



HAL
open science

Contribution à l'indicateur de Hicks-Moorsteen et à la théorie de la productivité.

Agathe Stenger

► **To cite this version:**

Agathe Stenger. Contribution à l'indicateur de Hicks-Moorsteen et à la théorie de la productivité.. Economies et finances. Université de Perpignan, 2015. Français. NNT: 2015PERP0010 . tel-01192849

HAL Id: tel-01192849

<https://theses.hal.science/tel-01192849>

Submitted on 3 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par
UNIVERSITE DE PERPIGNAN VIA DOMITIA

Préparée au sein de l'école doctorale ED 544
Et de l'unité de recherche CAPEM

Spécialité : **Sciences Economiques**

Présentée par **Agathe Stenger**

**CONTRIBUTION A L'INDICATEUR DE HICKS-
MOORSTEEN ET A LA THEORIE DE LA PRODUCTIVITE**

Soutenue le 4 Juin 2015 devant le jury composé de

M. Stéphane BLANCARD, Professeur à Agrosup de Dijon	Jury
M. Jean-Philippe BOUSSEMART, Professeur à l'Université de Lille 3.	Rapporteur
M. Walter BRIEC, Professeur à l'Université de Perpignan.	Directeur de thèse
M. Jean-Paul CHAVAS, Professeur à l'Université du Wisconsin.	Rapporteur
M. Hervé LELEU, Directeur de Recherche CNRS, Professeur à Lille Economie et Management.	Jury
M. Stéphane MUSSARD, Maître de Conférences HDR à l'Université de Sciences Economiques de Montpellier 1.	Jury
M. Diego Prior, Professeur à l'Université Autonome de Barcelone.	Jury

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur Walter Briec. Je le remercie d'avoir accepté de diriger ce travail et pour l'ensemble de sa précieuse aide. Ses qualités humaines et de chercheur ont largement contribué à donner un sens à mes travaux.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur Jean Paul Chavas, qui m'a fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse.

Je remercie particulièrement Monsieur le Professeur Jean-Philippe Boussemart, d'avoir accepté de rapporter cette thèse et d'assister à ma soutenance.

Je remercie Monsieur Stéphane Blancard d'accepter de participer au jury de cette thèse et d'être présent à ma soutenance.

Je remercie Monsieur Hervé Leleu qui me fait l'honneur d'être membre de ce jury de thèse et qui participe à ma soutenance.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Diego Prior qui me fait l'honneur de participer à ce jury malgré la différence de langue.

Je remercie particulièrement Monsieur Stéphane Mussard d'avoir accepté d'être membre de ce jury de thèse.

Je remercie les membres du Conseil d'Administration de la Fondation de l'Université de

Perpignan et plus particulièrement Stéphanie Falcou, qui m'ont fait l'honneur de financer mon doctorat. Ce soutien financier m'a permis de réaliser ma thèse dans des conditions optimales. J'en profite pour remercier le personnel de l'Ecole Doctorale de Perpignan qui accompagne chaque doctorant. Leur aide a contribué à mon intégration dans le milieu de la recherche, notamment grâce au financement octroyé pour les déplacements dans les colloques scientifiques.

Je remercie l'ensemble des membres du CAEPEM qui ont chacun contribué à mon intégration et à mon évolution dans le laboratoire. Je remercie Solo et Nico pour leur aide quand j'étais étudiante. Leurs conseils ont été essentiels dans le choix de mon orientation en thèse au CAEPEM. Je tiens à exprimer une attention particulière à mes collègues Arnaud, Paola, Audrey et Marie. Je les remercie pour la chaleur humaine qu'ils apportent.

J'exprime toute ma reconnaissance à Hervé Blanchard, Qi Bin Liang et Emmanuel Thibault qui m'ont donné l'opportunité d'enseigner à l'université de Perpignan et d'acquérir des compétences pédagogiques essentielles.

J'adresse toute ma reconnaissance à mes amis et ma famille qui m'ont soutenue jusqu'au dernier moment.

Enfin j'exprime mes plus sincères remerciements à Lucas, à mon père, à ma mère et à ma soeur, pour leur soutien et leur affection durant la préparation de ces travaux. Je leur dédie cette thèse.

Sommaire

Introduction Générale	14
1 Les mesures traditionnelles de l'efficacité et de la productivité dans la théorie de la microéconomie de la production.	26
1 Définition de la technologie de production et caractérisation de la frontière efficiente.	28
1.1 La correspondance en input	29
1.2 La correspondance en output.	31
1.3 La correspondance dans le graphe.	32
1.4 Efficacité forte au sens de Koopmans.	33
1.5 Modélisation de la technologie de production et de la frontière d'efficience.	34
1.5.1 Les limites de l'approche classique de la fonction de production en microéconomie et des méthodes d'estimation économétriques.	34
1.5.2 La méthode DEA, une approche multidimensionnelle et non-paramétrique.	35
2 Les fonctions distance en tant qu'indice d'efficacité.	38
2.1 La mesure de Debreu-Farrell.	38
2.1.1 La mesure de Debreu-Farrell en input.	38
2.1.2 La mesure de Debreu-Farrell en output	40
2.2 La mesure hyperbolique	42
2.3 La fonction distance directionnelle	44
2.3.1 La fonction directionnelle dans le graphe	44

2.3.2	La fonction distance directionnelle en input	46
2.3.3	La fonction directionnelle en output.	47
2.4	La fonction distance proportionnelle.	48
2.4.1	La mesure proportionnelle.	48
2.4.2	Résultats d'équivalence entre la mesure de Debreu-Farrell (1957) et celle de Briec (1997)	49
3	Efficacité des prix des ressources.	50
3.1	Le prix des ressources dans la technologie de production.	51
3.2	Fonctions distance et dualité.	55
4	Les indicateurs de productivité.	57
4.1	Les indicateurs de productivité de nature multiplicative	58
4.1.1	L'indice de productivité de Malmquist	58
4.1.2	L'indicateur de Hicks-Moorsteen.	60
4.2	Les indicateurs de productivité de forme additive	61
4.2.1	L'indicateur de Luenberger	61
4.2.2	L'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen	66
2	L'indicateur de Hicks-Moorsteen en tant qu'indicateur multidimensionnel du bien-être : une analogie entre la théorie de la production et la théorie des capabilités de Sen	67
1	La relation entre la théorie de la productivité et la théorie des capacités : un cadre d'analyse multidimensionnel	69
1.1	La théorie d'Amartya Sen : les capacités, nouvelle base infor- mationnelle de choix publics	69
1.2	Cadre d'analyse théorique.	70
1.3	Description de la technologie de réalisations.	72
1.4	Définition et interprétation des fonctions distance dans la théorie des capacités.	74
2	L'indicateur de productivité de Hicks-Moorsteen est une mesure complète des capacités.	76
2.1	L'indice de réalisation.	76

2.2	L'indice de bien-être.	77
2.3	Interprétation de l'indicateur de Hicks-Moorsteen dans la théorie des capacités.	77
3	Forme additive des indices de réalisations et de bien-être : l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen.	78
3.1	L'indicateur de réalisation.	78
3.2	L'indicateur de bien-être.	79
3.3	L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen.	80
4	Biens collectifs et évaluation des politiques publiques.	80
4.1	Introduction des biens publics dans l'évaluation.	81
4.2	L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen.	82
4.3	Faisabilité et résultats de dualité.	85
4.3.1	Faisabilité de l'indicateur public de Luenberger-Hicks-Moorsteen.	85
4.3.2	L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen avec le coût des ressources.	87
4.4	Modélisation de la technologie de réalisation.	88
5	Un indicateur social de Luenberger agrégé.	92
5.1	La fonction sociale directionnelle agrégée en ressources publiques.	92
5.2	Définition de l'indicateur social de Luenberger agrégé en réalisation.	95
6	Conclusions	97
3	Définition d'un indicateur de productivité généralisé pour les mesures additives et pour les mesures multiplicatives de l'efficacité	98
1	Définition d'un indicateur de productivité généralisé.	100
2	L'indicateur de productivité généralisé pour les structures additives.	102
2.1	Relation d'équivalence entre l'indicateur généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen et l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen.	104
2.2	Relation d'équivalence entre l'indicateur généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen et l'indicateur de productivité de Luenberger.	106

2.3	Perspective d'application : le cas d'input/output fixes et variables.	107
3	Définition d'un indicateur de productivité généralisé pour les structures multiplicatives.	108
3.1	Relation d'équivalence entre l'indicateur de productivité généralisé et l'indicateur de Hicks-Moorsteen.	111
3.2	Relation d'équivalence entre l'indicateur de productivité généralisé et l'indicateur standard de Malmquist.	112
3.3	Perspective d'application : Le cas des input-output privés et publics.	113
4	Définition des fonctions ressources agrégées et de l'indicateur de productivité généralisé agrégé.	113
4	Commensurabilité faible et forte et sur un paradoxe apparent de l'indicateur de productivité de Luenberger.	120
1	Commensurabilité faible et forte et implications sur le biais de l'indicateur de productivité de Luenberger l'hypothèse de rendements d'échelle constants.	122
1.1	Commensurabilités fortes et faible, Homogénéité de la mesure directionnelle, de la mesure de Farrell et de la mesure proportionnelle.	122
1.2	Caractérisation du biais du Luenberger.	125
2	Description de l'exemple numérique et exposition du problème.	126
2.1	Exemple numérique.	127
2.2	Calcul de l'indice de Malmquist en output pour le premier cas.	128
2.3	Calcul de l'indice de Malmquist en output pour le second cas.	129
3	L'indicateur standard de Luenberger : un exemple numérique.	130
3.1	Calcul de l'indicateur de Luenberger en output.	130
3.2	L'indicateur standard de Luenberger dans le graphe.	132
4	L'indicateur proportionnel de Luenberger.	134
4.1	L'indicateur proportionnel de Luenberger en output.	134
4.2	L'indicateur proportionnel de Luenberger dans le graphe.	135

5	Application empirique : analyse de la performance économique des pays de l'OCDE entre 1974 et 1997, une comparaison entre les indicateurs standard et proportionnel de productivité.	137
5	Du problème de définition des mesures de type Färe-Lovell à la proposition d'une reformulation de ces mesures.	140
1	La "slacks-based" mesure de Färe-Lovell.	142
1.0.1	Les "slacks".	142
1.0.2	La "slacks-based" mesure de Färe-Lovell.	142
2	La version directionnelle de la "slacks-based" mesure.	146
2.1	La directionnelle "slacks-based" mesure en input.	146
2.2	La directionnelle "slacks-based" mesure en output.	146
3	Problèmes d'infaisabilités relatifs à la définition de la mesure de Färe-Lovell.	147
3.1	Remarque sur les problèmes d'infaisabilité des vecteurs de production de la "slacks-based" mesure.	147
3.2	Remarque sur les problèmes d'infaisabilité des directionnelles "slacks-based" mesures.	149
4	Implications sur l'indicateur de productivité de Luenberger construit à partir de la directionnelle "slacks-based" mesure.	150
4.1	Problème de l'indicateur de Luenberger en input, construit à partir d'une directionnelle "slacks-based" mesure.	150
4.2	Problème de l'indicateur de Luenberger en output construit à partir d'une directionnelle "slacks-based" mesure.	152
4.3	Problématique sur la définition des β	154
5	Redéfinition des mesures de type Färe-Lovell.	154
5.1	Redéfinition de la "slacks-based" mesure.	155
5.2	Redéfinition de la directionnelle "slacks-based" mesure.	157
5.3	Implications sur l'indicateur de productivité de Luenberger.	159
6	Performance de la demande touristique et allocation de ressources marketing : une application au Maroc.	161

1	Le contexte touristique au Maroc.	163
1.0.1	Importance du secteur touristique dans l'économie Marocaine.	163
1.0.2	Importance de la stratégie marketing en tourisme.	163
2	La théorie moyenne-variance de Markowitz appliquée au secteur touristique.	164
2.1	Le Modèle de Markowitz.	164
2.2	Les fonctions distance.	168
3	Analyse empirique : description des données, résultats et recommandations.	171
3.1	Présentation des résultats.	171
3.2	Implications managériales.	172
7	Méthodologie pour la pratique de benchmarking dans le tourisme et application empirique aux régions Françaises.	177
1	Définition d'un cadre d'analyse théorique pour la pratique de benchmarking dans le secteur touristique.	179
1.1	Etape 1 : Catégorisation des départements selon la nature du tourisme qu'ils proposent.	181
1.2	Etape 2 : calcul des scores d'efficience et de productivité au niveau régional.	182
2	Analyse empirique : données, résultats et interprétations.	183
2.1	Description des données.	184
2.2	Résultats et interprétation.	184
2.3	Recommandations managériales.	185
2.4	Pertinence du modèle.	187
8	Analyses empiriques de la performance touristique du Languedoc-Roussillon dans un contexte transfrontalier.	190
1	Analyse de l'efficacité des stations de ski dans le massif des Pyrénées.	192
1.1	Cadre d'analyse.	193
1.2	Méthodologie et données.	194
1.3	Résultats.	196
1.4	Conclusion.	198

SOMMAIRE

2	Performance touristique de la demande frontalière.	199
2.1	Méthodologie et données.	200
2.2	Résultats et recommandations managériales.	203
2.3	Conclusion.	204
	Conclusion Générale	206
	Annexe	210
	Bibliographie	227

Table des figures

La correspondance en input	29
La correspondance en output	31
La correspondance dans le graphe	33
La mesure de Debreu-Farrell en input	39
La mesure de Debreu-Farrell en output	41
La fonction distance hyperbolique dans le graphe de technologie	43
La fonction distance directionnelle dans le graphe	45
La fonction distance directionnelle en input	46
La fonction distance directionnelle en output	47
La fonction distance proportionnelle	48
La fonction de coût dans la correspondance en input	51
La fonction de revenu dans la correspondance en output	53
La fonction de profit dans le graphe	54
Dualité entre la mesure de Debreu-Farrell et la fonction de coût	56
Dualité entre la mesure de Debreu-Farrell et la fonction de revenu	57
L'indice de Malmquist en input	59
L'indice de Malmquist en output	60
L'indicateur de Luenberger en input	62
L'indicateur de Luenberger en output	63
L'indicateur de Luenberger dans le graphe	65
La fonction distance directionnelle en réalisation	84
L'indicateur de Luenberger en output	128

TABLE DES FIGURES

La notion de "slacks" en input	142
La mesure de Färe-Lovell input	143
La mesure de Färe-Lovell output	144
Problème d'infaisabilité des mesures de type Färe-Lovell : un exemple numérique	148
Caractérisation de l'ensemble des input	151
Caractérisation de l'ensemble des output	152
L'espace Moyenne-Variance	167
La fonction directionnelle dans l'espace moyenne-variance	169
La fonction distance de Morey et Morey	171
Maximisation de la rentabilité espérée	175
Méthodologie	183
Comparaison des modèles A,B,C	188
Scores d'efficacité	198
Scores d'efficacité Modèles 1 et 2	202
Scores d'efficacité Modèle 3	204
Rendements d'échelle constants	210
Rendements d'échelle variables	211
Technologie à rendements d'échelle non croissants	212
Technologie à rendements d'échelle non décroissants	212
Classification des attractions touristiques selon Benckendorff	219

Liste des tableaux

2.1	Liste des ressources et réalisations selon Sen	73
3.1	Contextes économiques qui nécessitent de distinguer des catégories de variables	101
3.2	Résultats d'équivalence de l'indicateur de productivité généralisé	119
4.1	Description de l'exemple numérique	127
4.2	Exemple numérique	132
4.3	Résultats de l'exemple numérique pour les indicateurs de Malmquist et de Luenberger	137
4.4	Productivité, Efficacité et Progrès technique sur la période 1974-1997	138
6.1	Exemple numérique	168
6.2	Résultats de la directionnelle	173
7.1	Catégorisation des départements	182
7.2	Définition et statistiques des input et des output	184
7.3	Le cas du Languedoc-Roussillon	185
8.1	Niveaux de concurrence des DMUs	194
8.2	Statistiques des variables	196
8.3	Scores d'efficacité	197
8.4	Gains potentiels en quantité d'output	197
8.5	Statistiques des variables	201
8.6	Statistiques du nombre de nuitées passées au Maroc,(2006-2010), par origine	214

8.7	Expansion de la rentabilité espérée	215
8.8	Diminution du risque	216
8.9	Résultats des scores d'efficacité et de productivité pour la catégorie littoral	218
8.10	Définition des "Benchmark"	219
8.11	Potentiels de gains d'efficacité sur les quantités de ressources (en %) . . .	220
8.12	Comparaison des scores régionaux d'efficience technique pour les 3 modèles	221
8.13	Scores d'efficacité pour les mesures de Debreu-Farrell et de Färe-Lovell .	223
8.14	"Benchmark" des stations inefficientes	223
8.15	Définition des "benchmark" des DMUs inefficientes pour le premier modèle	224
8.16	Gains potentiels en output pour le premier modèle	224
8.17	Définition des "Benchmark" des régions inefficientes pour le second modèle	224
8.18	Gains potentiels en nuitées Suisses et Italiennes au sens du second modèle	225
8.19	Définition des "benchmark" des régions inefficientes lorsque $y = y_3$. . .	225
8.20	Gains potentiels pour le troisième modèle	226

Introduction Générale

La question de la gestion des ressources est au coeur des préoccupations économiques depuis de nombreuses années. Actuellement, l'environnement mondial induit que les ressources sont de plus en plus rares. La pression concurrentielle impose aux entreprises et aux nations une compétitivité accrue. De fait, la performance est un impératif pour la pérennité d'une firme ou de toute unité de décision (DMU)¹. La performance peut être appréhendée à travers les notions d'efficacité et de productivité. Le premier concept traduit le rapport d'efficience, entre les ressources mobilisées et les ressources produites. En économie de la production, les ressources sont les facteurs de production (les input) qui servent à produire des biens et services marchands ou non marchands dans le cas des biens collectifs (les output). La seconde notion renvoie à l'analyse des variations de l'efficacité au cours du temps ou dans l'espace. Ces variations résultent d'une amélioration/dégradation de l'efficacité technique et/ou de l'efficacité technologique. L'efficacité technologique traduit la part de la variation d'efficacité qui ne découle pas d'une modification de la gestion des ressources. On l'apparente au progrès technique et à l'effet d'apprentissage.

La recherche d'efficacité est la priorité des entreprises qui souhaitent maximiser leur profit. Dans la sphère publique, la recherche de performance de l'action publique s'inscrit dans un objectif macroéconomique d'équilibre budgétaire. Il est donc important de pouvoir évaluer l'efficacité et c'est dans cet objectif que de nombreux outils se construisent.

Il existe des mesures comptables classiques mais il existe aussi des méthodes économiques d'analyse de données. Ces dernières constituent un instrument d'aide à la prise de décision complémentaire.

L'essor des méthodes d'analyse et de traitement de l'information économique a été

1. De l'expression Decision Making Unit dans la littérature Anglo-Saxonne

possible en parallèle de celui des ordinateurs, qui effectuent des calculs rapides sur une multitude de données. Ces méthodes permettent de quantifier des phénomènes, de les analyser, de les comparer, et parfois de les prévoir. Le "benchmarking"² est une approche comparative qui consiste à évaluer la performance des centres de décision similaires. Cette méthodologie permet d'identifier les meilleures pratiques de production qui constituent un référent à atteindre pour les moins bonnes pratiques. Ce type d'analyse fournit aux firmes des perspectives de gains de productivité tout à fait réalisables. Les référents sont effectivement des firmes concurrentes similaires plus efficaces.

Microéconomie de la production

Les instruments qui sont présentés dans cette thèse ont vocation à mesurer et comparer la performance des choix stratégiques d'unités de production similaires. La méthodologie de nos travaux s'inscrit dans le champ d'étude de la microéconomie de la production. Comme nous l'avons souligné, on peut mesurer l'efficacité d'une firme en analysant le rapport entre les facteurs de production qu'elle utilise, et les biens et services produits. Le rapport qu'il existe entre les input et les output peut être caractérisé par ce que l'on appelle la technologie de production.

La technologie de production décrit ainsi un processus qui transforme des input en output. La microéconomie est une approche qui tente de modéliser cette technologie de production afin d'identifier les combinaisons productives optimales.

Les mesures de l'efficacité présentées dans cette thèse sont construites sur la base du concept de fonction distance. Elles caractérisent (un écart à) une frontière de production efficiente. Cet écart aux meilleures pratiques fournit le degré d'(in)efficacité d'une firme. Les fonctions distance sont basées sur la notion projection des vecteurs de production des firmes sur la frontière efficiente.

Les fonctions distance sont étroitement reliées à la notion d'efficacité au sens de Pareto. Une allocation de ressources est efficace au sens de Pareto si l'on ne peut augmenter la quantité de bien-être d'un agent sans diminuer celle d'un autre.

Dans un contexte plus restrictif qui est celui de l'économie de la production, la défini-

2. Ou autrement dit méthode d'étalonnage concurrentiel

tion standard de l'efficacité au sens de Pareto renvoie à une notion de meilleure pratique et de frontière efficiente sur laquelle nous reviendrons.

Elles fournissent un outil de “benchmarking” puisqu'elles permettent d'évaluer les gains réalisables sur les quantités d'input et d'output, compte tenu des meilleures pratiques managériales possibles.

Au-delà de la simple notion de fonction de production, la théorie microéconomique de la production permet de définir un cadre général dans lequel il est possible de prendre en compte des processus de production multi-output. C'est dans ce contexte que la notion de fonction distance joue un rôle crucial. Nous verrons, le long de cet exposé comment les fonctions distance et la fonction de coût apparaissent comme une manière alternative pour modéliser une technologie de production multidimensionnelle.

Ce nouveau cadre d'analyse permet de s'affranchir des hypothèses traditionnelles de différentiabilité en utilisant la notion de dualité prix-quantité. Le concept de dualité permet ainsi de remplacer la notion habituelle de productivité marginale par celle de prix implicites. En mathématiques, les fonctions distance permettent de caractériser les propriétés duales des ensembles convexes qui jouent un rôle important dans la théorie économique. Ce point de vue est essentiellement celui de la pierre angulaire des travaux de Shephard (1953, 1970).

La notion de technologie de production joue donc un rôle clef. Il y a deux manières de la représenter.

La première est dite paramétrique et s'appuie sur le recours à une forme fonctionnelle. L'emploi d'une forme fonctionnelle a l'avantage de permettre de procéder à une estimation économétrique et de prendre en compte de possibles erreurs dans la collecte des données et de possibles points aberrants. Ce sont les méthodes dites de frontières stochastiques (SFA)³. Ces approches supposent l'emploi de distributions statistiques tronquées permettant d'exprimer les inefficacités à partir du résidu de l'estimation économétrique.

L'approche classique par la fonction de production ne permet de considérer qu'un seul produit dans la modélisation de la technologie de production. Autrement dit, une fonction de production décrit un processus selon lequel plusieurs input ne produisent qu'un seul

3. Stochastic Frontier Analysis. Se référer à Aigner et al.(1977); Meeusen et al.(1977); Kumbhakar et al.(2000); Coelli et al.(2005)

produit. Mais la réalité induit des situations dans lesquelles les agents produisent plusieurs types de biens et services. Cette difficulté peut être contournée en passant par les fonctions de coût, de revenu ou de profit qui fournissent une caractérisation alternative de la technologie de production. Cette dernière approche suppose cependant d'avoir une information sur les prix, ce qui n'est pas toujours garanti. Sur certains secteurs d'activité la notion de prix peut être parfois difficile à appréhender. C'est par exemple le cas de biens publics ou collectifs, dont les prix ne sont pas fixés sur un marché concurrentiel.

La seconde approche pour estimer la technologie de production d'une firme est dite non-paramétrique. Elle permet de considérer une technologie de production multi-input et multi-output. Il s'agit des méthodes d'estimation par enveloppement des données (DEA)⁴. C'est une approche qui permet de caractériser une technologie de production multi-output grâce à la programmation linéaire. Cette méthode détermine l'enveloppe convexe des vecteurs de production qui représentent les firmes observées à travers leurs input et leurs output. La méthode DEA fournit les scores d'efficacité des firmes, elle caractérise les meilleures pratiques, elle identifie les "benchmark" et établit les gains potentiels réalisables relativement aux référents.

Cette approche a l'avantage de ne pas postuler a priori de forme fonctionnelle de la technologie. Elle est par ailleurs tout à fait adaptée à la théorie moderne de la microéconomie de la production. La principale limite est qu'elle ne prend pas suffisamment en compte les erreurs statistiques.

Les fonctions distance en tant qu'indices de l'efficacité.

On peut distinguer plusieurs types de fonctions distance. Notre attention va tout d'abord se porter sur les mesures radiales qui furent les premières à être introduites dans la littérature sur le sujet.

Les mesures radiales.

Les mesures radiales de l'efficacité sont basées sur la projection des vecteurs de production sur la frontière efficiente dans une direction préétablie.

4. De l'expression Data Envelopment Analysis

Debreu (1951) introduit un indice d'efficacité technique, le coefficient d'utilisation des ressources. La mesure de Debreu est l'inverse de la fonction distance de Shephard (1953) et sera popularisée par la suite par Farrell (1957). La mesure de Debreu-Farrell évalue la réduction maximale proportionnelle de la quantité d'input, compte tenu d'un niveau d'output donné. Et similairement, pour une orientation en output, la mesure de Debreu-Farrell évalue l'expansion maximale proportionnelle des output, pour un niveau d'input donné. 7).

Chambers, Chung et Färe (1996) généralisent la mesure de Debreu-Farrell en introduisant la fonction distance directionnelle. Elle permet de mener une analyse dans le graphe et d'évaluer de façon simultanée les réductions d'input et les expansions d'output maximales réalisables.

Enfin, Briec (1997) définit la fonction distance proportionnelle. Elle correspond à des transformations simultanées des quantités d'input et d'output. Elle généralise la mesure de Debreu-Farrell. Cette dernière a l'avantage d'éviter, dans une certaine mesure, les problèmes d'infaisabilité.

Notons que ces fonctions distance caractérisent la technologie de production à travers une valeur critique 1 ou 0 suivant que la mesure considérée est de nature additive ou multiplicative. La mesure de Farrell est ainsi multiplicative alors que la fonction distance directionnelle est de nature additive.

Les mesures non radiales.

Il existe un autre type de mesures introduites par Färe-Lovell (1978), qui sont appelées "slacks-based" mesures dans la littérature anglo-saxonne. Elles sont basées sur les réductions proportionnelles séparées des différents input, ou sur les augmentations proportionnelles séparées des output. La projection des vecteurs de production s'obtient donc relativement à un référent bien précis sur la frontière efficiente qui est celle définie par Koopmans (1951). Cette notion de l'efficacité forte est définie par la suite.

Il s'agit d'une mesure non radiale à la différence des précédentes qui se basaient sur une projection des vecteurs dans une direction préétablie fixe ou proportionnelle, relativement à l'entité considérée.

Briec (2000), Fukuyuma et Weber (2009) ont généralisé cette mesure pour considérer les expansions et réductions simultanées des output et des input.

Mahlberg et Sahoo (2011) introduisent un indicateur de Luenberger basé sur ce type de mesure pour évaluer la productivité.

Sur ce point il importe sans doute de faire une distinction entre les notions de mesure de l'efficacité et le concept de fonction distance. Les premières se limitent à une stricte mesure de l'efficacité. Elles considèrent des vecteurs productions réalisables. De ce fait, elles n'ont pas nécessairement vocation à caractériser la technologie de production. Ce n'est pas le cas de la mesure de Färe-Lovell. Ces fonctions distance permettent d'évaluer une entité qui n'est pas nécessairement réalisable techniquement. Elles permettent ainsi de caractériser la technologie et de construire des indices ou indicateurs de productivité en adoptant une approche inter-temporelle.

Les indicateurs de variation de productivité et leur décomposition.

Les indicateurs de productivité sont construits à partir des fonctions distance. Ils permettent d'évaluer les variations de productivité au cours d'une période. Il est possible de décomposer ces indicateurs pour analyser plus précisément les origines des variations de productivité. On distingue les variations qui résultent de gains/pertes d'efficacité technique de celles qui résultent du progrès technologique. Le premier type de variation traduit l'évolution de l'efficacité technique, c'est à dire de l'évolution du rapport entre les input et les output de production. Si une firme améliore/dégrade sa combinaison productive au cours d'une période, elle réalise des gains/pertes d'efficacité technique. Mais les variations de productivité peuvent également résulter d'autres facteurs. Cette part de la productivité est souvent apparentée au progrès technique au sens de Solow. Elle correspond à la partie de la productivité qui n'est pas expliquée par une variation de l'efficacité technique. L'efficacité technologique augmente essentiellement avec le progrès technique et avec l'effet d'apprentissage.

Les indicateurs de productivité sont des outils très utilisés dans la théorie micro-

économique de la production. Ils ont fait l'objet de nombreuses réflexions et applications empiriques depuis quelques années.

Après avoir défini les indicateurs de productivité standards dans la revue de littérature, cette thèse introduit deux nouveaux types d'indicateurs. Le premier correspond à un indicateur social de bien-être de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Le second est un indicateur de productivité généralisé.

Contributions théoriques.

L'indicateur de bien-être de Luenberger-Hicks-Moorsteen est un outil d'évaluation des politiques publiques qui s'inscrit dans la théorie des capacités de Sen.

Le second chapitre de cette thèse définit un indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen pour évaluer la performance des politiques publiques dans la provision de biens sociaux. Cette mesure répond aux exigences du Rapport⁵ de Stiglitz, Sen et Fitoussi sur les mesures des performances économiques et du progrès social. La Commission établit l'insuffisance des mesures standards de la performance économique. Le rapport stipule notamment que la mesure de la richesse d'une nation par son Produit Intérieur Brut est défailante car elle ne fournit qu'une très faible représentation du niveau de bien-être. Selon Sen, le bien-être est multidimensionnel et ne se résume pas à la richesse. La quantité de richesse détenue n'est qu'une ressource parmi tant d'autres. L'évaluation du bien-être doit être appréhendée en termes de capacités. Dans la lignée de Ramos et Silber (2005), nous établissons une analogie entre la notion de capacités dans la théorie du bien-être de Sen et la mesure de la performance dans la théorie de la microéconomie de la production. Nous assimilons la notion de capacité de Sen à un processus de production, qui transforme des ressources en bien-être. Dès lors nous pouvons établir qu'au niveau de l'analyse microéconomique, la fonction distance traduit la capacité d'un individu à transformer les ressources auxquelles il a accès en bien-être. Au niveau d'une analyse macroéconomique, la fonction distance traduit l'effet des politiques publiques sur les capacités. Il est montré

5. En libre téléchargement sur <http://www.stiglitz-sen-fitoussi.fr/documents/rapportfrancais.pdf>

que l'indicateur de Hicks-Moorsteen généralise l'indice introduit par Ramos et Silber. Il constitue un outil pertinent pour évaluer les capacités au sens de Sen.

Parallèlement à l'approche de Zaim et al. (2001) cette thèse introduit un indicateur de productivité basé sur une mesure sociale de l'efficacité. Celle-ci est définie par un sous vecteur des ressources publiques. Plus précisément, ces travaux proposent un indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen, qui se construit avec une mesure directionnelle sociale. Elle projette les vecteurs d'input publics sur la frontière d'efficience. Le but est de focaliser l'analyse sur l'efficacité des ressources publiques. Ainsi, la fonction distance directionnelle sociale caractérise l'effet des politiques publiques sur la capacité des individus à transformer les ressources en bien-être.

Dans ce chapitre, nous analysons les propriétés de dualité de ces indicateurs, et en particulier nous établissons une connexion avec les notions de surplus dues à Maurice Allais. Les propriétés de dualité sont également analysées dans le cadre de modèles non-paramétriques. Il est ainsi montré comment retrouver les prix relatifs à partir des multiplieurs de Kuhn et Tucker des programmes duaux. Finalement nous montrons comment agréger de tels indicateurs.

Un indicateur de productivité généralisé.

Dans le chapitre 3, nous proposons de généraliser les indicateurs de productivité standards. Deux types d'indicateurs sont définis. Le premier généralise les indicateurs de Luenberger-Hicks-Moorsteen et de Luenberger, qui ont une structure additive. Le second généralise les indicateurs de Hicks-Moorsteen et de Malmquist qui ont une structure multiplicative.

L'indicateur généralisé s'appuie sur un choix spécifique d'input et d'output qui seront supposés fixes et variables. Dans une configuration, on retrouve un indicateur de type Luenberger-Hicks-Moorsteen ou Luenberger et dans l'autre un indicateur de type Hicks-Moorsteen ou Malmquist, suivant si la forme considérée est additive ou multiplicative.

L'intérêt de ce nouveau type d'indicateur est d'intégrer une dimension supplémentaire dans l'analyse de la productivité pour gagner en précision. Il permet de distinguer deux types de ressources dans l'évaluation de l'efficacité et de la productivité. Certaines situa-

tions économiques induisent que les variables observées sont de natures différentes. Par exemple, il existe des variables fixes qui ne peuvent être modifiées par le décideur. Il s'agit des coûts fixes, fiscaux et des variables non contrôlables. Parfois, il convient de distinguer les ressources publiques des ressources privées. Par exemple, si l'on souhaite focaliser l'analyse sur la performance des biens sociaux. Ou encore lorsque l'on souhaite centrer l'évaluation de la productivité sur la performance managériale il faut exclure l'influence des facteurs externes. L'indicateur généralisé permet de prendre en compte cette distinction en considérant deux catégories d'input et d'output. Il a en outre un intérêt théorique et permet d'établir un lien entre des types d'indicateurs ou indices jusque-là considérés comme de nature différente. D'autre part, nous montrons qu'il est possible d'agréger ces indicateurs en construisant une fonction de ressource bien spécifique.

Sur un paradoxe de l'indicateur de Luenberger sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants.

L'indicateur de Luenberger est construit avec la mesure directionnelle. Il évalue les variations de productivité d'une période à l'autre. Cet indicateur de productivité est sollicité dans de nombreuses analyses empiriques. Nous montrons dans ce chapitre 4 que sous l'hypothèse d'une technologie à rendements d'échelle constants, l'indicateur de Luenberger ne permet pas de d'interpréter les variations de productivité. Ce résultat découle de la nature de la directionnelle sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Sous cette condition, la mesure directionnelle est homogène de degré 1. Ceci implique que cette mesure est sensible aux changements proportionnels de la quantité de ressources. Ainsi un vecteur de production peut avoir une meilleure productivité globale, sans que cela se traduise de manière effective dans la mesure fournie par la distance directionnelle. Lorsque l'on compare les résultats obtenus avec l'indicateur de Luenberger et l'indice de Malmquist, on obtient des résultats qui peuvent se révéler contradictoires. Cette particularité implique que l'indicateur de Luenberger ne permet pas de caractériser les variations de productivité, contrairement à l'indice de Malmquist. Ce travail introduit un exemple numérique qui illustre ces difficultés. Pour remédier au problème de l'indicateur de Luenberger standard, nous proposons d'utiliser un indicateur de productivité proportionnel.

Cette indicateur se construit à partir de la fonction proportionnelle plutôt que de la mesure directionnelle. Dans le même ordre d'idée, nous analysons l'impact de la condition de commensurabilité sur cet apparent paradoxe. Pour ce faire, nous introduisons deux notions de commensurabilité faible et forte. Nous montrons que la fonction distance directionnelle satisfait la condition de commensurabilité faible alors de la fonction distance proportionnelle satisfait le condition de commensurabilité forte. La mesure proportionnelle, au même titre que la mesure de Debreu-Farrell permet bien d'évaluer les variations de productivité. La structure de ces fonctions, qui sont homogènes de degré 0, permet d'obtenir une mesure de l'efficacité invariante aux changements proportionnels des quantités de ressources.

Mesures de Färe-Lovell et indices de productivité.

Au-delà d'être une mesure de l'efficacité standard, les "slacks-based" mesures permettent de caractériser une technologie de production. Cet aspect représente un certain avantage. Dans le chapitre 5, il est démontré que les mesures de type Färe-Lovell ne permettent pas de caractériser l'efficacité et la technologie de production. La mesure de Färe-Lovell et son pendant directionnel ou "slacks-based" souffrent d'un problème de définition. De par leur nature, elles ne permettent pas de caractériser la technologie de production. Il est montré à travers plusieurs numériques, que ces mesures peuvent induire des résultats incohérents sur un plan empirique et théorique. Pour surmonter ce problème, nous proposons de reformuler cette mesure afin d'éliminer cette difficulté en sélectionnant les composantes adéquates qui reflètent la variation de la productivité. Pour résoudre le problème, nous proposons une procédure consistant à extraire les solutions négatives du programme linéaire associé.

Applications empiriques sur l'évaluation de la performance dans le secteur touristique.

Cette thèse propose plusieurs analyses empiriques qui visent à évaluer la performance des destinations touristiques. Le but de ces applications est d'illustrer la finalité des ins-

truments méthodologiques de la microéconomie de la production dans l'analyse de la performance.

Le secteur du tourisme a un double intérêt dans la mesure où il mobilise aussi bien des acteurs privés que publics, notamment à travers les politiques des collectivités territoriales. En France, les régions, au même titre que les départements et les communes, détiennent des budgets autonomes pour l'aménagement du territoire. Ces acteurs ont une influence sur la sphère privée.

Une approche en termes de portefeuille pour anticiper la performance de la demande touristique et définir les cibles marketing.

La première application utilise la méthode de l'espace Moyenne-Variance de Markowitz pour évaluer la performance de portefeuilles touristiques. Cette méthode permet de calculer la rentabilité espérée des portefeuilles. Ils sont constitués de touristes caractérisés par une variable sociodémographique. Nous considérons dans notre étude l'origine de la demande touristique. La méthode proposée permet de définir des cibles marketing prioritaires en évaluant le potentiel d'amélioration de la demande touristique selon la nationalité. Cette méthodologie établit quelles sont les nationalités qui ont le meilleur potentiel d'amélioration afin d'éviter le gaspillage dans l'allocation des ressources marketing.

Comparaison du tourisme entre littoral, montage et urbanisme.

La seconde application fournit une grille d'analyse pour évaluer la performance touristique selon la nature du tourisme. Nous utilisons la méthode DEA et proposons un modèle qui permet de comparer l'efficacité et la productivité entre des DMUs qui présentent des caractéristiques géographiques incontrôlables similaires. Et ceci, car elles vont conditionner l'offre et la demande touristique. Pour cela, notre modèle catégorise les destinations touristiques selon la nature du tourisme qu'elles proposent. La catégorisation est établie selon des variables fixes incontrôlables : le nombre de kilomètres de littoral, l'altitude et le taux d'urbanisation. Elle permet d'effectuer des comparaisons d'efficacité à l'intérieur de catégories homogènes de DMUs. Ce modèle est confronté à des modèles plus classiques afin de tester sa pertinence méthodologique.

