



**HAL**  
open science

# Mécanique statistique des systèmes auto-gravitants

Maxime Champion

► **To cite this version:**

Maxime Champion. Mécanique statistique des systèmes auto-gravitants. Physique mathématique [math-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2015. Français. NNT : 2015ENSL0997 . tel-01178044

**HAL Id: tel-01178044**

**<https://theses.hal.science/tel-01178044>**

Submitted on 17 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université de Lyon,**  
délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon

**Discipline : PHYSIQUE**

**Laboratoire de Physique de l'ENS de LYON**

**École Doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon**

Présentée et soutenue publiquement le 29 juin 2015

par **Monsieur Maxime CHAMPION**

---

## Mécanique statistique des systèmes auto-gravitants

---

Thèse dirigée par Monsieur Angel ALASTUEY

Devant la commission d'examen formée de :

Monsieur Angel ALASTUEY	-	CNRS	-	<i>Directeur</i>
Monsieur Julien BARRÉ	-	Université de Nice Sophia Antipolis	-	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Freddy BOUCHET	-	CNRS	-	<i>Président</i>
Monsieur Pierre-Henri CHAVANIS	-	CNRS	-	<i>Examineur</i>
Monsieur Michael JOYCE	-	Université Paris VI	-	<i>Rapporteur</i>
Monsieur Stefano RUFFO	-	Università degli Studi di Firenze	-	<i>Examineur</i>

Laboratoire de Physique  
École Normale Supérieure de Lyon  
46, allée d'Italie  
69007 Lyon

École doctorale de Physique et Astrophysique  
de Lyon  
4, Rue Enrico Fermi  
69622 Villeurbanne Cedex

# Remerciements

Avant toute chose, je souhaite remercier très chaleureusement mon directeur de thèse, Angel Alastuey. Nos discussions, parfois passionnées, m'ont permis d'accomplir ce travail et, surtout, de ne jamais me contenter d'une approche incomplète, voire fautive. Personnellement, je suis très heureux de ce travail commun, possible surtout grâce à l'adaptation d'impédance entre nos caractères et nos façons de travailler. Grâce à lui, mon choix, affirmé très rapidement, de ne pas tenter une carrière de recherche n'a pas été un frein dans notre travail, bien au contraire.

Ensuite, je remercie Thierry Dauxois et Stefano Ruffo, qui m'ont permis, en tant que co-encadrant de stage de fin de Master 2 avec Angel, d'initialiser mon travail de thèse dans les meilleures conditions.

Bien évidemment, et comme il se doit, je souhaite chaleureusement remercier Julien Barré et Michael Joyce pour avoir accepté de rapporter mon manuscrit, et pour leurs nombreuses remarques qui en ont amélioré la qualité. Je souhaite de même remercier Freddy Bouchet, Pierre-Henri Chavanis et Stefano Ruffo d'avoir accepté d'évaluer mon manuscrit et ma soutenance.

Je souhaite remercier collectivement les membres du Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont permis de travailler au cours de ces trois années dans les meilleures conditions.

En particulier, je souhaite remercier tous mes co-bureaux successifs, à savoir Sophie, Fannie, Robin, Simona et Antoine. Pour notre travail commun de Physique Expérimentale qui aboutira, j'en suis sûr, sur un ouvrage de grande qualité, je souhaite remercier vivement Arnaud L.D., Étienne, Michel et Pierre puis Robin, Jean-Yo, David L.C., Jean-Baptiste et Antoine. Enfin, en plus de tous ceux que je viens de citer, merci à Nathanaël, Louis-Paul, Sébastien, Thomas, David W., Arnaud B., Éléonore, Céleste, Raphaël, Clément, Sylvain et tous les autres, sans qui les pauses cafés auraient été un peu mornes.

D'un point de vue professionnel, merci au Département de Physique de l'ENS de Lyon, qui m'a donné un cadre pour réussir mon agrégation puis m'a permis de donner mes premiers enseignements dans un cadre des plus agréables. En particulier, je souhaite remercier l'ensemble des techniciens du Département, qui font un travail formidable et qui ne sont jamais suffisamment cités pour cela. Enfin, je remercie l'Inspection Générale de Physique-Chimie de me faire confiance en me donnant la responsabilité d'un enseignement en Classe Préparatoire pour la rentrée 2015.

Je ne peux rédiger ce paragraphe sans exprimer mon soutien indéfectible aux militants et aux instances de la Section Française de la IV<sup>ème</sup> Internationale. Sans cette compréhension et cet engagement politique, je suis convaincu que je n'aurais pas accompli grand chose, à tous les niveaux.

Et enfin, ma vie et cette thèse n'auraient pas été les mêmes sans Aurélie et sans Pierrot, qui a beaucoup égayé ces derniers mois. Je vous embrasse tous les deux avec tout mon amour.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>I Introduction</b>	<b>1</b>
<b>II La sphère isotherme</b>	<b>7</b>
II.1 Le champ moyen dans l'ensemble microcanonique . . . . .	7
II.1.1 Définitions et notations . . . . .	8
II.1.2 L'hypothèse de champ moyen . . . . .	9
II.1.3 Dérivation de la fonction de distribution . . . . .	9
II.1.4 L'approche hydrostatique . . . . .	11
II.2 La catastrophe gravotherme . . . . .	11
II.2.1 L'équation de Poisson . . . . .	11
II.2.2 Les variables de Milne . . . . .	12
II.2.3 Étude du système dynamique . . . . .	13
II.2.4 L'énergie des sphères isothermes . . . . .	14
II.2.5 Discussion de la relation entre l'énergie et la température de la sphère isotherme	17
II.3 Le gaz isotherme de sphères dures . . . . .	18
II.3.1 Définitions et notations . . . . .	18
II.3.2 Système dynamique . . . . .	20
II.3.3 États d'équilibres et multivaluation . . . . .	23
II.4 Pertinence astrophysique et éléments de conclusion . . . . .	26
<b>III Étude de la validité de l'approche hydrostatique</b>	<b>27</b>
III.1 Définitions . . . . .	28
III.1.1 Le système d'intérêt $\mathcal{S}$ dans l'ensemble microcanonique . . . . .	28
III.1.2 Construction de la limite de scaling . . . . .	28
III.1.3 À propos de l'introduction des systèmes auxiliaires . . . . .	29
III.2 Étude des propriétés de scaling des systèmes auxiliaires . . . . .	30
III.2.1 Extensivité de l'énergie potentielle . . . . .	30
III.2.2 Fonctions de distribution de masse . . . . .	31
III.2.3 Hypothèse de fluctuations de l'énergie potentielle . . . . .	31
III.3 Émergence de la thermalisation locale . . . . .	32
III.3.1 Introduction du potentiel gravitationnel . . . . .	32
III.3.2 Une distribution de masse de type Maxwell-Boltzmann . . . . .	33
III.3.3 Identification de l'équilibre thermodynamique local . . . . .	34

III.4	L'approche hydrostatique pour le système infini . . . . .	35
III.4.1	Séparation d'échelle et équilibre hydrostatique . . . . .	35
III.4.2	Cohérence de l'hypothèse concernant les fluctuations . . . . .	36
III.5	Validité de l'approche hydrostatique pour le système fini $\mathcal{S}$ . . . . .	37
III.5.1	Sur l'introduction du facteur de Boltzmann . . . . .	37
III.5.2	Sur l'omission des fluctuations . . . . .	38
III.5.3	Exemples astrophysiques . . . . .	38
III.6	Synthèse de la discussion . . . . .	39
<b>IV</b>	<b>Le modèle soluble de la gravitation à une dimension</b>	<b>41</b>
IV.1	L'approche hydrostatique . . . . .	42
IV.1.1	Le modèle . . . . .	42
IV.1.2	Les équations physiques . . . . .	42
IV.1.3	Équation d'état . . . . .	43
IV.1.4	Validité et limitations . . . . .	44
IV.2	L'ensemble isobarique . . . . .	45
IV.2.1	Transformation de Laplace . . . . .	46
IV.2.2	Fonction de partition isobarique pour le système fini . . . . .	46
IV.2.3	La limite du système infini . . . . .	48
IV.2.4	Fonctions thermodynamiques . . . . .	49
IV.3	Équivalence des ensembles . . . . .	49
IV.3.1	Rappel mathématique : la méthode du col . . . . .	49
IV.3.2	Ensemble canonique . . . . .	50
IV.3.3	L'ensemble microcanonique . . . . .	52
IV.3.4	Discussion . . . . .	53
IV.4	La structure cœur-halo . . . . .	53
IV.4.1	Développements explicites pour le système fini . . . . .	53
IV.4.2	Représentation intégrale dans la limite de système infini . . . . .	54
IV.4.3	La densité exacte dans le halo . . . . .	56
IV.5	Conclusion de l'étude . . . . .	58
<b>V</b>	<b>Un modèle de binaires partiellement thermalisées</b>	<b>61</b>
V.1	Le modèle statistique à deux espèces . . . . .	62
V.1.1	Position du problème . . . . .	62
V.1.2	Fonctions de densité des différentes espèces . . . . .	62
V.1.3	État physique du système . . . . .	63
V.2	La sphère isotherme à deux corps . . . . .	63
V.2.1	Contenu physique . . . . .	63
V.2.2	Système dynamique . . . . .	64
V.2.3	Algorithme et courbes . . . . .	66
V.3	Prise en compte de la courte portée : un modèle de binaires . . . . .	67
V.3.1	Le modèle de binaires . . . . .	67
V.3.2	Distribution en énergie des binaires . . . . .	69
V.3.3	Utilisation des binaires dans l'équilibre à deux corps . . . . .	74
V.4	Éléments de discussion . . . . .	74
<b>VI</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>77</b>

---

<b>A Compléments</b>	<b>83</b>
A.1 Fonction de partition exacte à une dimension . . . . .	83
A.1.1 Application du théorème des résidus . . . . .	83
A.1.2 Calcul des résidus . . . . .	84
A.1.3 Fonction de partition . . . . .	84
A.2 Modèle d'équilibre chimique pour la distribution de binaires . . . . .	85
A.2.1 Construction du modèle . . . . .	86
A.2.2 Étude de la fonction de partition $Z_\lambda$ . . . . .	86
A.2.3 L'équilibre chimique . . . . .	87
A.2.4 Fonction de partition interne des binaires . . . . .	88
A.2.5 Prédiction de l'équilibre chimique . . . . .	90
<b>B Validity conditions of hydrostatic : a microcanonical analysis</b>	<b>91</b>
<b>C A solvable model of hard rods with gravitational interactions</b>	<b>93</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>95</b>





FIGURE 1 – Cœur brillant de l'amas globulaire M70 photographié par le télescope spatial Hubble.

# Introduction

L'étude théorique à l'aide de la mécanique statistique d'équilibre des systèmes auto-gravitants à  $N$  corps peut sembler quelque peu à contre-courant de la recherche actuelle. En effet, les outils numériques permettent aujourd'hui, et avec une grande précision, des simulations donnant de très nombreux et intéressants résultats. On peut citer par exemple quelques contributions parmi les plus récentes sur les amas globulaires [1–6]. Un tel engouement s'explique par les nombreux résultats théoriques établis dans la dernière période qu'il s'agit de tester et vérifier, résultats rassemblés en partie dans les ouvrages de référence de J. Binney et S. Tremaine [7] et de D. C. Heggie et P. Hut [8]. Parmi ces résultats, la grande majorité provient d'études dynamiques du problème. Toutefois, le traitement de ces systèmes à travers des outils de la mécanique statistique n'est pas nouveau et commençait déjà à être formalisé dès 1962 par V. A. Antonov [9] puis en 1968 par D. Lynden-Bell et R. Wood [10].

En particulier, ces deux références historiques supposent que les systèmes à  $N$  corps peuvent être traités localement par un équilibre thermodynamique et globalement à travers une hypothèse de champ moyen. Ainsi, la structure à grande échelle de ces systèmes est imposée par l'équilibre entre les forces de pressions associées aux inhomogénéités de densité et entre la force gravitationnelle créée par la distribution de masse globale. Ce modèle est connu comme le modèle de la sphère isotherme. Ce traitement est analogue à celui introduit par R. Emden [11] en 1907 pour étudier la structure interne d'une étoile à travers l'équilibre gravitationnel des gaz la composant. D'autres versions prenant en compte des effets à courte portée ont par la suite été introduites. Ainsi, l'approche hydrostatique dans l'étude du problème à  $N$  corps a été largement étudiée par le passé et on pourra se reporter, par exemple, à [12] pour une revue.

L'étude purement statistique de ces systèmes peut sembler déjà largement discutée et globalement comprise. L'approche hydrostatique du problème est en effet des plus raisonnables. Au vu de la taille des étoiles et des densités stellaires dans les amas globulaires, les collisions directes entre objets sont extrêmement rares. Il est donc naturel de supposer qu'une étoile n'est soumise qu'à l'interaction gravitationnelle, elle-même définie par le champ gravitationnel moyen créé par l'ensemble de la structure. De plus, les étoiles étant des objets de rayon environ  $10^{-12}$  fois plus petit que le rayon des amas, il semble naturel de ne pas se préoccuper de la divergence du potentiel gravitationnel proportionnel à  $-1/r$  en 0. Ces travaux historiques, ainsi que leurs résultats et leurs hypothèses sous-jacentes, sont donc au final des plus raisonnables.

Toutefois, ces résultats sont basés plus ou moins clairement sur des hypothèses de mécanique statistique. Or, il nous a semblé qu'il manquait une base solide théorique à ces résultats. Cette thèse s'inscrit dans cette discussion des hypothèses, et donc des résultats, en partant du point de départ qui nous semble le plus fondamental, la définition du modèle statistique dans l'ensemble microcanonique.

## Le modèle statistique

Avant toute chose, voici quelques éléments sur la construction du modèle statistique que nous allons utiliser dans cette thèse. *A priori*, et sauf mention contraire, nous cherchons à modéliser un système d'énergie totale  $E$  de  $N$  particules, chacune de masse  $m$  et de diamètre  $\sigma$ . Ces objets sont en interaction gravitationnelle entre eux et se comportent comme des sphères dures. C'est-à-dire, en notant  $G$  la constante universelle de gravitation, que le potentiel d'interaction à deux corps  $v$  est défini par

$$v(r) = \begin{cases} -\frac{Gm^2}{r} & \text{si } r > \sigma ; \\ +\infty & \text{sinon .} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Cette régularisation suppose que les chocs entre les particules sont élastiques. Pour des systèmes comme les amas globulaires, cette modélisation semble audacieuse. Toutefois, rappelons que les collisions directes sont extrêmement rares. L'intérêt principal du choix d'un modèle de cœur dur est d'éviter la divergence des différentes grandeurs statistiques, ce qui est indispensable pour une étude théorique du problème.

Avec ces notations, l'hamiltonien du système s'écrit

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (\text{I.2})$$

avec  $\mathbf{p}_i$  et  $\mathbf{r}_i$  l'impulsion et la position de la particule  $i$ .

Pour éviter l'évaporation du système, nous devons l'enfermer dans une boîte, que nous prenons sphérique et de volume  $\Lambda = 4\pi R^3/3$ . Cet élément est essentiel et naturel dans le cadre du traitement statistique du problème à  $N$  corps, mais dans le cadre de l'étude de systèmes gravitationnels, ce choix est bien plus discutable. En effet, les systèmes réels sont auto-confinés uniquement grâce à l'interaction gravitationnelle, et il n'y a pas besoin de boîte. Ainsi, l'étude de l'auto-confinement et de l'évaporation est d'une importance centrale [13]. Il est raisonnable de penser que nos résultats seront d'autant plus pertinents pour des applications astrophysiques que l'énergie totale est suffisamment négative, de sorte que l'évaporation puisse être négligée. Cette supposition est le fruit d'une analogie avec le problème à deux corps de Kepler, où deux particules sont confinées dans des trajectoires elliptiques lorsque l'énergie totale est négative. En conclusion de cette thèse, nous utilisons les résultats obtenus pour discuter rapidement *a posteriori* les hypothèses relatives à l'omission du phénomène d'évaporation.

Dans notre modèle, le système est systématiquement étudié dans l'ensemble microcanonique. Lorsque d'autres ensembles seront évoqués, ce sera toujours en tant qu'intermédiaires de calculs, et non pas comme des ensembles d'intérêt. Ce choix est imposé par la physique du problème. En effet, les systèmes gravitationnels nous sont imposés, il n'est pas possible de réaliser une expérience les concernant. Or en première approximation, ils doivent être considérés comme isolés, et donc d'énergie totale fixée. La définition de l'ensemble microcanonique est donc ici parfaitement adaptée. Mentionnons qu'il existe de nombreuses études de systèmes auto-gravitants dans le cadre de l'ensemble canonique. Notons que la perte d'additivité de l'énergie due à la longue portée de l'interaction gravitationnelle invalide la construction classique de cet ensemble, à travers une immersion du système dans un thermostat bien plus grand. Le statut physique de l'ensemble canonique est d'ailleurs toujours un sujet de débat [14, 15].

L'utilisation des outils de la mécanique statistique permet d'étudier les systèmes pour un très grand nombre de particules. Cela repose en partie sur la construction de lois d'échelles (dites de « scaling ») pour les paramètres du problème, permettant d'étudier la limite  $N \rightarrow +\infty$ . Dans les

systèmes gravitationnels, l'énergie potentielle est proportionnelle à  $N^{5/3}$ , et les propriétés d'extensivité ou d'intensivité des grandeurs thermodynamiques usuelles sont remises en question. Il est alors judicieux d'introduire des scalings sur différents paramètres du système dans la limite  $N \rightarrow +\infty$ , qui assurent que les énergies potentielle et cinétique restent du même ordre. En conséquence, les systèmes infinis correspondants exhibent des propriétés intrinsèques, indépendantes de  $N$ , comme les systèmes usuels avec des interactions à courte portée. On pourra trouver quelques exemples dans [16–18].

Enfin, ce problème se situe dans le cadre général de l'étude statistique des systèmes en interaction à longue portée. En effet, chacune des particules est soumise à l'interaction gravitationnelle de toutes les autres, et non pas uniquement de ses plus proches voisines. De manière générale, ce type d'interactions induit des phénomènes intéressants, largement étudiés dans la littérature comme la non-équivalence des ensembles statistiques [19–22] ou encore des transitions de phases [12, 23, 24]. On pourra retrouver toutes ces considérations dans les travaux de Campa *et al.*, la revue [25] ou le récent ouvrage [26].

## À propos de l'équilibre statistique

Avant d'attaquer à proprement parler l'étude du modèle, nous souhaitons évoquer quelques précautions nécessaires à son utilisation.

Le traitement du système dans l'ensemble microcanonique nécessite que le système astrophysique d'intérêt puisse être considéré comme un système isolé et dans un état stationnaire par rapport à la dynamique, dans lequel l'énergie et le nombre de particules sont les seules quantités conservées. En général, le moment angulaire est aussi une quantité conservée. Nous ne le prenons pas en compte dans notre modélisation, car nous considérerons des états sans rotation globale. Notons que la présence éventuelle de celle-ci complexifie grandement l'étude [27].

Généralement, en préparant le système dans un état hors-équilibre arbitraire, celui-ci va évoluer à travers une relaxation violente sur un temps relativement court jusqu'à un état quasi-stationnaire de temps de vie assez long, cet état étant une solution stationnaire de l'équation de champ moyen de type Vlasov. Les collisions conduisent ensuite vers la distribution microcanonique après un temps très long [25].

Avant d'atteindre l'équilibre microcanonique, l'évolution dynamique peut donc conduire le système dans des éventuels états métastables [28, 29], états pour lesquels le temps de vie grandit exponentiellement vite avec le nombre de particules, ou dans des états quasi-stationnaires [30–32], où le temps de vie grandit comme  $N/\ln N$  dans le cas de la gravitation [7]. L'existence de ces états est liée à une perte de l'ergodicité, comme suggéré par certaines simulations numériques [33, 34]. Ce scénario dynamique a été observé ou discuté pour une très large variété de systèmes, incluant le modèle HMF [30], les modèles auto-gravitants [35–37] et des systèmes à une dimension avec des interactions de type lois de puissance [38].

Ainsi, la distribution microcanonique doit être manipulée avec précaution. En effet, elle ne peut apparaître dans un système réel que si la dynamique induit un chaos moléculaire suffisamment important de sorte que les propriétés d'ergodicité sont satisfaites. Au niveau quantitatif, cela se produit lorsque les temps typiques associés aux divers mécanismes de relaxation sont bien plus faibles que l'âge global du système. Dans notre système, il existe deux processus principaux permettant aux particules d'échanger de l'énergie, à savoir des collisions directes et des déflexions dues aux interactions gravitationnelles [7]. Il est connu que la présence des cœurs durs favorise l'émergence de l'ergodicité [39] ou, en d'autres termes, accélère les processus de thermalisation locale comme observé dans des simulations de dynamiques moléculaires [40]. Pour certains systèmes finis que nous considérerons, le temps de relaxation dû aux collisions est fini mais très grand.

Dans la plus grande partie de cette thèse (les chapitres II, III et IV), nous supposerons que le système a atteint la distribution d'équilibre. En ce qui concerne les amas globulaires, cette hypothèse

n'est certainement pas vérifiée, de nombreux facteurs purement dynamiques devant être pris en compte, comme largement discuté dans [7]. De manière générale, toute la discussion et l'utilisation de nos résultats pour décrire les systèmes réels doit être réalisée avec précaution. Il est à noter, comme nous allons le montrer, que la discussion historique du modèle de la sphère isotherme [9, 10] doit être réalisée avec les mêmes précautions, ce qui est rarement rappelé.

## Plan de la thèse

Le chapitre II est centré sur le modèle historique la sphère isotherme. Nous redonnons les résultats présentés en partie dans les références [9, 10]. Ce modèle a été mis en place pour étudier l'équilibre de particules ponctuelles. Cela conduit à la célèbre catastrophe gravotherme qui indique qu'en dessous d'une certaine énergie limite, il n'existe pas d'états d'équilibre du système. En reprenant en partie l'étude [41], nous étendons ce modèle au gaz de sphères dures, où les interactions locales de type cœur dur sont prises en compte, alors que les interactions gravitationnelles sont toujours traitées en champ moyen. Nous montrons ainsi que le phénomène de catastrophe gravotherme disparaît. On observe l'apparition d'une transition de phase entre une phase étendue et une structure cœur-halo beaucoup plus chaude. Des évidences numériques montrent que l'énergie critique à laquelle apparaît cette transition est repoussée vers les très grandes valeurs positives lorsque la taille des sphères dures tend vers 0.

Ces rappels historiques nous permettent d'aborder au chapitre III l'étude des conditions de validité de l'approche hydrostatique. Pour cela, nous repartons de la description microcanonique dans l'espace de phase total du système pour en déduire la distribution de masse. Nous introduisons un scaling des paramètres du problème qui impose l'extensivité de l'énergie malgré la longue portée de l'interaction, en gardant la fraction d'empilement et la densité de masse moyenne fixées. Grâce à cela, les conditions qui induisent la thermalisation du système ainsi qu'une distribution de masse suivant les lois de l'hydrostatique apparaissent simplement. À partir de données observationnelles, ces conditions sont testées pour les amas globulaires. Il apparaît que l'approche hydrostatique n'est pas justifiée à cause de phénomènes liés à la courte portée de l'interaction gravitationnelle. Les résultats de ce chapitre ont menés à une publication [42] reproduite en annexe B page 91 de cette thèse.

Pour aller plus loin dans cette discussion, nous étudions un système assez différent du modèle présenté jusqu'à présent. En effet, dans le chapitre IV, nous traitons en détail un modèle de bâtonnets durs en interaction gravitationnelle à une dimension. L'intérêt de ce modèle, en plus de celui inhérent à tout nouveau modèle, est qu'il est entièrement soluble. Nous calculons tout d'abord de façon exacte les quantités d'intérêt par un traitement champ moyen des interactions gravitationnelles. Ensuite, en partant de l'ensemble statistique isobarique, nous calculons exactement et successivement les quantités canoniques puis microcanoniques. L'intérêt des ensembles isobarique et canonique est que, grâce à des transformées de Laplace, ils sont de précieux outils auxiliaires de calcul. Les résultats explicites obtenus montrent alors que tous ces ensembles sont équivalents entre eux et sont de plus équivalents à l'approche hydrostatique. Cette dernière équivalence disparaît lorsque l'on étudie certains états très proches de l'état totalement effondré, où très peu d'énergie cinétique est disponible pour équilibrer l'énergie potentielle. Ainsi, nous mettons en évidence un modèle explicite sur lequel nous avons pu tester les conditions définies dans le chapitre III. Les résultats de ce chapitre ont menés à une publication [43] reproduite en annexe C page 93 de cette thèse.

Dans le chapitre V, dernier chapitre, nous revenons sur le modèle de gravitation à trois dimensions présenté dans cette introduction. Afin de prendre en compte les phénomènes associés à la courte portée de l'interaction gravitationnelle, absents dans le traitement historique de la sphère isotherme, nous introduisons un modèle d'étoiles binaires. La non thermalisation du système aux petites échelles rend quelque peu caduque l'étude du chapitre III, reposant sur un équilibre parfait à toutes les échelles. Il est en effet bien connu que deux objets très proches ont tendance à former

---

un système binaire plutôt que de s’effondrer l’un sur l’autre. Dans ce cadre, nous mettons en place un modèle à deux espèces indépendantes, des binaires et des étoiles célibataires. La proportion respective de chaque espèce est fixée. L’équilibre gravitationnel global entre ces espèces est traité dans le cadre du champ moyen. Au vu de la phénoménologie des binaires [44, 45], nous divisons ensuite les binaires en deux catégories. Les binaires dites *soft*, binaires faiblement couplées entre elles, qui sont en équilibre thermodynamique avec le reste du système, et les binaires dites *hard*, fortement couplées et dont l’état interne est indépendant de l’équilibre global. Pour cette deuxième espèce, nous parlons de degré de liberté « gelé ». Ce modèle peut être vu comme une première correction au modèle historique de la sphère isotherme présenté au chapitre II, et il permet de reproduire qualitativement les résultats attendus par l’introduction des binaires, à savoir la stabilisation des états de basse énergie. Cette modélisation empruntant des éléments de mécanique statistique d’équilibre d’une part, et reposant aussi sur une certaine phénoménologie d’autre part, apparaît comme un compromis raisonnable prenant en compte la non thermalisation totale du système.

Enfin, en conclusion dans le chapitre VI, nous rappelons les principaux résultats présentés dans cette thèse et nous procédons à une analyse simple du rôle confinant de la boîte. Parmi tous les biais du traitement statistique que nous venons de rappeler dans cette introduction, cet effet de la boîte est facilement discutable à partir des résultats obtenus. Nous estimons ainsi l’ordre de grandeur des échelles de temps nécessaires à une évaporation totale du système si la boîte n’était pas présente.



## La sphère isotherme

Dans le cadre de l'étude statistique de la gravitation, le problème de la sphère isotherme est incontournable. Ce problème consiste à étudier un système à  $N$  corps en interaction gravitationnelle dans une boîte sphérique en négligeant les effets à courte portée. Cette hypothèse permet de traiter le système comme un fluide sans interactions locales et de traiter la gravitation uniquement du point de vue du champ moyen. Cette vision a été utilisée dès 1907 par Emden [11] pour discuter la structure interne des étoiles, où les gaz qui les composent sont soumis uniquement à leur propres actions gravitationnelles. De plus, cette description fluide permet de s'affranchir des nombreux problèmes inhérents à l'étude d'un système à  $N$  corps.

En 1962, V.A. Antonov étudie le système à  $N$  corps avec cette approche [9]. Dans ce cadre, le système est thermalisé ce qui justifie l'appellation de ce problème, *i.e.* la sphère isotherme. Son travail a mis en avant ce qui a été appelé par la suite l'instabilité d'Antonov, ou catastrophe gravotherme, qui exprime le fait qu'il n'existe pas d'état d'équilibre du système pour des énergies inférieures à une certaine valeur. Par la suite, D. Lynden-Bell et R. Wood [10] ont précisé la formulation du problème, notamment sur les questions de stabilité des états d'équilibre. Enfin, le raisonnement a été finalisé par T. Padmanabhan en 1989 [46, 47] dont le travail a permis de définir totalement la relation entre l'énergie et la température du problème. Tous les éléments du raisonnement ont été synthétisés dans la revue [48].

Au vu de l'importance historique de cette discussion, et comme ils constituent une première base importante du traitement statistique de la gravitation, la plupart de ces résultats sont reproduits dans ce chapitre. Le premier paragraphe II.1 reprend la formalisation du problème du point de vue de la physique statistique. L'hypothèse de champ moyen, centrale dans ce modèle, est précisée dans ce cadre. Ensuite, ces éléments seront utilisés dans le paragraphe II.2 pour déduire et discuter les principaux résultats de ce problème, en particulier la catastrophe gravotherme.

Pour finir, dans le paragraphe II.3, nous étendrons cette méthode de calcul à un gaz de sphères dures isotherme. En effet, si le modèle suppose que les interactions gravitationnelles à courte portée sont négligeables, il n'interdit pas de prendre en compte des corrélations locales entre les objets, notamment en considérant l'équation d'état locale d'un gaz de sphères dures pour décrire le fluide.

### II.1 Le champ moyen dans l'ensemble microcanonique

Sous des hypothèses de champ moyen, il est possible dans l'ensemble microcanonique de calculer la fonction de distribution du système gravitationnel à  $N$  corps. Cette distribution est alors de type Maxwell-Boltzmann et peut être interprétée comme une conséquence d'un traitement de type hydrostatique du problème.



### II.1.1 Définitions et notations

Considérons un système de  $N$  particules ponctuelles de masse  $m$  confinées dans une boîte sphérique de volume  $\Lambda = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Nous l'étudions dans l'ensemble microcanonique, *i.e.* nous supposons que son énergie est fixée à une certaine valeur  $E$ . La fonction de distribution du système est définie par

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \right\rangle_{\text{mic}} \quad (\text{II.1})$$

tandis que la fonction de distribution à deux corps s'écrit

$$f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; \mathbf{r}', \mathbf{p}') = \left\langle \sum_{i,j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_j) \right\rangle_{\text{mic}} \quad (\text{II.2})$$

où  $\mathbf{r}$  représente la position d'une particule et  $\mathbf{p}$  son impulsion. La notation  $\langle \cdot \rangle_{\text{mic}}$  désigne la moyenne microcanonique, c'est-à-dire la moyenne statistique pondérée par la mesure  $\delta(E - H_N(\{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}))$  avec  $H_N(\{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\})$  le Hamiltonien du système qui s'écrit

$$H_N(\{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\}) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{Gm^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (\text{II.3})$$

L'énergie du système est donc définie par la moyenne de cet Hamiltonien et s'écrit

$$E = \frac{1}{2m} \int_{\Lambda \times \mathbf{R}^3} d\tau \mathbf{p}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \frac{Gm^2}{2} \int_{\Lambda^2 \times \mathbf{R}^6} d\tau d\tau' \frac{f^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}; \mathbf{r}', \mathbf{p}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{II.4})$$

où l'on note  $d\tau = d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}$ .

Nous supposons que ce système est à l'équilibre statistique. Alors la fonction de distribution peut être évaluée en maximisant l'entropie de Boltzmann du système. Celle-ci est définie par la célèbre formule  $S = k_B \ln \Omega$  avec  $\Omega$  le nombre de complexions du système. Pour évaluer  $\Omega$ , il faut avoir accès à chacun des microétats accessibles du système, et connaître donc la position et l'impulsion de chaque particule. Un tel calcul direct est impossible et inutile. Nous allons en effet utiliser directement la description hydrostatique du système. Nous supposons donc que localement, le système se comporte comme un gaz parfait. Cette hypothèse sera discutée dans le détail par la suite. Ainsi, l'entropie totale est l'intégrale de l'entropie locale du gaz parfait, proportionnelle à  $-f \ln f$ . Ainsi, nous allons maximiser

$$S = -k_B \int_{\Lambda \times \mathbf{R}^3} d\tau f \ln f \quad (\text{II.5})$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann. Cette maximisation est réalisée sous la contrainte de l'énergie fixée (II.4) et de la conservation de la masse

$$M = Nm = \int_{\Lambda} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{II.6})$$

où nous avons défini la densité de masse  $\rho(\mathbf{r})$  par

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (\text{II.7})$$

### II.1.2 L'hypothèse de champ moyen

L'intégration sur les impulsions dans la partie potentielle  $V$  de l'énergie (II.4) est directe, et cette énergie potentielle gravitationnelle s'écrit

$$V = -\frac{G}{2} \int_{\Lambda^2} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{II.8})$$

où l'on a défini la densité de masse à deux corps de façon similaire à (II.7). Cette expression est exacte et n'est soumise à aucune approximation du point de vue de la physique statistique. La fonction de distribution à deux corps prend en compte les corrélations en positions entre deux objets. La position moyenne d'une seconde particule est en effet *a priori* influencée par la position d'une première particule préalablement placée dans la boîte.

L'hypothèse de champ moyen consiste à supposer que :

- les effets à courte portée de l'interaction gravitationnelle sont négligeables ;
- les effets à longue portée peuvent être pris en compte *via* un traitement moyen de l'interaction gravitationnelle.

Ce deuxième point concerne la façon de traiter le potentiel gravitationnel total subi par une particule à la position  $\mathbf{r}$ . Celui-ci n'est pas vu comme la somme de toutes les interactions avec chacune des autres particules, mais plutôt comme l'interaction entre cette particule  $\mathbf{r}$  et le champ gravitationnel total considéré comme indépendant des positions précises des particules.

Cette hypothèse s'exprime mathématiquement sur la fonction à deux corps par la relation

$$\rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}'). \quad (\text{II.9})$$

Cette hypothèse permet de réaliser un traitement mathématique complet du problème. Sans celle-ci, il est ardu de réussir à calculer les différentes grandeurs statistiques dans l'ensemble microcanonique. Cela conduit alors à une énergie potentielle de la forme

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) \quad (\text{II.10})$$

avec le potentiel gravitationnel  $\Phi(\mathbf{r})$ , créé par la distribution de masse  $\rho(\mathbf{r})$ , ressenti par une particule au point  $\mathbf{r}$

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_{\Lambda} d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, le potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  ressenti en  $\mathbf{r}$  est indépendant du fait qu'une particule soit présente ou non en ce point.

Cette hypothèse fondamentale est souvent implicitement réalisée dans la littérature. Elle est mentionnée en tant que telle dans l'étude de Lynden-Bell [10]. Elle semble légitime du point de vue de la longue portée. En effet, le champ gravitationnel dû aux interactions à longue distance est simplement donné sous une forme intégrale, donc par une moyenne, par le théorème de Gauss de la gravitation. Toutefois, le fait de négliger totalement les interactions gravitationnelles à courte portée, sachant que le potentiel diverge en 0, est moins évident. La discussion en détail de ce point est réalisée dans le chapitre III de cette thèse.

### II.1.3 Dérivation de la fonction de distribution

Écrivons l'entropie (II.5) comme une fonctionnelle de  $f$  en lui adjoignant deux multiplicateurs de Lagrange  $\beta$  et  $\alpha$  pour imposer les contraintes sur l'énergie (II.4) et sur la masse (II.6). Ce calcul se fait sous les hypothèses du champ moyen décrits dans le paragraphe précédent. Cela conduit à étudier la différentielle

$$\delta S'[f] = \delta S[f] + k_B\beta\delta E + k_B\alpha\delta N \quad (\text{II.12})$$

qui se développe en

$$\begin{aligned} \delta S'[f] = -k_B \int d^6\tau \delta f (\ln f + 1) + k_B \beta \left[ \int d^6\tau \delta f \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{Gm^2}{2} \int d^6\tau d^6\tau' \frac{f\delta f' + f'\delta f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ + k_B \alpha \int d^6\tau \delta f \quad (\text{II.13}) \end{aligned}$$

où l'on a noté implicitement  $f' = f(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$ .

Les variables  $\tau$  et  $\tau'$  étant muettes, on peut les intervertir dans l'expression de la différentielle de l'énergie potentielle. Ainsi, il vient

$$\delta V = -\frac{Gm}{2} \int d^6\tau d^6\tau' \frac{f\delta f' + f'\delta f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{II.14})$$

$$= Gm \int d^6\tau \delta f \int d^6\tau' \frac{f'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int d^6\tau \delta f \Phi(\mathbf{r}) \quad (\text{II.15})$$

et donc la différentielle de l'entropie s'écrit

$$\delta S'[f] = -k_B \int d^6\tau \delta f \left[ \ln f + 1 + \beta m \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Phi(\mathbf{r}) \right) + \alpha \right]. \quad (\text{II.16})$$

La maximisation de l'entropie implique l'annulation de cette différentielle  $\delta S'$  quelle que soit la quantité  $\delta f$ , il vient donc

$$\ln f + 1 + \beta m \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Phi(\mathbf{r}) \right) + \alpha = 0 \quad (\text{II.17})$$

que l'on réécrit

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = A \exp \left[ -\beta \left( \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + m\Phi(\mathbf{r}) \right) \right] \quad (\text{II.18})$$

avec  $A$  une certaine constante, absorbant notamment le coefficient  $\alpha$  et imposant la normalisation de la fonction  $f$ .

On reconnaît évidemment une distribution de type Maxwell-Boltzmann. Cette distribution rend extrémale l'entropie  $S$  du système. Comme réalisé dans l'appendice de la référence [46], on peut montrer que la différentielle seconde de  $S$  prise pour cette distribution  $f$  (II.18) est négative. Ainsi, les distributions (II.18) sont des maximaux locaux ou des points selles de l'entropie de Boltzmann (II.5) et correspondent à des états d'équilibres, stables ou instables, du système. On pourra se reporter à [49] pour une étude générale de cette question.

À partir de (II.18), on calcule l'énergie cinétique moyenne d'une particule

$$\left\langle \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \right\rangle = \frac{1}{2m} \frac{\int_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{p} \mathbf{p}^2 \exp \left[ -\beta \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \right]}{\int_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{p} \exp \left[ -\beta \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \right]}; \quad (\text{II.19})$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{\beta}. \quad (\text{II.20})$$

On observe que le multiplicateur de Lagrange  $\beta$  s'interprète comme usuellement. Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, on appelle **température** du système la quantité  $\beta^{-1}$  que l'on notera  $T$ . Il est à noter que cette température est homogène à une énergie. On se ramène à la définition usuelle de la température en divisant par le facteur de Boltzmann  $k_B$  que l'on prendra égal à 1 dans la suite.

Au final, on réécrit la fonction de distribution (II.18)

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = A \exp \left[ -\frac{1}{T} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \right] \quad (\text{II.21})$$

avec le hamiltonien d'une particule de masse  $m$  donné par

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + m\Phi(\mathbf{r}) . \quad (\text{II.22})$$

Ce résultat implique notamment une thermalisation du système à la température  $T$  et explique la dénomination du modèle de la sphère isotherme.

### II.1.4 L'approche hydrostatique

En intégrant la fonction de distribution (II.21) sur l'impulsion, on en déduit la distribution de masse

$$\rho(\mathbf{r}) = BT^{3/2} \exp \left[ -m \frac{\Phi(\mathbf{r})}{T} \right] \quad (\text{II.23})$$

avec  $B$  une certaine constante de normalisation.

Ce résultat peut être retrouvé par une approche hydrostatique. En effet, en modélisant le système par un fluide gravitationnel soumis à son propre champ de pression locale  $P(\mathbf{r})$  et au potentiel gravitationnel total  $\Phi(\mathbf{r})$  considéré comme un champ extérieur, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \nabla P(\mathbf{r}) . \quad (\text{II.24})$$

L'hypothèse du champ moyen néglige les effets à courte portée, ce qui revient à supposer que le fluide se comporte comme un gaz parfait, ce qui implique que la pression est donnée par la loi des gaz parfait  $P(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})T/m$ . La relation de la statique devient

$$\nabla\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{T}{m\rho(\mathbf{r})} \nabla\rho(\mathbf{r}) \quad (\text{II.25})$$

que l'on peut intégrer en

$$\rho(\mathbf{r}) = B' \exp \left[ -m \frac{\Phi(\mathbf{r})}{T} \right] . \quad (\text{II.26})$$

Le raisonnement microcanonique avec les hypothèses de type champ moyen du paragraphe II.1.2 et cette approche hydrostatique de type gaz parfait du problème conduisent donc aux mêmes résultats. Cela signifie que l'approche hydrostatique permet de négliger les effets locaux de la gravitation, tout comme le champ moyen. En effet, l'écriture de la relation fondamentale de l'hydrostatique (II.25) suppose que la gravitation ne s'applique qu'à travers le potentiel extérieur  $\Phi(\mathbf{r})$ , extérieur à l'élément de volume sur lequel on applique la seconde loi de Newton.

## II.2 La catastrophe gravotherme

Dans le paragraphe précédent, nous avons établi la fonction de densité  $\rho(\mathbf{r})$  (II.23) en fonction du potentiel gravitationnel  $\Phi(\mathbf{r})$ . Ce résultat nous permet dans ce paragraphe de calculer la relation entre l'énergie des états d'équilibres et leur température. Cette relation fait apparaître l'existence du phénomène de la catastrophe gravotherme, *i.e.* il n'existe pas d'état d'équilibre dans l'ensemble microcanonique en dessous d'une certaine valeur d'énergie.

### II.2.1 L'équation de Poisson

L'équation physique qui permet de relier le champ gravitationnel créé en un point  $\mathbf{r}$  à la densité de masse  $\rho(\mathbf{r})$  est l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) . \quad (\text{II.27})$$

En coordonnées sphériques, on peut montrer que le champ

$$\Phi(r) = -\frac{4\pi G}{r} \int_0^r du u^2 \rho(u) - 4\pi G \int_r^1 du u \rho(u) \quad (\text{II.28})$$

est solution de cette équation (II.27). Cette solution permet de mettre en avant la séparation entre les échelles. Le champ gravitationnel en un point  $\mathbf{r}$  dépend de toute la distribution de masse  $\rho$  et ne dépend pas directement de l'échelle locale.

