HAL
open science

Etude des baryons avec le modèle de Nambu et Jona-Lasinio

Benjamin Sintes

To cite this version:

Benjamin Sintes. Etude des baryons avec le modèle de Nambu et Jona-Lasinio. Physique [physics]. Université de Nantes, 2014. Français. NNT : . tel-01180392

HAL Id: tel-01180392

https://theses.hal.science/tel-01180392v1

Submitted on 26 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Benjamin SINTES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans

École doctorale : 3MPL

Discipline : Constituants élémentaires
Spécialité : Physique des particules
Unité de recherche : UMR6457

Soutenue le 18 décembre 2014
Thèse N° :

Etude des baryons avec le modèle de Nambu et Jona-Lasinio

JURY

Rapporteurs :	**Elena BRATKOVSKAYA**, Professeur, Université Goethe Francfort **Dany DAVESNE**, Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1
Examinateurs :	**Pol GOSSIAUX,** Professeur, Ecole des Mines de Nantes **Hubert HANSEN**, Maitre de conférences, Université Claude Bernard Lyon 1 **Juan TORRES-RINCON**, Docteur, Université de Nantes, Subatech
Directeur de Thèse :	**Joerg AICHELIN**, Professeur, Université de Nantes

Table des matières

1 Physique de l'interaction forte **15**

1.1 Modèle standard 15

1.2 Interaction forte et QCD 15

1.2.1 Couleur 15

1.2.2 Résultats de QCD 17

1.2.3 Symétrie 18

1.2.4 Symétrie Chirale 20

1.3 Le plasma de quarks et gluons 21

1.3.1 Prédictions 21

1.3.2 Observables 21

1.3.3 Transition de phase 22

1.3.4 Conclusion 23

2 Le modèle NJL **25**

2.1 Modèle de Nambu et Jona-Lasinio 25

2.1.1 Lagrangien NJL 25

2.1.2 Equation du gap 26

2.1.3 Le potentiel baryochimique 27

2.1.4 La dépendance en température 28

2.1.5 Approximation statique 29

2.2 Modèle de Polyakov, Nambu et Jona-Lasinio 30

2.2.1 Lagrangien dans le modèle PNJL 30

2.3 Conclusion 33

3 Secteurs des mésons et diquarks **35**

3.1 Introduction 35

3.2 Formalisme pour les mésons 36

3.2.1 Mésons 36

3.2.2 L'équation de Bethe-Salpether 36

3.2.3 Secteur Pseudoscalaire 40

3.2.4 Fonction de polarisation pour le pion 43

3.2.5 Eta et Eta' 44

3.2.6 Température finie 47

3.2.7 Réduction de la fonction de polarisation 48

3.3 Résultats 53

3.3.1 Résultat à température nulle 53

3.3.2 Résultats à densité finie 55

3.3.3 Température finie 56

3.3.4 PNJL 62

3.4 Diquark 64

3.4.1 Généralités 64

3.4.2 Equation dans le secteur des diquarks 66

3.4.3 Résultats 73

3.5 Conclusion 79

4 Secteurs baryoniques **81**

4.1 Introduction 81

4.2 Equation pour les baryons 82

4.2.1 Formalisme 82

4.2.2 Vertex 84

4.2.3 Construction des baryons 85

4.2.4 Facteur de saveur 89

4.2.5 Réduction de l'équation pour le proton 89

4.2.6 Etude du baryon Λ 90

4.2.7 Décuplet de baryon 92
4.2.8 Fonction de polarisation à température finie 96
4.3 Résultats 102
4.3.1 NJL à température finie 102
4.3.2 Paramétrisation, énergie de liaison et stabilité 104
4.3.3 PNJL à température finie 105
4.4 Conclusion 108

A Transformation de Fierz **111**
A.1 Mésons 111
A.2 Diquarks 112
A.3 Constante dans le secteur des diquarks 113
A.3.1 Mésons 114
A.3.2 Diquarks 115

Table des figures

1-1 Diagrammes de Feynman pour QCD 17

1-2 Conditions de Freeze-out à RHIC 23

1-3 Prédictions de lQCD pour les susceptibilités. 23

1-4 Freeze-out pour différentes particules dans l'expérience STAR. 24

2-1 Approximation statique : les gluons sont gelés et l'interaction est ponctuelle. 29

2-2 Boucle de Polyakov 31

3-1 Equation de Bethe-Salpeter pour les mésons 37

3-2 Kaon en fonction du potentiel baryochimique. 55

3-3 Masse du pion en fonction de la température. 56

3-4 Masse du kaon en fonction de la température. 57

3-5 Masse des mésons η et η' 58

3-6 Masse des mésons scalaires en fonction de la température 58

3-7 Masse des mésons vecteurs en fonction de la température 59

3-8 Méson axiaux en fonction de la température 60

3-9 Restauration de la symétrie chirale dans les secteurs vectoriel et axial. 61

3-10 Restauration de la symétrie chirale dans les secteurs pseudoscalaire et scalaire. 61

3-11 Pion et Kaon dans PNJL 62

3-12 η et η' dans PNJL 62

3-13 Comparaison de NJL et PNJL 63

3-14 Pion dans NJL et PNJL 63

3-15 Constantes de couplage dans le secteur pseudoscalaire 64
3-16 Equation de Bethe-Salpeter pour les diquarks. 67
3-17 Diquarks Scalaires 75
3-18 Diquarks Axiaux 76
3-19 Diquarks PseudoScalaires 76
3-20 Diquarks Vecteurs 77
3-21 Diquarks Axiaux dans PNJL 78
3-22 Diquarks Scalaires dans PNJL 78
3-23 Modules des constantes de couplage des diquarks scalaires 79
3-24 Constantes de couplage des diquarks axiaux 80

4-1 Octet de baryons dans NJL 103
4-2 Décuplet de baryons dans NJL 104
4-3 Octet de baryons dans PNJL 106
4-4 Proton dans NJL et PNJL 106
4-5 Décuplet de baryons dans PNJL 107

Liste des tableaux

1.1 Tableau des différentes symétries 20

2.1 Paramètres du potentiel effectif de la boucle de Polyakov 31

3.1 Mésons dans l'espace de Dirac 39

3.2 Mésons pseudoscalaires 40

3.3 Table des paramètres 54

3.4 Résultats pour les mésons Pseudoscalaires et Scalaires 54

3.5 Résultats pour les mésons Vecteurs et Axiaux 54

3.6 Température de Mott pour les mésons Pseudoscalaires et Vecteurs . . 59

3.7 Représentations des diquarks dans les espaces de couleur, saveur et spin. 65

3.8 Diquarks scalaires dans la représentation d'antitriplet de $SU_f(3)$. . . . 70

3.9 Diquarks axiaux dans la représentation de sextet de $SU_f(3)$. 72

3.10 Masses des diquarks scalaires et pseudoscalaires à température nulle. 74

3.11 Masses des diquarks vectoriels et axiaux à température nulle. 74

3.12 Température de Mott pour les diquarks Scalaires et Axiaux 75

4.1 Fonctions d'onde pour le décuplet. 93

4.2 Octet de baryon à température nulle. 102

4.3 Decuplet de baryon à température nulle. 103

4.4 Température de Mott pour les baryons de l'octet 104

4.5 Température de Mott pour les baryons du décuplet 105

4.6 Energie de liaison pour les baryons de l'octet 105

4.7 Energie de liaison pour les baryons du décuplet 105

Introduction

Les expériences de collisions ont permis de découvrir de nouvelles particules, jusqu'à ce qu'il devienne clair que les hadrons n'étaient pas les particules élémentaires. Néanmoins, dans les années 50, leurs composants ne pouvaient encore être mis à jour. En 1961, Murray Gell-Mann et Yuval Neeman, [40] ont décrit l'ensemble des particules connues alors dans le groupe de symétrie SU(3), le groupe des matrices spéciales unitaires $3 * 3$. En 1964, Gell-Mann et Zweig, [19] proposent le modèle des quarks, basé sur trois particules élémentaires, les quarks up, down et strange (u,d et s) et permettant de recréer le spectre des hadrons.

En 1969, au SLAC ont lieu des expériences de diffusions inélastiques (DIS) où des leptons bombardent un proton. Les résultats montrent que la section efficace à haute énergie dépend du ratio de la masse des photons sur l'énergie transférée, phénomène connu sous le nom de scaling de Bjorken et interprété dans le modèle des partons comme le fait que le lepton subit des collisions élastiques avec des constituants. Plus tard le modèle des partons de Feynman sera identifié avec le modèle des quarks.

La découverte du baryon Omega, constitué de trois quarks s semblait alors incompatible avec le principe d'exclusion de Pauli. La solution, explorée par Han et Nambu puis par Gell-Mann et Frietzsch consiste à utiliser neufs quarks à la place des trois initialement considérés. Un nouveau nombre quantique, la couleur, est introduit et la symétrie associée est exacte. Chaque saveur de quark peut prendre une des trois valeurs de couleur, et ainsi le baryon Omega ne brise plus la règle de Pauli. Plus tard de nouvelles particules seront découvertes, conduisant les physiciens à ajouter trois quarks : charm, bottom et top.

L'interaction entre les quarks est portée par le gluon, le boson de l'interaction

forte, de la même manière que le photon pour l'électrodynamique quantique. La différence majeure tient au fait que le gluon porte lui aussi une charge de couleur, ce qui l'autorise à intéragir avec d'autres gluons. Cette interaction entraine la diminution de la constante de couplage à haute énergie. Ce phénomène de liberté asymptotique fut découvert en 1973 par Gross, Politzer et Wilczek, [21]. A l'inverse, la constante de couplage augmente avec les distances de sorte que les quarks sont confinés à l'intérieur des hadrons.

Dans un premier temps nous allons présenter succintement certains aspects de la physique de l'interaction forte, notamment en commentant la présence de symétries au sein des modèles. Nous verrons également comment la disparition du confinement des quarks à l'intérieur des hadrons à haute température ou haut potentiel baryochimique au profit d'un plasma de quarks et de gluons a été prédite et étudiée au cours des dernières décennies.

Afin d'étudier ce déconfinement, cette transition d'un milieu de hadrons vers un milieu gouverné par les quarks et gluons, nous utiliserons le modèle de Nambu et Jona-Lasinio, présenté dans le deuxième chapitre. Ce modèle est particulièrement adapté à l'étude des phénomènes ayant lieu aux énergies de cette transition. Ce modèle sera ensuite utilisé dans le cadre de l'étude des mésons, dans le troisième chapitre, puis des baryons dans le quatrième chapitre.

L'enjeu est ici de pouvoir reconstruire les hadrons, mésons et baryons, à partir d'un jeu de paramètres unique permettant d'obtenir des masses réalistes en fonction de la température. On s'intéresse en particulier à la température pour laquelle le hadron devient moins stable que ses constituants. En particulier, des résultats récents, [2], [6], [5], semblent indiquer que cette température n'est pas commune à tous les hadrons.

Le calcul des masses des quarks et hadrons à temperature finie et potentiel chimique fini est le premier pas pour une description de la transition de phase entre un plasma constitué de quarks et d'antiquarks et les hadrons. Cette transition est gouvernée par les sections efficaces dans lesquelles ces masses apparaissent dans les éléments de matrice. Sans cela, il est impossible de faire des prédictions sur les scénarios d'hadronisation. A potentiel chimique fini en particulier, le lagrangien NJL prédit

une transition de premier ordre et un des objectifs des accélérateurs construits en ce moment en Allemagne (FAIR) et en Russie (NICA) est de vérifier cette prédiction. Le travail dans cette thèse permet d'établir la base pour de tels calculs.

Chapitre 1

Physique de l'interaction forte

1.1 Modèle standard

Le modèle standard regroupe les connaissances physiques ayant abouti à un consensus. Aujourd'hui il est possible de traiter de manière à la fois quantique et relativiste trois interactions fondamentales : l'électromagnétisme, l'interaction faible, et celle qui sera centrale dans notre étude, l'interaction forte. La gravitation est la dernière interaction fondamentale, mais échappe encore à une description quantique.

1.2 Interaction forte et QCD

1.2.1 Couleur

Les quarks et les gluons possèdent une charge de couleur, sont soumis à l'interaction forte et répondent donc aux lois de la chromodynamique quantique (QCD). Dans la nature on les trouve à l'intérieur des hadrons, soit au nombre de trois quarks de valence dans les baryons, soit par paire d'un quark et d'un antiquark dans les mésons. La description de l'interaction forte par la QCD reprend de nombreux éléments du formalisme de l'électrodynamique quantique (QED) mais des différences notables séparent tout de même les deux théories. En particulier les gluons sont les bosons vecteurs de cette interaction et portent eux mêmes une charge de couleur.

Afin de décrire l'ensemble des phénomènes liés à l'interaction forte on utilise la QCD. Cette théorie est basée sur le groupe $SU(3)$ des matrices unitaires $3*3$ générées par les matrices de Gell-Mann λ_a avec $a = 1; ...; 8$. Les constantes de structure du groupe sont définies par :

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \tag{1.1}$$

La décomposition du groupe laisse apparaitre huit champs de gluons. Le lagrangien de la QCD s'écrit de la manière suivante :

$$L_{QCD} = \bar{\psi}\left[i\gamma_\mu D^\mu - m\right]\psi - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a \ , \tag{1.2}$$

où on a utilisé la dérivée covariante, imposée par l'invariance sous SU(3) :

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_s\frac{\lambda^a}{2}A^a_\mu \ , \tag{1.3}$$

où g_s est le couplage de l'interaction forte et les champs de gluons sont définis par :

$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g_s f_{abc}A^b_\mu A^c_\nu$.

Ce lagrangien permet de décrire les différents éléments qui interviennent lorsque les particules élémentaires portant une charge de couleur interagissent ensemble. En effet on détermine à partir des règles de Feynman la propagation d'un quark ou d'un gluon et les vertex d'interactions quark-gluon et gluon-gluon. Les masses nues des quarks et la constante de couplage sont des paramètres libres de la chromodynamique quantique. Certaines intégrales présentent des divergences ultraviolettes et doivent être régularisées. La QCD est une théorie renormalisable et une coupure ultraviolette Λ est utilisée conjointement à un schéma de renormalisation. Ce procédé dépend d'une échelle d'énergie, ou point de renormalisation μ. Les observables physiques doivent être indépendantes du schéma et de μ.

Le couplage augmente avec la distance, ou diminue avec l'échelle de transfert d'impulsion considérée. C'est ce qu'on appelle la liberté asymptotique. Le confinement est une implication importante de ce phénomène propre à l'interaction forte. En effet si on considère un binome quark-antiquark en interaction, du fait de l'augmentation

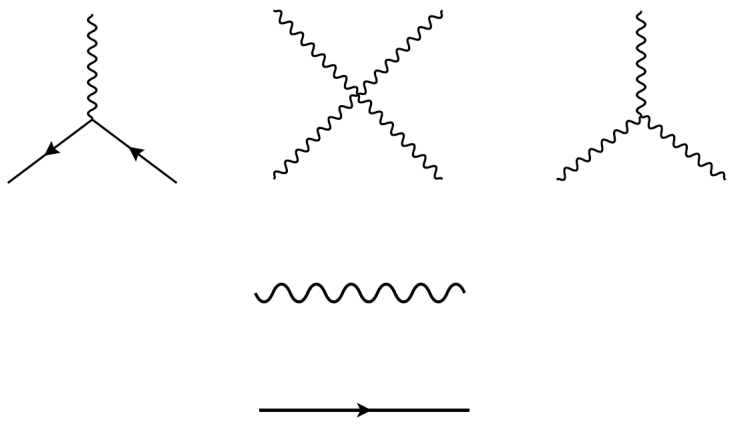


FIG. 1-1 – Diagrammes de Feynman pour QCD

du couplage, l'énergie nécessaire pour les éloigner devient de plus en plus grande. Lorsqu'elle devient suffisante pour créer une nouvelle paire, deux quarks apparaissent. On obtient au final deux paires de quarks et d'antiquarks mais aucun quark n'est isolé. De ce fait les quarks n'ont jamais été observés directement et certaines de leurs propriétés, comme leurs masses, ne sont connues qu'indirectement.

1.2.2 Résultats de QCD

pQCD

Les différentes interactions dans QCD font intervenir une suite de diagrammes de Feynman. Chacun des vertex fait intervenir le couplage α_s, ce qui autorise un classement de ces diagrammes en ordre de α_s. A de très hautes échelles d'énergie, le couplage étant faible, il suffit de calculer uniquement les premiers ordres. Cette théorie, connue sous le nom de QCD perturbative (pQCD) a permis d'obtenir de nombreux résultats dans les collisions de particules à hautes énergies et reste aujourd'hui un des outils les plus puissants dans l'étude de l'interaction forte. Malheureusement, son domaine est restreint, et il faut compléter son utilisation par d'autres théories à basse énergie.

lQCD

Le domaine de pQCD étant limité, il est naturel de chercher d'autres outils afin d'étudier l'interaction forte. La lattice QCD (lQCD) propose de résoudre numériquement le lagrangien de QCD. Pour cela on utilise le formalisme des intégrales de chemin, puis on discrètise l'espace et le temps. Les calculs des intégrales sont alors effectués sur ce réseau où les noeuds correspondent aux fermions, et les lignes sont les opérateurs d'évolution définis par :

$$U(x,y) = \mathcal{P}exp\left[ig\int_x^y dx_\mu A^\mu(x)\right] \tag{1.4}$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur d'ordonnancement de chemin, g le couplage et $A_\mu(x)$ le champ de jauge.

Plusieurs lignes peuvent former une boucle sur le réseau, nommée boucle de Wilson et invariante de jauge. Ces boucles permettront la description de particules dans un milieu à température finie. [35]

1.2.3 Symétrie

Le théorème de Noether, découvert par Emmy Noether en 1918, décrit des transformations dans le domaine de la géométrie et est depuis utilisé en physique, notamment dans l'étude des symétries où il stipule qu'une quantité conservée pourra être associée à chaque transformation qui laisse le lagrangien invariant. Ces transformations sont les symétries qui doivent rendre compte des différents phénomènes observés dans la nature. Le lagrangien de QCD est construit pour prendre en compte les symétries liées au comportement des particules soumises à l'interaction forte.

De manière générale, si l'action est invariante sous une transformation :

$$\psi \rightarrow e^{i\theta^a\Gamma_a}\psi \tag{1.5}$$

alors il existe un courant noté :

$$J_a^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\Gamma_a\psi \ , \tag{1.6}$$

qui est conservé :

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0 \ , \tag{1.7}$$

et qui peut être écrit de cette manière pour faire apparaitre la densité de charge q :

$\vec{\nabla}.\vec{j} = \dot{q}$.

L'intégration permet d'obtenir la charge totale Q sur le volume :

$\int \vec{\nabla}.\vec{j}\, d^3x = \dot{Q} = \int_{Surface} d\vec{S}\vec{j}$

Cette charge sera donc elle aussi conservée :

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \ . \tag{1.8}$$

C'est cette quantité conservée qui peut être observée physiquement.

Conservation du nombre baryonique Si on s'intéresse en particulier à la transformation $U_v(1)$, on retrouve le phénomène bien connu de conservation de la charge baryonique. La transformation impliquée pour ce processus s'écrit de la manière suivante :

$\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$

Le courant correspondant s'écrit alors :

$J_v^\mu = \bar{\psi}\gamma_v^\mu\psi$

Dans ce cas la charge est le nombre baryonique B et semble être toujours conservée. Par convention, on le normalise pour que la charge d'un baryon soit égale à un. Un résumé de ces symétries est donné dans le tableau 1.1.

Certaines symétries ne sont pas toujours exactes. C'est le cas par exemple de la symétrie axiale, dont la réalisation impliquerait l'existence de partenaires de parités opposées pour les hadrons. Un terme doit alors être ajouté au lagrangien afin d'annuler

Symétrie	Nom	Courant
$U_v(1)$	Baryonique	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$
$U_A(1)$	Axiale	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
$SU_V(3)$	Vectorielle	$\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda_a\psi$
$SU_A(3)$	Chirale	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\lambda_a\psi$

TAB. 1.1 – Tableau des différentes symétries

cette symétrie. La résolution de ce problème est due à 't Hooft, et le terme associé porte son nom. La QCD possède également la symétrie locale de couleur $SU(3)_c$ tenue pour responsable du confinement des quarks dans les hadrons.

1.2.4 Symétrie Chirale

La symétrie chirale joue un rôle particulier dans le modèle NJL, [31] et permet de mettre en lumière certains aspects de la physique des particules. Si les masses des quarks sont très faibles, ou si le lagrangien est dépourvu du terme de masse, il développe une nouvelle symétrie qui permet de séparer les quarks en quark "droit" et "gauche". Le spin de ces particules est soit aligné avec l'impulsion, soit en sens contraire.

$$\psi_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi \tag{1.9}$$

Les transformations suivantes laissent alors le lagrangien inchangé :

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha_L}\psi_L \tag{1.10}$$

$$\psi_R \rightarrow e^{i\alpha_R}\psi_R \tag{1.11}$$

où les α sont réels. Les courants de Noether associés sont :

$$j_L^\mu = \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L \ , j_R^\mu = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R \tag{1.12}$$

Cette symétrie sera brisée lorsque les quarks deviennent massifs. Dans le cadre du modèle NJL, cette symétrie joue un rôle primordial. En effet nous verrons que la masse des quarks sera dépendantes de la température et de du potentiel chimique. Cette symétrie permettra de caractériser le comportement des particules en fonction de ces deux paramètres.

1.3 Le plasma de quarks et gluons

1.3.1 Prédictions

En 1975, J.C.Collins et M.J.Perry [12] prédisent l'existence, pour des objets de grande densité, d'un milieu ne pouvant pas être décrit à l'aide de hadrons. Cette première mention d'un nouvel état de la matière, qui sera ensuite connu comme le Plasma de Quarks et de Gluons (QGP), s'appuit sur la liberté asymptotique, formulée seulement deux ans auparavant [21]. Ces travaux montrent qu'une description en terme de quarks s'avère correcte pour de telles densités. Les milieux denses pouvant être des objets astronomiques très compacts telles des étoiles à neutron, ou l'univers jeune. En effet, si l'univers a été très chaud et dense, ce qui est suggéré par son expansion, alors il a dû connaître une phase déconfinée avant de s'étendre, se refroidir, et subir l'hadronisation. Depuis, cette transition de phase est aussi étudiée pour de hautes températures et a fait l'objet de différentes expériences de collisions de particules. Le collisionneur RHIC, situé à Brookhaven a notamment montré de forts signaux de la présence d'un QGP. Depuis le LHC situé à Genève poursuit l'investigation de cet état de plasma. Ces deux expériences sondent des domaines de très haute énergie et basse densité, où l'on s'attend à rencontrer cette transition de phase. L'étude pour de plus grandes densités sera l'objet d'une nouvelle expérience, FAIR, situé à Darmstadt.

1.3.2 Observables

Différentes observables permettent d'obtenir des informations sur le plasma de quarks et de gluons. Cette section a pour but d'en présenter essentiellement deux, par-

ticulièrement importantes et intensivement étudiées. En particulier, lors de la phase de plasma, on s'attend à ce que les quarks et gluons interagissent et se thermalisent. L'anisotropie dans le plan azimuthal est un des marqueurs du comportement collectif des quarks et gluons au sein du milieu. Le flot elliptique, noté $v2$, mesure cette asymétrie et apporte des informations sur la thermalisation du milieu. En effet, un grand nombre d'interactions conduit à un milieu fortement thermalisé dans lequel le comportement collectif des particules est très marqué.

Des collisions dures, impliquant des quarks et gluons ayant emporté une grande partie de l'impulsion du hadron, peuvent donner lieu à la création de particules très énergétiques qui vont traverser le plasma. Une perte d'énergie, radiative ou collisionnelle, de cette particule dans le milieu, modifiera la quantité de particules détectées. Le facteur de modification nucléaire, qui mesure le ratio de particules produites dans les collisions noyau-noyau par rapport aux collisions proton-proton, peut être relié à cette perte d'énergie.

1.3.3 Transition de phase

Souvent présentée dans un schéma statique, la transition d'un milieu hadronique vers un milieu de quarks a longtemps était pensée identique pour chacun des hadrons. Récemment, différents modèls ont remis en cause cette image. En particulier le modèle HRG (Hadron Resonance Gas), [2], permet d'obtenir les ratios de particules pour différentes températures de freeze-out. Les comparaisons avec les données de l'expérience STAR, figure 1-2 semblent indiquer que des températures de freeze-out sont différentes pour certains hadrons.

L'étude des susceptibilités, [6], par des prédictions de lQCD, montrent que le point d'inflexion, relié à la température de transition, pour les quarks léger (en bleu sur la figure 1-3) et les quarks étranges (en rouge) diffèrent de 15 MeV. On peut alors s'attendre à trouver des différences dans les transitions des différents hadrons en fonction de leur composition, et en particulier de l'étrangeté.

Enfin, une étude des freeze-out dans l'expérience STAR pour les particules les plus communes, π, K, P, est comparée aux prédictions pour des particules rares, figure 1-4 ,

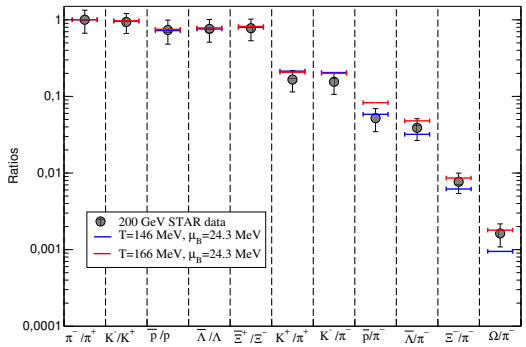


FIG. 1-2 – Conditions de Freeze-out à RHIC

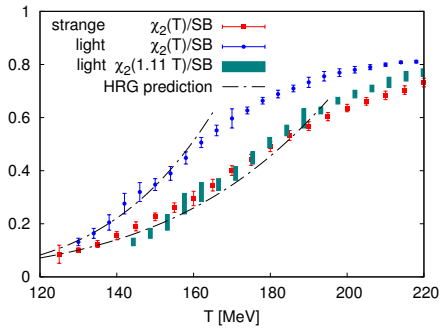


FIG. 1-3 – Prédictions de lQCD pour les susceptibilités.

[5]. Il semble que pour certaines particules les températures prédites soient différentes. En particulier, le Ω présente des températures significativement différentes et semble donc un candidat intéressant dans l'étude des dépendances des divers hadrons à la température de transition. Remarquons également que le Ω est constitué de trois quarks s de valence, ce qui semble corroborer le résultat présenté précédemment.

1.3.4 Conclusion

Certains aspects de l'interaction forte ont été présentés dans ce chapitre. En particulier l'existence d'une transition de phase entre un milieu de hadron vers un plasma de quarks et de gluons est un des points majeurs dans l'étude de cette interaction. Il semble également que la température à laquelle la transition a lieu puisse déprendre de l'espèce de hadron considéré et également de l'étrangeté. La QCD est la théorie la plus fondamentale, mais elle se révèle parfois délicate à utiliser, en particulier lorsque

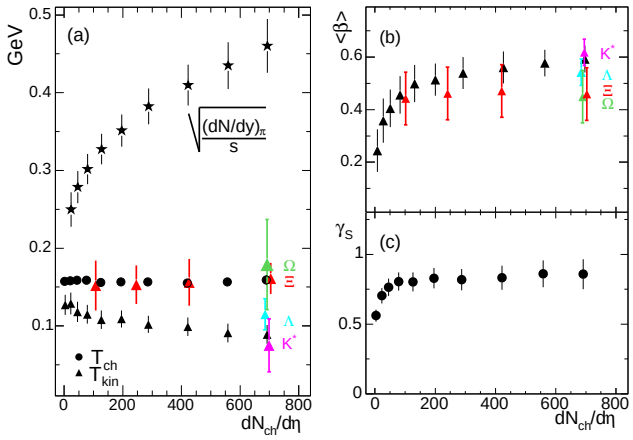


FIG. 1-4 – Freeze-out pour différentes particules dans l'expérience STAR.

les énergies misent en jeu sont trop faibles. Pour cette raison, nous nous tournons vers un modèle effectif de basse énergie, le modèle de Nambu et Jona-Lasinio.

Chapitre 2

Le modèle NJL

2.1 Modèle de Nambu et Jona-Lasinio

Originellement la théorie de Y.Nambu et G.Jona-Lasinio proposée en 1961 [38] est antérieure à la découverte des quarks et à la QCD. Le modèle utilisait les hadrons comme degrés de liberté et décrivait les interactions en s'inspirant de la théorie de la supraconductivité de Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS). Une des idées majeures de la théorie BCS est que les électrons peuvent former des paires (dites de Cooper) pouvant être vues comme des bosons, et possédant ainsi des propriétés différentes dans le milieu. Par la suite le modèle NJL est largement réinterprêté pour devenir un lagrangien de quarks et adopter une forme adaptée à l'étude des processus de basse énergie et permettant de compléter les domaines difficiles à sonder à l'aide de la QCD.

