



UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
ÉCOLE DOCTORALE 142:  
MATHÉMATIQUES DE LA RÉGION PARIS-SUD  
Laboratoire de Mathématiques

SYNTHÈSE EN FRANÇAIS  
de la  
THÈSE DE DOCTORAT

Mathématiques

par

**Sourav GHOSH**

**Thermodynamique des espace temps  
de Margulis**

Date de soutenance: 10 juillet 2015

Composition du jury:

Directeur de thèse:.....Prof. François LABOURIE  
Rapporteur:.....Prof. Thierry BARBOT  
Rapporteur(absente):.....Prof. Anna WIENHARD  
Président du jury:.....Prof. Francis BONAHO  
Examinateur:.....Prof. Sylvain CROVISIER  
Examinateur:.....Prof. Yair Nathan MINSKY



Thèse préparée au  
**Département de Mathématiques d'Orsay**  
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât.425  
Université Paris-Sud 11  
91405 Orsay CEDEX

---

# Thermodynamique des espace temps de Margulis

---

Un espace-temps de Margulis  $M$  est un quotient de l'espace affine  $\mathbb{A}$  de dimension trois par un groupe libre, non-abélien  $\Gamma$  agissant par des transformations affines dont la partie linéaire est discrète.

Grigory Margulis a utilisé ces espaces, dans [27] et [28], comme des exemples pour répondre par la négative à la question suivante de Milnor.

**Question 1.** *Est-ce que le groupe fondamental d'une variété complète, plate et affine est virtuellement polycyclique?*

Si  $M$  est un espace-temps de Margulis, alors le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  ne contient aucune translation. Les résultats de Fried–Goldman et Mess, dans [15], [30], impliquent qu'une variété affine plate complète soit est un espace-temps de Margulis, soit admet comme groupe fondamental un groupe polycyclique.

Dans ma thèse, je ne considère que les espace-temps de Margulis dont la partie linéaire ne contient aucun élément parabolique, bien que par des résultats de Drumm, il existe des espace-temps de Margulis dont la partie linéaire contient des éléments paraboliques.

Fried–Goldman ont montré dans [15] qu'un conjugué de la partie linéaire de l'action affine du groupe fondamental de  $M$  est un sous-groupe de  $SO(2, 1)$  dans  $GL(3, \mathbb{R})$ . Par conséquent, les espace-temps de Margulis proviennent d'homomorphismes injectifs

$$\rho : \Gamma \longrightarrow SO^0(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^3$$

où  $\Gamma$  est un groupe libre non-abélien de rang fini.

Notons l'espace des homomorphismes injectifs d'un groupe libre  $\Gamma$  dans un groupe de Lie  $G$  par  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  et l'espace de cocycles par  $Z^1(L_\rho(\Gamma), \mathbb{R}^3)$ . Notons l'espace des homomorphismes  $\rho$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  tels que  $\rho(\Gamma)$  agit proprement sur  $\mathbb{A}$  et que  $L_\rho(\Gamma)$  est discret et ne contient aucun élément parabolique par  $\text{Hom}_M(\Gamma, G)$  où  $G := SO^0(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^3$ . Notons aussi l'espace des modules des espace-temps de Margulis par  $\mathcal{M}$ . On remarque que:

$$\mathcal{M} \cong \text{Hom}_M(\Gamma, G) / \sim$$

où  $\rho_1 \sim \rho_2$  si et seulement si  $\rho_1$  est un conjugué de  $\rho_2$  par un élément du groupe  $G$ . Soient  $\text{Hom}_S(\Gamma, SO^0(2, 1))$  l'espace de toutes les représentations Schottky de  $\Gamma$  dans  $SO^0(2, 1)$  et

$$\mathcal{T} := \text{Hom}_S(\Gamma, SO^0(2, 1)) / \sim$$

où  $\varrho_1 \sim \varrho_2$  si et seulement si  $\varrho_1$  est un conjugué de  $\varrho_2$  par un élément du groupe  $SO^0(2, 1)$ . Goldman–Labourie–Margulis ont montré dans [18] que:

**Theorem 0.0.1.** *[Goldman–Labourie–Margulis] L’espace des modules des espace-temps de Margulis  $\mathcal{M}$  est une partie ouverte dans le fibré tangent de la variété analytique  $\mathcal{T}$ .*

En conséquence,

**Proposition 0.0.2.** *L’espace des modules des espace-temps de Margulis  $\mathcal{M}$  est une variété analytique.*

Les classes de parallélisme des géodésiques de type temps de  $\mathbf{M}$  peuvent être paramétrées par une surface hyperbolique complète  $\Sigma$ . Des travaux récents de Danciger–Guéritaud–Kassel dans [13] montrent que  $\mathbf{M}$  est une fibration de  $\mathbb{R}$  sur  $\Sigma$  dont les fibres sont des géodésiques type temps.

Les travaux antérieurs de Charette–Goldman–Jones dans [12], Goldman–Labourie–Margulis dans [18] et Goldman–Labourie dans [17] ont montré que la dynamique de  $\mathbf{M}$  est étroitement liée à celle de  $\Sigma$ . Jones–Charette–Goldman ont montré dans [12] qu’elle existe des géodésiques bi-spirales dans  $\mathbf{M}$  et qu’ils correspondent aux géodésiques bi-spirales de  $\Sigma$ . Goldman–Labourie ont montré dans [17] que les géodésiques non errantes de type espace de  $\mathbf{M}$  correspondent aux géodésiques non errantes de  $\Sigma$ .