L'expression (II.28) n'est pas directement utilisable pour la suite. Nous allons travailler uniquement à partir de l'équation de Poisson (II.27) que nous reformulons en utilisant la distribution de masse d'équilibre (II.26). Pour cela, on pose  $\rho_0 = \rho(0)$  la densité de masse au centre du système et il vient

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \Phi(r) \right) = 4\pi G \rho_0 \exp \left[ -\frac{m}{T} (\Phi(r) - \Phi(0)) \right]. \quad (\text{II.29})$$

On définit alors un nouveau jeu de variables sans dimensions

$$r \longmapsto x = \frac{r}{R} X \quad \text{avec} \quad X^2 = \frac{4\pi G m \rho_0}{T} R^2; \quad (\text{II.30})$$

$$\Phi(r) \longmapsto \psi(x) = \frac{m}{T} (\Phi(x) - \Phi(0)). \quad (\text{II.31})$$

L'équation de Poisson sans dimension s'écrit alors

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d}{dx} \psi(x) \right) = \exp[-\psi(x)]. \quad (\text{II.32})$$

Cette dernière équation ne dépend plus des paramètres du système. Les différentes solutions du problème sont maintenant indexées par le paramètre  $X$ , la valeur finale de la variable  $x$ , qui sera différent pour chacun des états d'équilibre.

## II.2.2 Les variables de Milne

Pour aller plus loin dans l'étude de ce système, nous allons utiliser les variables de Milne. Celles-ci ont été introduites pour la discussion de ce problème pour la première fois par S. Chandrasekhar [50] en 1942.

Posons les variables  $(u, v)$  telles que

$$v = x\psi'(x); \quad (\text{II.33})$$

$$u = \frac{x e^{-\psi(x)}}{\psi'(x)} = \frac{x^2 e^{-\psi(x)}}{v}. \quad (\text{II.34})$$

avec la notation  $' = d/dx$ .

Dans ce système de variables, l'équation de Poisson (II.32) devient

$$(xv)' = uv \quad (\text{II.35})$$

et donc on a

$$v + xv' = uv. \quad (\text{II.36})$$

À partir de la définition de  $u$  (II.34), on peut déduire des relations précédentes la valeur de la dérivée  $u'$ . Il vient

$$u' = \frac{2x}{v} e^{-\psi(x)} - \psi'(x) \frac{x^2 e^{-\psi(x)}}{v} - \frac{x^2 e^{-\psi(x)}}{v^2}; \quad (\text{II.37})$$

$$= \frac{2u}{x} - \frac{uv}{x} - \frac{(u-1)u}{x}. \quad (\text{II.38})$$

En terme de variables de Milne, le problème se réduit à l'étude du système dynamique de variable  $x$ , jouant le rôle de variable temporelle, variant entre 0 et  $X$  défini par

$$\begin{cases} v' = \frac{v}{x}(u-1) ; \\ u' = \frac{u}{x}(3-u-v) . \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

L'intérêt de cette écriture est de mettre en avant le paramètre  $X$  pour décrire les solutions du système. De plus, la discussion d'un système dynamique à deux variables est bien plus simple et agréable que la résolution d'une équation différentielle non linéaire d'ordre deux (II.32).

Il est à noter que ce système dynamique n'est pas un système autonome, il dépend explicitement de la variable temporelle. Si on le souhaite, il est possible de s'affranchir de cet aspect en posant le changement de variable  $t = \ln x$ .

### II.2.3 Étude du système dynamique

Dans ce sous-paragraphe, nous allons discuter en détail le système dynamique (II.39).

#### II.2.3.a Conditions initiales

Étudions la situation en  $r = 0$ . Si l'on revient au changement de variable (II.30), cette condition revient à étudier le problème en  $x = 0$ . Écrivons le développement au voisinage de 0 de la fonction  $\psi$  sous la forme

$$\psi(x) = \psi(0) + \psi'(0)x + ax^2 + o(x^2) \quad (\text{II.40})$$

avec  $a$  un nombre réel. Par définition de  $\psi$  (II.31),  $\psi(0) = 0$ . De plus,  $\psi'(0)$  représente la force gravitationnelle au centre de la sphère, qui est nulle par application du théorème de Gauss et par un argument de symétrie. Ainsi, on a

$$v(x) = 2ax^2 + o(x^2) \quad (\text{II.41})$$

et il vient immédiatement  $\lim_{x \rightarrow 0} (u, v) = (1/(2a), 0)$ .

Ensuite, l'écriture de l'équation de Poisson (II.35) au voisinage de 0 donne

$$(xv)' = uv \quad \implies \quad 6ax^2 + o(x^2) = x^2 + o(x^2) . \quad (\text{II.42})$$

Ainsi, on en déduit que  $a = 1/6$ .

La condition initiale avec laquelle il faut étudier le système dynamique est

$$(u_0, v_0) = (3, 0) . \quad (\text{II.43})$$

Il s'agit d'un des trois points fixe du système. Celui-ci est instable. Pour construire la courbe solution, il est nécessaire de connaître la direction avec laquelle le système va s'éloigner de ce point fixe. Nous avons donc besoin de calculer la pente. On peut montrer [47] que

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'}{v'} = \frac{u(3-u-v)}{v(u-1)} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{5}{3} . \quad (\text{II.44})$$

Le paramètre  $X$  n'intervient pas dans ces conditions initiales. Ainsi, l'unique courbe solution du système (II.39) avec ces conditions initiales contiendra l'intégralité des solutions du problème de la sphère isotherme.

### II.2.3.b Point d'équilibre stable

On remarque que le système (II.39) possède un unique point d'équilibre stable, défini par  $u = 1$  et  $v = 2$ . On en déduit le potentiel sans dimension  $\psi(x) = \ln(\frac{1}{2}x^2)$  et donc la densité de masse  $\rho(x) = \rho_0/x^2$ . Ce potentiel définit un système nommé sphère isotherme singulière. Ce système est bien solution de l'équation de Poisson (II.29) mais la densité de masse et le potentiel divergent en  $x = 0$ .

Autrement dit, ce point n'appartient pas à la courbe solution du système (II.39) avec les conditions initiales précédentes. La sphère isotherme singulière n'est pas donc une solution du problème. Ce point étant un attracteur du système dynamique, cette courbe solution va tendre vers lui. Il correspondra à la limite de la courbe lorsque  $X \rightarrow \infty$ .

### II.2.3.c Tracé du système

On trace numériquement dans le plan de Milne  $(u, v)$  la solution du système dynamique (II.39) avec la condition initiale  $(u_0, v_0) = (3, 0)$  dans la figure II.1. On voit apparaître la célèbre « spirale de Chandrasekhar ». On remarque bien que le point  $(1, 2)$  est un point attracteur n'appartenant pas à cette courbe.

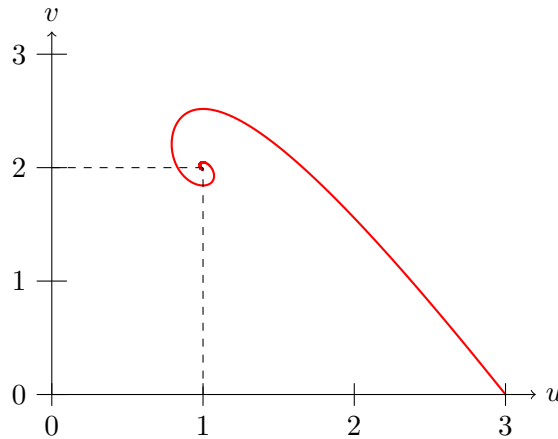


FIGURE II.1 – La spirale de Chandrasekhar dans le plan de Milne. La condition initiale étant unique, chaque point de cette courbe indexée par le paramètre  $X$  représente un état d'équilibre du problème de la sphère isotherme.

## II.2.4 L'énergie des sphères isothermes

La courbe de la figure II.1 et le raisonnement qui y conduit ne permettent pas une discussion physique immédiate. T. Padmanabhan a remarqué [47] qu'il est possible de changer de point de vue et d'exprimer les solutions du problème dans un diagramme énergie en fonction de la température, bien plus simple à discuter. Pour cela, nous devons prendre en compte les contraintes physiques sur l'énergie (II.4) et sur la masse (II.6) que nous réécrivons comme

$$E = \frac{3}{2}NT + 2\pi \int_0^R dr r^2 \rho(r) \Phi(r) ; \quad (\text{II.45})$$

$$Nm = \int_0^R dr 4\pi r^2 \rho(r) . \quad (\text{II.46})$$

Nous allons exprimer ces deux quantités dans les variables de Milne pour pouvoir inverser le problème.

### II.2.4.a Interprétation de la conservation de la masse

Dans l'équation (II.45), utilisons l'expression exponentielle de la densité de masse (II.26) puis utilisons les variables sans dimensions (II.30) et (II.31). Il vient

$$\frac{GNm^2}{TR} = \frac{1}{X} \int_0^X dx x^2 \exp[-\psi(x)] \quad \Longrightarrow \quad \frac{GNm^2}{TR} = \frac{1}{X} \int_0^X dx u(x)v(x). \quad (\text{II.47})$$

Avec l'équation de Poisson (II.35), on a  $(xv)' = uv$  et donc

$$\frac{TR}{GNm^2} = \frac{1}{v(X)}. \quad (\text{II.48})$$

La variable de Milne  $v$  a donc une interprétation physique directe. En parcourant la courbe de la figure II.1, la lecture de l'inverse de  $v(x)$  donne l'ensemble des températures réalisées par les états d'équilibre du système.

### II.2.4.b Conséquences de la conservation de l'énergie

Notons  $M(r)$  la masse contenue dans la sphère de rayon  $r$ . Revenons alors la définition de l'énergie potentielle. Il s'agit de l'énergie à fournir au système pour déplacer une coquille sphérique de masse infinitésimale  $dM$  de l'infini vers sa position  $r$  sachant que la masse  $M(r)$  est déjà présente. En notant  $r'$  toutes les positions intermédiaires, ce travail élémentaire  $\delta W$  vaut

$$\delta W = -GM(r)dM \int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'^2} = -G \frac{M(r)dM}{r}. \quad (\text{II.49})$$

En intégrant cette équation sur toutes les masses et en passant en variables  $r$ , on écrit le travail total

$$W = -G \int_0^R dr \frac{M(r)}{r} \frac{dM(r)}{dr}. \quad (\text{II.50})$$

De plus, par définition  $dM(r)/dr = 4\pi r^2 \rho(r)$  et donc l'énergie potentielle correspondant au travail total devient

$$V = -4\pi G \int_0^R dr r M(r) \rho(r). \quad (\text{II.51})$$

À partir du théorème de Gauss, on sait que  $\Phi'(\mathbf{r}) = GM(r)/r^2$ . L'équation de l'hydrostatique (II.25) s'écrit alors

$$\rho(r)M(r) = -\frac{T}{Gm} r^2 \rho'(r). \quad (\text{II.52})$$

En prenant en compte ce résultat et en réalisant une intégration par parties, il vient

$$V = 4\pi \frac{T}{m} \int_0^R dr r^3 \rho'(r) = 4\pi \frac{T}{m} [r^3 \rho(r)]_0^R - \frac{3T}{m} \int_0^R dr 4\pi r^2 \rho(r). \quad (\text{II.53})$$

On peut au final écrire l'énergie totale (II.45)

$$E = -\frac{3}{2}NT + 4\pi \frac{T}{m} R^3 \rho(R). \quad (\text{II.54})$$

Les calculs ci-dessus sont détaillés dans [47]. En basant la démonstration sur le théorème du Viriel qui prend en compte la pression du gaz sur la surface de la sphère  $\Lambda$ , on déduit le même résultat [10]. La conservation de l'énergie et le théorème du Viriel sont ici équivalentes.

En utilisant les variables de Milne (II.34) et la définition de  $v(X)$  (II.48), il vient

$$E = \frac{GN^2 m^2}{R} \frac{u(X) - 3/2}{v(X)}. \quad (\text{II.55})$$



### II.2.4.c Construction de la courbe énergie en fonction de la température

Écrivons une énergie  $\varepsilon$  et une température  $T^*$  sans dimensions

$$\varepsilon = \frac{ER}{GN^2m^2} \quad \text{et} \quad T^* = \frac{TR}{GNm^2} . \quad (\text{II.56})$$

La grandeur  $\varepsilon$  représente la quantité d'énergie portée par chaque particule dans les unités naturelles du système.

Avec ces notations, les conditions aux limites sur le bord de la boîte (II.48) et (II.55) sont synthétisées par le système

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{u(X) - 3/2}{v(X)} ; \\ T^* = \frac{1}{v(X)} . \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

On remarque que chaque valeur de  $X$  définit de façon unique un couple  $(u(X), v(X))$  appartenant à la courbe solution du système (II.39) tracée figure II.1. Rappelons que la grandeur  $X$  est la valeur maximale prise par la coordonnée  $x$  définie équation (II.30) et paramétrise ainsi chaque état d'équilibre possible du système. On construit la courbe énergie-température du système en utilisant des « droites de Padmanabhan » [47], droites définies par le système (II.57) et illustrées figure II.2. À partir de cette construction, on voit apparaître plusieurs comportements possibles. Le système peut être multivalué et, pour certaines valeurs de l'énergie, il n'existe pas d'états d'équilibre.

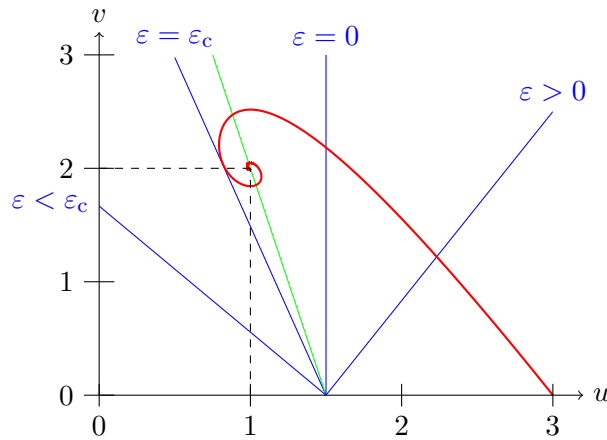


FIGURE II.2 – Droites de Padmanabhan et spirale de Chandrasekhar : chaque droite est définie par sa pente  $1/\varepsilon$ . L'intersection d'une droite et de la spirale permet de retrouver le couple  $(\varepsilon, T^*)$  correspondant à la valeur de la variable  $X$  du système dynamique via le système (II.57). On remarque l'existence d'une valeur critique de l'énergie  $\varepsilon_c$  à partir de laquelle le système n'a plus de solutions. Pour certaines valeurs de l'énergie (droite verte), le système est multivalué.

À partir de cette construction, on en déduit la relation entre l'énergie et la température du système, tracée figure II.3 que nous discutons dans le paragraphe suivant. Conformément aux usages, nous avons tracé  $-\varepsilon$  et l'inverse de la température  $T^*$ . Cela signifie en particulier que, si la courbe tracée est décroissante, l'énergie  $\varepsilon$  décroît avec la température  $1/T^*$ . La courbe présentée est une spirale s'enroulant autour d'un point attracteur, représentant la sphère singulière présentée au paragraphe précédent.

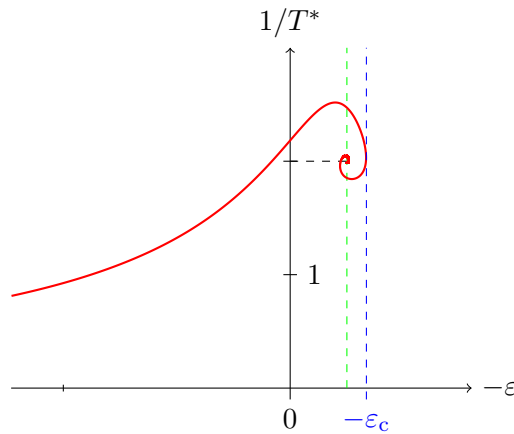


FIGURE II.3 – Courbe énergie-température de la sphère isotherme. On remarque qu’en dessous d’une certaine valeur critique  $\varepsilon_c \approx -0.335$ , le système n’a pas de solution d’équilibre. De plus, sur une certaine gamme d’énergie, le système est multivalué, pour une même énergie plusieurs états d’équilibres sont possibles avec des températures différentes.

### II.2.5 Discussion de la relation entre l’énergie et la température de la sphère isotherme

La discussion complète de cette courbe figure II.3 est très riche et présente de nombreuses subtilités. Une partie de ces aspects sortent du cadre de la discussion de cette thèse et nous renvoyons le lecteur à la lecture des articles historiques [10, 46, 47] pour les détails complets. Toutefois, nous souhaitons insister sur quelques éléments de discussion.

On remarque immédiatement des zones où l’énergie est décroissante avec la température. Cela signifie que la capacité calorifique à volume constant  $c_v = \partial E / \partial T$  est négative. Dans l’ensemble microcanonique, cela ne pose aucun problème. Si il est possible de décrire le système dans l’ensemble canonique, alors les ensembles seraient clairement non-équivalents. En effet la capacité calorifique est toujours positive dans l’ensemble canonique car elle est proportionnelle aux fluctuations de l’énergie moyenne. Toutefois, la description du système dans l’ensemble canonique dépend de la construction d’un thermostat, ce qui pose problème dans un contexte hydrostatique.

Ensuite, on remarque que dans une certaine gamme d’énergie, le système est multivalué. C’est à dire qu’il existe plusieurs états d’équilibre de température différentes pour une même énergie. La droite verte matérialise une de ces valeurs. On peut donc se poser la question de l’état réalisé par le système, et en particulier la stabilité de ces états. La discussion complète de cet intéressant problème a été réalisée par T. Padmanabhan [47] ou encore par J. Katz [51] et nous renvoyons le lecteur à la lecture de ces références pour tous les détails. Le résultat à retenir est que, pour les valeurs d’énergie supérieures à la valeur critique  $\varepsilon_c$ , il existera une distribution d’équilibre métastable si la quantité  $\mathcal{R} = \rho(0)/\rho(R)$  est plus petite que 709. La métastabilité s’explique car il n’existe pas, à cause de la divergence du potentiel en  $1/r$ , de maxima absolu de l’entropie. Il s’agit donc uniquement de maxima locaux. Cette zone correspond à la partie supérieure de la courbe de la figure II.3 qui parcourt l’énergie de l’infini jusqu’à  $\varepsilon_c$ . Au passage de la tangente verticale, la quantité  $\mathcal{R} = \rho(0)/\rho(R)$  devient plus grande que 709, l’entropie est extrémale mais sous la forme d’un point-selle. Il n’existe donc plus de maxima local et le système est dans un état instable pour la partie inférieure de la spirale [29, 48].

Il est à noter que cette valeur de  $\mathcal{R}$  est très faible, comparée à celle estimée pour certains objets astrophysiques comme les amas globulaires, où la densité entre le centre et les bords peut varier sur de nombreux ordres de grandeurs. Toutefois, comme la notion de boîte n’a pas de sens pour les

objets astrophysiques, la densité sur les bords de l’amas tend vers 0 et la comparaison avec cette grandeur du système théorique est limitée.

Enfin, un des aspects central de ce travail est l’existence de cette valeur limite de l’énergie  $\varepsilon_c = -0.335$ . Si l’énergie du système est en dessous de cette valeur, il n’existe pas d’extremum d’entropie et donc il n’existe pas d’état d’équilibre du système. On parle généralement de **catastrophe gravotherme**. Dans la littérature, il existe assez peu de discussions sur les éventuels états du système dans cette configuration. Dans son article [47], T. Padmanabhan pose la question d’une éventuelle distribution constituée d’une binaire très liée entourée d’un halo très chaud<sup>1</sup>. Dans leur article [10], D. Lynden-Bell et R. Wood expliquent que la distribution de type Maxwell-Boltzmann (II.26) n’est sans doute plus valable, et qu’il faudrait prendre en compte les effets collectifs pour décrire correctement le système dans cette gamme d’énergie. Ce résultat est d’ailleurs le point de départ de notre réflexion autour de cette thèse. Pour essayer de discuter cet aspect, et inspiré par les réflexions ci-dessus, nous avons choisi de nous intéresser à d’éventuels effets à courte portée, dus à la taille finie des objets ou à la courte portée de la gravitation.

## II.3 Le gaz isotherme de sphères dures

Dans le but de décrire des états d’équilibres de systèmes astrophysiques, le modèle de la sphère isotherme, bien que déjà très riche sur de nombreux aspects, est vraisemblablement trop simpliste. Un premier prolongement naturel est d’essayer de prendre en compte les aspects de courte portée. Nous allons dans ce paragraphe rester sur une description de type champ moyen, ce choix nous force à négliger les aspects de courte portée de la gravitation. Toutefois, il est possible de prendre en compte des effets locaux dus uniquement à la taille finie des objets dans une description de type hydrostatique. La justification de l’équivalence entre la description hydrostatique et l’hypothèse de champ moyen dans le cadre de sphères dure sera réalisée dans le chapitre III suivant.

Dans ce paragraphe, nous utilisons donc la méthode décrite dans la première partie du chapitre pour discuter un système de sphères dures en interaction gravitationnelle dans une approche hydrostatique. Pour cela, on tient compte dans la description de la sphère isotherme de la fonction de corrélation locale des sphères dures. Ce travail a en grande partie déjà été réalisé dans la référence [41] dans laquelle les auteurs ont en particulier étudié les transitions de phases de ce système. T. Padmanabhan a réalisé le même type de travail avec un fonction de corrélation plus simple, qu’il qualifie lui-même de « modèle jouet » [52], tout comme E.B. Aronson et C.J. Hansen [53]. Des travaux proches ont été réalisés pour un système de fermions en interaction gravitationnelle [12,23], où les corrélations locales d’origine quantique sont prises en compte avec la fonction de distribution de Fermi-Dirac, et pour un système gravitationnel avec une régularisation « molle » du potentiel [54,55].

Dans ce paragraphe, nous développons une méthode de calcul proche de celle du paragraphe précédent en utilisant à nouveau un système dynamique. Grâce à celui-ci, nous sommes en mesure de déterminer numériquement la relation entre l’énergie et la température pour un gaz de sphères dures en interaction gravitationnelle pour différentes fractions d’empilements. Ces courbes, très proches de celles obtenues d’autres régularisations [12,54–56], et originales pour ce système, sont discutées dans le dernier paragraphe de cette section et permettent une nouvelle lecture du modèle de la sphère isotherme pour des particules ponctuelles.

### II.3.1 Définitions et notations

Nous considérons maintenant un système de  $N$  sphères dures de diamètre  $\sigma$  et de masse  $m$  en interaction gravitationnelle dans une boîte sphérique de volume  $\Lambda = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Nous supposons que le système est thermalisé au sens du paragraphe II.1.3 à la température  $T$ .

1. [47] page 665 : “a hard binary plus  $N - 2$  high-velocity objects?”

### II.3.1.a Le modèle de sphères dures

Nous supposons qu'à petite échelle, les seules interactions entre les particules sont celles entre les sphères dures. Autrement dit, l'interaction gravitationnelle est négligée aux petites échelles. La pression locale des sphères dures s'exprime [57]

$$P(\mathbf{r}) = \frac{\rho T}{m} f(\eta(\mathbf{r})) \quad (\text{II.58})$$

avec

$$\eta(\mathbf{r}) = \frac{1}{6} \pi \sigma^3 \frac{\rho(r)}{m} \quad \text{et} \quad f(\eta) = \frac{1 + \eta + \eta^2 - \eta^3}{(1 - \eta)^3} . \quad (\text{II.59})$$

On a noté  $\rho(\mathbf{r})$  la densité locale de masse au point  $\mathbf{r}$ . Il est à noter que l'expression exacte de  $f$  en tant que fraction rationnelle est une très bonne approximation de la fonction réelle qui n'a pas d'expression analytique [57]. On appellera  $\eta(\mathbf{r})$  la **fraction d'empilement locale** des sphères dures. Cette quantité représente le nombre de sphères dures dans un volume élémentaire. Plus  $\eta$  est proche de  $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0,74048\dots$ , valeur maximale pour des sphères dures empilées en réseau cubique faces centrées [58, 59], plus le système aura tendance à être totalement condensé. Il est à noter que l'expression de  $f$  (II.59) n'est valide que pour  $\eta < 0.49$ , valeur de la fraction d'empilement où a lieu une transition de phase fluide-solide [60]. Dans ce travail, nous supposons que  $\eta$  reste toujours en dessous de cette valeur.

### II.3.1.b Équations physiques

Les deux équations qui contrôlent la physique du problème sont à nouveau la relation fondamentale de l'équilibre hydrostatique (II.25), que l'on écrit cette fois

$$\nabla \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{T}{m\rho(\mathbf{r})} \nabla [\rho(\mathbf{r}) f(\eta(\mathbf{r}))] \quad (\text{II.60})$$

et l'équation de Poisson (II.27)

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}) , \quad (\text{II.61})$$

qui n'est pas modifiée.

En symétrie sphérique, nous allons nous placer dans un système de coordonnées permettant de nous affranchir des unités du problème. Nous allons réutiliser les notations (II.30) et (II.31) ; que l'on rappelle

$$r \longmapsto x = \frac{r}{R} X \quad \text{avec} \quad X^2 = \frac{4\pi G m \rho_0}{T} R^2 ; \quad (\text{II.62})$$

$$\Phi(r) \longmapsto \psi(x) = \frac{m}{T} (\Phi(x) - \Phi(0)) . \quad (\text{II.63})$$

Comme l'équation de l'hydrostatique (II.60) ne s'intègre plus simplement, nous allons définir la densité de masse adimensionnée

$$w(x) = \frac{\rho(x)}{\rho_0} . \quad (\text{II.64})$$

Pour la suite, il est commode de définir une fraction d'empilement de référence, par exemple  $\eta_0$  la fraction d'empilement moyenne définie avec les paramètres moyens du problème, c'est-à-dire

$$\eta_0 = \frac{\pi \sigma^3 N}{6 \Lambda} = \frac{1 \sigma^3 N}{8 R^3} . \quad (\text{II.65})$$

Avec ces notations, l'équation de Poisson (II.61) devient

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d}{dx} \psi(x) \right) = w(x) \quad (\text{II.66})$$

et l'équation de l'hydrostatique (II.60) devient

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = -\frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}[w(x)f(\alpha w(x))] \quad (\text{II.67})$$

où l'on a noté, par soucis de concision,  $\alpha = \eta_0\rho_0\Lambda/M$ . Cette grandeur sert d'intermédiaire de calcul. Il faut retenir que le paramètre donné du problème reste  $\eta_0$ .

### II.3.2 Système dynamique

Comme pour la sphère isotherme, nous allons réduire le système physique à un système dynamique de variable  $x$ .

#### II.3.2.a Écriture du système

Comme nous l'avons vu au paragraphe II.2.4, les variables de Milne  $(u, v)$  ont l'intérêt de permettre une formulation mathématique simple des conditions aux limites de la sphère isotherme. Si la variable  $v$  a une interprétation physique simple, *i.e.*  $v(X)$  est l'inverse de la température, la variable  $u$  ne semble pas en avoir d'évidente. Dans le problème des sphères dures, à cause de la fonction  $f$  qui dépend uniquement de la densité, l'utilisation de la variable  $u$  ne simplifie plus le problème. Nous allons donc faire le choix de prendre comme variables  $(v, w)$ , qui semblent naturelles.

La variable  $v$  est définie par (II.33)

$$v = x\psi'(x) \quad (\text{II.68})$$

et  $w$  est définie par l'équation (II.64). Remarquons que la variable  $u$  (II.34) peut s'exprimer en fonction de  $v$  et  $w$ . Les variables ont changées, mais il y a le même nombre d'inconnues.

Dans ces conditions, le système d'équations (II.66) et (II.67) devient

$$\begin{cases} v' = wx - \frac{v}{x} ; \\ w' = -\frac{v}{x} \frac{w}{g(\alpha w)} . \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

avec la fonction  $g$  définie par

$$g(y) = f(y) + yf'(y) ; \quad (\text{II.70})$$

$$= \frac{1 + 4y + 4y^2 - 4y^3 + y^4}{(y-1)^4} . \quad (\text{II.71})$$

De façon évidente, les conditions initiales sont  $w_0 = 1$  et, par le même calcul qu'au paragraphe II.2.3, on trouve  $v_0 = 0$ . Ce point est un point fixe instable du système dynamique. Par rapport au système défini au paragraphe II.2.2, il n'existe pas de changement de variable astucieux pour le rendre autonome. En conséquence, la condition initiale sur la pente  $(dw/dv)_{x=0}$  de la courbe solution au voisinage de la position initiale dépend explicitement du paramètre  $\alpha$ . Il faut résoudre le système avec des conditions initiales différentes pour chaque état d'équilibre du système.

Ainsi, numériquement, pour chaque  $\alpha$ , on peut résoudre le système proposé  $(v, w)$  pour tout  $x$  compris entre 0 et  $+\infty$ . Ensuite, il faut extraire les informations physiques à partir de ces éléments.

#### II.3.2.b Lois de conservation et résolution du système

Nous allons poser à nouveau les variables adimensionnées

$$\varepsilon = \frac{ER}{GN^2m^2} \quad \text{et} \quad T^* = \frac{TR}{GNm^2} . \quad (\text{II.72})$$

Grâce à l'expression conservation de la masse, qui n'est pas modifiée par rapport au cas des objets ponctuels, la relation (II.48)

$$T^* = \frac{1}{v(X)} \quad (\text{II.73})$$

reste vérifiée.

En ce qui concerne la conservation de l'énergie (II.45), elle s'exprime

$$\frac{\varepsilon}{T^*} = \frac{3}{2} + \frac{T^*}{2X} \int_0^X dx x^2 w(x) \left( \frac{m}{T} \Phi(x) \right) . \quad (\text{II.74})$$

Afin d'exprimer l'énergie en fonction des variables du problème, nous allons utiliser l'expression explicite du potentiel  $\Phi$  en fonction de la densité, donnée par l'équation (II.28). Cette expression adimensionnée devient

$$\frac{m}{T} \Phi(x) = -\frac{1}{x} \int_0^x du u^2 w(u) - \int_x^1 du uw(u) . \quad (\text{II.75})$$

La condition sur l'énergie s'écrit alors uniquement en fonction de  $w$ , c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon}{T^*} = \frac{3}{2} - \frac{T^*}{2X} \int_0^X dx x^2 w(x) \left[ \frac{1}{x} \int_0^x du u^2 w(u) + \int_x^1 du uw(u) \right] . \quad (\text{II.76})$$

Pour  $\alpha$  et  $X$  donné, la résolution du système (II.69) permet d'avoir accès aux fonctions  $(v, w)$  pour  $x$  compris entre 0 et  $X$ . Avec l'aide des relations (II.73) et (II.76), on calcule l'énergie et la température de l'état d'équilibre du système. Toutefois, comme nous l'avons expliqué précédemment, le paramètre  $\alpha = \eta_0 \rho_0 \Lambda / M$  n'est pas un paramètre fixé *a priori*. Pour avoir accès aux courbes pour fraction d'empilement  $\eta_0$  fixée, il suffit de remarquer que

$$X^2 = \frac{4\pi G m \rho_0}{T} R^2 \quad \Longrightarrow \quad \rho_0 \frac{\Lambda}{M} = \frac{X^2 T^*}{3} = \frac{X^2}{3v(X)} ; \quad (\text{II.77})$$

et donc

$$\eta_0 = 3\alpha \frac{v(X)}{X^2} . \quad (\text{II.78})$$

Ainsi, la connaissance de la valeur  $v(X)$  permet non seulement d'avoir accès à la température du système, mais en plus de remonter à la valeur de la fraction d'empilement moyenne  $\eta_0$ .

### II.3.2.c Méthode numérique de résolution

Résumons la méthode numérique utilisée pour tracer avoir accès à un triplet  $(\eta_0, \varepsilon, T^*)$  :

- on fixe  $\eta_0$  ;
- on choisit une valeur de  $\alpha$  comprise entre  $]0, 0.49]$ , comme  $\alpha$  est la fraction d'empilement au centre et que la fonction  $\eta(r)$  est une fonction décroissante, cette borne supérieure permet d'éviter la transition de phase du gaz de sphères dures ;
- on résout le système  $(v, w)$  (II.69) pour  $x$  variant entre 0 et une valeur la plus grande possible ;
- on cherche la solution  $X$  de l'équation (II.78) ;
- on calcule  $(\varepsilon, T^*)$  grâce à cette valeur de  $X$  que l'on insère dans les équations (II.73) et (II.76).

Pour retrouver par cette méthode les résultats de la sphère isotherme des masses ponctuelles, il suffit de prendre  $\eta_0 = \alpha = 0$ . Dans ce cas, tous les points  $X$  seront solutions de (II.69) et permettront d'avoir accès aux couples  $(\varepsilon, T^*)$  de la sphère isotherme. Il est à noter que ce tracé permet de tester l'algorithme de calcul proposé. De plus, au cours de tous les calculs numériques effectués, l'équation (II.78) n'a toujours eu qu'une et une seule solution, ce qui a permis d'utiliser la méthode proposée assez simplement.

En suivant cette méthode, on a calculé numériquement plusieurs courbes tracées figure II.4 pour différentes fraction d'empilement. Ces courbes appellent plusieurs remarques.

### II.3.2.d Relation énergie-température

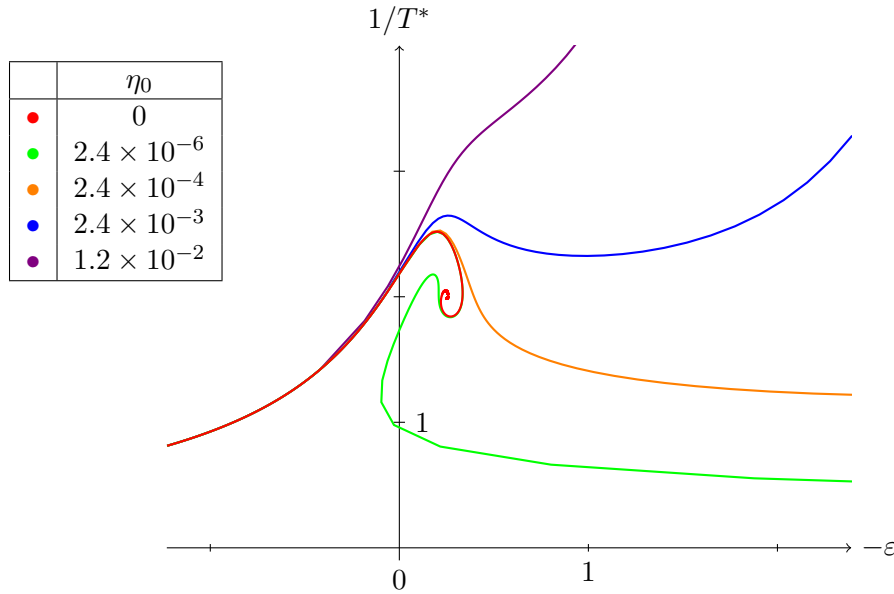


FIGURE II.4 – Courbes énergie-températures pour un gaz de sphères dures pour plusieurs fraction d’empilement. On remarque que pour  $\eta_0 = 0$ , on retrouve bien les résultats de la sphère isotherme. On observe un « déroulement » de la spirale des particules ponctuelles de la figure II.3. Pour toutes les courbes, il existe une énergie limite  $\varepsilon_{\text{coll}}$  tendant vers  $-\infty$  lorsque  $\eta_0$  va vers 0. La température diminue fortement vers cette limite inférieure et ne peut pas la dépasser. Il est à noter que cette énergie n’est pas représentée pour toutes les courbes. Pour plus de détails, voir la discussion dans le texte.

On remarque qu’à haute énergie, les corrélations entre les sphères dures n’interviennent pas. Tout se passe comme si le gaz de sphères dures se comportait comme un gaz de particules ponctuelles, et ce d’autant plus longtemps que la fraction d’empilement est faible. Ce comportement est attendu car il s’agit simplement du comportement du gaz parfait. À haute énergie, les aspects cinétiques sont totalement prépondérants. Les corrélations deviennent de plus en plus importantes lorsque l’on parcourt la spirale et on observe un comportement que l’on peut qualifier de « déroulement », de plus en plus marqué lorsque la fraction d’empilement augmente.

On remarque trois types de comportements distincts :

- pour les très faibles fractions d’empilement, la courbe reste longtemps proche de la sphère isotherme et il reste une multivaluation pour une large gamme d’énergie ;
- pour les fraction d’empilement intermédiaire, il existe une certaine valeur minimum de  $\eta_0$ , vraisemblablement proche de  $10^{-5}$ , telle que la multivaluation disparaisse ;
- pour les larges valeurs de fraction d’empilement, il existe une certaine valeur minimum de  $\eta_0$ , vraisemblablement proche de  $10^{-2}$ , telle que la courbe soit toujours croissante.

Malheureusement, l’implémentation de la méthode numérique n’est pas totalement satisfaisante et n’a pas permis d’atteindre des valeurs significativement plus faible de fraction d’empilement.

Pour toutes les courbes, il existera un valeur minimale de l’énergie  $\varepsilon_{\text{coll}}$  telle que l’inverse de la température augmente fortement. Cette énergie correspond à l’énergie minimale accessible lorsque le système est gelé dans un état totalement effondré. La quasi-totalité de l’énergie disponible est alors stockée sous forme gravitationnelle. Comme le modèle numérique s’arrête avant la transition de phase du gaz de sphères dures vers un état vitreux, on n’observe pas la divergence de l’inverse de la température, mais uniquement une forte augmentation et cette énergie limite n’est pas accessible.

Toutefois, au voisinage de ces états effondrés, le modèle de champ moyen n'est plus raisonnable et la discussion de la courbe dans ce domaine n'est donc pas pertinente.

### II.3.3 États d'équilibres et multivaluation

Les courbes d'équilibre tracées figure II.4 comportent, pour certaines, une multivaluation. Il est légitime de se demander quel état d'équilibre va être choisi par le système.

#### II.3.3.a Expression de l'entropie des états d'équilibre

En toute rigueur, l'entropie à considérer est celle du gaz isotherme de sphères dures. Pour une première discussion dans un souci de simplicité, nous considérons en première approximation qu'il est possible de l'approcher par l'entropie du gaz parfait. Pour cela, nous allons considérer l'entropie (II.5) que l'on écrit

$$S = - \int d^6\tau f \ln \frac{f}{K} ; \quad (\text{II.79})$$

où  $K$  est une constante de normalisation. Nous avons vu que les parties spatiales et impulsionnelles de la fonction de distribution  $f$  sont indépendantes, autrement dit cette fonction peut s'écrire

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = A \rho(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{p^2}{2mT} \right] ; \quad (\text{II.80})$$

avec la constante  $A$  déterminée par la normalisation  $\int f = Nm$  qui conduit à  $A = (2\pi mT)^{-3/2}$ . En utilisant ces résultats dans la définition de l'entropie (II.79), il vient le résultat

$$S = A \int d^3\mathbf{r} \rho \int d^3\mathbf{p} \frac{p^2}{2mT} \exp \left[ -\frac{p^2}{2mT} \right] - A \int d^3\mathbf{p} \exp \left[ -\frac{p^2}{2mT} \right] \int d^3\mathbf{r} \rho \ln \rho - Nm \ln \frac{A}{K} . \quad (\text{II.81})$$

Dans cette expression, les intégrales gaussiennes se calculent directement et sont en partie compensées par la définition de  $A$ . Au final, on trouve

$$\frac{S}{Nm} = \frac{3}{2} - \int d^3\mathbf{r} \frac{\rho}{Nm} \ln \frac{\rho}{K} + \frac{3}{2} \ln(2\pi mT) . \quad (\text{II.82})$$

En utilisant le changement de variable  $r \rightarrow x$  défini équation (II.62) et en reprenant la variable  $w$  (II.64), l'intégrale restante devient

$$\int d^3\mathbf{r} \frac{\rho}{Nm} \ln \frac{\rho}{K} = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{NmX^3} \int_0^X x^2 dx w(x) \ln w(x) + \ln \frac{\rho_0}{K} ; \quad (\text{II.83})$$

$$= \frac{T^*}{X} \int_0^X x^2 dx w(x) \ln w(x) + \ln \frac{\rho_0}{K} . \quad (\text{II.84})$$

car  $NmT^*X^2 = 4\pi R^3\rho_0$ .

Ainsi, en utilisant les grandeurs que nous avons définies précédemment, l'expression (II.82) conduit à la valeur numérique de l'entropie d'une configuration donnée par

$$\frac{S}{Nm} = C + \frac{3}{2} \ln T^* - \ln \frac{\alpha}{\eta_0} - \frac{T^*}{X} \int_0^X x^2 dx w(x) \ln w(x) \quad (\text{II.85})$$

avec  $C$  une constante du problème indépendante de la température et de l'énergie. On peut intégrer le calcul de cette quantité dans l'algorithme du paragraphe (II.3.2.c).



La courbe de la figure II.5 représente les variations de l'entropie (II.85), où l'on a retranché la constante  $C$ , en fonction de l'énergie  $-\varepsilon$ . Cette courbe permet de définir les états d'équilibres les plus probables du problèmes, qui doivent toujours être d'entropie maximale. Les autres états définissent des états métastables, qui peuvent avoir une durée de vie très longue. Notons que ce calcul a déjà été effectué dans la référence [41], dans laquelle une courbe similaire à la courbe de la figure II.5 est tracée.

