Université Paris-Sud

Faculté des sciences d'Orsay
École doctorale de mathématiques de la région Paris-sud (ED 142)
Laboratoire de mathématique d'Orsay (UMR 8628 CNRS)

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

par

Artem KOZHEVNIKOV

Propriétés métriques des ensembles de niveau des applications différentiables sur les groupes de Carnot

Date de soutenance : le 29 mai 2015

Composition du jury :	Guy DAVID	(Examinateur)
	Bruno FRANCHI	(Rapporteur)
	Hervé PAJOT	(Rapporteur)
	Pierre PANSU	(Directeur de thèse)
	Sergey VODOPYANOV	(Examinateur)

Synthèse en français

1. Synthèse en français

Au sens large ce papier est consacré à l'étude des propriétés métriques des *sous-variétés* dans la géométrie sous-riemannienne. Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le programme général de la théorie métrique de la mesure sur les espaces métriques qui a connu un développement actif ces dernières années. Les variétés sous-riemanniennes font partie des espaces métriques ayant gardé beaucoup de structures importantes des espaces euclidiens, or, leurs propriétés métriques peuvent être très différentes, voire surprenantes, comparées à celles des espaces classiques. Voici quelques références particulièrement appréciables [Mon02 ; Gro96 ; FS82 ; AS04 ; CDPT07].

Une variété sous-riemannienne est une variété riemannienne (connexe) $(\mathbb{M}, d)$ munie de champs de vecteurs tangents $\{X_i \subset T\mathbb{M} \mid i = 1, \dots, n\}$, appelés *horizontaux*. Étant donnés ces champs de vecteurs la métrique sous-riemannienne d qui porte aussi le nom de métrique de *Carnot-Carathéodory* est définie comme

$$\mathsf{d}(a, b) = \inf_{\gamma}\{\mathrm{Length}_d(\gamma)\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des courbes (appelées *admissibles* ou *horizontales*) absolument continues $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{M}$ qui relient les deux points, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$, et dont le vecteur tangent $\gamma'(t)$ appartient au plan $H\mathbb{M}_{\gamma(t)} = \mathrm{span}\{X_i(\gamma(t))\}_{i=1,\dots,n}$ pour presque tout $t \in [0, 1]$. Le choix de champs de vecteurs $\{X_i\}$ n'est pas arbitraire en géométrie sous-riemanniennes, on suppose notamment que $\{X_i\}$ forment un système non-holonome. Cela veux dire qu'il existe un entier N telle que $H_N\mathbb{M} = T\mathbb{M}$ où les sous-espaces tangents $H_i\mathbb{M}$ sont définis par récurrence

$$H_1\mathbb{M} = H_1\mathbb{M}, \quad H_{i+1}\mathbb{M} = H_i\mathbb{M} + [H_1\mathbb{M}, H_i\mathbb{M}].$$

Si deux sous-espaces tangents sont engendrés par des champs des vecteurs $T_1 = \mathrm{span}\{Y_1, \dots, Y_k\}$ et $T_2 = \mathrm{span}\{Z_1, \dots, Z_l\}$, le sous-espace tangent $[T_1, T_2]$ est défini comme $[T_1, T_2] = \mathrm{span}\{[Y_i, Z_j] \mid i = 1, \dots, k, \quad i = j, \dots, k\}$.

Cette propriété est en fait suffisante pour garantir que pour toute paire de points $a, b \in \mathbb{M}$ peut être liée par une courbe horizontale et les topologies induites sur $\mathbb{M}$ par d et d sont équivalentes. Le résultat correspondant a été démontré indépendamment par P. K. Rashevsky [Ras38] et W. L. Chow [Cho40]. Selon le domaine, cette propriété peut apparaître sous des noms différents comme, par exemple, condition de Hörmander, propriété de Rashevsky-Chow, non-holonomie ou non-intégrabilité complète, "bracket generating condition".

Dans ce travail nous allons considérer seulement un modèle local[1] qui correspond à un espace tangent à une variétés sous-riemanniennes en point régulier. Ce modèle a

[1] Comme cela sera clair plus bas notre étude a toujours un caractère local et nous espérons que nos résultats trouverons leur analogues sur des variétés sous-riemanniennes générales.

une structure en plus, - celle de groupe de Lie nilpotent stratifié $(\mathbb{G}, \cdot)$ et il porte le nom de *groupe de Carnot* (voir Section 2.1). La métrique d s'avère être invariante par rapport à l'action (à gauche) du groupe $\mathbb{G}$. Un groupe de Carnot possède aussi d'un groupe d'automorphismes à un paramètre appelés *dilatations* $\{\delta_t\}_{t>0}$. Sur les vecteurs horizontaux l'action induite par les dilatations est juste une multiplication par t comme celle d'une homothétie classique tandis que $\delta_t(X) = t^i X$ si X appartient à i-ième strate. La métrique d est également homogène par rapport à ces dilatations anisotropes.

La notion qui joue un rôle essentiel dans notre étude est celle de la *différentiabilité horizontale*. Par analogie avec la définition classique, une application $F\colon \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^2$ entre deux groupes de Carnot d est horizontalement différentiable au point $a \in \mathbb{G}^1$ si au voisinage de a elle peut être approximée à l'ordre un en métrique de Carnot par un morphisme homogène $L\colon \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^2$ (c'est-à-dire, un homomorphisme qui commute avec δ_t voir Definition 2.3.2). Ce morphisme est alors appelé la différentielle horizontale et désigné par $D_hF(a)$. Si $D_hF(\cdot)$ existe et est continu sur un ouvert Ω, alors on dit que $F \in C^1_h(\Omega, \mathbb{G}^2)$. La classe C^1_h devient tout simplement C^1 si les deux groupes $\mathbb{G}^1 = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{G}^2 = \mathbb{R}^m$ sont abéliens. De façon remarquable, comme pour un calcul différentiel classique, l'appartenance à la classe C^1_h peut être caractérisée par l'existence de dérivées partielles continues hormis le fait qu'il s'agit maintenant de dérivées le long des champs de vecteurs horizontaux uniquement et le résultat d'une telle dérivation doit être un vecteur horizontal dans l'espace d'arrivée (voir Theorem 2.3.3).

