



**HAL**  
open science

# Observation des systèmes non linéaires : Application à la détection de défauts

Mariem Sahnoun

► **To cite this version:**

Mariem Sahnoun. Observation des systèmes non linéaires : Application à la détection de défauts. Automatique / Robotique. Université Claude Beranrd Lyon 1, 2014. Français. NNT : . tel-01179547

**HAL Id: tel-01179547**

**<https://theses.hal.science/tel-01179547>**

Submitted on 22 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 322 - 2014

Année 2014

## THÈSE

présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon 1

(Spécialité Automatique)

par

Mariem Sahnoun

# Observation des systèmes non linéaires : Application à la détection de défauts

Soutenue publiquement le 04.12.2014

### Membres du jury

<i>Président du jury :</i>	Qinghua ZHANG	Directeur de recherche à l'INRIA, Rennes
<i>Rapporteurs :</i>	Michel KINNAERT	Professeur à l'Ecole Polytechnique de Bruxelles, Bruxelles
	Mondher FARZA	Professeur à l'ENSICAEN, Caen
<i>Examineurs :</i>	Hassan HAMMOURI	Professeur à l'UCBL1, Lyon
	Mickael RODRIGUES	Maître de Conférences à l'UCBL1, Lyon



# UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

## **Président de l'Université**

Vice-président du Conseil d'Administration

Vice-président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire

Vice-président du Conseil Scientifique

Directeur Général des Services

**M. François-Noël GILLY**

M. le Professeur Hamda BEN HADID

M. le Professeur Philippe LALLE

M. le Professeur Germain GILLET

M. Alain HELLEU

## ***COMPOSANTES SANTE***

Faculté de Médecine Lyon Est - Claude Bernard

Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE

Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud-Charles Mérieux

Directeur : Mme la Professeure C. BURILLON

UFR d'Odontologie

Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS

Institut des Sciences Pharmaceutiques

Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA

et Biologiques

Institut des Sciences et Techniques de

Directeur : M. le Professeur Y. MATILLON

la Réadaptation

Département de formation et Centre

Directeur : Mme. la Professeure A-M. SCHOTT

de Recherche en Biologie Humaine

## ***COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE***

Faculté des Sciences et Technologies

Directeur : M. F. DE MARCHI

Département Biologie

Directeur : M. le Professeur F. FLEURY

Département Chimie Biochimie

Directeur : Mme Caroline FELIX

Département GEP

Directeur : M. Hassan HAMMOURI

Département Informatique

Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCHE

Département Mathématiques

Directeur : M. Georges TOMANOV

Département Mécanique

Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID

Département Physique

Directeur : M. Jean-Claude PLENET

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

Directeur : M. Y.VANPOULLE

Observatoire des Sciences de l'Univers de Lyon

Directeur : M. B. GUIDERDONI

Polytech Lyon

Directeur : M. P. FOURNIER

Ecole Supérieur de Chimie Physique Electronique

Directeur : M. G. PIGNAULT

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1

Directeur : M. C. VITON

Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education

Directeur : M. A. MOUGNIOTTE

Institut de Science Financière et d'Assurances

Directeur : M. N. LEBOISNE



*A mes chers parents, pour leur indéfectible soutien*

*A mon mari, pour ses sacrifices innombrables*

*A ma soeur et mon beau frère pour leur encouragement*

*A tous ceux qui comptent pour moi...*



# Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués à l'Université Claude Bernard Lyon 1 au sein du Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP) dans l'équipe Systèmes Non Linéaires et Procédés (SNLEP). Je remercie Monsieur Hatem FESSI, directeur du LAGEP, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Monsieur Hassan HAMMOURI, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1 et responsable de l'équipe SNLEP pour m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche et sans qui je n'aurais pas découvert la thématique liée à ce travail. Je remercie également Monsieur Mickael RODRIGUES, Maîtres de conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1, et co-encadrant de ma thèse pour son soutien constant et pour sa disponibilité.

J'exprime ma reconnaissance envers les membres du jury, qui ont accepté de juger mon travail : Monsieur Qinghua ZHANG, Directeur de recherche à l'INRIA Rennes d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury de thèse, Monsieur Michel KINNAERT, Professeur à l'École Polytechnique de Bruxelles, et Monsieur Mondher FARZA, Professeur à l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Caen, d'avoir accepté de rapporter mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

Je voudrais aussi remercier tout le personnel du LAGEP ainsi que mes chers collègues avec lesquels j'ai partagé tant de choses et qui ont fait de ma vie à Lyon une expérience inoubliable.

Enfin, je dédie cette thèse à mes parents pour leur amour et sans qui je n'en serais pas là aujourd'hui, à ma soeur et mon beau frère qui malgré la distance m'ont toujours encouragé. Je remercie de tout mon coeur mon mari pour son soutien et son amour qui ont toujours su parcourir les milliers de kilomètres interposés entre nous ces dernières années.



*" On ne progresse qu'en achevant  
certaines choses et en en commençant d'autres.  
Même si ces prétendus commencements  
ou achèvements ne sont qu'illusions. "*

*Le monde selon Garp - John Irving*



# Table des matières

<b>Références personnelles</b>	<b>15</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>17</b>
<b>1 Rappels bibliographiques et préliminaires</b>	<b>21</b>
1.1 Définitions et généralités . . . . .	21
1.1.1 Notions et types de défauts . . . . .	21
1.1.2 Diagnostic de défauts . . . . .	22
1.2 Différentes approches pour le diagnostic de défauts . . . . .	23
1.2.1 Espace de parité . . . . .	23
1.2.2 Approche par identification paramétrique . . . . .	26
1.2.3 Méthode à base d'observateurs . . . . .	27
1.3 Observabilité et synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques . . . . .	29
1.3.1 Observabilité des systèmes linéaires . . . . .	29
1.3.2 Synthèse d'observateurs des systèmes linéaires . . . . .	30
1.3.3 Observabilité des systèmes non linéaires . . . . .	32
1.3.4 Synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires . . . . .	34
1.4 Cas des systèmes affines en l'état . . . . .	37
1.5 Conclusion . . . . .	39
<b>2 Sur l'existence d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes affines en l'état avec injection de sortie</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction . . . . .	41
2.2 Systèmes affines en l'état avec injection de sortie . . . . .	42
2.2.1 Formulation du problème . . . . .	42
2.2.2 Résultats préliminaires . . . . .	43
2.3 Conception de l'observateur à entrées inconnues . . . . .	45
2.3.1 Condition suffisante sur l'existence de l'observateur . . . . .	45
2.3.2 Démonstration du Théorème 9 . . . . .	47
2.4 Procédure de calcul de $\widehat{W}$ . . . . .	48
2.5 Exemples . . . . .	49
2.6 Conclusion . . . . .	59
<b>3 Observateur non linéaire basé sur la forme en cascade et l'injection de sortie</b>	<b>63</b>
3.1 Introduction . . . . .	63
3.2 Résultats préliminaires . . . . .	64

3.3	Théorème d'existence . . . . .	67
3.3.1	Conditions nécessaires et suffisantes . . . . .	68
3.3.2	Démonstration du Théorème d'existence . . . . .	70
3.3.2.1	Condition suffisante . . . . .	70
3.3.2.2	Condition nécessaire . . . . .	72
3.4	Procédure de calcul des champs de vecteurs $X$ et $\tilde{X}$ dans le cas où $p = \tilde{p} = 1$ . . .	74
3.4.1	Quelques outils géométriques . . . . .	74
3.4.2	Algorithme . . . . .	77
3.4.3	Calcul des champs de vecteurs . . . . .	81
3.4.4	Démonstration du Théorème 11 : Algorithme . . . . .	83
3.5	Caractérisation complète des champs de vecteurs $X, \tilde{X}$ dans le cas où $p = \tilde{p} = 1$	91
3.6	Conclusion . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Synthèse d'un filtre de détection et isolation de défauts capteur pour les systèmes polytopiques LPV : application à un enrouleur de bandes</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Problématique . . . . .	97
4.3	Détection, isolation et estimation de défaut capteur avec un facteur de qualité .	100
4.3.1	Conception du filtre polytopique LPV . . . . .	100
4.3.2	Stabilité du filtre polytopique LPV . . . . .	102
4.3.3	Conception d'isolation de défauts . . . . .	103
4.4	L'enrouleur de bandes . . . . .	105
4.4.1	Description du système . . . . .	105
4.4.2	La modélisation du système avec des défauts capteur . . . . .	106
4.4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	109
4.4.3.1	En l'absence de défaut . . . . .	109
4.4.3.2	En présence de défaut . . . . .	109
4.5	La synthèse des matrices et gains du filtre LPV . . . . .	113
4.6	Conclusion . . . . .	115
	<b>Conclusion générale</b>	<b>117</b>
	<b>A Notions d'algèbre linéaire</b>	<b>119</b>
	<b>B Outils géométriques des systèmes linéaires et non linéaires</b>	<b>123</b>
B.1	Outils géométriques des systèmes linéaires . . . . .	123
B.2	Outils géométriques des systèmes non linéaires . . . . .	127
	<b>C Notions de géométrie différentielle</b>	<b>133</b>
C.1	Champ vectoriel et champ de covecteurs . . . . .	133
C.2	Changement de coordonnées dans l'espace d'état . . . . .	136
C.3	Distributions et codistributions . . . . .	137
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>

# Table des figures

1.1	Différents types de défauts affectant un système physique . . . . .	22
2.1	Evolution des états $x_1$ et $x_2$ . . . . .	54
2.2	Evolution des états $x_3, x_4$ et $x_5$ avec leurs estimations . . . . .	54
2.3	Evolution des états $x_1$ et $x_3$ . . . . .	60
2.4	a) Evolution des deux premières variables de $\gamma(t)$ . . . . .	60
2.5	b) Evolution des deux dernières variables de $\gamma(t)$ . . . . .	61
4.1	Schéma du filtre polytopique . . . . .	103
4.2	Schéma de diagnostic, d'isolation et d'estimation de défauts en structure GOS .	104
4.3	Architecture de contrôle du processus d'enroulement . . . . .	106
4.4	Evolution des paramètres $\rho_j$ . . . . .	108
4.5	En l'absence de défaut : a) Les sorties du système b) Les entrées du système . .	109
4.6	Norme du vecteur résiduel en l'absence de défaut . . . . .	110
4.7	Sorties du système en présence de défaut et son estimation . . . . .	110
4.8	Défaut capteur $T_1$ - Norme du vecteur résiduel en présence de défaut sur le capteur $T_1$ . . . . .	111
4.9	a) Le défaut capteur et son estimation par le filtre polytopique LPV b) Zoom autour $R \approx 100$ mm - Défaut capteur $T_1$ . . . . .	111
4.10	Défaut capteur $S_2$ - Norme du vecteur résiduel en présence de défaut sur la sortie $T_1$ . . . . .	112
4.11	Défaut capteur $S_2$ - Norme du vecteur résiduel en présence de défaut sur la sortie $S_2$ . . . . .	112
4.12	a) Le défaut capteur et son estimation par le filtre polytopique LPV b) Zoom autour $R \approx 100$ mm - Défaut capteur $S_2$ . . . . .	113



# Références personnelles

## Revues internationales avec comité de lecture

- Hassan Hammouri, Mariem Sahnoun, "Nonlinear Observer Based On Cascade-Form and Output Injection", *SIAM Journal On Control and Optimization (SICON)*, 2013, en révision.

- Mickael Rodrigues, Mariem Sahnoun, Jean Christophe Ponsart, Didier Theilliol, "Sensor fault detection and isolation filter for polytopic LPV systems : a winding machine application", *Journal of Process Control (JPC)*, Vol 23, Issue 6, Pages 805-816, July 2013.

- Mariem Sahnoun, Vincent Andrieu, Madiha Nadri, "Nonlinear and locally optimal controllers design for input affine locally controllable systems", *International Journal of Control (IJC)*, Vol 85, Issue 2, Pages 159-170, February 2012.

## Congrès internationaux avec comité de lecture et actes

- Mariem Sahnoun, Hassan Hammouri, "Nonlinear observer based on observable cascade form", *13<sup>th</sup> European Control Conference (ECC)*, Strasbourg, France, 2014.

- Mariem Sahnoun, Hassan Hammouri, "On the existence of unknown input observers for state affine systems up to output injection", *9<sup>th</sup> IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Toulouse, France, 2013.

- Mariem Sahnoun, Vincent Andrieu, Madiha Nadri, "Locally optimal controller : Illustration on an inverted pendulum", *18<sup>th</sup> World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, Milan, Italie, 2011.

## Congrès nationaux avec comité de lecture et actes

- Mariem Sahnoun, Mickael Rodrigues, Jean Christophe Ponsart, Didier Theilliol, Synthèse d'un filtre de détection et isolation de défauts capteur pour les systèmes polytopiques LPV : application à un enrouleur de bandes", *7<sup>ème</sup> Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, Grenoble, France, 2012.



# Introduction générale

Une bonne maîtrise d'un procédé passe en général par une bonne information sur ce procédé. La mesure de toutes les grandeurs d'un procédé physique est souvent essentielle pour mettre en oeuvre des stratégies de commande par retour d'état par exemple ou bien des stratégies de surveillance et de diagnostic de défauts. Cependant, il n'est pas toujours possible d'accéder à toutes les variables d'état représentant ces grandeurs. D'où la nécessité d'avoir recours à un système dynamique auxiliaire, appelé observateur ou estimateur d'état, qui est chargé d'estimer l'état du système. D'une manière générale, la synthèse d'un observateur exploite les informations disponibles sur le système réel, à savoir, le modèle dynamique du système, ses entrées et ses sorties mesurées. Dans le cas linéaire, le problème de synthèse d'observateurs a été bien étudié. Néanmoins, le problème d'estimation d'état des systèmes non linéaires reste difficile à résoudre malgré les nombreuses méthodes proposées dans ce sens.

Une partie importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème de l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ceci est motivé par le fait que l'estimation de l'état est une étape importante voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour le diagnostic ou la supervision des systèmes industriels.

Le diagnostic consiste à identifier ou à déterminer la nature et la cause d'une défaillance dans un système à partir d'une sélection de symptômes issus d'observations, de vérifications ou de tests. Il est une fonction essentielle pour la sûreté, la disponibilité et la maintenabilité des systèmes.

La sûreté de fonctionnement des systèmes dynamiques a fait l'objet de nombreux travaux de recherche durant les trois dernières décennies. Elle concerne à la fois le diagnostic avec les aspects de détection, isolation et identification de défauts et aussi la gestion des situations d'alarmes. La détection de défauts correspond à la mise en évidence de tout phénomène anormal pouvant affecter le comportement du système surveillé. L'isolation et l'identification de défauts sont définies comme la détermination des composants affectés par ce phénomène.

Le domaine du diagnostic de défauts a été abordé par les automaticiens depuis les années 1970, voir (Beard 1971) et (Jones 1973). Plusieurs méthodes de diagnostic ont été proposées par la suite et la plupart sont basées sur le principe de la redondance analytique (Frank 1990) et

(Isermann 1994). Il existe plusieurs approches pour cette dernière parmi lesquelles, celle basée sur l'utilisation des observateurs d'état. Nous pouvons citer les contributions de (Massoumnia *et al.* 1989), (Patton and Chen 1991), (Frank and Ding 1997), (Hammouri *et al.* 1994), (Hammouri *et al.* 1999),...

Nous nous intéressons dans ce mémoire à cette approche basée sur les observateurs d'états qui consiste à générer des résidus qui sont calculés en faisant la différence entre les sorties réelles du système et celles estimées par l'observateur. Pour détecter la présence d'un défaut, le comportement du système est comparé à celui du modèle mathématique et tout écart significatif souligne une modification de comportement éventuellement explicable par la présence d'un défaut. Afin d'isoler les défauts, le résidu est souvent structuré de manière à être sensible uniquement à un groupe de défauts.

Cette méthode s'avère très efficace pour la détection et l'isolation des défauts. En effet, elle a connu un progrès considérable pour le cas des systèmes linéaires. Des méthodes très performantes permettent aujourd'hui d'accomplir les objectifs d'une détection et d'une isolation de défauts d'une manière efficace et rapide. Cependant, l'extension au cas non linéaire demeure particulièrement difficile. Il n'existe pas de méthodes générales applicables pour tout système non linéaire. De plus, la synthèse d'observateur afin d'effectuer le diagnostic est beaucoup plus complexe que dans le cas de la commande, dans la mesure où les paramètres de l'observateur jouent un rôle aussi sur la manière dont les défauts vont affecter les résidus. Ces derniers doivent être générés d'une manière robuste et éviter ainsi les fausses alarmes causées par les perturbations ou les bruits.

Ce mémoire de thèse, composé de quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

Chapitre 1 : Ce chapitre présente un rappel du principe des méthodes de diagnostic et quelques résultats bibliographiques sur le thème de la détection de défauts. Nous rappelons les différentes approches de détection et isolation des défauts dans le cas des systèmes linéaires. Nous donnons également quelques notions liées à l'étude de l'observabilité et à la synthèse d'observateur d'état des systèmes linéaires et non linéaires.

Chapitre 2 : Ce chapitre est dévolu à la synthèse d'un observateur à entrées inconnues (Unknown Input Observer, UIO) pour les systèmes affines en l'état avec une injection de sortie. En se basant sur une approche géométrique, nous donnons une condition suffisante sur l'existence d'un observateur à entrées inconnues qui nous permet d'estimer une partie de l'état indépendamment de la connaissance de certaines entrées. L'efficacité de la méthode développée est illustrée sur deux exemples numériques.

Chapitre 3 : Ce chapitre présente une méthode permettant de transformer un système non linéaire par un changement de coordonnées en une classe particulière de systèmes en cascade : celle des systèmes affines en l'état avec une injection de sortie. En se basant sur quelques notions de géométrie différentielle, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur l'existence d'une telle transformation. Ensuite, un algorithme est donné pour calculer un difféomorphisme

adéquat qui transforme le système d'origine sous la forme cascade. Enfin, l'ensemble de tous ces difféomorphismes est caractérisé.

Chapitre 4 : Ce chapitre a pour objectif de présenter une méthode de diagnostic de défauts pour une classe particulière de systèmes non linéaires décrits sous une forme polytopique Linéaire à Paramètres Variants (Linear Parameter Varying, LPV). La contribution principale consiste en la synthèse d'un filtre de détection et d'isolation de défauts capteur et aussi en l'estimation de l'amplitude de défauts avec un facteur de qualité. Les conditions de stabilité du filtre polytopique LPV sont étudiées en assurant la stabilité poly-quadratique avec les Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequality, LMI). L'efficacité de cette méthode de détection et isolation de défauts est illustrée sur un enrouleur de bandes.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale des travaux présentés.



# Chapitre 1

## Rappels bibliographiques et préliminaires

### 1.1 Définitions et généralités

Dans cette section, nous introduisons la notion de défauts des systèmes et nous donnons quelques définitions sur les notions relatives à ces défauts telles que : la détection et l'isolation.

#### 1.1.1 Notions et types de défauts

Nous allons commencer par donner quelques définitions sur les notions relatives au diagnostic.

**Définition 1 (Notion de défaut)** *Un défaut est une déviation non acceptable d'au moins une caractéristique du système par rapport à sa valeur nominale.*

**Définition 2 (Notion de défaillance)** *Une défaillance est une interruption permanente de la capacité du système à accomplir sa mission dans des conditions de fonctionnement opérationnelles spécifiées.*

**Définition 3 (Notion de panne)** *Une panne est un état d'un système incapable d'assurer sa fonction à la suite d'une défaillance.*

**Définition 4 (Notion de résidu)** *Un résidu est un signal conçu comme indicateur d'anomalie fonctionnelle ou comportementale.*

De plus, il est intéressant de répartir les défauts en des catégories selon la partie où ils surviennent sur le système pour pouvoir juger de leur importance et conclure par conséquent quant au diagnostic à mener. Comme présentés dans la figure 1.1 ci-dessous, trois types de défauts peuvent toucher les différents éléments d'un système :

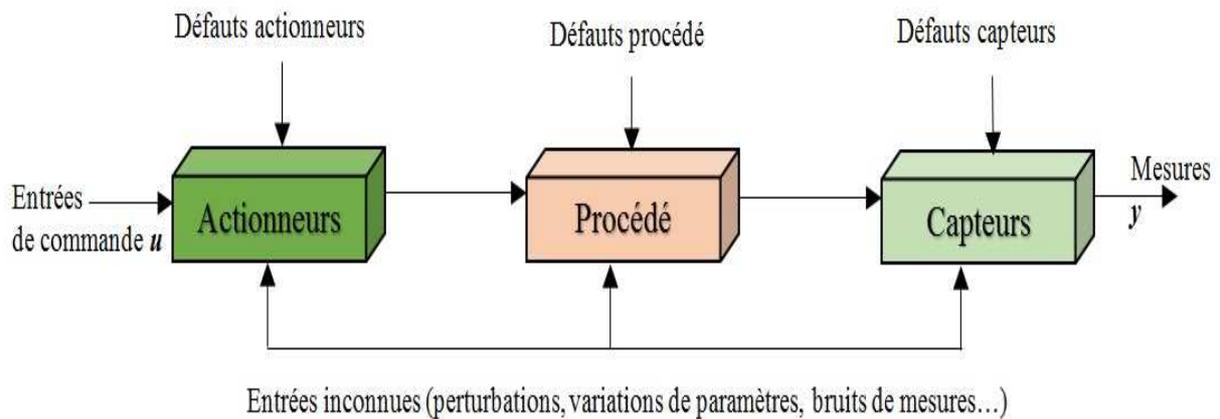


FIGURE 1.1: Différents types de défauts affectant un système physique

### Le défaut actionneur :

Un défaut d'actionneur est un défaut représentant une perte totale ou partielle d'un actionneur conduisant à la perte d'une action de commande sur le système.

Si nous prenons comme exemple un vérin bloqué qui ne répond plus au signal de commande qui lui est appliqué, nous parlons alors d'une perte totale de l'actionneur. Un défaut partiel du vérin peut être la conséquence d'une baisse d'efficacité due à un problème hydraulique ou à un vieillissement. De tels défauts entraînent un fonctionnement dégradé du système et peuvent même conduire à l'instabilité de ce dernier.

### Le défaut capteur :

Les capteurs servent à mesurer et à transformer une grandeur physique en une grandeur capable d'être traitée par les calculateurs. Ils sont généralement les interfaces de sortie d'un système avec l'environnement extérieur. Ainsi, les défauts provenant des capteurs se caractérisent par un écart entre la valeur réelle de la grandeur et sa mesure. Ils s'additionneront aux sorties du système et représenteront l'ensemble des problèmes liés à la prise d'information sur l'état du système. Comme pour le défaut actionneur, le défaut provenant du capteur peut être total ou partiel. Un défaut partiel issu d'un capteur peut apparaître sous forme d'une saturation, un défaut au niveau de calibrage, un biais ou un bruit. D'ailleurs, la relation entre le signal généré par le capteur et celui du système réel est toujours plus ou moins adéquate. Par contre, dans le cas d'un défaut total, l'exploitation du signal du capteur n'est plus possible.

### Le défaut système :

Ce sont les défauts affectant le système lui-même, ils correspondent à une dégradation des composants du système par un changement sur les paramètres internes. Ces défauts sont dues alors à des modifications de la structure ou des paramètres du modèle.

## 1.1.2 Diagnostic de défauts

L'objectif du diagnostic est de donner des informations sur les anomalies qui se produisent dans le système surveillé.

**Définition 5 (Détection)** *La détection de défauts consiste en la détermination de la présence*

*et de l'instant d'occurrence d'un mauvais fonctionnement dans un système.*

Cette fonction peut être obtenue en utilisant le résidu noté  $r(t)$  généré en comparant le comportement du modèle du système à celui du système réel. Idéalement, un résidu est nul lorsque le système est en fonctionnement normal.

Une fois le défaut détecté, il faut le localiser parmi l'ensemble des défauts possibles, nous appelons cette étape : isolation du défaut.

**Définition 6 (Isolation)** *L'isolation d'un défaut est la détermination de sa nature et de sa localisation. Elle suit l'étape de détection de défauts.*

Cette étape s'appuie fréquemment sur la génération de résidus de manière à ce qu'un ensemble de ces résidus soit sensible à certains défauts et insensible aux autres défauts.

Une troisième étape consiste à identifier les caractéristiques du défaut que nous appelons estimation du défaut.

**Définition 7 (Estimation)** *L'estimation des défauts consiste à fournir à chaque instant la valeur du défaut.*

Dans les problèmes de commande tolérante aux défauts, il est souvent nécessaire de connaître l'amplitude et la forme du défaut afin de mieux le compenser. L'estimation des défauts devient alors un problème important à résoudre.

Ces trois étapes (détection, isolation et estimation) sont regroupées sous le nom de **diagnostic de défauts**.

## 1.2 Différentes approches pour le diagnostic de défauts

Dans cette section, nous allons présenter les principales approches pour le diagnostic de défauts. Plusieurs études existent dressant le bilan des différentes approches sur ce sujet. Les plus connues sont celles de (Chen *et al.* 1995), (Basile and Marro 1997), (Isermann 1993), (Isermann and Balle 1997), (Gertler 1997), (Gertler and Kunwer 1995).

Ces méthodes de détection et d'isolation basées sur des modèles mathématiques se reposent généralement sur la génération de résidus. Pour obtenir les expressions analytiques des résidus, plusieurs techniques peuvent être utilisées. Les études de (Basseville *et al.* 1999), (Basseville and Zhang 1999), (Isermann 1997), (Isermann and Balle 1997), (Gertler 1997), (Frank and Ding 1997) recensent différentes approches existantes. Dans ce qui suit, nous allons rappeler les plus importantes approches de diagnostic pour les systèmes linéaires.

### 1.2.1 Espace de parité

L'idée de l'approche par espace de parité est l'utilisation de la redondance entre les entrées et les sorties du système sans l'apparition des états dans les équations (Maquin and Ragot 2000). Cette méthode a été introduite dans les années 1970 pour les systèmes aérospatiaux. La première version de cette approche basée sur des systèmes statiques reliant les sorties d'un modèle à ses entrées a été proposée dans (Potter and Suman 1977) puis elle a été généralisée au cas dynamique dans (Chow and Willsky 1984) en exploitant les relations temporelles entre les sorties

et les entrées afin de générer des résidus. Nous pouvons citer (Frank 1990), (Patton *et al.* 2001), (Gertler 1998), (Venkatasubramanian *et al.* 2003b), (Basseville 1988). Cette généralisation utilise la redondance temporelle, c'est-à-dire des relations faisant intervenir les valeurs des sorties des capteurs et les entrées des actionneurs à différents instants.

Pour présenter cette méthode, nous considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  désigne l'état du système,  $u \in \mathbb{R}^p$  son entrée et  $y \in \mathbb{R}^m$  sa sortie.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes et de dimensions appropriées. Le comportement entrée/sortie du système est donnée par la relation suivante :

$$Y(p) = G(p)U(p) \quad (1.2)$$

où  $G(p)$  est la matrice de transfert du système. En présence de perturbations, d'incertitudes de paramètres, de bruits..., le système (1.1) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))(x(t) + \Delta x(t)) + (B + \Delta B(t))(u(t) + \Delta u(t)) \\ y(t) = (C + \Delta C(t))(x(t) + \Delta x(t)) \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\Delta A(t)$ ,  $\Delta B(t)$  et  $\Delta C(t)$  représentent des variations sur la paramètres et certains défauts multiplicatifs.  $\Delta x(t)$  et  $\Delta u(t)$  représentent des défauts additifs ou des perturbations. Ce dernier système peut se mettre sous la forme suivante (Chen and Patton 1999) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed + Kf \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.4)$$

avec :

- $f \in \mathbb{R}^{p_f}$ ,  $p_f \geq 1$  représente un vecteur dont les éléments sont des signaux inconnus d'actionneurs, de défauts de procédé ou de capteurs (Massoumnia *et al.* 1989).
- $d \in \mathbb{R}^{p_d}$ ,  $p_d \geq 1$  est un vecteur dont les éléments représentent des perturbations (Patton 1994).

Maintenant, nous allons réécrire les différentes matrices de transfert pour le système ci-dessus. Nous avons :

$$Y(p) = G(p)U(p) + H_f(p)f(p) + H_d(p)d(p) \quad (1.5)$$

où  $H_f(p)$  et  $H_d(p)$  représentent les matrices de transfert entre  $f$  et  $y$  d'une part et  $d$  et  $y$  d'autre part.  $Y(p)$ ,  $f(p)$  et  $d(p)$  sont les transformées de Laplace de  $y$ ,  $f$  et  $d$ . La relation (1.5) peut encore s'écrire :

$$D(p)Y(p) = N(p)U(p) + D(p)H_f(p)f(p) + D(p)H_d(p)d(p) \quad (1.6)$$

où

$$D(p)G(p) = N(p) \quad (1.7)$$

Une équation de parité est une relation qui peut avoir l'une des deux formes suivantes (Gertler and Singer 1990), (Gertler 1997) :

$$\begin{aligned} Q_1(p) &= Y(p) - G(p)U(p) \\ &= H_f(p)f(p) + H_d(p)d(p) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} Q_2(p) &= D(p)Y(p) - N(p)U(p) \\ &= D(p)H_f(p)f(p) + D(p)H_d(p)d(p) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nous constatons que l'équation (1.8) est de type ARMA. Elle n'est valable que pour les systèmes stables alors que l'expression (1.9) est de type MA et permet de traiter des systèmes instables. Considérons les résidus suivants correspondant respectivement aux équations de parité (1.8) et (1.9) :

$$r_1(p) = V(p)Q_1(p) \quad (1.10)$$

$$r_2(p) = W(p)Q_2(p) \quad (1.11)$$

Le système (1.8), (1.10) (ou encore (1.9), (1.11)) est appelé générateur de résidus.

Nous remarquons que  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) est nul en absence de défauts ou de perturbations. Il reste à déterminer  $V(p)$  et  $W(p)$  permettant de rendre le résidu sensible à un seul type de défauts. Pour cela, considérons le générateur de résidu (1.8,1.10) et supposons que nous voulions détecter et isoler la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $f$  notée  $f_i$  en présence de  $d$ . Pour ce faire, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$V(p)H_d(p) = 0 \quad (1.12)$$

$$(V(p)H_f(p))_j = 0, \quad j \neq i \quad (1.13)$$

$$(V(p)H_f(p))_i \neq 0, \quad j = i \quad (1.14)$$

où  $(V(p)H_f(p))_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $V(p)H_f(p)$ . Dans (Massoumnia *et al.* 1989), les auteurs ont montré qu'il existe une solution à ce problème si  $H_f$  est inversible à gauche.

En considérant l'équation d'état (1.4), nous allons écrire les équations de parité dans l'espace d'état. Nous obtenons l'équation suivante :

$$\bar{Y} - G_1\bar{U} = \bar{O}x + G_2\underline{d} + G_3\underline{f} \quad (1.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-p'-1)} \\ y^{(n-p')} \end{pmatrix}; \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-p'-1)} \\ u^{(n-p')} \end{pmatrix}; \quad \bar{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-p'-1)} \end{pmatrix} \\ G_1 &= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ CB & & \bar{0} & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ CA^{(n-p'-2)} & \dots & CB & 0 & \end{pmatrix}; \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ CE & & \bar{0} & & \\ CAE & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ CA^{(n-p'-2)}E & \dots & CE & 0 & \end{pmatrix} \\ \underline{d} &= \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d^{(n-p'-1)} \\ d^{(n-p')} \end{pmatrix}; \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ CK & & \bar{0} & & \\ CAK & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ CA^{(n-p'-2)}K & \dots & CK & 0 & \end{pmatrix}; \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f \\ \vdots \\ f^{(n-p'-1)} \\ f^{(n-p')} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $v^{(i)}$  est la  $i^{\text{ème}}$  dérivée du signal  $v$ .

**Définition 8** Nous appelons espace de parité d'ordre  $p'$  le sous espace  $P$  défini par :

$$P = \{V / V^T \bar{O} = 0\} \quad (1.16)$$

Grâce à cette notion, nous construisons le résidu sous la forme :

$$r = V^T(Y - G_1 \bar{U}) \quad (1.17)$$

Ce résidu est nul en absence de défauts et de perturbations. L'espace de parité correspond donc à un sous-espace où les relations entre les observations de l'entrée et de la sortie restent identiquement nulles (en pratique, au dessous d'un certain seuil à cause des incertitudes de modèle) tant le système fonctionne normalement. Le résidu ainsi défini est donné par :

$$r = V^T(G_2 \underline{d} - G_3 \underline{f}) \quad (1.18)$$

Un bon choix de  $V$  permet de rendre le résidu  $r$  sensible uniquement à un type de défaut donné. Nous en déduisons des conditions du même type que (1.12), (1.13) et (1.14).

### 1.2.2 Approche par identification paramétrique

L'approche par estimation paramétrique consiste à identifier en ligne les paramètres physiques du système à surveiller par des techniques classiques d'identification. Un défaut résultant d'un changement dans un paramètre conduit à une estimation erronée de ce dernier. En comparant alors les paramètres nominaux du système à ceux estimés, des résidus sont générés. Ce type d'approche est très intéressant pour le diagnostic des défauts multiplicatifs résultant d'un changement dans les paramètres du système. Cette approche a été développée pour les systèmes linéaires et généralisée à certains systèmes non linéaires (Isermann and Balle 1997), (Gertler 1998) et (Isermann 1984).

Pour présenter cette approche, considérons le système (1.1) qui peut être réécrit sous la forme suivante :

$$y = \underline{\Psi}^T \underline{\Theta} \quad (1.19)$$

où  $y$  est la sortie du système et  $\underline{\Theta}$  est le vecteur de paramètres à estimer tel que :

$$\underline{\Theta}^T = [a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_p] \quad (1.20)$$

$$\underline{\Psi}^T = [-y^{(1)} \dots -y^{(n)} \quad u^{(1)} \dots u^{(p)}] \quad (1.21)$$

Nous remarquons que le système (1.19) peut se mettre sous la forme (1.8) ou (1.9) en considérant l'erreur noté  $e$  tel que :

$$e = y - \underline{\Psi}^T \underline{\Theta} \quad (1.22)$$

Le vecteur de paramètres  $\underline{\Theta}$  peut être estimé soit en utilisant une méthode des moindres carrés soit de moindres carrés récursifs. Dans (Isermann 1984), (Isermann 1994), les auteurs ont utilisé cette idée pour la détection et l'isolation de défauts affectant des paramètres du système et pour estimer des fonctions de paramètres  $p(\underline{\Theta})$  qui seraient directement corrélées aux défauts à détecter et dont un changement significatif permet d'identifier les défauts concernés.

### 1.2.3 Méthode à base d'observateurs

Ces méthodes sont basées sur l'utilisation des observateurs d'état (Gauthier *et al.* 1992), (Isermann 1997), (Kinnaert 1999). Elles s'appuient sur une bonne connaissance du modèle et de ses paramètres, elles consistent à estimer les variables d'état par un observateur pour reconstruire l'information. Un observateur est un système dynamique ayant une structure semblable à celle du modèle du système étudié mais il se diffère d'un terme additif qui est un terme d'adaptation permettant de corriger l'écart entre la sortie de l'observateur et celle du système réel tout en assurant la stabilité. L'idée de base est d'estimer les sorties du procédé en utilisant un observateur ou un filtre de Kalman et ensuite de générer des résidus.

Les méthodes à base d'observateurs d'état sont les méthodes les plus étudiées dans le domaine du diagnostic avec modèles. Différents observateurs ont été proposés : observateur de Luenberger, observateur à entrées inconnues par découplage, observateur PI, observateur à modes glissants, observateur adaptatif, observateur  $H_\infty$ , observateur par apprentissage itératif et estimateur direct de sortie (Direct Output Estimator).

#### Approche algébrique

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la méthode de l'observateur à entrées inconnues. L'objectif de cette approche est d'estimer des fonctions de sorties considérées par la classe des systèmes (1.4) dont nous savons qu'elles sont uniquement affectées par le type de défauts à détecter. L'erreur d'estimation de la fonction de sortie est considérée comme un résidu. Cela revient à déterminer un système dynamique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = Lz + My + Nu \\ r = F_1z + F_2y \end{cases} \quad (1.23)$$

et la matrice  $T$  telle que :

$$L \text{ soit Hurwitz} \quad (1.24)$$

$$TA - LT = MC \quad (1.25)$$

$$N = TB \quad (1.26)$$

$$F_1T + F_2C = 0 \quad (1.27)$$

$$TE = 0 \quad (1.28)$$

Si le problème possède une solution, alors le résidu  $r$  du système (1.23) permet de détecter le défaut  $f$  si  $TK \neq 0$ . Si les conditions ci-dessus sont vérifiées, nous pouvons vérifier que dans le cas où  $f = 0$ ,  $z$  estime une partie de l'état  $Tx$  en présence de l'entrée inconnue  $d$ . Pour déterminer les différentes matrices ci-dessus, des techniques de calcul algébrique ont été proposées : nous pouvons citer la technique de placement de pôle (Patton *et al.* 1989) et la décomposition en valeurs singulières (Frank and Wunnenberg 1989).

### Approche géométrique

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler les résultats de (Massoumnia *et al.* 1989), (Massoumnia 1986) sur l'approche géométrique pour la conception de filtre de détection de défaut dans les systèmes linéaires. Les outils géométriques utilisés ont été présentés dans le livre de (Wonham 1989). La notion des sous-espaces  $(C, A)$ -invariants (voir Annexe B) a été utilisée pour résoudre le problème de la poursuite d'un signal de sortie en présence de perturbation (Basile and Marro 1969). Plus récemment, cette notion a été utilisée pour résoudre le problème de la détection et d'isolation des défauts pour les systèmes linéaires à temps invariant par (Massoumnia *et al.* 1989), (Massoumnia 1986). Pour présenter cette approche, nous considérons le système stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + L_1v_1 + L_2v_2 \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.29)$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont des signaux inconnus. En absence de défauts sur le système, nous avons  $v_1 = 0$  et  $v_2 = 0$ , qui deviennent non nuls dans le cas contraire. Chaque signal représente un défaut et un seul. Le problème de la détection et d'isolation des défauts pour ce système consiste à concevoir un système dynamique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u + Ey \\ r = F_1z + F_2y \end{cases} \quad (1.30)$$

où  $z \in \mathbb{R}^{n'}$  est le vecteur d'état tel que  $n' \leq n$  et  $r \in \mathbb{R}^{m'}$  tel que  $m' \leq m$ . Ce système doit avoir les propriétés suivantes :

- i. Lorsque  $v_1 = 0$ , le résidu  $r$  tend asymptotiquement vers zéro  $\forall u$  et  $\forall x_0, z_0$  les conditions initiales des systèmes (1.29) et (1.30) ;
- ii.  $r$  n'est pas affecté par le signal  $v_2$  ;
- iii.  $r$  est affecté uniquement par  $v_1$ .

Lorsqu'un tel système existe, il est appelé générateur de résidu et sa sortie est appelée résidu. Ce problème est connu sous le nom de **Problème Fondamental de la Génération de Résidu (PFGR)** associé à  $v_1$ . Considérons le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a u_a + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1 \\ r = C_a x_a \end{cases} \quad (1.31)$$

où :

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ EC & \bar{A} \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B & L_2 \\ \bar{B} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_a = [F_2C \quad F_1]$$

et  $x_a = (x, z)^T$  est l'état augmenté. En augmentant le système (1.29) par les équations du système (1.30), (Massoumnia *et al.* 1989) ont montré que les propriétés ci-dessus peuvent alors être reformulées comme suit :

- i. La matrice de transfert de  $u$  et  $v_2$  vers  $r$  est identiquement nulle.
- ii. La matrice de transfert de  $v_1$  vers  $r$  n'est pas identiquement nulle.
- iii. Lorsque  $v_1 = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} r = 0 \forall u, \forall x_0, z_0$ .

La première propriété entraîne que la direction de  $v_2$  est incluse dans l'espace d'inobservation du système augmenté, de sorte que  $v_2$  n'affecte pas  $r$ . La seconde permet d'avoir une sensibilité de  $r$  par rapport à  $v_1$ . La troisième propriété montre qu'en absence de défaut,  $r$  tend vers zéro. Un résidu  $r$  vérifiant les propriétés ci-dessus, permet donc de détecter et isoler le défaut  $v_1$ . Une condition nécessaire et suffisante est donnée par (Massoumnia *et al.* 1989) pour que le PFGR admette une solution.

**Théorème 1** *Soit  $\mathcal{L}_2$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  engendré par le vecteur colonne  $L_2$  et  $\mathcal{L}_1$  engendré par  $L_1$ . Soit  $\mathcal{S}^*$  le plus petit sous-espace  $(C, A)$ -inobservable contenant  $\mathcal{L}_2$  (voir Annexe B.1). Alors, le PFGR pour le système associé à  $v_1$  a une solution si et seulement si :*

$$\mathcal{S}^* \cap \mathcal{L}_1 = 0 \quad (1.32)$$

*De plus, si cette condition est vérifiée, nous pouvons fixer arbitrairement les pôles du générateur de résidu.*

## 1.3 Observabilité et synthèse d'observateurs pour les systèmes dynamiques

### 1.3.1 Observabilité des systèmes linéaires

Plusieurs critères d'observabilité d'un système linéaire sont décrits dans de nombreuses références parmi lesquelles (O'Reilly 1983) et (Borne *et al.* 1992). Dans ce paragraphe, nous allons considérer le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.33)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur d'entrée et  $y \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de sortie. Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont des dimensions appropriées.

La propriété d'observabilité du système linéaire (1.33) peut être formalisée de la façon suivante :

**Définition 9** *Le système (1.33) est complètement observable si, quelque soit  $T > 0$ , la mesure de  $u$  et  $y$  sur l'intervalle  $[0, T]$  permet de reconstituer l'état : si  $y(x(0), u, t)$  désigne la sortie associée à la condition initiale  $x(0)$  et à l'entrée  $u(\cdot)$ , alors :  $y(x(0), u, t) = y'(x(0), u, t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  implique  $x(0) = x'(0)$ .*

**Théorème 2** *Le système (1.33) est complètement observable si et seulement si, en régime autonome ( $u \equiv 0$ ), la sortie nulle implique l'état nul.*

Ce théorème montre que l'observabilité des systèmes linéaires ne dépend pas de l'entrée. Plus précisément, l'observabilité peut être caractérisée par le critère du rang :

**Théorème 3 (Critère de Kalman)** *Soit la matrice d'observabilité définie par :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

*Le système (1.33) est observable si et seulement si, la matrice d'observabilité  $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}$  est de rang  $n$ .*

$$\text{rang}(\mathcal{M}_{\mathcal{O}}) = n \quad (1.35)$$

### 1.3.2 Synthèse d'observateurs des systèmes linéaires

Un observateur est utilisé dans le but d'estimer l'état ou une fonction linéaire de l'état (telle que la sortie d'un système) (Kalman 1960), (Luenberger 1964), (O'Reilly 1983). Le principe de construction d'un observateur consiste à corriger l'erreur d'estimation entre la sortie réelle et la sortie reconstruite. Une solution simple et optimale au problème de l'estimation de l'état des systèmes linéaires a été proposée par Luenberger dans le cadre déterministe, et par Kalman dans le cadre stochastique.

Considérons le modèle dynamique du système linéaire défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + v \end{cases} \quad (1.36)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$  et  $y \in \mathbb{R}^m$ .  $w$  est le bruit d'entrée de dimension  $p$  et  $v$  est le bruit de mesure de dimension  $m$ .

Lorsque le système n'est pas observable, il n'est pas possible de construire un observateur dont nous choisissons les dynamiques. Cependant, si le système est détectable il sera possible de dimensionner un observateur.

**Théorème 4 (O'Reilly 1983)** *Le système (1.36) est détectable si et seulement si les états non observables sont stables.*

Afin de dimensionner l'observateur, il faut déterminer une matrice  $K$  telle que les valeurs propres de  $(A - KC)$  soient toutes à parties réelles strictement négatives.

#### 1. Observateur de Luenberger (Luenberger 1971) :

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. Dans le cas déterministe, où les bruits  $w$  et  $v$  sont nuls, l'observateur de Luenberger pour le système (1.36) est défini sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (1.37)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  a pour expression :

$$\dot{e} = (A - KC)e \quad (1.38)$$

En utilisant une technique de placement de pôles, le gain  $K$  est choisi telle que les valeurs propres de la matrice  $(A - KC)$  soient dans le demi-plan complexe gauche.

## 2. Filtre de Kalman (Kalman and Bucy 1961) :

L'observateur de Kalman est l'outil utilisé pour résoudre le problème d'estimation de l'état des systèmes linéaires qui sont caractérisés par des bruits  $w$  et  $v$  de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q$  et  $R$  respectivement.

La structure d'observateur de Kalman est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \end{array} \right. \quad (1.39)$$

où le gain  $K$  est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -A^T S - SA + C^T Q C - SRS \\ S(0) = S_0 > 0 \\ Q = Q^T > 0 \\ K = S^{-1} C^T Q \end{array} \right. \quad (1.40)$$

Quelques résultats de convergence pour l'observateur de Kalman sont donnés dans le travail de (Boutayeb and Darouach 2000).

## 3. Observateur à entrées inconnues :

Nous considérons le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{array} \right. \quad (1.41)$$

où  $d \in \mathbb{R}^q$  est l'entrée inconnue et la matrice  $E$  est supposée être de rang plein en colonnes, c'est à dire :

$$\text{Rang}(E) = q \quad (1.42)$$

Nous supposons que la matrice  $C$  a la structure suivante :

$$C = [I_m \ 0 \ \dots \ 0] \quad (1.43)$$

et nous poserons :

$$E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

où  $E_1 \in \mathbb{R}^{m \times q}$   $E_2 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times q}$ . Alors, nous pouvons remarquer que :

$$E_1 = CE \quad (1.45)$$

Pour ce système, un observateur à entrées inconnues existe si et seulement si ces deux conditions sont satisfaites ((Yang and Wilde 1988), (Guan and Saif 1991), (Darouach *et al.* 1994)) :

$$\text{Rang}(CE) = \text{Rang}(E) = q \quad (1.46)$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} sI_n - A & E \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + q, \quad \text{Re}(s) \geq 0 \quad (1.47)$$

La structure de cet observateur est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Tu + Ky \\ \hat{x} = z - Hy \end{cases} \quad (1.48)$$

où  $z \in \mathbb{R}^n$  est l'état de l'observateur,  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé du système  $x$ . Les matrices  $F$ ,  $T$ ,  $K$  et  $H$  sont des matrices qu'il faut choisir de sorte que l'erreur d'observation  $e = \hat{x} - x$  converge asymptotiquement vers 0.

Nous posons :

$$M = I_n + EC \quad (1.49)$$

L'erreur d'observation est donnée par :

$$\begin{aligned} e &= \hat{x} - x \\ &= z - Hy - x \\ &= z - (I_n + HC)x \\ &= z - Mx \end{aligned} \quad (1.50)$$

alors :

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{z} - M\dot{x} \\ &= Fz + Ty + Ku - MAx - MBu - MEd \\ &= F(e + Mx) + TCx - MAx - (MB - K)u - MEd \\ &= Fe + (FM - MA + TC)x - (MB - K)u - MEd \end{aligned} \quad (1.51)$$

Si les matrices  $F$ ,  $T$ ,  $K$  et  $H$  sont choisies de sorte que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$F \text{ est une matrice de Hurwitz} \quad (1.52)$$

$$ME = (I_n + HC)E = 0 \quad (1.53)$$

$$K = MB = (I_n + HC)B \quad (1.54)$$

$$TC - MA = -FM \quad (1.55)$$

alors l'équation (1.51) devient :

$$\dot{e} = Fe \quad (1.56)$$

et l'erreur d'observation converge asymptotiquement vers 0.

