

À mes parents

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Bernard Hellfer, mon directeur de thèse qui a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et qui a consacré du temps à mon travail en étant toujours disponible et en venant me chercher très souvent pour que l'on discute, ce qui m'a énormément encouragée pendant mes séjours à l'Université Paris-Sud. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui. Son empreinte scientifique a laissé une influence énorme sur mes goûts et ma vision sur les mathématiques. Je le remercie sincèrement pour l'accueil chaleureux à Orsay dès mon arrivée en Janvier 2013.

J'exprime mes vifs remerciements à Ayman Kachmar, mon co-directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. Je lui suis infiniment reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi et je lui en suis très reconnaissant. Je le remercie d'avoir lu très sérieusement beaucoup de versions préliminaires de mes travaux.

Je remercie l'Université Paris-Sud et l'Université Libanaise qui m'ont offert la possibilité de faire cette thèse en cotutelle dans le cadre d'un programme commun. Je désire en outre remercier l'Université Paris-Sud pour le soutien financier pour ma thèse qu'elle m'a accordé. Je remercie ainsi l'École Doctorale de Mathématiques de Paris-Sud et l'École Doctorale des Sciences et de Technologie pour leur soutien infini. Un grand merci à mes amis qui ont été ma deuxième famille en France et en particulier Abbass Hamadeh, Houssam Al Rachid et Houssein Banjak, je n'oublie pas les beaux moments passés ensemble.

Je remercie tous les membres du département de mathématique à Orsay. Je suis reconnaissant envers les secrétaires, notamment Valérie Lavigne et Catherine Poupon pour leur gentillesse et efficacité.

Je remercie également tous les membres de département de mathématique de l'Université Libanaise, en particulier la secrétaire Abir Moukaddem d'avoir répondu avec gentillesse à toutes mes demandes et mes collègues Mohamad Sammoury, Bilal Al Taki, Houssein Nasser El Dine, Mohamad Akil, pour leur présence constante et leur bonne humeur.

Mes plus profonds remerciements vont à ma famille : à mon père Hani Attar, à ma mère Amal Akoum, à ma soeur Nadine et à mon frère Mohamad, qui sont et ont toujours été une source infinie d'encouragements, d'inspiration et de joie. Merci pour votre confiance en moi et votre grand amour. Sans votre soutien et votre patience, cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

Finalement, je voudrais remercier Etienne SANDIER et Lia BRONSARD d'avoir accepté de relire cette thèse et d'en être rapporteurs. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je tiens à remercier auusi tous les membres du jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail.

LE MODÈLE DE GINZBURG-LANDAU AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE VARIABLE

Résumé

La thèse de doctorat comporte trois parties rédigées en anglais. Les deux premières parties correspondent principalement à l'étude de l'énergie de l'état fondamental. La dernière partie est consacrée à l'analyse de l'effet de '*pinning*' dans la supraconductivité.

Dans une première partie de cette thèse, nous considérons la fonctionnelle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique variable appliqué dans un domaine borné et régulier de dimension 2. Nous déterminons le comportement asymptotique du paramètre d'ordre dans le régime où le paramètre de Ginzburg-Landau et le champ magnétique sont grands et de même ordre. Comme conséquence, nous montrons que le paramètre d'ordre est localisé asymptotiquement dans la région où le profil du champ magnétique appliqué est petit.

Dans une autre partie, nous considérons la fonctionnelle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique variable appliqué dans un domaine borné et régulier de dimension 2. Le profil du champ magnétique appliqué varie régulièrement et peut s'annuler exactement à l'ordre 1 le long d'une courbe. En supposant que la l'intensité du champ magnétique appliqué varie entre deux échelles caractéristiques, et que le paramètre de Ginzburg-Landau tend vers l'infini, nous déterminons une formule asymptotique précise pour minimiser l'énergie et montrer que les minimiseurs de l'énergie ont des vortex. Nous mettons en évidence que la présence d'un champ magnétique variable implique que la distribution de la vorticité dans l'échantillon n'est pas uniforme.

Dans la dernière partie, nous étudions l'énergie de Ginzburg-Landau d'un supraconducteur avec un champ magnétique variable et un terme de "pinning" dans un domaine borné et régulier de dimension 2. En supposant que le paramètre de Ginzburg-Landau et l'intensité du champ magnétique sont grands et de même ordre, nous déterminons une formule asymptotique précise pour l'énergie. De plus, nous discutons l'existence des solutions non-triviales et déterminons le comportement asymptotique du troisième champ critique de la supraconductivité.

Mots clés

Opérateur de Schrödinger magnétique, théorie spectrale, analyse semi-classique, fonctionnelle de Ginzburg-Landau avec champ magnétique variable.

Table des matières

Table des matières	ix
Liste des Figures	xi
1 le modèle de Ginzburg-Landau avec champ magnétique variable	1
1.1 Motivations et notations	1
1.1.1 Supraconducteurs et champs magnétiques	1
1.1.2 Présentation du modèle	2
1.1.3 Notations	2
1.1.4 Invariance de jauge et équations	4
1.1.5 Les vortex	5
1.1.6 Les champs critiques	7
1.2 L'énergie de l'état fondamental de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique appliqué variable dans un domaine de \mathbb{R}^2	9
1.2.1 Problème posé	9
1.2.2 Résultats principaux	9
1.2.3 Méthodes de démonstration.	12
1.2.4 Discussion des résultats principaux	12
1.3 Énergie et vorticité pour un modèle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique variable	13
1.3.1 Énoncé des résultats	13
1.3.2 Méthodes de démonstration.	16
1.4 Énergie pour un modèle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique variable et un terme de "pinning"	17
1.4.1 Résultats principaux	19
1.4.2 Méthodes de démonstration	22
Bibliographie.	

Table des figures

- 1.1 Champ magnétique repoussé par un superconducteur. 1
- 1.2 Représentation schématique d'un champ magnétique qui peut s'annuler sur des courbes régulières. 3
- 1.3 Représentation schématique d'un supraconducteur avec tourbillons (vortex). 5
- 1.4 Vortex de degré +1 et -1, les flèches représentent le courant. 6
- 1.5 Etat Meissner. 7
- 1.6 Etat mixte. 7

Chapitre 1

Le modèle de Ginzburg-Landau avec champ magnétique variable

1.1 Motivations et notations

1.1.1 Supraconducteurs et champs magnétiques

Dans les années 50, les physiciens Vitali Lazarevitch Ginzburg et Lev Davidovitch Landau ont proposé la théorie éponyme de la supraconductivité.

La supraconductivité est un phénomène caractérisé par l'absence de résistance électrique et l'expulsion du champ magnétique. Elle permettrait de transporter de l'électricité sans perte d'énergie.

A très basses températures, le matériau devient supraconducteur. Lorsqu'il est soumis à un champ magnétique de faible intensité, le champ magnétique est repoussé, comme indique la figure ci-dessous.

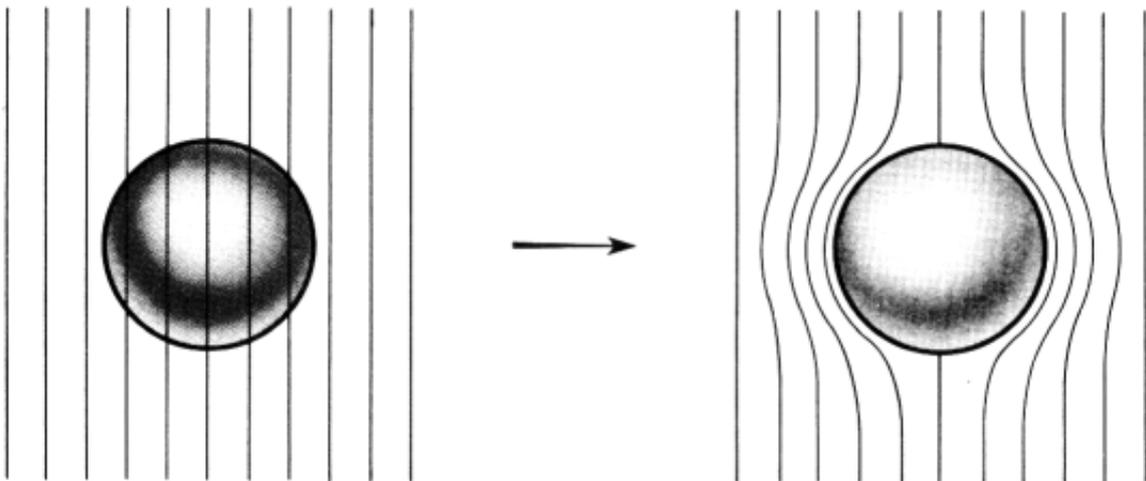


FIGURE 1.1 – Champ magnétique repoussé par un superconducteur.

Dans un supraconducteur, deux effets différents permettent de faire léviter un aimant :

l'effet Meissner, et le piégeage des vortex. L'effet Meissner est la propriété de repousser un champ magnétique appliqué en créant un contre champ opposé de même intensité (c.f. Figure 1.5), alors que le piégeage des vortex va maintenir l'aimant à l'endroit où il se trouvait quand le supraconducteur a été refroidi. Autrement dit, l'un repousse, et l'autre piège (sans attirer pour autant). On observe l'un ou l'autre de ces effets selon la force de l'aimant.

1.1.2 Présentation du modèle

L'analyse des problèmes mathématiques liés à la théorie de superconductivité a été intensivement développée depuis une quinzaine d'années. Après une série de réductions, le modèle 2D de Ginzburg-Landau permet de décrire l'état de l'échantillon supraconducteur soumis à un champ magnétique variable B_0 au-dessous de la température critique T_c . Plus précisément, on considère la fonctionnelle

$$\mathcal{E}_{\kappa,H,B_0}(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} \left[|(\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(1 - |\psi|^2)^2 \right] dx + \kappa^2 H^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{rot} \mathbf{A} - B_0|^2 dx. \quad (1.1.1)$$

Cette fonctionnelle a suscité de nombreux travaux mathématiques, on peut citer, les travaux de Helffer, Serfaty, Rubinstein, Fournais, Kachmar, Phillips, X.B. Pan, Sandier, H.Kwek...

Dans cette expression, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble ouvert, qui dans notre étude est toujours supposé *simplement connexe*, borné et à bord régulier. On peut imaginer qu'il correspond par exemple à la section horizontale d'un cylindre vertical infiniment long.