Maintenant nous pouvons parler de l'objet clé de cette thèse : les *sous-variétés* (intrinsèques) dans un groupe de Carnot. L'ensemble $S \subset \mathbb{G}^1$ est appelé une sous-variété intrinsèque si dans un voisinage de tout point $p \in S$ il coïncide avec un ensemble de niveau $F^{-1}(e)$ d'une application horizontalement différentiable $F \in C^1_h(\mathbb{G}^1, \mathbb{G}^2)$ telle que la différentielle horizontale $D_hF(p)$ est surjective[2]. Cette définition est tout à fait semblable à celle d'une sous-variété en géométrie différentielle.

Nous allons étudier les propriétés locales de S ce qui veut dire que nous pouvons considérer S comme étant un ensemble de niveau de F comme ci-dessus dans une petite boule. Nous sommes donc dans une situation similaire à celle du théorème classique des fonctions implicites. Pour les groupes $\mathbb{G}^1$ et $\mathbb{G}^2$ fixes, un exemple trivial de S est donné par $S_0 = L^{-1}(e) \cap B(e, r)$, $r > 0$, une équation "linéaire" avec un morphisme homogène surjectif $L = D_hF(p)\colon \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^2$. Les questions que nous nous sommes posées sur S sont les suivantes :

- Existe-elle une paramétrisation "canonique" $P\colon S_0 \to S$?
- Quelle est la topologie de S ? Existe-il un homéomorphisme $P\colon S_0 \to S$?
- Quelle est la dimension métrique (de Hausdorff) de S ? $\dim S = \dim S_0$?
- Quelle est la régularité de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{\dim S}$ sur S ?
- Comment calculer effectivement cette mesure ?
- Existe-il un espace tangent $\mathrm{Tan}(S, p)$ vers S ?

[2]Bien entendu, pour que S soit non-vide il faut que $\dim H\mathbb{G}^1 \geq \dim H\mathbb{G}^2$.

- Comment caractériser les sous-variétés sans parler des équations F qui les décrivent ?

Ces questions sont d'autant plus difficiles que la régularité de l'application F est faible. En effet, si par exemple $\mathbb{G}^2 = \mathbb{R}^m$ alors pour une application générique $F \in C^1_h$ nous avons grosso modo un comportement C^1 dans les directions horizontales et seulement des estimations de type de Hölder pour les directions de strates supérieures, ce qui est clairement plus faible que C^1.

Le théorème des fonctions implicites classique dit que si $\mathbb{G}^1 = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{G}^2 = \mathbb{R}^m$ alors l'ensemble de niveau $S = F^{-1}(0) \cap B(0,r)$ peut être représenté comme un graphe (d'une application $P \in C^1$) associé à une décomposition de l'espace tangent en $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} dF(0) \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, où la différentielle $dF(0)$ restreinte sur le deuxième facteur $\mathbb{R}^m$ est un isomorphisme. Ainsi, l'étude locale de S se trivialise beaucoup grâce à l'existence d'une paramétrisation P ayant de bonnes propriétés. Le point de départ de notre travail était une généralisation de ce théorème classique sur les groupes de Carnot.

Theorem ([Mag13])**.** *Etant donnés deux groupes de Carnot $(\mathbb{G}^1, \mathsf{d}^1)$ et $(\mathbb{G}^2, \mathsf{d}^2)$, considérons une application $F \in C^1_h(\Omega, \mathbb{G}^2)$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{G}^1$. Supposons que la différentielle horizontale $D_hF(a)\colon \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^2$ est surjective en un point $a \in \Omega$. Supposons en outre que le noyau $\mathbb{K} = \operatorname{Ker} D_hF(a)$ admet un sous-groupe homogène complémentaire $\mathbb{H}$ (ce qui veut dire que $\mathbb{G} = \mathbb{K} \ltimes \mathbb{H}$ est un produit semi-direct et nous pouvons parler d'une décomposition associée $a = a_{\mathbb{K}} \cdot a_{\mathbb{H}}$). Alors il existe un voisinage $U_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{K}$ de $a_{\mathbb{K}}$ et un voisinage $U_{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H}$ de $a_{\mathbb{H}}$ tel que localement l'ensemble de niveau $F^{-1}(F(a))$ est un $\mathbb{K}\mathbb{H}$-graphe donné par une application continue $P\colon U_{\mathbb{K}} \to U_{\mathbb{H}}$, c'est-à-dire*

$$F^{-1}\big(F(a)\big) \cap U_{\mathbb{K}} \cdot U_{\mathbb{H}} = \{\mathbf{y} \cdot P(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in U_{\mathbb{K}}\}.$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathsf{d}^1\big(P(\mathbf{y}), P(\mathbf{y}')\big) \leq C\mathsf{d}^1\big(\mathbf{y} \cdot P(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \cdot P(\mathbf{y}')\big).$$

En particulier, l'application P est de classe de Hölder $\operatorname{Hol}^{\frac{1}{m}}\big((U_{\mathbb{K}}, \|\cdot\|), (U_{\mathbb{H}}, \mathsf{d}^1)\big)$, où m est la profondeur de $\mathbb{G}^1$.

Notons que l'exemple le plus simple et le plus étudié où les hypothèses de ce théorème sont réunies est le cas d'une application scalaire, $\mathbb{G}^2 = \mathbb{R}$ (S est alors appelé une hypersurface régulière). De nombreux résultats exploitant cette hypothèse d'existence d'un complémentaire peuvent été retrouvés dans d'autres ouvrages. Citons à titre d'exemple [FSS03c] pour les hypersurfaces dans les groupes d'Heisenberg, [FSS05 ; FSS07] pour les graphes de codimension supérieure dans les groupes d'Heisenberg, [CM06a] pour les hypersurfaces des variétés sous-riemanniennes, [Koz10] pour l'analogue d'une décomposition en produit semi-direct sur des variétés sous-riemanniennes.