### 1.3.3 Observabilité des systèmes non linéaires

L'étude de l'observabilité consiste à établir des conditions sous lesquelles l'état du système peut être déterminé à partir des entrées et des sorties mesurées sur un intervalle de temps passé. En s'appuyant sur le travail de (Hermann and Krener 1977) et (Fossard and Normand-Cyrot 1993), nous définissons la notion d'observabilité à partir de la notion de distinguabilité. Dans ce paragraphe, nous allons proposer quelques définitions concernant l'observabilité des systèmes non linéaires décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.57)$$

où  $x \in W$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u \in U$  un domaine de  $\mathbb{R}^p$  est la commande et  $y \in \mathbb{R}^m$  est la sortie mesurée. Les fonctions  $f$  et  $h$  sont supposées être de classe  $C^\infty$  par rapport à leurs arguments.

**Définition 10 (Distinguabilité - Indistinguabilité)** Deux états initiaux  $x_0, x_1 \in W$  tel que  $x_0 \neq x_1$  sont dits distinguables dans  $W$  si  $\exists t_0 \in [0, T]$  et  $\exists u : [0, T] \rightarrow U$  une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues respectivement de  $x_0$  et  $x_1$  restent dans  $W$  pendant la durée  $[0, T]$  et vérifient  $y(t_0, x_0, u(t_0)) \neq y(t_0, x_1, u(t_0))$ . Nous dirons alors que  $u$  distingue  $x_0$  et  $x_1$  dans  $W$ .

Réciproquement, deux états initiaux  $x_0, x_1 \in W$  tels que  $x_0 \neq x_1$  sont dits indistinguables si  $\forall t_0 \in [0, T]$  et  $\forall u : [0, T] \rightarrow U$  pour lesquels les trajectoires issues de  $x_0, x_1$  restent dans  $W$ , nous avons :  $y(t_0, x_0, u(t_0)) = y(t_0, x_1, u(t_0))$ .

**Définition 11 (Observabilité)** Un système est observable en  $x_0 \in W$  si tout autre état  $x_1 \neq x_0$  est distinguable de  $x_0$  dans  $W$ . Un système est observable s'il est observable en tout point  $x_0 \in W$ .

**Définition 12 (Observabilité locale)** Le système (1.57) est localement observable en  $x_0$  si pour tout voisinage ouvert  $V_{x_0}$  de  $x_0$ , l'ensemble des points qui sont indistinguables de  $x_0$  dans  $V_{x_0}$  via les trajectoires dans  $V_{x_0}$  est le point  $x_0$  lui-même.

Lorsqu'il s'agit de distinguer  $x_0$  de ses voisins, nous pouvons affaiblir la notion d'observabilité locale.

**Définition 13 (Observabilité locale faible)** Le système (1.57) est localement faiblement observable en  $x_0$  s'il existe un voisinage ouvert  $V_{x_0}$  de  $x_0$ , tel que pour tout voisinage ouvert  $V'_{x_0} \subset V_{x_0}$ , l'ensemble des points qui sont indistinguables de  $x_0$  dans  $V'_{x_0}$  via les trajectoires dans  $V'_{x_0}$  est le point  $x_0$  lui-même.

La caractérisation formelle de la propriété d'observabilité locale faible s'appuie sur la notion d'espace d'observation.

**Définition 14 (Espace d'observabilité)** L'espace d'observabilité du système (1.57) est le plus petit espace vectoriel  $\mathcal{O}_{NL}$  contenant  $h_1, \dots, h_m$  et tel que pour toute entrée  $u \in U$  et pour tout  $\tau \in \mathcal{O}_{NL}$ , nous avons  $L_{f_u}(\tau) \in \mathcal{O}_{NL}$  avec  $f_u(x) = f(u, x)$ .

Nous notons par  $d\mathcal{O}_{NL}$  l'espace des différentielles des éléments de  $\mathcal{O}_{NL}$ .

**Définition 15 (Observabilité au sens du rang)** Le système (1.57) est observable au sens du rang en  $x_0 \in W \subset \mathbb{R}^n$  si la dimension de l'espace vectoriel engendré  $d\mathcal{O}_{NL}|_{x_0} = \{d\tau|x_0, \tau \in \mathcal{O}_{NL}\}$  est égale à  $n$ .

Cette condition du rang qui caractérise l'observabilité des systèmes linéaires, n'implique ni l'observabilité locale, ni l'observabilité locale faible dans le cas des systèmes non linéaires en général.

**Théorème 5 (Hermann and Krener 1977)** Si le système (1.57) satisfait en  $x_0$  la condition d'observabilité au sens du rang, alors le système (1.57) est observable en  $x_0$ .

Pour conclure, nous venons de voir que contrairement aux systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires dépend des entrées. Il faut noter aussi que l'observabilité dépend souvent de l'entrée, parce que certaines entrées ne permettent pas de distinguer tout couple d'états initiaux distincts.

**Définition 16 (Entrée universelle)** Une entrée  $u : [0, T] \rightarrow U$  admissible est dite universelle pour le système (1.57) sur  $[0, T]$  si, pour tout couple d'états initiaux distincts  $x_0$  et  $x_1$ , il existe au moins un temps  $t \in [0, T]$  tel que  $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$ . Une entrée non universelle est dite singulière.

Lorsqu'il n'existe pas d'entrées singulières parmi l'ensemble des entrées admissibles  $U$ , alors tout couple d'états initiaux sont distinguables. Cette propriété est appelée la  $U$ -uniforme observabilité.

**Définition 17 ( $U$ -uniforme observabilité)** Un système dont toutes les entrées admissibles à valeurs dans  $U$  sont universelles est dit  $U$ -uniformément observable.

L'uniforme observabilité sur un espace  $W$  permet de caractériser un ensemble d'entrées  $U$  tel que pour toute entrée  $u(t) \in U$ , le système est observable sur  $W$ . Ainsi, les systèmes linéaires observables sont uniformément observables.

### 1.3.4 Synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires

Contrairement au problème de synthèse d'observateurs d'état des systèmes linéaires qui a été entièrement résolu, le cas des systèmes non linéaires est plus difficile et beaucoup moins systématique. C'est la raison pour laquelle, de nombreux travaux ont abordé ce problème, en se basant sur des classes spécifiques de systèmes non linéaires (Besançon and Hammouri 1996, Besançon 1999, Gauthier *et al.* 1992, Hammouri *et al.* 1999). Les observateurs d'état des systèmes non linéaires les plus répandus dans la littérature sont les suivants :

#### 1. Observateur de Luenberger étendu :

L'observateur de Luenberger étendu (Zeitz 1987) intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par l'intermédiaire d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarisé est nécessaire et le gain de l'observateur est calculé par la méthode de placement de pôles, sous la condition que l'état reste toujours au voisinage de l'état d'équilibre. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.58)$$

L'observateur de Luenberger étendu correspondant est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + L(\hat{x}, u)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}, u) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (1.59)$$

où  $L(\hat{x}, u)$  est le gain de l'observateur calculé de telle sorte que toutes les valeurs propres de  $(\frac{\partial f(x, u)}{\partial x}|_{x=\hat{x}} - L(\hat{x}, u)\frac{\partial h(x, u)}{\partial x}|_{x=\hat{x}})$  soient stables.

Cet observateur peut provoquer des instabilités qui se manifestent en s'éloignant du point de fonctionnement. Les approches de changement de coordonnées ne peuvent être

appliquées que pour une classe particulière de systèmes non linéaires. En effet, plusieurs méthodes proposent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui augmente la difficulté de la tâche de construction de l'observateur. Pour cette raison, l'observateur de Luenberger est rarement utilisé dans la pratique et le filtre de Kalman étendu constitue l'approche la plus connue et la plus appliquée dans le traitement des systèmes non linéaires.

## 2. Filtre de Kalman étendu :

Le filtre de Kalman étendu (Jazwinski 1970) est similaire à l'observateur de Luenberger étendu et il est l'une des techniques d'estimation les plus répandues dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Cette approche permet le traitement du cas des bruits même si le caractère optimal est perdu par la linéarisation. Sa conception est basée sur une linéarisation locale du modèle du système autour de la trajectoire estimée par le filtre. Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) + w \\ y = h(x, u) + v \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.60)$$

où  $w$  et  $v$ , comme dans le cas du système (1.36), sont respectivement le bruit d'entrée et le bruit de mesure, de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q$  et  $R$  respectivement. Pour ce système (1.60), le filtre est présenté par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + SH^T(\hat{x}, u)R^{-1}(y - h(\hat{x}, u)) \\ \dot{S} = F(\hat{x}, u)S + SF^T(\hat{x}, u) + Q - SH^T(\hat{x}, u)R^{-1}H(\hat{x}, u)S \end{cases} \quad (1.61)$$

avec  $F(\hat{x}, u) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x}$  et  $H(\hat{x}, u) = \frac{\partial h(x, u)}{\partial x}$  sont calculés en  $x = \hat{x}$ .

Le filtre de Kalman étendu est donc une extension du filtre de Kalman linéaire au cas où le système est décrit dans l'espace d'état par une équation différentielle non linéaire. Sauf qu'un surcoût de calcul est constaté par rapport au filtre de Kalman classique. En effet, outre les opérations non linéaires introduites dans les équations d'états, il faut recalculer à chaque étape les Jacobiennes de ces équations. Cette méthode reste fondée sur la linéarisation qui n'est permise que dans un espace réduit autour de la trajectoire nominale et nous ne pouvons pas garantir une robustesse contre les erreurs de modélisation.

## 3. Observateurs à grand gain :

Ces observateurs concernent les systèmes uniformément observables (les systèmes n'ayant pas des entrées singulières). Considérons le système mono-sortie suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^p u_i f_i(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.62)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

Nous effectuons le changement de variable  $z = \Psi(x)$ , dont les composantes sont données par :

$$\begin{aligned} z_1 &= h(x) \\ z_2 &= L_{f_0}(h)(x) \\ &\vdots \\ z_n &= L_{f_0}^{n-1}(h)(x) \end{aligned} \quad (1.63)$$

où  $L_f$  désigne la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteur  $f$  (voir Annexe C.1) :

$$L_{f_0}(h)(x) = \sum_{i=1}^n f_{0i}(x) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \quad (1.64)$$

avec  $f_{0i}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont les éléments de  $f_0(x)$ .

Alors, nous avons le théorème suivant :

**Théorème 6** (Gauthier and Bornard 1981) *Si le système (1.62) est uniformément observable, alors la transformation  $z = \Psi(x)$  permet de mettre le système sous la forme :*

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + F_0(z) + \sum_{i=1}^p u_i F_i(z) \\ y = Cz \end{cases} \quad (1.65)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \dots 0] \quad (1.66)$$

$$F_0(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{0n}(z) \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

$$\begin{cases} F_j(z) = (F_{j1}(z) \dots F_{jn}(z)) \\ F_{ji}(z) = F_{ji}(z_1, \dots, z_i), \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p \end{cases} \quad (1.68)$$

Ces travaux ont été étendus au cas multi-sorties dans (Bornard and Hammouri 1991). Alors, l'observateur à grand gain du système défini par (1.65) est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + F_0(\hat{z}) + \sum_{i=1}^p u_i F_i(\hat{z}) - S_\theta^{-1} C^T (C\hat{z} - y) \quad (1.69)$$

où  $S_\theta$  est une matrice symétrique définie positive solution de l'équation algébrique :

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A = C^T C \quad (1.70)$$

et  $\theta$  est un paramètre positif et les matrices  $A$  et  $C$  sont exprimées dans (1.66).

Sous l'hypothèse que les termes non linéaires  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  sont globalement Lipschitziennes,  $\exists \alpha_0, \dots, \alpha_p > 0$ ,  $\forall x, x'$ , nous avons :

$$\| F_i(u, x) - F_i(u, x') \| \leq \alpha_i \| x - x' \| \quad (1.71)$$

Cette hypothèse est toujours réalisable lorsque l'état est borné.

**Théorème 7** (Gauthier et al. 1992) *Le système (1.69) est un observateur exponentiel pour le système (1.65), et plus précisément, pour une entrée  $u$  bornée, nous avons  $\| \hat{z}(t) - z(t) \| \leq \lambda e^{-\mu t} \| \hat{z}(0) - z(0) \|$  où  $\mu$  et  $\lambda$  sont deux constantes dépendantes du paramètre de réglage  $\theta$ .*

La convergence de l'observateur est garantie pour des  $\theta$  grands ce qui justifie la dénomination : **observateur à grand gain**.

L'observateur à grand gain qui permet d'estimer la variable  $x$  du système (1.62) est alors donné par :

$$\dot{\hat{x}} = f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p u_i f_i(\hat{x}) - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{\hat{x}} \right)^{-1} S_\theta^{-1} C^T (C\hat{x} - y) \quad (1.72)$$

Quelques extensions de l'observateur à grand gain ont été effectuées pour d'autres classes de systèmes non linéaires (Gauthier and Kupka 1994), (Deza et al. 1992) et (Hammouri and Marchand 2000).

## 1.4 Cas des systèmes affines en l'état

Un système affine en l'état est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u)x + B(u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.73)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $u \in U$  est le vecteur d'entrées appartenant à un ensemble booléen et  $y \in \mathbb{R}^m$  sont les signaux de sorties. Les matrices  $A(u)$  et  $B(u)$  sont mesurables en  $u$  respectivement de dimension  $n \times n$  et  $n \times 1$ . La matrice  $C$  est constante et de dimension  $m \times n$ . Nous appelons matrice de transition du système (1.73), la matrice  $n \times n$  inversible solution de :

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_u(t, t_0)}{dt} = A(u)\Phi_u(t, t_0) \\ \Phi_u(t_0, t_0) = I_d \end{cases} \quad (1.74)$$

où  $I_d$  est la matrice identité, et la solution de (1.73) en  $x_0$  à  $t = t_0$  est donnée par :

$$x(t) = \Phi_u(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi_u(t, \tau)B(u(\tau))d\tau \quad (1.75)$$

Nous remarquons d'abord que toute entrée  $u \in U$  engendre un système linéaire dont les paramètres varient dans le temps et auquel nous associons sur  $[t_0, t_0+T]$  le grammien d'observabilité :

**Définition 18 (Grammien d'observabilité)** (Couenne 1990) *Soit  $u$  une entrée  $[t_0, t_0+T] \rightarrow U$ . Le grammien d'observabilité associé au système (1.73) est la matrice symétrique positive suivante :*

$$G(u, t_0, t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi_u^T(t, t_0)C^T C \Phi_u(t, t_0) dt \quad (1.76)$$

Pour tester l'universalité d'une entrée du système (1.73), nous utilisons la proposition suivante :

**Proposition 1** (Bornard et al. 1993) Une entrée  $u \in U$  est universelle sur  $[t_0, t_1]$  pour le système (1.73) si et seulement si :

$$G(u, t_0, t_1) > 0 \quad (1.77)$$

La proposition suivante permet d'analyser la propriété d'observabilité :

**Proposition 2** (Bornard et al. 1993) Une entrée  $u \in U$  rend le système (1.73) observable sur un intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T]$ , si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

i. Si  $C\Phi_u(t, t_0)x = 0, \forall t \in [t_0, t_0 + T]$ , alors  $x = 0$ .

ii.  $\lambda_{\min}(G(u, t_0, t_0 + T)) \geq 0$  avec  $\lambda_{\min}$  désigne la plus petite valeur propre.

Comme nous avons vu ci-dessus, l'observabilité d'un système est liée à la notion de distinguabilité et nous avons défini les entrées universelles qui permettent de distinguer tout couple d'états initiaux  $x_0 \neq x_1$  sur un intervalle  $[t_0, t_1]$ . Mais nous pouvons remarquer que si l'entrée  $u(t)$  est universelle sur  $[t_0, t_1]$ , alors l'entrée  $u(t + \delta)$  n'est pas forcément universelle pour  $\delta > 0$ .

Nous allons introduire alors les notions d'entrée persistante et d'entrée régulièrement persistante.

**Définition 19 (Entrée persistante)** (Celle et al. 1989) Une entrée  $u \in U$  est dite persistante pour le système (1.73) s'il existe  $T > 0$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_{\min}(G(u, t, t + T)) \quad (1.78)$$

est strictement positive ou n'existe pas.

**Définition 20 (Entrée régulièrement persistante)** (Couenne 1990) Une entrée  $u \in U$  est dite régulièrement persistante pour le système (1.73) s'il existe  $T > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que

$$\forall t, G(u, t, t + T) \geq \alpha I_d \quad (1.79)$$

Ce type d'entrée peut être défini aussi de la manière suivante :

**Définition 21** Une entrée  $u \in U$  est dite régulièrement persistante si  $\exists \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0; \exists t_0 \geq 0; \forall t \geq t_0$ , nous avons :

$$\begin{cases} \lambda_{\min}(G(u, t_0, t_0 + T)) \geq \alpha_1 \\ \lambda_{\max}(G(u, t_0, t_0 + T)) \leq \alpha_2 \end{cases} \quad (1.80)$$

où  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  désignent respectivement la plus petite valeur propre et la plus grande valeur propre du Grammien.

**Proposition 3** (Bornard et al. 1993) Si une entrée  $u \in U$  est régulièrement persistante pour le système affine en l'état (1.73) alors il est complètement uniformément observable.

Une entrée  $u(t)$  régulièrement persistante est universelle. Non seulement sa translaté  $u(t + \lambda)$  reste universelle pour  $\lambda$  arbitrairement grand (persistance), mais elle le reste avec une "qualité" garantie (régularité). La persistance régulière d'une entrée est une propriété requise pour construire un observateur.

Pour cette classe de systèmes (1.73), deux types d'observateurs peuvent être considérés :

1. L'observateur de type Kalman donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + B(u) + PC^T R^{-1}(y - C\hat{x}) \\ \dot{P} = A(u)P + PA^T(u) - PC^T R^{-1}CP + Q \end{cases} \quad (1.81)$$

où  $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$  est une condition initiale quelconque,  $Q$  et  $P(0)$  sont deux matrices symétriques définies positives de type  $n \times n$  et  $R$  est une matrice symétrique définie positive de type  $m \times m$ .

Dans le cas stochastique, les matrices  $Q$  et  $R$  représentent respectivement les matrices de covariance du bruit sur l'état et sur la sortie, qui sont supposés d'être blancs et gaussiens. Dans le cas déterministe,  $Q$  et  $R$  sont quelconques.

2. Le deuxième type d'observateur est donné par une minimisation d'un critère quadratique avec facteur d'oubli exponentiel. Ce critère est à horizon glissant et généralise la méthode des moindres carrés avec facteur d'oubli.

Les équations de l'observateur sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A(u)\hat{x} + B(u) + S^{-1}C^T(y - C\hat{x}) \\ \dot{S} = -\theta S - A^T(u)S - SA(u) + C^T C \end{cases} \quad (1.82)$$

**Théorème 8** *Si  $u$  est régulièrement persistante, alors (1.81) et (1.82) forment des observateurs exponentiels pour le système (1.73).*

La preuve du théorème est présentée dans (Hammouri and Deza 1991), (Celle *et al.* 1989) et (Bornard *et al.* 1989).

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté d'une manière générale un résumé de l'état de l'art sur les principes de base du diagnostic de défauts.

En effet, nous avons rappelé quelques définitions et nous avons exposé différentes approches proposées pour la détection et isolation de défauts. Nous avons envisagé deux approches de synthèse de générateurs de résidus : une approche utilisant un calcul algébrique et une autre basée sur des considérations géométriques. Dans les deux chapitres suivants, nous nous intéressons à cette dernière approche que nous pouvons l'étendre aux systèmes non linéaires en utilisant les notions de découplage géométrique.

Egalement, nous avons présenté un état d'art sur les observateurs non linéaires en précisant la méthodologie de synthèse de quelques un d'entre eux. Tout d'abord, nous avons commencé par rappeler quelques définitions relatives à l'observabilité des systèmes dynamiques. Cette dernière s'avère difficile à vérifier lorsque il s'agit des systèmes non linéaires. Puis, nous avons présenté quelques observateurs linéaires et non linéaires. Chacun de ces observateurs est, la plupart du temps, spécifique à un modèle mathématique particulier et répond à des conditions propres à lui.



# Chapitre 2

## Sur l'existence d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes affines en l'état avec injection de sortie

Ce chapitre a pour objectif la synthèse d'un observateur à entrées inconnues permettant l'estimation d'une partie de l'état indépendamment de la connaissance de certaines entrées. Basé sur une approche géométrique, nous allons donner une condition suffisante sur l'existence d'un observateur à entrées inconnues pour les systèmes affines en l'état avec une injection de sortie.

### 2.1 Introduction

Le problème de la conception d'un observateur à entrées inconnues a reçu beaucoup d'attentions au cours des quatre dernières décennies. Il a été commencé par (Basile and Marro 1969) qui ont présenté une solution du problème de l'observation d'un système à entrées inconnues et après cela, de nombreuses contributions ont été proposées voir par exemple (Bhattacharyya 1978), (Hautus 1983) et (Darouach *et al.* 1994).

La conception d'observateurs pour les systèmes à entrées inconnues joue un rôle important dans la détection de défauts. Dans le cas linéaire, une solution basée sur une approche géométrique a été proposée par (Massoumnia *et al.* 1989). Elle consiste à concevoir un observateur pouvant détecter et identifier uniquement le composant défaillant, tout d'abord dans le cas où plusieurs défauts apparaissent simultanément, et puis dans le cas où un seul défaut peut se produire dans le système. Les auteurs dans (Bokor and Balas 2004a) ont également donné une condition nécessaire et suffisante sur l'existence d'un observateur à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à paramètres variants en utilisant une approche géométrique.

Dans le cas non linéaire, plusieurs contributions ont été proposées. La détection et l'isolation de défauts pour les systèmes non linéaires ont été introduites par (Seliger and Frank 1991). Ils ont synthétisé un observateur non linéaire de détection de défauts qui est robuste aux perturbations ainsi qu'aux incertitudes du modèle. Ensuite, une condition nécessaire et suffisante pour résoudre le problème fondamental de la génération des résidus à travers une approche géométrique différentielle a été proposée par (Hammouri *et al.* 2000) dans le cas des systèmes affines en l'état et par (Hammouri *et al.* 2001) dans le cas des systèmes bilinéaires.

La conception des observateurs à entrées inconnues a été considérée que pour les sous-classes des systèmes non linéaires voir par exemple (Liu *et al.* 2006) et (Moreno and Dochain 2008) qui ont proposé une méthodologie pour faire une analyse globale de l'observabilité et la détectabilité des systèmes de réaction, avec une préoccupation particulière de la conception d'observateurs robustes et ont donné des conditions suffisantes pour construire un observateur robuste pour les systèmes affines en l'état avec injection de sortie.

Pour les systèmes linéaires à temps variant, un observateur à entrées inconnues est obtenu ; dans un premier temps, en caractérisant le plus grand sous-système détectable qui n'est pas affecté par les entrées inconnues, et dans un deuxième temps, en vérifiant une condition géométrique donnée par (Bhattacharyya 1978). Toutes ces constructions sont basées sur des techniques algébriques linéaires. Dans le contexte affine en l'état, les notions d'observabilité et de détectabilité généralement dépendent des signaux d'entrée qui excitent le système. Par conséquent, les techniques spectrales ne sont pas suffisantes pour caractériser la détectabilité des systèmes affines en l'état. Comme pour les systèmes linéaires à temps invariant, la conception d'un observateur à entrées inconnues pour les systèmes affines en l'état avec injection de sortie, sera basée sur l'existence d'un sous-système maximal détectable qui n'est pas affecté par les entrées inconnues. Ce sous-système est unique et dépend de la classe des entrées considérées.

Ce résultat est utilisé afin d'obtenir une condition suffisante sur l'existence d'un observateur à entrées inconnues stable pour les systèmes affines en l'état avec injection de sortie. La théorie derrière cette évolution est inspirée des résultats récents (Hammouri and Tmar 2010) dans lesquels une condition nécessaire et suffisante sur l'existence d'un observateur à entrées inconnues pour les systèmes affines en l'état a été considérée.

## 2.2 Systèmes affines en l'état avec injection de sortie

### 2.2.1 Formulation du problème

Considérons le système affine en l'état avec injection de sortie :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(u(t), y(t))x(t) + B(u(t), y(t)) + K(x(t))v(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  est l'entrée connue,  $v(t) \in \mathbb{R}^l$  est l'entrée inconnue,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  représente le vecteur des sorties mesurées et  $K(x(t))$  est la matrice qui dépend

de  $x$ .  $A(u, y)$  et  $B(u, y)$  sont des matrices lisses qui dépendent de  $(u, y)$ , et  $C$  est une matrice constante de rang  $m$ .

Soit  $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^p)$  la classe des entrées connues  $u(\cdot)$ ,  $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^l)$  la classe des entrées inconnues  $v(\cdot)$  et  $\Gamma$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^r$ . Notre objectif est d'obtenir des conditions suffisantes permettant d'estimer  $\Gamma x(t)$  indépendamment des entrées inconnues  $v(\cdot)$  en utilisant un filtre dynamique. Un tel filtre est appelé un observateur à entrées inconnues. Plus précisément, la formulation mathématique de l'observateur inconnu que nous considérons afin d'estimer  $\Gamma x(t)$  est la suivante :

**Définition 22 (Observateur à entrées inconnues)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\Gamma$  et  $P$  deux applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^r$  et  $\mathbb{R}^q$  respectivement.

Un  $\mathcal{U}$ -observateur à entrées inconnues attaché à  $(\Gamma, P)$  est un système dynamique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \widehat{A}(u(t), y(t))z(t) + E_1(u(t), y(t))y(t) \\ &+ \widehat{B}(u(t), y(t)) + E_2(h(t))y(t) + E_3(h(t))z(t) \\ \dot{h}(t) &= H(h(t), u(t), y(t)) \\ \gamma(t) &= F_1z(t) + F_2y(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  et la fonction  $h(t) \in \mathcal{S}$  avec  $\mathcal{S}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ .  $F_1$  et  $F_2$  sont des matrices constantes,  $\widehat{A}(u, y)$ ,  $\widehat{B}(u, y)$ ,  $E_1(u, y)$ ,  $E_2(h)$ ,  $E_3(h)$  et  $H(h, u, y)$  sont analytiques, et tel que pour tout  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  nous avons les propriétés suivantes :

- i)  $\forall x(0) \in \Omega$ ;  $Px(0) = z(0)$  implique que  $Px(t) = z(t)$  et  $\Gamma x(t) = \gamma(t) \forall t \geq 0$ .
- ii) Pour tout  $x(0) \in \Omega$  et  $z(0) \in \mathbb{R}^q$ , nous avons  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Px(t) - z(t)\| = 0$ .

**Remarque 1 :**

- D'après les propriétés i) et ii) de la définition 22, nous en déduisons que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Gamma x(t) - \gamma(t)\| = 0$ .
- En utilisant le fait que  $\gamma(t) = F_1z(t) + F_2y(t)$ ,  $z(t) = Px(t)$  et la condition i) de la définition 22, nous en déduisons que  $F_1P + F_2C = \Gamma$ .

Dans le paragraphe suivant, nous allons donner quelques outils mathématiques qui seront utilisés dans la conception d'un  $\mathcal{U}$ -observateur à entrées inconnues.

### 2.2.2 Résultats préliminaires

Les concepts dérivant de la géométrie différentielle pour l'observation des systèmes non linéaires ont fait l'objet de nombreuses recherches dans la littérature (Isidori 1995) (voir Annexe B). Afin de donner notre résultat principal, nous aurons besoin des notions suivantes.

Dans la suite, la matrice  $A(u(t), y(t))$  est remplacée par  $A(w(t))$  où  $w(t) \in \mathbb{R}^{m+p}$  est un signal qui ne dépend pas de  $y(\cdot)$ . Considérons alors le système affine en l'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(w(t))x(t) \\ Y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Nous allons commencer par présenter une notion d'invariance particulière qui joue un rôle important dans la théorie de la commande géométrique des systèmes :

**Définition 23 (Sous-espace invariant)** *Un sous-espace  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-espace  $(C, A(w))$ -invariant, si l'une de ces conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

- 1) *Il existe une matrice lisse  $E(\cdot)$  tel que  $\forall w$ , nous avons  $(A(w) + E(w)C)V \subset V$ .*
- 2)  *$\forall w$ , nous avons  $A(w)(Ker(C) \cap V) \subset V$ .*

**Remarque 2 :** *Considérons un sous-espace  $W$ , l'ensemble de tous les sous-espaces  $(C, A(w))$ -invariants contenant  $W$  admet un minimum unique au sens de l'inclusion. Ce minimum noté  $W^*$  est la limite de la suite croissante suivante :*

$$\begin{cases} V_0 & = W \\ V_{i+1} & = V_i + \sum_{j=1}^k A_j(V_i \cap Ker(C)) \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $\{A_1, \dots, A_k\}$  est un système générateur de l'espace vectoriel engendré par  $\{A(w); w \in \mathbb{R}^{m+p}\}$ .

En se basant sur la notion d'invariance, nous allons définir la notion de sous-espace inobservable. Soit  $E(w)$  une  $(n \times p)$  matrice lisse et  $N$  une  $(l \times p)$  matrice constante et considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = (A(w(t)) + E(w(t))C)x(t) \\ s(t) & = NCx(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Notons par  $\mathcal{O}(NC, E(w))$  l'espace inobservable du système (2.5) ; c'est-à-dire l'espace contenant tous les  $x$  tel que  $NCx = 0$  et pour chaque  $w_1, \dots, w_k$ , nous avons  $NC(A(w_1) + E(w_1)C) \dots (A(w_k) + E(w_k)C)x = 0$ .

**Définition 24 (Sous-espace d'inobservabilité)** *Un sous-espace  $V$  est dit un sous-espace d'inobservabilité s'il existe des matrices  $N$  et  $E(\cdot)$  tel que  $V = \mathcal{O}(NC, E(w))$ .*

**Proposition 4** *L'ensemble de tous les sous-espaces  $(C, A(w))$  d'inobservabilité contenant le sous-espace  $W$  admet un minimum noté par  $W^{**}$  au sens de l'inclusion. En outre, le sous-espace  $W^{**}$  est la limite de la suite décroissante suivante :*

$$\begin{cases} W_0 & = Ker(C) + W^* \\ W_{i+1} & = W^* + Ker(C) \cap [\bigcap_{j=1}^k (A_j)^{-1}W_i] \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $(A_1, \dots, A_k)$  est une base du plus petit espace vectoriel contenant  $\{A(w); w \in \mathbb{R}^{m+p}\}$ . Par conséquent, il existe une matrice  $N^{**}$  et une matrice analytique  $E^{**}(w)$  de telle sorte que  $W^{**} = \mathcal{O}(N^{**}C, E^{**}(w))$ . C'est-à-dire,  $W^{**}$  est l'espace inobservable de :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = (A(w(t)) + E^{**}(w(t))C)x(t) \\ y^{**}(t) & = N^{**}Cx(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

Cet algorithme a été développé dans (Hammouri *et al.* 2000) pour les systèmes affines en l'état et dans (Persis and Isidori 2000) pour les systèmes non linéaires généraux.

Alors,  $W^{**}$  est un sous-espace  $(C, A(w))$ -invariant tel que  $(A(w) + E^{**}(w)C)W^{**} \subset W^{**}$ , et donc le système quotient suivant est bien défini (voir Annexe B.1) :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) &= \overline{(A(w(t)) + E^{**}(w(t))C)}^{W^{**}} \varepsilon(t) \\ y^{**}(t) &= N^{**}C\varepsilon(t) \\ \varepsilon \in \mathbb{R}^n / W^{**} \end{cases} \quad (2.8)$$

Ce système quotient représente le plus grand système observable qui va être utilisé par la suite dans la construction de l'observateur.

**Remarque 3 :** *Par construction, le système (2.8) est observable au sens du rang, et donc il est observable dans le sens qu'il admet une entrée qui distingue tout couple d'états distincts. Par conséquent, l'ensemble des entrées qui rend le système (2.8) complètement uniformément observable n'est pas vide. Cet ensemble sera noté dans la suite par  $\mathcal{U}_W$ .*

Pour construire déjà un observateur, nous n'avons pas besoin d'utiliser un système qui est observable, il suffit qu'il soit détectable. Si nous faisons le quotient du système (2.7) par un sous-espace plus petit que  $W^{**}$ , nous allons avoir dans ce cas un système qui est plus grand, détectable et qui se décompose d'une partie observable par définition de détectabilité et une partie qui est stable. Et c'est dans ce contexte que nous allons introduire dans la section suivante la notion de détectabilité externe.

## 2.3 Conception de l'observateur à entrées inconnues

### 2.3.1 Condition suffisante sur l'existence de l'observateur

Le but de notre travail consiste en l'obtention de conditions géométriques permettant de caractériser l'observateur (2.2). Pour aboutir à ce résultat, nous introduisons dans ce qui suit la notion suivante :

**Définition 25 (Détectabilité externe)** *Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .  $V$  est  $\mathcal{U}$ -extérieurement détectable, s'il existe deux matrices lisses  $E_1(w)$  et  $E_2(h)$  telles que les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $(A(w) + E_1(w)C)V \subset V, \forall w \in \mathbb{R}^{m+p}$ .
- $E_2(h)CV = \{0\}, \forall h \in \mathcal{S}$ .
- Le système quotient suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \overline{(A(w(t)) + E_1(w(t))C + E_2(h(t))C)}^V \xi(t) \\ \dot{h}(t) = H(h(t), w(t)), (\xi, h) \in (\mathbb{R}^n / V) \times \mathcal{S} \end{cases} \quad (2.9)$$

est tel que le sous-ensemble  $\{0\} \times \mathcal{S}$  de  $\mathbb{R}^n / V \times \mathcal{S}$  attire chaque trajectoire du système (2.9).

Cette notion nous permet de construire le plus grand sous-système détectable non affecté par les entrées inconnues  $v(t)$ . Soit  $\mathcal{D}_{ext}(\mathcal{U}_W, W)$  l'ensemble de tous les sous-espaces  $\mathcal{U}_W$ -extérieurement détectable contenant un sous-espace  $W$  et admettant un plus petit élément  $\widehat{W}$  au sens de  $\subset$ , alors nous avons :

**Lemme 1** *Etant donné un sous-espace  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_{ext}(\mathcal{U}_W, W)$  est non vide.*

La démonstration de ce lemme est donnée après l'énoncé du résultat principal suivant :

**Théorème 9** *(Sahnoun and Hammouri 2013)*

*Soit  $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  une application linéaire et  $K(x)$  la matrice associée aux entrées inconnues du système (2.1). Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par la famille  $\{K^j(x); 1 \leq j \leq l; x \in \mathbb{R}^n\}$ , où  $K^j(x)$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $K(x)$ . Soit  $\widehat{W}$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_{ext}(\mathcal{U}_W, W)$  et  $P$  une projection linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^q$  tel que  $\text{Ker}(P) = \widehat{W}$ .*

*Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et supposons que  $\mathcal{U} = \{u(\cdot)/(u(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{U}_W; \forall x(0) \in \Omega\}$  est non vide, où  $y(\cdot)$  est la sortie du système (2.1) associée à  $(x(0), u(\cdot))$ , alors :*

*Si :*

$$\widehat{W} \cap \text{Ker}(C) \subset \text{Ker}(\Gamma) \quad (2.10)$$

*alors le système (2.1) admet un  $\mathcal{U}$ -observateur à entrées inconnues de la forme (2.2) qui estime exponentiellement  $\Gamma x(t)$  pour tout  $x(0) \in \Omega$ .*

**Preuve du Lemme 1 :**

Il suffit de montrer que le sous-espace d'inobservabilité  $W^{**} \in \mathcal{D}_{ext}(\mathcal{U}_W, W)$ . Comme nous l'avons vu précédemment,  $(A(w) + E^{**}(w)C)W^{**} \subset W^{**}$ . Ainsi, en utilisant un simple changement de coordonnées, nous pouvons transformer le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= (A(w(t)) + E^{**}(w(t))C)x(t) \\ y^{**}(t) &= N^{**}Cx(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= A_{11}(w(t))x_1(t) + A_{12}(w(t))x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{22}(w(t))x_2(t) \\ y^{**}(t) &= C_2x_2(t), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \end{cases} \quad (2.12)$$

Alors, le système (2.8) devient équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) &= A_{22}(w(t))x_2(t) \\ y^{**}(t) &= C_2x_2(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

A partir de la remarque 3,  $\mathcal{U}_W$  est alors l'ensemble des entrées qui rend le système (2.13) complètement uniformément observable. Maintenant, en utilisant l'observateur indiqué dans (Bornard *et al.* 1989), (Hammouri and Morales 1990), nous déduisons que :

$$\begin{cases} \dot{\widehat{x}}_2(t) &= A_{22}(w(t))\widehat{x}_2(t) - S^{-1}(t)C_2^T R(C_2\widehat{x}_2(t) - y^{**}(t)) \\ \dot{S}(t) &= -\theta S(t) - A_{22}^T(w(t))S(t) - S(t)A_{22}(w(t)) \\ &\quad + C_2^T R C_2 \\ S(0), & R \text{ sont des matrices symétriques définies positives} \\ \theta > 0 & \text{est un paramètre scalaire} \end{cases} \quad (2.14)$$

forme un observateur exponentiel qui converge pour toute entrée qui rend le système (2.13) complètement uniformément observable. C'est-à-dire, pour tout  $w \in \mathcal{U}_W$ , le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) &= (A_{22}(w(t)) - S^{-1}(t)C_2^T R C_2)e(t) \\ \dot{S}(t) &= -\theta S(t) - A_{22}^T(w(t))S(t) - S(t)A_{22}(w(t)) \\ &\quad + C_2^T R C_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

est tel que  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n_2}$  attire chaque trajectoire du système (2.15). Par construction, le système (2.15) peut être considéré comme un espace quotient de la forme (2.9).  $\square$

### 2.3.2 Démonstration du Théorème 9

Nous présentons dans ce qui suit une proposition qui joue un rôle important dans la construction de l'observateur à entrées inconnues et montre la relation entre la notion d'observateur à entrées inconnues et la détectabilité externe. Nous notons par  $\mathcal{U}_V$  l'ensemble des entrées qui rend le système complètement uniformément observable.

**Proposition 5** *Soient  $P$  et  $\Gamma$  deux applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^q$  et  $\mathbb{R}^r$  respectivement. Supposons qu'il existe deux matrices constantes  $F_1$  et  $F_2$  telles que  $\Gamma = F_1P + F_2C$ , et que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $PK(x) = 0$ , où  $K(x)$  est la matrice associée aux entrées inconnues du système (2.1). Supposons que  $V = \text{Ker}(P)$  est  $\mathcal{U}_V$ -extérieurement détectable et que  $\mathcal{U} = \{u(\cdot)/(u(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{U}_V, \forall x(0) \in \Omega\}$  est non vide. Alors le système (2.1) admet un  $\mathcal{U}$ -observateur à entrées inconnues de la forme (2.2).*

**Preuve :**

Soit  $V = \text{Ker}(P)$  est  $\mathcal{U}$ -extérieurement détectable. Alors, d'après la définition 25, il existe  $E_1(w)$ ,  $E_2(h)$  et  $H(h, w)$  satisfaisant les conditions suivantes :

- $(A(w) + E_1(w)C)V \subset V, \forall w \in \mathbb{R}^{m+p}$
- $E_2(h)CV = \{0\}, \forall h \in \mathcal{S}$
- Le système quotient suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = \overline{(A(w(t)) + E_1(w(t))C + E_2(h(t))C)}^V \xi(t) \\ \dot{h}(t) = H(h(t), w(t)), (\xi, h) \in (\mathbb{R}^n/V) \times \mathcal{S}. \end{cases}$$

est tel que le sous-ensemble  $\{0\} \times \mathcal{S}$  attire chaque trajectoire du système (2.9).

D'après la condition (a.) donnée ci-dessus, nous savons que  $V$  est un sous-espace invariant et nous avons déjà  $PK(x(t)) = 0$ . Ainsi, après un simple changement de coordonnées linéaire, le système (2.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}(u, y)x_1(t) + A_{12}(u, y)x_2(t) + B_1(u, y) \\ \quad + k_1(x(t))v \\ \dot{x}_2(t) = A_{22}(u, y)x_2(t) + B_2(u, y) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_1(t) = C_1x_1(t); \quad y_2(t) = C_2x_2(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$  et  $P$  peut être considéré comme la projection  $P(x_1, x_2) = x_2$ . En outre, la matrice  $A(u, y) + E_1(u, y)C + E_2(h)C$  prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A_{11}(u, y) + E_1^1(u, y)C_1 & A_{12}(u, y) + E_1^1(u, y)C_2 + E_2^1(h)C_2 \\ 0 & A_{22}(u, y) + E_2^1(u, y)C_2 + E_2^2(h)C_2 \end{pmatrix}$$

Donc, dans le système de coordonnées  $(x_1, x_2)$ , le système (2.16) dans lequel  $w$  est remplacé par  $(u, y)$  peut être représenté par le système suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{e}(t) = (A_{22}(u, y) + E_1^2(u, y)C_2 + E_2^2(h)C_2)e(t) \\ \dot{h}(t) = H(h, u, y) \end{cases} \quad (2.17)$$

Le  $\mathcal{U}$ - observateur à entrées inconnues candidat qui estime  $\Gamma x(t)$  prend la forme suivante :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{z}(t) &= (A_{22}(u, y) + E_1^2(u, y)C_2 + E_2^2(h)C_2)z(t) \\ &+ B_2(u, y) - E_1^2(u, y)y_2 - E_2^2(h)y_2 \\ \dot{h}(t) &= H(h, u, y) \\ \gamma(t) &= F_1z(t) + F_2y(t) \end{cases} \quad (2.18)$$

En effet,  $e(t) = z(t) - Px(t) = z(t) - x_2(t)$ , il s'en suit que  $e(t)$  satisfait les équations (2.17), et comme nous l'avons vu précédemment  $e(t)$  converge vers 0 pour tout  $(u, y) \in \mathcal{U}_V$ . Enfin, en utilisant l'expression  $\Gamma = F_1P + F_2C$ , nous déduisons que  $\Gamma x(t) - \gamma(t)$  converge vers 0.  $\square$

**Preuve du Théorème 9 :**

Soit  $\widehat{W}$  le plus petit élément de  $\mathcal{D}_{ext}(\mathcal{U}_W, W)$ ,  $\Gamma$  et  $P$  deux projections linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^r$  et  $\mathbb{R}^q$  respectivement tel que  $Ker(P) = \widehat{W}$ .

Supposons que  $\widehat{W} \cap Ker(C) \subset Ker(\Gamma)$  et montrons que le système (2.1) admet un  $\mathcal{U}$ - observateur à entrées inconnues.

Clairement,  $\widehat{W} \cap Ker(C) \subset Ker(\Gamma)$  implique l'existence des matrices constantes  $F_1$  et  $F_2$  tel que  $\Gamma = F_1P + F_2C$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{U} = \{u(\cdot)/(u(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{U}_W; \forall x(0) \in \Omega\}$  est non vide. En utilisant le fait que  $\widehat{W}$  est un sous-espace  $\mathcal{U}_W$ -extérieurement détectable contenant  $W$  et que  $PK(x) = 0, \forall x$  (puisque  $Ker(P) = \widehat{W}$  et  $W \subset \widehat{W}$ ), alors d'après la proposition 5, le système (2.3) admet un  $\mathcal{U}$ - observateur à entrées inconnues.  $\square$

## 2.4 Procédure de calcul de $\widehat{W}$

(1) Nous calculons  $W^*$  en utilisant l'algorithme (2.4) de la remarque 2 suivant :

$$\begin{cases} V_0 &= W \\ V_{i+1} &= V_i + \sum_{j=1}^k A_j(V_i \cap ker(C)) \end{cases}$$

où  $(A_1, \dots, A_k)$  est un système générateur de l'espace vectoriel engendré par  $\{A(w), w \in \mathbb{R}^{m+p}\}$ . Etant donné  $W^*$ , nous calculons  $E^*(\cdot)$  en utilisant  $(A(w) + E^*(w)C)W^* \subset W^*$ . Cette inclusion peut être formulée comme suit :

$$[W^{*\perp}]^T E^*(w)C[W^*] = -[W^{*\perp}]^T A(w)[W^*], \quad \forall w. \quad (2.19)$$

(2) Nous calculons  $W^{**}$  en utilisant l'algorithme (2.6) de la proposition 4 :

$$\begin{cases} W_0 &= Ker(C) + W^* \\ W_{i+1} &= W^* + Ker(C) \cap [\bigcap_{j=0}^k (A_j)^{-1}W_i] \end{cases}$$

De la même façon que dans (1), la matrice  $E^{**}(\cdot)$  est calculée en résolvant l'expression suivante :

$$[W^{**\perp}]^T E^{**}(w)C[W^{**}] = -[W^{**\perp}]^T A(w)[W^{**}], \quad \forall w. \quad (2.20)$$

- (3) Pour le calcul de la matrice  $N^{**}$ , nous utilisons le fait que  $W^{**} \subset \text{Ker}(N^{**}C)$ . Etant calculé  $W^{**}$ , nous considérons le sous-espace vectoriel des vecteurs lignes de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\mathcal{N} = \{N \in \mathbb{R}^n; NC[W^{**}] = 0\}$ .  $N^{**}$  est alors une matrice dont les lignes forment une base de  $\mathcal{N}$ .
- (4)  $\widehat{W}$  est le plus petit sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} (A(w) + E^*(w)C)\widehat{W} \subset \widehat{W} \\ W \subset \widehat{W} \end{cases} \quad (2.21)$$

et tel que le système :

$$\dot{\zeta} = \overline{(A(w) + E^*(w)C)}^{\widehat{W}} \zeta \quad (2.22)$$

est exponentiellement asymptotiquement stable  $\forall w \in \mathcal{U}_W$ . Le calcul de  $\widehat{W}$  est donné par les étapes suivantes :

- (4.a)  $\dim(W^{**}/W^*) = r$ , nous identifions  $W^{**}/W^*$  avec  $\mathbb{R}^r$  en utilisant une projection adéquate. D'une manière similaire,  $\overline{(A(w) + E^*(w)C)}^{W^*}$  seront identifiés avec un opérateur linéaire  $\overline{A}(w)$  dans  $\mathbb{R}^r$ , où  $(A(w) + E^*(w)C)|_{W^{**}}$  est la restriction de  $(A(w) + E^*(w)C)$  à  $W^{**}$ .
- (4.b) Si  $\overline{A}(w)|_{W^{**}}^{W^*}$  ne dépend pas de  $w$  alors la stabilité asymptotique exponentielle de (2.22) peut être obtenue à partir de l'approche spectrale.
- Sinon, si  $\overline{A}(w)|_{W^{**}}^{W^*}$  dépend de  $w$  alors :
- (4.c) Nous calculons tous les sous-espaces  $\overline{A}(w)$ -invariants de  $\mathbb{R}^r$ .
- (4.d) Nous déterminons le plus petit sous-espace noté par  $\overline{W}$  tel que  $\dot{z}(t) = \overline{A}(w)^{\overline{W}} z(t)$  devient exponentiellement asymptotiquement stable.

## 2.5 Exemples

### Exemple 1 :

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), y(t))x(t) + B(u(t), y(t)) + Kx(t)v(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.23)$$

où :

$$A(u, y) = \begin{pmatrix} uy_1 & uy_1 & 0 & -1 & uy_1 \\ 0 & 0 & -1 & uy_1 & 0 \\ uy_1 & 0 & 0 & uy_1 & 0 \\ -uy_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & uy_1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$B(u, y) = \begin{pmatrix} -(1 + y_1^4)y_1 \\ 0 \\ -(1 + y_2^4)y_2 + uy_1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

et

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

$u$  et  $v$  sont respectivement les entrées connues et inconnues.