Frontière de production et secteur transfrontalier.

Enfin la troisième application constitue une analyse comparative de la performance touristique dans un contexte transfrontalier. Plus précisément, le dernier chapitre de cette thèse se décline en deux applications. Elles intègrent la dimension frontalière et focalisent l'analyse sur le cas du Languedoc-Roussillon, zone transfrontalière avec l'Espagne et l'Andorre.

La première étude est une analyse empirique de l'efficacité des stations de ski dans le massif des Pyrénées. Plus particulièrement cette étude évalue la performance managériale des remontées mécaniques pour les principaux domaines skiables du massif Pyrénéen, montagne partagée par le territoire Français, Espagnol et Andorran. Les scores d'efficacité sont évalués avec les mesures de Färe-Lovell et de Debreu-Farrell. Les résultats indiquent qu'il existe des marges d'amélioration pour gagner en efficacité technique.

La seconde étude évalue la performance du secteur de l'hébergement touristique des régions Françaises, en se focalisant sur la demande Européenne en 2013. L'application analyse l'efficacité technique et allocative de la demande touristique des pays frontaliers avec la méthode DEA et la mesure de Debreu-Farrell. Il est établi que le Languedoc-Roussillon pourrait accroître la clientèle Espagnole, compte tenu de son "benchmark" la région Midi-Pyrénées.

Chapitre 1

Les mesures traditionnelles de l'efficacité et de la productivité dans la théorie de la microéconomie de la production.

Ce chapitre définit le cadre d'analyse théorique de cette thèse. Il dresse une revue des mesures standards de l'efficacité et de la productivité de la littérature microéconomique.

La première section décrit le processus de production d'un centre de décision et présente les méthodes standards d'estimation qui permettent de modéliser la technologie de production.

Lorsque plusieurs centres de décisions (publics ou privés) utilisent des ressources similaires, pour produire des biens et des services similaires, il est possible de comparer leur performance, de caractériser les meilleures pratiques et de fournir des recommandations aux unités les moins efficaces, sur la gestion des ressources. Ce type d'analyse est connu dans la littérature sous les noms de "benchmarking" ou d'étalonnage concurrentiel. Le but est d'identifier quels sont les centres les plus efficaces, pour établir dans quelles mesures, les centres les moins efficaces, peuvent améliorer leur technique de production.

Il existe plusieurs approches pour modéliser la technologie de production des firmes. On distingue l'approche classique par la fonction de production, de l'approche non paramétrique par enveloppement des données.

L'estimation économétrique est une approche paramétrique, qui permet de définir une forme fonctionnelle de la fonction de production. Cette fonction permet d'établir les quantités de ressources optimales que doivent utiliser les firmes pour être efficaces. Ce type de méthode repose sur la notion de frontière stochastique (méthode SFA)¹. Toutefois, le cadre d'analyse est mono-output ce qui limite le champ d'étude à des cas particuliers. Il est vrai que l'on peut utiliser la fonction de coût dans le cas multi-output, mais cela nécessite une information sur les prix. De plus les techniques économétriques peuvent fournir des résultats biaisés dans la mesure où elles mobilisent des hypothèses parfois irréalistes sur la forme fonctionnelle.

La méthode par enveloppement des données est une approche non paramétrique de la technologie de production (méthode DEA)². Elle permet de s'affranchir des hypothèses fonctionnelles restrictives de l'économétrie et de mener une analyse multidimensionnelle en considérant que les firmes peuvent produire plusieurs biens et services. La méthode DEA permet de définir une frontière de production efficiente, constituée des firmes les

1. Stochastic Frontier Analysis

2. Data Envelopment Analysis

plus efficaces. Elle fournit les scores d'efficacité des firmes relativement à cette frontière. Elle est parfois sensible à l'existence de points aberrants.

La seconde section présente les fonctions distance comme des mesures de l'efficacité technique et allocative. Ces fonctions mesurent un écart à la frontière de production efficiente, en projetant les vecteurs de production inefficaces sur la frontière. Sont définies dans cette section, la fonction de Debreu-Farrell (1957), la fonction distance directionnelle de Chambers, Chung et Färe (1996) et la fonction proportionnelle de Briec (1997).

La dernière section présente les indicateurs standards de productivité. Ils mesurent les variations d'efficacité des firmes au cours du temps. On distingue ceux qui ont une nature multiplicative, de ceux qui ont une structure additive. Bien que l'interprétation de ces indicateurs soit similaire, leur construction est différente. Les indicateurs de Malmquist et de Hicks-Moorsteen sont de nature multiplicative, puisqu'ils sont construits à partir de la mesure de Debreu-Farrell, qui a elle-même une structure multiplicative. Les indicateurs de productivité de Luenberger et de Luenberger-Hicks-Moorsteen sont de nature additive, puisqu'ils sont construits à partir de la mesure directionnelle qui a une structure additive.

1 Définition de la technologie de production et caractérisation de la frontière efficiente.

Une technologie de production décrit un processus qui transforme un ensemble de facteurs de production en un ensemble de biens et services.

Soit une unité de décision qui mobilise x facteurs de production pour obtenir y produits. $x^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_m^t)$ représente le vecteur d'input, et $y^t = (y_1^t, \dots, y_n^t)$ celui des output à la période t . Avec $x^t \in \mathbb{R}_+^m$, où m correspond aux différents facteurs de production mobilisés. Ce sont par exemple le nombre d'heures de travail, le capital physique... Par ailleurs, $y^t \in \mathbb{R}_+^n$, avec n qui représente les output produits, ce sont des biens et des services marchands ou non-marchands.

L'ensemble des possibilités de production T^t décrit l'ensemble des vecteurs d'input et d'output réalisables ou faisables à la période t . Autrement dit T^t caractérise toutes les

combinaisons productives possibles. On peut définir cet ensemble de la manière suivante :

$$T^t = \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x \text{ peut produire } y \text{ en } t\}$$

L'ensemble de production peut être représenté par la correspondance en input $L^t(y^t)$, par la correspondance en output $P^t(x^t)$ ou par T^t dans le graphe de technologie. On peut également intégrer les prix dans l'analyse en considérant les fonctions de coût, de profit ou de revenu.

Les correspondances ainsi que les propriétés qui leur sont associées sont définies dans ce qui suit.

1.1 La correspondance en input

La correspondance en input représente l'ensemble des combinaisons d'input possibles qui permettent de produire un niveau d'output donné.

Soit $L^t : \mathbb{R}_+^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m}$ la correspondance en input. Cette application associe à une quantité d'output donnée, l'ensemble des input nécessaires pour la produire. On définit la correspondance en input comme suit :

$$L^t(y^t) = \{x^t \in \mathbb{R}_+^m : y \text{ est productible par } x\} \quad (1.1)$$

La figure suivante représente la correspondance en input :

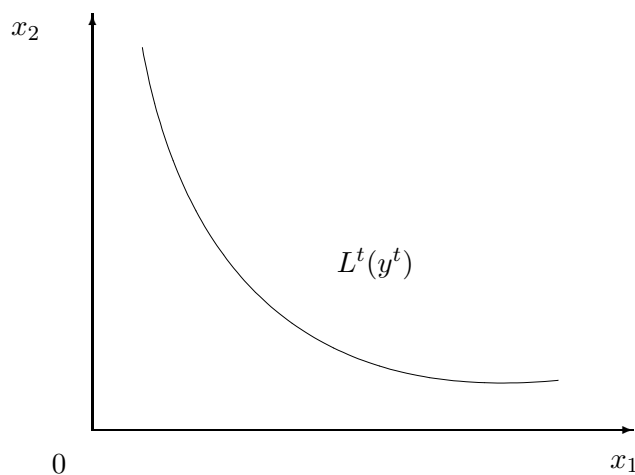


Figure 1 La correspondance en input

L'isoquant de $L^t(y)$ définit l'ensemble des combinaisons d'inputs sur la frontière de l'ensemble des input :

$$IsoqL^t(y) = \{x : x \in L^t(y), \lambda x \notin L^t(y), \lambda \in [0, 1[\}$$

Sur le graphique, l'isoquant correspond à la frontière de production efficiente. Il caractérise l'ensemble des choix de production optimaux, ceux qui permettent de produire une même quantité y maximale à partir d'une quantité d'input x minimale. Les combinaisons productives dans l'ensemble $L^t(y)$ au-dessus de l'isoquante sont inefficaces. Elles sont dominées par les vecteurs de production qui appartiennent à la frontière.

Pour caractériser au mieux la réalité, la correspondance doit satisfaire certaines propriétés. Shephard [1974a] introduit les axiomes suivants :

L1 : $\forall y \geq 0$, et $y \neq 0$, $0 \notin L^t(y)$ et $L(0) = \mathbb{R}_+^n$.

L2 : $\forall y \in \mathbb{R}_+^n$, $L^t(y)$ est bornée.

L3 : $\forall x \in L^t(y)$, $x' \geq x \Rightarrow x' \in L^t(y)$

L4 : $L^t(y)$ est une correspondance fermée.

L5 : $L^t(y)$ est convexe, $\forall y \in \mathbb{R}_+^n$.

L1 signifie qu'il n'est pas possible de produire une quantité d'output positive avec une quantité d'input nulle. L'expression Anglo Saxonne *No free lunch* donne une bonne image de la portée de cet axiome.

L2 impose qu'une quantité finie d'input ne peut pas produire une quantité illimitée d'output.

L3 correspond à l'hypothèse de libre disposition en input. Elle traduit le fait qu'il est possible de produire une quantité d'output inférieure à partir d'une quantité d'input supérieure.

L5 décrit une correspondance en input fermée, pour garantir l'existence d'une frontière.

1.2 La correspondance en output.

La correspondance en output décrit l'ensemble des combinaisons d'output qui peuvent être produites à partir d'une quantité d'input donnée. Soit $P^t : \mathbb{R}_+^m \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n}$ la correspondance en output. Cette application associe à une quantité d'input l'ensemble des output productibles par cette quantité. On la définit de la manière suivante :

$$P^t(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^n : (x, y) \in T^t\}. \quad (1.2)$$

La figure suivante illustre la correspondance en output :

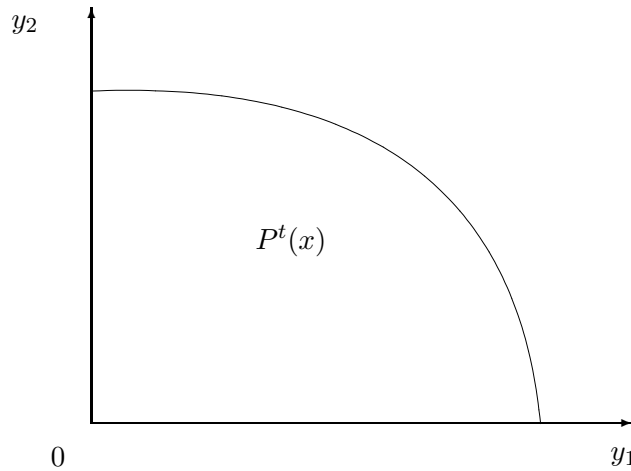


Figure 2 La correspondance en output

Sur le graphique, l'ensemble $P^t(x)$ caractérise l'ensemble des vecteurs de production faisables et efficaces. L'isoquant représente les meilleures combinaisons productives pour un niveau d'input x donné. Les vecteurs de production qui se situent au-dessous de l'isoquant sont réalisables mais dominés. Il est défini par :

$$IsoqP^t(x) = \{y : y \in P^t(x), \theta y \notin P^t(x), \theta > 1\}.$$

La correspondance en output doit elle aussi satisfaire certaines conditions inhérentes au bon sens. Elle doit ainsi vérifier les axiomes suivants :

P1 : $0 \in P^t(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$ et $y \notin P^t(0)$, $y \geq 0$.

P2 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$, $P^t(x)$ est bornée.

P3 : $\forall y \in P^t(x)$, si $y' \leq y \Rightarrow y' \in P^t(x)$.

P4 : $P^t(x)$ est une correspondance fermée.

P5 : $P^t(x)$ est convexe, $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$.

P1 stipule que l'on ne peut pas produire d'output à partir d'un niveau d'input nul. Autrement dit une quantité d'output ne peut être produite qu'à partir d'une quantité d'input positive.

P2 impose que l'on ne peut pas produire une quantité illimitée d'output à partir d'une quantité finie d'input.

Le troisième axiome impose que la correspondance en input soit fermée afin de pouvoir caractériser la technologie de production.

P3 exprime l'hypothèse de libre disposition des output.

1.3 La correspondance dans le graphe.

On peut également représenter la technologie de production dans le graphe. Il permet de prendre en considération simultanément les réductions et expansions des input et des output. Soit T , l'ensemble de technologie qui définit l'ensemble des input et des output faisables dans le graphe. A la période t , il est défini par :

$$T^t = \{(x^t, y^t) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : x \text{ peut produire } y\}. \quad (1.3)$$

Une représentation du graphe de la technologie est donnée dans la figure suivante :

L'isoquant efficient dans le graphe est défini par :

$$IsoqT^t(x^t, y^t) = \{(x^t, y^t) : (x^t, y^t) \in T^t, (\lambda x^t, \lambda^{-1} y^t) \notin T^t, 0 < \lambda < 1\}$$

La technologie dans le graphe doit respecter les axiomes suivants :

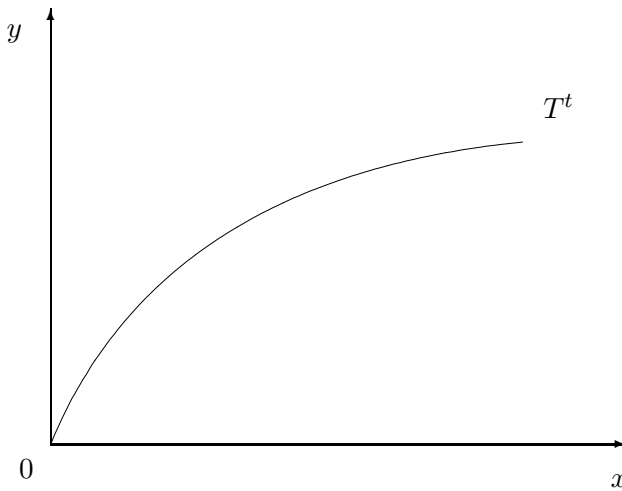


Figure 3 Le graphe de la technologie.

T1 : $(0, 0) \in T^t$, $(0, y) \in T^t \Rightarrow y = 0$. Ceci signifie qu'il n'est pas possible de produire une quantité d'output non nulle à partir d'une quantité d'input nulle.

T2 : $T^t(y^y) = \{(v, y) \in T^t : v \leq y\}$ est borné $\forall y \in \mathbb{R}_+^p$. Cette propriété implique que l'ensemble de production est borné. Cela signifie que l'on ne peut pas produire une quantité infinie d'output à partir d'une quantité finie d'input.

T3 $\forall (x, y) \in T^t$, si $(x, -y) \leq (u, -v) \Rightarrow (u, v) \in T^t$. Cet axiome traduit l'hypothèse de libre disposition sur les input et les output.

T4 : T^t est un ensemble fermé.

T5 : T^t est un ensemble convexe.

T6 : Soit θ , si $(x, y) \in T^t$, alors $(x, \theta y) \in T^t$, $\forall \theta \in [0, 1]$.

T7 : Soit λ , si $(x, y) \in T^t$, $(\lambda x, y) \in T^t \forall \lambda \geq 1$.

1.4 Efficacité forte au sens de Koopmans.

Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^n$, on peut définir un sous-ensemble efficace qui correspond à l'efficacité définie par Koopmans (1951). Le sous-ensemble efficace au sens de Koopmans est :

$$E\text{ff}L(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : u \leq x, u \neq x \Rightarrow x \notin L(y)\} \quad (1.4)$$

En général cet ensemble de points efficaces est un sous-ensemble de l'isoquant. On a donc $EffL(y) \subset IsoqL(y)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^m$, le sous-ensemble efficace en output de $P(x)$ est :

$$EffP(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^n : v \geq y, v \neq y \Rightarrow y \notin P(x)\}. \quad (1.5)$$

De même on a $EffP(x) \subset IsoqP(x)$.

On peut également étendre cette définition au graphe de la technologie. On a ainsi

$$Eff(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+n} : (-u, v) \geq (-x, y), u \neq x, v \neq y \Rightarrow (x, y) \notin T\}.$$

1.5 Modélisation de la technologie de production et de la frontière d'efficience.

Après avoir souligné l'existence d'une approche économétrique par l'estimation d'une fonction de production, cette section présente l'approche par enveloppement des données. La méthode DEA permet de modéliser une technologie de production multi-output/input, en tenant compte du type de rendements d'échelle. Par défaut, elle fournit les scores d'efficacité des firmes au sens de Farrell. Ainsi elle constitue un outil de "benchmarking", puisqu'elle indique comment les firmes inefficaces peuvent devenir efficaces.

1.5.1 Les limites de l'approche classique de la fonction de production en microéconomie et des méthodes d'estimation économétriques.

Traditionnellement la technologie de production est modélisée par une fonction de production. Il s'agit d'une approche paramétrique, la fonction étant définie a priori. Les formes fonctionnelles les plus courantes sont les fonctions linéaires, la fonction Cobb-Douglas ou les fonctions quadratiques. Elles sont respectivement définies par :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x_i, \quad (1.6)$$

$$y = a_0 \prod_{i=1}^m x_i^{a_i}, \quad (1.7)$$

$$y = a_o + \sum_{i=1}^m a_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1.8)$$

Où a_i, a_{ij} sont les paramètres inconnus à estimer.

Ces paramètres sont évalués avec des méthodes économétriques de régression linéaire (moindre carrés ordinaires) ou partiellement linéaire (PLS). Si les variables sont qualitatives, on peut estimer ces paramètres par le maximum de vraisemblance (modèles probit et logit).

L'un des inconvénients de cette méthode est qu'elle repose sur des hypothèses restrictives (homoscédasticité des résidus, indépendance des termes de l'erreur et nullité de la moyenne des résidus).

Mais le problème majeur est que cette approche ne permet pas de prendre en compte un processus de production multi-output. Or, dans la réalité, il existe des productions multi-output, et ceci aussi bien dans le domaine de l'économie managériale que dans celui de l'économie publique. En effet, certaines firmes produisent plusieurs biens et services. Par exemple, les banques vendent plusieurs produits (crédits, assurances, placements et titres financiers). L'entreprise française Danone produit plusieurs biens sur trois secteurs principaux d'activités (produits laitiers, eau et gâteaux).

L'évaluation de la performance du secteur public passe par une analyse multi-output des différentes politiques économiques.

Pour mener une analyse plus pertinente, nous adoptons un cadre d'analyse non-paramétrique et multi-output. Plus particulièrement nous utilisons la méthode DEA.

1.5.2 La méthode DEA, une approche multidimensionnelle et non-paramétrique.

Charnes, Cooper et Rhodes (1978) ont introduit la méthode DEA pour mesurer l'efficacité d'unités de production. Elle permet de comparer l'efficacité d'unités de décisions similaires, qui utilisent les mêmes input, pour produire le même type d'output. Il s'agit ainsi d'une méthode comparative qui donne la possibilité de faire du benchmarking.

L'avantage de cette méthode est qu'elle est non-paramétrique. Elle ne nécessite pas de définir a priori, une forme fonctionnelle de la technologie de production. De plus, elle laisse la possibilité de mener une analyse avec les prix et les coûts des ressources, ou sans

(uniquement avec les quantités).

La frontière d'efficacité est estimée par enveloppement des données. Elle caractérise les DMUs efficaces, qui utilisent les meilleures combinaisons productives.

Le papier de Charnes, Cooper et Rhodes (1978), définit le programme linéaire qui permet d'estimer la frontière d'efficacité et les scores d'efficacité relatifs des DMUs. Initialement la méthode DEA estime l'efficacité technique au sens de Farrell. Elle fournit les scores d'efficacité relatifs des DMUs selon la mesure de Debreu-Farrell. La technologie de production suit une hypothèse de rendements d'échelle constants (CCR). Puis, Banker, Charnes et Cooper (1984) reformulent le programme linéaire pour les technologies de production à rendements d'échelle variables (VRS). Un rappel sur les rendements d'échelle dans les différents modèles de la méthode DEA est proposé en Annexe 1.

Par la suite de nouvelles mesures de l'efficacité ont émergé. Après les avoir présentées, nous détaillerons les programmes linéaires qui permettent de les calculer.

La programmation linéaire :

Elle permet de calculer les scores d'efficacité des DMUs relativement aux autres et ainsi de caractériser la frontière efficace. Considérons les vecteurs de production de la DMU j notés $x_{m,j} = (x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{m,j})$ qui représente les input et $y_{n,j} = (y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{n,j})$, les output.

Certaines situations économiques exigent de prendre en compte une pondération des input et des output. Prenons l'exemple des hôpitaux publics en France. Supposons que l'on souhaite comparer l'efficacité technique des opérations chirurgicales de ces hôpitaux, et qu'il faut trois infirmières pour assister un chirurgien pendant une opération médicale. Si l'on note $x_{1,j}$ le nombre de docteurs et $x_{2,j}$ le nombre d'infirmières pour l'hôpital j , il convient de pondérer le dénominateur de la façon suivante : $x_{1,j} + 3x_{2,j}$. Si ces pondérations sont définies a priori elles sont fixes. La méthode DEA a l'avantage d'utiliser un système de pondérations variables. Elle va optimiser automatiquement les pondérations des DMUs relativement aux autres.

Soient u le poids d'un input et v le poids d'un output. En intégrant un système de pondération le ratio d'efficacité de la j ème DMU est déterminé par :

$$\frac{v_{1,j}y_{1,j} + \dots + v_{n,j}y_{n,j}}{u_{1,j}x_{1,j} + \dots + u_{m,j}x_{m,j}} = \lambda \quad (1.9)$$

Le score d'efficacité de la DMU j est obtenu en calculant :

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{v,u} \frac{v_1 y_{1,j} + \dots + v_n y_{n,j}}{u_1 x_{1,j} + \dots + u_m x_{m,j}} \\ \text{s.c. } &\frac{v_1 y_{1,i} + \dots + v_n y_{n,i}}{u_1 x_{1,i} + \dots + u_m x_{m,i}} \leq 1, \quad i = 1, \dots, l. \\ &u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

On résoud un programme d'optimisation pour chaque DMU. Il y a ainsi j contraintes.

Ce programme ne peut pas être calculer directement, il faut le linéariser :

$$\begin{aligned} \lambda &= \max_{v,u} v_1 y_{1,j} + \dots + v_n y_{n,j} \\ \text{s.c. } &u_1 x_{1,j} + u_2 x_{2,j} + \dots + u_m x_{m,j} = 1 \\ \text{s.c. } &v_1 y_{1,i} + \dots + v_2 y_{2,i} + \dots + v_n y_{n,i} \leq u_1 x_{1,i} + u_2 x_{2,i} + \dots + u_n x_{n,i} \\ &i = 1, \dots, j \quad u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Pour simplifier le calcul on préférera la version duale. Le programme peut être reformulé comme suit :

$$\begin{aligned} &\min_{\theta, \lambda} \lambda \\ \text{s.c. } &\lambda x_j \geq X\theta \\ &y_j \leq Y\theta \\ &\lambda \geq 0, \quad \theta \geq 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

X correspond à la matrice des input de dimension $(m * j)$, avec m , le nombre d'input et j le nombre de DMUs.

Y correspond à la matrice des outputs de dimension $(n * j)$ avec n , le nombre d'output et j le nombre de DMUs.

Les programmes linéaires pour les technologies à rendements d'échelle variables, non

croissants et non décroissants imposent des contraintes différentes. Ils sont détaillés en Annexe du Chapitre 1.

2 Les fonctions distance en tant qu'indice d'efficacité.

Cette section introduit la notion de fonction distance en tant que mesure de l'efficacité. Plus précisément, elle définit la mesure de Debreu-Farrell, la mesure directionnelle de Chambers et la mesure proportionnelle de Briec.

2.1 La mesure de Debreu-Farrell.

La mesure de Debreu-Farrell évalue les réductions ou expansions proportionnelles, réalisables sur les quantités d'input et d'output. Elle est l'inverse de la fonction distance définie par Shephard (1953).

2.1.1 La mesure de Debreu-Farrell en input.

La fonction distance de Shephard en input $S_t^i(x^t, y^t) : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$ est définie par :

$$S_t^i(x^t, y^t) = \sup_{\lambda > 0} \left\{ \lambda : \left(\frac{x^t}{\lambda}, y^t \right) \in L^t(y^t) \right\} \quad (1.13)$$

Puisque, $DF^i = [S^i(x, y)]^{-1}$, la mesure de Debreu-Farrell en input $DF_t^i : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ peut être exprimée comme suit :

$$DF_t^i(x^t, y^t) = \begin{cases} \inf_{\delta \in \mathbb{R}_+} \{ \delta : \delta x^t \in L^t(y^t) \} & \text{si } x^t \in L^t(y^t) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Cette fonction fournit une mesure de l'(in)efficacité. Lorsqu'elle est égale à 1, elle signifie que la DMU est techniquement efficace. Dans ce cas, la combinaison productive de la firme se situe sur la frontière efficiente. Lorsque la mesure de Debreu-Farrell est < 1 , elle fournit la réduction proportionnelle maximale réalisable sur la quantité d'input mobilisée, pour produire un niveau d'output donné.

On cherche le scalaire le plus petit possible δ , tel que la fonction projette radialement le vecteur d'input sur la frontière efficiente. La figure suivante donne une représentation graphique de DF_t^i :

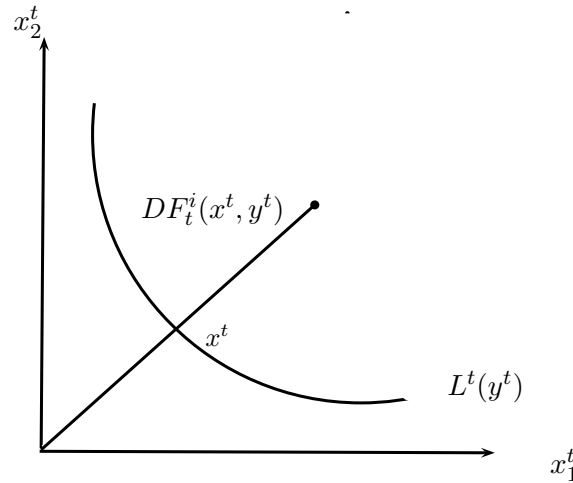


Figure 4 La mesure de Debreu-Farrell en input

Pour refléter au mieux la réalité économique, la mesure de Debreu-Farrell en input doit vérifier les propriétés suivantes :

IDF1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^m, DF_t^i(x, 0) = 0$. La mesure de Debreu-Farrell en input est nulle lorsque l'output est nul.

IDF2 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n, 0 \leq DF_t^i(x, y) < \infty$. Cet axiome spécifie le domaine de définition de la mesure de Debreu-Farrell.

IDF3 : $\forall \lambda > 0, DF_t^i(\lambda x, y) = \lambda^{-1} DF_t^i(x, y)$. Cette propriété implique que la mesure de Debreu-Farrell est homogène de degré -1 .

IDF4 : $\forall \theta \geq 1, DF_t^i(x, \theta y) \geq DF_t^i(x, y)$. La mesure de Debreu-Farrell est non décroissante en output.

IDF5 : $\forall y \in \mathbb{R}_+^n, L^t(y) = \{x : 0 \leq DF_t^i(x, y) \leq 1\}$. La mesure de Debreu-Farrell permet de caractériser totalement la technologie de production, si et seulement si, il y a libre disposition faible des input.

IDF6 : $\forall y \in \mathbb{R}_+^n, IsoqL^t(y) = \{x : DF_t^i(x, y) = 1\}$. Cette propriété signifie que lorsqu'une combinaison productive est techniquement efficace, elle se situe sur l'isoquant qui caractérise la frontière d'efficience. Dans ce cas, la mesure de Debreu-Farrell est égale à 1.

IDF7 : $\forall y \in \mathbb{R}_+^n$ et $\forall u \geq x \geq 0$, $DF_t^i(x, y) \geq DF_t^i(u, y)$. Cet axiome traduit la monotonie faible de la mesure de Debreu-Farrell en input.

Le programme linéaire qui permet de calculer la mesure de Debreu-Farrell sous l'hypothèse de rendement d'échelle constants est donné dans Charnes, Cooper et Rhodes (1978). Le modèle CCR établit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \lambda & (1.15) \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda x_i \geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i, \\
 & y_i \leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i, \\
 & \lambda \geq 0, \quad \theta_i \geq 0.
 \end{aligned}$$

Le programme linéaire qui permet de calculer cette mesure en considérant plutôt des rendements d'échelles variables, est donné dans Banker, Charnes et Cooper (1984). Le modèle de BCC est défini par :

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \lambda & (1.16) \\
 \text{s.c.} \quad & \lambda x_i \geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i, \\
 & y_i \leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i, \\
 & \sum_{i=1}^j \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \lambda \geq 0.
 \end{aligned}$$

2.1.2 La mesure de Debreu-Farrell en output

La fonction distance de Shephard en output $S_t^o(x^t, y^t) : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$ est définie par :

$$S_t^o(x^t, y^t) = \inf \{ \theta : \theta y^t \in P^t(x^t) \} \quad (1.17)$$

Comme $DF^o(x, y) = [S^o(x, y)]^{-1}$, la mesure de Debreu-Farrell en output $DF_t^o : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$ est établie de manière équivalente par :

$$DF_t^o(x^t, y^t) = \begin{cases} \sup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \{\theta : \theta y^t \in P^t(x^t)\} & \text{si } y^t \in P^t(x^t) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.18)$$

La mesure de Debreu-Farrell en output évalue l'expansion maximale d'un vecteur d'output, par un scalaire θ , pour atteindre radialement la frontière efficiente. Elle fournit les gains en outputs, compte tenu du niveau d'input utilisé. En supposant que l'isoquant $P^t(x^t)$ satisfait les axiomes standards, une représentation de la mesure de Debreu-Farrell est proposée dans la figure suivante :

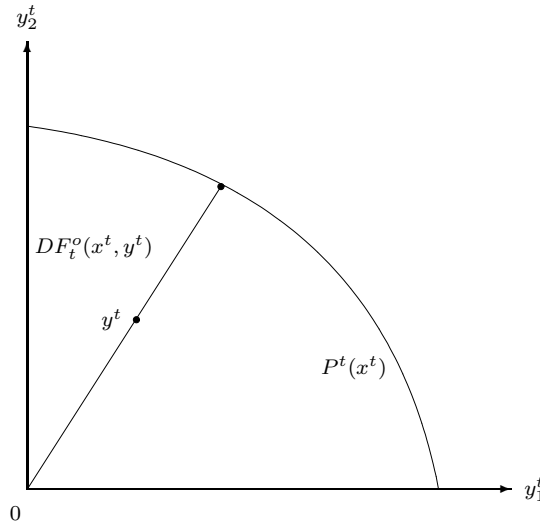


Figure 5 La mesure de Debreu-Farrell en output

La mesure de Debreu-Farrell en output doit satisfaire les axiomes suivants :

ODF1 : $\forall y \in \mathbb{R}_+^n, DF_t^o(0, y) = 0$. Cette propriété signifie que la mesure de Debreu-Farrell en output est nulle lorsque le niveau d'input est nul.

ODF2 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n, 0 \leq DF_t^o(x, y) < \infty$. Cet axiome donne le domaine de définition de la mesure de Debreu-Farrell.

ODF3 : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$ et $\forall \theta < 0, DF_t^o(x, \theta y) = \theta^{-1} DF_t^o(x, y)$. Ceci traduit le fait que la mesure de Debreu-Farrell en output est homogène de degré -1 .

ODF4 : $\forall \lambda \geq 1, DF_t^o(\lambda x, y) \geq DF_t^o(x, y)$. Ceci signifie que la mesure de Debreu-Farrell

est non décroissante en input.

ODF5 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$, $P^t(x) = \{y : DF_t^o(x, y) \geq 1\}$, avec $P^t(x) \neq \emptyset$. Lorsqu'il y a disposition faible des output, la mesure de Debreu-Farrell en output permet de caractériser complètement la technologie de production.

ODF6 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$, $IsoqP^t(x) = \{x : DF_t^o(x, y) = 1\}$. Cet axiome implique que la mesure de Debreu-Farrell en output = 1 lorsque les vecteurs de production sont techniquement efficaces.

ODF7 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^m$, et $\forall v \geq y \geq 0$, $DF_t^o(x, v) \leq DF_t^o(x, y)$. Cette propriété traduit la libre disposition forte des output.

Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, le programme linéaire qui permet de calculer la mesure de Debreu-Farrell en output est :

$$\begin{aligned} & \max \quad \theta & (1.19) \\ \text{s.c.} \quad & x \geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i, \\ & \theta y \leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i, \\ & \lambda \geq 0, \quad \theta_i \geq 0. \end{aligned}$$

Pour calculer cette mesure sous l'hypothèse de rendements d'échelle variables, on remplace la dernière contrainte du programme linéaire précédent par :

$$\sum_{i=1}^j \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \theta \geq 0.$$

2.2 La mesure hyperbolique

La mesure hyperbolique a été introduite par Färe, Grosskopf et Lovell (1985). C'est une extension de la mesure de Debreu-Farrell dans le graphe. Elle permet de prendre en compte simultanément les réductions et expansions d'input et d'output.

Cette fonction $DF^h : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est définie par :

$$DF_t^h(x^t, y^t) = \inf\{\lambda \geq 0 : (\lambda x^t, \frac{1}{\lambda} y^t) \in T^t\} \quad (1.20)$$

Cette mesure prend la forme d'une hyperbole dans le graphe puisqu'elle est appliquée de façon équiportionnelle sur les input et les output. Elle est représentée dans la figure suivante :

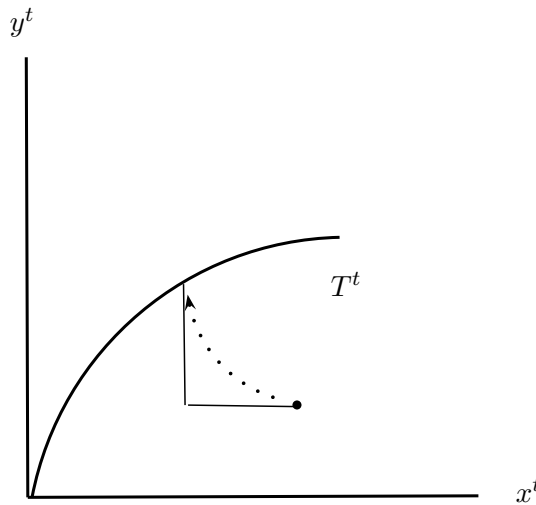


Figure 6 La mesure hyperbolique dans le graphe

La mesure hyperbolique doit satisfaire les propriétés suivantes :

HDF1 : $DF^h(0, 0) = 0$. Cela signifie que la mesure hyperbolique est nulle lorsque les ressources sont nulles. Ceci implique qu'il n'y a pas de coût fixe.

HDF2 : $\forall \theta > 0, DF^h(\theta x, \theta^{-1} y) = \theta^{-1} DF(x, y)$. Cette propriété indique que la mesure hyperbolique est homogène de degré -1 .

HDF3 : $\forall \lambda \geq 1, DF^h(\lambda x, y) \leq DF^h(x, y)$. Et $\forall \theta \in [0, 1], DF^h(x, \theta y) \leq DF^h(x, y)$. La mesure hyperbolique est non croissante en input et non décroissante en output.

HDF4 : $T = \{(x, y) : 0 \leq DF^h(x, y) \leq 1\}$, si et seulement si il y a libre disposition faible des input. La mesure hyperbolique donne une caractérisation complète de la technologie lorsqu'il y a disposition faible des input et des output.

HDF5 : $Isoq(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n : DF^h(x, y) = 1\}$. Lorsque les vecteurs de production sont efficaces la mesure hyperbolique est égale à 1.

On peut calculer la mesure hyperbolique de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 DF^h(x, y) &= \inf \lambda & (1.21) \\
 s.c \quad \lambda x &\geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i, \\
 \frac{1}{\lambda} y &\leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i, \\
 \theta_i &\geq 0, \lambda > 0 \text{ CRS} \\
 \sum_{i=1}^j \theta_i &\geq 1, \theta_i \geq 0, \lambda > 0 \text{ VRS.}
 \end{aligned}$$

2.3 La fonction distance directionnelle

Les fonctions distance directionnelles projettent des vecteurs de production sur la frontière efficiente dans une direction préétablie g .

2.3.1 La fonction directionnelle dans le graphe

Cette fonction mesure l'expansion et la réduction maximale des output et des input. Elle généralise la fonction traditionnelle de Debreu-Farrell.

La fonction distance directionnelle $\vec{D}_t(x, y, ; g)$ projette simultanément les vecteurs d'input et d'output, sur la frontière efficiente, dans la direction $g = (h, k) \in \mathbb{R}_+^{m+n}$

$$\vec{D}_t(x^t, y^t, g) = \sup_{\delta} \{ \delta \geq 0 \quad (x^t - \delta h, y^t + \delta k) \in T^t \} \quad (1.22)$$

La figure 7 illustre la mesure directionnelle dans le graphe de production.

La fonction distance directionnelle doit vérifier les propriétés suivantes :

DD1 : $\forall \delta \in \mathbb{R}_+^{m+n}, \vec{D}_t(x - \delta h, y + \delta k; h, k) = \vec{D}_t(x, y; g) - \delta$. Cette propriété signifie que lorsque l'on translate un vecteur (x, y) , vers $(x - \delta h, y + \delta h)$, la valeur de la mesure directionnelle est réduite par le scalaire δ .

DD2 : $\forall \lambda > 0, \vec{D}_t(x, y; \lambda h, \lambda k) = \lambda^{-1} \vec{D}_t(x, y, ; h, k)$. La fonction directionnelle est homogène de degré 1.