Il sera pratique de soustraire la constante $\frac{\kappa^2}{2}|\Omega|$ de la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H,B_0}$. Ceci change juste l'énergie du point zéro et n'a aucune conséquence physique.

La fonction B_0 (champ magnétique variable) est initialement définie sur \mathbb{R}^2 . Lorsque le domaine Ω est simplement connexe, on peut remplacer le domaine d'intégration de $|\operatorname{rot} \mathbf{A} - B_0|^2$ sur \mathbb{R}^2 par Ω (cf. [13, Section 11.5]). Ainsi, nous considérons :

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} \left[|(\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi|^2 - \kappa^2 |\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} |\psi|^4 \right] dx + \kappa^2 H^2 \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \mathbf{A} - B_0|^2 dx. \quad (1.1.2)$$

1.1.3 Notations

Pour la paire $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ de l'énergie $\widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}$:

- La fonction $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée le '*paramètre d'ordre*' en physique, sorte de '*pseudo-fonction d'onde*', qui décrit l'état local du matériau. Dans la théorie quantique (microscopique) BCS de Bardeen, Cooper et Schrieffer, $|\psi|^2$ mesure la densité locale de paires de Cooper d'électrons supraconducteurs. Dans la théorie phénoménologique :
 1. Si $|\psi| \neq 0$, alors le matériel est dans la phase purement supraconductrice.
 2. Si $|\psi| = 0$, alors le matériel est dans la phase normale.
- Le champ magnétique induit dans le matériau est $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ (défini par $\operatorname{rot} \mathbf{A} := \partial_1 \mathbf{A}_2 - \partial_2 \mathbf{A}_1$), $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ étant le '*potentiel-vecteur du champ magnétique*', qui est donc une fonction

à valeurs réelles.

- $B_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ est le profil du champ magnétique appliqué, variable et satisfait :

$$\begin{cases} |B_0| + |\nabla B_0| > 0 & \text{in } \bar{\Omega} \\ \nabla B_0 \times \vec{n} \neq 0 & \text{on } \Gamma \cap \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

où,

$$\Gamma = \{x \in \bar{\Omega} : B_0(x) = 0\}.$$

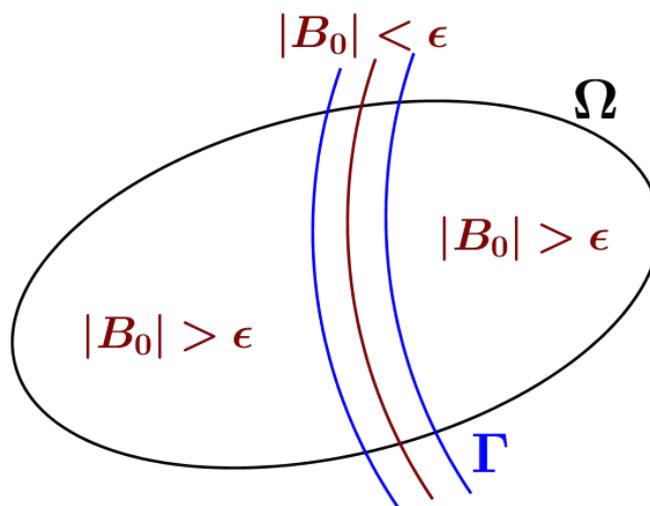


FIGURE 1.2 – Représentation schématique d'un champ magnétique qui peut s'annuler sur des courbes régulières.

Dans cette fonctionnelle deux paramètres réels interviennent :

- Le paramètre $\kappa > 0$ est une caractéristique du matériau et il est appelé le '*paramètre de Ginzburg-Landau*'. Le matériau est dit du type I si κ est suffisamment petit ($\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$) et il est dit du type II lorsque κ est grand ($\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$). Mathématiquement, cela conduit à l'analyse des divers régimes asymptotiques $\kappa \rightarrow 0$ ou $\kappa \rightarrow +\infty$. C'est ce dernier cas qui sera analysé dans notre thèse. Il est aussi appelé limite de London.
- Le paramètre $H > 0$ est l'intensité par rapport du champ magnétique variable appliqué au champ magnétique de référence B_0 .

L'hypothèse dans (1.1.3) implique que pour tout ensemble ouvert ω relativement compact dans Ω l'ensemble $\Gamma \cap \omega$ est vide ou une union finie disjointe de courbes régulières. Ici, la définition de la fonctionnelle (1.1.2) est prise comme dans [13]. Dans [12], la mise à l'échelle de l'intensité du champ magnétique externe (notée h) est différente.

1.1.4 Invariance de jauge et équations

La fonctionnelle $\widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}$ est invariante par changement de jauge :

$$\begin{cases} \psi \rightarrow \psi e^{i\Phi} \\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Phi \end{cases}$$

ce qui signifie que pour n'importe quelle fonction $\Phi \in H^2(\Omega, \mathbb{R})$, on a

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}(\psi, \mathbf{A}) = \widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}(\psi e^{i\Phi}, \mathbf{A} + \nabla\Phi).$$

Deux configurations équivalentes de jauge étant physiquement équivalentes, ceci nous conduit à ne chercher la solution du problème qu'à changement de jauge près. Il est alors mieux de restreindre la fonctionnelle à un sous-espace plus petit $H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H_{\text{div}}^1(\Omega)$, avec

$$H_{\text{div}}^1(\Omega) = \{ \mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) \in H^1(\Omega)^2 : \text{div } \mathbf{A} = 0 \text{ in } \Omega, \mathbf{A} \cdot \nu = 0 \text{ on } \partial\Omega \},$$

où ν est le vecteur normal extérieur de $\partial\Omega$. En général, nous considérerons la fonctionnelle $\widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}$ sur cet espace.

Nous définissons l'énergie de l'état fondamental de Ginzburg-Landau comme l'infimum de la fonctionnelle $\widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}$:

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\text{g}}(\kappa, H) = \inf \{ \widehat{\mathcal{E}}_{\kappa,H,B_0}(\psi, \mathbf{A}) : (\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_{\text{div}}^1(\Omega) \}. \quad (1.1.4)$$

Typiquement, Ω correspond au matériau supraconducteur¹, c'est-à-dire au-dessous de sa température critique, entouré par un matériau normal c'est-à-dire au-dessus de sa température critique.

Puisque Ω est bornée, l'existence de minimiseurs est assez classique. Ainsi l'infimum est effectivement un minimum. La démonstration de l'existence de minimiseurs est rappelée par exemple dans le livre de Fournais et Helffer [13, Section 11.2].

Soit $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'unique champ de vecteurs tel que,

$$\text{div } \mathbf{F} = 0 \text{ et } \text{curl } \mathbf{F} = B_0 \text{ dans } \Omega, \quad \nu \cdot \mathbf{F} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (1.1.5)$$

Si $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H_{\text{div}}^1(\Omega)$ est un point critique² de $\mathcal{E}_{\kappa,H,B_0}$, donc, (ψ, \mathbf{A}) est une solution faible du système constitué des équations suivantes, que nous appelons '*équations de Ginzburg-*

¹Mentionnons ici que le paramètre de Ginzburg-Landau κ ne dépend que du matériau supraconducteur dans Ω

²Nous disons que (ψ, \mathbf{A}) est un point critique de $\mathcal{E}_{\kappa,H,B_0}$ si pour chaque $(\tilde{\psi}, \tilde{\mathbf{A}})$ à support compact, nous avons :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\kappa,H,B_0}(\psi + t\tilde{\psi}, \mathbf{A} + t\tilde{\mathbf{A}})|_{t=0} = 0.$$

Landau' (c.f. [43, Section 3.2]),

$$\begin{cases} -(\nabla - i\kappa H \mathbf{A})^2 \psi = \kappa^2(1 - |\psi|^2)\psi & \text{dans } \Omega \\ -\nabla^\perp \text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{F}) = \frac{1}{\kappa H} \text{Im}(\bar{\psi} (\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi) & \text{dans } \Omega \\ \nu \cdot (\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{F} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Dans les équations ci-dessus, le champ vecteur $\nabla^\perp \text{rot } \mathbf{A}$ est défini par

$$\nabla^\perp \text{rot } \mathbf{A} = (-\partial_{x_2}(\text{rot } \mathbf{A}), \partial_{x_1}(\text{rot } \mathbf{A})).$$

Le vecteur ν désigne la normale unitaire en un point de $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur.

L'analyse du système (1.1.6), peut être effectuée par des techniques d'équations aux dérivées partielles.

Nous rappelons que ce système est non linéaire. $H^1(\Omega)$ est, (quand Ω est borné et régulier dans \mathbb{R}^2) d'injection compacte dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty)$. De plus, on peut montrer que la solution dans $H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H_{\text{div}}^1(\Omega)$ du système elliptique (1.1.6) est en fait, quand Ω est régulière, dans $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{C}) \times C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. (c.f. [13, Théorème F.2.1]).

1.1.5 Les vortex

Quand l'intensité du champs magnétique H augmente progressivement tout en passant par des valeurs critiques (voir Section 1.1.6), le champ magnétique B_0 ne sera plus repoussé. Autrement dit, il traverse l'échantillon de part en part par le biais des vortex qui sont représentés par des disques D qui peuvent être vus comme l'ensemble $\{|\psi|^2 \approx 0\}$.

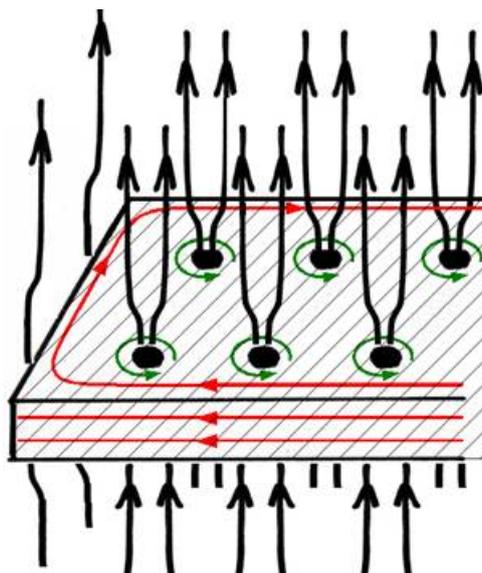


FIGURE 1.3 – Représentation schématique d'un supraconducteur avec tourbillons (vortex).