Prenons  $\Gamma(x) = (x_1, x_3, x_4, x_5)$ . Dans la suite, nous allons montrer que  $\Gamma x(t)$  peut être estimé. Tout d'abord, nous allons montrer que l'hypothèse du théorème 9 est satisfaite. Ensuite, nous donnons le filtre qui nous permet d'estimer  $\Gamma x(t)$ .

Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^5$  engendré par les colonnes de  $K$  et calculons  $\widehat{W}$  en utilisant la procédure présentée dans la section 2.4.

(1) Calcul de  $W^*$  et  $E^*(u, y)$  :

Appliquons 2) de la définition 23, c'est facile de voir que  $W^* = W$ . Pour calculer  $E^*(u, y)$  tel que  $(A(u, y) + E^*(u, y)C)W^* \subset W^*$ , il suffit de résoudre l'expression donnée dans (2.19). Un simple calcul nous donne :

$$E^*(u, y) = \begin{pmatrix} e_{11}^* & e_{12}^* \\ e_{21}^* & e_{22}^* \\ -uy_1 & e_{32}^* \\ uy_1 & e_{42}^* \\ 0 & e_{52}^* \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

(2) Calcul de  $W^{**}$  et  $E^{**}(u, y)$  :

En appliquant l'algorithme (2.6), nous obtenons :

$$[W^{**}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Comme ci-dessus,  $E^{**}(u, y)$  peut être obtenu en résolvant l'expression donnée dans (2.20) :

$$E^{**}(u, y) = \begin{pmatrix} e_{11}^{**} & e_{12}^{**} \\ e_{21}^{**} & e_{22}^{**} \\ -uy_1 & e_{32}^{**} \\ uy_1 & e_{42}^{**} \\ e_{51}^{**} & e_{52}^{**} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Ainsi, nous pouvons choisir par exemple :

$$E^*(u, y) = E^{**}(u, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -uy_1 & 0 \\ uy_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

(3) Calcul de  $N^{**}$  :

Nous résolvons l'expression  $N^{**}C[W^{**}] = 0$ , ce qui nous donne  $N_1^{**} = 0$ . Ainsi, nous pouvons prendre  $N^{**} = (0 \ 1)$ , d'où :

$$N^{**}C = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (2.32)$$

Ainsi, la matrice  $(A(u, y) + E^*(u, y)C)$  prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} uy_1 & uy_1 & 0 & -1 & uy_1 \\ 0 & 0 & -1 & uy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & uy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & uy_1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Dans notre cas, nous avons  $E^{**} = E^*$ . C'est facile de voir que le système quotient suivant :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \overline{(A(u, y) + E^{**}(u, y)C)}^{W^{**}} \varepsilon \\ Y = \overline{N^{**}C} \varepsilon \\ \varepsilon \in \mathbb{R}^5/W^{**} \equiv \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.34)$$

peut être représenté par :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & uy_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon \\ Y = [1 \ 0] \varepsilon \end{cases} \quad (2.35)$$

Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des entrées bornées  $u(\cdot)$  tel que  $u(t)y_1(t)$  rend le système (2.35) complètement uniformément observable. Prenons  $\underline{A}(u, y) = \begin{pmatrix} 0 & uy_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{C} = (1 \ 0)$  et considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & uy_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon - S^{-1} \underline{C}^T \underline{C} \varepsilon \\ \dot{S} = -\theta S - \underline{A}^T(u, y) S \\ \quad - S \underline{A}(u, y) + \underline{C}^T \underline{C} \end{cases} \quad (2.36)$$

où  $S(0)$  est une matrice symétrique définie positive et  $\theta$  est un paramètre constant. D'après (Bornard *et al.* 1989), (Hammouri and Morales 1990) (voir système (2.14)), si  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  alors  $\varepsilon(t)$  converge exponentiellement vers 0.

(4.a) Nous avons  $\dim(W^{**}/W^*) = 1$ . En utilisant l'expression (2.33), nous trouvons que le système  $\dot{\varepsilon} = \overline{(A(u, y) + E^*(u, y)C)}_{W^{**}/W^*} \varepsilon$  est équivalent à :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \overline{A}(u, y) \varepsilon(t) \quad (2.37)$$

où  $\overline{A}(u, y) = -1$ .

(4.b) La matrice  $\overline{A}(u, y)$  ne dépend pas de  $(u, y)$ .

Ainsi,  $\widehat{W}$  est le sous-espace vectoriel dans  $\mathbb{R}^2$  engendré par les colonnes de  $W^*$ . Alors, le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \overline{(A(u, y) + E^*(u, y)C)}^{\widehat{W}} \zeta \\ Y = \overline{N^{**}C} \zeta \end{cases} \quad (2.38)$$

devient équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & uy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & uy_1 & -1 \end{pmatrix} \zeta \\ Y = \zeta_1 \end{cases} \quad (2.39)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que  $\widehat{W}$  est le plus petit sous-espace  $\mathcal{U}$ -extérieurement détectable contenant  $W$ . Pour cela, nous allons calculer  $E_1(w)$ ,  $E_2(h)$  et  $H(h, w)$  satisfaisant aux conditions de la définition 25 :

a. Nous avons  $E_1(w) = E^{**}(w)$ , (ici  $w = (u, y)$ ).

b. Prenons  $h = S$  et  $E_2(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -[S^{-1}\underline{C}^T N^{**}] \\ 0 \end{pmatrix}$ .

c.  $H(h, w) = -\theta S - \underline{A}^T(w)S - S\underline{A}(w) + \underline{C}^T \underline{C}$ . De plus, si  $S(0)$  est une matrice symétrique définie positive, alors la solution  $S(t)$  reste symétrique définie positive pour tout  $t$ . Dans la suite, nous prenons  $\mathcal{S}$  l'ensemble des  $(2 \times 2)$  matrices symétriques définies positives (ce sous-ensemble est un ouvert de l'espace vectoriel des matrices symétriques).

Clairement, le système quotient suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\xi} = \overline{(A(w) + E_1(w)C + E_2(h)C)}^{\widehat{W}} \xi \\ \dot{h} = H(h, w), (\xi, h) \in (\mathbb{R}^5/\widehat{W}) \times \mathcal{S}. \end{cases} \quad (2.40)$$

peut être présenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 & uy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & uy_1 & -1 \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} -S^{-1}\underline{C}^T \zeta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{S} = -\theta S - \underline{A}^T(w)S - S\underline{A}(w) + \underline{C}^T \underline{C} \end{cases} \quad (2.41)$$

D'une part, les deux premières équations de (2.41) sont les mêmes que celles de (2.36). Par conséquent,  $(\zeta_1(t), \zeta_2(t))$  converge vers 0. D'autre part,  $u(\cdot)y_1(\cdot)$  est borné et la troisième équation de (2.41) est stable par rapport à  $\zeta_3$ . Alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0$ .

En conséquence,  $\widehat{W} = W^* = W$  est le plus petit sous-espace  $\mathcal{U}$ -extérieurement détectable contenant  $W$ .

Par ailleurs, il est évident de remarquer que  $\widehat{W} \cap \text{Ker}(C) \subset \text{Ker}(\Gamma)$ . Enfin, prenons la projection  $P$  tel que  $P(x) = (x_3, x_4, x_5)$ , donc nous avons  $\widehat{W} = \text{Ker}(P)$  et l'hypothèse du théorème 9 est alors vérifiée.

D'où, le  $\mathcal{U}$ -observateur à entrées inconnues qui estime  $\Gamma x(t)$  prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & uy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & uy_1 & -1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -(1+y_2^4)y_2 + uy_1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \quad - \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{C}^T (\tilde{C}z - y_2) \\ \dot{S} = -\theta S - \underline{A}^T(w)S - S\underline{A}(w) + \underline{C}^T \underline{C} \\ \gamma(t) = F_1 z(t) + F_2 y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.42)$$

avec  $F_1 = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ I_3 \end{pmatrix}$ ,  $F_2 = \begin{pmatrix} [1 & 0] \\ \underline{0} \end{pmatrix}$  et  $\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0]$  où  $\underline{0}$  désigne la matrice nulle de dimension adéquate, et  $I_3$  la matrice identité.

Rappelons que  $P(x) = (x_3, x_4, x_5)$ , de la construction ci-dessus, il est clair que les conditions  $i)$  et  $ii)$  de la définition 22 sont vérifiées.

Les performances de l'observateur ont été testées par une simulation sous Matlab. Nous avons considéré un signal sinusoïdal comme entrées inconnues  $v(t) = \sin(t)$  sur les deux premiers états du système (2.23) et nous avons estimé les états  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5$ . Les entrées connues ont été prises égales à  $t/2$ .

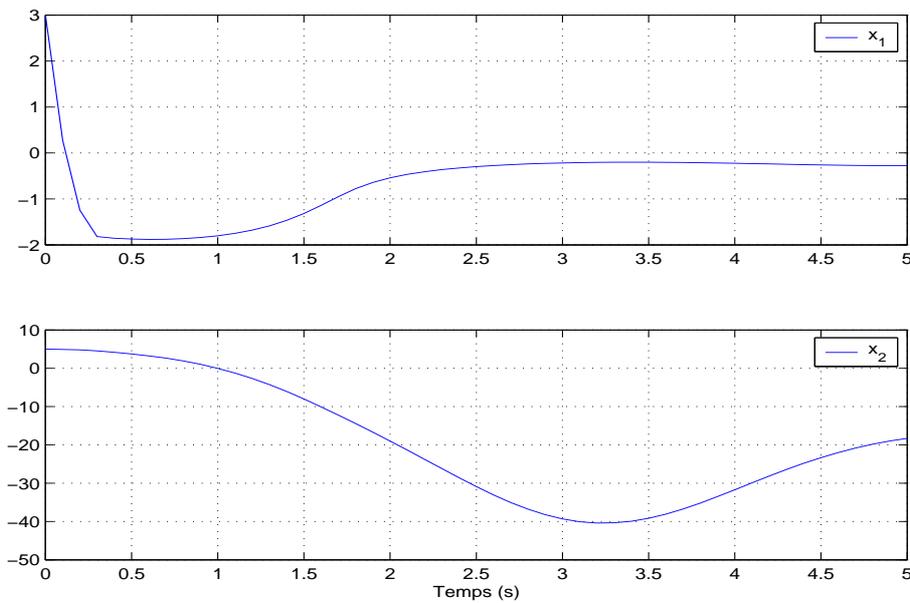


FIGURE 2.1: Evolution des états  $x_1$  et  $x_2$

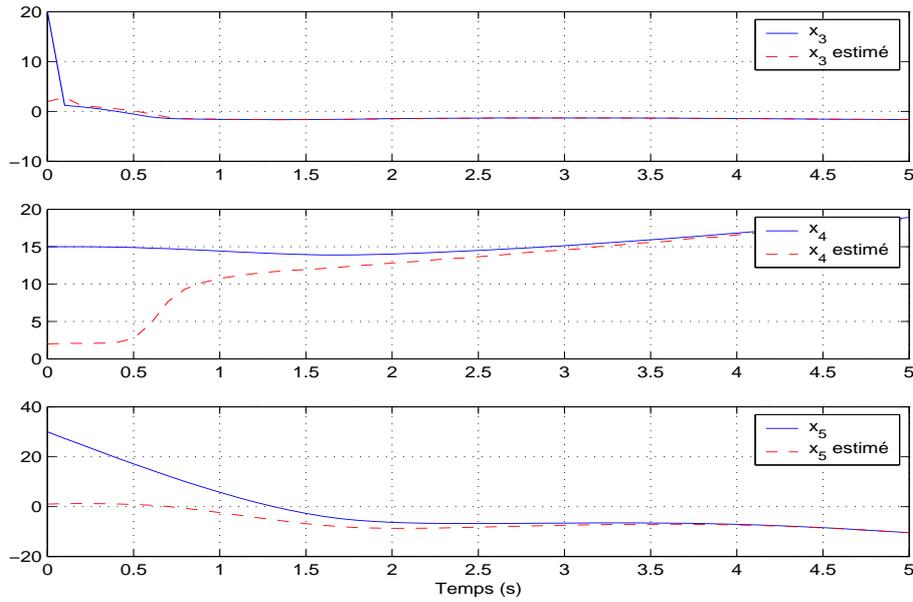


FIGURE 2.2: Evolution des états  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5$  avec leurs estimations

La figure 2.1 montre l'évolution des états  $x_1$  et  $x_2$  qui sont affectés par les entrées inconnues. Les résultats de l'observateur sont représentés sur la figure 2.2. Nous remarquons que les états estimés  $\hat{x}_3$ ,  $\hat{x}_4$  et  $\hat{x}_5$  convergent respectivement vers les états réels  $x_3$ ,  $x_4$  et  $x_5$  ce qui montre que tel observateur fournit un estimateur d'état approprié en dépit de la présence des entrées inconnues.

**Exemple 2 :**

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(u(t), y(t))x(t) + Kx(t)v(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.43)$$

où

$$A(u) = A_0 + uy_1A_1 \quad (2.44)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

$u$  et  $v$  sont respectivement les entrées connues et inconnues.

Prenons  $\Gamma(x) = (x_1, x_4, x_5, x_6)$ . Dans la suite, nous allons montrer que  $\Gamma x(t)$  peut être estimé. Tout d'abord, nous montrons que l'hypothèse du théorème 9 est satisfaite. Ensuite, nous donnons la structure du filtre qui permet d'estimer  $\Gamma x(t)$ .

Soit  $W$  le sous-espace vectoriel dans  $\mathbb{R}^6$  engendré par les colonnes de  $K$  et calculons  $\widehat{W}$  en utilisant la procédure que nous avons présenté précédemment :

(1) Calcul de  $W^*$  et  $E^*(\cdot)$  :

En appliquant la condition 2) de la définition 23, c'est facile de remarquer que  $W^* = W$ . Puisque le système est bilinéaire, alors  $E^*(u, y)$  prend la forme suivante  $E_0^* + uy_1 E_1^*$ . Ainsi,  $(A(u, y) + E^*(u, y)C)W^* \subset W^*$  devient équivalent à  $(A_0 + E_0^*C)W^* \subset W^*$  et  $(A_1 + E_1^*C)W^* \subset W^*$ .

$(A_i + E_i^*C)W^* \subset W^*$  est équivalent à  $[W^{*\perp}]^T E_i^* C [W^*] = -[W^{*\perp}]^T A_i [W^*]$ , pour  $i = 0, 1$ .  
Donc,

$$E_0^* = E_1^* = \begin{pmatrix} e_{11}^{0*} & e_{12}^{0*} \\ 0 & e_{22}^{0*} \\ e_{31}^{0*} & e_{32}^{0*} \\ 0 & e_{42}^{0*} \\ 1 & e_{52}^{0*} \\ 0 & e_{62}^{0*} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

(2) Calcul de  $W^{**}$  et  $E^{**}(\cdot)$  :

En appliquant l'algorithme (2.6), nous trouvons :

$$[W^{**}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Comme ci-dessus,  $E^{**}(u, y)$  peut être obtenu en résolvant l'expression suivante  $[W^{**\perp}]^T E_i^{**} C [W^{**}] = -[W^{**\perp}]^T A_i [W^{**}]$ , pour  $i = 0, 1$ . Alors,

$$E_0^{**} = E_1^{**} = \begin{pmatrix} e_{11}^{0**} & e_{12}^{0**} \\ e_{21}^{0**} & e_{22}^{0**} \\ e_{31}^{0**} & e_{32}^{0**} \\ e_{41}^{0**} & e_{42}^{0**} \\ 1 & e_{52}^{0**} \\ 0 & e_{62}^{0**} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Ainsi, nous pouvons choisir :

$$E_0^* = E_0^{**} = E_1^* = E_1^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

(3) Calcul de  $N^{**}$  :

Nous résolvons l'équation  $N^{**}C[W^{**}] = 0$  qui nous donne  $N_1^{**} = 0$ . Ainsi, nous prenons  $N^{**} = (0 \ 1)$ , d'où :

$$N^{**}C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) \quad (2.52)$$

Maintenant, considérons le changement de coordonnées suivant  $\xi = T^{-1}x$ , où  $T = [[W^{**}] \ [W^{**\perp}]]$  est la matrice inversible constituée par les colonnes de  $[W^{**}]$  et  $[W^{**\perp}]$ , où :

$$[W^{**\perp}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Nous obtenons :

$$T^{-1}(A_0 + E_0^*C)T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

et

$$T^{-1}(A_1 + E_1^*C)T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Ainsi, la matrice  $T^{-1}(A(u, y) + E^*(u, y)C)T$  prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & uy_1 & 2 \\ uy_1 - 1 & -1 & uy_1 & 0 & 0 & 1 - uy_1 \\ 0 & 0 & -1 & uy_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & uy_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & uy_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Remarquons que  $E^*(u, y) = E^{**}(u, y)$  et que les quatre premières colonnes de la matrice  $T^{-1}(A(u, y) + E^*(u, y)C)T$  correspondent à une base de  $(A(u, y) + E^{**}(u, y)C)W^{**}$ . C'est facile de remarquer que le système quotient suivant :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \overline{(A(u, y) + E^{**}(u, y)C)}^{W^{**}} \varepsilon \\ Y = \overline{N^{**}C} \varepsilon \\ \varepsilon \in \mathbb{R}^6 / W^{**} \equiv \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.57)$$

peut être représenté par :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} -1 & uy_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon \\ Y &= [1 \quad 0] \varepsilon \end{cases} \quad (2.58)$$

Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble des entrées bornées  $u(\cdot)$  tel que  $u(t)y_1(t)$  rend le système (2.58) complètement uniformément observable. Prenons  $\underline{A}(u) = \begin{pmatrix} -1 & uy_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{C} = [1 \quad 0]$  et considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} -1 & uy_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon - S^{-1} \underline{C}^T \underline{C} \varepsilon \\ \dot{S} &= -\theta S - \underline{A}^T(u) S - S \underline{A}(u) + \underline{C}^T \underline{C} \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $S(0)$  est une matrice symétrique définie positive et  $\theta$  est un paramètre constant. D'après (Bornard *et al.* 1989), (Hammouri and Morales 1990) (voir le système (2.14)), si  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  alors  $\varepsilon(t)$  converge exponentiellement vers 0.

(4.a) Nous avons  $\dim(W^{**}/W^*) = 2$ . En utilisant l'expression (2.56) de  $T^{-1}(A(u, y) + E^*(u, y)C)T$ , le système  $\dot{\varepsilon} = \overline{(A(u, y) + E^*(u, y)C)}_{W^{**}} \varepsilon$  devient équivalent à :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \overline{A}(u, y) \varepsilon(t) \quad (2.60)$$

où  $\overline{A}(u, y) = \begin{pmatrix} -1 & uy_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(4.b) La matrice  $\overline{A}(u, y)$  dépend de  $(u, y)$ .

(4.c) L'unique sous-espace  $\overline{A}(u, y)$ -invariant notée par  $\overline{W}$  dans  $\mathbb{R}^2$  est le sous-espace engendré par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(4.d)  $\overline{\overline{A}(u, y)}_{\overline{W}} = -1$ . Ainsi,  $\widehat{W}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les colonnes de  $W^*$  et la deuxième colonne de  $A(u, y)$  (voir (2.56)). Donc, le système :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \overline{(A(u, y) + E^{**}(u, y)C)}_{\widehat{W}} \zeta \\ Y &= \overline{N^{**}C} \zeta \end{cases} \quad (2.61)$$

devient équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} &= \begin{pmatrix} -1 & uy_1 & 0 \\ 0 & -1 & uy_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta \\ Y &= \zeta_2 \end{cases} \quad (2.62)$$

Montrons que  $\widehat{W}$  est le plus petit sous-espace  $\mathcal{U}$ -extérieurement détectable contenant  $W$ . Pour cela, nous allons calculer  $E_1(u)$ ,  $E_2(h)$ ,  $H(h, w)$  satisfaisant les conditions de la définition 25 :

a. Nous avons  $E_1(w) = E^*(w)$ , (ici  $w = (u, y)$ ).

b. Soit  $h = S$  et  $E_2(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -[S^{-1} \underline{C}^T N^{**}] \end{pmatrix}$ .

c.  $H(h, w) = -\theta S - \underline{A}^T(w)S - S\underline{A}(w) + \underline{C}^T \underline{C}$ . De plus, si  $S(0)$  est une matrice symétrique définie positive, alors  $S(t)$  reste symétrique définie positive pour tout  $t$ . Dans la suite, nous notons par  $\mathcal{S}$  l'ensemble des  $(2 \times 2)$  matrices symétriques définies positives (c'est un sous-ensemble ouvert de l'espace vectoriel des matrices symétriques).

Alors, le système quotient suivant :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\xi} = \overline{(A(w) + E_1(w)C + E_2(h)C)}^{\widehat{W}} \xi \\ \dot{h} = H(h, w), (\xi, h) \in (\mathbb{R}^6 / \widehat{W}) \times \mathcal{S}. \end{cases} \quad (2.63)$$

peut être représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{pmatrix} -1 & uy_1 & 0 \\ 0 & -1 & uy_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} 0 \\ -S^{-1} \underline{C}^T \zeta_2 \end{pmatrix} \\ \dot{S} = -\theta S - \underline{A}^T(u, y)S - S\underline{A}(u, y) + \underline{C}^T \underline{C} \end{cases} \quad (2.64)$$

Les modes observables du système (2.64) sont caractérisés par les variables  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$ . Leurs dynamiques sont équivalentes aux celles du système (2.59). Ainsi,  $(\zeta_2(t), \zeta_3(t))$  convergent vers 0. Le mode inobservable est donné par  $\zeta_1$ . Sa dynamique est exponentiellement stable ( $u(\cdot)y_1(\cdot)$  est borné). Alors,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = 0$ .

Par conséquent,  $\widehat{W}$  est le plus petit sous-espace  $\mathcal{U}$ -extérieurement détectable contenant  $W$ .

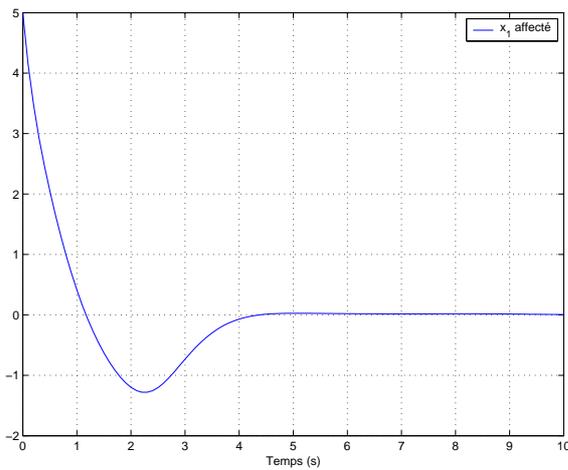
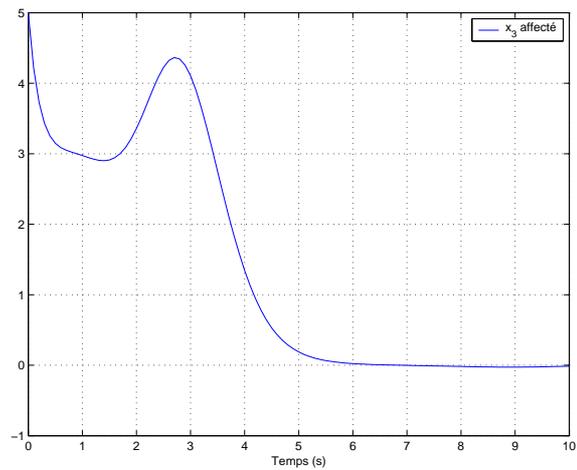
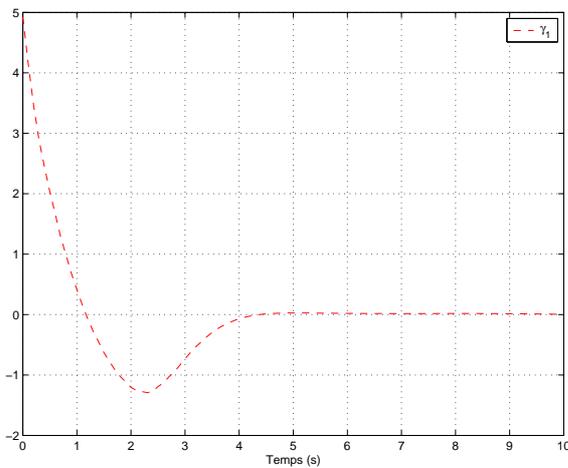
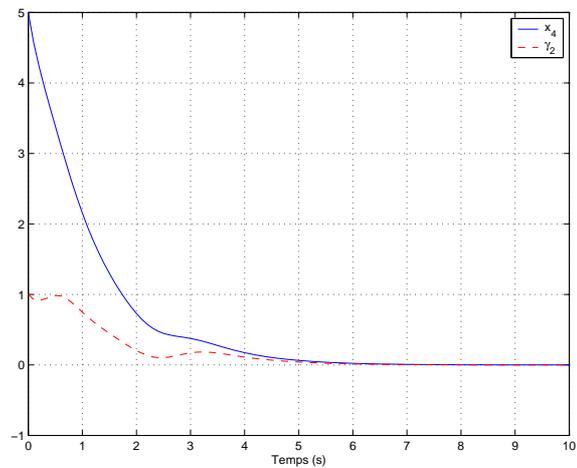
En outre, il est évident que  $\widehat{W} \cap Ker(C) \subset Ker(\Gamma)$ . Finalement, prenons  $P(x) = (x_4, x_5, x_6)$ , ainsi nous avons  $\widehat{W} = Ker(P)$  et l'hypothèse du théorème 9 est satisfaite.

La dimension de l'espace qui peut être observé indépendamment des entrées inconnues  $v(\cdot)$  est de dimension 4 dont 3 variables peuvent être estimées en utilisant l'observateur (2.64) et la 4<sup>ème</sup> variable provient de la sortie mesurée du système (2.43). D'où, le  $\mathcal{U}$ -observateur à entrées inconnues qui estime  $\Gamma x(t)$  prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & uy_1 & 0 \\ 0 & -1 & uy_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \tilde{C}^T (\tilde{C}z - y_2) \\ \dot{S} = -\theta S - \underline{A}^T(u, y)S - S\underline{A}(u, y) + \underline{C}^T \underline{C} \\ \gamma(t) = F_1 z(t) + F_2 y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.65)$$

où  $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix}$ ,  $F_2 = \begin{pmatrix} [1 \ 0] \\ \underline{0} \end{pmatrix}$  et  $\tilde{C} = [0 \ 1 \ 0]$  avec  $\underline{0}$  est la matrice nulle de dimension adéquate et  $I_3$  est la matrice identité.

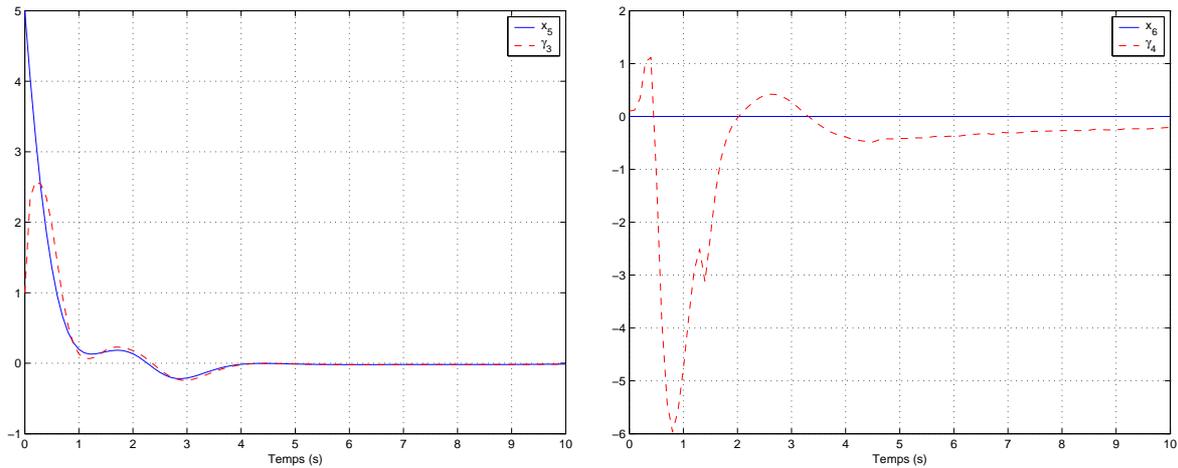
Rappelons que  $P(x) = (x_4, x_5, x_6)$ , alors il est clair que les conditions *i*) et *ii*) de la définition 22 sont vérifiées. Les performances de l'observateur proposé sont évaluées par une simulation sous Matlab. Nous avons considéré un signal sinusoïdal comme entrées inconnues sur le premier

(a) Evolution de  $x_1$  affecté par les entrées inconnues(b) Evolution de  $x_3$  affecté par les entrées inconnuesFIGURE 2.3: Evolution des états  $x_1$  et  $x_3$ .(a) Evolution de  $\gamma_1(t) = y_1(t)$ (b) Evolution de  $x_4(t)$  avec son estimation  $\gamma_2(t)$ FIGURE 2.4: a) Evolution des deux premières variables de  $\gamma(t)$ .

et le troisième états du système (2.43) et nous avons estimé les états  $x_4$ ,  $x_5$  and  $x_6$ . Les entrées connues ont été prises égales à  $t/2$  comme dans l'exemple 1.

La figure 2.3 nous montre l'évolution du premier et troisième états qui sont affectés par les entrées inconnues.

Les figures 2.4 et 2.5 montrent que l'observateur (2.65) fournit une estimation d'état appropriée.



(a) Evolution de  $x_5(t)$  avec son estimation  $\gamma_3(t)$

(b) Evolution de  $x_6(t)$  avec son estimation  $\gamma_4(t)$

FIGURE 2.5: b) Evolution des deux dernières variables de  $\gamma(t)$ .

## 2.6 Conclusion

La conception d'un observateur à entrées inconnues pour les systèmes affines en l'état avec injection de sortie a été envisagée dans ce chapitre. Le problème consiste à estimer une partie de l'état inconnu indépendamment de la connaissance des entrées inconnues. La construction de l'observateur à entrées inconnues est basée sur l'existence d'un système maximal détectable relativement à une large classe des entrées et qui est insensible aux entrées inconnues. Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé la notion de détectabilité externe définie dans (Hammouri and Tmar 2010) qui permet de construire le plus grand sous-système détectable qui n'est pas affecté par les entrées inconnues. L'observateur proposé est stable, convergent et robuste dans le sens que les paramètres de la matrice  $K(x)$  ainsi que les entrées associées  $v(t)$  sont supposés être inconnues et seulement le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de  $K(x)$  est nécessaire dans la construction de l'observateur à entrées inconnues.

# Chapitre 3

## Observateur non linéaire basé sur la forme en cascade et l'injection de sortie

Ce chapitre traite de l'analyse d'observabilité permettant de transformer un système non linéaire en un système en cascade pour lequel un observateur peut être conçu. Cette classe de systèmes en cascade contient la classe des systèmes affines en l'état avec une injection de sortie. Tout d'abord, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes théoriques qui représentent une extension des résultats existants. Ensuite, nous donnons un algorithme constructif qui permet de calculer les difféomorphismes qui transforment le système d'origine sous la forme cascade désirée. Enfin, nous caractérisons l'ensemble de tous ces difféomorphismes.

### 3.1 Introduction

L'importance des observateurs linéaires ou non linéaires et leur applications dans la conception des systèmes de contrôle, la détection de défauts, des communications sécurisées et divers autres domaines a été bien évalué.

De nombreuses approches ont été développées afin de concevoir un observateur pour les systèmes non linéaires. Parmi eux, nous trouvons les approches géométriques qui consistent à caractériser les systèmes non linéaires pouvant être transformés par un changement de coordonnées en une classe particulière de systèmes pour lesquels un simple observateur pourra être conçu. Le problème de linéarisation de l'erreur d'observation consiste à transformer un système non linéaire en un système linéaire plus un terme non linéaire ne dépendant que des entrées connues et des sorties. Pour tels systèmes, un observateur de Luenberger peut être conçu. Ce problème a attiré beaucoup d'attention depuis sa formulation par (Krener and Isidori 1983) (voir par exemple (Boutat *et al.* 2009, Glumineau *et al.* 1996, Krener and Respondek 1985, Lin and Byrnes 1995, Plestan and Glumineau 1997, Xia and Gao 1989)). En utilisant des techniques d'immersion, une extension de ce problème a été indiqué dans

(Jouan 2003) dans le cas d'une sortie unique.

Dans le même cadre que pour le problème de linéarisation de l'erreur, les auteurs dans (Hammouri and Gauthier 1988, Hammouri and Gauthier 1989, Hammouri and Gauthier 1992, Hammouri and Kinnaert 1996) ont caractérisé les systèmes non linéaires qui peuvent être transformés par un changement de coordonnées sous la forme des systèmes affines avec une injection de sortie. Pour ces systèmes, un observateur de Kalman peut être conçu.

Considérons la classe suivante des systèmes en cascade :

$$\begin{cases} \dot{z} &= A(u)z + \psi(u, y) \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{A}(u)\tilde{z} + \tilde{\psi}(u, z, \tilde{y}) \\ Y &= \begin{pmatrix} Cz \\ \tilde{C}\tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.1)$$

Pour ces systèmes, la conception d'observateurs peut être résolue. En effet, une structure d'observateurs pour les systèmes (3.1) peut prendre la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A(u)\hat{z} + \psi(u, y) - S^{-1}C^T R(C\hat{z} - y) \\ \dot{\hat{\tilde{z}}} &= \tilde{A}(u)\hat{\tilde{z}} + \tilde{\psi}(u, \hat{z}, \tilde{y}) - \tilde{S}^{-1}\tilde{C}^T \tilde{R}(\tilde{C}\hat{\tilde{z}} - \tilde{y}) \\ \dot{S} &= -\theta S - A^T(u)S - SA(u) + C^T RC \\ \dot{\tilde{S}} &= -\theta\tilde{S} - \tilde{A}^T(u)\tilde{S} - \tilde{S}\tilde{A}(u) + \tilde{C}^T \tilde{R}\tilde{C} \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $S(0)$ ,  $\tilde{S}(0)$ ,  $R$  et  $\tilde{R}$  sont des matrices symétriques définies positives,  $\theta > 0$  et  $\tilde{\theta} > 0$  sont des paramètres. La preuve de la convergence de cet observateur a été présentée dans (Besançon *et al.* 1996).

Motivé par la synthèse d'observateur présentée ci-dessus, nous analysons dans ce chapitre les systèmes non linéaires qui peuvent être transformés par un changement de coordonnées à une classe des systèmes en cascade. Ensuite, nous n'allons pas nous limiter à des conditions nécessaires et suffisantes qui étendent celles indiquées dans (Hammouri and Gauthier 1988, Hammouri and Gauthier 1989), mais aussi à développer un algorithme permettant de calculer un système de coordonnées adéquat. L'algorithme que nous allons présenter n'est pas une simple extension de ceux proposés par (Hammouri and Gauthier 1988, Hammouri and Kinnaert 1996), mais nécessite des techniques algébriques et géométriques appropriées. Enfin, nous allons donner une caractérisation complète de la classe des difféomorphismes permettant de transformer le système d'origine sous la forme en cascade désirée.

## 3.2 Résultats préliminaires

Nous considérons les deux classes suivantes de systèmes non linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(u, x) \\ y &= h(x) \\ \tilde{y} &= \tilde{h}(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \dot{z} &= A(u)z + \psi(u, y) \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{A}(u)\tilde{z} + \tilde{\psi}(u, z, \tilde{y}) \\ y &= Cz \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{z} \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(z, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$  sont respectivement les états des systèmes (3.3) et (3.4);  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée connue,  $y(t)$  et  $\tilde{y}(t)$  représentent les sorties connues qui appartiennent respectivement à  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^{\tilde{p}}$ . Sans perte de généralité, les fonctions  $f$  et  $h$  sont supposées être de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $x$  et continues par rapport à  $u$ .

- Le système (3.3) est observable, si pour deux états initiaux distincts  $x(0)$  et  $x'(0)$ , il existe une entrée  $u(\cdot)$  de telle sorte que  $(h(x(\cdot)), \tilde{h}(x(\cdot)))$  et  $(h(x'(\cdot)), \tilde{h}(x'(\cdot)))$  ne sont pas identiquement égaux sur un intervalle  $[0, T]$  où  $x(\cdot)$  et  $x'(\cdot)$  sont bien définis.
- Soit  $\mathcal{O}_{NL}$  l'espace d'observabilité du système (3.3) : le plus petit espace vectoriel réel contenant les composants de  $h$ ,  $\tilde{h}$  et fermé sous les dérivés de Lie le long des champs de vecteurs  $f_u$ , où  $f_u(x) = f(u, x)$ .

Soit  $d\mathcal{O}_{NL}$  la codistribution engendrée par  $\{d\varphi; \varphi \in \mathcal{O}_{NL}\}$  (la codistribution d'observabilité de (3.3)). Le système (3.3) est dit observable dans le sens du rang pour un certain  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , si  $\dim(d\mathcal{O}_{NL}(x^0)) = n$ .

**Définition 26** *Le système (3.4) est dit en cascade observable, si le système (3.4) avec son système réduit associé en  $(z, y)$  sont observables.*

Considérons les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= A(u(t))z(t) \\ y(t) &= Cz(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) &= \tilde{A}(u(t))\tilde{z}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}\tilde{z}(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Notons par  $\mathcal{O}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{O}}$ ) l'espace vectoriel d'observabilité de (3.5) (respectivement de (3.6)). Nous pouvons vérifier que  $\mathcal{O}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{O}}$ ) est exactement l'espace vectoriel engendré par les formes linéaires définies par les lignes de  $C$  et celles de  $CA(u_1) \dots A(u_k)$  (respectivement les lignes de  $\tilde{C}$  et  $\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)$ ), où  $u_1, \dots, u_k$  décrivent  $\mathbb{R}^m$  et  $k \geq 1$ . Par conséquent,  $\mathcal{O}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{O}}$ ) peut être identifié avec la codistribution d'observabilité du système (3.5) (respectivement (3.6)). Ensuite, nous avons :

**Assertion 1** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Le système (3.4) est en cascade observable .*
- 2) *Les systèmes (3.5) et (3.6) sont tous les deux observables.*

3)  $\dim(\mathcal{O}) = q$  et  $\dim(\tilde{\mathcal{O}}) = n - q$

Dans ce qui suite, nous allons rappeler quelques notions géométriques.

### Quelques rappels :

#### • Produit intérieur

Soit  $X = (X_1, \dots, X_l)$  un  $l$ -uplet de champs de vecteurs, avec  $l \leq k$  et soit  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  une forme différentielle. Alors,  $i_X(\omega)$  est la  $(k - l)$ -forme différentielle définie par :

$$i_X(\omega)(Y_1, \dots, Y_{k-l}) = \omega(X_1, \dots, X_l, Y_1, \dots, Y_{k-l}) \quad (3.7)$$

En particulier, si  $k = l$ , alors  $i_X(\omega)$  est une fonction (une 0-forme différentielle).

#### • Dérivée de Lie

Soit  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  un champ de vecteurs, alors la dérivée de Lie  $L_X(\omega)$  est définie par :

$$L_X(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_X(a_i) dx_i + \sum_{i=1}^n a_i d\alpha_i \quad (3.8)$$

#### • Produit dual

Soient  $X$  et  $\omega$  tels qu'ils sont définis ci-dessus, le produit dual est donné par :

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \quad (3.9)$$

Le produit dual (3.9) peut être étendu à  $k$ -formes différentielles comme suit :

Si  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{(i_1, \dots, i_k)} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  est de  $k$ -formes différentielles et  $X = (X_1, \dots, X_k)$  est un  $k$ -uplet de champs de vecteurs, avec  $X_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{il} \frac{\partial}{\partial x_l}$ , alors :

$$\omega(X) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{(i_1, \dots, i_k)} \begin{vmatrix} \alpha_{1i_1} & \dots & \alpha_{ki_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1i_k} & \dots & \alpha_{ki_k} \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Soit  $V$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-ensemble de  $V$ , alors  $Span F$  représente le sous-espace vectoriel de  $V$  qui est engendré par  $F$ .

Soit  $f_u$  le champ vectoriel défini par  $f_u(x) = f(u, x)$ ;  $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))$  et  $\tilde{h}(x) = (\tilde{h}_1(x), \dots, \tilde{h}_p(x))$  représentent les sorties du système (3.3) et soit  $X = (X_1, \dots, X_p)$  un  $p$ -uplet de champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous définissons la famille d'espaces vectoriels réels  $\Omega_k^X$  de  $(p + 1)$ -formes différentielles comme suit :

- $\Omega_0^X = 0$  et  $\Omega_1^X = Span\{dL_{f_u}(h_i) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p; 1 \leq i \leq p, u \in \mathbb{R}^m\}$ . Nous remarquons que ces deux espaces ne dépendent pas de  $X$ .
- Pour  $k \geq 1$ , nous prenons  $\Omega_{k+1}^X = Span\{L_{f_u}(i_X(\omega)) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p; u \in \mathbb{R}^m; \omega \in \Omega_k^X\} + \Omega_k^X$ .

Prenons  $\pi = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_q$ , où  $\varphi_k$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et soit  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{p}+q})$  un  $(\tilde{p} + q)$ -uplet de champs de vecteurs. Comme nous l'avons vu ci-dessus, nous définissons les espaces vectoriels  $\Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}}$  de  $(q + \tilde{p} + 1)$ -formes différentielles comme suit :

- $\Omega_{0,\pi}^{\tilde{X}} = 0$  et  $\Omega_{1,\pi}^{\tilde{X}} = \text{Span}\{dL_{f_u}(\tilde{h}_i) \wedge d\tilde{h}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{h}_{\tilde{p}} \wedge \pi; 1 \leq i \leq \tilde{p}, u \in \mathbb{R}^m\}$ .
- Pour  $k \geq 1$ ,  $\Omega_{k+1,\pi}^{\tilde{X}} = \text{Span}\{L_{f_u}(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega})) \wedge d\tilde{h}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{h}_{\tilde{p}} \wedge \pi; u \in \mathbb{R}^m; \tilde{\omega} \in \Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}}\} + \Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}}$ .

Alors, nous avons le lemme technique suivant :

**Lemme 2** *Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un système de coordonnées local et  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Considérons un  $k$ -uplet de champs de vecteurs  $X = (X_1, \dots, X_k)$  satisfaisant  $L_{X_i}(x_j) = \delta_{ij}$ , alors à un signe près, nous avons :*

$$i_X(d\varphi \wedge dx_1 \dots \wedge dx_k) = d\varphi - L_{X_1}(\varphi)dx_1 - \dots - L_{X_k}(\varphi)dx_k \quad (3.11)$$

Plus précisément, nous avons :

$$i_X(d\varphi \wedge dx_1 \dots \wedge dx_k) = (-1)^{k+1}[d\varphi - L_{X_1}(\varphi)dx_1 - \dots - L_{X_k}(\varphi)dx_k] \quad (3.12)$$

La preuve du lemme 2 peut être facilement obtenue en utilisant les définitions et les notations données ci-dessus.

### 3.3 Théorème d'existence

Dans (Hammouri and Gauthier 1988), (voir aussi (Hammouri and Gauthier 1989) pour le cas multi-sorties), les auteurs ont donné des conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(u, x) \\ y = h(x); \quad y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3.13)$$

peut être transformé en un système affine en l'état avec une injection de sortie :

$$\begin{cases} \dot{z} = A(u)z + \psi(u, y) \\ y = Cz \end{cases} \quad (3.14)$$

Le résultat suivant présente un théorème d'existence qui étend les résultats présentés dans (Hammouri and Gauthier 1988, Hammouri and Gauthier 1989).

#### 3.3.1 Conditions nécessaires et suffisantes

**Théorème 10** *(Sahnoun and Hammouri 2014)*

*Le système (3.3) peut être transformé par un changement de coordonnées local autour d'un certain  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  en un système en cascade observable (3.4) où  $C$  et  $\tilde{C}$  sont respectivement de rang  $p$  et  $\tilde{p}$ , si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites au voisinage de  $x^0$  :*

- (1) *Il existe un  $p$ -uplet de champs de vecteurs  $X = (X_1, \dots, X_p)$  satisfaisant les conditions suivantes :*

(1-i)  $L_{X_i}(h_j) = \delta_{ij}$ , où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon.

(1-ii) La somme algébrique  $\Omega^X = \sum_{k \geq 1} \Omega_k^X$  est un espace vectoriel réel de dimension  $q - p$ .

(1-iii) Pour tout  $\omega \in \Omega^X$ ,  $d(i_X(\omega)) = 0$ .

(1-iv) La dimension de  $[\bigwedge^{q-p}(i_X(\Omega^X)) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p]|_{x^0}$  est égale à 1, où

$$\begin{aligned} & [\bigwedge^{q-p}(i_X(\Omega^X)) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p]|_{x^0} \\ &= \{i_X(\omega_1) \wedge \dots \wedge i_X(\omega_{q-p}) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p(x^0); \omega_i \in \Omega^X, 1 \leq i \leq q-p\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

(2) Considérons les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+\tilde{p}}$  définies par :

$$\begin{aligned} & \text{pour } 1 \leq i \leq p, \varphi_i = h_i \\ & \text{pour } 1 \leq i \leq \tilde{p}, \varphi_{q+i} = \tilde{h}_i \\ & (d\varphi_1, \dots, d\varphi_q) \text{ forme une base de } i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dh_1 + \dots + \mathbb{R}dh_p \end{aligned} \quad (3.16)$$

Soit  $\pi = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_q$ , alors il existe un  $(\tilde{p} + q)$ -uplet de champs de vecteurs  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{p}+q})$  satisfaisant les conditions suivantes au voisinage de  $x^0$  :

(2-i)  $L_{\tilde{X}_i}(\varphi_j) = \delta_{ij}$ .

(2-ii) La somme algébrique  $\Omega_{\pi}^{\tilde{X}} = \sum_{k \geq 1} \Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}}$  est un espace vectoriel réel de dimension  $n - q - \tilde{p}$ .

(2-iii) Pour tout  $\tilde{\omega} \in \Omega_{\pi}^{\tilde{X}}$ ,  $d(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega})) = 0$ .

(2-iv) La dimension  $[\bigwedge^{n-q-\tilde{p}}(i_{\tilde{X}}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}})) \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{q+\tilde{p}}]|_{x^0}$  est égale à 1.

Nous remarquons que seulement la condition (1) du théorème 10 est nécessaire et suffisante afin de transformer le système (3.13) en un système observable (3.14). Dans le cas des systèmes mono-sortie, la preuve est présentée dans (Hammouri and Gauthier 1988), et pour les systèmes multi-sorties un extrait de la preuve est donnée dans (Hammouri and Gauthier 1989).

La preuve du théorème 10 sera détaillée pour deux raisons : la première est que dans le cas multi-sorties (Hammouri and Gauthier 1989), la preuve n'est pas détaillée et certains passages dans la démonstration ne sont pas clairs. Et la deuxième raison est que la classe des systèmes (3.4) de ce travail est plus générale que la classe des systèmes (3.14) étudiée dans (Hammouri and Gauthier 1989). Par conséquent, la démonstration du théorème 10 nécessite de nouveaux développements.

Nous allons introduire quelques notations que nous utilisons pour la suite.