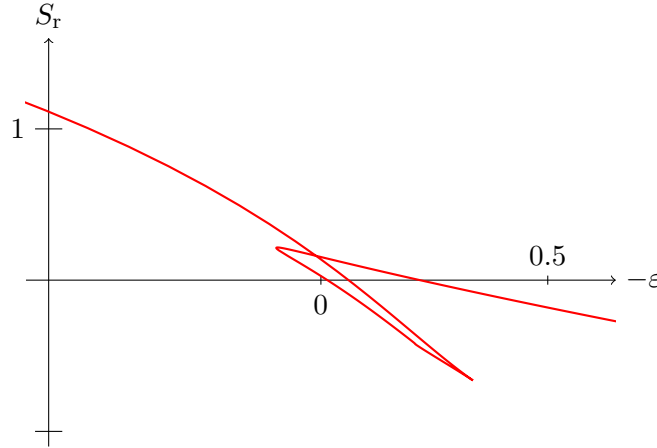


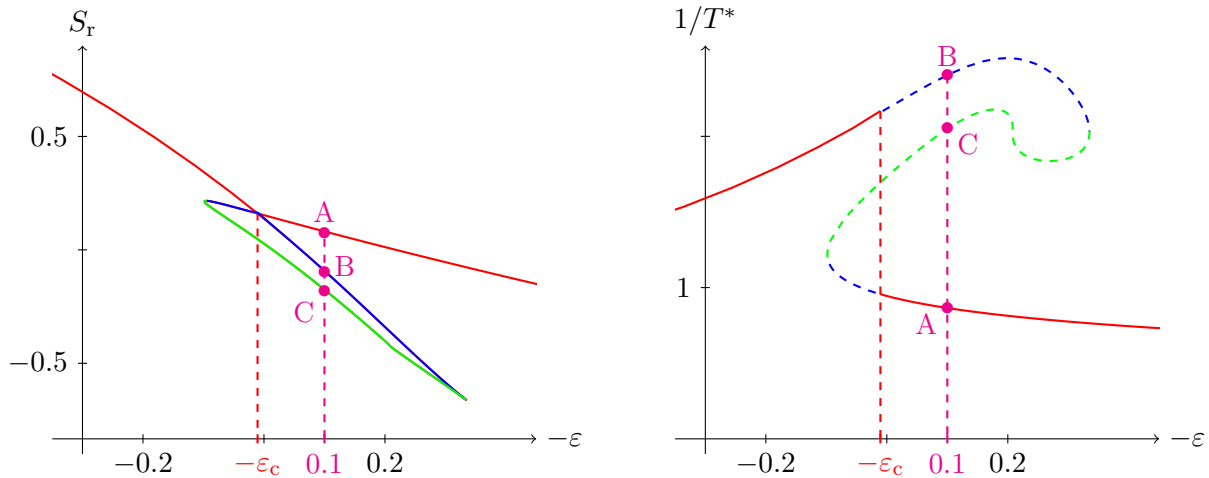
FIGURE II.5 – Tracé de la quantité  $S_r = S/(Nm) - C$  définie à partir de l'équation (II.85) en fonction de l'énergie sans dimension  $-\varepsilon$  pour  $\eta_0 = 2.4 \times 10^{-6}$ . Il ne s'agit pas de l'entropie totale mais juste de sa partie variable, ce qui explique le signe parfois négatif de cette quantité. On remarque l'existence d'un point de croisement de cette courbe, pour une énergie  $\varepsilon_c \approx -0.01$ . La partie de la courbe toujours maximale définit les états stables du systèmes. Cette courbe est parcourue de la même façon que le sont les courbes de la figure II.4.

### II.3.3.b Construction des états stables

Les maxima de la figure II.5 représentent les états que nous appelons stables. En effet, l'entropie est au moins maximale localement sur ces états. Les autres états décrits par la courbe correspondent aussi à des extrema de l'entropie, pouvant être des maxima locaux ou des points-selles. En appliquant le critère de stabilité de Katz [51] aux courbes de la figure II.4, les états métastables correspondent à la continuation des branches stables jusqu'au tangentes verticales, tandis que les états instables correspondent aux états intermédiaires. Cette discussion est synthétisée figure II.6b.

Pour la fraction d'empilement considérée, selon que l'énergie du système soit légèrement supérieure ou inférieure à l'énergie de croisement  $\varepsilon_c \approx 0.01$ , l'état le plus probable du système est totalement différents. Les deux états sont un état quasi-homogène gazeux et un état cœur-halo, comme discuté dans la références [41]. Il faut remarquer que le cœur reste dans un état fluide avec une fraction d'empilement au centre très inférieure à 0.49. Il ne s'agit donc pas, pour ces gammes d'énergies et de températures, d'une transition solide due aux sphères dures, mais d'une transition entre deux états dont les distribution de masse sont très différentes l'une de l'autre.

Notons que le déroulement de la spirale est en fait un phénomène général lié à la régularisation du potentiel à courte portée. En effet, des courbes très similaires ont été dérivées pour le système de fermion [12,23] et pour le système comprenant une régularisation « molle » du potentiel [54,55]. Ces deux régularisations sont d'ailleurs regroupées dans un article commun [56].



(a) Tracé de la quantité  $S_r = S/(Nm) - C$  définie à partir de l'équation (II.85). La partie rouge représente les états de plus haute entropie. La partie bleue représente les maxima secondaire de l'entropie tandis que la partie verte représente les points-selles. Cette discussion est réalisée par l'application du critère de Katz [51].

(b) Discussion de la stabilité du gaz de sphères dures isotherme. La courbe continue rouge correspond aux états stables, la courbe pointillée bleue aux états métastables et la courbe pointillée verte représente les états instables. Le passage de métastable à instable se fait au passage d'une asymptote verticale, en application du critère de Katz [51].

FIGURE II.6 – Discussion de la stabilité du gaz de sphères dures isotherme.

### II.3.3.c Discussion

Dans l'étude numérique des états d'équilibre pour  $\eta_0 = 2.4 \times 10^{-6}$ , nous avons mis en évidence une énergie critique pour laquelle une transition de phase apparaît. De la même manière pour les autres valeurs de  $\eta_0$  où le système est multivalué, on peut définir une telle énergie et que l'on notera donc  $\varepsilon_c(\eta_0)$ . Cet effet a déjà été observé et discuté dans [41]. Nos résultats numériques semblent montrer que cette fonction  $\varepsilon_c(\eta_0)$  est croissante lorsque  $\eta_0$  diminue. Autrement dit, plus la fraction d'empilement est faible, plus la partie métastable de la courbe est importante. En particulier, toute la partie proche de la spirale du modèle de la sphère isotherme correspond à des états d'équilibres instables. Ce comportement a d'ailleurs été observé pour d'autres régularisations du potentiel [12,54].

Ce résultat est intéressant au vu des résultats historiques discutés dans le paragraphe II.2.5 à l'aide de la littérature pour le système de particules ponctuelles. En effet, le modèle d'Antonov et le modèle du gaz de sphères dures étant bien définis, on s'attend à ce que le premier soit la limite du second lorsque la taille des particules  $\sigma$  tend vers 0. La courbe d'équilibre du gaz de sphères dures tend en effet à reproduire la forme de spirale d'Antonov, mais il semble que l'intégralité de la courbe pour les particules ponctuelles corresponde en réalité à un résidu de la zone d'équilibre métastable et instable du modèle des sphères dures. Dans ce cadre, il n'est pas totalement légitime de prendre exactement  $\sigma = 0$  car on supprime artificiellement la zone d'équilibre stable, correspondant en réalité à des états très chauds de type cœur-halo.

Il est à noter que, d'un point de vue dynamique, il est fort probable qu'un système préparé dans un de ces états métastables mettra un temps d'autant plus long que les particules sont petites pour transiter vers l'état réel d'équilibre. Cet élément dynamique est central, et permet d'affirmer que

cette zone métastable est sans doute celle qui sera le plus souvent observée.

La discussion présentée ici est issue d'éléments numériques partiels et d'une certaine tendance observée. Elle mérite, et il n'a pas été possible de la réaliser pendant cette thèse, une étude bien plus précise.

## II.4 Pertinence astrophysique et éléments de conclusion

Pour conclure, essayons d'utiliser nos résultats pour un système astrophysique réel : les amas globulaires. Pour cela, utilisons les valeurs numériques typiques issues de l'ouvrage de référence de Binney et Tremaine [7]. On a des amas de rayon  $R = 50$  pc tandis que la masse totale est d'ordre  $M = 6 \times 10^5 M_\odot$ . Le nombre  $N$  d'objets est estimé en choisissant une masse d'ordre  $m = 1 M_\odot$ . Les observations fournissent une dispersion des vitesses de l'ordre de  $\delta v = 7 \text{ km.s}^{-1}$ . Ainsi, de tels systèmes ont une fraction d'empilement  $\eta_0$  de l'ordre de  $10^{-17}$ . Pour une telle valeur et avec la description de ce paragraphe, l'état cœur-halo est censé être à une température moyenne  $T^*$  extrêmement importante. Or les observations indiquent plutôt des valeurs de  $\varepsilon$  comprises entre  $-1$  et  $-0.3$  tandis que  $T^*$  est de l'ordre de 1. Au final, il est difficile de faire correspondre aux amas globulaires un état d'équilibre décrit par un des modèles de ce chapitre.

Le modèle du gaz de sphères dures apporte une nouvelle variété de phénomènes à discuter, notamment les transitions de phase et la métastabilité. Il fait notamment disparaître la barrière absolue de  $\varepsilon_c = -0.335$  de la catastrophe gravotherme des particules ponctuelles. Toutefois, avec ce petit calcul d'ordres de grandeur, les limites de la modélisation apparaissent immédiatement. La prochaine étape pour essayer de se rapprocher d'une modélisation plus réaliste d'un amas globulaire est d'essayer de prendre en compte l'effet de la gravitation à courte portée. C'est ce que nous ferons dans le chapitre V de cette thèse en introduisant un modèle d'étoiles binaires.

# Étude de la validité de l'approche hydrostatique

Dans le chapitre précédent et à l'aide de la littérature [9, 10, 46–48], nous avons établi une série de résultats du système gravitationnel à  $N$  corps sous des hypothèses de champ moyen. Au cours de la discussion, nous avons remarqué que certains de ces résultats peuvent sembler incompatibles avec les observations astrophysiques, comme la catastrophe gravotherme interdisant certains états d'équilibre pour les systèmes considérés. Il est ainsi légitime de se demander quelles sont les conditions théoriques qui permettent l'application des résultats de l'hypothèse hydrostatique.

Nous introduisons donc le système d'étude  $\mathcal{S}$  défini par son nombre fini de particules  $N$ , son énergie par particule  $\varepsilon$  et sa fraction d'empilement  $\eta$ . Ces paramètres peuvent être imposés par la réalité des observations, pour les amas globulaires ou les gaz, ou par le physicien souhaitant réaliser une simulation numérique par exemple. À partir de ce système d'étude, nous construisons un système sur lequel nous pouvons réaliser une approche hydrostatique. Comme celle-ci s'applique par définition à un système fluide continu, il est nécessaire de définir un système infini, que nous noterons  $\mathcal{S}_\infty$ , qui a la même énergie par particule et la même fraction d'empilement que le système d'intérêt. Il est ainsi naturel de construire une suite de systèmes auxiliaires  $\{\mathcal{S}_a\}$  avec  $N_a$  particules où l'élément  $N_a = N$  est le système d'intérêt  $\mathcal{S}$  et le système limite lorsque  $N_a \rightarrow +\infty$  est  $\mathcal{S}_\infty$ . Pour conserver la fraction d'empilement et l'énergie par particule au cours du processus, il est nécessaire de choisir précisément une limite de « scaling », où les différents paramètres du problème varient avec  $N$ , ce que nous faisons dans le paragraphe III.1. Il est à noter que nous sommes amenés à imposer l'extensivité de l'énergie comme condition centrale du raisonnement, extensivité qui usuellement disparaît dans les systèmes en interaction à longue portée.

L'approche hydrostatique est adaptée par construction à l'étude de  $\mathcal{S}_\infty$ . De façon évidente, les éléments de la suite  $\{\mathcal{S}_a\}$  où  $N_a$  est d'ordre 1 ne peuvent pas être décrits par l'approche hydrostatique. Lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, la description hydrostatique devient donc valable pour des valeurs de  $N_a$  suffisamment grandes. Au cours de ce travail, nous mettons en évidence les critères quantitatifs caractérisants cette validité. On est alors en mesure de discuter si l'approche hydrostatique convient ou non pour l'étude du système  $\mathcal{S}$ .

Ce chapitre est divisé comme suit. Nous commençons par définir les différents systèmes et la limite de scaling au paragraphe III.1. Ensuite, comme la limite de scaling préserve l'extensivité de l'énergie, les fluctuations statistiques des différentes grandeurs, en particulier de l'énergie potentielle, peuvent être supposées négligeables par rapport aux grandeurs les plus probables. Nous donnons des arguments permettant de s'en convaincre dans le paragraphe III.2. Puis, dans le paragraphe III.3, nous montrons qu'une conséquence importante de cette hypothèse sur les fluctuations est l'émergence de la thermalisation locale des systèmes  $\{\mathcal{S}_a\}$  pour un nombre de particules suffi-

samment grand. En particulier, des facteurs de Boltzmann émergent naturellement dans l'écriture des distributions de masse. Nous avons alors suffisamment d'arguments dans le paragraphe III.4 pour justifier l'utilisation de l'approche hydrostatique pour décrire le système  $\mathcal{S}_\infty$ . En effet, au niveau local, les interactions entre les objets sont uniquement de type sphère dure, et l'interaction gravitationnelle n'intervient plus par construction de la limite de scaling. Le système  $\mathcal{S}_\infty$  défini par  $\eta$  et  $\varepsilon$  est donc un système de gaz de sphères dures isotherme, que nous avons discuté en détail dans le paragraphe II.3 du chapitre précédent. Enfin, dans le paragraphe III.5 en prenant un peu de recul sur cette construction, nous sommes alors en mesure de mettre en évidence dans le raisonnement les hypothèses quantitatives qui permettent l'émergence du traitement hydrostatique. Nous testerons ces critères sur deux systèmes astrophysiques, que sont un gaz de poussière et un amas globulaire.

Les principaux éléments de ce chapitre sont issus de notre publication [42], reproduite en Annexe B de cette thèse.

## III.1 Définitions

### III.1.1 Le système d'intérêt $\mathcal{S}$ dans l'ensemble microcanonique

Nous considérons un système gravitationnel classique  $\mathcal{S}$  constitué de  $N$  sphères dures identiques de masse  $m$  et de diamètre  $\sigma$ . Ce système est placé dans une boîte sphérique de volume  $\Lambda = 4\pi R^3/3$ . L'Hamiltonien correspondant s'écrit

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (\text{III.1})$$

avec le potentiel d'interaction à deux corps

$$v(r) = \infty \quad \text{pour } r < \sigma, \quad v(r) = -Gm^2/r \quad \text{pour } r > \sigma. \quad (\text{III.2})$$

Le système supposé à l'équilibre étant traité dans l'ensemble microcanonique, son énergie est fixée à une certaine valeur notée  $E$ . La fonction de distribution en position et en moment s'écrit

$$f_{\text{micro}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = A_N \delta(E - H_N), \quad (\text{III.3})$$

tandis que le nombre total de micro-états du système vaut

$$\Omega(E, N, \Lambda) = A_N \int_{\Lambda^N \times \mathbf{R}^{3N}} \prod_i d^3\mathbf{r}_i d^3\mathbf{p}_i \delta(E - H_N), \quad (\text{III.4})$$

avec  $A_N$  une constante de normalisation.

L'état stationnaire de masse  $Nm$  est contrôlé par les trois paramètres indépendants  $N$ , l'énergie par particule en unité gravitationnelles  $\varepsilon = ER/GM^2$ , et par la fraction d'empilement  $\eta = \pi n\sigma^3/6$ . Le paramètre  $\varepsilon$  correspond à l'énergie par particule en unité de  $GM^2/R$  définie de la même manière dans le chapitre précédent (II.56). Du point de vue de la discussion, ce système est le système d'étude. Les trois paramètres le définissant ont une valeur numérique fixée une fois pour toutes par les observations ou par les données de la simulation numérique.

### III.1.2 Construction de la limite de scaling

Nous construisons maintenant une suite de systèmes auxiliaires théoriques  $\{\mathcal{S}_a\}$  contenant chacun  $N_a$  particules. Les paramètres  $\varepsilon_a$  et  $\eta_a$  définissant l'équilibre de ces systèmes sont fixés identiques aux paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  du système d'étude. Le système limite lorsque  $N_a \rightarrow +\infty$  est noté  $\mathcal{S}_\infty$ . Pour

assurer que celui-ci soit décrit par les paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$ , il faut de plus imposer l'extensivité de l'énergie  $E_a$  des systèmes auxiliaires. Pour maintenir cette limite, que nous avons nommé de façon transparente **limite de scaling**, il est nécessaire que les paramètres définissant les systèmes  $\mathcal{S}_a$  varient avec les paramètres  $N_a$  selon une certaine loi de puissance.

Nous posons donc  $\sigma_a = (N_a/N)^\alpha \sigma$ ,  $m_a = (N_a/N)^\delta m$ , et le rayon de la boîte sphérique  $R_a = (N_a/N)^\gamma R$  avec  $\gamma > 0$ . Cette dernière condition impose la divergence du volume, assurant une taille infinie pour le système infini. La densité particulière  $n_a = N_a/\Lambda_a$  se comporte donc comme  $N_a^{1-3\gamma}$ . En imposant que  $\eta_a = \pi n_a \sigma_a^3/6$  reste fixé et égale à  $\eta$ , nous trouvons une première contrainte

$$1 - 3\gamma + 3\alpha = 0 . \quad (\text{III.5})$$

Comme  $E_a$  est choisie extensive, le paramètre  $\varepsilon_a = E_a/(GM_a^2/R_a)$  restant fixé, l'énergie gravitationnelle  $GM_a^2/R_a$  est aussi extensive. Cela implique une seconde contrainte

$$2 + 2\delta - \gamma = 1 . \quad (\text{III.6})$$

La dernière contrainte nécessaire à fixer les trois exposants consiste à imposer que la densité de masse  $\rho_a = m_a n_a$  reste constante égale à  $\rho$ , ce qui conduit à

$$1 - 3\gamma + \delta = 0 . \quad (\text{III.7})$$

Les trois exposants solutions de ce système sont  $\alpha = -2/15$ ,  $\delta = -2/5$  et  $\gamma = 1/5$ . Les lois de puissances définissant la limite de scaling recherchée (SL) quand  $N_a \rightarrow \infty$  sont ainsi

$$R_a = (N_a/N)^{1/5} R , \quad m_a = (N_a/N)^{-2/5} m , \quad \sigma_a = (N_a/N)^{-2/15} \sigma , \quad E_a = (N_a/N) E . \quad (\text{III.8})$$

Comme illustré figure III.1, cette limite permet de construire un milieu infini et continu  $\mathcal{S}_\infty$ , dont l'état est contrôlé par les deux paramètres indépendants  $\varepsilon$  et  $\eta$ . Notons que, dans cette limite, le libre parcours moyen des particules  $\ell_a = 1/(\pi\sqrt{2} \sigma_a^2 n_a)$  est proportionnel au diamètre  $\sigma_a$  des sphères dures,  $\ell_a = \sigma_a/(6\sqrt{2} \eta)$ . Pour les systèmes très dilués, le libre parcours moyen est ainsi beaucoup plus grand que le diamètre des particules.

### III.1.3 À propos de l'introduction des systèmes auxiliaires

Le fait de choisir de faire varier les propriétés physiques comme la masse ou la taille des particules avec  $N_a$  peut interpeller. Toutefois, il s'agit en réalité d'une variante d'un raisonnement très classique en thermodynamique.

En effet, prenons l'exemple de l'étude des propriétés thermodynamiques d'un gaz. Les propriétés physiques classiques utilisées pour décrire un gaz sont sa densité particulière et son énergie par particule. Pour construire les fonctions d'états thermodynamiques de ce gaz, nous faisons appel à des systèmes intermédiaires finis. Les différentes grandeurs d'intérêt sont alors calculées exactement. Ensuite, les grandeurs d'intérêt du système infini sont déduites en prenant la limite  $N \rightarrow +\infty$  tout en conservant la densité particulière et l'énergie par particule. Ces fonctions sont alors supposés être valables pour le système d'étude qui contient un grand nombre de particules.

Le raisonnement avec les systèmes auxiliaires dans notre problème est exactement le même, sauf que les propriétés physiques pertinentes pour le système gravitationnel ne sont plus la densité particulière uniquement, mais la densité de masse et la fraction d'empilement. En effet, fixer cette densité permet de faire en sorte que la même quantité de masse sera toujours présente dans un volume élémentaire, et donc le champ gravitationnel moyen sera toujours du même ordre de grandeur pour tous les systèmes. De plus, on peut noter que la limite de scaling que nous proposons garde la constante de gravitation  $G$  fixée, contrairement à d'autres limites étudiées dans la littérature [16,17].

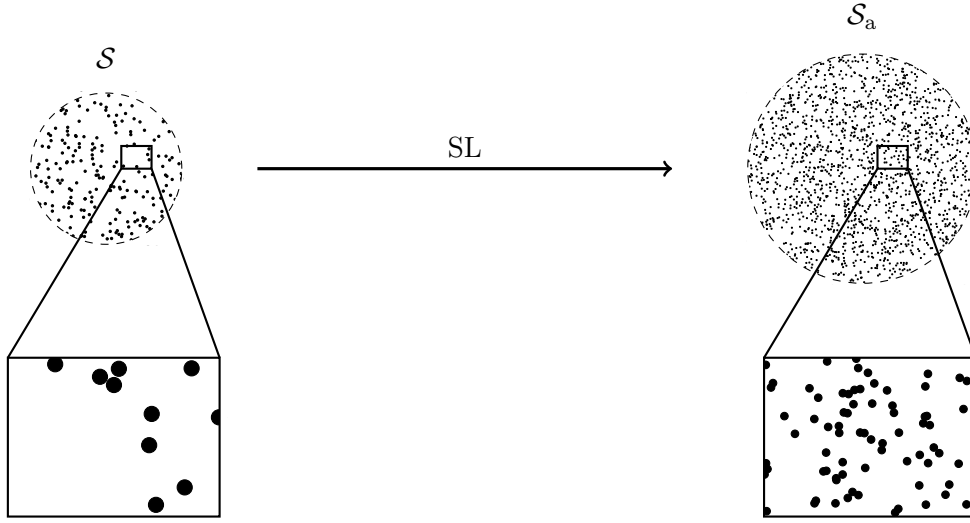


FIGURE III.1 – Dans la limite de scaling (SL), les particules deviennent infiniment petites et légères, alors que leur densité de masse interne  $6m_a/(\pi\sigma_a^3)$  reste constante. La densité particulaire  $n_a$  diverge comme  $N_a^{2/5}$ , tandis que leur densité de masse  $\rho_a$  est fixée à  $\rho$ , tout comme la fraction d'empilement  $\eta_a = \eta$  et l'énergie adimensionnée  $\varepsilon_a = \varepsilon$ .

## III.2 Étude des propriétés de scaling des systèmes auxiliaires

Dans ce premier paragraphe, nous mettons en évidence le comportement des systèmes auxiliaires avec la limite de scaling. En particulier, nous verrons que l'extensivité imposée par le scaling permet d'élaborer une hypothèse concernant les fluctuations de l'énergie potentielle.

### III.2.1 Extensivité de l'énergie potentielle

Pour toutes les configurations autorisées, l'énergie potentielle du système  $\mathcal{S}_a$

$$V_{N_a} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Gm_a^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (\text{III.9})$$

est supérieure à  $-Gm_a^2 N_a^2 / L_{\text{coll}}$ , énergie potentielle de la configuration totalement compacte où les  $N_a$  sphères dures forment un unique agrégat sphérique de taille  $L_{\text{coll}} \sim N_a^{1/3} \sigma_a$ . Dans la limite de scaling, le rayon de cette sphère  $L_{\text{coll}}$  diverge comme  $N_a^{1/5}$  et donc

$$V_{N_a} \geq -C_{\text{HS}} \frac{GN^{2/3} m^2}{\sigma} N_a, \quad (\text{III.10})$$

où  $C_{\text{HS}}$  est un nombre positif réel déterminé par la géométrie de l'arrangement des sphères dures dans l'état effondré.

De plus, l'énergie potentielle est maximale lorsque toutes les particules sont réparties de façon homogène sur la surface de la boîte. Cet état correspond à une sphère creuse portant la densité surfacique de masse  $N_a m_a / (4\pi R_a^2)$ , ce qui conduit à la borne supérieure

$$V_{N_a} \leq -\frac{GNm^2}{2R} N_a. \quad (\text{III.11})$$

À partir de ces bornes (III.10) et (III.11),  $V_{N_a}$  reste d'ordre  $N_a$  pour toutes les configurations. Cela implique que l'énergie potentielle moyenne  $\langle V_{N_a} \rangle$  est bornée par des quantités extensives, où  $\langle A \rangle$

représente la moyenne d'une observable  $A$  pondérée par la distribution microcanonique du système  $\mathcal{S}_a$  définie par l'expression (III.3) avec  $(N, A_N, H_N, E)$  remplacés par  $(N_a, A_{N_a}, H_{N_a}, E_a)$ . Au final, dans cette limite de scaling, l'extensivité de  $\langle V_{N_a} \rangle$  devrait être assurée. De plus, comme l'énergie potentielle typique  $GM_a^2/R_a$  est extensive par construction de la limite de scaling, on trouve

$$\lim_{\text{SL}} \frac{\langle V_{N_a} \rangle}{(GM_a^2/R_a)} = u(\varepsilon, \eta), \quad (\text{III.12})$$

où  $u(\varepsilon, \eta)$  est l'énergie potentielle adimensionnée par particule du système infini  $\mathcal{S}_\infty$ , qui dépend uniquement des paramètres intensifs  $\varepsilon$  et  $\eta$ .

### III.2.2 Fonctions de distribution de masse

Définissons la fonction de distribution de masse à un corps, s'écrivant

$$\rho_a(\mathbf{r}) = m_a \left\langle \sum_{i=1}^{N_a} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \right\rangle. \quad (\text{III.13})$$

Grâce aux propriétés de scaling de l'énergie potentielle décrites ci-avant, nous pouvons raisonnablement supposer que  $\rho_a(\mathbf{r})$  est une fonction bien définie dans la limite de scaling, qui est alors la distribution de masse  $\rho_\infty(\mathbf{r})$  du système infini  $\mathcal{S}_\infty$ . En prenant en compte les dimensions et les arguments de symétrie, cela conduit à

$$\lim_{\text{SL}} \rho_a(qR_a) = \rho g(q; \varepsilon, \eta), \quad (\text{III.14})$$

où  $q = r/R_a$  reste fixé dans la limite de scaling. La fonction  $g(q; \varepsilon, \eta)$  est la fonction de distribution de masse adimensionnée en fonction de la distance redimensionnée  $q$ .

La fonction de distribution de masse à deux corps s'écrit

$$\rho_a^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = m_a^2 \left\langle \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}') \right\rangle, \quad (\text{III.15})$$

et l'on donne des définitions analogues pour les fonctions de distribution de masse à  $n$  corps avec  $n \geq 3$ . Les propriétés de scaling (III.14) peuvent être étendues à ces fonctions, c'est-à-dire

$$\lim_{\text{SL}} \rho_a^{(2)}(R_a \mathbf{q}, R_a \mathbf{q}') = \rho^2 g^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \varepsilon, \eta), \quad (\text{III.16})$$

et ainsi de suite.

### III.2.3 Hypothèse de fluctuations de l'énergie potentielle

Considérons maintenant les fluctuations de l'énergie potentielle que l'on peut écrire comme

$$\begin{aligned} \langle V_{N_a}^2 \rangle - [\langle V_{N_a} \rangle]^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Lambda_a^2} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \rho_a^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{G^2 m_a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \int_{\Lambda_a^3} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}'' \rho_a^{(3)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \frac{G^2 m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\Lambda_a^4} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{r}'' d^3 \mathbf{r}''' \left[ \rho_a^{(4)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') - \rho_a^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_a^{(2)}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') \right] \frac{G^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'''|}, \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

où  $\rho_a^{(3)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  et  $\rho_a^{(4)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$  sont les fonctions de distributions de masse à trois et quatre corps. Dans la limite de scaling, le deux premiers termes de l'expression (III.17) peuvent être estimées grossièrement en remplaçant  $\rho_a^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et  $\rho_a^{(3)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  à l'aide du comportement de leurs fonctions



limites  $g^{(2)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \varepsilon, \eta)$  et  $g^{(3)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}''; \varepsilon, \eta)$ . Le premier terme se trouve être d'ordre  $N_a^0$ , tandis que le second se comporte comme  $N_a$ .

Si on estime le troisième terme de l'expression (III.17) de la même manière, on trouve un comportement en  $N_a^2$ . Toutefois, une telle estimation surestime le comportement exact car les corrélations

$$\left[ \rho_a^{(4)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') - \rho_a^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_a^{(2)}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}''') \right] \quad (\text{III.18})$$

peuvent raisonnablement être supposées faibles devant  $\rho^4$  pour une grande partie des configurations  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$  décrivant le domaine  $\Lambda_a^4$ . À ce stade, une estimation précise n'est pas possible, nous allons donc supposer que le troisième terme de (III.17) évolue plus lentement que  $N_a^2$ . Ainsi, on peut supposer que les fluctuations (III.17) deviennent faibles par rapport à  $N_a^2$  dans la limite de scaling, *i.e.*

$$\langle V_{N_a}^2 \rangle - [\langle V_{N_a} \rangle]^2 \sim o(N_a^2). \quad (\text{III.19})$$

À partir de ces hypothèses et de l'extensivité de l'énergie potentielle, nous pouvons faire une hypothèse sur le comportement de l'énergie potentielle. Dans la suite, nous proposons de décomposer  $V_{N_a}$  comme

$$V_{N_a} \rightarrow \langle V_{N_a} \rangle + W_{N_a}, \quad (\text{III.20})$$

avec  $\langle V_{N_a} \rangle = \mathcal{O}(N_a)$  et  $W_{N_a} = o(N_a)$  dans la limite de scaling. Nous supposons qu'une telle décomposition est correcte pour les distributions les plus probables qui déterminent les moyennes qui nous intéressent.

### III.3 Émergence de la thermalisation locale

Dans ce paragraphe, nous considérons la densité de masse inhomogène  $\rho_a(\mathbf{r})$  donnée par (III.13), et étudions son comportement asymptotique dans la limite de scaling. En particulier, en utilisant l'hypothèse sur les fluctuations que nous venons de définir, nous montrons que  $\rho_a(\mathbf{r})$  est proportionnelle à un facteur de Boltzmann. Nous en déduisons l'existence d'un équilibre thermodynamique local.

#### III.3.1 Introduction du potentiel gravitationnel

D'abord, calculons la moyenne (III.13) pour  $\mathcal{S}_a$  dans l'ensemble microcanonique. L'intégration sur les moments des  $N_a$  particules conduit à

$$\rho_a(\mathbf{r}) = B(E_a, N_a, \Lambda_a) \int_{\Lambda_a^{N_a-1}, |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > \sigma_a} \prod_{i=2}^{N_a} d^3 \mathbf{r}_i [E_a - V_{N_a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a})]^{3N_a/2-1} \times \theta(E_a - V_{N_a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a})). \quad (\text{III.21})$$

Dans cette expression,  $\theta(\xi)$  est la fonction de Heaviside usuelle telle que  $\theta(\xi) = 1$  pour  $\xi > 0$  et  $\theta(\xi) = 0$  pour  $\xi < 0$ , tandis que la constante  $B(E_a, N_a, \Lambda_a)$  assure la normalisation en masse. La condition  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > \sigma_a$  est due aux interactions entre sphères dures et s'applique à tous les couples de particules, en particulier ceux incluant la particule 1 fixée à  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ .

Pour  $\varepsilon > -1/2$ , il s'avère que  $(E_a - V_{N_a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a}))$  est positif pour toutes les configurations spatiales grâce à la borne (III.11) de l'énergie potentielle. La fonction de Heaviside peut donc être remplacée par 1 dans l'expression (III.21). Pour  $\varepsilon \leq -1/2$ , certaines configurations spatiales sont interdites. Quoi qu'il en soit, dans la limite de scaling, la moyenne de l'énergie cinétique  $K_{N_a} = E_a - V_{N_a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a})$  est nécessairement positive et extensive. Comme conséquence de l'hypothèse de décomposition (III.20), les configurations les plus probables induisent des fluctuations

relativement faibles et cette quantité est toujours positive. Il est donc légitime de considérer ( $E_a - V_{N_a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a}) > 0$ ) dans la limite de scaling pour les configurations dominantes, et ce pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$ , à l'exception de celle correspondant à l'état totalement effondré. Cette simplification est un point central du raisonnement.

Introduisons maintenant  $\Phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a}) = \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})$  le potentiel gravitationnel au point  $\mathbf{r}$  créé par les  $(N_a - 1)$  particules localisées aux points  $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a}$ . On peut décomposer

$$V_{N_a}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a}) = V_{N_a-1}(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a}) + m_a \Phi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a}), \quad (\text{III.22})$$

ce qui permet de réécrire l'équation (III.21) dans la limite de scaling comme

$$\rho_a(\mathbf{r}) \sim B(E_a, N_a, \Lambda_a) \int_{\Lambda^{N_a-1}} d\mu_{N_a-1} \prod_{i=2}^{N_a} \theta(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|/\sigma_a - 1) \times [E_a - V_{N_a-1}]^{3/2} \left[ 1 - \frac{m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})}{E_a - V_{N_a-1}} \right]^{3N_a/2-1}, \quad (\text{III.23})$$

où  $d\mu_{N_a-1}$  représente la mesure microcanonique non-normalisée pour les configurations  $(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_a})$  d'un système de  $(N_a - 1)$  particules, enfermées dans la même boîte sphérique de volume  $\Lambda_a$  et à la même énergie  $E_a$  que le système  $\mathcal{S}_a$  avec  $N_a$  particules.

Considérons maintenant l'identité

$$\left[ 1 - \frac{m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})}{E_a - V_{N_a-1}} \right]^{3N_a/2-1} = \exp \left\{ (3N_a/2 - 1) \ln \left[ 1 - \frac{m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})}{E_a - V_{N_a-1}} \right] \right\}. \quad (\text{III.24})$$

Comme  $m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r}) = \mathcal{O}(1)$  et  $E_a - V_{N_a-1} = \mathcal{O}(N_a)$ , on peut développer le logarithme en puissance de  $m_a \Phi / (E_a - V_{N_a-1})$ . Après multiplication par le facteur  $(3N_a/2 - 1)$ , on voit que le terme linéaire donne une contribution d'ordre  $\mathcal{O}(1)$ , tandis que les termes supérieurs conduisent à un terme tendant vers 0 quand  $N_a \rightarrow \infty$ . Ainsi, on obtient pour toutes les configurations spatiales pertinentes, *i.e.* les plus probables,

$$\left[ 1 - \frac{m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})}{E_a - V_{N_a-1}} \right]^{3N_a/2-1} \sim \exp \left\{ -\frac{3N_a m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})}{2(E_a - V_{N_a-1})} \right\} \quad (\text{III.25})$$

dans la limite de scaling. En introduisant ce comportement dans la formule (III.23), on en déduit le comportement à la limite de scaling

$$\rho_a(\mathbf{r}) \sim B(E_a, N_a, \Lambda_a) \int_{\Lambda^{N_a-1}} d\mu_{N_a-1} \prod_{i=2}^{N_a} \theta(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|/\sigma_a - 1) [E_a - V_{N_a-1}]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{3N_a m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})}{2(E_a - V_{N_a-1})} \right\}. \quad (\text{III.26})$$

Insistons que le fait que l'extensivité de l'énergie potentielle pour toutes les configurations, conséquence du scaling que nous utilisons ici, joue un rôle central dans la dérivation de l'expression asymptotique (III.26). Avec un scaling ne préservant pas cette propriété d'extensivité, cette expression ne serait plus valable.

### III.3.2 Une distribution de masse de type Maxwell-Boltzmann

Si nous introduisons l'énergie cinétique  $K_{N_a-1}$  des  $(N_a - 1)$  particules pour une configuration spatiale donnée, le facteur exponentiel dans l'expression asymptotique (III.26) peut être vu comme une sorte de facteur de Boltzmann. Toutefois, à ce niveau, la température correspondante varie. Nous montrons dans la suite que ces fluctuations peuvent être négligées en appliquant l'hypothèse de fluctuations décrite paragraphe III.2.

L'intégrale de l'équation (III.26) est proportionnelle à la moyenne microcanonique de la quantité

$$\prod_{i=2}^{N_a} \theta(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|/\sigma_a - 1) [E_a - V_{N_a-1}]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{3N_a m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})}{2(E_a - V_{N_a-1})} \right\} \quad (\text{III.27})$$

pour le système avec  $(N_a - 1)$  particules. Pour estimer cette moyenne dans la limite de scaling, on applique à  $V_{N_a-1}$  l'hypothèse de fluctuations (III.20) avec  $N_a \rightarrow (N_a - 1)$ . La contribution résultante des fluctuations  $W_{N_a-1}$  peut être négligée devant le terme dominant. De plus, comme la moyenne de  $V_{N_a-1}$  diffère de  $\langle V_{N_a} \rangle$  par un terme d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  dans la limite de scaling, tous les facteurs  $(E_a - V_{N_a-1})$  peuvent être remplacés par  $(E_a - \langle V_{N_a} \rangle)$  à l'ordre dominant.

De façon similaire, on peut raisonnablement supposer que l'énergie potentielle gravitationnelle  $m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})$  fluctue faiblement autour de sa moyenne, fluctuations d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  dans la limite de scaling. Ainsi, en négligeant les termes d'ordre  $o(1)$ , cette moyenne se réduit à l'énergie potentielle gravitationnelle

$$\phi_a(\mathbf{r}) = - \int_{\Lambda_a} d^3 \mathbf{r}' \rho_a(\mathbf{r}') \frac{G}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \quad (\text{III.28})$$

créée par la distribution  $\rho_a(\mathbf{r}')$ . Ainsi, dans la moyenne de la quantité (III.27),  $m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})$  est remplacé par  $m_a \phi_a(\mathbf{r})$  à l'ordre dominant dans la limite de scaling.

Comme toutes les contributions venant des fluctuations de  $V_{N_a-1}$  et de  $m_a \Phi_{N_a-1}(\mathbf{r})$  peuvent être négligées, nous pouvons finalement réécrire le comportement asymptotique (III.26) comme

$$\rho_a(\mathbf{r}) \sim C^{(1)}(E_a, N_a, \Lambda_a) \left[ \int_{\Lambda_a^{N_a-1}} d\mu_{N_a-1} \prod_{i=2}^{N_a} \theta(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|/\sigma_a - 1) \right] \exp \left\{ -\frac{m_a \phi_a(\mathbf{r})}{T(E_a, N_a, \Lambda_a)} \right\}, \quad (\text{III.29})$$

où  $C^{(1)}(E_a, N_a, \Lambda_a)$  est une constante de normalisation et la relation habituelle

$$E_a - \langle V_{N_a} \rangle = \langle K_{N_a} \rangle = \frac{3N_a T(E_a, N_a, \Lambda_a)}{2} \quad (\text{III.30})$$

définit la température microcanonique  $T(E_a, N_a, \Lambda_a)$ .

### III.3.3 Identification de l'équilibre thermodynamique local

À partir de l'équation (III.29), on peut déduire que la particule fixée au point  $\mathbf{r}$  interagit avec les autres particules uniquement *via* des interactions de cœur dur, alors que le potentiel gravitationnel moyen joue le rôle de potentiel extérieur  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \lim_{SL} m_a \phi_a(\mathbf{r})$ . De plus, l'apparition du facteur de Boltzmann  $\exp(-m_a \phi_a(\mathbf{r})/T(E_a, N_a, \Lambda_a))$  montre qu'un équilibre thermodynamique local apparaît à la température  $T(E_a, N_a, \Lambda_a)$ . Ainsi, le système  $\mathcal{S}_\infty$  est à l'équilibre local, équilibre d'un gaz de sphères dures soumis à un potentiel extérieur  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \lim_{SL} m_a \phi_a(\mathbf{r})$ . Il est à noter que cet équilibre a été étudié en détail au paragraphe II.3 du chapitre précédent. Cette description est confirmée par le calcul de la fonction de distribution à une particule  $f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , qui se comporte dans la limite de scaling comme

$$f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \sim \rho_a(\mathbf{r}) (m_a T(E_a, N_a, \Lambda_a)/\pi)^{3/2} \exp(-\mathbf{p}^2/(2m_a T(E_a, N_a, \Lambda_a))). \quad (\text{III.31})$$

L'identification de l'équilibre thermodynamique local constitue une observation centrale qui nous permet d'introduire l'approche hydrostatique pour l'étude des propriétés du système  $\mathcal{S}_\infty$ . Remarquons que la température définie par la relation (III.30) reste intensive dans la limite de scaling, et se réduit à une température  $T_\infty$  pour le système infini  $\mathcal{S}_\infty$ . La température adimensionnée  $T_\infty/(GM^2/NR)$  est ainsi une fonction  $T^*(\varepsilon, \eta)$  des paramètres intensifs  $\varepsilon$  et  $\eta$ .

### III.4 L'approche hydrostatique pour le système infini

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principaux éléments qui permettent d'affirmer que la densité de masse de  $\mathcal{S}_\infty$  peut être déterminée par une approche hydrostatique. Dans ce cadre, il est possible d'estimer les contributions des corrélations et des fluctuations, ce qui justifie *a posteriori* le raisonnement complet de ce chapitre.

#### III.4.1 Séparation d'échelle et équilibre hydrostatique

Dans la limite de scaling, l'équilibre local du système  $\mathcal{S}_a$  est entièrement déterminé par la fraction d'empilement locale  $\eta_a(\mathbf{r}) = \eta\rho_a(\mathbf{r})/\rho$ . En particulier, la corrélation entre les particules décroît sur une longueur caractéristique contrôlée par la corrélation locale des sphères dures [60, 61]

$$\lambda_a(\mathbf{r}) = \sigma_a \xi_{\text{HS}}(\eta_a(\mathbf{r})) \quad (\text{III.32})$$

où  $\xi_{\text{HS}}(\eta)$  est une certaine fonction adimensionnée de  $\eta$ . En supposant que le système de sphères dures reste en phase fluide,  $\xi_{\text{HS}}(\eta_a(\mathbf{r}))$  reste bornée en tout point [60, 61]. Donc  $\lambda_a(\mathbf{r})$  se comporte comme  $\sigma_a$  et décroît comme  $N_a^{-2/15}$  dans la limite de scaling.

La densité de masse, et donc le potentiel gravitationnel, varient sur une échelle de l'ordre de  $R$ . Ainsi, le potentiel ressenti par les sphères dures est constant sur une échelle de l'ordre de la longueur de corrélation  $\lambda_a(\mathbf{r})$ . À partir de cette séparation d'échelle, et en application de la théorie fonctionnelle sur l'énergie libre locale [62–64], on déduit l'équation classique de l'équilibre hydrostatique. Il est important de noter que ce développement s'applique normalement sur la fonctionnelle de l'énergie libre totale, les corrections locales sont ici négligées car elles sont d'ordre  $(\lambda_a/R_a)^2 \sim N_a^{-2/3}$  en les estimant par un développement systématique en puissance du gradient de la fonction densité. Il est à noter que cela suppose que la fonction densité varie très peu sur une échelle de l'ordre de  $\lambda_a$ . Cela se comprend d'un point de vue intuitif, car pour réaliser une approche hydrostatique, il faut pouvoir considérer le système comme un fluide et réaliser une moyenne sur un volume mésoscopique, ce qui est impossible si la densité varie trop rapidement.