Pour permettre à ce champ magnétique (représenté en noir) de passer à travers le vortex, le matériau développe des courants supraconducteurs (représentés en vert) :

$$j = \frac{i}{2\kappa H} \left(\psi \overline{(\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi} - \overline{\psi} (\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi \right)$$

qui circulent autour de ces disques, sous forme de tourbillon qui justifie le nom ‘vortex’. Autour de ces disques, la phase φ de ψ a un nombre d’enroulement non nul $d = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ définie sur le bord du disque, appelé *le degré du vortex*, où les vortex de degré 1 et -1 sont représentés.

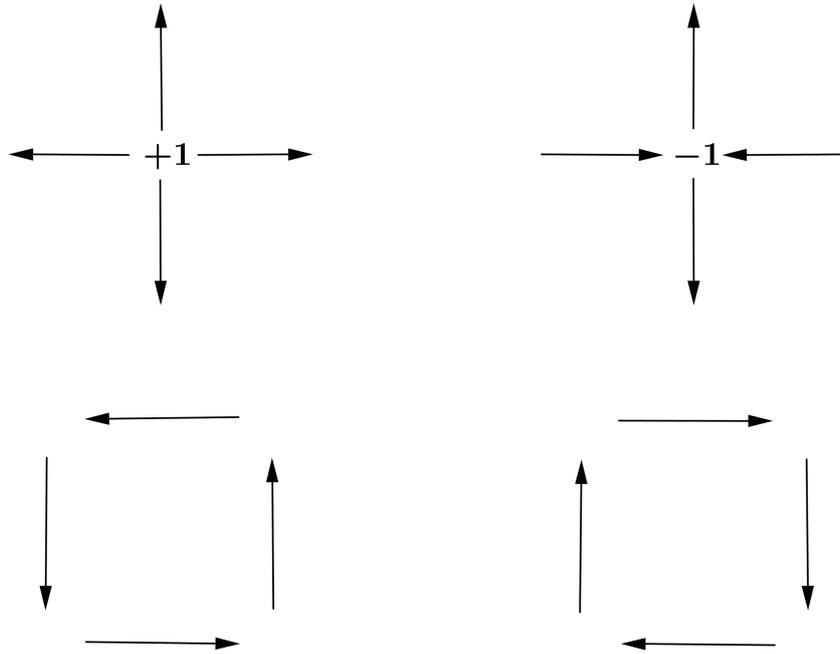


FIGURE 1.4 – Vortex de degré +1 et -1, les flèches représentent le courant.

1.1.6 Les champs critiques

Pour un κ donné, le comportement des minimiseurs et plus généralement des points critiques de la fonctionnelle est déterminé en fonction de la valeur du champ magnétique H .

Quand le champ magnétique est constant, il y a trois valeurs principales du H ou champs critiques H_{C_1} , H_{C_2} et H_{C_3} , pour lesquelles des transitions de phase se produisent.

En dessous du premier champ critique H_{C_1} , le supraconducteur est partout dans sa phase supraconductrice $|\psi| \neq 0$ et le champ magnétique ne pénètre pas (cela s'appelle l'effet Meissner ou état de Meissner (c.f. Figure 1.5). Mathématiquement, le champ magnétique induit $\text{rot } \mathbf{A}$ est asymptotiquement très petite.

À H_{C_1} , un premier vortex apparaît. Entre H_{C_1} et H_{C_2} les phases supraconductrices et normales (sous la forme de tourbillons) coexistent dans l'échantillon, et le champ magnétique pénètre à travers les vortex. C'est ce qu'on appelle l'état mixte (c.f. Figure 1.6).

À H_{C_2} , quand κ est grand, une deuxième transition de phase se produit. $|\psi| \approx 0$ à l'intérieur de l'échantillon, c'est-à-dire que la supraconductivité dans la plus grande partie de l'échantillon est perdue. Mathématiquement, le champ magnétique induit $\text{rot } \mathbf{A}$ et le profil du champ magnétique appliqué B_0 sont asymptotiquement égaux.

Entre H_{C_2} et H_{C_3} , la supraconductivité persiste près de la frontière, c'est ce qu'on appelle la supraconductivité de surface, et après H_{C_3} , la supraconductivité est complètement détruite et $|\psi| = 0$ dans tout l'échantillon. L'échantillon est alors complètement en phase normale.

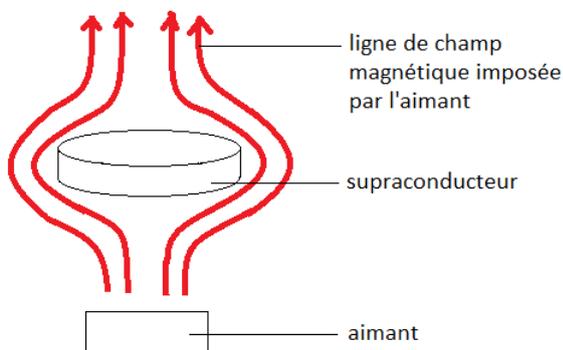


FIGURE 1.5 – Etat Meissner.

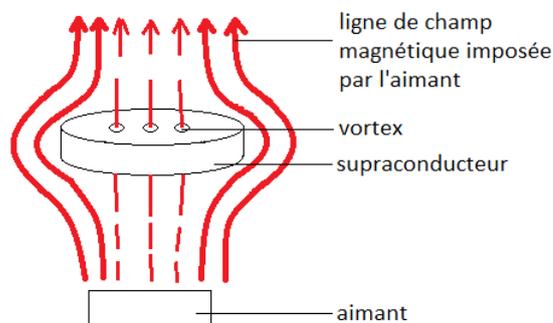


FIGURE 1.6 – Etat mixte.

Nous allons donner maintenant le comportement asymptotique des trois champs critiques dans des plusieurs cas :

Le cas du champ magnétique constant :

$$H_{C_2} = \frac{\kappa}{B_0} \quad \text{et} \quad H_{C_3} \sim \frac{\kappa}{\Theta_0 B_0}.$$

Ici, Θ_0 est une constante universelle telle que, $\Theta_0 \in (1/2, 1)$.

Le cas du champ magnétique variable qui ne s'annule pas :

$$H_{C_2} = \frac{\kappa}{\inf_{x \in \Omega} B_0} \quad \text{et} \quad H_{C_3} \sim \frac{\kappa}{\Theta_0 \inf_{x \in \partial \Omega} B_0} \quad \text{avec} \quad \left(\inf_{x \in \Omega} B_0 > \Theta_0 \inf_{x \in \partial \Omega} B_0 \right).$$

Dans le cas où $(\inf_{x \in \overline{\Omega}} B_0 < \Theta_0 \inf_{x \in \partial\Omega} B_0)$, le phénomène de la supraconductivité de surface disparaît. Ceci nous donne que les comportements asymptotiques de H_{C_2} et H_{C_3} sont égaux.

$$H_{C_2} = H_{C_3} \sim \frac{\kappa}{\Theta_0 \inf_{x \in \partial\Omega} B_0}.$$

Le cas du champ magnétique variable qui s'annule le long d'une courbe simple et régulière Γ :

$$H_{C_2} = \frac{\kappa^2}{\lambda_0^{\frac{3}{2}} \min_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla B_0(x)|} \quad \text{et} \quad H_{C_3} \sim \frac{\kappa^2}{\min_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \lambda_0(\mathbb{R}_+, \theta(x))^{\frac{3}{2}} |\nabla B_0(x)|}$$

avec

$$\lambda_0^{\frac{3}{2}} \min_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla B_0(x)| > \min_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \lambda_0(\mathbb{R}_+, \theta(x))^{\frac{3}{2}} |\nabla B_0(x)|.$$

Ici, λ_0 est introduite dans (??), $\lambda_0(\mathbb{R}_+, \theta(x))$ est le bas du spectre de l'opérateur qui est défini dans (??) et $\theta(x)$ désigne l'angle entre $|\nabla B_0(x)|$ et le vecteur normal $-\nu(x)$.

Dans le cas où $\lambda_0^{\frac{3}{2}} \min_{x \in \Omega \cap \Gamma} |\nabla B_0(x)| < \min_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \lambda_0(\mathbb{R}_+, \theta(x))^{\frac{3}{2}} |\nabla B_0(x)|$, la supraconductivité de surface disparaît. Alors, nous ne distinguons pas entre H_{C_2} et H_{C_3} , de plus

$$H_{C_2} = H_{C_3} \sim \frac{\kappa^2}{\min_{x \in \partial\Omega \cap \Gamma} \lambda_0(\mathbb{R}_+, \theta(x))^{\frac{3}{2}} |\nabla B_0(x)|}.$$

Pour ce qui concerne le premier champ critique H_{C_1} , nous renvoyons à Sandier et Serfaty [43].

1.2 L'énergie de l'état fondamental de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique appliqué variable dans un domaine de \mathbb{R}^2

1.2.1 Problème posé

Ici on prend κ grand ce qui correspond à une hypothèse que le matériau est fortement de type II. Les propriétés supraconductrices sont décrites par les minimiseurs (ψ, \mathbf{A}) de la fonctionnelle $\widehat{\mathcal{E}}_{\kappa, H, B_0}$ définie en (1.1.2). On s'intéresse juste à déterminer le comportement asymptotique du paramètre d'ordre ψ dans le régime où le paramètre de Ginzburg-Landau κ et le champ magnétique H sont grands et de même ordre, i.e.

$$\exists \kappa_0 \geq 0, \quad \forall \kappa \geq \kappa_0, \quad \Lambda_{\min} \kappa \leq H \leq \Lambda_{\max} \kappa, \quad (1.2.1)$$

où Λ_{\min} et Λ_{\max} sont des constantes strictement positives telle que $\Lambda_{\min} \leq \Lambda_{\max}$.

Comme conséquence, nous montrons que le paramètre d'ordre ψ est localisé asymptotiquement dans la region où $B_0 < \frac{\kappa}{H}$ lorsque H vérifie (1.2.1).