2.1.1 Lagrangien NJL

Le lagrangien de NJL a été construit pour respecter les symétries de l'interaction forte, présentes en QCD. Aujourd'hui il peut être vu comme une version basse énergie de QCD, capable d'étudier la transition de phase (à des températures de l'ordre de quelques centaines de MeV), là où la pQCD ne peut être utilisée.

Dans le secteur mésonique le lagrangien prend la forme.

$$\begin{aligned} L_{NJL} &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_o)\psi \\ &+ G\sum_a[(\bar{\psi}\tau^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi)^2] \\ &+ G_v\sum_a[(\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau^a\psi)^2] \\ &- K[det\bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi + det\bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les termes proportionnels à G et G_v respectent la symétrie chirale mais elle est brisée par l'introduction du terme proportionnel à K : le terme de 't Hooft. Les masses m_o sont les masses nues des quarks u, d et s, qui constituent les degrés de liberté du modèle. Les gluons n'apparaissent pas explicitement dans le lagrangien puisqu'on considère qu'ils sont gelés dans la limite de basse énergie.

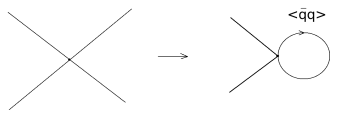
2.1.2 Equation du gap

Dans cette partie on souhaite déterminer le comportement des quarks dans le cadre de l'approximation de champ moyen dite approximation d'Hartree-Fock [47], [17], [13], [16]. Pour cela on calcule la "self energy" en partant du lagrangien NJL donné précédemment. D'autres traitements permettent d'obtenir les mêmes résultats, comme par exemple l'approche Bogoliubov-Valatin, plus proche du formalisme de la théorie BCS. Comme remarqué par Klevansky, [48] cette approche n'est pas adaptée pour l'extension du modèle à température et densité finies.

La linéarisation du terme d'interaction avec la méthode d'Hartree-Fock fait intervenir la valeur moyenne des paires de quarks et d'antiquarks.

$$(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 \rightarrow 2\bar{\psi}\lambda_a\psi < \bar{\psi}\lambda_a\psi > \tag{2.2}$$

Il est intéressant de noter que graphiquement cette approximation consiste à refermer la boucle de quarks de sorte que l'on puisse interpréter le diagramme comme l'interaction d'un quark avec les condensats de quarks.



Ce qui permet d'écrire l'équation du gap pour chaque saveur de quark. Cette équation donne la masse de chaque type de quark, et fait intervenir les différents couplages et les condensats de quarks.

$$m_i = m_{oi} - 2G < \bar{q}_i q_i > -2K < \bar{q}_j q_j >< \bar{q}_k q_k > , \tag{2.3}$$

où m_{oi} est la masse nue du quark considéré, $< \bar{q}_i q_i >$ sont les condensats de quarks. Les indices i, j, k donnent les saveurs des quarks.

Ainsi chaque masse fait intervenir les condensats des autres quarks. Trois équations couplées doivent être résolues pour déterminer les masses. Dans notre cas, nous considèrerons toujours que les masses des quarks u et d sont identiques. De fait, notre système est réduit à deux équations. Notons que la masse des quarks u et d est couplée à celle du quark s seulement par le terme de 't Hooft, et qu'en son absence les équations sont indépendantes. Les termes d'interactions vont conférer une masse élevée au quark par rapport à sa masse nue. On dit alors que les quarks sont habillés, c'est-à-dire que l'interaction forte, au travers des condensats de quarks qui entourent la particule, génère la masse de la particule. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les masses nues des quarks ne peuvent être obtenues directement lors des expériences et elles présentent donc de grandes incertitudes, notamment pour les quarks légers. Dans notre modèle, ces masses deviennent des paramètres, puisque leurs valeurs ne peuvent être contraintes précisément. Elles devront être choisies pour donner les valeurs les plus réalistes de mésons et baryons.

2.1.3 Le potentiel baryochimique

Dans le cadre de l'étude de l'interaction forte et notamment du diagramme des phases correspondant, la description du comportement des particules en fonction de la

densité baryonique est importante. En particulier le modèle NJL est adapté au travail à faible température, là où il est difficile de manier d'autres outils comme la pQCD. La lattice QCD, en revanche, obtient des résultats à potentiel baryochimique nul, rendant particulièrement intéressante l'étude de la transition de phase dans notre modèle. Afin d'introduire cette dépendance, une réécriture de l'hamiltonien est nécessaire, en utilisant l'ensemble grand canonique définit par :

$$K = H - \mu N \ , \tag{2.4}$$

où H est un opérateur appelé hamiltonien grand canonique et où N est l'opérateur de densité de quarks $N = \bar{\psi}\psi$.

2.1.4 La dépendance en température

Pour étudier la dépendance en température on utilise le formalisme du temps imaginaire, ou formalisme de Matsubara. La fonction de Green est antipériodique pour les fermions sur un temps imaginaire. Si on écrit la transformée de Fourier pour une variable de temps τ de la manière suivante :

$$S(x, x', \tau, \tau') = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{i\omega_n(\tau-\tau')} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} S(\mathbf{p}, \omega_n) e^{ip(x-x')} \ , \tag{2.5}$$

où $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$ sont les fréquences de Matsubara dans le cas des fermions. De sorte que l'on puisse retrouver le propagateur de particule comme pour le cas à température nulle :

$$S(\mathbf{p}, \omega_n) = \frac{1}{(\gamma_\mu p^\mu - m + \gamma_0 \mu)} \tag{2.6}$$

La sommation sur les fréquences de Matsubara fait intervenir les distributions de Fermi-Dirac pour les fermions :

$$\frac{1}{\beta} \sum_n e^{i\omega_n \eta} \frac{1}{i\omega_n \mp E_p} = f(\mp E_p) \tag{2.7}$$

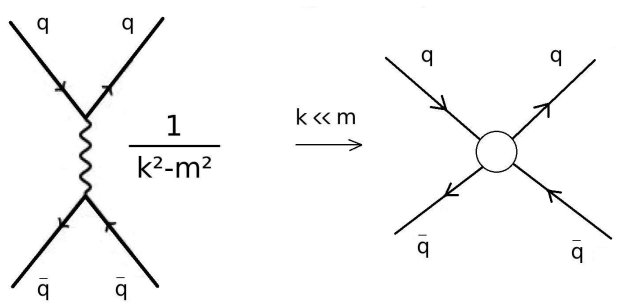


FIG. 2-1 – Approximation statique : les gluons sont gelés et l'interaction est ponctuelle.

Cette fonction donne la densité d'occupation pour chaque impulsion p. En utilisant les résultats précédents sur le potentiel baryonique on peut étendre cette définition de sorte que la fonction devient, pour les particules et les antiparticules :

$$f(E_p, T, \mu) = \frac{1}{(1 + e^{\beta(E_p - \mu)})} \tag{2.8}$$

$$\bar{f}(E_p, T, \mu) = \frac{1}{(1 + e^{\beta(E_p + \mu)})} \tag{2.9}$$

Les condensats de quarks peuvent être réécrits pour prendre la forme :

$$\ll \bar{\psi}\psi \gg = -m\frac{N_c N_f}{\pi^2}\int dp \frac{p^2}{E_p}[1 - f(E_p, T, \mu) - \bar{f}(E_p, T, \mu)] \tag{2.10}$$

2.1.5 Approximation statique

Dans le modèle NJL, seuls les quarks apparaissent comme des degrés de liberté dans le lagrangien. A basse énergie on considère que les gluons sont gelés. Leur masse devient très grande devant leur impulsion et le propagateur devient proportionnel uniquement à l'inverse de la masse.

Pour cette raison, l'influence des gluons est inclue dans les termes d'interaction.

2.2 Modèle de Polyakov, Nambu et Jona-Lasinio

Dans des théories de jauge, la boucle de Polyakov sert de paramètre d'ordre pour la transition de phase. Le modèle PNJL propose d'étendre l'utilisation de cette boucle dans le cadre d'un modèle de quarks. L'utilisation de PNJL permet d'obtenir des résultats en accord avec les prédictions de lQCD pour les variables thermodynamiques. Dans cette section on suivra les méthodes utilisées précédemment, [22], [49], [20], en élargissant leurs définitions à $SU(3)$, en présence du terme de 't Hooft.

2.2.1 Lagrangien dans le modèle PNJL

Dans le modèle NJL les gluons sont gelés, et dans le cadre de l'approximation statique, l'interaction est ponctuelle et est modélisée par un couplage effectif. Les gluons n'ont d'incidence sur les quarks que par le couplage. Afin d'introduire des effets gluoniques ont utilise la boucle de Polyakov ϕ [50].

$$\phi = \frac{1}{N_c} Tr_c \langle \mathcal{P} \exp\left(i \int_0^\beta d\tau A_4(\tau, \mathbf{x}) \right) \rangle \tag{2.11}$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur d'ordonnancement de chemin et A_4 est la quatrième composante du champ de gluon. La valeur moyenne de la boucle de Polyakov est reliée au changement d'énergie libre lorsqu'un degré de liberté est ajouté au système.

Le potentiel effectif suivant, dépendant de la boucle de Polyakov, est ajouté au lagrangien. Les différents paramètres sont obtenus par la lQCD afin de reproduire des données thermodyamiques [45] [36] :

$$\frac{U(\phi, \bar{\phi}, T)}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\bar{\phi}\phi - \frac{b_3}{6}(\phi^3 + \bar{\phi}^3) + \frac{b_4}{4}(\phi\bar{\phi})^2 \tag{2.12}$$

Avec,

$$b_2(T) = a_0 + a_1(\frac{T_0}{T}) + a_2(\frac{T_0}{T})^2 + a_3(\frac{T_0}{T})^3 \tag{2.13}$$

Aucun degré de liberté n'est donc ajouté au lagrangien. Seul un potentiel, relié aux effets des gluons par la valeur moyenne de la boucle de Polyakov, est introduit

a_0	a_1	a_2	a_3	b_3	b_4
6.75	-1.95	2.625	-7.44	0.75	7.5

TAB. 2.1 – Paramètres du potentiel effectif de la boucle de Polyakov

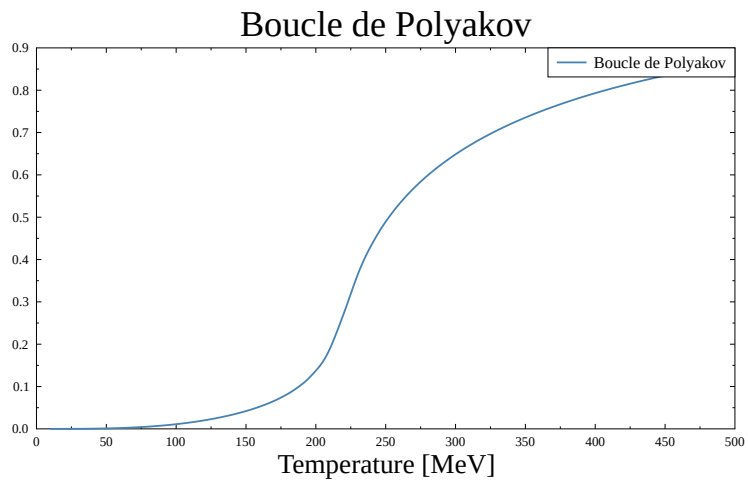


FIG. 2-2 – Boucle de Polyakov

dans le lagrangien. A basse température la valeur moyenne de cette boucle est proche de 0 et la phase est confinée. Dans une théorie de pure jauge il n'y a aucun degré de liberté coloré dans le milieu. A haute température la boucle de Polyakov augmente rapidement, rendant compte du changement d'état dans le milieu. En ce sens, la boucle de Polyakov rend compte de la présence de confinement et sert de paramètre d'ordre.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{PNJL} &= \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m_o)\psi \\
&+ G\sum_a[(\bar{\psi}\tau^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\tau^a\psi)^2] \\
&- K[det\bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi + det\bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi] \\
&- U(\phi,\bar{\phi},T)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

où $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$ est la dérivée covariante.

La distribution de Fermi-Dirac devient dans ce cas : [22]

$$f_{\phi}^{+}(E_p) = \frac{(\phi + 2\bar{\phi}e^{-\beta(E_p-\mu)})e^{-\beta(E_p-\mu)} + e^{-3\beta(E_p-\mu)}}{1 + 3(\bar{\phi} + \phi e^{-\beta(E_p-\mu)})e^{-\beta(E_p-\mu)} + e^{-3\beta(E_p-\mu)}} \tag{2.15}$$

$$f_{\bar{\phi}}^{-}(E_p) = \frac{(\bar{\phi} + 2\phi e^{-\beta(E_p+\mu)})e^{-\beta(E_p+\mu)} + e^{-3\beta(E_p+\mu)}}{1 + 3(\phi + \bar{\phi}e^{-\beta(E_p+\mu)})e^{-\beta(E_p+\mu)} + e^{-3\beta(E_p+\mu)}} \tag{2.16}$$

Le grand potentiel s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega(\phi, \bar{\phi}, m_i, T, \mu) = U(\phi, \bar{\phi}, T) + G\sum_i < \bar{q}_i q_i > \\
&+ 4K < \bar{q}_q q_q >< \bar{q}_q q_q >< \bar{q}_s q_s > -2N_c \int_{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_i \\
&- 2T\sum_i \int_{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \{Tr_c ln[1 + L^{\dagger}e^{-(E_p-\mu)/T}] + Tr_c ln[1 + Le^{-(E_p+\mu)/T}]\}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

où les $Tr_c ln[1+L^{\dagger}e^{-(E_p-\mu)/T}]$ et $Tr_c ln[1+Le^{-(E_p+\mu)/T}]$ sont les fonctions de partition de densités :

$$Tr_c ln[1 + L^{\dagger}e^{-(E_p-\mu)/T}] = ln\left(1 + 3(\bar{\phi} + \phi e^{-(E_p-\mu)/T})e^{-(E_p-\mu)/T} + e^{-3(E_p-\mu)/T}\right) \tag{2.18}$$

$$Tr_c ln[1+Le^{-(E_p+\mu)/T}] = ln\left(1 + 3(\phi + \bar{\phi}e^{-(E_p+\mu)/T})e^{-(E_p+\mu)/T} + e^{-3(E_p+\mu)/T}\right) \tag{2.19}$$

On minimise le grand potentiel par rapport aux variables m, ϕ et $\bar{\phi}$. En tenant compte des masses des trois quarks m_u, m_d et m_s, on obtient un système de cinq équations.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = 0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\phi}} = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = 0 \tag{2.22}$$

Cette dernière formule correspond à l'équation du gap. Les quarks sont donc couplés à la fois aux condensats et à la boucle de Polyakov.

2.3 Conclusion

Nous avons ici expliqué les principes de base du modèle de Nambu et Jona-Lasinio, notamment comment à partir d'un lagrangien effectif de quark, il était possible d'obtenir l'équation du gap, via le traitement d'Hartree-Fock. Nous avons également introduit le modèle PNJL, qui fait appel à la boucle de Polyakov pour traiter des aspects thermodynamiques, en accord avec les résultats de QCD sur réseau.

Chapitre 3

Secteurs des mésons et diquarks

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons traiter des mésons et diquarks. Les mésons sont bien connus dans les modèle NJL et PNJL et ont fait l'objet de nombreuses études [39], [7], [8], [30]. Refaire l'ensemble des calculs s'est avéré ici nécessaire, car nous avons dû étalonner un nouveau jeu de paramètres lors de la construction des baryons. Comprendre et maitriser la construction des mésons était nécessaire, mais il fallait également nous assurer que les masses obtenues à partir des nouveaux paramètres étaient toujours physiques. Nous avons donc commencé par travailler sur les mésons en utilisant des paramètres déjà connus dans la littérature, puis après avoir obtenu les formules pour les baryons nous avons ajusté les paramètres pour obtenir des valeurs réalistes pour toutes les particules.

Nous avons regroupé dans ce chapitre les mésons et les diquarks en raison de la proximité de leurs structures respectives. Ces deux particules seront traitées comme des objets à deux corps, à l'aide d'équations relativement proches. Dans un premier temps nous allons étudier les mésons, en détaillant leur construction dans NJL, en partant de l'équation de Bethe-Salpeter et en détaillant les différents facteurs de couleur et de saveur. Ensuite nous traiterons les diquarks en utilisant l'opérateur de conjugaison de charge.

3.2 Formalisme pour les mésons

3.2.1 Mésons

Les mésons sont des particules composées d'un quark et d'un antiquark de valence. Dans les réactions de haute énergie ils sont produits en grande quantité et peuvent avoir un intérêt dans l'étude du plasma de quarks et de gluons. En particulier les pions, construits à partir des quarks légers, ont une masse très faible et sont abondants lors de ces collisions. Ils sont notamment exploités pour quantifier la perte d'énergie des particules traversant le milieu. En raison de leur composition, les mésons ont une charge baryonique nulle et sont blancs du point de vue de la couleur [11] [15] [32].

De nombreuses publications ont déjà traité de ces particules dans NJL. Les modèles les plus simples se basent sur le groupe des matrices unitaires $SU(2)$ et peuvent inclure la symétrie axiale. Nous verrons dans cette partie comment obtenir les masses des mésons dans $SU(3)$, en présence du terme de 't Hooft, et comment étendre l'étude à température et densité baryonique finies. Par la suite nous construirons les baryons en nous inspirant de ce travail. Avoir l'ensemble des particules décrites dans un seul programme, avec le même formalisme et les mêmes paramètres constitue un enjeu important de cette étude.

3.2.2 L'équation de Bethe-Salpether

Seuls apparaissent les quarks dans le lagrangien du modèle NJL, par conséquent les mésons, tout comme les baryons n'existent pas en tant que degré de liberté et s'obtiennent en construisant l'état. Considérons le cas de la propagation d'un méson, comme une paire de quark et d'antiquark se propageant dans un milieu dans lequel elle sera en interaction.

La somme sur l'ensemble de ces interactions possibles permet d'obtenir la propagation d'une telle particule. Le propagateur du méson considéré est décrit par la fonction de Green et la somme de tous les diagrammes de Feynman qui contribuent rend compte des interactions. Ceci permettra l'écriture de l'équation de Dyson, très

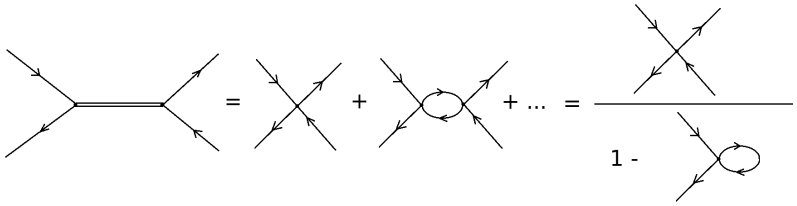


FIG. 3-1 – Equation de Bethe-Salpeter pour les mésons

simple dans notre cas en raison de l'absence de gluon dans le modèle. Le propagateur des mésons correspond donc à un nombre infini de diagrammes, mais dont la somme exacte peut être évaluée. On peut écrire l'équation de Bethe-Salpether suivante :

$$T_{\alpha\beta,\delta\gamma}(p^2) = K_{\alpha\beta,\delta\gamma} + i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_{\alpha\beta,\sigma\tau}\ S_{f,\sigma\mu}\left(k+\frac{p}{2}\right)\ S_{f,\tau\lambda}\left(k-\frac{p}{2}\right)\ T_{\mu\lambda,\delta\gamma}(p^2) \quad (3.1)$$

où le vertex d'interaction ne dépend pas de l'impulsion :

$$K_{\alpha\beta,\delta\gamma} = \sum_{ab} \Omega^a_{\alpha\beta} 2K \bar{\Omega}^b_{\delta\gamma}\ . \quad (3.2)$$

et Ω est défini dans l'espace des couleurs 1_c, des saveurs τ^a et de Dirac $\Gamma = 1, i\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu$ par :

$$\Omega^a_{\alpha\beta} = (1_c \otimes \tau^a \otimes \Gamma)_{\alpha\beta}\ . \quad (3.3)$$

Le facteur 2 présent ici correspond aux deux diagrammes pouvant contribuer pour le vertex, c'est à dire en procédant à l'échange du quark et de l'antiquark sortant. Cette équation est auto-consistante. Graphiquement, la somme des diagrammes considérés peut être ainsi représentée :

On peut réécrire l'équation de cette manière pour mettre en évidence la solution :

$$T_{\alpha\beta,\delta\gamma}(p^2) = \sum_{ab} \Omega^a_{\alpha\beta}\ t_{ab}(p^2) \bar{\Omega}^b_{\delta\gamma} \quad (3.4)$$

Où on a défini la solution :

$$t_{ab}(p^2) = \frac{2K}{1 - 2K\Pi_{ab}(p^2)} \quad (3.5)$$

La fonction de polarisation contient les propagateurs des quarks constituants :

$$\Pi_{ab}(p^2) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ Tr } \left[\bar{\Omega}^a S_F \left(k + \frac{p}{2} \right) \Omega^b S_F \left(k - \frac{p}{2} \right) \right] , \tag{3.6}$$

où les S_F sont les propagateurs des quarks.

Chaque boucle doit être projetée dans les espaces de couleur, saveur et spin. Nous pouvons donc écrire une équation matricielle, pour laquelle la notation la plus générale est la suivante.

$$T_{\alpha\beta,\delta\gamma}(p^2) = \sum_{ij=0}^{8} \Omega^a_{\alpha\beta} \left(\frac{2K}{1 - 2\Pi_{ab}(p^2)K} \right)_{ij} \bar{\Omega}^b_{\delta\gamma} \tag{3.7}$$

Comme nous l'avons mentionné, nous étudions la propagation d'un méson, de sorte que cette expression soit exactement proportionnelle au propagateur du méson considéré. En effet le dénominateur sera donc proportionnel à la différence du carré de l'impulsion et de la masse du méson.

$$V^{\alpha}_{Meson-q\bar{q}} \frac{i}{p^2 - m^2_{meson}} V^{\alpha}_{Meson-q\bar{q}} \tag{3.8}$$

Les $V_{Meson-q\bar{q}}$ indiquent les vertex entre le méson et la paire quark-antiquark.

Par identification, on obtiendra la masse lorsque ce dénominateur s'annule.

$$1 - 2\Pi(p^2 = m^2_{meson})K = 0 \tag{3.9}$$

Les mésons sont classés dans les multiplets J^{PC} en fonction de leur spin et parité. Les mésons de moment orbital $l = 0$ sont de type Pseudoscalaire (0^{-+}) et Vectoriel (1^{--}). Ceux de moment orbital $l = 1$ sont Scalaire (0^{++}) et Axial (1^{++}) et (1^{+-}). Le tableau ci-dessous résume la nomenclature des mésons.

Nous avons ici donné la méthode générale pour obtenir l'équation à résoudre afin de déterminer les masses des mésons. Afin de poursuivre le calcul il convient de séparer les différents secteurs qui apparaissent dans le lagrangien de NJL donné ici avec le terme de 't Hooft. A priori, la constante de couplage et la fonction de polarisation dépendent toutes deux du secteur considéré.

	Γ	Mésons
Pseudoscalaire	$i\gamma^5$	π, K, η, η'
Scalaire	1	a_0, K_0^*, f_0, f_0'
Vecteur	γ^μ	ρ, K^*, ω, ϕ
Axial	$i\gamma^5\gamma^\mu$	a_1, K_1^*, f_1, f_1'

TAB. 3.1 – Mésons dans l'espace de Dirac

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_f \bar{\psi}_f(\gamma_\mu\partial^\mu - m_o)\psi_f + G\sum_{a=0}^{8}\left[(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\lambda^a\psi)^2\right] \\
&\quad -G_v\sum_{a=0}^{8}\left[(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\lambda^a\psi)^2\right] \\
&\quad -K\left[det(\bar{\psi}(1+\gamma^5)\psi) + det(\bar{\psi}(1-\gamma^5)\psi)\right] \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Les versions modernes du modèle NJL se basent sur le groupe SU(3) et permettent de décrire les particules composées de quark u, d et s. Ce modèle étant destiné à une étude à basse énergie il n'est pas nécessaire de prendre en compte les quarks lourds. Les secteurs vectoriel et axial sont concernés uniquement par le terme G_v. Pour les secteurs pseudoscalaire et scalaire il faut introduire le terme de 't Hooft en K afin de tenir compte de l'anomalie axiale. Les vertex de ces particules seront déterminés par un mélange des deux constantes G_s et K, alors que les particules axiales et vectorielles dépendent uniquement de G_v. Dans l'approximation de champ moyen le vertex à six fermions peut être réduit à une interaction à quatre fermions. Après réécriture en terme de matrice de Gell-Mann, le lagrangien prend la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_f \bar{\psi}_f(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_o)\psi_f + \sum_{a=0}^{8}\left[K_a^{(-)}(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + K_a^{(+)}(\bar{\psi}i\gamma^5\lambda^a\psi)^2\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}K_m^{(-)}(\bar{\psi}\lambda^8\psi)(\bar{\psi}\lambda^0\psi) + \frac{1}{2}K_m^{(+)}(\bar{\psi}i\gamma^5\lambda^8\psi)(\bar{\psi}i\gamma^5\lambda^0\psi)\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}K_m^{(-)}(\bar{\psi}\lambda^0\psi)(\bar{\psi}\lambda^8\psi) + \frac{1}{2}K_m^{(+)}(\bar{\psi}i\gamma^5\lambda^0\psi)(\bar{\psi}i\gamma^5\lambda^8\psi)\right] . \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Les constantes de couplage effectives sont des combinaisons linéaires des constantes

Canal de saveur	Particule
λ_3	π^0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$	$\pi^\pm$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$	K^0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_4 \pm i\lambda_5)$	$K^\pm$

TAB. 3.2 – Mésons pseudoscalaires

du lagrangien :

$K_0^\pm = G_s \mp \frac{1}{3} N_c K(iTrS^s + 2iTrS^u)$

$K_1^\pm = G_s \pm \frac{1}{2} N_c K iTrS^s$

$K_1^\pm = K_2^\pm = K_3^\pm$

$K_4^\pm = G_s \pm \frac{1}{2} N_c K iTrS^u$

$K_4^\pm = K_5^\pm = K_6^\pm = K_7^\pm$

$K_8^\pm = G_s \mp \frac{1}{6} N_c K(iTrS^s - 4iTrS^u)$

$K_m^\pm = \mp \frac{1}{3} N_c K\sqrt{2}(iTrS^s - iTrS^u)$

où on a noté $S^u = S^d$, le propagateur pour les quarks u et d et S^s pour le quark s et on utilise les huit matrices de Gell-Mann de $SU(N_f = 3)$, ainsi que la matrice λ_0 définie par :

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{1} \tag{3.12}$$

3.2.3 Secteur Pseudoscalaire

Dans un premier temps on s'intéresse aux mésons pseudoscalaires, en particulier les pions et les kaons, très présents dans les réactions de haute énergie. En effet le multiplet des mésons pseudoscalaires contient ceux dont les masses sont les moins élevées.

Dans l'espace des saveurs, les neuf combinaisons possibles de quarks sont regroupées dans la représentation irréductible de singlet et d'octet : $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$.

Le contenu de chaque méson est donné par : $|i, \mathbf{3}\rangle$, où les indices sont $i = 1, 2, 3(u, d, s)$ pour le quark et l'antitriplet : $|j, \bar{\mathbf{3}}\rangle$ avec $j = 1, 2, 3(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ pour l'antiquark.

$$
\begin{aligned}
|\pi^+\rangle &= |u\bar{d}\rangle = |1,\mathbf{3}\rangle \otimes |2,\bar{\mathbf{3}}\rangle = \delta_{i1}\delta_{j2} \\
|\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i2}\delta_{j2}) \\
|\pi^-\rangle &= d\bar{u} = \delta_{i2}\delta_{j1} \\
|K^+\rangle &= u\bar{s} = \delta_{i1}\delta_{j3} \\
|K^0\rangle &= d\bar{s} = \delta_{i2}\delta_{j3} \\
|\bar{K}^0\rangle &= s\bar{d} = \delta_{i3}\delta_{j2} \\
|K^-\rangle &= s\bar{u} = \delta_{i3}\delta_{j1} \\
|\eta_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2} - 2\delta_{i3}\delta_{j3}) \\
|\eta_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2} + \delta_{i3}\delta_{j3})
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Les indices sur les symboles de Kronecker sont propices à une notation sous forme matricielle. Les matrices λ permettent d'exprimer ces facteurs de saveur, où celles qui contribuent sont données par les indices i et j.

$$
\begin{aligned}
\tau_{ij}^{\pi^\mp} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^1 \pm i\lambda^2\right)_{ij} \\
\tau_{ij}^{\pi^0} &= \lambda_{ij}^3 \\
\tau_{ij}^{K^\mp} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^4 \pm i\lambda^5\right)_{ij} \\
\tau_{ij}^{\bar{K}^0,K^0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda^6 \pm i\lambda^7\right)_{ij} \\
\tau_{ij}^{\eta_8} &= \lambda_{ij}^8 \\
\tau_{ij}^{\eta_1} &= \sqrt{\frac{2}{3}}1_{ij}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Les mésons peuvent également être regroupés dans une matrice unique, où les trois lignes correspondent respectivement aux quarks u, d et s et les trois colonnes

aux antiquarks ($\bar{u}, \bar{d}$ et $\bar{s}$), de sorte que l'on puisse retrouver la composition ainsi que les matrices λ qui contribuent pour chacun d'eux.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K^0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Dans la suite nous considérons que les différents secteurs sont indépendants et nous les traiterons séparément sans faire intervenir les possibles mélanges entre eux. Le secteur pseudoscalaire concerne l'octet des mésons de spin 0, qui contient les mésons π^+, π^-, π^0, K^+, K^-, K^0, $\bar{K^0}$, η et η'. Il permet d'établir les paramètres du modèle dans SU(3), c'est à dire en prenant en compte l'étrangeté. Du fait de l'approximation d'isospin, les pions sont dégénérés. De même les kaons sont dégénérés entre eux. Des masses nues différentes pour les quarks u et d conduiraient naturellement à des masses différentes pour ces particules. La génération des masses des particules η et η' doit être faite dans le cadre de la brisure de la symétrie $U_A(1)$. Dans ce secteur l'équation générale permettant de déterminer la propagation des mésons s'écrit :

$$-i\Pi(p^2)_{ij} = N_c \sum_{kl} \tau^{\dagger i}_{kl} \tau^j_{lk} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr } \left[\gamma_5 S^l_F \left(k + \frac{p}{2}\right) \gamma_5 S^k_F \left(k - \frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.16}$$

La composition de chaque méson permet de déterminer l'interaction, chacune des particules pouvant être exprimée dans la représentation des matrices que nous avons choisie.