On a besoin de définir la pression locale des sphères dures à la température  $T$  et à la densité particulaire  $\rho_a(\mathbf{r})/m_a$ , *i.e.*

$$P_a(\mathbf{r}) = \frac{T\rho_a(\mathbf{r})}{m_a} p_{\text{HS}}(\eta\rho_a(\mathbf{r})/\rho), \quad (\text{III.33})$$

où  $p_{\text{HS}}$  est la pression sans dimension des sphères dures qui dépend uniquement de la fraction d'empilement locale  $\eta_a(\mathbf{r}) = \eta\rho_a(\mathbf{r})/\rho$ , définie au chapitre précédent à travers les équation (II.58,II.59).

Ainsi, dans la limite de scaling qui permet cette séparation d'échelle, la densité de masse du système  $\mathcal{S}_\infty$  et le potentiel gravitationnel correspondant sont entièrement déterminés par l'équilibre hydrostatique. Les équations correspondantes bien connues se réécrivent en fonction des grandeurs sans dimension  $g(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) = \lim_{\text{SL}} \rho_a(R_a\mathbf{q})/\rho$  et  $\psi(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) = \lim_{\text{SL}} \phi_a(R_a\mathbf{q})/(GM_a/R_a)$  comme

$$\nabla_{\mathbf{q}} [g(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) p_{\text{HS}}(\eta g(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta))] = -g(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) \nabla_{\mathbf{q}} \psi(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) / T^*(\varepsilon, \eta), \quad (\text{III.34})$$

et

$$\psi(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) = -\frac{3}{4\pi} \int_{q' \leq 1} d^3\mathbf{q}' \frac{g(\mathbf{q}'; \varepsilon, \eta)}{|\mathbf{q}' - \mathbf{q}|}. \quad (\text{III.35})$$

Ces équations doivent être résolues en imposant la conservation de la masse

$$\frac{3}{4\pi} \int_{q \leq 1} d^3\mathbf{q} g(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) = 1, \quad (\text{III.36})$$

et la conservation de l'énergie

$$\frac{3T^*(\varepsilon, \eta)}{2} + \frac{3}{8\pi} \int_{q \leq 1} d^3\mathbf{q} g(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) \psi(\mathbf{q}; \varepsilon, \eta) = \varepsilon . \quad (\text{III.37})$$

Nous rappelons que la température  $T^*(\varepsilon, \eta)$  doit être déterminée à travers la résolution de l'ensemble du système d'équation, avec  $\varepsilon$  et  $\eta$  comme paramètres de contrôle. L'étude de ce système a été largement discutée au paragraphe II.3 du chapitre précédent de cette thèse.

### III.4.2 Cohérence de l'hypothèse concernant les fluctuations

Les raisonnements du paragraphe III.3, qui conduisent au final aux équations de l'hydrostatique, comprennent des hypothèses *a priori* concernant la non-importance relative des fluctuations. Dans ce paragraphe, nous discutons la contribution de ces fluctuations en les estimant simplement à partir de la structure locale de  $\mathcal{S}_a$  dans la limite de scaling.

Tout d'abord, nous pouvons estimer la contribution des corrélations à la moyenne de l'énergie potentielle gravitationnelle qui peut être réécrite exactement comme

$$\langle V_{N_a} \rangle = V_{\text{self}} + V_{\text{corr}} . \quad (\text{III.38})$$

Dans cette décomposition,  $V_{\text{self}}$  est l'énergie gravitationnelle d'une boule de densité de masse  $\rho_a(\mathbf{r})$ ,

$$V_{\text{self}} = \frac{1}{2} \int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{r} \rho_a(\mathbf{r}) \phi_a(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \int_{\Lambda_a^2} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \rho_a(\mathbf{r}) \rho_a(\mathbf{r}') \frac{G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (\text{III.39})$$

tandis que  $V_{\text{corr}}$  est l'énergie de corrélation

$$V_{\text{corr}} = -\frac{1}{2} \int_{\Lambda_a^2} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \rho_a^{(2,T)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{III.40})$$

avec la distribution de masse tronquée,

$$\rho_a^{(2,T)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho_a^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \rho_a(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}') . \quad (\text{III.41})$$

Dans la limite de scaling,  $V_{\text{self}}$  est extensive et est déterminée pour son terme dominant par les solutions des équations de l'hydrostatique pour  $\mathcal{S}_\infty$ . En prenant en compte la structure locale de  $\mathcal{S}_a$ , nous en déduisons que  $\rho_a^{(2,T)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  se réduit à  $-\rho_a(\mathbf{r})\rho_a(\mathbf{r}')$  pour  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \sigma_a$ . De plus, nous attendons à ce que  $\rho_a^{(2,T)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  s'annule sur la longueur de corrélation des sphères dures  $\lambda_a(\mathbf{r})$ . Or  $\lambda_a(R_a\mathbf{q})$  est proportionnel à  $\sigma_a$  dans la limite de scaling. Ainsi, la contribution dans le voisinage du point  $\mathbf{r} = R_a\mathbf{q}$  à

$$\int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{r}' \rho_a^{(2,T)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{G}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{III.42})$$

est d'ordre  $G\rho^2\sigma_a^2 = \mathcal{O}(N_a^{-4/15})$ . La contribution restante à l'intégrale (III.42) des points  $\mathbf{r}'$  tels que  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \sigma_a$  peut être estimée grossièrement en remplaçant  $\rho_a^{(2,T)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  par une constante  $m_a\rho_a(\mathbf{r})/\Lambda_a$  qui ne dépend pas de  $\mathbf{r}'$ . Cette approximation homogène est inspirée de la règle de somme

$$\int_{\Lambda_a} d^3\mathbf{r}' \rho_a^{(2,T)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -m_a\rho_a(\mathbf{r}) , \quad (\text{III.43})$$

qui se déduit de la conservation du nombre de particules. La contribution résultante à l'intégrale (III.42) est donc d'ordre  $Gm_a\rho_a^2/\Lambda_a = \mathcal{O}(N_a^{-3/5})$  qui devient négligeable comparativement

à ce qui se passe dans le domaine  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim \sigma_a$ . Ainsi, nous en déduisons que l'énergie de corrélation (III.40) est d'ordre  $G\rho^2 R_a^3 \sigma_a^2 = \mathcal{O}(N_a^{1/3})$ . Donc,  $\langle V_{N_a} \rangle$  est en effet extensive et l'énergie potentielle par particule (III.12) est entièrement donnée par la partie  $V_{\text{self}}$  dans la limite de scaling.

En utilisant le même type d'argument, basé sur le fait que l'influence des sphères dures ne se fait sentir qu'à courte portée, on déduit que les fluctuations ( $\langle V_{N_a}^2 \rangle - [\langle V_{N_a} \rangle]^2$ ) de l'énergie potentielle croissent plus lentement que  $N_a^2$ , en accord avec l'hypothèse (III.19). Le détail de ce calcul est disponible dans le paragraphe 5.2 de la référence [42], article reproduit en annexe B de cette thèse.

Ces estimations confirment que les interactions gravitationnelles peuvent être traitées par une approche champ moyen dans la limite de scaling que nous avons définie. En particulier, l'énergie gravitationnelle est dominée par le terme de champ moyen (III.39), comme supposée dans le développement d'Antonov reproduit au chapitre II.1 de cette thèse. Enfin, les fluctuations de l'énergie potentielle peuvent être négligées, ce qui constitue une vérification de cohérence *a posteriori* d'un des points clé de notre dérivation de l'approche hydrostatique.

## III.5 Validité de l'approche hydrostatique pour le système fini $\mathcal{S}$

Si l'approche hydrostatique est légitime pour décrire le système infini  $\mathcal{S}_\infty$ , rien n'indique qu'elle décrit correctement le système fini  $\mathcal{S}$ . Les diverses estimations permettant de construire ce système infini à partir des systèmes auxiliaires  $\mathcal{S}_a$  peuvent ne pas être valides pour  $\mathcal{S}$ , lorsque le nombre de particules  $N_a = N$  est trop faible. Nous donnons dans ce paragraphe les critères permettant de discuter la validité de ces estimations.

### III.5.1 Sur l'introduction du facteur de Boltzmann

Le terme exponentiel dans la formule (III.25) joue un rôle central dans l'émergence des facteurs de Boltzmann. Cette formule asymptotique apparaît dans la limite de scaling grâce aux propriétés d'extensivité des systèmes  $\mathcal{S}_a$ . Pour le système fini  $\mathcal{S}$ , la validité de l'approximation du logarithme par le premier terme de la série nécessite la condition

$$N \left[ \frac{m\Phi_{N-1}(\mathbf{r})}{E - V_{N-1}} \right]^2 \ll 1 \quad (\text{III.44})$$

Celle-ci doit être vérifiée pour la distribution la plus probable qui détermine l'état d'équilibre de  $\mathcal{S}$ . Si nous supposons *a priori* que l'approche hydrostatique est correcte pour  $\mathcal{S}$ , le potentiel gravitationnel et l'énergie dans la condition (III.44) peuvent être remplacés par leurs valeurs moyennes déterminées par les solutions des équations hydrostatique (III.34) et (III.35), c'est à dire

$$\Phi_{N-1}(\mathbf{r}) \rightarrow (GM/R)\psi(0; \varepsilon, \eta) \quad (\text{III.45})$$

et

$$V_{N-1} \rightarrow (GM^2/R)u(\varepsilon, \eta) . \quad (\text{III.46})$$

Dans l'estimation (III.45), nous avons choisi  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  car  $|\phi(\mathbf{r})|$  est maximal en  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , ainsi la condition (III.44) sera bien vérifiée pour tout  $\mathbf{r}$ . Avec ces formules, cette condition peut être réécrite

$$\frac{[\psi(0; \varepsilon, \eta)]^2}{N[T^*(\varepsilon, \eta)]^2} \ll 1 . \quad (\text{III.47})$$

De façon attendue, pour des valeurs données de  $\varepsilon$  et  $\eta$  définissant l'état d'équilibre, cela signifie que le nombre de particules  $N$  de  $\mathcal{S}$  doit être suffisamment grand. Pour une valeur donnée de  $N$ , la température  $T^*(\varepsilon, \eta)$ , et donc l'énergie cinétique, doit être suffisamment grande pour valider cette approche.

### III.5.2 Sur l'omission des fluctuations

Un autre point central du raisonnement repose sur l'estimation des fluctuations du terme exponentiel

$$\exp \left[ -\frac{3Nm\Phi_{N-1}(\mathbf{r})}{2(E - V_{N-1})} \right] ; \quad (\text{III.48})$$

qui permet d'arriver à la formule (III.29). Les fluctuations peuvent être négligées si les fluctuations de l'exposant

$$-\frac{3Nm\Phi_{N-1}(\mathbf{r})}{2(E - V_{N-1})} \quad (\text{III.49})$$

sont petites devant 1. Les fluctuations typiques de  $\Phi_{N-1}(\mathbf{r})$  peuvent être estimées en considérant les fluctuations de position d'une particule  $j$  avec  $j > 1$  proche de la particule fixée en  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ . En moyenne, la distance relative  $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_1|$  est d'ordre  $a$ , cette distance devient  $\sigma$  lorsque les deux particules sont en contact. Les variations de  $m\Phi_{N-1}(\mathbf{r})$  sont au maximum d'ordre  $Gm^2/\sigma$ . De plus, dans la variation correspondante de l'exposant (III.49), l'énergie cinétique  $(E - V_{N-1})$  peut être remplacée par sa moyenne exprimée en fonction de  $T$ . Cela conduit à la condition

$$\frac{Gm^2}{\sigma T} \ll 1, \quad (\text{III.50})$$

ce qui peut être réécrit comme

$$\frac{1}{N^{2/3}\eta^{1/3}T^*(\varepsilon, \eta)} \ll 1. \quad (\text{III.51})$$

Comme pour la première condition (III.47), cette hypothèse est vérifiée pour des systèmes suffisamment grands pour des valeurs fixées de  $\varepsilon$  et  $\eta$ . Par contre, pour  $N$  fixé,  $\eta$  ne doit pas être trop petit et/ou la température  $T^*(\varepsilon, \eta)$  trop faible. Il est à noter que le choix de  $\sigma$  est discutable. En effet, dans le cas des états métastables [12, 29], le fait de considérer une taille effective  $\sigma_{\text{eff}}$  de l'ordre de la distance inter-particule permet de s'affranchir de cette condition. Mais il faut toutefois noter qu'un tel choix se situe déjà sous les hypothèses du champ moyen.

Les deux conditions (III.47) et (III.51) sont nécessaires pour la validité de l'approche hydrostatique pour  $\mathcal{S}$ . En particulier, on note que la condition (III.51) implique que le système est faiblement couplé par la gravitation au niveau local. C'est-à-dire que l'interaction gravitationnelle entre les particules proches peut être négligée. C'est précisément ce qui garantit que l'équilibre local est entièrement gouverné par les interactions entre sphères dures et c'est ce qui justifie l'approche champ moyen de la gravitation de la sphère isotherme du chapitre précédent.

### III.5.3 Exemples astrophysiques

Les conditions établies ci-dessus peuvent être testées directement en ordre de grandeur pour des systèmes dans lesquelles des données et observations sont disponibles. Nous considérons ici deux exemples : les amas globulaires et les gaz de poussières.

#### III.5.3.a Les amas globulaires

Utilisons des ordres de grandeurs typiques extraits de l'ouvrage de référence de Binney et Tremaine [7]. La taille typique des objets est de  $R = 50$  pc tandis que la masse totale typique est de  $M = 6 \times 10^5 M_{\odot}$ . Le nombre  $N$  d'objets est estimé en choisissant une masse typique pour chaque étoile de  $m = 1 M_{\odot}$ . Les observations fournissent une dispersion typiques des vitesses de l'ordre de  $\delta v = 7 \text{ km.s}^{-1}$ , à partir de laquelle nous pouvons estimer l'énergie cinétique du système,  $\langle K_N \rangle = (3/2)M(\delta v)^2 \approx 10^{44} \text{ J}$ . L'énergie potentielle totale, tout comme le potentiel gravitationnel au centre, peuvent être estimés à partir des profils de densité observés. En prenant en compte

les incertitudes, une telle estimation indique que  $\varepsilon$  appartient à l'intervalle  $[-1, -0.3]$ , tandis que  $|m\Phi_{N-1}(0)|$  est d'ordre  $GmM/R \approx 10^{38}$  J. La condition d'extensivité (III.44) est bien satisfaite, le membre de gauche de l'équation étant d'ordre  $10^{-6}$ .

Comme l'énergie gravitationnelle typique est  $GM^2/R \approx 6 \times 10^{44}$  J, la température adimensionnée  $T^*$  déterminée à partir de l'énergie cinétique est d'ordre 1. Si nous choisissons pour  $\sigma$  la taille d'une étoile, nous trouvons une très grande valeur pour le ratio  $Gm^2/(\sigma T)$ , et donc la condition de couplage faible est loin d'être vérifiée. Toutefois, on peut montrer et observer que les collisions sont des événements très rares. Cela nous amène à considérer un diamètre effectif  $\sigma_{\text{eff}}$ , bien plus grand que  $\sigma$ , que nous prenons de l'ordre de la distance minimale observée entre deux étoiles. Ce minimum est réalisé dans des systèmes binaires, qui sont présents en nombre important dans les amas globulaires. Nous prenons donc  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 1$  UA. Le ration correspondant  $Gm^2/(\sigma_{\text{eff}}T)$  est cette fois d'ordre 1. En réalité, les systèmes binaires apparaissent précisément car le couplage gravitationnel est fort au niveau local. Ainsi, l'approche hydrostatique ne convient pas aux amas globulaires. Cela motivera l'étude d'un modèle de binaires dans l'ensemble microcanonique réalisée au chapitre V de cette thèse.

### III.5.3.b Les gaz de poussières

Considérons un gaz de poussières, dans une ceinture planétaire par exemple. De tels systèmes sont soumis à un potentiel gravitationnel extérieur, créé par une planète dans notre exemple. Sous cette nouvelle hypothèse, les conditions (III.44) et (III.50) restent inchangées et nécessaires pour appliquer une hypothèse hydrostatique sur le potentiel gravitationnel interne. Dans la condition d'extensivité (III.44), nous pouvons remplacer  $\Phi_{N-1}(\mathbf{r})$  par le potentiel gravitationnel typique  $GM/R$  créée par une ceinture de rayon  $R$  et de masse  $M$ . Cette condition peut être réécrite

$$R(\delta v)^2 \gg \frac{GM}{\sqrt{N}} \quad (\text{III.52})$$

avec  $\delta v$  la dispersion typique de vitesse. De même, la condition de couplage faible (III.50) se réécrit

$$\delta v \gg \sqrt{\frac{Gm}{\sigma}}. \quad (\text{III.53})$$

Pour fixer les idées, considérons la ceinture de poussière de Fomallhaut dont les données sont disponibles dans [65]. Les observations donnent  $M \approx 1.1 \times 10^{23}$  kg, avec des objets de taille typique  $\sigma \approx 10 \mu\text{m}$  et de densité de masse interne d'ordre  $2.5 \text{ g.cm}^{-3}$ . Cela conduit à un nombre de particules  $N \approx 1 \times 10^{34}$ . La taille de cette ceinture est d'ordre  $R \approx 25$  UA. Avec de telles valeurs, la condition (III.52) devient  $\delta v > 10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$  tandis que la condition (III.53) devient  $\delta v > 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$ . Les vitesses typiques dans ce type d'objet étant supérieures à  $1 \text{ m.s}^{-1}$ , ces deux conditions sont largement vérifiées.

## III.6 Synthèse de la discussion

Dans ce chapitre, nous avons construit une série de systèmes *via* la limite de scaling. Cette limite préserve les grandeurs pertinentes du problème gravitationnel, que sont la densité de masse locale, la fraction d'empilement et l'énergie par particule. Le système auxiliaire infini ainsi construit est thermalisé et descriptible à travers une approche hydrostatique de la gravitation. Il est à noter que la propriété centrale permettant de déduire ce résultat est la condition imposée d'extensivité de l'énergie. C'est la raison pour laquelle d'autres scaling préservant cette extensivité mais pas les autres quantités conduisent aussi à l'approche hydrostatique [16, 17].



L'intérêt de notre scaling, en plus de conserver les quantités physiques pertinentes du problème, est d'avoir permis de mettre en avant les conditions d'application de l'hypothèse hydrostatique pour un système fini. Les conditions d'extensivité (III.47) et de couplage faible (III.51) permettent de savoir précisément si, pour un système donné, il est raisonnable ou non de négliger les aspects à courte portée de la gravitation. Pour décrire les amas globulaires par exemple, il est illusoire d'utiliser uniquement les résultats de la sphère isotherme. Les effets à courte portée ne peuvent pas être négligés, et il faut donc prendre en compte les structures à petite échelle que sont les systèmes binaires. Ces idées sont assez souvent évoquées dans la littérature, comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent. Il est à noter que, pour assurer la validité de l'hydrostatique, il est en plus nécessaire, et assez intuitif, comme discuté au paragraphe III.4.1, que la fonction densité ne varie pas sur une échelle de l'ordre de la taille des particules.

Dans ce système, l'ergodicité ne semble pas être un problème central. Il est en effet connu que la présence des cœurs durs favorise son émergence [39] ou, en d'autres termes, accélère les processus de thermalisation locale comme observé dans des simulations de dynamiques moléculaires [40]. Par contre, ces résultats sont à nuancer si l'on souhaite discuter rigoureusement de systèmes astrophysiques réels. En effet, le modèle, la boîte autour du système et les hypothèses d'équilibre de l'ensemble microcanonique doivent être manipulés avec précaution, comme cela a été discuté au chapitre introductif de cette thèse.

## Le modèle soluble de la gravitation à une dimension

Dans le chapitre précédent, nous avons mené une étude semi-heuristique permettant de mettre en avant les conditions de validité de l'approche hydrostatique pour décrire des systèmes gravitationnels. Pour essayer de tester et d'étayer cette discussion, nous étudions maintenant un système gravitationnel à une dimension. Nous considérons dans ce chapitre un système de  $N$  bâtonnets durs de taille finie couplés gravitationnellement par un potentiel en  $|x|$ . Il est à noter que ce système a été largement étudié dans la référence [66] pour des particules ponctuelles. Le fait de considérer des particules de taille finie permet de prendre en compte les corrélations locales entre les objets et de se rapprocher de la discussion générale de cette thèse.

Considérer la gravitation à une dimension peut sembler étrange d'un point de vue de la réalité physique. Toutefois, ce modèle permet de poser un cadre exact de mécanique statistique dans lequel nous pouvons mener la discussion sur la validité de l'approche champ moyen. L'avantage inestimable de l'interaction gravitationnelle à une dimension est qu'elle permet un grand nombre de calculs totalement exacts, permettant de tester concrètement et de façon rigoureuse les hypothèses dérivées au chapitre précédent.

Pour cela, après avoir défini précisément le système, nous allons calculer et établir l'équation d'état sous l'hypothèse hydrostatique dans le paragraphe IV.1. Bien que cela ne soit pas nécessaire grâce à l'aspect fortement confinant de la gravitation à une dimension, nous allons maintenir le système dans une boîte de taille  $L$ , permettant ainsi de comparer réellement la taille des particules  $\sigma$  à une certaine échelle de longueur. Ensuite, nous allons utiliser les résultats des ensembles isobarique et canonique pour calculer les grandeurs d'intérêts du système dans l'ensemble microcanonique dans les paragraphes IV.2 et IV.3. Il est à noter que les ensembles isobarique et canonique sont étudiés ici non pas comme des ensembles physiques, mais uniquement comme des outils de calculs permettant, grâce aux transformées de Laplace et à la méthode du col, de déterminer les quantités microcanoniques. Toutefois, d'un point de vue théorique, nous montrons que ces ensembles sont équivalents. Ces résultats sont valides sous une certaine limite de scaling  $N \rightarrow +\infty$ , où l'énergie du système varie comme  $N^3$ , alors que la fraction d'empilement  $\eta = N\sigma/L$  est maintenue constante. Dans ce cadre, le potentiel gravitationnel et l'énergie cinétique restent du même ordre de grandeur, ce qui permet à l'approche hydrostatique de décrire correctement le système, en accord avec la discussion du chapitre précédent.

Ensuite, pour mettre en évidence les limites de l'approche hydrostatique, nous nous intéressons dans le paragraphe IV.4 à ce système dans des états très proches de l'état de plus basse énergie, où les bâtonnets forment un amas totalement compact. Pour cela, nous étudions la limite avec l'énergie du système telle que  $(E - E_c) \propto N^\alpha$ , où  $E_c$  est l'énergie minimale du système variant comme  $N^3$  et

$\alpha < 3$  pour  $\eta$  fixé. Dans ce cadre, le système est très proche de l'état compact et nous pouvons nous affranchir de la boîte qui ne joue ici aucun rôle. Nous verrons alors que, pour  $\alpha = 2$ , le profil de densité microcanonique exact et l'approche hydrostatique diffèrent significativement. Cela est dû à des variations trop rapides de la densité au niveau local à cause des corrélations non gravitationnelles entre les bâtonnets.

Cette discussion est majoritairement issue de l'article [43]. Pour alléger la discussion, une partie importante des calculs conduisant aux éléments de discussion physique n'a pas été reproduite dans ce chapitre. Le lecteur cherchant les justifications mathématiques est renvoyé à la lecture de cette référence reproduite en annexe C page 93 de cette thèse.

## IV.1 L'approche hydrostatique

La gravitation à une dimension est un modèle entièrement soluble dans l'approche hydrostatique. Dans ce paragraphe, nous dérivons l'équation d'état correspondante du système puis étudions, à partir des résultats du chapitre précédent, les domaines de validité de cette approche.

### IV.1.1 Le modèle

Nous considérons un système à une dimension de bâtonnets de taille  $\sigma$  et de masse  $m$ . Nous supposons que le système est contenu dans une boîte de taille  $L$ . Le Hamiltonien correspondant s'écrit

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(|x_i - x_j|) \quad (\text{IV.1})$$

avec le potentiel d'interaction à deux corps

$$v(x) = \infty \quad \text{pour } |x| < \sigma, \quad v(x) = Km^2|x| \quad \text{pour } |x| > \sigma. \quad (\text{IV.2})$$

Dans la définition du Hamiltonien (IV.1),  $(p_i, x_i)$  sont les moment et position de la particule  $i$ . La partie à longue portée du potentiel à deux corps (IV.2) n'est rien d'autre que l'interaction gravitationnelle définie à travers la résolution de l'équation de Poisson à une dimension. Ce modèle peut être interprété à trois dimensions comme l'interaction gravitationnelle entre deux plaques de matière parallèles et infinies.

Les paramètres adimensionnés contrôlant l'état du système dans l'ensemble microcanonique sont donc le nombre de particules  $N$ , l'énergie adimensionnée par particule  $\varepsilon = E/(KN^3m^2\sigma)$  et la fraction d'empilement  $\eta = N\sigma/L$ .

On remarque que l'énergie minimale correspondant à l'état compact où tous les bâtonnets sont immobiles et collés les uns aux autres s'écrit simplement

$$E_c = \frac{1}{2} Km^2 \sum_{i \neq j} |i - j| \sigma; \quad (\text{IV.3})$$

ce qui devient

$$E_c = Km^2 N(N^2 - 1) \frac{\sigma}{6} \quad (\text{IV.4})$$

après un peu de calcul combinatoire.

### IV.1.2 Les équations physiques

Pour étudier la limite hydrostatique continue, nous étudions la fonction de densité de masse continue  $\rho(x)$  et nous notons  $E$  l'énergie totale du système. De la même manière que pour le cas en

trois dimensions du chapitre II, nous supposons que l'équilibre thermodynamique local est atteint et que le système global est thermalisé à la température  $T$ . Dans ce cadre, l'interaction gravitationnelle se réduit au potentiel gravitationnel moyen  $\phi(x)$  créée par la distribution de masse  $\rho(x)$ . Ce potentiel peut être vu comme un champ extérieur au niveau local. L'équilibre hydrostatique se réduit à

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{T\rho(x)}{1 - \sigma\rho(x)} \right] = -m\rho(x) \frac{d\phi}{dx}(x) \quad (\text{IV.5})$$

où nous avons utilisé la pression locale exacte  $P(x)$  des bâtonnets durs [67,68],

$$P(x) = \frac{T\rho(x)}{1 - \sigma\rho(x)}. \quad (\text{IV.6})$$

Le potentiel  $\phi(x)$  est lié à la densité de masse via l'équation de Poisson

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = 2Km\rho(x). \quad (\text{IV.7})$$

Les équations couplées (IV.5,IV.7) doivent être résolues avec les contraintes sur l'énergie totale

$$E = \frac{NT}{2} + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} dx m\rho(x)\phi(x), \quad (\text{IV.8})$$

et sur le nombre de particules

$$N = \int_{-L/2}^{L/2} dx \rho(x), \quad (\text{IV.9})$$

conditions qui définissent aussi la température  $T$  comme une fonction de  $E$  et de  $N$ . On notera que l'origine des axes a été prise au milieu de la boîte de taille  $L$ .

### IV.1.3 Équation d'état

Le détail du calcul est disponible dans la référence [43] reproduite en annexe C. On retiendra que l'on peut directement et analytiquement trouver l'équation d'état du système à partir des équations du paragraphe précédent. Celle-ci s'écrit

$$\varepsilon = \frac{3t}{2} + \frac{1}{6} - p_{1/2} \frac{(1 - \eta)}{\eta}, \quad (\text{IV.10})$$

où nous avons défini la température adimensionnée  $t = T/(KN^2m^2\sigma)$  et le paramètre  $p_{1/2}$  par l'équation

$$\ln \frac{\sqrt{1 + 4p_{1/2}} + 1}{\sqrt{1 + 4p_{1/2}} - 1} = \frac{(1 - \eta)}{2t\eta} \sqrt{1 + 4p_{1/2}}. \quad (\text{IV.11})$$

Ce paramètre représente la pression sur les bords  $P(L/2) = KN^2m^2p_{1/2}$ .

Les équations couplées (IV.10,IV.11) déterminent les paramètres  $p_{1/2}$  et  $t$  comme fonction des paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$ . Ces résultats ne dépendent pas du nombre de particules  $N$ . Pour des paramètres  $\varepsilon$  et  $\eta$  données, le profil de densité hydrostatique est une fonction bien définie de la position adimensionnée  $q = x/L$ .

À partir de ce système, nous pouvons en déduire les comportements asymptotiques des différents paramètres physiques. En particulier, on remarque que la pression  $p_{1/2}$  est une fonction d'une variable qu'est le nombre  $2\eta t/(1 - \eta)$ . À partir de (IV.11), on trouve pour  $\eta$  fixé avec  $0 < \eta < 1$ ,

$$p_{1/2} \sim \exp \left[ -\frac{(1 - \eta)}{2t\eta} \right] \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0, \quad (\text{IV.12})$$

et

$$p_{1/2} \sim \frac{t\eta}{(1-\eta)} \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty, \quad (\text{IV.13})$$

pour respectivement les basses et hautes températures. Ces résultats peuvent être interprétés comme suit. À basse température, les particules ont tendance à s'agréger en un unique agrégat de taille proche de  $N\sigma$ . Ainsi, la densité de particules proches des murs de la boîte décroît exponentiellement vite à cause du potentiel gravitationnel confinant créé par l'agrégat de particules. La pression étant directement proportionnelle à la densité de particules, elle décroît alors aussi exponentiellement, comportement décrit précisément par (IV.12). À haute température, l'énergie gravitationnelle devient négligeable devant l'énergie cinétique. Le système se comporte comme un gaz de bâtonnets durs sans interactions gravitationnelles, en accord avec le comportement asymptotique (IV.13) où l'expression exacte de la pression d'un gaz de bâtonnets durs [67, 68] apparaît.

À partir de (IV.10) et du comportement asymptotique de la pression, on déduit le comportement de l'énergie à basse température

$$\varepsilon(t, \eta) = \frac{1}{6} + \frac{3t}{2} + \dots \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0, \quad (\text{IV.14})$$

où les termes négligés disparaissent exponentiellement vite, tandis qu'à haute température

$$\varepsilon(t, \eta) \sim \frac{t}{2} \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.15})$$

À basses températures, le système devient très proche d'un unique agrégat comme mentionné précédemment. L'énergie de cet agrégat, à partir de l'équation (IV.4), vaut

$$\varepsilon_c = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_c}{KN^3 m^2 \sigma} = \frac{1}{6} \quad (\text{IV.16})$$

pour  $N$  grand. Elle apparaît naturellement comme terme principal du comportement (IV.14) et en accord avec l'expression exacte de l'énergie IV.4. De plus, les particules ne ressentent plus la présence des murs de la boîte. Ainsi, en négligeant les termes exponentiellement décroissant, la relation entre  $(\varepsilon(t, \eta) - 1/6)$  et la température  $t$  est identique aux résultats du système pour des particules ponctuelles dans un espace infini [66], ce qui n'est rien d'autre que le théorème du Viriel pour un potentiel en  $|x|$ . À hautes températures, l'énergie gravitationnelle est négligeable devant l'énergie cinétique, ce qui correspond bien au comportement (IV.15) de  $\varepsilon(t, \eta)$ . L'énergie  $\varepsilon$  est tracée comme fonction de la température  $t$  pour différentes valeurs de  $\eta$  figure IV.1.

#### IV.1.4 Validité et limitations

Maintenant que nous avons établi les principaux résultats de l'approche hydrostatique, nous pouvons nous demander si ces résultats restent valables dans une approche statistique exacte. Pour cela, nous utilisons les tests élaborés au paragraphe précédent, en particulier les conditions d'extensivité (III.47) et de couplage faible (III.51) du paragraphe III.5.

La condition d'extensivité (III.47) se réécrit

$$N \left[ \frac{m\Phi}{E - V_N} \right]^2 \ll 1 \quad (\text{IV.17})$$

avec le potentiel  $\Phi$  correspondant à la distribution la plus probable. Comme les paramètres du problème  $(\varepsilon, m, \sigma)$  sont indépendants de  $N$ , et grâce à la linéarité de l'interaction à deux corps, le potentiel d'interaction  $V_N$  et l'énergie  $E$  varient comme  $N^3$  tandis que le potentiel  $\Phi$  varie comme

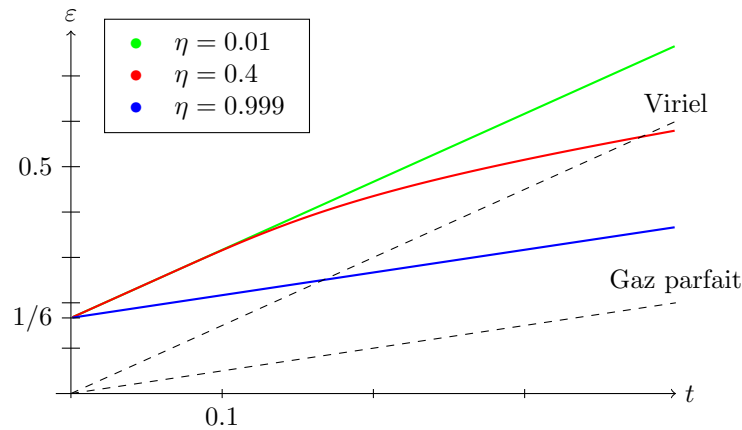


FIGURE IV.1 – Énergie  $\varepsilon$  en fonction de la température  $t$  pour différentes valeurs de  $\eta$ . Pour les basses énergies et  $\eta \neq 1$ , les courbes sont parallèles à la ligne Viriel représentant la relation énergie-température donnée par le théorème du viriel. Pour les hautes énergies, les courbes sont parallèles à la ligne Gaz parfait représentant le comportement du gaz parfait où l'énergie est purement cinétique. Pour  $\eta$  proche de 1, les particules occupent quasiment l'intégralité de l'espace disponible et le potentiel gravitationnel est proche de son minimum  $1/6$ . Dans ce cas, comme pour un gaz parfait, la différence  $\varepsilon - 1/6$  est quasiment purement cinétique.

$N^2$ . Ainsi, la condition (IV.17) est vérifiée. De plus, l'équilibre local est gouverné par les interactions dues à la taille des bâtonnets si la condition (III.51) est vérifiée, c'est-à-dire si

$$\frac{Km^2\sigma}{T} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad t \gg N^{-2}. \quad (\text{IV.18})$$

Comme la température  $T$  est d'ordre  $N^2$ ,  $t$  est finie et donc cette condition est aussi automatiquement vérifiée. Le potentiel en  $|x|$ , négligeable au contact entre les sphères, permet de négliger les effets à courte portée, sauf peut être dans des états très froids. Ainsi, on peut en déduire que le profil hydrostatique doit être exact dans la limite d'un système infini. C'est ce que nous allons montrer explicitement par une résolution exacte du modèle dans les paragraphes IV.2 et IV.3.

La validité de l'approche hydrostatique est donc vraisemblablement assurée dans la limite  $N \rightarrow \infty$  lorsque les paramètres thermodynamiques adimensionnés  $\varepsilon$  et  $\eta$  sont maintenus fixés. Toutefois, pour un système grand, mais fini, d'énergie  $\varepsilon = E/(KN^3m^2\sigma)$  très proche de l'énergie minimale du système effondré  $\varepsilon_c = 1/6$ , l'état d'équilibre est de taille proche de la taille de l'état agrégé  $N\sigma$ . Ainsi, la densité varie très rapidement autour des positions  $x = \pm N\sigma/2$ , sur des échelles bien plus petites que  $L$  qui peuvent être d'ordre  $\sigma$ . Si les deux hypothèses précédentes restent valides, l'approche hydrostatique n'est tout de même pas correcte. En effet, d'un point de vue intuitif, pour réaliser cette approche, il faut pouvoir considérer le système comme un fluide et réaliser une moyenne sur un volume mésoscopique, ce qui est impossible dans cette situation. D'un point de vue mathématique, les termes carrés du développement en gradient de la fonctionnelle densité ne sont plus négligeables, et les équations de l'hydrostatique obtenues à partir d'un argument variationnel sur une forme locale de l'énergie libre ne sont plus valables [62–64]. Ces considérations motivent l'analyse précise au voisinage de l'état de plus basse énergie, étude détaillée au paragraphe IV.4.

## IV.2 L'ensemble isobarique

L'ensemble isobarique, ensemble statistique dans lequel la pression et la température ont été fixées en mettant le système en contact avec des réservoirs, est très éloigné du problème qui nous

intéresse, à savoir le comportement du système dans l'ensemble microcanonique. Pire, si essayer de décrire la gravitation dans l'ensemble microcanonique semble naturel, il semble téméraire de vouloir définir physiquement un réservoir fixant la pression ou la température lorsque des interactions gravitationnelles sont en jeu. Toutefois, comme nous le verrons dans le paragraphe IV.2.1, l'étude mathématique de l'ensemble isobarique permet, *via* deux transformées de Laplace, de se ramener à l'ensemble microcanonique. Cet ensemble nous est donc utile comme intermédiaire de calcul, ce qui justifie son étude. Nous présentons donc dans la suite de ce paragraphe les idées principales des calculs dans l'ensemble isobarique.

### IV.2.1 Transformation de Laplace

Dans l'ensemble isobarique, le système peut échanger de l'énergie et du volume avec un thermostat à la température  $T$  et un pressostat à la pression  $P$ . La fonction de partition isobarique s'écrit

$$\Delta(T, P, N) = \frac{C_N}{\sigma N!} \int_0^\infty d\mathcal{L} \exp(-\beta P\mathcal{L}) \int_{\mathcal{L}^N \times R^N} \prod_i dx_i dp_i \exp[-\beta H_N], \quad (\text{IV.19})$$

tandis que la moyenne isobarique d'une certaine observable  $\mathcal{A}_N$  s'écrit

$$A_{\text{iso}}(T, P, N) = \langle \mathcal{A}_N \rangle_{\text{iso}} = \frac{\int_0^\infty d\mathcal{L} \int_{\mathcal{L}^N \times R^N} \prod_i dx_i dp_i \mathcal{A}_N \exp[-\beta H_N - \beta P\mathcal{L}]}{\int_0^\infty d\mathcal{L} \int_{\mathcal{L}^N \times R^N} \prod_i dx_i dp_i \exp[-\beta H_N - \beta P\mathcal{L}]} . \quad (\text{IV.20})$$

La constante de normalisation  $C_N$  ne joue pas de rôle par la suite.

En observant la définition (IV.19),  $\Delta(T, P, N)$  est proportionnelle à la transformée de Laplace par rapport à  $L$  et d'argument  $P/T$  de la fonction de partition  $Z(T, L, N)$  canonique usuellement définie. Ainsi, on peut écrire  $Z$  comme la transformée de Laplace inverse de  $\Delta$ , *i.e.*

$$Z(T, L, N) = \frac{\sigma}{2\pi iT} \int_{-i\infty+P_0}^{i\infty+P_0} dP \exp(PL/T) \Delta(T, P, N) \quad (\text{IV.21})$$

où  $P_0$  est un nombre positif et  $\Delta(T, P, N)$  le prolongement analytique de la fonction de partition isobarique dans le plan complexe en  $P$ .

Il existe donc aussi une relation entre les moyennes canoniques et isobariques s'écrivant

$$A_{\text{can}}(T, L, N) = \frac{\int_{-i\infty+P_0}^{i\infty+P_0} dP \exp(PL/T) \Delta(T, P, N) A_{\text{iso}}(T, P, N)}{\int_{-i\infty+P_0}^{i\infty+P_0} dP \exp(PL/T) \Delta(T, P, N)} . \quad (\text{IV.22})$$

De façon similaire, on peut passer de l'ensemble canonique à l'ensemble microcanonique par une transformée de Laplace inverse par rapport à  $\beta$  d'argument d'énergie  $E$ . Ces relations purement mathématiques sont valables pour  $N$  fini. Ces relations, et la simplicité - relative - des expressions dans cet ensemble, expliquent donc notre intérêt pour l'ensemble isobarique.

### IV.2.2 Fonction de partition isobarique pour le système fini

Dans l'ensemble isobarique, nous devons considérer des boîtes de taille arbitraire  $\mathcal{L}$  supérieure à la taille minimale  $N\sigma$  correspondant à l'état compact. Par commodité de calcul, le bord gauche de toutes les boîtes est fixé à la position  $-\sigma/2$ . L'intégration sur les moments dans l'expression (IV.19) correspond à un produit d'intégrales de fonction gaussiennes et est réalisé directement. De plus, comme les particules sont indiscernables, l'intégrale sur toutes les configurations correspond à  $N!$

fois l'intégrale les configurations ordonnées  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . La fonction de partition isobarique s'écrit donc

$$\Delta(T, P, N) = \frac{C_N}{\sigma} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{N/2} \int_{N\sigma}^{\infty} d\mathcal{L} \exp(-\beta P \mathcal{L}) \int_0^{\mathcal{L}-N\sigma} dx_1 \\ \times \int_{x_1+\sigma}^{\mathcal{L}-(N-1)\sigma} dx_2 \dots \int_{x_{N-1}+\sigma}^{\mathcal{L}-\sigma} dx_N \exp[-\beta V_N(x_1, x_2, \dots, x_N)] , \quad (\text{IV.23})$$

où  $V_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$  est le potentiel gravitationnel de l'hamiltonien (IV.1) pour les configurations ordonnées.

Grâce à la forme simple du potentiel à deux corps (IV.2), le potentiel des configurations ordonnées  $V_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$  se réduit à une combinaison linéaire des positions  $x_i$ . Chaque intégration est immédiate, mais amène à une somme télescopique. Pour éviter cette difficulté, nous procédons comme G.B. Rybicky dans son travail [66] au changement de variable suivant

$$u_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, N-1 \quad (\text{IV.24})$$

et

$$x_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i , \quad (\text{IV.25})$$

tandis que la taille de la boîte  $\mathcal{L}$  est conservée. La nouvelle variable  $x_G$  correspond à la position du centre de masse du système. Tous les  $u_i$  sont toujours plus grand que  $\sigma$  par construction, tandis que  $\mathcal{L}$  est plus grande que  $\sum_{i=1}^{N-1} u_i + \sigma$  pour chaque configuration. De plus, on montre directement que le Jacobien de cette transformation vaut 1.