1.2.2 Résultats principaux

Étant donné $b \geq 0$. Nous définissons l'énergie de Ginzburg-Landau dans un ensemble ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$,

$$G_{b, \mathcal{D}}(u) = \int_{\mathcal{D}} \left(b |\nabla - i\mathbf{A}_0 u|^2 + \frac{1}{2} (1 - |u|^2)^2 \right) dx, \quad \forall u \in H_0^1(\mathcal{D}).$$

Ici,

$$\mathbf{A}_0(x) = \frac{1}{2}(-x_2, x_1), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Compte tenu de la définition de l'énergie de l'état fondamental $\widehat{\mathcal{E}}_g$ dans (1.1.4). Nous donnons une estimation asymptotique de $\widehat{\mathcal{E}}_g$, qui est valable quand H satisfait (1.2.1). Le comportement de l'énergie $\widehat{\mathcal{E}}_g(\kappa, H)$ implique une fonction auxiliaire \hat{f} qui est la limite de minimum de l'énergie de Ginzburg-Landau G_{b, Q_R} avec $Q_R =] - R/2, R/2[\times] - R/2, R/2[$,

$$\hat{f}(b) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\inf_{u \in H_0^1(Q_R)} G_{b, Q_R}(u)}{R^2}. \quad (1.2.2)$$

La fonction \hat{f} a les propriétés suivantes :

- Pour tous $b \geq 1$, $\hat{f}(b) = \frac{1}{2}$, et $\hat{f}(0) = 0$.
- $\hat{f} : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ est une fonction croissante, continue et concave.

-

$$\hat{f}(b) = \frac{b}{2} \ln \frac{1}{b} (1 + o(1)), \quad \text{lorsque } b \rightarrow 0. \quad (1.2.3)$$

La fonction \hat{f} a été introduite par Sandier-Serfaty dans [44], puis analysée en [3, 17]. Cette fonction joue un rôle important dans la description de la distribution de la supraconductivité dans la plupart des échantillons à deux et trois dimensions, voir [44], [3, 16, 17] et les articles récents [5, 26].

Théorème 1.2.1. *Supposons que B_0 vérifie (1.1.3) et H vérifie (1.2.1). Alors, l'énergie de l'état fondamental \widehat{E}_g satisfait,*

$$\widehat{E}_g(\kappa, H) = \kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx + o(\kappa^2), \quad (\kappa \rightarrow +\infty). \quad (1.2.4)$$

Remarque 1.2.2. *Plus précisément, quand κ est grand, on peut montrer l'existence de $C > 0$ et $\tau_0 \in (1, 2)$ tels que ;*

$$\left| \widehat{E}_g(\kappa, H) - \kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx \right| \leq C\kappa^{\tau_0}. \quad (1.2.5)$$

Notons que, le deuxième terme à droite dans (1.2.4) est petit par rapport au premier terme $\kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx$ qui est donc le terme dominant.

Le théorème 1.2.1 a été prouvé par E. Sandier et S. Serfaty (cf. [44, Théorème 1.4]) lorsque le champ magnétique B_0 est constant ($B_0 = 1$). Cependant, ces auteurs ne contrôlent pas le reste avec la même précision dans [26]. Pour être plus précis, l'énergie de l'état fondamental dans le cas $B_0 = 1$ qui était $\kappa^2 |\Omega| \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} \right) - \frac{1}{2} \right\}$, devient maintenant l'intégrale $\kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx$. L'approche utilisée dans la preuve du Théorème 1.2.1 est différente de celle du [44] et elle s'inspire plutôt de celle dans [16] qui étudie le même problème lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et B_0 constant.

L'énoncé du Théorème 1.2.3 nous donne que l'énergie magnétique est petite, comparée à celle du terme dominant qui est d'ordre supérieur à $\mathcal{O}(\kappa^{\tau_0})$.

Théorème 1.2.3 (Estimation de l'énergie magnétique.). *Avec les notations et l'hypothèses du Théorème 1.2.1, il existe deux constantes $C > 0$ et $\kappa_0 > 0$, telles que, si $\kappa \geq \kappa_0$, alors l'énergie magnétique satisfait,*

$$(\kappa H)^2 \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \mathbf{A} - B_0|^2 dx \leq C\kappa^{\tau_0}. \quad (1.2.6)$$

Dans notre démonstration, la valeur de τ_0 dépend des propriétés de B_0 : nous trouvons que $\tau_0 = \frac{7}{4}$ lorsque B_0 ne s'annule pas en $\overline{\Omega}$ et que $\tau_0 = \frac{15}{8}$ dans le cas général.

Nous allons maintenant donner une version locale du Théorème 1.2.1. Tout d'abord, si $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_{\operatorname{div}}^1(\Omega)$, nous introduisons la densité de l'énergie,

$$e(\psi, \mathbf{A}) = |(\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi|^2 - \kappa^2 |\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} |\psi|^4.$$

Nous introduisons aussi l'énergie locale de ψ dans un domaine $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$:

$$\mathcal{E}_0(\psi, \mathbf{A}; \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} e(\psi, \mathbf{A}) dx. \quad (1.2.7)$$

De plus, nous définissons l'énergie locale de Ginzburg-Landau de (ψ, \mathbf{A}) dans un domaine $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$ comme suit,

$$\mathcal{E}(\psi, \mathbf{A}; \mathcal{D}) = \mathcal{E}_0(\psi, \mathbf{A}; \mathcal{D}) + (\kappa H)^2 \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \mathbf{A} - B_0|^2 dx. \quad (1.2.8)$$

Théorème 1.2.4 (Estimation de l'énergie locale.). *Supposons que $\mathcal{D} \subset \Omega$ soit un ensemble ouvert. Alors, il existe une constante $\kappa_0 > 0$ telle que, lorsque H vérifie (1.2.1) et (ψ, \mathbf{A}) un minimiseur de (1.1.2), nous avons*

$$\mathcal{E}(\psi, \mathbf{A}; \mathcal{D}) = \kappa^2 \int_{\mathcal{D}} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx + o(\kappa^2). \quad (1.2.9)$$

Dans le cas où $B_0 = 1$, Sandier et Serfaty (cf. [44]) ont donné un comportement asymptotique du $\mathcal{E}(\psi, \mathbf{A}; \mathcal{D})$ quand (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur de (1.1.2).

Théorème 1.2.5 (Sandier-Serfaty). *Il existe une constante $\kappa_0 > 0$ telle que, lorsque H vérifie (1.2.1), nous avons*

$$\mathcal{E}(\psi, \mathbf{A}; \mathcal{D}) = \kappa^2 |\mathcal{D}| \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} \right) - \frac{1}{2} \right\} + o(\kappa^2), \quad (\kappa \rightarrow +\infty). \quad (1.2.10)$$

Le théorème suivant nous donne un comportement asymptotique du paramètre d'ordre ψ , quand (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur global.

Théorème 1.2.6 (Concentration du paramètre d'ordre.). *Avec les notations et hypothèses du Théorème 1.2.1. Il existe deux constantes positives C , κ_0 et une constante $\tau_1 \in (-1, 0)$ telles que, si $\kappa \geq \kappa_0$, et \mathcal{D} est un ouvert régulier tel que $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$, alors,*

1. *Si $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_{\operatorname{div}}^1(\Omega)$ est une solution de (1.1.6), alors,*

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |\psi|^4 dx \leq - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx + C\kappa^{\tau_1}. \quad (1.2.11)$$

2. *Si $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_{\operatorname{div}}^1(\Omega)$ est un minimiseur de (1.1.2), alors,*

$$\left| \int_{\mathcal{D}} |\psi|^4 dx + 2 \int_{\mathcal{D}} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx \right| \leq C\kappa^{\tau_1}. \quad (1.2.12)$$

La valeur de τ_1 trouvée dépend des propriétés de B_0 : nous trouvons que $\tau_1 = -\frac{1}{4}$ lorsque B_0 ne s'annule pas en $\overline{\Omega}$ et que $\tau_1 = -\frac{1}{8}$ dans le cas général.

Notons que $\hat{f}(\cdot) \in [0, \frac{1}{2}]$, ce qui implique

$$- \int_{\mathcal{D}} \left\{ 2\hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - 1 \right\} dx \geq 0.$$

Le théorème 1.2.6 a été prouvé par E. Sandier et S. Serfaty (cf. [44]) lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et B_0 est constant.

Théorème 1.2.7 (Sandier-Serfaty). *Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $B_0 = 1$, H vérifie (1.2.1) et que \mathcal{D} est un ouvert régulier tel que $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$. Alors,*

1. Si $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_{\text{div}}^1(\Omega)$ est une solution de (1.1.6), alors,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |\psi|^4 dx \leq - \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} \right) - \frac{1}{2} \right\} |\mathcal{D}| + o(1), \quad (\kappa \rightarrow +\infty). \quad (1.2.13)$$

2. Si $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_{\text{div}}^1(\Omega)$ est un minimiseur de (1.1.2), alors,

$$\left| \int_{\mathcal{D}} |\psi|^4 dx + 2|\mathcal{D}| \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} \right) - \frac{1}{2} \right\} \right| \leq o(1), \quad (\kappa \rightarrow +\infty). \quad (1.2.14)$$

1.2.3 Méthodes de démonstration.

Les techniques appliquées dans la démonstration sont étroitement liées à la définition de la fonction \hat{f} (voir (1.2.2)), qui est la densité d'énergie de l'état fondamental associé à un champ appliqué constant b . Elle devient très grande à l'échelle naturelle du problème, mais reste petite à l'échelle de Ω et des variations de B_0 . À l'aide de cette fonction nous avons obtenu le comportement asymptotique de l'énergie dans le régime où H et κ sont grands et de même ordre.

La preuve des résultats ci-dessus consiste à subdiviser le domaine Ω en carrés de côté ℓ en excluant ceux qui rencontrent $|B_0| < \epsilon$, et à approximer l'énergie dans chaque carré en approximant B_0 par un B_0 constant, carré dans lequel on utilisera les bornes supérieures et inférieures triviales. Les valeurs de ℓ et ϵ sont également à optimiser pour que l'erreur soit la plus petite possible.

Dans l'estimation du reste, nous nous référons aux estimations a priori des solutions des équations de Ginzburg-Landau (1.1.6) qui jouent un rôle essentiel dans le contrôle des erreurs résultant des diverses approximations.

De plus, nous utilisons la version locale de l'énergie pour démontrer que l'énergie magnétique est dans l'erreur, ce qui nous donne l'asymptotique de l'énergie de l'état fondamental de Ginzburg-Landau dans un sous-domaine.