Soient  $X, \tilde{X}$  respectivement un  $p$ -uplet et un  $(q + \tilde{p})$ -uplet de champs de vecteurs satisfaisant respectivement les conditions (1) et (2) du théorème 10.

- $\omega_{u_1}^i = dL_{f_{u_1}}(h_i) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p$  et pour  $k \geq 2$ ,  $\omega_{u_1 \dots u_k}^i = L_{f_{u_k}}(i_X(\omega_{u_1 \dots u_{k-1}}^i)) \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p$ .
- $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+\tilde{p}}$  sont les fonctions définies dans la condition (2) du théorème 10. Nous prenons  $\tilde{\omega}_{u_1}^i = dL_{f_{u_1}}(\tilde{h}_i) \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{q+\tilde{p}}$  et pour  $k \geq 2$ ,  $\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_k}^i = L_{f_{u_k}}(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_{k-1}}^i)) \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{q+\tilde{p}}$ .

- Soit  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  un  $k$ -système de coordonnées, la notation  $\mathcal{C}^\infty\{\xi\}$  représente l'anneau des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ .
- Soit  $(z, \tilde{z}) = (z_1, \dots, z_q, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{n-q})$  le système de coordonnées du système (3.4) telles que les sorties  $y = Cz = (z_1, \dots, z_p) = (C_1z, \dots, C_pz)$  et  $\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{\tilde{p}}) = (\tilde{C}_1\tilde{z}, \dots, \tilde{C}_{\tilde{p}}\tilde{z})$ .
- Soit  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{C}^\infty\{z_1, \dots, z_p\}$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{C}^\infty\{z_1, \dots, z_q, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{\tilde{p}}\}$ . Pour  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{H}_k$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  sont définis comme suit :  
 $\mathcal{H}_k$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{H}}_k$ ) est le plus petit sous-anneau de  $\mathcal{C}^\infty\{z\}$  (respectivement de  $\mathcal{C}^\infty\{z, \tilde{z}\}$ ) contenant  $\mathcal{H}_{k-1} \cup \{C_i A(u_1) \dots A(u_k)z; 1 \leq i \leq p, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{H}}_{k-1} \cup \{\tilde{C}_i \tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}; 1 \leq i \leq \tilde{p}, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$ ).
- Soit  $V$  un espace vectoriel et  $W$  un sous-espace de  $V$ , alors pour  $\xi, \xi' \in V$ , la notation  $\xi = \xi'$  modulo  $(W)$  signifie que  $\xi = \xi' + w$ , pour certains  $w \in W$ .

Pour démontrer le théorème 10, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3** *Supposons que le système (3.3) prend la forme en cascade (3.4), c'est-à-dire :*

$$f_u = \sum_{i=1}^q (A_i(u)z + \psi_i(u, y)) \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n-q} (\tilde{A}_i(u)\tilde{z} + \tilde{\psi}_i(u, z, \tilde{y})) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i}, \quad (3.17)$$

où  $A_i(u)$  (respectivement  $\tilde{A}_i(u)$ ) représente la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A(u)$  (respectivement de  $\tilde{A}(u)$ ).  
 Supposons que  $X = (X_1, \dots, X_p)$  et  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+\tilde{p}})$  satisfont les conditions (1) et (2) du théorème 10. Alors, pour tout  $k \geq 1$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $i_X(\omega_{u_1 \dots u_k}^i) = dC_i A(u_1) \dots A(u_k)z$  modulo  $(d\mathcal{H}_{k-1})$
- $i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_k}^i) = d\tilde{C}_i \tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}$  modulo  $(d\tilde{\mathcal{H}}_{k-1})$

**Preuve :**

- Par définition,  $\omega_u^i = d(C_i A(u)z) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p$ , et en utilisant l'expression (3.11) du lemme 2, il s'en suit que :

$$i_X(\omega_u^i) = dC_i A(u)z - \sum_{j=1}^p L_{X_j}(C_i A(u)z) dz_j. \quad (3.18)$$

En outre, à partir de la condition (1-iii) du théorème 10, nous avons :

$$d(i_X(\omega_u^i)) = -d\left[\sum_{j=1}^p L_{X_j}(C_i A(u)z) dz_j\right] = 0. \quad (3.19)$$

Ainsi,  $\sum_{j=1}^p L_{X_j}(C_i A(u)z) dz_j = da(z_1, \dots, z_p)$  pour une fonction  $a(\cdot)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . D'où,

$$i_X(\omega_u^i) = dC_i A(u)z \text{ modulo } (d\mathcal{H}_0). \quad (3.20)$$

Donc, la propriété a) du lemme 3 est vérifiée pour  $k = 1$ .

Pour mettre fin à la preuve de la propriété a), nous procédons par récurrence.

Supposons que la propriété a) est vraie pour  $k - 1$  :

$$i_X(\omega_{u_1 \dots u_{k-1}}^i) = dC_i A(u_1) \dots A(u_{k-1})z + d\rho_{k-2} \text{ pour } \rho_{k-2} \in \mathcal{H}_{k-2} \quad (3.21)$$

et vérifions la pour  $k$ .

En utilisant l'expression de  $f_u$  (3.17), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \omega_{u_1 \dots u_k}^i &= d(C_i A(u_1) \dots A(u_k)z) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \\ &+ d[C_i A(u_1) \dots A(u_{k-1})\psi(u, z_1, \dots, z_p) + L_{f_{u_k}}(\rho_{k-2})] \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Comme nous l'avons vu ci-dessus, en utilisant l'expression (3.11) du lemme 2 et le fait que  $L_{f_{u_k}}(\mathcal{H}_{k-2}) \subset \mathcal{H}_{k-1}$ , nous déduisons que :

$$i_X(\omega_{u_1 \dots u_k}^i) = dC_i A(u_1) \dots A(u_k)z + d\rho_{k-1} \text{ pour } \rho_{k-1} \in \mathcal{H}_{k-2}. \quad (3.23)$$

- b) La propriété b) du lemme 3 peut être obtenue de la même manière que pour la propriété a).

□

### 3.3.2 Démonstration du Théorème d'existence

#### 3.3.2.1 Condition suffisante

Soient  $p$  et  $\tilde{p}$  les dimensions des espaces de sortie du système (3.3). De la condition (1-ii) du théorème 10, il s'en suit que  $i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dh_1 + \dots + \mathbb{R}dh_p$  est un espace vectoriel de dimension  $q$  et de (1-iii),  $d(i_X(\Omega^X)) = 0$ . Ainsi, une base de  $i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dh_1 + \dots + \mathbb{R}dh_p$  peut être choisie de la forme  $(dz_1, \dots, dz_q)$ , avec  $dz_i = dh_i$ , pour  $1 \leq i \leq p$ .

Maintenant, prenons  $\pi = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q$ . Avec un argument similaire et en utilisant les conditions (2-ii) et (2-iii), une base de  $i_{\tilde{X}}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}})$  peut être choisie de la forme  $(d\tilde{z}_1, \dots, d\tilde{z}_{n-q})$  telle que  $d\tilde{z}_i = d\tilde{h}_i$ , pour  $i = 1, \dots, \tilde{p}$ . En outre, de la condition (2-iv) du théorème 10, nous avons  $(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_{n-q})$  qui ne disparaît pas en  $x^0$ . D'où,  $(z_1, \dots, z_q, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{n-q})$  devient un système de coordonnées local.

La preuve de la condition suffisante sera organisée en deux étapes :

- **Etape 1** : Nous montrons que le système (3.3) prend la forme en cascade (3.4) dans le système de coordonnées  $(z, \tilde{z})$ . Pour cela, il suffit de montrer ce qui suit :

$$\begin{aligned} \text{pour } 1 \leq i \leq q, L_{f_u}(z_i) &= \sum_{k=p+1}^q a_{ik}(u)z_k + \psi_i(u, z_1, \dots, z_p), \\ \text{pour } 1 \leq i \leq n - q, L_{f_u}(\tilde{z}_i) &= \sum_{k=\tilde{p}+1}^{n-q} a_{ik}(u)\tilde{z}_k + \psi_i(u, z_1, \dots, z_q, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{\tilde{p}}) \\ \text{où } y &= (z_1, \dots, z_p); \tilde{y} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{\tilde{p}}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

- 1) Nous avons  $\omega_u^i = dL_{f_u}(z_i) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \in \Omega^X$ . En utilisant le fait que  $(dz_1, \dots, dz_q)$  forme une base de  $i_X(\Omega^X)$ , il s'en suit que :

$$i_X(\omega_u^i) = \sum_{k=1}^q a_{ik}(u) dz_k \quad (3.25)$$

D'après l'expression (3.11) du lemme 2, nous avons :

$$i_X(\omega_u^i) = dL_{f_u}(z_i) - L_{X_1}(L_{f_u}(z_1))dz_1 - \dots - L_{X_p}(L_{f_u}(z_p))dz_p, \quad (3.26)$$

et de la condition (1-iii) du théorème 10, nous savons que  $d(i_X(\omega_u^i)) = 0$ . Ainsi,

$$d[L_{X_1}(L_{f_u}(z_1))dz_1 + \dots + L_{X_p}(L_{f_u}(z_p))dz_p] = 0, \quad (3.27)$$

ce qui implique que :

$$i_X(\omega_u^i) = dL_{f_u}(z_i) + \alpha_i(u, z_1, \dots, z_p) \quad (3.28)$$

Enfin, la première expression de (3.24) résulte des équations (3.25) et (3.28).

- 2) La deuxième expression de (3.24) peut être obtenue en suivant la même démarche que pour la première.

Par conséquent, dans le nouveau système de coordonnées  $(z, \tilde{z})$ , le système (3.3) prend la forme en cascade (3.4).

- **Etape 2** : Nous vérifions que le système obtenu (3.4) est observable en cascade.

Soit  $\mathcal{O}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{O}}$ ) l'espace vectoriel engendré par  $\{C_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{C_i A(u_1) \dots A(u_k); 1 \leq i \leq p, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$  (respectivement  $\{\tilde{C}_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{\tilde{C}_i \tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k); 1 \leq i \leq p, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$ ). D'après l'assertion 1, il suffit de montrer que  $\dim(\mathcal{O}) = q$  et  $\dim(\tilde{\mathcal{O}}) = n - q$ .

Comme il a été mentionné précédemment, nous allons supposer que  $y_i = C_i z = z_i$  et  $\tilde{y}_i = \tilde{C}_i \tilde{z} = \tilde{z}_i$ .

- 1) Notons par  $\mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_k^X$  le module  $\mathcal{C}^\infty$  engendré par  $\Omega_k^X$ . En utilisant la définition de  $\Omega_k^X$  et la propriété a) du lemme 3, nous pouvons déduire que  $\mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_k^X$  est engendré par  $\{d(C_i A(u_1) \dots A(u_k)z) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p; 1 \leq i \leq p, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$ . Enfin, d'après la condition (1-iv) du théorème 10, nous pouvons choisir des formes linéaires :

$$L_1 z, \dots, L_{q-p} z \in \{C_i A(u_1) \dots A(u_k)z; 1 \leq i \leq p, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\} \quad (3.29)$$

telles que  $dL_1 z \wedge \dots \wedge dL_{q-p} z \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \neq 0$ . D'où, l'espace vectoriel  $\mathcal{O}$  est de dimension  $q$ .

- 2) De la même façon, en utilisant la définition de  $\Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}}$ , et la propriété b) du lemme 3, il s'en suit que  $\mathcal{C}^\infty \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}}$  est engendré par  $\{d(\tilde{C}_i \tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)z) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_{\tilde{p}}; 1 \leq i \leq \tilde{p}, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$ . En utilisant la condition (2-iv) du théorème 10, nous pouvons choisir des formes linéaires comme il a été présenté dans 1) ci-dessus, ce qui implique que l'espace vectoriel  $\tilde{\mathcal{O}}$  est de dimension  $n - q$ .

### 3.3.2.2 Condition nécessaire

Supposons que le système (3.3) peut être transformé par un changement de coordonnées local en un système en cascade observable (3.4) dans lequel  $\text{rang}(C) = p$  et  $\text{rang}(\tilde{C}) = \tilde{p}$ .

Les conditions (1) et (2) données dans le théorème 10 sont intrinsèques (elles ne dépendent pas du système de coordonnées), donc il suffit de les vérifier que pour le système (3.4).

Par un simple changement de coordonnées linéaire, nous supposons que  $y_i = C_i z = z_i$ ,  $\tilde{y}_i = \tilde{C}_i \tilde{z} = \tilde{z}_i$ , et  $f_u = \sum_{i=1}^q (A_i(u)z + \psi_i(u, y)) \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n-q} (\tilde{A}_i(u)\tilde{z} + \tilde{\psi}_i(u, z, \tilde{y})) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i}$ , où  $A_i(u)$  et  $\tilde{A}_i(u)$  représentent respectivement la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A(u)$  et  $\tilde{A}(u)$ .

#### 1. Condition (1) du théorème 10 :

Pour  $1 \leq i \leq p$ , soit  $X_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$  avec  $X = (X_1, \dots, X_p)$  et vérifions les conditions de (1-i) à (1-iv) du théorème 10.

(1-i) Cette condition est simple. En effet, par construction, nous trouvons que  $L_{X_i}(h_j) = \delta_{ij}$ .

(1-ii) Il suffit de montrer que l'espace vectoriel réel  $\Omega^X$  est de dimension  $q - p$ .

Nous avons le système (3.4) est observable en cascade. D'après l'assertion 1, l'espace vectoriel  $\mathcal{O}$  engendré par la famille de lignes  $\{C_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{C_i A(u_1) \dots A(u_k); k \geq 1, u_1 \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$  est de dimension  $q$ . Afin de montrer que  $\dim(\Omega^X) = q - p$ , il suffit de vérifier ce qui suit :

$$\Omega^X = \text{Span}\{dC_i A(u_1) \dots A(u_k) z \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p; 1 \leq i \leq p, k \geq 1, u_j \in \mathbb{R}^m\} \quad (3.30)$$

Comme  $\Omega^X = \sum_{k \geq 1} \Omega_k^X$ , avec  $\Omega_0^X = 0$  et  $\Omega_k^X = \{L_{f_u}(i_X(\omega)) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p; \omega \in \Omega_{k-1}^X, u \in \mathbb{R}^m\} + \Omega_{k-1}^X$ , il suffit de montrer la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}(k)) \quad \Omega_k^X = \text{Span}\{dC_i A(u_1) \dots A(u_k) z \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p; 1 \leq i \leq p, u_j \in \mathbb{R}^m\} + \Omega_{k-1}^X \quad (3.31)$$

- Par définition,  $\Omega_1^X$  est l'espace vectoriel engendré par une forme

$$\omega_u^i = d(L_{f_u}(C_i z)) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p = d(C_i A(u) z) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p. \quad (3.32)$$

Ainsi,  $(\mathcal{P}(1))$  est vraie.

- Soit  $k \geq 2$ , supposons que  $(\mathcal{P}(k-1))$  est vraie et montrons  $(\mathcal{P}(k))$ .  
Pour cela, il suffit de montrer que si

$$\alpha_{u_1 \dots u_{k-1}} = dC_i A(u_1) \dots A(u_{k-1}) z \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \quad (3.33)$$

alors,

$$\begin{aligned} L_{f_{u_k}}(i_X(\alpha_{u_1 \dots u_{k-1}}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p) = \\ dC_i A(u_1) \dots A(u_k) z \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \text{ modulo } (\Omega_{k-1}^X). \end{aligned} \quad (3.34)$$

En utilisant l'expression (3.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} i_X(\alpha_{u_1 \dots u_{k-1}}) &= dC_i A(u_1) \dots A(u_k) z - L_{X_1}(C_i A(u_1) \dots A(u_k) z) dz_1 \\ &\quad - \dots - L_{X_p}(C_i A(u_1) \dots A(u_k) z) dz_p \\ &= dC_i A(u_1) \dots A(u_k) z + a_1 dz_1 - \dots + a_p dz_p dz_p \end{aligned} \quad (3.35)$$

où les  $a_i$  sont des constantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned} L_{f_{u_k}}(i_X(\alpha_{u_1 \dots u_{k-1}})) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p = \\ dC_i A(u_1) \dots A(u_k) z \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \text{ modulo } (\Omega_1^X). \end{aligned} \quad (3.36)$$

(1-iii) A partir des arguments développés dans la condition (1-ii) du théorème 10, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dz_1 + \dots + \mathbb{R}dz_p = \\ \text{Span}\{dC_i A(u_1) \dots A(u_k) z; 1 \leq i \leq p, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\} + \mathbb{R}dz_1 + \dots + \mathbb{R}dz_p \end{aligned} \quad (3.37)$$

Par conséquent,  $d(i_X(\Omega_k^X)) = 0$ .

(1-iv) En utilisant l'observabilité en cascade du système 3.4 et l'expression (3.37), il s'en suit que :

$$i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dz_1 + \dots + \mathbb{R}dz_p = \mathbb{R}dz_1 + \dots + \mathbb{R}dz_q \quad (3.38)$$

Ainsi, l'espace vectoriel  $\bigwedge^{q-p}(i_X(\Omega^X)) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p$  est de dimension 1, et il est engendré par  $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q$ .

## 2. Condition (2) du théorème 10 :

Considérons le  $(\tilde{p} + q)$ -uplet de champs de vecteurs :

$$\tilde{X} = \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_q}, \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_{\tilde{p}}} \right) \quad (3.39)$$

Les  $q$ -formes différentielles notées par  $\pi$  du théorème 10 peuvent être choisies sous la forme suivante :

$$\pi = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \quad (3.40)$$

Dans la suite, nous allons montrer que  $\tilde{X}$  satisfait les conditions de (2-i) à (2-iv) du théorème 10.

(2-i) Cette condition est évidente (de la même façon que pour la condition (1-i)).

2-ii) Il suffit de montrer que  $\dim(\Omega_\pi^{\tilde{X}}) = n - q - \tilde{p}$ .

Comme il a été montré dans (1-ii), nous pouvons trouver que :

$$\begin{aligned} \Omega_\pi^{\tilde{X}} = \text{Span} \{ d\tilde{C}_i \tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k) \tilde{z} \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_{\tilde{p}}, \\ u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m, k \geq 1, 1 \leq i \leq \tilde{p} \} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Comme le système (3.4) est observable en cascade, alors l'espace vectoriel  $\tilde{\mathcal{O}} = \text{Span}\{\tilde{C}_i; 1 \leq i \leq \tilde{p}\} \cup \{\tilde{C}_i \tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k); 1 \leq i \leq \tilde{p}, k \geq 1, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$  est de dimension  $n - q$ . D'où,  $\dim(\Omega_\pi^{\tilde{X}}) = n - q - \tilde{p}$ .

(2-iii) Cette condition consiste à montrer que pour tout  $\tilde{\omega} \in \Omega_\pi^{\tilde{X}}$ , nous avons  $di_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}) = 0$ . Cette dernière expression résulte de la propriété suivante :

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}}(\Omega_\pi^{\tilde{X}}) + \mathbb{R}d\tilde{z}_1 + \dots + \mathbb{R}d\tilde{z}_{\tilde{p}} = \\ \text{Span}\{d(\tilde{C}_i \tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k) z); 1 \leq i \leq \tilde{p}, k \geq 1, u_i \in \mathbb{R}^m\} + \mathbb{R}d\tilde{z}_1 + \dots + \mathbb{R}d\tilde{z}_{\tilde{p}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

(2-iv) En utilisant l'observabilité en cascade du système (3.4) et l'expression (3.42), il s'en suit que :

$$i_{\tilde{X}}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}}) + \mathbb{R}d\tilde{z}_1 + \dots + \mathbb{R}d\tilde{z}_{\tilde{p}} = \mathbb{R}d\tilde{z}_1 + \dots + \mathbb{R}d\tilde{z}_{n-q} \quad (3.43)$$

D'où, l'espace vectoriel  $\bigwedge^{n-q-\tilde{p}}(i_{\tilde{X}}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}})) \wedge \pi \wedge d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_{\tilde{p}}$  est engendré par  $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_{n-q}$ .

### 3.4 Procédure de calcul des champs de vecteurs $X$ et $\tilde{X}$ dans le cas où $p = \tilde{p} = 1$

L'algorithme qui permet de calculer les champs de vecteurs  $X = (X_1, \dots, X_p)$  et  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+\tilde{p}})$  satisfaisant les conditions du théorème 10 est une tâche difficile et nous ne sommes pas en mesure de le présenter dans sa forme générale. Dans cette section, nous proposons un algorithme permettant de calculer les champs de vecteurs  $X$  et  $\tilde{X}$ , dans le cas où  $p = \tilde{p} = 1$ , c'est-à-dire les fonctions de sortie  $h$  et  $\tilde{h}$  sont des scalaires.

#### 3.4.1 Quelques outils géométriques

Dans ce paragraphe, nous sommes intéressés par le système (3.3) pour lequel nous prenons  $p = \tilde{p} = 1$  et nous allons présenter des notations qui seront utilisées dans la suite.

Soient  $D$  et  $D'$  deux codistributions avec  $D' \subset D$ , alors le quotient  $D/D'$  désigne l'ensemble de la classe équivalente des formes différentielles  $[\omega] = \omega + D' = \{\omega + \omega'; \omega' \in D'\}$ , où  $\omega \in D$ . De même, si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux distributions avec  $\Delta \subset \Delta'$ , les éléments du quotient  $\Delta'/\Delta$  seront notés par  $[X] = X + \Delta$  où  $X \in \Delta'$  (voir Annexe C.3).

Si  $[\omega] \in D/D'$  et  $\chi \in D$  tel que  $[\omega] = [\chi]$ , alors  $\omega = \chi$  modulo  $(D')$ .

Enfin, si  $X$  et  $Z$  sont deux champs de vecteurs, alors  $[X, Z]$  désigne le crochet de Lie de ces champs de vecteurs (voir Annexe C.1).

Considérons le drapeau de codistributions et de distributions suivant :

$$\begin{aligned} D_0 &\subset \dots \subset D_k \subset \dots \\ \Delta_0 &\supset \dots \supset \Delta_k \supset \dots \\ \tilde{D}_0 &\subset \dots \subset \tilde{D}_k \subset \dots \\ \tilde{\Delta}_0 &\supset \dots \supset \tilde{\Delta}_k \supset \dots \end{aligned} \quad (3.44)$$

où :

- $D_0 = 0$  est la codistribution nulle et  $D_1 = \text{Span}(\{dh\})$ . En procédant par itération, nous avons :

$$D_{k+1} = D_k + \text{Span}(\{dL_{f_{u_k}} \dots L_{f_{u_1}}(h); u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}) \quad (3.45)$$

et  $D_{\#} = \sum_{k \geq 1} D_k$ .

- $\tilde{D}_0 = D_{\#}$  et  $\tilde{D}_1 = \tilde{D}_0 + \text{Span}(\{d\tilde{h}\})$ . Pour  $k \geq 1$ , nous avons :

$$\tilde{D}_{k+1} = \tilde{D}_k + \text{Span}(\{dL_{f_{u_k}} \dots L_{f_{u_1}}(\tilde{h}); u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}) \quad (3.46)$$

$$\text{et } \tilde{D}_{\sharp} = \sum_{k \geq 1} \tilde{D}_k.$$

- $\Delta_k = \text{Ker}(D_k)$  et  $\Delta_{\sharp} = \text{Ker}(D_{\sharp})$ .
- $\tilde{\Delta}_k = \text{Ker}(\tilde{D}_k)$  et  $\tilde{\Delta}_{\sharp} = \text{Ker}(\tilde{D}_{\sharp})$ .
- Le quotient des codistributions  $D_k/D_{k-1}$  (respectivement  $\tilde{D}_k/\tilde{D}_{k-1}$ ) est le dual du quotient des distributions  $\Delta_{k-1}/\Delta_k$  (respectivement  $\tilde{\Delta}_{k-1}/\tilde{\Delta}_k$ ). Le produit dual  $[\omega]([X]) = \omega(X)$  est bien défini.

Dans les deux assertions suivantes, nous allons considérer l'expression de  $f_u$  donnée en (3.17) et les sorties  $h$  et  $\tilde{h}$  qui sont respectivement  $y = Cz = z_1$  et  $\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{z} = \tilde{z}_1$ .

Comme il a été présenté précédemment, nous considérons les anneaux  $\mathcal{H}_k$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_k$  dans le cas où  $p = \tilde{p} = 1$  :

- $\mathcal{H}_0 = \mathcal{C}^{\infty}\{z_1\}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{C}^{\infty}\{z_1, \dots, z_q, \tilde{z}_1\}$ ) représente l'anneau des fonctions  $\varphi(z_1)$  (respectivement  $\varphi(z_1, \dots, z_q, \tilde{z}_1)$ ) de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ .
- $\mathcal{C}^{\infty}\{z\}$  (respectivement  $\mathcal{C}^{\infty}\{z, \tilde{z}\}$ ) représente l'anneau des fonctions  $\varphi(z_1, \dots, z_q)$  (resp.  $\varphi(z_1, \dots, z_q, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{n-q})$ ) de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$ .  
Alors, pour  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{H}_k$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{H}}_k$ ) est le plus petit sous-anneau de  $\mathcal{C}^{\infty}\{z\}$  (respectivement de  $\mathcal{C}^{\infty}\{z, \tilde{z}\}$ ) contenant  $\mathcal{H}_{k-1} \cup \{CA(u_1) \dots A(u_k)z; u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$  (respectivement  $\tilde{\mathcal{H}}_{k-1} \cup \{\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}; u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m\}$ ).

Alors, nous avons :

### Assertion 2

- i)  $L_{f_{u_k}} \dots L_{f_{u_1}}(Cz) = CA(u_1) \dots A(u_k)z \text{ modulo } \mathcal{H}_{k-1}$ .
- ii)  $L_{f_{u_k}} \dots L_{f_{u_1}}(\tilde{C}\tilde{z}) = \tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z} \text{ modulo } \tilde{\mathcal{H}}_{k-1}$ .

### Preuve :

La preuve de cette assertion sera obtenue par une simple itération :

i) Propriété i) de l'assertion 2 :

Nous avons  $L_{f_u}(Cz) = CA(u)z + C\psi(u, y)$ , d'où la propriété i) est vraie pour  $k = 1$ .

Supposons que :

$$L_{f_{u_{k-1}}} \dots L_{f_{u_1}}(Cz) = CA(u_1) \dots A(u_{k-1})z + \rho_{k-1}, \text{ avec } \rho_{k-1} \in \mathcal{H}_{k-2} \quad (3.47)$$

Alors, nous remarquons que  $L_{f_u}(\mathcal{H}_{k-2}) \subset \mathcal{H}_{k-1}$ . Par conséquent,

$$L_{f_{u_k}} \dots L_{f_{u_1}}(Cz) = CA(u_1) \dots A(u_k)z + \rho_k \text{ où } \rho_k \in \mathcal{H}_{k-1}. \quad (3.48)$$

- ii) Nous avons  $L_{f_u}(\tilde{C}\tilde{z}) = \tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z} + \tilde{C}\tilde{\psi}(u, z, \tilde{y})$ , alors la propriété ii) est vraie pour  $k = 1$ . Nous pouvons montrer la propriété ii) de la même façon que pour la propriété i). En utilisant le fait que  $L_{f_u}(\tilde{\mathcal{H}}_{k-2}) \subset \tilde{\mathcal{H}}_{k-1}$ , la preuve peut être réalisée par itération.

□

L'assertion suivante peut être déduite de l'assertion 2 et de la définition des codistributions  $D_k$  et  $\tilde{D}_k$  :

### Assertion 3

- *Le drapeau des codistributions :*

$$\begin{aligned} D_0 &\subset \dots \subset D_k \subset \dots, \\ \tilde{D}_0/D_{\sharp} &\subset \dots \subset \tilde{D}_k/D_{\sharp} \subset \dots \end{aligned} \quad (3.49)$$

telles que les dimensions de  $D_0, \dots, D_k, \dots$ , et  $\tilde{D}_0/D_{\sharp}, \dots, \tilde{D}_k/D_{\sharp}, \dots$ , sont constantes est défini comme suit :

- $D_1 = \text{Span}(dCz)$ , et pour  $k \geq 2$ ,  $D_k$  est engendré par l'ensemble des formes différentielles de degré 1  $\{dCz\} \cup \{dCA(u_1) \dots A(u_l)z; 1 \leq l \leq k-1, u_j \in \mathbb{R}^m\}$ .
- De même,  $\tilde{D}_1/D_{\sharp}$  peut être identifié avec la codistribution  $\text{Span}(d\tilde{C}\tilde{z})$ , et pour  $k \geq 2$ ,  $\tilde{D}_k/D_{\sharp}$  est isomorphe à la codistribution engendrée par l'ensemble des formes différentielles de degré 1  $\{d\tilde{C}\tilde{z}\} \cup \{d\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_l)\tilde{z}; 1 \leq l \leq k-1, u_j \in \mathbb{R}^m\}$ .

- *Le système (3.4) est en cascade observable si et seulement si :  $\dim(D_{\sharp}) = q$  et  $\dim(\tilde{D}_{\sharp}/D_{\sharp}) = n - q$ , où  $q$  et  $n - q$  représentent respectivement la dimension de l'espace en  $z$  et celui en  $\tilde{z}$ .*

Dans la suite, nous prenons  $\nu$  (respectivement  $\tilde{\nu}$ ) le plus petit entier telle que la codistribution  $D_{\nu} = D_{\sharp}$  (respectivement  $\tilde{D}_{\tilde{\nu}}/D_{\sharp} = \tilde{D}_{\sharp}/D_{\sharp}$ ) :

$$\begin{aligned} D_0 &\subset \dots \subset D_{\nu} = D_{\nu+1} \\ \tilde{D}_0/D_{\sharp} &\subset \dots \subset \tilde{D}_{\tilde{\nu}}/D_{\sharp} = \tilde{D}_{\tilde{\nu}+1}/D_{\sharp} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nous terminons ce paragraphe par le lemme suivant :

**Lemme 4** *Si  $d\varphi \in D_{k-1}$  (respectivement  $d\tilde{\varphi} \in \tilde{D}_{k-1}$ ) et  $X \in \Delta_{k-1}$  (respectivement  $\tilde{X} \in \tilde{\Delta}_{k-1}$ ), alors*

$$d\varphi([f_u, X]) = -d(L_{f_u}(\varphi))(X) = -L_X(L_{f_u}(\varphi)) \quad (3.51)$$

(respectivement  $d\tilde{\varphi}([f_u, \tilde{X}]) = -d(L_{f_u}(\tilde{\varphi}))(\tilde{X}) = -L_{\tilde{X}}(L_{f_u}(\tilde{\varphi}))$ ).

### Preuve :

Soient  $d\varphi \in D_{k-1}$  et  $X \in \Delta_{k-1}$ , l'égalité  $d\varphi([f_u, X]) = -d(L_{f_u}(\varphi))(X)$  découle des résultats suivants :

- $d\varphi([f_u, X]) = L_{f_u}(L_X(\varphi)) - L_X(L_{f_u}(\varphi)) = d(L_X(\varphi))(f_u) - d(L_{f_u}(\varphi))(X)$ ,
- $X \in \Delta_k \subset \Delta_{k-1} = \text{Ker}(D_{k-1})$ ,
- $L_X(\varphi) = d\varphi(X) = 0$

De la même méthode, nous pouvons prouver que  $d\tilde{\varphi}([f_u, \tilde{X}]) = -d(L_{f_u}(\tilde{\varphi}))(\tilde{X})$ . □

### 3.4.2 Algorithme

Dans ce paragraphe, nous allons présenter un algorithme permettant de calculer les champs de vecteurs  $X, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+1}$  qui vérifient les conditions du théorème 10 dans le cas où  $p = \tilde{p} = 1$ . Cet algorithme est obtenu en trois étapes :

- 1) La première étape consiste à calculer le champ de vecteurs  $X$  en utilisant seulement les fonctions  $f(u, x)$  et  $h(x)$ .
- 2) La connaissance de  $f(u, x)$ ,  $h$ ,  $\tilde{h}(x)$  et  $X$  permet de calculer le champ de vecteurs  $\tilde{X}_{q+1}$ .
- 3) Enfin, les champs de vecteurs  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q$  peuvent être calculés en se basant sur  $f(u, x)$ ,  $h$ ,  $\tilde{h}(x)$ ,  $X$  et  $\tilde{X}_{q+1}$ .

Supposons que le drapeau des codistributions suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= D_0 \subset \dots \subset D_\nu = D_{\nu+1} \\ 0 &= \tilde{D}_0/D_\nu \subset \dots \subset \tilde{D}_{\tilde{\nu}}/D_\nu = \tilde{D}_{\tilde{\nu}+1}/D_\nu \end{aligned} \quad (3.52)$$

est telles que les dimensions des codistributions ci-dessus sont constantes et que  $\dim(D_\nu) = q$  et  $\dim(\tilde{D}_{\tilde{\nu}}/D_\nu) = n - q$ .

Dans ce qui suit, le symbole du crochet  $[(.)]$  représente la classe d'équivalence de  $(.)$ .

Pour  $k \geq 1$ , soient  $B_k$  et  $\tilde{B}_k$  respectivement les bases de  $D_k/D_{k-1}$  et  $\tilde{D}_k/\tilde{D}_{k-1}$  définies comme suit :

$$\begin{aligned} B_1 &= \{[dh]\}, \quad \tilde{B}_1 = \{[d\tilde{h}]\} \\ \text{pour } k &\geq 2 : \\ B_k &= \{[d(L_{f_{u_{k-1}}} \dots L_{f_{u_1}}(h))]; (u_1, \dots, u_{k-1}) \in \mathcal{U}_{k-1}\} \\ \tilde{B}_k &= \{[d(L_{f_{\tilde{u}_{k-1}}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}))]; (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k-1}) \in \tilde{\mathcal{U}}_{k-1}\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

pour certains sous-ensembles  $\mathcal{U}_{k-1}$  et  $\tilde{\mathcal{U}}_{k-1}$  de  $(\mathbb{R}^m)^{k-1}$ .

Soient  $B_\nu^*$  et  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}^*$  respectivement les bases duales de  $B_\nu$  et  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}$  ( $B_\nu^*$ ,  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}^*$  sont les bases de  $\Delta_{\nu-1}/\Delta_\nu$  et  $\tilde{\Delta}_{\tilde{\nu}-1}/\tilde{\Delta}_{\tilde{\nu}}$ ). Les champs de vecteurs suivants seront requis dans le théorème 11 ci-dessous :

- Les champs de vecteurs  $[Z_{u_1 \dots u_{\nu-1}}], [\tilde{Z}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}]$  :

Soit  $(u_1 \dots u_{\nu-1})$  (respectivement  $(\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1})$ ) des éléments fixes de  $\mathcal{U}_{\nu-1}$  (respectivement de  $\tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{\nu}-1}$ ), alors  $[Y] = [Z_{u_1 \dots u_{\nu-1}}]$  (respectivement  $[\tilde{Y}] = [\tilde{Z}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}]$ ) est l'élément de  $B_\nu^*$  (respectivement de  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}^*$ ) défini par :

pour  $(v_1, \dots, v_{\nu-1}) \in \mathcal{U}_{\nu-1}$ ,  $d(L_{f_{v_{\nu-1}}} \dots L_{f_{v_1}}(h))(Y) = 1$ , si  $(u_1, \dots, u_{\nu-1}) = (v_1, \dots, v_{\nu-1})$ ,  
et 0 sinon.

pour  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tilde{\nu}-1}) \in \tilde{\mathcal{U}}_{\tilde{\nu}-1}$ ,  $d(L_{f_{\tilde{v}_{\tilde{\nu}-1}}} \dots L_{f_{\tilde{v}_1}}(\tilde{h}))(\tilde{Y}) = 1$ , si  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}) = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tilde{\nu}-1})$ ,  
et 0 sinon.

(3.54)

- Les champs de vecteurs  $[Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}}], [\tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}]$  :

Soient  $[Y] = [Z_{u_1 \dots u_{\nu-1}}]$  et  $[\tilde{Y}] = [\tilde{Z}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}]$  alors :

$$\begin{aligned} Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}} &= [f_{u_{\nu-1}}, [\dots, [f_{u_1}, Y] \dots]] \\ \tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}} &= [f_{\tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}, [\dots, [f_{\tilde{u}_1}, Y] \dots]] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Afin d'établir le lemme 5 ci-dessous, nous allons introduire les notations suivantes :

- Soit  $(d\varphi_1, \dots, d\varphi_q)$  une base de  $D_\nu$  et  $d\varphi_{q+1} = d\tilde{h}$ .
- Fixons  $\tilde{\pi} = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{q+1}$ .
- Soit  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+1})$  un  $(q+1)$ -uplet de champs de vecteurs satisfaisant  $L_{\tilde{X}_i}(\varphi_j) = \delta_{ij}$ .
- Pour  $\tilde{u}_1 \in \tilde{\mathcal{U}}_1$ , nous prenons  $\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1} = dL_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \wedge \tilde{\pi}$ .
- Pour  $k \geq 2$  et  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k$ , nous prenons  $\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k} = L_{f_{\tilde{u}_k}}(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{k-1}})) \wedge \tilde{\pi}$ .

Ainsi, nous avons :

**Lemme 5** *Pour  $1 \leq k \leq \tilde{\nu} - 1$  ; pour tout  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k$ , les propriétés suivantes sont vraies :*

$$\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k} = dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \wedge \tilde{\pi} + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \wedge \tilde{\pi} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k}) &= dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) - \sum_{j=1}^q L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j + \Theta_k \\ \Theta_k &= \tilde{\Theta}_k - \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j \\ \tilde{\Theta}_k &= \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) + g_k(x) d\varphi_{q+1} \end{aligned} \quad (3.57)$$

avec  $g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(\cdot)$  et  $g_k(\cdot)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  qui ne dépendent pas de  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)$ .

**Preuve :**

La preuve sera obtenue par récurrence.

- Pour  $k = 1$  :

Soit  $u_1 \in \mathcal{U}_1$ , par définition nous avons  $\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1} = dL_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \wedge \tilde{\pi}$  et d'après le lemme 2, nous savons que :

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1}) &= dL_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) - \sum_{j=1}^{q+1} L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j \\ &= dL_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) - \sum_{j=1}^q L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j + \Theta_1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec,

$$\Theta_1 = L_{\tilde{X}_{q+1}} L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_{q+1}. \quad (3.59)$$

Ainsi, les formules (3.56) et (3.57) sont vraies pour  $k = 1$ .

- Supposons que (3.56), (3.57) sont vraies pour  $1 \leq l \leq k-1$ , et montrons qu'il est le cas pour  $k$ . En utilisant la définition de  $\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k}$  et en appliquant (3.57) pour  $k-1$ , nous obtenons :

$$\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k} = dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \wedge \tilde{\pi} - L_{f_{\tilde{u}_k}} \left[ \sum_{j=1}^q L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_{k-1}}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j \right] \wedge \tilde{\pi} + L_{f_{\tilde{u}_k}}(\Theta_{k-1}) \wedge \tilde{\pi} \quad (3.60)$$

$$\Theta_{k-1} = \tilde{\Theta}_{k-1} - \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j \quad (3.61)$$

$$\tilde{\Theta}_{k-1} = \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) + \tilde{g}_{k-1}(x) d\varphi_{q+1}$$

avec  $g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}$  et  $\tilde{g}_{k-1}$  ne dépendent pas de  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)$ . En utilisant le fait que  $d\varphi_i \in D_\nu$ , pour  $1 \leq i \leq q$ , et que  $L_{f_u}(D_\nu) \subset D_\nu$ , alors l'égalité suivante est valable pour toutes les fonctions lisses  $a_1(x), \dots, a_q(x)$  :

$$L_{f_u} \left( \sum_{j=1}^q a_j(x) d\varphi_j \right) \wedge \tilde{\pi} = 0 \quad (3.62)$$

En combinant (3.62) avec (3.61), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k} &= dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \wedge \tilde{\pi} \\ &+ \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} L_{f_{\tilde{u}_k}} [g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) + \tilde{g}_{k-1}(x) d\varphi_{q+1}] \wedge \tilde{\pi} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Par construction,  $L_{f_{\tilde{u}_k}} [\tilde{g}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h})]$  et  $L_{f_{\tilde{u}_k}} (\tilde{g}_{k-1}(x) d\varphi_{q+1}) \wedge \tilde{\pi}$  ne dépendent pas de  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q$  et  $\{d\varphi_1, \dots, d\varphi_{q+1}\} \cup \{dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}); (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l, 1 \leq l \leq k-1\}$  forme une base de  $\tilde{D}_k$ . Ainsi le dernier terme de l'expression (3.63) prend la forme suivante :

$$\sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \wedge \tilde{\pi} \quad (3.64)$$

où les  $g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x)$ 's sont des fonctions de classe  $C^\infty$  qui ne dépendent pas de  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)$ . Par conséquence, l'expression (3.56) est vérifiée.

Pour mettre fin à la preuve du lemme 5, il ne reste qu'à vérifier (3.57).

En appliquant le lemme 2 à l'expression (3.56), nous obtenons :

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k}) &= dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \\ &- \sum_{j=1}^{q+1} L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j - \sum_{j=1}^{q+1} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j \end{aligned} \quad (3.65)$$

Finalement, l'expression (3.57) découle directement de (3.65) dans laquelle nous introduisons :

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_k &= \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) dL_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) + g_k(x) d\varphi_{q+1} \\ \text{où } g_k(x) &= -L_{\tilde{X}_{q+1}} L_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) L_{\tilde{X}_{q+1}} L_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) \\ \Theta_k &= \tilde{\Theta}_k - \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l) \in \tilde{\mathcal{U}}_l} g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x) L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_l}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) d\varphi_j\end{aligned}\tag{3.66}$$

De plus, par construction,  $g_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_l}(x)$  et  $g_k$  ne dépendent pas des champs de vecteurs  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)$ .

Nous allons maintenant donner l'algorithme qui permet de calculer les champs de vecteurs  $X, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q, \tilde{X}_{q+1}$  satisfaisant les conditions (1) et (2) du théorème 10.

**Théorème 11** (*Algorithme*) (*Sahnoun and Hammouri 2014*)

Le système (3.3) peut être transformé par un changement de coordonnées local autour d'un certain  $x^0$  en un système en cascade observable (3.4) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Le drapeau des codistributions  $D_0 \subset \dots \subset D_\nu = D_{\nu+1}, \tilde{D}_0/D_\nu \subset \dots \subset \tilde{D}_{\tilde{\nu}}/D_\nu = \tilde{D}_{\tilde{\nu}+1}/D_\nu$  est telles que les dimensions de ces dernières sont constantes sur un voisinage de  $x^0$  et que  $\dim(D_\nu) = q, \dim(\tilde{D}_{\tilde{\nu}}/D_\nu) = n - q$ .
- Soient  $B_\nu$  et  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}$  deux bases fixes quelconques de  $D_\nu/D_{\nu-1}$  et  $\tilde{D}_{\tilde{\nu}}/\tilde{D}_{\tilde{\nu}-1}$  (voir la construction de ces bases dans (3.53)). Soient  $Y$  et  $\tilde{Y}$  deux champs de vecteurs fixes de la forme  $[Y] = [Z_{u_1^0 \dots u_{\nu-1}^0}] \in B_\nu^*$  et  $[\tilde{Y}] = [\tilde{Z}_{\tilde{u}_1^0 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}^0}] \in \tilde{B}_{\tilde{\nu}}^*$ , alors les propriétés suivantes sont vérifiées :
  - Le vecteur  $X = (-1)^{\nu-1} Y^{u_1^0 \dots u_{\nu-1}^0}$  satisfait la condition (1) du théorème 10 pour  $p = 1$ .
  - Fixons  $\tilde{X}_{q+1} = (-1)^{\tilde{\nu}-1} \tilde{Y}^{\tilde{u}_1^0 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}^0}$  et considérons des fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que :

$$\begin{cases} \varphi_1 = h \\ \varphi_{q+1} = \tilde{h} \\ (d\varphi_1, \dots, d\varphi_q) \text{ forme une base de } i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dh. \end{cases}\tag{3.67}$$

Soient  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q$  des champs de vecteurs satisfaisant  $L_{\tilde{X}_j}(\varphi_i) = \delta_{ij}, 1 \leq j \leq q, 1 \leq i \leq q+1$  et tel que, pour chaque  $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k, 1 \leq k \leq \tilde{\nu} - 1$ , nous avons :

$$\sum_{j=1}^q d(L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h})) \wedge d\varphi_j = d\Theta_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k}\tag{3.68}$$

où  $\Theta_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k}$  est la 1-forme différentielle indiquée dans (3.57). Alors, les champs de vecteurs  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+1}$  satisfont la condition (2) du théorème 10.

**Remarque 4** : Selon l'expression (3.57) du lemme 5, l'expression (3.68) est alors équivalente à  $d(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k})) = 0$ .

### 3.4.3 Calcul des champs de vecteurs

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques commentaires sur la procédure de calcul des champs de vecteurs  $X, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q, \tilde{X}_{q+1}$  :

- 1) D'après la propriété b.1) du théorème 11, le calcul du champ de vecteurs  $X$  exige seulement la connaissance des expressions des fonctions  $f_u$  et  $h$ .
- 2) D'après la propriété b.2) du théorème 11, le champ de vecteurs  $\tilde{X}_{q+1}$  ainsi que les fonctions  $\varphi_i$  ( $1 \leq i \leq q+1$ ) peuvent être calculées directement à partir de  $X, f_u, h$  et  $\tilde{h}$ .
- 3) Enfin, le calcul des champs de vecteur  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q$  est donné par l'algorithme suivant :

**Calcul de  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q)$  :**

Basé sur la construction de  $\tilde{B}_k$  et les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}$ , l'ensemble  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}\} \cup \{L_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}); 1 \leq k \leq \tilde{\nu} - 1, (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k\}$  forme un système de coordonnées local, que nous le notons par  $(\xi, \tilde{\xi})$  où,

$$\begin{aligned} \xi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}) = (\xi_1, \dots, \xi_{q+1}) \\ \tilde{\xi} &= (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{\tilde{\nu}-1}), \quad \tilde{\xi}_k = (\tilde{\xi}_{k1}, \dots, \tilde{\xi}_{k, \tilde{d}_k}) \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \{d\tilde{\xi}_{k1}, \dots, d\tilde{\xi}_{k, \tilde{d}_k}\} &= \{dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}); (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k\} \\ \{[dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h})]; (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k\} &= \tilde{B}_{k+1} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Par conséquent, nous adoptons les notations suivantes :

$$\{\tilde{\omega}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_k}; (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k\} = \{\tilde{\omega}_{k1}, \dots, \tilde{\omega}_{k, \tilde{d}_k}\} \quad (3.71)$$

$$L_{\tilde{X}_j}(\tilde{\xi}_{ki}) = L_{\tilde{X}_j} L_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{h}) = \tilde{X}_{ki}^j \quad (3.72)$$

En utilisant le fait que  $L_{\tilde{X}_j}(\varphi_j) = L_{\tilde{X}_j}(\xi_j) = \delta_{ij}$ , nous obtenons :

$$\tilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{k=1}^{\tilde{\nu}-1} \sum_{i=1}^{\tilde{d}_k} \tilde{X}_{ki}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}_{ki}}. \quad (3.73)$$

Ainsi, l'équation (3.57) peut être réécrite sous cette forme :

$$i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{ki}) = d\tilde{\xi}_{ki} - \sum_{j=1}^q \tilde{X}_{ki}^j d\xi_j + \Theta_{ki} \quad (3.74)$$

où les  $\Theta_{ki}$  sont des formes différentielles qui dépendent largement de  $\tilde{X}_{li}^j$ ,  $1 \leq l \leq k-1$ ,  $1 \leq j \leq q+1$ .