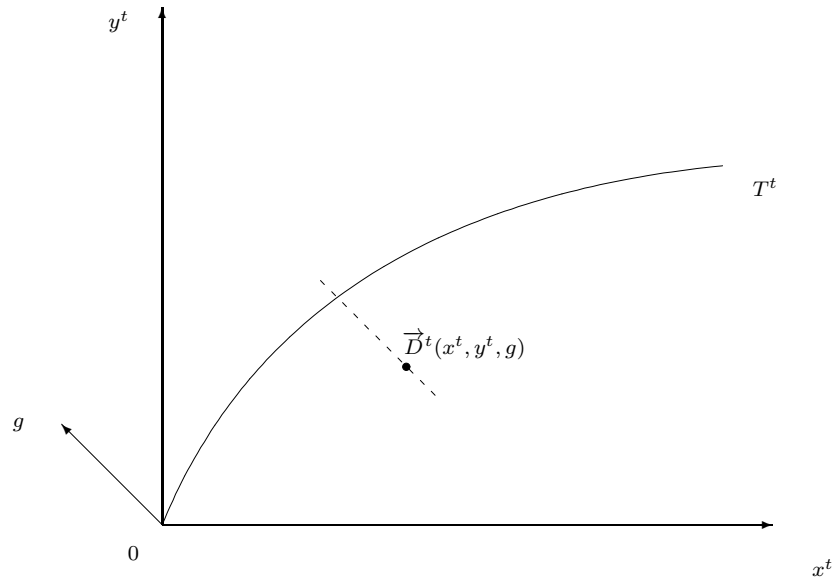


Figure 7 La fonction distance directionnelle dans le graphe

DD3 : Si $(x, y) \in T$, $\vec{D}_t(x, y; h, k) \geq 0$. Cette mesure permet une caractérisation complète de la technologie de production.

DD4 : $\forall x, x \in \mathbb{R}_+^m$ et $\forall y, y \in \mathbb{R}_+^n$ si $(x, -y) \geq (x, -y)$ alors $\vec{D}_t(x, y; h, k) \geq \vec{D}_t(x, y; h, k)$. Cette propriété implique lorsqu'il y a libre disposition faible des input la mesure est non décroissante en input. Lorsqu'il y a libre disposition faible des output, la fonction directionnelle est non croissante en output.

DD5 : Si les rendements d'échelle sont constants $\forall \lambda > 0$, $\vec{D}_t(\lambda x, \lambda y; h, k) = \lambda \vec{D}_t(x, y; h, k)$ alors la fonction distance directionnelle est homogène de degré 1.

Le programme linéaire qui permet de calculer la mesure directionnelle est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{D}_t(x, y; h, k) &= \max \quad \delta \\ \text{s.c} \quad x - \delta h &\geq \sum_i \theta_i x_i, \\ y + \delta k &\leq \sum_j \theta_j y_j, \\ \sum_{i=1}^j \theta_i &= 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \delta \geq 0. \end{aligned}$$

2.3.2 La fonction distance directionnelle en input

Cette fonction mesure la réduction maximale de la quantité d'input, dans la direction $g = (h, 0)$. Elle est définie par :

$$\vec{D}_t^i(x^t, y^t; h) = \begin{cases} \sup \{ \delta : x^t - \delta h \in L^t(y^t) \} & \text{si } x^t - \delta h \in L^t(y^t) \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.23)$$

Une représentation graphique de cette mesure est proposée dans la figure suivante :

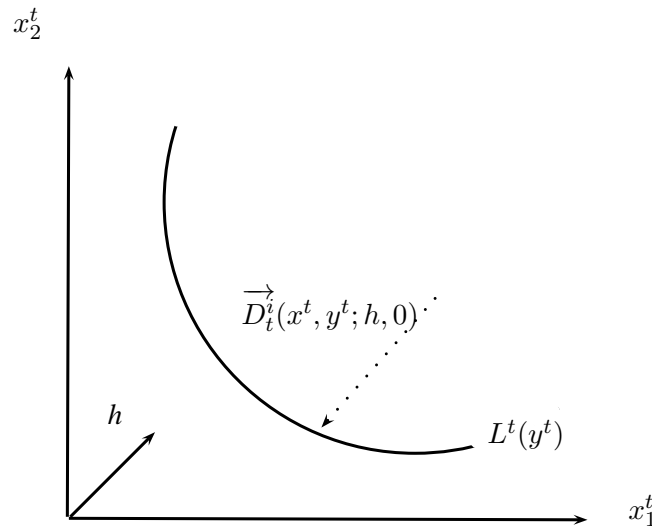


Figure 8 : La fonction distance directionnelle en input

Le programme linéaire qui permet de calculer la directionnelle en input est donné par :

$$\begin{aligned} D(x, y; h, 0) &= \max \quad \delta & (1.24) \\ \text{s.c.} \quad x - \delta h &\geq \sum_i \theta_i x_i, \\ y &\leq \sum_i \theta_i y_i, \\ \sum_{i=1}^j \theta_i &= 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \delta \geq 0 \end{aligned}$$

2.3.3 La fonction directionnelle en output.

Cette mesure caractérise l'expansion maximale du vecteur d'output dans la direction $g = (0, k)$. Elle est définie par :

$$\vec{D}_t^o(x^t, y^t; h) = \begin{cases} \sup \{ \delta : y^t + \delta k \in P^t(x^t) \} & \text{si } y^t + \delta k \in P^t(x^t) \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.25)$$

La figure suivante illustre la mesure directionnelle en output :

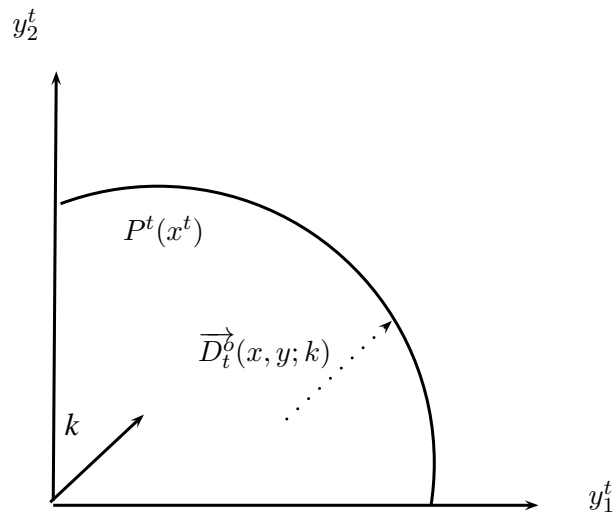


Figure 9 La fonction distance directionnelle en output

Le programme linéaire suivant permet de calculer la mesure directionnelle en output :

$$\begin{aligned} \vec{D}(x, y; 0, k) &= \max \quad \delta & (1.26) \\ \text{s.c.} \quad x &\geq \sum_i \theta_i x_i, \\ y + \delta k &\leq \sum_i \theta_i y_i, \\ \sum_{i=1}^j \theta_i &= 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \delta \geq 0. \end{aligned}$$

2.4 La fonction distance proportionnelle.

La distance proportionnelle a été introduite par Briec (1997). Elle mesure les réductions et augmentations proportionnelles simultanées des input et des output pour atteindre la frontière d'efficacité.

2.4.1 La mesure proportionnelle.

Cette mesure est définie sur T^t par :

$$D^\infty(x^t, y^t) = \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \{ \delta : ((1 - \delta)x^t, (1 + \delta)y^t) \in T^t \} \quad (1.27)$$

Cette définition peut être généralisée en tenant compte d'une pondération. La mesure proportionnelle généralisée $D_{\alpha, \beta}^\infty : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est définie par :

$$D_{\alpha, \beta}^\infty(x, y) = \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \{ \delta : (x^t - \delta\alpha \odot x^t, y^t + \delta\beta \odot y^t) \in T^t \} \quad (1.28)$$

La mesure proportionnelle est illustrée dans la figure 10.

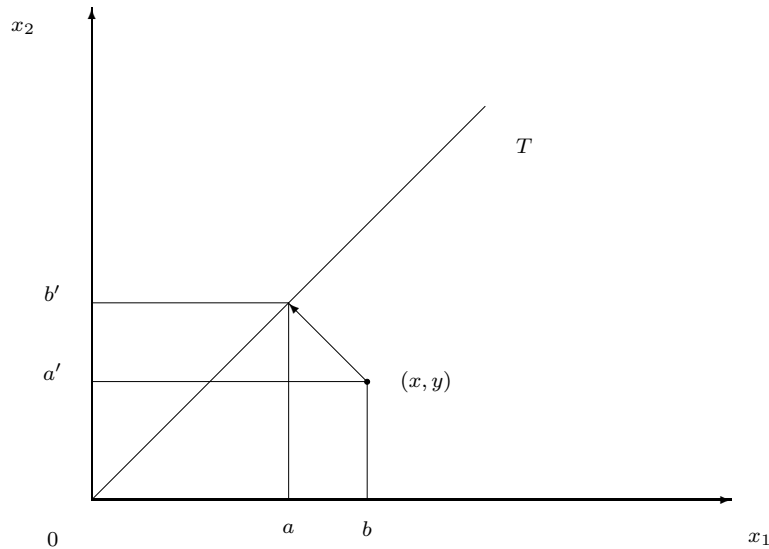


Figure 10 La fonction distance proportionnelle.

La mesure proportionnelle doit satisfaire les propriétés suivantes :

DP1 : $\forall \delta \in \mathbb{R}, D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x - \delta\alpha \odot x, y + \delta \odot y) = D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y) - \delta$. Cette propriété signifie que lorsqu'on translate un vecteur de production (x, y) , vers $(x - \delta\alpha \odot x, y + \delta\beta \odot y)$, la valeur de la mesure directionnelle est diminuée par le scalaire δ .

DP2 : $\forall \lambda \geq 1, D_{\alpha,\beta}^{\infty}(\lambda x, y) \leq D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y)$. Cette propriété indique qu'une réduction proportionnelle des input diminue la valeur de cette mesure.

DP3 : $\forall \theta \in [0, 1], D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, \theta y) \leq D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y)$. Une augmentation proportionnelle des output diminue la valeur de la mesure proportionnelle.

DP4 : $D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y) \geq 0$, si $(x, y) \in T$. La mesure proportionnelle permet une caractérisation complète de la technologie.

DP5 : $\forall x, x \in \mathbb{R}_+^m$, et $\forall y, y \in \mathbb{R}_+^n$, si $(x, -y) \geq (x, -y)$, $D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y) \geq D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y)$. Lorsqu'il y a libre disposition des input, la mesure proportionnelle est non décroissante en input. Lorsqu'il y a libre disposition des output, cette mesure est non croissante en output.

DP6 : $D_{\alpha,\beta}^{\infty}(\lambda x, \lambda y) = D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y)$, $\forall \lambda > 0$ avec des rendements d'échelles constants. Cela signifie que sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la mesure proportionnelle est homogène de degré 0.

Le programme linéaire qui permet de calculer la mesure proportionnelle est défini par :

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha,\beta}^{\infty}(x, y) &= \max \quad \delta & (1.29) \\
 \text{s.c.} \quad x - \delta\alpha \odot x &\geq \sum_i \theta_i x_i, \\
 y + \delta\beta \odot y &\leq \sum_i \theta_i y_i, \\
 \sum_{i=1}^j \theta_i &= 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \delta \geq 0.
 \end{aligned}$$

2.4.2 Résultats d'équivalence entre la mesure de Debreu-Farrell (1957) et celle de Briec (1997)

En orientant la mesure proportionnelle en input ou en output, Boussemart, Briec, Kerstens et Poutineau (2003) ont établi des résultats d'équivalence, entre la mesure de Debreu-Farrell et la mesure proportionnelle, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants.

En input :

Soit $\alpha = \mathbb{1}_n$ avec $\mathbb{1}_n$ le vecteur dont les n composantes sont égales à 1 et $\beta = 0$, alors,

$$D_{\mathbb{1}_n,0}^\infty(x, y) = \sup\{\delta : ((1 - \delta)x, y) \in T^t\} = 1 - DF^i(x, y) \quad (1.30)$$

$$DF^i(x, y) = \frac{1 - D^\infty(x, y)}{1 + D^\infty(x, y)} \quad (1.31)$$

et,

$$D^\infty(x, y) = \frac{1 - DF^i(x, y)}{1 + DF^i(x, y)} = \frac{D_{\mathbb{1}_n,0}^\infty(x, y)}{2 - D_{\mathbb{1}_n,0}^\infty(x, y)} \quad (1.32)$$

En output :

On a $\alpha = 0$ et $\beta = \mathbb{1}_n$, donc :

$$D_{0,\mathbb{1}_n}^\infty(x, y) = \sup\{\delta \geq 0 : (x, (1 + \delta)y) \in T^t\} = DF^o(x, y) - 1; \quad (1.33)$$

$$DF^o(x, y) = \frac{1 + D^\infty(x, y)}{1 - D^\infty(x, y)} \quad (1.34)$$

et,

$$D^\infty(x, y) = \frac{DF^o(x, y) - 1}{E^o(x, y + 1)} = \frac{D_{0,\mathbb{1}_n}^\infty(x, y)}{2 + D_{0,\mathbb{1}_n}^\infty(x, y)} \quad (1.35)$$

3 Efficacité des prix des ressources.

Il est possible d'intégrer le prix des ressources dans l'analyse de l'efficience. Le coût des facteurs de production et les prix de vente des produits ont un impact direct sur l'efficience. Pour cela on peut introduire des fonctions de coût, de revenu et de profit dans la mesure de l'efficacité. Plus précisément la théorie de la dualité consiste à dériver les prix qui minimisent le coût de production. Elle permet de trouver les prix implicites des output, ceux qui maximisent le chiffre d'affaires. Cet outil peut s'avérer utile, notamment en économie publique, puisque le prix des biens collectifs ne sont pas déterminés sur un

marché concurrentiel.

3.1 Le prix des ressources dans la technologie de production.

Soit $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in \mathbb{R}_+^m$ le vecteur des prix des input. En considérant le coût des input, le coût minimum de production est déterminé par la fonction C . Elle est définie dans le graphe par :

$$C^t(w^t, y^t) = \inf_x \{w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in T^t(x^t, y^t)\} \quad (1.36)$$

Sur la base de la correspondance en input, on peut définir une fonction de coût de la manière suivante :

$$C^t(w^t, y^t) = \inf_x \{w^t \cdot x^t : (x^t, y^t) \in L^t(y^t)\} \quad (1.37)$$

La figure suivante représente la fonction de coût C dans la correspondance en input :

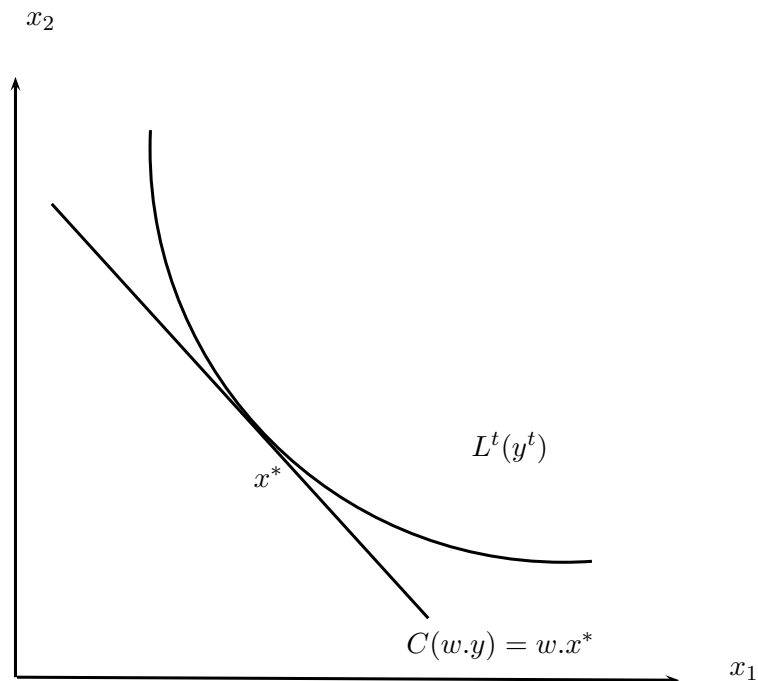


Figure 11 La fonction de coût dans la correspondance en input

Sur le graphique, le coût minimum est atteint lorsque le vecteur d'input prend la valeur x^* . La fonction de coût doit vérifier les propriétés suivantes :

C1 : $\forall w \in \mathbb{R}_+^m, C^t(w, 0) = 0$. Il n'y a pas de coûts fixes.

C2 : $\forall (w, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$, et si $y > 0$ et $w > 0$ alors $C^t(w, y) > 0$. Une production non-nulle implique des coûts non-nuls.

C3 : Lorsque $w \geq w'$, $C^t(w', y) \geq C^t(w, y)$. Cette propriété signifie que la fonction de coût est monotone.

C4 : Lorsque $y \geq y'$, $C^t(w, y') \geq C^t(w, y)$. Cette propriété traduit de la monotonie de la fonction de coût en output.

C5 : $\forall \lambda > 0, C^t(\lambda w, y) = \lambda C^t(w, y)$ traduit le fait que la fonction de coût est semi-homogène de degré -1 , en prix des input.

C6 : La fonction de coût est concave et continue en prix.

C7 : Lorsque les rendements d'échelle sont constants, $\forall \lambda > 0$ on a $C^t(w, \lambda y) = \lambda C^t(w, y)$. Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, la fonction de coût est homogène de degrés 1 en output.

C8 : Lorsque la technologie de production est convexe, la fonction de coût est convexe en output.

Supposons que la correspondance en input satisfait les axiomes précédents, on a :

$$L^t(y) = \bigcap_{w \geq 0} \{x : w \cdot x \geq C^t(w, x)\} \quad (1.38)$$

Soit $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ le vecteur du prix de vente des output. La fonction de revenu $R : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dans la correspondance en output est définie par :

$$R^t(p^t, x^t) = \sup_y \{p^t \cdot y^t : y \in P^t(x^t)\} \quad (1.39)$$

La figure suivante représente la fonction de revenu pour une correspondance en output :

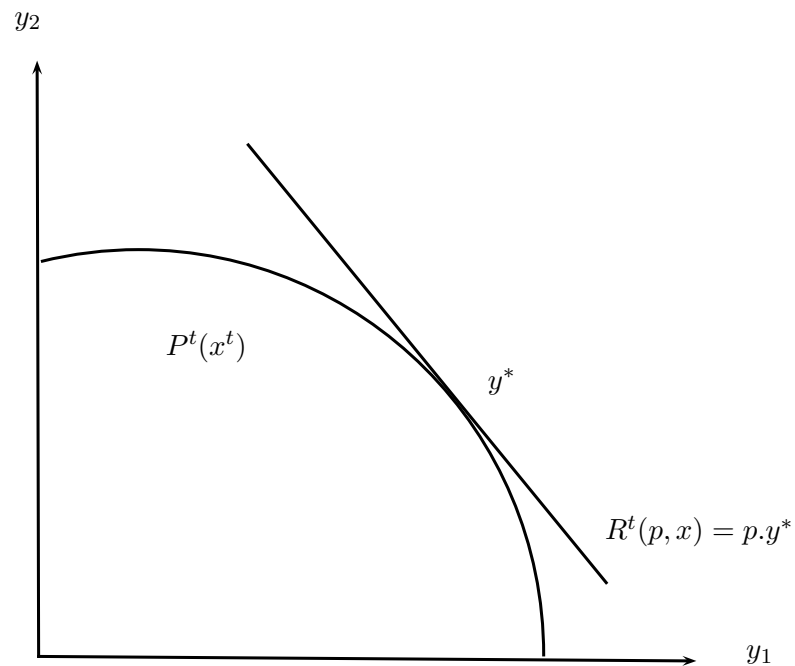


Figure 12 La fonction de revenu dans la correspondance en output

La fonction de revenu admet un maximum lorsque le vecteur des output prend la valeur y^* . La fonction de revenu doit également satisfaire un certain nombre de propriétés :

R1 : $\forall p \in \mathbb{R}_+^n, R^t(p, 0) = 0$, signifie que l'on ne peut obtenir une production non-nulle à partir d'un niveau d'input nul.

R2 : $\forall (p, x) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$, si $x > 0$ et $p > 0$, $R^t(p, x) > 0$. Cette propriété indique qu'un niveau non-nul d'input induit une production strictement positive.

R3 : Si $p' \geq p$, $R^t(p', x) \geq R^t(p, x)$. La fonction de revenu est non décroissante en prix.

R4 : Si $x' \geq x$, $R^t(p, x') \geq R^t(p, x)$. La fonction de revenu est non décroissante en input.

R5 : $\forall \lambda > 0, R^t(\lambda p, x) = \lambda R^t(p, x)$ signifie que la fonction de revenu est homogène de degré 1 en prix des output.

R6 : La fonction de revenu est convexe.

R7 : Lorsque les rendements d'échelle sont constants, $\forall \lambda > 0, R^t(p, \lambda x) = \lambda R^t(p, x)$.

La fonction de revenu est homogène de degré 1 en input, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants.

R8 : Lorsque la technologie de production est convexe, la fonction de coût est concave en input.

En supposant que la correspondance en output satisfait les axiomes précédents :

$$P^t(x) = \bigcap_{p \geq 0} \{y \in \mathbb{R}_+^n : p \cdot y \leq R^t(p, x)\} \quad (1.40)$$

A partir du graphe de la technologie, on peut définir une fonction de profit $\Pi : \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\Pi(w, p) = \sup_{(x, y)} \{p \cdot y - w \cdot x : (x, y) \in T^t\} \quad (1.41)$$

La figure suivante illustre la fonction de profit Π dans le graphe de la technologie :

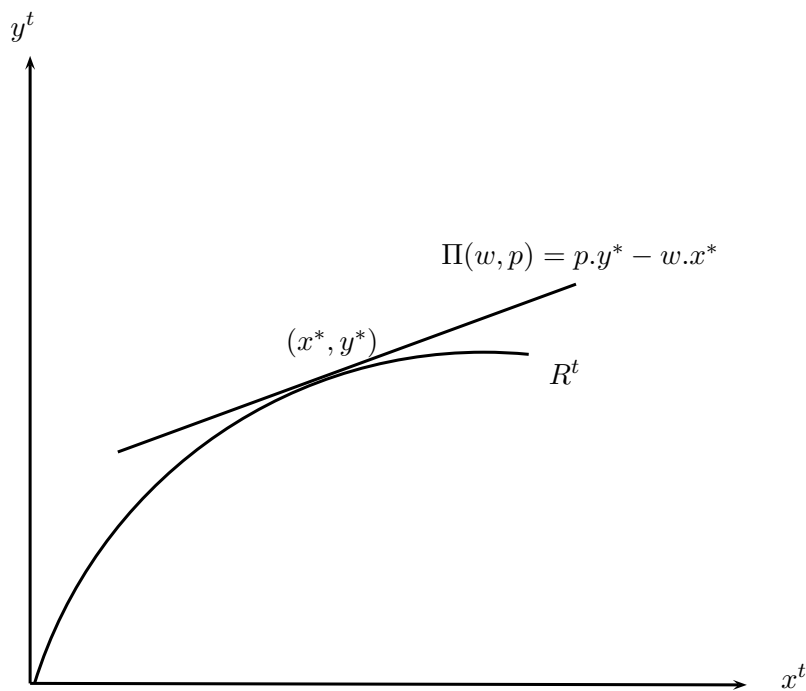


Figure 13 La fonction de profit dans le graphe

Sur le graphique, la fonction de profit est maximale lorsque les vecteurs de production prennent la valeur (x^*, y^*) . Elle doit satisfaire les propriétés suivantes :

PR1 : $\Pi(0, 0) = 0$ implique que lorsque le coût de production est nul, le profit est nul. Donc, il n'y a pas de coûts fixes.

PR2 : $\forall (w, p) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n, \Pi(w, p) \geq 0$. Cela signifie que lorsque le prix des ressources est non-nul la fonction de profit est non-nulle.

PR3 : Si $p' \geq p$, et $w' \leq w$, alors $\Pi(w', p') \geq \Pi(w, p)$. Cette propriété indique que la fonction de profit est non décroissante en prix p et en coût des facteurs w .

PR4 : $\forall \lambda > 0, \Pi(\lambda w, \lambda p) = \lambda \Pi(w, p)$. La fonction de profit est homogène de degré 1.

PR5 : La fonction de profit est convexe et continue en prix sur son domaine de définition.

PR6 : Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, $\Pi(w, p) = 0$, ou $\Pi(w, p) = +\infty$. La technologie est un cône convexe.

Si le graphe de la technologie a des valeurs convexes et fermées, et qu'il vérifie les axiomes précédents :

$$T^t = \bigcap_{(w,p) \leq 0} \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n : p \cdot y - w \cdot x \leq \Pi(w, p)\} \quad (1.42)$$

3.2 Fonctions distance et dualité.

Pour analyser l'efficacité du prix des ressources, les mesures de l'efficacité peuvent être reliées aux fonctions de coût, de revenu et de profit. Les fonctions distance projettent les vecteurs de production inefficaces, sur les fonctions de coût, de revenu ou de profit.

Le théorème de Shephard énonce qu'aux points où la fonction de coût est différentiable et admet un minimum $x_i^*(w, y)$, avec $i = 1, \dots, m$:

$$\frac{\partial C(w, y)}{\partial w_i} = x_i^*(w, y) \quad (1.43)$$

La mesure de Debreu-Farrell en input avec le prix des facteurs est définie par :

$$C(w, y) = \inf_x \{w \cdot x : DF^i(x, y) = 1\} \text{ et } DF^i(x, y) = \inf_{w \geq 0} \{w \cdot x : C(w, y) = 1\} \quad (1.44)$$

La première relation relie la fonction de coût à la mesure de Debreu-Farrell. Elle signifie que le coût minimum est forcément obtenu à partir de la frontière efficiente pour laquelle $DF^i(x, y) = 1$. La seconde relation constitue le résultat de la théorie de la dualité. Le lemme dual de Shephard permet de dériver les prix implicites à partir de la technologie de production. Ils sont définis par :

$$w^*(x, y) = \frac{\partial DF^i(x, y)}{\partial x} \quad (1.45)$$

$$(1.46)$$

$$\text{où } w^*(x, y) = \arg \min_w \{w \cdot x : C(x, y) = 1\}$$

Dans le graphique qui suit, x^* représente le point de projection de x sur la frontière efficiente, et w^* correspond au vecteur de prix des input, qui rend optimal x^* dans la minimisation des coûts.

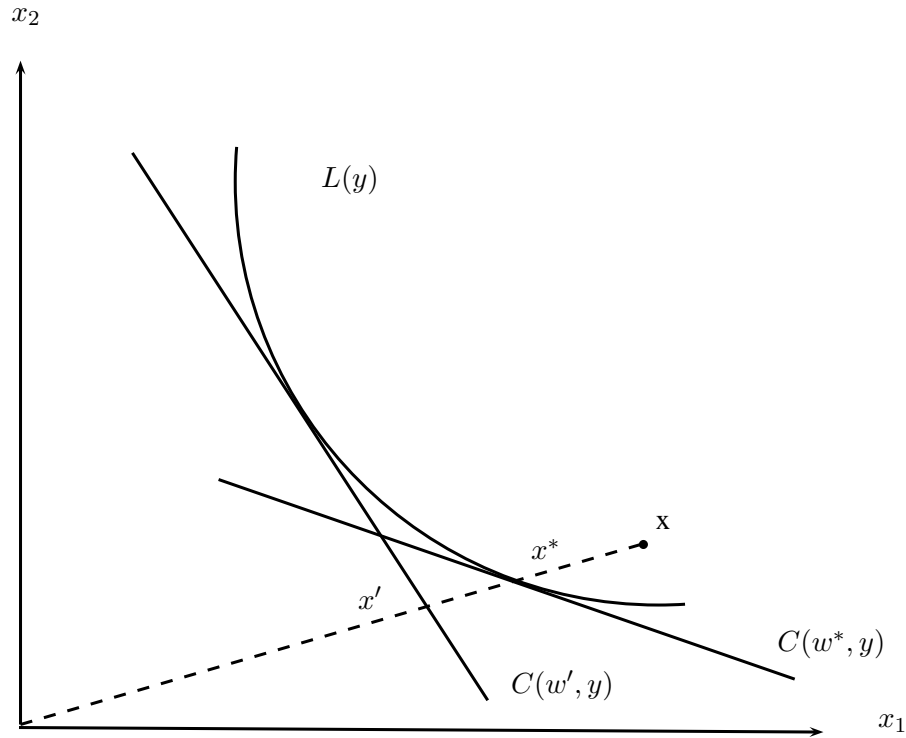


Figure 14 Dualité entre la mesure de Debreu-Farrell en input et la fonction de coût

On a :

$$DF_t^i(x, y) = \frac{w^* \cdot x}{C(w^*, y)} = \inf_{w' \geq 0} \left\{ \frac{w' \cdot x}{C(w', y)} : C(w', y) \neq 0 \right\} \quad (1.47)$$

Il est également possible d'obtenir les prix implicites optimaux, notamment pour les biens et services publics. En effet, la fonction de revenu et la mesure de Debreu-Farrell sont duales en output. Cette relation est décrite par :

$$R(p, x) = \sup_y \{p \cdot y : DF^o(x, y) = 1\} \text{ et } DF^o(x, y) = \sup_{p \geq 0} \{p \cdot y : R(p, x) = 1\} \quad (1.48)$$

D'après le théorème de Shepard, les prix implicites des output sont déterminés par :

$$p^*(x, y) = \frac{\partial DF^o(x, y)}{\partial y} \quad (1.49)$$

$$(1.50)$$

$$\text{avec } p^*(x, y) = \arg \min_p \{p \cdot y : R(x, y) = 1\} \quad (1.51)$$

La figure suivante illustre ces relations de dualité :

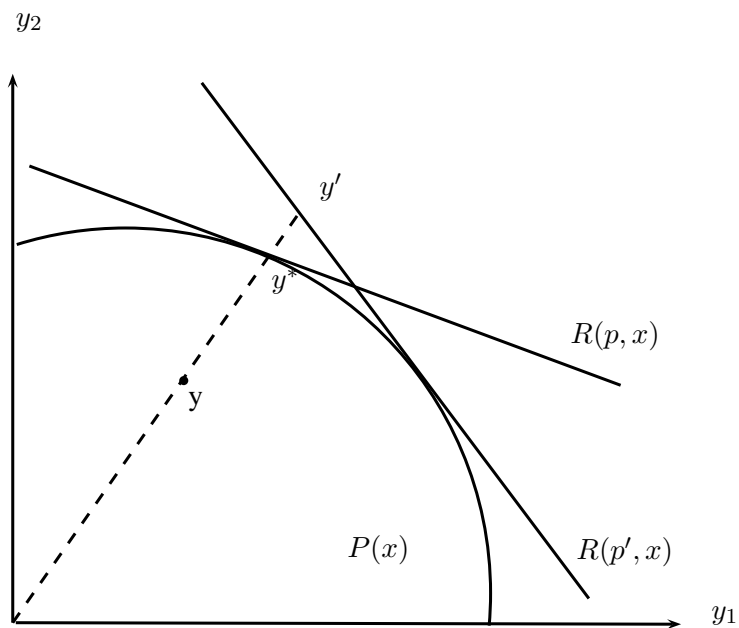


Figure 15 Dualité entre la mesure de Debreu-Farrell et la fonction de revenu

4 Les indicateurs de productivité.

Les indicateurs de productivité s'inscrivent dans une analyse dynamique de l'efficacité. Ils mesurent les variations (gains ou pertes) d'efficacité d'une firme au cours d'une période ou entre des espaces. Ces indicateurs peuvent être décomposés pour analyser plus précisément les origines des gains/pertes. Les variations de la productivité peuvent être expliquées par une variation de l'efficacité technique et/ou de l'efficacité technologique.

L'efficacité technique concerne l'efficacité de la gestion des ressources. Un gain/perte d'efficacité technique signifie que :

- La firme utilise moins/plus d'input, d'une période à l'autre, par rapport aux output produits.
- La firme produit plus /moins d'output, par rapport aux input mobilisés d'une période à l'autre. et ceci, relativement aux autres firmes.

L'efficacité technologique concerne le progrès technique et le capital humain. Un gain/perte d'efficacité technologique signifie qu'une DMU a amélioré/dégradé sa performance d'une période à l'autre. Cette amélioration/dégradation ne résulte pas d'une modification de la combinaison productive (quantité de ressources). Les variations d'efficacité

technologique s'expliquent par :

- Le progrès technologique (= les innovations).
- Le capital humain (= l'effet d'expérience).

Dans les lignes qui suivent, sont présentés les différents indicateurs de productivité et leur décomposition en distinguant les indicateurs de nature multiplicative des indicateurs de nature additive.

4.1 Les indicateurs de productivité de nature multiplicative

Ces indicateurs sont basés sur les mesures de Debreu-Farrell en input et en output. Ils correspondent plus particulièrement à des moyennes géométriques des mesures de Debreu-Farrell.

L'indice de Malmquist a été introduit par Caves, Christensen et Diewert en (1982). Il peut être orienté en input ou en output. L'indicateur de Hicks-Moorsteen a été introduit par Bjurek en (1996). Il correspond à la moyenne géométrique des rapports, pour chaque période, entre l'indice de Malmquist en output, sur l'indice de Malmquist en input.

4.1.1 L'indice de productivité de Malmquist

L'indice de productivité de Malmquist peut être défini en input ou en output.

L'indice de Malmquist en input

$$M_t^i = \frac{DF_t^i(x^t, y^t)}{DF_t^i(x^{t+1}, y^{t+1})} \quad (1.52)$$

$$M_{t+1}^i = \frac{DF_{t+1}^i(x^t, y^t)}{DF_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1})} \quad (1.53)$$

En faisant la moyenne géométrique de M_t^i et M_{t+1}^i , l'indice de Malmquist en input, est défini par :

$$M^i(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \left[\frac{DF_t^i(x^t, y^t)}{DF_t^i(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{DF_{t+1}^i(x^t, y^t)}{DF_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1})} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.54)$$

Lorsque l'indice de Malmquist est supérieur à 1, il traduit un gain d'efficacité entre les deux périodes. S'il est inférieur à 1, il indique une perte de productivité.

En considérant que $z_t = (x^t, y^t)$ et $z_{t+1} = (x^{t+1}, y^{t+1})$, une représentation de l'indice en input est donnée dans la figure suivante :

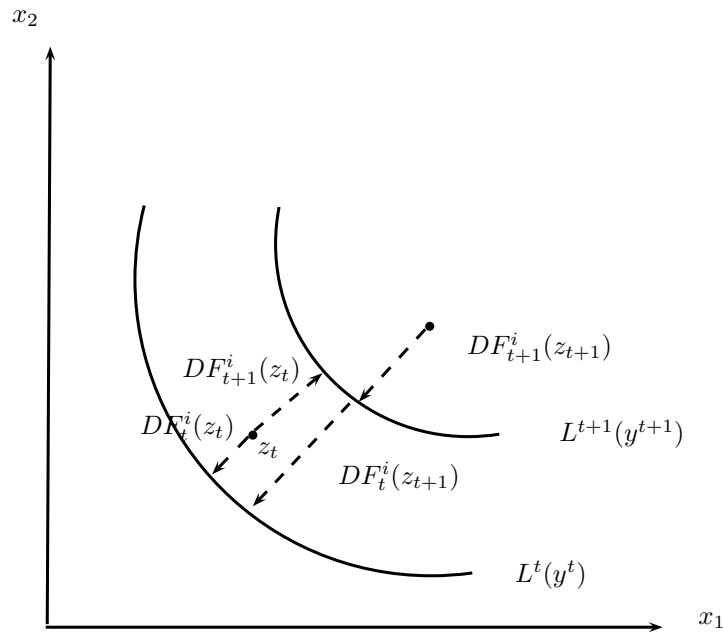


Figure 16 L'indice de Malmquist en input

Selon la définition de Färe et al. (1989), la productivité totale des facteurs (TFPG) peut être décomposée en deux composants. Ceux-ci reflètent la variation de l'efficacité technique (EC) et la variation de l'efficacité technologique (TC).

$$EC = \frac{DF_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_t^i(x^t, y^t)} \quad (1.55)$$

$$TC = \left(\frac{DF_t^i(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{DF_t^i(x^t, y^t)}{DF_{t+1}^i(x^t, y^t)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.56)$$

Lorsque ces composants sont supérieur/inférieur à 1, ils traduisent une variation positive/négative.

L'indice de Malmquist en output On peut définir l'indice de productivité de Malmquist en output, de la manière suivante :

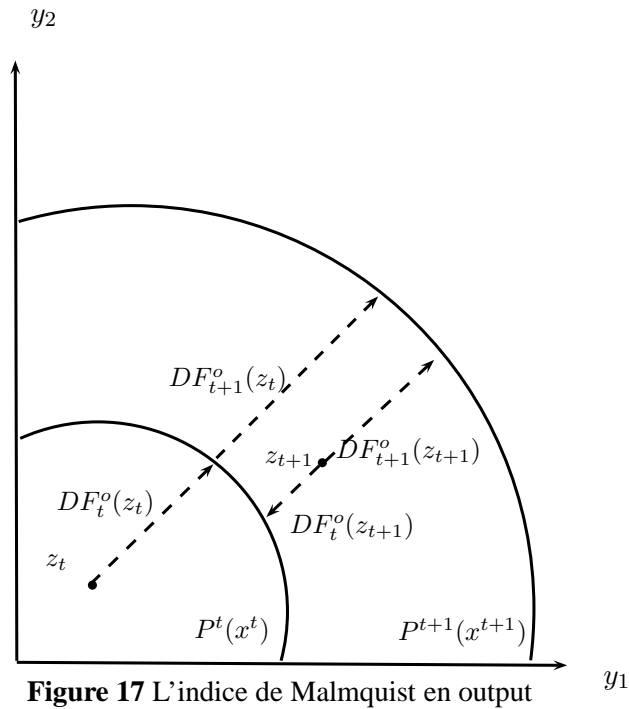
$$M_t^o = \frac{DF_t^o(x^t, y^t)}{DF_t^o(x^{t+1}, y^{t+1})} \quad (1.57)$$

$$M_{t+1}^o = \frac{DF_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_{t+1}^o(x^t, y^t)} \quad (1.58)$$

En faisant la moyenne de M_t^o et M_{t+1}^o , l'indice de Malmquist en output est défini par :

$$M^o(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \left[\frac{DF_t^o(x^t, y^t)}{DF_t^o(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{DF_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_{t+1}^o(x^t, y^t)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.59)$$

La figure suivante illustre les mesures qui constituent cet indice en output.



Comme précédemment, l'indice de Malmquist en output peut être décomposé pour analyser plus précisément les origines des variations de productivité :

$$EC = \frac{DF_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_t^o(x^t, y^t)}, \quad TC = \left(\frac{DF_t^o(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{DF_t^o(x^t, y^t)}{DF_{t+1}^o(x^t, y^t)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.60)$$

Les interprétations des résultats sont similaires à la mesure orientée en input.