En effet, soient  $\rho \in \text{Hom}_{\mathbf{M}}(\Gamma, \mathbf{G})$  et  $\Sigma_\rho := \mathbf{L}_\rho(\Gamma) \backslash \mathbb{H}$  où  $\mathbf{L}_\rho(\Gamma)$  la partie linéaire de  $\rho(\Gamma)$  et  $\mathbb{H}$  le modèle de l’hyperboloïde du plan hyperbolique. Également, soient  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\Sigma_\rho$  et  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{M}_\rho$  les espaces des points non errantes du flot géodésique, respectivement sur  $\mathbf{U}\Sigma_\rho$  et sur  $\mathbf{U}\mathbf{M}_\rho$ , soit  $\mathbf{U}_{\text{rec}}^\rho \mathbb{H}$  son relèvement dans  $\mathbf{U}\mathbb{H}$  et soit  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbb{A}$  le relèvement de  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{M}$  dans  $\mathbf{U}\mathbb{A}$ , où  $\mathbf{U}\mathbb{A}$  et  $\mathbf{U}\mathbb{H}$  sont les fibrés tangents unitaires de  $\mathbb{A}$  et de  $\mathbb{H}$  respectivement.

Dans [18] Goldman–Labourie–Margulis démontre le théorème suivant:

**Theorem 0.0.3.** *[Goldman–Labourie–Margulis] Soit  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbf{G}$  un homomorphisme donnant lieu à un espace-temps de Margulis dont la partie linéaire  $\mathbf{L}_\rho(\Gamma)$  ne contient aucun élément parabolique. Alors il existe une application*

$$N_\rho : \mathbf{U}_{\text{rec}}^\rho \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{A}$$

et une fonction hölderienne positive

$$f_\rho : \mathbf{U}_{\text{rec}}^\rho \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telles que

1. pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on a  $f_\rho \circ \mathbf{L}(\rho(\gamma)) = f_\rho$ ,
2. pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on a  $N_\rho \circ \mathbf{L}(\rho(\gamma)) = \rho(\gamma)N_\rho$ , et
3. pour tout  $g \in \mathbf{U}_{\text{rec}}^\rho \mathbb{H}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$N_\rho(\tilde{\phi}_t g) = N_\rho(g) + \left( \int_0^t f_\rho(\tilde{\phi}_s(g)) ds \right) \nu(g)$$

où  $\nu$  est la section neutrale.

On appelle  $N_\rho$  une *section neutralisée*. Maintenant, en utilisant l'existence d'une section neutralisée, Goldman–Labourie ont démontré que:

**Theorem 0.0.4.** [Goldman–Labourie] *Soit  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbf{G}$  un homomorphisme donnant lieu à un espace-temps de Margulis tel que la partie linéaire  $L_\rho(\Gamma)$  ne contient aucun élément parabolique. Également, soient  $U_{\text{rec}}\Sigma_{L_\rho}$  et  $U_{\text{rec}}M_\rho$  définis comme ci-dessus. Maintenant, si  $N_\rho$  est une section neutralisée, alors il existe une application injective  $\hat{N}_\rho$  telle que le diagramme suivant commute,*

$$\begin{array}{ccc} U_{\text{rec}}^\rho \mathbb{H} & \xrightarrow{N_\rho} & U\mathbb{A} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_{\text{rec}}\Sigma_{L_\rho} & \xrightarrow{\hat{N}_\rho} & UM \end{array}$$

où  $N_\rho := (N_\rho, \nu)$ . En plus,  $\hat{N}_\rho$  est une homéomorphisme hölderienne sur  $U_{\text{rec}}M_\rho$  qui est aussi une équivalence des orbites.

Dans ma thèse, je commence par rappeler quelques notions préliminaires afin de préparer le terrain pour décrire explicitement les laminations stables et instables pour le flot géodésiques  $\Phi$  de  $U_{\text{rec}}M$ .

**Definition 0.0.5.** *Soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace métrique. Une lamination  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{X}$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{X}$  telle que pour tout  $x$  dans  $\mathcal{X}$  il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  dans  $\mathcal{X}$ , deux espaces topologiques  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  et un homéomorphisme  $f_x$  de  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  sur  $\mathcal{U}_x$  vérifiant les propriétés suivantes,*

1. *pour tous  $w, z$  dans  $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y$  on a  $p_2(f_x^{-1}(w)) = p_2(f_x^{-1}(z))$  si et seulement si  $p_2(f_y^{-1}(w)) = p_2(f_y^{-1}(z))$ , où  $p_2$  est la projection de  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  sur  $\mathcal{U}_2$ ,*
2. *pour tous  $w, z$  dans  $\mathcal{X}$ , on a  $w\mathcal{L}z$  si et seulement s'il existe une suite finie des points  $w_1, w_2, \dots, w_n$  dans  $\mathcal{X}$  avec  $w_1 = w$  et  $w_n = z$ , telle que  $w_{i+1}$  est dans  $\mathcal{U}_{w_i}$ , où  $\mathcal{U}_{w_i}$  est un voisinage de  $w_i$  et  $p_2(f_{w_i}^{-1}(w_i)) = p_2(f_{w_i}^{-1}(w_{i+1}))$  pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ .*

On appelle un tel homéomorphisme  $f_x$  une *carte* et les classes d'équivalence les *feuilles*. Une *plaque ouverte* dans la carte correspondant à  $f_x$  est un ensemble de la forme  $f_x(\mathcal{V}_1 \times \{x_2\})$  où  $x = f_x(x_1, x_2)$  et  $\mathcal{V}_1$  est un ouvert dans  $\mathcal{U}_1$ . La *topologie plaque* sur  $\mathcal{L}_x$  est engendrée par des plaques ouvertes. Un *voisinage plaque* de  $x$  est un voisinage pour la topologie plaque sur  $\mathcal{L}_x$ .