1.2.4 Discussion des résultats principaux

Si $\Gamma \neq \emptyset$ et $H = b\kappa$, $b > 0$, alors,

$$\hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{en } \mathcal{D} = \left\{ x \in \Omega : \frac{H}{\kappa} |B_0(x)| < 1 \right\},$$

et

$$|\mathcal{D}| \neq 0.$$

Par conséquent, pour κ assez grand, nous obtenons le résultat suivant :

$$\int_{\mathcal{D}} |\psi|^4 dx > \epsilon_{\mathcal{D}} \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

où $\epsilon_{\mathcal{D}}$ est une constante positive dépendant de \mathcal{D} .

Ceci nous indique que la supraconductivité est localis e dans la région où $B_0 < \frac{\kappa}{H}$ contrairement au cas lorsque le champ magnétique est constant.

Il y a donc une différence importante entre nos résultats et ceux pour le champ magnétique constant. Quand le champ magnétique est d'intensité constante non nulle, (cf. [13]), il existe une constante universelle $\Theta_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ telles que, si $H = b\kappa$ et $b > \Theta_0^{-1}$, alors $\psi = 0$ dans $\bar{\Omega}$. De plus, dans la même situation, lorsque $H = b\kappa$ and $1 < b < \Theta_0^{-1}$, ψ est asymptotiquement petit partout sauf dans un petit voisinage de $\partial\Omega$ (cf. [47]). Notre résultat est dans le même esprit que dans [46], où les auteurs ont établi que, sous l'hypothèse (1.1.3), pour κ assez grand, quand $H = b\kappa^2$ et $b > b_0$, alors $\psi = 0$ in $\bar{\Omega}$. (b_0 est une constante).

1.3  nergie et vorticité pour un modèle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique variable

Nous allons déterminer une formule asymptotique précise pour le minimum de l'énergie et montrer que les minimiseurs de l'énergie ont des vortex quand l'intensité du champ magnétique appliqué H varie entre deux échelles caractéristiques, et que le paramètre de Ginzburg-Landau κ tend vers l'infini, autrement dit, quand H satisfait,

$$C_{\min}\kappa^{\frac{1}{3}} \leq H \ll \kappa \quad \text{lorsque } \kappa \longrightarrow +\infty, \tag{1.3.1}$$

où C_{\min} est une constante positive.

De plus, nous allons mettre en évidence que la présence d'un champ magnétique variable implique que la distribution de la vorticité dans l'échantillon n'est pas uniforme. Notons que, dans le cas où B_0 est constant, Sandier et Serfaty ont prouvé que la distribution de la vorticité dans l'échantillon est uniforme.

1.3.1  nonc  des résultats

Théorème 1.3.1. *Supposons que B_0 vérifie (1.1.3) et que H vérifie (1.3.1), alors, l'énergie de l'état fondamental dans (1.1.4) admet le comportement asymptotique suivant lorsque κ tend vers $+\infty$:*

$$\widehat{E}_g(\kappa, H) = \kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx + o \left(\kappa H \ln \frac{\kappa}{H} \right). \tag{1.3.2}$$

Le deuxième terme à droite dans (1.2.4), qui peut s'écrire plus simplement $o(\kappa H \ln \kappa)$ quand (1.3.1) satisfait, est d'ordre inférieur à celui du premier terme $\kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx$ qui est le terme dominant.

Sachant que \hat{f} satisfait (1.2.2), nous pouvons réécrire (1.2.4) comme suit,

$$\widehat{E}_g(\kappa, H) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \left(\kappa H |B_0(x)| \ln \frac{\kappa}{H |B_0(x)|} - 1 \right) dx \right] (1 + o(1)). \quad (1.3.3)$$

Quand le champ magnétique est constant, (1.3.3) est prouvé par Sandier-Serfaty [45] sous la condition :

$$\frac{\ln \kappa}{\kappa} \ll H \ll \kappa. \quad (1.3.4)$$

Théorème 1.3.2. *Supposons que $B_0 = 1$ et H vérifie (1.3.4), alors, l'énergie de l'état fondamental dans (1.1.4) satisfait*

$$\widehat{E}_g(\kappa, H) = \frac{1}{2} |\Omega| \left(\kappa H \ln \frac{\kappa}{H} - 1 \right) (1 + o(1)), \quad (\kappa \rightarrow +\infty). \quad (1.3.5)$$

La raison pour laquelle nous n'obtenons pas (1.3.3) sous la condition ci-dessus est probablement technique. La méthode consiste à construire des tests de configurations avec une condition au bord de Dirichlet. Nous ne pouvons pas construire des configurations périodiques comme dans [45], parce que le champ magnétique B_0 est variable.

L'approche utilisée dans la preuve du Théorème 1.2.5 est inspirée de celle dans [30] qui étudie le même problème quand $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et B_0 est constante.

Rappelons que quand H vérifie (1.2.1), nous avons obtenu

$$\widehat{E}_g(\kappa, H) = \kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx + o(\kappa H), \quad (\kappa \rightarrow +\infty). \quad (1.3.6)$$

Si nous supposons qu'il existe des constantes positives C_{\min} et C_{\max} avec $H(\kappa)$ satisfaisant

$$C_{\min} \kappa^{\frac{1}{3}} \leq H(\kappa) \leq C_{\max} \kappa, \quad (1.3.7)$$

alors (1.3.6) et (1.3.2) deviennent

$$\widehat{E}_g(\kappa, H) = \kappa^2 \int_{\Omega} \left\{ \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) - \frac{1}{2} \right\} dx + o \left(\kappa H \left(\left| \ln \frac{H}{\kappa} \right| + 1 \right) \right). \quad (1.3.8)$$

En particulier, l'hypothèse faite sur H couvre la situation considérée dans (1.2.1).

Quand l'ensemble $\Gamma = \{x \in \overline{\Omega}, B_0(x) = 0\}$ est une union finie de courbes régulières et que l'intensité de champ magnétique H satisfait

$$\kappa \ll H \leq \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (1.3.9)$$

Helfer et Kachmar ont donné dans [26] le comportement asymptotique de l'énergie $E_g(\kappa, H)$ suivant :

Théorème 1.3.3. *Supposons que B_0 vérifie (1.1.3) et H vérifie (1.3.9), alors,*

$$\widehat{E}_g(\kappa, H) = \kappa^2 \int_{\Omega} \hat{f} \left(\frac{H}{\kappa} |B_0(x)| \right) dx + \frac{\kappa^3}{H} o(1), \quad (\kappa \rightarrow +\infty). \quad (1.3.10)$$

Le théorème suivant nous donne que l'énergie magnétique est petite comparée avec le terme dominant dans (1.3.8).

Théorème 1.3.4 (Estimation de l'énergie magnétique.). *Avec les notations et l'hypothèse du Théorème 1.3.1, l'énergie magnétique du minimiseur satisfait*

$$(\kappa H)^2 \int_{\Omega} |\operatorname{curl} \mathbf{A} - B_0|^2 dx = o\left(\kappa H \ln \frac{\kappa}{H}\right), \quad \text{lorsque } \kappa \longrightarrow +\infty. \quad (1.3.11)$$

Ce théorème a été prouv e par Helffer et Kachmar [26] quand H vérifie (1.3.9).

Nous allons donner un développement asymptotique de l'énergie locale du minimiseur $\mathcal{E}(\psi, \mathbf{A}; \mathcal{D})$ définie dans (1.2.8) où $\mathcal{D} \subset \Omega$ est un ensemble ouvert.

Théorème 1.3.5. *Supposons que B_0 vérifie (1.1.3) et \mathcal{D} un ouvert régulier tel que $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$, nous avons,*

1. *Si (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur de (1.1.2) et $H(\kappa)$ vérifie (1.3.1), alors,*

$$\mathcal{E}(\psi, \mathbf{A}, \mathcal{D}) \geq \kappa^2 \int_{\mathcal{D}} \hat{f}\left(\frac{H}{\kappa}|B_0(x)|\right) dx + o\left(\kappa H \ln \frac{\kappa}{H}\right), \quad \text{lorsque } \kappa \longrightarrow +\infty. \quad (1.3.12)$$

2. *Si (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur de (1.1.2) et $H(\kappa)$ satisfait*

$$C_{\min}^1 \kappa^{\frac{3}{5}} \leq H \ll \kappa \quad \text{lorsque } \kappa \longrightarrow +\infty, \quad (1.3.13)$$

où C_{\min}^1 est une constante positive, alors,

$$\mathcal{E}(\psi, \mathbf{A}, \mathcal{D}) \leq \kappa^2 \int_{\mathcal{D}} \hat{f}\left(\frac{H}{\kappa}|B_0(x)|\right) dx + o\left(\kappa H \ln \frac{\kappa}{H}\right), \quad \text{lorsque } \kappa \longrightarrow +\infty. \quad (1.3.14)$$

Helffer et Kachmar ont  etudi e le même problème quand H vérifie (1.3.9). Pour être plus précis, le reste sous la condition (1.3.9) était $\frac{\kappa^3}{H}o(1)$, il devient maintenant $\kappa H \ln \frac{\kappa}{H}o(1)$.

Dans le théorème suivant, pour des champs appliqu es qui vérifient (1.3.1) et pour des configurations (ψ, A) d'énergie minimale, on définit des vortex en s'inspirant des méthodes de Sandier et Serfaty [45] qui nous aident à obtenir des informations sur la distribution de la vorticité dans Ω . Partant de là, on peut associer à (ψ, A) une mesure de vorticité

$$\mu_{\kappa} = \frac{2\pi}{\kappa H} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{a_i},$$

où les paires $(a_i, d_i)_i$ sont les positions et les degrés des vortex de (ψ, A) .

Théorème 1.3.6. *Avec les notations et l'hypothèse du Théorème 1.3.1. Il existe $m = m(\kappa)$ disques disjoints $(D_i(a_i, r_i))_{i=1}^m$ dans Ω tels que, lorsque $\kappa \longrightarrow +\infty$,*

1. $\sum_{i=1}^m r_i \leq (\kappa H)^{\frac{1}{2}} \left(\ln \frac{\kappa}{H}\right)^{-\frac{7}{4}} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{|B_0(x)|}} dx (1 + o(1)).$
2. $|\psi| \geq \frac{1}{2}$ sur $\cup_i \partial D_i$.