Les pions π^+ et π^- et les kaons ne sont pas couplés à d'autres particules. Par exemple, pour le pion π^+, on ne considère donc dans cette équation que les états π^+/π^+, tous les autres étant nuls. Le méson étant aussi le propagateur ici, la forme suivante devrait décrire également l'interaction :

$$(i\gamma_5)\frac{-ig^2_{\pi qq}}{p^2 - m^2_\pi}(i\gamma_5) \tag{3.17}$$

Le pôle de l'équation de Bethe-Salpether est nul lorsque la masse du propagateur au carré est égale à son impulsion au carré. Déterminer le pôle rend possible l'accès à la

masse de la particule que l'on construit.

$$1 - 2K_\pi \Pi_\pi(p^2 = m_\pi^2) = 0 \tag{3.18}$$

Cette identification accorde aussi l'obtention de la constante de couplage en réalisant une expansion autour du pôle en $p^2 = m_\pi^2$. On obtient la formule suivante, dont la forme est identique pour tous les mésons pseudoscalaires :

$$g_{\pi qq}^2 = \left(\frac{\partial \Pi_{ps}}{\partial p^2}\right)^{-1} |_{p^2=m_\pi^2} \tag{3.19}$$

Dans le cas des pions, la sélection du canal approprié pour les π^0, π^+, π^- conduit au même couplage :

$$K_\pi = K_{1,2,3}^{\pm} = G_s \pm \frac{1}{2} N_c K i Tr S^s \tag{3.20}$$

De même pour les kaons :

$$K_K = K_4^{\pm} = G_s \pm \frac{1}{2} N_c K i Tr S^u \tag{3.21}$$

3.2.4 Fonction de polarisation pour le pion

Nous avons vu comment écrire la fonction de polarisation dans le secteur pseudoscalaire, 3.16.

Afin de calculer le facteur de saveur du pion on se réfère à la formule obtenue précédemment 3.14

$$\tau^{\pi^+} = \sqrt{\frac{1}{2}}(\lambda^1 + i\lambda^2) \tag{3.22}$$

La réduction des indices ne donne qu'une seule contribution non nulle dans le cas du pion :

$$-i\Pi(p^2)_{\pi^+} = N_c \sum_{k\bar{l}} \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2)_{k\bar{l}}(\lambda_1 - i\lambda_2)_{\bar{l}k} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr }_\gamma \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}}\left(k + \frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k - \frac{p}{2}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= N_c \sum_{k\bar{l}} \frac{1}{2} 2\delta_{k,1}\delta_{\bar{l},2} 2\delta_{\bar{l},2}\delta_{k,1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr }_\gamma \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}} \left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \\
&= 2N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr }_\gamma \left[i\gamma_5 S^{\bar{2}} \left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^1 \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \\
&\equiv -i\Pi_{1\bar{2}}
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Les indices sur les propagateurs donnent la composition du méson, ici dans le cas du π^+, un quark u pour l'indice ($k = 1$) et un antiquark $\bar{d}$ pour le deuxième indice ($\bar{i} = 2$).

3.2.5 Eta et Eta'

Dans les cas précédents, il n'existait pas de mélange entre les particules et les matrices étaient diagonales. Le cas des η et η' est plus complexe, car ces particules font appel à des mélanges des éléments de matrice K_0 et K_8 pour les vertex et Π_0 et Π_8 pour les fonctions de polarisation. [42] [48]

$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_0^+ & K_{08}^+ \\ K_{80}^+ & K_8^+ \end{pmatrix} , \tag{3.24}
$$

où les éléments non-diagonaux sont donnés par :

$$
K_{08} = K_{80} = \mp \frac{\sqrt{2}}{12} N_c K (iTrS^u + iTrS^d - 2iTrS^s) \tag{3.25}
$$

Quatre fonctions de polarisation sont impliquées, dont deux sont identiques. L'élément $\Pi(p^2)_0$, fait intervenir la matrice identité, comme on peut le voir dans le tableau 3.14.

$$
-i\Pi(p^2)_0 = N_c \sum_{kl} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{1}_{kl} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{1}_{lk} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr } \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}} \left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.26}
$$

Les éléments de la matrice identité sont diagonaux, ce qui implique que les seules contributions non nulles seront pour les indices $k = l$. On obtient donc trois termes,

qui vont fixer les indices des propagateurs.

$$
\begin{aligned}
-i\Pi(p^2)_0 &= N_c \sum_{kl} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 (\delta_{k,1}\delta_{l,1} + \delta_{k,2}\delta_{l,2} + \delta_{k,3}\delta_{l.3})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr } \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}}\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2N_c}{3}(\delta_{k,1}\delta_{l,1} + \delta_{k,2}\delta_{l,2} + \delta_{k,3}\delta_{l.3}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr } \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}}\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Le premier terme donne un propagateur avec l'indice 1, correspondant au quark u, et un indice $\bar{1}$ qui correspond à l'antiquark $\bar{u}$. De même, les deux autres termes correspondent respectivement à $d\bar{d}$ et $s\bar{s}$. Le résultat est donné sans, puis avec la limite d'isospin.

$$
-i\Pi(p^2)_0 = \frac{-i}{3}(\Pi_{u\bar{u}} + \Pi_{d\bar{d}} + \Pi_{s\bar{s}}) = \frac{-i}{3}(2\Pi_{q\bar{q}} + \Pi_{s\bar{s}}) \qquad (3.28)
$$

Il convient de répéter cette procédure pour les autres éléments. Dans le cas de l'élément mixte $\Pi(p^2)_{08}$, deux propagateurs sont impliqués, faisant intervenir la matrice identité et la matrice λ^8 :

$$
-i\Pi(p^2)_{08} = N_c \sum_{kl} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{1}_{kl} \lambda^8_{lk} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr } \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}}\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \qquad (3.29)
$$

Ici encore, seuls les éléments diagonaux ne s'annulent pas et on aura des contributions respectant la condition $l = k$. Cela implique également l'égalité des éléments Π_{08} et Π_{80}.

$$
\begin{aligned}
-i\Pi(p^2)_{08} &= N_c \sum_{k\bar{l}} \sqrt{\frac{2}{3}} (\delta_{k,1}\delta_{\bar{l},1} + \delta_{k,2}\delta_{\bar{l},2} + \delta_{k,3}\delta_{\bar{l},3}) \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta_{k,1}\delta_{\bar{l},1} + \delta_{k,2}\delta_{\bar{l},2} - 2\delta_{k,3}\delta_{\bar{l},3}) \\
&\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr }_\gamma \left[i\gamma_5 S_F^{\bar{l}}\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S_F^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \\
&= N_c \sum_{k\bar{l}} \frac{\sqrt{2}}{3} (\delta_{k,1}\delta_{\bar{l},1} + \delta_{k,2}\delta_{\bar{l},2} - 2\delta_{k,3}\delta_{\bar{l},3})
\end{aligned}
$$

$$\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr }_\gamma \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}} \left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.30}$$

$$= -i\frac{\sqrt{2}}{3}(\Pi_{q\bar{q}} - \Pi_{s\bar{s}}) \ . \tag{3.31}$$

Enfin, le dernier terme s'écrit uniquement avec la matrice λ^8

$$\begin{aligned} -i\Pi(p^2)_8 &= -i\Pi(p^2)_{88} = N_c \sum_{kl} \lambda^8_{kl}\lambda^8_{lk} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr } \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}} \left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \\ &= N_c \sum_{k\bar{l}} \frac{1}{3}(\delta_{k,1}\delta_{\bar{l},1} + \delta_{k,2}\delta_{\bar{l},2} + 4\delta_{k,3}\delta_{\bar{l},3}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr }_\gamma \left[i\gamma_5 S^{\bar{l}} \left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^k \left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \\ &= -i\frac{1}{3}(\Pi_{q\bar{q}} + 2\Pi_{s\bar{s}}) \ . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Après avoir défini ces quantités, on peut utiliser la forme générale de la solution pour les mésons, la seule différence étant que les $\mathbf{K}$ et $\mathbf{\Pi}$ sont des matrices.

$$\mathbf{t} = 2\mathbf{K}(1 - 2\mathbf{\Pi}\mathbf{K})^{-1} \tag{3.33}$$

Dans ce cas, on doit résoudre une équation matricielle :

$$1 - 2\mathbf{\Pi}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 - 2(\Pi_0 K_0 + \Pi_{08} K_{08}) & -2(\Pi_0 K_{08} + \Pi_{08} K_8) \\ -2(\Pi_{08} K_0 + \Pi_8 K_{08}) & 1 - 2(\Pi_{08} K_{08} + \Pi_8 K_8) \end{pmatrix} \ . \tag{3.34}$$

On utilise l'inverse, en définissant le déterminant de la matrice des K

$$\mathbf{t^{-1}} = (1 - 2\mathbf{\Pi}\mathbf{K})\frac{\mathbf{K}^{-1}}{2} \tag{3.35}$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{K}} \begin{pmatrix} K_8 & -K_{08} \\ -K_{08} & K_0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.36}$$

De cette manière on obtient le système suivant :

$$\mathbf{t^{-1}} = \frac{1}{2}1 - 2\mathbf{\Pi K} \begin{pmatrix} K_8 & -K_{08} \\ -K_{08} & K_0 \end{pmatrix} . \tag{3.37}$$

On définit la notation :

$$\mathbf{t^{-1}} = 0 = \frac{1}{2\det \mathbf{K}} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

où les trois équations sont définies par :

$$A = K_8 - 2\Pi_0 \det \mathbf{K} \tag{3.39}$$

$$B = -K_{08} - 2\Pi_{08} \det \mathbf{K} \tag{3.40}$$

$$C = K_0 - 2\Pi_8 \det \mathbf{K} \tag{3.41}$$

Lorsqu'on résout le système de quatre équations, on obtient les masses respectives des mésons η, défini comme ayant la masse la plus petite et η' dont la masse est plus élevée. On peut séparer en deux équations distinctes pour les mésons η et η'. Pour cela il faut diagonaliser la matrice précèdente. On aboutit alors aux deux équations suivantes :

$$A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} = 0 \tag{3.42}$$

$$A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2} = 0 \tag{3.43}$$

Ces deux équations sont exactement équivalentes à 3.38, mais permettent un traitement numérique plus aisé.

3.2.6 Température finie

Afin d'étendre notre travail à température finie on utilise le formalisme de temps imaginaire. Le propagateur de quark donné par la fonction de Green est antipériodique en temps :

$$S(x,x',\tau,\tau') = \frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n(\tau-\tau')}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} S(k,\omega_n)e^{ik(x-x')} \tag{3.44}$$

où les ω_n sont les fréquences de Matsubara. Le quadrivecteur k a pour quatrième composante $i\omega_n$: $k = \mathbf{k}, k0 = i\omega_n$. Ainsi l'intégration sur cette variable devient une somme :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to iT\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{3.45}$$

On peut alors introduire les fonctions de Fermi-Dirac en effectuant la somme sur les fréquences de Matsubara :

$$\frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n\eta}\frac{1}{i\omega_n \mp E_p} = f(\mp E_p) \tag{3.46}$$

3.2.7 Réduction de la fonction de polarisation

Les fonctions de polarisation apparaissent pour l'ensemble des particules traitées. En 1996, P.Rehberg et S.P.Klevansky [46] ont résumé le traitement des intégrales impliquées dans ce calcul dans le secteur pseudoscalaire. Certaines notations sont introduites dans le but de pouvoir comparer les formules que nous avons utilisées avec celles disponibles dans la littérature.

Pseudoscalaire

On commence avec la formule générale dans ce secteur :

$$-i\Pi_{ij}(p^2) = 2N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}_\gamma \left[i\gamma_5 S^1\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S^2\left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.47}$$

On réalise le changement de variable : $k \to k - p/2$ Le traitement à température finie est obtenu lors de l'intégration sur la quatrième composante :

$$\int d^4k \to iT\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{3.48}$$

On obtient l'expression :

$$\Pi_{ij}(i\nu_n, \mathbf{p}) = -2N_c T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ \mathrm{tr}_\gamma \left[i\gamma_5 S^1(k) i\gamma_5 S^2(k-p) \right] \ , \tag{3.49}$$

où le propagateur de quark s'écrit :

$$S(k) = \frac{1}{\gamma_0(i\omega_n + \mu) - \gamma.k - m} \ . \tag{3.50}$$

On calcule la trace :

$$\Pi_{ij}(i\nu_m, \mathbf{p}) = -8N_c \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(i\omega_n + \mu_1)(i\omega_n - i\nu_m + \mu_2) - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{p}) - m_1 m_2}{[(i\omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2][(i\omega_n - i\nu_m + \mu_2)^2 - E_2^2]} \tag{3.51}$$

On utilise l'identité :

$$(i\omega_n + \mu_1)(i\omega_n - i\nu_m + \mu_2) - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{p}) - m_1 m_2 =$$
$$\frac{1}{2}\left[((i\omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2) + ((i\omega_n - i\nu_m + \mu_2)^2 - E_2^2) + \Big((m_1 \pm m_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2 + i\nu_m)^2 + p^2\Big)\right]$$

Après continuation analytique des fréquences de Matsubara sur l'axe réel on peut réécrire la fonction de polarisation en fonction des intégrales A et B suivantes :

$$A(m, \mu, T) = 16\pi^2 T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E^2} \tag{3.52}$$

$$B_0(\mathbf{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, T) = 16\pi^2 T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2} \frac{1}{(i\omega_n + \nu_m + \mu_2)^2 - E_2^2} \tag{3.53}$$

On obtient l'expression générale dans le secteur pseudoscalaire :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^P(p_0, \mathbf{p}) &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \{A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) \\ &+ \left[(m_1 - m_2)^2 - (p_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \mathbf{p}^2\right] B_0(\mathbf{p}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, p_0)\Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.54}$$

Scalaire

Dans ce secteur, la constante de couplage est la même que pour le secteur pseudoscalaire. Les différences n'apparaissent donc que dans la fonction de polarisation où la matrice Γ dans l'espace de spin est la matrice identité. Dans ce cas on obtiendra :

$$\Pi_{ij}(i\nu_m, \mathbf{p}) = -8N_c \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(i\omega_n + \mu_1)(i\omega_n - i\nu_m + \mu_2) - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{p}) + m_1 m_2}{[(i\omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2][(i\omega_n - i\nu_m + \mu_2)^2 - E_2^2]} \tag{3.55}$$

On effectue la même continuation analytique vers l'axe réel et on exprime en fonction des intégrales A et B :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^S(p_0, \mathbf{p}) &= -\frac{N_c}{4\pi^2} \{A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) \\ &+ \left[(m_1 + m_2)^2 - (p_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \mathbf{p}^2\right] B_0(\mathbf{p}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, p_0)\Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.56}$$

Seule la partie impliquant les masses des quarks est ici différente du secteur pseudoscalaire.

Vecteur

Dans le cas des secteurs vectoriel et axial, la constante de couplage est différente. Elle est reliée par la transformation de Fierz à la constante dans les secteurs scalaire et pseudoscalaire. Voir appendice A

$$G_v = -\frac{G_s}{2} \tag{3.57}$$

Dans les faits, afin d'obtenir des valeurs plus réalistes pour les masses de nos particules, cette valeur peu varier légèrement. Les changements dans la fonction de polarisation viennent essentiellement de la matrice Γ qui devient ici :

$$\Gamma = \gamma^\mu \tag{3.58}$$

La fonction de polarisation s'écrit donc ici :

$$\Pi_{ij}^{\mu\nu}(p^2) = -2TN_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ \mathrm{tr}_\gamma \left[i\gamma_\mu S^1(k) i\gamma_\nu S^2(k-p) \right] \tag{3.59}$$

La fonction de polarisation obéit à la loi de conservation du courant vectoriel :

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0 \tag{3.60}$$

La fonction de polarisation peut toujours être décomposée en une partie transverse et une partie longitudinale. La partie longitudinale est nulle dans le secteur vectoriel. [29]

$$\Pi_{ij}^{\mu\nu}(p_0, \mathbf{p}) = \Pi_T T^{\mu\nu} \tag{3.61}$$

Avec

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \tag{3.62}$$

On calcule la polarisation à partir de l'équation de Dyson.

$$t^{\mu\nu} = 2G_v g^{\mu\nu} + 2G_v g^{\mu\lambda} \Pi_{\lambda\sigma} t^{\sigma\nu} \tag{3.63}$$

L'équation est auto-consistante et sa solution s'écrit :

$$t^{\mu\nu} = \frac{2G_v}{1 - 2G_v \Pi_T^V} T^{\mu\nu} + 2G_v \mathcal{L}^{\mu\nu} \ , \tag{3.64}$$

avec,

$$\mathcal{L}^{\mu\nu} = \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \ . \tag{3.65}$$

Afin d'extraire la masse de la particule on regarde le pôle.

$$1 - 2G_v \Pi_T^V = 0 \tag{3.66}$$

Avec,

$$\Pi_T^V = \frac{1}{3} g^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^V = \frac{1}{3} \Pi_\mu^{V,\mu} \tag{3.67}$$

On utilise les relations : $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$ et $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$ afin d'obtenir une formule générale pour les mésons vecteurs.

$$\Pi_{ij}(i\nu_m, \mathbf{p}) = -8N_c \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-(i\omega_n + \mu_1)(i\omega_n - i\nu_m + \mu_2) - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{p}) + 4m_1m_2}{[(i\omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2][(i\omega_n - i\nu_m + \mu_2)^2 - E_2^2]} \tag{3.68}$$

On peut également réécrire cette expression en fonction des intégrales A et B :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^V(p_0, \mathbf{p}) &= -\frac{N_c}{4\pi^2}\{A(m_1,\mu_1) + A(m_2,\mu_2) \\ &+ \left[(m_1-m_2)^2 - (p_0+\mu_1-\mu_2)^2 + \mathbf{p}^2 - 2m_1m_2\right] B_0(\mathbf{p}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, p_0)\Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.69}$$

Axial

Le secteur axial utilise la même constante de couplage que le secteur vectoriel. Ici on utilise $\Gamma = \gamma^\mu\gamma_5$ La différence principale réside dans le fait que les parties transverses et longitudinales de la fonction de polarisation sont toutes deux non nulles.

$$\Pi^{A,\mu\nu} = \Pi_T^A \mathcal{T}^{\mu\nu} + \Pi_L^A \mathcal{L}^{\mu\nu} \tag{3.70}$$

Comme pour les autres secteurs on peut écrire l'équation de Dyson :

$$t_A^{\mu\nu} = 2G_v g^{\mu\nu} + 2G_v g^{\mu\lambda}\Pi_{\lambda\sigma}^A t^{\sigma\nu} \ . \tag{3.71}$$

On s'intéresse à la partie transverse, où la solution s'écrit :

$$t_T = \frac{2G_v}{1 - 2G_v\Pi_T^A} \tag{3.72}$$

Afin d'obtenir la masse il faudra résoudre l'équation suivante :

$$1 - 2G_v\Pi_T^A = 0 \tag{3.73}$$

avec

$$\Pi_T^A = \frac{1}{3}\Pi_{\mu\nu}^A T^{\mu\nu} \tag{3.74}$$

Une partie de l'expression est commune au secteur vectoriel. Ainsi on peut reprendre les résultats obtenus dans ce cas, comme cela a été fait auparavant [29]. La différence entre les deux expressions réside dans le seul terme :

$$\Pi_{\mu\nu}^A - \Pi_{\mu\nu}^V = \frac{m_1 m_2 N_c}{\pi} B_0(\mathbf{p}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, p_0) g_{\mu\nu} \tag{3.75}$$

En projetant sur la partie transverse on a :

$$\Pi_T^A = \Pi_T^V + \frac{m_1 m_2 N_c}{\pi} B_0(\mathbf{p}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, p_0) \tag{3.76}$$

En reprenant la relation précédente, où seul un facteur numérique relie la partie transverse de la fonction de polarisation :

$$\Pi_T^V = \frac{1}{3}\Pi_\mu^{V,\mu} \tag{3.77}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_{T,ij}^A(p_0, \mathbf{p}) &= \frac{N_c}{6\pi^2} \{A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) \\ &+ \left[(m_1 + m_2)^2 - (p_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \mathbf{k}^2\right] B_0(\mathbf{p}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, p_0)\Big\} \ . \end{aligned} \tag{3.78}$$

3.3 Résultats

3.3.1 Résultat à température nulle

On rappelle les paramètres employés dans le tableau 3.3

Les résultats obtenus à température nulle sont résumés dans le tableau 3.4 pour les mésons pseudoscalaires et scalaires.

Les masses obtenues sont en relativement bon accord avec les données expérimen-

	$P1$	$R.K-Costa$	
m_0u	4.75	5.5	5.5
m_0s	147	140.7	134
$G\Lambda^2$	1.922	1.835	2.3
$K\Lambda^5$	10.0	12.36	11
G_V	$0.31G$	$0.295G$	$0.93G$
Λ	708	602.3	569

TAB. 3.3 – Table des paramètres

Mésons[T=0]	Pion	Kaon	η	η'	a_0	K_0	f_0	f_0'
Masses [MeV]	135	492	512	987	1051	1217	967	1361
Largeur[MeV]	-	-	-	51	117	133	-	104

TAB. 3.4 – Résultats pour les mésons Pseudoscalaires et Scalaires

tales. Les mésons pseudoscalaires sont les plus légers. En particulier les pions, kaons et le η sont plus légers que leurs constituants, ce qui entraine leur largeur nulle du fait de leur stabilité.

De même on peut résumer l'ensemble des masses des mésons vecteurs et axiaux à température et potentiel chimique nul 3.5.

Ces mésons pseudoscalaires peuvent être interprétés comme des pseudo-bosons de Goldstone. C'est la brisure spontanée de la symétrie chirale qui engendre la masse de ces bosons. En effet, lorsque les masses nues des quarks sont nulles, la valeur des masses des mésons devient également nulle. L'introduction d'une masse nue permet de générer une unique masse pour l'ensemble des particules de l'octet. Une différence entre les masses nues des quarks m_{0u} et m_{0d} d'un côté et m_{0s} de l'autre permet de différencier les pions des kaons dans le secteur pseudoscalaire. De même, distinguer m_{0u} et m_{0d} conduirait à des masses différentes pour chacun des pions et chacun

Mésons[T=0]	ρ	ω	$K*$	ϕ	a_1	$K*_1$	f_1	f_1'
Mass[MeV]	723	723	866	999	1098	1262	1098	1424
Width[MeV]	-	-	-	51	250	273	250	399

TAB. 3.5 – Résultats pour les mésons Vecteurs et Axiaux

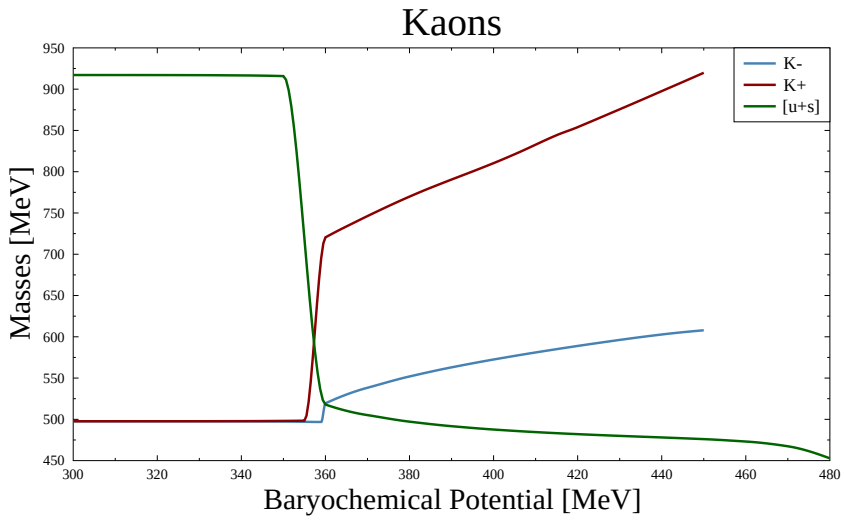


FIG. 3-2 – Kaon en fonction du potentiel baryochimique.

des mésons. Enfin le terme de 't Hooft brise la symétrie $U_A(1)$ et génère la masse des particules η et η'. Si la paramétrisation joue bien un rôle, c'est avant tout les symétries du lagrangien qui dictent la forme du spectre des mésons dans le modèle NJL.

3.3.2 Résultats à densité finie

Dans notre étude nous nous attarderons sur les comportements en température des différentes particules. Le formalisme nous ayant permis d'obtenir certains résultats à potentiel baryochimique fini, nous montrerons ici un exemple, figure 3-2. On trace en particulier la masse du kaon en fonction du potentiel chimique, dont le comportement est particulièrement intéressant. En effet, jusqu'à présent nous avons considéré que le kaon K^+ constitué d'un quark u et d'un antiquark $\bar{s}$ et le kaon K^- constitué d'un quark s et d'un antiquark $\bar{u}$ étaient identiques. Afin de traiter un milieu réaliste, proche du plasma de quarks et de gluons, seul le potentiel des quarks u et d varie $\mu_u = \mu_d \neq 0$, alors que les quarks s n'étant pas des quarks de valence des noyaux collisionnés dans les réactions de haute énergie, conserve un potentiel nul $\mu_s = 0$.

Lors de la transition de phase les quarks perdent rapidement leurs masses lors

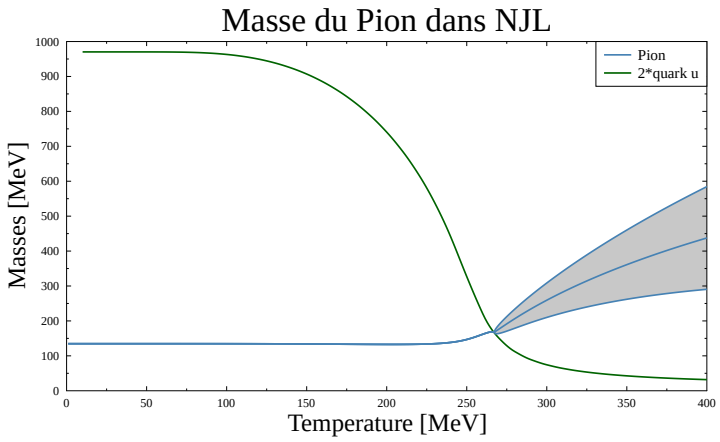


FIG. 3-3 – Masse du pion en fonction de la température.

d'une transition brutale. Les quarks deviennent plus légers que le kaon dont la masse augmente. Du fait des différences de composition, les kaons K^+ et K^- n'ont alors plus des masses identiques. Le nombre de quark u dans le milieu étant grand, le K^+ a une plus grande largeur et sa masse est plus importante.

3.3.3 Température finie

On s'intéresse à présent au comportement des mésons en fonction de la température. Nous commencerons par les mésons pseudoscalaires, très stables, et présents en grande quantité lors des réactions de hautes énergies.

