. Lett.* **17**, 363 (1992).

[95] J. Millo, D. V. Magalhães, C. Mandache, Y. Le Coq, E. M. L. English, P. G. Westergaard, J. Lodewyck, S. Bize, P. Lemonde, et G. Santarelli, "Ultrastable lasers based on vibration insensitive cavities", *Phys. Rev. A* **79**, 053829 (2009).

[96] The Virgo Collaboration, "Measurement of the optical parameters of the VIRGO interferometer", *Appl. Opt.* **46**, 3466 (2007).

[97] M. Rakhmanov, F. Bondu, O. Debieu, et R. L. Savage Jr., "Characterization of the LIGO 4 km Fabry-Perot cavities via their high-frequency dynamic responses to length and laser frequency variations", *Class. and Quantum Grav.* **21**, S487 (2004).

[98] F. Della Valle, E. Milotti, A. Ejlli, U. Gastaldi, G. Messineo, L. Piemontese, G. Zavattini, R. Pengo, et G. Ruoso, "Extremely long decay time optical cavity", *Opt. Express* **22**, 11570 (2014).

[99] M. A. Bouchiat et L. Pottier, "Light-polarization modifications in a multipass cavity", *Appl. Phys. B* **29**, 43 (1982).

[100] S. Carusotto, E. Polacco, E. Iacopini, G. Stefanini, E. Zavattini, et F. Scuri, "The ellipticity introduced by interferential mirrors on a linearly polarized light beam orthogonally reflected", *Appl. Phys. B* **48**, 231 (1989).

[101] P. Micossi, F. Della Valle, E. Milotti, E. Zavattini, C. Rizzo, et G. Ruoso, "Measurement of the birefringence properties of the reflecting surface of an interferential mirror", *Appl. Phys. B* **57**, 95 (1993).

[102] D. Jacob, M. Vallet, F. Bretenaker, A. L. Floch, et M. Oger, "Supermirror phase anisotropy measurement", *Opt. Lett.* **20**, 671 (1995).

[103] W.-T. Ni, "Cryogenic Test and Interferometric Test of QED and Search for Axions and Anomalous Spin-Dependent Interactions", *Chin. J. Phys.* **34**, 962 (1996).

[104] C. Wood, S. C. Bennett, J. L. Roberts, D. Cho, et C. E. Wieman, "Birefringence, Mirrors and Parity Violation", *Opt. Photo. News* **7**, 54 (1996).

[105] S. Moriwaki, H. Sakaida, T. Yuzawa, et N. Mio, "Measurement of the residual birefringence of interferential mirrors using Fabry-Perot cavity", *Appl. Phys. B* **65**, 347 (1997).

[106] F. Brandi, F. Della Valle, A. M. De Riva, P. Micossi, F. Perrone, C. Rizzo, G. Ruoso, et G. Zavattini, "Measurement of the phase anisotropy of very high reflectivity interferential mirrors", *Appl. Phys. B* **65**, 351 (1997).

[107] J. Y. Lee, H.-W. Lee, J. W. Kim, Y. S. Yoo, et J. W. Hahn, "Measurement of ultralow supermirror birefringence by use of the polarimetric differential cavity ringdown technique", *Appl. Opt.* **39**, 1941 (2000).

[108] J. Morville et D. Romanini, "Sensitive birefringence measurement in a high-finesse resonator using diode laser optical self-locking", *Appl. Phys. B* **74**, 495 (2002).

[109] H. Huang et K. K. Lehmann, "Effects of linear birefringence and polarization-dependent loss of supermirrors in cavity ring-down spectroscopy", *Appl. Opt.* **47**, 3817 (2008).

[110] T. Yoshino, "Reflection Anisotropy of 6328 A Laser Mirrors", *Jap. J. Appl. Phys.* **18**, 1503 (1979).

[111] M. Durand, *Maintien du couplage optique entre une ECDL et une cavité de haute finesse : application à la mesure ultrasensible de biréfringence induite par effet Kerr*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, (2009) tel-00432201, version 2.

[112] R. V. Pound, "Electronic Frequency Stabilization of Microwave Oscillators", *Rev. Sci. Instrum.* **17**, 490 (1946).

[113] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, et H. Ward, "Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator", *Appl. Phys. B* **31**, 97 (1983).

[114] E. D. Black, "An introduction to Pound Drever Hall laser frequency stabilization", *Am. J. Phys.* **69**, 79 (2001).

[115] P. Benoist-Gueutal et M. Courbage, *Mathématiques pour la physique - Tome 2* (Eyrolles, 1994).

[116] M. Rivoire et J.-L. Ferrier, *Cours d'automatique, tome 2 : asservissement, régulation, commande automatique.* (Eyrolles, 1996).

[117] G. L. J. A. Rikken, "Magnetic field installation and QED", *IESC Proceedings* 03006 (2012).