3. Si $d_i = \deg\left(\frac{\psi}{|\psi|}, \partial D_i\right)$ désignent les degrés des vortex de $\frac{\psi}{|\psi|}$ sur ∂D_i , alors lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$

$$\mu_\kappa = \frac{2\pi}{\kappa H} \sum_{i=1}^m d_i \delta_{a_i} \longrightarrow B_0(x) dx \quad \text{et} \quad |\mu_\kappa| = \frac{2\pi}{\kappa H} \sum_{i=1}^m |d_i| \delta_{a_i} \longrightarrow |B_0(x)| dx,$$

au sens de la convergence faible³, où dx est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 restreint à Ω .

Le théorème 1.3.6 nous donne que si (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur et B_0 un champ magnétique variable vérifie (1.1.3), alors ψ a des vortex qui sont distribués partout dans Ω mais avec une densité non uniforme.

Mentionnons ici que dans [45], Sandier et Serfaty ont obtenu (lorsque H vérifie (1.3.4) et B_0 est constant) que ψ a des vortex qui sont distribués uniformément dans Ω .

1.3.2 Méthodes de démonstration.

Une première étape du travail est d'analyser l'état fondamental avec conditions aux limites de Neumann et avec conditions aux limites de Dirichlet. Nous démontrons l'existence d'une constante positive C , telle que si $R > 1$ et $0 < b < 1$ alors :

$$e_D(b, R) \leq e_N(b, R) + C R b^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, à l'aide de la fonction \hat{f} introduite en (1.2.2) nous avons décrit le comportement asymptotique du $e_D(b, R)$, ce qui nous permet (après avoir subdiviser le domaine Ω en carrés de taille ℓ) en utilisant l'inégalité ci dessus de minorer l'énergie dans chaque carré. Nous utilisons dans chaque carré des estimations qui nous permettent de montrer que le champ B_0 peut être considéré comme constant.

Dans la **majoration de l'énergie**, la méthode consiste à construire dans chaque carré des tests de configurations avec une condition aux limites de Dirichlet en utilisant le résultat de Proposition ?? qui contient la majoration de l'état fondamental e_D .

Notons que dans les deux estimations (majoration et minoration), nous approximons l'énergie en excluant les carrés qui rencontrent $|B_0| < \epsilon$.

Dans une autre partie nous montrons que l'énergie magnétique est dans l'erreur en utilisant les résultats sur l'énergie de l'état fondamental et nous déterminons une version locale de l'énergie. Ceci nous donne l'asymptotique de l'énergie de l'état fondamental dans un sous-domaine.

Dans la dernière partie, nous nous inspirons des méthodes de Sandier et Serfaty sur la distribution des vortex dans Ω . À nouveau nous resubdivisons chaque carré en M^2 carrés parmi lesquels on distingue entre bons et mauvais carrés, ceci nécessitant une optimisation fine des paramètres. Pour les détails nous renvoyons le lecteur à la Section ?. Nous démontrons que le nombre des mauvais carrés sont relativement petits, comparé à celui des bons carrés. En

³ μ_κ est faiblement convergente vers μ c'est-à-dire :

$$\mu_\kappa(f) \longrightarrow \mu(f), \quad \forall f \in C_0(\Omega).$$

utilisant le résultat de la Proposition ?? qui a prouvé par Sandier et Serfaty, nous obtenons que les minimiseurs ont des vortex qui sont distribués dans Ω avec une densité non uniforme.

1.4 Énergie pour un modèle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique variable et un terme de “pinning”

Nous allons étudier un modèle de Ginzburg-Landau avec un champ magnétique variable et avec *pinning*. Le *pinning* traduit l’existence d’impuretés dans le matériau, il peut avoir des conséquences importantes sur la localisation des vortex (sujet que nous n’abordons pas ici) et aussi sur la température critique et l’apparition de la supraconductivité. Il est modélisé (selon la littérature physique) par un terme de poids $a(x)$ qui correspond à l’inhomogénéité du matériau. L’énergie à étudier devient alors :

$$\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} \left(|\nabla - i\kappa H \mathbf{A} \psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (a(x, \kappa) - |\psi|^2)^2 \right) dx + \kappa^2 H^2 \int_{\Omega} |\operatorname{curl} \mathbf{A} - B_0|^2 dx, \quad (1.4.1)$$

où $a(\kappa, x)$ peut dépendre de l’échelle κ . La fonction $a(x, \kappa)$ est réelle, définie sur $\overline{\Omega} \times [\kappa_0, +\infty)$ pour un certain $\kappa_0 > 0$ et satisfait les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \quad \forall \kappa \geq \kappa_0, \quad a(\cdot, \kappa) \in C^1(\overline{\Omega}). \quad (1.4.2)$$

$$(H_2) \quad \sup_{x \in \overline{\Omega}, \kappa \geq \kappa_0} |a(x, \kappa)| < +\infty. \quad (1.4.3)$$

$$(H_3) \quad \forall \kappa \geq \kappa_0, \quad \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla_x a(x, \kappa)| < +\infty. \quad (1.4.4)$$

(H₄) Il existe une constante positive C_1 , telle que,

$$\forall \kappa \geq \kappa_0, \quad \mathcal{L}(\partial\{a(x, \kappa) > 0\}) \leq C_1 \kappa^{\frac{1}{2}}, \quad (1.4.5)$$

où \mathcal{L} est la longueur de $\partial\{a(x, \kappa) > 0\}$ dans Ω . Pour les détails nous renvoyons le lecteur à la section ?? (plus précisément à l’équation ??).

L’hypothèse H_3 nous donne un contrôle uniforme sur l’oscillation de $a(\cdot, \kappa)$ qui sera précisé ultérieurement par une hypothèse sur

$$L(\kappa) = \sup_x |\nabla_x a(x, \kappa)|.$$

Si $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega, \mathbb{C}) \times H_{\operatorname{div}}^1(\Omega)$ est un point critique de $\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}$, donc, (ψ, \mathbf{A}) est une solution faible du système constitué des équations suivantes, que nous appelons ‘équations de Ginzburg-

Landau',

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\nabla - i\kappa H \mathbf{A})^2 \psi = \kappa^2 (a(x, \kappa) - |\psi|^2) \psi & \text{dans } \Omega \\ -\nabla^\perp \text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{F}) = \frac{1}{\kappa H} \text{Im}(\overline{\psi} (\nabla - i\kappa H \mathbf{A}) \psi) & \text{dans } \Omega \\ \nu \cdot (\nabla - i\kappa H \mathbf{A}) \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{F} & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.4.6)$$

La fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}$ a un point critique du type $(0, \mathbf{A})$ avec $\mathbf{A} \in H_{\text{div}}^1(\Omega)$ tel que $\text{rot } \mathbf{A} = B_0$. Un point critique ayant cette forme est appelé un état normal (ou une solution triviale). Il est donc naturel d'étudier si cet état normal est un minimiseur local de la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}$ en présence d'un champ magnétique fort avec *pinning*. Le Hessien de $\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}$ en un état normal est donné par :

$$\text{Hess}_{(0, \mathbf{F})}[\phi, B] = \int_{\Omega} (|\nabla - i\kappa H \mathbf{F}} \phi|^2 - \kappa^2 a(x, \kappa) |\phi|^2) dx + (\kappa H)^2 \int_{\Omega} |\text{rot } B|^2 dx. \quad (1.4.7)$$

Nous sommes conduits alors à étudier la positivité de la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega}(u) = \int_{\Omega} (|\nabla - i\kappa H \mathbf{F}} u|^2 - \kappa^2 a(x, \kappa) |u|^2) dx \quad (u \in H^1(\Omega)). \quad (1.4.8)$$

En observant que $\mathcal{Q}_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega}$ est semi-bornée inférieurement, i.e. qu'il existe une constante C telle que :

$$\int_{\Omega} (|\nabla - i\kappa H \mathbf{F}} u|^2 - \kappa^2 a(x, \kappa) |u|^2) dx \geq -C \|u\|^2,$$

nous considérons la réalisation auto-adjointe définie par le théorème de Friedrichs. C'est l'opérateur de Schrödinger magnétique $P_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega}$ de domaine $D(P_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega})$:

$$\begin{aligned} P_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega} &= -(\nabla - i\kappa H \mathbf{F})^2, \\ D(P_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega}) &= \{u \in H^2(\Omega); \nu \cdot (\nabla - i\kappa H \mathbf{A})u|_{\partial\Omega} = 0\}. \end{aligned}$$

Notons $\mu_1(\kappa, H)$ le bas du spectre de l'opérateur $P_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega}$. À l'aide du principe du min-max, $\mu_1(\kappa, H)$ est défini par :

$$\mu_1(\kappa, H) = \inf_{\substack{\phi \in H^1(\Omega) \\ \phi \neq 0}} \left(\frac{\mathcal{Q}_{\kappa H \mathbf{F}, -\kappa^2 a}^{\Omega}(\phi)}{\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2} \right). \quad (1.4.9)$$

Beaucoup d'articles sont consacrés à l'estimation de minimum de l'énergie de Ginzburg-Landau avec *pinning*, la plupart de ces papiers ont étudiée l'influence du *pinning* sur la localisation des *vorticités*. Dans le cas où $B_0 = 0$ dans (1.4.6), l'influence du *pinning* a été étudié par Lassoued et Mironescu dans [36] et récemment par Michaël dans [38]. Le *pinning* (i.e. la fonction a) dans [36], est une fonction indépendante de κ , et est considéré dans [38] comme une fonction périodique dépendant de κ . La version magnétique de la fonctionnelle dans [36] a été étudiée dans [30, 32].

Dans [4], Aftalion, Sandier et Serfaty ont considéré une fonction a régulière dépendant de κ qui satisfait :

- $L(\kappa) \ll \kappa H$.
- il existe une fonction $a(x)$ continue, une constante positive a_0 et, pour tout $\kappa \geq 0$, il existe deux fonctions $\sigma(\kappa) = o\left(\left(\ln \left|\ln \frac{1}{\kappa}\right|\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$ et $\beta(x, \kappa) \geq 0$ telles que,

$$\min_{B(x, \sigma(\kappa))} \beta(x, \kappa) = 0, \quad a(x, \kappa) = a(x) + \beta(x, \kappa), \quad \text{et} \quad 0 < a_0 \leq a(x) \leq 1.$$

Cette étude contient le cas quand $a(x, \kappa) = a(x)$ ($\beta = 0$), mais elle contient aussi des cas avec des fonctions $\beta(\cdot, \kappa)$ dont l’oscillation en x peut croître avec κ .

La fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}$ dans (1.4.6) est proche des modèles de Bose-Einstein (voir [1, 2]).