Le calcul des  $\tilde{X}_{ki}^j$  résulte de la procédure de récurrence suivante :

- Nous commençons par calculer  $\tilde{X}_{1i}^j$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $1 \leq i \leq \tilde{d}_1$  :  
Pour  $k=1$ , l'équation (3.74) devient :

$$i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{1i}) = d\tilde{\xi}_{1i} - \sum_{j=1}^q \tilde{X}_{1i}^j d\xi_j + \Theta_{1i} \quad (3.75)$$

où  $\Theta_{1i}$  est une 1-forme différentielle connue qui ne dépend pas de  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q$ , mais peut dépendre du champ de vecteurs connu  $\tilde{X}_{q+1}$ .

La condition (3.68) du théorème 11 nous donne l'équation suivante :

$$\sum_{j=1}^q d(\tilde{X}_{1i}^j) \wedge d\xi_j = d\Theta_{1i}, \text{ pour } 1 \leq i \leq \tilde{d}_1 \quad (3.76)$$

Alors, les champs de vecteurs  $\tilde{X}_{1i}^j$  découlent du système d'équations aux dérivées partielles (EDP) simple :

$$\begin{aligned} & \text{pour } 1 \leq j, l \leq q, 1 \leq i \leq \tilde{d}_1, \\ & \frac{\partial \tilde{X}_{1i}^j}{\partial \xi_l} - \frac{\partial \tilde{X}_{1i}^l}{\partial \xi_j} = \theta_{1i}^{jl} \\ & \text{pour } 1 \leq j \leq q, 1 \leq i \leq \tilde{d}_1, 1 \leq t \leq \tilde{\nu} - 1, 1 \leq s \leq \tilde{d}_t, \\ & \frac{\partial \tilde{X}_{1i}^j}{\partial \xi_{ts}} = \tilde{\theta}_{1si}^{jt} \end{aligned} \quad (3.77)$$

où  $\theta_{1i}^{jl}$  et  $\tilde{\theta}_{1si}^{jt}$  sont des fonctions connues qui dépendent seulement du champ de vecteurs  $\tilde{X}_{q+1}$ .

- Supposons que pour  $1 \leq j \leq q, 1 \leq l \leq k - 1, 1 \leq i \leq \tilde{d}_l$ , les fonctions  $\tilde{X}_{li}^j$  sont calculées et cherchons les champs de vecteurs  $\tilde{X}_{ki}^j$  pour  $1 \leq i \leq \tilde{d}_k$ .

Comme pour la première étape, en utilisant les équations (3.68) et (3.74) il s'en suit que :

$$\sum_{j=1}^q d(\tilde{X}_{ki}^j) \wedge d\xi_j = d\Theta_{ki} \quad (3.78)$$

ce qui nous donne le système EDP suivant :

$$\begin{aligned} & \text{pour } 1 \leq j, l \leq q, 1 \leq i \leq \tilde{d}_k, \\ & \frac{\partial \tilde{X}_{ki}^j}{\partial \xi_l} - \frac{\partial \tilde{X}_{ki}^l}{\partial \xi_j} = \theta_{ki}^{jl} \\ & \text{pour } 1 \leq j \leq q, 1 \leq i \leq \tilde{d}_k, 1 \leq t \leq \tilde{\nu} - 1, 1 \leq s \leq \tilde{d}_t, \\ & \frac{\partial \tilde{X}_{ki}^j}{\partial \xi_{ts}} = \tilde{\theta}_{ksi}^{jt} \end{aligned} \quad (3.79)$$

où  $\theta_{ki}^{jl}$  et  $\tilde{\theta}_{ksi}^{jt}$  sont des fonctions connues qui dépendent des fonctions calculées  $\tilde{X}_{li}^j, 1 \leq l \leq k - 1$ .

### 3.4.4 Démonstration du Théorème 11 : Algorithme

La preuve du théorème 11 est basée sur la proposition suivante :

**Proposition 6** *Supposons que le système (3.4) (dans lequel  $y = Cz = z_1, \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{z} = \tilde{z}_1$ ) est en cascade observable, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) Soient  $[Y] = [Z_{u_1 \dots u_{\nu-1}}] \in B_\nu^*$  et  $X = (-1)^{\nu-1} Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}}$ , alors

$$X = \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^q a_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n-q} b_i(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \quad (3.80)$$

où les  $a_i$  sont des constantes. En outre, nous avons :

$$i_X(\Omega^X) = i_{\frac{\partial}{\partial z_1}}(\Omega^{\frac{\partial}{\partial z_1}}) \text{ modulo } (\mathbb{R}dz_1) \quad (3.81)$$

2) Soit  $[\tilde{Y}] = [\tilde{Z}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}]$  un élément de  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}^*$  et  $\tilde{X}_{q+1} = (-1)^{\tilde{\nu}-1} \tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}$ . Fixons  $\varphi_i = z_i$ , pour  $1 \leq i \leq q$  et  $\varphi_{q+1} = \tilde{z}_1$ . Soient  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q$  une séquence de champs de vecteurs de telle sorte que  $L_{\tilde{X}_j}(\varphi_i) = \delta_{ij}$  pour  $1 \leq j \leq q$ ,  $1 \leq i \leq q+1$  et qui vérifie la condition (3.68) du théorème 11 alors :

$$\tilde{X}_{q+1} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1} + \sum_{i=2}^{n-q} \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \quad (3.82)$$

où les  $\tilde{a}_i$  sont des constantes et pour  $j = 1, \dots, q$  :

$$\tilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{i=2}^{n-q} \beta_{ij}(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \quad (3.83)$$

En outre, si  $\pi = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q$ ,  $\tilde{X}_j^0 = \frac{\partial}{\partial z_j}$ , pour  $1 \leq j \leq q$ ,  $\tilde{X}_{q+1}^0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1}$  et  $\tilde{X}^0 = (\tilde{X}_1^0, \dots, \tilde{X}_{q+1}^0)$ , alors

$$i_{\tilde{X}}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}}) = i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}^0}) \text{ modulo } (d\mathcal{A}_q + \mathbb{R}d\tilde{z}_1) \quad (3.84)$$

où  $\mathcal{A}_q = \mathcal{C}^\infty\{z_1, \dots, z_q\}$  représente l'anneau des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $(z_1, \dots, z_q)$ .

**Preuve :**

Rappelons le système en cascade observable défini en (3.4) :

$$\begin{cases} \dot{z} &= A(u)z + \psi(u, y) \\ \dot{\tilde{z}} &= \tilde{A}(u)\tilde{z} + \tilde{\psi}(u, z, \tilde{y}) \\ y &= Cz = z_1; \quad z \in \mathbb{R}^q \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{z} = \tilde{z}_1; \quad \tilde{z} \in \mathbb{R}^{n-q} \end{cases}$$

Tout d'abord, remarquons que les propriétés 1) et 2) de la proposition 6 sont invariantes par rapport au changement de coordonnées linéaire qui préserve les composants  $z_1, \tilde{z}_1$ .

Comme nous l'avons vu précédemment,  $A_i(u)$  et  $\tilde{A}_i(u)$  représentent respectivement les  $i^{\text{ème}}$  lignes de  $A(u)$  et  $\tilde{A}(u)$ .  $\psi_i(u, y)$  et  $\tilde{\psi}_i(u, z, \tilde{y})$  représentent respectivement les  $i^{\text{ème}}$  composantes de  $\psi$  et  $\tilde{\psi}(u, z, \tilde{y})$ . Dans le système de coordonnées  $(z, \tilde{z})$ , la fonction  $f_u$  prend la forme suivante :

$$f_u = \sum_{i=1}^q (A_i(u)z + \psi_i(u, z_1)) \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{n-q} (\tilde{A}_j(u)\tilde{z} + \tilde{\psi}_j(u, z, \tilde{z}_1)) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_j}$$

Nous avons  $B_{k+1} = \{[dL_{f_{u_k}} \dots L_{f_{u_1}}(z_1)]; (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{U}_k\}$  et  $\tilde{B}_{k+1} = \{[dL_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{z}_1)]; (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_k\}$  les deux bases respectives de  $D_{k+1}/D_k$  et  $\tilde{D}_{k+1}/\tilde{D}_k$ . D'après l'assertion 2, nous savons que :

$$[d(L_{f_{u_k}} \dots L_{f_{u_1}}(z_1))] = [dCA(u_1) \dots A(u_1)z] \quad (3.85)$$

$$[d(L_{f_{\tilde{u}_k}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{z}_1))] = [d\tilde{C}\tilde{A}(\tilde{u}_1) \dots \tilde{A}(\tilde{u}_1)\tilde{z}] \quad (3.86)$$

Par ailleurs, les codistributions du drapeau défini précédemment en (3.52) sont de dimensions constantes (voir l'assertion 3). Soient  $n_k = \dim(D_k)$  et  $\tilde{n}_k = \dim(\tilde{D}_k/D_\nu)$  telles que :

$$\begin{aligned} n_0 &= 0 < n_1 = 1 < \dots < n_\nu = q \\ \tilde{n}_0 &= 0 < \tilde{n}_1 = 1 < \dots < \tilde{n}_{\tilde{\nu}} = n - q \end{aligned} \quad (3.87)$$

Alors, après un changement de coordonnées linéaire  $(z, \tilde{z})$ , nous pouvons supposer que :

$$\begin{cases} B_k = ([dz_{1+n_{k-1}}, \dots, dz_{n_k}]) \\ \tilde{B}_k = ([d\tilde{z}_{1+\tilde{n}_{k-1}}, \dots, d\tilde{z}_{\tilde{n}_k}]) \end{cases} \quad (3.88)$$

et que dans ce nouveau système de coordonnées,  $A(u)$  et  $\tilde{A}(u)$  prennent la structure triangulaire suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leq k \leq \nu - 1, \text{ pour } n_{k-1} + 1 \leq i \leq n_k, \\ A_i(u)z = a_{i1}(u)z_1 + a_{i2}(u)z_2 + \dots + a_{i, n_{k+1}}(u)z_{n_{k+1}} \end{cases} \quad (3.89)$$

$$\begin{cases} \text{pour } 1 \leq k \leq \tilde{\nu} - 1, \text{ pour } \tilde{n}_{k-1} + 1 \leq i \leq \tilde{n}_k, \\ \tilde{A}_i(u)\tilde{z} = \tilde{a}_{i1}(u)\tilde{z}_1 + \tilde{a}_{i2}(u)\tilde{z}_2 + \dots + \tilde{a}_{i, \tilde{n}_{k+1}}(u)\tilde{z}_{\tilde{n}_{k+1}} \end{cases} \quad (3.90)$$

### Propriété 1) de la Proposition 6

Preuve de l'expression (3.80) :

Soit  $Y = Z_{u_1 \dots u_{\nu-1}}$  un élément fixe de  $B_\nu^*$  (la base duale de  $B_\nu$ ). Après la réorganisation de la base  $B_\nu$ , nous pouvons supposer que  $[dL_{f_{u_{\nu-1}}} \dots L_{f_{u_1}}(z_1)] = dz_q$ . Alors :

$$dz_{n_{\nu-1}+i}(Y) = L_Y(z_{n_{\nu-1}+i}) = \delta_{qi}, \quad 1 \leq i \leq n_\nu - n_{\nu-1} \quad (3.91)$$

Rappelons que  $B_\nu^*$  est une base de  $\Delta_{\nu-1}/\Delta_\nu$  avec  $\Delta_\nu \subset \Delta_{\nu-1} \subset \dots$  et que  $\Delta_k = \text{Ker}(D_k)$ . En combinant ce dernier avec (3.91), il s'en suit :

$$Y = \frac{\partial}{\partial z_q} + \sum_{i=1}^{n-q} \beta_j^*(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_j} \quad (3.92)$$

Soit  $X = (-1)^{\nu-1} Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}}$  et rappelons que  $Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}} = [f_{u_{\nu-1}}, [\dots, [f_{u_1}, Y] \dots]]$  d'après (3.55), alors les équations (3.17), (3.89) et (3.92) nous donnent :

$$Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}} = \sum_{i=1}^q a_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n-q} b_i(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \quad (3.93)$$

où les  $a_i$  sont des constantes.

Finalement, d'après le lemme 4, nous avons :

$$\begin{aligned} dz_1(Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}}) &= -dL_{f_{u_{\nu-1}}}(z_1)(Y^{u_1 \dots u_{\nu-2}}) \\ &= \dots \\ &= (-1)^{\nu-1} d(L_{f_{u_{\nu-1}}} \dots L_{f_{u_1}}(z_1))(Y) \\ &= (-1)^{\nu-1} dz_q(Y) \\ &= (-1)^{\nu-1} \end{aligned} \quad (3.94)$$

d'où :

$$\begin{aligned} X &= (-1)^{\nu-1} Y^{u_1 \dots u_{\nu-1}} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^q a_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n-q} b_i(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Preuve de l'expression (3.81) :

L'idée consiste à montrer que  $i_X(\Omega^X) = i_{\frac{\partial}{\partial z_1}}(\Omega^{\frac{\partial}{\partial z_1}})$  modulo  $(\mathbb{R}dz_1)$ .

Rappelons que  $\Omega^X$  est l'espace vectoriel réel engendré par les 2-formes différentielles :

$$\omega_{u_1 \dots u_k} = L_{f_{u_k}}(i_X(\omega_{u_1 \dots u_{k-1}})) \wedge dz_1 \quad (3.96)$$

où  $\omega_u = dL_{f_u}(z_1) \wedge dz_1 = d(CA(u))z \wedge dz_1$ .

En utilisant l'expression de  $X$  donnée dans (3.95) et le lemme 2 ( $i_X(d\varphi \wedge dz_1) = d\varphi - L_X(\varphi)dz_1$ ), un simple calcul algébrique nous donne :

$$i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dz_1 = \text{Span}\{dCA(u_1) \dots CA(u_k)z; k \geq 1, u_i \in \mathbb{R}^m\} + \mathbb{R}dz_1 \quad (3.97)$$

En particulier, l'expression (3.97) est vraie pour  $X = \frac{\partial}{\partial z_1}$ , d'où :

$$i_X(\Omega^X) = i_{\frac{\partial}{\partial z_1}}(\Omega^{\frac{\partial}{\partial z_1}}) \text{ modulo } (\mathbb{R}dz_1).$$

### Propriété 2) de la Proposition 6

Preuve de l'expression (3.82) :

Nous allons montrer que si  $[\tilde{Y}] = [\tilde{Z}_{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}]$  est un élément de  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}^*$ , où  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}^*$  est la base duale de  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}$ , et  $\tilde{X}_{q+1} = (-1)^{\tilde{\nu}-1} \tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}$ , où  $\tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}} = [f_{\tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}, [\dots, [f_{\tilde{u}_1}, \tilde{Y}]] \dots]$ , alors

$$\tilde{X}_{q+1} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1} + \sum_{i=2}^{n-q} \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i}$$

Puisque cette expression est invariante (par rapport les constantes  $\tilde{a}_i$ ) par un changement de coordonnées linéaire qui préserve les composantes  $z_1, \tilde{z}_1$ , ainsi nous pouvons réorganiser la base  $\tilde{B}_{\tilde{\nu}}$  (voir (3.88)) telle que  $dL_{f_{\tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{z}_1) = d\tilde{z}_{n-q}$ . Maintenant, en utilisant le fait que  $D_1 \subset \dots \subset D_{\nu} \subset \tilde{D}_1 \subset \dots \subset \tilde{D}_{\tilde{\nu}}$  et que  $\tilde{Y} \in \tilde{\Delta}_{\tilde{\nu}-1}$  avec  $\tilde{\Delta}_{\tilde{\nu}-1} = \text{Ker}(\tilde{D}_{\tilde{\nu}-1})$ , nous obtenons :

$$\tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_{n-q}} \quad (3.98)$$

D'après l'expression de  $f_u$  (voir (3.17)) et le fait que  $\tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}} = [f_{\tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}, [\dots, [f_{\tilde{u}_1}, \tilde{Y}]] \dots]$ , il s'en suit :

$$\tilde{X}_{q+1} = \tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}} = [f_{\tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}, [\dots, [f_{\tilde{u}_1}, \tilde{Y}]] \dots] = \sum_{i=1}^{n-q} \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \quad (3.99)$$

où les  $\tilde{a}_i$  sont des constantes. Finalement, en utilisant le lemme 4, nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} d\tilde{z}_1(\tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}) &= -dL_{f_{\tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}}(\tilde{z}_1)(\tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-2}}) \\ &= \dots \\ &= (-1)^{\tilde{\nu}-1} d(L_{f_{\tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}}} \dots L_{f_{\tilde{u}_1}}(\tilde{z}_1))(\tilde{Y}) \\ &= (-1)^{\tilde{\nu}-1} d\tilde{z}_{n-q}(\tilde{Y}) \\ &= (-1)^{\tilde{\nu}-1}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Ainsi,

$$\tilde{X}_{q+1} = (-1)^{\tilde{\nu}-1} \tilde{Y}^{\tilde{u}_1 \dots \tilde{u}_{\tilde{\nu}-1}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1} + \sum_{i=2}^{n-q} \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \quad (3.101)$$

D'où l'expression (3.82) est vérifiée.

Preuve de l'expression (3.83) :

Il faut montrer que pour  $j = 1, \dots, q$ , nous avons :

$$\tilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{i=2}^{n-q} \beta_{ij}(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i}$$

Par hypothèse, nous avons  $L_{\tilde{X}_j}(z_i) = \delta_{ij}$ , pour  $1 \leq j \leq q$ ,  $1 \leq i \leq q+1$ , d'où (3.83) est trivialement vraie.

Preuve de la propriété (3.84) :

Nous avons  $\pi = d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_q = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q$ , alors l'idée consiste à vérifier l'équation suivante :

$$i_{\tilde{X}}(\Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}}) = i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}^0}) \text{ modulo}(d\mathcal{A}_q + \mathbb{R}d\tilde{z}_1) \quad (3.102)$$

où  $\mathcal{A}_q = \mathcal{C}^\infty\{z_1, \dots, z_q\} = \mathcal{C}^\infty\{z\}$ ,  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+1})$  est  $(q+1)$ -uplets de champs de vecteurs définis dans (3.101) et (3.83),  $\tilde{X}^0 = (\tilde{X}_1^0, \dots, \tilde{X}_{q+1}^0)$ , où  $\tilde{X}_j^0 = \frac{\partial}{\partial z_j}$ , pour  $1 \leq j \leq q$  et  $\tilde{X}_{q+1}^0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1}$ .

D'après l'expression (3.42), nous savons que :

$$i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{k,\pi}^{\tilde{X}^0}) + \mathbb{R}d\tilde{z}_1 = \text{Span}\{d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_l)\tilde{z}); 1 \leq l \leq k, u_1, \dots, u_l \in \mathbb{R}^m\} + \mathbb{R}d\tilde{z}_1 \quad (3.103)$$

Par conséquent, pour vérifier (3.102), il suffit de montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{P}}(k)) \quad & i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_k}) = d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}) + w_{k-1} + dg_k \\ & w_{k-1} \in i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{k-1,\pi}^{\tilde{X}^0}) + \mathbb{R}d\tilde{z}_1, dg_k \in d\mathcal{A}_q \end{aligned} \quad (3.104)$$

Par hypothèse (voir proposition 6),  $\tilde{X}$  satisfait la condition (3.68) du théorème 11. Alors, d'après la remarque 4, cette condition est équivalente à :

$$d(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega})) = 0, \quad \forall \tilde{\omega} \in \Omega_{\pi}^{\tilde{X}} \quad (3.105)$$

Par la suite, nous allons montrer les propriétés  $(\tilde{\mathcal{P}}(k))$  par récurrence.

• Montrons  $(\tilde{\mathcal{P}}(1))$  :

Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_u &= dL_{f_u}(\tilde{z}_1) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \\ &= d(\tilde{C}\tilde{A}(u)z) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \end{aligned} \quad (3.106)$$

et d'après le lemme 2, nous déduisons que :

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_u) &= d(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z}) - L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_1 - \dots - L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_q - L_{\tilde{X}_{q+1}}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})d\tilde{z}_1 \\ &= d(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z}) - L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_1 - \dots - L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_q + a(u)d\tilde{z}_1 \end{aligned} \quad (3.107)$$

où  $a(u) = -L_{\tilde{X}_{q+1}}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})$  est une constante. Maintenant, nous allons prendre en compte l'équation (3.105), nous obtenons alors :

$$d(L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_1 + \dots + L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_q) = 0 \quad (3.108)$$

Ainsi,

$$L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_1 + \dots + L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_q \in d\mathcal{A}_q \quad (3.109)$$

D'où,

$$i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_u) = d(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z}) + w_0 + dg_1 \quad (3.110)$$

où  $w_0 = a(u)d\tilde{z}_1$  et  $dg_1 = L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_1 + \dots + L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z})dz_q \in d\mathcal{A}_q$ , ce qui implique  $(\tilde{\mathcal{P}}(1))$ .

- Montrons  $(\tilde{\mathcal{P}}(k))$  :

Supposons que  $(\tilde{\mathcal{P}}(l))$  est valable pour  $1 \leq l \leq k-1$ , en particulier :

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_{k-1}}) &= d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_{k-1})\tilde{z}) + w_{k-2} + dg_{k-1} \\ w_{k-2} &\in i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{k-2, \pi}^{\tilde{X}^0}) + \mathbb{R}d\tilde{z}_1, \quad dg_{k-1} \in d\mathcal{A}_q \end{aligned} \quad (3.111)$$

Etant donné que  $dL_{f_u}(\mathcal{A}_q) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 = 0$  ( $\mathcal{A}_q = \mathcal{C}^\infty\{z_1, \dots, z_q\}$ ), cette hypothèse de récurrence implique que, pour  $1 \leq l \leq k$ , nous avons :

$$\Omega_{l, \pi}^{\tilde{X}} = \Omega_{l, \pi}^{\tilde{X}^0} \quad (3.112)$$

En utilisant les propriétés données en (3.111), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{u_1 \dots u_k} &= L_{f_{u_k}}(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_{k-1}}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1) \\ &= L_{f_{u_k}}[d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_{k-1})\tilde{z}) + w_{k-2} + dg_{k-1}] \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Ensuite, en utilisant le fait que  $dL_{f_u}(\mathcal{A}_q) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 = 0$  et que  $dg_{k-1} \in d\mathcal{A}_q$ , il s'en suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{u_1 \dots u_k} &= d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \\ &\quad + L_{f_{u_k}}(w_{k-2}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Nous allons maintenant montrer que  $i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_k})$  satisfait  $\tilde{\mathcal{P}}(k)$ .

D'une part, nous avons  $w_{k-2} \in i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\pi, k-2}^{\tilde{X}^0})$ , ce qui nous permet d'avoir  $L_{f_{u_k}}(w_{k-2}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \in \Omega_{\pi, k-1}^{\tilde{X}^0}$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que  $\Omega_{\pi, k-1}^{\tilde{X}^0} = \Omega_{\pi, k-1}^{\tilde{X}}$  (voir (3.112)), nous en déduisons que :

$$i_{\tilde{X}}(L_{f_{u_k}}(w_{k-2}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1) = w'_{k-2} + dg'(z) \quad (3.115)$$

pour certains  $w'_{k-2} \in i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\pi,k-1}^{X^0}) + \mathbb{R}d\tilde{z}_1$  et une fonction  $g' \in \mathcal{A}_q$ .

Par conséquent, puisque  $d(i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\pi,l}^{\tilde{X}^0})) = 0$ , nous obtenons :

$$d(i_{\tilde{X}}(L_{f_{u_k}}(w_{k-2}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1)) = 0 \quad (3.116)$$

D'une autre part, l'expression (3.11) du lemme 2 nous donne :

$$\begin{aligned} i_{\tilde{X}}(d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1) &= d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}) \\ -L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})dz_1 - \dots - L_{\tilde{X}_{q+1}}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})d\tilde{z}_1 \end{aligned} \quad (3.117)$$

En utilisant le fait que  $\tilde{X}_{q+1} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1} + \sum_{i=2}^{n-q} \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i}$  (voir l'expression (3.101)), nous obtenons :

$$L_{\tilde{X}_{q+1}}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}) = a(u_1, \dots, u_k) \quad (3.118)$$

où  $a(u_1, \dots, u_k)$  est une constante et :

$$\begin{aligned} d[i_{\tilde{X}}(d(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z}) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1)] &= \\ -d[L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})dz_1 + \dots + L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})dz_q] \end{aligned} \quad (3.119)$$

Comme nous l'avons vu précédemment (voir (3.116)), nous avons :

$$d(i_{\tilde{X}}(\tilde{\omega}_{u_1 \dots u_k})) = 0 \quad (3.120)$$

En utilisant les expressions (3.114), (3.116), (3.119) et (3.120), nous déduisons que :

$$d[L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})dz_1 + \dots + L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})dz_q] = 0 \quad (3.121)$$

Ainsi,

$$L_{\tilde{X}_1}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})dz_1 + \dots + L_{\tilde{X}_q}(\tilde{C}\tilde{A}(u_1) \dots \tilde{A}(u_k)\tilde{z})dz_q = g''(z) \quad (3.122)$$

pour une fonction analytique  $g''(z)$ .

Finalement, en combinant les expressions (3.114), (3.115), (3.117) et (3.122), nous déduisons la propriété  $(\tilde{\mathcal{P}}(k))$ .

### **Preuve du théorème 11 :**

La condition suffisante du théorème 11 a été déjà évoquée dans le théorème 10. Nous allons maintenant expliciter la condition nécessaire.

Les conditions a) et b) du théorème 11 sont intrinsèques (elles ne dépendent pas du système de coordonnées), il suffit de les vérifier pour le système observable en cascade (3.4).

- a) La condition a) du théorème 11 est une conséquence directe de l'assertion 3.
- b.1) Soit  $X = (-1)^{\nu-1} Y^{u_1^0 \dots u_{\nu-1}^0}$  le champ de vecteurs défini dans b.1) du théorème 11. D'après (3.80)-(3.81) de la proposition 6, nous avons :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^q a_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{n-q} b_i(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i} \\ i_X(\Omega^X) &= i_{\frac{\partial}{\partial z_1}}(\Omega^{\frac{\partial}{\partial z_1}}) \text{ modulo } (\mathbb{R}dz_1) \end{aligned}$$

En combinant ces dernières propriétés par le fait que  $\frac{\partial}{\partial z_1}$  satisfait la condition (1) du théorème 10 (voir la preuve de la condition nécessaire du théorème 10 dans le cas où  $p = 1$ ), il peut être facilement vérifié que  $X$  satisfait aux conditions de (1-i) à (1-iv) du théorème 10. Ainsi, la condition b.1) du théorème 11 est vérifiée.

b.2) Soit  $\tilde{X}_{q+1} = \pm \tilde{Y}^{\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_{q-1}}$ . Considérons les fonctions linéaires  $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}$  satisfaisant  $\varphi_1 = h = z_1$ ,  $\varphi_{q+1} = \tilde{h} = \tilde{z}_1$  de telle sorte que  $(d\varphi_1, \dots, d\varphi_q)$  forme une base de  $i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dz_1$ . Après un changement de coordonnées linéaire, nous supposons que :

$$(d\varphi_1, \dots, d\varphi_q) = (dz_1, \dots, dz_q) \quad (3.123)$$

Considérons maintenant les champs de vecteurs  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_q$  telle que  $L_{\tilde{X}_j}(\varphi_i) = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $1 \leq i \leq q+1$  et qui vérifient la condition (3.68) du théorème 11. D'après la propriété 2) de la proposition 6, nous avons :

$$\tilde{X}_{q+1} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1} + \sum_{i=2}^{n-q} \tilde{a}_i \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i}$$

où les  $\tilde{a}_i$  sont des constantes et que pour  $j = 1, \dots, q$  :

$$\tilde{X}_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{i=2}^{n-q} \beta_{ij}(z, \tilde{z}) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_i}$$

En outre, si nous fixons  $\pi = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q$ ,  $\tilde{X}_j^0 = \frac{\partial}{\partial z_j}$ , pour  $1 \leq j \leq q$ ,  $\tilde{X}_{q+1}^0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1}$ , et  $\tilde{X}^0 = (\tilde{X}_1^0, \dots, \dots, \tilde{X}_{q+1}^0)$  alors :

$$i_{\tilde{X}}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}}) = i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}^0}) \text{ modulo}(d\mathcal{A}_q + \mathbb{R}d\tilde{z}_1)$$

où  $\mathcal{A}_q = \mathcal{C}^\infty\{z_1, \dots, z_q\}$ .

Ainsi, nous avons :

- Par construction,  $L_{\tilde{X}_i}(\varphi_j) = \delta_{ij}$ , d'où la condition (2-i) du théorème 10 est vérifiée.
- De la section 3.3.2 (voir la preuve de la condition nécessaire du théorème 10), il s'en suit que les  $(q+1)$ -uplet de champs de vecteurs  $(\tilde{X}_1^0, \dots, \dots, \tilde{X}_{q+1}^0)$  satisfont la condition (2-ii) du théorème 10, c'est-à-dire :

$$\dim(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}^0}) = n - q - 1 \quad (3.124)$$

Afin de montrer que  $\dim(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}}) = n - q - 1$ , il suffit de vérifier que :

$$\Omega_{\pi}^{\tilde{X}} = \Omega_{\pi}^{\tilde{X}^0} \quad (3.125)$$

Par définition,

$$\Omega_{\pi}^{\tilde{X}} = \sum_{u \in \mathbb{R}^m} L_{f_u}(i_{\tilde{X}}(\Omega_{\pi}^{\tilde{X}})) \wedge dz_1 \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1, \quad (3.126)$$

où  $f_u$  est la fonction définie en (3.17).

De plus, il est facile de remarquer que :

$$L_{f_u}(d\mathcal{A}_q) \wedge dz_1 \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 = 0 \quad (3.127)$$

et donc,

$$L_{f_u}(d\mathcal{A}_q + \mathbb{R}d\tilde{z}_1) \wedge dz_1 \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \subset \mathbb{R}d(\tilde{C}\tilde{A}(u)\tilde{z}) \wedge dz_1 \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \subset \Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}^0}. \quad (3.128)$$

La combinaison de ce dernier avec (3.84) nous donne (3.125).

- La condition (2-iii) du théorème 10 consiste à vérifier que  $d\tilde{\omega} = 0$ , pour tout  $\tilde{\omega} \in i_{\tilde{X}}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}})$ . Cette propriété résulte de l'expression (3.84) et du fait que  $d(i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}^0})) = 0$  et  $d(d\mathcal{A}_q + \mathbb{R}d\tilde{z}_1) = 0$ .
- Nous allons vérifier que l'espace vectoriel réel  $\bigwedge^{n-q-1}(i_{\tilde{X}}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}})) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1$  est de dimension 1.

Selon les expressions (3.123) et (3.84), nous obtenons :

$$\bigwedge^{n-q-1} (i_{\tilde{X}}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}})) \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{q+1} = \bigwedge^{n-q-1} (i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}^0})) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \quad (3.129)$$

A partir de la preuve du (2-iv) du théorème 10 (voir la fin de la section 3.3), nous avons  $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_{n-q}$  engendre  $\bigwedge^{n-q-1}(i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}^0})) \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q \wedge d\tilde{z}_1$ . Par conséquent, la condition (2-iv) du théorème 10 est vraie pour  $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+1})$ .  $\square$

### 3.5 Caractérisation complète des champs de vecteurs $X$ , $\tilde{X}$ dans le cas où $p = \tilde{p} = 1$

Pour des raisons de simplicité, nous supposons que les difféomorphismes locaux qui transforment le système (3.3) en un système de la forme (3.4) préservent l'origine. Soit  $Dif_0$  le groupe des germes de difféomorphismes préservant l'origine.

Dans cette section, nous allons caractériser l'ensemble  $\Sigma$  de tous les difféomorphismes  $\sigma \in Dif_0$  qui transforme le système (3.3) en un système de la forme (3.4). Plus précisément, nous allons montrer qu'il existe un sous-ensemble  $\mathcal{G}$  de  $Dif_0$ , qui est équipé d'une structure de groupe particulière et qui agit sur  $Dif_0$  par la composition de fonctions, et telle que  $\Sigma = \mathcal{G}_{\sigma_0}$ , où  $\mathcal{G}_{\sigma_0}$  est l'orbite d'un élément fixe  $\sigma_0$  qui transforme le système (3.3) en (3.4).

Pour des raisons de simplicité, nous pouvons supposer que les sorties  $y$ ,  $\tilde{y}$  du système (3.4) sont telles que  $y = Cz = z_1$  et  $\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{z} = \tilde{z}_1$ . Et en raison des termes de l'injection de sortie  $\psi(u, y)$  et  $\tilde{\psi}(u, z, \tilde{y})$ , les premières colonnes des matrices  $A(u)$  et  $\tilde{A}(u)$  du système (3.4) peuvent être supposées égales à 0.

Soit  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ , où  $\mathbb{R}^q$  (respectivement  $\mathbb{R}^{n-q}$ ) est l'espace d'état en  $z$  (respectivement l'espace d'état en  $\tilde{z}$ ) du système (3.4). Soit  $\Delta$  le groupe additif des germes à l'origine des fonctions  $\delta$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}^{n-q-1}$  qui préservent l'origine.

Dans la suite, nous allons prendre :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{n-q} \end{pmatrix} \quad (3.130)$$

Pour des vecteurs constants donnés :

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{q-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-q-1} \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

et une fonction  $\delta \in \Delta$ , nous prenons :

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\delta}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(z) \end{pmatrix}. \quad (3.132)$$

Pour un entier donné  $d \geq 2$ , nous notons par  $G_d$  le sous-groupe multiplicatif du groupe général linéaire  $GL(d, R)$  défini par  $T \in G_d$  si et seulement si

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_{d-1} \end{bmatrix}, \quad (3.133)$$

où  $T_{d-1} \in GL(d-1, R)$ .

Soient  $L_a$  et  $L_b$  les applications linéaires définies respectivement par :

$$L_a(z) = z_1 \hat{a}, \quad L_b(\tilde{z}) = \tilde{z}_1 \hat{b}. \quad (3.134)$$

Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble de tous les transformations

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T + L_a \\ \tilde{T} + L_b + \hat{\delta} \end{pmatrix} \quad (3.135)$$

où  $T \in G_q$  et  $\tilde{T} \in G_{n-q}$ .

$\mathcal{T}$  est une application de  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$  dans lui-même définie par :

$$\begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Tz + L_a(z) \\ \tilde{T}\tilde{z} + L_b(\tilde{z}) + \hat{\delta}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ T_{q-1}\tilde{z}_1 + z_1 a \\ \tilde{z}_1 \\ \tilde{T}_{n-q-1}\tilde{z}_1 + \tilde{z}_1 b + \delta(z) \end{pmatrix} \quad (3.136)$$

où  $T_{q-1} \in GL(q-1, \mathbb{R})$  et  $\tilde{T} \in GL(n-q-1, \mathbb{R})$  et  $\delta \in \Delta$ .

Il apparaît clairement que  $\mathcal{G}$  est un sous-ensemble de  $Dif_0$ . Sa structure de groupe est définie par la loi suivante :

$$(T' + L_{a'}, \tilde{T}' + L_{b'} + \hat{\delta}') \odot (T + L_a, \tilde{T} + L_b + \hat{\delta}) = (T' \circ (T + L_a) + L_{a'}, \tilde{T}' \circ (\tilde{T} + L_b + \hat{\delta}) + \hat{\delta}' \circ T). \quad (3.137)$$

En outre, l'ensemble  $\mathcal{G}$  agit sur  $Dif_0$  par la composition de fonctions. L'orbite de certains  $\sigma \in Dif_0$  est l'ensemble  $\mathcal{G}_\sigma = \{\mathcal{T} \circ \sigma; \mathcal{T} \in \mathcal{G}\}$ .

Maintenant, nous pouvons énoncer le résultat principal de cette section :

**Théorème 12** *Soit  $\sigma_0 \in Dif_0$  un difféomorphisme fixe qui transforme le système (3.3) sous la forme en cascade observable (3.4) dans laquelle la première colonne de  $A(u)$  (respectivement de  $\tilde{A}(u)$ ) est nulle et que  $Cz = z_1$  et  $\tilde{C}\tilde{z} = \tilde{z}_1$ . Alors, l'ensemble des difféomorphismes qui transforment le système (3.3) en (3.4) est précisément  $\mathcal{G}_{\sigma_0}$ .*

**Preuve :**

Supposons que le système (3.3) peut être transformé par un changement de coordonnées en un système en cascade observable (3.4). D'après le théorème 11, nous savons que les codistributions définies en (3.52) sont de dimensions constantes et que  $\dim(D_\nu) = q$  et  $\dim(\tilde{D}_{\tilde{\nu}}/D_\nu) = n - q$ .

Comme nous l'avons vu dans la section 3.4.2,  $B_k$  et  $\tilde{B}_k$  sont les bases respectives de  $D_k/D_{k-1}$  et  $\tilde{D}_k/\tilde{D}_{k-1}$  et sont définies en (3.53). Aussi, nous avons  $B_\nu^*$  et  $\tilde{B}_\nu^*$  qui représentent respectivement les bases duales de  $B_\nu$  et  $\tilde{B}_\nu$ .

En utilisant ces dernières bases, nous avons présenté dans la section 3.4.2 un algorithme qui nous permet de construire des champs de vecteurs  $X, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{q+1}$  satisfaisant les conditions du théorème 10 (voir la propriété b) du théorème 11).

Soit  $(d\xi_1, \dots, d\xi_q)$  une base de l'espace vectoriel réel  $i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}dh$  avec  $d\xi_1 = dh$  et considérons  $\pi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_q$  et  $d\tilde{\xi}_i \in i_{\tilde{X}}\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}}, 1 \leq i \leq n - q$  telle que  $d\tilde{\xi}_1 = d\tilde{h}$  et que  $\pi \wedge d\tilde{\xi}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\xi}_{n-q} \neq 0$ . Ainsi,  $(\xi, \tilde{\xi}) = (\xi_1, \dots, \xi_q, \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_{n-q})$  forme un système de coordonnées. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve de la condition suffisante du théorème 10, il s'en suit que le système (3.3) prend la forme en cascade observable suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A(u)\xi + \psi(u, y) \\ \dot{\tilde{\xi}} = \tilde{A}(u)\tilde{\xi} + \tilde{\psi}(u, \xi, \tilde{y}) \\ y = C\xi = \xi_1 \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1 \end{cases} \quad (3.138)$$

Dans la suite,  $\sigma \in Dif_0$  désigne le difféomorphisme qui transforme le système (3.3) en un système de la forme (3.138).

Soit  $\sigma_0 \in Dif_0$  le difféomorphisme qui transforme le système (3.3) sous une autre forme en cascade observable :

$$\begin{cases} \dot{z} = A^0(u)z + \psi^0(u, y) \\ \dot{\tilde{z}} = \tilde{A}^0(u)\tilde{z} + \tilde{\psi}^0(u, z, \tilde{y}) \\ y = Cz = z_1 \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{z} = \tilde{z}_1 \end{cases} \quad (3.139)$$

Afin de prouver le théorème 12, il suffit de montrer que  $\sigma \circ \sigma_0^{-1}$  appartient au groupe  $\mathcal{G}$ .

Fixons  $\pi = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_q$  et  $\tilde{X}_j^0 = \frac{\partial}{\partial z_j}$ , pour  $1 \leq j \leq q$ ,  $\tilde{X}_{q+1}^0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_1}$ ;  $\tilde{X}^0 = (\tilde{X}_1^0, \dots, \tilde{X}_{q+1}^0)$ , alors de la proposition 6, nous savons que :

$$i_X(\Omega^X) = i_{\frac{\partial}{\partial z_1}}(\Omega^{\frac{\partial}{\partial z_1}}) \text{ modulo}(\mathbb{R}dz_1)$$

$$i_{\tilde{X}}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}}) = i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}^0}) \text{ modulo}(d\mathcal{A}_q + \mathbb{R}d\tilde{z}_1)$$

où  $\mathcal{A}_q = \mathcal{C}^\infty\{z_1, \dots, z_q\}$  est l'anneau des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

La preuve du théorème 12 sera réalisée en deux étapes :

- **Etape 1** : Dans cette étape, nous allons montrer que :

$$\xi = Tz + z_1 \hat{a} \quad (3.140)$$

où  $T \in G_q$  et  $\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur colonne constant dans  $\mathbb{R}^q$ .

Par construction,  $(d\xi_1, \dots, d\xi_q)$  est une base de  $i_X(\Omega^X) + \mathbb{R}d\xi_1$ . D'après l'expression (3.38), nous savons que  $(dz_1, \dots, dz_q)$  est une base de  $i_{\frac{\partial}{\partial z_1}}(\Omega^{\frac{\partial}{\partial z_1}}) + \mathbb{R}dz_1$ . Enfin, en combinant l'expression (3.81) avec le fait que  $\xi_1 = z_1$ , il s'en suit qu'il existe  $T \in G_q$  et un vecteur constant  $\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$  telle que

$$d\xi = Tdz + \hat{a}dz_1 \quad (3.141)$$

où  $d\xi$  et  $dz$  sont les  $q$ -vecteurs colonnes dont les composantes sont respectivement  $d\xi_i$  et  $dz_i$ . Puisque les difféomorphismes  $\sigma_0$  et  $\sigma$  préservent l'origine, il s'en suit que  $\xi = Tz + z_1 \hat{a}$ .

- **Etape 2** : Pour compléter la preuve du théorème 12, dans cette étape, nous allons montrer que :

$$\tilde{\xi} = \tilde{T}\tilde{z} + \tilde{z}_1 \hat{b} + \hat{\delta}(z) \quad (3.142)$$

où  $\hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur colonne constant dans  $\mathbb{R}^{n-q}$ ,  $\tilde{T} \in G_{n-q}$  et  $\hat{\delta}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(z) \end{pmatrix}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}^q$  dans  $\mathbb{R}^{n-q}$ , avec  $\delta(0) = 0$ .

De l'expression (3.43), nous avons :

$$i_{\tilde{X}^0}(\Omega_{\tilde{\pi}}^{\tilde{X}^0}) + \mathbb{R}d\tilde{z}_1 + \dots + \mathbb{R}d\tilde{z}_p = \mathbb{R}d\tilde{z}_1 + \dots = \mathbb{R}d\tilde{z}_{n-q} \quad (3.143)$$

En combinant la dernière équation avec celle donnée en (3.84), nous en déduisons que :

$$\text{pour } 2 \leq i \leq n - q, \quad d\xi_i = \sum_{j=2}^{n-q} \tilde{T}_{ij} d\tilde{z}_j + b_i z_1 + \delta_i(z) \quad (3.144)$$

où  $\tilde{T}_{ij}$  et  $b_i$  sont des constantes et  $\delta_i(z)$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ .

Nous avons  $d\tilde{h} = d\tilde{\xi}_1 = d\tilde{z}_1$  et  $d\tilde{\xi}_1, \dots, d\tilde{\xi}_{n-q}$  sont des formes différentielles indépendantes. D'après l'expression (3.144), nous pouvons déduire que  $d\tilde{\xi} = \tilde{T}d\tilde{z} + \hat{b}d\tilde{z}_1 + \hat{\delta}(z)$ , où  $\tilde{T} \in G_{n-q}$ . De plus, nous avons  $\delta(0) = 0$  puisque  $\sigma_0$  et  $\sigma$  préservent l'origine. Ainsi, l'expression (3.142) est vérifiée. □

## 3.6 Conclusion

La problématique de l'existence d'une conception d'observateurs pour une classe des systèmes en cascade observables a été développée dans ce chapitre. Nous avons introduit la classe

des systèmes non linéaires qui peuvent être transformés par un changement de coordonnées local à une forme en cascade. Cette transformation a requis des conditions nécessaires et suffisantes qui nécessitent le calcul d'un difféomorphisme approprié. Cet algorithme de calcul a été présenté dans le cas de deux sorties. Son extension dans le cas multi-sorties est une tâche difficile et nécessite la résolution des équations aux dérivées partielles complexes. Nous avons aussi caractérisé l'ensemble de tous les difféomorphismes en montrant que ce dernier est une orbite d'une action d'un groupe particulier sur l'ensemble des tous les difféomorphismes.

# Chapitre 4

## Synthèse d'un filtre de détection et isolation de défauts capteur pour les systèmes polytopiques LPV : application à un enrouleur de bandes

Ce chapitre a pour objectif de développer une méthode de diagnostic de défauts pour une classe particulière de systèmes non linéaires décrits sous une forme polytopique Linéaire à Paramètres Variants et de synthétiser un filtre de détection, isolation et estimation de défauts capteur tout en assurant les conditions de stabilité.

### 4.1 Introduction

Les systèmes industriels automatisés sont vulnérables aux défauts d'instrumentation comme les capteurs ou les actionneurs. Ce changement peut conduire à une situation dangereuse pour un opérateur humain (Isermann and Balle 1997),(Rodrigues *et al.* 2007). La détection et l'isolation de défauts se résume à détecter l'apparition de défauts dans un processus (Harris *et al.* 1999) et de trouver leurs causes avec différentes stratégies basées sur des modèles quantitatifs (Venkatasubramanian *et al.* 2003*b*) et des modèles qualitatifs (Venkatasubramanian *et al.* 2003*a*). Les techniques de diagnostic basés sur des modèles sont envisagés pour contrôler le processus (Knittel *et al.* 2003) et garantir la sécurité dans l'industrie. Plusieurs livres sont consacrés à ces sujets telles les références (Gertler 1998, Chen and Patton 1999, Chiang *et al.* 2001) ou plus récemment (Ding 2008).

Cependant, le diagnostic pour les systèmes non linéaires reste un challenge (Bokor and Szabo 2009) en raison du problème d'obtention des modèles exploitables pour le diagnostic avec des

techniques garantissant la détection, l'isolation et l'estimation de défaut tout en assurant les conditions de stabilité. Sur de large plage de fonctionnement, c'est toujours un challenge actuel. Afin d'effectuer le diagnostic sur des systèmes non linéaires, des méthodes proposées par exemple dans (Poussot-Vassal *et al.* 2008) ont été basées sur l'étude des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV). Le diagnostic pour les systèmes LPV a été étudié dans (Bokor and Balas 2004b, Zolghadri *et al.* 2008, Armeni *et al.* 2009) afin de concevoir des filtres robustes pour la détection et l'isolation de défauts (Fault Detection and Isolation, FDI) pour les systèmes dynamiques LPV et celui pour les systèmes singuliers LPV dans (Hamdi *et al.* 2012).

Les systèmes d'enroulement de bandes sont des processus non linéaires qui considèrent une grande plage de fonctionnement. Dans le papier de (Xiao *et al.* 2011), les auteurs ont développé une stratégie pour le diagnostic de défauts (Fault Diagnosis, FD) et la commande tolérante aux défauts (Fault Tolerant Control, FTC) pour un système d'enroulement. Cependant, leur théorie est développée pour les systèmes Linéaires à Temps Invariant (LTI) et ils ne peuvent considérer qu'un seul point de fonctionnement.

Dans (Claveau *et al.* 2008, Kuhm *et al.* 2012), les auteurs ont synthétisé et comparé un régulateur LTI avec un régulateur LPV. Ils mettent en évidence que le régulateur LTI peut être envisagé pour un seul point de fonctionnement et non pas pour tout l'ensemble des points. Dans (Gassmann and Knittel 2011), les auteurs ont considéré un système d'enroulement qui a été modélisé sous la forme LPV, et ils ont synthétisé un régulateur LPV pour un système d'enroulement, mais avec un seul observateur LTI pour estimer un paramètre du système sous certaines hypothèses. Dans (Benlatreche *et al.* 2008), les auteurs ont développé des régulateurs décentralisés et des régulateurs proportionnels intégraux par retour d'état pour les systèmes à grande échelle comme une machine d'enroulement. La méthode consiste en la conception d'une commande par retour d'état en utilisant une approche basée sur les inégalités matricielles bilinéaires (Bilinear Matrix Inequalities, BMI).