**Definition 0.0.6.** *Une structure du produit local sur  $\mathcal{X}$  est une paire de deux laminations  $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  vérifiant les propriétés suivantes: pour tout  $x$  dans  $\mathcal{X}$ , il existe deux voisinages plaques  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  de  $x$ , respectivement dans  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  et un homéomorphisme  $f_x$  de  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$  sur un voisinage  $\mathcal{W}_x$  de  $x$ , tel que  $f_x$  définit une carte pour les laminations  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ .*

Supposons que  $\psi_t$  est un flot sur  $\mathcal{X}$ . Une lamination  $\mathcal{L}$  invariante sous le flot  $\psi_t$  est *transverse* au flot, si pour tout  $x$  dans  $\mathcal{X}$ , il existe un voisinage plaque  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  dans  $\mathcal{L}_x$ , un espace topologique  $\mathcal{V}$ , un  $\epsilon$  positif et un homéomorphisme  $f_x$  de  $\mathcal{U}_x \times \mathcal{V} \times (-\epsilon, \epsilon)$  sur un voisinage ouvert  $\mathcal{W}_x$  de  $x$  dans  $\mathcal{X}$  vérifiant les propriétés suivantes:

$$\psi_t(f_x(u, v, s)) = f_x(u, v, s + t)$$

pour  $u$  dans  $\mathcal{U}_x$ ,  $v$  dans  $\mathcal{V}$  et pour  $s, t$  dans l'intervalle  $(-\epsilon, \epsilon)$ . Soit  $\mathcal{L}$  une lamination transverse au flot  $\psi_t$ . Définissons une nouvelle lamination  $\mathcal{L}^{\cdot,0}$ , appelée la *lamination centrale*, obtenue à partir de  $\mathcal{L}$  comme suit: on dit que  $y, z$  dans  $\mathcal{X}$  appartiennent à la même classe d'équivalence de  $\mathcal{L}^{\cdot,0}$  s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\psi_t y$  et  $z$  appartiennent à la même classe d'équivalence de  $\mathcal{L}$ .

**Definition 0.0.7.** Une lamination  $\mathcal{L}$  invariante sous un flot  $\psi_t$  est contractée sous le flot si et seulement s'il existe un nombre réel  $T_0$  tel que pour tout  $x$  dans  $\mathcal{X}$ , il existe une carte  $\mathfrak{f}_x$  d'un voisinage ouvert  $W_x$  de  $x$ , et pour deux points arbitraires  $y, z$  dans  $W_x$  avec  $y, z$  appartenant à la même classe d'équivalence de  $\mathcal{L}$ , on a,

$$d(\psi_t y, \psi_t z) < \frac{1}{2}d(y, z)$$

pour tout  $t > T_0$ .

**Definition 0.0.8.** Un flot  $\psi_t$  sur un espace métrique compact est un flot métrique Anosov, si et seulement s'il existe deux laminations  $\mathcal{L}^+$  et  $\mathcal{L}^-$  de  $\mathcal{X}$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites:

1.  $(\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^{-,0})$  définit une structure de produit locale sur  $\mathcal{X}$ ,
2.  $(\mathcal{L}^-, \mathcal{L}^{+,0})$  définit une structure de produit locale sur  $\mathcal{X}$ ,
3. les feuilles de  $\mathcal{L}^+$  sont contractées par le flot,
4. les feuilles de  $\mathcal{L}^-$  sont contractées par le flot inverse.

Dans un tel cas,  $\mathcal{L}^+$ ,  $\mathcal{L}^-$ ,  $\mathcal{L}^{+,0}$  et  $\mathcal{L}^{-,0}$  sont appelés respectivement les laminations stables, instables, stables centrales and instables centrales.

Je montre alors le résultat suivant:

**Lemma 0.0.9.** Il existe une métrique sur  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{M}$  qui est localement équivalente de manière bilipschitz à une métrique sur  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{A}$  obtenue à partir de la restriction de n'importe quelle métrique euclidienne sur  $\mathbf{T}\mathbf{A} \cong \mathbf{A} \times \mathbf{V}$  où  $\mathbf{V}$  l'espace vectoriel correspondant à l'espace affine  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{T}\mathbf{A}$  le fibré tangent de  $\mathbf{A}$ .

Soit  $v$  un vecteur de type espace de norme un et soient  $v^+$  et  $v^-$  deux vecteurs dans le cône de lumière futur tels que  $\det[v^-, v, v^+] > 0$ . Alors, je définis

**Definition 0.0.10.** Les partitions positives de  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{A}$  sont respectivement données par,

$$\mathcal{L}_{(X,v)}^+ := \tilde{\mathcal{L}}_{(X,v)}^+ \cap \mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{A}$$

où  $(X, v) \in \mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{A}$  et

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(X,v)}^+ := \{(X + s_1 v^+, v + s_2 v^+) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

**Definition 0.0.11.** Les partitions négatives de  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{A}$  sont respectivement données par,

$$\mathcal{L}_{(X,v)}^- := \tilde{\mathcal{L}}_{(X,v)}^- \cap \mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{A}$$

où  $(X, v) \in \mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{A}$  et

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(X,v)}^- := \{(X + s_1 v^-, v + s_2 v^-) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposition 0.0.12.** *Les partitions  $\underline{\mathcal{L}}^+$  et  $\underline{\mathcal{L}}^-$  décrivent deux laminations sur  $U_{\text{rec}}M$ .*

Je prouve aussi que:

**Theorem 0.0.13.** *Les laminations  $(\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^{-,0})$  et  $(\mathcal{L}^-, \mathcal{L}^{+,0})$  définissent une structure de produit locale sur  $U_{\text{rec}}\mathbb{A}$ .*

En fait, les laminations sont équivariantes sous l'action de  $\Gamma$  et sous le flot de géodésique.