Le potentiel total  $V_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$  s'écrit alors

$$V_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = Km^2 \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_i u_i \quad \text{avec } \gamma_i = i(N-i) . \quad (\text{IV.26})$$

Comme le potentiel est invariant par translation en ne dépendant pas de  $x_G$ , on réalise en premier l'intégration sur  $x_G$  pour une configuration fixée des  $N$  variables  $\{\mathcal{L}, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}\}$ . Cela fixe la longueur du segment sur lequel  $x_G$  varie, qui s'écrit simplement

$$\mathcal{L} - \left( \sum_{i=1}^{N-1} u_i + \sigma \right) . \quad (\text{IV.27})$$

L'intégration sur  $\mathcal{L}$  se réduit ensuite à

$$\int_{(\sum_{i=1}^{N-1} u_i + \sigma)}^{\infty} d\mathcal{L} \left[ \mathcal{L} - \left( \sum_{i=1}^{N-1} u_i + \sigma \right) \right] \exp(-\beta P \mathcal{L}) = \frac{\exp \left[ -\beta P \left( \sum_{i=1}^{N-1} u_i + \sigma \right) \right]}{(\beta P)^2} . \quad (\text{IV.28})$$

Après ces deux intégrations, chaque variable  $u_i$  varie de  $\sigma$  à  $+\infty$ . Ainsi, grâce au caractère linéaire du potentiel (IV.26), l'intégrale restante sur les  $(N-1)$   $u_i$  peut se factoriser en un produit de  $(N-1)$  intégrales, où chaque intégrale se réduit à

$$\int_{\sigma}^{\infty} du_i \exp \left[ -\beta (P + Km^2 \gamma_i) u_i \right] = \frac{\exp \left[ -\beta (P + Km^2 \gamma_i) \sigma \right]}{\beta (P + Km^2 \gamma_i)} . \quad (\text{IV.29})$$

L'expression exacte de la fonction de partition isobarique s'écrit donc

$$\Delta(T, P, N) = \frac{C_N}{\sigma} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{N/2} \exp \left[ -\beta (NP\sigma + E_c) \right] \prod_{i=0}^N \frac{1}{\beta (P + Km^2 \gamma_i)} , \quad (\text{IV.30})$$



où nous avons posé  $\gamma_0 = \gamma_N = 0$ . Dans cette formule,  $E_c$  est l'énergie minimale correspondant à l'état compact définie par l'équation (IV.4).

Nous introduisons la température adimensionnée  $t = T/(KN^2m^2\sigma)$  et nous définissons de même la pression adimensionnée  $p = P/(KN^2m^2)$ . La formule exacte (IV.30) peut se réécrire

$$\Delta(KN^2m^2\sigma t, KN^2m^2p, N) = C_N(2\pi KN^2m^3\sigma^3)^{N/2}\Delta_r(t, p, N), \quad (\text{IV.31})$$

où la dépendance fonctionnelle des paramètres  $t$  et  $p$  s'exprime dans la fonction de partition isobarique réduite

$$\Delta_r(t, p, N) = \frac{t^{3N/2+1}}{p^{N+1}} \exp \left[ -N\frac{p}{t} - N\frac{1-1/N^2}{6t} - \sum_{i=0}^N \psi_p(s_i) \right], \quad (\text{IV.32})$$

avec

$$\psi_p(s) = \ln \left[ 1 + \frac{s(1-s)}{p} \right] \quad (\text{IV.33})$$

et  $s_i = i/N$ .

### IV.2.3 La limite du système infini

Nous nous intéressons au comportement du système pour de grandes valeurs de  $N$ . Contrairement au scaling du chapitre précédent, nous n'allons pas cette fois faire varier les paramètres du système avec  $N$ . À cause de la longue portée de l'interaction gravitationnelle, l'énergie ne va pas être extensive mais croître comme  $N^3$ , et ainsi la température  $T$  et la pression  $P$  ne sont pas des paramètres intensifs. Or, pour définir des états étendus où la compétition entre les contributions thermiques et gravitationnelles est maintenue, il est crucial de conserver un certain équilibre entre les énergies cinétiques et potentielles [25]. Comme l'énergie gravitationnelle croît comme  $N^3$ , la température  $T$  doit aller comme  $N^2$ . De la même façon, et à partir de l'expression (IV.30),  $P$  doit être proportionnel à  $N^2$  pour contrebalancer l'énergie potentielle gravitationnelle  $Km^2\gamma_i$ . Ainsi, la limite d'un système infini doit être prise en prenant  $N \rightarrow \infty$  tandis que les paramètres adimensionnés de température  $t$  et de pression  $p$  doivent rester fixés.

Dans ce cadre, nous prenons la limite  $N \rightarrow \infty$  et étudions la fonction de partition isobarique réduite  $\Delta_r(t, p, N)$  avec  $(t, p)$  fixé. Le calcul est basé sur l'utilisation de la formule d'Euler-MacLaurin pour remplacer la somme discrète sur les  $\psi_p(s_i)$  en intégrale continue. Le détail de calcul est réalisé rigoureusement dans la référence [43] en annexe de cette thèse. On retiendra que cette transformation est valide si la condition

$$\frac{3}{2Np} \ll 1 \quad (\text{IV.34})$$

est réalisée. Au final, on en déduit le comportement asymptotique de la fonction de partition isobarique réduite

$$\Delta_r(t, p, N) \sim \frac{t}{p} \exp(-Ng(t, p)) \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty, \quad (\text{IV.35})$$

avec la fonction

$$g(t, p) = -\frac{3}{2} \ln t + \ln p + \frac{1}{6t} + \frac{p}{t} + \sqrt{1+4p} \ln \frac{\sqrt{1+4p}+1}{\sqrt{1+4p}-1} - 2. \quad (\text{IV.36})$$

On peut remarquer que la fonction  $g(t, p) = -\lim_{N \rightarrow \infty} (\ln \Delta_r(t, p, N))/N$  est analogue à l'enthalpie libre par particule pour un système ordinaire avec des interactions à courte portée. Ici, cette fonction dépend uniquement des paramètres  $(t, p)$  qui déterminent l'état du système infini.

### IV.2.4 Fonctions thermodynamiques

Le calcul explicite de la fonction de partition isobarique donne accès aux fonctions thermodynamiques *via* les identités standard. Dans cet ensemble, la longueur totale  $\mathcal{L}$  du système fluctue. Sa moyenne s'écrit

$$L_{\text{iso}}(T, P, N) = \langle \mathcal{L} \rangle_{\text{iso}} = -T \frac{\partial \ln \Delta}{\partial P}(T, P, N) = -t\sigma \frac{\partial \ln \Delta_{\text{r}}}{\partial p}(t, p, N). \quad (\text{IV.37})$$

Dans la limite du système infini, on peut utiliser l'expression asymptotique (IV.35) pour la fonction de partition réduite, ce qui conduit à  $L_{\text{iso}}(T, P, N) \sim N\sigma/\eta_{\text{iso}}(t, p)$  avec la fraction d'empilement moyenne isobarique

$$\eta_{\text{iso}}^{-1}(t, p) = t \frac{\partial g}{\partial p}(t, p). \quad (\text{IV.38})$$

Cette équation n'est rien d'autre que l'identité thermodynamique usuelle qui exprime l'inverse de la densité en fonction de l'enthalpie libre par particule. La formule explicite (IV.36) conduit à

$$\eta_{\text{iso}}(t, p) = \frac{\sqrt{1+4p}}{\sqrt{1+4p} + 2t \ln [(\sqrt{1+4p}+1)/(\sqrt{1+4p}-1)]}. \quad (\text{IV.39})$$

L'énergie moyenne s'écrit

$$\begin{aligned} E_{\text{iso}}(T, P, N) &= \langle H_N \rangle_{\text{iso}} = T^2 \frac{\partial \ln \Delta}{\partial T}(T, P, N) - PL_{\text{iso}}(T, P, N) \\ &= KN^2 m^2 \sigma \left[ t^2 \frac{\partial \ln \Delta_{\text{r}}}{\partial t}(t, p, N) + pt \frac{\partial \ln \Delta_{\text{r}}}{\partial p}(t, p, N) \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

Dans la limite du système infini, le comportement asymptotique (IV.35) conduit à  $E_{\text{iso}}(T, P, N) \sim KN^3 m^2 \sigma \varepsilon_{\text{iso}}(t, p)$  avec l'énergie adimensionnée par particule

$$\varepsilon_{\text{iso}}(t, p) = -t^2 \frac{\partial g}{\partial t}(t, p) - \frac{p}{\eta_{\text{iso}}(t, p)} = \frac{3t}{2} + \frac{1}{6} - p \frac{(1 - \eta_{\text{iso}}(t, p))}{\eta_{\text{iso}}(t, p)}. \quad (\text{IV.41})$$

En remplaçant  $p$  par  $p_{1/2}$  et  $\eta_{\text{iso}}(t, p)$  par  $\eta$ , le système d'équation (IV.39, IV.41) est identique au système (IV.11, IV.10) définissant l'équation d'état sous l'hypothèse hydrostatique. Autrement dit, sous les hypothèses de scaling proposées, *i.e.* les paramètres  $(t, p)$  fixés, le champ moyen décrit correctement le comportement du système infini dans l'ensemble isobarique.

## IV.3 Équivalence des ensembles

À partir des résultats de l'ensemble isobarique, nous pouvons étudier les résultats dans l'ensemble canonique puis dans l'ensemble microcanonique. Nous verrons ainsi que ces ensembles sont équivalents entre eux et avec l'équilibre hydrostatique, ce qui est cohérent avec la discussion du paragraphe IV.1.4.

### IV.3.1 Rappel mathématique : la méthode du col

Nous allons dans les paragraphes qui suivent largement utiliser cette méthode que nous rappelons brièvement ici. Pour plus de détails, on pourra consulter par exemples les ouvrages d'outils mathématiques pour les physiciens [69, 70].

Considérons deux fonctions  $f$  et  $g$ , pouvant prendre des valeurs complexes ou réelles. Nous cherchons à calculer des intégrales de la forme

$$I_N = \int_{\mathcal{D}} dx g(x) \exp[Nf(x)]; \quad (\text{IV.42})$$

avec  $N$  un nombre très grand. Nous supposons que les fonction  $f$  et  $g$  sont des fonctions qui varient « lentement » devant la variation de l'exponentielle, c'est à dire

$$\frac{d}{dx} (\ln g(x)) \ll N \frac{d}{dx} f(x); \quad (\text{IV.43})$$

cette condition est assurée pour  $N$  suffisamment grand. Nous supposons de plus que la fonction  $f$  possède un maximum absolu unique sur l'intérieur de  $\mathcal{D}$ , que nous noterons  $x_0$  et que nous appelons **point col**. Dans ce cas, on a

$$I_N = \exp[Nf(x_0)] \int_{\mathcal{D}} dx g(x) \exp[N(f(x) - f(x_0))]. \quad (\text{IV.44})$$

Par définition de  $x_0$ , la différence  $f(x) - f(x_0)$  est toujours négative. Lorsque  $N$  est très grand, la fonction  $\exp[N(f(x) - f(x_0))]$  va donc prendre des valeurs très faibles pour  $x$  loin de  $x_0$ . L'intégrale peut être approximée par ce qui se passe au voisinage du point col, c'est-à-dire

$$I_N \approx g(x_0) \exp[Nf(x_0)] \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x_0) \exp\left[N\frac{C}{2}(x - x_0)^2\right]; \quad (\text{IV.45})$$

avec

$$C = - \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}. \quad (\text{IV.46})$$

Dans ce cadre, cette intégrale gaussienne se calcule simplement et on a

$$I_N \approx \sqrt{\frac{2\pi}{NC}} g(x_0) \exp[Nf(x_0)]. \quad (\text{IV.47})$$

L'intégrale vaut donc, à l'ordre dominant, la valeur de la fonction prise en son maximum multipliée par la largeur du pic de la fonction autour de ce maximum *i.e.*  $\sqrt{2\pi/NC}$ .

Dans cette approche, nous négligeons tous les termes d'ordres 3 et plus dans le développement limité de la fonction  $f$ . Pour que la méthode soit valide, il faut vérifier cette condition. En particulier, tous les termes pour  $n > 2$

$$N^{1-n/2} C^{-n/2} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad (\text{IV.48})$$

doivent être négligeables devant 1. Cette condition provient du fait que, dans le développement limité, on estime que les facteurs  $(x - x_0)^n$  peuvent être remplacés par la covariance de l'approximation gaussienne. En effet, on estime que seul ce qui se passe dans cette zone va jouer un rôle dans la valeur de l'intégrale.

Il est à noter, et c'est un point important dans notre étude, que cette hypothèse sur les ordres supérieurs est automatiquement vérifiée pour  $N$  suffisamment grand si  $f$  ne dépend pas de  $N$ .

### IV.3.2 Ensemble canonique

Les calculs présentés dans ce paragraphe correspondent au système infini bien que le calcul exact de la fonction de partition canonique est possible pour  $N$  fini. Toutefois, son utilité étant limitée, nous renvoyons le lecteur curieux en annexe A.1 page 83 pour sa discussion.

Dans l'ensemble canonique, la température adimensionnée  $t = T/(KN^2 m^2 \sigma)$  est définie comme dans l'ensemble isobarique, tandis que nous fixons la taille de la boîte  $L = N\sigma/\eta$  où  $\eta$  est la fraction d'empilement usuelle. La limite de système infini est donc maintenant prise en prenant  $N \rightarrow \infty$  avec  $t$  et  $\eta$  fixés. Remarquons que la convergence de la fonction de partition exacte vers la fonction de partition réduite est uniforme sur l'axe d'intégration des  $z$  *i.e.*  $]p_0 - i\infty, p_0 + i\infty[$ , car le reste

de la formule d'Euler-Mac Laurin (IV.34) est borné par  $3/(2N|z|) \leq 3N/(2Np_0)$ . On utilise donc la définition (IV.31) dans la transformée de Laplace inverse (IV.21), on trouve

$$Z(KN^2m^2\sigma t, N\sigma/\eta, N) = C_N(2\pi KN^2m^3\sigma^3)^{N/2} Z_r(t, \eta, N) \quad (\text{IV.49})$$

avec la fonction de partition réduite

$$Z_r(t, \eta, N) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{-i\infty+p_0}^{i\infty+p_0} dz \exp(Nz/(t\eta)) \Delta_r(t, z, N) \quad (\text{IV.50})$$

où  $p_0$  est un nombre positif réel. Remarquons que nous utilisons un prolongement analytique des fonctions  $\Delta_r(t, z, N)$  et  $g(t, z)$  avec la variable complexe  $z$  à la place de  $p$ . Cela est correct car ces fonctions analytiques de  $z$  sont bien définies sur le plan complexe exceptées sur la coupure  $]-\infty, 0]$ . On obtient ainsi

$$Z_r(t, \eta, N) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+p_0}^{i\infty+p_0} dz z^{-1} \exp[-N(-z/(t\eta) + g(t, z))] \quad (\text{IV.51})$$

avec  $N \rightarrow \infty$  et  $(t, \eta)$  fixés.

Cette intégrale se calcule par la méthode du col. Le lecteur souhaitant connaître les détails de l'application de la méthode est renvoyé à la lecture de la référence [43] en annexe C. On retiendra que le point col  $z^*$  est unique, réel et défini par

$$\frac{\partial g}{\partial z}(t, z^*) = \frac{1}{t\eta}. \quad (\text{IV.52})$$

Grâce à ce point col, on en déduit la valeur de l'intégrale

$$Z_r(t, \eta, N) \sim \left[ z^* \sqrt{2\pi N |\partial^2 g / \partial z^2(t, z^*)|} \right]^{-1} \exp[-N(-z^*/(t\eta) + g(t, z^*))]. \quad (\text{IV.53})$$

À partir de ces éléments, nous pouvons définir l'énergie libre

$$F(KN^2m^2\sigma t, N\sigma/\eta, N) = -KN^2m^2\sigma t \left( \ln Z_r(t, \eta, N) + \ln[C_N(2\pi KN^2m^3\sigma^3)^{N/2}] \right). \quad (\text{IV.54})$$

La physique étant contenue dans le premier terme, on définit l'énergie libre adimensionnée par particule  $F(KN^2m^2\sigma t, N\sigma/\eta, N)/(KN^3m^2\sigma)$  par

$$f(t, \eta) = -\frac{z^*}{\eta} + tg(t, z^*), \quad (\text{IV.55})$$

où nous avons utilisé le comportement asymptotique (IV.53). De plus, on peut exprimer dans cette limite la pression adimensionnée  $p_{\text{can}}(t, \eta) = (KN^2m^2)^{-1} P_{\text{can}}(KN^2m^2\sigma t, N\sigma/\eta, N)$  par

$$p_{\text{can}}(t, \eta) = \eta^2 \frac{\partial f}{\partial \eta}(t, \eta). \quad (\text{IV.56})$$

En utilisant la formule (IV.55) pour  $f(t, \eta)$  et la définition du point col  $z^*(t, \eta)$  (IV.52), on obtient

$$p_{\text{can}}(t, \eta) = z^*(t, \eta). \quad (\text{IV.57})$$

Ainsi, le point col  $z^*(t, \eta)$  s'identifie à la pression canonique. En remplaçant  $z^*(t, \eta)$  par  $p_{\text{can}}(t, \eta)$  dans l'équation (IV.52), on voit que la relation entre  $p_{\text{can}}$ ,  $t$  et  $\eta$  dans l'ensemble canonique est la même que celle dans l'isobarique (IV.38) en posant  $\eta_{\text{iso}}(p, t) = \eta$  et  $p = p_{\text{can}}(t, \eta)$ .

L'énergie moyenne s'écrit par définition

$$E_{\text{can}}(T, L, N) = \langle H_N \rangle_{\text{can}} = T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}(T, L, N) = KN^2 m^2 \sigma t^2 \frac{\partial \ln Z_r}{\partial t}(t, \eta, N) . \quad (\text{IV.58})$$

On définit l'énergie adimensionnée par particule par  $E_{\text{can}}(T, L, N) \sim KN^3 m^2 \sigma \varepsilon_{\text{can}}(t, \eta)$  qui se réécrit dans la limite du système infini

$$\varepsilon_{\text{can}}(t, \eta) = -\frac{z^*(t, \eta)}{\eta} - t^2 \frac{\partial g}{\partial t}(t, z^*(t, \eta)) , \quad (\text{IV.59})$$

comme conséquence du comportement asymptotique (IV.53) et de la définition du point col (IV.52). En réalisant à nouveau la substitution  $\eta_{\text{iso}}(p, t) = \eta$  et  $p = p_{\text{can}}(t, \eta)$  dans la définition de l'énergie isobarique (IV.41), on retrouve exactement l'énergie canonique (IV.59).

Les équations du champ moyen décrivent donc correctement l'état le plus probable du système dans l'ensemble canonique. Ce résultat provient du fait que, l'équation mathématique définissant le point col (IV.52) a la même forme que l'identité thermodynamique exprimant la densité en fonction de la dérivée de l'enthalpie libre par rapport à la pression dans l'ensemble isobarique (IV.38).

### IV.3.3 L'ensemble microcanonique

Dans cet ensemble, les variables sont l'énergie adimensionnée  $\varepsilon = E/(KN^3 m^2 \sigma)$  et la longueur  $L = N\sigma/\eta$ , ces paramètres restant fixés dans la limite du système infini. Comme précédemment, on définit le nombre de micro-états réduit

$$\Omega(E, L, N) = \frac{C_N (2\pi KN^2 m^3 \sigma^3)^{N/2}}{N^2} \Omega_r(\varepsilon, \eta, N) \quad (\text{IV.60})$$

et on réalise la transformation de Laplace inverse

$$\Omega_r(\varepsilon, \eta, N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+y_0}^{i\infty+y_0} dy \exp(N\varepsilon y) Z_r(y^{-1}, \eta, N) \quad (\text{IV.61})$$

où  $y_0$  est un nombre positif réel. On va à nouveau réaliser une méthode du col pour calculer cette intégrale. En effet, l'intégrande est le produit d'une fonction variant lentement et du terme exponentiel

$$\exp[-N(-\varepsilon y + yf(y^{-1}, \eta))] . \quad (\text{IV.62})$$

Sans détailler le raisonnement, qui est en tout point identique à celui du paragraphe précédent et détaillé en annexe dans la référence [43], on montre que l'énergie libre microcanonique  $F_{\text{mic}}(E, L, N) = E - T_{\text{mic}}(E, L, N)S(E, L, N)$  se comporte comme  $F_{\text{mic}}(KN^3 m^2 \sigma \varepsilon, N\sigma/\eta, N) \sim KN^3 m^2 \sigma f_{\text{mic}}(\varepsilon, \eta)$  avec la fonction sans dimension

$$f_{\text{mic}}(\varepsilon, \eta) = f(t_{\text{mic}}, \eta) , \quad (\text{IV.63})$$

ce qui correspond à l'énergie libre canonique évaluée en  $t_{\text{mic}}$ , la température sans dimension microcanonique. De même, la pression microcanonique sans dimension coïncide avec la pression canonique

$$p_{\text{mic}}(\varepsilon, \eta) = p_{\text{can}}(t_{\text{mic}}, \eta) . \quad (\text{IV.64})$$

Au final, la relation entre  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ,  $p_{\text{mic}}$  et  $t_{\text{mic}}$  coïncide avec ses équivalents canonique (IV.59), isobarique (IV.41) et surtout hydrostatique (IV.10).

### IV.3.4 Discussion

Les trois ensembles isobarique, canonique et microcanonique donnent donc des résultats équivalents aux résultats de l'approche hydrostatique. Dans ce cas, les ensembles sont équivalents et l'approche hydrostatique permet de décrire le système. L'analyse que nous avons réalisée dans le chapitre précédent et adaptée dans le paragraphe IV.1.4 est donc cohérente avec ces résultats.

Toutefois, ces résultats sont valables uniquement sous plusieurs conditions. Sans entrer dans les détails, tous ces éléments mathématiques, en particulier la formule d'Euler-Mac Laurin ou le fait de négliger les termes cubiques dans la méthode du col, ne sont plus valides pour les très faibles pressions, lorsque  $p$  est plus petit que  $1/N$ . Ainsi, pour utiliser les résultats du système infini pour décrire un système fini, il faudra vérifier cette condition.

Enfin, une condition essentielle pour utiliser la méthode du col pour le calcul du nombre de complexions  $\Omega$  est que l'intégrande reste analytique. Or, il s'avère que lorsque  $\varepsilon$  se rapproche de  $1/6$ , le point col et la pression correspondante se rapprochent fortement de 0. Dans ce cas, la méthode du col pourrait ne plus être valide. Il s'agit du cas des états presque totalement effondrés pour lesquels  $\varepsilon \rightarrow 1/6$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  que nous étudions paragraphe IV.4.

## IV.4 La structure cœur-halo

Dans cette partie, nous allons nous approcher de l'état d'énergie minimale pour mettre en évidence l'émergence d'une structure cœur-halo. Pour cela, considérons dans l'ensemble microcanonique des états d'énergie  $E$  tels que

$$E - E_c \sim Km^2\sigma N^\alpha \varepsilon_{\text{exc}} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (\text{IV.65})$$

avec  $0 \leq \alpha < 3$  et  $\varepsilon_{\text{exc}} > 0$ . Comme  $E$  croît moins vite que  $N^3$  et grâce à la nature attractive de l'interaction en  $|x|$ , les particules vont rester confinées dans une région de taille  $N\sigma + D_H$  où l'extension  $D_H$  du halo devient infiniment faible devant  $(L - N\sigma)$ . De cette façon, les particules ne ressentent plus la présence des murs de la boîte, en accord avec la décroissance exponentielle de la pression observée au paragraphe IV.3 lorsque la température  $t$  tend vers 0. Dans ce cadre, il est légitime d'étudier les états quasi compacts dans un espace ouvert, sans murs, où nous avons uniquement fixé la position du centre de masse à l'origine des  $x$ .

### IV.4.1 Développements explicites pour le système fini

La fonction de densité particulière  $\rho(x)$  est définie par la relation

$$\rho(x) = \left\langle \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \right\rangle_{\text{mic}} . \quad (\text{IV.66})$$

Les fonctions  $\delta$  peuvent être réécrites en terme de transformées de Fourier de la fonction unité. En utilisant cette représentation, la densité s'exprime comme la transformée de Fourier de la moyenne d'une somme de facteurs de phases, c'est-à-dire

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) \tilde{\rho}(k) \quad (\text{IV.67})$$

avec

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{\int_{R^N \times R^N} \prod_j dx_j dp_j \delta(E - H_N) \delta(N^{-1} \sum_{j=1}^N x_j) \sum_{j=1}^N \exp(ikx_j)}{\int_{R^N \times R^N} \prod_j dx_j dp_j \delta(E - H_N) \delta(N^{-1} \sum_{j=1}^N x_j)} . \quad (\text{IV.68})$$

La mesure microcanonique  $\delta(E - H_N)$  est ici multipliée par le facteur  $\delta(N^{-1} \sum_{j=1}^N x_j)$  qui impose la contrainte sur la position du centre de masse. De plus, les intégrations spatiales se font sur l'espace entier car nous ne prenons plus de boîte en considération. Cette représentation n'était pas utilisable dans les parties précédentes à cause justement de cette intégration sur un domaine fini.

Pour contourner les difficultés du calcul direct de ces quantités, nous écrivons les expressions microcanoniques comme des transformées de Laplace inverse de leurs équivalents canoniques. La moyenne microcanonique (IV.68) s'écrit alors

$$\tilde{\rho}(k) = \frac{\int_{-i\infty+\beta_0}^{i\infty+\beta_0} d\beta \exp(\beta E) A(k, \beta, N)}{\int_{-i\infty+\beta_0}^{i\infty+\beta_0} d\beta \exp(\beta E) B(\beta, N)} \quad (\text{IV.69})$$

avec

$$A(k, \beta, N) = \int_{R^N \times R^N} \prod_j dx_j dp_j \exp(-\beta H_N) \delta\left(N^{-1} \sum_{j=1}^N x_j\right) \sum_{j=1}^N \exp(ikx_j) \quad (\text{IV.70})$$

et

$$B(\beta, N) = \int_{R^N \times R^N} \prod_j dx_j dp_j \exp(-\beta H_N) \delta\left(N^{-1} \sum_{j=1}^N x_j\right). \quad (\text{IV.71})$$

Les calculs explicites de  $B(\beta, N)$  et  $A(k, \beta, N)$  sont très proches de ce que nous avons pu faire précédemment dans le paragraphe IV.2. Les principales étapes sont d'abord l'intégration direct sur les moments, le classement des particules selon leur position, puis l'introduction des nouvelles variables  $u_j = x_{j+1} - x_j$  et la dernière coordonnées  $x_G$ , la position du centre de masse. Grâce à la structure linéaire du potentiel  $V_N$  (IV.26), on calcule directement

$$B(\beta, N) = N! \frac{(2\pi)^{N/2}}{K^{N-1} m^{3N/2-2}} \left( \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\gamma_j} \right) \frac{\exp(-\beta E_c)}{\beta^{3N/2-1}}, \quad (\text{IV.72})$$

avec à nouveau  $\gamma_j = j(N-j)$ . Pour le calcul de  $A(k, \beta, N)$ , pour chaque facteur de phase  $\exp(ikx_j)$ , nous utilisons l'identité

$$x_j = \frac{1}{N} \left[ \sum_{l=1}^{j-1} lu_l - \sum_{l=j}^{N-1} (N-l)u_l \right] \quad (\text{IV.73})$$

qui s'obtient directement de la définition des  $u_l$  et de la contrainte  $x_G = 0$ . L'intégration sur les  $u_l$  restants se factorise à nouveau, et nous obtenons *straightforwardly*, en écrivant les produits comme des exponentielles de sommes,

$$A(k, \beta, N) = B(\beta, N) \sum_{j=1}^N \exp[-ik\sigma(N-2j+1)/2] \\ \times \exp \left[ - \sum_{l=1}^{j-1} \ln \left( 1 - \frac{ik}{N\beta K m^2 (N-l)} \right) - \sum_{l=j}^{N-1} \ln \left( 1 + \frac{ik}{N\beta K m^2 l} \right) \right]. \quad (\text{IV.74})$$

#### IV.4.2 Représentation intégrale dans la limite de système infini

Prenons maintenant  $N \rightarrow \infty$  avec la différence  $(E - E_c)$  augmentant comme  $N^\alpha$ . Nous sommes en mesure de calculer les deux transformées des Laplace intervenant dans l'expression (IV.69) de

$\tilde{\rho}(k)$  dans la limite  $N \rightarrow \infty$  par, à nouveau, la méthode du col. Pour  $B(\beta, N)$ , en prenant en compte son expression exacte (IV.72), le point col obtenu en extrémalisant  $[\beta(E - E_c) - (3N/2) \ln \beta]$  est

$$\beta^* = \frac{3N}{2(E - E_c)} . \quad (\text{IV.75})$$

Il est facile de vérifier que cette estimation devient exacte lorsque  $N \rightarrow \infty$ . En effet, cette transformée se calcule explicitement pour tout  $N$  et coïncide avec cette estimation lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Pour la transformée de Laplace de  $A(k, \beta, N)$ , nous avons besoin du développement asymptotique de (IV.74). En appliquant la formule d'Euler-Mac Laurin aux sommes contenues dans l'expression (IV.74), et en prenant soin de vérifier que les termes correctifs sont bien négligeables dans les conditions qui nous intéressent, nous obtenons la forme asymptotique de  $A(k, \beta, N)$ , c'est-à-dire

$$A(k, \beta, N) \sim NB(\beta, N)R(k, \beta, N) , \quad (\text{IV.76})$$

avec

$$R(k, \beta, N) = \int_0^1 ds \exp \left[ -ikN(1 - 2s)\sigma/2 - N\varphi(s, \kappa^{-1}(\beta, N)k) \right] , \quad (\text{IV.77})$$

$$\begin{aligned} \varphi(s, q) = & s \ln[s(1 - s - iq)] + (1 - s) \ln[(1 - s)(s + iq)] \\ & + iq \ln \left[ \frac{(1 + iq)(1 - s - iq)}{(1 - iq)(s + iq)} \right] - \ln \left[ \frac{(s + iq)(1 - s - iq)}{(1 - iq)(1 + iq)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.78})$$

et

$$\kappa(\beta, N) = \beta KN^2 m^2 . \quad (\text{IV.79})$$

Ainsi, dans la transformée de Laplace de  $A(k, \beta, N)$ , on peut appliquer à nouveau la méthode du col. Celle-ci consiste à extrémaliser la quantité  $[\beta(E - E_c) - (3N/2) \ln \beta - N\varphi(s, \kappa^{-1}(\beta, N)k)]$ . La dérivée en  $\beta$  de cette quantité s'écrit

$$(E - E_c) - \frac{3N}{2} \frac{1}{\beta} - Nk \frac{d\kappa^{-1}}{d\beta} \frac{\partial}{\partial q} \varphi(s, q) . \quad (\text{IV.80})$$

En supposant que la valeur de  $\beta$  reste d'ordre  $N^{1-\alpha}$  comme dans la relation (IV.75), on observe que le dernier terme de cette équation est d'ordre  $N^{-1}\beta^{-2} \sim N^{-3+2\alpha}$  et nous pouvons donc le négliger devant les autres termes variant comme  $N^\alpha$  car  $\alpha < 3$ . Ainsi, l'intégrande se réduit à une fonction  $B(\beta, N)$  rapidement variable en  $\beta$  multipliée par une fonction lentement variable  $R(k, \beta, N)$ . Au premier ordre dans la limite des grands  $N$ ,  $B(\beta, N)$  peut être remplacée par son approximation gaussienne au voisinage du point col tandis que  $R(k, \beta, N)$  est remplacée par sa valeur en  $\beta = \beta^*$ . La transformée de Laplace inverse de  $A(k, \beta, N)$  est donc le produit de celle de  $B(\beta, N)$  par  $R(k, \beta^*, N)$ . En insérant ce résultat dans l'expression (IV.69) de  $\tilde{\rho}(k)$  et en utilisant la transformée de Fourier (IV.67), nous arrivons à

$$\rho(x) \sim \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) \int_0^1 ds \exp \left[ -ikN(1 - 2s)\sigma/2 - N\varphi(s, k/\kappa(\beta^*, N)) \right] . \quad (\text{IV.81})$$

Cette représentation intégrale (IV.81) est valide pour toutes les puissances  $\alpha < 3$ . La température  $T^* = 1/\beta^*$  apparaît naturellement dans cette représentation. Avec la relation (IV.75), on observe que  $T^*$  est reliée à l'énergie d'excitation  $(E - E_c)$  par une relation identique à celle du théorème du viriel, de façon similaire au cas de particules ponctuelles auto-confinées dans un espace ouvert [66].



### IV.4.3 La densité exacte dans le halo

Pour  $\alpha < 3$ , la plupart des particules sont contenues dans un agrégat de taille typique  $N\sigma$ . Nous déterminons la forme exacte de la densité du halo entourant ce cœur à partir de la représentation (IV.81) et discutons la validité de l'approche hydrostatique.

#### IV.4.3.a Méthode du col et hydrostatique

La densité donnée par la formule (IV.81) est une fonction paire grâce à la propriété

$$\varphi(1-s, -k/\kappa(\beta^*, N)) = \varphi(s, k/\kappa(\beta^*, N)) . \quad (\text{IV.82})$$

Nous restreignons donc notre étude à  $x > 0$ . Comme nous sommes intéressés par ce qui se passe proche des états compacts, il est pratique de réécrire la position comme  $x = N\sigma(1 + 2\xi)/2$ , tandis que nous posons  $s \rightarrow (1-s)$  et inversons les intégrales sur  $k$  et  $s$  dans la formule (IV.81) qui se réécrit alors comme

$$\rho(x) \sim \frac{N}{2\pi} \int_0^1 ds \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[-N\Psi(s, k)] , \quad (\text{IV.83})$$

avec

$$\Psi(s, k) = ik\sigma(\xi + s) + \varphi(1-s, k/\kappa^*) \quad (\text{IV.84})$$

où nous avons posé  $\kappa^* = \kappa(\beta^*, N)$ . Nous allons réaliser ces intégrations par la méthode du col.

Le détail des calculs est disponible dans la référence [43] reproduite en annexe C. Au final, on trouve que les deux points cols  $(s^*, k^*)$  sont uniques et définis par les relations  $k^* = 0$  et

$$\ln \left[ \frac{s^*}{(1-s^*)} \right] = -\sigma\kappa^*(\xi + s^*) . \quad (\text{IV.85})$$

Ensuite, après quelques manipulations algébriques, nous obtenons l'estimation de  $\rho(x)$  par la double méthode du col, avec  $x = N\sigma(1 + 2\xi)/2$ ,

$$\rho^*(x) = \frac{\kappa^*}{\sigma\kappa^* + [s^*(1-s^*)]^{-1}} . \quad (\text{IV.86})$$

On insiste sur le fait que cette expression est identique à la densité hydrostatique du système dans un espace ouvert. Celle-ci peut s'obtenir en suivant le raisonnement détaillé au paragraphe IV.1 en prenant  $L \rightarrow \infty$  avec tous les autres paramètres fixés. De plus, si l'on pose  $\sigma = 0$  tandis que  $x$  et les autres paramètres restent fixés, on peut explicitement résoudre l'équation (IV.85), c'est-à-dire  $s^* = \exp(-\kappa^*x/N)/(1 - \exp(-\kappa^*x/N))$ , et donc l'expression (IV.86) se réduit à  $\kappa^*/[4 \cosh^2(\kappa^*x/(2N))]$  avec  $\kappa^* = 3KN^3m^2/(2E)$ , ce qui n'est rien d'autre que le résultat de Rybicki [66] pour les particules ponctuelles.

Nous venons d'appliquer la méthode du col sans se soucier de sa validité ou non, et cela est équivalent à l'approche hydrostatique. Pour vérifier la validité de la méthode du col, nous devons discuter le rôle des termes cubiques et supérieurs (IV.48) évoqués paragraphe IV.3.1. En effet, la fonction  $\Psi$  dépend de  $\kappa$  qui dépend explicitement de  $N$  (IV.79). Les termes d'ordres supérieurs ne sont donc plus automatiquement négligeables comme dans les cas précédents.

#### IV.4.3.b Halo étendu pour $2 < \alpha < 3$

Pour  $\alpha < 3$ ,  $\kappa^*$  se comporte comme  $N^{3-\alpha}$ . À partir de l'estimation (IV.86) et de l'équation du point col (IV.85), la densité proche de  $x = N\sigma/2$  doit varier par rapport à  $\xi$  sur une échelle d'ordre  $1/(\sigma\kappa^*)$ , et le point col  $s^*$  est d'ordre  $1/(\sigma\kappa^*)$ . L'importance des termes cubiques et supérieurs dans la méthode du col peuvent être estimés en regardant le comportement lorsque

$(k - k^*)$  et  $(s - s^*)$  sont de l'ordre de la covariance entrant en jeu dans les approximations Gaussiennes, comme discuté au paragraphe IV.3.1. Ainsi, on estime  $(k - k^*) \sim N^{-1/2} [\Psi_{kk}]^{-1/2}$  et  $(s - s^*) \sim N^{-1/2} [\Psi_{ss} + 2k_s^* \Psi_{ks} + (k_s^*)^2 \Psi_{kk}]^{-1/2}$ , où les indices inférieurs désignent les dérivées par rapport aux variables mentionnées. Pour l'intégrale sur  $k$ , la contribution cubique en exposant de  $\exp[-N\Psi(s, k)]$  et d'ordre

$$N^{-1/2} \Psi_{kkk} [\Psi_{kk}]^{-3/2} \sim (Ns^*)^{-1/2} \sim N^{1-\alpha/2} \quad (\text{IV.87})$$

autour du point col  $k^* = 0$  pour  $s = s^* \sim 1/(\sigma\kappa^*)$ . Ainsi, si  $\alpha > 2$ , la contribution cubique (IV.87) disparaît lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Pour l'intégrale sur  $s$ , la contribution cubique est aussi d'ordre  $N^{1-\alpha/2}$ . De plus, tous les termes d'ordres supérieurs dans les deux exposants deviennent négligeables devant 1 lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Ainsi, ces estimations montrent que la méthode du col (IV.86) donne la fonction exacte lorsque  $N \rightarrow \infty$  pour  $2 < \alpha < 3$ . Le halo correspondant est de taille typique  $D_H$  d'ordre  $N\sigma/(\sigma\kappa^*) \sim N^{\alpha-2}$ , ce qui est petit comparé à la taille  $N\sigma$  du cœur où la majorité des particules sont piégées. De plus, ce halo est étendu devant  $\sigma$  car sa taille  $D_H$  diverge lorsque  $N \rightarrow \infty$ . L'approche hydrostatique donne toujours le profil de densité exact par l'expression (IV.86). En effet, les critères de validité (IV.17) et (IV.18) détaillés dans le paragraphe IV.1.4 sont remplis. Et surtout, la densité  $\rho(x)$  du halo varie sur une taille  $D_H$  bien plus grande que la taille typique de la corrélation entre les bâtonnets durs  $\sigma$ .

#### IV.4.3.c Halo fini pour $\alpha = 2$

Pour  $\alpha = 2$ ,  $\sigma\kappa^*$  se réduit à  $3N/(2\varepsilon_{\text{exc}})$  et est d'ordre  $N$ . Le comportement (IV.87) montre que le terme cubique derrière l'approximation gaussienne est d'ordre  $N^0$ , et il ne peut donc pas être négligé lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Cela implique que la méthode du col n'est plus valable, *i.e.* le profil de densité exact n'est plus donné par l'estimation (IV.86) lorsque  $N \rightarrow \infty$ . En réalité, et comme suggéré par les calculs de la méthode du col, les termes dominants de la représentation intégrale (IV.83) proviennent de valeurs finies de  $k$  d'une part, et des faibles valeurs de  $s$  d'ordre  $1/N$  d'autre part. Ainsi, nous réalisons le changement de variables  $k \rightarrow v/\sigma$  et  $s \rightarrow u/N$ , tandis que nous paramétrisons la position  $\xi$  par un paramètre adimensionné  $w$  défini par  $\xi = (2\varepsilon_{\text{exc}}/3)(\ln N)/N + w/N$ . Avec ces changements de variables, la fonction  $\Psi(v, u/N)$  peut être en partie développée en puissance du petit paramètre  $u/N$  tandis que  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont maintenus fixés. L'exposant  $[-N\Psi(v, u/N)]$  dans la représentation intégrale (IV.83) devient une fonction de  $(u, v, w)$  qui ne dépend plus de  $N$ , plus des termes correctifs qui disparaissent dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Cela nous conduit à la forme asymptotique exacte de la densité au point  $w$ ,

$$\rho(w) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \exp[-i vw - i u v - u \ln u] \times \exp[2i\varepsilon_{\text{exc}}v/3 + (u - 2i\varepsilon_{\text{exc}}v/3) \ln(u - 2i\varepsilon_{\text{exc}}v/3)] , \quad (\text{IV.88})$$

où l'intégrale sur  $u$  a été étendue à l'infini, en négligeant les corrections qui disparaissent lorsque  $N \rightarrow \infty$  grâce à l'intégrabilité des fonctions concernées.

Comme  $\sigma w = x - N\sigma/2 - (2\varepsilon_{\text{exc}}/3) \ln N$ , la densité varie maintenant sur une échelle d'ordre  $\sigma$ , et donc le halo a une extension finie  $D_H$ . Notons que le début du halo où  $\rho(x)$  est toujours proche de la densité du cœur  $1/\sigma$  est localisé à une distance  $N\sigma/2$  qui diverge logarithmiquement avec  $N$ . Le profil de densité dans le halo, tout comme sa taille et sa position, dépend de l'énergie d'excitation sans dimension  $\varepsilon_{\text{exc}}$ . Lorsque  $\varepsilon_{\text{exc}}$  devient grand, le halo devient de façon prévisible très étendu comme dans le cas précédent  $\alpha > 2$ . Pour des valeurs finies de  $\varepsilon_{\text{exc}}$ , la taille  $D_H$  se réduit à quelques  $\sigma$ , la taille des bâtonnets. Lorsque  $\varepsilon_{\text{exc}}$  tend vers zéro, le halo devient de plus en plus fin

et localisé de plus en plus proche du bord  $x = N\sigma/2$ . En réalité, dans cette limite, on remarque que l'expression (IV.88) se réduit à

$$\rho_0(w) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \exp[-iv(w+u)] = \frac{1}{\sigma}(1 - H(w)), \quad (\text{IV.89})$$

où  $H(w)$  est la fonction de Heavyside,  $H(w) = 0$  pour  $w < 0$  et  $H(w) = 1$  pour  $w > 0$ . Dans cette limite, le halo disparaît et toutes les particules sont gelées dans le cœur. Ce résultat peut être obtenu de façon similaire en considérant  $\alpha < 2$ . Dans la figure IV.2, nous avons tracé plusieurs profils de densité (IV.88) pour plusieurs valeurs de  $\varepsilon_{\text{exc}}$ .