L'existence d'une telle paramétrisation permet de répondre plus aisément à beaucoup de questions sur S. Tout d'abord, la continuité de P entraîne que topologiquement S et S_0 sont équivalents (localement). Ensuite, bien que l'application P ne soit pas lipschitzienne en général ([Vit08, Th. 4.35]), le volume (la mesure de Haar sur $\mathbb{K}$) de la projection sur $\mathbb{K}$ d'une boule $B(r) \subset \mathbb{G}^1$ est de l'ordre de $r^{\dim \mathbb{K}}$ (à un facteur multiplicatif

prés). D'où on peut déduire facilement que la dimension de Hausdorff est celle qu'on attend, $\dim S = \dim \mathbb{K}$, et que la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{\dim S} \llcorner S$ est Alhfors régulière. De plus, il est possible d'exprimer la densité (qui est en fait continue) de $P_{\#}(\mathcal{H}^{\dim S} \llcorner S)$ par rapport à $\mathcal{H}^{\dim S} \llcorner K$ en terme des dérivées horizontales de F.

Il est clair que l'hypothèse de l'existence d'une telle décomposition en un produit semi-direct est assez restrictive. En effet, on voit apparaître un nouveau phénomène algébrique propre à la *géométrie non-commutative*. Étant donné un morphisme surjectif $L\colon \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^2$, il n'est pas toujours possible de trouver le facteur complémentaire $\mathbb{H}$. Autrement dit, dans la suite exacte de groupes

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Ker} L \longrightarrow \mathbb{G}^1 \xrightarrow{L} \mathbb{G}^2 \to \{0\}$$

le morphisme $L\colon \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ n'est pas toujours scindé à la différence du cas des groupes abéliens $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Notre premier objectif était de voir ce qui peux se produire en cas d'absence du groupe complémentaire.

Dans le Chapter 3 nous présentons des résultats très généraux sur les ensembles de niveau. Grosso modo, nous démontrons qu'un ensemble de niveau S admet en tout point $p \in S$ un espace tangent unique et continu en p, à savoir $\operatorname{Ker} D_h F(p)$, c'est-à-dire celui qu'on attendait. Pour définir l'espace tangent nous avons utilisé deux approches différentes en parallèle.

Dans la première, nous considérons une condition de platitude de Reifenberg (les travaux [Rei60 ; DKT01 ; DT99] nous servent de références). L'ensemble ϵ-Reifenberg plat S peut être approximé en tout $p \in S$ et pour toute échelle $r > 0$ par un ensemble-modèle $W_{p,r}$ appartenant à une certaine famille (comme des sous-groupes distingués dans notre cas) avec une erreur $\leq \epsilon r$ en métrique de Hausdorff, c'est-à-dire

$$\operatorname{dist}_{\mathsf{d}}\left(B(p,r) \cap S, B(p,r) \cap W_{p,r}\right) \leq \epsilon r.$$

Notons que par rapport à cette formulation classique, nous allons considérer une condition de platitude plus forte qui dit que l'ensemble approximatif $W_{p,r}$ ne dépend pas de l'échelle r. Cette condition (pour en un seul point $p \in S$) entraîne l'existence d'un espace tangent unique au sens de Gromov-Hausdorff.

La deuxième approche consiste à adapter les notions de cônes tangents et paratangents (voir Definition 3.2.1) de l'analyse convexe classique pour les groupes de Carnot et à exploiter le fait que certains d'entre eux coïncident. D'une certaine façon ces cônes tangents sont souvent plus pratiques notamment de point de vue calculatoire.

Nous démontrons le résultat suivant.

Theorem 1.0.1. *Soient $(\mathbb{G}^1, \mathsf{d}^1)$, $(\mathbb{G}^2, \mathsf{d}^2)$ deux groupes de Carnot et Ω un ouvert de $\mathbb{G}^1$. Supposons que pour une application $F \in C^1_h(\Omega, \mathbb{G}^2)$ la différentielle $D_h F(p)$ est surjective en $p \in \Omega$. Alors il existe un voisinage U de p tel que pour l'ensemble de niveau $S := F^{-1}(F(p))$ les deux propriétés équivalentes sont vérifiées :*

1. *$S \cap U$ est un ensemble ϵ-Reifenberg plat avec $\epsilon \to 0$ lorsque l'échelle se raffine par rapport aux noyaux de la différentielle horizontales de F. Autrement dit, il*

existe une fonction $\epsilon\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\epsilon(t) \to 0+$ *avec* $t \to 0+$ *telle que pour tout* $a \in U \cap S$

$$\mathrm{dist}_{\mathsf{d}_1}\left(B(a,r) \cap S, B(a,r) \cap W_a\right) \leq \epsilon(r)r, \quad r > 0,$$

avec $W_a = a \cdot \mathrm{Ker}\, D_h F(a)$.

2. *Les quatre cônes tangents coïncident en tout point* $a \in S \cap U$

$$\mathrm{pTan}^+_{\mathbb{G}^1}(S,a) = \mathrm{Tan}^+_{\mathbb{G}^1}(S,a) = \mathrm{Tan}^-_{\mathbb{G}^1}(S,a) = \mathrm{pTan}^-_{\mathbb{G}^1}(S,a) = \mathrm{Ker}\, D_h F(a).$$

Nous démontrons d'abord la ϵ-Reifenberg platitude dans le Theorem 3.1.1 et en deuxième temps nous démontrons l'équivalence des deux propriétés dans le Theorem 3.3.2. Pour montrer la platitude au sens de Reifenberg il faut montrer deux choses. La première est que pour tout point de $S \cap B(a,r)$ il existe un point proche sur W_a. C'est en fait une conséquence relativement facile de la différentiabilité horizontale. Tandis que la deuxième, c'est-à-dire que pour tout point de W_a il existe un point proche sur $S \cap B(a,r)$, nécessite un argument topologique en plus.