[118] S. Batut, J. Mauchain, R. Battesti, C. Robilliard, M. Fouché, et O. Portugall, "A Transportable Pulsed Magnet System for Fundamental Investigations in Quantum Electrodynamics and Particle Physics", *Appl. Supercond., IEEE Trans.* **18**, 600 (2008).

[119] F. Herlach, "Pulsed magnets", *Rep. Prog. Phys.* **62**, 859 (1999).

[120] NIST collaboration, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 92 éd. (CRC Press, 2012).

[121] G. Rommel, *Notions de base en technique du vide* (Editions SFV, 1995).

[122] U. Ekström, P. Norman, et A. Rizzo, "Four-component Hartree-Fock calculations of magnetic-field induced circular birefringence -Faraday effect- in noble gases and dihalogens", *J. Chem. Phys.* **122**, 074321 (2005).

[123] S. Coriani, C. Hattig, et A. Rizzo, "The electric-field-gradient-induced birefringence of Helium, Neon, Argon, and SF_6", *J. Chem. Phys.* **111**, 7828 (1999).

[124] D. M. Bishop et S. M. Cybulski, "Calculation of electromagnetic properties of the noble gases", *Chem. Phys. Lett.* **211**, 255 (1993).

[125] P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, F. Bielsa, J. Mauchain, et C. Rizzo, "Dynamical behaviour of birefringent Fabry-Perot cavities", *Appl. Phys. B* **100**, 803 (2010).

[126] A. Cadène, M. Fouché, A. Rivère, R. Battesti, S. Coriani, A. Rizzo, et C. Rizzo, "Circular and linear magnetic birefringences in xenon at $\lambda =$ 1064 nm", *J. Chem. Phys.* **142**, 124313 (2015).

[127] E. Iacopini, G. Stefanini, et E. Zavattini, "Effects of a magnetic field on the optical properties of dielectric mirrors", *Appl. Phys. A* **32**, 63 (1983).

[128] L. Rosenfeld, "Zur Theorie des Faradayeffekts", *Z. Physik* **57**, 835 (1929).

[129] I. M. Savukov, "Particle-hole configuration-interaction polarizabilities and Verdet constants of noble-gas atoms", *Phys. Rev. A* **85**, 052512 (2012).

[130] S. Coriani, C. Hättig, P. Jørgensen, A. Halkier, et A. Rizzo, "Coupled cluster calculations of Verdet constants", *Chem. Phys. Lett.* **281**, 445 (1997).

[131] S. Ikäläinen, P. Lantto, et J. Vaara, "Fully Relativistic Calculations of Faraday and Nuclear Spin-Induced Optical Rotation in Xenon", *J. Chem. Theory Comput.* **8**, 91 (2012).

[132] A. Cadène, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti, et C. Rizzo, "Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields : status of the BMV experiment", *Eur. Phys. J. D* **68**, (2014).

[133] F. Brandi, F. Della Valle, P. Micossi, A. M. D. Riva, G. Zavattini, F. Perrone, C. Rizzo, et G. Ruoso, "Cotton-Mouton effect of molecular oxygen : a novel measurement", *J. Opt. Soc. Am. B* **15**, 1278 (1998).

[134] K. Muroo, N. Ninomiya, M. Yoshino, et Y. Takubo, "Measurement of the Cotton-Mouton constants of noble atoms", *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 2249 (2003).

[135] G. Bialolenker, E. Polacco, C. Rizzo, et G. Ruoso, "First evidence for the linear magnetic birefringence of the reflecting surface of interferential mirrors", *Appl. Phys. B* **68**, 703 (1999).

[136] S. Carusotto, E. Iacopini, E. Polacco, F. Scuri, G. Stefanini, et E. Zavattini, "Measurement of the magnetic birefringence of noble gases", *J. Opt. Soc. Am. B* **1**, 635 (1984).

[137] D. M. Bishop et J. Pipin, "Hypermagnetizability anisotropy (Cotton-Mouton effect) for the rare gases and methane", *Chem. Phys. Lett.* **186**, 195 (1991).

[138] F. Della Valle, E. Milotti, A. Ejlli, G. Messineo, L. Piemontese, G. Zavattini, U. Gastaldi, R. Pengo, et G. Ruoso, "First results from the new PVLAS apparatus : A new limit on vacuum magnetic birefringence", *Phys. Rev. D* **90**, 092003 (2014).

[139] Y. Takubo, N. Takeda, J. H. Huang, K. Muroo, et M. Yamamoto, "Precise measurement of the extinction ratio of a polarization analyser", *Meas. Sci. Technol.* **9**, 20 (1998).

[140] K. Muroo, M. Namikawa, et Y. Takubo, "High-sensitivity detection of magnetically induced birefringence", *Meas. Sci. Technol.* **11**, 32 (2000).