**Definition 0.0.14.** *Les projections de  $\mathcal{L}^+$  et  $\mathcal{L}^-$  sur l'espace  $U_{\text{rec}}M$  sont notées respectivement par  $\underline{\mathcal{L}}^+$  et  $\underline{\mathcal{L}}^-$ , où  $\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^-$  sont définis comme ci-dessus.*

Ensuite, je démontre le résultat suivant:

**Theorem 0.0.15.** *Soient  $\underline{\mathcal{L}}^+$  et  $\underline{\mathcal{L}}^-$  deux laminations de l'espace métrique  $U_{\text{rec}}M$  telles qu'elles sont définies dans la définition ci-dessus. Le flot géodésique sur l'espace des géodésiques non errantes de type espace dans  $M$  contracte exponentiellement la lamination  $\underline{\mathcal{L}}^+$  par le flot positif et contracte exponentiellement la lamination  $\underline{\mathcal{L}}^-$  par le flot négatif.*

Il s'en suit que  $U_{\text{rec}}M$  a une structure métrique Anosov.

En outre, dans cette thèse je définis la notion de représentation Anosov dans le contexte du groupe de Lie non semisimple  $SO^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3$ . La notion d'une représentation Anosov d'un groupe discret dans un groupe de transformations  $G$  a été introduite par Labourie dans [25]. En suite, Guichard–Wienhard ont étudié les représentations Anosov dans les groupes de Lie semisimples en plus de détail dans [21]. Récemment, dans [8] Bridgeman–Canary–Labourie–Sambarino ont introduite le flot géodésique d'une représentation Anosov et le formalisme thermodynamique dans ce cas, encore dans le contexte de  $G$  étant un groupe de Lie semisimple. Dans cette thèse, j'étudie des cas spéciaux et de nouveaux exemples de représentations Anosov lorsque  $G$  est le groupe non semisimple  $SO^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3$ .

Soit  $\mathbb{X}$  l'espace de tous les plans affines nuls. On observe que  $G$  agit transitivement sur  $\mathbb{X}$ . Par conséquent, pour tout  $P \in \mathbb{X}$ , on a

$$\mathbb{X} = G.P \cong G/\text{Stab}_G(P).$$

**Definition 0.0.16.** *Si  $P \in \mathbb{X}$ , je définis*

$$P_P := \text{Stab}_G(P).$$

*J'appelle  $P_P$  un sous-groupe pseudo-parabolique de  $G$ .*

Soit  $P_{X,w_1,w_2}$  le plan passant par un point  $X \in \mathbb{A}$  avec l'espace vectoriel correspondant engendré par les vecteurs  $w_1$  et  $w_2$ . On fixe un point  $O \in \mathbb{A}$  et définit:

$$P^\pm := \text{Stab}_G(P_{O,v_0,v_0^\pm}).$$

Aussi soit  $L = P^+ \cap P^-$ . Notons la boundary de Gromov du groupe  $\Gamma$  par  $\partial_\infty\Gamma$  et le flot géodésique de Gromov sur

$$U_0\Gamma := \Gamma \backslash (\partial_\infty\Gamma^{(2)} \times \mathbb{R})$$

par  $\psi$ .

**Definition 0.0.17.** *On dit que  $\rho$  dans  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{G})$  est  $(\mathbf{G}, \mathbf{P}^\pm)$ -Anosov si et seulement s'il existe deux applications continues*

$$\xi_\rho^\pm : \partial_\infty \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}^\pm$$

telles que les suivantes sont vraies:

1. Pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , on a  $\xi_\rho^\pm \circ \gamma = \rho(\gamma) \cdot \xi_\rho^\pm$ .
2. Si  $x \neq y$  dans  $\partial_\infty \Gamma$ , alors  $(\xi_\rho^+(x), \xi_\rho^-(y))$  réside dans  $\mathbf{G}/\mathbf{L}$ .
3. Le fibré induit  $\Xi_\rho^+ := (\xi_\rho^+ \circ \pi_1)^* \mathbf{E}^+$  est contracté par le revêtement du flot  $\tilde{\psi}_t$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et le fibré induit  $\Xi_\rho^- := (\xi_\rho^- \circ \pi_2)^* \mathbf{E}^-$  est contracté par le revêtement du flot  $\tilde{\psi}_t$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .

Les applications  $\xi_\rho^\pm$  sont les *applications limites* associées à la représentation  $(\mathbf{G}, \mathbf{P}^\pm)$ -Anosov  $\rho$ .

**Proposition 0.0.18.** *Si  $\rho$  est dans  $\text{Hom}_M(\Gamma, \mathbf{G})$ , alors  $\rho$  est  $(\mathbf{G}, \mathbf{P}^\pm)$ -Anosov.*

En d'autres termes, les monodromies de l'espace-temps de Margulis sont "des représentations Anosov dans le groupe de Lie non semi-simple  $\text{SO}^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3$ ".