Nous nous demandons aussi à quel point le fait d'avoir des espaces tangents caractérise une sous-variété intrinsèque. Pour répondre à cette question il est indispensable de faire appel au Théorème d'extension de Whitney, Theorem 2.3.6. Il permet sous une certaine condition d'étendre une fonction définie sur un sous-ensemble ($F \equiv Const$ sur S dans notre cas) en une fonction globale de la classe C^1_h. La condition est satisfaite lorsque S possède des espaces tangents. La seule contrainte fondamentale qu'on rencontre ici est que ce théorème ne s'applique en général que pour les groupes d'arrivé $\mathbb{G}^2 = \mathbb{R}^N$ abéliens. Ainsi, nous obtenons une réciproque partielle du Theorem 1.0.1 (voir les Theorems 3.1.12 and 3.3.5).

Theorem 1.0.2. *Soit* $S \subset \mathbb{G}$ *un fermé connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. S *est une sous-variété intrinsèque co-abélienne (c'est-à-dire avec* $\mathbb{G}^2 = \mathbb{R}^N$*) de codimension* N *;*

2. *Les quatre cônes tangents coïncident en tout point* $a \in S$ *:*

$$\mathrm{pTan}^+_{\mathbb{G}}(S,a) = \mathrm{pTan}^-_{\mathbb{G}}(S,a)$$

et il existe un point $p \in S$ *tel que* $\mathrm{pTan}^+_{\mathbb{G}}(S,p)$ *est un sous-groupe vertical de codimension* N.

3. *Il existe une famille* $\{W_a \mid a \in S\}$ *d'ensembles fermés homogènes telle que* W_p *est un sous-groupe vertical de codimension* N *pour un certain point* $p \in S$ *et pour tout* $S' \Subset S$ *il existe une fonction* $\epsilon\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\epsilon(t) \to 0+$ *avec* $t \to 0+$, *telle que*

$$\mathrm{dist}_{\mathsf{d}}\left(B(a,r) \cap S, B(a,r) \cap (a \cdot W_a)\right) \leq \epsilon(r)r, \quad r > 0, \quad \forall\, a \in S'.$$

Il est important de remarquer que le théorème précédent ne peut pas être généralisé au cas où $\mathbb{G}^2$ est non-abélien. Dans le Lemma A.2.1 nous montrons pour un exemple (emprunté à [DOW11]) de groupe de Carnot ultrarigide $\mathbb{G}$ que toute application de classe C^1_h à valeurs dans dans un groupe $\mathbb{G}/\mathbb{K}(Z)$ est en fait affine pourvu que sa différentielle horizontale soit surjective. Ici, $\mathbb{K}(Z)$ est le sous-groupe engendré par un vecteur de degré maximal Z. Ce qui veut dire que la classe des sous-variétés pour cette paire de groupes $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}/\mathbb{K}(Z)$ est réduite à des translations de $\mathbb{K}(Z)$. Or, il y a beaucoup d'ensembles qui satisfont la condition de tangence comme nous le montrons dans la Section 3.1.4.

Dans la continuation du Chapter 3, nous déduisons plusieurs conséquences de l'existence d'espaces tangents pour les sous-variétés intrinsèques. Dans le Lemma 3.4.4 nous démontrons que S est connexe par arc. A ce stade-là nous ne sommes pas capables de dire plus sur la topologie de S sauf pour le cas de codimension topologique maximale (c'est-à-dire $\operatorname{Ker} D_hF(p) \approx \mathbb{R}$ topologiquement) où nous démontrons que S est un arc (voir Theorem 3.4.5).

L'autre conséquence non-triviale est l'estimation de la dimension de Hausdorff, que nous obtenons comme conséquence d'un énoncé plus général (Theorem 3.5.6).

Theorem 1.0.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{G}^1$ un ouvert, $F \in C^1_h(\Omega; \mathbb{G}^2)$ et $a \in \Omega$. Supposons que $D_hF(a)$ est surjective. Alors il existe un voisinage U de a dans lequel la dimension de Hausdorff de l'ensemble de niveau $\dim F^{-1}(F(a)) \cap U$ est égale à $\dim \mathbb{G}^1 - \dim \mathbb{G}^2$.*

Nous obtenons ce résultat à comme conséquence d'un énoncé plus général (Theorem 3.5.6) qui est en fait se situe dans un cadre très similaire de celui du travail récent de [DR13]. Notons également que ce résultat ne dit rien sur la régularité de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{\dim S} \llcorner S$.

Dans le Chapter 4 nous nous plaçons dans un groupe de Carnot $\mathbb{G}$ qui se décompose comme un produit semi-direct des groupes homogènes $\mathbb{K} \ltimes \mathbb{H}$ où $\mathbb{K}$ est distingué. L'objet clé associé à une telle décomposition est un $\mathbb{K}\mathbb{H}$-graphe S qui se décrit comme

$$S = \{\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \phi(y) \mid \mathbf{y} \in \Omega\}$$

où ϕ est une application de $\Omega \subset \mathbb{K}$ vers $\mathbb{H}$. L'étude de ces objets est bien sûr motivée par le théorème des fonctions implicites, [FSS05 ; FSS07 ; Mag13], mais aussi par la théorie de la réctifiabilité, [FSC06 ; MSC09 ; FSS10 ; CM09 ; FMS13 ; BCC14 ; CM14].