Pseudoscalaire

On peut remarquer que l'allure des courbes semble suivre le même comportement. En effet la masse reste identique avant une température critique où les quarks constituants deviennent plus légers. A partir de cette température, dite de Mott, les quarks sont plus stables que le méson. Ce dernier aura alors tendance à ce désintégrer dans le milieu. On a bien une transition de type cross-over [4], d'un état hadronique vers un milieu gouverné par les quarks. Après cette transition les masses des pions et kaons sont complexes. La partie imaginaire peut être interprétée comme une largeur de dés-

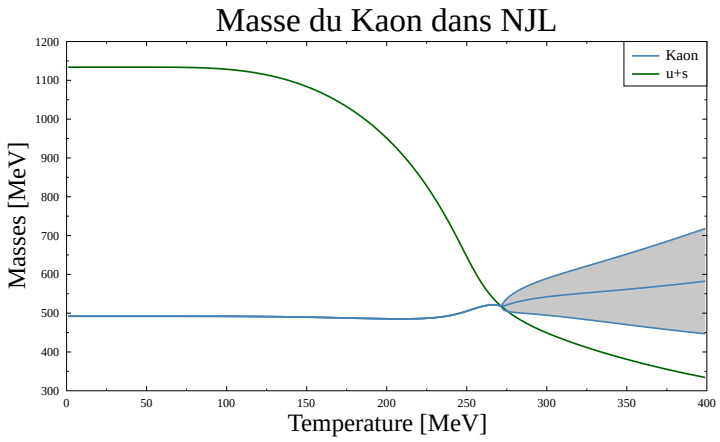


FIG. 3-4 – Masse du kaon en fonction de la température.

intégration. Cette largeur, ainsi que la masse, augmentent avec la température. Les températures de Mott sont comparables pour les pions et les kaons. Leurs valeurs dépendent en partie des paramètres utilisés. L'ensemble des jeux de paramètres utilisés ont en commun de surévaluer la température critique par rapport aux résultats de calculs sur réseau.

L'introduction du terme de 't Hooft permet de reproduire la séparation des η et η'. En son absence, ces deux particules auraient une masse identique. Le modèle prédit également l'instabilité du méson η', même à basse température.

Scalaire

De manière générale les mésons scalaires ont des masses plus élevées. Qualitativement seul le f_0 est stable à basse température. Les autres mésons ont une température supérieure aux quarks qui les constituent et possèdent de ce fait une largeur de désintégration. La hierarchie de masse est ici différente de celle observée dans le secteur pseudoscalaire. Le $f_0(500)$, ou σ correspond au méson pseudoscalaire η et est le plus léger des mésons scalaires. En réalité l'existence de cette particule est délicate à observer et la masse obtenue pour cette particule présente une très grande largeur.

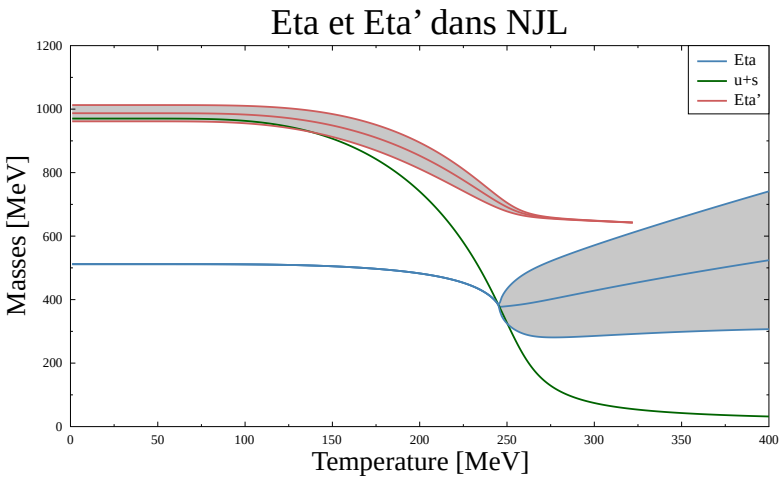


FIG. 3-5 – Masse des mésons η et η'

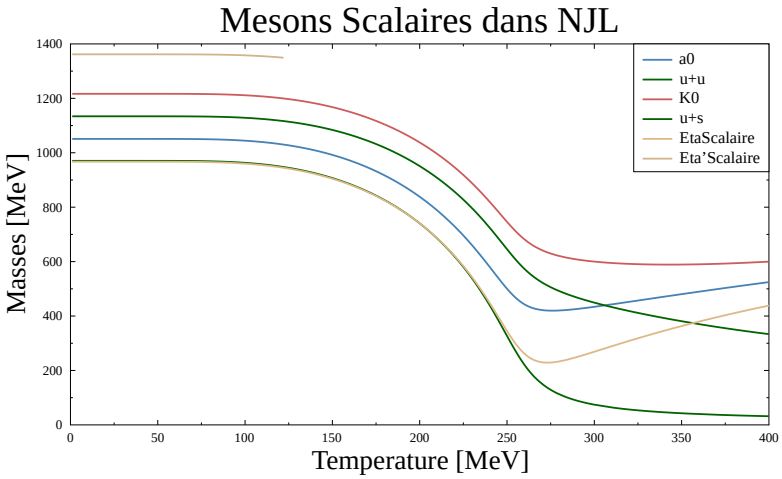


FIG. 3-6 – Masse des mésons scalaires en fonction de la température

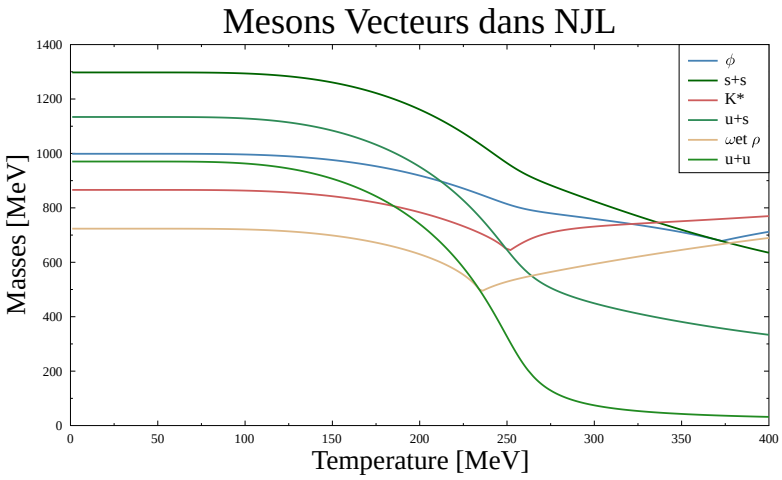


FIG. 3-7 – Masse des mésons vecteurs en fonction de la température

Mésons	Pion	Kaon	η	ρ	ω	$K*$	ϕ
Température de Mott[MeV]	268	271	246	235	235	251	372

TAB. 3.6 – Température de Mott pour les mésons Pseudoscalaires et Vecteurs

Vecteur

Ce secteur est particulièrement intéressant à étudier car, comme pour le secteur pseudoscalaire, les mésons sont stables à basse température. Les mésons ρ et ω sont dégénérés du fait de l'approximation d'isospin et parce que le terme de 't Hooft n'intervient pas dans ce secteur. La hierarchie dans l'ordre des masses est identique à celle présentée pour le secteur pseudoscalaire. Une différence significative apparait toutefois, puisque les températures de Mott sont ici différentes pour les différents mésons vecteurs. En effet la présence d'étrangeté semble influencer ostensiblement la température critique. Des phénomènes identiques concernant les températures de freeze-out ont été observés dans d'autres études [43], [44], [2], [6]. Les résultats concernant les températures de Mott pour ces deux secteurs sont résumés dans le tableau : 3.6.

Ces températures sont comparables pour les pions et kaons, mais une différence significative sépare celles des ρ et $K*$. Cet écart est encore plus marqué pour le ϕ, constitué de deux quarks étranges.

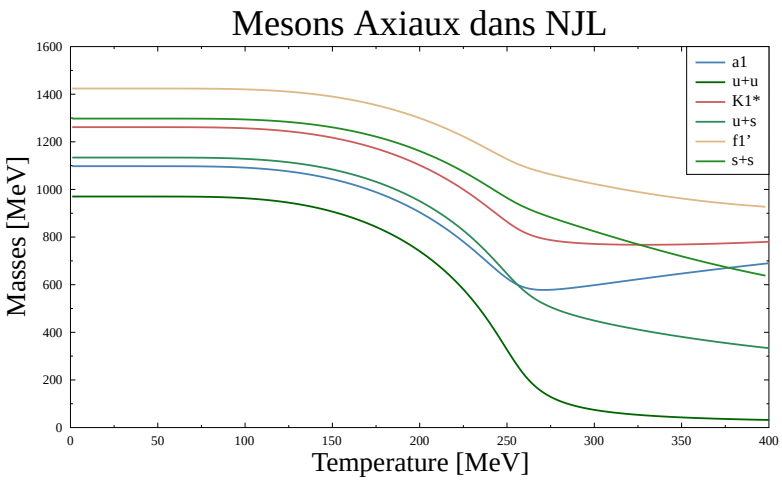


FIG. 3-8 – Méson axiaux en fonction de la température

Axial

Les mésons axiaux présentent des masses plus élevées. Les masses de ces particules sont toujours supérieures à leurs constituants et ils ne sont donc pas stables, même à basse température.

Restauration de la symétrie chirale

Il est intéressant de noter qu'après la transition de phase, la symétrie chirale est restaurée, ce qui signifie que les partenaires chiraux retrouvent des masses identiques. En particulier dans le vecteur-axial, le ρ et $a1$ se confondent à haute température.

De même pour les secteurs pseudoscalaire et scalaire, les masses du pion et du fo, son partenaire chiral, se confondent après la transition de phase.

Pour ces particules, la restauration de la symétrie chirale intervient à des températures plus élevées que les températures de Mott. Ces dernières sont donc indépendantes de la restauration de la symétrie.

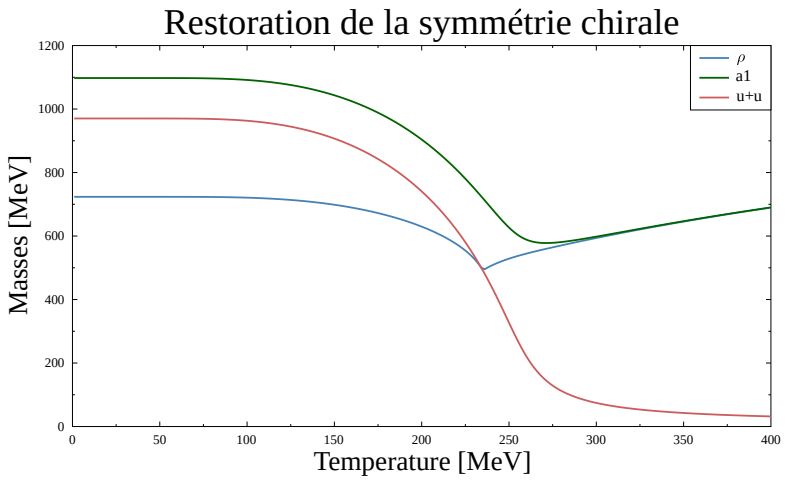


FIG. 3-9 – Restauration de la symétrie chirale dans les secteurs vectoriel et axial.

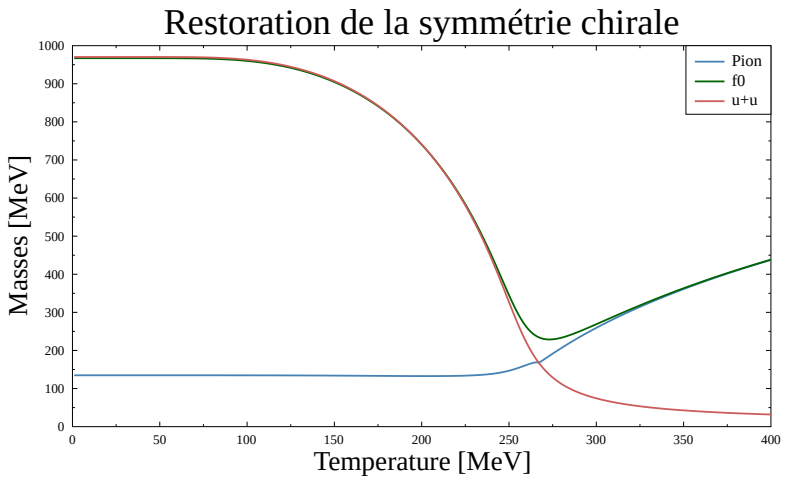


FIG. 3-10 – Restauration de la symétrie chirale dans les secteurs pseudoscalaire et scalaire.

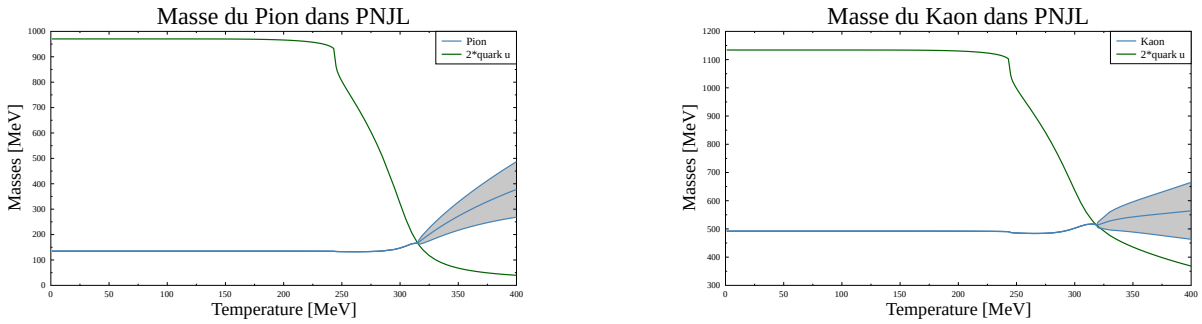


FIG. 3-11 – Pion et Kaon dans PNJL

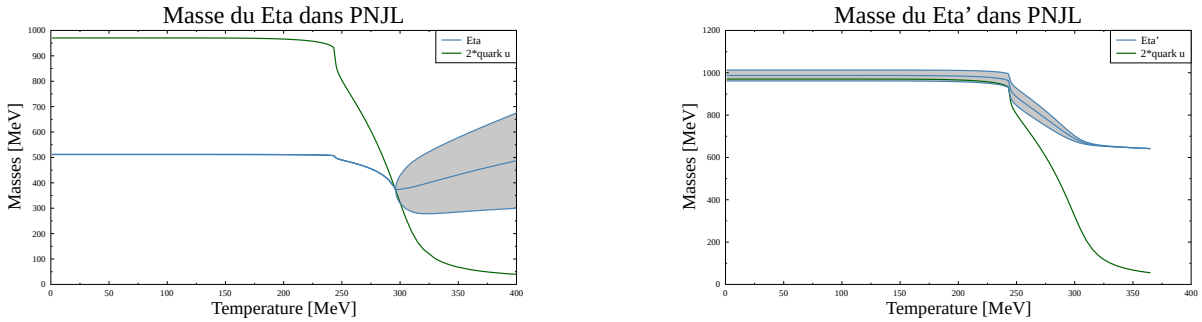


FIG. 3-12 – η et η' dans PNJL

3.3.4 PNJL

Les résultats obtenus avec PNJL montrent en premier lieu un comportement assez similaire. La masse des mésons reste stable, jusqu'à atteindre une valeur critique où la masse des constituants devient plus petite. La masse des mésons augmente alors, et une largeur apparait. Une différence notable induite par l'utilisation de la boucle de Polyakov est l'augmentation de la température de Mott. Cette influence se retrouve pour tous les mésons étudiés.

En comparant directement les courbes en température dans NJL et PNJL on remarque également que la température du pion augmente plus vite après la transition de phase.

Afin de mieux percevoir les différences induites par les deux modèles, on compare, figure 4-4, l'évolution des masses en fonction de $\frac{T}{T_c}$, où T_c est la température de Mott de la particule.

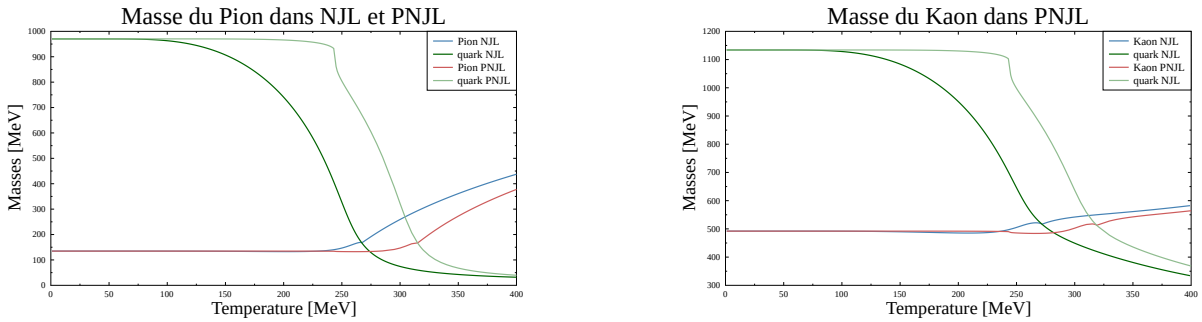


FIG. 3-13 – Comparaison de NJL et PNJL

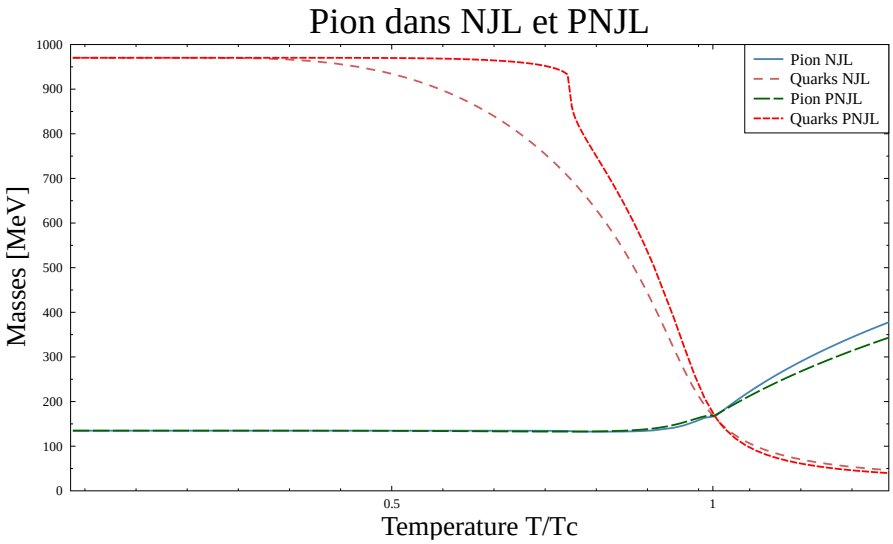


FIG. 3-14 – Pion dans NJL et PNJL

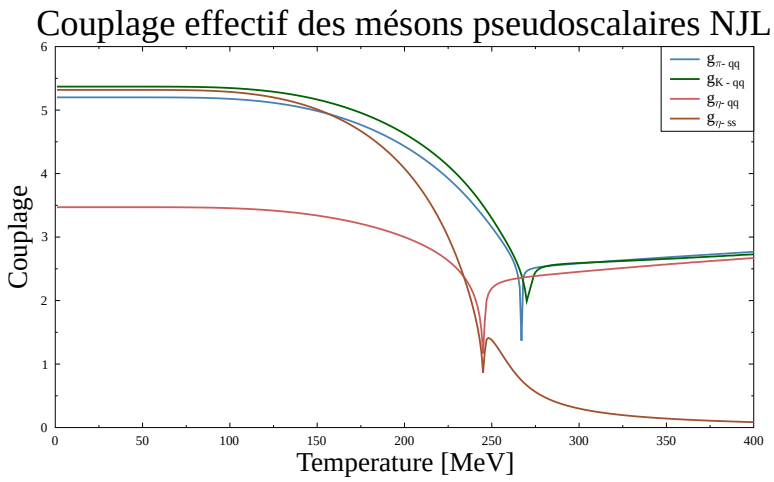


FIG. 3-15 – Constantes de couplage dans le secteur pseudoscalaire

Constante de Couplage

On montre ici, figure 3-15 les constantes de couplage dans le secteur pseudoscalaire. La masse des mésons et la fonction de polarisation interviennent dans le calcul de ces constantes ce qui explique la chute brutale de la valeur du couplage autour de la température de Mott. Après la transition de phase le couplage devient relativement constant. On notera que pour le méson η, on peut considérer la constante liée à une paire de quarks u, d ou s.

3.4 Diquark

3.4.1 Généralités

Nous avons vu dans la partie précédente que si les mésons n'apparaissent pas dans le lagrangien de NJL, ils peuvent néanmoins être construits à partir des quarks et antiquarks et traités à température et potentiel finis. Notre étude a pour vocation de traiter l'ensemble des hadrons dans un formalisme unifié. On s'intéresse maintenant aux diquarks, ces systèmes de deux quarks qui seront traités par la suite de manière similaire aux mésons. Des différences évidentes séparent pourtant ces deux types

Nomenclature	Spin	Couleur	Saveur	Γ
Scalaire	0	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$i\gamma^5$
Pseudoscalaire	0	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	1
Vectoriel	1	$\bar{\mathbf{3}}$	$\bar{\mathbf{3}}$	$\gamma^\mu\gamma^5$
Axial	1	$\bar{\mathbf{3}}$	$\mathbf{6}$	γ^μ

TAB. 3.7 – Représentations des diquarks dans les espaces de couleur, saveur et spin.

d'objets. Les diquarks ne sont pas neutres du point de vue de la charge de couleur puisqu'ils sont la combinaison de deux quarks colorés. Ils doivent donc être soumis au confinement. Notons également qu'ils n'apparaissent pas dans le modèle standard. Dans la suite les diquarks seront utiles dans la description des baryons. L'engouement apporté par la découverte de nombreux baryons dans la seconde moitié du 20ème siècle a provoqué l'émergence de nombreux modèles, dont certains se basent sur les diquarks [34]. En effet il est commode de considérer que les baryons sont en réalité constitués d'un système quark-diquark. Par certains aspects, notamment du point de vue de la couleur, le diquark peut être considéré comme proche d'un antiquark, et on retrouve une construction similaire à celle rencontrée dans l'étude des mésons. En dehors de ces considérations théoriques, il est difficile dans le cadre du modèle NJL de résoudre le baryon comme un système de trois quarks. C'est donc naturellement que la structure à deux corps du baryons a pu être transposée au modèle NJL. [1]

Dans l'espace des couleurs et des saveurs, les diquarks peuvent appartenir à la représentation $\bar{3}$ et sont alors antisymétriques, ou à la représentation 6, symétrique. Dans l'espace des couleurs les diquarks symétriques ne peuvent pas donner de baryons de couleur neutre et sont donc écartés du modèle. En terme de spin, la notation diffère des mésons. En effet si on remplace un quark du diquark par son conjugué de charge on retrouve le cas des mésons mais où la parité sera inverse. On s'intéressera en particulier aux diquarks scalaires, de plus faibles masses et permettant la construction de l'octet de baryons, et les diquarks axiaux qui permettent la construction du décuplet de baryons.

Le tableau 3.7 liste l'ensemble des diquarks que nous allons étudier, en fonction des représentations de couleur, saveur et spin.

Nous sommes particulièrement intéressés par les diquarks scalaires et axiaux qui permettront d'investiguer l'octet et le décuplet de baryon. Notons déjà que l'intensité de l'interaction dans le canal des diquarks doit être modélisée par la constante de couplage que nous avons introduite plus tôt lors de l'étude de la transformation de Fierz. Cette constante est a priori fixée mais pourra être modifiée pour obtenir des résultats plus pertinents. En revanche le traitement des baryons ne voit pas de nouveau paramètre apparaitre. Cette seule constante de couplage des diquarks se doit donc de permettre de reproduire l'ensemble des masses pour les diquarks et baryons. Les paramètres ne sont donc en réalité fixés qu'à la fin du travail sur les baryons et l'ensemble des résultats doit être interprété dans cette optique.

Exotique Depuis que le modèle des quarks, permettant de reproduire le spectre des hadrons, a pu être identifié au modèle des partons, chaque hadron est défini par les quarks de valence qui le constituent. En effet, des paires de quarks et d'antiquarks de même saveur peuvent exister dans ces particules mais seules les quarks de valence sont conservés. Les particules formées autrement que par la réunion de trois quarks ou un quark et un antiquark sont appelées "exotiques". Comme souligné par Jaffe [28], les particules exotiques sont rares, voirs complètement absentes dans la nature et les connaissances apportées par la QCD ne permettent pas de déterminer leur existence. En particulier les tétraquarks et pentaquarks ont fait l'objet de recherches intenses et des signaux, trop faibles pour démontrer avec certitude l'existence de ces particules, ont été captés. Néammoins l'existence de diquarks pourrait être une condition requise pour ces particules et autoriserait l'existence d'un spectre plus étendu des particules connues. L'existence de ces diquarks a ainsi été l'objet de différentes études [3].

3.4.2 Equation dans le secteur des diquarks

Dans cette partie nous allons décrire le formalisme utilisé pour le calcul des masses des diquarks. Le travail réalisé précédemment et portant sur les mésons ne peut être transposé directement aux diquarks. Pour que cela soit rendu possible nous allons utiliser l'opérateur de conjugaison de charge, appliqué à un quark, afin d'obtenir un

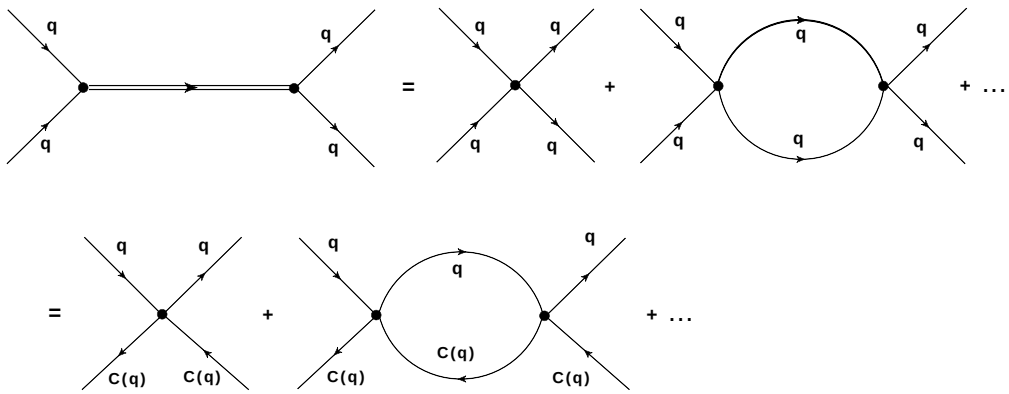


FIG. 3-16 – Equation de Bethe-Salpeter pour les diquarks.

antiquark et de retrouver le cas plus connu du méson. Chaque occurence d'un des deux quarks sera remplacée par le conjugué de charge de l'antiquark correspondant. L'équation de Bethe-Salpeter s'écrit à présent de la manière suivante : figure 3-16.

Graphiquement, il est aisé de voir comment un des quarks peut être remplacé par une particule équivalente, permettant de retrouver l'équation de Bethe-Salpeter [33] [18] :

$$T(p^2)_{\alpha\beta,\delta\gamma} = K_{\alpha\beta,\delta\gamma} + i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[K_{\alpha\beta,\sigma\tau} iS_{F,\sigma\mu}(k+p/2) iS^T_{F,\tau\lambda}(p/2-k) T(p^2)_{\mu\lambda,\delta\gamma}\right] \ , \tag{3.79}$$

avec,

$$T(p^2)_{\alpha\beta,\delta\gamma} = \sum_{a,b} \Omega^a_{\alpha\beta} t_{ab}(p^2) \bar{\Omega}^b_{\delta\gamma} \tag{3.80}$$

et

$$K_{\alpha\beta,\delta\gamma} = \sum_{a,b} \Omega^a_{\alpha\beta} 2G_{DIQ} \bar{\Omega}^b_{\delta\gamma} \ , \tag{3.81}$$

$$\Omega^a_{\alpha\beta} = (t^a_c \otimes t^a_f \otimes \Gamma C)_{\alpha\beta} \ . \tag{3.82}$$

Où $C = i\gamma_0\gamma_2$ est l'opérateur de conjugaison de charge et a et b sont les indices de saveurs et couleurs. Les indices grecs dénotent le spin. En terme de $t(p^2)$ la solution est :

$$t_{ab}(p^2) = \frac{2G_{DIQ}}{1 - 2\Pi_{ab}(p^2)G_{DIQ}} \tag{3.83}$$

avec

$$-i\Pi^{ab}(p^2) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ Tr } \left[\bar{\Omega}^a iS_F(k+p/2)\Omega^b iS_F^T(p/2-k)\right] \ . \tag{3.84}$$

On réalise le changement de variable suivant pour les propagateurs de quarks :

$$k \to k - \frac{p}{2} \tag{3.85}$$

Le dénominateur de cette équation est identifié au propagateur du diquark et s'annule lorsque la masse est égale à l'impulsion, imposant l'équation suivante :

$$1 - 2\Pi_{ab}(p^2 = m^2)G_{DIQ} = 0 \ . \tag{3.86}$$

Comme présenté dans l'appendice A, ce couplage n'est pas identique, mais relié par la transformation de Fierz à la constante dans le secteur mésonique.

$$G_{DIQ} = \frac{3}{4}G_s \tag{3.87}$$

Le terme de 't Hooft n'intervient pas pour les diquarks [51]. Il s'avère que pour obtenir un spectre plus réaliste des diquarks et baryons il convient de modifier cette valeur. Dans la suite G_{DIQ} peut être considérée comme un nouveau paramètre de notre modèle, le seul ajouté à l'ensemble de la partie concernant ces particules. La fonction de polarisation fait de même intervenir l'opérateur de conjugaison de charge $C = i\gamma_0\gamma_2$ par le biais des vertex :

$$-i\Pi^{ab}(p^2) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ Tr } \left[\bar{\Omega}^a iS_F(k)\Omega^b iS_F^T(p-k)\right] \ , \tag{3.88}$$

où Ω est le vertex d'interaction. Obtenir le comportement des diquarks fera donc appel au formalisme présenté précédemment. Nous allons expliciter les facteurs de couleur et de saveur, dans un premier temps dans le secteur scalaire, puis pour l'en-

semble des secteurs.