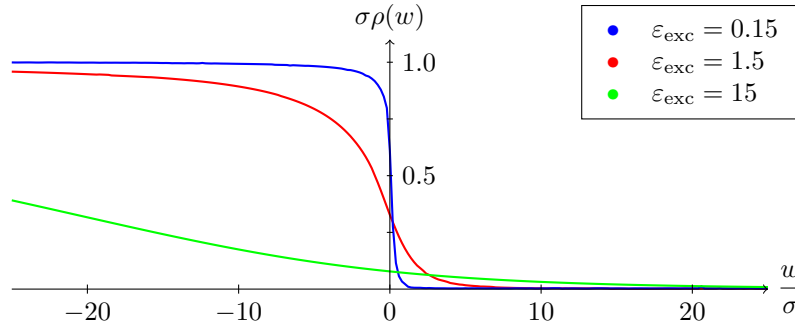


FIGURE IV.2 – La densité exacte  $\sigma\rho(w)$  donnée par l'expression (IV.88) pour différentes valeurs de l'énergie d'excitation  $\varepsilon_{\text{exc}}$ . Pour  $\varepsilon_{\text{exc}}$  petit, le profil de densité est proche d'une fonction de Heavyside, décrivant un état totalement compact et gelé. On remarque bien que la densité du halo varie sur une échelle de l'ordre de quelques  $\sigma$ , empêchant une description hydrostatique.

Et pour finir, nous insistons sur le fait que l'approche hydrostatique ne conduit pas au profil exact de densité (IV.88). La densité hydrostatique, donnée par l'expression (IV.86), se réduit à une fonction dépendant de la position adimensionnée  $w$  défini précédemment. En effet, après avoir posé  $s^* = u^*/N$ , l'équation (IV.85) peut se réécrire

$$\frac{2\varepsilon_{\text{exc}}}{3} \ln u^* = -w - u^*, \quad (\text{IV.90})$$

alors que le profil de densité hydrostatique devient

$$\rho^*(w) = \frac{u^*}{\sigma[u^* + 2\varepsilon_{\text{exc}}/3]}. \quad (\text{IV.91})$$

Le fait que l'approche hydrostatique ne permette plus de décrire le système est une conséquence de la variation rapide de la densité à des échelles du même ordre de grandeur que l'échelle de corrélation locale entre les objets. Cela n'est pas dû directement à l'interaction gravitationnelle locale, qui est toujours négligeable. L'hypothèse de couplage faible (IV.18) reste valable et les particules du halo interagissent de façon négligeables entre elles. Dans la figure IV.3, nous comparons les résultats de l'hydrostatique et la densité exacte en traçant  $\text{Diff}(w) = [\rho(w) - \rho^*(w)]/\rho(w)$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon_{\text{exc}}$ .

## IV.5 Conclusion de l'étude

L'étude de ce modèle, assez simple et avec peu de réalité physique *a priori*, a permis d'établir des résultats exacts permettant d'illustrer la discussion générale de cette thèse, et plus généralement de discuter certains aspects des problèmes de mécanique statistique avec interactions à longue portée.

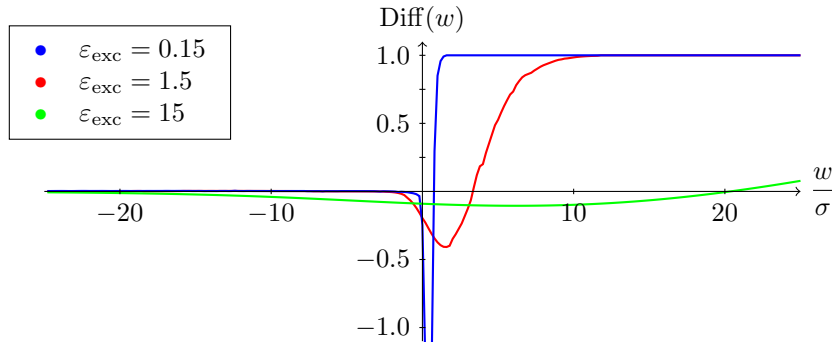


FIGURE IV.3 – La différence relative  $\text{Diff}(w) = [\rho(w) - \rho^*(w)]/\rho(w)$  entre les profils de densité exacts et hydrostatiques pour plusieurs valeurs de  $\varepsilon_{\text{exc}}$ . La pertinence globale de l'approche hydrostatique est meilleure pour de grandes valeurs de  $\varepsilon_{\text{exc}}$ . Pour des petites valeurs de  $\varepsilon_{\text{exc}}$ , les deux profils sont proches de la valeur du profil compact  $1/\sigma$  pour  $w < 0$ , alors que ces deux profils diffèrent de plusieurs ordres de grandeurs pour  $w > 0$ .

Premièrement, l'équivalence des ensembles est ici assurée par l'équilibre entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Arrêtons nous un instant sur ce point et réalisons un raisonnement dynamique sur le système dans l'ensemble microcanonique. Pour cela, considérons un état initial d'énergie cinétique nulle. Dans ce cas, l'énergie totale  $E$  est égale à l'énergie potentielle  $V$  elle-même proportionnelle à  $N^3$ . Lorsque le système évolue par la suite, et après un temps suffisamment long, l'énergie potentielle reste proportionnelle à  $N^3$  et donc l'énergie cinétique est égale à la différence de deux termes proportionnels à  $N^3$ , ce qui implique une température  $T$  proportionnelle à  $N^2$ . Si la température est plus faible, il n'y aura pas suffisamment d'énergie pour contrer l'interaction gravitationnelle et le système se rapprochera d'un état collapsé. C'est ce qui arrive quand l'énergie de départ est choisie trop proche de l'énergie de collapsé.

Ainsi, lorsque le système s'approche trop de l'état totalement effondré, l'approche hydrostatique ne permet plus de décrire correctement le profil de densité, et le système possède un cœur et un halo de taille finie lorsque  $N$  tend vers l'infini. Grâce à ce modèle soluble, nous avons donc mis en lumière la discussion du chapitre précédent III.5.

Nous souhaitons insister sur les analogies et les différences entre les gravitations à une et à trois dimensions. La différence fondamentale provient de la forme du potentiel d'interaction à deux corps tant aux longues qu'aux courtes portées. À courte portée, l'interaction gravitationnelle à une dimension reste finie, et tend même vers zéro. Ainsi, la condition de couplage faible qui sous-tend un traitement de type champ moyen est toujours vérifiée. À trois dimensions, la divergence du potentiel en  $1/r$  favorise la formation d'objets composés, comme les systèmes d'étoiles binaires ou d'autres objets effondrés, ce qui peut conduire à invalider le traitement de type champ moyen de la gravitation, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. De plus, la divergence du potentiel en  $|x|$  à longue distance assure un auto-confinement du système à une dimension, alors qu'à trois dimensions il est nécessaire d'introduire une boîte pour le traitement statistique, ce qui est tout de même assez artificiel dans un contexte astrophysique.

Dans ce chapitre, nous avons utilisé plusieurs ensembles statistiques. Nous rappelons que l'ensemble microcanonique semble être le seul ensemble à avoir une certaine justification pour décrire des systèmes astrophysiques. Toutefois, l'utilisation des ensembles canonique et isobarique nous a permis d'éviter de nombreuses difficultés liées à un calcul direct dans l'ensemble microcanonique. Ces ensembles doivent être ici vus comme des outils de calculs sans entrer dans la discussion de leur réalisation physique concrète.

Enfin, nous souhaitons faire une dernière remarque sur la dynamique du système. Contrairement au cas à trois dimensions, où la taille non-nulle des objets provoque une accélération de la relaxation

vers l'équilibre thermodynamique [40], les collisions à une dimension laissent la distribution de vitesse inchangée et n'ont donc pas d'influence sur la distribution de vitesse, et donc ne favorisent pas la thermalisation. De plus, en relation avec les mécanismes de fragmentation, nous pouvons mentionner l'étude numérique sur la formation de petits agrégats [71], l'analyse numérique des effets de la dissipation pour des systèmes auto-gravitants à une dimension [72], et les résultats exacts du processus d'agrégation de particules ponctuelles avec des interactions gravitationnelles à une dimension et des collisions inélastiques [73].

## Un modèle de binaires partiellement thermalisées

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié en détail l'approximation hydrostatique ainsi que les critères justifiant sa validité. Dans le chapitre III, nous avons vu que les hypothèses sous-jacentes à un traitement champ moyen peuvent être mises en défaut par suite des effets à courte portée de l'interaction gravitationnelle à trois dimensions. Dans cette analyse, nous avons supposé que le système était à l'équilibre statistique et totalement thermalisé. Pour les systèmes astrophysiques très dilués qui nous intéressent, cette hypothèse semble raisonnable lorsqu'on considère les structures à grandes échelles. Par contre, les configurations où deux corps sont relativement proches ne sont pas thermalisées en général. Ainsi, dans un système d'étoiles double, la dynamique relative des deux étoiles est entièrement gouvernée par l'interaction gravitationnelle entre ces deux corps. Les orbites elliptiques correspondantes du problème bien connu de Kepler [74] restent stables sur de très grandes échelles de temps, et leur distribution ne saurait être correctement décrite par la mécanique statistique d'équilibre. En conséquence, la description des effets à courte portée pour les systèmes considérés nécessite l'introduction d'une certaine phénoménologie que nous allons construire en nous inspirant de certains résultats connus ou observés.

Dans la littérature, le rôle des systèmes binaires est largement évoqué dans la discussion de l'équilibre des amas globulaires. Ces systèmes permettent, à énergie fixée, d'augmenter l'énergie cinétique du système et de contrecarrer l'effondrement du cœur des amas et la catastrophe gravotherme décrite au chapitre II. On pourra se reporter aux ouvrages [7, 8] pour une discussion précise du phénomène. De plus, dans de nombreuses simulations de dynamique moléculaire récentes d'amas globulaires, les systèmes binaires sont explicitement modélisés et leurs effets sur la dynamique des amas est particulièrement étudié. Il est à noter que ces études ne sont pas complètement fiables car elles reposent sur des schémas numériques qui conduisent à des effets différents, voire contradictoires [1–6]. En ce qui concerne les aspects théoriques autour de ces systèmes, nous renvoyons à la longue discussion de D.C. Heggie dans les références [44, 45].

Dans ce chapitre, afin de prendre en compte les effets des binaires, nous allons construire une certaine phénoménologie, reprenant en partie des éléments de mécanique statistique d'équilibre. Une discussion proche a déjà été abordée dans [75]. Pour cela, dans le paragraphe V.1, nous définissons un modèle de deux espèces, des étoiles simples et des étoiles binaires, dont la fraction relative est fixée. Ainsi, le nombre de binaires ne change pas avec l'énergie du système, seule l'énergie stockée dans ces systèmes peut évoluer. Une telle discussion a déjà été réalisée dans [76]. Ensuite, dans le paragraphe V.2, nous adaptons la description d'Antonov présentée au chapitre II pour décrire l'équilibre thermique gravitationnel aux grandes échelles. Et enfin, dans le dernier paragraphe, nous présentons un modèle de binaire permettant de prendre en compte leur effet sur l'équilibre global,

à travers la détermination de l'énergie stockée.

Il est à noter que les choix de modélisations proposés sont évidemment discutables. En effet, supposer que le nombre de binaires évolue peu selon l'équilibre du système revient à supposer que seules les binaires primordiales liées à la création des amas globulaires subsistent. Cette hypothèse est clairement mise en défaut par les simulations numériques [1–6], qui concernent toutefois des systèmes pouvant être bien moins dilués que les amas globulaires. De même, le modèle qui sera choisi dans le paragraphe V.3 repose sur une distribution homogène dans l'espace des phases des paramètres géométriques des orbites elliptiques d'une partie des binaires, les binaires *hard* non thermalisées. Dans ce cadre, nous sommes conduits à introduire des paramètres phénoménologiques définissant la distinction entre binaires *hard* et *soft*, ainsi que la notion même de binaires dans le cadre du problème à  $N$  corps. Nous optons pour un choix volontairement minimaliste, à savoir l'introduction d'un seul paramètre relié à la température. Ce choix simple, motivé par des arguments physiques, permet une première discussion qualitativement raisonnable des effets des binaires sur l'équilibre d'un amas globulaire.

## V.1 Le modèle statistique à deux espèces

### V.1.1 Position du problème

Considérons un volume total sphérique  $\Lambda = 4\pi R^3/3$  dans lequel  $N$  objets de masse  $m$  interagissent gravitationnellement entre eux. La longue portée de l'interaction gravitationnelle est prise en compte *via* un traitement de type champ moyen étudié au paragraphe V.2. Pour décrire les effets à courte portée, nous séparons les  $N$  particules en deux espèces différentes, les étoiles binaires et les étoiles simples ou célibataires.

Si l'on suppose que le système est entièrement thermalisé à toutes les échelles, il est possible de réaliser un raisonnement purement statistique conduisant à un véritable équilibre chimique entre les deux espèces, raisonnement rapidement présenté en annexe A.2 page 85 de cette thèse. Toutefois, cette hypothèse semble peu raisonnable pour décrire les systèmes réels que nous souhaitons considérer ici. En effet, l'étude statistique d'un système gravitationnel à deux corps confinés une boîte, réalisée dans [46], conduit à deux états majoritaires, soit de type gaz parfait, soit totalement effondré. Le passage d'un état à l'autre s'effectuant sur une gamme de température très faible. Il semble audacieux de supposer qu'un système binaire puisse être décrit par ce type de modélisation. Pour cette raison, nous allons supposer que les binaires sont partiellement thermalisés et que leur nombre est fixé.

Nous supposons donc que parmi les  $N$  objets,  $2N_b$  étoiles sont dans  $N_b$  systèmes binaires. Nous définissons donc la fraction en masse de binaire

$$\frac{2mN_b}{mN} = n_b, \quad (\text{V.1})$$

qui peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1.

### V.1.2 Fonctions de densité des différentes espèces

Nous supposons que la structure à grande échelle du système est contrôlée par le champ gravitationnel moyen. Ainsi, comme nous l'avons fait dans le chapitre II dans la discussion du modèle historique d'Antonov, nous allons supposer que les distributions de chacune des espèces est donnée par une distribution de type Boltzmann. Les fonctions de densité de masse sont alors données par

$$\rho_s(\mathbf{r}) = A_s \exp[-m\beta\Phi(\mathbf{r})]; \quad (\text{V.2})$$

$$\rho_b(\mathbf{r}) = A_b \exp[-2m\beta\Phi(\mathbf{r})]. \quad (\text{V.3})$$

où  $\rho_s$  est la densité des étoiles célibataires et  $\rho_b$  celle des binaires. Ces expressions dépendent uniquement du champ gravitationnel moyen  $\Phi(\mathbf{r})$  et d'une certaine température du système  $T = 1/\beta$ .

Les constantes de normalisation  $A_s$  et  $A_b$  sont données par les relations de conservation du nombre de particules, à savoir

$$mN_s = \int d^3\mathbf{r} \rho_s(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad 2mN_b = \int d^3\mathbf{r} \rho_b(\mathbf{r}), \quad (\text{V.4})$$

expressions qui se réécrivent en prenant en compte le nombre total de particules

$$N_s + 2N_b = N. \quad (\text{V.5})$$

Remarquons que les fonctions (V.2) et (V.3) satisfont l'équation fondamentale d'une distribution purement hydrostatique du problème. En effet, si nous considérons le système comme un mélange de deux gaz gravitationnels de densité particulières  $\rho_s/m$  et  $\rho_b/(2m)$ . La pression partielle de chaque espèce est régie par une loi de l'hydrostatique et la combinaison des deux conduit à

$$\rho(\mathbf{r}) \frac{d\Phi(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = -\frac{1}{\beta m} \frac{d}{d\mathbf{r}} \left( \rho_s(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \rho_b(\mathbf{r}) \right). \quad (\text{V.6})$$

### V.1.3 État physique du système

Pour déterminer l'état du système, il est nécessaire de considérer la conservation totale de l'énergie. Celle-ci s'écrit, avec la température  $T = \beta^{-1}$  intervenant dans les densités (V.2) et (V.3),

$$E = \frac{3}{2} (N_s + N_b) T + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho \Phi + E_b(T); \quad (\text{V.7})$$

avec  $E$  l'énergie totale et  $E_b(T)$  l'énergie totale contenue dans les systèmes binaires.

Les premiers termes de l'énergie correspondent à des termes que nous allons traiter à travers des hypothèses de champ moyen. Il s'agit en effet uniquement de contributions dues à la structure à grande échelle du système. Nous étudions dans le paragraphe suivant cette structure, qui permet ainsi d'imposer une température au système. Ensuite, l'énergie des binaires est déterminée en réalisant le modèle de binaire prenant en compte les degrés de liberté internes des binaires, que nous étudions dans le paragraphe V.3.

## V.2 La sphère isotherme à deux corps

Dans le modèle d'équilibre proposé, l'effet des binaires sur l'énergie totale se fait ressentir à travers l'équation (V.7). L'énergie contenue dans les systèmes binaires est une fonction uniquement de la température  $\beta^{-1}$ . Cette température est elle même une fonction de l'équilibre gravitationnel global entre les binaires et les étoiles simples. Dans cette partie, nous étudions cet équilibre de champ moyen entre des particules de masses  $m$  et de masses  $2m$ , où le rapport entre les deux populations est fixée par la relation (V.1). Pour cela, nous allons reproduire et réutiliser la méthode numérique développée au chapitre II, tirée en grande partie des références [9, 10, 46, 47]. Le raisonnement présenté est d'ailleurs très proche de celui de la référence [76].

### V.2.1 Contenu physique

Pour commencer, l'équation gravitationnelle du problème est l'équation de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r); \quad (\text{V.8})$$



où nous utilisons la densité totale décrite au paragraphe précédent

$$\rho(r) = A_s \exp[-m\beta\Phi(r)] + A_b \exp[-2m\beta\Phi(r)] ; \quad (\text{V.9})$$

où les coefficients de normalisation sont définis dans les relations (V.4).

Pour obtenir un système adimensionné, nous utilisons les variables

$$r \longmapsto x = \frac{r}{R} X \quad \text{avec} \quad X^2 = \beta 4\pi G m \rho_0 R^2 ; \quad (\text{V.10})$$

$$\Phi(r) \longmapsto \psi(x) = \beta m (\Phi(x) - \Phi(0)) ; \quad (\text{V.11})$$

où l'on définit la quantité  $\rho_0$  homogène à une densité de masse comme

$$\rho_0 = A_s \exp[-\beta m \Phi(0)] . \quad (\text{V.12})$$

Avec ces notations, la densité de masse totale s'écrit

$$\rho(x) = \rho_0 (\exp[-\psi(x)] + \alpha \exp[-2\psi(x)]) \quad (\text{V.13})$$

avec  $\alpha$  un coefficient imposé par les normalisations des fonctions de distributions (V.4).

La seconde équation définissant l'équilibre est évidemment la relation fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide parfait (V.6)

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{\rho_0}{\rho(x)} \frac{d}{dx} \left( \exp[-\psi(x)] + \frac{\alpha}{2} \exp[-2\psi(x)] \right) \quad (\text{V.14})$$

où le coefficient  $1/2$  provient du fait que la pression est liée à la densité particulière et non pas à la densité de masse.

## V.2.2 Système dynamique

Nous posons de nouvelles variables permettant de décrire le système comme un système dynamique. Pour les mêmes raisons que pour l'étude de la sphère isotherme d'un gaz de sphères dures du paragraphe II.3, les variables de Milne ne sont pas adaptées à la description de ce problème. En effet, celles-ci permettent l'écriture simple des conditions aux limites dans le cas des particules ponctuelles, mais uniquement dans ce cas.

### V.2.2.a Définition des variables

Posons d'abord la célèbre variable de Milne adimensionnée  $v$  telle que

$$v(x) = x\psi'(x) . \quad (\text{V.15})$$

On a alors l'équation de Poisson qui s'écrit simplement

$$(xv)' = x^2 \frac{\rho(x)}{\rho_0} . \quad (\text{V.16})$$

L'utilisation de la variable  $w$  définie comme une certaine densité de masse adimensionnée au paragraphe II.3 par la relation (II.64) semble pertinente. Dans le cas qui nous intéresse, et au vu de la forme de l'équation de l'hydrostatique (V.14), nous allons prendre comme variable la densité de masse des étoiles simples adimensionnée, c'est-à-dire

$$w(x) = \exp[-\psi(x)] . \quad (\text{V.17})$$

Il vient par construction

$$w'(x) = -\frac{wv}{x}. \quad (\text{V.18})$$

Cette équation représente l'équilibre hydrostatique pour la pression partielle des étoiles simples uniquement. Au final le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} v' = xw + \alpha xw^2 - \frac{v}{x}; \\ w' = -\frac{wv}{x}. \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

Les conditions initiales du système étant  $(v_0, w_0) = (0, 1)$ .

### V.2.2.b Expression des conditions finales

L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$Nm = 4\pi \frac{R^3}{X^3} \int_0^X dx x^2 \rho(x) = 4\pi \rho_0 \frac{R^3}{X^2} v(X); \quad (\text{V.20})$$

ce qui implique à nouveau

$$v(X) = \beta \frac{Gm^2 N}{R} = \beta^* = \frac{1}{T^*}; \quad (\text{V.21})$$

où la température adimensionnée  $T^*$  se déduit de cette définition. La lecture de la variable  $v$  permet à nouveau de connaître la température d'équilibre du système.

Une seconde condition peut se déduire de la définition du ratio de binaire (V.1) qui s'écrit

$$\frac{2mN_b}{mN} = n_b; \quad (\text{V.22})$$

avec  $n_b$  fixé. En utilisant la définition intégrale du nombre de particule, il vient

$$mN_b = \alpha \rho_0 \frac{4\pi R^3}{X^3} \int_0^X x^2 dx w(x)^2. \quad (\text{V.23})$$

Puis, en utilisant la conservation de la masse (V.20), on trouve

$$n_b = \alpha \frac{\int_0^X x^2 dx w(x)^2}{Xv(X)}. \quad (\text{V.24})$$

Cette équation intégrale jouera le même rôle que l'équation (II.78) dans le système du gaz de sphère dures isotherme. À travers cette équation, on a accès à la quantité  $X$  qui paramétrise les états d'équilibre du système.

### V.2.2.c Expression de l'énergie

Nous ne nous intéressons ici qu'à la partie de l'énergie (V.7) qui correspond à l'énergie gravitationnelle du champ moyen  $E_{\text{MF}}$  (pour *mean field*). Celle-ci s'écrit

$$E_{\text{MF}} = \frac{3}{2}(N_s + N_b)\beta^{-1} + \frac{1}{2} \int 4\pi r^2 dr \Phi(r)\rho(r); \quad (\text{V.25})$$

où l'on a utilisé le nombre de particules de chaque espèce définie par les intégrales

$$N_s = \frac{\rho_0}{m} \int 4\pi r^2 dr \exp[-m\beta\Phi(r)]; \quad (\text{V.26})$$

$$N_b = \frac{\alpha\rho_0}{2m} \int 4\pi r^2 dr \exp[-2m\beta\Phi(r)]. \quad (\text{V.27})$$

L'énergie (V.25) se réécrit en unités gravitationnelles comme  $\varepsilon = ER/(Gm^2N^2)$  et il vient

$$\varepsilon_{\text{MF}} = \varepsilon_{\text{K}} + \varepsilon_{\text{P}} , \quad (\text{V.28})$$

avec

$$\varepsilon_{\text{K}} = \frac{3}{2} \frac{(T^*)^2}{X} \left( \int_0^X dx x^2 \left[ w(x) + \frac{\alpha}{2} w^2(x) \right] \right) , \quad (\text{V.29})$$

et

$$\varepsilon_{\text{P}} = \frac{(T^*)^2}{2X} \int_0^X x^2 dx \left[ \frac{\rho(x)}{\rho_0} \frac{m}{T} \Phi(x) \right] ; \quad (\text{V.30})$$

$$= \frac{(T^*)^2}{2X} \int_0^X x^2 dx \left[ \frac{\rho(x)}{\rho_0} \psi(x) \right] - \frac{T^*}{2} \int_0^X dx x \frac{\rho(x)}{\rho_0} ; \quad (\text{V.31})$$

où l'on a utilisé la relation

$$\frac{m}{T} \Phi_0 = - \int_0^X dx x \frac{\rho(x)}{\rho_0} ; \quad (\text{V.32})$$

provenant de l'application de la formule explicite de la solution de l'équation de Poisson (II.28).

### V.2.3 Algorithme et courbes

Nous venons de construire tous les outils nécessaires au tracé de l'énergie  $\varepsilon_{\text{MF}}$  en fonction de la température  $T^*$ . Pour cela, nous appliquons l'algorithme suivant :

- une valeur de  $n_{\text{b}}$  est fixée ;
- une valeur de  $\alpha$  quelconque est fixée ;
- on résout le système (V.19) et on obtient  $(v, w)$  ;
- à partir de ce résultat, on résout (V.24) et on obtient  $X$  ;
- on calcule  $T^*$  et l'énergie s'en déduit avec (V.28) ;
- pour obtenir la courbe complète, on répète l'opération avec un coefficient  $\alpha$  différent.

#### V.2.3.a Relations entre l'énergie et la température...

Différentes courbes ont été calculées en suivant cet algorithme et sont tracées dans la figure V.1. On remarque que l'on retrouve pour  $n_{\text{b}} = 0$  un système d'étoiles simples, qui correspond au cas de la sphère isotherme pour des particules ponctuelles identiques, dont l'énergie a déjà été tracée figure II.3. Pour le cas  $n_{\text{b}} = 1$ , il s'agit aussi de ce même cas mais avec  $N/2$  particules de masse  $2m$ . L'énergie  $\varepsilon_{\text{MF}}$  étant l'énergie divisée par un facteur  $N^2 m^2$ , elle reste inchangée pour des particules de masse  $m$  ou  $2m$ . Par contre, l'inverse de la température  $1/T^*$  étant proportionnelle à  $m^2 N$ , elle est divisée par 2 par rapport au cas des particules simples. Ces courbes caloriques sont semblables à celles dérivées dans la référence [76].

#### V.2.3.b Quelques fonctions de distribution...

À partir des arguments précédents, on peut tracer la densité totale (V.13) en fonction de la position ou encore la localisation relative des binaires et des étoiles célibataires dans le système. Les courbes de la figure V.2 ont été tracées pour la fraction de binaire fixée à  $n_{\text{b}} = 0.1$ .

À partir de ces courbes, on remarque que plus on parcourt la spirale d'équilibre V.2a, plus la masse est concentrée au centre du système. Il s'agit du même phénomène que pour la sphère isotherme simple. De plus, et logiquement, les binaires sont toujours préférentiellement localisées au centre de la sphère. Les objets les plus lourds sont donc bien le plus au centre. On remarque ainsi que plus on se rapproche du centre de la spirale, plus les binaires ont tendance à être seules au centre de la sphère, et à expulser ainsi les étoiles simples.

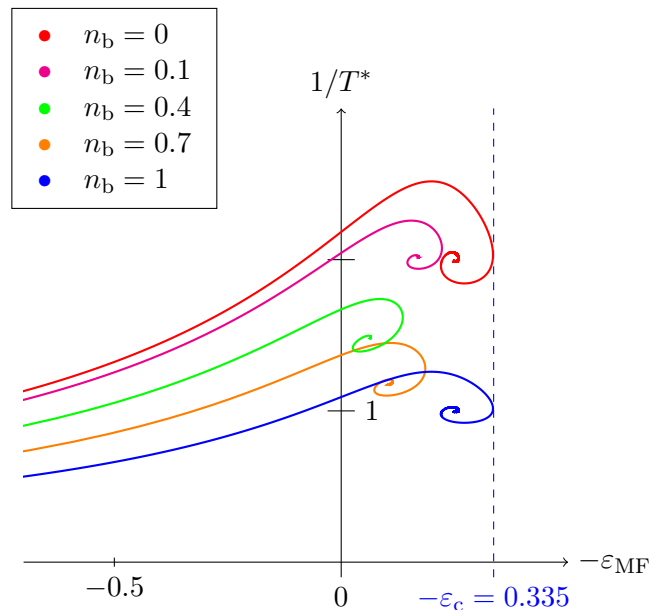


FIGURE V.1 – Énergie du gaz isotherme  $\varepsilon_{MF}$  à deux éléments de masse  $m$  et  $2m$ . Le facteur  $n_b$  fixé défini équation (V.1) correspond à la quantité d’objets dans un système binaire par rapport à la quantité totale d’objets. On retrouve pour  $n_b = 0$  les résultats de la sphère isotherme classique du chapitre II. Pour  $n_b = 1$ , c’est-à-dire un système de  $N/2$  particules de masse  $2m$ , on retrouve les résultats de la sphère isotherme avec la température adimensionnée  $T^*$  multipliée par un facteur 2.

### V.3 Prise en compte de la courte portée : un modèle de binaires

L’étude des systèmes de binaires est un vaste champ de recherche [44, 45]. De nombreux aspects sont à prendre en compte, notamment dynamiques. Le modèle que nous proposons est extrêmement simplifié afin de décrire qualitativement l’effet de la présence de systèmes binaires sur les aspects énergétiques de l’équilibre gravitationnel global.

#### V.3.1 Le modèle de binaires

Les éléments discutés dans ce paragraphe peuvent être retrouvé dans de nombreuses références, notamment [7, 44, 45].

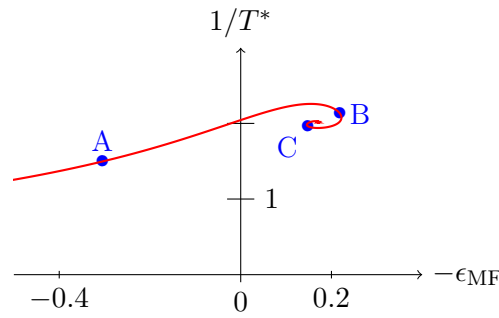
On rappelle qu’un système binaire a une dynamique bien connue [74]. La trajectoire de la particule fictive dans le référentiel du centre de masse est une ellipse définie par son excentricité  $e$  et son demi-grand axe  $a$ . En supposant que les deux objets sont chacun de masse  $m$ , l’énergie du système dans le référentiel du centre de masse est donnée par la relation

$$-\frac{Gm^2}{2a} = -E_\ell(a); \quad (\text{V.33})$$

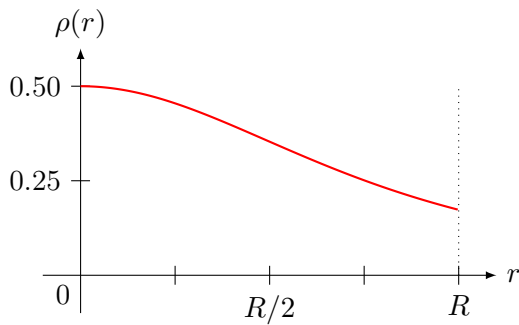
où on note  $E_\ell$  l’énergie de liaison du système.

Les systèmes binaires dans les amas subissent les effets du champ gravitationnel, et en particulier de son gradient à l’échelle locale. Toutefois, celui-ci a relativement peu d’influence sur la dynamique interne des binaires. Par contre, même si ce sont des événements rares, les binaires peuvent échanger de l’énergie avec le reste du système lors du passage d’un troisième corps proche du système binaire. De nombreuses simulations de telles situations ont été réalisées dans la littérature. Selon les résultats de ces rencontres, on peut distinguer deux types de binaires :

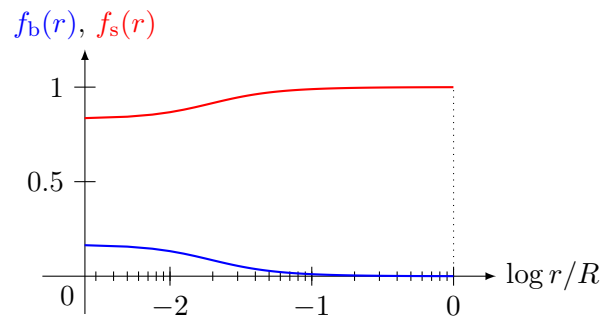
- les binaires *soft* d’énergie de liaison  $E_\ell$  plus faible que l’énergie thermique moyenne de l’amas ;



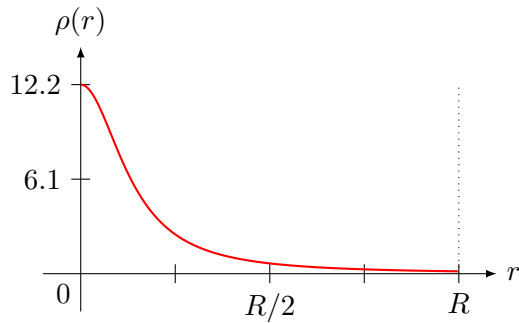
(a) Énergie du gaz  $\varepsilon_{\text{MF}}$  à deux éléments de masse  $m$  et  $2m$  avec  $n_b = 0.1$ . Les fonctions de distribution de masse aux points A, B et C sont tracées dans les différents graphiques ci-dessous.



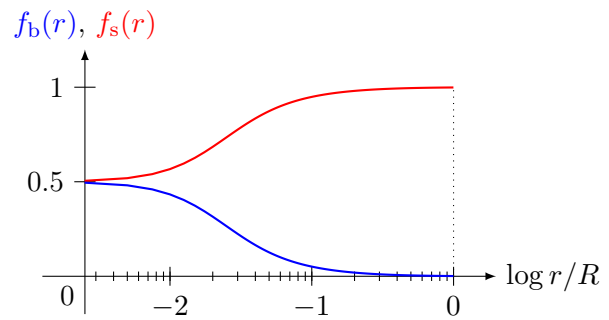
(b) Densité de masse totale au point A de la figure V.2a.



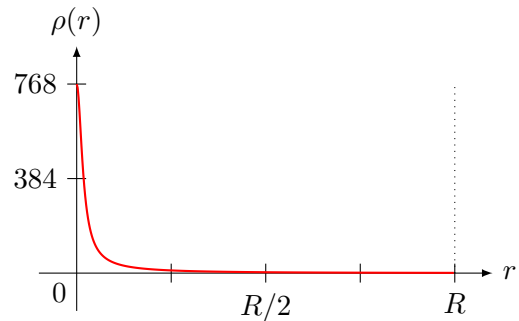
(c) Distribution relative de chaque espèce au point A (échelle logarithmique).



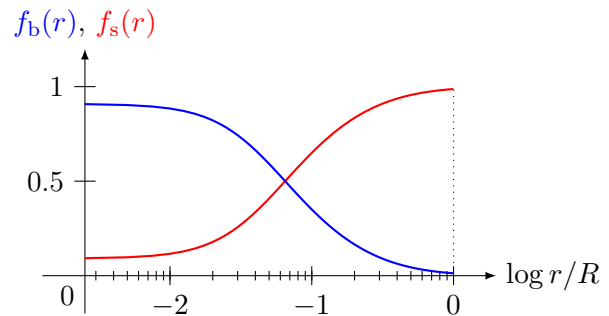
(d) Densité de masse totale au point B de la figure V.2a.



(e) Distribution relative de chaque espèce au point B (échelle logarithmique).



(f) Densité de masse totale au point C de la figure V.2a.



(g) Distribution relative de chaque espèce au point C (échelle logarithmique).

FIGURE V.2 – Sur les figures de gauche, on a représenté la fonction de densité totale (V.13) en fonction de la position  $r$  selon la position sur la courbe d'équilibre V.2a. Sur les figures de droite, on a représenté en échelle logarithmique les fractions partielles d'étoiles célibataires  $f_s(r)$  et de binaires  $f_b(r)$ . Pour toutes ces courbes, la fraction de binaire est fixée à  $n_b = 0.1$ .

— les binaires *hard* d'énergie de liaison  $E_\ell$  plus forte que l'énergie thermique moyenne de l'amas. Les simulations amènent à la loi empirique suivante : par leurs interactions avec le système *via* des rencontres à trois corps, les binaires *hard* ont tendance à devenir de plus en plus liées alors que les binaires *soft* ont tendance à l'être de moins en moins. De plus, les collisions avec les binaires *hard* ont tendance à fournir une énergie cinétique importante à un des trois corps qui a de forte chance de se retrouver éjecté de l'amas.

Pour modéliser grossièrement ce comportement, nous allons supposer que les binaires *hard* ont leur énergie interne fixée et leurs interactions avec le reste du système ne modifient par leur état interne. En effet, les événements qui peuvent modifier ces binaires sont très rares et n'influent pas significativement sur l'équilibre.

### V.3.2 Distribution en énergie des binaires

La détermination de la fonction de distribution des énergies de liaison des binaires est un facteur crucial du raisonnement. Nous calculons d'abord la densité d'états à l'aide d'un outil de mécanique céleste, les variables canoniques de Delaunay, qui nous permet de construire ensuite une fonction de distribution qui prend en compte les éléments présentés dans le paragraphe précédent.

#### V.3.2.a Densité d'états des binaires

Pour décrire l'espace de phase dans lequel évolue les systèmes binaires, nous allons utiliser les variables canoniques de Delaunay. Pour plus de détails sur cet important outil historique, on peut se rapporter, par exemple, au cours de mécanique céleste [77].

Considérons la particule fictive du système à deux corps de position  $\mathbf{r}$  et d'impulsion  $\mathbf{p}$ . À partir de ces paramètres, nous pouvons considérer l'ellipse décrivant la trajectoire de cette particule. On note  $a$  le demi-grand axe et  $e$  l'excentricité de cette trajectoire.

Utilisons maintenant les six variables de Delaunay

$$L = \sqrt{Gm^2 a^{1/2}} ; \quad (\text{V.34})$$

$$\Gamma = L(1 - e^2) ; \quad (\text{V.35})$$

$$\Theta = \Gamma \cos i ; \quad (\text{V.36})$$

et les trois angles  $M$ ,  $\omega$  et  $\Omega$  où  $M$  est l'anomalie moyenne,  $\omega$  est l'argument du péricentre,  $\Omega$  est la longitude du nœud ascendant et  $i$  est l'inclinaison<sup>1</sup>. Cette transformation est canonique et son jacobien vaut 1, autrement dit

$$d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p} = dLd\Gamma d\Theta dM d\omega d\Omega , \quad (\text{V.37})$$

les couples de variables canoniquement conjuguées étant  $(L, M)$ ,  $(\Gamma, \omega)$  et  $(\Theta, \Omega)$ .

Comme cela a déjà été réalisé dans la référence historique [78], ces variables permettent de décrire facilement la distribution d'énergie des binaires. En effet, en utilisant la définition (V.33), on remarque que l'énergie de liaison  $E_\ell$  d'une binaire peut s'écrire avec uniquement une variable de Delaunay

$$E_\ell = \frac{Gm^2}{2a} = \frac{G^2 m^4}{2L^2} . \quad (\text{V.38})$$

Le nombre d'états d'une binaire d'énergie comprise entre  $E_\ell$  et  $E_\ell + dE_\ell$  est proportionnel à l'intégrale sur  $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$  avec la seule contrainte d'intégrer uniquement sur les ellipses ayant la bonne énergie. Cette densité d'état vaut donc

$$g(E_\ell) \propto \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p} \delta(E + E_\ell) \propto \int dLd\Gamma d\Theta dM d\omega d\Omega \delta(E + E_\ell(L)) . \quad (\text{V.39})$$

---

1. La définition précise de chacun de ces angles relève de la mécanique céleste, on renvoie donc le lecteur intéressé à la lecture de [77].

On considère  $\delta(E + E_\ell(L))$  car l'énergie du système est l'opposé de l'énergie de liaison. L'intégration sur les angles  $M$ ,  $\omega$  et  $\Omega$  fait apparaître un facteur numérique tandis que la variable  $\Theta$  varie entre 0 et  $\Gamma$ , il vient donc

$$g(E_\ell) \propto \int dL d\Gamma \Gamma \delta(E + E_\ell(L)) . \quad (\text{V.40})$$

On repasse alors en variables  $a$  et  $e$ , plus naturelles d'utilisation, ce qui conduit à

$$g(E_\ell) \propto \int da de da a^{1/2} e(1 - e^2) \delta(E + E_\ell(a)) . \quad (\text{V.41})$$

Dans ce cas, l'intégration sur les excentricités est immédiate et vaut  $1/4$ . En utilisant la relation entre le demi-grand axe et l'énergie (V.33), il vient

$$g(E_\ell) \propto \int da a^{1/2} \delta\left(E - \frac{Gm^2}{2a}\right) . \quad (\text{V.42})$$

Or la relation  $\int dx g(x) \delta(f(x)) = g(x_0)/|f'(x_0)|$ , où  $f(x_0) = 0$ , permet de donner au final

$$g(E_\ell) \propto a_\ell^{1/2} \frac{a_\ell^2}{Gm^2} \propto \frac{1}{E_\ell^{5/2}} . \quad (\text{V.43})$$

Cette expression est déjà discutée dans les références [44, 45].

### V.3.2.b Construction de la distribution aux basses énergies

À très basse énergie, la binaire est très étendue, avec un demi-grand axe très faible. Ainsi, le long de la trajectoire, la force attractive entre les deux étoiles devient très faible, et donc négligeable devant les autres forces créées par les étoiles environnantes. Ceci conduit à la destruction de la binaire considérée. Comme le modèle global est à nombre de binaires constant, ces binaires ne doivent pas être considérées dans notre modélisation.