Dans le Theorem 4.3.1 nous présentons une nouvelle caractérisation des sous-variétés co-abéliennes. Etant donné une application ϕ continue, nous pouvons traduire de façon canonique la condition de la tangence de Theorem 1.0.2 en une séries des conditions (non-linéaires) sur ϕ. Pour écrire ces conditions il faut procéder en deux étapes. Premièrement, soit $\pi_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{G} \to \mathbb{K}$ la projection associée à la décomposition $\mathbb{G} = \mathbb{K} \ltimes \mathbb{H}$. à chaque champ de vecteurs Y invariant à gauche sur $\mathbb{G}$ et tangent à $\mathbb{K}$ à l'origine, nous faisons correspondre le champ de vecteurs projeté $\hat{Y}$ sur $\mathbb{K}$ défini par $\hat{Y}_{\mathbf{y}} = d\pi_{\mathbb{K}}(\Phi(\mathbf{y}))\langle Y \rangle$. Le champs de vecteurs $\hat{Y}_{\mathbf{y}}$ est continu et s'écrit de façon polynomiale en termes de $\mathbf{y}$ et $\phi(\mathbf{y})$ (voir Section 4.4). Pour pouvons alors prendre une ligne intégrale de ce champ, qu'on note $\gamma(t) := \operatorname{Exp}_\phi(tY)(\mathbf{y})$, $\gamma(0) = \mathbf{y}$. La trajectoire γ n'est pas forcement unique (malgré cette notation), mais des choix différents mènerons vers la même conclusion. La seconde

étape consiste à regarder le comportement métrique de ϕ le long de γ. Ci-dessous nous donnons l'énoncé précis.

Theorem 1.0.4. *Supposons que $\mathbb{G} = \mathbb{K} \ltimes \mathbb{H}$ est une décomposition d'un groupe de Carnot $\mathbb{G}$ avec $\mathbb{H}$ un sous-groupe horizontal et $\mathbb{K}$ vertical. Soit $\mathcal{S}$ un $\mathbb{K}\mathbb{H}$-graphe donné par une application continue $\phi\colon \Omega \to \mathbb{H}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{S} \subset F^{-1}(e)$ est une sous-variété co-abélienne de codimension $\dim \mathbb{H}$ avec $F \in C^1_h(\mathbb{G}, \mathbb{H})$ telle que*
$$\operatorname{Ker} D_h F(a) \cap \mathbb{H} = \{e\}, \quad a \in \mathcal{S}.$$

2. *Pour tout champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{k}$ et tout point $\mathbf{y} \in \Omega$ on définit une courbe intégrale $\gamma(t) := \operatorname{Exp}_\phi(tY)(\mathbf{y})$. Selon le degré $\deg Y$ de Y, une des deux conditions suivante est satsifaite par $\phi \circ \gamma$.*

A. $\deg Y = 1$ ***:*** *Il existe une application linéaire*
$$w_{\mathbf{y}}\colon \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{k} = \log(\mathbb{K}), \quad \mathfrak{h} = \log(\mathbb{H}),$$
continue en $\mathbf{y} \in \Omega$ telle que
$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t) = w_{\gamma(t)}\langle Y \rangle, \quad t \in I(\gamma).$$

B. $\deg Y \geq 2$ ***:*** *Alors,*
$$\phi \circ \gamma \in \operatorname{hol}^{\frac{1}{\deg(Y)}}(I, \mathbb{H}), \quad \mathbf{y} \in \Omega, \quad I \Subset I(\gamma),$$
où le petit-o dans la définition de la classe d'Hölder (Definition 2.1.12) est uniforme pourvu que $\|Y\| \lesssim 1$ et $\gamma(I) \subset \Omega'$ pour un ensemble $\Omega' \Subset \Omega$ fixé à l'avance.

Cette caractérisation peut être considérée comme l'extension des résultats de [Vit08 ; ASV06 ; BS10b] des groupes d'Heisenberg à des groupes de Carnot généraux. C'est une extension partielle car il s'avère que pour les groupes d'Heisenberg, les conditions du deuxième degré (c'est-à-dire pour le vecteur vertical Z) ne sont pas indispensables et découlent des conditions horizontales (en tout cas en codimension 1, et l'argument de [ASV06, Th. 1.3] semble pouvoir s'adapter aux codimensions supérieures). Nous montrons dans Section 4.5 que les conditions verticales ne peuvent pas être omises pour les groupes de profondeur strictement plus grande de 2.

Outre le fait d'être assez universelle, notre caractérisation, Theorem 1.0.4, facilite le calcul algébrique des champs de vecteurs projetés $\hat{Y}$. Remarquons également que le Theorem 1.0.4 est le premier résultat qui pour une fonction scalaire ϕ décrivant un X-graphe dans $\mathbb{H}^1$ donne directement la différentiabilité de ϕ le long de toutes les courbes intégrales de $\hat{Y} = \partial_y - 4\phi\partial_z$, sans faire appel à un argument d'approximation (comparer avec [LM10]).

Nous obtenons le Theorem 1.0.4 comme une conséquence d'une caractérisation des $\mathbb{KH}$-graphes lipschitziens (locaux) (voir Definition 4.2.2). Ce résultat (Theorem 4.2.16) est en fait même plus facile à formuler car les champs de degré différents sont traités de la même façon et il suffit de remplacer $\mathrm{hol}^{\frac{1}{\deg(Y)}}$ par $\mathrm{Hol}^{\frac{1}{\deg(Y)}}$ (qui pour $\deg Y = 1$ devient Lip). En guise d'application de ce dernier théorème et des théorèmes d'approximation de graphes lipschitziens en codimension 1 ([CMPS14 ; BCC14]) nous déduisons le résultat suivant pour des graphes lipschitziens de codimension 2 dans $\mathbb{H}^2$.

Theorem. *Soit $S \subset \mathbb{H}^2$ un graphe lipschitzien par rapport à la décomposition $\mathbb{H}^2 = \mathbb{K} \ltimes \mathbb{H}$ où $\mathbb{H}$ est un sous-groupe horizontal de dimension 2, $\dim \mathbb{H} = 2$. Supposons que $\pi_{\mathbb{K}}(S) = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{K}$. Pour $\mathcal{H}^{2\times 2+2-2}$-presque tout point $p \in S$ la propriété suivante est vraie. Si $\delta_{1/r_i}(p^{-1} \cdot S) \to W$ converge localement en métrique de Hausdorff pour $\{r_i\}_{i\geq 0} \subset \mathbb{R}_+$, $r_i \to 0$, alors W est un plan vertical.*

Cet énoncé ne dit pas que des suites différentes de $\{r_i\}$ résulteront en un même plan vertical W.