J'utilise cette propriété Anosov et la théorie du formalisme thermodynamique qui est développée par Bowen, Bowen–Ruelle, Parry–Pollicott, Pollicott et Ruelle et d'autres dans [5], [6], [33], [34], [35] pour définir l'entropie et l'intersection. En outre, j'utilise la propriété métrique Anosov pour montrer que l'entropie et l'intersection varient analytiquement sur  $\mathcal{M}$ . Enfin, je définis et j'étudie la métrique de pression sur  $\mathcal{M}$ .

L'étude de la métrique de pression dans le cadre des variétés de représentation a été initiée par McMullen et Bridgeman–Taylor respectivement dans [29], [9]. McMullen a donné la métrique de Weil–Petersson en termes de métrique de pression sur l'espace de Teichmüller. Bridgeman–Taylor ont généralisé le résultat au cas quasi-fuchsien dans [9]. Bridgeman a également étudié la métrique de pression dans le cadre du groupe de Lie semi-simple  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  dans [7].

Les résultats récents de Bridgeman–Canary–Labourie–Sambarino dans [8] prolongent cela dans le contexte de n'importe quel groupe de Lie semi-simple. Dans cette thèse, j'étudie le cas où le groupe de Lie en question est  $\text{SO}^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3$ , un groupe de Lie non semi-simple.

Soit

$$\rho : \Gamma \rightarrow \text{SO}^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3$$

une représentation donnant lieu à un espace-temps de Margulis et soit  $\alpha_\rho(\gamma)$  l'invariant de Margulis de  $\gamma \in \Gamma$  pour la représentation  $\rho$ . Maintenant, pour un nombre réel positif  $T$ , soit

$$R_T(\rho) := \{\gamma \in \mathbf{O} \mid \alpha_\rho(\gamma) \leq T\}$$

où  $\mathbf{O}$  est la collection de toutes les classes de conjugaison d'éléments de  $\Gamma$ . Nous définissons l'entropie comme suit:

**Definition 0.0.19.** L'entropie de la représentations  $\rho$  est donnée par:

$$h_\rho = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(\#R_T(\rho)).$$

Je démontre que  $R_T(\rho)$  est de cardinal fini et  $h_\rho$  est bien défini, fini et positif.

**Definition 0.0.20.** L'intersection de deux représentations  $\rho_1, \rho_2$  est donnée par:

$$I(\rho_1, \rho_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\#R_T(\rho_1)} \sum_{[\gamma] \in R_T(\rho_1)} \frac{\alpha_{\rho_2}(\gamma)}{\alpha_{\rho_1}(\gamma)}.$$

**Definition 0.0.21.** L'intersection renormalisée de deux représentations  $\rho_1$  et  $\rho_2$  est donnée par:

$$J_{\rho_1}(\rho_2) = I(\rho_1, \rho_2) \frac{h_{\rho_2}}{h_{\rho_1}}.$$

Je démontre que l'intersection et l'intersection renormalisée sont bien définies et je montre aussi la proposition suivante:

**Proposition 0.0.22.** Les applications suivantes sont analytiques réelles:

$$h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

Afin de montrer que l'entropie et l'intersection varie analytiquement je prouve les deux résultats techniques suivantes:

**Theorem 0.0.23.** Soit  $\{\rho_u\}_{u \in \mathcal{D}}$  une famille analytique réelle dans  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{G})$  paramétrisée par une disque  $\mathcal{D}$  centrée en 0. Si  $\rho_0$  est  $(\mathbf{G}, \mathbf{P}^\pm)$ -Anosov avec des applications limites

$$\xi_0^\pm : \partial_\infty \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}^\pm$$

alors il existe une sous-disque  $\mathcal{D}_0$  de  $\mathcal{D}$  (contenant 0), un positif  $\mu$  et une application continue

$$\xi^+ : \mathcal{D}_0 \times \partial_\infty \Gamma \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}^+$$

avec les propriétés suivantes:

1. Si  $u$  est dans  $\mathcal{D}_0$ , alors  $\rho_u$  est une représentation  $(\mathbf{G}, \mathbf{P}^\pm)$ -Anosov avec l'application limite  $\mu$ -Hölder donnée par

$$\begin{aligned} \xi_u^+ : \partial_\infty \Gamma &\longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}^+ \\ x &\longmapsto \xi^+(u, x), \end{aligned}$$

2. Si  $x$  est dans  $\partial_\infty \Gamma$ , alors l'application suivante est analytique réelle

$$\begin{aligned} \xi_x^+ : \mathcal{D}_0 &\longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}^+ \\ u &\longmapsto \xi^+(u, x), \end{aligned}$$

3. L'application de  $\partial_\infty\Gamma$  à  $C^\omega(\mathcal{D}_0, \mathbf{G}/\mathbf{P}^+)$  donnée par  $x \mapsto \xi_x^+$  est  $\mu$ -hölderienne,
4. L'application de  $\mathcal{D}_0$  à  $C^\mu(\partial_\infty\Gamma, \mathbf{G}/\mathbf{P}^+)$  donnée par  $u \mapsto \xi_u^+$  est analytique réelle.