4.1.2 L'indicateur de Hicks-Moorsteen.

L'indicateur de Hicks-Moorsteen correspond au rapport de l'indice de Malmquist en output sur le rapport de l'indice de Malmquist en input. Selon (1.32) et (1.37), l'indicateur

de Hicks-Moorsteen à la période t est défini par :

$$HM_t(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{M_t^o}{M_t^i} \quad (1.61)$$

avec M_t^o donné par la relation (1.58) et M_t^i par l'équation (1.53).

L'indicateur de Hicks-Moorsteen à la période $t + 1$ est défini par le rapport des indices de Malmquist en output et en input en $t + 1$:

$$HM_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{M_{t+1}^o}{M_{t+1}^i} \quad (1.62)$$

avec M_{t+1}^o défini par l'équation (1.59) et M_{t+1}^i par (1.54).

Similairement, l'indicateur de Hicks-Moorsten entre t et $t+1$ est défini par la moyenne géométrique de (1.62) et (1.63), de la manière suivante :

$$HM(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = [HM_t(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) * HM_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})] \quad (1.63)$$

Lorsque l'indicateur de Hicks-Moorsteen est supérieur/inférieur à 1, il traduit une amélioration/perte de productivité entre les deux périodes.

4.2 Les indicateurs de productivité de forme additive

Ce type d'indicateur est construit à partir des fonctions distance de nature additive. Ces indicateurs correspondent à la moyenne arithmétique de ces mesures additives.

4.2.1 L'indicateur de Luenberger

L'indicateur de Luenberger en input

En sélectionnant la direction $g = (h, 0)$, l'indicateur de Luenberger en input est construit de la façon suivante :

$$L_t^i(x^t, x^{t+1}, y^t; h^t, h^{t+1}) = \vec{D}_t^i(x^{t+1}, y^t, h^{t+1}, 0) - \vec{D}_t^i(x^t, y^t; h^t, 0) \quad (1.64)$$

Pour une période de référence en $t + 1$, l'indicateur est défini par :

$$L_{t+1}^i(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1}) = \vec{D}_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, 0) - \vec{D}_{t+1}^i(x^t, y^{t+1}; h^t, 0) \quad (1.65)$$

Finalement, en faisant la moyenne arithmétique entre

$$L_t^i(x^t, x^{t+1}, y^t; h^t, h^{t+1})$$

et

$$L_{t+1}^i(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; h^t, h^{t+1})$$

on obtient l'indicateur de productivité de Luenberger en input. Il est défini comme suit :

$$L^i(x^t, x_{t+1}, y^t, y_{t+1}; h^t, h^{t+1}, 0) = \frac{1}{2} \left[\vec{D}_t^i(x^{t+1}, y^t, h^{t+1}, 0) - \vec{D}_t^i(x^t, y^t; h^t, 0) \right] \quad (1.66)$$

$$+ \vec{D}_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1}; h^{t+1}, 0) - \vec{D}_{t+1}^i(x^t, y^{t+1}; h^t, 0) \quad (1.67)$$

Lorsque l'indicateur est supérieur à 0, il indique que la firme réalise un gain de productivité.

La figure suivante représente les mesures qui constituent l'indicateur de Luenberger en input.

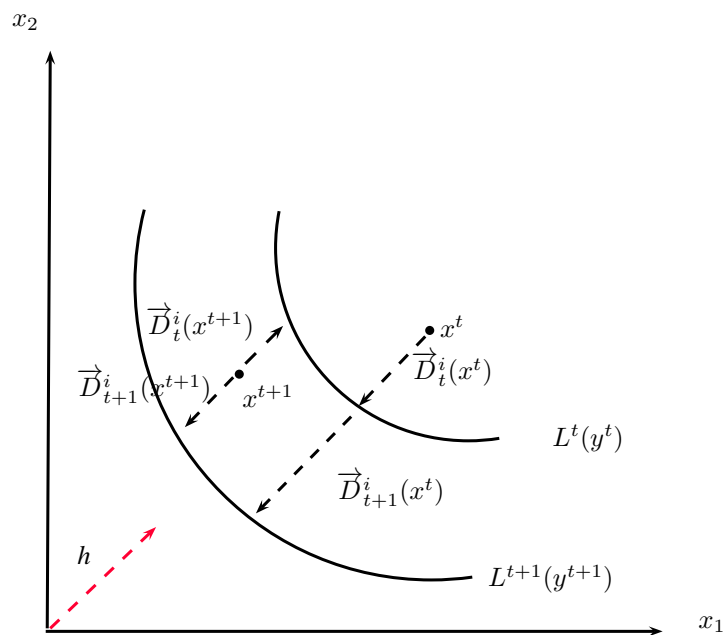


Figure 18 L'indicateur de Luenberger en input

L'indicateur de Luenberger en output

En sélectionnant la direction $g = (0, k)$, l'indicateur de Luenberger en output est défini par :

$$L_t^o(x^t, y^t, y^{t+1}, k^t, k^{t+1}) = \vec{D}_t^o(x^t, y^t, 0, k) - \vec{D}_t^o(x^t, y^{t+1}, 0, k^{t+1}) \quad (1.68)$$

et pour une période de référence t :

$$L_{t+1}^o(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, k^t, k^{t+1}) = \vec{D}_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k^t) - \vec{D}_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k^{t+1}) \quad (1.69)$$

En faisant la moyenne arithmétique entre $L_t^o(x^t, y^t, y^{t+1}, k^t, k^{t+1})$ et $L_{t+1}^o(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, k^t, k^{t+1})$, on obtient l'indicateur de Luenberger en output :

$$L^o(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k^t, k^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[\vec{D}_t^o(x^t, y^t, 0, k) - \vec{D}_t^o(x^t, y^{t+1}, 0, k^{t+1}) \quad (1.70) \right.$$

$$\left. + \vec{D}_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k^t) - \vec{D}_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k^{t+1}) \right] \quad (1.71)$$

La figure suivante représente les mesures qui constituent l'indicateur de Luenberger en output :

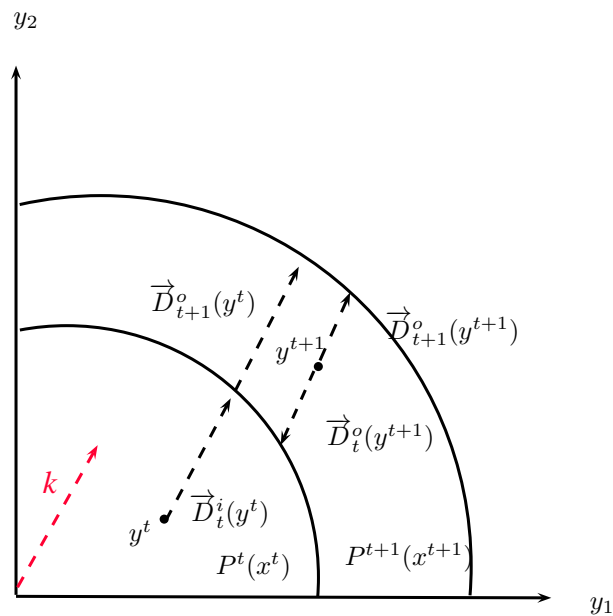


Figure 19 L'indicateur de Luenberger en output

L'indicateur de productivité de Luenberger dans le graphe de technologie

Cet indicateur évalue les gains de productivité en input et en output de façon simultanée. En sélectionnant la direction $g = (h, k)$, l'indicateur de Luenberger dans le graphe est défini pour une période de référence t par :

$$L_t(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) = \vec{D}_t(x^t, y^t; g^t) - \vec{D}_t(x^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1}) \quad (1.72)$$

Similairement pour une période de référence $t + 1$, l'indicateur est défini par

$$L_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = \vec{D}_{t+1}(x^t, y^t; g^t) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1}) \quad (1.73)$$

En faisant la moyenne arithmétique entre $L_t(x^t, y^t, x_{t+1}, y_{t+1}, g^t, g^{t+1})$ et

$$L_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}; g^t, g^{t+1})$$

:

$$L(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}) = \frac{1}{2} \left[\vec{D}_t(x^t, y^t; g^t) - \vec{D}_t(x^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1}) + \vec{D}_{t+1}(x^t, y^t; g^t) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}; g^{t+1}) \right] \quad (1.74)$$

La figure suivante illustre la construction de l'indicateur de Luenberger dans le graphe :

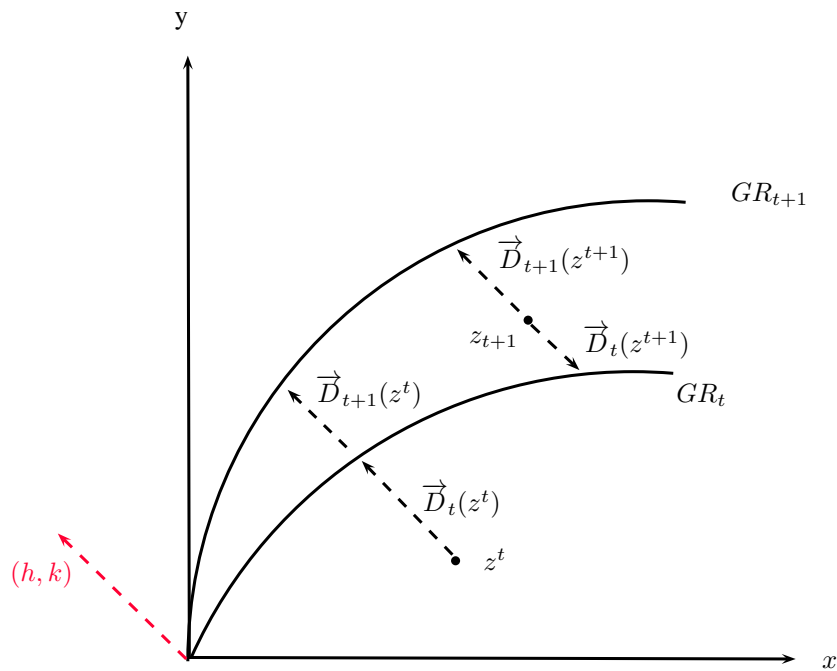


Figure 20 L'indicateur de Luenberger dans le graphe

Analyse des variations de productivité : la décomposition de l'indicateur de Luenberger

Il est également possible d'étudier l'origine des variations de productivité pour ce type d'indicateur. La variation d'efficacité est donnée par :

$$EC = D_t(x^t, y^t; g^t) - D_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, g^{t+1}) \quad (1.75)$$

$EC > 0$ signifie que la firme améliore son efficacité technique. Elle utilise une combinaison productive plus efficace. $EC < 0$ indique une perte d'efficacité technique.

L'efficacité technologique est caractérisée par :

$$TC = \frac{1}{2} \left[\vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, g^{t+1}) - \vec{D}_t(x^{t+1}, y^{t+1}, g^t) + \vec{D}_{t+1}(x^t, y^t, g^{t+1}) - \vec{D}_t(x^t, y^t, g^t) \right] \quad (1.76)$$

Lorsque $ET > 0$, la firme réalise des gains de productivité en partie grâce au progrès technologique (innovation + effet d'expérience). $ET < 0$ signifie que la firme utilise une technique de production obsolète.

4.2.2 L'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen

Briec et Kerstens (2004) introduisent un indicateur de Luenberger de type Hicks-Moorsteen. Celui-ci permet d'identifier les gains de productivité potentiels en input et en output de façon simultanée. L'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen à la période t résulte de la différence entre l'indicateur de Luenberger en output avec l'indicateur de Luenberger en input en t . Il est défini par :

$$LHM_t(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) = L_t^o(x^t, y^t, y^{t+1}; 0, 0, k^t, k^{t+1}) - L_t^i(x^t, x^{t+1}, y^t, h^t, h^{t+1}, 0, 0) \quad (1.77)$$

Similairement, nous pouvons définir l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen en $t + 1$:

$$LHM_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) = L_{t+1}^o(x^{t+1}, y^t, y^{t+1}; 0, 0, k^t, k^{t+1}) - L_{t+1}^i(x^t, x^{t+1}, y^{t+1}, h^t, h^{t+1}, 0, 0) \quad (1.78)$$

Finalement l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen entre t et $t + 1$ correspond la moyenne arithmétique de ces composants. Lorsqu'il est supérieur à 0, il indique un gain de productivité entre t et $t + 1$. Nous le définissons de la manière suivante :

$$LHM(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) = \frac{1}{2} [LHM_t(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) \quad (1.79)$$

$$+ LHM_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1})] \quad (1.80)$$

Chapitre 2

L'indicateur de Hicks-Moorsteen en tant qu'indicateur multidimensionnel du bien-être : une analogie entre la théorie de la production et la théorie des capacités de Sen

Le rapport de la Commission Stiglitz, Sen et Fitoussi (2008), sur la mesure des performances économiques et du progrès social, souligne les limites des indicateurs standards de la croissance économique et du développement. Ceux-ci ne caractérisent pas le bien-être qui est multidimensionnel et ne se résume pas à la quantité de richesse. En effet, le PIB (produit intérieur brut) ne se transforme pas automatiquement en bien-être.

Sen (1985, 1998*a, b*) souligne le fait que les mesures actuelles sont déficientes dans la mesure où elles ne concernent que la production de richesse ou l'acquisition de ressources économiques. Or la quantité de biens possédés, ne constitue pas une mesure suffisante pour appréhender le bien-être dans sa globalité. La richesse n'est que l'une des composantes du bien-être parmi d'autres. Dans *Idée de Justice*, Sen (2010) constate qu' "*une personne gravement handicapée ne peut être jugée plus avantagée que sa voisine valide pour la simple raison que son revenu est supérieur ou sa richesse plus importante*". Selon cet exemple, un individu riche et invalide, souffre de davantage de restrictions, qu'une personne pauvre en bonne santé. Les biens économiques n'ont de valeur, que parce qu'ils permettent aux individus d'accomplir ce qu'ils désirent. De fait, la richesse possédée n'est pas un indicateur qui révèle la totalité du bien-être. Sen va introduire deux nouveaux concepts clefs dans sa théorie : la notion de *capabilité* (*capability*) et celle de *réalisation* (*functioning*). Il part du principe selon lequel, les ressources (les biens et les services) détenues par les individus/nations, leur confèrent la capacité de fonctionner comme ils/elles le souhaitent, pour améliorer leur qualité de vie. Ce qui mesure le bien-être des hommes et des nations, c'est leurs capacités à satisfaire ce qu'ils valorisent.

Certains auteurs établissent une analogie entre la théorie de la production et celle des capacités.

L'article de Zaim et al. (2001) montre que l'indice de Malmquist en output, constitue une mesure du bien-être au sens de Sen. Zaim et al. (2001) définissent une mesure de l'efficacité pour évaluer la provision de biens publics. Pour cela, ils utilisent un sous-vecteur de la mesure de Debreu-Farrell, qui permet de ne considérer que les ressources publiques dans l'analyse de l'efficacité.

Ramos et Silber (2005) établissent également une analogie entre la théorie de la productivité et celle des capacités. Ils assimilent l'indice de productivité de Malmquist

orienté en input à l'indice des réalisations, et l'indice de Malmquist orienté en output représente l'indice de bien-être, au sens de Sen.

Dans le même esprit, ce chapitre introduit un indicateur social de productivité. Similairement à Zaim (2001), on distingue les ressources publiques des ressources privées. Nous évaluons l'efficacité de l'action publique avec un sous-vecteur, qui mesure l'efficacité de la production de biens publics sur les capacités. Nous proposons de généraliser la mesure proposée par Ramos et Silber (2005), en introduisant un indicateur social de productivité de Hicks-Moorsteen et un indicateur social de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Le but est d'évaluer l'efficacité de l'action publique dans la provision de biens publics, sur les capacités des individus/nations, afin d'éviter le gaspillage de fonds publics. Un indicateur agrégé est également proposé, il permet de considérer l'existence de groupes d'individus.

1 La relation entre la théorie de la productivité et la théorie des capacités : un cadre d'analyse multidimensionnel

1.1 La théorie d'Amartya Sen : les capacités, nouvelle base informationnelle de choix publics

La théorie des capacités vise à fournir une nouvelle mesure pour évaluer le bien-être des hommes et plus généralement des nations. Elle rompt avec les théories utilitaristes et libérales. La première approche retient comme base informationnelle l'utilité. Toute décision publique doit viser à maximiser l'utilité totale du plus grand nombre. Les utilitaristes ne s'accordent pas sur la mesure de l'utilité. Si les mesures ordinales ne permettent pas d'appréhender l'intensité de l'utilité retirée d'un choix dans le classement, les mesures cardinales nécessitent beaucoup d'informations. De plus Sen va s'opposer à la mesure du bien-être par le bonheur qui est trop subjectif. Les individus ont tendance à s'adapter à leur situation. Sans connaître ce à quoi ils pourraient aspirer, ils s'accrochent à leur mode de vie. La vision utilitariste de la décision publique induit une redistribution aux

plus démunis. La désutilité des mieux lotis, liée au fait de donner un peu, est plus faible que l'utilité additionnelle retirée du transfert pour les plus démunis. Une redistribution vers les plus défavorisés pour égaliser les revenus viendrait accroître l'utilité totale.

Le principe de différence au sens Rawlsien se fonde également sur des bases strictement économiques. C'est l'insuffisance de biens et services, qui empêche les individus de mener la vie qu'ils valorisent. Dans la position originelle, les décisionnaires sont placés sous voile d'ignorance, ils n'ont pas connaissance de la position qu'ils occuperont dans la société. Il ressortirait de cette situation fictive des principes d'équité. Sen va souligner l'insuffisance de ces théories. Il analyse successivement leurs faiblesses.

La base informationnelle des choix publics se restreint à l'analyse de la quantité de ressources possédées. Ces théories ignorent le fait que les individus n'ont pas tous la même capacité à transformer leurs ressources en bien-être. Les agents/nations n'ont pas tous les mêmes attentes et les mêmes besoins. Ceci pose problème lorsque l'on souhaite établir des comparaisons internationales.

En admettant que les restrictions ne résultent pas que de la privation de richesse, la mesure du bien-être doit se fonder non pas sur le niveau de richesse mais sur le niveau de capacité. Il en découle que le critère de décision publique doit être les capacités. La production de biens sociaux est efficace, si elle maximise les capacités des agents. Dans la suite, nous présentons les fonctions distance comme une mesure des capacités individuelles ou d'une nation.

1.2 Cadre d'analyse théorique.

L'indice de Zaim et al. (2001).

Ils établissent une analogie entre la théorie des capacités et la théorie de la production. Ils introduisent une mesure du bien-être pour évaluer les effets des politiques publiques. Ils mesurent l'efficacité d'un pays dans la provision de biens publics relativement à l'efficacité des autres pays. Le but est d'identifier les meilleures pratiques dans la gestion des biens collectifs. Les pays inefficaces pourront s'inspirer de leurs "benchmark". Ainsi, ils pourront choisir des allocations publiques qui améliorent le bien-être des hommes.

Soit un pays k , avec un vecteur de ressources x^k , qui produit y^k biens privés et s^k biens

publics. La fonction distance qui mesure l'efficacité de la production de biens sociaux s , est un sous-vecteur de la production totale de biens. Elle est définie par :

$$D_s^k(x^k, y^k, s^k) = \inf\{\theta^k : (x^k, y^k, \frac{s^k}{\theta^k}) \in P(x)\} \quad (2.1)$$

Cette fonction mesure l'expansion maximale de la production de biens publics compte tenu des ressources détenues.

Puis, Zaim et al. (2001) définissent l'indice d'efficacité des biens publics en output de la manière suivante :

$$Q_s(x^0, s^i, s^j) = \frac{D_s(x^0, s^i, y^0)}{D_s(x^0, s^j, y^0)}, \quad (2.2)$$

avec i et j qui représentent des biens sociaux. Cet indice compare les biens sociaux s^i et s^j pour des vecteurs d'input x^0 et d'output y^0 donnés.

On peut évaluer les variations de productivité avec un indice analogue à l'indice de Malmquist en output. L'indice social mesure la productivité de l'action publique entre les instants t et $t + 1$. Il est défini par :

$$IMP^{t,t+1} = \frac{D_s^{k,t}(x^{k,t}, y^{k,t}, s^{k,t+1})}{D_s^{k,t}(x^{k,t}, y^{k,t}, s^{k,t})} \quad (2.3)$$

Le numérateur mesure l'efficacité du pays k dans la provision de biens publics en $t + 1$ par rapport à la technologie en t . Le dénominateur indique l'efficacité du pays k dans la provision de biens publics en t par rapport à la frontière en t .

Le vecteur de biens publics est composé du taux de survie infantile, de l'espérance de vie à la naissance, des taux de scolarisation dans le primaire et dans le secondaire. Ils mesurent la quantité de biens privés avec le PIB et la quantité de ressources avec les stocks de travail et de capital.

Dans la section 4, nous proposons également de distinguer les ressources privées des ressources publiques. Toutefois à la différence de Zaim, nous assimilerons les biens publics à des input et non des output.

L'indice de Ramos et Silber (2005).

Ramos et Silber (2005) ont utilisé des méthodes similaires à celles de l'analyse de

l'efficacité, pour évaluer le bien-être au sens de Sen. Ils proposent de mesurer le niveau de bien-être à l'aide d'un indice analogue à l'indice de Malmquist. Plus particulièrement, ils estiment le niveau de réalisation, avec l'indice de Malmquist en input. Et ils proposent de mesurer le niveau de bien-être, avec l'indice de Malmquist en output.

Dans ce qui suit, il est montré que la moyenne géométrique des deux indices définis par Ramos et Silber (2005), constitue l'indicateur de productivité sociale de Hicks-Moorsteen. Cet indicateur mesure l'efficacité des politiques publiques sur les capacités des agents.

1.3 Description de la technologie de réalisations.

La technologie de réalisations caractérise le processus qui transforme un vecteur de ressources en un vecteur de réalisations. L'ensemble des réalisations détermine le niveau de bien-être.

Allard (1993), Cumins (1996), Sen (1998) et Narayan et al. (2000), établissent les différents attributs du bien-être. Dans Ramos et Silber (2005), on trouve un récapitulatif des différentes dimensions du bien-être, au sens de chacun de ces auteurs. La table ci-dessous présente la liste des ressources et des "functioning" de bien-être au sens de Sen.

Il est possible de quantifier les ressources et les réalisations grâce aux indicateurs standards (PIB, IDH, dépense publique...) ou avec des méthodes visant à faire révéler aux individus, leurs préférences et leurs sentiments de bien-être.

Soit le vecteur des ressources $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}_+^p$ le vecteur des réalisations.

La technologie satisfait les axiomes traditionnels suivants :

(A1) $(0, 0) \in A^t$, $(0, u^t) \in A^t \Rightarrow u^t = 0$, signifie que l'on ne peut obtenir un niveau de réalisation non nul avec un niveau de ressources nul.

(A2) L'ensemble $C(x^t) = \{(z^t, u^t) \in A^t : z^t \leq x^t\}$ des observations dominées est fini $\forall x^t \in \mathbb{R}_+^n$. Plus précisément, cet axiome stipule qu'un vecteur de ressources fini, ne peut pas produire un vecteur de réalisations infini ;

(A3) A^t est un ensemble fermé.

TABLE 2.1 – Liste des ressources et réalisations selon Sen

<i>Ressources : x</i>	
Les loisirs au domicile	TV, internet, téléphones
Le bien-être au domicile	Réfrigérateur, cuisinière, machine à laver
Autres propriétés	Véhicules, chambres
Qualité de vie	Nuisances voisinage, végétation, infrastructures du quartier
Revenu	Revenu équivalent
<i>Réalisations : u</i>	
L'environnement sain	Sentiment de sécurité, pollution
Mobilité et capacité physique	Activités, capacité à bouger
Capacités mentales	Concentration, lucidité, émotions
Valeurs personnelles	Sens du devoir et de l'aide
Socialisation	Fréquentations, vie sociale
La santé	Maladies, douleurs récurrentes

(A4) Pour tout $(x^t, u^t) \in A^t$, $(x^t, -v^t) \leq (z^t, -v^t)$ et $(u^t, v^t) \geq 0$ implique que $(u^t, v^t) \in A^t$. Ceci traduit le fait qu'il est possible de produire moins de réalisations, à partir d'une quantité de ressources supérieure.

L'ensemble A^t caractérise l'ensemble des possibilités, pour tous les vecteurs de ressources et de réalisations, à chaque période t :

$$A^t = \{(x^t, u^t) \in \mathbb{R}_+^{n+p} : x^t \text{ peut produire } u^t\} . \quad (2.4)$$

$L^t : \mathbb{R}_+^p \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^n}$ est la correspondance en input, qui comprend l'ensemble des vecteurs des réalisations $u \in \mathbb{R}_+^n$ produisible par l'ensemble des ressources :

$$L^t(u) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : (x, u) \in A^t\} . \quad (2.5)$$

La correspondance en output $P_t : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^p}$, transforme les ressources $x \in \mathbb{R}_+^n$, en un

ensemble de réalisations :

$$P^t(x) = \{u \in \mathbb{R}_+^p : (x, u) \in A^t\}. \quad (2.6)$$

On a,

$$(x, u) \in A^t \iff x \in L^t(y) \iff u \in P^t(x). \quad (2.7)$$

1.4 Définition et interprétation des fonctions distance dans la théorie des capacités.

La mesure de Debreu-Farrell en ressources dans la théorie des capacités.

Dans la théorie de l'efficacité la mesure de Debreu-Farrell indique la réduction maximale des quantités d'input utilisées pour produire un niveau d'output donné. Dans la théorie des capacités, cette fonction mesure la diminution maximale de la quantité de ressources utilisée pour obtenir un certain niveau de réalisation. Lorsqu'elle est égale à 1 cette mesure signifie que l'individu ou la nation, transforme au mieux ses ressources en bien-être. Il dispose d'un bon niveau de capacité. Lorsque cette mesure est inférieure à 1 elle implique que le niveau de capacité est inférieur. Lorsque l'on adopte une interprétation microéconomique de cette mesure, elle signifie que cet individu est contraint de consommer une quantité de ressources plus importante pour obtenir un certain niveau de bien-être.

Les inégalités en capacité peuvent résulter de facteurs externes. Plus précisément l'environnement macroéconomique va être déterminant. Prenons l'exemple des transports en commun pour illustrer nos propos. Supposons qu'une commune développe un réseau de transport en commun alors qu'une autre non. Les individus de la première commune pourront se déplacer sans avoir à acheter un véhicule. Dans la dernière les individus doivent accroître leur niveau de ressources d'un véhicule par foyer ou par personne pour pouvoir se déplacer. Cet exemple montre que les habitants de la première ville obtiennent un niveau de réalisation similaire aux habitants de l'autre ville alors qu'ils détiennent moins de ressources. Dans cette optique, la mesure de Debreu-Farrell fournit une indication de la capacité des pouvoirs publics à faciliter les réalisations individuelles.

Dans notre contexte, la mesure de Debreu-Farrell en ressources est définie par :

$$DF_t^i(x^t, u^t) = \inf_{\lambda} \{ \lambda : (\lambda x^t, u^t) \in A^t, \lambda \geq 0 \} . \quad (2.8)$$

Pour tout $(r, s) \in \{t, t + 1\}^2$, et pour chaque période, la mesure de Debreu-Farrell en ressources est définie par :

$$DF_r^i(x^s, u^s) = \inf_{\lambda} \{ \lambda : (\lambda x^s, u^s) \in A^r \} \quad (2.9)$$

s'il existe λ tel que $(\lambda x^s, u^s) \in A^r$ et $DF_r^i(x^s, u^s) = +\infty$ sinon.

La mesure de Debreu-Farrell en réalisations dans la théorie des capacités.

Rappelons que la mesure de Debreu-Farrell en output caractérise l'expansion maximale de la production d'output compte tenu de la quantité d'input utilisée. Dans le cadre de la théorie des capacités, cette mesure indique l'augmentation maximale proportionnelle des réalisations pour une quantité de ressources possédées donnée. Lorsque la mesure de Debreu-Farrell est égale à 1, elle signifie que le niveau de réalisation est maximum, compte tenu des ressources détenues. En d'autres termes, l'individu a la capacité totale d'utiliser les ressources dont il dispose, pour s'accomplir. Lorsque cette mesure est inférieure à 1, elle traduit une faible capacité à transformer les ressources en réalisations.

Dans un contexte microéconomique, cette mesure fournit un indice des inégalités individuelles. En effet elle traduit de la capacité des individus à transformer les ressources possédées en réalisation. Dans ce cas, les différences de capacités ont des origines individuelles. Prenons l'exemple d'une voiture, une personne qui ne peut conduire pour des raisons de santé ne retirera pas la même satisfaction de ce bien qu'un individu qui en aurait l'usage. Ces deux individus ne disposent pas des mêmes capacités à transformer leurs ressources en réalisations.

Si l'on adopte une analyse macroéconomique, on peut interpréter cette mesure comme la capacité des pouvoirs publics à développer leur nation. Prenons l'exemple d'un téléphone et considérons qu'il permet d'avoir des relations sociales et de gagner du temps. En cela il contribue à la qualité de vie et à la productivité du travail. Supposons qu'un individu vit dans une zone où la qualité du réseau téléphonique est médiocre. Il aura une

moins bonne capacité à transformer la même ressource, le téléphone, en réalisations, qu'un individu qui vit dans une zone urbaine équipée d'un meilleur réseau. Les inégalités de capacité peuvent avoir des origines macroéconomiques plutôt qu'individuelles.

La mesure des réalisations est donnée par :

$$DF_t^a(x^t, u^t) = \sup_{\theta} \{ \theta : (x^t, \theta u^t) \in A^t, \theta \geq 1 \}. \quad (2.10)$$

En généralisant pour chaque période, $DF_r^a(x^s, u^s) = \sup_{\theta} \{ \theta : (x^r, \theta u^s) \in A^r \}$ s'il existe θ tel que $(x^s, \theta u^s) \in A^r$ et $DF_r^a(x^s, u^s) = -\infty$ sinon.

2 L'indicateur de productivité de Hicks-Moorsteen est une mesure complète des capacités.

Dans cette section, nous montrons que les deux ratios définis par Ramos et Silber (2005) pour évaluer le bien-être, définissent l'indicateur de Hicks-Moorsteen. En effet cet indicateur correspond à la moyenne géométrique des indices de Ramos et Silber (2005) pour chaque période. Autrement dit l'indicateur de productivité de Hicks-Moorsteen généralise leurs indices.

2.1 L'indice de réalisation.

Cet indice mesure l'effet de la variation des ressources possédées par les individus pour un niveau de réalisation donné. Il est défini par :

$$SA_t(x^t, x^{t+1}, u^t) = \frac{DF_t^i(x^t, u^t)}{DF_t^i(x^{t+1}, u^t)}. \quad (2.11)$$

On peut étendre cette définition pour une période de référence $t + 1$. Dans ce cas, l'indice est défini par :

$$SA_{t+1}(x^t, x^{t+1}, u^{t+1}) = \frac{DF_{t+1}^i(x^t, u^{t+1})}{DF_{t+1}^i(x^{t+1}, u^{t+1})}. \quad (2.12)$$

Lorsqu'il est supérieur à 1, cet indice signifie qu'un individu utilise moins de ressources pour obtenir le même niveau de réalisations. Ce résultat découle soit d'un effet d'expé-

rience, soit de l'intervention des pouvoirs publics qui améliore les conditions macroéconomiques.

2.2 L'indice de bien-être.

L'indice du bien-être est défini par :

$$WB_t(x^t, y^t, u^{t+1}) = \frac{DF_t^a(x^t, u^t)}{DF_t^a(x^t, u^{t+1})}. \quad (2.13)$$

A la période $t + 1$, l'indice de bien-être est défini par :

$$WB_{t+1}(x^{t+1}, u^{t+1}, u^t) = \frac{DF_{t+1}^a(x^{t+1}, u^t)}{DF_{t+1}^a(x^{t+1}, u^{t+1})}. \quad (2.14)$$

Lorsqu'il est supérieur à 1, cet indice indique qu'un individu accroît son niveau de réalisation, avec le même niveau de ressources. Ce résultat découle d'un effet d'expérience ou d'une intervention publique.

2.3 Interprétation de l'indicateur de Hicks-Moorsteen dans la théorie des capacités.

Comme l'indice de réalisation est analogue à l'indice de Malmquist en input, et que l'indice de bien-être est similaire à l'indice de Malmquist en output, ces deux indices constituent le ratio de l'indicateur de Hicks-Moorsteen. Dans ce cas, l'indicateur social est défini par

$$HM_{t,t+1} = \left[\frac{WB_{t,t+1}}{SA_{t,t+1}} \right]^{1/2}. \quad (2.15)$$

avec,

$$HM_t(x^t, u^t, x^{t+1}, u^{t+1}) = \frac{WB_t(x^t, u^t, u^{t+1})}{SA_t(x^t, x^{t+1}, u^t)}. \quad (2.16)$$

On peut similairement définir un indicateur social à la période $t + 1$ de la manière

suivante :

$$HM_{t+1}(x^t, u^t, x^{t+1}, u^{t+1}) = \frac{WB_{t+1}(x^{t+1}, u^{t+1}, u^t)}{SA_{t+1}(x^t, x^{t+1}, u^{t+1})}. \quad (2.17)$$

Par conséquent,

$$HM_{t,t+1} = [HM_t \cdot HM_{t+1}]^{1/2}, \quad (2.18)$$

Cet indicateur évalue l'efficacité de l'intervention publique sur le niveau des capacités. Il est un outil d'évaluation des politiques publiques.

3 Forme additive des indices de réalisations et de bien-être : l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

Rappelons que l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen est défini par rapport à la fonction distance directionnelle. L'avantage de cet indicateur est qu'il permet de mener une analyse dans le graphe. Dans notre cas, la fonction directionnelle sociale peut être définie par :

$$\vec{D}_t(x^t, u^t; h^t, k^t) = \sup\{\delta : (x^t - \delta h^t, u + \delta k^t) \in A^t\}. \quad (2.19)$$

On peut définir la mesure directionnelle sociale, uniquement en réalisation ou en bien-être :

$$\vec{D}_t(x^t, u^t; h, 0) \quad \text{et} \quad \vec{D}_t(x^t, u^t; 0, k). \quad (2.20)$$

3.1 L'indicateur de réalisation.

L'indicateur social de Luenberger en réalisation peut être défini de la manière suivante :

$$LSA_t(x^t, x^s, u^t; h) = \vec{D}_t(x^s, u^t; h, 0) - \vec{D}_t(x^t, u^t; h, 0). \quad (2.21)$$

En $s=t+1$, l'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen en réalisation est défini par :

$$LSA_{t,t+1}(x^{t+1}, x^t, u^{t+1}; h) = \vec{D}_{t+1}(x^t, x^t; h, 0) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, u^{t+1}; h, 0) \quad (2.22)$$

En faisant la moyenne arithmétique de ces deux indicateurs, il vient que :

$$LSA_{t,t+1}(x^t, x^{t+1}, u^t, u^{t+1}; h) = \frac{1}{2} \left[LSA_t(x^t, u^t, u^{t+1}; h) + LSA_{t+1}(x^{t+1}, u^t, u^{t+1}; h) \right]. \quad (2.23)$$

3.2 L'indicateur de bien-être.

L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen en bien-être est défini pour une période de référence t , par :

$$LWB_t(x^t, u^t, u^s; k) = \vec{D}_t(x^t, u^s; 0, k) - \vec{D}_t(x^t, u^t; 0, k) \quad (2.24)$$

Pour la période t et pour $s=t+1$, l'indicateur social en bien-être est défini par :

$$LWB_t(x^t, u^t, u^{t+1}; k) = \vec{D}_t(x^t, u^{t+1}; 0, k) - \vec{D}_t(x^t, u^t; 0, k) \quad (2.25)$$

Similairement, pour la période $t+1$ et $s=t$, l'indicateur est défini par :

$$LWB_{t+1}(x^{t+1}, u^t, u^{t+1}; k) = \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, u^t; 0, k) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, u^{t+1}; 0, k) \quad (2.26)$$

En faisant la moyenne géométrique de ces indicateurs, on a :

$$LWB_{t,t+1}(x^t, x^{t+1}, u^t, u^{t+1}; k) = \frac{1}{2} \left[LWB_t(x^t, u^t, u^{t+1}; k) + LWB_{t+1}(x^{t+1}, u^t, u^{t+1}; k) \right]. \quad (2.27)$$

3.3 L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen est défini par la différence entre l'indicateur de bien-être et l'indicateur de réalisation. A la période t

$$LHM_t(x^{t+1}, u^{t+1}, x^t, u^t) = LWB_t(x^t, u^t, u^{t+1}) - LSA_t(x^t, x^{t+1}, u^t). \quad (2.28)$$

Similairement, en $t + 1$:

$$LHM_{t+1}(x^{t+1}, u^{t+1}, x^t, u^t) = LWB_{t+1}(x^{t+1}, u^{t+1}, u^t) - LSA_{t+1}(x^t, x^{t+1}, u^{t+1}) \quad (2.29)$$

En faisant la moyenne arithmétique des indicateurs aux périodes t et $t + 1$:

$$LHM_{t,t+1} = \frac{1}{2} [LHM_t + LHM_{t+1}] = LWB_{t,t+1} - LSA_{t,t+1}. \quad (2.30)$$

Les indicateurs de productivité des ressources et des réalisations, sont bien des composants de l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Dans sa version additive, cet indicateur social de productivité fournit une mesure des capacités des agents, au sens de Sen.

4 Biens collectifs et évaluation des politiques publiques.

Zaim et al. (2001) considèrent les ressources publiques comme des output. Nous assimilons les biens publics à des ressources plutôt qu'à des output. On distinguera : $x \in \mathbb{R}_+^n$, qui représente les ressources privées, de $z \in \mathbb{R}_+^p$ qui caractérise les ressources publiques. Nous considérons que les ressources privées et publiques peuvent être substituables.

L'intérêt de cette approche est d'évaluer l'effet des politiques sur les capacités. Plus particulièrement, nous souhaitons analyser dans quelle mesure il est possible d'améliorer l'efficacité des politiques publiques. Pour cela, nous considérons que l'action publique agit sur le niveau des ressources via z . L'Etat peut accroître les quantités de ressources détenues par les individus, par le biais de prestations sociales financières et par la production de biens collectifs z . C'est l'exemple des hopitaux, de l'enseignement public, etc. Notons que pour Sen ces dimensions du bien-être ne sont pas assimilées à des ressources

mais à des fonctioning.