Couleur Comme nous l'avons vu précédemment, en terme de couleur les diquarks peuvent être décomposés en deux représentations :

$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$

Le sextet de couleur ne permettant pas la construction de baryon blanc, nous travaillerons uniquement avec l'anti-triplet de couleur dont les générateurs peuvent être choisis selon la relation suivante : [33]

$$t^c_{jk} = i\epsilon_{cjk} \tag{3.89}$$

En explicitant seulement le facteur de couleur dans la fonction de polarisation on arrive à l'expression :

$$-i\Pi(p^2)_{ab} = \text{ tr }_c(t^a_c t^b_c) \sum_{kl} \tau^{\dagger a}_{kl} \tau^b_{lk} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{ tr }_\gamma \left[i\gamma_5 S^l_F(k) i\gamma_5 C S^{T,k}_F(p-k) C^{-1} \right] \tag{3.90}$$

On peut alors isoler le facteur de couleur afin de rendre le calcul plus clair :

$$\text{tr }_c(t^a_c t^b_c)_{\bar{\mathbf{3}}} = -\sum_{kl} \epsilon_{akl}\epsilon_{blk} = 2\delta^{ab} \tag{3.91}$$

Secteur scalaire Ce secteur présente un intérêt particulier car il contient les diquarks de plus faible masse, c'est à dire ceux qui seront les plus liés. Ils serviront notamment dans la construction de l'octet de baryons. Les diquarks scalaires correspondent à l'antitriplet dans l'espace de saveur, et sont donc antisymétriques et seuls les diquarks (ud), (us) et (ds) peuvent exister dans ce cas. Les générateurs utilisés sont identiques à ceux utilisés pour la couleur :

$$\tau^f_{jk} = i\epsilon_{fjk} \ , \tag{3.92}$$

où l'indice f fait référence à la saveur.

On peut déjà remarquer ici que ces générateurs seront utilisés pour les canaux antisymétriques, pseudoscalaire et vectoriel, mais ne seront pas adaptés pour le canal

$[q_1 q_2]$	Indice $\bar{i}$	Matrice
(ud)	3	λ_2
(us)	2	λ_5
(ds)	1	λ_7

TAB. 3.8 – Diquarks scalaires dans la représentation d'antitriplet de $SU_f(3)$.

axial. La saveur du diquark sera notée dans la suite par l'indice $\bar{i}$. D'autres notations existent dans la littérature, et il arrive que les matrices λ soient utilisées afin de différencier les saveurs des diquarks. Le tableau 3.8 récapitule les différentes notations.

Afin d'exprimer le propagateur de quark on utilise la transformation :

$$CS_F^{T,k}\left(\frac{p}{2}-k\right)C^{-1} = S_F^k\left(k-p/2\right) \tag{3.93}$$

On obtient pour notre fonction de polarisation une formule dans laquelle il faut expliciter le terme de saveur.

$$-i\Pi(p^2)_{ab} = 2\delta_C^{ab}\sum_{kl}\tau_{kl}^{\dagger a}\tau_{lk}^{b}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\ \left[i\gamma_5 S_F^l\left(k+\frac{p}{2}\right)i\gamma_5 S_F^k\left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.94}$$

Où les $\tau_{kl}^{\dagger a}\tau_{lk}^{b}$ sont les matrices dans l'espace de saveur. Pour réduire les indices nous devons choisir un diquark particulier.Considérons par exemple le cas d'un diquark $a=(ud)$, toujours dans le secteur scalaire. L'indice correspondant dans les générateurs sera $\bar{i}=3$.

$$-i\Pi(p^2)_{(ud)b} = -2\delta_C^{ab}\sum_{kl}\epsilon_{3kl}\epsilon_{blk}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\ \left[i\gamma_5 S_F^l\left(k+\frac{p}{2}\right)i\gamma_5 S_F^k\left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.95}$$

Deux combinaisons sont alors possibles :

$$-i\Pi(p^2)_{(ud)b} \quad = \quad -2\delta_C^{ab}\epsilon_{312}\epsilon_{b21}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\ \left[i\gamma_5 S_F^2\left(k+\frac{p}{2}\right)i\gamma_5 S_F^1\left(k-\frac{p}{2}\right)\right]$$

$$- \quad 2\delta_C^{ab}\epsilon_{321}\epsilon_{b12}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}\ \left[i\gamma_5 S_F^1\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S_F^2\left(k-\frac{p}{2}\right)\right]$$

La seule valeur de b possible est $b = 3$. On obtient ainsi les propagateurs des quarks u et d. En considérant que leurs masses sont identiques on peut sommer les termes.

$$-i\Pi(p^2)_{(ud)} = 4\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{tr}_{\ \gamma}\left[i\gamma_5 S_F^d\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S_F^u\left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.96}$$

On peut, comme pour les mésons, utiliser le formalisme de temps imaginaire pour obtenir le comportement à température finie.

$$\Pi(p^2)_{(ud)} = -4T\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\ \mathrm{tr}_{\ \gamma}\left[i\gamma_5 S_F^d\left(k+\frac{p}{2}\right) i\gamma_5 S_F^u\left(k-\frac{p}{2}\right)\right] \tag{3.97}$$

On rappelle que le propagateur de quark dépendant des fréquences de Matsubara est identique à celui des mésons.

$$S_F^d\left(k+\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{\gamma_0(i\omega_n+\nu_m)-\gamma p - m_d} \tag{3.98}$$

La trace dans l'espace de Dirac donne plusieurs termes qui seront exprimés avec les fonctions précédemment présentées.

$$\Pi(p_0,\mathbf{p})_{(scalaire)} = -\frac{1}{2\pi^2}\left[A(m_1,\mu_1)+A(m_2,-\mu_2)+\left((m_1-m_2)^2-(p_0+\mu_1+\mu_2)^2+\mathbf{p}^2\right)B_0\right] \tag{3.99}$$

Fonction de polarisation dans les différents secteurs Nous avons vu que les matrices Γ ont une incidence sur les fonctions de polarisation des diquarks. Nous présentons ici les résultats dans les différents secteurs.

Diquark	**6** Représentation
$[uu]$	$\tau_{ij}^{[uu]} = \sqrt{2}\delta_{i1}\delta_{j1}$
$[ud]$	$\tau_{ij}^{[ud]} = \lambda_{ij}^{1}$
$[dd]$	$\tau_{ij}^{[dd]} = \sqrt{2}\delta_{i2}\delta_{j2}$
$[us]$	$\tau_{ij}^{[us]} = \lambda_{ij}^{4}$
$[ds]$	$\tau_{ij}^{[ds]} = \lambda_{ij}^{6}$
$[ss]$	$\tau_{ij}^{[ss]} = \sqrt{2}\delta_{i3}\delta_{j3}$

TAB. 3.9 – Diquarks axiaux dans la représentation de sextet de $SU_f(3)$.

Dans le secteur pseudoscalaire :

$$\Pi^P(p_0, \mathbf{p})_{(PS)} = -\frac{1}{2\pi^2}\left[A(m_1,\mu_1) + A(m_2,-\mu_2) + \left((m_1+m_2)^2 - (p_0+\mu_1+\mu_2)^2 + \mathbf{p}^2\right) B_0\right] \tag{3.100}$$

Dans le secteur vectoriel :

$$\begin{aligned}\Pi^V(p_0, \mathbf{p})_{(ud)} &= \frac{1}{\pi^2}\{A(m_1,\mu_1) + A(m_2,\mu_2) \\ &+ \left[(m_1+m_2)^2 - (p_0+\mu_1-\mu_2)^2 + \mathbf{p}^2 + 2m_1m_2\right] B_0\Big\}\end{aligned} \tag{3.101}$$

Ici la constante de couplage n'est pas la même. Elle a été fixée précédemment par la transformée de Fierz :

$$G_{DIQ,V} = -0.5 G_{DIQ} \tag{3.102}$$

Comme pour la constante de couplage des diquarks, il est possible de modifier cette valeur pour obtenir des résultats plus pertinents.

Le secteur axial est particulier puisqu'il appartient à la représentation de sextet de l'espace des saveurs. Les générateurs ne sont donc pas les mêmes.

Les matrices λ symétriques sont utilisées dans ce cas. Des quarks de même saveur peuvent alors former un diquark. La fonction de polarisation dans ce cas est donnée par :

$$\Pi^A(p_0,\mathbf{p})_{Axial} = \Big[A(m_1,\mu_1) + A(m_2,-\mu_2) + (m_1-m_2)^2 - (p_0+\mu_1-\mu_2)^2 + \mathbf{p}^2 - 2m_1m_2\Big]\, B_0 \tag{3.103}$$

Couplage effectif En repartant de l'identification que nous avons utilisée pour la masse :

$$\frac{2G_{DIQ}}{1-2G_{DIQ}\Pi(p_0,\mathbf{p})} = -\frac{g^2_{qqdiq}}{p^2-m^2} \tag{3.104}$$

En inversant la fonction et en dérivant par rapport à k_0

$$-\frac{\partial\Pi(p_0,\mathbf{p})}{\partial p_0} = -\frac{2p_0}{g^2_{qqdiq}} \tag{3.105}$$

Autour du pôle on aura :

$$\frac{\partial\Pi(p_0,\mathbf{p})}{\partial p_0}(p_0=m) = \frac{2m}{g^2_{qqdiq}} \tag{3.106}$$

$$g_{qqdiq} = \sqrt{\frac{2m}{\frac{\partial\Pi(p_0,\mathbf{p})}{\partial p_0}(p_0=m)}} \tag{3.107}$$

Ce couplage dans le canal quark-diquark intervient par la suite dans le calcul des baryons. En effet l'évaluation des vertex nécessite la connaissance de ce couplage. Cette quantité joue donc un rôle physique important ainsi que pour la paramétrisation des résultats dans le secteur baryonique.

3.4.3 Résultats

Température nulle

A température nulle il s'avère que les diquarks scalaires sont les plus légers. Seuls les secteurs scalaires et axiaux donnent des diquarks stables, dont la masse est plus faible que les quarks constituants. Ce phénomène se traduit par l'absence de partie imaginaire, et signifie que seuls ces diquarks seront utilisés lors de la construction des

Diquark	$(ud)_S$	$(us)_S$	$(ud)_{PS}$	$(us)_{PS}$
Masse[MeV]	468	669	929	1146
Largeur[MeV]	-	-	91	126

TAB. 3.10 – Masses des diquarks scalaires et pseudoscalaires à température nulle.

Diquark	$[ud]_V$	$[us]_V$	$[ud]_A$	$[us]_A$	$[us]_A$
Masse[MeV]	1110	1273	765	906	1039
Largeur[MeV]	292	315	-	-	-

TAB. 3.11 – Masses des diquarks vectoriels et axiaux à température nulle.

baryons.

Stabilité des diquarks

Les courbes en température montrent que les diquarks scalaires sont stables pour des valeur basses, c'est à dire avant d'atteindre une température critique autour de 250 MeV. Puisque le modèle NJL ne présuppose rien sur le confinement, l'existence de ces objets colorés n'est pas interdite. Notons tout de même que leurs masses sont supérieures à celles des mésons, les rendant donc moins stables. Cette dépendance permet également de mettre en évidence un comportement similaire aux mésons au delà d'une température critique. Les quarks constituant le diquark deviennent plus légers et sont donc plus stables. Ce phénomène s'accompagne de l'apparition d'une partie imaginaire dans la masse du diquark et que l'on interprète comme une largeur de désintégration.

Comme nous l'avions vu dans la partie précédente concernant les mésons, ce comportement signe la désintégration de la particule au profit d'un milieu constitué des particules élémentaires : un plasma de quarks. Une différence radicale sépare toutefois ces deux résultats. Si ce schéma est attendu pour des hadrons il a néanmoins une conséquence importante dans le cas des diquarks, dans l'optique de la construction des baryons. En effet, le but de l'étude est de modéliser les baryons comme des ensembles de quarks et de diquarks. Cela n'est possible que lorsque le diquark est stable. Lorsque l'on dépasse la transition de Mott pour les diquarks, ils devraient

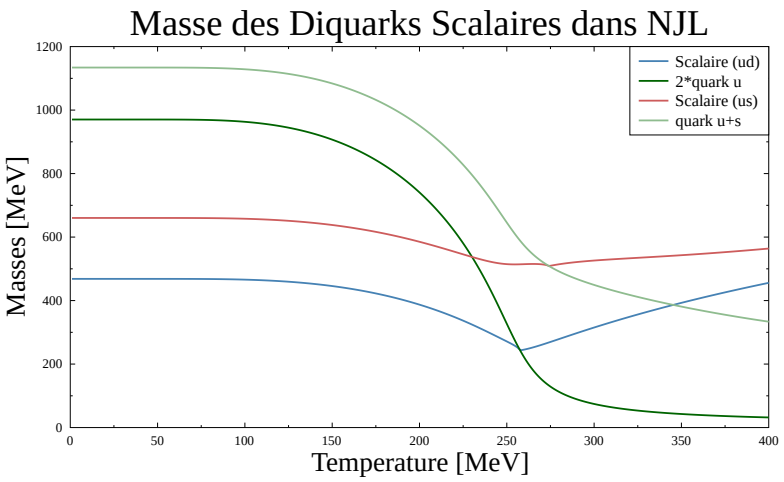


FIG. 3-17 – Diquarks Scalaires

Diquark	$[ud]_A$	$[us]_A$	$[ss]_A$	$(ud)_S$	$(us)_S$
Température de Mott[MeV]	222	240	335	257	274

TAB. 3.12 – Température de Mott pour les diquarks Scalaires et Axiaux

cesser d'exister à l'intérieur du baryon et entrainer sa désintégration. Il faudra tenir compte de ce résultat lors de l'étude de la stabilité de ces particules.

Les diquarks axiaux sont également stables à basse température et possèdent des énergies de liaison de plusieurs centaines de MeV. La température de Mott n'est pas unique pour l'ensemble de ce secteur. En particulier le diquark axial $[ss]_A$ reste stable jusqu'à une température très élevée de 335 MeV. L'étrangeté semble avoir une influence nette sur cette température de Mott. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.12.

De manière générale le secteur scalaire est le plus stable. Les énergies de liaison sont les plus grandes et les températures de Mott pour chaque diquark sont plus élevées que pour leurs homologues dans le secteur axial. Dans les secteurs pseudoscalaire et vecteur, les diquarks ne sont jamais stables.

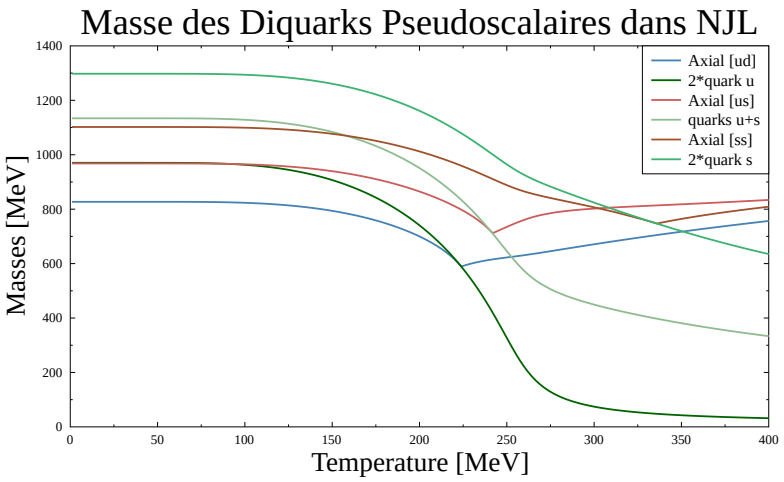


FIG. 3-18 – Diquarks Axiaux

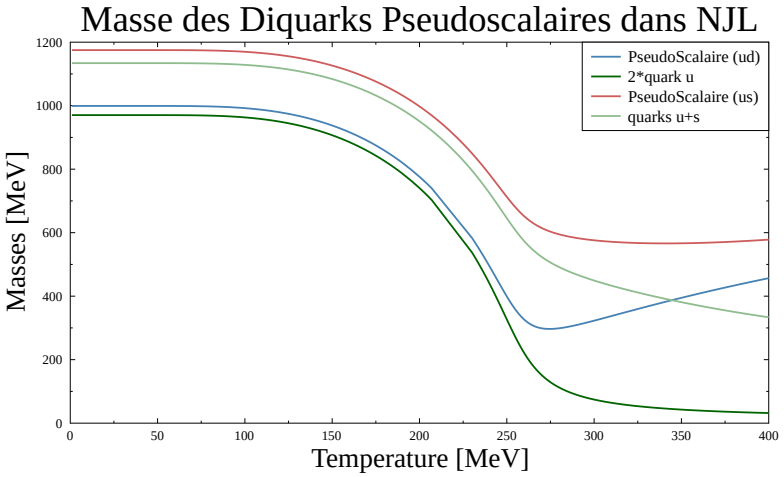


FIG. 3-19 – Diquarks PseudoScalaires

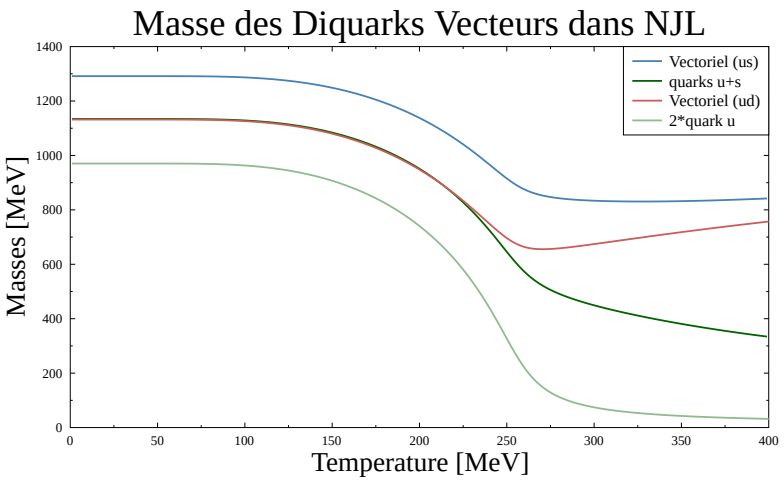


FIG. 3-20 – Diquarks Vecteurs

Diquarks dans PNJL

L'effet de la boucle de Polyakov est identique dans le secteur des diquarks et celui des mésons. Avant la transition de phase, les diquarks sont moins sensibles à l'effet de la température, et leurs masses sont très stables. La transition est plus brutale, et s'effectue à des températures plus grandes. Le modèle PNJL n'influe pas sur la hiérarchie dans les températures de Mott établies précédemment.

Constante de Couplage

On rappelle que les formules pour les constantes de couplage ont été obtenues par identification et en effectuant un développement autour du pôle de la masse des mésons. Elles font intervenir la dérivée de la fonction de polarisation et la masse du méson considéré. On observe que le profil en température peut être clairement séparé en trois phases. A basse température, c'est à dire avant la température de Mott du méson, la courbe diminue de plus en plus rapidement. Une fois cette température atteinte, la chute est plus prononcée, puis le couplage atteint un minimum, et réaugmente aussi brutalement. A cet instant, la masse du méson est égale à ses constituants, et le couplage est nul. La dernière phase, à haute température montre une grande stabilité. Notons que dans cette dernière partie, la fonction de polarisa-

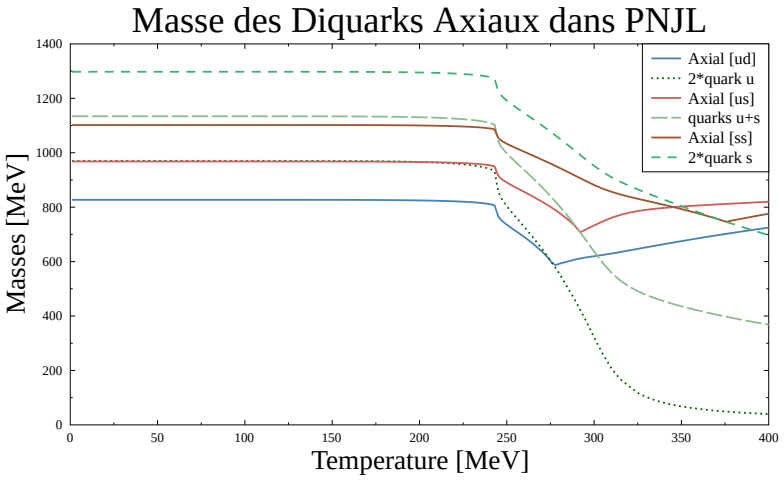


FIG. 3-21 – Diquarks Axiaux dans PNJL

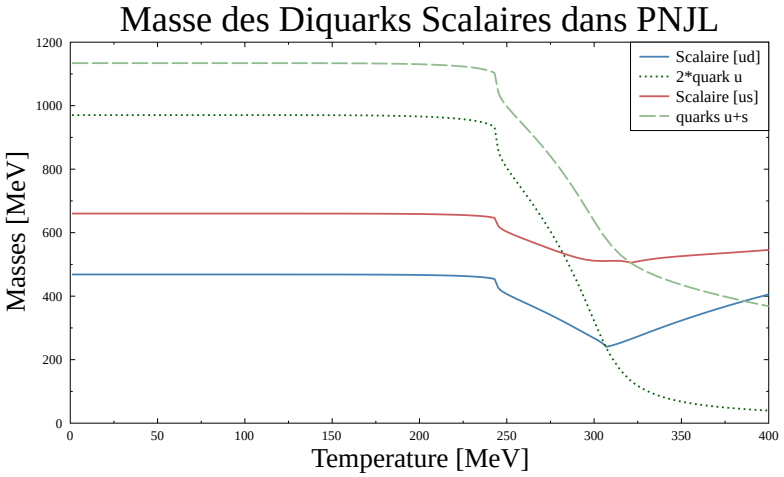


FIG. 3-22 – Diquarks Scalaires dans PNJL

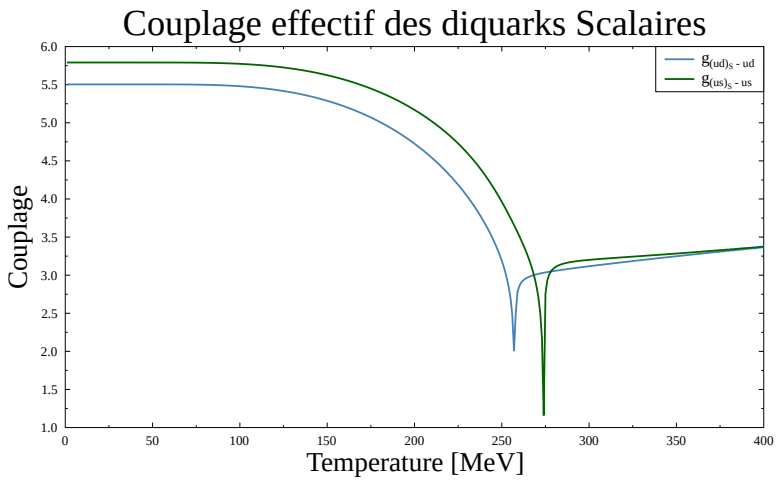


FIG. 3-23 – Modules des constantes de couplage des diquarks scalaires

tion, et donc le couplage, sont complexes. Les quantités tracées ici correspondent aux modules.

3.5 Conclusion

Dans cette section nous avons vu comment construire les mésons et les diquarks dans le modèle NJL. Les formules obtenues permettent de traiter ces particules à température et potentiel finis. Les résultats montrent que les mésons pseudoscalaires et vecteurs sont stables à température et potentiel nuls. L'étude pour des valeurs finies montre qu'au delà d'une certaine température et d'un certain potentiel baryonique, les mésons devraient disparaitre au profit d'un milieu constitué de quarks. Cette transition de phase semble être du premier ordre pour le potentiel, et un cross-over pour la température.

Les diquarks scalaires et axiaux sont également stables, et montrent des profils en température similaires. Dans l'ensemble, les température de Mott pour les mésons et diquarks semblent être plus élevées en présence d'étrangeté. Cette hiérarchie, bien que n'étant pas présente dans tous les secteurs, est redondante, et n'est pas modifiée par l'ajout de la boucle de Polyakov.

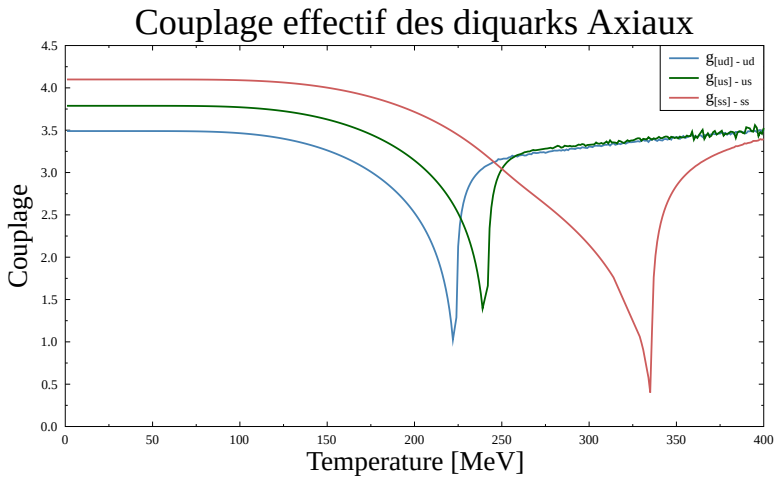


FIG. 3-24 – Constantes de couplage des diquarks axiaux

Chapitre 4

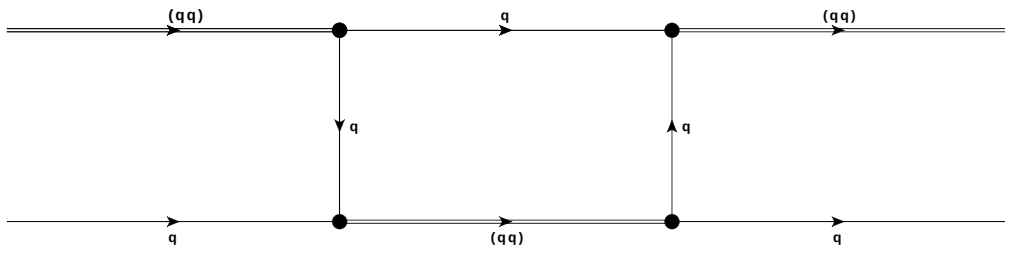
Secteurs baryoniques

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons montré comment il était possible, à partir du lagrangien de NJL, d'obtenir les masses des mésons et des diquarks. Jusqu'à présent nous n'avons fait face qu'à des objets à deux corps, que nous avons traités en évaluant la fonction de polarisation dans le cadre de l'équation de Bethe-Salpeter. On s'astreint maintenant à l'étude des baryons, composés de trois quarks. Pour cela nous allons utiliser l'équation de Faddeev appliquée à un système quark-diquark. Considérer ainsi que deux quarks se lient pour former un diquark autorise le traitement du baryon comme un système à deux corps.

Depuis l'émergence du modèle des quarks, certains auteurs, [24], [34], [41], [25], [26], [14] ont étudié la possible existence des diquarks et leur rôle dans la génération des baryons. En particulier ce dernier propose de considérer le baryon comme issu de l'interaction d'un fermion avec un boson, le dernier étant un système de deux quarks. Cette image a peu à peu disparu au profit du modèle des quarks, mais a depuis suscité à nouveau l'intérêt de la communauté dans le cadre du modèle NJL.

En 1992 en particulier, Reinhardt, Buck et Alkofer [1] ont étudié les baryons dans le modèle NJL, à température nulle. Nous proposons ici de traiter les baryons à température finie, dans $SU(3)$ et en utilisant un formalisme unifié prenant en compte nos résultats pour les quarks et diquarks obtenus précédemment. Un des enjeux majeur



est notamment l'étude de la stabilité des différents baryons. Le modèle NJL permet, en partant de la masse nue des quarks, de générer l'ensemble des particules. Les masses des quarks, diquarks et baryons sont donc intimements liées. L'énergie de liaison à température nulle sera un point central dans l'étude des baryons. On s'attend à observer sa diminution en fonction de la température jusqu'à une valeur critique où elle s'annulera pour libérer dans le milieu les constituants.