Le Chapter 5 est probablement le plus élaboré et contient le plus de détails car c'était le point de départ de cette thèse. Il est consacré à l'étude de l'exemple modèle le plus simple d'une sous-variété intrinsèque pour laquelle l'espace tangent n'admet pas de complémentaire algébrique. Cet exemple est donné par une ligne de niveau d'une application $F \in C^1_h$ définie sur le groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$. Notons en plus que $\operatorname{Ker} D_h F(a)$ ne dépend pas de a et est égal en tout point au sous-groupe vertical $\mathbb{Z} = \{\exp(tZ) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Nous résumons une partie des résultats obtenus ci-dessous.

Theorem 1.0.5. *Soit $F \in C^1_h(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$ telle que $F(0) = 0$ et la différentielle horizontale $D_h F(0)$ est surjective. Alors il existe un voisinage compact U de l'élément neutre $0 \in \mathbb{H}^n$ tel que les propriétés suivantes sont satisfaites par $\Gamma := F^{-1}(0) \cap U$:*

1. *L'ensemble Γ est un arc simple (topologiquement) qui est ε-Reifenberg plat par rapport à $\mathbb{Z}$ avec $\varepsilon \to 0$ uniformément lorsque l'échelle se raffine. (Lemma 5.2.14 and Theorems 5.3.5 and 5.3.7).*

2. *La dimension euclidienne de Γ peut prendre toute valeur dans l'intervalle $[1, 2]$ (Lemma 5.5.13).*

3. *La dimension de Hausdorff de Γ vaut 2 et sa mesure de Hausdorff peut être calculée par la formule suivante (Corollary 5.4.16) :*
$$\mathcal{H}^2(\Gamma) = \liminf_{\|\sigma\| \to 0} \sum_{\sigma} \mathsf{d}(a_i, a_{i+1})^2,$$
où $\sigma = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_n\}$ désigne une subdivision ordonnée de Γ (a_0 et a_n sont les extrémités de Γ), et $\|\sigma\| = \max_i \mathsf{d}(a_i, a_{i+1})$.

4. *Si, en outre, $F \in C^{1,\alpha}_h(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$, $\alpha > 0$, alors Γ est fortement régulière au sens d'Ahlfors, et la formule de l'aire se réécrit (quitte à choisir la bonne orientation)*
$$\mathcal{H}^2(\Gamma) = \int_\Gamma dz + 2\int_\Gamma x\, dy - 2\int_\Gamma y\, dx,$$

où il s'agit d'intégrales de Stieltjes (Lemma 5.5.5).

5. *Il existe, néanmoins, des exemples de lignes de niveau Γ "rugueuses" telles que*
   - $\mathcal{H}^2(\Gamma) = \infty$ *(Example 5.6.16) ;*
   - $\mathcal{H}^2(\Gamma) = 0$ *(Example 5.6.17) ;*
   - Γ *est 2-Ahlfors régulière n'admettant pas de densité volumique en tout point (Example 5.6.19).*

Nous appelons cette ligne de niveau Γ une *courbe verticale* par analogie avec son cône tangent. Le point conceptuel le plus dur ici est de comprendre que Γ n'admet pas de paramétrisation canonique. Le fait que Γ soit une courbe injective est purement topologique. Nous devons mentionner que cette propriété topologique a été indépendamment obtenue dans [LM10] pour le cas $n = 1$ par une technique différente (qui consiste à regarder Γ comme l'intersection de deux hypersurfaces) qui ne semble pas pouvoir se généraliser au cas de $n > 1$. Notre démonstration passe par une paramétrisation à la Reifenberg et elle est légèrement différente de l'argument donné dans le Theorem 3.4.5.

Nous étudions très en détail les propriétés métriques de Γ. Pour en donner un cadre un peu plus général, nous avons introduit dans la Section 5.4 la notion d'une courbe plate $\lambda = (I, \kappa)$ que nous voyons comme une quasi-métrique sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Par définition d'une courbe plate, pour tout triplet ordonné de points $a \geq b \geq c$,

$$|\kappa(a,b) + \kappa(b,c) - \kappa(a,c)| \leq m(\kappa(a,c))\kappa(a,c),$$

où $m(t) \searrow 0$ avec $t \to 0$ est un module de platitude. L'exemple auquel on pense ici est celui de $\kappa = \mathsf{d}^2 \llcorner \Gamma$. Nous établissons que λ possède une mesure de probabilité doublante asymptotiquement optimale (voir Lemma 5.4.3 and Corollary 5.4.5). D'où on peut déduire que la dimension de Hausdorff de λ égale 1 (Corollary 5.4.8) ainsi que la formule de l'aire pour la mesure de Hausdorff (Lemma 5.4.9). Cette formule se transforme en une intégrale abstraite de Stieltjes à condition de supposer une régularité supplémentaire du module m, notamment que m soit un module de Dini (Lemma 5.4.12). Si c'est le cas, λ est 1-Ahlfors régulière au sens fort. Pour une courbe verticale Γ nous pouvons contrôler m par le biais des modules de continuité des dérivées horizontales de F. Ainsi, une dérivée de classe Hölder, $F \in C_h^{1,\alpha}$, entraîne la régularité de $\mathcal{H}^2 \llcorner \Gamma$. Notons que nous obtenons une généralisation de la formule de l'aire pour Γ qui était déjà connue ([Mag04 ; Jea06])

$$\mathcal{H}^2(\Gamma) = \int_\Gamma \theta,$$

où θ est une forme de contact sur $\mathbb{H}^n$.

L'existence des courbes verticales irrégulières est un phénomène assez surprenant qui n'était pas observé auparavant ni dans $\mathbb{R}^n$ ni dans les groupes de Carnot. Dans ce contexte il serait intéressant de savoir s'il existe toujours des lignes de niveau coabéliennes irrégulières, sous des hypothèses algébriques sur les cônes tangents. Par exemple, si on prend une application $F \in C_h^1(E^4, \mathbb{R}^2)$ où E^4 est un groupe d'Engel de dimension 4 (Section 2.2.2), possède-t-elle des lignes de niveau irrégulières ?