Dans ce qui suit nous souhaitons affiner l'analyse en intégrant les effets des politiques publiques sur les capacités. Le but est d'améliorer l'efficacité publique sur le niveau des capacités individuelles. Dans la lignée de Zaim et al. (2001), nous introduisons un sous-vecteur mais en direction des ressources publiques. Si nous considérons une fonction distance directionnelle, c'est parce qu'elle permet de prendre en compte les préférences du régulateur, en matière de politiques publiques en pondérant les objectifs.

4.1 Introduction des biens publics dans l'évaluation.

Pour chaque période t , B^t définit l'ensemble des possibilités de réalisations. Il caractérise l'ensemble des vecteurs de ressources privées, publiques et des réalisations faisables. On le définit de la manière suivante :

$$B^t = \{(x^t, z^t, u^t) \in \mathbb{R}_+^{n+m+p} : (x^t, z^t) \text{ peut produire } u^t\}. \quad (2.31)$$

En supposant que la technologie de réalisation satisfait les axiomes traditionnels suivants :

(B.1) $(0, 0) \in B^t$, $(0, 0, u^t) \in B^t \Rightarrow u^t = 0$. Cette propriété signifie qu'il n'y a pas de "repas gratuit" ;

(B.2) L'ensemble $C(x^t, y^t) = \{(v^t, w^t, u^t) \in B^t : (v^t, w^t) \leq (x^t, z^t)\}$ qui caractérise l'ensemble des observations dominées, est fini, $\forall (x^t, z^t) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$. Cet axiome stipule qu'une quantité finie de ressources, ne peut produire une quantité de réalisations infinie.

(B.3) B^t est un ensemble fermé.

(B.4) Pour tout $(x^t, z^t, u^t) \in B^t$, $(x^t, z^t, -u^t) \leq (v^t, w^t, -y^t)$ et $y^t \geq 0$ impliquent $(v^t, w^t, y^t) \in B^t$, une quantité inférieure de réalisation, peut-être obtenue à partir d'une quantité de ressources supérieure.

Les axiomes $B1 - B5$ impliquent que pour tout $(x, y, u) \in B^t$, l'ensemble $S_t(x)$ est convexe, fermée et satisfait l'hypothèse de libre disposition. Il vient que : $S_t : \mathbb{R}_+^p \rightarrow 2^{\mathbb{R}_+^{n+m}}$. Elle caractérise l'ensemble des vecteurs de réalisations $u \in \mathbb{R}_+^p$, qui sont produisibles avec les ressources privées et publiques.

$$S^t(u) = \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : (x, z, u) \in B^t\}. \quad (2.32)$$

On a,

$$(x, z, u) \in B^t \iff (x, z) \in S^t(u). \quad (2.33)$$

4.2 L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

L'indicateur social de Luenberger en réalisation.

Dans la lignée de Briec et Kerstens (2011), on peut définir une mesure avec un niveau d'input privé fixé. En sélectionnant la direction $h = (0, h_S)$ avec $h_S \in \mathbb{R}_+^m$. La fonction distance directionnelle en ressources publiques est définie par :

$$\vec{D}_t(x^s, z^s, u^s; 0, h_S, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta : (x^s, z^s + \delta h_S, u^s) \in B^t, \delta \in \mathbb{R} \}. \quad (2.34)$$

Toutefois, Briec et Kerstens (2011) soulignent qu'il existe un problème dans la définition de cette mesure. Elle peut induire des résultats ininterprétables. En s'inspirant de l'approche de Bjurek (1996), on peut surmonter ce problème en redéfinissant cette mesure par :

$$\vec{D}_t(x^t, z^s, u^t; 0, h_S, 0) = \sup_{\delta} \{ \delta : (x^t, z^s - \delta h_S, u^s) \in B^t \} \quad (2.35)$$

Cette fonction évalue l'efficacité d'un pays, dans la provision de biens publics, par rapport à la frontière d'efficience. Plus précisément cette mesure établit les réductions proportionnelles de la dépense publique. Elle indique la baisse de la dépense publique réalisable, compte tenu du niveau de réalisation exigé. Cette mesure s'inscrit dans une volonté de lutte contre le gaspillage des fonds publics.

Nous pouvons définir l'indicateur social de Luenberger en ressources à la période t de la manière suivante :

$$\begin{aligned} LSA_t^S(x^t, z^t, z^{t+1}, u^t; 0, h_S) \\ = \vec{D}_t(x^t, z^{t+1}, u^t; 0, h_S, 0) - \vec{D}_t(x^t, z^t, u^t; 0, h_S, 0) \end{aligned} \quad (2.36)$$

A la période $t + 1$, l'indicateur est défini par :

$$\begin{aligned} LSA_{t+1}^S(x^{t+1}, z^t, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, h_S) \\ = D_{t+1}(x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, h_S, 0) - D_{t+1}(x^{t+1}, z^t, u^{t+1}; 0, h_S, 0) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le graphique ci-dessous illustre l'indicateur en réalisation. Similairement à Zaim et al. (2001), le niveau des réalisations est fixé. La différence réside dans le fait que cette fonction est une translation homothétique en direction des réalisations.

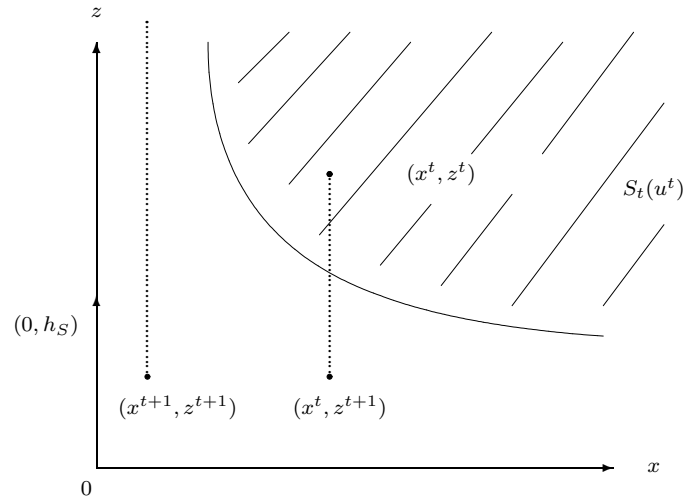


Figure 21 Ressources publiques et sous-vecteur de la mesure de l'efficacité en ressource

L'indicateur social de productivité de Luenberger en bien-être.

En sélectionnant la direction $g = k$ la fonction distance directionnelle sociale, en bien-être est définie par :

$$\vec{D}_t(x^t, z^t, u^s, 0, 0, k) = \sup_{\delta} \{ \delta : (x^t, z^t, u^s + \delta k) \in B^t \} \quad (2.38)$$

Elle mesure l'expansion de bien-être possible, compte tenu du niveau de la dépense publique. A la période t , l'indicateur social de productivité de Luenberger en bien-être est défini par :

$$\begin{aligned} LWB_t^S(x^t, z^t, u^t, u^{t+1}; 0, k) \\ = D_t(x^t, z^t, u^t; 0, 0, k) - D_t(x^t, z^t, u^{t+1}; 0, 0, k) \end{aligned} \quad (2.39)$$

A la période $t + 1$, l'indicateur est défini de la manière suivante :

$$LWB_{t+1}^S(x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}, u^t; 0, k) \quad (2.40)$$

$$= D_{t+1}(x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, k) - D_{t+1}(x^{t+1}, z^{t+1}, u^t; 0, k) \quad (2.41)$$

Le graphique suivant illustre cette mesure.

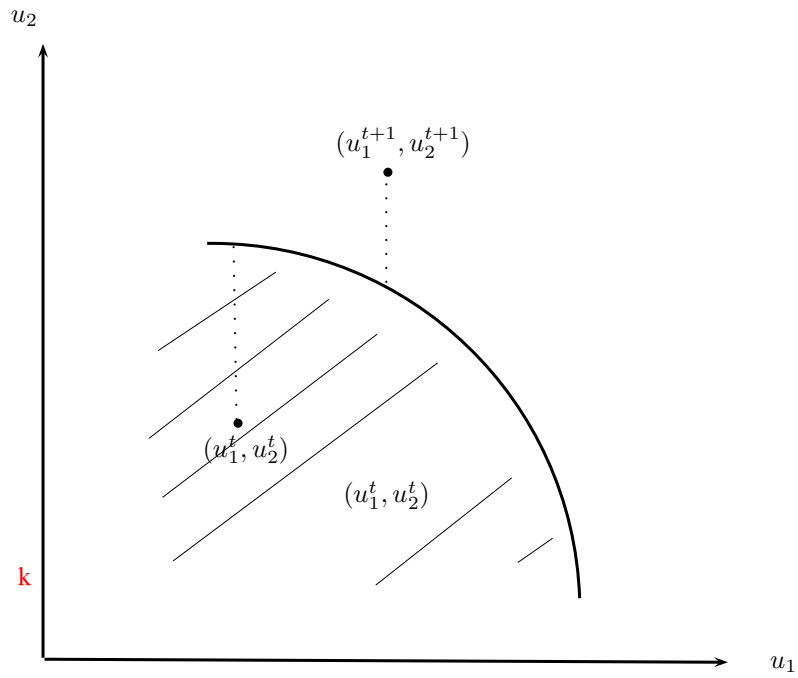


Figure 22 Fonction distance directionnelle en réalisation

L'indicateur social de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen est un instrument d'aide à la décision publique.

En faisant la différence entre l'indicateur social de Luenberger en bien-être et celui en réalisation à la période t , on obtient l'indicateur social de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Il est défini de la manière suivante :

$$LHM_t^S(x^t, z^t, u^t, x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, h_S, k) \\ = LWB_t^S(x^t, z^t, u^t, u^{t+1}; k) - LSA_t^S(x^t, z^{t+1}, u^t; 0, h_S) \quad (2.42)$$

A la période $t + 1$, l'indicateur social est défini par :

$$\begin{aligned} LHM_{t+1}^S(x^t, z^t, u^t, x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, h_S, 0, k) \\ = LWB_{t+1}^S(x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}, u^t; 0, k) - LSA_{t+1}^S(x^{t+1}, z^t, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, h_S), \end{aligned} \quad (2.43)$$

En faisant la moyenne arithmétique il vient que :

$$LHM_{t,t+1}^S = (1/2)[LHM_t^S + LHM_{t+1}^S] \quad (2.44)$$

4.3 Faisabilité et résultats de dualité.

Tout d'abord, nous analysons les propriétés de l'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Puis, nous établissons les résultats de dualité qui permettent de considérer l'efficacité des prix.

4.3.1 Faisabilité de l'indicateur public de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

Lemme 2.1 *Considérons que la technologie satisfait les axiomes B.1-B.4. Pour tout (s, t) , si $h_S \neq 0$, alors $-\infty < D_t^S(x^t, z^s, y^t; 0, h_S, 0) < +\infty$.*

Preuve. En fixant $\delta^* = \max \left\{ \frac{z_i^t - z_i^s}{h_{S,i}} : h_{S,i} > 0 \right\}$, et en considérant le vecteur $(x^t, z^s + \delta^* h_S)$. Le calcul indique $(x^t, z^s + \delta^* h_S) \geq (x^t, z^t)$.

L'hypothèse de libre disposition implique $(x^t, z^s + \delta^* h_S, y^t) \in T^t$, par conséquent $-\infty < D_t^S(x^t, z^s, y^t; 0, h_S, 0)$. Avec $h_S \neq 0$ et $B^t \subset \mathbb{R}_+^{n+m+p}$ \square

Ces propriétés impliquent que $LSA_t^S(x^t, z^t, z^s, u^t; 0, h_S)$ est bien défini.

Proposition 2.2 *L'indicateur public de Luenberger-Hicks-Moorsteen satisfait les propriétés suivantes pour chaque période.*

(a) *L'hypothèse de translation homothétique en direction des ressources publiques stipule que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :*

$$LSA_t^S(x^t, z^t, z^s + \alpha h_S, u^t; 0, h_S) = LSA_t^S(x^t, z^t, z^s, u^t; 0, h_S) + \alpha;$$

(b) Pour les croisements de périodes des ressources publiques, on a :

$$LSA_t^S(x^t, z^s, z^t, u^t; 0, h_S) = -LSA_t^S(x^t, z^t, z^s, u^t; 0, h_S);$$

(c) L'hypothèse de transitivité dans la direction des ressources publiques implique

$$LSA_t^S(x^t, z^t, z^s, u^t; 0, h_S) \quad (2.45)$$

$$= LSA_t^S(x^t, z^t, z^r, u^t; 0, h_S) + LSA_t^S(x^t, z^r, z^s, u^t; 0, h_S); \quad (2.46)$$

(d) D'après l'hypothèse d'homogénéité de degré -1 dans la direction des ressources publiques, pour tout $\mu \in \mathbb{R}_{++}$ on a,

$$LSA_t^S(x^t, z^t, z^s, u^t; 0, \mu h_S) = \mu^{-1} (LSA_t^S(x^t, z^t, z^s, u^t; 0, h_S)).$$

Preuve : (a) En utilisant la propriété de translation homothétique, nous pouvons définir l'indicateur de réalisations en direction des ressources publiques par :

$$\begin{aligned} LSA_t(x^t, z^t, z^s + \alpha h_S, u^t, u^s; h) &= D_t(x^t, z^s + \alpha h_S, u^t; 0, h_S, 0) - D_t(x^t, z^t, u^t; 0, h_S, 0) \\ &= D_t(x^t, z^s, u^t; 0, h_S, 0) + \alpha - D_t(x^t, z^t, u^t; 0, h_S, 0) \\ &= LSA_t(x^t, z^t, z^s, u^t; 0, h_S, 0) + \alpha. \end{aligned}$$

Les propriétés (b) et (c) viennent immédiatement. Pour prouver (d), on utilise le fait que pour chaque période s , on a $D_t(x^t, u^s; 0, \mu k) = \mu^{-1} D_t(x^t, u^s; 0, k)$. Il suit que :

$$\begin{aligned} LSA_t(x^t, z^s, u^t; \mu h) &= D_t(x^s, z^s, u^t; 0, \mu h_S, 0) - D_t(x^t, z^t, u^t; 0, \mu h_S, 0) \\ &= \mu^{-1} D_t(x^t, z^s, u^t; 0, h_S, 0) - \mu^{-1} D_t(x^t, z^t, u^t; 0, h_S, 0) \\ &= \mu^{-1} LSA_t(x^t, z^t, z^s, u^t; h). \quad \square \end{aligned}$$

La construction de l'indicateur social est possible lorsque la technologie de production vérifie les hypothèses de translation homothétique, de transitivité et d'homogénéité (-1), de la fonction sociale en ressources.

4.3.2 L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen avec le coût des ressources.

Nous souhaitons prendre en compte le coût des ressources publiques dans l'analyse de l'efficacité de l'action publique. La fonction de coûts des ressources publiques C_t^S : $\mathbb{R}_+^{m-n} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ est définie par :

$$C_t^S(w, x, y) = \inf_z \{w.z : (x, z, y) \in B^t\}. \quad (2.47)$$

Blancard et al. (2006) ont établi des résultats de dualité,¹. Dans cette lignée, nous proposons l'extension suivante :

Proposition 2.3 *Supposons que la correspondance en ressources (privées et publiques) est convexe. Alors, pour tout $(x, z, u) \in B^t$:*

$$D_t(x, z, u; 0, h_S, 0) = \inf_{w \geq 0} \{w.z - C_t^S(w, x, y) : w.h_S = 1\}.$$

De plus, pour tout $(w, x, y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p$:

$$C_t^S(w, x, y) = \inf_z \{w.z + (w.h_S)D_t(x, z, u; 0, h_S, 0)\}.$$

Dans la lignée de l'approche proposée par Luenberger, on peut définir la correspondance en ressources publiques $w_t : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}_+^m \longrightarrow 2^{\mathbb{R}_+^m}$ par :

$$w_t(x, z, u; h_S) = \arg \min_w \{w.z - C_t^S(w, x, y) : w.h_S = 1\}. \quad (2.48)$$

En appliquant le théorème de l'enveloppe convexe, on a :

$$w_t(x, z, u; h_S) = \frac{\partial D_t(x, z, u; 0, h_S, 0)}{\partial z}. \quad (2.49)$$

L'indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen peut être interprété en termes de

1. Se référer aussi à Luenberger (1992, 1995)

surplus :

$$\begin{aligned}
 LSA_t^S(x^t z^t, z^{t+1}, u^t; 0, h_S) & \quad (2.50) \\
 &= D_t(x^t, z^{t+1}, u^t; 0, h_S, 0) - D_t(x^t, z^t, u^t; 0, h_S, 0) \\
 &= \int_{z^t}^{z^{t+1}} w_t(x^t, z, u^t; h_S).dz
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 LSA_{t+1}^S(x^{t+1}, z^t, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, h_S) & \quad (2.51) \\
 &= D_{t+1}(x^{t+1}, z^{t+1}, u^{t+1}; 0, h_S, 0) - D_{t+1}(x^{t+1}, z^t, u^{t+1}; 0, h_S, 0). \\
 &= \int_{z^t}^{z^{t+1}} w_{t+1}(x^{t+1}, z, u^{t+1}; h_S).dz.
 \end{aligned}$$

La moyenne arithmétique des indicateurs de Luenberger-Hicks-Moorsteen implique :

$$LSA_{t,t+1}^S = \frac{1}{2} \int_{z^t}^{z^{t+1}} [w_t(x^t, z, u^t; h_S) + w_{t+1}(x^{t+1}, z, u^{t+1}; h_S)].dz \quad (2.52)$$

Ce type d'indicateur peut s'avérer très utile pour évaluer le coût monétaire optimal de l'action publique.

4.4 Modélisation de la technologie de réalisation.

Cette section présente deux approches pour caractériser la mesure directionnelle des capacités. On propose de généraliser la méthode de Ramos et Silber (2005) à la fonction sociale directionnelle. Puis, on présente le programme linéaire qui permet d'estimer la technologie au sens de Zaim et al. (2001).

L'approche paramétrique de Ramos et Silber (2005) : forme quadratique de la fonction distance.

Ils définissent une forme quadratique de la mesure de Debreu-Farrell. Nous généralisons cette définition à la fonction sociale directionnelle. Comme eux, nous choisissons de traiter les individus de la même façon en les considérant égaux. Pour cela, on considère le vecteur $e = (1, \dots, 1)$ de dimension p .

Dans l'ensemble $L(e)$, on peut estimer la fonction sociale directionnelle en ressources publiques. Elle est définie par le sous-vecteur des ressources publiques z de dimensions $n - 1$:

$$z_j = x_j - x_n h_j$$

où $j = 1, \dots, n-1$. Comme $\vec{D}(z, e; h, 0) = \vec{D}(x, e; h, 0) - x_n$ et puisque $\vec{D}(x, e; h, 0) \geq 0$ alors,

$$\vec{D}(z, e; h, 0) \geq -x_n. \quad (2.53)$$

Cette fonction peut être réécrite :

$$-x_n = \vec{D}(z, e; h, 0) + \varepsilon \quad \varepsilon \leq 0. \quad (2.54)$$

En considérant que la mesure directionnelle revêt une forme quadratique :

$$-x_n = \alpha_0(h) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(h) z_j + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{n-1} \alpha_{j,q}(h) z_j z_q + \varepsilon. \quad (2.55)$$

Les coefficients $\alpha_j(h)$ et $\alpha_{j,q}(h)$ peuvent être estimés en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires. La fonction sociale directionnelle $\vec{D}(x^i, e, h, 0)$ pour tous les individus i est définie par :

$$\vec{D}(x^i, e, h, 0) = \max_i \{-\varepsilon_i\} + \varepsilon_i. \quad (2.56)$$

Le niveau de réalisation de l'individu i est obtenu par la différence entre $\vec{D}(z^i, e, h, 0, e)$ et la valeur minimale observée de la fonction distance.

On peut similairement définir une forme quadratique de la fonction distance directionnelle en bien-être. Soit $f = (1, \dots, 1)$, le vecteur normé 1 des réalisations de dimension n . $P(f)$ représente la correspondance en bien-être.

Pour obtenir la fonction directionnelle en réalisations, on définit un vecteur v de dimension $p - 1$, tel que $v_l = u_l + u_p k_l$ avec $l = 1, \dots, p - 1$. De fait, $D(f, v; 0, k) = D(f, v; 0, k) + u_p$ et comme $D(v, f; 0, l) \geq 0$ il vient que

$$D(f, v; 0, k) \geq u_p. \quad (2.57)$$

On peut réécrire la fonction directionnelle de la manière suivante :

$$u_p = D(f, v; 0, k) + \varepsilon \quad \varepsilon \leq 0. \quad (2.58)$$

En considérant que la fonction sociale directionnelle a une forme quadratique,

$$u_p = \beta_0(k) + \sum_{l=1}^{p-1} \beta_l(k) v_j + \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{g=1}^{p-1} \beta_{l,g}(k) v_j v_g + \varepsilon. \quad (2.59)$$

La fonction sociale directionnelle $D(f, u^i, 0, k)$, en direction $g = k$, pour l'individu i , est définie par :

$$D(f, u^i; 0, k) = \max_i \{-\varepsilon_i\} + \varepsilon_i. \quad (2.60)$$

La programmation linéaire.

Le programme linéaire qui permet de calculer la fonction directionnelle en ressources publiques $D_t(x^t, z^s, u^t; 0, h_S, 0)$, est défini par :

$$\begin{aligned} D_t(x^t, z^s, u^t; 0, h_S, 0) &= \max \delta \\ x^t &\geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i x_i^t, \\ z^s - \delta h_S &\geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i z_i^t, \quad (S) \\ u^t &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i u_i^t, \\ \sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i &= 1, \theta_i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Il est possible d'intégrer les coûts des ressources dans l'analyse de l'efficacité et de la productivité.

Lemme 2.4 *Supposons que pour tout t , $B^t = \hat{B}^t$. Soit μ_S le multiplicateur de Kuhn et Tucker pour la contrainte (S) dans le programme précédent (2.61). Supposons que (δ^*, θ^*) est une solution du programme, et que les z_i sont linéairement indépendants. Si*

$D_t(x^t, z^s, u^t, 0, h_S, 0)$ est différentiable dans z^s , alors

$$\left. \frac{\partial D_t(x^t, z, u^t, 0, h_S, 0)}{\partial z} \right|_{z=z^s} = \mu_S = w_t(x^t, z^s, u^t; h_S).$$

Preuve : La preuve se base sur le théorème de transitivité (se référer par exemple à Luenberger (1984)). Le programme (2.61) se réécrit :

$$\begin{aligned} -D_t(x^t, z^s, u^t; 0, h_S, 0) &= \min -\delta \\ &\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i x_i^t \leq x^t, \\ &\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i z_i^t + \delta h_S \leq z^s, \quad (S) \\ &-\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i u_i^t \leq -u^t, \\ &\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Par définition, on a pour tout $\gamma \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} -D_t(x^t, z^s + c, u^t; 0, h_S, 0) &= \min -\delta \\ &\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i x_i^t \leq x^t, \\ &\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i z_i^t + \delta h_S \leq z^s + \gamma, \quad (S') \\ &-\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i u_i^t \leq -u^t, \\ &\sum_{i \in \mathcal{I}} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Si $D_t(x^t, z, u^t; 0, h_S, 0)$ est différentiable en $z = z^s$, alors $\gamma \mapsto -D_t(x^t, z^s + \gamma, u^t; 0, h_S, 0)$

est différentiable en $c = 0$. Toutefois,

$$\frac{\partial D_t(x^t, z, u^t, 0, h_S, 0)}{\partial z} \Big|_{z=z^s} = \frac{\partial D_t(x^t, z^s + \gamma, u^t, 0, h_S, 0)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0}.$$

Soit (δ^*, θ^*) , la solution du programme (2.61). $(\delta^*, \theta^*, 0)$ est la solution du programme (2.63). D'après le théorème de transitivité, il vient que

$$-\frac{\partial D_t(x^t, z^s + \gamma, u^t, 0, h_S, 0)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = -\mu_S,$$

en utilisant (2.49). \square

5 Un indicateur social de Luenberger agrégé.

Guironnet et Peypoch (2007) introduisent une fonction directionnelle agrégée. Elle permet de considérer l'existence de groupes d'individus ou de nations. Pour cela ils proposent d'agréger les efficacités individuelles au sein de groupes. Nous utilisons une procédure similaire pour construire un indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen agrégé. Tout d'abord, nous définissons la fonction sociale directionnelle agrégée en ressources publiques. Celle-ci mesure la réduction maximale de la dépense publique pour un groupe d'individus donné.

Puis, nous définissons un indicateur social de Luenberger agrégé en réalisations. Le but de cette approche est de pouvoir considérer des groupes d'individus ou des groupes de nations. Cette identification de groupes similaires permet d'analyser plus précisément les inégalités en considérant des caractéristiques socio-démographiques qui définissent des groupes d'individus. Nous pouvons identifier des groupes de pays plutôt que des groupes d'individus, selon l'objet de l'analyse.

5.1 La fonction sociale directionnelle agrégée en ressources publiques.

Considérons $|\mathcal{G}|$ individus appartenant à un groupe \mathcal{G} . Chaque individu j est caractérisé par une technologie de réalisation B_j^t .

La représentation matricielle suivante caractérise l'existence de groupes d'individus :

$$(X^t, Z^t, U^t) = ((x_1^t, z_1^t, u_1^t), \dots, (x_{|\mathcal{G}|}^t, z_{|\mathcal{G}|}^t, u_{|\mathcal{G}|}^t)) \in \mathbb{R}_+^{(n+m+p) \times |\mathcal{G}|}, \quad (2.64)$$

où chaque $(x_j^t, z_j^t, u_j^t) \in B_j^t \subset \mathbb{R}_+^{n+m+p}$.

Nous considérons pour $j = 1 \dots |\mathcal{G}|$ que B_j^t satisfait les axiomes B1-B4 à chaque période t .

Soit $B^t = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} B_j^t$ la technologie de réalisation agrégée. La fonction sociale directionnelle évaluée dans B_j^t au point (x_j^t, z_j^t, u_j^t) est décrite par $D_t^j(x_j^t, z_j^t, u_j^t; h, k)$.

A la période $t + 1$, $(X^{t+1}, Z^{t+1}, U^{t+1})$ satisfait les relations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} x_j^t = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} x_j^{t+1};$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_j^t = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_j^{t+1} \text{ et}$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} u_j^t = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} u_j^{t+1}.$$

On peut désormais définir une fonction sociale directionnelle agrégée, pour chaque période et chaque groupe. Plus particulièrement, nous souhaitons caractériser une fonction sociale directionnelle publique agrégée pour un groupe d'individus (ou nations)².

La fonction directionnelle agrégée de ressources sociales correspond à la somme des fonctions directionnelles individuelles pour toutes les réallocations de ressources publiques possibles. Nous considérons ainsi que le niveau des réalisations ainsi que des ressources publiques est donné.

La fonction distance directionnelle agrégée ne s'applique que sur les ressources publiques pour évaluer l'efficacité strictement liée à la dépense publique. La fonction sociale directionnelle en ressources publiques $\bar{D}_t : \mathbb{R}_+^{(n+m+p) \times |\mathcal{G}|} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

2. Cette approche est inspirée de Luenberger (1996) dans son analyse sur la consommation. Dans la théorie de la production, les ressources sont les inputs utilisés par des groupes de firmes pour produire des outputs

est définie par :

$$\bar{D}_t(X^t, Z^t, U^t; h_S) = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} D_t^j(x_j^t, z_j^t, u_j^t; 0, h_S, 0). \quad (2.65)$$

La fonction directionnelle agrégée en ressources publiques, est une application RES_t : $\mathbb{R}_+^{n \times |\mathcal{G}|} \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^{p \times |\mathcal{G}|} \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ définie par :

$$RES_t(X^t, \bar{z}^t, U^t; h_S) = \sup_{X^t, U^t} \bar{D}_t(X^t, Z^t, U^t; h_S) \quad (2.66)$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_j^t = \bar{z}^t.$$

La fonction sociale directionnelle en ressources publiques au niveau agrégé peut être reformulée de la manière suivante.

Proposition 2.5 *Supposons que B_j^t satisfait les axiomes B1-B4, pour chaque période et pour tout $j = 1, \dots, |\mathcal{G}|$. La fonction directionnelle en ressources publiques est définie par*

$$RES_t(X^t, \bar{z}^t, U^t; h_S) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_j^t : (x_j^t, z_j^t - \delta_j^t h_S, u_j^t) \in B_j^t, \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_j^t = \bar{z}^t \right\}.$$

Preuve : En effet, on a :

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_j^t : (x_j^t, z_j^t - \delta_j^t h_S, u_j^t) \in B_j^t, \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_j^t = \bar{z}^t \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_j^t : \delta_j^t \leq D_t(x_j^t, z_j^t - \delta_j^t h_S, u_j^t; 0, h_S, 0), \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_j^t = \bar{z}^t \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} D_t(x_j^t, z_j^t, u_j^t; 0, h_S, 0) : \sum_{k=1}^{|\mathcal{G}|} z_k^t = \bar{z}^t \right\} \\ &= RES_t(X^t, \bar{z}^t, U^t; h_S). \end{aligned}$$

□

5.2 Définition de l'indicateur social de Luenberger agrégé en réalisation.

A la période $t + 1$, $(X^{t+1}, \bar{z}^{t+1}, U^{t+1})$ représente une variation d'efficacité. Pour mesurer ce changement de productivité, on définit, pour tous les vecteurs de ressources publiques, un indicateur social de Luenberger orienté en réalisation. Celui évalue la productivité de la dépense publique, pour un groupe (d'individus ou de nations) donné. Cet indicateur est représenté par :

$$ALSA_t(X^t, \bar{z}^t, \bar{z}^{t+1}, U^t; h_S) = RES_t(X^t, \bar{z}^{t+1}, U^t; h_S) - RES_t(X^t, \bar{z}^t, U^t; h_S). \quad (2.67)$$

Cet indicateur évalue les changements d'efficacité au niveau agrégé. Les variations de productivité s'expliquent par un changement dans la quantité de ressources publiques. Entre t et $t + 1$, la production de biens publics passe de \bar{z}^t à \bar{z}^{t+1} . Remarquons que d'après l'équation (2.67), les matrices X^t et U^t sont fixées par rapport à la période considérée t .

Similairement, on peut définir un indicateur social de Luenberger agrégé par rapport à la période $t + 1$:

$$ALSA_{t+1}(X^t, \bar{z}^t, \bar{z}^{t+1}, U^{t+1}, h_S) = RES_{t+1}(X^{t+1}, \bar{z}^{t+1}, U^{t+1}; h_S) - RES_{t+1}(X^{t+1}, \bar{z}^t, U^{t+1}; h_S). \quad (2.68)$$

L'interprétation est la même que l'indicateur à la période de référence t .

La moyenne arithmétique des indicateurs sociaux agrégés en t et en $t + 1$ fournit l'indicateur social de productivité de Luenberger agrégé en réalisation. Il s'exprime par :

$$ALSA_{t,t+1} = \frac{1}{2} [ALSA_t + ALSA_{t+1}] \quad (2.69)$$

On peut définir le programme linéaire qui permet d'estimer la frontière d'efficacité pour chaque groupe d'individus. Soit \mathcal{G} un groupe d'individus. Chaque groupe j est caractérisé par un ensemble \mathcal{L}_j . Soit $A_j^t = \{(x_l^t, z_l^t, u_l^t) : l \in \mathcal{L}_j\}$ l'ensemble des vecteurs de

réalisations faisables. L'estimation non-paramétrique \hat{B}_j^t de la technologie B_j^t est définie par :

$$\hat{B}_j^t = \left\{ (x_j^t, z_j^t, u_j^t) \in \mathbb{R}_+^{n+m+p} : x_j^t \geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l x_l^t, z_j^t \geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l z_l^t, \right. \\ \left. u_j^t \leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l u_l^t, \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l = 1, \theta \geq 0 \right\}. \quad (2.70)$$

Le programme linéaire qui permet de calculer la mesure directionnelle sociale est défini par :

$$D_j^t(x_j^t, z_j^s, u_j^t; h_S) = \max \left\{ \delta_j^t : x_j^t \geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l x_l^t, \right. \\ \left. z_j^s - \delta_j^t h_S \geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l z_l^t, \right. \\ \left. u_j^t \leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l u_l^t, \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l = 1, \theta \geq 0 \right\}. \quad (2.71)$$

La fonction sociale directionnelle agrégée, en direction des ressources publiques, est calculée dans chaque groupe par :

$$REI_t(X^t, \bar{z}^s, Y_t; h) = \max \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_j^t \\ x_j^t \geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l x_l^t, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \\ z_j^s - \delta_j^t h_S \geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l z_l^t, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \\ y_j^t \leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l y_l^t, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \quad (2.72) \\ \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l = 1, \theta_l \geq 0, \delta_j^t \geq 0, z_j^t \geq 0, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \\ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_j^t = \bar{z}^t, \dots$$

6 Conclusions

Ce chapitre établit une analogie entre la théorie des capacités de Sen et la théorie de la productivité en microéconomie de la production. Les fonctions distance constituent une mesure des capacités.

Ce chapitre montre que l'indicateur de Hicks-Moorsteen est constitué des indices introduit par Ramos et Silber (2005), pour évaluer le bien-être. Puis nous proposons de reformuler cet indicateur pour le cas additif. L'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen est construit à partir d'une fonction directionnelle. Il généralise les indices de Ramos et Silber (2005), dans un contexte additif.

Ensuite, dans une approche similaire à Zaim et al. (2001), nous proposons d'introduire une fonction distance directionnelle sociale. Elle est un sous-vecteur des ressources publiques. Cette considération permet d'évaluer l'efficacité spécifique à la provision de biens collectifs. A partir de cette nouvelle mesure, on peut construire un indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

Après avoir analysé les propriétés de faisabilité et de dualité, nous proposons de construire un indicateur social agrégé. Il permet de considérer des groupes d'individus ou de nations, dans l'analyse de l'efficacité de la production publique.

Ce nouvel indicateur présente des perspectives d'application pour évaluer les politiques publiques, dans la provision de biens sociaux. Cette évaluation s'inscrit dans la lignée de l'approche de Sen, qui préconise de retenir le critère des capacités, en tant que base du choix public.

Chapitre 3

Définition d'un indicateur de productivité généralisé pour les mesures additives et pour les mesures multiplicatives de l'efficacité

Ce chapitre introduit un indicateur de productivité généralisé. Plus précisément, deux types d'indicateurs sont proposés. Le premier généralise les indicateurs standards qui ont une structure additive. Comme l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen généralise l'indice de Luenberger, l'indicateur de productivité proposé généralise l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Le second indicateur généralise les indicateurs de productivité standards de nature multiplicative. Au même titre que l'indicateur de Malmquist est un cas particulier de l'indicateur de Hicks-Moorsteen ; ce dernier est un cas particulier de l'indicateur généralisé proposé, pour les structures multiplicatives.

Certains contextes économiques induisent qu'il existe des ressources fixes (très peu modifiables) et d'autres qui sont variables. C'est le cas lorsqu'il existe des coûts fixes ou bien des facteurs de production incontrôlables par le manager. Il vient qu'il serait une erreur de traiter ces variables fixes au même titre que les ressources variables, mais il serait une erreur de ne pas intégrer leur influence sur les variations de productivité.

Dans certaines situations, en économie de la production, il convient de distinguer les ressources désirables (les outputs) des ressources indésirables. C'est l'exemple des "bad" outputs qui peuvent caractériser la pollution issue du processus de production. Il n'est pas cohérent de les considérer dans le calcul de la productivité comme des outputs désirables. Pourtant ces variables ont une influence sur la productivité. Et particulièrement avec les objectifs actuels de développement durable.

Pour évaluer la performance des politiques publiques, on distingue les ressources privées des ressources publiques. Les recettes de l'Etat constitueront les inputs nécessaires à la production de biens sociaux.

Plus généralement, il existe des contextes économiques qui impliquent de différencier les ressources en deux catégories. Pour clarifier l'analyse et les explications, nous distinguons deux types de ressources dans la technologie de production. Nous considérons qu'il existe des ressources de type 1. Et nous admettons, qu'il existe un autre type de ressources que nous appellerons ressources de type 2 par la suite.

Clairement, notre indicateur permet d'intégrer cette dimension dans l'évaluation de la productivité. Il exclue l'influence de la variation d'efficacité des ressources de type 2 dans le calcul des variations de productivité. Précisément, l'indicateur évalue les variations de

productivité, qui sont expliquées par les ressources de type 1, corrigées de l'influence des ressources de type 2.

Autrement dit, l'indicateur généralisé permet de décomposer les origines des variations de productivité. Il fournit les variations de productivité qui s'expliquent par une amélioration/dégradation de la quantité de ressources 1, d'une part. D'autre part, notre indicateur fournit la part des variations de productivité qui dérive des variables de type 2 ; que l'on soustrait aux précédentes pour finir.

Ainsi l'indicateur généralisé permet d'évaluer les variations de productivité avec plus de précision, en considérant plusieurs types de variables dans la technologie de production. Les indicateurs de productivité standards n'intègrent pas cette dimension.

La première section définit l'indicateur généralisé de productivité, construit à partir des mesures directionnelles de l'efficacité. Elle établit que cet indicateur, qui ajoute une dimension dans le calcul de la productivité, est bien une généralisation des indicateurs standards. Nous montrons que les indicateurs de Luenberger-Hicks-Moorsteen et de Luenberger sont des cas particuliers de l'indicateur proposé. Puis, cette section fournit des exemples d'applications concrètes.

La seconde section définit un indicateur de productivité généralisé, pour les structures multiplicatives. Il est établi, que les indicateurs de Hicks-Moorsteen et de Malmquist, sont des cas particuliers de notre indicateur de productivité généralisé.

La dernière section définit les fonctions ressources directionnelles agrégées par type de ressources pour des groupes de DMUs. A partir de celles-ci, nous construisons un indicateur de productivité généralisé agrégé.

1 Définition d'un indicateur de productivité généralisé.

Pour modéliser au mieux la réalité économique, il convient parfois d'élaborer des distinctions entre les ressources. Le tableau suivant propose des exemples, pour lesquels les ressources peuvent faire l'objet de traitement distincts, dans la mesure où elles sont de nature différente.