Il s'ensuit des résultats de Goldman–Labourie–Margulis et de Goldman–Labourie respectivement dans [18] et dans [17] qu'il existe un homéomorphisme qui est aussi une équivalence des orbites entre  $\mathbf{U}_0\Gamma$  et  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{M}_\rho$  tel que le flot affine linéaire sur  $\mathbf{U}_{\text{rec}}\mathbf{M}_\rho$  est une réparamétrisation hölderienne du flot de Gromov. Donc pour tout  $\rho \in \text{Hom}_{\mathbf{M}}(\Gamma, \mathbf{G})$  on a une application hölderienne, positive

$$f_\rho : \mathbf{U}_0\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

qui donne la réparamétrisation. En plus, notons que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on a

$$\int_\gamma f_\rho = \alpha_\rho(\gamma)$$

où  $\alpha_\rho(\gamma)$  est l'invariante de Margulis. Dans ma thèse je démontre que:

**Proposition 0.0.24.** *Soit  $\{\rho_u\}_{u \in \mathcal{D}}$  une famille des homomorphismes analytiques réels où  $\rho_u \in \text{Hom}_{\mathbf{M}}(\Gamma, \mathbf{G})$  est paramétrisée par une disque  $\mathcal{D}$  centrée en 0. Alors, il existe une sous-disque  $\mathcal{D}_1$  centrée en 0 et une famille analytique réelle*

$$\{f_u : \mathbf{U}_0\Gamma \rightarrow \mathbb{R}\}_{u \in \mathcal{D}_1}$$

de fonctions hölderienne, positives telles que la fonction  $f_u$  est cohomologue de Liïsic à la fonction  $f_{\rho_u}$ .

Enfin, je définis la métrique de pression comme étant la Hessienne de  $J$ , c'est-à-dire,

**Definition 0.0.25.** *Soit  $\rho \in \text{Hom}_{\mathbf{M}}(\Gamma, \mathbf{G})$  et soient  $v, w \in \mathbf{T}_\rho \text{Hom}_{\mathbf{M}}(\Gamma, \mathbf{G})$ . La métrique de pression est définie comme*

$$\mathbf{P}_\rho(v, w) := \mathbf{D}_\rho^2 J_\rho(v, w).$$

Il résulte du formalisme thermodynamique que la métrique de pression  $\mathbf{P}$  sur  $\text{Hom}_{\mathbf{M}}(\Gamma, \mathbf{G})$  est définie non-négative. Je continue en démontrant:

**Proposition 0.0.26.** *Soit  $\{\rho_t\}$  un chemin lisse dans  $\text{Hom}_{\mathbf{M}}(\Gamma, \mathbf{G})$  avec  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \rho_t = v$ . Si  $\mathbf{P}_\rho(v, v) = 0$  et  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} h_{\rho_t} = 0$ , alors pour tout  $\gamma$  dans  $\Gamma$*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha_{\rho_t}(\gamma) = 0.$$

Bridgeman–Canary–Labourie–Sambarino ont démontré le résultat suivant dans [8].

**Proposition 0.0.27.** *[Bridgeman, Canary, Labourie, Sambarino] Soit  $\varrho$  un point dans  $\text{Hom}_{\mathbf{S}}(\Gamma, \text{SO}^0(2, 1))$  où  $\text{Hom}_{\mathbf{S}}(\Gamma, \text{SO}^0(2, 1))$  est l'espace de toutes les représentations Schottky. Alors,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ell_\varrho(\gamma^n \eta^n) - \ell_\varrho(\gamma^n) - \ell_\varrho(\eta^n)) = \log \mathbf{b}_\varrho(\eta^-, \gamma^-, \gamma^+, \eta^+)$$

où  $\ell_\rho(\gamma)$  est la longueur de la géodesique fermée correspondant à  $\varrho(\gamma)$ .

En outre, dans [19] (voir aussi [16]) Goldman–Margulis ont démontré que:

**Theorem 0.0.28.** [Goldman–Margulis] Soit  $\{\varrho_t\}_{t \in (-1,1)} \subset \text{Hom}_S(\Gamma, \text{SO}^0(2,1))$  un chemin lisse. Alors pour toutes  $\gamma \in \Gamma$ , on a

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \ell_{\varrho_t}(\gamma) = \alpha_{(\varrho_0, \dot{\varrho}_0)}(\gamma)$$

où  $\ell_{\varrho_t}(\gamma)$  est la longueur de la géodesique fermée de  $\Sigma_{\varrho_t}$  correspondant à  $\varrho_t(\gamma) \in \varrho_t(\Gamma)$  et  $\dot{\varrho}_0 := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varrho_t$ .

J'utilise l'intuition acquise dans les deux théorèmes précédents pour démontrer ce qui suit:

**Proposition 0.0.29.** Soient  $\{\rho_t\}_{t \in (-1,1)}$  un chemin lisse dans  $\text{Hom}_M(\Gamma, \mathbf{G})$  et  $X_{\rho_t(\gamma)}$  un point quelconque sur la seule droite affine fixée par  $\rho_t(\gamma)$  où  $\gamma \in \Gamma$ . Alors, pour tous  $\gamma, \eta$  dans  $\Gamma$ , on a

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{\rho_t}(\gamma^n \eta^n) - \alpha_{\rho_t}(\gamma^n) - \alpha_{\rho_t}(\eta^n)) \\ &= \langle X_{\rho_t(\gamma)} - X_{\rho_t(\eta)} \mid \nu_{\rho_t}(\eta^-, \gamma^+) + \nu_{\rho_t}(\eta^+, \gamma^-) \rangle, \\ & \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle X_{\rho_t(\gamma)} - X_{\rho_t(\eta)} \mid \nu_{\rho_t}(\eta^-, \gamma^+) + \nu_{\rho_t}(\eta^+, \gamma^-) \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha_{\rho_t}(\gamma^n \eta^n) - \alpha_{\rho_t}(\gamma^n) - \alpha_{\rho_t}(\eta^n)) \end{aligned}$$