Pour construire des exemples de courbes verticales ayant des propriétés prescrites, nous utilisons, en sus du théorème de Whitney, deux autres ingrédients. Le premier ingrédient est une caractérisation exacte des projections des courbes verticales sur le plan horizontal (Eq. (5.38) et Lemma 5.6.12). L'idée d'utiliser une variation généralisée dans cette caractérisation s'inspire notamment de la théorie de chemins rugueux qui a connu un développement majeur ces dernières années (on renvoie le lecteur à [LQ02 ; LCL07] pour ses fondements). Pour les applications $F \in C_h^{1,\alpha}$, cela prend une forme plus compacte. Ainsi, une courbe verticale Γ est une ligne de niveau d'une application de classe $C_h^{1,\alpha}(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$, $\alpha > 0$, si et seulement si sa projection $\pi(\Gamma)$ sur le plan horizontal est $\frac{1+\alpha}{2}$-hölderienne en distance euclidienne (Lemma 5.5.11).

Le deuxième ingrédient est le calcul des intégrales de Stieltjes associées à l'aire de Lévy $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$ dans le plan. Pour construire des exemples irréguliers nous devons produire des estimations très précises pour les sommes des Stieltjes dans le cas où la régularité de la courbe plane γ est assez faible (typiquement $\gamma \notin \bigcup_{\alpha>1/2} \mathrm{Hol}^\alpha$), ce qui sort du cadre du théorème d'existence classique de Young-Kondurar (Theorem A.1.3). Ces estimations ont été obtenues pour des courbes planes qui s'écrivent comme des séries de Fourier lacunaires (voir Propositions 5.6.5 to 5.6.7). Les séries lacunaires sont en effet très commodes pour ce type d'estimations en raison de leur nature autosimilaire et des interactions faibles entre les différentes fréquences. Ainsi, en jouant de façon délicate sur la vitesse de divergence (ou convergence) des aires de Lévy pour ces séries lacunaires nous sommes capables de construire une courbe verticale avec des irrégularités souhaitées.

Dans le Chapter 6 nous considérons l'ensemble des lignes de niveau $\{\Gamma_p = F^{-1}(p)\}_{p\in\mathbb{R}^{2n}}$ d'une application $F \in C_h^1(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$ dont la différentielle est surjective. Nous utilisons les propriétés de courbes verticales, la continuité des Γ_p en métrique de Hausdorff (voir Propositions 3.1.8 and 6.1.3 and Corollary 3.1.9) et un théorème classique de sélection continue pour montrer que les fibres de F forment un feuilletage continu de $\mathbb{H}^n$. Plus précisément nous obtenons le résultat topologique suivant (Theorem 6.1.1).

Theorem 1.0.6. *Soit $F \in C_h^1(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$ telle que $F(0) = 0$ et la différentielle horizontale $D_hF(0)$ est surjective. Alors il existe un homéomorphisme*

$$[0,1] \times [-\delta,\delta]^{2n} \ni (t,p) \longrightarrow \Gamma_p(t) \in U \subset \mathbb{H}^n, \quad \delta > 0,$$

sur un voisinage U de $0 \in \mathbb{H}^n$ tel que for tout $p \in [-\delta,\delta]^{2n}$

1. *$\Gamma_p([0,1]) = U \cap F^{-1}(p)$;*
2. *la paramétrisation $\{[0,1] \ni t \to \Gamma_p(t)\}$ induit sur la courbe verticale $U \cap F^{-1}(p)$ une mesure doublante asymptotiquement optimale (voir Lemma 5.4.3).*

Encore une fois nous soulignons le fait qu'une telle paramétrisation n'est pas unique ni canonique.

Une conséquence immédiate de ce résultat est que la topologie locale des sous-variétés de codimension supérieure est la même que celle de leurs cônes tangents (Corollary 6.2.1).

Theorem 1.0.7. *Soit $F \in C_h^1(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^k)$, $1 \leq k \leq 2n$ telle que $F(0) = 0$ et la différentielle horizontale $D_hF(0)$ est surjective. Alors il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{H}^n$ telle que $F^{-1}(0) \cap U$ est homéomorphe à* $\operatorname{Ker} D_hF(0)$.

Nous montrons que ces sous-variétés peuvent être également irrégulières dès que la codimension est dans l'intervalle $[n+1, 2n]$ (Corollary 6.2.4). Il est en effet suffisant de prendre une sous-variété feuilletée par des courbes verticales irrégulières.

A la fin du chapitre, nous montrons la formule de la co-aire (voir [Fed69] pour le cas euclidien) pour les applications $F \in C_h^{1,\alpha}(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$, donc sous une hypothèse de régularité supplémentaire. La formule de la co-aire est connue pour les applications lisses. De façon générale, si nous prenons une approximation de l'application F par des applications lisses F_n, alors les lignes de niveau $F_n^{-1}(p)$ vont converger localement vers $F^{-1}(p)$ en métrique de Hausdorff. La (equi-)régularité forte d'Ahlfors de la mesure $\mathcal{H}^2$ sur $F_n^{-1}(p)$ permet d'obtenir la convergence en terme de mesure également.

Pour autant que nous le sachions, la formule de la co-aire n'a pas été démontrée pour $F \in C_h^1(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$ (ou pour $F \in \operatorname{Lip}(\mathbb{H}^n, \mathbb{R}^{2n})$). Sa validité reste donc une question très intrigante. Si la formule de la co-aire était vérifiée, cela voudrait dire, par exemple, que les fibres irrégulières $F^{-1}(p)$ de mesure nulle n'arrivent que pour un ensemble négligeable de $p \in \mathbb{R}^{2n}$. Notons que par l'inégalité générale de la co-aire, l'ensemble des fibres de mesure infinie est négligeable dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Bibliography

[BCC14] F. Bigolin, L. Caravenna, and F. Serra Cassano. "Intrinsic Lipschitz graphs in Heisenberg groups and continuous solutions of a balance equation". In: *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis* (2014).