Afin de prendre en compte ce phénomène d'exclusion, nous allons procéder à un raisonnement très simple reposant sur des critères combinatoires et géométriques. Considérons les  $N$  particules du problème et notons  $\Lambda_b$  le volume géométrique occupé par une binaire. Pour considérer que la binaire n'est pas affectée par les  $(N - 2)$  objets restants, ceux-ci doivent tous être situés dans le volume  $(\Lambda - \Lambda_b)$  où  $\Lambda$  est le volume total. La probabilité que ces  $(N - 2)$  objets soient tous en dehors du volume de la binaire est donc

$$p = \frac{(\Lambda - \Lambda_b)^{N-2}}{\Lambda^{N-2}} . \quad (\text{V.44})$$

Comme  $N$  est très grand et  $\Lambda \gg \Lambda_b$ , il vient

$$p \approx \exp\left[-N \frac{\Lambda_b}{\Lambda}\right] ; \quad (\text{V.45})$$

qui n'est autre que la loi de distribution de Poisson de paramètre  $N\Lambda_b/\Lambda$  pour aucune occurrence. Ainsi, il est apparaît naturel de prendre en compte ce mécanisme de destruction des binaires de basse énergie en multipliant la densité d'état  $g(E_\ell)$  de l'équation (V.43) par cette probabilité (V.45) pour obtenir la distribution en énergie des binaires.

Notre construction dépend du choix de  $\Lambda_b$ , dont le rôle est d'empêcher la sur-représentation, non physique, des objets d'énergie très proche de 0. Il est nécessaire de relier ce volume à l'énergie des

binaires. En première approximation, nous allons donc supposer que le volume  $\Lambda_b$  est proportionnel à une sphère de rayon  $a$ , le demi grand axe d'une binaire. Il vient

$$\Lambda_b = \alpha(N) \frac{4}{3} \pi a^3 = \alpha(N) \frac{4}{3} \pi \frac{8G^3 m^6}{E_\ell^3} ; \quad (\text{V.46})$$

où nous avons introduit le facteur de proportionnalité  $\alpha(N)$ . Ce facteur peut dépendre de  $N$  car il paraît plausible que le nombre de particules intervient dans l'espace effectif disponible. Par exemple, dans la référence [44], la borne inférieure en énergie des binaires est choisie proportionnelle à  $N\beta^{-1}$ . Il est à noter que  $\alpha(N) = 1$  conduirait à laisser la possibilité à une troisième particule de se trouver juste à côté de la binaire et donc à sa destruction. On cherche donc  $\alpha(N)$  significativement plus grand que 1.

Au final, on utilise l'expression (V.46) que l'on réécrit en terme de la température du système  $\beta^{-1}$  et de la température adimensionnée  $T^* = TR/(Gm^2N)$  définie équation (V.21). Il vient

$$N \frac{\Lambda_b}{\Lambda} = \alpha(N) N \frac{\beta^3 8G^3 m^6}{R^3 (\beta E_\ell)^3} = \frac{8\alpha(N)}{N^2} \frac{(\beta^*)^3}{(\beta E_\ell)^3} . \quad (\text{V.47})$$

On insiste sur le fait que ce terme est indépendant de la température, mais cette écriture nous sera utile par la suite.

On pose  $\gamma(N) = 8\alpha(N)/N^2$  et la densité d'état prenant en compte l'espace effectif disponible s'écrit

$$g_{\text{eff}}(E_\ell) \propto E_\ell^{-5/2} \exp \left[ -\gamma(N) \left( \frac{\beta^*}{\beta E_\ell} \right)^3 \right] . \quad (\text{V.48})$$

Cette densité tend vers 0 pour les binaires de basses énergie et elle devient identique à la densité d'états purement géométrique (V.43) pour les binaires d'énergie suffisamment grande.

### V.3.2.c Thermalisation partielle

La densité d'état (V.48) ne prend évidemment pas en compte les échanges d'énergie possibles entre la binaire et le milieu environnant, alors que c'est tout de même l'objectif recherché. Pour cela, nous allons supposer qu'une thermalisation partielle des binaires a lieu. C'est-à-dire que les binaires *soft* sont thermalisées avec le reste du système alors que les binaires *hard* ne le sont pas. Les binaires *hard* sont décrites par des degrés de liberté internes que nous pouvons qualifier de « gelés ».

À partir de la discussion du paragraphe V.3.1, nous allons supposer que le passage entre les deux sortes de binaires a lieu exactement pour  $\beta E_\ell = 1$ . La distribution finale en énergie des binaires s'obtient en multipliant la densité d'état effective  $g_{\text{eff}}(E_\ell)$  (V.48) par le facteur de Boltzmann  $e^{\beta E_\ell}$  pour les binaires *soft* et en conservant simplement  $g_{\text{eff}}(E_\ell)$  pour les binaires *hard*, *i.e.*

$$n(E_\ell, \beta) \propto \begin{cases} E_\ell^{-5/2} \exp \left[ -\gamma(N) \left( \frac{\beta^*}{\beta E_\ell} \right)^3 \right] \exp [\beta E_\ell] & \text{si } E_\ell < T ; \\ E_\ell^{-5/2} \exp \left[ -\gamma(N) \left( \frac{\beta^*}{\beta E_\ell} \right)^3 \right] e & \text{si } E_\ell > T . \end{cases} \quad (\text{V.49})$$

L'exponentielle du facteur de Boltzmann a un argument positif car l'énergie réelle d'une binaire est négative et elle est l'opposée de l'énergie de liaison  $E_\ell$ . Le facteur  $e$  dans l'expression pour les hautes énergies de liaison assure la continuité de la distribution en énergie.



### V.3.2.d Énergie moyenne des binaires

Par définition, l'énergie moyenne de liaison des binaires s'écrit

$$\langle E_\ell \rangle(\beta) = \left( \int_0^{+\infty} dE_\ell E_\ell n(E_\ell, \beta) \right) / \left( \int_0^{+\infty} dE_\ell n(E_\ell, \beta) \right). \quad (\text{V.50})$$

Pour faciliter l'écriture en variables adimensionnées, nous allons utiliser la formule explicite (V.49) et réaliser le changement de variable  $x = \beta E_\ell$ . Pour cela, on va définir la fonction  $n(x, N, \beta^*)$  par

$$n(x, N, \beta^*) \propto \begin{cases} x^{-5/2} \exp \left[ -\gamma(N) \left( \frac{\beta^*}{x} \right)^3 \right] \exp [x] & \text{si } x < 1 ; \\ x^{-5/2} \exp \left[ -\gamma(N) \left( \frac{\beta^*}{x} \right)^3 \right] e & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{V.51})$$

Cette distribution est tracée figure V.3 pour différentes valeurs de  $\gamma(N)(\beta^*)^3$ . Avec cette expression, on a simplement

$$\langle E_\ell \rangle(\beta, N) = \beta^{-1} \left( \int_0^{+\infty} dx x n(x, N, \beta^*) \right) / \left( \int_0^{+\infty} dx n(x, N, \beta^*) \right). \quad (\text{V.52})$$

La modélisation des binaires, notamment à travers la taille maximale autorisée de ces objets à travers la loi de Poisson, fait apparaître le paramètre explicite  $N$  dans la modélisation. Son apparition semble assez naturelle. Plus il y a d'objets, moins il y aura de place pour que deux objets forment une binaire indépendamment du reste du système.

Si l'on raisonne en terme de scaling des paramètres, celui-ci est choisi pour que les paramètres globaux  $T^*$  et  $\varepsilon$  du système soient indépendants de  $N$ . Autrement dit on veut que la température soit intensive et l'énergie totale extensive. Lorsque l'on introduit ce scaling dans les contributions à courte portée, il est possible que celui-ci ne donne pas une énergie de liaison totale extensive. Le scaling, construit pour la longue portée, n'est pas naturel au niveau de la courte portée. On note qu'en prenant  $\gamma(N) = \gamma$ , la dépendance en  $N$  disparaît et on aurait alors une théorie indépendante de  $N$ . Toutefois, cela n'est au final pas très intéressant. En effet, le choix de prendre une fonction  $\gamma(N)$  est déjà une hypothèse forte du problème, et à moins de vouloir à tout prix restaurer le scaling, il n'y a pas d'arguments raisonnables pour choisir  $\gamma(N) = \gamma$ , surtout après l'étude du chapitre III où nous avons montré qu'un scaling préservant l'extensivité de l'énergie totale va nécessairement rendre la courte portée négligeable. Ce modèle n'est pas construit pour étudier la limite  $N \rightarrow +\infty$ , mais plutôt pour discuter le cas  $N$  grand mais fini, ce qui est cohérent avec les valeurs pour les amas globulaires.

Enfin, à part ce choix de  $\gamma(N)$ , on remarque que ce modèle ne dépend d'aucun autre paramètre extérieur, comme la taille des particules par exemple. Ce résultat est assez satisfaisant. En effet, dans les amas globulaires et au vu des échelles de distances considérées, il semble naturel que la taille des objets ne soit pas importante.

### V.3.2.e Distribution des binaires *hard* et *soft*

On trace figure V.3 la fonction de distribution (V.51) pour différentes valeurs de  $\gamma(N)(\beta^*)^3$ . On remarque systématiquement l'existence d'un maximum, qui se déplace vers les binaires *hard* lorsque  $\gamma(N)(\beta^*)^3$  augmente.

À partir de ces éléments, on peut calculer le ratio de binaires *soft* par rapport au nombre total de binaire. Pour cela, on trace

$$r_{\text{soft}}(\gamma(N)(\beta^*)^3) = \left( \int_0^1 dx n(x, 1, \gamma(N)^{1/3} \beta^*) \right) / \left( \int_0^{+\infty} dx n(x, 1, \gamma(N)^{1/3} \beta^*) \right). \quad (\text{V.53})$$

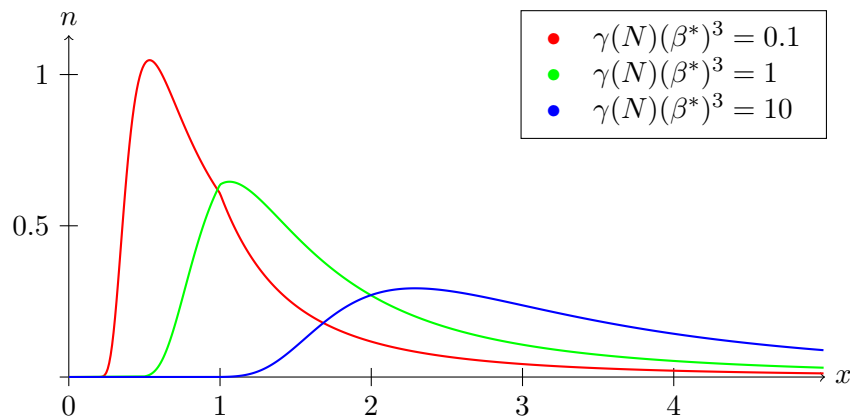


FIGURE V.3 – Tracé de la fonction de distribution (V.51) pour différentes valeurs du paramètre  $\gamma(N)(\beta^*)^3$ . Ces fonctions sont de norme 1. Au passage de  $x = 1$ , les binaires décrites changent de nature, on passe des binaires *soft*, en équilibre thermique avec le champ, aux binaires *hard*, indépendantes du champ. Ce changement explique la discontinuité de la dérivée des distribution au passage  $x = 1$ . La forme de la distribution aux très hautes énergies des binaires *hard* ne dépend pas du paramètre, la différence apparente est du à la normalisation des courbes, qui favorise les binaires *soft* lorsqu'elles sont présentes.

Cette fonction dépend uniquement du paramètre  $\gamma(N)(\beta^*)^3$  par définition de la fonction  $n$ . Son graphe est tracé figure V.4.

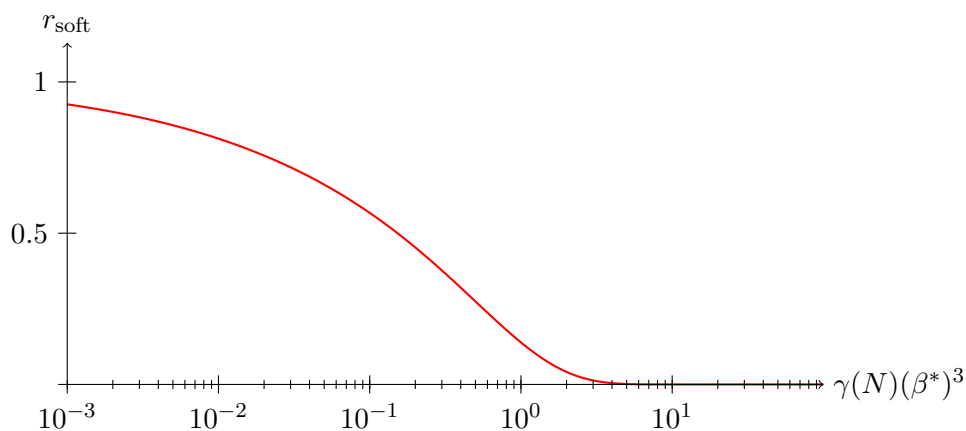


FIGURE V.4 – Tracé du rapport entre le nombre de binaires *soft* et le nombre de binaires total donnée par la fonction  $r_{\text{soft}}(N, \beta^*)$  équation (V.53) en fonction du paramètre  $\gamma(N)(\beta^*)^3$  en échelle logarithmique. Le nombre de binaire *hard* est le complémentaire de cette fonction par rapport à 1.

La figure V.4 permet de connaître les ordres de grandeurs raisonnables pour  $\gamma(N)$  qu'il nous faut étudier. En effet,  $\beta^*$  est donné par l'équilibre gravitationnel global. Au vu de la figure V.1,  $\beta^*$  prend des valeurs comprises entre 1 et 2 dans la gamme où le système est dominé par la gravitation, au niveau des spirales. Dans les amas globulaires réels, les binaires *soft* ont tendance à disparaître, leur nombre ne doit donc pas être trop élevé. Par contre, dans notre modèle, ce sont elles qui sont en équilibre avec le champ et qui vont influencer sur les courbes d'équilibres, il ne faut donc pas totalement les négliger. Au final, dans notre modèle, et au vu de la courbe V.4, nous décidons de travailler dans la zone  $-1 < \log[\gamma(N)(\beta^*)^3] < 1$  et donc environ dans la gamme  $-2 < \log[\gamma(N)] < 0$ . Dans ce cadre, nous avons tous les ingrédients nécessaire pour estimer l'effet de la présence des binaires sur

l'équilibre global.

### V.3.3 Utilisation des binaires dans l'équilibre à deux corps

Pour intégrer le modèle de binaire dans les courbes d'équilibre, il suffit de reprendre la définition de l'énergie (V.7). Dans cette expression, l'énergie  $E_b$  correspond à l'énergie totale stockée dans les binaires. Au vu du paragraphe précédent et de la définition (V.1), cette énergie vaut donc  $-n_b N \langle E_\ell \rangle / 2$ . En reprenant la définition de cette énergie moyenne (V.52) et en utilisant l'énergie totale adimensionnée  $\varepsilon$ , il vient

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{MF}} + \varepsilon_b \quad (\text{V.54})$$

avec  $\varepsilon_{\text{MF}}$  l'énergie liée au champ gravitationnel moyen de la sphère isotherme définie équation (V.25) et  $\varepsilon_b$  l'énergie stockée dans les binaires définie par

$$\varepsilon_b = -\frac{n_b}{2} T^* x_m(T^*, N); \quad (\text{V.55})$$

où  $x_m(T^*, N)$  correspond à la moyenne du paramètre  $x$  avec la distribution (V.51). Cette énergie correspond à une certaine fraction de l'énergie cinétique totale. Il suffit d'ajouter l'énergie des binaires (V.55) aux courbes d'équilibres du gaz isotherme à deux corps tracées figure V.1 pour obtenir les courbes d'énergie totale  $\varepsilon$  tracées figure V.5 pour plusieurs valeurs de  $\gamma(N)$  pour une valeur fixée de  $n_b$ . Les valeurs de  $\gamma(N)$  sont choisies à partir des arguments du paragraphe précédent V.3.2.e et les courbes pour d'autres valeurs de  $n_b$  ont la même allure.

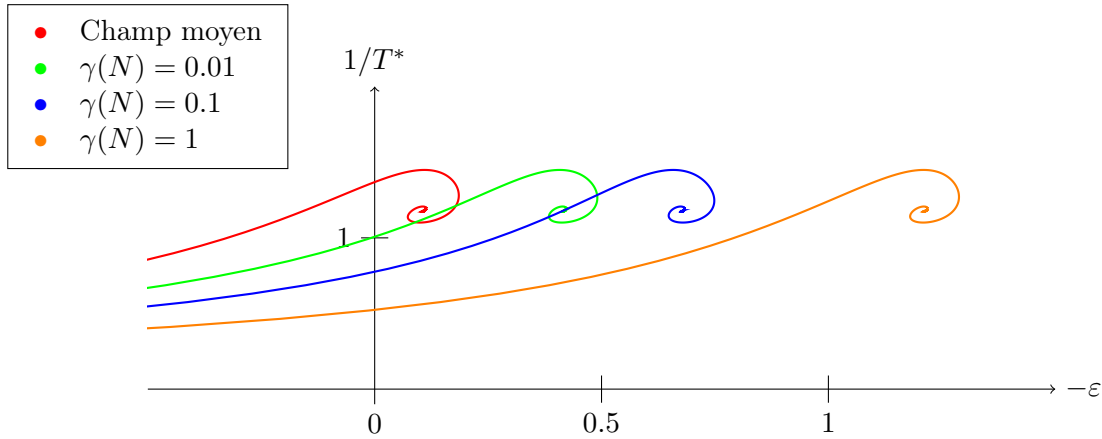


FIGURE V.5 – Énergie totale du système pour  $n_b = 0.7$ . L'énergie des systèmes binaires est donnée par la relation (V.55) pour plusieurs valeurs de  $\gamma(N)$ . Nous nous sommes restreints à des valeurs de ce coefficient donnant un nombre de binaire *soft* raisonnable à partir de la discussion du paragraphe V.3.2.e. Par rapport aux courbes sans binaires de la figure V.1, une gamme d'énergie devient stable et la multivaluation est déplacée vers des énergies plus faibles. Qualitativement, la présence de binaires qui peuvent interagir avec le système total et absorber de l'énergie permet l'apparition de nouveaux états d'équilibres.

## V.4 Éléments de discussion

La phénoménologie précédente introduit un modèle de binaires partiellement thermalisées pour leur degré de liberté interne afin de prendre en compte les effets à courte portée de l'interaction gravitationnelle. Les aspects à longue portée sont traités du point de vue du champ moyen en utilisant les outils classiques de ce genre de raisonnement. Dans ce cadre, on suppose que le système

est descriptible à grande échelle par un modèle de type gaz gravitationnel à deux espèces, dont le nombre relatif est fixé par le facteur  $n_b$ . En ce qui concerne les binaires, on suppose qu'elles ne sont pas à l'équilibre thermique complet avec le reste du système. Dans la construction de la distribution en énergie de liaison, on exclut les binaires occupant un volume trop important, car ce type d'objet va être détruit par les interactions gravitationnelles locales. On introduit un équilibre thermique partiel pour les binaires faiblement couplées, dites *soft*, à travers l'ajout d'un facteur de Boltzmann tandis que les binaires fortement couplées, dites *hard*, ont leur énergie fixée et n'interagissent pas avec le reste du système.

Les courbes de la figure V.5 permettent de mettre en évidence, dans le cadre de cette phénoménologie, le rôle des binaires. En stockant de l'énergie, elles permettent l'apparition d'états d'équilibres avec une énergie totale inférieure à l'énergie limite  $\varepsilon_c = -0.335$  discutée dans le modèle de la sphère isotherme du chapitre II. Ce résultat intuitif apparaît donc dans cette modélisation. Toutefois, celle-ci reste une première approximation relativement éloignée de la réalité pour décrire précisément des amas globulaires. En effet, de nombreux points sont à discuter.

Si le taille  $\sigma$  ne joue plus aucun rôle, ce qui est satisfaisant dans les systèmes considérés, le coefficient  $\gamma(N)$  lui joue un rôle très important. Ce paramètre libre permet de prendre en compte l'influence du milieu environnant sur les binaires. Toutefois, une estimation précise de ce paramètre n'est pas évidente car, en toute rigueur, des effets dynamiques interviennent.

De plus, le fait que la fraction de binaires soit fixée quelle que soit la température n'est pas totalement satisfaisant. En effet, intuitivement, plus le système est chaud, moins un système binaire d'énergie donnée est stable. Toutefois, la tentative de décrire l'apparition ou la disparition de binaires par la mécanique statistique d'équilibre n'est pas appropriée ici, comme conséquence de l'absence d'équilibre thermique aux petites échelles. Ce processus est dynamique et hors équilibre, comme décrit dans les références [44, 45] et une distribution d'équilibre tirée des simulations numériques ou des observations pourrait avoir plus de pertinence.

Fondamentalement, la difficulté centrale de notre construction phénoménologique provient de la très probable non ergodicité des systèmes binaires. En effet, dans un système à deux corps totalement isolé, la trajectoire de la particule fictive est une ellipse parfaite. Si l'on rajoute des perturbations extérieures, celle-ci peut être modifiée, mais cette modification est très faible et lente. Ainsi, plus la binaire sera liée, moins la zone qu'elle va parcourir dans l'espace des phases sera importante, et plus sa description sera éloignée de ce que permettent les outils de la physique statistique d'équilibre.

Pour conclure, cette première tentative d'intégrer les effets à courte portée de l'interaction gravitationnelle à travers un modèle de binaire est une extension naturelle et simple du modèle de la sphère isotherme, qui prend bien en compte les mécanismes essentiels. Toutefois, pour franchir un pas plus quantitatif dans la description des amas globulaires à l'aide de cette phénoménologie, il faut continuer à s'éloigner de la mécanique statistique d'équilibre, et plutôt aller explorer les aspects dynamiques du problème, discutés par les astrophysiciens, tant sur les plans théorique que numérique et observationnel.



# Chapitre VI

## Conclusion et perspectives

En introduction de cette thèse, nous avons mentionné différentes limitations d'une description microcanonique de certains systèmes astrophysiques, notamment l'introduction artificielle de la boîte ou l'hypothèse de l'équilibre statistique complet, que nous avons mis en évidence dans les développements présentés. Avant de conclure à proprement parler, nous souhaitons revenir sur un de ces aspects en particulier, celui de la présence de la boîte dans laquelle le système est contraint.

### Analyse du rôle de la boîte

Dans tous nos raisonnements sur la gravitation à trois dimensions, nous avons été contraints de placer le système dans une boîte sphérique de volume  $\Lambda = \frac{4}{3}\pi R^3$ . L'interaction des particules avec la boîte se fait par des collisions élastiques. À partir des différents outils présentés dans le chapitre II, nous sommes maintenant en mesure d'estimer qualitativement l'influence de la boîte dans le confinement du système. Nous nous plaçons dans le cadre de particules modélisées par des sphères dures uniquement, et sans binaires, pour faciliter l'estimation.

Pour cela, calculons le flux de particules  $F_{\text{perte}}$  qui se seraient échappées du système sans la boîte. Pour qu'une particule s'échappe, elle doit avoir une vitesse supérieure à la vitesse de libération  $v_{\text{lib}}$  du système. Il est à noter que la vitesse de libération est indépendante de la direction du vecteur, ainsi toutes les particules avec une vitesse suffisante dirigée vers l'extérieur de la boîte sont à prendre en compte. Le flux de particules traversant la surface  $4\pi R^2$  est

$$F_{\text{perte}} = 4\pi R^2 \frac{\rho(R)}{m} \frac{1}{\int d^3\mathbf{v} \exp[-mv^2/(2T)]} \int_{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}>0; v>v_{\text{lib}}} d^3\mathbf{v} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \exp[-mv^2/(2T)]; \quad (\text{VI.1})$$

avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface et où nous avons utilisé les distributions d'équilibre du chapitre II. En écrivant la dépendance angulaire dans la relation  $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = v \cos\theta$  et l'élément différentiel comme  $d^3\mathbf{v} = v^2 \sin\theta d\theta d\phi dv$ , l'intégration sur les angles est immédiate et conduit à

$$F_{\text{perte}} = 2\pi R^2 \frac{\rho(R)}{m} \frac{\int_{v_{\text{lib}}}^{+\infty} dv v^3 \exp[-mv^2/(2T)]}{\int_0^{+\infty} dv v^2 \exp[-mv^2/(2T)]}. \quad (\text{VI.2})$$

Détaillons cette expression. Comme l'énergie d'une particule qui se libère de l'attraction du système est positive, la vitesse de libération est donnée simplement par la relation  $v_{\text{lib}}^2 = 2GM/R$  avec  $M$  la masse totale du système. On a donc

$$F_{\text{perte}} = 2\pi R^2 \frac{\rho(R)}{m} \sqrt{\frac{2T}{m}} \frac{\int_{\sqrt{1/T^*}}^{+\infty} du u^3 \exp[-u^2]}{\int_0^{+\infty} du u^2 \exp[-u^2]}; \quad (\text{VI.3})$$

avec  $T$  l'énergie thermique du système et  $T^* = TR/(Gm^2N)$  la température adimensionnée que nous avons utilisée tout au long de cette thèse. Cette expression est calculable explicitement mais cela n'est pas nécessaire pour estimer qualitativement l'effet de la boîte. Nous allons en effet supposer que cette expression peut être grossièrement approchée par

$$F_{\text{perte}} \approx 2\pi R^2 \frac{\rho(R)}{m} \sqrt{\frac{2T}{m}} \exp\left[-\frac{1}{T^*}\right]. \quad (\text{VI.4})$$

Reprenons maintenant les notations définies dans le paragraphe II.3 sur le traitement hydrostatique du gaz de sphères dures. En particulier, reprenons les notations  $X$ ,  $w(X)$ ,  $v(X) = 1/T^*$  du système dynamique (II.69) page 20. Ainsi, le flux de particules quittant la boîte devient

$$F_{\text{perte}} = -\frac{dN}{dt} \approx \sqrt{\frac{Gm}{2R^3}} N^{3/2} \frac{X^2 w(X)}{v(X)} \exp[-v(X)]. \quad (\text{VI.5})$$

Dans le cas d'Antonov pour les particules ponctuelles, on reconnaît  $u(X) = X^2 w(X)/v(X)$  la variable de Milne que nous avons abandonné au cours de l'étude du gaz de sphères dures. Cette variable trouve ici une interprétation physique liée aux flux de particules frappant la paroi. De plus, on voit apparaître le temps caractéristique gravitationnel du problème  $\tau_0 = \sqrt{2R^3/(Gm)}$  qui, pour les amas globulaires, vaut environ  $\tau_0 \approx 7.4 \times 10^9$  ans. Finalement, le nombre de particules dans l'amas évolue selon la loi

$$\frac{dN}{N^{3/2}} = -\frac{dt}{\tau(\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad \tau(\varepsilon) = \tau_0 \frac{v(X)}{X^2 w(X)} \exp[v(X)]; \quad (\text{VI.6})$$

qui s'intègre immédiatement en

$$N(t) = \frac{N_0}{\left(1 + \frac{N_0^{1/2} t}{2\tau(\varepsilon)}\right)^2}. \quad (\text{VI.7})$$

La dépendance en  $\varepsilon$  est intégrée dans la variable  $X$  et dans les fonctions  $v$  et  $w$ . Il est à noter que nous supposons, malgré la perte de particules, que l'énergie du système reste constante au cours du temps. Cette hypothèse forte n'est pas fondamentale pour une simple estimation car la fonction  $\tau(\varepsilon)$  varie peu avec  $\varepsilon$  pour les énergies négatives. En effet, pour les particules ponctuelles, et à partir de la courbe II.1, on peut montrer que la grandeur  $\tau(\varepsilon)/\tau_0$  varie entre 1/3 et environ 13 lorsque  $\varepsilon$  varie entre  $\varepsilon_c = -0.335$  et  $+\infty$ . Pour le gaz de sphères dures, ce rapport garde cet ordre de grandeur, excepté lorsque l'on s'approche trop de l'état gelé totalement effondré, mais que l'on ne considérera pas ici.

Ainsi, à partir de ce modèle, le temps  $t_{1/2}$  nécessaire pour qu'un amas globulaire composé initialement de  $N_0 = 6 \times 10^5$  étoiles perde la moitié de ses étoiles est donné par

$$4 \times 10^{-4} \tau_0 \lesssim t_{1/2} \lesssim 1.5 \times 10^{-2} \tau_0 \quad \Rightarrow \quad 3 \times 10^6 \text{ ans} \lesssim t_{1/2} \lesssim 1 \times 10^8 \text{ ans} . \quad (\text{VI.8})$$

De plus, le temps le plus faible correspond à des valeurs d'énergie où le système est très proche du gaz parfait, ce qui est loin d'être le cas pour les systèmes réels. Le temps de demi-vie raisonnable est donc le plus élevé.

Selon l'ouvrage de référence [7], le temps de relaxation vers l'équilibre d'amas globulaires est de l'ordre de  $10^9$  ans et le temps d'évaporation théorique d'un amas est environ 100 fois plus important. La valeur de  $1 \times 10^8$  ans que nous venons d'établir pour le temps de demi-vie d'un amas est significativement plus faible que ces valeurs. En ce qui concerne le temps entre deux déflexions significatives de la vitesse d'une particule suite à un événement à courte portée, il est d'environ  $10^5$  ans, toujours selon [7]. Au vu de ces valeurs numériques, il semble que le schéma que nous proposons

n'est pas totalement adapté. Comme nous le discuterons en fin de conclusion, le modèle de l'équilibre thermique macroscopique du système est sans doute à remettre en question. Cependant, signalons que plusieurs études [41, 48] suggèrent que la boîte n'a pas d'impact majeur sur la validité de la description théorique d'Antonov.

## Conclusion

Le traitement de la gravitation à partir des outils de la mécanique statistique d'équilibre est une ancienne problématique. Comme nous l'avons rappelé à de multiples reprises, le travail initié par Antonov sur le traitement de la sphère isotherme [9] a permis de mettre en avant de nombreuses questions concernant l'équilibre d'un gaz gravitationnel. La prise en compte des interactions gravitationnelles par un traitement de champ moyen est assez naturelle : suite au comportement du potentiel en  $1/r$  aux grandes distances, les effets collectifs impliquant un grand nombre de particules jouent un rôle dominant. Ce qui a motivé cette thèse est l'analyse précise de la théorie d'Antonov avec les outils de la mécanique statistique en partant du problème à  $N$  corps. Notons que s'il existait plusieurs travaux justifiant le traitement champ moyen de la longue portée de l'interaction gravitationnelle, les effets à courte portée associés à la divergence du potentiel à l'origine étaient ignorés ou gommés par des régularisations ad-hoc [16–18].

Dans le chapitre II de cette thèse, nous nous sommes concentrés sur la discussion historique du modèle de la sphère isotherme. En particulier, nous avons introduit l'hypothèse de champ moyen ainsi que les grandeurs qui nous ont servi tout au long de cette thèse pour traiter la longue portée de l'interaction gravitationnelle. Nous avons mis en avant un résultat central de ce modèle, à savoir la catastrophe gravotherme et l'absence d'états d'équilibre de basse énergie. Ce résultat est assez surprenant, et une question naturelle surgit : si nous prenons, dans une simulation numérique par exemple, un système de  $N$  particules dans les conditions de la sphère isotherme avec une condition initiale d'énergie en dessous de la limite d'Antonov, comment évoluera le système à long terme et atteindra-t-il un état d'équilibre ?

Comme exposé dans le même chapitre, cette question a conduit à une modification naturelle du modèle de la sphère isotherme pour tenter de prendre en compte des effets de courte portée. On introduit ainsi des sphères dures de rayon  $\sigma$  à la place des particules ponctuelles, comme cela a été en grande partie réalisé dans [41]. Dans ce cadre, les interactions de cœur dur sont prises en compte dans la pression locale du gaz. En utilisant les outils historiques du traitement de la sphère isotherme, légèrement modifiés, nous avons mis en oeuvre une méthode numérique donnant simplement accès aux états d'équilibre correspondant. Nous avons ainsi retrouvé un certain nombre de résultats connus, comme la disparition de la limite d'Antonov, le déroulement de la spirale correspondante, et l'apparition d'une transition de phase. Un point intéressant de notre étude est que pour une énergie positive arbitrairement grande donnée, si on fait tendre la taille des sphères dures vers zéro, il apparaît toujours un état stable partiellement effondré beaucoup plus chaud que celui prédit par la théorie d'Antonov. Cet effet a déjà été observé pour d'autres systèmes [12, 54, 55] mais est nouveau pour le système des sphères dures. La discussion plus précise de ce mécanisme, et la recherche des conséquences dynamiques sur le phénomène astrophysique de « core collapse » [7], est une perspective des plus intéressantes pour la poursuite de ce travail.

Au niveau du traitement microcanonique du problème à  $N$  corps, les grandeurs d'équilibre du système de particules ponctuelles ne sont pas bien définies par suite de la divergence du potentiel gravitationnel en 0. C'est pourquoi, dans le chapitre III, nous nous sommes intéressés directement au système de sphères dures avec les outils élémentaires de la mécanique statistique dans l'ensemble microcanonique. Nous avons pu montrer dans ce cadre qu'il apparaît naturellement une thermalisation locale du système. De plus, les distributions d'équilibre qui en découlent prennent la forme de distributions de Maxwell-Boltzmann mettant en jeu une compétition entre l'énergie potentielle gravitationnelle associée au champ moyen et l'énergie cinétique moyenne des particules. Toutefois,



la validité de ces résultats, et donc la validité de l'approche hydrostatique incluant le champ moyen, est soumise à certaines conditions dont trois ont été clairement identifiées.

Ces trois conditions établies à partir de l'étude microcanonique sont pour certaines assez simples à comprendre. La première est une condition de type milieu continu. En effet, pour pouvoir assimiler le système des sphères dures à un fluide, il faut que la densité ne varie pas sur une échelle de la taille des sphères dures. Il faut pouvoir définir un volume mésoscopique sur lequel les quantités d'équilibre varient peu. La seconde condition reposant sur une certaine propriété d'extensivité, matérialisée par l'équation (III.47), permet d'introduire le facteur de Boltzmann dans la distribution d'équilibre. La troisième condition donnée par l'équation (III.51) correspond à une hypothèse de couplage faible. Cette dernière condition impose que l'énergie cinétique soit suffisamment importante pour que l'énergie d'interaction gravitationnelle entre deux particules au contact soit négligeable. Ces deux dernières hypothèses ont été testées à partir d'ordres de grandeurs issus de systèmes astrophysiques. Il se trouve qu'elles sont satisfaites en général pour des gaz de poussières, où les particules sont relativement légères et faiblement couplées localement au niveau gravitationnel. Par contre, ces hypothèses ne sont plus satisfaites pour des systèmes tels que les amas globulaires, où le comportement à courte portée de l'interaction gravitationnelle va avoir un effet important sur l'état d'équilibre du système. Ce travail a mené à la publication [42].

L'étude des conditions de validité de l'approche hydrostatique a motivé l'étude du chapitre IV sur le modèle de bâtonnets durs à une dimension. Comme l'avait déjà exploité G. Rybicki dans la référence [66] pour un système de particules ponctuelles, le potentiel gravitationnel en  $|x|$  à une dimension, moyennant l'ordonnement des particules, permet des calculs très simples dans l'ensemble statistique isobarique, où la pression et la température du système sont fixées. Cet ensemble n'est pas des plus naturels pour étudier et décrire des systèmes astrophysiques. Toutefois, grâce à des transformations de Laplace, nous avons pu passer de l'ensemble isobarique vers l'ensemble canonique puis vers l'ensemble microcanonique. Ces transformations sont explicitement réalisées en utilisant la méthode mathématique du point col. Ces développements ont permis de montrer que tous ces ensembles conduisent à la même équation d'état du système, équation d'état identique à celle obtenue par une approche hydrostatique incluant un traitement champ moyen des interactions gravitationnelles.

Ces résultats, intéressants en soi, permettent d'éclairer un des propos majeur de cette thèse à savoir la pertinence de l'approche hydrostatique dans le cadre du problème à  $N$  corps. Ils confirment tout d'abord que les critères établis dans [42] pour un système fini donné sont bien indépendants des différents scalings qui peuvent être introduits pour décrire le système infini. Une différence lourde de conséquence entre les interactions gravitationnelles à une et à trois dimensions concerne leurs comportements respectifs en 0. En effet, à trois dimensions, la divergence à l'origine peut induire une violation de la condition de couplage faible. En opposition, le potentiel gravitationnel à une dimension s'annule simplement en 0. Autrement dit, les effets à courte portée associés à la gravitation seront certainement moins notables à une dimension qu'à trois. Les deux conditions (III.47) et (III.51) sont donc plus facilement vérifiées à une dimension. Par contre, l'hypothèse de variation lente de la densité peut être elle mise en défaut. Pour cela, nous avons étudié le système lorsque l'énergie se rapproche de l'énergie minimale du système, énergie qui est obtenue lorsque toutes les particules sont collées les unes aux autres. En partant de cette énergie et en lui adjoignant un petit complément, le système va être dans un état où un cœur compact apparaît entouré par un halo. Dans celui-ci, la densité varie très rapidement sur une échelle de l'ordre de la taille des particules, et l'approche hydrostatique est mise en défaut. Le travail sur ce système auto-gravitant à une dimension a permis, en plus de son intérêt intrinsèque en tant que modèle soluble, de mettre en évidence explicitement les limites de l'approche hydrostatique. Ce travail a mené à la publication [43]. Notons que cette limitation, due à une variation trop rapide de la densité dans les structures de type cœur-halo, devrait également intervenir dans les structures analogues à trois dimensions pour des énergies

proches de l'énergie minimale d'effondrement total. Dans ce cas tridimensionnel quasi-effondré, si la température devient trop faible, la condition de couplage faible locale pourrait également être violée. De plus, il faudrait prendre en compte un changement de phase possible à l'intérieur du cœur très condensé.

Toute l'analyse des chapitres III et IV est menée dans le cadre d'une description microcanonique. Si on considère des systèmes astrophysiques réels, il n'est pas garanti qu'une telle description d'équilibre soit valable. En effet, dans le cas des amas globulaires, les observations indiquent que les configurations où les objets sont très proches, correspondant à des déflexions fortes des trajectoires, ne sont pas explorées durant la vie de ces systèmes. En d'autres termes, s'il apparaît plausible que le système soit thermalisé à de grandes échelles, il est nécessaire de prendre en compte les effets gravitationnels à courte distance en dehors du cadre de la mécanique statistique d'équilibre. Le dernier chapitre de cette thèse V a précisément cet objectif. Dans ce cadre, considérer les systèmes d'étoiles binaires est un point central, déjà largement évoqué dans la littérature [7]. Ainsi, on sépare le champ gravitationnel moyen créé par des objets éloignés du champ gravitationnel local créé par des objets proches, qui va contrôler la dynamique des systèmes binaires. Nous avons supposé que le système global était composé de deux espèces, les étoiles célibataires et les systèmes binaires pouvant stocker de l'énergie. En utilisant les outils proches de ceux développés à partir du travail du chapitre II, il est assez simple de déterminer les distributions de masse d'équilibre de chacune des espèces dans le champ moyen gravitationnel. La difficulté centrale de ce type de modèle est surtout de trouver une description statistique satisfaisante des systèmes binaires. Dans cette thèse, nous avons proposé un modèle où les paramètres géométriques des systèmes binaires sont tous supposés équiprobables, mais où l'interaction avec le reste du système se fait uniquement pour les binaires faiblement couplés. Ainsi, on sépare les binaires en deux types, les *soft* en équilibre thermique avec le reste du système, et les *hard* dans des états que l'on qualifie de « gelés ». Cette approche, première correction phénoménologique au modèle d'Antonov, permet de retrouver les résultats qualitatifs attendus, en particulier l'existence d'états d'énergie inférieure à la limite d'Antonov et non effondrés.

Ce dernier chapitre a mis en évidence les limites de la mécanique statistique d'équilibre pour décrire certains systèmes gravitationnels. Dans notre travail, nous avons supposé que la non thermalisation à petites échelles n'influe pas sur l'équilibre macroscopique du système. Dans le cadre de la poursuite de ce travail, cette hypothèse doit être remise en question. En effet, la thermalisation à grandes échelles impose que certaines particules, certes peu nombreuses, ont une vitesse importante. Or pour atteindre de grandes vitesses, la dynamique du système impose des interactions locales, où une particule passe très proche d'un système binaire. De plus, lorsque de très grandes vitesses sont atteintes, les particules peuvent simplement sortir de l'amas. Ainsi, remplacer la fonction de distribution de type Boltzmann pour décrire l'équilibre thermique macroscopique du système par une fonction de distribution de type Michie-King peut être une perspective intéressante pour avancer dans la discussion de l'équilibre des amas globulaires, comme cela a déjà été proposé par exemple dans [79]. Une telle fonction, solution stationnaire de l'équation de Vlasov, est de type Boltzmann pour les petites vitesses, et elle est nulle au dessus d'une certaine valeur. Elle présente l'avantage de limiter l'évaporation du système, et elle est largement utilisée et justifiée au niveau astrophysique [7]. De premiers éléments de discussion sont d'ailleurs disponibles dans la référence [80].

Finalement, nous pourrions distinguer deux directions possibles de développements en lien avec ce travail. En premier lieu, on pourrait étendre l'analyse microcanonique à d'autres systèmes auto-gravitants avec une rotation globale [27] et en présence ou non de champs extérieurs confinants créés par des objets compacts. La seconde direction s'éloignerait de la mécanique statistique d'équilibre, afin d'intégrer des phénomènes dynamiques hors-équilibre, essentiels pour la description des états de certains systèmes astrophysiques.



## Compléments

### A.1 Calcul exact de la fonction de partition canonique pour le modèle de gravitation à une dimension

Dans le paragraphe IV.2.2, nous avons dérivé la fonction de partition isobarique pour la gravitation à une dimension. On renvoie le lecteur au chapitre IV pour l'ensemble des définitions et la position du problème. On rappelle l'équation (IV.30) définissant cette fonction de partition isobarique

$$\Delta(\beta^{-1}, P, N) = \frac{C_N}{\sigma} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{N/2} \exp[-\beta(NP\sigma + E_c)] \prod_{j=0}^N \frac{1}{\beta(P + Km^2\gamma_j)}, \quad (\text{A.1})$$

avec  $\gamma_i = i(N - i)$  et  $E_c = Km^2N(N^2 - 1)\sigma/6$ . Cette équation (A.1) est dérivée pour des valeurs réelles et positives de la pression  $P$ . Cette fonction peut être prolongée analytiquement sur le plan complexe exceptées sur les pôles isolés  $-Km^2\gamma_i$  localisées sur l'axe réel négatif. En utilisant ce prolongement, on utilise la définition (IV.21), définissant la fonction de partition canonique comme un transformée de Lapalce inverse de la fonction de partition isobarique

$$Z(T, L, N) = \frac{\sigma}{2\pi iT} \int_{-i\infty+P_0}^{i\infty+P_0} dP \exp(PL/T) \Delta(T, P, N) \quad (\text{A.2})$$

où  $P_0$  est un nombre positif.