Pour construire le nouvel indicateur, nous considérons les notations mathématiques

TABLE 3.1 – Contextes économiques qui nécessitent de distinguer des catégories de variables

	Inputs		Outputs	
	x_1	x_2	y_1	y_2
Exemple 1 :	Ressources fixes	Ressources variables	Ressources variables	Ressources fixes
Exemple 2 :	Ressources privées	Ressources publiques	Biens publics	Biens privés
Exemple 3 :			Output désirables	Output indésirables

suivantes. Pour chaque période les vecteurs g^t , sont définis par :

$$g^t = (h^{1,t}, h^{2,t}, k^{1,t}, k^{2,t})$$

avec $h^{1,t} \in \mathbb{R}^{m_1}$, $h^{2,t} \in \mathbb{R}^{m_2}$, $k^{1,t} \in \mathbb{R}^{n_1}$, $k^{2,t} \in \mathbb{R}^{n_2}$ et $m = m_1 + m_2$ et $n = n_1 + n_2$.

A chaque période, $x^t = (x^{1,t}, x^{2,t})$, caractérise l'ensemble des input et $y^t = (y^{1,t}, y^{2,t})$ représente les output.

$$x^{1,t} \in \mathbb{R}_+^{m_1}, x^{2,t} \in \mathbb{R}_+^{m_2}, y^{1,t} \in \mathbb{R}_+^{n_1}, y^{2,t} \in \mathbb{R}_+^{n_2}$$

Nous distinguons ainsi deux catégories d'input et d'output. Le tableau suivant récapitule les notations mathématiques :

Input	Output
$x^t = (x^{1,t}, x^{2,t})$	$y^t = (y^{1,t}, y^{2,t})$
$x^{1,t} \in \mathbb{R}_+^{m_1}, x^{2,t} \in \mathbb{R}_+^{m_2}$	$y^{1,t} \in \mathbb{R}_+^{n_1}, y^{2,t} \in \mathbb{R}_+^{n_2}$
$m = m_1 + m_2$	$n = n_1 + n_2$
$h^{1,t} \in \mathbb{R}^{m_1}, h^{2,t} \in \mathbb{R}^{m_2}$	$k^{1,t} \in \mathbb{R}^{n_1}, k^{2,t} \in \mathbb{R}^{n_2}$

2 L'indicateur de productivité généralisé pour les structures additives.

Cette section introduit un indicateur généralisé qui se base sur des mesures additives, et plus particulièrement sur la mesure directionnelle. L'indicateur de productivité généralisé, pour les mesures additives et pour une période de référence en t , est défini par la différence suivante :

$$\begin{aligned} GLHM_t(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t; g^t, g^{t+1}) = \\ GL_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}; g^t, k^{t+1}) - GL_t^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec,

$$\begin{aligned} GL_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) = \\ \vec{D}_t(x^t, y^t, h^{1,t}, 0, k^{1,t}, 0) - \vec{D}_t(x^{1,t+1}, x^{2,t}, y^{1,t+1}, y^{2,t}, h^{1,t+1}, 0, k^{1,t+1}, 0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

GL_t^1 traduit le fait que toutes ressources (types 1 et 2), sont intégrées pour estimer la technologie de production. Par contre la fonction directionnelle, ne s'applique que sur les ressources de type 1, pour le calcul de l'efficacité.

Le premier terme de GL_t^1 , peut se réécrire $D_t(x^{1,t}, x^{2,t}, y^{1,t}, y^{2,t}; h^{1,t}, 0, k^{1,t}, 0)$. Il évalue l'efficacité technique des ressources (de type 1) en t , par rapport à la technologie en t . Le second terme de GL_t^1 traduit l'efficacité technique, pour les quantités d'input et d'output (de type 1) mobilisées et produites en $t + 1$, par rapport au graphe de technologie en t . Les ressources de type 2 sont fixes aux périodes t et $t + 1$.

Le second terme de l'indicateur généralisé $GLHM_t$, à la période t , est défini par :

$$\begin{aligned} GL_t^2(x^t, x^{t+1}, y^t, g^t, g^{t+1}) = \\ \vec{D}_t(x^{1,t}, x^{2,t+1}, y^{1,t}, y^{2,t+1}, 0, h^{2,t+1}, 0, k^{2,t+1}) - \vec{D}_t(x^t, y^t, 0, h^{2,t}, 0, k^{2,t}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

GL_t^2 mesure la variation de productivité qui résulte des ressources du second type.

Effectivement, toutes les variables sont incluses dans la technologie de production, mais seules les ressources 2 sont prises en compte dans l'évaluation de la productivité. Ce terme isole la part de la variation de productivité qui découle de facteurs de type 1. Aussi, il est retranché à GL^1 .

Le premier terme de GL_t^2 évalue l'efficacité de la quantité de ressources 2 en $t + 1$, par rapport à la technologie en t . Le second terme, mesure l'efficacité technique, pour une quantité des ressources 2 en t , par rapport à la technologie en t .

Similairement, on peut définir l'indicateur généralisé par rapport au graphe de technologie en $t + 1$ comme suit :

$$GLHM_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t, g^t, g^{t+1}) = \quad (3.4)$$

$$GL_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, k^t, k^{t+1}) - GL_{t+1}^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, h^t, h^{t+1}),$$

avec,

$$GL_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) \quad (3.5)$$

$$= \vec{D}_{t+1}(x^{1,t}, x^{2,t+1}, y^{1,t}, y^{2,t+1}, h^{1,t}, 0, k^{1,t}, 0) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, h^{1,t+1}, 0, k^{1,t+1}, 0),$$

Les interprétations sont similaires à celles de $GLHM_t^1$ mais pour une période de référence en $t + 1$.

Le second terme de $GLHM_{t+1}$ est défini par :

$$GL_{t+1}^2(x^t, x^{t+1}, y^t; g^t, g^{t+1}) \quad (3.6)$$

$$= \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, h^{2,t+1}, 0, k^{2,t+1}) - \vec{D}_{t+1}(x^{1,t+1}, x^{2,t}, y^{1,t+1}, y^{2,t}, 0, h^{2,t}, 0, k^{2,t}).$$

L'indicateur généralisé correspond à la moyenne arithmétique des indicateurs précédents à chaque période. Il est caractérisé comme suit :

$$GLHM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1})$$

$$= \frac{1}{2} \left[GLHM_t(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) + GLHM_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) \right] \quad (3.7)$$

Cet indicateur généralise les indicateurs de productivité standards, qui ont une structure additive. Les relations d'équivalences entre le nouvel indicateur et les mesures classiques sont établies dans ce qui suit.

2.1 Relation d'équivalence entre l'indicateur généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen et l'indicateur de productivité de Luenberger-Hicks-Moorsteen.

Dans ce qui suit, il est démontré que l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen coïncide avec l'indicateur généralisé dans un cas particulier.

Proposition 3.1 En sélectionnant les sous-ensembles $m_1 = 0$ et $n_2 = 0$, l'indicateur généralisé de productivité correspond à l'indicateur standard de Luenberger-Hicks-Moorsteen :

$$GLHM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) = LHM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}; g^t, g^{t+1}).$$

Preuve. En effet, dans ce cas, pour chaque période t : $m_1 = 0$, donc $m = m_2$, ce qui implique que $x_1 = 0$ donc $x = x_2$ ainsi $h^{1,t} = 0$ et $h^t = h^{2,t}$.

De plus $n_2 = 0$, donc $n = n_1$ ce qui signifie que $y_2 = 0$ et $y = y_1$, ainsi $k^{2,t} = 0$ donc $k^t = k^{1,t}$.

Il en découle que :

$$GL_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}; k^t, k^{t+1}) = \vec{D}_t(x^t, y^t, 0, k^t) - \vec{D}_t(x^t, y^{t+1}, 0, k^{t+1}),$$

et que,

$$GL_t^2(x^t, x^{t+1}, y^t, h^t, h^{t+1}) = \vec{D}_t(x^{t+1}, y^t, h^{t+1}, 0) - \vec{D}_t(x^t, y^t, h^t, 0).$$

De plus,

$$GL_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^t, 0, k^t) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k^{t+1}),$$

et,

$$GL_{t+1}^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, h^{t+1}, 0) - \vec{D}_{t+1}(x^t, y^{t+1}, h^t, 0)$$

Rappelons que l'équation (3.7) définit l'indicateur généralisé de la manière suivante :

$$GLHM_{t,t+1} = \frac{1}{2} [GL_t^1 - GL_t^2 + GL_{t+1}^1 - GL_{t+2}^2]$$

Ainsi,

$$GLHM_{t,t+1} = \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2} [D_t(x^t, y^t, 0, k^t) - D_t(x^t, y^{t+1}, 0, k^{t+1}) -$$

$$D_t(x^{t+1}, y^t, h^{t+1}, 0) - D_t(x^t, y^t, h^t, 0)] + \tag{3.9}$$

$$D_{t+1}(x^{t+1}, y^t, 0, k^t) - D_t(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k^{t+1}) -$$

$$D_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, h^{t+1}, 0) - D_{t+1}(x^t, y^{t+1}, h^t, 0)] \tag{3.11}$$

On remarque que GL_t^1 , représenté par (3.8), est équivalent à l'indice de Luenberger en output par rapport à la période t . Ce dernier est défini dans le chapitre 1.

GL_t^2 caractérisé par (3.9), est équivalent à l'indice de Luenberger en input L_t^i à la période t . L_t^i est défini par (1.45).

Similairement GL_{t+1}^1 et GL_{t+1}^2 sont équivalents à l'indice de Luenberger en output et en input, par rapport à la période $t + 1$. Ceux-ci sont respectivement définis dans le chapitre 1 par les équations (1.49) et (1.46).

Cet indicateur a exactement la même structure que l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Tous les deux, sont construits à partir de la moyenne arithmétique pour toutes les périodes, des indices de Luenberger en input et en output.

Par conséquent en sélectionnant $m = m_2$ et $n = n_1$, notre indicateur intègre les ressources de type 1 ($x = x_2$ et $y = y_1$). Et, il exclue les ressources du second type ($x = x_1$ et $y = y_2$) du calcul de la productivité. Dans ce cas précis, $GLHM_{t,t+1} = LHM_{t,t+1}$. \square

2.2 Relation d'équivalence entre l'indicateur généralisé de Luenberger-Hicks-Moorsteen et l'indicateur de productivité de Luenberger.

Proposition 3.2 Lorsque $m_2 = 0$ et $n_2 = 0$, alors :

$$GLHM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}) = L(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, g^t, g^{t+1}).$$

Preuve. Dans ce cas, pour chaque période t , on a :

$m = m_1$, ce qui signifie que $x = x^1$ et $h^{2,t} = 0$, donc $h^t = h^{1,t}$. De plus, $n = n_1$ implique que $y^t = y^{1,t}$, et $k^{2,t} = 0$ aussi $k^t = k^{1,t}$.

Dans ce cas, on obtient :

$$GL_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, k^t, k^{t+1}) = \vec{D}_t(x^t, y^t, h^t, k^t) - \vec{D}_t(x^{t+1}, y^{t+1}, h^{t+1}, k^{t+1}) \quad (3.12)$$

et

$$GL_t^2(x^t, x^{t+1}, y^t, h^t, h^{t+1}) = \vec{D}_t(x^t, y^t, 0, 0) - \vec{D}_t(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, 0) = 0. \quad (3.13)$$

Similairement, pour une période de référence en $t + 1$:

$$GL_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \vec{D}_{t+1}(x^t, y^t, h^t, k^t) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, h^{t+1}, k^{t+1}), \quad (3.14)$$

et

$$GL_{t+1}^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, 0) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, 0, 0) = 0 \quad (3.15)$$

Dans ce cas, l'indicateur généralisé est défini par :

$$GLHM_{t,t+1} = \frac{1}{2} [\vec{D}_t(x^t, y^t, h^t, k^t) - \vec{D}_t(x^{t+1}, y^{t+1}, h^{t+1}, k^{t+1}) + \vec{D}_{t+1}(x^t, y^t, h^t, k^t) - \vec{D}_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, h^{t+1}, k^{t+1})] \quad (3.16)$$

Les composants de l'indicateur généralisé sont similaires à ceux de l'indicateur de Luenberger. Par conséquent, dans le cas où $m_2 = 0$ et $n_2 = 0$, on n'intègre que les ressources de type 1 ($x = x_1$ et $y = y_1$, dans le calcul de la productivité. Dans ce cas, l'indicateur de productivité généralisé et l'indicateur de Luenberger sont équivalents. \square

2.3 Perspective d'application : le cas d'input/output fixes et variables.

Considérons l'existence d'input/output fixes, et d'au moins un input/output variable. Pour cela nous adoptons les notations suivantes :

Notation des input :

$x^t = (x^{f,t}, x^{v,t})$, avec $x_i^t = x_i^{f,t}$ pour $i = 1 \dots n_f$ et $x_i^t = x_i^{v,t}$ pour $i = n_f + 1 \dots n$, avec $n_f \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Notation des output :

$y^t = (y^{f,t}, y^{v,t})$, avec $y_j^t = y_j^{f,t}$ pour $j = 1 \dots p_f$ et $y_j^t = y_j^{v,t}$ pour $j = p_f + 1, \dots, p$, avec $p_f \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$.

Dans la lignée de Briec et al. (2013), on peut définir une fonction directionnelle qui ne s'applique que sur les ressources variables comme suit :

$$\vec{D}_a^{i,f}(x^{f,b}, x^{v,a}, y^b, h^a) = \sup_{\delta} \{ \delta : (x^{f,b}, x^{v,a} - \delta h^{v,a}, y^b) \in T^a, \delta \in \mathbb{R} \}, \quad (3.17)$$

Briec et al. (2013) ont montré que cette mesure est faisable. Il s'agit d'un sous-vecteur, qui ne prend en compte que les facteurs variables.

En considérant une orientation en output, la mesure directionnelle de l'efficacité des

output variables est définie par :

$$\vec{D}_a^{o,f}(x^b, y^{f,b}, y^{v,a}, k^a) = \sup_{\delta} \{ \delta : (x^b, y^{f,b}, y^{v,a} + \delta k^{v,a}) \in T^a, \delta \in \mathbb{R} \}. \quad (3.18)$$

Dans le contexte de l'indicateur de productivité généralisé, nous considérons que :

$$n_1 = n_f, \quad n_2 = n_v, \quad \text{et } p_1 = p$$

Ceci traduit l'intérêt de ce nouvel indicateur. Sa logique s'inscrit dans une extension des travaux de Briec et al. (2003), et contribue à légitimer l'importance de l'apport théorique qu'il consitue.

Ce cas est représenté par la figure suivante :

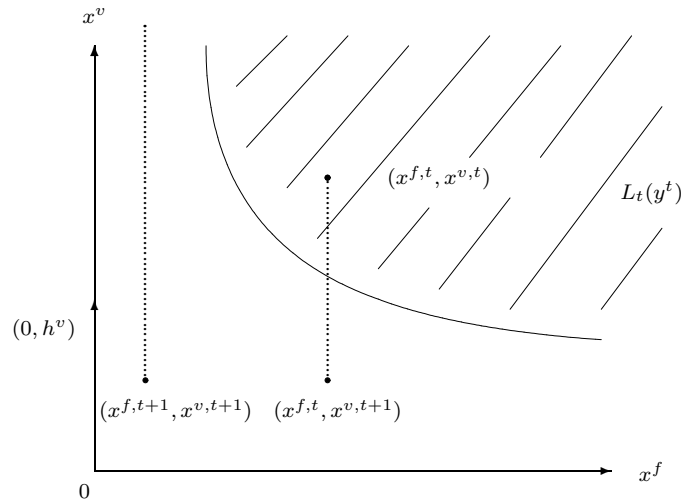


Figure 1 : Sous-vecteur de l'efficacité technique en input

3 Définition d'un indicateur de productivité généralisé pour les structures multiplicatives.

Cet indicateur se construit à partir des mesures de l'efficacité qui ont une forme multiplicative. Plus précisément, il se base sur la fonction hyperbolique. Rappelons que la mesure hyperbolique de l'efficacité est définie par :

$$DF_t^h(x^t, y^t) = \min \left\{ \lambda \geq 0 : (\lambda x^t, \frac{1}{\lambda} y^t) \in T \right\}. \quad (3.19)$$

Dans ce cas, la productivité peut être évaluée avec l'indice de Malmquist introduit par Althin, Färe et Grosskopf (1996). Il est défini de la manière suivante :

$$M^h(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \left[\frac{DF_{t+1}^h(x^t, y^t)}{DF_t^h(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{DF_{t+1}^h(x^t, y^t)}{DF_{t+1}^h(x^{t+1}, y^{t+1})} \right]^{1/2}. \quad (3.20)$$

Dans le contexte de notre indicateur de productivité relatif aux mesures de l'efficacité à structure multiplicative, nous utilisons les notations suivantes :

$$DF_t^{1,h}(x^{1,t}, x^{2,t}, y^{1,t}, y^{2,t}) = \inf \left\{ \lambda > 0 : (\lambda x^{1,t}, x^{2,t}, \frac{1}{\lambda} y^{1,t}, y^{2,t}) \in T \right\}, \quad (3.21)$$

Cette fonction mesure l'efficacité technique des ressources appartenant à la première catégorie. En effet la fonction hyperbolique projette simultanément les vecteurs d'inputs et d'outputs de type 1 sur le graphe de technologie à la période t .

$$DF_t^{2,h}(x^{1,t}, x^{2,t}, y^{1,t}, y^{2,t}) = \inf \left\{ \lambda > 0 : (x^{1,t}, \lambda x^{2,t}, y^{1,t}, \frac{1}{\lambda} y^{2,t}) \in T \right\}. \quad (3.22)$$

Cette fonction mesure l'efficacité technique des ressources appartenant à la seconde catégorie.

L'indicateur de productivité généralisé à la période t , pour les structures multiplicatives est caractérisé par le rapport suivant :

$$GHM_t(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{GHM_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})}{GHM_t^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})}, \quad (3.23)$$

Le numérateur est défini par :

$$GHM_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{DF_t^{1,h}(x^{1,t+1}, x^{2,t}, y^{1,t+1}, y^{2,t})}{DF_t^{1,h}(x^t, y^t)} \quad (3.24)$$

Ce terme traduit le fait que la fonction hyperbolique projette les vecteurs d'input et d'output en $t + 1$ de type 1, sur la frontière efficiente en t . Le dénominateur mesure l'efficacité des vecteurs d'input-output de type 1 en t par rapport au graphe de technologie en t .

Le dénominateur de GHM_t est défini par :

$$GHM_t^2(x^t, x^{t+1}, y^t; y^{t+1}) = \frac{DF_t^{2,h}(x^t, y^t)}{DF_t^{2,h}(x^{1,t}, x^{2,t+1}, y^{1,t}, y^{2,t+1})}. \quad (3.25)$$

Ce terme caractérise les variations de productivité qui résultent de l'existence des ressources de type 2. Les fonctions hyperboliques ne s'appliquent que sur ce type de ressources. Le numérateur de ce terme mesure l'efficacité des vecteurs de production de type 2 en t par rapport à la frontière d'efficience en t . Le dénominateur de GHM_t^2 évalue l'efficacité par rapport au graphe de technologie en t , pour les vecteurs d'input-output des ressources de type 2 en $t + 1$.

Similairement pour une période de référence en $t + 1$, l'indicateur de productivité généralisé pour les structures multiplicatives, peut être défini par :

$$GHM_{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{GHM_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})}{GHM_{t+1}^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1})} \quad (3.26)$$

avec,

$$GHM_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{DF_{t+1}^{1,h}(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_{t+1}^{1,h}(x^{1,t}, x^{2,t+1}, y^{1,t}, y^{2,t+1})} \quad (3.27)$$

et :

$$GHM_{t+1}^2(x^{1,t+1}, x^{2,t}, y^{1,t+1}, y^{2,t}) = \frac{DF_{t+1}^{2,h}(x^{1,t+1}, x^{2,t}, y^{1,t+1}, y^{2,t})}{DF_{t+1}^{2,h}(x^{t+1}, y^{t+1})}. \quad (3.28)$$

Les interprétations de ces composants sont similaires à celles de GHM_t^1 et GHM_t^2 .

Enfin l'indicateur est défini par la moyenne géométrique de ces composants comme suit :

$$GHM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = (GHM_t(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) \cdot GHM_{t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}))^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

3.1 Relation d'équivalence entre l'indicateur de productivité généralisé et l'indicateur de Hicks-Moorsteen.

Les résultats ci-dessous prouvent que l'indicateur standard de Hicks-Moorsteen est un cas particulier de l'indicateur de productivité généralisé. Les deux indicateurs coïncident dans un cas particulier, qui est le suivant :

Proposition 3.3 Lorsque $m_1 = 0$ et $n_2 = 0$, alors :

$$GHM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = HM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}).$$

Preuve. En effet, dans ce cas :

$m = m_2$ donc $x = x_2$; et $n = n_1$ donc $y = y_1$. Ceci implique

Nous obtenons que :

$$GHM_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{DF_t^{1,h}(x^{2,t}, y^{1,t+1})^{-1}}{DF_t^{1,h}(x^{2,t}, y^{1,t})^{-1}}$$

Donc,

$$GHM_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{[DF_t^o(x^t, y^{t+1})]^{-1}}{[DF_t^o(x^t, y^t)]^{-1}} = \frac{DF_t^o(x^t, y^t)}{DF_t^o(x^t, y^{t+1})}$$

Ce composant est équivalent à l'indice de Malmquist en output, pour une période de référence en t . Celui-ci est défini au chapitre 1 par l'équation (1.38). Ce qui suit montre que GHM_t^2 correspond à l'indice de Malmquist orienté en input.

$$GHM_t^2(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}) = \frac{DF_t^i(x^t, y^t)}{DF_t^i(x^{t+1}, y^t)}.$$

Similairement, pour une période de référence en $t + 1$:

$$GHM_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{DF_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_{t+1}^o(x^{t+1}, y^t)}$$

et :

$$GHM_{t+1}^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{DF_{t+1}^i(x^t, y^{t+1})}{DF_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1})}$$

Dans le cas où $m = m_2$ et $n = n_1$, l'indicateur généralisé correspond à l'indicateur standard de Hicks-Moorsteen. \square

3.2 Relation d'équivalence entre l'indicateur de productivité généralisé et l'indicateur standard de Malmquist.

Proposition 3.4 Lorsque $m_2 = 0$ et $n_2 = 0$:

$$GHM_{t,t+1}(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = M^h(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}).$$

Preuve. Dans ce cas, pour chaque période t , $x^{2,t} = 0$, donc $x^t = x^{1,t}$. Et $y^{2,t} = 0$ donc $y^t = y^{1,t}$.

On obtient que :

$$GHM_t^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{DF_t^h(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_t^h(x^t, y^t)}$$

et

$$GHM_t^2(x^t, x^{t+1}, y^t) = 1.$$

Similairement pour une période de référence en $t+1$:

$$GHM_{t+1}^1(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = \frac{DF_{t+1}^h(x^{t+1}, y^{t+1})}{DF_{t+1}^h(x^t, y^t)}$$

et :

$$GHM_{t+1}^2(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}) = 1$$

Lorsque $m = m_2$ et $n = n_1$ l'indicateur généralisé correspond à l'indice de Malmquist hyperbolique. \square

3.3 Perspective d'application : Le cas des input-output privés et publics.

Notre indicateur de productivité généralisé différencie les ressources publiques des ressources privées. Il permet de donner un indice global de l'efficacité et la productivité plus précis, en isolant l'influence des ressources publiques. Supposons que nous souhaitons évaluer la productivité de la production de biens sociaux. Et considérons par exemple que l'on souhaite évaluer l'efficacité des politiques territoriales sur le développement touristique.

Soit $x = (x^{p,t}, x^{s,t})$, le vecteur des input, avec $x^{p,t}$ qui caractérisent les facteurs de production privés. Dans le secteur touristique, les input correspondent essentiellement, à la capacité d'hébergement, au nombre de restaurants, d'aéroports, d'emplois, ect... $x^{s,t}$ est le vecteur des input publics. Ils représentent les infrastructures publiques telles que les routes, les sites culturels et naturels, la promotion marketing...

Soit $y = (y^{p,t}, y^{s,t})$ le vecteur des output, avec $y^{s,t}$, qui caractérise les output publics. Ils correspondent aux recettes fiscales issues du tourisme, et au chiffre d'affaire des sites publics. $y^{p,t}$ représente les output privés. Ils correspondent au chiffre d'affaires de l'ensemble des activités liées au tourisme (hotels, campings, restauration, services,...).

En posant $x^{p,t} = x^{1,t}$, $x^{s,t} = x^{2,t}$ et $y^s = y^{1,t}$, $y^p = y^{2,t}$, nous pouvons obtenir une caractérisation complète de la technologie et éliminer l'influence des facteurs privés sur les variations de productivité.

4 Définition des fonctions ressources agrégées et de l'indicateur de productivité généralisé agrégé.

Les mesures agrégées de l'efficacité permettent d'évaluer les réallocations optimales de ressources au sein d'un groupe donné. Certaines situations induisent qu'il existe des groupes de DMUs. De plus dans le contexte de notre indicateur de productivité généralisé, nous souhaitons fournir une mesure globale de l'efficacité pour les deux types de ressources.

Dans un premier temps, nous caractérisons la fonction directionnelle agrégée des res-

sources de type 1. Puis, nous définissons la fonction directionnelle agrégée pour les ressources de second type.

Considérons $|\mathcal{G}|$ firmes du groupe \mathcal{G} . Chaque firme j dispose d'une technologie de production T^j . Dans notre contexte, rappelons que $x^t = x^{1,t} + x^{2,t}$ et que $y = (y^{1,t} + y^{2,t})$. Posons $z_1 = (x^{1,t}, y^{1,t})$ et $z_2 = (x^{2,t}, y^{2,t})$. La technologie de production d'une firme j est caractérisée par :

$$(X_t, Y_t) = \left((z_1^{1,t}, z_2^{1,t}), \dots, (z_1^{|\mathcal{G}|}, z_2^{|\mathcal{G}|}) \right) \in \mathbb{R}_+^{(m+n) \times |\mathcal{G}|} \quad (3.30)$$

pour tout $(z_1^j, z_2^j) \in T_t^k \subset \mathbb{R}_+^{n+m}$, avec $j = 1 \dots |\mathcal{G}|, T_t^j$.

$T_t = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} T_t^j$ caractérise la technologie agrégée pour le groupe de firmes.

Dans ce qui suit nous définissons les fonctions directionnelles de ressources agrégées. Nous les construisons en agrégeant les fonctions individuelles. Plus précisément, nous définissons deux types de mesures agrégées pour la fonction directionnelle.

La première évalue l'efficacité des ressources de type 1 et la seconde, l'efficacité des ressources de second type. Cette fonction caractérise les réallocations optimales pour les ressources de type 1, dans un groupe de DMUs. Dans ce contexte les ressources de second type sont fixées. Les réallocations optimales pour les ressources de premier type, sont déterminées relativement à la fonction agrégée des ressources de premier type \bar{z}_1 .

Nous pouvons également définir une fonction agrégée pour les ressources du second type \bar{z}_2 . Pour cela nous considérons que les ressources z_1 sont fixes. La fonction agrégée fournit les réallocations pour les ressources de la seconde catégorie relativement à la fonction agrégée des ressources de type 2 \bar{z}_2 .

La fonction distance directionnelle agrégée $\bar{D}_t : \mathbb{R}_+^{(n+m) \times |\mathcal{G}|} \times \mathbb{R}_+^{n_1} \text{ times } \mathbb{R}_+^{m_2} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ est définie par :

$$\bar{D}_t(Z_1, Z_2; h^1, h^2, k^1, k^2) = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \bar{D}_t^j(z_{1,t}^j, z_{2,t}^j; h^1, h^2, k^1, k^2). \quad (3.31)$$

La mesure directionnelle agrégée est l'application $RE1_t : \mathbb{R}_+^{m_1} \times \mathbb{R}_+^{n \times |\mathcal{G}|} \times \mathbb{R}_+^{n_1} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ définie par :

$$RE1_t(\bar{z}_2, Z_1; h^1, 0, k^1, 0) = \sup_{Z_1} \bar{D}_t(X_t, Y_t; h^1, 0, k^1, 0) \quad (3.32)$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{1,t}^j = \bar{z}_{2,t}.$$

La mesure directionnelle agrégée pour les ressources de second type, est l'application $RE2_t : \mathbb{R}_+^{n \times |\mathcal{G}|} \times \mathbb{R}_+^{m_2} \times \mathbb{R}_+^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ définie par :

$$RE2_t(Z_{2,t}, \bar{z}_{1,t}; 0, h^2, 0, k^2) = \sup_{Z_{2,t}} \bar{D}_t(X_t, Y_t; 0, h^2, 0, k^2) \quad (3.33)$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{2,t}^j = \bar{z}_{1,t}.$$

La première mesure considère que les ressources \bar{z}_2 sont fixes. Elle fournit les réallocations optimales pour les ressources 1 au sein du groupe, compte tenu de la contrainte \bar{z}_2 .

La seconde mesure fournit les réallocations optimales sur le second type de ressources. Pour cela, nous considérons \bar{z}_1 fixe, en tant que contrainte.

Proposition 3.5 *La fonction distance directionnelle agrégée pour les ressources 1 à la période t par rapport à la technologie de production de la même période, pour une direction $g = (h^1, 0, k^1, 0)$ est définie par :*

$$RE1_t(\bar{z}_{2,t}, Z_{1,t}; h^1, 0, k^1, 0) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_t^j : (x_{1,t}^j - \delta_t^j h, y_{1,t}^j + \delta_t^j k) \in T_t^j, \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{2,t}^j = \bar{z}_{2,t} \right\}$$

Proposition 3.6 *La fonction distance directionnelle agrégée à la période t par rapport au graphe en t , pour $g = (0, h^2, 0, k^2)$ est définie par :*

$$RE2_t(Z_{2,t}, \bar{z}_{1,t}; 0, h^2, 0, k^2) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_t^j : (x_{2,t}^j - \delta_t^j h, y_{2,t}^j + \delta_t^j k) \in T_t^j, \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{2,t}^j = \bar{z}_{1,t} \right\}.$$

Similairement, on peut définir des fonctions directionnelles agrégées pour la période

$t + 1$:

Proposition 3.7 *La fonction distance directionnelle agrégée pour les ressources 1 à la période $t + 1$ par rapport à la technologie en $t+1$, pour $g = (h^1, k^1)$ est définie par :*

$$RE1_{t+1}(\bar{z}_{2,t+1}, Z_{1,t+1}; h^1, 0, k^1, 0) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_{t+1}^j : (x_{1,t+1}^j - \delta_t^j h, y_{1,t+1}^j + \delta_{t+1}^j k) \in T_{t+1}^j, \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{2,t+1}^j = \bar{z}_{2,t+1} \right\}$$

Proposition 3.8 *La fonction distance directionnelle agrégée pour les ressources 2, à la période $t + 1$, par rapport à la technologie en $t + 1$, et en considérant $g = (0, h^2, 0, k^2)$, est définie par :*

$$RE2_{t+1}(Z_{2,t+1}, \bar{z}_{1,t+1}, ; 0, h^2, 0, k^2) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_{t+1}^j : (x_{2,t+1}^j - \delta_{t+1}^j h, y_{2,t+1}^j + \delta_{t+1}^j k) \in T_{t+1}^j, \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{2,t+1}^j = \bar{z}_{1,t+1} \right\}.$$

Les résultats suivants fournissent les programmes linéaires qui permettent de calculer les fonctions ressources agrégées. Dans la lignée des travaux de Varian (1984) et Banker, Maindiratta (1988), l'estimation non paramétrique de la technologie est définie par :

$$\hat{T}_t^j = \left\{ (x_t^j, y_t^j) \in \mathbb{R}_+^{n+m} : x_t^j \geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j x_{t,l}^j, y_t^j \leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j y_{t,l}^j, \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l = 1, \theta \geq 0 \right\}. \quad (3.34)$$

Concernant $RE1_t(\bar{z}_{2,t}, Z_{1,t}, h^1, 0, k^1, 0)$, l'optimisation se fait relativement à $Z_{1,t}$. Le

programme linéaire qui permet de calculer $RE1_t$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 RE1_t(\bar{z}_{2,t}, Z_{1,t}; h^1, 0, k^1, 0) &= \max \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_t^j \\
 x_{1,t}^j - \delta_t^j h^1 &\geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j x_{1,t,l}^j, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \\
 x_{2,t}^j &\geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j x_{2,t,l}^j, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \\
 y_{1,t}^j + \delta_t^j k^1 &\leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j y_{1,t,l}^j, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

$$y_{2,t}^j \leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j y_{2,t,l}^j, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}| \quad (3.36)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j = 1, \theta_l^j \geq 0, \delta_t^j \geq 0, \quad j = 1 \dots |\mathcal{G}|$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{1,t}^j = \bar{z}_{2,t}$$

Similairement le programme linéaire qui permet de calculer $RE2_t$ est donné par :

$$\begin{aligned}
 RE2_t(\bar{z}_{1,t}, Z_{2,t}; 0, h^2, 0, k^2) &= \max \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} \delta_t^j \\
 x_{2,t}^j - \delta_t^j h^2 &\geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j x_{2,t,l}^j, \quad j = 1, \dots, |\mathcal{G}| \\
 x_{1,t}^j &\geq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j x_{1,t,l}^j, \quad j = 1, \dots, |\mathcal{G}| \\
 y_{2,t}^j + \delta_t^j k^2 &\leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j y_{2,t,l}^j, \quad j = 1, \dots, |\mathcal{G}| \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$y_{1,t}^j \leq \sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j y_{1,t,l}^j, \quad j = 1, \dots, |\mathcal{G}| \quad (3.38)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_j} \theta_l^j = 1, \theta_l^j \geq 0, \delta_t^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, |\mathcal{G}|$$

$$\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}|} z_{2,t}^j = \bar{z}_{1,t}$$

Les fonctions de ressources agrégées permettent d'évaluer l'efficacité et les réallocations optimales des vecteurs de production, au sein d'un groupe de DMUs. A partir

d'elles, on peut construire un indicateur de productivité généralisé agrégé, pour les structures additives comme suit.

Considérons tout d'abord l'indicateur de productivité agrégé généralisé par rapport au graphe de technologie en t . Il est défini par :

$$\begin{aligned} &AGLHM_t(z_{1,t}, z_{2,t}, z_{1,t+1}, z_{2,t+1}; g^t, g^{t+1}) = \\ &AGL_t^1(Z_{1,t}, \bar{z}_{2,t}, Z_{1,t+1}, \bar{z}_{2,t+1}; h^1, 0, k^1, 0) - AGL^2(Z_{2,t}, Z_{2,t+1}, \bar{z}_{1,t}, \bar{z}_{1,t+1}; 0, h^2, 0, k^2) \end{aligned} \quad (3.39)$$

, avec,

$$\begin{aligned} &AGL_t^1(Z_{1,t}, \bar{z}_{2,t}, Z_{1,t+1}, \bar{z}_{2,t+1}; h^1, 0, k^1, 0) = \\ &RE1_t(Z_{1,t}, \bar{z}_{2,t}; h^{1,t}, 0, k^{1,t}, 0) - RE1_t(Z_{1,t+1}, \bar{z}_{2,t+1}; h^{1,t+1}, 0, k^{1,t+1}, 0), \end{aligned} \quad (3.40)$$

et,

$$\begin{aligned} &AGL_t^2(Z_{2,t}, \bar{z}_{1,t}, Z_{2,t+1}, \bar{z}_{1,t+1}; 0, h^2, 0, k^2) = \\ &RE2_t(Z_{2,t+1}, \bar{z}_{1,t+1}; 0, h^{2,t+1}, 0, k^{2,t+1}) - RE2_t(Z_{2,t}, \bar{z}_{1,t}; 0, h^{2,t}, 0, k^{2,t}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

On peut définir de manière similaire un indicateur de productivité agrégé, pour une technologie de référence en $t + 1$:

$$\begin{aligned} &AGLHM_{t+1}(z_{1,t}, z_{2,t}, z_{1,t+1}, z_{2,t+1}; g^t, g^{t+1}) = \\ &AGL_{t+1}^1(Z_{1,t}, Z_{1,t+1}, \bar{z}_{2,t+1}; h^1, 0, k^1, 0) - AGL_{t+1}^2(Z_{2,t}, Z_{2,t+1}, \bar{z}_{1,t+1}; 0, h^2, 0, k^2) \end{aligned} \quad (3.42)$$

avec,

$$\begin{aligned} &AGL_{t+1}^1(Z_{1,t}, Z_{1,t+1}, \bar{z}_{2,t+1}; h^1, 0, k^1, 0) = \\ &RE1_{t+1}(Z_{1,t}, \bar{z}_{2,t+1}; h^{1,t}, 0, k^{1,t}, 0) - RE1_{t+1}(Z_{1,t+1}, \bar{z}_{2,t+1}; h^{1,t+1}, 0, k^{1,t+1}, 0), \end{aligned} \quad (3.43)$$

et,

$$AGL_{t+1}^2(Z_{2,t}, Z_{2,t+1}, \bar{z}_{1,t+1}; 0, h^2, 0, k^2) = RE2_{t+1}(Z_{2,t+1}, \bar{z}_{1,t+1}; 0, h^{2,t+1}, 0, k^{2,t+1}) - RE2_t(Z_{2,t}, \bar{z}_{1,t+1}; 0, h^{2,t}, 0, k^{2,t}) \quad (3.44)$$

Conclusion.

Les indicateurs de productivité, pour les structures additives et multiplicatives, proposés dans ce chapitre généralisent bien les indicateurs standards. Ils permettent d'intégrer une dimension supplémentaire dans l'analyse de la productivité, pour réaliser une évaluation plus précise des variations de l'efficacité.

Le tableau suivant fournit un récapitulatif des résultats d'équivalence établis dans ce chapitre :

TABLE 3.2 – Résultats d'équivalence de l'indicateur de productivité généralisé		
	Forme additive	Forme multiplicative
$m = m_2$ et $n = n_1$	Luenberger-Hicks-Moorsteen	Hicks-Moorsteen
$m = m_1$ et $n = n_1$	Luenberger	Malmquist
$m = m_1 + m_2$ et $n_1 + n_2 = 0$	Composant GLHM en input	Composant du GHM en input
$m_1 = m_2 = 0$ et $n = n_1 + n_2$	Composant du GLHM en input	Composant du GHM en output

Ce nouveau type d'indicateur est un outil pertinent pour évaluer l'efficacité et la productivité des DMUs (ou groupes de DMUs). Il devrait servir de grille d'analyse pour de futures applications empiriques.

Chapitre 4

Commensurabilité faible et forte et sur un paradoxe apparent de l'indicateur de productivité de Luenberger.