[CM14] Vasilis Chousionis and Pertti Mattila. "Singular integrals on self-similar sets and removability for Lipschitz harmonic functions in Heisenberg groups". In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2014.691 (2014), pp. 29–60.

[CMPS14] Giovanna Citti, Maria Manfredini, Andrea Pinamonti, and Francesco Serra Cassano. "Smooth approximation for intrinsic Lipschitz functions in the Heisenberg group." In: *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* 49.3-4 (2014), pp. 1279–1308.

[DR13] Enrico Le Donne and Tapio Rajala. *Assouad dimension, Nagata dimension, and uniformly close metric tangents.* 2013.

[FMS13] Bruno Franchi, Marco Marchi, and Raul Paolo Serapioni. *Intrinsic Lipschitz graphs within Carnot groups.* 2013.

[Mag13] Valentino Magnani. "Towards Differential Calculus in stratified groups". In: *J. Aust. Math. Soc.* 95.1 (2013), pp. 76–128.

[DOW11] Enrico Le Donne, Alessandro Ottazzi, and Ben Warhurst. *Ultrarigid tangents of sub-Riemannian nilpotent groups.* Apr. 2011.

[BS10] Francesco Bigolin and Francesco Serra Cassano. "Intrinsic regular graphs in Heisenberg groups vs. weak solutions of non-linear first-order PDEs". In: *Adv. Calc. Var.* 3.1 (2010), pp. 69–97.

[FSS10] B. Franchi, R. Serapioni, and F. Serra Cassano. "Differentiability of intrinsic Lipschitz functions within Heisenberg groups". In: *Journal of Geometric Analysis* (2010), pp. 1–41.

[Koz10] A. D. Kozhevnikov. "Inverse and implicit function theorems on Carnot manifolds". In: *Sibirsk. Mat. Zh.* 51.6 (2010), pp. 1322–1339.

[LM10] Gian Paolo Leonardi and Valentino Magnani. *Intersections of intrinsic submanifolds in the Heisenberg group.* Sept. 2010.

[CM09] Vasilis Chousionis and Pertti Mattila. *Singular integrals on Ahlfors-David regular subsets of the Heisenberg group.* Sept. 2009.

[MSC09] Pertti Mattila, Raul Serapioni, and Francesco Serra Cassano. "Characterizations of intrinsic rectifiability in Heisenberg groups". Feb. 2009.

[Vit08] Davide Vittone. "Submanifolds in Carnot groups". PhD thesis. Edizioni della Normale, Pisa, 2008.

[CDPT07] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D Pauls, and Jeremy Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*. Vol. 259. Springer Science & Business Media, 2007.

[FSS07] Bruno Franchi, Raul Serapioni, and Francesco Serra Cassano. "Regular submanifolds, graphs and area formula in Heisenberg groups". In: *Adv. Math.* 211.1 (2007), pp. 152–203.

[LCL07] Terry J. Lyons, Michael Caruana, and Thierry Lévy. *Differential equations driven by rough paths*. Vol. 1908. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 2007.

[ASV06] Luigi Ambrosio, Francesco Serra Cassano, and Davide Vittone. "Intrinsic regular hypersurfaces in Heisenberg groups". In: *J. Geom. Anal.* 16.2 (2006), pp. 187–232.

[CM06] G. Citti and M. Manfredini. "Implicit function theorem in Carnot-Carathéodory spaces". In: *Commun. Contemp. Math.* 8.5 (2006), pp. 657–680.

[FSC06] B. Franchi, R. Serapioni, and F.S. Cassano. "Intrinsic Lipschitz graphs in Heisenberg groups". In: *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 7.3 (2006), pp. 423–441.

[Jea06] Frédéric Jean. "On Hausdorff Measures of Curves in Sub-Riemannian Geometry". In: *Preprint du CMAP, École Polytechnique* 11 (2006).

[FSS05] Bruno Franchi, Raul Serapioni, and Francesco Serra Cassano. "Intrinsic submanifolds, graphs and currents in Heisenberg groups". In: *Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Vol. IV*. Lect. Notes Semin. Interdiscip. Mat., IV. S.I.M. Dep. Mat. Univ. Basilicata, Potenza, 2005, pp. 23–38.

[AS04] Andrei A. Agrachev and Yuri L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*. Vol. 87. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[Mag04] Valentino Magnani. "Note on coarea formulae in the Heisenberg group". In: *Publ. Mat.* 48.2 (2004), pp. 409–422.

[FSS03] Bruno Franchi, Raul Serapioni, and Francesco Serra Cassano. "Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups". In: *Comm. Anal. Geom.* 11.5 (2003), pp. 909–944.

[LQ02] Terry Lyons and Zhongmin Qian. *System control and rough paths*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[Mon02] Richard Montgomery. *A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications*. Vol. 91. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002.

[DKT01] Guy David, Carlos Kenig, and Tatiana Toro. "Asymptotically optimally doubling measures and Reifenberg flat sets with vanishing constant". In: *Comm. Pure Appl. Math.* 54.4 (2001), pp. 385–449.

[DT99] G. David and T. Toro. "Reifenberg flat metric spaces, snowballs, and embeddings". In: *Math. Ann.* 315.4 (1999), pp. 641–710.

[Gro96] Mikhael Gromov. "Carnot-Carathéodory spaces seen from within". In: *Sub-Riemannian geometry.* Vol. 144. Progr. Math. Basel: Birkhäuser, 1996, pp. 79–323.

[FS82] G. B. Folland and Elias M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups.* Vol. 28. Mathematical Notes. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1982.

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Rei60] E. R. Reifenberg. "Solution of the Plateau Problem for m-dimensional surfaces of varying topological type". In: *Acta Math.* 104 (1960), pp. 1–92.

[Cho40] Wei-Liang Chow. "Über Systeme von liearren partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung". In: *Mathematische Annalen* 117.1 (1940), pp. 98–105.

[Ras38] PK Rashevsky. "Any two points of a totally nonholonomic space may be connected by an admissible line". In: *Uch. Zap. Ped. Inst. im. Liebknechta, Ser. Phys. Math* 2 (1938), pp. 83–94.