Afin de rendre l'étude la plus claire possible nous commencerons par expliquer le formalisme général permettant la description des différents baryons. Ensuite nous séparerons l'étude du vertex de la fonction de polarisation, et nous expliciterons les facteurs de couleur et de saveur.

4.2 Equation pour les baryons

4.2.1 Formalisme

L'idée centrale de notre étude est de considérer que le baryon est un système constitué d'un quark et d'un diquark, où des échanges de quarks peuvent avoir lieu. La configuration du baryon doit changer en conséquence. Tous les états sont projetés sur la fonction d'onde du baryon, en sommant l'ensemble des possibilités. Dans la suite nous verrons en détail comment cela doit être pris en compte dans le cadre de notre modèle, d'abord pour le proton, plus simple de composition, puis pour les autres baryons de l'octet et du décuplet de saveur.

Pour modéliser la propagation d'un quark et d'un diquark, il faut sommer sur l'ensemble des diagrammes de Feynman impliqués dans le processus, en l'occurence tous les échanges de quarks. Dans la suite nous verrons comment calculer les différentes

combinaisons de saveurs et de couleurs.

Nous pouvons dès maintenant établir la différence séparant l'octet de baryon du décuplet. Nous avons vu, en traitant les diquarks, comment réunir deux quarks dans le groupe $SU(3)$:

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6} \tag{4.1}$$

Afin de construire les baryons, il convient de considérer le produit de trois quarks.

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \tag{4.2}$$

L'octet de baryon est théoriquement obtenu avec une composante provenant de l'antitriplet, et une composante du sextet. Le décuplet, en revanche, vient uniquement du sextet. Nous ne prendrons pas en compte le mélange entre les deux secteurs pour l'octet et nous considèrerons que l'antitriplet est dominant dans ce secteur. Les diquarks scalaires seront donc utilisés pour les baryons de l'octet, tandis que les diquarks axiaux seront utilisés pour former le décuplet.

Dans la suite nous reprendrons les travaux basés sur l'équation de Fadeev [33] [27], où on définit la quantité :

$$M^{\alpha\alpha'} = -(-2)_c(\mathcal{P}^{\dagger\alpha}_{j\bar{j}}\mathcal{P}^{\alpha'}_{\bar{k}k})(\tau^{\bar{k}}_{jl}\tau^{\bar{j}}_{lk})\frac{-1}{M_l}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}S_k i t_{\bar{k}} \tag{4.3}$$

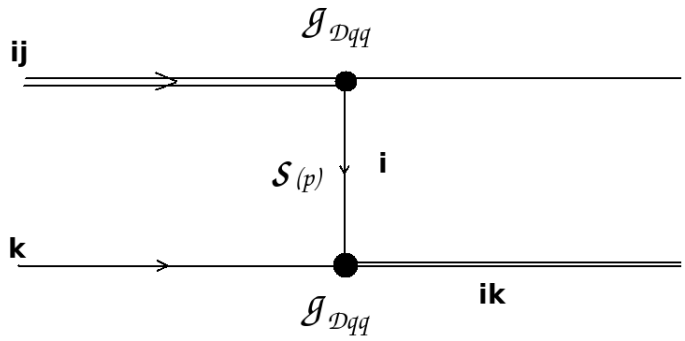
où les $\mathcal{P}$ sont les projecteurs de la fonction d'onde. Nous verrons dans la suite comment les obtenir. Le facteur $(-2)_c$ est le facteur de couleur et les indices α et α' portent sur les différents baryons mis en jeu. L'échange de quark possible dans le diagramme est à l'origine du facteur $\frac{1}{M_l}$ par le biais de l'approximation statique où M_l est la masse du quark. Les propagateurs respectifs du quark et du diquark sont notés S_k et $t_{\bar{k}}$.

Le vertex peut être étudié indépendamment des considérations de saveurs et de couleurs. Nous commencerons donc par l'examiner, avant de regarder comment

construire chaque baryon.

4.2.2 Vertex

Le vertex pour les baryons aura la forme suivante :



La masse des quarks est importante et autorise l'utilisation de l'approximation statique. La contribution de l'échange d'un quark sera donc inversement proportionnelle à sa masse. L'interaction est considérée comme étant ponctuelle. Les baryons ne seront pas traités après la transition de phase, ce qui nous permet de nous assurer que la masse des quarks est toujours suffisament élevée pour que l'approximation soit raisonnable.

Sans expliciter les facteurs de couleur et saveur, le vertex doit correspondre à la formule suivante :

$$g_1 f_1 C_1 \Gamma_1 \frac{i}{\not{p} - m_q} g_2 f_2 C_2 \Gamma_2 \tag{4.4}$$

où $f_1, f_2, C_1, C_2, g_1, g_2$ sont les facteurs de saveur, couleur et les couplages effectifs à chacune des extrémités du propagateur de quark. Le type de diquark impliqué donne également une contribution via la structure de Dirac, $\Gamma = i\gamma_5$ pour les diquarks scalaires à l'origine de l'octet de baryon et $\Gamma = \gamma_\mu$ pour les diquarks axiaux utilisés dans la construction du décuplet.

L'approximation statique nous permet d'ignorer la dépendance en impulsion, faible devant la masse.

$$g_1 f_1 C_1 \Gamma_1 \frac{i}{\not{p} - m_q} g_2 f_2 C_2 \Gamma_2 \rightarrow g_1 f_1 C_1 \Gamma_1 \frac{i}{-m_q} g_2 f_2 C_2 \Gamma_2 \tag{4.5}$$

Afin de déterminer la structure dans l'espace de Dirac, séparons les deux cas, avec pour commencer les diquarks scalaires.

$$g_1 f_1 C_1 i\gamma_5 \frac{i}{-m_q} g_2 f_2 C_2 i\gamma_5 = -g_1 f_1 C_1 \frac{i}{-m_q} g_2 f_2 C_2 \mathbf{1} \tag{4.6}$$

Pour le secteur axial on obtient :

$$g_1 f_1 C_1 \gamma_\mu \frac{i}{-m_q} g_2 f_2 C_2 i\gamma_\mu = 4 g_1 f_1 C_1 \frac{i}{-m_q} g_2 f_2 C_2 \mathbf{1} \tag{4.7}$$

Les formules sont donc identiques dans les deux cas à l'exception d'un facteur -4 dont il faudra tenir compte lors de l'étude du décuplet.

4.2.3 Construction des baryons

Dans ce qui suit nous allons construire les baryons selon deux bases différentes. L'octet de baryon provient de la réunion d'un quark avec l'antitriplet de diquark :$|\alpha, (\mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}})\rangle$

Les indices dépourvus d'une barre décrivent les quarks, $(i = 1, 2, 3$ or $i = u, d, s)$ et les indices $\bar{i}$ représentent les diquarks, ici scalaires $\bar{i} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ ou $\bar{i} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s} = (ds), (us), (ud)$.

Différents systèmes de quark-diquark peuvent être impliqués dans la construction d'une particule. De même différents quarks peuvent être échangés. Notons que dans le cas de l'octet, les diquarks scalaires sont uniquements composés de deux quarks différents, ce qui n'est pas le cas pour les diquarks axiaux qui interviendront dans la construction du décuplet. Afin de déterminer systématiquement les diverses possibilités nous allons ici présenter la méthode générale permettant de projeter la fonction d'onde du baryon.

Détermination des projecteurs La composition des baryons est donnée par la fonction d'onde suivante [23] [34] :

- $p = |u(ud)\rangle$
- $n = |d(ud)\rangle$
- $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u(ds)\rangle + |d(us)\rangle - 2|s(ud)\rangle)$

- $\Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u(ds)\rangle - |d(us)\rangle)$
- $\Sigma^+ = |u(us)\rangle$
- $\Sigma^- = |d(ds)\rangle$
- $\Xi^0 = |s(us)\rangle$
- $\Xi^- = |s(ds)\rangle$

Ils peuvent également être présentés dans la matrice ci-dessous, qui permet de retrouver facilement leur composition :

$$\begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} , \tag{4.8}$$

où les colonnes correspondent respectivement à (ds), (us) et (ud), les lignes correspondent aux quarks u, d et s.

Une base des constituants peut être définie, que l'on notera :

$$|i, \mathbf{3}_f\rangle \otimes |\bar{j}, \bar{\mathbf{3}}_f\rangle \tag{4.9}$$

Les baryons peuvent ainsi être exprimés dans cette base, comme une combinaison linéaire de ces éléments, ou à partir d'un seul élément, par exemple dans le cas où les trois quarks sont identiques. L'obtention de ces coefficients peut être vue comme un changement de base. On cherche à exprimer les états physiques des baryons en terme de ces différentes combinaisons de quark-diquark. Symboliquement on notera cette base physique de la manière suivante :

$$|Phys\rangle = \mathcal{P}_{i\bar{j}}|i, \mathbf{3}_f\rangle \otimes |\bar{j}, \bar{\mathbf{3}}_f\rangle \tag{4.10}$$

où les $\mathcal{P}_{i\bar{j}}$ sont les projecteurs de la fonction d'onde. Ils satisfont la relation :

$$(\mathcal{P}^{\alpha}_{ij})^{\dagger} = \mathcal{P}^{\alpha}_{ij} , \tag{4.11}$$

et la connaissance des projecteurs d'un baryon permet de retrouver sa fonction d'onde. Enfin, dans le cas de l'octet de baryon, les projecteurs peuvent être écrits dans une matrice carrée de dimension 3 et seront exprimés en fonction des matrices de Gell-Mann.

Cas du proton Afin d'expliciter les notations nous allons étudier en détail le cas du proton. La fonction d'onde du baryon s'exprime en fonction de celles des quarks et diquarks constituants, un quark u et un diquark scalaire (ud) dans le cas qui nous intéresse :

$$|proton\rangle = |u(ud)\rangle \equiv |u\rangle \otimes |ud - du\rangle \tag{4.12}$$

Les fonctions d'onde sont normalisées à un. Dans le cas du proton :

$$\langle u(ud)|u(ud)\rangle = 1 \tag{4.13}$$

Le proton est constitué d'un quark u doté d'un indice $i = 1$ et d'un diquark (ud) pourvu de l'indice $\bar{i} = 3$ dans la représentation des diquarks.

$$|Proton\rangle = \mathcal{P}_{13}|1, \mathbf{3}_f\rangle \otimes |3, \bar{\mathbf{3}}_f\rangle \tag{4.14}$$

Il est évident que pour retrouver la fonction d'onde du proton on doit avoir $\mathcal{P}_{13} = 1$. Maintenant, on souhaite exprimer les projecteurs en terme de matrices de Gell-Man. Seules les matrices λ_4 et λ_5 contribuent pour ces indices. La combinaison qui permet d'obtenir ce seul projecteur est :

$$\mathcal{P}^p_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda^4 - i\lambda^5\right)_{ij} \tag{4.15}$$

Cas du Σ^0 Le cas du Σ^0 étant un peu plus complexe nous allons également le traiter ici. La fonction d'onde est donnée par la combinaison :

$$\Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u(ds)\rangle - |d(us)\rangle) \tag{4.16}$$

En utilisant la base quark-antiquark on a :

$$|\Sigma^0\rangle = \mathcal{P}^{\Sigma^0}_{i\bar{j}} |i, \mathbf{3}_f\rangle \otimes |\bar{j}, \bar{\mathbf{3}}_f\rangle \tag{4.17}$$

Dans ce cas on obtiendra bien deux contributions :

$\mathcal{P}^{\Sigma^0}_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ qui correspond à la partie $u(ds)$ et $\mathcal{P}^{\Sigma^0}_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour la partie $d(us)$. La matrice λ_3 seule permet d'exprimer ces deux projecteurs.

$$\mathcal{P}^{\Sigma^0}_{ij} = \mathcal{P}^3_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}}\lambda^3_{ij} \tag{4.18}$$

L'ensemble des projecteurs est donné ici :

$$\mathcal{P}^p_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda^4 - i\lambda^5\right)_{ij} \tag{4.19}$$

$$\mathcal{P}^n_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda^6 - i\lambda^7\right)_{ij} \tag{4.20}$$

$$\mathcal{P}^\Lambda_{ij} = \mathcal{P}^8_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}}\lambda^8_{ij} \tag{4.21}$$

$$\mathcal{P}^{\Sigma^0}_{ij} = \mathcal{P}^3_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}}\lambda^3_{ij} \tag{4.22}$$

$$\mathcal{P}^{\Sigma^\pm}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda^1 \mp i\lambda^2\right)_{ij} \tag{4.23}$$

$$\mathcal{P}^{\Xi^0}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda^6 + i\lambda^7\right)_{ij} \tag{4.24}$$

$$\mathcal{P}^{\Xi^-}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda^4 + i\lambda^5\right)_{ij} \tag{4.25}$$

L'état singlet impose l'utilisation d'un projecteur surnuméraire :

$$\mathcal{P}^0_{ij} = \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{1}_{ij} \ . \tag{4.26}$$

Tous les projecteurs sont normalisés à un.

$$(\mathcal{P}^\alpha_{ij})^\dagger \mathcal{P}^{\alpha'}_{ji} = \delta^{\alpha\alpha'} \tag{4.27}$$

4.2.4 Facteur de saveur

Pour le calcul des facteurs de saveur nous suivrons les notations de D.Lehmann [33]. Le calcul des éléments de matrice des baryons est donné par la formule 4.3. Nous allons maintenant calculer cet élément dans la cas du proton.

4.2.5 Réduction de l'équation pour le proton

A titre d'exemple, regardons en détail comment les différents indices permettent d'obtenir la relation de dispersion pour le proton. Nous allons calculer les matrices dans les espaces de couleur et de saveur afin de déterminer les indices attachés aux différents propagateurs. Dans ce cas nous allons calculer l'élément M^{PP}, tous les autres $M^{P\alpha'}$ étant nuls. Nous verrons plus tard que certains éléments ne sont pas diagonaux et entrainent des mélanges entre les baryons. Reprenons l'expression précédente, 4.3.

$$M^p = -2(\mathcal{P}^{\dagger\ p}_{j\bar{j}}\mathcal{P}^p_{\bar{k}k})(\tau^{\bar{k}}_{jl}\tau^{\bar{j}}_{lk})\frac{-1}{M_l}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-1)S_k it_{\bar{k}} \tag{4.28}$$

La représentation en saveur du proton fait intervenir deux matrices λ. Utilisons l'expression que nous avons déterminée, 4.19 :

$$(\mathcal{P}^{\dagger\ p}_{j\bar{j}}\mathcal{P}^p_{\bar{k}k}) = \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5)^\dagger_{j\bar{j}}\frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5)_{\bar{k}k} = \frac{1}{4}(2\delta_{j1}\delta_{\bar{j}3} \times 2\delta_{\bar{k}3}\delta_{k1}) \tag{4.29}$$

Pour les matrices τ^c nous allons utiliser la relation :

$$(\tau^c)_{jk} = \tau^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = i\epsilon_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \tag{4.30}$$

On peut établir la correspondance entre les indices $c = 7, 5, 2$ et $\bar{i} = 1, 2, 3$ à partir de la table 3.9.

Dans notre cas, en explicitant tous les indices, on obtient :

$$(\tau^{\bar{k}}_{jl}\tau^{\bar{j}}_{lk}) = i\epsilon_{\bar{k}jl}i\epsilon_{\bar{j}lk} \tag{4.31}$$

Maintenant que nous avons développé chacune de ces quantités nous allons pouvoir

mettre en relation les indices.

$$M^p = -2(\delta_{j1}\delta_{\bar{j}3}\delta_{\bar{k}3}\delta_{k1})(\epsilon_{\bar{k}jl}\epsilon_{\bar{j}lk})\frac{1}{M_l}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-1)S_k it_{\bar{k}} \tag{4.32}$$

Les seules valeurs qui donneront des contributions non nulles sont $j = k = 1$ et $\bar{j} = \bar{k} = 3$ et enfin $l = 2$. La détermination de cet indice l fixe la valeur du quark échangé qui apparait en $\frac{1}{M}$.

$$M^N = \frac{2}{M_d}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-1)S_u it_{\bar{s}} \tag{4.33}$$

On remarquera que les propagateurs sont entièrement fixés par les indices. Seul le quark d peut se propager, de sorte que l'on conservera toujours un diquark (ud) et un quark u seul, ce qui correspond bien aux indices des propagateurs obtenus : $S_u it_{\bar{s}}$.

Notons également que nous avons utilisé la représentation faisant appel aux symboles de Levi-Cevita $\epsilon_{\bar{k}jl}\epsilon_{\bar{j}lk}$. La notation faisant intervenir les matrices λ est parfois également utilisée. Ici le fait d'avoir fixé les indices $\bar{j} = \bar{k} = 3$ conduit à utiliser la matrice λ^2. La forme de cette matrice impose que les indices seront λ^2_{12} ou λ^2_{21} ce qui fixe l'indice $l = 2$. On vérifie alors que les deux méthodes conduisent au même résultat.

4.2.6 Etude du baryon Λ

Les baryons Σ et Ξ sont traités par le même procédé et nous n'exposerons pas en détail le calcul. En revanche les états Λ et Σ^0 sont mélangés, et nous montrerons comment traiter le premier. On peut remarquer que la masse du Σ^0 devrait être la même que celle du $\Sigma^\pm$ dans la limite d'isospin. Lorsque les masses des quarks u et d se confondent, le mélange disparait pour le Σ^0.

$$M^{0\Sigma^0} = 0 \tag{4.34}$$

$$M^{\Lambda\Sigma^0} = 0 \tag{4.35}$$

Le problème du baryon Λ est plus complexe et peut être comparé par certains aspects à celui des mésons η et η' où l'équation à résoudre est matricielle. Puisque nous considérons la limite d'isospin, nous n'avons à traiter qu'une matrice carrée de dimension 2 qui peut être écrite ainsi :

$$\delta^{\alpha\alpha'} - M^{\alpha\alpha'} = 0 \leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - M^{00} & -M^{0\Lambda} \\ -M^{\Lambda 0} & 1M^{\Lambda\Lambda} \end{pmatrix} = 0 \tag{4.36}$$

où on utilise l'état singlet décrit par la matrice λ_0 :

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

La quantité $M^{\alpha\alpha'}$ doit être calculée indépendamment pour ces quatre cas. Le calcul de l'élément $M^{\Lambda\Lambda}$ par exemple ne fait intervenir que les projecteurs de Λ. En consultant les formules on voit que seule la matrice diagonale λ^8 intervient :

$$\mathcal{P}^{\Lambda}_{ij} = \mathcal{P}^{8}_{ij} = \sqrt{\frac{1}{2}}\lambda^{8}_{ij} \tag{4.38}$$

ce qui impose les égalités suivantes sur les indices : $j = \bar{j}$ et $k = \bar{k}$. Dans ce cas on obtient $l = 3$ et une contribution de la forme : $\frac{4}{3}\frac{1}{m_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-1)S_q i t_{\bar{q}}$. En introduisant la notation :

$$\Pi_{\bar{q}q} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(-1)S_q i t_{\bar{q}} \tag{4.39}$$

On peut regrouper toutes les contributions pour cet élément :

$$M^{\Lambda\Lambda} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) \tag{4.40}$$

En répétant la procédure pour chacun, on obtient finalement les quatre quantités suivantes :

$$\begin{cases} M^{00} &= -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) \ , \\ M^{0\Lambda} &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) \ , \\ M^{\Lambda 0} &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) \ , \\ M^{\Lambda\Lambda} &= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) \ . \end{cases} \tag{4.41}$$

En insérant dans la matrice on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} + \frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) & 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{s\bar{s}} - 2\frac{1}{m_q}\Pi_{q\bar{q}}\right) \ . \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

On calcule le déterminant :

$$1 + 2\frac{1}{m_s}\Pi_{q\bar{q}} - 8\frac{1}{m_q^2}\Pi_{s\bar{s}}\Pi_{q\bar{q}} = 0 \ . \tag{4.43}$$

Le résultat final fait intervenir deux fonctions de polarisation ainsi que deux vertex différents. En considérant des masses différentes pour les quarks u et d on aurait obtenu une matrice 3×3 et le résultat aurait fait intervenir toutes les combinaisons possibles. On comprend bien à présent pourquoi le mélange disparait dans la limite d'isospin pour le Σ^0, mais pas pour le λ. Au final nos résultats ne porteront que sur quatre baryons au lieu de huit dans ce secteur. Briser la symétrie d'isospin entrainerait la dégénérescence des masses pour obtenir le spectre complet. Le mécanisme étant bien compris, nous ne l'avons pas pris en compte dans notre étude, en particulier afin d'utiliser un paramètre de moins lors du fit des masses.

4.2.7 Décuplet de baryon

On rappelle que dans le cadre de l'approximation statique, il faut tenir compte d'un facteur -4 additionnel provenant des diquarks axiaux. On obtient dans ce cas l'équation suivante :

$$M^{\alpha\alpha'} = 4(-2)_c \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (\mathcal{P}^{\dagger\ \alpha}_{j\bar{j}}\mathcal{P}^{\alpha'}_{\bar{k}k})(\tau^{\bar{k}}_{jl}\tau^{\bar{j}}_{lk})\frac{-1}{M_l}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_k i t_{\bar{k}} \tag{4.44}$$

Baryon du décuplet	Fonction d'onde $\|i,\mathbf{3}\rangle \otimes \|\bar{j},\mathbf{6}\rangle$ basis
Δ^{++}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Delta^{++}} = \delta_{i1}\delta_{\bar{j}1}$
Δ^{+}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Delta^{+}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i2}\delta_{\bar{j}1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{i1}\delta_{\bar{j}2}$
Δ^{0}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Delta^{0}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{i2}\delta_{\bar{j}2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i1}\delta_{\bar{j}3}$
Δ^{-}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Delta^{-}} = \delta_{i2}\delta_{\bar{j}3}$
Σ^{*+}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Sigma^{*+}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i3}\delta_{\bar{j}1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{i1}\delta_{\bar{j}4}$
Σ^{*0}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Sigma^{*0}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\delta_{i3}\delta_{\bar{j}2} + \delta_{i2}\delta_{\bar{j}4} + \delta_{i1}\delta_{\bar{j}5}\ )$
Σ^{*-}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Sigma^{*-}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i3}\delta_{\bar{j}3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{i2}\delta_{\bar{j}5}$
Ξ^{*0}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Xi^{*0}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{i3}\delta_{\bar{j}4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i1}\delta_{\bar{j}6}$
Ξ^{*-}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Xi^{*-}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{i3}\delta_{\bar{j}5} + \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{i2}\delta_{\bar{j}6}$
Ω^{-}	$\mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Omega^{-}} = \delta_{i3}\delta_{\bar{j}6}$

TAB. 4.1 – Fonctions d'onde pour le décuplet.

La fonction d'onde des baryons diffère également et est donnée par 4.3 : [34] [23]

Ces fonctions d'ondes sont normalisées à 1.

Réduction de l'équation

Afin d'expliciter la réduction des indices, considérons le cas du baryon Δ^{++}. Le tableau 4.3 donne sa fonction d'onde :

$$|\Delta^{++}\rangle = u[uu] = |1,\mathbf{3}\rangle \otimes |1,\mathbf{6}\rangle \ \rightarrow \mathcal{P}_{i\bar{j}}^{\Delta^{++}} = \delta_{\bar{i}1}\delta_{j1} \tag{4.45}$$

Dans le cas le plus général, on doit considérer tous les différents états mixtes impliquant le Δ^{++}. Pour cela on remplace l'indice α par ce baryon, et l'indice α' est laissé libre et pourra servir pour tous les autres baryons. Pour cette raison, le premier projecteur $\mathcal{P}_{j\bar{j}}^{\dagger\ \alpha}$ est remplacé par les combinaisons des symboles de Kronecker correspondant telles qu'elles peuvent être trouvées dans le tableau 4.3, ce qui aura pour effet de fixer les indices j et $\bar{j}$.

$$M^{\Delta^{++}\alpha'} \ = \ (-2)_c \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \delta_{j1}\delta_{\bar{j}1}\mathcal{P}_{\bar{k}k}^{\alpha'}\ (\tau_{jl}^{\bar{k}}\tau_{lk}^{\bar{j}})\frac{-1}{M_l}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_k \tau_{\bar{k}}$$

$$= \quad (-2)_c \, \frac{1}{2} \, \mathcal{P}^{\alpha'}_{\bar{k}k} \, (\tau^{\bar{k}}_{1l} \tau^{\bar{1}}_{lk}) \, \frac{-1}{M_l} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_k i t_{\bar{k}} \tag{4.46}$$

Il convient à présent de traiter la partie $(\tau^{\bar{k}}_{1l}\tau^{\bar{1}}_{lk})$. Le tableau 3.9 contient les formules correspondantes.

$$\tau^{\bar{1}}_{lk} = \sqrt{2} \, \delta_{l1} \, \delta_{k1} \tag{4.47}$$

L'indice l ne peut alors prendre qu'une seule valeur : $l = 1$. De même, une fois la valeur de l fixée, il ne reste qu'une seule valeur de $\bar{k}$ qui ne s'annule pas : $\bar{k} = 1$.

$$\tau^{\bar{1}}_{11} = \sqrt{2} \tag{4.48}$$

De cette manière notre équation devient

$$M^{\Delta^{++}\alpha'} = (-2)_c \, \frac{1}{2} \, \mathcal{P}^{\alpha'}_{\bar{1}1} \, \sqrt{2}\sqrt{2} \, \frac{-1}{M_1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_1 i t_{\bar{1}} \tag{4.49}$$

Pour fixer α', on cherche les éléments qui donnent une contribution non nulle, ce qui revient à chercher les baryons possédant un mélange avec le Δ^{++}. Le tableau 4.3 montre que pour les indices $i = 1$ et $\bar{j} = 1$, seul le Δ^{++} donne une contribution non nulle de sorte que l'on obtienne $\alpha' = \alpha = \Delta^{++}$, impliquant ainsi l'absence de mélange. Le baryon Δ^{++} n'est pas couplé à un autre baryon et l'équation se réduit à :

$$M^{\Delta^{++}\Delta^{++}} = \frac{2}{M_u} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_u i t_{[uu]} \tag{4.50}$$

Tous les indices sur les propagateurs sont explicités. Ici, en présence de quarks identiques, le résultat est évident. La même méthode peut être appliquée pour déterminer et contraindre les échanges de quarks au sein du baryon considéré.