Ce chapitre démontre que l'indicateur de productivité de Luenberger ne permet pas nécessairement de caractériser les variations de productivité sous l'hypothèse d'une technologie à rendements d'échelle constants. Cet indicateur peut induire des résultats paradoxaux. Ce biais découle de la structure même de la fonction distance directionnelle lorsque l'on considère une technologie de production à rendements d'échelle constants. La notion de commensurabilité (invariance relativement aux unités de mesures) joue un rôle crucial sur ce point.

L'indicateur de productivité de Luenberger est pourtant un outil populaire pour évaluer la productivité. Plusieurs études empiriques l'utilisent pour analyser la performance. Par exemple Barros et Couto (2013) calculent la productivité des compagnies d'aviation Européenne, avec un indicateur de Luenberger, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Barros et Peypoch (2010) utilisent également ce type d'indicateur et d'hypothèse, pour évaluer la productivité des compagnies de bus Portugaises. Olga Goncalves (2013) utilise un indicateur de productivité de Luenberger sous le postulat de rendements d'échelle constants, pour calculer la performance des stations de ski Françaises.

La première section de ce chapitre caractérise le biais de l'indicateur de Luenberger. Il résulte du degré d'homogénéité de la fonction distance directionnelle sous l'hypothèse rendements d'échelle constants. Celle-ci est homogène de degré 1, et cette propriété implique que la mesure directionnelle est sensible à une multiplication proportionnelle de ses arguments. Cette propriété est également intrinsèquement liée à l'axiome de commensurabilité défini par Russell (1988). Cependant, comme les fonctions distance directionnelles et proportionnelles dépendent, dans leur forme la plus générale, de paramètres, nous introduisons deux nouvelles formes de commensurabilité dites forte et faible. Nous montrons que la fonction distance directionnelle satisfait la commensurabilité faible alors que la proportionnelle satisfait l'axiome de commensurabilité fort. Il est par ailleurs montré qu'aucune mesure homogène de degré différent de 0, ne peut satisfaire l'axiome de commensurabilité fort.

La seconde section démontre que ces propriétés impliquent l'existence d'un biais avec un exemple numérique. Il est établi que l'indicateur de productivité de Luenberger ne permet pas d'évaluer la productivité car il induit des résultats inverses. Par contre les indicateurs de productivité basés sur des fonctions homogènes de degré 0 permettent bien

d'évaluer la productivité. Finalement, la dernière section présente une application empirique, qui confirme notre démonstration.

1 Commensurabilité faible et forte et implications sur le biais de l'indicateur de productivité de Luenberger l'hypothèse de rendements d'échelle constants.

1.1 Commensurabilités fortes et faible, Homogénéité de la mesure directionnelle, de la mesure de Farrell et de la mesure proportionnelle.

Briec et al. (2003) établissent que sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants la directionnelle est homogène de degré 1. On trouve ce résultat dans la proposition 1a) qui stipule que *la technologie satisfait l'hypothèse de rendements d'échelle constants si et seulement si elle est homogène de degré 1*. En considérant que (x^*, y^*) est le point de projection :

$$\lambda(x^*, y^*) = \lambda(x, y) + \lambda \vec{D}_T(x, y; g)$$

et

$$\lambda(x^*, y^*) = \lambda(x, y) + \vec{D}_T(\lambda(x, y); g)$$

ce qui induit :

$$\vec{D}_T(\lambda(x, y); g) = \lambda \vec{D}_T((x, y); g) \quad \forall \lambda \geq 0^1$$

Ce résultat traduit le fait que lorsque l'on multiplie proportionnellement les variables de la fonction, la valeur de cette dernière augmente proportionnellement aussi. Par exemple si l'on multiplie par 2 les quantités d'input et d'output, la directionnelle double. Cette condition a des répercussions directe sur l'indicateur de productivité de Luenberger.

Les mesures de Farrell et de Briec sont quant à elles des fonctions homogènes de degré

1. Pour des précisions, se référer à Briec, Dervaux et Leleu (2003)

0. Ce résultat est établi dans Boussemart, Briec et Kerstens (2003) qui définissent des équivalences entre la proportionnelle et la mesure de Debreu-Farrell. Cette propriété est étroitement liée au fait que ce type de fonction est invariante aux changements des quantités d'input et d'output. Par exemple si l'on double les quantités d'input et d'output, ces mesures restent les mêmes. Dans ce qui suit nous allons revisiter cet axiome de commensurabilité en distinguant la commensurabilité faible et le commensurabilité forte. Nous allons montrer que la fonction distance directionnelle satisfait l'axiome de commensurabilité faible alors que la fonction distance proportionnelle (et donc la mesure de Farrell) satisfont l'axiome de commensurabilité forte.

Nous introduisons dans ce qui suit les axiomes de commensurabilité faible et forte qui généralisent l'axiome de commensurabilité de Russell (1988). Nous considérons une sous-ensemble de paramètres $\Theta \subset \mathbb{R}_+^d$.

Définition 4.1 Soit $f : \mathbb{R}^d \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$ nous dirons que f satisfait :

(a) l'axiome de commensurabilité forte si pour toute matrice diagonale définie positive L de dimension $d \times d$ on a :

$$f(Lz, \theta) = f(z, \theta)$$

(b) l'axiome de commensurabilité faible si pour toute matrice diagonale définie positive L de dimension $d \times d$ on a :

$$f(Lz, L\theta) = f(z, \theta)$$

.

Dans le premier cas la fonction f est invariante par rapport à tout changement d'unité de mesures indépendamment de θ . Ce n'est pas le cas dans le second cas. Nous allons montrer c'est que la fonction distance directionnelle satisfait l'axiome de commensurabilité faible, alors que la fonction distance proportionnelle satisfait l'axiome de commensurabilité forte.

La fonction distance proportionnelle est homogène de degré 0, alors que la fonction de distance directionnelle, rappelons le est homogène de degré 1 (ce qui est la cause des

difficultés déjà mentionnées.)

Ici nous adoptons pour tout vecteur $\gamma, z \in \mathbb{R}^d$ la notation \odot pour définir le produit

$$\gamma \odot z = (\gamma_1 z_1, \dots, \gamma_d z_d).$$

On peut étendre la fonction distance proportionnelle en introduisant la fonction $D_T^\infty : \mathbb{R}_+^{n+m} \times [0, 1]^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ définie par

$$D_T^\infty(x, y; \alpha, \beta) = \max \{ \delta : (x - \delta\alpha \odot x, y + \delta\beta \odot y) \in T \} \quad (4.1)$$

que nous appellerons fonction distance proportionnelle directionnelle paramétrée. Bien entendu, nous avons

$$D_T^\infty(x, y) = D_T^\infty(x, y; \mathbb{1}_m, \mathbb{1}_n). \quad (4.2)$$

Nous pouvons tout d'abord établir la propriété suivante.

Proposition 4.2 *Si la technologie satisfait des rendements d'échelle constants, alors la fonction distance proportionnelles paramétrée est homogène de degré 0.*

Preuve : Supposons que $\delta_\star = D_T^\infty(x, y; \alpha, \beta)$. Par hypothèse de rendements constants on a pour tout $\lambda > 0$, $\lambda(x - \delta_\star\alpha \odot x, y + \delta_\star\beta \odot y) = (\lambda x - (\lambda\delta_\star)\alpha \odot x, y + (\lambda\delta_\star)\beta \odot y) = (\lambda x - \delta_\star\alpha \odot \lambda x, y + \delta_\star\beta \odot \lambda y) \in T$.

Il résulte que $D_T^\infty(\lambda x, \lambda y; \alpha, \beta) \leq \delta_\star$. Notons $\underline{\delta} = D_T^\infty(\lambda x, \lambda y; \alpha, \beta)$. Par définition $(\lambda x - \underline{\delta}\alpha \odot \lambda x, \lambda y + \underline{\delta}\beta \odot \lambda y) \in T$. Donc $\lambda^{-1}(\lambda x - \underline{\delta}\alpha \odot \lambda x, \lambda y + \underline{\delta}\beta \odot \lambda y) = (x - \underline{\delta}\alpha \odot x, y + \underline{\delta}\beta \odot y) \in T$. Donc $D_T^\infty(x, y; \alpha, \beta) \leq D_T^\infty(\lambda x, \lambda y; \alpha, \beta)$ ce qui montre l'inégalité réciproque. \square

Nous en venons au résultat suivant :

Proposition 4.3 *La fonction distance proportionnelle satisfait l'axiome de commensurabilité fort. La fonction distance directionnelle satisfait l'axiome de commensurabilité faible.*

Preuve Ces deux résultats ont été respectivement établis dans Bric (1997) et dans Bric, Dervaux et Leleu (2004). \square

On peut ajouter le résultat suivant :

Proposition 4.4 *La fonction distance directionnelle ne satisfait pas l'axiome de commensurabilité forte.*

Preuve : Prenons la matrice diagonale L de dimension $n + m$ dont tous les coefficients sont identiques et égaux à $\lambda > 0$. Supposons que la technologie satisfait des rendements d'échelle constant. Mais comme la fonction distance directionnelle est homogène de degré 1, nous avons $\vec{D}_T(Lz; g) = \lambda \vec{D}_T(z, g)$. En prenant $\lambda \neq 1$, ceci termine la démonstration. \square

On peut étendre ce résultat au suivant.

Proposition 4.5 *Si $f : \mathbb{R}^{m+n} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ est non nulle et homogène de degré différent de 0 en son premier argument, alors elle ne peut satisfaire l'axiome de commensurabilité fort.*

Preuve : Prenons la matrice diagonale L de dimension $n + m$ dont tous les coefficients sont identiques et égaux à $\lambda > 0$. Comme la fonction f est homogène de degré α différent de 0, nous avons $f(Lz; \theta) = \lambda^\alpha f(z, \theta)$. En prenant $\lambda \neq 1$, ceci termine la démonstration. \square

1.2 Caractérisation du biais du Luenberger.

Soient $z_t = (x^t, y^t)$ et $z_{t+1} = (x^{t+1}, y^{t+1})$ les vecteurs de production aux périodes t et $t+1$. En sélectionnant la direction $g = (h, k)$, l'indicateur de productivité de Luenberger est défini par :

$$L(z_t, z_{t+1}; g) = \frac{1}{2} \left[\vec{D}_{t+1}(z_t; g) - \vec{D}_{t+1}(z_{t+1}; g) + \vec{D}_t(z_t; g) - \vec{D}_t(z_{t+1}; g) \right] \quad (4.3)$$

Considérons que $z_{t+1} = \lambda z_t$. Ceci traduit une multiplication proportionnelle simultanée des quantités d'inputs et d'outputs pour la période $t + 1$ par rapport à t . Bien que la technologie de production de la DMU soit différente aux deux périodes, son efficacité

demeure la même. Il devrait résulter que $L(z_t, z_{t+1}; g) - L(z_t, \lambda z_{t+1}; g) = 0$. Or ce n'est pas le cas.

Le biais de Luenberger peut être caractérisé par la différence suivante :

$$LB = L(z_t, z_{t+1}; g) - L(z_t, \lambda z_{t+1}; g) \quad (4.4)$$

Il vient que,

$$\begin{aligned} LB = & \frac{1}{2} [\vec{D}_{t+1}(z_t; g) - \vec{D}_{t+1}(z_{t+1}; g) + \vec{D}_t(z_t; g) - \vec{D}_t(z_{t+1}; g)] \\ & - \frac{1}{2} [\vec{D}_{t+1}(z_t; g) - \lambda \vec{D}_{t+1}(z_{t+1}; g) + \vec{D}_t(z_t; g) - \lambda \vec{D}_t(z_{t+1}; g)] \end{aligned} \quad (4.5)$$

donc,

$$\begin{aligned} LB = & \frac{1}{2} [\vec{D}_{t+1}(z_t; g) - \vec{D}_{t+1}(z_{t+1}; g) + \vec{D}_t(z_t; g) - \vec{D}_t(z_{t+1}; g) \\ & - \vec{D}_{t+1}(z_t; g) + \lambda \vec{D}_{t+1}(z_{t+1}; g) - \vec{D}_t(z_t; g) + \lambda \vec{D}_t(z_{t+1}; g)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le biais peut être caractérisé de la manière suivante :

$$LB = \frac{\lambda - 1}{2} [\vec{D}_{t+1}(z_{t+1}; g) + \vec{D}_t(z_{t+1}; g)] \quad (4.7)$$

L'existence de ce biais provient de la définition de la fonction directionnelle sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. En effet, cette mesure doit être homogène de degré 1 pour satisfaire le postulat de rendements d'échelle constants. Il résulte que cette mesure est sensible aux changements des quantités d'input et d'output.

2 Description de l'exemple numérique et exposition du problème.

Cette section montre que l'indice de Malmquist est bien invariant à un changement proportionnel de la combinaison productive.

2.1 Exemple numérique.

Considérons l'exemple décrit dans le tableau ci-dessous. Soit une technologie à deux dimensions avec,

$T^t = \{(x, y) : y \leq x\}$ et $T^{t+1} = \{(x, y) : y \leq 2x\}$, qui traduit une hypothèse de rendements d'échelle constants.

TABLE 4.1 – Description de l'exemple numérique

Cas 1	Cas 2
$z_t^1 = (1, \frac{4}{5})$	$z_t^2 = (1, \frac{4}{5})$
$z_{t+1}^1 = (1, \frac{5}{4})$	$z_{t+1}^2 = (10, \frac{50}{4})$
$Eff_t^1 = (1, 1)$	$Eff_t^2 = (1, 10)$
$Eff_{t+1}^1 = (1, 2)$	$Eff_{t+1}^2 = (10, 20)$

Clairement, dans notre exemple, $z_{t+1}^2 = 10z_{t+1}^1$. Et z_{t+1}^2 et z_{t+1}^1 ont le même niveau d'efficacité.

Ce qui suit montre que l'indice de Malmquist en output reste bien le même dans les 2 cas.

Le graphique suivant illustre la construction de l'indice de Malmquist d'après notre exemple numérique :

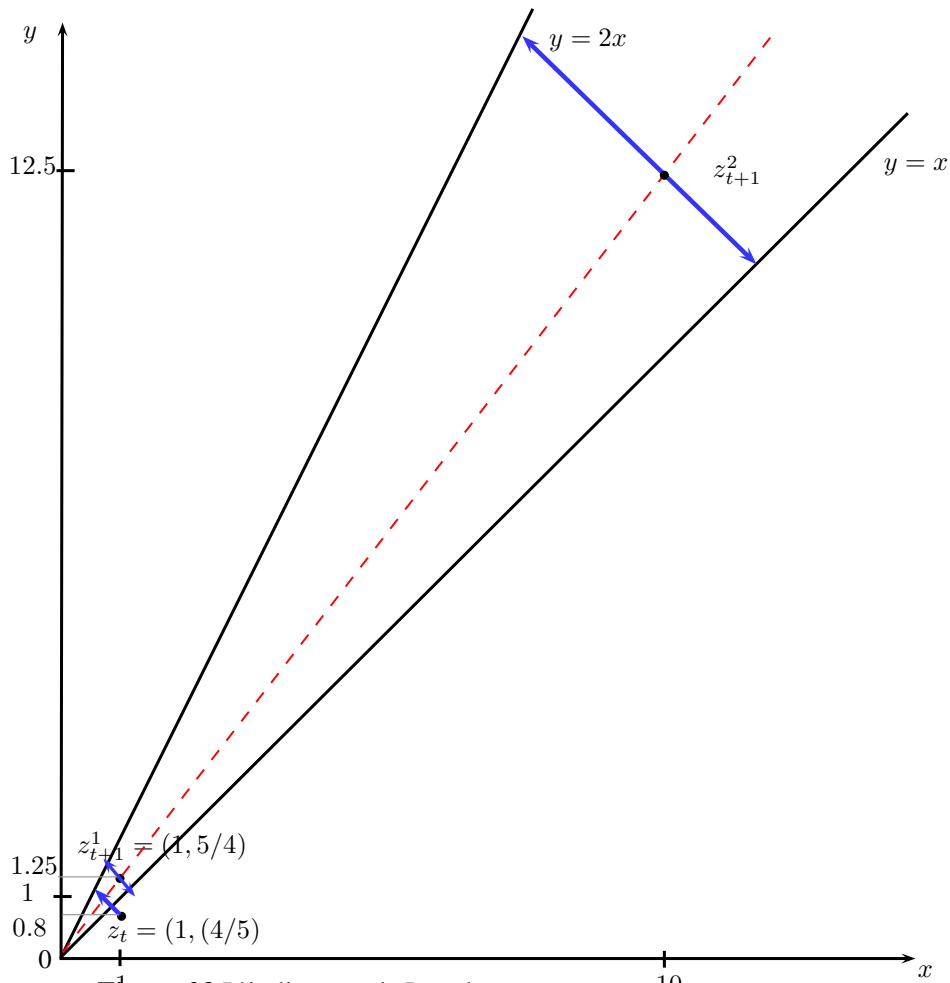


Figure 23 L'indicateur de Luenberger en output¹⁰

Rappelons que l'indice de Malmquist en output est défini par :

$$\left[\frac{DF_t^o(z_{t+1})}{DF_t^o(z_t)} \cdot \frac{DF_{t+1}^o(z_{t+1})}{DF_{t+1}^o(z_t)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.2 Calcul de l'indice de Malmquist en output pour le premier cas.

On a, $z_t^1 = (y_{1,t}, y_{2,t}) = (1, \frac{4}{5})$ et $z_{t+1}^1 = (y_{1,t+1}, y_{2,t+1}) = (1, \frac{5}{4})$. Donc $Eff_t^1 = (1, 1)$ caractérise les points efficaces en t et $Eff_{t+1}^1 = (1, 2)$ les points efficaces en $t + 1$, selon l'hypothèse d'une technologie de production à rendements d'échelle constants.

D'après notre exemple,

(i) $DF_t^o(z_{t+1}^1) = \sup\{\theta : (x_{t+1}, \theta y_{t+1}) \in T^t\} = \sup\{\theta : (1, \theta \frac{5}{4}) \in T^t\} = \sup\{\theta : \theta \frac{5}{4} \leq 1\}$. Il vient que, $\frac{5}{4}\theta = 1$, donc $DF_t^o(z_{t+1}^1) = \theta^* = \frac{4}{5}$,

(ii) $DF_t^o(z_t^1) = \sup\{\theta : (x_t, \theta y_t) \in T^t\} = \sup\{\theta : \theta \frac{4}{5} \leq 1\}$, donc $\frac{4}{5}\theta = 1$, en conséquence $DF_t^o(z_t^1) = \theta^* = \frac{5}{4}$,

(iii) $DF_{t+1}^o(z_{t+1}^1) = \sup\{\theta : (x_{t+1}, \theta y_{t+1}) \in T^{t+1}\} = \sup\{\theta : \theta \frac{5}{4} \leq 2\}$. On a, $\frac{5}{4}\theta^* = 2$ donc $DF_{t+1}^o(z_{t+1}^1) = \theta^* = \frac{8}{5}$,

(iv) $DF_{t+1}^o(z_t^1) = \sup\{\theta : \theta \frac{4}{5} \leq 2\}$, il résulte que $DF_{t+1}^o(z_t^1) = \theta^* = \frac{5}{2}$.

$$M^{o,1} = \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.5625 \quad (4.8)$$

Ce résultat indique un gain de productivité entre t et $t + 1$ puisque l'indice de Malmquist est > 1 .

2.3 Calcul de l'indice de Malmquist en output pour le second cas.

Dans ce cas, $z_t^2 = (y_{1,t}, y_{2,t}) = (1, \frac{4}{5})$ et $z_{t+1}^2 = (y_{1,t+1}, y_{2,t+1}) = (10, \frac{50}{4})$. Rappelons que $z_{t+1}^2 = 10z_{t+1}^1$. La DMU a donc exactement la même efficacité aux deux périodes, bien qu'elle utilise une combinaison productive différente. On constate qu'elle a multiplié proportionnellement par 10, sa production d'output 1 et 2. Comme l'efficacité est la même en t et $t + 1$, l'indice de Malmquist ne devrait pas changer. C'est bien le cas, il est invariant à ce changement proportionnel. Vérifions le :

(i) $DF_t^o(z_{t+1}^2) = \frac{25}{2}\theta = 10$, donc $\theta^* = \frac{4}{5}$,

(ii) $DF_t^o(z_t^2) = \frac{4}{5}\theta = 1$, il vient que $\theta^* = \frac{5}{4}$,

(iii) $DF_{t+1}^o(z_{t+1}^2) = \frac{25}{2}\theta = 20$, ce qui implique $\theta^* = \frac{8}{5}$,

(iv) $DF_{t+1}^o(z_t^2) = \frac{4}{5}\theta = 3$, donc $\theta^* = \frac{5}{2}$.

$$M^{o,2} = \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.5625. \quad (4.9)$$

En conclusion, la multiplication proportionnelle des quantités produites, n'a aucune incidence sur l'indice. Ceci est normal puisque l'efficacité de z_{t+1} est la même dans les deux cas.

La suite montre que l'indicateur de Luenberger est quant lui sensible à ce changement. Les résultats issus du premier cas et ceux du second sont différents. L'indicateur prend deux signes opposés, suggérant que la DMU a modifié son efficacité, or ce n'est pas vrai.

3 L'indicateur standard de Luenberger : un exemple numérique.

3.1 Calcul de l'indicateur de Luenberger en output.

Cas 1 : $z_t^1 = (y_{1,t}, y_{2,t} = (1, \frac{4}{5})$ et $z_{t+1}^1 = (y_{1,t+1}, y_{2,t+2} = (1, \frac{5}{4})$. En sélectionnant la direction $g = (0, 1)$, l'indicateur de Luenberger en output est construit de la manière suivante :

$$(i) \vec{D}_{t+1}(y_{1,t}, y_{2,t}, 0, 1) = \sup\{\delta : (1, \frac{4}{5} + \delta) \in T^{t+1}\} \text{ ce qui implique } \frac{4}{5} + \delta^* = 2 \text{ et } \vec{D}_{t+1}(y_{1,t}, y_{2,t}, 0, 1) = \delta^* = \frac{6}{5},$$

$$(ii) \vec{D}_{t+1}(y_{1,t+1}, y_{2,t+1}, 0, 1) = \sup\{\delta : (1, \frac{5}{4} + \delta) \in T^{t+1}\}. \frac{5}{4} + \delta = 2, \text{ ce qui implique que } \delta^* = 2 - \frac{5}{4}. \text{ Donc } \vec{D}_{t+1}(y_{1,t+1}, y_{2,t+1}, 0, 1) = \frac{3}{4},$$

$$(iii) \vec{D}_t(x_{2,t}, y_{2,t}, 0, 1) = \sup\{\delta : (1, \frac{4}{5} + \delta) \in T^t\} \text{ par conséquent } \frac{4}{5} + \delta = 1, \delta^* = 1 - \frac{4}{5} \text{ et } \vec{D}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, 0, 1) = \frac{1}{5},$$

(iv) $\vec{D}_t(y_{1,t+1}, y_{2,t+1}, 0, 1) = \sup\{\delta : (1, \frac{5}{4} + \delta) \in T^t\}$. Il vient que, $\frac{5}{4} + \delta = 1$, $\delta^* = 1 - \frac{5}{4}$, donc $\vec{D}_t(y_{1,t+1}, y_{2,t+1}, 0, 1) = -\frac{1}{4}$.

$$L^{o,1} = \frac{1}{2} \left[\frac{6}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = 0.45 \quad (4.10)$$

L'indicateur de Luenberger est > 0 , ce qui indique un gain de productivité entre t et $t + 1$.

Cas 2 : $z_t^2 = (y_{1,t}, y_{2,t}) = (1, \frac{4}{5})$ et $z_{t+1}^2 = (x_{t+1}, y_{t+1}) = (10, \frac{25}{2})$.

Bien que la DMU utilise des quantités d'output différentes par rapport au premier cas, son efficacité est inchangée. L'indicateur de Luenberger devrait donc être identique au cas précédent, au même titre que l'indice de Malmquist. Or ce n'est pas le cas. En calculant l'indicateur de Luenberger en output on trouve :

(i) $\vec{D}_{t+1}(y_{1,t}, y_{2,t}, 0, 1) = \sup\{\delta : (1, \frac{4}{5} + \delta) \in T^{t+1}\}$, ce qui implique $\frac{4}{5} + \delta = 2$ donc $\delta^* = \frac{6}{5}$

(ii) $\vec{D}_{t+1}(y_{1,t+1}, y_{2,t+1}, 0, 1) = \sup\{\delta : (10, \frac{25}{2} + \delta) \in T^{t+1}\}$, il vient que $\frac{25}{2} + \delta = 20$ et $\delta = \frac{15}{2}$

(iii) $\vec{D}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, 0, 1) = \sup\{\delta : (1, \frac{4}{5} + \delta) \in T^t\}$, ainsi $\frac{4}{5} + \delta = 1$ et par conséquent $\delta = \frac{1}{5}$

(iv) $\vec{D}_t(y_{1,t+1}, y_{2,t+1}, 0, 1) = \sup\{\delta : (10, \frac{25}{2} + \delta) \in T^t\}$. Il résulte que $\frac{25}{2} + \delta = 10$ et $\delta = \frac{-5}{2}$

$$L^{o,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{6}{5} - \frac{15}{2} + \frac{1}{5} + \frac{5}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-18}{5} \right) = -1.8 \quad (4.11)$$

Ici l'indicateur de Luenberger indique un résultat < 0 qui signifie que la DMU réalise une perte de productivité entre t et $t + 1$.

Rappelons que dans le premier cas, l'indicateur de Luenberger était > 0 (0.45). Il suggèrerait alors un gain de productivité. On voit bien ici que l'indicateur est réellement sensible aux variations de quantités et qu'il ne permet pas de caractériser les variations de productivité. Nous allons désormais montrer que le même problème persiste dans le graphe.

3.2 L'indicateur standard de Luenberger dans le graphe.

D'après notre exemple,

TABLE 4.2 – Exemple numérique

Cas 1	Cas 2
$z_t^1 = (1, \frac{4}{5})$	$z_t^2 = (1, \frac{4}{5})$
$z_{t+1}^1 = (1, \frac{5}{4})$	$z_{t+1}^2 = (10, \frac{25}{2})$
$Eff_t^1 = (1, 1)$	$Eff_t^2 = (1, 10)$
$Eff_{t+1}^1 = (1, 2)$	$Eff_{t+1}^2 = (10, 20)$

Dans le premier cas : $z_t^1 = (x_{1,t}, y_{1,t})$ et $z_{t+1}^1 = (x_{1,t+1}, y_{1,t+1})$. Il vient que :

$$(i) \vec{D}_{t+1}(x_t, y_t, 1, 1) = \sup\{(1 - \delta, \frac{3}{4} + \delta) \in T^{t+1}\}. \text{ Ainsi } \frac{3}{4} + \delta = 2(1 - \delta) \text{ et } \delta^* = \frac{5}{12}$$

$$(ii) \vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, 1, 1) = \sup\{(1 - \delta, \frac{5}{4} + \delta) \in T^{t+1}\} \text{ donc } \delta^* = \frac{3}{12}$$

$$(iii) \vec{D}_t(x_t, y_t, 1, 1) = \sup\{(1 - \delta, \frac{3}{4} + \delta) \in T^t\} \text{ so } \frac{3}{4} + \delta = 1 - \delta \text{ et } \delta^* = \frac{1}{8}$$

$$(iv) \vec{D}_t(x_{t+1}, y_{t+1}, 1, 1) = \sup\{(1 - \delta, \frac{5}{4} + \delta) \in T^t\}, \text{ en conséquence } \delta^* = -\frac{1}{8}$$

$$L^{g,1} = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{12} - \frac{3}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{12} \right) = 0.21 \quad (4.12)$$

L'indicateur de Luenberger est > 0 , il suggère un gain de productivité entre t et $t+1$.

Dans le second cas : $z_t^2 = (x_{2,t}, y_{2,t}) = (1, \frac{3}{4})$ et $z_{t+1}^2 = (x_{2,t+1}, y_{2,t+1}) = (10, \frac{25}{2})$. Avec

$z_{t+1}^2 = 10z_{t+1}^1$. Comme précédemment la DMU utilise une combinaison productive différente du cas 1 mais elle a la même efficacité. L'indicateur de productivité de Luenberger est calculé de la manière suivante :

$$(i) \vec{D}_{t+1}(x_t, y_t, h, k) = \frac{5}{12}$$

$$(ii) \vec{D}_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}, h, k) = \sup\{\delta : (10 - \delta, \frac{25}{2} + \delta) \in T^{t+1}\} \text{ donc } \frac{25}{2} + \delta = 2(10 - \delta) \\ \text{et } \delta = \frac{15}{6}$$

$$(iii) \vec{D}_t(x_t, y_t, h, k) = \frac{1}{8}$$

$$(iv) \vec{D}_t(x_{t+1}, y_{t+1}, h, k) = \sup\{\delta : (10 - \delta, \frac{25}{2} + \delta) \in T^t\} \text{ donc } \delta = -\frac{5}{4}$$

$$L^{g,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{5}{12} - \frac{15}{6} + \frac{1}{8} + \frac{5}{4} \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{17}{24} \right) = -0.35 \quad (4.13)$$

L'indicateur de Luenberger est < 0 signifiant que la DMU a réalisé une perte de productivité entre t et $t+1$, or ce n'est pas le cas. De plus rappelons que dans le cas précédent il était $= 0.021$ donc > 0 . Encore une fois l'indicateur conduit à des résultats contradictoires entre le cas 1 et 2. Sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants l'indicateur standard de Luenberger ne permet pas d'estimer les variations de productivité.

La conclusion précédente résulte du fait que la directionnelle est homogène de degré 1 sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Elle satisfait donc l'axiome de commensurabilité faible. Nous allons conforter ce propos en construisant un indicateur de Luenberger basé désormais sur une proportionnelle. Nous montrons que celui-ci est bien invariant. Cette propriété vient du fait que la fonction sur laquelle il est construit, est homogène de degré 0. Les mesures non radiales vérifient l'axiome de commensurabilité forte.

4 L'indicateur proportionnel de Luenberger.

Boussemart et al. (2003) définissent un indicateur de Luenberger construit à partir de la mesure proportionnelle de Briec (1997). La proportionnelle est un cas particulier de la directionnelle où $g^i = x$ and $g^o = y$. Les propriétés axiomatique de cette fonction sont étudiées dans Briec (1997), Chambers, Chung et Färe (1998).

4.1 L'indicateur proportionnel de Luenberger en output.

Nous pouvons définir la proportionnelle en output comme suit :

$$D_t^\infty(x^t, y^t) = \max_{\delta} \{ \delta \geq 0; (x^t, (1 + \delta)y^t) \in T \} = DF_t^o(x^t, y^t) - 1 \quad (4.14)$$

L'indicateur de Luenberger basé sur cette mesure est donné par :

$$L^o(x^t, y^t, x^{t+1}, y^{t+1}, 0, k) = \frac{1}{2} [D_{t+1}^{\infty, o}(x^t, y^t) - D_{t+1}^{\infty, o}(x^{t+1}, y^{t+1}) + D_t^{\infty, o}(x^t, y^t) - D_t^{\infty, o}(x^{t+1}, y^{t+1})] \quad (4.15)$$

Dans le premier cas, pour chaque δ on a :

(i) $(1 - \delta, \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta) \in T^{t+1}$ donc $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 2$ donc $\delta^* = \frac{3}{2}$

(ii) $(1 - \delta, \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\delta) \in T^{t+1}$ ainsi $\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\delta = 2$, il résulte que $\delta^* = \frac{3}{5}$

(iii) $(1 - \delta, \frac{3}{4} + \frac{4}{5}\delta) \in T^t$. Dans ce cas $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 1$ et $\delta^* = \frac{1}{4}$

(iv) $(1 - \delta, \frac{5}{4} + \delta) \in T^t$. En conclusion $\delta^* = \frac{1}{5}$

$$L_p^{o,1} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right] = 0.675 \quad (4.16)$$

L'indicateur de productivité de Luenberger indique ici un gain de productivité entre t et $t+1$.

Dans le second cas : $z_{t+1}^2 = (x_{t+1}, y_{t+1}) = (10, \frac{25}{2})$. Il vient que,

(i) $(\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta) \in T^{t+1}$, donc $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 2$ et $\delta^* = \frac{3}{2}$

(ii) $(\frac{25}{2} + \frac{25}{2}\delta) \in T^{t+1}$, il vient que $\frac{25}{2} + \frac{25}{2}\delta = 20$, soit $\delta^* = \frac{3}{5}$

(iii) $(\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta) \in T^t$, de fait $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 1$ et $\delta^* = \frac{1}{4}$

(iv) $(\frac{25}{2} + \frac{25}{2}\delta) \in T^t$. En conséquence $\delta^* = \frac{1}{5}$

$$L_p^{o,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right] = 0.675 \quad (4.17)$$

L'indicateur de Luenberger en output basé sur la fonction proportionnelle est bien invariant. Il reste identique dans les deux cas contrairement à l'indicateur standard, ce qui est normal.

4.2 L'indicateur proportionnel de Luenberger dans le graphe.

Dans le premier cas :

(i) $(1 - \delta, \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta) \in T^{t+1}$, donc $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 2(1 - \delta)$ et $\delta^* = \frac{3}{7}$

(ii) $(1 - \delta, \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\delta) \in T^{t+1}$, ainsi $\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\delta = 2(1 - \delta)$, il résulte que $\delta^* = \frac{3}{13}$

(iii) $(1 - \delta, \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta) \in T^t$. Dans ce cas $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 1 - \delta$ et $\delta^* = \frac{1}{9}$

(iv) $(1 - \delta, \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\delta) \in T^t$. En conclusion $\delta^* = \frac{1}{9}$

$$L_p^{g,1} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{7} - \frac{3}{13} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right] = 0.105. \quad (4.18)$$

L'indicateur de productivité de Luenberger indique ici un gain de productivité entre t et

$t + 1$.

Dans le second cas : $z_{t+1}^2 = (x_{t+1}, y_{t+1}) = (10, \frac{50}{4})$. Il vient que,

(i) $(1 - \delta, \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta) \in T^{t+1}$, donc $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 2(1 - \delta)$ et $\delta^* = \frac{3}{7}$

(ii) $(10 - 10\delta, \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\delta) \in T^{t+1}$, ce qui induit $\frac{25}{2} + \frac{25}{2}\delta = 2(10 - 10\delta)$, soit $\delta^* = \frac{15}{65}$, soit $\frac{3}{13}$

(iii) $D_t^\infty(x_t, y_t, \delta) = (1 - \delta, \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta) \in T^t$, donc $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\delta = 1 - \delta$. Il vient que $\delta^* = \frac{1}{9}$

(iv) $(10 - 10\delta, \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\delta) \in T^t$, donc $\delta^* = -\frac{10}{90}$

$$L_p^{g,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{7} - \frac{3}{13} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right] = 0.105. \quad (4.19)$$

Ici encore l'indicateur de Luenberger proportionnel est bien invariant au même titre que l'indice de Malmquist, alors que l'indicateur standard de Luenberger ne permet pas de caractériser les variations de productivité. Ceci résulte du degré d'homogénéité de la fonction distance directionnelle.

Le tableau 4.3 récapitule les résultats issus de l'exemple numérique. Il prouve les incohérences de l'indicateur standard de Luenberger lorsque la technologie de production est à rendements d'échelle constants.

TABLE 4.3 – Résultats de l'exemple numérique pour les indicateurs de Malmquist et de Luenberger

		CAS 1		CAS 2	
		Variation d'efficacité		Variation d'efficacité	
OUTPUT	$z_t = (1, \frac{4}{5})$ et $z_{t+1} = (1, \frac{5}{4})$			$z_t = (1, \frac{4}{5})$ et $z_{t+1} = (10, \frac{50}{4})$	
L'indice de Malmquist	$M^o = 1.5625 > 1$	+		$M^o = 1.5625 > 1$	+
L'indicateur de Luenberger	$L^o = 0.45 > 0$	+		$L^o = -1.8 < 0$	-
L'indicateur Proportionnel	$L_o^\infty = 0.675 > 0$	+		$L_o^\infty = 0.675 > 0$	+
GRAPHE	$z_t = (1, \frac{3}{4})$ et $z_{t+1} = (1, \frac{5}{4})$			$z_t = (1, \frac{3}{4})$ et $z_{t+1} = (1, \frac{50}{4})$	
L'indicateur de Luenberger	$L^g = 0.21 > 0$	+		$L^g = -0.35 < 0$	-
L'indicateur Proportionnel	$P^\infty = 0.105 > 0$	+		$P^\infty = 0.105 > 0$	+

5 Application empirique : analyse de la performance économique des pays de l'OCDE entre 1974 et 1997, une comparaison entre les indicateurs standard et proportionnel de productivité.

Cette section présente une application empirique qui confirme la précédente conclusion. Cette étude compare la productivité des pays de l'OCDE entre 1974 et 1997 avec les indicateurs de Luenberger directionnel et proportionnel. Le panel de données est issu de l'étude de Boussemart, Briec et Poutineau (1999). L'output correspond au PIB nominal et les input aux stocks de travail et de capital. La productivité des pays considérés est évaluée avec l'indicateur standard Luenberger et l'indicateur proportionnel. L'indicateur de Luenberger standard est défini avec une direction fixe $g = (-1, 1)$.

La table 4.4 présente les résultats pour les indicateurs de productivité de Luenberger proportionnel et directionnel. Plus précisément, elle fournit la moyenne des variations de

Chapitre 4. Commensurabilité faible et forte et sur un paradoxe apparent de l'indicateur de productivité de Luenberger.

productivité pour la période étudiée et sa décomposition. La première colonne donne la productivité moyenne totale des facteurs de production (TFP) pour l'indicateur de Luenberger standard et l'indicateur proportionnel. La seconde colonne fournit les variations de productivité qui résultent d'un changement d'efficacité technique (EC), pour les deux indicateurs. Finalement, la dernière colonne donne les variations de productivité expliquées par le progrès technologique pour les deux indicateurs.