1.4.1 Résultats principaux

Nous allons analyser comment le *pinning* apparaît dans l’asymptotique de l’énergie en présence d’un champ magnétique externe, variable et fort.

Nous nous concentrons sur le régime κ grand (i.e. $\kappa \rightarrow +\infty$) et nous étudions l’énergie de l’état fondamental de Ginzburg-Landau comme suit :

$$\widetilde{\mathbb{E}}_g(\kappa, H, a, B_0) = \inf \left\{ \mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}(\psi, \mathbf{A}) : (\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H_{\text{div}}^1(\Omega) \right\}. \quad (1.4.10)$$

Pour être plus précis nous donnons une estimation asymptotique de $\widetilde{\mathbb{E}}_g$, qui est valable quand H vérifie (1.2.1). Le comportement de l’énergie $\widetilde{\mathbb{E}}_g$ fait intervenir la fonction \hat{f} déjà définie dans (1.2.2).

Théorème 1.4.1. *Supposons que les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ sont satisfaites et que H vérifie (1.2.1), et*

$$L(\kappa) = \mathcal{O}(\kappa^{\frac{1}{2}}) \quad \text{lorsque } \kappa \rightarrow +\infty. \quad (1.4.11)$$

L’énergie de l’état fondamental dans (1.4.10) satisfait, lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$,

$$\widetilde{\mathbb{E}}_g(\kappa, H, a, B_0) = \kappa^2 \int_{\{a(x, \kappa) > 0\}} a(x, \kappa)^2 \hat{f}\left(\frac{H |B_0(x)|}{\kappa a(x, \kappa)}\right) dx + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\{a(x, \kappa) \leq 0\}} a(x, \kappa)^2 dx + o(\kappa^2). \quad (1.4.12)$$

Notons que quand $\Omega \cap \{a(x, \kappa) > 0\} = \emptyset$, nous obtenons directement du (1.4.1)

$$\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}(\psi, \mathbf{A}) \geq \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega} a(x, \kappa)^2 dx = \mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}(0, \mathbf{F}).$$

Par conséquent le minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}$ est l’état normal. En termes physiques, ce cas correspond au cas où nous sommes au dessus de la température critique.

Les hypothèses du Théorème 1.4.1 couvrent le cas où la fonction a est constante et égale à 1, qui a été étudié dans [5] (voir (1.2.4)) lorsque H vérifie (1.2.1).

Le théorème suivant nous donne une estimation de l’énergie magnétique.

Théorème 1.4.2 (Estimation de l'énergie magnétique). *Avec les notations et les hypothèses du Théorème 1.4.1, nous avons*

$$(\kappa H)^2 \int_{\Omega} |\operatorname{curl} \mathbf{A} - B_0|^2 dx = o(\kappa^2), \quad \text{lorsque } \kappa \rightarrow +\infty. \quad (1.4.13)$$

Nous introduisons l'énergie locale de (ψ, \mathbf{A}) dans un domaine $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$:

$$\mathcal{E}_0(\psi, \mathbf{A}; a, \mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} |(\nabla - i\kappa H \mathbf{A})\psi|^2 dx + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\mathcal{D}} (a(x, \kappa) - |\psi|^2)^2 dx. \quad (1.4.14)$$

Le théorème suivant, nous donne une estimation de l'énergie locale $\mathcal{E}_0(\psi, \mathbf{A}; a, \mathcal{D})$ et aussi un comportement asymptotique de la norme L^4 dans \mathcal{D} du paramètre d'ordre ψ , quand (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur global.

Théorème 1.4.3. *Avec les notations et les hypothèses du Théorème 1.4.1, si (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur de (1.4.1) et \mathcal{D} est un ensemble régulier tel que $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega$, alors, lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$,*

- **Estimation de l'énergie locale :**

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(\psi, \mathbf{A}; a, \mathcal{D}) = \kappa^2 \int_{\mathcal{D} \cap \{a(x, \kappa) > 0\}} a(x, \kappa)^2 \hat{f} \left(\frac{H |B_0(x)|}{\kappa a(x, \kappa)} \right) dx \\ + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\mathcal{D} \cap \{a(x, \kappa) \leq 0\}} a(x, \kappa)^2 dx + o(\kappa^2). \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

- **Concentration du paramètre d'ordre :**

$$\int_{\mathcal{D}} |\psi(x)|^4 dx = - \int_{\mathcal{D} \cap \{a(x, \kappa) > 0\}} a(x, \kappa)^2 \left\{ 2\hat{f} \left(\frac{H |B_0(x)|}{\kappa a(x, \kappa)} \right) - 1 \right\} dx + o(1). \quad (1.4.16)$$

La formule (1.4.16) indique que ψ est localisé asymptotiquement dans la région où $a > 0$. Quand $a(x, \kappa) = 1$, le Théorème 1.4.3 a été prouvé dans [5].

Nous allons maintenant étudier le troisième champ critique, i.e. le champ au-dessus duquel l'état normal $(0, \mathbf{F})$ est le seul point critique de la fonctionnelle dans (1.4.6). Nous définissons les trois ensembles suivants :

$$\mathcal{N}^{\text{cp}}(\kappa) = \{H > 0 : \mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0} \text{ a un point critique non normal}\}, \quad (1.4.17)$$

$$\mathcal{N}(\kappa) = \{H > 0 : \mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0} \text{ a un minimiseur non normal}\}, \quad (1.4.18)$$

et

$$\mathcal{N}^{\text{loc}}(\kappa) = \{H > 0 : \mu_1(\kappa, H) < 0\}. \quad (1.4.19)$$

Ici, $\mu_1(\kappa, H)$ a été défini dans (1.4.9).

Nous renvoyons à [10, 31, 37, 46] pour des contributions précédentes.

Nous introduisons les champs critiques suivants (cf. e.g.[15, 34]).

$$\overline{H}_{C_3}^{cp}(\kappa) = \sup \mathcal{N}^{cp}(\kappa), \quad \underline{H}_{C_3}^{cp}(\kappa) = \inf (\mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{N}^{cp}(\kappa)), \quad (1.4.20)$$

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa) = \sup \mathcal{N}(\kappa), \quad \underline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf (\mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{N}(\kappa)), \quad (1.4.21)$$

$$\overline{H}_{C_3}^{loc}(\kappa) = \sup \mathcal{N}^{loc}(\kappa), \quad \underline{H}_{C_3}^{loc}(\kappa) = \inf (\mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{N}^{loc}(\kappa)). \quad (1.4.22)$$

Au dessous du \underline{H}_{C_3} , les états normaux perdront leur stabilité, et au dessus du \overline{H}_{C_3} , l'état normal est (après une transformation de jauge) le seul point critique de la fonctionnelle dans (1.4.6).

Notre objectif est de déterminer le comportement asymptotique de tous les champs critiques lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$.

Il s'agit d'étudier des quantités spectrales liées à trois modèles qui dépendent de Γ (Γ étant vide ou non). Nous introduisons

$$\Theta_0 = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \mu(\xi),$$

où μ est la valeur propre de l'opérateur

$$\mathfrak{h}^{N,\xi} := -\frac{d^2}{dt^2} + (t + \xi)^2 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_+),$$

avec la condition de Neumann au bord $u'(0) = 0$.

Théorème 1.4.4. *Supposons que $B_0 > 0$ dans $\overline{\Omega}$ et que $a \in C^1(\overline{\Omega})$ vérifie $\{a > 0\} \neq \emptyset$. Alors, lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$, tous les champs critiques satisfont :*

$$H_{C_3}(\kappa) = \max \left(\sup_{x \in \overline{\Omega}} \frac{a(x)}{|B_0(x)|}, \sup_{x \in \partial\Omega} \frac{a(x)}{\Theta_0 |B_0(x)|} \right) \kappa + \mathcal{O}(\kappa^{\frac{1}{2}}). \quad (1.4.23)$$

Nous introduisons,

$$\lambda_0 = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \lambda(\tau), \quad (1.4.24)$$

où $\lambda(\tau)$ est la valeur propre de l'opérateur autoadjoint :

$$M(\tau) = -\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{4}(t^2 + 2\tau)^2 \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}). \quad (1.4.25)$$

Nous considérons, pour tous $\theta \in (0, \pi)$ le bas du spectre $\lambda(\mathbb{R}_+^2, \theta)$ de l'opérateur

$$P_{\mathbf{A}_{\text{app},\theta,0}}^{\mathbb{R}_+^2} \quad \text{with} \quad \mathbf{A}_{\text{app},\theta} = - \left(\frac{x_2^2}{2} \cos \theta, \frac{x_1^2}{2} \sin \theta \right). \quad (1.4.26)$$

Théorème 1.4.5. *Supposons que $\Gamma = \{x : B_0(x) = 0\} \neq \emptyset$, que (1.1.3) est satisfaite et que $a \in C^1(\overline{\Omega})$ vérifie $\{a > 0\} \neq \emptyset$. Lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$, les six champs critiques dans (1.4.20)-(1.4.22) satisfont :*

$$H_{C_3}(\kappa) = \max \left(\sup_{x \in \Gamma \cap \overline{\Omega}} \frac{a(x)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_0^{\frac{3}{2}} |\nabla B_0(x)|}, \sup_{x \in \Gamma \cap \partial\Omega} \frac{a(x)^{\frac{3}{2}}}{\lambda(\mathbb{R}_+^2, \theta(x))^{\frac{3}{2}} |\nabla B_0(x)|} \right) \kappa^2 + \mathcal{O} \left(\kappa^{\frac{11}{6}} \right).$$

Ici, $\theta(x)$ désigne l'angle entre $\nabla B_0(x)$ et le vecteur normal $-\nu(x)$.

1.4.2 Méthodes de démonstration

Notre but principal est de déterminer des estimations de l'énergie de l'état fondamental en présence d'un poids qui peut changer de signe et de donner une étude détaillée du troisième champ critique H_{C_3} quand a ne dépend pas du paramètre κ , qui peut être défini de plusieurs façons (voir (1.4.20)-(1.4.22)), mais qui correspond à la transition entre l'état où il y a supra-conductivité de surface au bord du domaine, et l'état normal.