En tenant compte de la modélisation d'un système d'enroulement sous la forme LPV comme dans (Gassmann and Knittel 2011), les auteurs dans (Theilliol *et al.* 2008) ont développé une technique de diagnostic de défauts de manière à générer des résidus insensibles aux défauts par des méthodes spécifiques de découplage. Ces auteurs ont établi une méthode de diagnostic de défauts capteur pour des systèmes non linéaires et ont développé des conditions de stabilité pour les observateurs à entrées inconnues (UIO) qui effectuent la détection et l'isolation de défauts. Cependant, aucune estimation du défaut n'a été rendue possible avec cette technique. Dans (Ponsart *et al.* 2010), une autre méthode a été développée avec un filtre capable à la fois d'isoler et d'estimer les défauts. Toutefois, les conditions de stabilité n'ont pas été étudiées et le filtre ne peut pas être utilisé sans une réelle étude de stabilité. Dans (Rodrigues *et al.* 2008), les conditions de stabilité d'un filtre polytopique LPV qui permet la détection, l'isolation et l'estimation de défauts actionneur dans le cadre multi-modèles ont été présentées.

En se basant sur les papiers de (Theilliol *et al.* 2008, Ponsart *et al.* 2010, Rodrigues *et al.* 2008), ce chapitre contribue à étendre et à développer un schéma de diagnostic complet avec : la détection, l'isolation et l'estimation mais pour des défauts capteur sur des systèmes

non linéaires basés sur un modèle LPV à temps discret. Les objectifs de cette étude sont de concevoir un schéma global de diagnostic permettant d'estimer l'amplitude du défaut capteur sur un ensemble large de fonctionnement appliquée à une machine d'enroulement.

Ainsi, basé sur une représentation polytopique LPV, ce chapitre aborde une contribution originale qui permet non seulement de détecter, isoler et estimer de multiples défauts capteurs, mais aussi d'avoir une information qualitative supplémentaire de l'efficacité du filtre. Cet indicateur est défini comme un facteur de qualité : proche de zéro si le filtre découple les défauts appropriés ou différent de zéro autrement.

Les conditions de stabilité de ce filtre polytopique LPV sont étudiées à travers la stabilité poly-quadratique. Les performances du filtre polytopique LPV sont testées sur un véritable processus : un enrouleur de bandes.

Dans un premier temps, nous proposons de présenter le problème de détection et d'isolation de défauts pour le système polytopique LPV afin de développer dans un second temps un module de diagnostic pour les défauts capteur sous une représentation LPV. Ce module de diagnostic doit permettre de détecter, isoler et estimer les défauts tout en considérant les conditions de stabilité.

## 4.2 Problématique

Considérons la classe de systèmes LPV affines en temps discret avec des défauts capteur :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \tilde{A}(\theta_k)x_k + \tilde{B}(\theta_k)u_k \\ y_k = Cx_k + Ff_k \end{cases} \quad (4.1)$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u_k \in \mathbb{R}^p$  est la commande et  $y_k \in \mathbb{R}^m$  représente le vecteur de la sortie mesurée.  $F \in \mathbb{R}^{m \times q}$  représente la matrice de distribution de défauts capteur et  $f_k \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des défauts tel que  $q < m$  (cette hypothèse a été considérée dans (Alwi and Edwards 2013)). La présence de tels défauts peuvent conduire à une dégradation des performances, une instabilité du système ou à la perte du processus.

La matrice  $F$ , qui représente la matrice de distribution de défauts capteur, est souvent (mais pas toujours) définie comme une matrice où chacune de ses colonnes est un vecteur unitaire :

$$F_i = [0 \dots 1 \dots 0]^T \quad (4.2)$$

qui représente le  $i^{\text{ème}}$  défaut capteur. C'est une généralisation de la représentation de défaut capteur.

$\tilde{A}(\cdot), \tilde{B}(\cdot)$  sont des fonctions qui dépendent de manière affine du vecteur à paramètres variants dans le temps  $\theta_k \in \mathbb{R}^l$ . Il est également supposé que ce vecteur  $\theta_k^j$  est sans défaut, borné, et se trouve dans un hypercube (Anstett *et al.* 2009), (Bruzelius 2004) de telle sorte que  $\forall j \in [1, \dots, l]$  :

$$\theta_k \in \Gamma = \{\theta_k \mid \underline{\theta}_k^j \leq \theta_k^j \leq \bar{\theta}_k^j\}, \quad \forall k \geq 0 \quad (4.3)$$

Les matrices  $\tilde{A}(\theta_k), \tilde{B}(\theta_k)$  du système LPV (4.1) avec une dépendance affine du paramètre  $\theta_k$  (4.3) sont représentées de telle sorte que :

$$\tilde{A}(\theta_k) = \tilde{A}_0 + \sum_{j=1}^l \theta_k^j \tilde{A}_j, \quad \tilde{B}(\theta_k) = \tilde{B}_0 + \sum_{j=1}^l \theta_k^j \tilde{B}_j \quad \forall \theta_k \in \Gamma \quad (4.4)$$

Basé sur (4.4), le système (4.1) peut être transformé sous une forme d'interpolation convexe des sommets de  $\Gamma$  où les sommets du polytope sont définis de telle sorte que (Rodrigues *et al.* 2007) :  $S_j = [A_j, B_j, C, F]$ ,  $\forall j \in [1, \dots, N]$  où  $N = 2^l$ . Les coordonnées polytopiques sont calculées par la fonction  $\rho(\theta(k))$  et varient dans l'ensemble convexe  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \left\{ \rho(\theta_k) \in \mathbb{R}^N, \rho(\theta_k) = [\rho_1(\theta_k), \dots, \rho_N(\theta_k)]^T, \rho_j(\theta_k) \geq 0, \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) = 1 \right\}$$

Par conséquent et en considérant les défauts capteur, le système (4.1) peut se représenter sous la forme polytopique LPV suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) (A_j x_k + B_j u_k) \\ y_k = C x_k + F f_k \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_j \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $F \in \mathbb{R}^{m \times q}$  sont des matrices invariantes définies pour le  $j^{\text{ème}}$  modèle. Dans (Rodrigues *et al.* 2008), les auteurs ont considéré les défauts actionneur et dans ce chapitre, les défauts capteur vont être considérés. Un travail préliminaire consiste à réécrire le système (4.5). Basé sur (Park *et al.* 1994), en présence de défauts capteur, un système (4.5) peut être réécrit comme un système affecté par des pseudos défauts actionneur. Supposons que la dynamique du défaut capteur est décrit de la façon suivante :

$$f_{k+1} = \delta f_k + \bar{f}_k \quad (4.6)$$

où  $\delta \in \mathbb{R}^{q \times q}$  est défini par  $\delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_q)$  et  $\bar{f}_k$  est le pseudo-défaut.  $\delta$  représente le degré de liberté supplémentaire dans la conception de l'estimateur (Park *et al.* 1994) et peut être fixé entre  $]0, \dots, 1]$ . En considérant (4.5) et (4.6), une nouvelle représentation du système polytopique LPV avec défaut capteur est donnée par :

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) (\bar{A}_j \bar{x}_k + \bar{B}_j u_k + \bar{F} \bar{f}_k) \\ \bar{y}_k = \bar{C} \bar{x}_k \end{cases} \quad (4.7)$$

avec  $\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ f_k \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_j = \begin{bmatrix} A_j & \underline{0} \\ \underline{0} & \delta \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B}_j = \begin{bmatrix} B_j \\ \underline{0} \end{bmatrix}$ ,  $\bar{F} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ I \end{bmatrix}$ ,  $\bar{C} = [C \ F]$  ( $\underline{0}$  désigne la matrice nulle et  $I$  la matrice identité de dimensions appropriées).

L'objectif principal de la détection et l'isolation de défauts est de concevoir un filtre qui est en mesure de déterminer si un défaut s'est produit ou non dans le système. Pour cette simple question, il est bien connu que la synthèse d'un résidu, qui est la différence entre les sorties du système et les sorties estimées du filtre, peut donner une réponse à cette question. Donc, à

cette fin, les concepteurs peuvent synthétiser le filtre polytopique LPV de Luenberger suivant sous l'hypothèse classique que les paires  $(\bar{C}, \bar{A}_j)$  soient observables (Chen and Patton 1999) :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) (\bar{A}_j \hat{x}_k + \bar{B}_j u_k + \bar{K}_j (y_k - \bar{C} \hat{x}_k)) \\ \hat{y}_k &= \bar{C} \hat{x}_k \end{cases} \quad (4.8)$$

ou également avec la notation  $(\cdot)(\rho_k) = \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) (\cdot)_j$  comme :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= \bar{A}(\rho_k) \hat{x}_k + \bar{B}(\rho_k) u_k + \bar{K}(\rho_k) (y_k - \bar{C} \hat{x}_k) \\ \hat{y}_k &= \bar{C} \hat{x}_k \end{cases} \quad (4.9)$$

En considérant (4.7) et (4.9), l'évolution dynamique de l'erreur d'estimation  $e_k = \bar{x}_k - \hat{x}_k$  et du résidu  $r_k = \bar{y}_k - \hat{y}_k$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} e_{k+1} &= (\bar{A}(\rho_k) - \bar{K}(\rho_k) \bar{C}) e_k + \bar{F} \bar{f}_k \\ r_k &= \bar{C} e_k \end{cases} \quad (4.10)$$

Généralement, en ce point, l'objectif consiste à stabiliser la matrice  $(\bar{A}(\rho_k) - \bar{K}(\rho_k) \bar{C})$  grâce à un choix du gain  $\bar{K}(\rho_k)$  tel que la matrice  $(\bar{A}(\rho_k) - \bar{K}(\rho_k) \bar{C})$  soit Hurwitz, c'est-à-dire que ses valeurs propres restent stables. Ainsi, dans le cas sans défaut ( $\bar{f}_k = 0$ ), l'erreur d'estimation  $e_k$  et le résidu  $r_k$  tendent vers zéro. Ceci indique qu'aucun défaut ne s'est produit dans le système. En outre, si un défaut se produit ( $\bar{f}_k \neq 0$ ) alors l'erreur d'estimation  $e_k$  et le résidu  $r_k$  deviennent différents de zéro et indiquent qu'un défaut s'est produit.

Toutefois, ce filtre LPV de Luenberger ne peut pas être utilisé en l'état s'il y a plus d'un défaut dû au fait que le résidu  $r_k$  serait corrompu par des informations différentes à travers le vecteur de défaut  $\bar{f}_k$ , c'est-à-dire que le filtre serait sensible à tous les défauts capteur : l'isolation de défaut n'est pas possible et bien évidemment l'estimation du défaut capteur non plus. Pour de multiples défauts capteur, une technique classique consiste à concevoir un filtre LPV de Luenberger (Chen and Patton 1999) pour un seul capteur et interpréter les différents résidus basés sur un banc de filtres dédiés. Cette méthode permet de détecter et d'isoler un défaut. Cependant, il n'est pas possible avec un tel filtre d'estimer l'amplitude de multiples défauts capteur.

Nous proposons donc de synthétiser un filtre capable de détecter, isoler et estimer de multiples défauts capteur tout en assurant sa stabilité. Celui-ci sera présenté dans la section suivante sous les hypothèses requises pour l'existence du filtre polytopique LPV :

- Les paires  $(\bar{C}, \bar{A}_j)$  sont observables,  $\forall j \in [1, \dots, N]$ .
- Le nombre de mesures est supérieur au nombre de défauts, c'est à dire  $q < m$  (à des fins d'isolation des défauts).
- La matrice de distribution de défaut est de plein rang colonne, c'est à dire égale à  $q$ .

On suppose également que la valeur maximale des indices de défaut de détectabilité est égale à un (Keller 1999). Il convient de noter que la synthèse d'un seul filtre pour tous les défauts capteur n'est pas possible pour réaliser une tâche de détection, d'isolation et d'estimation de défaut. Par conséquent, telle que présentée dans la section suivante, un banc de filtres sera également conçu.

## 4.3 Détection, isolation et estimation de défaut capteur avec un facteur de qualité

### 4.3.1 Conception du filtre polytopique LPV

Un algorithme conventionnel de détection de défauts (Chen and Patton 1999) est capable de détecter un défaut en surveillant le résidu, noté  $r_k$ , classiquement défini comme la différence de sortie entre le système et le modèle. Afin de déterminer également l'estimation de l'amplitude du défaut et d'estimer le vecteur de l'espace d'état, les auteurs (Rodrigues *et al.* 2008) ont proposé de concevoir un filtre tel que le vecteur résiduel  $r_k$  soit divisé en deux sous-vecteurs distincts : un sous-vecteur du résidu défini sensible aux défauts et l'autre sous-vecteur  $y$  est insensible. Il a été montré dans (Keller 1999) (dans le cadre LTI), que pour satisfaire l'égalité (4.11) nécessaire au découplage des défauts pour obtenir une partie d'un nouveau résidu insensible aux défauts :

$$(\bar{A}(\rho_k) - \bar{K}(\rho_k)\bar{C})\bar{F} = 0, \quad (4.11)$$

un découplage du gain pouvait être une solution si l'équation (4.11) est satisfaite et si le nombre de défauts est strictement inférieur aux nombres de sorties à des fins d'isolation de défauts, c'est à dire  $\text{rang}(\bar{C}\bar{F}) = q < m$ , une solution de (4.11) a été proposée par (Keller 1999) pour les systèmes LTI dont le gain  $\bar{K}(\rho_k)$  était paramétré de telle sorte que :

$$\bar{K}(\rho_k) = K^A(\rho_k) + K^C(\rho_k) \quad (4.12)$$

où :

—  $K^A(\rho_k)$  is défini par :

$$K^A(\rho_k) = \omega(\rho_k)\Pi \quad (4.13)$$

avec  $\omega(\rho_k) = \bar{A}(\rho_k)\bar{F}$  et  $\Pi = (\bar{C}\bar{F})^+$  où  $(\cdot)^+$  représente la pseudo-inverse de la matrice  $(\cdot)$ .

—  $K^C(\rho_k)$  est défini par :

$$K^C(\rho_k) = K(\rho_k)\Psi \quad (4.14)$$

avec  $\Psi = \beta(I_m - (\bar{C}\bar{F})(\bar{C}\bar{F})^+)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^{(m-q) \times m}$  est une matrice constante arbitraire définie de telle sorte que la matrice  $\Psi$  soit de plein rang ligne et  $K(\rho_k)$  est un gain à synthétiser.

Basé sur (4.12), (4.13) et (4.14), le filtre défini dans (4.9) peut être réécrit comme un filtre polytopique LPV défini sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = (\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k)\mathcal{C})\hat{x}_k + \bar{B}(\rho_k)u_k + K^A(\rho_k)y_k + K(\rho_k)\Psi y_k \\ \hat{y}_k = \bar{C}\hat{x}_k \end{cases} \quad (4.15)$$

avec  $\mathcal{A}(\rho_k) = \bar{A}(\rho_k)(I_m - \bar{F}\Pi\bar{C})$  et  $\mathcal{C} = \Psi\bar{C}$ .

Selon (4.7) et (4.15), l'erreur d'estimation  $e_k = \bar{x}_k - \hat{x}_k$  et le résidu  $r_k$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} e_{k+1} = (\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k)\mathcal{C})e_k + \bar{F}\bar{f}_k \\ r_k = \bar{C}e_k \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $K(\rho_k)$  doit être synthétisé afin de garantir la stabilité du filtre polytopique LPV et atteindre une certaine performance au niveau de la convergence de l'erreur. Dans le cas sans défaut (c'est

à dire :  $\bar{f}_k = 0$ ), les relations précédentes sont réécrites telles que :

$$\begin{cases} \bar{e}_{k+1} = (\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k)\mathcal{C})\bar{e}_k \\ \bar{r}_k = \bar{C}\bar{e}_k \end{cases} \quad (4.17)$$

où  $\bar{e}_k$  et  $\bar{r}_k$  désignent respectivement l'erreur d'estimation et le résidu dans le cas sans défaut. Notons que le résidu  $r_k$  dans (4.16) est obtenu en multipliant l'erreur d'estimation  $e_k$  par la matrice  $\bar{C}$  et peut être écrit comme suit :

$$r_{k+1} = \bar{C}e_{k+1} = \bar{C}(\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k)\mathcal{C})e_k + \bar{C}\bar{F}\bar{f}_k \quad (4.18)$$

Ainsi, basé sur l'équation (4.17), il peut être réécrit :

$$r_k = \bar{r}_k + \bar{C}\bar{F}\bar{f}_{k-1} \quad (4.19)$$

A partir de l'équation (4.19), le filtre polytopique LPV est capable de donner deux informations différentes en utilisant une matrice spécifique  $\begin{bmatrix} \Psi \\ \Pi \end{bmatrix}$  de telle sorte qu'un résidu projeté  $p_k$  est défini comme suit :

$$p_k = \begin{bmatrix} \Psi \\ \Pi \end{bmatrix} r_k = \begin{bmatrix} \Psi \\ \Pi \end{bmatrix} (\bar{r}_k + \bar{C}\bar{F}\bar{f}_{k-1}) = \begin{bmatrix} \Psi\bar{r}_k + \Psi\bar{C}\bar{F}\bar{f}_{k-1} \\ \Pi\bar{r}_k + \Pi\bar{C}\bar{F}\bar{f}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

En considérant les propriétés suivantes (qui impliquent la décomposition du gain (4.12)) :

$$\Pi\bar{C}\bar{F} = I \text{ et } \Psi\bar{C}\bar{F} = 0 \quad (4.21)$$

la génération d'un nouveau résidu  $p_k$  de l'équation (4.20), peut être défini comme suit :

$$p_k = \begin{bmatrix} \Psi \\ \Pi \end{bmatrix} r_k = \begin{bmatrix} \Psi\bar{r}_k \\ \Pi\bar{r}_k + \bar{f}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_k \\ \Omega_k \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Le résidu  $p_k$  est divisé en deux sous-vecteurs : un vecteur noté  $\gamma_k$  insensible aux défauts  $\bar{f}_k$  et un vecteur noté  $\Omega_k$  sensible qu'aux défauts  $\bar{f}_k$ . Le vecteur insensible aux défauts  $\bar{f}_k$  ( $\gamma_k \in \mathbb{R}^{m-q}$ ) est proche de zéro dans le cas sans défaut ou en cas de défauts lorsque le défaut  $\bar{f}_k$  se produit dans le système. Cependant, le vecteur  $\gamma_k$  est différent de zéro signifiant la présence des erreurs de modélisation ou d'autres défauts qui ne sont pas considérés dans la synthèse du filtre. Ce vecteur  $\gamma_k$  est un indicateur pour qualifier l'efficacité du filtre polytopique LPV. Si un défaut  $\bar{f}_k$  survient dans le système, une technique d'évaluation de résidus doit être utilisée afin d'indiquer l'exactitude du nouveau résidu  $p_k$  et plus précisément, l'exactitude de la dernière composante  $\Omega_k = \Pi\bar{r}_k + \bar{f}_{k-1}$ . En ce qui concerne cette composante  $\Omega_k \in \mathbb{R}^q$  qui représente le vecteur résiduel sensible aux défauts, celle-ci peut être utilisée pour une estimation du défaut  $\bar{f}_k$  avec un temps de retard d'un seul échantillon (cf. 4.22). Comme mentionné dans la Proposition 1 dans (Rodrigues *et al.* 2008), une estimation  $\hat{f}_k$  du défaut capteur  $\bar{f}_k$  pourrait être réalisée grâce à une matrice de Moore-Penrose :

$$\hat{f}_k = (\bar{F})^+ \bar{F}\Omega_k \quad (4.23)$$

### 4.3.2 Stabilité du filtre polytopique LPV

La stabilité du filtre est réduite à trouver des gains  $K_j$ ,  $\forall j \in [1, \dots, N]$  de sorte que l'interpolation de gain  $K(\rho_k)$  assure la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation (4.17) vers l'origine en l'absence de défaut. Pour obtenir des conditions de synthèse moins restrictives, la notion de la stabilité poly-quadratique avec une fonction de Lyapunov quadratique dépendant d'un paramètre tel que mentionné dans (Anstett *et al.* 2009) est utilisée.

**Proposition 7** *L'erreur d'estimation (4.17) est poly-quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_j$ , des matrices  $R_j$  et  $G$  de dimensions appropriées  $\forall j \in [1, \dots, N]$  telles que :*

$$\begin{pmatrix} -P_j & \mathcal{A}_j^T G - \mathcal{C}^T R_j^T \\ G \mathcal{A}_j - R_j \mathcal{C} & P_i - (G + G^T) \end{pmatrix} < 0, \quad \forall i, j \in [1, \dots, N] \quad (4.24)$$

Le gain  $K_j$  est alors donné par  $K_j = G^{-1} R_j$ . □

**Preuve :**

Soit la fonction de Lyapunov définie par  $V(\bar{e}_k, \rho_k) = \bar{e}_k^T P(\rho_k) \bar{e}_k > 0$ . Pour assurer la stabilité, sa différence  $\mathcal{L} = V(\bar{e}_{k+1}, \rho_{k+1}) - V(\bar{e}_k, \rho_k)$  en considérant l'équation (4.17) doit être définie négative décroissante telle que :

$$(\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C})^T P(\rho_{k+1}) (\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C}) - P(\rho_k) < 0 \quad (4.25)$$

avec  $\mathcal{A}(\rho_k) = \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) \mathcal{A}_j$  et la matrice de Lyapunov  $P(\rho_k) = \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) P_j$  sur un ensemble convexe  $\Lambda$ .

Nous supposons que (4.24) soit vraie. En utilisant la notation  $R_j = G K_j$ , en multipliant l'inégalité (4.24) par  $\rho_j(\theta_k)$  et en les additionnant, alors (4.24) devient  $\forall j \in [1, \dots, N]$  :

$$\begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) P_j & \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) (\mathcal{A}_j - K_j \mathcal{C})^T G^T \\ G \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) (\mathcal{A}_j - K_j \mathcal{C}) & P_i - (G + G^T) \end{pmatrix} < 0, \quad (4.26)$$

De plus, en additionnant les inégalités (4.26) par rapport à  $i$ , l'inégalité (4.26) devient :

$$\begin{pmatrix} -P(\rho_k) & (\mathcal{A}^T(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C})^T G^T \\ G(\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C}) & P_+(\rho_k) - (G + G^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

sous les notations suivantes :

$$\begin{aligned} P(\rho_k) &= \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_k) P_j \\ P_+(\rho_k) &= P(\rho_{k+1}) = \sum_{j=1}^N \rho_j(\theta_{k+1}) P_j = \sum_{i=1}^N \rho_i(\theta_k) P_i \end{aligned} \quad (4.28)$$

En multipliant à gauche de (4.27) par  $[I \quad (\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C})^T]$  et à droite par  $[I \quad (\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C})^T]^T$ , l'inégalité suivante est obtenue :

$$(\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C})^T P_+(\rho_k) (\mathcal{A}(\rho_k) - K(\rho_k) \mathcal{C}) - P(\rho_k) < 0 \quad (4.29)$$

En d'autres termes, l'inégalité (4.29) correspond à l'inégalité (4.25) en rappelant que  $P_+(\rho_k) = P(\rho_{k+1})$ . Par conséquent, l'erreur d'estimation (4.17) satisfait à la condition de la stabilité polyquadratique.  $\square$

Comme expliqué dans les paragraphes précédents, la conception d'un filtre polytopique LPV unique stable a été fournie pour détecter les défauts capteur. Pour réaliser un diagnostic de défauts, une isolation de défauts, qui consiste à décider lequel (lesquels) parmi les éléments du système a (ont) vraiment échoué, une procédure d'isolation de défauts doit être effectuée telle que définie dans la section suivante.

### 4.3.3 Conception d'isolation de défauts

Comme présenté dans la figure (4.1), le filtre polytopique LPV que nous présentons permet de détecter, isoler et estimer des défauts capteur à chaque échantillon  $k$  basé sur les normes des vecteurs  $\gamma_k$  et  $\Omega_k$ . Cependant, la synthèse d'un seul filtre pour détecter tous les défauts capteur n'est pas possible en raison de la condition du rang ( $\text{rang}(\bar{C}\bar{F}) = q < m$ ) qui ne peut pas être remplie. Donc, dans ce cas, la méthode consiste à concevoir un banc de  $m$  filtres polytopiques LPV où chacun d'entre eux est synthétisé pour estimer certains défauts. L'idée présentée ici est basée sur l'efficacité du "facteur de qualité" qui est insensible à ce vecteur de défauts spécifiques mais sensible à d'autres.

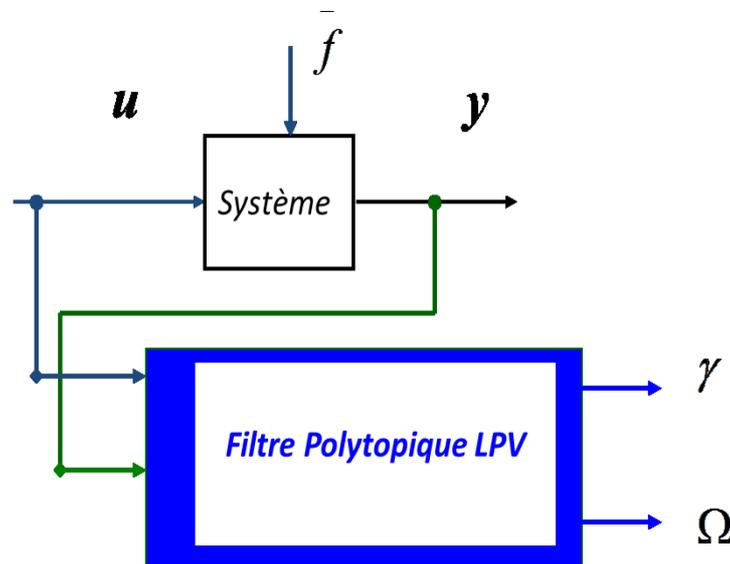


FIGURE 4.1: Schéma du filtre polytopique

Ce schéma de diagnostic de défaut est semblable à l'approche bien connue de la structure résiduelle généralisée. Selon le filtre développé, il était possible de mettre en place divers bancs de filtres tels que le Schéma d'Observation Généralisé (Generalized Observer Scheme, GOS) capable d'isoler seulement un seul défaut ou le Schéma d'Observation Dédié (Dedicated Observer Scheme, DOS) capable d'isoler des défauts simultanés comme proposé par (Frank and Ding 1997). Pour les GOS, chaque résidu  $\gamma^i, i \in [1, \dots, m]$  du  $i^{\text{ème}}$  filtre polytopique est insensible au  $i^{\text{ème}}$  défaut capteur mais sensible à tous les autres défauts c'est à dire  $\gamma_k \in \mathbb{R}^{m-1}$  et

$\Omega_k \in \mathbb{R}^1$ . Cependant, pour les DOS, chaque résidu  $\gamma^i, i \in [1, \dots, m]$  du  $i^{\text{ème}}$  filtre polytopique est insensible à tous les défauts capteur sauf le  $i^{\text{ème}}$  capteur c'est à dire  $\gamma_k \in \mathbb{R}^1$  et  $\Omega_k \in \mathbb{R}^{m-1}$ . La figure (4.2) résume les différents niveaux de schéma de diagnostic et d'isolation de défauts pour la structure GOS.

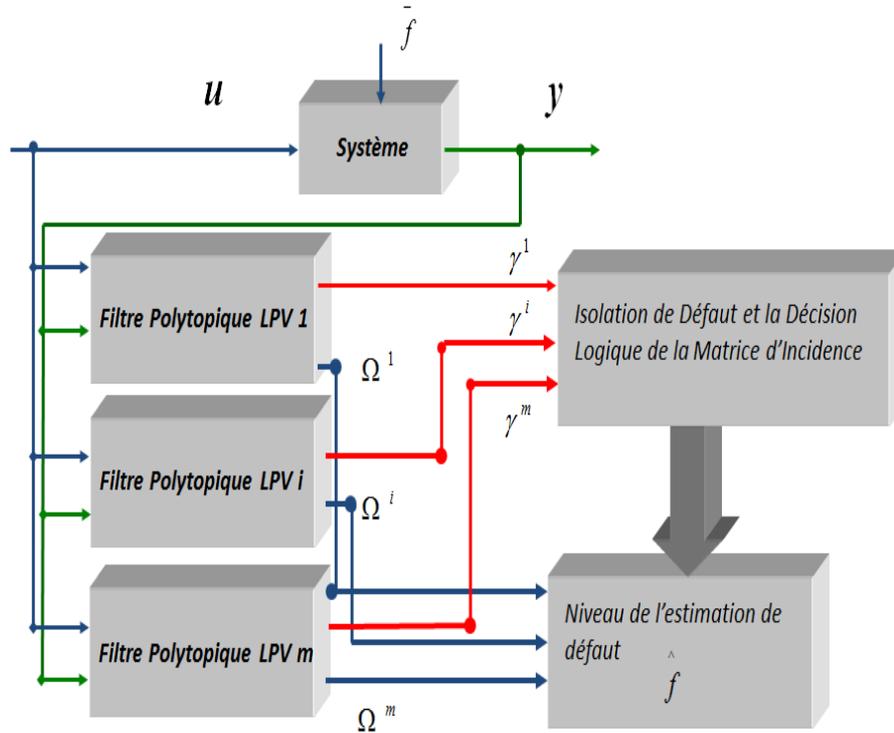


FIGURE 4.2: Schéma de diagnostic, d'isolation et d'estimation de défauts en structure GOS

Une matrice d'incidence (Tableaux 4.1 et 4.2) peut être établie où  $\|\gamma_k\|$  est considérée égale à '0' lorsque le résidu est proche de zéro et égale à '1' autrement. Chaque colonne de la matrice d'incidence est appelée le vecteur de cohérence associé à chaque signature de défaut. A partir des Tableaux 4.1 et 4.2, une prise de décision sélectionne lequel parmi les capteurs est défectueux. Une colonne indique qu'un signal est égal à zéro tandis que les autres sont égaux à un : la valeur '0' indique la localisation du défaut capteur avec le filtre polytopique LPV dédié.

La prise de décision est ensuite utilisée selon la logique élémentaire (Leonhardt and Ayoubi 1997), qui peut être décrite comme suit : un 'indicateur de défaut' est égal à un si le vecteur

résiduel  $\Upsilon = \begin{bmatrix} \|\gamma_k\|^1 \\ \dots \\ \|\gamma_k\|^i \\ \dots \\ \|\gamma_k\|^m \end{bmatrix}$  généré par le banc, est égal à une colonne de la matrice d'incidence,

et à zéro autrement. L'élément associé à l'indicateur étant égal à un est ensuite déclaré être 'en défaut'.

**Remarque 5 :** La méthode d'isolation de défauts est basée sur le fait qu'un seul défaut peut être détecté précisément au même instant pour récupérer la signature de défaut à partir des Tableaux 4.1 et 4.2. Il convient de remarquer que la probabilité pour que deux ou plusieurs défauts qui apparaissent exactement au même moment, et simultanément, est proche de zéro. Plusieurs

défauts peuvent apparaître au cours d'une expérience, mais pas exactement au même instant. Si plusieurs défauts apparaissent au même moment (très faible probabilité), alors l'isolation des défauts n'est pas garantie, mais la détection des défauts reste vraie.

TABLE 4.1: Matrice d'incidence - GOS (\*) Autres défauts ou deux capteurs minimum sont défectueux.

Residu	Sans défaut	$\bar{f}^1$	...	$\bar{f}^i$	...	$\bar{f}^m$	*
$\ \gamma_k\ ^1$	0	<b>0</b>	1	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	1	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	1
$\ \gamma_k\ ^i$	0	1	$\vdots$	<b>0</b>	$\vdots$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	1
$\ \gamma_k\ ^m$	0	1	...	1	...	<b>0</b>	1

TABLE 4.2: Matrice d'incidence - DOS (\*) Autres défauts ou tous les capteurs sont défectueux.

Residu	Sans défaut	$\bar{f}^1$	...	$\bar{f}^i$	...	$\bar{f}^m$	*
$\ \gamma\ ^1$	0	<b>1</b>	0	0	0	0	1
$\vdots$	$\vdots$	0	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	1
$\ \gamma\ ^i$	0	0	$\vdots$	<b>1</b>	$\vdots$	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	1
$\ \gamma\ ^m$	0	0	...	0	...	<b>1</b>	1

La méthode de détection et d'isolation de défauts développée précédemment est illustrée sur un enrouleur de bandes dans la section suivante.

## 4.4 L'enrouleur de bandes

### 4.4.1 Description du système

Le processus d'enroulement est composé d'une bande plastique et de trois bobines appelées respectivement bobines de déroulement, stimulation et de réenroulement avec un rayon non mesurable directement (voir chapitre 3 de (Noura *et al.* 2009)). Chaque bobine est couplée à un moteur à courant continu par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse.

La vitesse angulaire des deux premières bobines ( $S_1, S_2$ ) et les tensions ( $T_1, T_3$ ) entre les bobines, sont mesurées par des tachymètres et des voltmètres. Les trois entrées de commande  $U_1, U_2$  et  $U_3$  sont la tension d'entrée des trois moteurs comme illustré dans la figure 4.3. Chaque moteur est commandé par un régulateur local composé d'un ou deux régulateurs PI (Ponsart *et al.* 2010). La première boucle de contrôle ajuste le courant du moteur ( $I_1, I_2, I_3$ ), et sa constante de temps d'intégration est d'environ 40 ms, tandis que la deuxième boucle contrôle la vitesse angulaire avec une constante de temps d'intégration égale à 200 ms. Les points de réglage de ces régulateurs sont calculés par un régulateur logique programmable (PLC) afin de contrôler à la fois les tensions et la vitesse linéaire de la bande (300 m de longueur, 5 cm de large

et 0.2 mm d'épaisseur). L'étude expérimentale dure 40 min, le rayon de réenroulement de la bobine varie de 210 à 70 mm. Un environnement de développement en temps réel (Simulink Real-Time Workshop+dSPACE) basé sur un ordinateur est utilisé à la place du PLC pour améliorer le contrôle. Les entrées et les sorties du système sont données dans l'intervalle [0 100%] correspondant à  $[-10V ; 10V]$  et à  $[-1 ; +1]$  avec les variables Matlab.

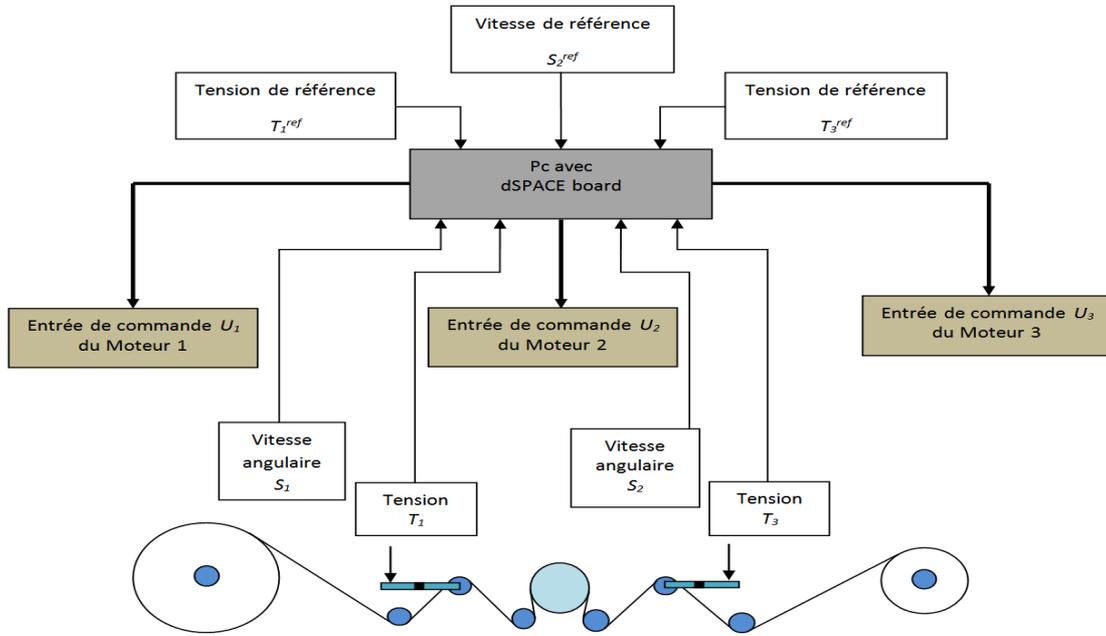


FIGURE 4.3: Architecture de contrôle du processus d'enroulement

#### 4.4.2 La modélisation du système avec des défauts capteur

Basé sur (Ponsart *et al.* 2010), où l'essentiel de la modélisation et l'identification est développé et présenté en détails, l'enrouleur de bandes peut être représenté avec la représentation suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A(R_k)x_k + B(R_k)u_k \\ y_k &= Cx_k + Ff_k \end{cases} \quad (4.30)$$

où  $x_k = x(kT_e)$ , avec la période d'échantillonnage  $T_e = 0.1s$ ,  $y_k = x_k = [T_1 \ S_2 \ T_3]^T$  et  $u_k = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T$ . La matrice du système  $A$  et la matrice de contrôle  $B$  sont des matrices linéaires polynomiales dépendant d'un paramètre positif borné et variant au cours du temps noté  $R_k$  où  $0 < R_{min} < R_k < R_{max}$  et vérifiant :

$$G(R) = G_0R^0 + G_1R^1 + G_2R^2 + \dots + G_\alpha R^\alpha \quad (4.31)$$

où  $G$  représente  $A$  ou  $B$  et  $\alpha$  définit le degré du polynôme qui est égal à 6 (Theilliol *et al.* 2008). Dans ce qui suit, nous allons considérer la technique développée par (Hetel *et al.* 2007). Cette méthode souligne l'équivalence exacte entre le modèle et la représentation polynomiale polytopique. Ainsi, chaque matrice polynomiale est définie par un polytope convexe avec  $(\alpha+1)$

sommets  $\Delta_j^G$  calculé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^G = G_\alpha R_{min}^\alpha + \dots + G_2 R_{min}^2 + G_1 R_{min}^1 + G_0 R_{max}^0 \\ \Delta_2^G = G_\alpha R_{min}^\alpha + \dots + G_2 R_{min}^2 + G_1 R_{max}^1 + G_0 R_{max}^0 \\ \Delta_3^G = G_\alpha R_{min}^\alpha + \dots + G_2 R_{max}^2 + G_1 R_{max}^1 + G_0 R_{max}^0 \\ \vdots = \vdots \\ \Delta_{\alpha+1}^G = G_\alpha R_{max}^\alpha + \dots + G_2 R_{max}^2 + G_1 R_{max}^1 + G_0 R_{max}^0 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

La formulation du polytope convexe est obtenue par le calcul des fonctions  $\rho_j(R)$  ( $\forall j \in [0, \dots, \alpha]$ ) en utilisant l'algorithme récursif suivant avec  $\tau = 2, \dots, \alpha$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1(R) = 1 - \frac{R - R_{min}}{R_{max} - R_{min}} \\ \rho_{\alpha+1}(R) = \frac{R^\alpha - R_{min}^\alpha}{R_{max}^\alpha - R_{min}^\alpha} \\ \rho_\tau(R) = \frac{R^{\tau-1} - R_{min}^{\tau-1}}{R_{max}^{\tau-1} - R_{min}^{\tau-1}} - \sum_{j=\tau+1}^{\alpha+1} \rho_j(R) \end{array} \right. \quad (4.33)$$

Donc, les fonctions  $\rho_j(R)$  résident dans un ensemble convexe  $\Lambda$  :

$$\Lambda = \{ \rho(R) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}, \rho = [\rho_1 \dots \rho_{\alpha+1}]^T \text{ et } \sum_{j=1}^{\alpha+1} \rho_j(R) = 1 \rho_j \geq 0 \}$$

$\forall j \in [1, \dots, \alpha + 1]$ , où  $\Delta_j^G$  définit les sommets du polytope convexe tel que :

$$G(R) = \sum_{j=1}^{\alpha+1} \rho_j(R) \Delta_j^G \quad (4.34)$$

En se basant sur les équations précédentes (4.6) et (4.34), la représentation (4.30) peut se ramener à un système polytopique LPV augmenté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{k+1} = \sum_{j=1}^{\alpha+1} \rho_j(R_k) (\bar{A}_j \bar{x}_k + \bar{B}_j u_k + \bar{F} \bar{f}_k) \\ y_k = \bar{C} \bar{x}_k \end{array} \right. \quad (4.35)$$

où  $\bar{A}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\bar{B}_j \in \mathbb{R}^{n \times p}$  sont des matrices constantes et  $\forall j \in [1, \dots, \alpha + 1] : \rho_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^{\alpha+1} \rho_j(R_k) = 1$  et  $0 < R_{min} < R_k < R_{max}$ .

La machine d'enroulement de bande peut être représentée avec  $\alpha = 6$  dépendant du rayon de réenroulement de bobines  $R_k$  comme dans l'équation (4.35) avec  $0 < R_{min} < R_k < R_{max}$ ,  $R_{min} = 70\text{mm}$  et  $R_{max} = 210\text{mm}$ . Pour des raisons techniques, le rayon est estimé par l'équation suivante :

$$R_k = R_{k-1} + \frac{h}{2\pi} S_{1,k} \quad (4.36)$$

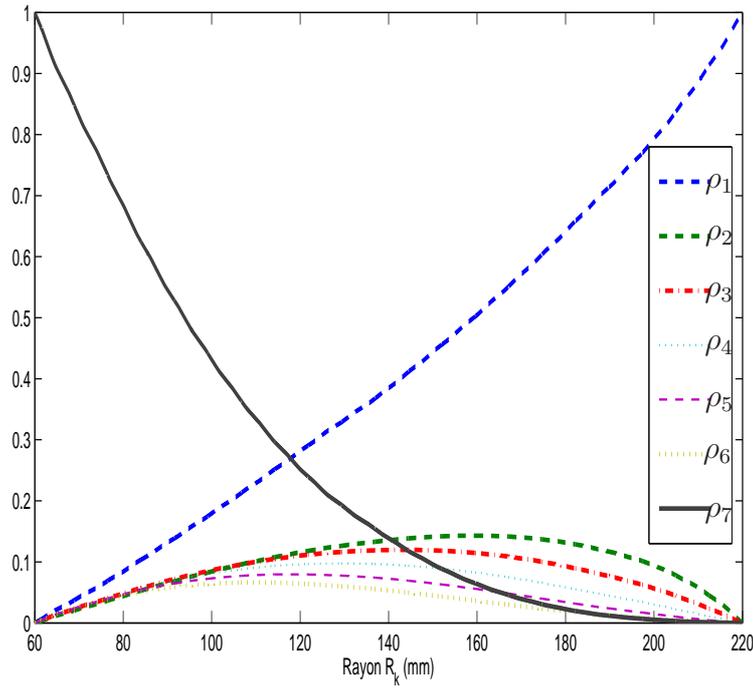


FIGURE 4.4: Evolution des paramètres  $\rho_j$

où  $h$  est l'épaisseur de la bande et  $S_{1,k}$  est la dépendance au temps de la vitesse angulaire de la bobine  $S_1$  et elle est supposé sans défaut.

Les sorties mesurées sont  $y_k = x_k = [T_1 \ S_2 \ T_3]^T$ .

La figure (4.4) présente l'évolution des 7 fonctions de pondération des 7 modèles retenus durant l'expérimentation. Leurs évolutions dynamiques justifient pleinement l'utilisation d'un modèle de type LPV où les paramètres varient rapidement et de manière non linéaire. Les différentes matrices  $A_j$  et  $B_j$  sont présentées dans la section 4.5.

Nous notons qu'une loi de commande de linéarisation des entrées-sorties, basée sur le modèle polynomial, a été implémentée (comme dans (Noura *et al.* 2009)) en utilisant le développement théorique non linéaire de (Fossard and Normand-Cyrot 1995) et (Isidori 1995) : ceci est essentiel étant donné que ce système est instable en boucle ouverte. Il peut être vérifié par le calcul des valeurs propres des différentes matrices  $A_j$  présentées dans la section 4.5.

Sans aucune restriction sur la méthode développée, nous considérons dans ce qui suit qu'un seul défaut peut se produire dans le système. Afin d'évaluer la méthode, un banc de filtres polytopiques LPV a été développé afin de détecter, isoler et estimer un état précis du système en présence de défauts. Chacun de ces filtres est dédié à un seul et unique défaut capteur en suivant le principe GOS (voir le paragraphe 4.3.3).

**Remarque 6** : Si deux défauts sont considérés pour se produire simultanément, la condition de découplage est vérifiée ( $\text{rank}(\bar{C}\bar{F}) = q = 2 < 3$ ). Dans ce banc de trois filtres est mis en place afin de fournir une structure DOS ( $\gamma_k \in \mathbb{R}^2$  et  $\Omega_k \in \mathbb{R}^1$ ). Avec un tel système, il

est possible de détecter, isoler et estimer deux défauts simultanément sous l'hypothèse qu'aucun autre défaut ou erreur de modélisation ne se produit. Toutefois, si trois défauts de produisent, le système proposé est capable que de détecter les défauts. On peut noter qu'un seul filtre pour tous les défauts capteur avec  $F = I_3$  ne peut pas être synthétisé comme la condition de découplage  $\text{rank}(\bar{C}\bar{F}) = q = 3 < m$  ne serait pas remplie.

### 4.4.3 Résultats expérimentaux

L'efficacité et les performances de la méthode de diagnostic développée est appliquée sur un processus réel. La synthèse des gains  $K_j$  du filtre LPV, présentés dans la section 4.5, a été calculée en utilisant le Toolbox des Inégalités Matricielles Linéaires du Toolbox du contrôle robuste qui est une partie de l'environnement Matlab.

#### 4.4.3.1 En l'absence de défaut

La figure 4.5 montre l'évolution des sorties en boucle fermée avec les entrées dans le cas où il n'y a pas de défaut. Cette expérience a été réalisée pour des changements progressifs de 20% de leurs valeurs d'exploitation correspondantes.

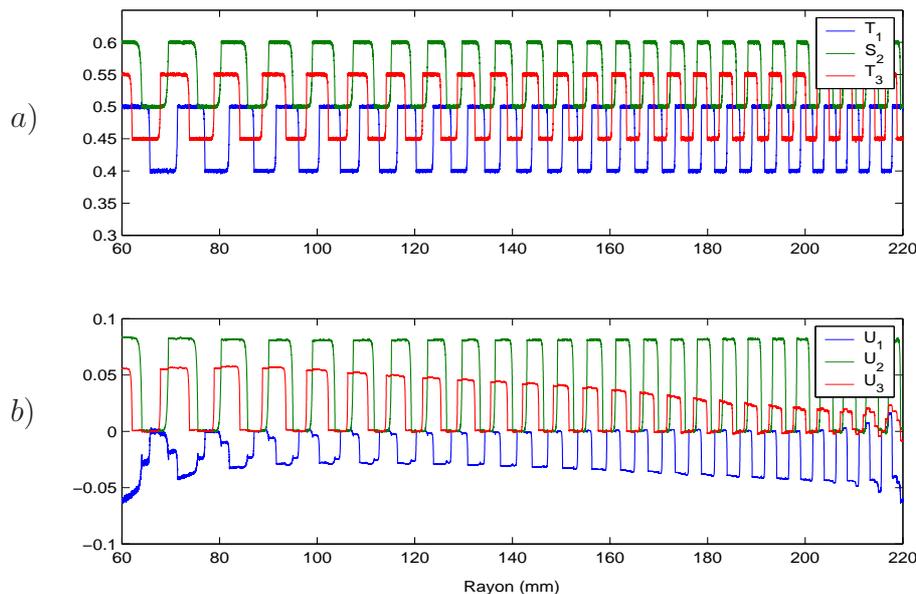


FIGURE 4.5: En l'absence de défaut : a) Les sorties du système b) Les entrées du système

Il faut noter que les résidus générés par le filtre de découplage représentés sur la figure 4.6 sont de moyenne nulle : cela signifie qu'il n'y a ni défaut ni erreurs de modélisation.