En combinant les équation (A.1) et (A.2), on obtient

$$Z(\beta^{-1}, L, N) = \beta \frac{C_N}{2\pi i} \exp[-\beta E_c] \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{N/2} \int_{-i\infty+P_0}^{i\infty+P_0} dP \exp[P(\beta L - \beta N\sigma)] \prod_{j=0}^N \frac{1}{\beta(P + Km^2\gamma_j)}. \quad (\text{A.3})$$

#### A.1.1 Application du théorème des résidus

Nous appliquons maintenant le théorème des résidus<sup>1</sup>. Pour cela, il faut d'abord lister les pôles de l'intégrande. Ceux-ci sont évidemment l'ensemble des  $-Km^2\gamma_i$  mais comme il existe la symétrie  $\gamma_i = \gamma_{N-i}$ , la quasi-totalité de ces pôles sont des pôles doubles. Le seul pôle simple apparaît lorsque  $N$  est pair et il s'agit de  $-Km^2\gamma_{N/2}$ . Pour se fixer les idées, on va choisir  $N$  pair.

On calcule l'intégrale sur le contour composé du segment  $]-iR + P_0, iR + P_0[$  refermé par un demi-cercle de rayon  $R$  tendant vers l'infini orienté vers les complexes négatifs. Ce contour, pour

1. Pour des rappels mathématiques, on pourra se rapporter par exemple à l'excellent ouvrage de W. Appel [81].

$R$  suffisamment grand, va englober tous les pôles car  $N$  est ici fini. Comme l'intégrande tend vers 0 lorsque  $P$  tend vers l'infini, par l'application du lemme de Jordan, l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0. Et donc le théorème des résidus s'écrit

$$\int_{-i\infty+P_0}^{i\infty+P_0} dP \exp [P (\beta L - \beta N \sigma)] \prod_{j=0}^N \frac{1}{\beta(P + Km^2 \gamma_j)} = 2i\pi \sum_{k=0}^{N/2} R_k ; \quad (\text{A.4})$$

avec

$$R_k = \text{Res} \left( \exp [P (\beta L - \beta N \sigma)] \prod_{j=0}^N \frac{1}{\beta(P + Km^2 \gamma_j)} ; -Km^2 \gamma_k \right) ; \quad (\text{A.5})$$

où l'on note  $\text{Res}(F(z); z_r)$  le résidu de la fonction analytique  $F$  en  $z_r$ .

### A.1.2 Calcul des résidus

**Calcul du résidu du pôle simple :** On peut tout d'abord calculer directement le résidu du pôle simple  $-Km^2 \gamma_{N/2} = -Km^2 N^2/4$ . Celui-ci s'écrit

$$R_{N/2} = \frac{\exp [-Km^2 \gamma_{N/2} (\beta L - \beta N \sigma)]}{\beta (Km^2 \beta)^N} \prod_{j=0}^{N/2-1} \frac{1}{(-\gamma_{N/2} + \gamma_j)^2} . \quad (\text{A.6})$$

Or on montre que  $-\gamma_{N/2} + \gamma_j = -(j - N/2)^2$  et donc directement, on a

$$R_{N/2} = \frac{\exp [-Km^2 \gamma_{N/2} (\beta L - \beta N \sigma)]}{\beta (Km^2 \beta)^N ([N/2]!)^4} . \quad (\text{A.7})$$

**Calcul des résidus des pôles doubles :** On note, par soucis de clarté,  $p = P/(Km^2)$  et  $\ell = \beta Km^2 (\beta L - N \sigma)$ . On rappelle que le résidu d'un pôle double est donné par la formule

$$\text{Res}(F(z), z_r) = \lim_{z \rightarrow z_r} \frac{d}{dz} [(z - z_r)^2 f(z)] . \quad (\text{A.8})$$

En application de cette formule, pour  $0 \leq k < N/2$ , il vient

$$\beta (Km^2 \beta)^N R_k = \lim_{p \rightarrow -\gamma_k} \frac{d}{dp} \left( \frac{\exp [p\ell]}{\gamma_{N/2} + p} \prod_{j=0, j \neq k}^{N/2-1} \frac{1}{(\gamma_j + p)^2} \right) . \quad (\text{A.9})$$

Cette dérivée se développe en trois termes qui, après factorisation, conduisent à

$$\beta (Km^2 \beta)^N R_k = \left[ \ell - \frac{1}{\gamma_{N/2} - \gamma_k} - 2 \sum_{l=0, l \neq k}^{N/2-1} \frac{1}{\gamma_l - \gamma_k} \right] \frac{\exp [-\gamma_k \ell]}{\gamma_{N/2} - \gamma_k} \prod_{j=0, j \neq k}^{N/2-1} \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_k)^2} . \quad (\text{A.10})$$

### A.1.3 Fonction de partition

En utilisant tous les résultats précédents, on peut écrire

$$Z(T, L, N) = C_N \exp [-\beta E_c] \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{N/2} \frac{1}{(Km^2 \beta)^N} \sum_{i=0}^{N/2} (b_i + a_i \ell) \exp [-\gamma_k \ell] ; \quad (\text{A.11})$$

avec les coefficients définis par les relations de récurrence

$$a_i = \frac{1}{\gamma_{N/2} - \gamma_i} \prod_{j=0, j \neq i}^{N/2-1} \frac{1}{(\gamma_j - \gamma_i)^2}; \quad (\text{A.12})$$

$$b_i = - \left[ \frac{1}{\gamma_{N/2} - \gamma_i} + 2 \sum_{l=0, l \neq i}^{N/2-1} \frac{1}{\gamma_l - \gamma_i} \right] a_i; \quad (\text{A.13})$$

$$a_{N/2} = 0 \quad \text{et} \quad b_{N/2} = [(N/2)!]^{-4}. \quad (\text{A.14})$$

**Calcul exact des  $a_i$  :** Utilisons maintenant la définition  $\gamma_i = i(N - i)$ . On trouve alors

$$\gamma_j - \gamma_i = j(N - j) - i(N - i) = (j - i)(N - j - i). \quad (\text{A.15})$$

En appliquant ce résultat à la définition des  $a_i$  ci-dessus, il vient

$$a_i = \frac{1}{(N/2 - i)^2} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{[(j - i)(N - j - i)]^2} \prod_{j=i+1}^{N/2-1} \frac{1}{[(j - i)(N - j - i)]^2}; \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{(N - 2i)^2}{[i!(N - i)!]^2}. \quad (\text{A.17})$$

On remarque que  $a_{N/2} = 0$  est compatible avec cette définition.

**Calcul exact des  $b_i$  :** Calculons maintenant le rapport  $b_i/a_i$ , on a

$$\frac{b_i}{a_i} = - \frac{1}{(N/2 - i)^2} - 2 \sum_{j=0, j \neq i}^{N/2-1} \frac{1}{(j - i)(N - j - i)}; \quad (\text{A.18})$$

$$= - \frac{1}{N/2 - i} \left[ \frac{1}{N/2 - i} + \sum_{j=0, j \neq i}^{N/2-1} \frac{1}{N - j - i} + \sum_{j=0, j \neq i}^{N/2-1} \frac{1}{j - i} \right]; \quad (\text{A.19})$$

$$= - \frac{1}{N/2 - i} \left[ - \frac{1}{N - 2i} + \sum_{j=i+1}^{N-i} \frac{1}{j} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Cette expression ne donne pas la bonne valeur de  $b_{N/2}$ , mais ce n'est pas problématique car cette formule n'a mathématiquement rien en commun avec la dérivation de  $b_{N/2}$ .

Avec un logiciel de calcul formel, il est possible de calculer exactement les intégrales conduisant à  $Z$ . Les valeurs issues des expressions (A.17) et (A.20) coïncident avec les résultats du calcul formel au moins jusqu'à  $N = 60$ .

Au final, l'expression (A.11) et les définitions (A.14,A.17,A.20) donnent la forme exacte de la fonction de partition canonique du système pour  $N$  fini quelconque.

## A.2 Modèle d'équilibre chimique pour la distribution de binaires

Le modèle à deux espèces développé au chapitre V prend en compte des effets hors-équilibre. Ici, on suppose que l'équilibre statistique est totalement atteint à toutes les échelles du système. Cette hypothèse est loin d'être satisfaite pour certains systèmes astrophysiques comme les amas globulaires. Les éléments qui suivent ne constituent pas une démonstration rigoureuse, mais donnent les idées principales du raisonnement conduisant à l'équilibre chimique entre deux espèces, les étoiles célibataires et les binaires.

### A.2.1 Construction du modèle

Considérons un système de  $N$  sphères dures de masse  $m$  et de rayon  $\sigma$  en interaction gravitationnelle contenues dans une boîte sphérique de volume total  $\Lambda = 4\pi R^3/3$ .

**Définition des espèces chimiques** Le système présente deux espèces :

- les étoiles célibataires ;
- les couples d'étoiles correspondant à deux étoiles éloignées d'une distance inférieure à  $d$  et dont l'état interne est défini à travers la fonction de partition  $Z_{\text{bin}}$  définie plus loin.

Nous supposons ici que le système est suffisamment dilué pour ne pas avoir à considérer les systèmes à trois corps ou plus. La distance  $d$  peut être définie par les considérations présentées au paragraphe V.3.1 du chapitre V, à partir du comportement phénoménologique des binaires. La longue portée du potentiel gravitationnel permet d'écrire le potentiel ressenti par chacun des objets comme la somme du champ gravitationnel moyen et des interactions créées par chacune des autres particules les plus proches.

**Définition de la fonction de partition locale** Considérons un « petit » volume  $\lambda$  contenu dans le volume total  $\Lambda$  au voisinage d'un point  $\mathbf{r}$  donné. Le terme « petit » fait référence à une taille caractéristique telle que le champ gravitationnel moyen de l'ensemble du système soit constant sur ce volume. Cette distance est bien plus grande que la distance locale  $d$  et que la distance moyenne entre les particules. Elle définit un volume mésoscopique. Le système global étant thermalisé, ce petit volume est à l'équilibre thermique avec l'ensemble du système. Notons  $n \gg 1$  le nombre de particules individuelles contenues dans ce volume et  $\Phi$  le potentiel gravitationnel moyen uniforme sur  $\lambda$ .

On suppose que les configurations dominantes dans la fonction de partition canonique  $Z_\lambda$  du sous-système considéré correspondent à  $j$  binaires et  $n - 2j = i$  étoiles célibataires. De plus, les célibataires et les binaires sont sans interactions entre elles, et ne sont soumises qu'au champ gravitationnel moyen constant  $\Phi$ .

### A.2.2 Étude de la fonction de partition $Z_\lambda$

**Premières intégrations** Dans l'expression de la fonction de partition  $Z_\lambda$ , les intégrations sur les positions et impulsions des étoiles célibataires et sur les positions et impulsions des centres de masse des binaires sont immédiates. Les intégrations sur les positions donnent simplement le produit  $\lambda^j \lambda^i$ , en négligeant les effets de volume exclu qui sont petits tant que  $d \ll a$ . Les intégrations sur les impulsions donnent elles le facteur  $(4m\pi/\beta)^{3j/2} (2m\pi/\beta)^{3i/2}$  en tenant compte de la masse  $2m$  pour le centre de masse d'une binaire.

**Intégration sur les degrés de liberté internes des binaires** Le hamiltonien de la particule fictive de masse réduite  $m/2$  dans chaque système binaire s'écrit

$$H_{\text{bin}}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \frac{\mathbf{P}^2}{m} - \frac{Gm^2}{R}. \quad (\text{A.21})$$

On définit alors

$$Z_{\text{bin}} = \int_{\text{bin}} d^3\mathbf{R} d^3\mathbf{P} \exp[-\beta H_{\text{bin}}]; \quad (\text{A.22})$$

comme fonction de partition interne d'une binaire. Le domaine d'intégration est restreint aux configurations définissant effectivement une binaire, comme discuté plus loin. La contribution de ces intégrations dans la fonction de partition  $Z_\lambda$  fait donc apparaître un facteur  $Z_{\text{bin}}^j$ .

**Sommation des configurations** Calculons enfin le nombre de façon de répartir  $n$  particules entre  $i$  étoiles célibataires et  $j$  binaires. Il faut alors choisir  $2j$  particules parmi  $n$  puis compter le nombre de couples différents que nous sommes capables de construire avec ces  $2j$  particules. Ce second nombre sera  $(2j-1)(2j-3)\dots(2j-2j+1) = (2j)!2^{-j}(j!)^{-1}$ . Ainsi, le nombre total recherché est

$$\binom{n}{2j} \frac{(2j)!}{2^j j!} = \frac{n!}{2^j i! j!}. \quad (\text{A.23})$$

**Écriture finale de  $Z_\lambda$**  Les particules sont indiscernables, la division par  $n!$  conduit à l'expression finale

$$Z_\lambda = C^n e^{-nm\beta\Phi} \sum_{i+2j=n} \frac{1}{2^j i! j!} \lambda^{i+j} \left( \frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3(i+j)/2} 2^{3j/2} Z_{\text{bin}}^j. \quad (\text{A.24})$$

Notons  $Z_{\text{GP}}$  la fonction de partition d'un gaz parfait de particules massives soumises au champ  $\Phi$ . On a

$$Z_{\text{GP}} = \frac{1}{n!} C^n e^{-nm\beta\Phi} \lambda^n \left( \frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3n/2} \quad (\text{A.25})$$

et donc

$$Z = Z_{\text{GP}} \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j!} \Lambda^{-j} \left( \frac{2m\pi}{\beta} \right)^{-3j/2} 2^{j/2} Z_{\text{bin}}^j. \quad (\text{A.26})$$

### A.2.3 L'équilibre chimique

**Méthode du col** Nous allons réécrire l'expression (A.26) sous une forme exponentielle. On utilise alors la formule de Stirling pour développer les factorielles. On a alors

$$Z = Z_{\text{GP}} \sum_{i+2j=n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi j(n-2j)}} e^{nf(x_j)} \quad (\text{A.27})$$

avec  $x_j = j/n$  et la fonction  $f$  définie par

$$f(x_j) = -x_j \ln x_j - (1-2x_j) \ln(1-2x_j) - x_j \left( 1 + \ln \left[ \frac{2}{\rho Z_{\text{bin}}} \left( \frac{m\pi}{\beta} \right)^{3/2} \right] \right) \quad (\text{A.28})$$

avec  $\rho = n/\lambda$ .

Pour  $n$  suffisamment grand, appliquons successivement la formule d'Euler-Mac Laurin ainsi que la méthode du col à l'intégrale qui en résulte<sup>2</sup>. Le point col  $x^*$  correspondant est défini par l'annulation de la dérivée de  $f$ , c'est-à-dire

$$0 = -\ln x^* + 2 \ln(1-2x^*) - \ln \left[ \frac{2}{\rho Z_{\text{bin}}} \left( \frac{m\pi}{\beta} \right)^{3/2} \right]. \quad (\text{A.29})$$

S'il n'existe pas de  $x^*$  compris entre 0 et 1/2 vérifiant cette équation, le maximum sera donné par  $x = 0$  ou  $x = 1/2$  selon les cas.

C'est le voisinage de  $x^*$  qui donne la contribution dominante à l'intégrale, proportionnelle à  $e^{nf(x^*)}$  en omettant les préfacteurs qui varient moins vite que cette exponentielle lorsque  $n$  est grand.

2. On renvoie à la lecture du paragraphe IV.3.1 pour un rappel mathématique.



**Relation entre les densités** Prenons maintenant une observable  $F(i, j)$  variant lentement. La méthode du col donne simplement sa valeur moyenne, à savoir

$$\langle F \rangle = \frac{1}{Z_\lambda} \sum_{i+2j=n} F(i, j) e^{n f(x_i, x_j)} = F(1 - 2x^*, x^*). \quad (\text{A.30})$$

En particulier, la valeur moyenne de la fraction d'étoiles célibataire est  $\langle F(i, j) \rangle = \langle i \rangle / n = 1 - 2x^*$  et celle de la fraction de binaires est  $\langle F(i, j) \rangle = \langle j \rangle / n = x^*$ . Ainsi, directement à l'aide de l'équation (A.29), il vient

$$\frac{x^*}{(1 - 2x^*)^2} = \frac{\rho}{2} \left( \frac{m\pi}{\beta} \right)^{-3/2} Z_{\text{bin}}. \quad (\text{A.31})$$

Introduisons les densités moyennes  $\rho_s = m(1 - 2x^*)\rho$  et  $\rho_b = 2mx^*\rho$  de chacune des espèces, il vient

$$\frac{\rho_b}{\rho_s^2} = \frac{1}{m^{5/2}\pi^{3/2}} \beta^{3/2} Z_{\text{bin}}. \quad (\text{A.32})$$

Cette équation (A.32) n'est autre que la loi d'action des masses représentant l'équilibre chimique entre les systèmes binaires et les célibataires. Cette loi d'action des masses n'est valide qu'à la condition nécessaire, mais pas forcément suffisante, de l'équilibre statistique à toutes les échelles du système.

#### A.2.4 Fonction de partition interne des binaires

On considère maintenant la fonction de partition interne  $Z_{\text{bin}}$  des étoiles binaires. Celle-ci est associée aux trajectoires elliptiques de la particule fictive dans le référentiel du centre de masse. On note  $a$  le demi-grand axe des ellipses et  $e$  leur excentricité. Notons que le modèle impose que l'écart entre les deux étoiles est toujours inférieur à la distance  $d$  d'une part, et plus grand que le diamètre  $\sigma$  des sphères dures d'autre part. Il existe donc des conditions fortes sur  $a$  et  $e$ , qui vont définir le volume d'intégration de la fonction de partition  $Z_{\text{bin}}$  (A.22).

**Énergie d'une binaire** On rappelle que le hamiltonien de la particule fictive  $H_{\text{bin}}(\mathbf{R}, \mathbf{P})$  est donné par l'expression (A.21). L'énergie correspondante d'un système binaire dépend uniquement du demi-grand axe, à savoir

$$E_{\text{bin}}(a) = -\frac{Gm^2}{2a} = -E_\ell(a). \quad (\text{A.33})$$

**Changement de variables canonique** Utilisons les variables de Delaunay :

$$L = \sqrt{2Gm^2 a^{1/2}}; \quad (\text{A.34})$$

$$\Gamma = L(1 - e^2); \quad (\text{A.35})$$

$$\Theta = \Gamma \cos i; \quad (\text{A.36})$$

et les trois angles  $M$ ,  $\omega$  et  $\Omega$ . Toutes ces notations sont définies au paragraphe V.3.2.a. Avec l'invariance angulaire, on obtient la formule suivante (le Jacobien de la transformation valant 1) :

$$\int_{\text{bin}} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{r} f(E_{\text{bin}}) = 8\pi^3 \int_{\text{bin}} dL d\Gamma f \left( - \left( \frac{Gm^2}{L} \right)^2 \right) \Gamma, \quad (\text{A.37})$$

avec le domaine d'intégration restant à déterminer.

En repassant en variables  $a$  et  $e$ , il vient

$$\int_{\text{bin}} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{r} f(E_{\text{bin}}) = \pi^3 m^3 (2Gm)^{3/2} \int_{\text{bin}} da de a^{1/2} e(1 - e^2) f \left( -\frac{Gm^2}{2a} \right). \quad (\text{A.38})$$

**Fonction de partition interne** On a

$$Z_{\text{bin}} = \int_{\text{bin}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} e^{-\beta H_{\text{bin}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})} ; \quad (\text{A.39})$$

d'où on déduit avec (A.38)

$$Z_{\text{bin}} = \pi^3 m^3 (2Gm)^{3/2} \int_{\text{Toutes les binaires}} da a^{1/2} e(1-e^2) e^{\beta \frac{Gm^2}{2a}} . \quad (\text{A.40})$$

Nous pouvons d'abord intégrer sur  $e$  avant d'intégrer sur  $a$ . Les bornes d'intégrations sont alors

$$\sigma < a < d \quad (\text{A.41})$$

$$e < \begin{cases} \frac{d}{a} - 1 & \text{si } a > a_0 \\ 1 - \frac{\sigma}{a} & \text{si } a < a_0 \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

avec  $a_0 = (d + \sigma)/2$ . En choisissant ces bornes, on réduit le domaine d'intégration aux ellipses totalement contenues dans le volume  $4\pi d^3/3$ , c'est-à-dire qu'on ne considère que les trajectoires où les deux étoiles restent tout le long de la trajectoire à une distance inférieure à  $d$  l'une de l'autre. Par ailleurs, afin d'éviter les collisions, supposées inexistantes, leur distance relative reste supérieure à  $\sigma$ . En d'autres termes, dans le plan de la trajectoire, l'ellipse est contenue dans la couronne de rayon interne  $\sigma$  et externe  $d$ . On a donc

$$Z_{\text{bin}} = \frac{\pi^3}{2} m^3 (2Gm)^{3/2} \left[ \int_{\sigma}^{a_0} a^{1/2} da \int_0^{1-\sigma/a} de e(1-e^2) e^{\beta \frac{Gm^2}{2a}} + \int_{a_0}^d a^{1/2} da \int_0^{d/a-1} de e(1-e^2) e^{\beta \frac{Gm^2}{2a}} \right] . \quad (\text{A.43})$$

**Expression intégrale de la fonction de partition interne** Comme  $\int_0^{e_{\text{max}}} de e(1-e^2) = e_{\text{max}}^2(2-e_{\text{max}}^2)/4$ , il vient donc

$$Z_{\text{bin}} = \frac{\pi^3}{2} m^3 (2Gm)^{3/2} \left[ \int_{\sigma}^{a_0} da a^{-7/2} (a-\sigma)^2 (2a^2 - (a-\sigma)^2) e^{\beta \frac{Gm^2}{2a}} + \int_{a_0}^d da a^{-7/2} (d-a)^2 (2a^2 - (d-a)^2) e^{\beta \frac{Gm^2}{2a}} \right] . \quad (\text{A.44})$$

Posons la fonction  $f$ , continue, telle que

$$f(a) = \begin{cases} (a-\sigma)^2 (2a^2 - (a-\sigma)^2) & \text{si } \sigma < a < a_0 ; \\ (d-a)^2 (2a^2 - (d-a)^2) & \text{si } a_0 < a < d ; \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

et dans ce cas

$$Z_{\text{bin}} = \frac{\pi^3}{2} m^3 (2Gm)^{3/2} \int_{\sigma}^d da f(a) a^{-7/2} e^{\beta \frac{Gm^2}{2a}} . \quad (\text{A.46})$$

**Introduction de variables sans dimension** La fonction  $f$  est continue. Si  $\sigma = 0$ , elle est en plus dérivable. On peut adimensionner la fonction grâce à la relation  $f(a) = d^4 g(\sigma/d, a/d)$  avec  $\alpha = \sigma/d$  et  $x = a/d$  et

$$g(\alpha, x) = \begin{cases} (x - \alpha)^2(2x^2 - (x - \alpha)^2) & \text{si } \alpha < x < 1/2 + \alpha/2 ; \\ (1 - x)^2(2x^2 - (1 - x)^2) & \text{si } 1/2 + \alpha/2 < x < 1 ; \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Et dans ce cas, la fonction de partition interne (A.46) peut être mise sous forme adimensionnée

$$Z_{\text{bin}} = m^3(Gmd)^{3/2} \left( \sqrt{2\pi}^3 \int_{\alpha}^1 dx g(\alpha, x) x^{-7/2} \exp \left[ \frac{\beta Gm^2}{d} \frac{1}{2x} \right] \right) = m^3(Gmd)^{3/2} \Psi \left( \alpha, \frac{\beta Gm^2}{d} \right). \quad (\text{A.48})$$

### A.2.5 Prédiction de l'équilibre chimique

La loi d'action des masses (A.31) peut donc être réécrite comme

$$\frac{x^*}{(1 - 2x^*)^2} = \frac{\rho d^3}{2\pi^{3/2}} \left( \frac{\beta Gm^2}{d} \right)^{3/2} \Psi \left( \alpha, \frac{\beta Gm^2}{d} \right). \quad (\text{A.49})$$

Si la température  $T$  tend vers l'infini, autrement dit  $\beta \rightarrow 0$ , à densité particulaire moyenne  $\rho$  fixée, la fonction  $\Psi$  tend vers une constante et donc  $x^*$  tend vers 0. Le système est constitué uniquement d'étoiles célibataires. Si la densité particulaire  $\rho$  tend vers 0 à température  $T$  fixée, alors à nouveau  $x^*$  tend vers 0. Dans ces deux cas limite, le système est entièrement « ionisé » par échauffement ou effet entropique. Les binaires sont favorisées à « basse température », *i.e.* lorsque  $\beta Gm^2/d \gg 1$ . Dans ce cas, on trouve  $x^* \approx 1/2$ .

En réutilisant les grandeurs adimensionnées définies tout au long de cette thèse, on peut réécrire la loi d'action des masses comme

$$\frac{x^*}{(1 - 2x^*)^2} = C \left( \frac{d}{\ell} \right)^{3/2} \frac{1}{N} \frac{1}{(T^*)^{3/2}} \Psi \left( \frac{\sigma}{d}, \frac{R}{dNT^*} \right); \quad (\text{A.50})$$

avec  $C$  une constante numérique et  $\ell = R/N^{1/3}$  la distance moyenne entre les particules dans l'amas. On rappelle que les distances sont relativement disposées comme  $\sigma \ll d \ll \ell$  et  $d$  est un paramètre phénoménologique définissant la taille maximale des binaires.

Dans le cas des amas globulaires, en prenant  $d \approx 1$  UA de la taille d'une binaire typique et  $T^* \approx 1$  comme nous l'avons calculé avec les différents équilibres gravitationnels considérés. Les préfacteurs de l'expression (A.50) sont très faibles. Par contre, l'intégrande de la fonction  $\Psi$  est constituée d'un terme  $\exp \left[ \frac{R}{dNT^*} (2x)^{-1} \right]$  avec  $\frac{R}{dNT^*} \approx 20$ . Avec une telle valeur, avec  $\sigma/d = 0.01$ , ce qui est clairement sous estimé, la fonction  $\Psi$  prend une valeur de l'ordre de  $10^{422}$ . Ainsi, et sans hésitations, ce modèle, avec les valeurs numériques des amas globulaires, conduit à un système composé uniquement de binaires.

Ce résultat est en opposition totale avec les observations. Et surtout, si le système est entièrement constitué de binaires, il est faux d'exclure du modèle les interactions à trois corps et plus. Nous sommes convaincus qu'en ajoutant au modèle toutes les interactions à  $n$ -corps, avec les valeurs numériques observées dans les amas globulaires ; l'équilibre statistique à toutes les échelles du système imposerait un état d'équilibre totalement effondré. Pour cette raison, nous avons développé le modèle non équilibré semi-heuristique du chapitre V.

# Annexe **B**

## Validity conditions of the hydrostatic approach for self-gravitating systems : a microcanonical analysis

Pour des raisons de copyright, l'article [42] n'est pas reproduit dans la version publique de la thèse. Il est disponible [ici](#).



# Annexe **C**

## A solvable model of hard rods with gravitational interactions

Pour des raisons de copyright, l'article [43] n'est pas reproduit dans la version publique de la thèse. Il est disponible [ici](#).



# Bibliographie

- [1] D. C. Heggie, M. Trenti, and P. Hut, “Star clusters with primordial binaries–i. dynamical evolution of isolated models,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 368, no. 2, pp. 677–689, 2006.
- [2] N. Ivanova, C. O. Heinke, F. A. Rasio, R. E. Taam, K. Belczynski, and J. Fregeau, “Formation and evolution of compact binaries in globular clusters – i. binaries with white dwarfs,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 372, no. 3, pp. 1043–1059, 2006.
- [3] J. R. Hurley, S. J. Aarseth, and M. M. Shara, “The core binary fractions of star clusters from realistic simulations,” *The Astrophysical Journal*, vol. 665, no. 1, p. 707, 2007.
- [4] R. J. Parker, S. P. Goodwin, P. Kroupa, and M. Kouwenhoven, “Do binaries in clusters form in the same way as in the field?,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 397, no. 3, pp. 1577–1586, 2009.
- [5] M. B. N. Kouwenhoven, S. P. Goodwin, R. J. Parker, M. B. Davies, D. Malmberg, and P. Kroupa, “The formation of very wide binaries during the star cluster dissolution phase,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 404, pp. 1835–1848, June 2010.
- [6] M. Giersz, D. C. Heggie, J. R. Hurley, and A. Hypki, “Mocca code for star cluster simulations – ii. comparison with n-body simulations,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 431, no. 3, pp. 2184–2199, 2013.
- [7] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987.
- [8] D. Heggie and P. Hut, *The Gravitational Million-Body Problem*. Cambridge University Press, 2003.
- [9] V. A. Antonov, “Most probable phase distribution in spherical star systems and conditions for its existence,” *Vest. Leningrad Gros. Univ.*, vol. 7, p. 135, 1962. (English translation in *IAU Symposium 113 Dynamics of Globular Clusters* ed Goodman and Hut Dordrecht : Reidel 525-540 (1985)).
- [10] D. Lynden-Bell and R. Wood, “The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 138, p. 495, 1968.
- [11] R. Emden, “Gaskugeln,” *Teubner*, 1907.
- [12] P. H. Chavanis, “Phase transitions in self-gravitating systems,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 20, no. 22, p. 3113, 2006.
- [13] F. Sylos Labini, “Universal properties of violently relaxed gravitational structures,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 429, no. 1, pp. 679–687, 2013.
- [14] D. H. E. Gross, *Microcanonical Thermodynamics*. 2001.
- [15] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens, “Dynamics and thermodynamics of systems with long range interactions : an introduction,” in T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo and M. Wilkens (eds.) *Lecture Notes in Physics* vol. 602 Springer, 2002.
- [16] J. Messer and H. Spohn, “Statistical mechanics of the isothermal lane-emden equation,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 29, no. 3, p. 561, 1982.
- [17] M.-H. Kiessling and J. Percus, “Nonuniform van der waals theory,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 78, no. 5, pp. 1337–1376, 1995.



- [18] H. de Vega and N. Sánchez, “Statistical mechanics of the self-gravitating gas : I. thermodynamic limit and phase diagrams,” *Nuclear Physics B*, vol. 625, no. 3, pp. 409 – 459, 2002.
- [19] J. Barré, D. Mukamel, and S. Ruffo, “Inequivalence of ensembles in a system with long-range interactions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 030601, Jun 2001.
- [20] F. Leyvraz and S. Ruffo, “Ensemble inequivalence in systems with long-range interactions,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 35, no. 2, p. 285, 2002.
- [21] H. Touchette, R. S. Ellis, and B. Turkington, “An introduction to the thermodynamic and macrostate levels of nonequivalent ensembles,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 340, no. 1–3, pp. 138 – 146, 2004. News and Expectations in Thermostatistics.
- [22] A. Campa, P.-H. Chavanis, A. Giansanti, and G. Morelli, “Dynamical phase transitions in long-range hamiltonian systems and tsallis distributions with a time-dependent index,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 040102, Oct 2008.
- [23] P.-H. Chavanis, “Phase transitions in self-gravitating systems : Self-gravitating fermions and hard-sphere models,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, p. 056123, May 2002.
- [24] F. Bouchet and J. Barré, “Classification of phase transitions and ensemble inequivalence, in systems with long range interactions,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 118, no. 5-6, pp. 1073–1105, 2005.
- [25] A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo, “Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions,” *Physics Reports*, vol. 480, no. 3–6, pp. 57 – 159, 2009.
- [26] A. Campa, T. Dauxois, D. Fanelli, and S. Ruffo, *Physics of Long-Range Interacting Systems*. 2014.
- [27] E. V. Votyakov, H. I. Hidmi, A. De Martino, and D. H. E. Gross, “Microcanonical mean-field thermodynamics of self-gravitating and rotating systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 031101, Jun 2002.
- [28] M. Antoni, S. Ruffo, and A. Torcini, “First-order microcanonical transitions in finite mean-field models,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 66, no. 5, p. 645, 2004.
- [29] P. H. Chavanis, “On the lifetime of metastable states in self gravitating systems,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 432, no. 1, pp. 117–138, 2005.
- [30] Y. Y. Yamaguchi, J. Barré, F. Bouchet, T. Dauxois, and S. Ruffo, “Stability criteria of the vlasov equation and quasi-stationary states of the hmf model,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 337, no. 1–2, pp. 36 – 66, 2004.
- [31] Y. Levin, R. Pakter, F. B. Rizzato, T. N. Teles, and F. P. Benetti, “Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions,” *Physics Reports*, vol. 535, no. 1, pp. 1 – 60, 2014. Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions.
- [32] A. Taruya and M.-a. Sakagami, “Antonov problem and quasi-equilibrium states in an n-body system,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 364, no. 3, pp. 990–1010, 2005.
- [33] H. A. Posch and W. Thirring, “Some aspects of the classical three-body problem that are close or foreign to physical intuition,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 41, no. 6, 2000.
- [34] M.-L. Chabanol, F. Corson, and Y. Pomeau, “Statistical mechanics of point particles with a gravitational interaction,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 50, no. 2, p. 148, 2000.
- [35] Y. Levin, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Collisionless relaxation in gravitational systems : From violent relaxation to gravothermal collapse,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 021130, Aug 2008.
- [36] M. Joyce and T. Worrakitpoonpon, “Quasistationary states in the self-gravitating sheet model,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, p. 011139, Jul 2011.
- [37] T. N. Teles, Y. Levin, and R. Pakter, “Statistical mechanics of 1d self-gravitating systems : the core—halo distribution,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters*, vol. 417, no. 1, pp. L21–L25, 2011.
- [38] L. Milanović, H. A. Posch, and W. Thirring, “Statistical mechanics and computer simulation of systems with attractive positive power-law potentials,” *Phys. Rev. E*, vol. 57, pp. 2763–2775, Mar 1998.
- [39] C. Dellago and H. A. Posch, “Mixing, lyapunov instability, and the approach to equilibrium in a hard-sphere gas,” *Phys. Rev. E*, vol. 55, pp. R9–R12, Jan 1997.
- [40] A. Gabrielli, M. Joyce, and B. Marcos, “Quasistationary states and the range of pair interactions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 210602, Nov 2010.

- [41] B. Stahl, M. K.-H. Kiessling, and K. Schindler, "Phase transitions in gravitating systems and the formation of condensed objects," *Planetary and Space Science*, vol. 43, no. 3–4, pp. 271 – 282, 1995.
- [42] M. Champion, A. Alastuey, T. Dauxois, and S. Ruffo, "Validity conditions of the hydrostatic approach for self-gravitating systems : a microcanonical analysis," *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 47, no. 22, p. 225001, 2014.
- [43] M. Champion and A. Alastuey, "A solvable model of hard rods with gravitational interactions," *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 1, p. 01031, 2015.
- [44] D. C. Heggie, "The dynamical evolution of binaries in clusters," in *Dynamics of the Solar Systems*, vol. 69, p. 73, 1975.
- [45] D. C. Heggie, "Binary evolution in stellar dynamics," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 173, pp. 729–787, Dec. 1975.
- [46] T. Padmanabhan, "Statistical mechanics of gravitating systems," *Physics Reports*, vol. 188, no. 5, p. 285, 1990.
- [47] T. Padmanabhan, "Antonov instability and gravothermal catastrophe - Revisited," *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 71, pp. 651–664, Nov. 1989.
- [48] P. H. Chavanis, "Gravitational instability of finite isothermal spheres," *Astronomy & Astrophysics*, vol. 381, no. 1, pp. 340–356, 2002.
- [49] C. Sire and P.-H. Chavanis, "Thermodynamics and collapse of self-gravitating brownian particles in  $D$  dimensions," *Phys. Rev. E*, vol. 66, p. 046133, Oct 2002.
- [50] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure*. Dover, First edition : 1942.
- [51] J. Katz, "On the number of unstable modes of an equilibrium," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 183, no. 4, pp. 765–770, 1978.
- [52] T. Padmanabhan, "Statistical mechanics of gravitating systems," *Physics Reports*, vol. 188, no. 5, pp. 285 – 362, 1990.
- [53] E. B. Aronson and C. J. Hansen, "Thermal Equilibrium States of a Classical System with Gravitation," *The Astrophysical Journal*, vol. 177, p. 145, Oct. 1972.
- [54] I. Ispolatov and E. G. D. Cohen, "Phase transitions in systems with  $1/r^\alpha$  attractive interactions," *Phys. Rev. E*, vol. 64, p. 056103, Oct 2001.
- [55] I. Ispolatov and M. Karttunen, "Collapses and explosions in self-gravitating systems," *Phys. Rev. E*, vol. 68, p. 036117, Sep 2003.
- [56] P. H. Chavanis and I. Ispolatov, "Phase diagram of self-attracting systems," *Phys. Rev. E*, vol. 66, p. 036109, Sep 2002.
- [57] N. F. Carnahan and K. E. Starling, "Equation of state for nonattracting rigid spheres," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 51, no. 2, 1969.
- [58] T. C. Hales, J. Harrison, S. McLaughlin, T. Nipkow, S. Obua, and R. Zumkeller, "A revision of the proof of the kepler conjecture," in *The Kepler Conjecture*, pp. 341–376, Springer, 2011.
- [59] T. C. Hales, "A proof of the kepler conjecture," *Annals of mathematics*, pp. 1065–1185, 2005.
- [60] J. P. Hansen and I. R. McDonald, *Theory of Simple Liquids*. Academic Press, 2006.
- [61] A. Mulero (ed.), *Lecture Notes in Physics, Vol. 753*. Springer, 2008.
- [62] W. Kohn and L. J. Sham, "Self-consistent equations including exchange and correlation effects," *Phys. Rev.*, vol. 140, pp. A1133–A1138, Nov 1965.
- [63] R. G. Parr and W. Yang, *Density-Functional Theory of Atoms and Molecules*. Oxford University Press, 1989.
- [64] J. D. Van der Waals *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, vol. 13, p. 657, 1894.
- [65] P. Kalas, J. R. Graham, and M. Clampin, "A planetary system as the origin of structure in fomalhaut's dust belt," *Nature*, vol. 435, pp. 1067–1070, 2005.
- [66] G. B. Rybicki, "Exact statistical mechanics of a one-dimensional self-gravitating system," *Astrophysics and Space Science*, vol. 14, no. 1, p. 56, 1971.
- [67] L. Tonks, "The complete equation of state of one, two and three-dimensional gases of hard elastic spheres," *Phys. Rev.*, vol. 50, pp. 955–963, Nov 1936.

- [68] E. Trizac and I. Pagonabarraga, “Equation of state for hard-sphere fluids with and without kac tails,” *American Journal of Physics*, vol. 76, no. 8, 2008.
- [69] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*. NY : McGraw-Hill, 1953.
- [70] A. Alastuey, M. Magro, and P. Pujol, *Physics and Mathematical Tools*. 2008.
- [71] F. Hohl and M. R. Feix, “Numerical experiments with a one-dimensional model for a self-gravitating star system,” *The Astrophysical Journal*, vol. 147, p. 1164, 1967.
- [72] M. Joyce, J. Morand, F. m. c. Sicard, and P. Viot, “Scaling quasistationary states in long-range systems with dissipation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 070602, Feb 2014.
- [73] P. Martin and J. Piasecki, “One-dimensional ballistic aggregation : Rigorous long-time estimates,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 76, no. 1-2, pp. 447–476, 1994.
- [74] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Royal Society, 1687.
- [75] Sormani, M. C. and Bertin, G., “Gravothermal catastrophe : The dynamical stability of a fluid model,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 552, p. A37, 2013.
- [76] J. Sopik, C. Sire, and P.-H. Chavanis, “Self-gravitating brownian systems and bacterial populations with two or more types of particles,” *Phys. Rev. E*, vol. 72, p. 026105, Aug 2005.
- [77] L. Duriez, *Cours de mécanique céleste classique*. [http://lal.univ-lille1.fr/mecacel\\_duriez/CoursMCecr\\_Duriez.pdf](http://lal.univ-lille1.fr/mecacel_duriez/CoursMCecr_Duriez.pdf), 2007.
- [78] V. Ambartsumian, “On the statistics of double stars,” *Astronomicheskii Zhurnal*, vol. 14, no. 207, 1937. (English translation by D.W. Goldsmith).
- [79] L. Casetti and C. Nardini, “Caloric curve of star clusters,” *Phys. Rev. E*, vol. 85, p. 061105, Jun 2012.
- [80] J. Katz, “Stability limits for ‘isothermal’ cores in globular clusters,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 190, no. 3, pp. 497–507, 1980.
- [81] W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K Éditions, 2008.



## RÉSUMÉ DE LA THÈSE :

L'étude des systèmes auto-gravitants à  $N$  corps à l'aide des outils de la mécanique statistique reposait jusqu'à présent sur l'utilisation d'une approximation de type champ moyen, qui négligeait par construction les effets à courte portée de l'interaction. Pour commencer, je décris cette approximation dans son contexte historique, à savoir le modèle de la sphère isotherme. Puis, dans le cadre de la mécanique statistique du problème à  $N$  corps, j'introduis un système de sphères dures massives, qui permet de s'affranchir de l'effondrement du système de points matériels. La validité de l'approche hydrostatique est discutée dans l'ensemble microcanonique, en introduisant une limite d'échelle adéquate.

Cette étude permet de mettre en avant les critères de validité pour l'approche hydrostatique, et de constater qu'ils peuvent être mis en défaut dans les systèmes astrophysiques de type amas globulaires. Pour mieux les comprendre et les illustrer, je me concentre ensuite sur l'étude d'un modèle de bâtonnets durs massifs à une dimension, dont l'avantage est de permettre tous les calculs analytiques des différentes grandeurs statistiques. Ainsi, je mets en évidence comment l'approche de type champ moyen est mise en défaut pour certains états effondrés.

Enfin, dans le but de tenter de décrire des amas globulaires, je développe un modèle comprenant des étoiles célibataires et des étoiles binaires. Ce modèle reproduit bien les effets qualitatifs attendus, et il constitue une première correction satisfaisante au modèle historique de la sphère isotherme. Je mets aussi en évidence l'absence d'équilibre thermodynamique au sens strict pour les systèmes considérés. En conclusion, je réalise une estimation succincte de l'effet de la boîte confinant le système.