Dans l'estimation de l'énergie, les techniques utilisées dans la démonstration sont inspirées de celles de [5] et [6] (où le cas $a(x, \kappa) = 1$ a été traité). Au niveau technique, l'approche utilisée dans les preuves est différente de celles de [5, 17, 43] puisque nous n'utilisons pas les *estimations elliptiques uniformes*. Ces estimations sont utilisées fréquemment dans les articles sur la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (voir [13]) avec un pinning constant. Elles sont d'abord apparues dans [34] et ont été étendues au régime complet dans [14]. Plus précisément nous donnons une généralisation de la formule (1.2.4), où l'intégrand doit être remplacé par $a^2(x, \kappa) \hat{f}\left(\frac{H |B_0(x)|}{\kappa a(x, \kappa)}\right)$ dans la région où $a(x, \kappa) > 0$, et par $\frac{a(x, \kappa)^2}{2}$ ailleurs. De plus nous montrons que les vortex sont localisés dans la région où le pinning a est positif.

L'étude asymptotique du troisième champ critique H_{C_3} , nous conduit lorsque le champ magnétique appliqué B_0 est constant à l'analyse spectrale de l'opérateur de Gennes :

$$\mathfrak{h}^{N, \xi} := -\frac{d^2}{dt^2} + (t + \xi)^2 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_+),$$

avec conditions aux limites de Neumann $u'(0) = 0$.

Dans le cas où le champ magnétique variable s'annule sur une courbe régulière, nous sommes conduit à faire l'analyse spectrale de l'opérateur de Montgomery :

$$M(\tau) = -\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{4}(t^2 + 2\tau)^2 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}),$$

et de l'opérateur de Pan et Kwek :

$$-(\nabla - i\mathbf{A}_{\text{app}, \theta})^2 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_+),$$

où

$$\mathbf{A}_{\text{app}, \theta} = -\left(\frac{x_2^2}{2} \cos \theta, \frac{x_1^2}{2} \sin \theta\right) \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

Nous proposons six définitions sur H_{C_3} , selon qu'on se place du point de vue de l'unicité de l'état normal comme point critique de l'énergie $\mathcal{E}_{\kappa, H, a, B_0}$, du caractère minimisant de l'état normal, ou de sa stabilité linéaire. (plus précisément voir (1.4.20), (1.4.21) et (1.4.22)).

Nous montrons dans les Théorèmes 1.4.4 et 1.4.5 que ces six définitions ont la même valeur de H_{C_3} lorsque $\kappa \rightarrow +\infty$.

Bibliographie

- [1] A. Aftalion, S. Alama, L. Bronsard. Giant vortex and breakdown of strong pinning in a rotating Bose-Einstein condensate. *Arch. Rational Mech. Anal.* **178** (2005), 247-286.
- [2] S. Alama, L. Bronsard. Pinning effects and their breakdown for a Ginzburg-Landau model with normal inclusions. *J. Math. Phys.* vol. **46** (2005), Article no. 095102.
- [3] A. Aftalion, S. Serfaty. Lowest Landau level approach in superconductivity for the Abrikosov lattice close to H_{c_2} . *Selecta Math. (N.S.)* Vol. **13** (2007), no. 2, 183-202.
- [4] A. Aftalion, E. Sandier, and S. Serfaty. Pinning phenomena in the Ginzburg-Landau model of superconductivity. *J. Math. Pures Appl.*, vol. **80** (3) : 339-372 (2001).
- [5] K. Attar. The ground state energy of the two-dimensional Ginzburg-Landau functional with variable magnetic field. *Ann. I. H. Poincaré*, vol. **32** : 325-345 (2015).
- [6] K. Attar. Energy and vorticity of the Ginzburg-Landau model with variable magnetic field. To appear in *Asymptotic Analysis*. arXiv :1411.5479
- [7] H. Aydi, A. Kachmar. Magnetic vortices for a Ginzburg-Landau type energy with a discontinuous constraint. II. *Commun. Pure Appl. Anal.* vol. **28** (3) (2009).
- [8] F. Bethuel, H. Brezis and F. Hélein. *Ginzburg-Landau Vortices*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol **13**. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1994).
- [9] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011, Corrected reprint of the 1978 original [MR0503330]. MR 2839402
- [10] C. Cancelier, T. Ramond. Magnetic bottles with weak electric field. Manuscript (2004).
- [11] M. Dauge, B. Helffer. *Eigenvalues variation, I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators*. *J. Diff. Equ.*, vol **104**, 243-262, (1993).
- [12] N. Dombrowski, N. Raymond. Semiclassical analysis with vanishing magnetic fields. *Spectral Theory*. Vol. **37** (2012), no. 9, 1528-1552.
- [13] S. Fournais, B. Helffer. *Spectral Methods in Surface Superconductivity*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. **77**, Birkhäuser Boston, (2010).

- [14] S. Fournais, B. Helffer. Optimal uniform elliptic estimates for the Ginzburg-Landau system. *Adventures in Mathematical Physics, Contemp. Math.* Vol. **447**, *Amer. Math. Soc.* (2007), 83-102.
- [15] S. Fournais, B. Helffer. On the third critical field in Ginzburg-Landau theory. *Comm. Math. Phys.* Vol. **226** (1), 153-196, (2006).
- [16] S. Fournais, A. Kachmar. Nucleation of bulk superconductivity close to critical magnetic field. *Adv. Math.* Vol. **226**, (2011), 1213-1258.
- [17] S. Fournais, A. Kachmar, The ground state energy of the three dimensional Ginzburg-Landau functional Part I : Bulk regime. *Comm. Partial Differential Equations.* vol. **38** (2), 339-383 (2013).
- [18] S. Fournais, A. Kachmar. On the transition to the normal phase for superconductors surrounded by normal conductors. *Journal of Differential Equations*, vol. **247**, 1637-1672 (2009).
- [19] S. Fournais, A. Kachmar and M. Persson. The ground state energy of the three dimensional Ginzburg-Landau functional. Part II. Surface regime. *J. Math. Pures Appl.* vol. **99** 343-374 (2013).
- [20] R. L. Frank, C. Hainzl, R. Seiringer, and J-P. Solovej. Derivation of Ginzburg-Landau theory for a one-dimensional system with contact interaction. *Operator Theory : Advances and Applications.* vol. **227** 57-88 (2013).
- [21] M. Giaquinta, G. Modica. *Mathematical Analysis, Foundations and Advanced Techniques for Functions of Several Variables*, Springer Science+Business Media, LLC (2012). DOI 10.1007/978-0-8176-8310-8-2
- [22] T. Giorgi, D. Phillips. The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model. *Siam J. Math. Anal.* vol. **30** 341-359 (1999).
- [23] T. Giorgi. Superconductors surrounded by normal materials. *Proc. Soc. Edinburgh Sect. A.* vol. **135** 331-356 (2005).
- [24] V. Girault and P-A. Raviart. *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer (1986).
- [25] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. **224**, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1977).
- [26] B. Helffer, A. Kachmar. The Ginzburg-Landau functional with vanishing magnetic field. To appear in *Arch. Rational Mech. Anal.* arXiv :1407.0783.
- [27] B. Helffer, A. Mohamed. Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells. *J. Funct. Anal.*, vol. **138**, 40-81 (1996).

- [28] B. Helffer, A. Morame. Magnetic bottles in connection with superconductivity. *J. Funct. Anal.* vol. **185** (2), 604- 680 (2001).
- [29] B. Helffer. Semiclassical analysis for the Schrödinger operator with magnetic wells (after R. Montgomery, B. Helffer-A. Mohamed). *J. Rauch and B. Simon eds., Quasiclassical Methods, The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Springer.* vol. **95**, 99-114 (1997).
- [30] A. Kachmar, The ground state energy of the three-dimensional Ginzburg-Landau model in the mixed phase. *Journal of Functional Analysis.* vol. **261**, 3328-3344 (2011).
- [31] K.I. Kim, Liu Zu Han. Estimate of the upper critical field and concentration for superconductor. *Chim. Ann. Math., ser. B* vol. **25** (2), 183-198 (2004).
- [32] A. Kachmar. Magnetic vortices for a Ginzburg-Landau type energy with a discontinuous constraint. *ESAIM : COCV.* **16** (2010) 5450107580.
- [33] K. Lu, X-B. Pan. Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. *J. Math. Phys.,* vol. **40**, 2647-2670 (1999).
- [34] K. Lu, X-B. Pan. Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Physica D.,* vol. **127**, 73-104 (1999).
- [35] R. Montgomery. Hearing the zero locus of a magnetic field. *Comm. Math. Phys.,* vol. **168**, 651-675 (1995).
- [36] L. Lassoued, P. Mironescu. Ginzburg-Landau type energy with discontinuous constraint. *J. Anal. Math.,* vol. **77**, 1-26 (1999).
- [37] J.P. Miqueu. Équation de Schrödinger avec champ magnétique qui s'annule. In preparation
- [38] D.S. Michaël. The Ginzburg-Landau functional with a discontinuous and rapidly oscillating pinning term Part II : the non-zero degree case. *Indiana Univ. Math. J.* vol. **62** (2), 551-641 (2013).
- [39] X.B. Pan. Surface superconductivity in 3 dimensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. **356** (2004), no. 10, 3899-3937.
- [40] X.B. Pan. Surface superconductivity in applied magnetic fields above H_{C_2} . *Commun. Math. Phys.,* vol. **228**, 228-370 (2002).
- [41] X.B. Pan, K.H. Kwek. Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fields in bounded domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. **354** (10), 4201-4227 (2002).
- [42] J. Rubinstein. *Six lectures on Superconductivity.* Proc. of the CRM school on "Boundaries, Interfaces, and Transitions".
- [43] E. Sandier, S. Serfaty. *Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model.* Progress in Non-linear Differential Equations and Their Applications, Vol. **70**, Birkhäuser, (2007).

-
- [44] E. Sandier, S. Serfaty. The decrease of bulk-superconductivity close to the second critical field in the Ginzburg-Landau model. *SIAM. J. Math. Anal.* Vol. **34** (2003), no. 4, 939-956.
- [45] E. Sandier, S. Serfaty, On the energy of type-II superconductors in the mixed phase. *Rev. Math. Phys.* vol. **12** (9), 1219-1257 (2000).
- [46] X.B. Pan, K.H. Kwok. Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fields in bounded domains. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. **354** (10), 4201-4227 (2002).
- [47] X.B. Pan. Surface superconductivity in applied magnetic fields above HC_2 . *Comm. Math. Phys.* Vol. **228** (2002), no. 2, 327-270.