On donne simplement les résultats pour les autres baryons.

$$M^{\Delta^+\Delta^+} = \frac{2}{3} \, \frac{1}{M_u} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_u i t_{[ud]} + \frac{2}{3} \frac{1}{M_u} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_d i t_{[uu]} + \frac{2}{3} \, \frac{1}{M_d} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_u i t_{[ud]} \tag{4.51}$$

$$M^{\Delta^0\Delta^0} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{M_d}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_u it_{[dd]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_u}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_d it_{[ud]} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{M_d}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_d it_{[ud]} \tag{4.52}$$

$$M^{\Delta^-\Delta^-} = 2\frac{1}{M_d}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_d it_{[dd]} \tag{4.53}$$

Dans la limite d'isospin, les masses des quarks u et d sont identiques et tous les baryons Δ sont décrits par la même équation. Ce phénomène se retrouve également pour les baryons Σ. Les formules ne sont différentes que si les masses des quarks u et d ne sont pas confondues.

$$M^{\Sigma^{*+}\Sigma^{*+}} = \frac{2}{3}\frac{1}{M_u}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_u it_{[us]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_u}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_s it_{[uu]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_u it_{[us]} \tag{4.54}$$

$$M^{\Sigma^{*0}\Sigma^{*0}} = \frac{1}{3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{S_d it_{[us]}}{M_u} + \frac{S_u it_{[ds]}}{M_d} + \frac{S_s it_{[ud]}}{M_u} + \frac{S_u it_{[ds]}}{M_s} + \frac{S_s it_{[ud]}}{M_d} + \frac{S_d it_{[us]}}{M_s}\right] \tag{4.55}$$

$$M^{\Sigma^{*-}\Sigma^{*-}} = \frac{2}{3}\frac{1}{M_d}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_d it_{[ds]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_d}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_s it_{[dd]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_d it_{[ds]} \tag{4.56}$$

De même les baryons Ξ sont dégénérés dans la limite d'isospin.

$$M^{\Xi^{*0}\Xi^{*0}} = \frac{2}{3}\frac{1}{M_u}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_s it_{[us]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_u it_{[ss]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_s it_{[us]} \tag{4.57}$$

$$M^{\Xi^{*-}\Xi^{*-}} = \frac{2}{3}\frac{1}{M_d}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_s it_{[ds]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_d it_{[ss]} + \frac{2}{3}\frac{1}{M_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_s it_{[ds]} \tag{4.58}$$

$$M^{\Omega^-\Omega^-} = 2\frac{1}{M_s}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_s it_{[ss]} \tag{4.59}$$

4.2.8 Fonction de polarisation à température finie

La forme générale de la boucle de quark et diquark peut être définie pour l'ensemble des baryons. Plusieurs boucles peuvent être nécessaires dans la construction d'un unique baryon, mais la forme utilisée est toujours la même. Pour cette raison, il n'est pas utile de conserver les indices de saveur lors de ce calcul.

$$\Pi(q) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} it\left(\frac{q}{2}-k\right)(-1)S\left(\frac{q}{2}+k\right) \tag{4.60}$$

Afin de retrouver les intégrales définies précédemment, on utilise le même changement de variables.

$$k \to -k + \frac{q}{2} \tag{4.61}$$

L'extension à température finie se fait via l'utilisation du formalisme de temps imaginaire.

$$\begin{aligned} \Pi_n(q) &= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} it(k)S(q-k) \\ &= T\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-g^2_{D\to qq}}{(k_0+\mu_D)^2-\epsilon_k^2} \frac{1}{\gamma^\mu(q-k)_\mu - m_q + \gamma_0\mu_q} \ , \end{aligned} \tag{4.62}$$

où on somme sur les fréquences de Matsubara. Dans le cas du baryon, les fréquences associées aux diquarks sont bosoniques. On note $k_0 = i\omega_n$ les fréquences bosoniques et q_0 les fréquences fermioniques associées au quark. L'énergie du diquark sera quant à elle notée $\epsilon_k^2 = m_D^2 + k^2$

Notre définition diffère significativement de travaux réalisés précédemment dans la thèse [9]. Dans cette publication la trace dans l'espace de Dirac supprime un des termes et apporte un facteur 4. De cette manière, il ne reste qu'une équation à ré-

soudre. Une des particules étant un boson, il n'y a pas de somme sur les indices et la trace est absente de notre calcul. La principale conséquence se traduit par le caractère matriciel de notre équation. De fait, les équations obtenues sont, en partie, différentes. En supprimant la partie proportionnelle à γ_0, et en multipliant par 4 la partie proportionnelle à la matrice identité on retrouve l'équation de [9]. Il convient de tempérer cette différence, car les valeurs des constantes de couplage sont ajustées pour obtenir un spectre des baryons en accord avec les données. Comme nous le verrons plus tard, les courbes en température, bien qu'ayant des valeurs différentes montrent des comportements relativement identiques. Dans notre cas, en explicitant le propagateur de quark nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Pi_n(q) &= -T g_{D\to qq}^2 \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu_D + \epsilon_k)(i\omega_n + \mu_D - \epsilon_k)} \\ &\times \frac{(q_0 - i\omega_n + \mu_q)\gamma_0 + m_q \mathbf{1}}{(i\omega_n - q_0 - \mu_q + E_k)(i\omega_n - q_0 - \mu_q - E_k)} \end{aligned} \tag{4.63}$$

où nous étudions seulement le cas où le vecteur $\mathbf{q}$ est nul. On obtient bien deux termes pour notre équation. Le dénominateur fait cette fois-ci intervenir un boson et un fermion, respectivement pour le diquark et le quark. On utilise la notation plus compacte suivante :

$$\frac{1}{D} \equiv \frac{1}{i\omega_n + \mu_D + \epsilon_k} \frac{1}{i\omega_n + \mu_D - \epsilon_k} \frac{1}{i\omega_n - q_0 - \mu_q + E_k} \frac{1}{i\omega_n - q_0 - \mu_q - E_k} \tag{4.64}$$

Ce qui permet la réécriture de la fonction de polarisation :

$$\Pi_n(q) = -g_{D\to qq}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \sum_n \left[-\gamma_0 \left(\frac{i\omega_n - q_0 - \mu_q}{D} \right) + \mathbf{1} m_q \frac{1}{D} \right] \tag{4.65}$$

On réalise la somme sur les fréquences de Matsubara. Les bosons entrainent l'apparition de la fonction de Bose-Einstein, qui décrit l'occupation des états pour ces particules.

$$
\begin{aligned}
T\sum_n \frac{1}{D(p_0 = i\omega_n)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \frac{1}{D(p_0)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta p_0}-1}\right) \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dp_0 \frac{1}{D(-p_0)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta p_0}-1}\right)
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

L'intégrale doit être calculée en cherchant les pôles dans le plan complexe :

$$
\frac{1}{D(p_0)} = \frac{1}{p_0+\mu_D+\epsilon_k}\frac{1}{p_0+\mu_D-\epsilon_k}\frac{1}{p_0-q_0-\mu_q+E_k}\frac{1}{p_0-q_0-\mu_q-E_k} \tag{4.67}
$$

Dans ce cas on trouve deux pôles : $p_0 = \epsilon_k - \mu_D$ et $p_0 = E_k + q_0 + \mu_q$. La deuxième partie est identique à un signe près $p_0 =\rightarrow -p_0$:

$$
\frac{1}{D(-p_0)} = \frac{1}{p_0-\mu_D-\epsilon_k}\frac{1}{p_0-\mu_D+\epsilon_k}\frac{1}{p_0+q_0+\mu_q-E_k}\frac{1}{p_0+q_0+\mu_q+E_k} \tag{4.68}
$$

Les pôles correspondant sont $p_0 = \epsilon_k + \mu_D$ et $p_0 = E_k - q_0 - \mu_q$.

On utilise la formule de Cauchy

$$
\int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 F(p_0) = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}(\text{pôles}_j, F) \tag{4.69}
$$

On obtient donc au final :

$$
\begin{aligned}
T\sum_n \frac{1}{D(p_0)} &= \left[\frac{1}{2} + f_B(\epsilon_k-\mu_D)\right]\frac{1}{2\epsilon_k}\frac{1}{\epsilon_k-\mu_D-q_0-\mu_q+E_k}\frac{1}{\epsilon_k-\mu_D-q_0-\mu_q-E_k} \\
&+ \left[\frac{1}{2} + f_B(E_k+q_0+\mu_q)\right]\frac{1}{E_k+q_0+\mu_q+\mu_D+\epsilon_k}\frac{1}{E_k+q_0+\mu_q+\mu_D-\epsilon_k}\frac{1}{2E_k} \\
&+ \left[\frac{1}{2} + f_B(\epsilon_k+\mu_D)\right]\frac{1}{2\epsilon_k}\frac{1}{\epsilon_k+\mu_D+q_0+\mu_q-E_k}\frac{1}{\epsilon_k+\mu_D+q_0+\mu_q+E_k} \\
&+ \left[\frac{1}{2} + f_B(E_k-q_0-\mu_q)\right]\frac{1}{E_k-q_0-\mu_q-\mu_D-\epsilon_k}\frac{1}{E_k-q_0-\mu_q-\mu_D+\epsilon_k}\frac{1}{2E_k}
\end{aligned}
$$

Le deuxième terme, proportionnel à γ_0, ne change que par la contribution au

numérateur, de sorte que l'on obtienne :

$$
\begin{aligned}
T\sum_n \frac{1}{D(p_0)} &= \left[\frac{1}{2} + f_B(\epsilon_k - \mu_D)\right] \frac{\epsilon_k - \mu_D - q_0 - \mu_q}{2\epsilon_k} \frac{1}{\epsilon_k - \mu_D - q_0 - \mu_q + E_k} \frac{1}{\epsilon_k - \mu_D - q_0 - \mu_q - E_k} \\
&+ \left[\frac{1}{2} + f_E(E_k + q_0 + \mu_q)\right] \frac{1}{E_k + q_0 + \mu_q + \mu_D + \epsilon_k} \frac{1}{E_k + q_0 + \mu_q + \mu_D - \epsilon_k} \frac{E_k}{2E_k} \\
&+ \left[\frac{1}{2} + f_B(\epsilon_k + \mu_D)\right] \frac{-\epsilon_k - \mu_D - q_0 - \mu_q}{2\epsilon_k} \frac{1}{\epsilon_k + \mu_D + q_0 + \mu_q - E_k} \frac{1}{\epsilon_k + \mu_D + q_0 + \mu_q + E_k} \\
&+ \left[\frac{1}{2} + f_E(E_k - q_0 - \mu_q)\right] \frac{1}{E_k - q_0 - \mu_q - \mu_D - \epsilon_k} \frac{1}{E_k - q_0 - \mu_q - \mu_D + \epsilon_k} \frac{-E_k}{2E_k}
\end{aligned}
$$

On calcule à présent l'ensemble des intégrales obtenues en effectuant le même changement de variable pour l'énergie, afin de faire le lien avec le travail réalisé précédemment pour les mésons et le formalisme décrit dans [46].

Pour rendre les notations plus compactes on introduit :

$$
\begin{aligned}
A &\equiv [1 - 2f_F(-E_k + \mu_q)] \frac{1}{\epsilon_k^2 - (E_k - \lambda)^2} \\
&- \frac{1}{2\epsilon_k}[1 + 2f_B(\epsilon_k - \mu_D)] \frac{1}{\epsilon_k - \lambda + E_k} \\
&+ \frac{1}{2\epsilon_k}[1 + 2f_B(\epsilon_k + \mu_D)] \frac{1}{\epsilon_k + \lambda - E_k}
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

et

$$
\begin{aligned}
B &\equiv [1 - 2f_F(E_k + \mu_q)] \frac{1}{\epsilon_k^2 - (E_k + \lambda)^2} \\
&+ \frac{1}{2\epsilon_k}[1 + 2f_B(\epsilon_k + \mu_D)] \frac{1}{\epsilon_k + \lambda + E_k} \\
&- \frac{1}{2\epsilon_k}[1 + 2f_B(\epsilon_k - \mu_D)] \frac{1}{\epsilon_k - \lambda - E_k}
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

et avec :

$$
\lambda = q_0 + \mu_q + \mu_D \tag{4.72}
$$

L'ensemble des intégrales à calculer se résume aux quantités suivantes :

$$I_- \equiv \int_0^\Lambda dkk^2 \ \frac{A-B}{E_k} \ ; \quad I_+ \equiv \int_0^\Lambda dkk^2 \ (A+B) \tag{4.73}$$

$$I_- = I_-^1 + I_-^2 + I_-^3 + I_-^4 \tag{4.74}$$

$$I_+ = I_+^1 + I_+^2 + I_+^3 + I_+^4 \tag{4.75}$$

Elles peuvent être calculées deux à deux :

$$J_i \equiv m_q \mathbf{1} I_-^i + \gamma_0 I_+^i \tag{4.76}$$

où on rappelle que la somme sur l'ensemble des intégrales permet d'obtenir la fonction de polarisation :

$$\Pi_n(q_0) = -\frac{g_{D\to qq}^2}{8\pi^2} \sum_{i=1}^{4} J_i \tag{4.77}$$

La masse du baryon est obtenue lorsque le déterminant s'annule. La simplicité des matrices intervenant dans le calcul permet de réduire l'équation matricielle à deux équations.

$$det_D[\mathbf{1} - \frac{2}{m_q}\Pi_n(k_0)] = 0 \tag{4.78}$$

Dans les faits, γ_0 peut seulement prendre la valeur -1 ou 1, et il suffit de résoudre les deux équations pour trouver la solution.

$$\Re[J_1] = \frac{1}{2\lambda} PV \int_{m_q}^{\Lambda_E} dE_k \left[1 - 2f_F(-E_k + \mu_q)\right] \ (\mathbf{1} m_q + \gamma_0 E_k) \frac{\sqrt{E_k^2 - m_q^2}}{E_k - E_+^1} \tag{4.79}$$

$$\Im[J_1] = \frac{\pi}{2\lambda}(\mathbf{1}m_q + \gamma_0 E_+^1)\sqrt{(E_+^1)^2 - m_q^2}\left[1 - 2f_F(-E_+^1 + \mu_q)\right]\Theta(\Lambda_E - E_+^1)\Theta(E_+^1 - m_q) \tag{4.80}$$

$$\Re[J_2] = \frac{1}{2\lambda}PV\int_{m_q}^{\Lambda_E} dE_k\,[1 - 2f_F(E_k + \mu_q)]\;\;(\mathbf{1}m_q - \gamma_0 E_k)\frac{\sqrt{E_k^2 - m_q^2}}{E_k - E_+^2} \tag{4.81}$$

$$\Im[J_2] = \frac{\pi}{2\lambda}(\mathbf{1}m_q - \gamma_0 E_+^2)\sqrt{(E_+^2)^2 - m_q^2}\left[1 - 2f_F(E_+^2 + \mu_q)\right]\Theta(\Lambda_E - E_+^2)\Theta(E_+^2 - m_q) \tag{4.82}$$

$$\Re[J_3] = \frac{1}{2\lambda}PV\int_{m_D}^{\Lambda_{E^*}} d\epsilon_k\,[1 + 2f_B(\epsilon_k - \mu_D)]\;\;[-\mathbf{1}m_q + \gamma_0(\epsilon_k - \lambda)]\;\frac{\sqrt{\epsilon_k^2 - m_D^2}}{\epsilon_k - \epsilon_+^3} \tag{4.83}$$

$$\Im[J_3] = \frac{\pi}{2\lambda}[-\mathbf{1}m_q + \gamma_0(\epsilon_+^3 - \lambda)]\;\sqrt{(\epsilon_+^3)^2 - m_D^2}\left[1 + 2f_B(\epsilon_+^3 - \mu_D)\right]\Theta(\Lambda_{E^*} - \epsilon_+^3)\Theta(\epsilon_+^3 - m_D) \tag{4.84}$$

$$\Re[J_4] = \frac{1}{2\lambda}PV\int_{m_D}^{\Lambda_{E^*}} d\epsilon_k\,[1 + 2f_B(\epsilon_k + \mu_D)]\;\;[\mathbf{1}m_q + \gamma_0(\epsilon_k + \lambda)]\frac{\sqrt{\epsilon_k^2 - m_D^2}}{\epsilon_k - \epsilon_+^4} \tag{4.85}$$

$$\Im[J_4] = \frac{\pi}{2\lambda}[\mathbf{1}m_q + \gamma_0(\epsilon_+^4 + \lambda)]\sqrt{(\epsilon_+^4)^2 - m_D^2}\left[1 + 2f_B(\epsilon_+^4 + \mu_D)\right]\Theta(\Lambda_{E^*} - \epsilon_+^4)\Theta(\epsilon_+^4 - m_D) \tag{4.86}$$

Baryons	Proton	Λ	Σ	Ξ^0
NJL	917	1063	1143	1256
Experimental	938	1116	1189	1315

TAB. 4.2 – Octet de baryon à température nulle.

4.3 Résultats

4.3.1 NJL à température finie

Octet

Les résultats concernant les baryons de l'octet ne font intervenir que la partie scalaire. La masse du baryon considéré n'est plus affichée si la masse des constituants devient plus petite, ou si le diquark constituant devient instable. En effet dans notre modèle le diquark est un élément indispensable dans la construction du baryon et son absence entraine la désintégration du baryon.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, notre but est de traiter l'ensemble des particules dans un formalisme unifié et avec un unique jeu de paramètres. Cette étape de modélisation des baryons a été cruciale pour régler les paramètres de notre modèle. C'est durant la modélisation de ces baryons que nous avons fixé les valeurs afin d'obtenir à la fois des masses réalistes pour l'ensemble des particules, mais en nous assurant également de la stabilité de chacune. Les relations entre les différentes masses, notamment entre quarks et diquarks, sont à l'origine de la stabilité des baryons, et fixent leur énergie de liaison.

Notons que si on voulait prendre en compte la composante axiale, il faudrait aussi tenir compte de la température de Mott des diquarks axiaux. Il apparait ici que l'énergie de liaison du proton et du Σ diminue jusqu'à devenir nulle, libérant ainsi les consituants, le quark et le diquark dans le milieu. Dans le cas du Ξ et du Λ, c'est le diquark qui devient instable et précipite la désintégration du baryon en trois quarks.

Quoique entachées de différences mineures, nos résultats sont globalement en accord avec les données expérimentales. Les travaux précédents dans le domaine, [9], [18], [37] montrent des comportements similaires en fonction de la température, mais

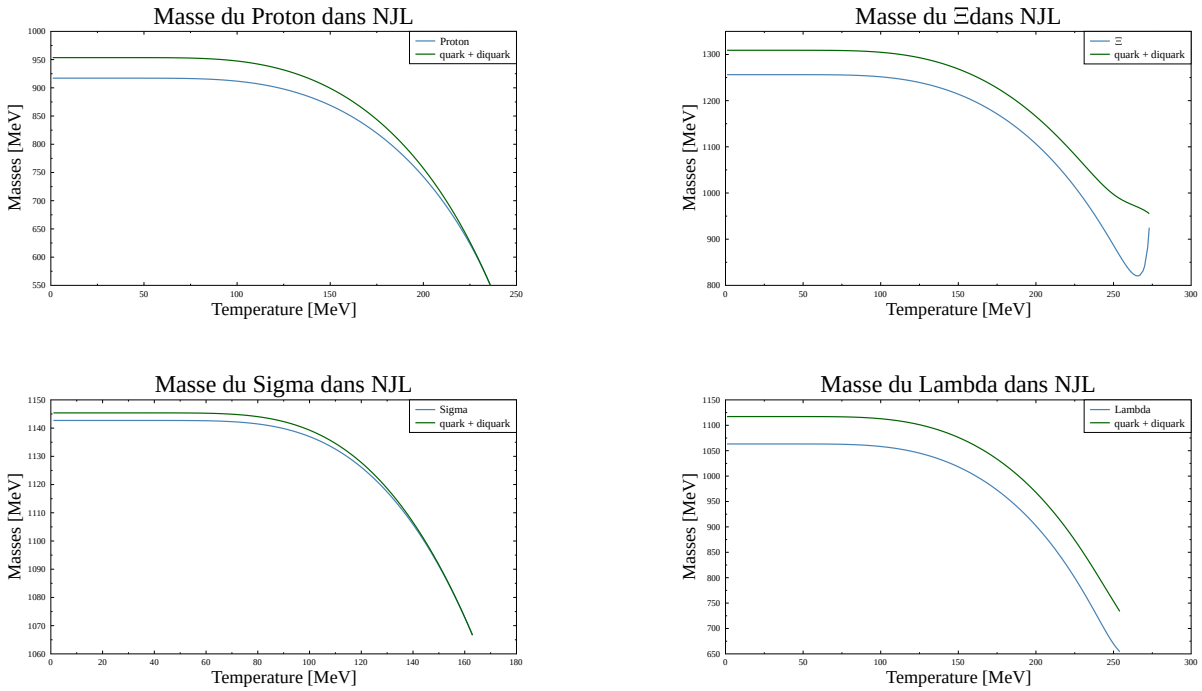


FIG. 4-1 – Octet de baryons dans NJL

Baryons	Δ	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*0}	Ξ^{*-}	Ω^{-}
NJL	1235	1383	1383	1383	1530	1530	1676
Experimental	1232	1383	1384	1387	1532	1535	1672

TAB. 4.3 – Decuplet de baryon à température nulle.

des différences dans les valeurs numériques. Dans le cas de [9], ces écarts viennent principalement d'une différence dans le calcul de la fonction de polarisation des baryons. Les valeurs des paramètres sont également différentes.

Décuplet

Les valeurs obtenues pour le décuplet sont en très bon accord avec les données expérimentales. Notons aussi que ces baryons montrent des comportements très similaires. Leurs énergies de liaisons sont très proches, de l'ordre de 70 MeV, et les température de Mott sont identiques pour les Δ, $\Xi*$ et $\Sigma*$, à une valeur d'environ 210 MeV.

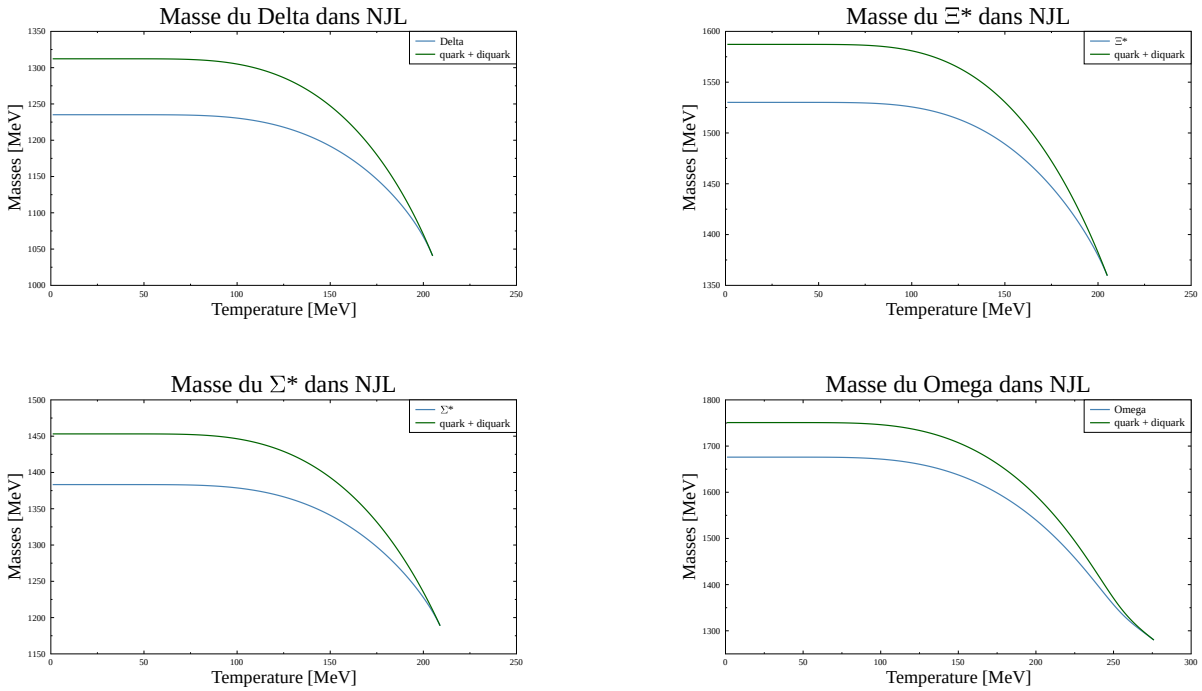


FIG. 4-2 – Décuplet de baryons dans NJL

Baryons	Proton	Σ	Ξ	Λ
Température de Mott[MeV]	237	164	274	255

TAB. 4.4 – Température de Mott pour les baryons de l'octet

4.3.2 Paramétrisation, énergie de liaison et stabilité

Il s'avère que le Σ est le baryon le plus fragile. Afin d'avoir un modèle réaliste et de pouvoir rendre compte de la stabilité de ce baryon, c'est à dire en s'assurant que la somme des masses des constituants soit supérieure à sa masse à basse température, les paramètres ont dû être ajustés. Nous obtenons finalement des baryons stables à basse température et dont les températures de Mott sont réalistes dans le cadre d'un modèle NJL. Le tableau 4.4 récapitule ces différentes températures. Le baryon Ξ, construit à partir de deux quarks étranges, possède une température de Mott significativement plus élevée.

Pour le décuplet de baryons, 4.5, la sensibilité de la hierarchie dans les températures de Mott vis à vis de l'étrangeté peut également être observée. En particulier, l'

Baryons	Δ	$\Sigma*$	$\Xi*$	Ω
Température de Mott[MeV]	206	210	206	277

TAB. 4.5 – Température de Mott pour les baryons du décuplet

Baryons	Proton	Σ	Ξ	Λ
Energie de liaison[MeV]	36	3	53	82

TAB. 4.6 – Energie de liaison pour les baryons de l'octet

Ω contient trois quarks étranges et montre une température de transition nettement plus élevée.

Les énergies de liaison sont plus faibles que pour les mésons et diquarks et n'excèdent jamais une centaine de MeV.

L'octet de baryon, a l'exception du Λ est moins fortement lié.

4.3.3 PNJL à température finie

Octet

Les résultats obtenus avec le modèle PNJL montrent des courbes très plates à basse température et une transition très rapide. Comme pour les mésons et diquarks, cette transition a lieu à des températures plus élevées dans le cas PNJL. De manière générale, on peut remarquer que ces températures respectent la même hierarchie que dans le cas NJL. Elles sont simplement décalées vers des valeurs plus grandes.

L'ajout de la boucle de Polyakov modifie peu les comportements propres à chaque baryon mais à tendance à lisser les différences entre eux. En effet, dans le modèle PNJL la transition de phase a lieu plus brutalement ce qui a pour effet de rapprocher légèrement les différentes température de Mott.

Baryons	Δ	$\Sigma*$	$\Xi*$	Ω
Energie de liaison[MeV]	77	70	57	74

TAB. 4.7 – Energie de liaison pour les baryons du décuplet

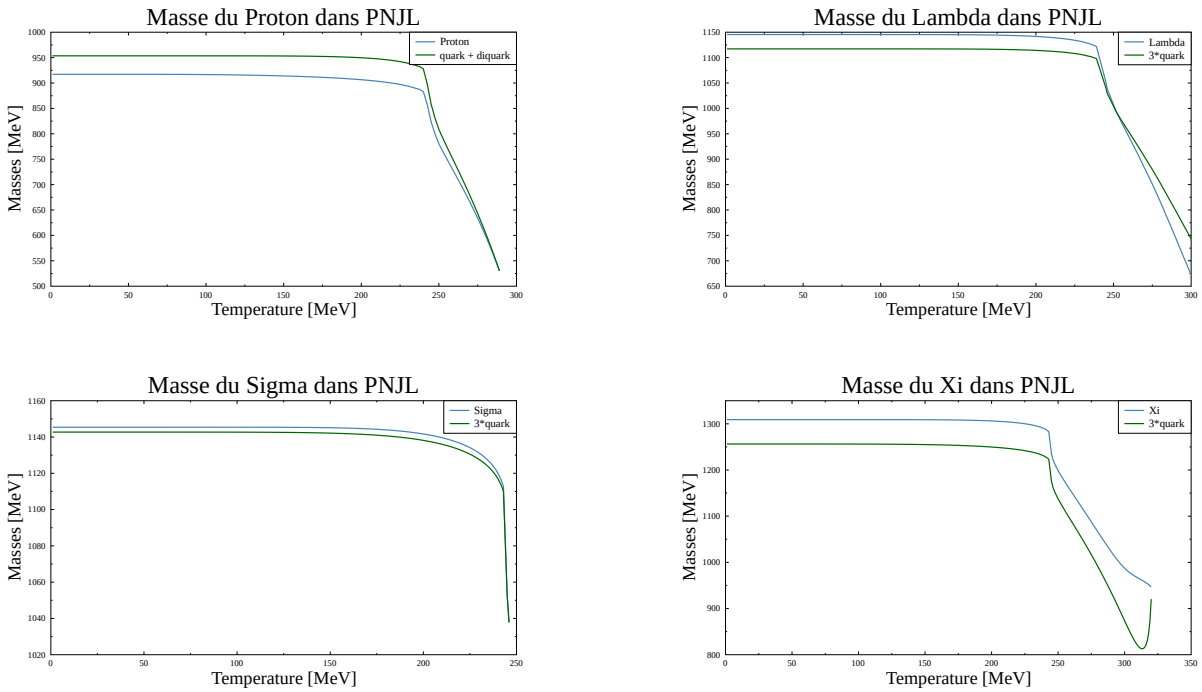


FIG. 4-3 – Octet de baryons dans PNJL

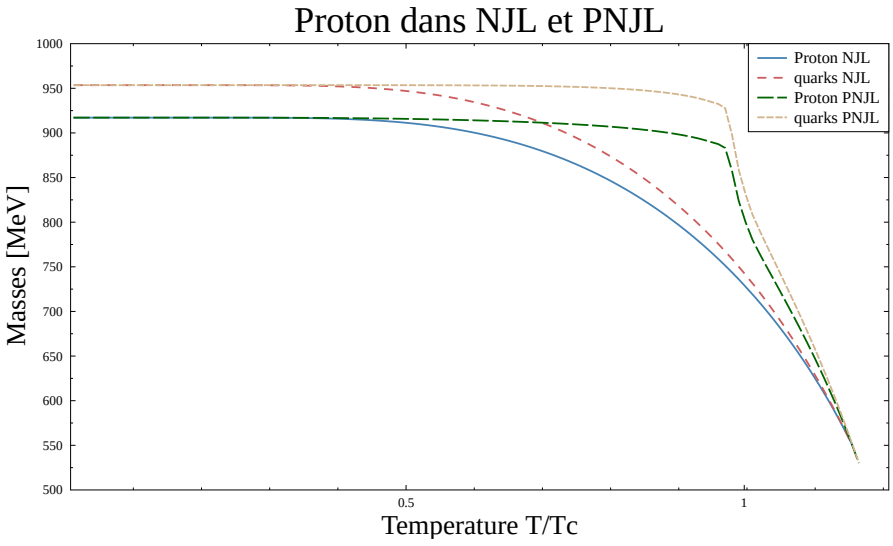


FIG. 4-4 – Proton dans NJL et PNJL

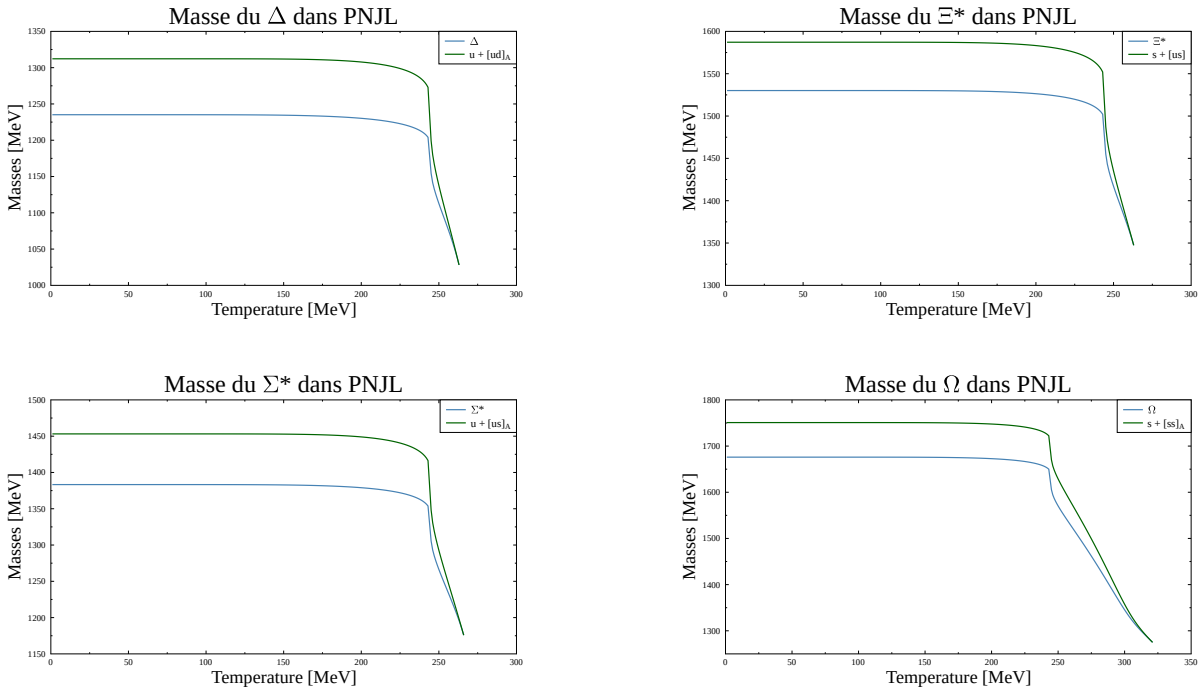


FIG. 4-5 – Décuplet de baryons dans PNJL

La masse du baryon tracée en fonction de T/T_c permet d'observer la différence de comportement des baryons dans les modèles NJL et PNJL. Pour ce dernier, la masse des particules reste stable lorsque l'on est loin de la transition de phase. C'est seulement en approchant celle-ci que la masse du baryon chutera rapidement.