#### 4.4.3.2 En présence de défaut

\* *Première expérimentation* : un défaut sur la tension  $T_1$  qui survient et disparaît à différents moments va être considéré. Dans l'équation (4.30), en prenant  $F = F_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , les conditions de rang sont alors vérifiées.

Dans la figure 4.7, il est facile de voir que la sortie  $T_1$  est différente du régime nominal dû à la présence de défauts. La sortie réelle, en présence de défaut sur  $T_1$ , est différente de l'entrée

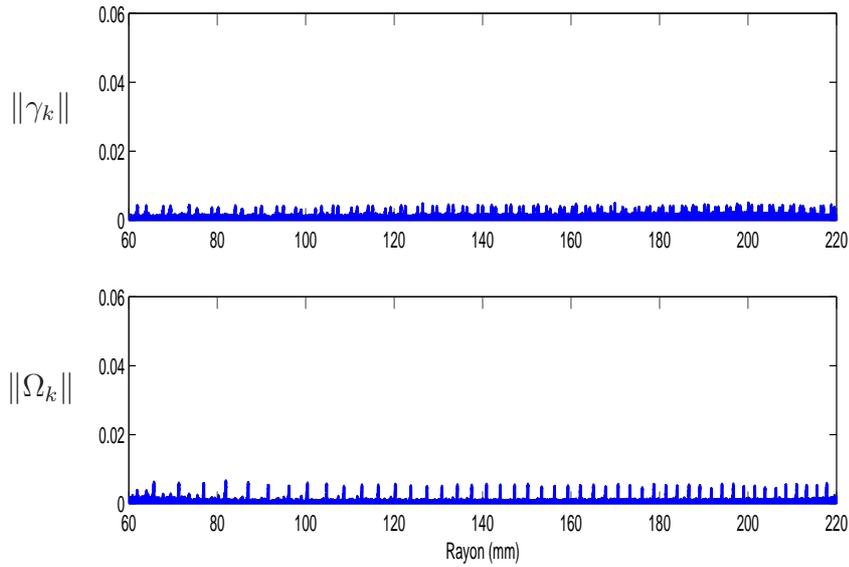


FIGURE 4.6: Norme du vecteur résiduel en l'absence de défaut

de référence pour des valeurs de rayon autour de : 100, 170 et 215mm. Les résultats du filtre de découplage sont présentés dans la figure 4.8.

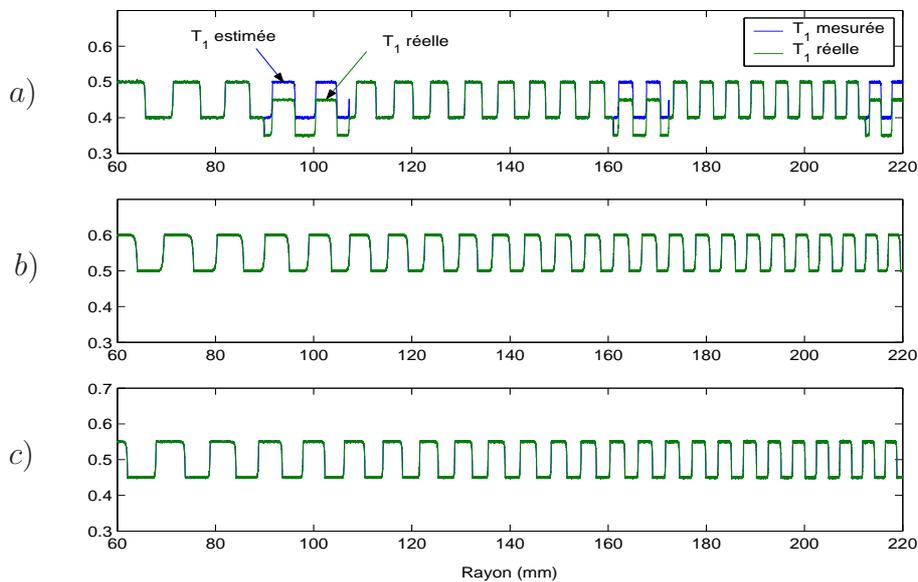


FIGURE 4.7: Sorties du système en présence de défaut et son estimation

Comme le montre la figure 4.8, le résidu  $\|\Omega_k\|$  est affecté par les brusques changements qui correspondent au défaut capteur sur  $T_1$ . Un tel résidu a été synthétisé de manière à être seulement sensible au défaut sur la sortie  $T_1$ . Dans la figure 4.8, il est clair que le facteur de qualité  $\|\gamma_k\|$  est égal à zéro signifiant que l'estimation du défaut dérivé du vecteur du résidu sensible peut être utilisée pour estimer le défaut réel. L'estimation précise l'amplitude du défaut capteur sur la figure 4.9 et illustre la performance du filtre de découplage.

**Remarque 7 :** Conformément à la loi de commande développée, les mesures de sortie sont

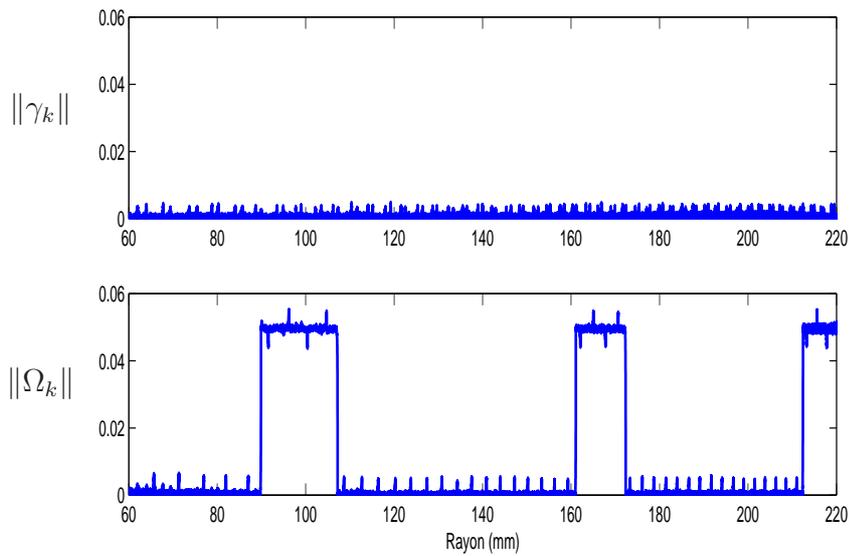


FIGURE 4.8: Défaut capteur  $T_1$  - Norme du vecteur résiduel en présence de défaut sur le capteur  $T_1$ .

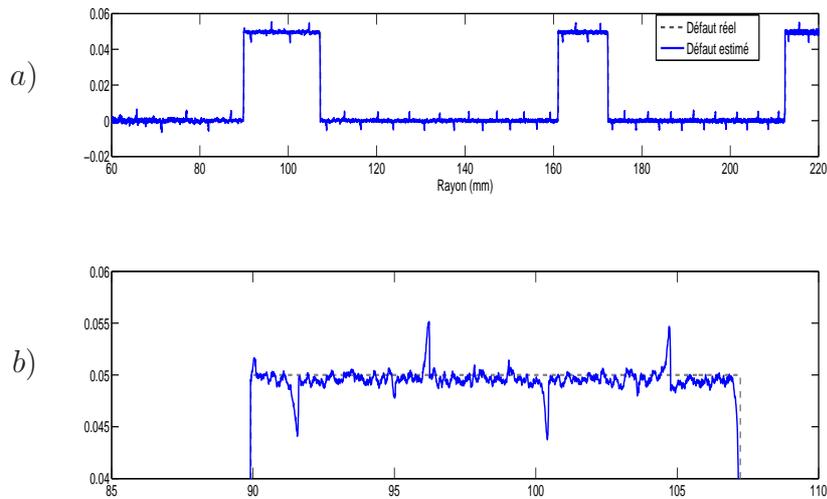


FIGURE 4.9: a) Le défaut capteur et son estimation par le filtre polytopique LPV b) Zoom autour  $R \approx 100$  mm - Défaut capteur  $T_1$ .

*affectées par des variations sur les autres. Par conséquent, certains 'pics' peuvent être observés sur la figure 4.9 et sur d'autres figures.*

\* *Deuxième expérimentation* : Un défaut capteur sur la bobine  $S_2$  va être considéré. Mais, afin de souligner le rôle du facteur de qualité, le même filtre dédié précédemment au défaut capteur sur  $T_1$ , va être utilisé. Donc, ce n'est pas le filtre adapté pour le défaut capteur sur  $S_2$  et bien sûr, l'estimation du défaut capteur doit être corrompue.

La figure 4.10 présente le comportement des deux normes résiduelles générées par le filtre

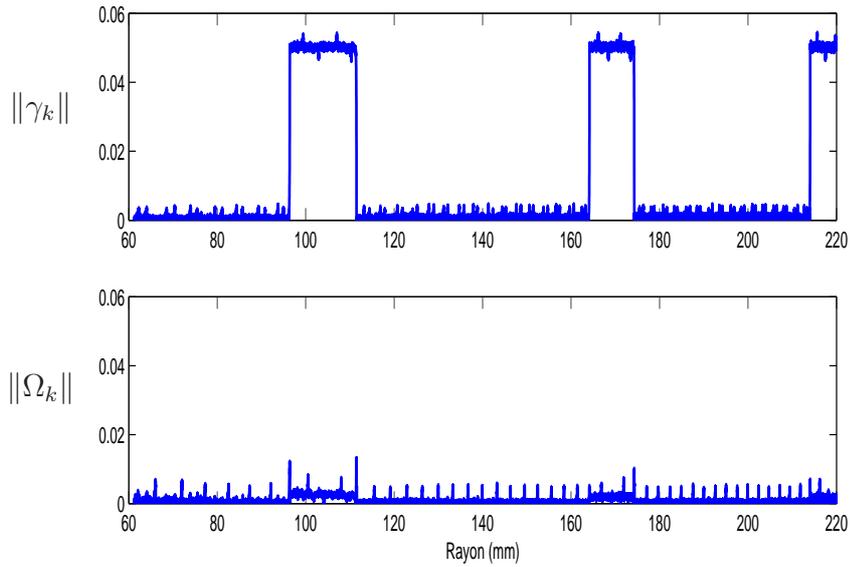


FIGURE 4.10: Défaut capteur  $S_2$  - Norme du vecteur résiduel en présence de défaut sur la sortie  $T_1$ .

polytopique LPV considéré. Comme prévu et illustré dans la figure 4.10, le résidu  $\|\gamma_k\|$  n'est pas égal à zéro, ce qui signifie que le résidu  $\|\Omega_k\|$  ne peut pas être utilisé pour estimer correctement l'amplitude du défaut capteur.

Maintenant, nous considérons le filtre dédié au défaut capteur sur la bobine  $S_2$ , synthétisé avec  $F = [0 \ 1 \ 0]^T$ . Comme illustré dans la figure 4.11, un tel filtre fournit un estimateur de défaut capteur approprié. Le facteur de qualité étant égal à zéro, indique que le résidu sensible peut être utilisé pour estimer ce défaut capteur (comme dans le Tableau 4.1). L'estimation de défaut capteur est proche de la vraie comme le montre la figure 4.12.

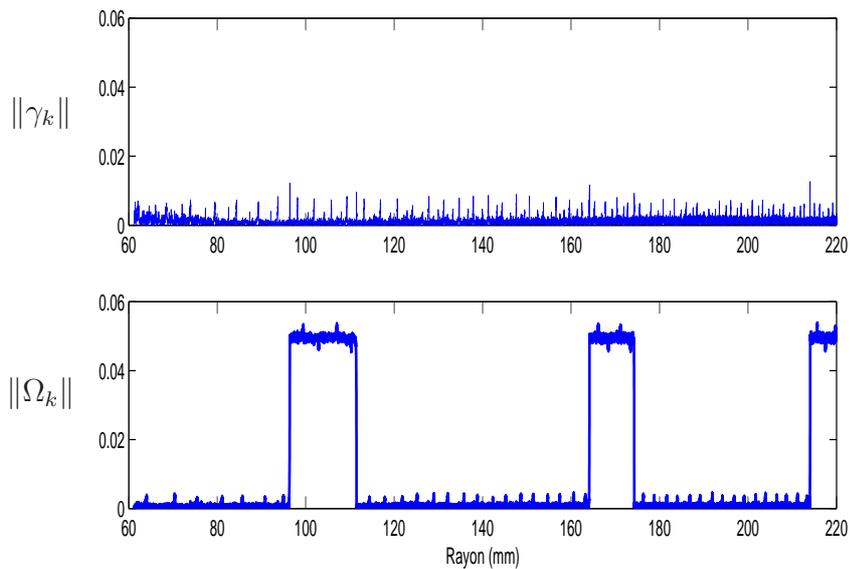


FIGURE 4.11: Défaut capteur  $S_2$  - Norme du vecteur résiduel en présence de défaut sur la sortie  $S_2$ .

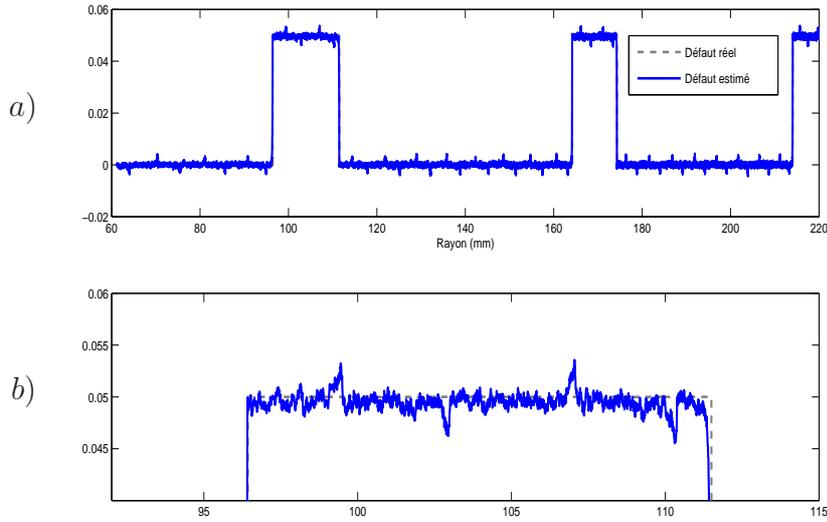


FIGURE 4.12: a) Le défaut capteur et son estimation par le filtre polytopique LPV b) Zoom autour  $R \approx 100$  mm - Défaut capteur  $S_2$ .

L'avantage principal de ce filtre polytopique LPV n'est pas seulement la performance de l'estimation du défaut capteur mais aussi la capacité à générer une information qualitative supplémentaire à partir du résidu insensible : si le facteur de qualité  $\|\gamma_k\|$  n'est pas égal à zéro, cela signifie qu'il est corrompu par un autre défaut ou par des erreurs de modélisation. De ce fait, le filtre ne peut pas être utilisé pour estimer correctement une amplitude d'un défaut capteur.

## 4.5 La synthèse des matrices et gains du filtre LPV

### Matrices $A_j$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.7175 & -0.8396 & -0.2270 \\ 0.0122 & 0.5370 & -0.0650 \\ -0.0074 & 0.1675 & 0.1563 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 29.7488 & -88.2373 & -29.5144 \\ -0.1112 & 6.9024 & -2.0532 \\ 15.9178 & 126.3875 & -106.7138 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -120.5489 & 485.6371 & 164.0216 \\ -0.6368 & -32.7339 & 8.5105 \\ -85.5748 & -665.5708 & 544.8643 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0.1947 & -1.0040 & -0.3470 \\ 0.0037 & 0.0681 & -0.0156 \\ 0.1841 & 1.3995 & -1.1048 \end{pmatrix} \times 10^3$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -0.1444 & 0.9396 & 0.3338 \\ -0.0057 & -0.0625 & 0.0138 \\ -0.1848 & -1.3627 & 1.0353 \end{pmatrix} \times 10^3, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 43.2658 & -335.2822 & -121.1661 \\ 3.1253 & 22.9693 & -4.9550 \\ 72.3623 & 511.4675 & -369.7696 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0.4412 & -0.0026 & -0.0254 \\ 0.0354 & 0.5204 & -0.0087 \\ -0.0471 & 0.3558 & 0.5210 \end{pmatrix}$$

Matrices  $B_j$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{pmatrix} -1.1003 & 0.7929 & 0.3777 \\ 0.0617 & 0.5755 & 0.1169 \\ -0.0470 & -0.2363 & 1.5299 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 44.0344 & 122.2789 & -14.1984 \\ 7.0243 & -11.0918 & 14.4880 \\ 50.8487 & -128.2938 & 320.7654 \end{pmatrix} \\
 B_3 &= \begin{pmatrix} -0.1944 & -0.6379 & 0.0433 \\ -0.0328 & 0.0600 & -0.0715 \\ -0.2587 & 0.6670 & -1.6587 \end{pmatrix} \times 10^3, & B_4 &= \begin{pmatrix} 0.2430 & 1.2760 & -0.0462 \\ 0.0644 & -0.1180 & 0.1445 \\ 0.5287 & -1.3791 & 3.4280 \end{pmatrix} \times 10^3 \\
 B_5 &= \begin{pmatrix} -0.0885 & -1.1601 & 0.0115 \\ -0.0592 & 0.1092 & -0.1358 \\ -0.5074 & 1.3148 & -3.2489 \end{pmatrix} \times 10^3, & B_6 &= \begin{pmatrix} -0.0128 & 0.4023 & 0.0033 \\ 0.0215 & -0.0374 & 0.0496 \\ 0.1914 & -0.4814 & 1.1763 \end{pmatrix} \times 10^3 \\
 B_7 &= \begin{pmatrix} -1.1713 & 0.0450 & 0.2243 \\ 0.0799 & 0.5809 & 0.0942 \\ -0.2549 & -0.5926 & 3.0868 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Matrices  $K_j$  pour un vecteur de défaut  $F = [1 \ 0 \ 0]^T$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{pmatrix} 0.6663 & 0 & -0.3041 \\ 0.0150 & 0 & -0.0572 \\ -0.0172 & 0 & 0.2560 \\ 8.9932 \times 10^{-7} & 0 & -7.1218 \times 10^{-7} \end{pmatrix}, & K_2 &= \begin{pmatrix} 35.5841 & 0 & -36.2347 \\ 0.1270 & 0 & -2.4444 \\ 21.7830 & 0 & -130.0642 \\ 8.3810 \times 10^{-7} & 0 & -6.6695 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \\
 K_3 &= \begin{pmatrix} -143.8215 & 0 & 200.2627 \\ -2.1831 & 0 & 10.1451 \\ -116.5421 & 0 & 661.2573 \\ 9.3783 \times 10^{-7} & 0 & -6.9896 \times 10^{-7} \end{pmatrix}, & K_4 &= \begin{pmatrix} 243.6176 & 0 & -446.0330 \\ 7.8905 & 0 & -19.4836 \\ 263.4774 & 0 & -1.4117 \times 10^3 \\ 8.4298 \times 10^{-7} & 0 & -6.6690 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \\
 K_5 &= \begin{pmatrix} -193.4364 & 0 & 463.0827 \\ -11.1942 & 0 & 18.5535 \\ -284.7824 & 0 & 1.4271 \times 10^3 \\ 8.5434 \times 10^{-7} & 0 & -6.9896 \times 10^{-7} \end{pmatrix}, & K_6 &= \begin{pmatrix} 62.1699 & 0 & -184.2103 \\ 6.1130 & 0 & -7.2484 \\ 121.6514 & 0 & -558.0424 \\ 6.7022 \times 10^{-7} & 0 & -5.5183 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \\
 K_7 &= \begin{pmatrix} 0.3383 & 0 & 0.1074 \\ 2.3482 \times 10^{-3} & 0 & 21.2326 \times 10^{-3} \\ -0.3684 & 0 & 1.1766 \\ 8.9820 \times 10^{-7} & 0 & -7.1121 \times 10^{-7} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Matrices  $K_j$  pour un vecteur de défaut  $F = [0 \ 1 \ 0]^T$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{pmatrix} 0.6954 & -0.7069 & 0 \\ -1.1278 \times 10^{-3} & 0.2990 & 0 \\ -11.3542 \times 10^{-3} & 0.1764 & 0 \\ -3.1547 \times 10^{-5} & -4.9406 \times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}, & K_2 &= \begin{pmatrix} 38.9388 & -58.1434 & 0 \\ -0.1276 & 4.4628 & 0 \\ 17.0758 & 82.6757 & 0 \\ 6.9342 \times 10^{-5} & 1.0204 \times 10^{-3} & 0 \end{pmatrix} \\
 K_3 &= \begin{pmatrix} -162.0358 & 319.5950 & 0 \\ -0.9691 & -21.4814 & 0 \\ -91.9862 & -435.4859 & 0 \\ 1.9191 \times 10^{-5} & 2.9529 \times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}, & K_4 &= \begin{pmatrix} 283.0694 & -697.8027 & 0 \\ 5.2561 & 46.9645 & 0 \\ 209.3752 & 966.2187 & 0 \\ 3.5039 \times 10^{-5} & 5.2213 \times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix} \\
 K_5 &= \begin{pmatrix} -233.2794 & 704.4033 & 0 \\ -8.5758 & -46.6604 & 0 \\ -227.9262 & -1.0137 \times 10^3 & 0 \\ 1.1388 \times 10^{-4} & 1.6783 \times 10^{-3} & 0 \end{pmatrix}, & K_6 &= \begin{pmatrix} 77.7121 & -275.0765 & 0 \\ 5.0731 & 18.5601 & 0 \\ 98.3034 & 416.5143 & 0 \\ 9.8984 \times 10^{-5} & 1.4689 \times 10^{-3} & 0 \end{pmatrix} \\
 K_7 &= \begin{pmatrix} 0.3161 & 0.3329 & 0 \\ -12.5148 \times 10^{-3} & 0.2681 & 0 \\ -0.3404 & -0.4086 & 0 \\ 3.1325 \times 10^{-5} & 4.6642 \times 10^{-4} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 4.6 Conclusion

Une approche générale sur le diagnostic des défauts capteur conçue pour les systèmes polytopiques LPV a été proposée dans ce chapitre. Cette méthode a été développée en utilisant un filtre polytopique LPV conçu pour détecter, isoler et estimer de multiples défauts capteur à travers une représentation polytopique LPV. Même si une synthèse d'un filtre unique n'est pas toujours possible, un banc de filtres polytopiques LPV dédiés a été développé pour permettre une détection, isolation et estimation de défaut capteur avec un facteur de qualité. Afin de garantir la stabilité de ce filtre, une analyse a été réalisée en utilisant des LMI dans un ensemble convexe. L'efficacité et les performances du filtre polytopique LPV ont été démontrées sur un processus réel : un enrouleur de bandes.



# Conclusion générale

Le travail de thèse exposé dans ce mémoire apporte une contribution dans le domaine des observateurs pouvant s'appliquer sur des systèmes non linéaires. L'étude que nous avons menée au cours de cette thèse a porté sur le développement et l'élaboration des techniques d'observation d'état pour des classes de systèmes non linéaires, et leur application à la détection et l'isolation des défauts. La conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires est une tâche assez difficile. Dans ce cadre, nous avons présenté une contribution essentielle au niveau de la définition des conditions d'existence et de synthèse d'estimateurs d'état pour les systèmes affines en l'état avec injection de sortie.

Pour entamer notre étude, nous avons commencé par développer une condition suffisante pour la synthèse d'un observateur à entrées inconnues. Ce résultat donné a été basé sur l'existence d'un plus grand sous-système détectable, unique et non affecté par les entrées inconnues. Cette approche a été illustrée par des exemples et des simulations satisfaisantes.

Néanmoins, il reste à étendre ce résultat pour obtenir une condition nécessaire et suffisante.

Dans un deuxième temps, nous avons traité le problème de transformation d'un système non linéaire en un autre système en cascade pour lequel un observateur peut être conçu. Nous avons tout d'abord étendu le résultat de (Hammouri and Gauthier 1988) aux systèmes affines en l'état avec injection de sortie par des conditions nécessaires et suffisantes. Nous avons ainsi développé un algorithme pour calculer le système de coordonnées approprié, dans le cas de deux sorties, permettant de réaliser la transformation du système d'origine au système désiré.

Cependant, il reste à appliquer cette approche sur un exemple numérique et à donner une extension de l'algorithme de calcul, établi pour assurer la transformation d'un système non linéaire en un système en cascade, mais dans le cas multi-sorties.

Le dernier chapitre a été consacré à une application pratique au diagnostic de défauts. Nous avons présenté le problème de détection et isolation de défauts pour le système polytopique LPV et nous avons développé un module de diagnostic pour les défauts capteur sous une représentation LPV. Cette méthode a été développée en synthétisant un filtre polytopique LPV permettant non seulement de détecter, isoler et estimer le défaut mais aussi d'avoir une

information qualitative supplémentaire. Ce résultat a été appliqué à un processus réel qui est l'enrouleur de bandes pour lequel nous avons pu obtenir des résultats très satisfaisants.

# Annexe A

## Notions d'algèbre linéaire

Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces de  $\mathcal{X}$ .

1. Le plus petit sous-espace de  $\mathcal{X}$  contenant à la fois  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est :

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$$

2. Le plus grand sous-espace de  $\mathcal{X}$  contenu à la fois dans  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  est :

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{x : x \in \mathcal{F} \text{ et } x \in \mathcal{G}\}$$

3. Soit l'application  $C : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$

- $\mathcal{X}$  est le domaine de  $C$
- $\mathcal{Y}$  est le co-domaine de  $C$

4. Le sous-espace nul de  $C$  est :

$$\ker C = \{x : x \in \mathcal{X} \text{ et } Cx = 0\} \subseteq \mathcal{X}$$

5. Le sous-espace image de  $C$  est :

$$\text{Im}C = \{y : y \in \mathcal{Y} \text{ et } \exists x \in \mathcal{X}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

6. L'application  $C$  est dite

- injective si  $\ker C = 0$
- surjective si  $\text{Im}C = \mathcal{Y}$

7. Image d'un sous-espace  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$  sous une application

$$C\mathcal{F} = \{y : y \in \mathcal{Y} \text{ et } \exists x \in \mathcal{F}, y = Cx\} \subseteq \mathcal{Y}$$

8. Image inverse d'un sous-espace  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{Y}$  sous une application

$$C^{-1}\mathcal{G} = \{x : x \in \mathcal{X} \text{ et } Cx \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{X}$$

9. Application d'insertion d'un sous-espace  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$  dans  $\mathcal{X}$

$$V : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{X}$$

$\ker V = 0$ , les applications d'insertion sont injectives.

10. Restriction d'une application  $C$  sur un sous-espace  $\mathcal{V}$  du domaine  $\mathcal{X}$ , ( $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ )

$$\begin{aligned} C &: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \\ V &: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{X} \\ (C : \mathcal{V}) &: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{Y} \end{aligned}$$

la matrice qui correspond à  $(C : \mathcal{V})$  est  $CV$ .

11. Restriction d'une application  $C$  sur un sous-espace  $\mathcal{W}$  du co-domaine  $\mathcal{Y}$ , ( $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Y}$ )

$$\begin{aligned} C &: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \\ W &: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{W} \\ (\mathcal{W} : C) &: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{W} \end{aligned}$$

la matrice qui correspond à  $(\mathcal{W} : C)$  est  $W^{-1}C$ .

12. L'espace dual de  $\mathcal{X}$  est  $\mathcal{X}'$ .

13. L'application duale de  $C : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  est  $C' : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{Y}'$ .

14. L'espace orthogonal (annihilateur) d'un sous-espace  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$

$$\mathcal{G}^\perp = \{x' : x'\mathcal{G} = 0, x' \in \mathcal{X}'\} \subseteq \mathcal{X}'$$

- $0^\perp = \mathcal{X}'$
- $\mathcal{X}^\perp = 0$
- Si  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$  et  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{X}$ , alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} + \mathcal{G})^\perp &= \mathcal{F}^\perp \cap \mathcal{G}^\perp \\ (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})^\perp &= \mathcal{F}^\perp + \mathcal{G}^\perp \\ (\mathcal{F}^\perp)^\perp &= \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \text{ si et seulement si } \mathcal{F}^\perp \supseteq \mathcal{G}^\perp \end{aligned}$$

- Soit  $C : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$  et  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{Y}$ , alors

$$\begin{aligned} (\text{Im}C)^\perp &= \ker C' \\ (\ker C)^\perp &= \text{Im}C' \\ (C\mathcal{F})^\perp &= (C')^{-1}\mathcal{F}^\perp \\ (C^{-1}\mathcal{G})^\perp &= C'\mathcal{G}^\perp \\ C(C^{-1}\mathcal{G}) &= \mathcal{G} \cap \text{Im}C \\ C^{-1}(C\mathcal{F}) &= \mathcal{F} + \ker C \end{aligned}$$

15. Soient les applications d'insertion :

$$\begin{aligned} F &: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{X} \\ G &: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{X} \end{aligned}$$

$F^\perp$  est une solution de rang maximal de  $F^\perp F = 0$

$G^\perp$  est une solution de rang maximal de  $G^\perp G = 0$

alors

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} = \text{Im}(F \ G)$$

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \ker \begin{pmatrix} F^\perp \\ G^\perp \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\mathcal{F} = \ker(F^\perp \ A)$$

16. L'équation matricielle :

$$BX = C$$

admet une solution pour  $X$  si et seulement si  $\text{Im}C \subseteq \text{Im}B$  (donc si  $B$  est surjective).

17. L'équation matricielle :

$$XB = C$$

admet une solution pour  $X$  si et seulement si  $\ker B \subseteq \ker C$  (donc si  $B$  est injective).



# Annexe B

## Outils géométriques des systèmes linéaires et non linéaires

### B.1 Outils géométriques des systèmes linéaires

Nous allons rappeler dans cette section quelques éléments de la théorie géométrique des applications d'un espace dans lui-même (endomorphismes), pour plus de détails nous pourrions se reporter aux livres de (Wonham 1985) et de (Basile and Marro 1992).

Soit le système linéaire invariant dans le temps de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où l'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , l'entrée  $u \in \mathbb{R}^m$  et la sortie  $y \in \mathbb{R}^p$ .

**Définition 27 (Classe d'équivalence)** (Wonham 1985) Soit un sous-espace  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ . Deux vecteurs  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  sont dits équivalents modulo  $V$ , si  $x - x' \in V$ . Pour  $x$  donné, la classe d'équivalence de  $x$  notée  $\bar{x}$  est associée à l'ensemble  $\{y/y \in \mathbb{R}^n; y - x \in V\}$ .

**Définition 28 (Espace quotient)** (Wonham 1985) L'ensemble de toutes les classes d'équivalence avec les deux opérations : addition et multiplication par un scalaire, forment un espace vectoriel linéaire appelé espace quotient et noté  $(\mathbb{R}^n/V)$ .

Cette notion d'espace quotient permet de donner une base rigoureuse pour l'étude de ce qui se passe en "dehors" de  $V$ . Pour passer de l'espace initial à l'espace quotient, nous définissons la projection canonique de la manière suivante :

**Définition 29 (Projection canonique)** (Wonham 1985)  $V$  étant un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , l'application :

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^n &\longrightarrow (\mathbb{R}^n/V) \\ x &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

est appelée projection canonique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $(\mathbb{R}^n/V)$ .

Par définition, le noyau de la projection  $P$  correspond au sous-espace  $V$  :

$$\ker P = V \quad (\text{B.2})$$

et la dimension de l'espace quotient obtenu par application de cette projection est définie par :

$$\dim(\mathbb{R}^n/V) = n - \dim(V) \quad (\text{B.3})$$

Nous introduisons dans la suite la notion d'invariance. Cette notion joue un rôle primordial dans la théorie de la commande géométrique des systèmes et en particulier dans le rejet de perturbation.

**Définition 30 (Sous-espace invariant)** (Wonham 1985) Soit  $A$  une application linéaire  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , le sous-espace  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  est dit  $A$ -invariant si  $AV \subseteq V$ .

Cette définition a une interprétation très claire. Considérons le système dynamique :

$$\dot{x} = Ax \quad (\text{B.4})$$

Pour tels systèmes, il est clair que si  $x(0) \in V$ , alors  $x(t) \in V$ ,  $\forall t \geq 0$ . Autrement dit, toute trajectoire d'état partant d'un espace  $A$ -invariant sera entièrement contenue dans cet espace.

Soit une application  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $V$  un sous-espace  $A$ -invariant ( $AV \subseteq V$ ) et  $P$  la projection canonique de  $\mathbb{R}^n$  dans  $(\mathbb{R}^n/V)$ . Alors, il existe une application unique :

$$\bar{A} : (\mathbb{R}^n/V) \rightarrow (\mathbb{R}^n/V)$$

telle que :

$$\bar{A}P = PA \quad (\text{B.5})$$

Nous disons que  $\bar{A}$  est l'application induite par  $A$  sur  $(\mathbb{R}^n/V)$ .

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ (\mathbb{R}^n/V) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n/V) \\ & \bar{A} & \end{array}$$

Il est simple de voir que  $PAV = \bar{A}PV = \bar{A}P \ker P = 0$ .

**Proposition 8** Etant donné  $E$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un plus grand (respectivement un plus petit) sous-espace  $A$ -invariant contenu dans  $E$  (respectivement contenant  $E$ ).

Dans cet énoncé, le plus petit sous-espace  $A$ -invariant contenant  $E$  signifie que tout autre  $A$ -invariant contenant  $E$  contient le précédent. En se basant sur la notion d'invariance, nous pouvons définir deux sous-espaces importants dans la théorie de la commande géométrique des systèmes :

**Définition 31 (Sous-espace inobservable)** (Wonham 1985) Le plus grand sous-espace  $A$ -invariant contenu dans  $\mathcal{K} = \ker C$  défini par :

$$\mathcal{K} \cap A^{-1}\mathcal{K} \cap \dots \cap A^{-n+1}\mathcal{K} \quad (\text{B.6})$$

$A^{-i}\mathcal{K} = \{x/A^i x \in \mathcal{K}\}$ , est le sous-espace inobservable de la paire  $(C, A)$  du système (B.1).

**Définition 32 (Sous-espace commandable)** (Wonham 1985) *Le plus petit sous-espace  $A$ -invariant contenant  $\mathcal{B} = \text{Im}B$ . Ce dernier coïncide avec :*

$$\mathcal{B} + A\mathcal{B} + \dots + A^{n-1}\mathcal{B} \quad (\text{B.7})$$

où  $(A, B)$  est donnée par le système (B.1).

Nous pouvons aussi définir une invariance particulière :

**Définition 33 (Sous-espace  $(C, A)$ -invariant)** (Wonham 1985) *Un sous-espace  $V$  est dit  $(C, A)$ -invariant si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. Il existe une application  $D : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $(A + DC)V \subset V$
2.  $A(V \cap \ker C) \subset V$

Nous pouvons obtenir aussi le sous-espace  $(A, B)$ -invariant, qui représente le dual du sous-espace  $(C, A)$ -invariant de la même façon où, dans ce cas, nous sommes amené à trouver une application  $F$  qui assure l'invariance  $(A + BF)V \subset V$  ou  $AV \subseteq V + \mathcal{B}$ .

En utilisant la première condition de la définition 33, nous sommes amené à trouver une injection de sortie  $D$  telle que le sous-espace  $V$  soit  $(A + DC)$ -invariant. Ce qui signifie que  $V$  est invariant sous la dynamique du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + DC)x = Ax + Dy \\ y &= Cx \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

obtenu à partir du système (B.1) par une injection de la sortie  $Dy$ .

Introduisons maintenant la notion des sous-espaces  $(C, A)$ -inobservables. Considérons donc une application de sortie

$$L : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^{p'}, \quad p' \leq p$$

et une injection de sortie

$$D : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

**Définition 34 (Sous-espace  $(C, A)$ -inobservable)** (Wonham 1985) *Les sous-espaces  $(C, A)$ -inobservables sont de la forme :*

$$\ker LC \cap (A + DC)^{-1} \ker LC \cap \dots \cap (A + DC)^{-n+1} \ker LC \quad (\text{B.9})$$

où  $A^{-i} \ker LC = \{x/A^i x \in \ker LC\}$ .

**Remarque 8** *Si  $W$  est un sous-espace  $(C, A)$ -inobservable, alors il est aussi l'espace d'inobservabilité de :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + DC)x \\ \bar{y} &= LCx \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

### Algorithme de calcul du plus petit sous-espace $(C, A)$ -invariant

Notons par  $\mathbb{I}(C, A, \mathcal{E})$  l'ensemble de tous les sous-espaces  $(C, A)$ -invariants contenant un sous-espace  $\mathcal{E} = \text{Im}E$  donné.  $\mathbb{I}(C, A, \mathcal{E})$  n'est pas vide : il contient  $\mathbb{R}^n$  et la limite de la suite suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_0 &= \mathcal{E} \\ \mathcal{W}_{i+1} &= \mathcal{W}_i + A(\mathcal{W}_i \cap \ker C); \quad i \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Il existe un entier  $i^* \geq 0$  tel que pour tout  $i \geq i^*$  ;  $\mathcal{W}_{i+1} = \mathcal{W}_i = \mathcal{W}^*$ . Nous pourrions aisément vérifier que  $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}^* + A(\mathcal{W}^* \cap \ker C)$ . Ce qui signifie que  $\mathcal{W}^* = \text{Im}W^*$  est  $(C, A)$ -invariant. Par construction, il contient  $\mathcal{E}$ .

$\mathbb{I}(C, A, \mathcal{E})$  est fermé sous intersection :

$$\forall \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in \mathbb{I}(C, A, \mathcal{E}), \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$$

$$A(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \cap \ker C) \subset \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$$

il admet alors un minimum noté  $\mathcal{W}^*$  donné par l'algorithme (B.11) (i.e.  $\mathcal{W}^* \in \mathbb{I}(C, A, \mathcal{E})$  et  $\forall \mathcal{W} \in \mathbb{I}(C, A, \mathcal{E}), \mathcal{W} \supset \mathcal{W}^*$ ).

### Algorithme de calcul du plus petit du sous-espace $(C, A)$ -inobservable

Soit  $\mathcal{W}^*$  le plus petit sous-espace  $(C, A)$ -invariant contenant un sous-espace  $\mathcal{E}$  donné et notons  $\mathbb{S}(C, A, \mathcal{E})$  l'ensemble de tous les sous-espaces  $(C, A)$ -inobservables contenant un sous-espace  $\mathcal{E}$  donné. Considérons l'algorithme :

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 &= \mathcal{W}^* + \ker C \\ \mathcal{S}_{i+1} &= \mathcal{W}^* + (A^{-1}\mathcal{S}_i \cap \ker C) \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Cette suite est décroissante ( $\mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_1 \supset \dots \supset \mathcal{S}_i \supset \mathcal{S}_{i+1} \supset \mathcal{W}^*$ ). Il existe  $k$  tel que quelque soit  $l \geq k$ ,  $\mathcal{S}_l = \mathcal{S}_k$ . Posons  $k^*$  le plus petit entier tel que  $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_{k^*}$ , quelque soit  $k \geq k^*$ , alors  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_{k^*}$ . Nous pourrions remarquer que  $\mathcal{S}^* \in \mathbb{S}(C, A, \mathcal{E})$ . Il suffit pour cela de choisir  $L$  telle que  $\mathcal{W}^* + \ker C = \ker LC$  et  $D$  telle que  $(A + DC)\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}^*$  puisque  $\mathcal{S}^*$  est un  $(C, A)$ -invariant. Il s'en suit que  $\mathbb{S}(C, A, \mathcal{E})$  n'est pas vide. En effet,  $\mathcal{S}^*$  est le plus petit élément de  $\mathbb{S}(C, A, \mathcal{E})$ , c'est à dire le plus petit sous-espace  $(C, A)$ -inobservable contenant un sous-espace  $\mathcal{E}$  donné (une démonstration utilisant la notion duale est présentée dans (Wonham 1985)).

**Remarque 9**  $\mathbb{S}(C, A, \mathcal{E}) \subset \mathbb{I}(C, A, \mathcal{E})$ .

**Proposition 9** *Un sous-espace  $W$  est  $(C, A)$ -invariant si et seulement s'il existe des matrices  $E$  et  $F$  telles que l'équation  $\dot{w}(t) = Fw(t) + Ey(t)$  avec  $w(0) = Px(0)$  implique  $w(t) = Px(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .  $P$  étant la projection canonique de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/W$ .*

Nous définissons les matrices  $F$  et  $E$  telles que  $E = -PD$  et  $F$  est la matrice induite par  $(A + DC)$  sur  $\mathbb{R}^n/W$ .

## B.2 Outils géométriques des systèmes non linéaires

Les outils géométriques introduits dans le cas des systèmes linéaires peuvent être appliqués aux systèmes non linéaires en tenant compte des termes non linéaires présents dans l'équation d'état. Lorsqu'il s'agit de classes particulières de systèmes non linéaires tels que les systèmes bilinéaires ou plus généralement les systèmes affines en l'état, nous obtenons des outils géométriques très proches de ceux des systèmes linéaires. Pour les systèmes non linéaires appartenant à des classes plus générales, nous pouvons faire recours aux résultats donnés dans (Persis and Isidori 2000), (Persis and Isidori 2001) et (Hammouri *et al.* 1994), (Hammouri *et al.* 2001) qui utilisent des notions de géométrie différentielle.

Si pour les systèmes linéaires, l'approche géométrique permettant de construire des observateurs à entrées inconnues utilise le concept de l'invariance de sous espaces vectoriels, pour les systèmes non linéaires, ce concept sera remplacé par les notions de distributions invariantes que nous introduisons ci-dessous.

Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , un champ de vecteur sur  $V$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Si  $X, Y$  sont deux champs de vecteurs sur  $V$ , leur crochet de Lie est le champ sur  $V$ , dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est donnée par  $\sum_{j=1}^n (X_j \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i})$  où  $X_i$  et  $Y_i$  sont les  $i^{\text{èmes}}$  composantes de  $X$  et  $Y$ .

Soit  $\mathcal{F} = X^i$ ;  $i \in I$  une famille de champs de vecteurs, une distribution  $\Delta$  associée à  $\mathcal{F}$  est la famille  $(\Delta_x)_{\{x \in V\}}$  où  $\Delta_x$  est l'espace vectoriel engendré par l'ensemble  $X^i(x)$ ;  $X^i \in \mathcal{F}$ .

Si  $X$  est un champ de vecteurs, nous noterons  $[X, \Delta]$  la distribution associée aux champs  $[X, X^i]$ .  $\Delta$  étant une distribution comme ci-dessus, elle est dite involutive si pour tout  $X^i$ , nous avons  $[X^i, \Delta] \subset \Delta$ .

**Définition 35** Une distribution  $\Delta$  est dite invariante par rapport à un champ  $X$  si :

$$[X, \Delta] \subset \Delta$$

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

L'état  $x(t) \in V \subset \mathbb{R}^n$ , la sortie  $y \in \mathbb{R}^p$  et l'entrée  $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathcal{U}$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^m$ .  $f, g_1, \dots, g_m$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^{\text{infy}}$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Une distribution  $\Delta$  est invariante par rapport à la dynamique du système (B.13), si elle l'est par rapport aux champs  $f, g_1, \dots, g_m$ .

Dans le cas linéaire,  $f(x) = Ax$  et  $\sum_{i=1}^m u_i g_i(x) = Bu$ , nous vérifions aisément que cette notion correspond à celle des sous-espaces  $A$ -invariants.

Une utilité de cette notion est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 10** (Isidori 1995), (Nijmeijer and Schaft 1990) Soit une distribution involutive et régulière  $\Delta$  de dimension  $k$  sur un ouvert  $O$ . Supposons que  $\Delta$  est invariante par rapport à

$f, g_1, \dots, g_m$ . Alors, pour tout  $x \in O$ , il existe un voisinage ouvert  $O_x$  de  $x$ , et un système de coordonnées  $z = \phi(x)$  défini sur  $O_x$ , tels que le système (B.13) se met sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}^1 &= \bar{f}^1(z) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{g}_i^1(z) \\ \dot{z}^2 &= \bar{f}^2(z^2) + \sum_{i=1}^m u_i \bar{g}_i^2(z^2) \\ y &= \bar{h}(z) = h \circ \phi^{-1}(z) \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

où  $z^1 = (z_1, \dots, z_k)^T$ ,  $z^2 = (z_{k+1}, \dots, z_n)^T$  et  $z = (z^{1T}, z^{2T})^T$ .

Nous constatons que le système (B.14) présente une forme découplée : la dynamique de  $z^2$  est indépendante de  $z^1$ . Cette propriété est utilisée pour le rejet de perturbation ((Isidori 1995)). Etant donnée une distribution  $\Delta_0$ , soit  $\mathcal{D}((f, g_1, \dots, g_m), \Delta_0)$  la famille des distributions invariantes par rapport à  $f, g_1, \dots, g_m$ , et contenant  $\Delta_0$ . Si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont deux distributions de  $\mathcal{D}((f, g_1, \dots, g_m), \Delta_0)$ , alors  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  est encore une distribution de  $\mathcal{D}((f, g_1, \dots, g_m), \Delta_0)$ . De plus, cette famille n'est pas vide. Elle admet donc un plus petit élément que nous noterons  $\langle f, g_1, \dots, g_m \mid \Delta_0 \rangle$ .

Considérons la suite suivante :

$$\begin{cases} D_0 &= \Delta_0 \\ D_{k+1} &= D_k + \sum_{i=1}^m [g_i, D_k] + [f, D_k] \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

si les distributions sont régulières alors il existe un entier naturel  $k^*$  tel que  $D_{k^*} = D_{k^*+1}$  et de plus :

$$D_{k^*} = \langle f, g_1, \dots, g_m \mid \Delta_0 \rangle$$

Cet algorithme permet donc de trouver ce plus petit élément. Dans le cas linéaire, si nous prenons  $\Delta_0 = \text{Im}B$ , l'espace  $\langle f, g_1, \dots, g_m \mid \Delta_0 \rangle$  est :

$$\langle A, \mathcal{B} \rangle = \text{Im}(B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

c'est-à-dire le sous-espace de commandabilité du système linéaire correspondant.

Caractérisons maintenant les distributions invariantes par rapport à la dynamique du système (B.13) qui restent invariantes après un retour d'état.

**Définition 36 (Distribution (f,g)-invariante)** Une distribution  $\Delta$  est dite (f, g)-invariante si nous avons :

$$\begin{aligned} \forall X \in \Delta, \quad [f, X] &\in \Delta + \mathcal{G} \\ [g_i, X] &\in \Delta + \mathcal{G} \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

où  $\mathcal{G} = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ .

Cette définition est équivalente à :

$\exists u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tel que  $\Delta$  soit invariante par rapport aux champs  $\{f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x), g_1, \dots, g_m\}$  ou encore  $\Delta$  est invariante par rapport à la dynamique du système en boucle fermée.

Dans le cas linéaire,  $f(x) = Ax$  et  $\sum_{i=1}^m u_i g_i(x) = Bu$ , cette notion correspond à celle d'un sous-espace (A, B)-invariant  $V$  :

$$AV \subset V + B$$

La notion duale des (A, B)-invariants est celle de sous-espaces (C, A)-invariants donnée dans la définition 33. Pour étendre cette notion aux systèmes non linéaires, nous introduisons la notion de (h, f)-invariance (notion duale de (f, g)-invariance).