où  $\nu$  est la section neutrale et  $\langle \mid \rangle$  est la métrique Lorentzienne standard sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Theorem 0.0.30.** Soit  $\{\varrho_t\}_{t \in (-1,1)}$  un chemin lisse dans  $\text{Hom}_S(\Gamma, \text{SO}^0(2,1))$  tel que  $\rho := (\varrho_0, \dot{\varrho}_0) \in \text{Hom}_M(\Gamma, \mathbf{G})$  où  $\dot{\varrho}_0 := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varrho_t$ . Alors on a

$$\begin{aligned} & \langle X_{\rho(\gamma)} - X_{\rho(\eta)} \mid \nu_{\rho}(\eta^-, \gamma^+) + \nu_{\rho}(\eta^+, \gamma^-) \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \log \mathbf{b}_{\varrho_t}(\eta^-, \gamma^-, \gamma^+, \eta^+) \end{aligned}$$

où  $X_{\rho(\gamma)}$  est un point quelconque sur la seule droite affine fixée par  $\rho(\gamma)$  et  $X_{\rho(\eta)}$  est un point quelconque sur la seule droite affine fixée par  $\rho(\eta)$ .

En plus, en utilisant les résultats ci-dessus, je montre que:

**Lemma 0.0.31.** Si pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on a  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_{\rho_t}(\gamma) = 0$  alors pour tous  $\gamma, \eta \in \Gamma$  on a

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{b}_{\rho_t}(\eta^+, \gamma^-, \gamma^+, \eta^-) = 0.$$

Et la proposition suivant s'ensuit:

**Proposition 0.0.32.** Soit  $\{\rho_t\}_{t \in (-1,1)}$  un chemin lisse dans  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})$  avec

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho_t = \dot{\rho}_0.$$

Si  $\mathbb{P}_{\rho_0}(\dot{\rho}_0, \dot{\rho}_0) = 0$  et  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h_{\rho_t} = 0$  alors

$$[\dot{\rho}_0] = 0$$

dans  $H_{\rho_0}^1(\Gamma, \mathfrak{g})$  où  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie du groupe de Lie  $\mathbb{G}$  et  $H_{\rho_0}^1(\Gamma, \mathfrak{g})$  est la cohomologie de groupe.

Soit  $h_{\rho}$  l'entropie topologique qui est liée à une représentation  $\rho \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})$ . Ensuite, je définis les *sections d'entropie constante* de  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})$  pour tout  $k > 0$  comme:

$$\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_k := \{\rho \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G}) \mid h_{\rho} = k\}. \quad (0.0.1)$$

Notons que, si  $(\varrho, \mathbf{u})$  est dans  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \text{SO}^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3) = \text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})$  alors  $(\varrho, c\mathbf{u})$  l'est aussi où  $c > 0$ .

**Lemma 0.0.33.** Soit  $(\varrho, \mathbf{u}) \in \text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \text{SO}^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3)$  alors pour  $c > 0$ , on a

$$h_{(\varrho, c\mathbf{u})} = \frac{1}{c} h_{(\varrho, \mathbf{u})}.$$

**Proposition 0.0.34.** L'espace  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_k$  est une sous-variété analytique de codimension un dans  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})$  pour tout  $k > 0$ .

**Remark 0.0.35.** L'application suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k : \text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_1 &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_k \\ (\varrho, \mathbf{u}) &\longmapsto \left( \varrho, \frac{1}{k} \mathbf{u} \right) \end{aligned}$$

donne un isomorphisme analytique entre  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_1$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_k$ .

**Proposition 0.0.36.** L'espace  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})$  est isomorphe analytiquement à l'espace produit  $\text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_1 \times \mathbb{R}$ .

**Definition 0.0.37.** Le multivers de Margulis avec entropie  $k$  est

$$\mathcal{M}_k := \text{Hom}_{\mathbb{M}}(\Gamma, \mathbb{G})_k / \sim$$

où  $k > 0$  et  $\rho_1 \sim \rho_2$  si et seulement si  $\rho_1$  est un conjugué de  $\rho_2$  par un élément du groupe  $\mathbb{G} = \text{SO}^0(2, 1) \times \mathbb{R}^3$ .

Enfin, je démontre que:

**Theorem 0.0.38.** Soient  $\mathcal{M}_k$  une section d'entropie constante de la variété analytique  $\mathcal{M}$  avec entropie  $k$  et  $\mathbb{P}$  la métrique de pression sur  $\mathcal{M}$ . Alors  $(\mathcal{M}_k, \mathbb{P}|_{\mathcal{M}_k})$  est une variété riemannienne analytique.

Et je conclus ma thèse en montrant le résultat suivant:

**Theorem 0.0.39.** La signature de la métrique de pression  $\mathbb{P}$  sur l'espace des modules  $\mathcal{M}$  est  $(\dim(\mathcal{M}) - 1, 0)$ .