Décuplet

Les résultats pour le décuplet de baryons dans PNJL sont présentés sur la figure : 4-5. La transition de phase est ici encore décalée vers des valeurs plus hautes de la température, et ce pour tous les baryons. On notera que la hierarchie est encore ici préservée et que le baryon Ω, constitué uniquement de quarks s, possède une transition de Mott significativement plus élevée.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu comment construire les baryons. Nous avons montré comment reproduire le spectre des baryons avec une bonne précision et en s'assurant que leurs masses étaient inférieures à celles de leurs constituants. A la différence des mésons, les baryons ne peuvent être construits à des hautes températures. En effet, lorsque les diquarks constituants ne sont plus stables, le baryon n'est plus nettement défini et il convient d'arrêter la simulation. Les résultats obtenus avec le modèle PNJL montrent, comparés à ceux de NJL, des transitions plus marquées, ainsi que des températures de Mott plus élevées. Les baryons constitués de quarks étranges semblent également rester stables à des températures plus grandes que les autres, et ce pour les modèles NJL et PNJL.

Conclusion

Dans cette thèse nous avons étudié la transition de phase entre la matière hadronique et le plasma de quarks et de gluons à l'aide des modèles NJL et PNJL. Pour cela nous avons étudié comment les quarks se couplaient aux condensats de quarks et, dans le second cas, à la boucle de Polyakov. Nous avons obtenu les masses des mésons dans les secteurs pseudoscalaire, scalaire, vectoriel et axial en fonction de la température et du potentiel chimique. Nous avons construit de la même manière les diquarks afin de constuire les baryons comme des ensembles quark-diquark. Finalement, à l'aide des masses des diquarks et des constantes de couplages nous avons obtenu les masses des baryons de l'octet et du décuplet. L'évolution des masses en fonction de la température à potentiel chimique nul montre une transition douce, de type cross-over pour les mésons, suivie de la restauration de la symétrie chirale, qui se traduit, pour les partenaires chiraux, par l'égalisation des masses. Le modèle PNJL montre des transitions plus brutales dans tous les domaines et à des températures plus élevées.

Afin de construire au sein du même modèle les mésons et les baryons, il a été nécéssaire de déterminer une nouvelle paramétrisation. Les paramètres ont été fixé avec les hadrons les plus légers pour chaque secteur. L'ensemble des résultats ne montre pas une transition de phase claire, mais un ensemble de transitions pour chacune des espèces. En particulier, les hadrons contenant des quarks étranges restent stables pour des températures plus importantes. Cette hierarchie dans les températures de Mott semble se retrouver dans tous les secteurs. Il convient de souligner également que la hierarchie est la même dans les modèles NJL et PNJL. A la lumière des résultats exposés dans le premier chapitre, des études concernant un modèle statistique,

le modèle HRG [2], les résultats de lattice QCD, [6], et de STAR, [5] semblent aller dans le même sens. En particulier, le mésons ϕ et les baryons Ω et Ξ présentent des températures de Mott significativement plus grandes et constituent un signal clair de la dépendance en saveur de la transition de phase dans notre modèle.

Annexe A

Transformation de Fierz

A.1 Mésons

La transformation de Fierz est une transformation mathématique permettant de réarranger les indices. Nous allons ici l'utiliser afin de déterminer comment connecter les différents indices dans les secteurs des mésons et des diquarks. Dans cette partie nous allons suivre le travail présenté dans : [10].

Les générateurs dans le groupe $SU(3)$ sont les matrices de Gell-Mann et seront notées $\lambda_a, a = 1, ..., N_c^2 - 1$ dans l'espace de couleur et $\tau_a, a = 1, ..., N_F^2 - 1$, dans l'espace de saveur. On utilisera également la matrice λ_0 : $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{N}}\mathbf{1}$

Dans la suite on notera a les sommes qui contiennent l'élément 0 et a' celles qui l'excluent. On sépare également les sommes sur les éléments symétriques S et antisymétriques A en utilisant les notations symboliques $\sum_S \equiv \sum_{a=0,1,3,4,6,8}$ et $\sum_A \equiv \sum_{a=2,5,7}$.

La relation de fermeture s'écrit :

$$\sum_{a=0} \lambda_{il}^a \lambda_{kj}^a = 2\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{A.1}$$

On enlève la première composante :

$$\frac{2}{N}\delta_{il}\delta_{kj} + \sum_{a'=1} \lambda_{il}^a \lambda_{kj}^a = 2\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{A.2}$$

On part de la relation de base qui connecte les indices i avec j et k avec l. Une transformation permettant de connecter les indices i avec l et k avec j permet l'étude du secteur mésonique et une transformation reliant i avec k et j avec l permet de travailler dans le secteur des diquarks.

En utilisant la représentation de saveur :

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{N}\delta_{il}\delta_{kj} + \frac{1}{2}\sum_{a'} \lambda^a_{il}\lambda^a_{kj} \ , \tag{A.3}$$

on réarrange les indices pour obtenir l'équation suivante :

$$\sum_{a'} \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{2}{N}\delta_{ij}\delta_{kl} \ . \tag{A.4}$$

On utilise à nouveau la relation de fermeture (A.1) :

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{N}\delta_{il}\delta_{kj} + \sum_{a'} \lambda^a_{il}\lambda^a_{kj}\right) \tag{A.5}$$

On insère l'équation (A.5) dans (A.4) pour obtenir :

$$\sum_{a'} \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = 2\frac{N^2-1}{N^2}\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\sum_{a'} \lambda^a_{il}\lambda^a_{kj} \tag{A.6}$$

On obtient ainsi l'interaction dans le canal mésonique. Les résultats peuvent être résumés dans la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta_{ij}\delta_{kl} \\ \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{2} \\ 2\frac{N^2-1}{N^2} & -\frac{1}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{il}\delta_{kj} \\ \lambda^a_{il}\lambda^a_{kj} \end{pmatrix} \ . \tag{A.7}$$

A.2 Diquarks

On repart de l'équation (A.1) et on sépare les générateurs symétriques et antisymétriques :

$$\delta_{ij}\delta_{kl} = \delta_{ij}\delta_{lk} = \frac{1}{2}\sum_{a} \lambda^a_{ik}\lambda^a_{lj} = \frac{1}{2}\sum_{S} \lambda^S_{ik}\lambda^S_{lj} + \frac{1}{2}\sum_{A} \lambda^A_{ik}\lambda^A_{lj} \tag{A.8}$$

On utilise également l'équation (A.4) :

$$\sum_{a'} \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{2}{N}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{A.9}$$

On remplace dans le dernier terme (A.8) :

$$\sum_{a'} \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\sum_S \lambda^S_{ik}\lambda^S_{lj} - \frac{1}{N}\sum_A \lambda^A_{ik}\lambda^A_{lj} \tag{A.10}$$

A nouveau, on utilise la relation (A.1), et les relations $\lambda_{jl} = \lambda_{lj}$ pour les générateurs symétriques et $\lambda_{jl} = -\lambda_{lj}$ pour les générateurs antisymétriques.

$$2\delta_{il}\delta_{jk} = \sum_a \lambda^a_{ik}\lambda^a_{jl} = \sum_S \lambda^S_{ik}\lambda^S_{lj} - \sum_A \lambda^A_{ik}\lambda^A_{lj} \tag{A.11}$$

On utilise ce résultat dans l'équation Eq. (A.10).

$$\sum_{a'} \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = \frac{N-1}{N}\sum_S \lambda^S_{ik}\lambda^S_{lj} - \frac{N+1}{N}\sum_A \lambda^A_{ik}\lambda^A_{lj} \tag{A.12}$$

On peut résumer les résultats dans une forme plus compacte.

$$\begin{pmatrix} \delta_{ij}\delta_{kl} \\ \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{N-1}{N} & -\frac{N+1}{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^S_{ik}\lambda^S_{lj} \\ \lambda^A_{ik}\lambda^A_{lj} \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

A.3 Constante dans le secteur des diquarks

On souhaite à présent étudier la construction du lagrangien dans les secteurs des mésons et des diquarks. On utilise le lagrangien d'intéraction tel qu'il a été définit [10].

$$\mathcal{L} = -\tilde{g}\sum_{a'}(\bar{q}\gamma^\mu\lambda^a q)^2 = -\tilde{g}\ \mathcal{F}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{S}\ \bar{q}_i q_j \bar{q}_k q_l \tag{A.14}$$

où g est la constante de couplage. Les différentes parties correspondantes respectivement à la couleur, la saveur et au spin.

$$\mathcal{F} = \delta_{ij}\delta_{kl} \ ; \mathcal{C} = \sum_{a'} \lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} \ ; \mathcal{S} = (\gamma^\mu)_{ij}(\gamma_\mu)_{kl} \tag{A.15}$$

A.3.1 Mésons

Pour la saveur on a :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{N_F}\delta_{il}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\sum_{a'} \tau^a_{il}\tau^a_{kj} \tag{A.16}$$

Le premier terme étant le singlet de saveur, on ne garde que le deuxième. Dans l'espace de couleur :

$$\mathcal{C} = 2\frac{N_c^2 - 1}{N_c^2}\delta_{il}\delta_{kl} - \frac{1}{N}\sum_{a'} \lambda^a_{il}\lambda^a_{kj} \tag{A.17}$$

Le deuxième terme correspond à un canal répulsif et ne sera pas utilisé dans la suite.

$$\mathcal{S} = \delta_{il}\delta_{kj} \tag{A.18}$$

On commute les fermions :

$$\bar{q}_i q_j \bar{q}_k q_l = -\bar{q}_i q_l \bar{q}_k q_j \tag{A.19}$$

En insérant l'ensemble dans le lagrangien on obtient :

$$\mathcal{L} = g\frac{N_c^2 - 1}{N_c^2}(\bar{q}\tau_a q)^2 \tag{A.20}$$

On utilise la notation suivante :

$$G \equiv g\frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \tag{A.21}$$

On peut noter que dans les secteurs vecteur et axial, il faut tenir compte d'un facteur additionnel : $-\frac{1}{2}$ [10].

A.3.2 Diquarks

On considère maintenant le cas des diquarks, le but étant de mettre en relation les constantes de couplage. La partie en saveur donne :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\tau^S_{ik}\tau^S_{lj} + \frac{1}{2}\tau^A_{ik}\tau^A_{lj} \tag{A.22}$$

Le premier terme correspond à la représentation de sextet et sera utilisée pour les diquarks axiaux. La représentation antisymétrique, est elle utilisée pour les secteurs scalaire, pseudoscalaire et vecteur. Pour la couleur on a :

$$\mathcal{C} = \frac{N_c - 1}{N_c}\lambda^S_{ik}\lambda^S_{lj} - \frac{N_c + 1}{N_c}\lambda^A_{ik}\lambda^A_{lj} \tag{A.23}$$

où on ne garde que la partie antisymétrique puisque la partie symétrique est répulsive et ne permet pas la construction des baryons. Pour le spin, on utilise seulement la partie scalaire :

$$\mathcal{S} = (i\gamma_5 C)_{ik}(Ci\gamma_5)_{lj} \tag{A.24}$$

Comme pour les mésons, on regroupe l'ensemble dans le lagrangien :

$$\mathcal{L} = g\frac{N_c + 1}{2N_c}(\bar{q}\tau^A\lambda^A i\gamma_5 q^c)(\bar{q}^c i\gamma_5\tau^A\lambda^A q) \tag{A.25}$$

On nomme la constante de couplage des diquarks :

$$G_{DIG} \equiv g\frac{N_c + 1}{2N_c} \tag{A.26}$$

On calcule à présent le rapport entre les couplages dans les secteurs des mésons et des diquarks :

$$\frac{G_{DIQ}}{G} = \frac{N_c}{2(N_c - 1)} \tag{A.27}$$

Dans le cas qui nous intéresse $N_c = 3$.

$$G_{DIQ} = \frac{3}{4}G \tag{A.28}$$

En conséquence, la constante de couplage des diquarks est fixée par cette transformation. Pour obtenir des résultats plus proches des données expérimentales pour les baryons on autorise la possibilité de modifier cette fraction.

Bibliographie

[1] H.Reinhardt A.Buck, R.Alkofer. Baryons as bound states of diquarks and quarks in the nambu-jona-lasinio model. *Physics Letters B*, 286 :29–35, 1992.

[2] Paolo Alba, Wanda Alberico, Rene Bellwied, Marcus Bluhm, Valentina Mantovani Sarti, et al. Freeze-out conditions from net-proton and net-charge fluctuations at RHIC. *Phys.Lett.*, B738 :305–310, 2014.

[3] C. Alexandrou, Ph. de Forcrand, and B. Lucini. Evidence for diquarks in lattice QCD. *Phys.Rev.Lett.*, 97 :222002, 2006.

[4] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, and K.K. Szabo. The Order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. *Nature*, 443 :675–678, 2006.

[5] Olga Yu. Barannikova. Freeze-out dynamics at RHIC. *Acta Phys.Hung.*, A24 :39–44, 2005.

[6] Rene Bellwied, Szabolcs Borsanyi, Zoltan Fodor, Sandor D Katz, and Claudia Ratti. Is there a flavor hierarchy in the deconfinement transition of QCD ? *Phys.Rev.Lett.*, 111 :202302, 2013.

[7] V. Bernard, U.G. Meissner, and I. Zahed. Decoupling of the Pion at Finite Temperature and Density. *Phys.Rev.*, D36 :819, 1987.

[8] Veronique Bernard, Ulf G. Meissner, and Ismail Zahed. Properties of the Scalar σ Meson at Finite Density. *Phys.Rev.Lett.*, 59 :966, 1987.

[9] Eric Blanquier. *Le modèle de Polyakov, Nambu et Jona-Lasinio et ses applications pour décrire les particules sub-nucleaires.* PhD thesis, Universite de Toulouse 3, 2013.

[10] Michael Buballa. *NJL-model analysis of dense quark matter.* PhD thesis, Institut fur Kernphysik, Technische Universitat Darmstadt, 2004.

[11] D.V. Bugg. Review of Scalar Mesons. *AIP Conf.Proc.*, 1030 :3–12, 2008.

[12] John C. Collins and M.J. Perry. Superdense Matter : Neutrons Or Asymptotically Free Quarks ? *Phys.Rev.Lett.*, 34 :1353, 1975.

[13] D.Grifiths. *Introduction to elementary particles.* 1987.

[14] Dietmar Ebert, Thorsten Feldmann, Christiane Kettner, and Hugo Reinhardt. Heavy baryons in the quark-diquark picture. *Int.J.Mod.Phys.*, A13 :1091–1113, 1998.

[15] Thorsten Feldmann. Quark structure of pseudoscalar mesons. *Int.J.Mod.Phys.*, A15 :159–207, 2000.

[16] Fetter and Walecka. *Quantum theory of many particle systems.* 1971.

[17] F.Halzen and A.D.Martin. *Quarks and leptons.* 1984.

[18] Fabrice Gastineau. *La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu-Jona-Lasinio.* PhD thesis, Université de Nantes, 2002.

[19] M Gell-Mann. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Letters*, 8 :214–215, 1964.

[20] G.Goessens. *Etude de la transition entre le plasma de quarks et de gluons et la matiere hadronique dans le cadre d ' un modele effectif de la QCD : le modele Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio.* PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1.

[21] David J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically free gauge theories. i. *Phys. Rev. D*, 8 :3633–3652, Nov 1973.

[22] Hansen H., Alberico W.M., Beraudo A., Molinari A., Nardi M., et al. Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the nambu-jona-lasinio model with a polyakov loop. *Phys.Rev.*, D75 :065004, 2007.

[23] C. Hanhart and S. Krewald. Faddeev approach to the octet and decuplet baryons. *Phys.Lett.*, B344 :55–60, 1995.

[24] Masakuni Ida and Reido Kobayashi. Baryon resonances in a quark model. *Prog.Theor.Phys.*, 36 :846, 1966.

[25] N. Ishii, W. Bentz, and K. Yazaki. Solution of the relativistic three quark Faddeev equation in the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model. *Phys.Lett.*, B318 :26–31, 1993.

[26] N. Ishii, W. Bentz, and K. Yazaki. Baryons in the NJL model as solutions of the relativistic Faddeev equation. *Nucl.Phys.*, A587 :617–656, 1995.

[27] Noriyoshi ISHII, Hiroyasu ASAMI, Wolfgang BENTZ, and Koichi YAZAKI. The nucleon as a solution of the relativistic three-quark faddeev equation in the njl model(recent developments in qcd and hadron physics). *Soryushiron Kenkyu*, 95(4) :D158–D163, jul 1997.

[28] R.L. Jaffe. Exotica. *Phys.Rept.*, 409 :1–45, 2005.

[29] S.P. Klevansky and Richard H. Lemmer. Spectral density functions and their sum rules in an effective chiral field theory. 1997.

[30] S. Klimt, Matthias F.M. Lutz, U. Vogl, and W. Weise. GENERALIZED SU(3) NAMBU-JONA-LASINIO MODEL. Part. 1. MESONIC MODES. *Nucl.Phys.*, A516 :429–468, 1990.

[31] Volker Koch. Introduction to chiral symmetry. *nucle-th*, 1995.

[32] A. Krassnigg and P. Maris. Pseudoscalar and vector mesons as q anti-q bound states. *J.Phys.Conf.Ser.*, 9 :153–160, 2005.

[33] Dirk Lehmann. *The canonical formulation of the axial anomaly and the structure of the eta'.* PhD thesis, Erlangen Universitat, 1996.

[34] D. B. Lichtenberg and L. J. Tassie. Baryon mass splitting in a boson-fermion model. *Phys. Rev.*, 155 :1601–1606, Mar 1967.

[35] Yuri Makeenko. A Brief Introduction to Wilson Loops and Large N. *Phys.Atom.Nucl.*, 73 :878–894, 2010.

[36] H.Hansen C. A.de Sousa M.C.Ruivo, P.Costa. Exploring the role of model parameters and regularization procedures in the thermodynamics of the pnjl model. *arXiv*, 2010.

[37] Cheng-fu Mu, Yin Jiang, Peng-fei Zhuang, and Yu-xin Liu. Nucleons at finite temperature and low density in faddeev equation approach. *Phys. Rev. D*, 85 :014033, Jan 2012.

[38] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I.

[39] Regina Nebauer. *Propriété des quarks et mésons à température et densité finies dans le cadre du modèle NJL.* PhD thesis, Université de Nantes, 2000.

[40] Y Ne'eman. Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance. *Nucl.Phys*, 26 :22–229, 1961.

[41] M. Oettel, Reinhard Alkofer, and L. von Smekal. Nucleon properties in the covariant quark diquark model. *Eur.Phys.J.*, A8 :553–566, 2000.

[42] J.Hufner P.Rehberg, S.P.Klevansky. Hadronizatio in the su3 nambu-jona-lasinio model. *Physical Review C*, 53, 1995.

[43] C. Ratti, Simon Roessner, M.A. Thaler, and W. Weise. Thermodynamics of the PNJL model. *Eur.Phys.J.*, C49 :213–217, 2007.

[44] Claudia Ratti, Michael A. Thaler, and Wolfram Weise. Phase diagram and thermodynamics of the PNJL model. 2006.

[45] Claudia Ratti, Michael A. Thaler, and Wolfram Weise. Phases of qcd : Lattice thermodynamics and a field theoretical model. *Phys. Rev. D*, 73 :014019, Jan 2006.

[46] P. Rehberg and S.P. Klevansky. One loop integrals at finite temperature and density. *Annals of physics*, 252 :10, 1996.

[47] R.Mattuck. *A guide to Feynman diagrams in the many-body problem.* 1976.

[48] S.P.Klevansky. The nambu-jona-lasinio model of quantum chromodynamics. *Review of Modern Physics*, 64, 1992.

[49] Mickael Thomère. *Etude de l'expansion d'un plasma de quarks vers un gaz de hadrons dans le cadre du modèle Nambu-Jona-Lasinio couplé à une boucle de Polyakov et une dynamique relativiste.* PhD thesis, Université de Nantes, 2009.

[50] A. Vairo. The Polyakov loop and correlator of Polyakov loop at NNLO.

[51] U.Vogl W.Weise. The nambu and jona-lasinio model : Its implications for hadrons and nuclei.

Remerciements

Cette thèse a été co-financée par le CNRS/IN2P3 et la Région Pays de la Loire dans le cadre du projet TOGETHER.

En premier lieu, je souhaite remercier Joerg pour m'avoir donné l'opportunité de faire cette thèse. Le travail durant ces trois années a toujours été aussi intéressant qu'agréable et j'ai vraiment été heureux de pouvoir discuter de différents sujets. Merci de m'avoir enseigné les arcanes du modèle NJL et de la physique à température finie. Merci de m'avoir aidé et encadré sur ce sujet, autant pour les aspects techniques, que pour les enseignements sur la physique.

Je voudrais également remercier Pol qui me suit depuis longtemps dans cette aventure. Le stage fait à tes côtés en master était une expérience enrichissante. Merci aussi d'avoir fait tout ton possible au début de ma thèse pour que j'obtienne mon contrat de travail. C'était un moment stressant et j'ai beaucoup apprécié ton implication pour que les choses se passent bien. Merci d'avoir suivi ma thèse d'aussi près, depuis le comité de suivi de thèse jusqu'à la fin de la thèse.

Merci aussi à Stéphane qui m'a encadré pendant mon premier stage. C'était une période où je découvrais tout et avoir un aussi bon encadrant m'a énormement motivé à l'époque.

Je voudrais également remercier Juan pour son aide extrêmement précieuse, les nombreuses explications et les commentaires sur ma thèse. J'ai beaucoup appris à tes côtés et j'en t'en suis très reconnaissant.

Je voudrais aussi remercier les membres du jury, Elena Bratkovskaya, Dany Davesne et Hubert Hansen, pour la lecture du manuscrit, les corrections et les remarques pertinentes.

Je voudrais aussi remercier tous les membres de Subatech, et en particulier ceux du groupe théorie présent pendant ces trois ans et qui déambulaient à mes côtés dans le couloir, le service informatique et le service administratif pour leur aide lors des vols de câbles réseau et autres pépins. Merci à tous les thésards et bonne chance pour vos thèses respectives.

Je souhaite également remercier tous mes prédécesseurs qui ont, avant moi, lutté pour améliorer nos connaissances dans le domaine. Avoir une pile de thèse sur le sujet est vraiment d'une grande aide lorsqu'on débute.

Merci à tout ceux qui ont partagé mon bureau durant ces trois ans. Merci Roland pour tout ce que tu "apportes" à ce bureau. Non sans rire, c'était sympathique de discuter avec toi et de partager nos musiques. Aller je vais le dire, c'était même marrant de te voir danser comme un malade. Merci dude ! Merci Martin, mon frère, d'avoir apporté ta petite touche autrichienne à ce bureau. Peut-être qu'un jour on se retrouvera dans un camion en train de faire du "sucre en poudre".

Merci Benji ! Oui, aujourd'hui je ne falsifierai pas ton nom. Merci pour tous ces bons moment, pour toutes les discussions, pour tous tes monologues au tableau, où je faisais semblant de comprendre quelque chose pour te faire plaisir. Merci pour toutes les soirées où on partageait un bol de chocapic. Merci à ton enfant libre si développé, à ta spontanéité et tes délires.

Merci Antoine, toi qui a prédit que je ferais une thèse. Je pourrais évoquer tellement de choses, entre nos débuts en stage, à débattre de philosophie, autour d'un verre en salle de pause ou en se promenant le long de l'Erdre ou nos sessions de guitare, nos émissions de radios ... Des fois je ferme les yeux et je vois une blague du pull. Mais nos projets en cours me laissent penser que le meilleur reste à venir. Le futur va être pépax. A bientôt mon ami.

Merci Jennifer, d'avoir brulé ma maison, de m'avoir crevé les yeux et pour les excellents goodies Hello Kitty qui ont progressivement envahi mon bureau puis ma maison. C'est toujours un plaisir de geeker sur divers jeux en ta compagnie. Nos théories "psychologie magazine" ont profondément modifié ma vision du monde et je pense qu'elles méritent d'être approfondies. On se revoit dans notre bar pour en

reparler !

Merci Maxime, gamma mu g mu nu bloublou. Merci pour ta droiture morale, même si à cause de toi j'écris ces lignes en prison. Merci de nous lancer ce petit regard désaprobateur quand on va trop loin. Je me souviens encore de ce jour où vous vous êtes arrêtés pour ramasser cette créature à la patte cassée au bord de la route. C'était cool. Merci pour tes vannes de qualités. Les meilleures étant celles qui impliquent la salle D-102 et les RIA bien sur.

Merci à tous mes amis de Tours, c'était difficile de partir loin de vous. Merci en particulier à Eric pour son indéfectible soutient depuis le collège. Merci mon poulet ! Enfin merci à ma famille qui m'a toujours soutenu et poussé à continuer. C'était toujours un plaisir et ce sera toujours un plaisir, de venir vous rendre visite et de passer du temps avec vous.

l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Benjamin SINTES

Etude des baryons avec le modèle de Nambu et Jona-Lasinio

Baryons study with the Nambu and Jona-Lasinio model

Résumé

Durant cette thèse nous avons étudié la transition de phase entre la matière hadronique et le plasma de quark et de gluon en utilisant le modèle de Nambu et Jona-Lasinio. Ce modèle permet une description à basse énergie du processus d'hadronisation ayant lieu durant le refroidissement du plasma. Le lagrangien est basé sur les mêmes symétries que celui de QCD et a déjà montré de bons résultats pour les mésons. On souhaite ajouter les baryons afin de compléter cette description.
Nous avons étudié les mésons et les diquarks en faisant appel au même formalisme, dans un premier temps à température nulle, puis pour des températures et potentiels finis. Ensuite nous avons étendu ces résultats aux baryons, en les décrivant comme des paires de quarks et diquarks. Cette thèse inclue la description de l'octet et du décuplet de baryon.

Mots clés
NJL, Hadronisation, Transition de phase, Modèle effectif, Interaction fort, Nambu Jona-Lasinio

Abstract

During this thesis we have studied the phase transition between hadronic matter and quark gluon plasma using the Nambu and Jona Lasinio model. This model allows a low energy description especially for hadronization process occurring during the cooling. The Lagrangian is based on the same symmetries that the QCD Lagrangian and has already shown good results for mesons. We want to add baryons in order to complete the description.
We have studied the formalism for mesons and diquarks where descriptions are the same, in a first time at zero temperature and then at finite temperature and chemical potential. Then we have extended those results for baryons, describing them like a pair made of a quark and a diquark. This thesis includes the description of both the octet and decuplet of baryon.

Key Words
NJL, Hadronization, Phase Transition, Effectif model, Strong interaction, Nambu Jona-Lasinio

L'Université Nantes Angers Le Mans