**Définition 37 (Distribution  $(h, (f, g))$ -invariante)** Une distribution  $D$  est dite  $(h, (f, g))$ -invariante sur un ouvert  $O$  si :

$$[f(x), D(x) \cap \ker dh(x)] \subset D(x), \quad \forall x \in O \quad (\text{B.16})$$

$$[g_i(x), D(x) \cap dh(x)] \subset D(x), \quad \forall x \in O \quad (\text{B.17})$$

où  $\ker dh = \{X, L_X h = 0\}$  et  $L_X h = \begin{pmatrix} L_X h_1 \\ \vdots \\ L_X h_p \end{pmatrix}$ , où  $h_1, \dots, h_p$  sont les composantes de  $h$  et

$L_X h_i$  est la dérivée de Lie de  $h_i$  donnée par  $L_X h_i = X_1 \frac{\partial h_i}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial h_i}{\partial x_n}$ .

Dans le cas linéaire, nous obtenons  $[f(x), D(x) \cap \ker dh(x)] = [Ax, D \cap \ker C] = A(D \cap \ker C) \subset D$ , ce qui correspond à la définition d'un sous-espace  $(C, A)$ -invariant.

Pour terminer cette partie, notons par  $\mathbb{I}(h, (f, g), E)$  l'ensemble des distributions  $(h, (f, g))$ -invariantes contenant une distribution  $E$  donnée. Il est facile de vérifier que l'intersection  $D_1 \cap D_2$  de deux distributions  $D_1$  et  $D_2$  de cet ensemble est encore une distribution  $(h, (f, g))$ -invariante contenant  $E$ . De plus, cet ensemble n'est pas vide car il contient  $\mathbb{R}^n$ . Il admet un plus petit élément  $D^*$  que nous construisons à partir de la suite :

$$\begin{cases} D_0 &= E \\ D_{k+1} &= \overline{D}_k + \sum_{i=1}^m [g_i, \overline{D}_k \cap \ker dh] + [f, \overline{D}_k \cap \ker dh] \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

où  $\overline{D}_k$  est la plus petite distribution involutive contenant  $D_k$  (c'est-à-dire sa fermeture involutive). La limite involutive de cette suite est donnée par :

$$D^* = \sum_{k \geq 0} \overline{D}_k$$

$D^*$  est la plus petite distribution involutive  $(h, f)$ -invariante contenant  $E$ .

Dans la suite, nous allons expliciter ces notions d'invariance et ce qui en découle comme résultats pour les systèmes affine en l'état. Ces systèmes sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(u(t))x(t) + B(u(t)) \\ y(t) &= C(u(t))x(t) \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Ici,  $A(u)$  est une matrice  $n \times n$  continue en  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $B(u)$  est un  $n$ -vecteur continue en  $u$ .

Pour des raisons qui vont suivre, nous considérons que des distributions plates, c'est à dire telles que  $\Delta_x = V$ , où  $V$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Nous utiliserons dans la suite la terminologie de sous-espace invariant au lieu de distribution invariante.

**Définition 38** Nous dirons qu'un espace  $V$  est  $(C, A(u))$ -invariant si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

$$i) \quad \forall u \in \mathbb{R}^m, A(u)(V \cap \ker C) \subset V$$

$$ii) \quad \text{Il existe une matrice } n \times p \text{ continue en } u \text{ telle que } (A(u) + D(u)C)V \subset V$$

Cette définition coïncide avec celle des distributions  $(h, (f, g))$ -invariantes dans le cas des systèmes affine en l'état.

Notons par  $\mathbb{I}(C, A(u); \mathcal{W})$  l'ensemble de tous les sous-espaces  $(C, A(u))$ -invariants contenant un sous-espace donné  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$ , nous avons alors :

**Proposition 11 (Sous-espace  $(C, A(u))$ -invariant)** (Hammouri et al. 2001), (Hammouri and Tmar 2010)

1. Si  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont deux sous-espaces  $(C, A(u))$ -invariants, alors  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$  est aussi un sous-espace  $(C, A(u))$ -invariant.
2. i)  $\mathbb{I}(C, A(u); \mathcal{W})$  admet un minimum unique (au sens de l'inclusion) noté  $\mathcal{W}^*$ .  
ii) Soit  $\{A_1, \dots, A_N\}$  un ensemble de matrices  $n \times n$  qui engendrent l'espace vectoriel engendré par  $\{A(u), u \in \mathbb{R}^m\}$ , alors  $\mathcal{W}^*$  est la limite de la séquence décroissante suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0 &= \mathcal{W} \\ \mathcal{V}_{i+1} &= \mathcal{V}_i + \sum_{j=0}^N A_j(\mathcal{V}_i \cap \ker C) \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Soit  $D(u)$  une matrice  $n \times p$  continue par rapport à  $u$  et considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A(u) + D(u)C)x \\ y &= LCx \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Nous notons par  $\mathcal{O}_{NL}(LC, A(u) + D(u)C)$  l'espace d'observabilité du système (B.21). C'est à dire le plus petit sous espace vectoriel contenant les applications linéaires  $C_i x$  (où  $C_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $C$ ) et tel que si  $\tau(x)$  est une fonction de  $\mathcal{O}_{NL}(LC, A(u) + D(u)C)$ , alors sa dérivée de Lie par rapport au champ  $A(u)x$  reste dans  $\mathcal{O}_{NL}(LC, A(u) + D(u)C)$ . Cet espace coïncide avec l'espace vectoriel engendré par les fonctions linéaires  $C_i A(u_1) \dots A(u_k)x$ , où  $u_1, \dots, u_k$  sont quelconques dans  $\mathbb{R}^m$  et  $1 \leq i \leq p$ . Nous désignons par  $d\mathcal{O}_{NL}(LC, A(u) + D(u)C)$  la codistribution d'observabilité du système (B.21). Dans notre cas celle-ci coïncide avec l'espace vectoriel engendré par, c'est-à-dire la codistribution engendrée par les vecteurs lignes  $C_i A(u_1) \dots A(u_k)$ ,  $1 \leq i \leq p$ .

**Définition 39 (Sous-espace  $(C, A(u))$ -inobservable)** Une sous-espace  $(C, A(u))$ -inobservable est une codistribution de la forme :

$$\ker d\mathcal{O}_{NL}(LC, A(u) + D(u)C) = \left\{ X \mid L_X(\varphi) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{O}_{NL}(LC, A(u) + D(u)C) \right\}$$

Cette codistribution peut être identifiée avec le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  donné par  $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid LCx = 0, LC(A(u_1) + D(u_1)C) \dots (A(u_k) + D(u_k)C)x = 0 \right\}$ ;  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^m$  et  $k \geq 1$ .

**Remarque 10** Tout sous-espace  $(C, A(u))$ -inobservable est un sous-espace  $(C, A(u))$ -invariant. Autrement, si  $\mathcal{V} = \ker d\mathcal{O}_{NL}(LC, A(u) + D(u)C)$ , alors  $(A(u) + D(u)C)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ .

Soit  $\mathcal{W}$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{S}(C, A(u); \mathcal{W})$  l'ensemble de tous les sous-espaces  $(C, A(u))$ -inobservables contenant  $\mathcal{W}$ , nous avons alors :

**Lemme 6** (*Hammouri et al. 2001*), (*Hammouri and Tmar 2010*)  $\mathbb{S}(C, A(u); \mathcal{W})$  admet un minimum unique  $\mathcal{W}^{**}$  qui est la limite de la séquence suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_0 &= \ker LC \\ \mathcal{W}_{j+1} &= \mathcal{W}_j \cap \left[ \bigcap_{i=0}^N (A_i + D_i C)^{-1} \mathcal{W}_j \right] \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

où  $A_1, \dots, A_N$  sont les matrices définies à la proposition précédente.

Un algorithme de calcul qui permet d'obtenir  $\mathcal{W}^{**}$  indépendamment des matrices  $L$  et  $D_i, i = 1, \dots, N$  est défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{W}_0 &= \mathcal{W}^* + \ker C \\ \mathcal{W}_{j+1} &= \mathcal{W}^* + \left[ \bigcap_{i=0}^N A_i^{-1} \mathcal{W}_j \right] \cap \ker C \end{cases} \quad (\text{B.23})$$



# Annexe C

## Notions de géométrie différentielle

### C.1 Champ vectoriel et champ de covecteurs

Soit le système non linéaire multivariable commandé, avec  $m$  entrées  $u_1, \dots, u_m$  et à  $p$  sorties  $y_1, \dots, y_p$  décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_i &= h_i(x) \quad 1 \leq i \leq p. \end{cases}$$

où l'état  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est supposé évoluer le long d'un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Les applications  $f, g_1, \dots, g_m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  sont définies sur un ensemble ouvert  $U$ .  $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$  dénotent les valeurs qu'elles sont supposées avoir en un point spécifique  $x$  de  $U$ .

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}; \quad g_i(x) = \begin{pmatrix} g_{1i}(x_1, \dots, x_n) \\ g_{2i}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_{ni}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Les fonctions définies aussi sur  $U$ ,  $h_1(x), \dots, h_p(x)$  à valeurs réelles, dénotent les valeurs prises en un point spécifique  $x$ . Nous pouvons les représenter par  $h_i(x) = h_i(x_1, \dots, x_n)$ .

Dans la suite, nous supposons que les applications  $f, g_1, \dots, g_m$  et les fonctions  $h_1, \dots, h_p$  sont lisses par rapport à leurs arguments, c'est à dire que toutes les entrées de ces fonctions sont des fonctions à valeurs réelles de  $x_1, \dots, x_n$  avec des dérivées partielles continues à n'importe quel ordre. Occasionnellement, cette hypothèse peut être remplacée par l'hypothèse plus forte d'avoir ces fonctions analytiques sur leur domaine de définition.

Les applications  $f, g_1, \dots, g_m$  sont des applications lisses attribuant à chaque point  $x$  de  $U$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , à savoir  $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ . C'est pour ces raisons que nous faisons fréquemment allusion à des champs vectoriels lisses définis sur  $U$ . Dans pas mal de circonstances, il convient de manipuler - avec le champ vectoriel - aussi des objets duaux appelés : champ de covecteurs, qui sont des applications lisses attribuant à chaque point  $x$  (d'un sous-ensemble  $U$ ) un élément de l'espace dual  $(\mathbb{R}^n)^*$ , ensemble de vecteurs ligne de dimension  $n$ .

Notons que si  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$  est un vecteur colonne représentant un élément de  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , et

$w^* = (w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n)$  est un vecteur ligne représentant un élément de  $V^* \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$ , la "valeur" de  $w^*$  en  $v$  est donnée par le produit :

$$w^*v = \sum_{i=1}^m w_i v_i$$

La plupart du temps, comme il se produit souvent dans la littérature, la valeur de  $w^*$  en  $v$  sera représentée sous la forme d'un produit intérieur, écrit  $\langle w^*, v \rangle$  au lieu de  $w^*v$  simplement.

Un champ de covecteurs ayant une importance spéciale est celui nommé : différentiel ou gradient, d'une fonction à valeurs réelles  $\lambda$  définie sur un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Ce champ de covecteurs, dénoté  $d\lambda$ , est défini comme un vecteur ligne de dimension  $n$  où le  $i^{eme}$  élément est la dérivée partielle de  $\lambda$  par rapport à  $x_i$ . Sa valeur en un point  $x$  est par conséquent

$$d\lambda(x) = \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} \right)$$

c'est à dire le Jacobien de  $\lambda$  noté

$$d\lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

cette forme différentiable de la fonction à valeurs réelles  $\lambda$ , est appelée : différentielle exacte. Considérons maintenant trois types d'opérations différentielles, impliquant les champs vectoriels et les champs de covecteurs, utilisées fréquemment à l'analyse des systèmes non linéaires.

### Le premier type d'opérations différentielles :

Ce type implique une fonction à valeurs réelles  $\lambda$  et un champ vectoriel  $f$ , les deux sont définis sur un sous ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . A partir de ceux-ci, une nouvelle fonction à valeurs réelles est définie, dont la valeur, en chaque point  $x$  de  $U$ , est égale au produit intérieur

$$\langle d\lambda(x), f(x) \rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

Cette fonction est parfois appelée : la dérivée de  $\lambda$  par rapport à  $f$  et elle est souvent notée  $L_f \lambda$ . En d'autres termes, par définition :

$$L_f \lambda(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x)$$

en chaque point  $x$  de  $U$ .

La répétition de cette opération est bien sûr possible. Par conséquent, par exemple, la dérivée de  $\lambda$  d'abord par rapport au champ vectoriel  $f$  et ensuite par rapport au champ vectoriel  $g$  définie une nouvelle fonction :

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda)}{\partial x} g(x)$$

Si  $\lambda$  est différentiable  $k$  fois par rapport à  $f$ , alors la notation  $L_f^k \lambda$  est utilisée :

$$L_f^k \lambda(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \lambda)}{\partial x} f(x)$$

avec  $L_f^0 \lambda(x) = \lambda(x)$ .

### Le second type d'opérations différentielles :

Ce type fait intervenir deux champs vectoriels  $f$  et  $g$ , les deux définis sur un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . A partir de ceux-ci, un nouveau champ vectoriel lisse est construit, noté  $[f, g]$  et défini comme suit :

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

en chaque  $x$  dans  $U$ . Dans cette expression :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dénotent les matrices Jacobiennes des applications  $g$  et  $f$ , respectivement.

Le champ vectoriel ainsi créé est appelé : produit de Lie ou crochet de Lie de  $f$  et  $g$ . Il est possible de répéter le crochet d'un champ vectoriel  $g$  avec le même champ vectoriel  $f$ . Lorsque nous avons besoin de ceci, et pour éviter une notation de la forme  $[f, [f, \dots, [f, g]]]$ , qui peut générer des confusions, il est préférable de définir cette opération récursive de la manière suivante :

$$ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x)$$

pour tout  $k \geq 1$ , avec  $ad_f^0 g(x) = g(x)$ .

**Proposition 12** *Le crochet de Lie des champs vectoriels admet les propriétés suivantes :*

(i) *Il est bilinéaire sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire si  $f_1, f_2, g_1, g_2$  sont des champs vectoriels, et  $r_1, r_2$  des nombres réels, alors :*

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2]$$

(ii) *Il est inversement commutatif, c'est à dire :*

$$[f, g] = -[g, f]$$

(iii) *Il satisfait l'identité de Jacobi, c'est à dire, si  $f, g, p$  sont des champs vectoriels, alors :*

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0$$

### Le troisième type d'opérations différentielles :

Ce type à utilisation fréquente implique un champ de covecteur  $\omega$  et un champ vectoriel  $f$ , les deux sont définis sur un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Cette opération produit un nouveau champ de covecteurs, noté  $L_f \omega$  et défini par :

$$L_f \omega(x) = f^T(x) \left( \frac{\partial \omega^T}{\partial x} \right)^T + \omega(x) \frac{\partial f}{\partial x}$$

en chaque point  $x$  de  $U$ . Ce champ de covecteurs est appelé : la dérivée de  $\omega$  par rapport à  $f$ .

**Proposition 13** *Les trois types d'opérations différentielles introduites plus haut sont telles que :*

(i) *si  $\alpha$  est une fonction à valeurs réelles,  $f$  est un champ vectoriel et  $\lambda$  une fonction à valeurs réelles, alors :*

$$L_{\alpha f}\lambda(x) = (L_f\lambda(x))\alpha(x)$$

(ii) *si  $\alpha, \beta$  sont des fonctions à valeurs réelles et  $f, g$  des champs vectoriels et  $\lambda$  une fonction à valeurs réelles, alors :*

$$[\alpha f, \beta g](x) = \alpha(x)\beta(x)[f, g](x) + (L_f\beta(x))\alpha(x)g(x) - (L_g\alpha(x))\beta(x)f(x)$$

(iii) *si  $f, g$  sont des champs vectoriels et  $\lambda$  une fonction à valeurs réelles, alors :*

$$L_{[f, g]}\lambda(x) = L_fL_g\lambda(x) - L_gL_f\lambda(x)$$

(iv) *si  $\alpha, \beta$  sont des fonctions à valeurs réelles,  $f$  est un champ vectoriel et  $\omega$  est un champ de covecteurs, alors :*

$$L_{\alpha f}\beta\omega(x) = \alpha(x)\beta(x)(L_f\omega(x)) + \beta(x)\langle\omega(x), f(x)\rangle d\alpha(x) + (L_f\beta(x))\alpha(x)\omega(x)$$

(v) *si  $f$  est un champ vectoriel et  $\lambda$  une fonction à valeurs réelles, alors :*

$$L_f d\lambda(x) = dL_f\lambda(x)$$

(vi) *si  $f, g$  sont des champs vectoriels et  $\omega$  est un champ de covecteurs, alors :*

$$L_f\langle\omega, g\rangle(x) = \langle L_f\omega(x), g(x)\rangle + \langle\omega(x), [f, g](x)\rangle.$$

## C.2 Changement de coordonnées dans l'espace d'état

La transformation des coordonnées dans l'espace d'état est souvent très utilisée dans le but de mettre en évidence quelques propriétés telles que l'observabilité, ou pour montrer comment nous pouvons résoudre des problèmes de stabilisation ou de découplage.

Dans le cas des systèmes linéaires, seul un changement de coordonnées linéaire est habituellement considéré. Si le système est non linéaire, il est plus important de considérer un changement de coordonnées non linéaire. Un changement de coordonnées non linéaire peut être décrit par :

$$z = \Psi(x)$$

où  $\Psi(x)$  est une fonction de  $n$  variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \psi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \psi_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

ayant les propriétés suivantes :

(i)  $\Psi(x)$  est inversible, c'est à dire qu'il existe une fonction  $\Psi^{-1}(x)$  telle que :

$$\Psi^{-1}(\Psi(x)) = x$$

pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

(ii)  $\Psi(x)$  et  $\Psi^{-1}(z)$  sont des applications lisses, c'est à dire qu'elles admettent des dérivées partielles continues à n'importe quel ordre.

La dérivée par rapport au temps de  $z$  donne :

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} [f(x(t)) + g(x(t))u(t)]$$

Alors, exprimer  $x(t)$  par  $x(t) = \Psi^{-1}(z(t))$  nous donne :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \bar{f}(z(t)) + \bar{g}(z(t))u(t) \\ y(t) &= \bar{h}(z(t)) \end{cases}$$

où

$$\bar{f}(z) = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} f(x) \right]_{x=\Psi^{-1}(z)} ; \bar{g}(z) = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} g(x) \right]_{x=\Psi^{-1}(z)} ; \bar{h}(z) = [h(x)]_{x=\Psi^{-1}(z)}.$$

Ces derniers sont les expressions reliant la nouvelle description du système à sa description originale.

### C.3 Distributions et codistributions

**Définition 40** Une distribution est définie par un ensemble de champ vectoriels noté :

$$\Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_d\}$$

et  $\Delta(x)$  représente la "valeur" de  $\Delta$  au point  $x$ .

Soient deux distributions  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , alors la somme est :

$$(\Delta_1 + \Delta_2)(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x)$$

et l'intersection est définie par :

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2)(x) = \Delta_1(x) \cap \Delta_2(x)$$

La dimension d'une distribution en un point  $x$  de  $U$  est la dimension du sous-espace  $\Delta(x)$ .

Toute matrice  $F$  ayant  $n$  vecteurs ligne dont les éléments sont des fonctions lisses de  $x$ , définit une distribution engendrée par ses colonnes. La valeur d'une telle distribution en chaque point  $x$  est égale à l'image de la matrice  $F(x)$  en ce point :

$$\Delta(x) = \text{Im}(F(x))$$

La dimension de  $\Delta$  en un point  $x^\circ$  est égale au rang de  $F(x^\circ)$ .

La famille des distributions lisses contenues dans  $\Delta$  admet un élément maximal unique par rapport à l'intersection.

**Définition 41 (Singularité)** Une distribution  $\Delta$ , définie sur un ensemble ouvert  $U$ , est non singulière s'il existe un entier  $d$  tel que :

$$\dim(\Delta(x)) = d$$

pour tout  $x$  dans  $U$ . Une distribution singulière, c'est à dire une distribution pour laquelle la condition précédente n'est pas satisfaite, est parfois appelée : distribution à dimension variable. Un point  $x^\circ$  de  $U$  est dit : point régulier de la distribution  $\Delta$ , s'il existe un voisinage  $U^\circ$  de  $x^\circ$  ayant la propriété d'avoir  $\Delta$  non singulière sur  $U^\circ$ . Tout point de  $U$  qui n'est pas un point régulier est dit : point de singularité.

**Lemme 7** Soit  $\Delta$  une distribution lisse et  $x^\circ$  un point régulier de  $\Delta$ . Nous supposons que  $\dim(\Delta(x^\circ)) = d$ . Alors, il existe un voisinage ouvert  $U^\circ$  de  $x^\circ$  et un ensemble  $\{f_1, \dots, f_d\}$  de champs vectoriels lisses défini sur  $U^\circ$  avec la propriété d'avoir :

- (i) les vecteurs  $f_1(x), \dots, f_d(x)$  sont linéairement indépendants en tout  $x$  dans  $U^\circ$ .
- (ii)  $\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), \dots, f_d(x)\}$  pour chaque  $x$  dans  $U^\circ$ .

De plus, tout champ vectoriel lisse  $\tau$  appartenant à  $\Delta$  peut être exprimé sur  $U^\circ$  par :

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) f_i(x)$$

où  $c_1(x), \dots, c_d(x)$  sont des fonctions lisses à valeurs réelles de  $x$ , définies sur  $U^\circ$ .

**Définition 42 (Distribution involutive)** Une distribution  $\Delta$  est involutive si le crochet de Lie  $[\tau_1, \tau_2]$  de toute paire de champs vectoriels  $\tau_1$  et  $\tau_2$  appartenant à  $\Delta$  est aussi un champ vectoriel qui appartient à  $\Delta$ , c'est à dire si :

$$\tau_1 \in \Delta, \tau_2 \in \Delta \implies [\tau_1, \tau_2] \in \Delta.$$

Toute distribution de dimension 1 est involutive.

L'intersection de deux distributions involutives est aussi une distribution involutive.

La somme de deux distributions involutives est en général une distribution non involutive.

La famille de toutes les distributions involutives contenant  $\Delta$  admet un unique minimum (par rapport à l'intersection), à savoir : l'intersection de tous les éléments de la famille.

Dans pas mal de cas, les calculs sont plus simples si, au lieu des distributions, nous considérons leurs duaux, appelés codistributions, qui sont définies de la manière suivante :

$$D = \text{span}\{w_1, \dots, w_d\}$$

où la valeur de  $D$  au point  $x$  de  $U$  est  $D(x)$ . Ainsi, les codistributions sont des sous-espaces de  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

L'orthogonal d'une distribution  $\Delta$ , noté  $\Delta^\perp$ , est une codistribution, et nous avons :

$$\Delta^\perp(x) = \{w^* \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle w^*, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in \Delta(x)\}$$

Inversement, en se donnant une codistribution  $D$ , nous pouvons construire une distribution, notée  $D^\perp$  et appelée orthogonal de  $D$ , où pour chaque  $x$  dans  $U$ , nous avons :

$$D^\perp(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle w^*, v \rangle = 0 \text{ pour tout } w^* \in D(x)\}$$

Tout champ de covecteurs  $\omega$  appartenant à  $D$  peut être exprimé, sur  $U$ , par :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) \omega_i(x)$$

où  $c_1(x), \dots, c_d(x)$  sont des fonctions lisses à valeurs réelles de  $x$ , définies sur  $U^\circ$ .

**Lemme 8** *Soit  $x^\circ$  un point régulier d'une distribution lisse  $\Delta$ . Alors,  $x^\circ$  est un point régulier pour  $\Delta^\perp$  et il existe un voisinage  $U^\circ$  de  $x^\circ$  tel que la restriction de  $\Delta^\perp$  dans  $U^\circ$  est une codistribution lisse.*

## Distribution invariante

**Définition 43** *Une distribution  $\Delta$  est dite invariante sous un champ vectoriel  $f$  si le crochet de Lie  $[f, \tau]$  de  $f$  pour tout champ vectoriel  $\tau$  de  $\Delta$  est aussi un champ vectoriel de  $\Delta$ , c'est à dire si :*

$$\tau \in \Delta \implies [f, \tau] \in \Delta.$$

Dans le but de représenter cette condition d'une façon plus compacte, il convient d'utiliser la notation  $[f, \Delta]$  pour représenter la distribution engendrée par tous les champs vectoriels de la forme  $[f, \tau]$ , avec  $\tau \in \Delta$ , c'est à dire :

$$[f, \Delta] = \text{span}\{[f, \tau], \tau \in \Delta\}$$

avec cette notation, il est possible de dire que la distribution  $\Delta$  est invariante sous un champ vectoriel  $f$  si :

$$[f, \Delta] \subset \Delta$$

Supposons que la distribution  $\Delta$  est non singulière (de dimension  $d$ ). Il est alors possible d'exprimer tout champ vectoriel  $\tau$  de  $\Delta$  sous la forme :

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^d c_i(x) \tau_i(x)$$

Nous pouvons alors vérifier que nous avons :

$$[f, \Delta] \supset \text{span}\{[f, \tau_1], \dots, [f, \tau_d]\}$$

$$\Delta + [f, \Delta] = \text{span}\{\tau_1, \dots, \tau_d, [f, \tau_1], \dots, [f, \tau_d]\}$$

## Construction du minimum des distributions invariantes

Nous notons par :

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle$$

la plus petite distribution qui contient  $\Delta$  qui est invariante sous les champs vectoriels  $\tau_1, \dots, \tau_q$ . L'algorithme qui permet de construire une telle distribution minimale est basé sur l'idée de

partir avec une distribution  $\Delta$  que nous devons inclure, et alors fermer la distribution sous le crochet de Lie. Construisons une séquence de distributions  $\Delta_i$

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \Delta \quad (\text{la distribution de départ}) \\ \Delta_k &= \Delta_{k-1} + \sum_{i=1}^q [\tau_i, \Delta_{k-1}]\end{aligned}$$

Nous nous arrêtons lorsque :

$$\Delta_{k^*} = \Delta_{k^*+1}$$

si un tel  $k^*$  existe, alors :

$$\Delta_{k^*} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle.$$

Pour  $\Delta_i$  singulière,

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | \Delta \rangle = \Delta_{n-1}(x)$$

### Construction du minimum des codistributions invariantes

En utilisant une méthode similaire à celle qui a servi à la construction du minimum des distributions invariantes, nous avons un algorithme qui construit une séquence de codistributions  $D_i$  :

$$\begin{aligned}D_0 &= D \quad (\text{la codistribution de départ}) \\ D_k &= D_{k-1} + \sum_{i=1}^q L_{\tau_i} D_{k-1}\end{aligned}$$

Nous nous arrêtons lorsque :

$$D_{k^*} = D_{k^*+1}$$

si un tel  $k^*$  existe, alors :

$$D_{k^*} = \langle \tau_1, \dots, \tau_q | D \rangle.$$

Pour  $D_i$  singulière,

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_q | D \rangle = D_{n-1}(x)$$

# Bibliographie

- Alwi, H. and C. Edwards (2013). Fault tolerant control of an octorotor using lpv based sliding mode control allocation. In : *Proceedings of the American Control Conference*. Washington. pp. 6505–6510.
- Anstett, F., G. Millerioux and G. Bloch (2009). Polytopic observer design for LPV systems based on minimal convex polytope finding. *Journal of Algorithms and Computational Technology* **3**, 23–43.
- Armeni, S., A. Casavola and E. Mosca (2009). Robust fault detection and isolation for lpv systems under a sensitivity constraint. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **23**(1), 55–72.
- Basile, G. and G. Marro (1969). On the observability of linear, time-invariant systems with unknown inputs. *Journal of Optimization Theory and Applications* **3**(6), 410–415.
- Basile, G. and G. Marro (1992). *Controlled and Conditionned Invariants in Linear System Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Basile, G. and G. Marro (1997). Observer-based fault detection and isolation : Robustness and applications. *Control Eng. Practice* **5**(5), 671–682.
- Basseville, M. (1988). Detecting changes in signals and systems : a survey. *Automatica* **24**(3), 309–326.
- Basseville, M. and Q. Zhang (1999). Local approach to fdi in nonlinear dynamical systems. European Control Conference.
- Basseville, M., M. Abdelghani and A. Benveniste (1999). Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring. *Automatica* **36**(1), 101–109.
- Beard, R.V. (1971). Failure accomodation in linear systems through self-reorganization. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, U.S.A.
- Benlatreche, A., D. Knittel and E. Ostertag (2008). Robust decentralised control strategies for large-scale web handling systems. *Control Engineering Practice* **16**(6), 736–750.
- Besançon, G. (1999). A viewpoint on observability and observer design for nonlinear systems. *New Directions in nonlinear observer design, Lecture Notes in Control and Information Sciences* **244**, 3–22.
- Besançon, G. and H. Hammouri (1996). On uniform observation of nonuniformly observable systems. *Systems and Control Letters* **29**, 9–19.
- Besançon, G., G. Bornard and H. Hammouri (1996). Observer synthesis for a class of nonlinear systems. *European Journal of control* **2**(3), 176–192.

- Bhattacharyya, S. P. (1978). Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control* **23**, 483–484.
- Bokor, J. and G. Balas (2004a). Detection filter design for lpv systems a geometric approach. *Automatica* **40**, 511–518.
- Bokor, J. and G. Balas (2004b). Detection filter design for LPV systems : a geometric approach. *Automatica* **40**, 511–518.
- Bokor, J. and Z. Szabo (2009). Fault detection and isolation in nonlinear systems. *Annual Reviews in Control.* **33**, 113–123.
- Bornard, G. and H. Hammouri (1991). A high gain observer for a class of uniformly observable systems. 30th IEEE Conference on Decision and Control. pp. 1494–1496.
- Bornard, G., F. Celle-Couenne and G. Gilles (1993). Observabilité et observateurs.
- Bornard, G., N. Couenne and F. Celle (1989). Regularly persistent observers for bilinear systems. *In new Trends in Nonlinear Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Science. Springer-Verlag* **122**, 130–140.
- Borne, P., G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella and I. Zambettakis (1992). *Modélisation et identification des processus Tome 1*.
- Boutat, D., A. Benali, H. Hammouri and K. Busawon (2009). New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs. *Automatica* **45**(10), 2187–2193.
- Boutayeb, M. and M. Darouach (2000). Observers design for linear time varying systems. In proceeding of the 39th Conference on Decision and Control. pp. 3183–3187.
- Bruzelius, F. (2004). *Linear Parameter-Varying Systems an approach to gain scheduling*. Department of Signals and Systems, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden.
- Celle, F., D. Kazakos, J.P. Gauthier and G. Sallet (1989). Synthesis of nonlinear observers, a harmonic analysis approach. *Mathematical systems Theory* **22**(1), 291–322.
- Chen, J. and R.J. Patton (1999). Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems. Boston, Dordrecht, London.
- Chen, J., R. J. Patton and H. Y. Zhang (1995). Design of robust structured and directional residuals for fault isolation via unknown input. 3rd European Control Conference. Rome, Italy. pp. 348–353.
- Chiang, L., E. Russell and R. Braatz (2001). Fault detection and diagnosis in industrial systems. Springer-Verlag. New York, USA.
- Chow, L. and A. Willsky (1984). Analytical redundancy and the design of robust failure detection system. *IEEE Transactions on Automatic Control* **29**(7), 603–614.
- Claveau, F., P. Chevrel and K. Knittel (2008). A 2dof gain-scheduled controller design methodology for a multi-motor web transport system. *Control Engineering Practice* **16**(5), 609–622.
- Couenne, N. (1990). Synthèse d'observateurs de systèmes affines en l'état. *Thèse*.
- Darouach, M., M. Zasadzinski and S.J. Xu (1994). Full-order observer for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control* **39**(3), 606–609.
- Deza, F., J.P. Gauthier, E. Busvelle and D. Rakotopara (1992). High gain estimation for nonlinear systems. *Systems and Control Letters* **18**(4), 295–299.

- Ding, SX. (2008). Model-based fault diagnosis techniques design schemes, algorithms and tools. Springer, Berlin Heidelberg.
- Fossard, A. and D. Normand-Cyrot (1993). *Systèmes non linéaires : modélisation - estimation (tome 1)*. Masson. Paris.
- Fossard, AJ. and D. Normand-Cyrot (1995). *Nonlinear systems*. Volume 1 : Modeling and estimation, Chapman and Hall Edition.
- Frank, P. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : a survey and some new results. *Automatica* **26**(3), 459–474.
- Frank, P.M. and J. Wunnenberg (1989). *Robust fault diagnosis using unknown input observer schemes*. *Fault diagnosis in dynamic systems : Theory and application*. Printice-Hall, Englewood Cliffs.
- Frank, P.M. and X. Ding (1997). Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of Process Control* **7**, 403–424.
- Gassmann, V. and D. Knittel (2011). Robust pi-lpv tension control with elasticity observer for roll-to-roll systems. in : Proceedings of the 18th World Congress, IFAC11. Milano, Italy.
- Gauthier, J. P. and I. Kupka (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optimization* **32**(4), 975–994.
- Gauthier, J.P. and G. Bornard (1981). Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control, AC* **26**(4), 922–926.
- Gauthier, J.P., H. Hammouri and S. Othman (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **37**(6), 875–880.
- Gertler, J. J. (1997). Fault detection and isolation using parity relations. *Control Eng. Practice* **5**(5), 653–661.
- Gertler, J. J. and M. M. Kunwer (1995). Optimal residual decoupling for robust fault diagnosis. *International Journal of Control* **61**(2), 395–421.
- Gertler, J.J. (1998). Fault detection and diagnosis in engineering systems. *Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong*.
- Gertler, J.J. and D. Singer (1990). A new structural framework for parity equation based failure detection and isolation. *Automatica* **26**(2), 381–388.
- Glumineau, A., C-H. Moog and F. Plestan (1996). New algebraic-geometric conditions for the linearization by input-output injection. *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(4), 598–603.
- Guan, Y. and M. Saif (1991). A novel approach to the design of unknown inputs observers. *IEEE Trans. on Automatic Control* **36**(5), 632–635.
- Hamdi, H., M. Rodrigues, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. BenHadj Braiek (2012). Fault detection and isolation in linear parameter-varying descriptor systems via proportional integral observer. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **26**, 224–240.
- Hammouri, H. and J. De Leon Morales (1990). Topological properties of observer's inputs analysis of controlled dynamical systems. In Proceedings of the International Conference on Controlled Dynamical Systems. Lyon, France.

- Hammouri, H. and J-P. Gauthier (1988). Bilinearization up to output injection. *Systems and Control Letters* **11**(2), 139–149.
- Hammouri, H. and J-P. Gauthier (1989). The time-varying linearization up to output injection. In Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control. Tampa, Florida.
- Hammouri, H. and J-P. Gauthier (1992). Global time-varying linearization up to output injection. *SIAM Journal on Control and Optimization* **30**(6), 1295–1310.
- Hammouri, H. and M. Deza (1991). Topological properties of observers inputs. *Progress in Systems and Control Theory* **8**, 233–242.
- Hammouri, H. and M. Kinnaert (1996). A new procedure for time-varying linearization up to output injection. *Systems and Control Letters* **28**(1), 151–157.
- Hammouri, H. and N. Marchand (2000). High gain observer for a class of implicit systems. 39th IEEE Conference on Decision and Control. pp. 804–808.
- Hammouri, H. and Z. Tmar (2010). Unknown input observer for state affine systems : A necessary and sufficient condition. *Automatica* **46**(2), 271–278.
- Hammouri, H., M. Kinnaert and E.H. El Yaagoubi (1994). Residual generator synthesis for bilinear systems up to output injection. Vol. 2. Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista Florida USA. pp. 1548–1553.
- Hammouri, H., M. Kinnaert and E.H. El Yaagoubi (1999). Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(10), 1879–1884.
- Hammouri, H., P. Kabore and M. Kinnaert (2000). A differential geometric approach to fault detection and isolation for state affine systems. Vol. 5. In Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. pp. 4347–4352.
- Hammouri, H., P. Kabore and M. Kinnaert (2001). Geometric approach to fault detection and isolation for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(9), 1451–1455.
- Harris, T. J., C. Seppala and L. D. Desborough (1999). A review of performance monitoring and assessment techniques for univariate and multivariate control systems.. *Journal Process of Control* **9**, 1–17.
- Hautus, M. L. J. (1983). *Strong detectability and observers*. Elsevier.
- Hermann, R. and A. Krener (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions On Automatic Control* **AC-22**(5), 728–740.
- Hetel, L., J. Daafouz and C. Iung (2007). Lmi control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems. American Control Conference (ACC). New York City, USA, (CD ROM).
- Isermann, R. (1984). Process fault detection based on modelling and estimation methods. *Automatica* **20**(4), 387–404.
- Isermann, R. (1993). Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing. *Automatica* **29**(4), 815–835.
- Isermann, R. (1994). On the applicability of model-based fault detection for technical processes. *Control Eng. Practice* **2**(3), 439–450.

- Isermann, R. (1997). Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods - an introduction. *Control Eng. Practice* **5**(5), 639–652.
- Isermann, R. and P. Balle (1997). Trends in the application of model based fault detection and diagnosis of technical processes. *Control Engineering Practice* **5**, 709–719.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems : An Introduction*. (3e Edition), Springer Verlag. London Berlin Heidelberg.
- Jazwinski, A.H. (1970). *Stochastic Process and Filtering Theory*. Vol. 64. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, In.. New York.
- Jones, H. (1973). Failure detection in linear systems. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, U.S.A.
- Jouan, P. (2003). The time-varying linearization up to output injection. *SIAM Journal on Control and Optimization* **41**(6), 1756–1778.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* **82**(1), 35–45.
- Kalman, R.E. and R.S. Bucy (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* **83**(1), 95–108.
- Keller, J. (1999). Fault isolation filter design for linear stochastic systems. *Automatica*.
- Kinnaert, M. (1999). Robust fault detection based on observers for bilinear systems. *Automatica* **35**(11), 1829–1842.
- Knittel, D., E. Laroche, D. Gigan and H. Koc (2003). Tension control for winding systems with two degrees of freedom h infinity controller. *IEEE Transactions on Industry Applications* **39**(1), 113–120.
- Krener, A-J. and A. Isidori (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters* **3**(1), 47–52.
- Krener, A-J. and W. Respondek (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization* **23**(2), 197–216.
- Kuhm, D., D. Knittel and M-A. Bueno (2012). Robust control strategies for an electric motor driven accumulator with elastic webs. *ISA Transactions* **51**, 732–742.
- Leonhardt, S. and M. Ayoubi (1997). Methods of fault diagnosis. *Control Engineering and Practice* **5**, 683–692.
- Lin, W. and C-I. Byrnes (1995). Remarks on linearization of discrete time autonomous systems and nonlinear observer design. *Systems and Control Letters* **25**(1), 31–40.
- Liu, F. L., M. Farza and M. M'Saad (2006). Unknown input observers design for a class of nonlinear systems - application to biochemical process. In Fifth IFAC Symposium on Robust Control Design.
- Luenberger, D.G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Trans. Military Electronics* **8**(2), 74–80.
- Luenberger, D.G. (1971). An introduction to observers. *IEEE Trans. Automatic Contr. AC* **16**(6), 596–602.
- Maquin, D. and J. Ragot (2000). Diagnostic des systèmes linéaires. *Collection Pédagogique d'Automatique. Hermès Science Publications*.

- Massoumnia, M. A., G. C. Verghese and A. S. Willsky (1989). Failure detection and identification. *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**(3), 316–321.
- Massoumnia, M.A. (1986). *A geometric approach to failure detection and identification in linear systems*. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, MA.
- Moreno, J. A. and D. Dochain (2008). Global observability and detectability analysis of uncertain reaction systems and observer design. *International Journal of Control* **81**(7), 1062–1070.
- Nijmeijer, H. and A.J. Van Der Schaft (1990). *Nonlinear dynamical control systems*. Springer Verlag.
- Noura, H., D. Theilliol, J.-C. Ponsart and A. Chamseddine (2009). *Fault-Tolerant Control Systems : Design and Practical Applications*. Springer, London.
- O'Reilly, J. (1983). *Observers for linear system*. Vol. 140. Mathematics in Science and Engineering. New York.
- Park, J., G. Rizzoni and W.B. Ribbens (1994). On the representation of sensor faults in fault detection filters. *Automatica* **30**(11), 1793–1795.
- Patton, R. J. (1994). Model-based methods for fault diagnosis : some guide-lines. *Model-Based Fault Diagnosis*.
- Patton, R., P. Frank and R. Clark (2001). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer.
- Patton, R.J. and J. Chen (1991). Robust fault detection using eigenstructure assignment : a tutorial consideration and some new results. Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control. pp. 2242–2247.
- Patton, R.J., P.M. Frank and R. Clark (1989). *Fault diagnosis in dynamic systems : Theory and applications*. Printice-Hall, Englewood Cliffs.
- Persis, C.De and A. Isidori (2000). On the observability codistributions of a nonlinear system. *Systems and Control Letters* **40**(5), 297–304.
- Persis, C.De and A. Isidori (2001). A geometric approach to nonlinear fault detection and isolation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**, 853–865.
- Plestan, F. and A. Glumineau (1997). Linearization by generalized input-output injection. *Systems and Control Letters* **31**(2), 115–128.
- Ponsart, J.-C., D. Theilliol and C. Aubrun (2010). Virtual sensors design for active fault tolerant control system applied to a winding machine. *Control Engineering Practice* pp. 1037–1044.
- Potter, J. and M. Suman (1977). Threshold-less redundancy management with arrays of skewed instruments. *Technical report, Integrity in Electronic flight control systems*.
- Poussot-Vassal, C., O. Sename, L. Dugard, P. Gáspár, Z. Szabó and J. Bokor (2008). A new semi-active suspension control strategy through LPV technique. *Control Engineering Practice* **16**, 1519–1534.
- Rodrigues, M., D. Theilliol, M. Adam-Medina and D. Sauter (2008). A fault detection and isolation scheme for industrial systems based on multiple operationg models. *Control Engineering Practice* **16**(2), 225–239.

- Rodrigues, M., D. Theilliol, S. Aberkane and D. Sauter (2007). Fault tolerant control design for polytopic LPV system. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **17** 1, 27–37.
- Sahnoun, M. and H. Hammouri (2013). On the existence of unknown input observers for state affine systems up to output injection. 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Toulouse, France.
- Sahnoun, M. and H. Hammouri (2014). Nonlinear observer based on observable cascade form. 13th European Control Conference. Strasbourg, France.
- Seliger, R. and P. M. Frank (1991). Fault diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. In Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control. Brighton, UK. pp. 2248–2253.
- Theilliol, D., J.-C. Ponsart, M. Rodrigues, S. Aberkane and J. Yamé (2008). Design of sensor fault diagnosis method for nonlinear systems described by linear polynomial matrices formulation : application to a winding machine. Proceedings of the 17th World Congress, IFAC08. Seoul, Korea.
- Venkatasubramanian, V., R. Rengaswamy and SN. Kavuri (2003a). A review of process fault detection and diagnosis. partii : Qualitative models-based methods. *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 313–326.
- Venkatasubramanian, V., R. Rengaswamy, K. Yin and SN. Kavuri (2003b). A review of process fault detection and diagnosis. parti : Quantitative model-based methods. *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 293–311.
- Wonham, W.M. (1985). *Linear Multivariable Control : a geometric approach*. Springer.
- Wonham, W.M. (1989). *Linear Multivariable Systems : a geometric approach*. Springer-Verlag. New York.
- Xia, X-H. and W-B. Gao (1989). Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization* **27**(1), 199–216.
- Xiao, Y., S. Huang, H. Chen and B. Xu (2011). Research on tension control strategy of battery pole-piece winding and unwinding system based on fault-tolerant control. *Procedia Engineering* **15**, 5073–5078.
- Yang, F. and R.W. Wilde (1988). Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. on Automatic Control, AC* **33**(7), 677–681.
- Zeitz, M. (1987). The extended luenberger observer for nonlinear systems. *System and Control Letters* **9**(2), 149–156.
- Zolghadri, A., D. Henry and S. Grenaille (2008). Fault diagnosis for LPV systems. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 08. Ajaccio.



## *Résumé*

Parmi les méthodes de diagnostic de défauts issue de l'automatique, la méthode des filtres résiduels permet de synthétiser des filtres générant des signaux (dits résidus) qui sont utilisés à des fins de détection de défauts. Dans notre approche, les filtres résiduels sont obtenus à partir d'observateurs réduits. L'objectif de cette thèse est de synthétiser des observateurs et de mettre en évidence leur application à la détection de défauts pour les systèmes non linéaires. Ce mémoire est réparti en deux parties. Dans la première partie, deux contributions ont été présentées. La première concerne les observateurs à entrées inconnues pour les systèmes affines en l'état modulo une injection de sortie. L'approche proposée est une combinaison des techniques de découplage géométrique et des observateurs non linéaires. Des conditions suffisantes ont été données accompagnées d'un algorithme permettant de concevoir un observateur à entrées inconnues permettant d'estimer une partie de l'état indépendamment de la connaissance de certaines entrées. La deuxième contribution consiste à caractériser la classe des systèmes non linéaires qui se transforment en des systèmes en cascade pour lesquels un observateur peut être conçu. Tout d'abord, des conditions nécessaires et suffisantes théoriques ont été données, ensuite un algorithme permettant de calculer ces transformations (difféomorphismes) a été proposé. Enfin, l'ensemble de tous ces difféomorphismes a été caractérisé en montrant que ce dernier est une orbite d'une action d'un groupe particulier sur l'ensemble de tous les difféomorphismes. La deuxième partie de cette thèse concerne la synthèse d'un filtre polytopique Linéaires à Paramètres Variants (LPV) permettant de détecter, isoler et estimer de multiples défauts capteur. L'avantage de ce filtre est de générer deux types de résidus : l'un étant sensible aux défauts et l'autre insensible. Le résidu insensible est utilisé pour fournir une information qualitative supplémentaire de l'efficacité du filtre. La stabilité de ce dernier est analysée au moyen d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

Mots-clés : système non linéaire, observateur à entrée inconnue, observateur, diagnostic de défauts

## *Abstract*

Among the faults diagnosis methods, the method of residual filters allows to synthesize filters generating signals (called residues) that are used for fault detection. In our approach, the residual filters are obtained from reduced observers. The objective of this thesis is to synthesize observers and highlight their application to fault detection for nonlinear systems. This thesis is divided into two parts. In the first part, two papers were presented. The first one relates to the unknown input observers for state affine systems modulo an output injection. The proposed approach is a combination of geometric decoupling techniques and nonlinear observers. We have given sufficient conditions with an algorithm for designing an unknown input observer to estimate a part of the state without the knowledge of some inputs. The second contribution consists to characterize the class of nonlinear systems which can be transformed into cascade systems for which an observer can be designed. First, necessary and sufficient theoretical conditions were given, then an algorithm to compute these transformations (diffeomorphisms) was proposed. Finally, the set of all diffeomorphisms was characterized by showing that it is an orbit of an action of a particular group on the set of all diffeomorphisms. The second step of the thesis deals with the synthesis of a polytopic Linear Parameter-Varying (LPV) filter to detect, isolate and estimate multiple sensor faults. The advantage of this filter is to generate two types of residuals : one being sensitive to faults and the other is insensitive. The insensitive residual is used to generate an additional qualitative information of the filter efficiency. The stability of the latter has been performed using Linear Matrix Inequality (LMI).

Keywords : nonlinear system, unknown input observer, observer, faults diagnosis