# Bibliography

- [1] ABELS, H.: “*Properly discontinuous groups of affine transformations, A survey*” *Geometriae Dedicata* 87, 309-333, (2001).
- [2] ABELS, H., MARGULIS, G. A. and SOIFER, G.: “*Properly discontinuous groups of affine transformations with orthogonal linear part.*” *C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math.* 324 (3), 253-258, (1997).
- [3] ABELS, H., MARGULIS, G. A. and SOIFER, G.: “*On the Zariski closure of the linear part of a properly discontinuous group of affine transformations.*” *J. Diff. Geo.* 60 (2), 315-344, (2002).
- [4] BONAHOON, F.: “*The geometry of Teichmüller space via geodesic currents,*” *Invent. Math.* 92, 139-162, (1988).
- [5] BOWEN, R.: “*Symbolic dynamics for hyperbolic flows*” *Amer. J. Math.* 95 (1973), 429-460.
- [6] BOWEN, R. and RUEELLE, D.: “*The ergodic theory of axiom A flows*” *Invent. Math.* 29 (1975), 181-202.
- [7] BRIDGEMAN, M.: “*Hausdorff dimension and the Weil-Petersson extension to quasifuchsian space*” *Geom. and Top.* 14 (2010), 799-831.
- [8] BRIDGEMAN, M., CANARY, R., LABOURIE, F. and SAMBARINO, A.: “*The pressure metric for convex homomorphisms.*” arXiv preprint arXiv:1301.7459 (2013).
- [9] BRIDGEMAN, M. and TAYLOR, E.: “*An extension of the Weil-Petersson metric to quasi-Fuchsian space*” *Math. Ann.* 341 (2008), 927-943.
- [10] CHAMPETIER, C.: “*Petite simplification dans les groupes hyperboliques,*” *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 3, 161221, (1994).
- [11] CHARETTE, V. and DRUMM, T.: “*Strong marked isospectrality of affine Lorentzian groups.*” *J. Differential Geom.* 66 , no. 3, 437–452, (2004) .
- [12] CHARETTE, V., GOLDMAN, W. M. and JONES, C. A.: “*Recurrent Geodesics in Flat Lorentz 3-Manifolds.*” (2001).
- [13] DANCIGER, J, GUÉRITAUD, F. and KASSEL, F.: “*Geometry and Topology of Complete Lorentz SpaceTimes of Constant Curvature.*” (2013).

- [14] DRUMM, T.: “*Fundamental polyhedra for Margulis space-times*”, Doctoral Dissertation, University of Maryland (1990).
- [15] FRIED, D. and GOLDMAN, W. M.: “*Three-dimensional affine crystallographic groups.*” Adv. in Math. 47, 1-49, (1983).
- [16] GOLDMAN, W. M. : “*The Margulis Invariant of Isometric Actions on Minkowski (2+1)-Space*”. Rigidity in Dynamics and Geometry, pp 187-201, (2002).
- [17] GOLDMAN, W. M. and LABOURIE, F.: “*Geodesics in Margulis spacetimes.*” Ergodic Theory and Dynamical Systems, 32, 643-651, (2012).
- [18] GOLDMAN, W. M., LABOURIE, F. and MARGULIS, G.: “*Proper affine actions and geodesic flows of hyperbolic surfaces.*” Annals of mathematics 170.3, 1051-1083, (2009).
- [19] GOLDMAN, W. M. and MARGULIS, G.: “*Flat Lorentz 3-manifolds and cocompact Fuchsian groups,*” Contemporary Mathematics, 262, pp 135-146, (2000).
- [20] GROMOV, M.: “*Hyperbolic groups,*” in Essays in Group Theory, MSRI Publ. 8, 75263, (1987).
- [21] GUICHARD, O. and WIENHARD, A.: “*Anosov representations: Domains of discontinuity and applications.*” Inventiones Mathematicae, Volume 190, Issue 2, 357-438, (2012).
- [22] HIRSCH, M. W., PUGH, C. C. and SHUB, M.: “*Invariant manifolds, Lecture Notes in Mathematics*” Vol. 583, (1977).
- [23] HUBBARD, J.: “*Teichmüller theory and applications to geometry, topology and dynamics.*” Vol 1., Matrix Editions, Ithaca.
- [24] LABOURIE, F.: “*Fuchsian affine actions of surface groups.*” J. Diff. Geo. 59 (1), 15 - 31, (2001).
- [25] LABOURIE, F.: “*Anosov Flows, Surface Groups and Curves in Projective Space.*” Inventiones Mathematicae, Volume 165, Issue 1, 51-114, (2006).
- [26] LIVSIC, A.N.: “*Cohomology of dynamical systems*” Math. USSR Izvestija 6 (1972).
- [27] MARGULIS, G. A.: “*Free completely discontinuous groups of affine transformations.*” Dokl. Akad. Nauk SSSR 272, 785-788, (1983).
- [28] MARGULIS, G. A.: “*Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group.*” J. Soviet Math. 134, 129-134, (1987).
- [29] MCMULLEN, C.: “*Thermodynamics, dimension and the Weil-Petersson metric*” Invent. Math. 173 (2008), 365-425.
- [30] MESS, G.: “*Lorentz spacetimes of constant curvature.*” Geom. Dedicata 126, 3-45, (2007).

- [31] MILNOR, J.: “*On fundamental groups of complete affinely flat manifolds.*” Adv. in Math. 25, 178-187, (1977).
- [32] MINEYEV, I.: “*Flows and joins of metric spaces,*” Geom. Top. 9, 403-482, (2005).
- [33] PARRY, W. and POLLICOTT, M.: “*Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*” Astérisque 187-188 (1990).
- [34] POLLICOTT, M.: “*Symbolic dynamics for Smale flows*” Am. J. of Math. 109 (1987), 183-200.
- [35] RUELLLE, D.: “*Thermodynamic Formalism*” Addison-Wesley, London (1989).
- [36] SAMBARINO, A.: “*Quantitative properties of convex representations,*” Comm. Math. Helv., 89, 443-488 (2014).
- [37] SHUB, M.: “*Global Stability of Dynamical Systems*” Springer-Verlag, (1987).
- [38] WOLPERT, S.: “*Thurston’s Riemannian metric for Teichmüller space*” J. Diff. Geom. 23 (1986), 143-174.