TABLE 4.4 – Productivité, Efficacité et Progrès technique sur la période 1974-1997

	TFP Directionnel	TFP Proportionnel	EC Directionnel	EC Proportionnel	TC Directionnel	TC Proportionnel
Allemagne	5.55	0.7	1.8	0.14	3.76	0.56
Australie	0.07	0.33	-0.5	0.1	0.57	0.23
Autriche	0.43	0.15	0.05	-0.27	0.38	0.42
Belgique	0.78	0.45	0.22	0.13	0.56	0.31
Canada	-23.7	-0.62	-1.76	-0.56	-21.95	-0.07
Danemark	0.69	0.81	0.17	0.23	0.52	0.58
Espagne	0.405	0.1	0.03	0.15	0.38	-0.05
Etats-Unis	15.01	0.11	1.5	0.04	13.5	0.07
Finlande	0.54	1.13	0.1	0.16	0.43	0.97
France	2.73	0.31	0.82	-0.09	1.9	0.4
Irlande	0.89	0.55	0.14	0.64	0.74	-0.09
Islande	0.01	0.37	0	-0.07	0.01	0.44
Italie	3.27	0.47	1.31	0.14	1.96	0.33
Japonn	9.23	0.25	2.25	-0.19	6.98	0.43
Luxembourg	0.01	0.69	0	0.25	0.02	0.45
Norvège	0.49	1.13	0.1	0.07	0.4	1.06
Pays-Bas	0.03	0.41	-0.57	-0.03	0.6	0.45
Royaume-Uni	3.45	0.18	1.87	0.29	1.58	-0.11
Suède	0.66	0.51	0	0	0.67	0.52
Moyenne	1.02	0.39	0.36	0.05	0.65	0.31

On observe que le signe des variations des productivité n'est pas modifié suivant qu'on utilise un indicateur ou un autre. Par contre les comparaisons des productivités sont altérées par le choix de l'indicateur (Danemark, Finlande, Luxembourg, Pays-Bas par exemple). Ces inversions dans les comparaison sont indépendants de toute normalisation du vecteur direction. Lorsqu'on analyse les variations d'efficacité (EC) on constate que les variations peuvent être opposées (Australie-Japon). Il en va de même pour le progrès technique (TC) par exemple pour le l'Espagne ou le Royaume-Unis. On constate aussi une forte dépendance à l'effet de taille dans le cas directionnel (USA). Ces résultats semblent confirmer les implications forte du choix d'un indicateur ou d'un autre dans la direction.

Conclusion.

Ce chapitre montre que lorsque la direction est fixée, la mesure directionnelle ne permet pas de caractériser les variations de productivité sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Ce paradoxe résulte de la structure de la fonction directionnelle sous cette hypothèse. Cette mesure est homogène de degré 1, il résulte qu'elle est sensible aux changements de quantités. Cette propriété est étroitement liée à l'axiome de commensurabilité faible défini par Russel.

Nous introduisons des exemples numériques qui illustrent les incohérences de l'indicateur de Luenberger dans le cadre d'une technologie de production à rendements d'échelle constants. Les résultats montrent que l'indice de Malmquist indique une perte de productivité et un résultat invariant. L'indicateur de Luenberger suggère des conclusions inverses, dans certains cas il exprime un gain de productivité. De plus cet indicateur fournit des résultats instables puisqu'ils varient selon les quantités considérées, à efficacité inchangée.

Une application empirique complète notre démonstration. L'indicateur de productivité Luenberger induit des résultats contradictoires à ceux de l'indice de Malmquist. Puisque les indicateurs basés sur des fonctions distance homogènes de degré 0 sont bien invariants, il est suggérer d'utiliser un indicateur de Luenberger construit sur la mesure proportionnelle plutôt que la directionnelle. La mesure proportionnelle satisfait l'axiome de commensurabilité forte.

Chapitre 5

**Du problème de définition des mesures
de type Färe-Lovell à la proposition
d'une reformulation de ces mesures.**

Bien que les mesures radiales de l'efficacité fournissent un indice de l'efficacité technique, elles ne permettent pas de prendre en compte les variables d'écart¹. Ils représentent pourtant des gains potentiels (réduction d'input/augmentation d'output) pour les DMUs. Ils ont des implications managériales sur la pratique de benchmarking. Il est important de les identifier pour une meilleure gestion des ressources.

Pour surmonter le problème des "slacks", et fournir une mesure plus précise de l'efficacité qui caractérise l'ensemble des marges d'amélioration (inefficacité technique + mix-efficacité), Färe et Lovell ont introduit la "slacks-based" mesure. Celle-ci est capable d'identifier plus précisément un référent sur la frontière efficiente hors de la zone de mix-efficacité. Autrement dit, cette mesure évite d'établir un référent qui se situerait dans la zone de mix-efficacité.

Briec (2001) et Fukuyama et Weber (2009) introduisent une directionnelle "slacks-based" mesure. Il s'agit d'une extension de la "slacks-based" mesure dans le graphe. La directionnelle "slacks-based" mesure permet de mener une analyse de benchmarking simultanée en input et en output.

Malhberg et Sahoo (2011) définissent un indicateur de productivité de Luenberger basé sur ce type de mesure. Il s'agit d'un indicateur non-radial qui permet d'exclure les "slacks" dans le calcul de la productivité.

La première section présente la notion de "slacks", la "slack-based" mesure et la directionnelle "slack-based" mesure. Elle définit également l'indicateur de Luenberger introduit par Malhberg et Sahoo (2011).

Dans un second temps nous mettrons en évidence les problèmes d'infaisabilité liés aux définitions de la "slacks-based" et de la directionnelle "slacks-based" mesure. Nous démontrons à l'aide d'un exemple numérique que ces mesures peuvent fournir des résultats incohérents. Ainsi, elles ne permettent pas de caractériser la technologie et d'évaluer l'efficacité. Nous analysons les implications de ces problèmes sur l'indicateur de productivité de Luenberger construit à partir de ce type de mesures. Cet indicateur peut conduire à des résultats infaisables.

Finalement, nous proposons une mesure alternative qui permet de surmonter ces problèmes en redéfinissant ce type de mesures. Il s'agit d'une reformulation des "slacks-

1. les "slacks"

based" et directionnelle "slacks-based" mesures qui éliminent les résultats négatifs.

1 La "slacks-based" mesure de Färe-Lovell.

1.0.1 Les "slacks".

Il arrive parfois qu'il existe des zones d'inefficience (ou zone de mix-inefficience) sur la frontière. Notamment en présence de "slacks". Ils sont des sources d'inefficience dans la mesure où ils représentent des gains potentiels réalisables. La figure ci-dessous illustre la notion de slacks en input.

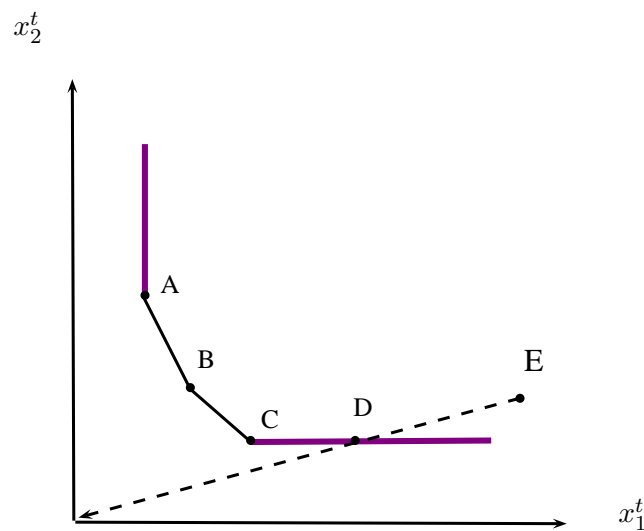


Figure 24 Les "slacks" en input

L'exemple décrit l'existence de gains potentiels d'amélioration pour les firmes D et E en diminuant la quantité de facteur 1. Il faut noter que les mesures radiales décrites précédemment ne permettent pas de prendre en compte ces "slacks". Lorsque l'on projette radialement le point E sur la frontière, on tombe dans la zone de mix-inefficience. Les mesures radiales ne caractérisent pas ce potentiel alors qu'il est réalisable.

Färe et Lovell (1978) introduisent ainsi une mesure qui permet d'éviter de projeter les vecteurs d'input-output dans la zone de "slacks". Elle est définie en input ou en output.

1.0.2 La "slacks-based" mesure de Färe-Lovell.

La "slacks-based" mesure en input.

La "slacks-based" mesure en input évalue la réduction maximale des input, et FL_t^i :

$\mathbb{R}_+^M \times \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est définie par :

$$\widetilde{FL}_i(x, y) = \begin{cases} \inf_{\beta \in \mathbb{R}_+^N} \left\{ \frac{1}{|I(x)|} \sum_{i \in I(x)} \beta_i : \beta \odot x \in L(y) \right\} & \text{si } \beta \odot x \in L(y) \text{ pour } \beta \in \mathbb{R}_+^N \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.1)$$

Il faut noter qu'aucune condition n'est imposée sur les β . Ce point a son importance pour les problèmes qui suivent. La figure suivante caractérise une technologie de production de type Färe-Lovell en input. On constate que B est inefficent et que son benchmark est A. La "slacks-based" mesure permet de projeter B hors de la zone de "slacks".

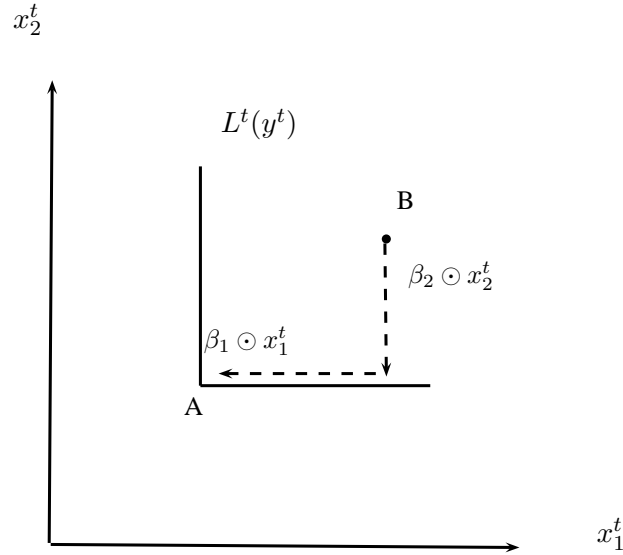


Figure 25 : la mesure de Färe-Lovell en input

Le programme linéaire suivant permet de calculer la mesure de Färe-Lovell en input :

$$\begin{aligned} \widetilde{FL}_i(x, y) = \min & \sum_{i \in I(x)} \frac{\beta_i}{|I(x)|} & (5.2) \\ \text{s.c. } & \beta \odot x \geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i, \\ & y \leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i \\ & \sum_{i=1}^j \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \beta \geq 0. \end{aligned}$$

La "slacks-based" mesure en output.

Elle mesure l'expansion maximale des vecteurs d'output. La "slacks-based" mesure en output est définie par :

$$\widetilde{FL}_o(x, y) = \begin{cases} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}_+^N} \left\{ \frac{1}{|J(y)|} \sum_{j \in J(y)} \gamma_j : \gamma \odot y \in P(x) \right\} \\ \text{si } \gamma \odot y \in P(x) \text{ pour } \gamma \in \mathbb{R}^N \\ +\infty \end{cases} \quad \text{otherwise.} \quad (5.3)$$

Le graphique suivant caractérise une technologie de production orientée en output de type Färe-Lovell. On constate que la "slacks-based" mesure projette B hors de la zone de mix-inefficience, sur A.

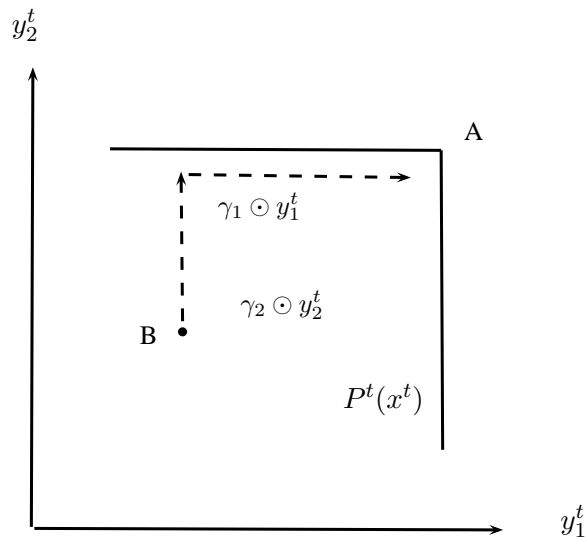


Figure 26 : La mesure de Färe-Lovell en output

La mesure de Färe-Lovell en output peut se calculer par le programme linéaire sui-

vant :

$$\begin{aligned}
 \widetilde{FL}_o(x, y) = \min & \sum_{i \in I(x)} \frac{\gamma_i}{|J(y)|} & (5.4) \\
 \text{s.c. } \gamma \odot y & \leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i, \\
 x & \geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i \\
 \sum_{i=1}^j \theta_i & = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \gamma \geq 0.
 \end{aligned}$$

Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^n$, le sous-ensemble efficace en output de $L(y)$ est défini par :

$$EffL(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^m : u \leq x, u \neq x \Rightarrow x \notin L(y)\} \quad (5.5)$$

De même pour tout $x \in \mathbb{R}_+^m$, l'ensemble efficient en input $P(x)$ est défini par :

$$EffP(x) = \{y \in \mathbb{R}_+^n : v \geq y, v \neq y \Rightarrow y \notin P(x)\}. \quad (5.6)$$

D'après Färe et Lovell (1978), le sous-ensemble efficace en input est caractérisé par la mesure de Färe-Lovell. Cela signifie que $FL_i(x, y) = 1 \iff x \in EffL(y)$. Dans le cas des output, le résultat est vrai seulement pour les vecteurs strictement positifs. Si $y > 0$ alors $FL_o(x, y) = 1 \iff y \in EffP(x)$.

2 La version directionnelle de la "slacks-based" mesure.

2.1 La directionnelle "slacks-based" mesure en input.

Elle mesure la réduction minimale des vecteurs d'input. En direction de $h = (1, 1)$, la directionnelle "slacks-based" mesure en input est définie par :

$$DFL^i(x, y; h) = \begin{cases} \inf_{\theta \in \mathbb{R}_+^{I(g)}} \left\{ \frac{1}{|I(g)|} \sum_{n \in I(g)} \theta_n : x - \theta \odot h \in L(y) \right\} & \text{si } x \in L(y) \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.7)$$

Mahlberg et Sahoo en (2011) utilisent la définition suivante :

$$\widetilde{DFL}^i(x, y; g) = \begin{cases} \max_{\theta \in \mathbb{R}_+^{I(g)}} \left\{ \frac{1}{|I(g)|} \sum_{n \in I(g)} \theta_n : x - \theta \odot h \in L(y) \right\} & \text{s'il existe un } \theta : x - \theta \odot h \in L(y) \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.8)$$

L'indicateur de productivité de Luenberger construit à partir de la directionnelle "slacks-based" mesure en input est défini comme suit. En sélectionnant la direction $g = (h, 0)$:

$$LFL^i(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, h) = \frac{1}{2} \left(\widetilde{DFL}_t^i(x^t, y^t, h) - \widetilde{DFL}_t^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) \right. \\ \left. + \widetilde{DFL}_{t+1}^i(x^t, y^t, h) - \widetilde{DFL}_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) \right) \quad (5.9)$$

2.2 La directionnelle "slacks-based" mesure en output.

Elle mesure l'expansion maximale des vecteurs d'output vers un point efficient de la frontière. En direction $k = (1, 1)$, la directionnelle "slacks-based" mesure est définie par :

$$\widetilde{DFL}^o(x, y; k) = \begin{cases} \sup_{\theta \in \mathbb{R}_+^{I(g)}} \left\{ \frac{1}{|I(g)|} \sum_{n \in I(g)} \theta_n : y + \theta \odot k \in P(x) \right\} & \text{si } y + \theta \odot k \in P(x) : \theta \in \mathbb{R}^N \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.10)$$

L'indicateur de productivité de Luenberger en output avec $g=(0,k)$, construit à partir de la directionnelle "slacks-based" mesure est défini par :

$$\begin{aligned}
 LFL^o(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, k) &= \frac{1}{2} \left(\widetilde{DFL}_t^o(x^t, y^t, k) - \widetilde{DFL}_t^o(x^{t+1}, y^{t+1}, k) \right. \\
 &\quad \left. + \widetilde{DFL}_{t+1}^o(x^t, y^t, k) - \widetilde{DFL}_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}, k) \right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

3 Problèmes d'infaisabilités relatifs à la définition de la mesure de Färe-Lovell.

3.1 Remarque sur les problèmes d'infaisabilité des vecteurs de production de la "slacks-based" mesure.

Nous considérons un ensemble d'input à deux dimensions, décrit dans la figure 27 ci-dessous.

$L(1) = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}$. Il résulte que $\widetilde{FL}^i(1, 1, 1) = FL^i(1, 1, 1) = 1$ et le vecteur des input $(1, 1)$ appartient à $\text{Eff}L(1)$. Il est d'ailleurs le seul point efficient. On considère que ϵ est un réel positif très petit. Par construction, il résulte que $FL_i(2, 1 - \epsilon, 1) = +\infty$ puisque $(2, 1 - \epsilon) \notin L(1)$.

Que se passe-t-il lorsque l'on minimise la somme des réductions proportionnelles d'input en calculant $\widetilde{FL}^i(2, 1 - \epsilon, 1)$?

Nous obtenons que :

$$\begin{aligned}
 \widetilde{FL}^i(2, 1 - \epsilon, 1) &= \inf_{\beta \in \mathbb{R}_+^2} \left\{ \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} : (\beta_1 2, \beta_2(1 - \epsilon)) \in L(1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \epsilon} \right] < 1.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

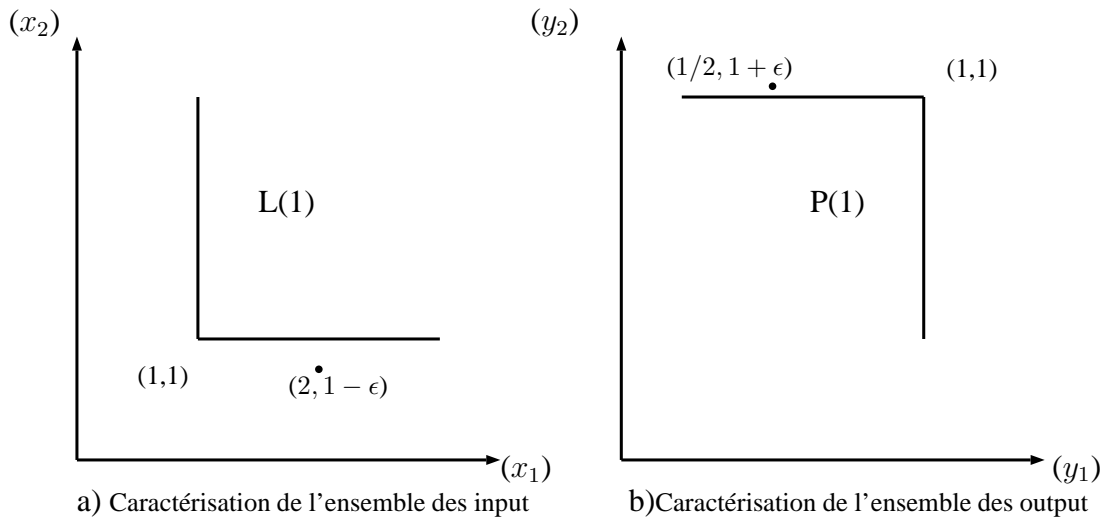
avec

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{1}{1 - \epsilon}.$$

La "slacks-based" mesure en input ne permet pas de caractériser l'appartenance de

tous les input dans l'ensemble des input $L(1)$. La mesure de Debreu Farrell indiquerait $\widetilde{DF}(2, 1 - \epsilon, 1) > 1$. Dans notre cas, \widetilde{FL}^i est < 1 . Clairement la mesure de Färe-Lovell ne permet pas de caractériser l'ensemble des input et donc la technologie de production.

Figure 27 Exemple numérique



Considérons désormais la mesure définie en output.

Dans notre exemple :

$P(1) = \{(y_1, y_2) : y_1 < 1, y_2 < 2\}$. Ainsi $\widetilde{FL}^o(2, 2, 1) = FL_o(2, 2, 1) = 1$ et le vecteur d'output $(2, 2)$ appartient à $\text{Eff}P(1)$. En effet le seul point efficient est le vecteur de production $(2, 2)$. On considère ϵ comme un réel positif proche de zéro.

Il résulte que :

$FL^o(1/2, 1 + \epsilon, 1) = +\infty$ puisque $(1/2, 1 + \epsilon) \notin P(1)$. Que se passe-t-il lorsque l'on souhaite maximiser la somme proportionnelle de ce vecteur en calculant $\widetilde{FL}^o(1/2, 1 + \epsilon, 1)$?

$$\begin{aligned} \widetilde{FL}^o(1/2, 1 + \epsilon, 1) &= \sup_{\gamma \in \mathbb{R}_+^2} \left\{ \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} : (\gamma_1/2, \gamma_2(1 + \epsilon)) \in P(1) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[2 + \frac{1}{1 + \epsilon} \right] > 1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

avec

$$\gamma_1 = 2 \quad \text{and} \quad \gamma_2 = \frac{1}{1 + \epsilon}.$$

La maximisation de la somme des expansions proportionnelles des output ne caractérise pas l'ensemble de tous les output appartenant à l'ensemble des output $P(1)$.

Clairement la mesure de Färe-Lovell en output ne permet pas de définir l'ensemble des output. En effet, elle indique un résultat > 1 alors que pour la Debreu-Farrell $\widetilde{DF}^o(2, 1 - \epsilon, 1) < 1$.

3.2 Remarque sur les problèmes d'infaisabilité des directionnelles "slacks-based" mesures.

En sélectionnant la direction $h = (1, 1)$ et en considérant l'exemple numérique, nous avons que :

$$\begin{aligned} \widetilde{DFL}^i(2, 1 - \epsilon, 1; 1, 1) &= \max_{\theta \in \mathbb{R}_+^2} \left\{ \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) : (2 - \theta_1, 1 - \epsilon - \theta_2) \in L(1) \right\} \\ &= \frac{(1 - \epsilon)}{2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

avec

$$\theta_1^* = 1 \quad \text{and} \quad \theta_2^* = -\epsilon$$

Encore une fois, on remarque que la fonction distance directionnelle Färe-Lovell ne permet pas de caractériser l'ensemble des input. On devrait avoir $\widetilde{DFL}^i(x, y; g) < 0$.

En output, $P(1) = \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}$. En sélectionnant la direction $k = (1, 1)$ et en considérant l'exemple numérique, il vient que :

$$\begin{aligned} \widetilde{DFL}^o\left(1, \frac{1}{2}, 1 + \epsilon; 1, 1\right) &= \max_{\theta \in \mathbb{R}_+^2} \left\{ \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) : \left(\frac{1}{2} + \theta_1, 1 - \epsilon + \theta_2\right) \in L(1) \right\} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)}{2} > 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

où

$$\theta_1^* = 1/2 \quad \text{and} \quad \theta_2^* = -\epsilon$$

Encore une fois la fonction distance directionnelle Färe-Lovell orientée en output ne permet de caractériser l'ensemble des output (on devrait avoir $DFL^o(x, y; g) < 0$).

4 Implications sur l'indicateur de productivité de Luenberger construit à partir de la directionnelle "slacks-based" mesure.

Mahlberg et Sahoo (2011) introduisent un indicateur de productivité de Luenberger non radial afin d'éviter les problèmes liés aux slacks. Plus particulièrement il s'agit d'un indicateur de productivité de Luenberger construit à partir d'une directionnelle "slacks-based" mesure. Ce qui suit montre qu'il existe des problèmes d'infaisabilité relatifs à cette construction issue des mesures précédentes. Pour cela un exemple numérique démontre que l'indicateur de Luenberger, construit à partir de la directionnelle "slacks-based measure", peut conduire à des résultats incohérents. Cet exemple est décrit dans les figures suivantes.

4.1 Problème de l'indicateur de Luenberger en input, construit à partir d'une directionnelle "slacks-based" mesure.

Considérons notre exemple :

$$L^t(1) = \{(x_1, y_1) : x_1 \geq 1/2, x_2 \geq 1/2\}$$

et,

$$L^{t+1}(1) = \{(x_1, y_1) : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}$$

.

avec $x^t = (1, 1)$, $x^{t+1} = (2, 1 - \epsilon)$ et $h = (1, 1)$.

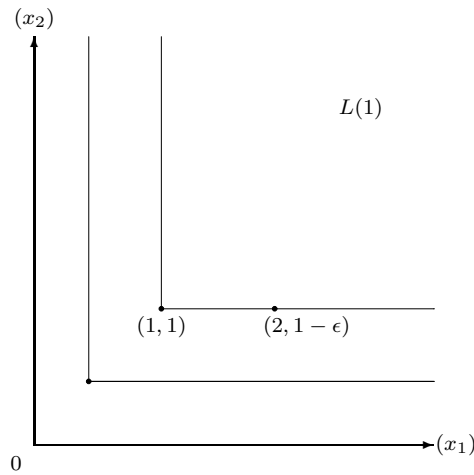


Figure 28 Caractérisation de l'ensemble des inputs

Nous calculons ici l'indicateur de Luenberger en input, qui se base sur une version directionnelle de la "slacks-based" mesure. Notre exemple implique :

$$\widetilde{DFL}_t^i(x^t, y^t, h) = 0;$$

$$\widetilde{DFL}_t^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) = \frac{(1-\epsilon)}{2};$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^i(x^t, y^t, h) = \frac{1}{2};$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) = \frac{2-\epsilon}{2}.$$

L'indicateur de Luenberger construit à partir d'une directionnelle "slacks-based" mesure est défini par :

$$LFL^i(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, h) = \frac{1}{2} \left[0 - \frac{(1-\epsilon)}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{(2-\epsilon)}{2} \right) \right] = \frac{\epsilon-1}{2} < 0 \quad (5.16)$$

Le résultat devrait pourtant être l'inverse (> 0).

Considérons désormais le cas standard où l'indicateur de Luenberger. Il est construit à partir de la fonction distance directionnelle classique. L'exemple numérique induit :

$$D_t^i(x^t, y^t; h) = 0;$$

$$D_t^i(x^{t+1}, y^{t+1}; h) = -\epsilon;$$

$$D_{t+1}^i(x^t, y^t; h) = \frac{1}{2};$$

$$D_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1}; h) = 1/2 - \epsilon;$$

$$L^i(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, h) = \frac{1}{2}[0 - (-\epsilon) + \frac{1}{2} - (\frac{1/2 - \epsilon}{2})] = \epsilon > 0 \quad (5.17)$$

Ceci contredit le résultat issu de la directionnelle "slacks-based" mesure.

4.2 Problème de l'indicateur de Luenberger en output construit à partir d'une directionnelle "slacks-based" mesure.

Considérons désormais une orientation en output avec $g = (0, k)$ et l'exemple numérique est décrit dans la figure ci-dessous :

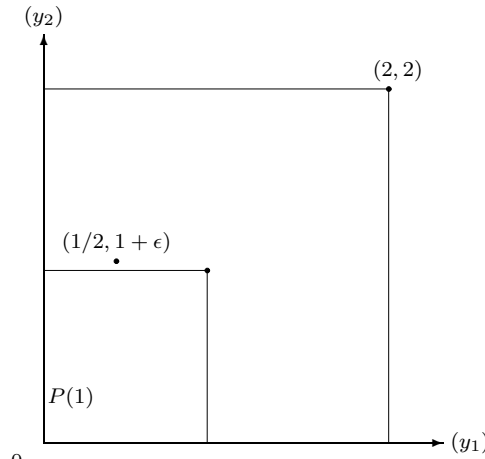


Figure 29 Caractérisation de l'ensemble des outputs

Nous calculons ici l'indicateur de Luenberger en output construit à partir de la directionnelle "slacks-based" mesure. En considérant notre exemple numérique : $P^t(1) = \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}$ et

$$P^{t+1}(1) = \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 2, 0 \leq y_2 \leq 2\}.$$

avec $x_t = x_{t+1} = 1$, $y^t = (1, 1)$, $y^{t+1} = (1/2, 1 + \epsilon)$ et $k = (1, 1)$ on obtient :

$$\widetilde{DFL}_t^o(x^t, y^t; k) = 0;$$

$$\widetilde{DFL}_t^o(x^{t+1}, y^{t+1}; k) = \frac{(1/2 - \epsilon)}{2};$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^o(x^t, y^t; k) = 1;$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}; k) = \frac{5/2 - \epsilon}{2};$$

donc,

$$LFL^o(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, k) = \frac{1}{2} \left[0 - \frac{(1/2 + \epsilon)}{2} + 1 - \left(\frac{(5/2 + \epsilon)}{2} \right) \right] = \frac{2\epsilon - 1}{4} < 0 \quad (5.18)$$

Nous devrions obtenir le résultat inverse. Pour le montrer considérons l'indicateur standard avec le même exemple.

Dans le cas de l'indicateur standard de Luenberger en output, basé sur une fonction directionnelle classique et en considérant notre exemple numérique, on a :

$$D_t^o(x^t, y^t; k) = 0;$$

$$D_t^o(x^{t+1}, y^{t+1}; k) = -\epsilon;$$

$$D_{t+1}^o(x^t, y^t, 0, k) = 1;$$

$$D_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}, k) = 1 - \epsilon;$$

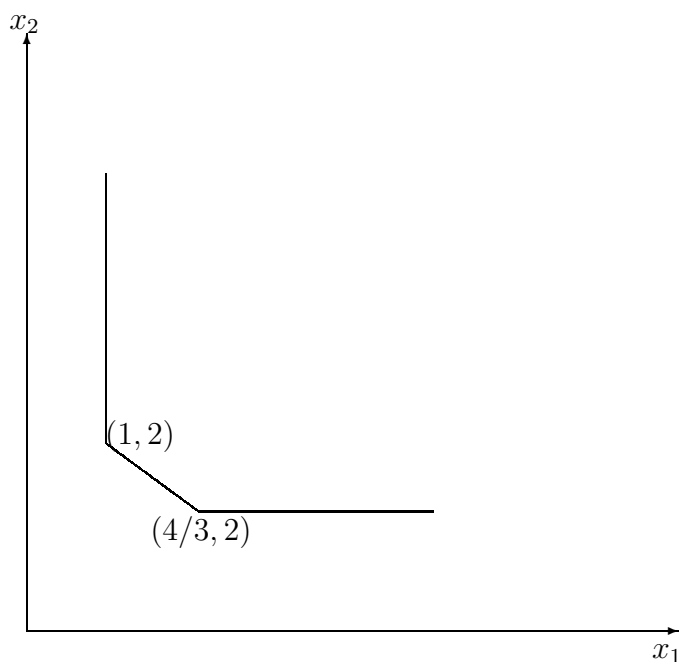
si bien que :

$$L^o(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, k) = \frac{1}{2} [0 - 1/2 + 1 - (1 - \epsilon)] = \frac{1}{2} [\epsilon - 1/2].$$

Ainsi, $L_o(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, k) > 0$.

On remarque que l'indicateur de productivité de Luenberger en output est positif alors qu'il était négatif dans le cas de l'indicateur de Luenberger de type Färe-Lovell. Ceci est dû au fait que la fonction distance directionnelle de Färe-Lovell ne permet pas de caractériser l'ensemble des output (on devrait avoir $DFL_o(x, y; g) > 0$).

4.3 Problématique sur la définition des β .



$$\widetilde{FL}^i = \frac{1}{2} [(\beta_1 1, \beta_2 2) \in L(1)]$$

$$\beta_1 * 1 = \frac{4}{3} \implies \beta_1 = \frac{4}{3} \text{ and, } \beta_2 * 2 = 1 \implies \beta_2 = \frac{1}{2} \text{ donc,}$$

$$\widetilde{FL}^i = 1/2(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}) = 0.91 < 1$$

On remarque que sans imposer de conditions sur les β_i la $\widetilde{FL}_i < 1$. Ceci suggère une perte de productivité, or ce n'est pas le cas.

5 Redéfinition des mesures de type Färe-Lovell.

Nous suggérons une modification des mesures précédentes fin d'éviter les problèmes d'infaisabilité. Dans un premier temps nous proposons de redéfinir la "slacks-based" mesure en input et en output. Dans un second temps, nous reformulerons la directionnelle

"slack-based" mesure afin d'éviter les problèmes d'infaisabilité. Enfin nous analyserons les implications de cette nouvelle mesure sur un indicateur de productivité de Luenberger.

5.1 Redéfinition de la "slacks-based" mesure.

Redéfinition de la "slacks-based" mesure en input :

On définit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M$ l'ensemble :

$$B(x) = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{|I(x)|} \sum_{i \in I(x)} \beta_i \leq \widetilde{FL}_i(x, y) \right\} \quad (5.19)$$

On peut établir le résultat suivant :

Lemme 5.1 *Pour tout $(x, y) \in T$, et $(x, y) \notin T$, alors :*

Il existe $\beta \in B(x)$ et $i \in I(x)$ tels que $\beta_i > 1$.

Preuve : $(x, y) \notin T$ si et seulement si $x \notin L(y)$. Si $\beta_i \leq 1$ pour tout $\beta \in B(x)$, $\beta \odot x \in L(y)$. Puisque $\beta \odot x \leq x$, de part l'hypothèse de libre distribution $x \in L(y)$. Ainsi $x \notin L(y)$ implique qu'il existe $i \in I(x)$ tels que $\beta_i > 1$.

On peut modifier la mesure de Färe-Lovell en input et la définir par :

$$\widehat{FL}^i(x, y) = \begin{cases} \sup_{\beta \in B(x)} \frac{1}{|I(x) \cap I(\beta-1)|} \sum_{i \in I(x) \cap I(\beta-1)} \beta_i & \text{si } DF^i(x, y) \geq 1 \\ FL^i(x, y) & \text{si } DF^i(x, y) \leq 1 \end{cases} \quad (5.20)$$

avec $i \in I(\beta - 1)$ qui signifie que $\beta_i > 1$.

En considérant l'exemple numérique en input, on obtient :

$$\widehat{FL}^i(2, 1 - \epsilon, 1) = \beta_2 = \frac{1}{1 - \epsilon} > 1. \quad (5.21)$$

Le résultat est ainsi en accord avec le fait que $(2, 1 - \epsilon, 1)$ n'est pas faisable. \widehat{FL}^i est bien positive contrairement au résultat de l'équation (3.2).

Les propriétés ci-dessous permettent de caractériser la technologie :

Lemme 5.2 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M$: (a) $x \in L(y) \iff \widehat{FL}^i(x, y) \leq 1$.

Preuve : A partir du lemme 5.1, $\widehat{FL}^i(x, y) > 1$ implique que $x \notin L(y)$. Aussi $x \in L(y)$ implique que $\widehat{FL}^i(x, y) \leq 1$. Dans Färe et Lovell (1978), $x \in L(y)$ implique $FL^i(x, y) \leq 1$, cependant, par construction $\widehat{FL}^i(x, y) = FL^i(x, y) \leq 1$. \square

Redéfinition de la "slacks-based" mesure en output :

On définit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M$ l'ensemble

$$C(y) = \left\{ \gamma \in \mathbb{R}^M : \frac{1}{|J(y)|} \sum_{j \in J(y)} \gamma_j \geq \widetilde{FL}^o(x, y) \right\}. \quad (5.22)$$

On peut établir le résultat suivant :

Lemme 5.3 Pour tout $(x, y) \in T$ et $(x, y) \notin T$, alors :

Il existe $\gamma \in C(y)$ et un $j \in J(y)$ tels que $\gamma_j < 1$.

Preuve : $(x, y) \notin T$ si et seulement si $y \notin P(x)$. Si $\gamma_j \geq 1$ pour tout $\gamma \in C(y)$, alors $\gamma \odot y \in P(x)$. Puisque $\gamma \odot y \leq y$, de part l'hypothèse de libre distribution $y \in P(x)$. Ainsi $y \notin P(x)$ implique qu'il existe $j \in J(y)$ tels que $\gamma_j < 1$.

On peut redéfinir la "slacks-based" mesure en output de la manière suivante :

$$\widehat{FL}^o(x, y) = \begin{cases} \inf_{\gamma \in C(y)} \frac{1}{|J(x) \cap J(-\gamma+1)|} \sum_{j \in J(y) \cap J(-\gamma+1)} \gamma_j & \text{si } DF_o(x, y) > 1 \\ FL_o(x, y) & \text{si } DF_o(x, y) \leq 1 \end{cases} \quad (5.23)$$

Notons que $j \in J(-\gamma+1)$ implique que $\gamma_j < 1$.

Dans notre exemple en output, on a

$$\widehat{FL}^o(1/2, 1 + \epsilon, 1) = \gamma_2 = \frac{1}{1 + \epsilon} < 1. \quad (5.24)$$

Ainsi $\widehat{FL}^o < 1$.

Les propriétés ci-dessous permettent de caractériser la technologie :

Lemme 5.4 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M$: $y \in P(x) \iff \widehat{FL}^o(x, y) \geq 1$.

Preuve : A partir du lemme 5.3, $\widehat{FL}^0(x, y) < 1$ implique que $y \notin P(x)$. Aussi $y \in P(x)$ implique que $\widehat{FL}^0(x, y) \geq 1$. Dans Färe and Lovell (1978), $y \in P(x)$ implique $FL^o(x, y) \geq 1$, cependant, par construction $\widehat{FL}^o(x, y) = FL^o(x, y) \geq 1$. \square

Dans ce qui suit nous combinons la construction précédente dans le cas de la directionnelle.

5.2 Redéfinition de la directionnelle "slacks-based" mesure.

La directionnelle "slacks-based" mesure. On définit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^M$ l'ensemble

$$H(x) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{|I(h)|} \sum_{i \in I(h)} \theta_i \geq \widetilde{DFL}_i(x, y, h) \right\} \quad (5.25)$$

On peut établir le résultat suivant :

Lemme 5.5 *Pour tout $(x, y) \in T$, et $(x, y) \notin T$, :*

Il existe $\theta \in H(x)$ et $i \in I(h)$ tels que $\theta_i < 0$.

Preuve : $(x, y) \notin T$ si et seulement si $x \notin L(y)$. Si $\theta_i \geq 0$ pour tout $\theta \in H(x)$, alors $x - \theta \odot h \in L(y)$. Puisque $x - \theta \odot h \in L(y) \leq x$, de par l'hypothèse de libre distribution $x \in L(y)$. En conclusion $x \notin L(y)$ implique qu'il existe un $i \in I(h)$ tel que $\theta_i < 0$.

On peut définir la directionnelle "slacks-based" mesure en input de la manière suivante :

$$\widehat{DFL}^i(x, y; h) = \begin{cases} \inf_{\theta \in H(x)} \frac{1}{|I(x) \cap I(-\theta)|} \sum_{i \in I(x) \cap I(-\theta)} \theta_i & \text{si } D^i(x, y; h) < 0 \\ DFL^i(x, y; h) & \text{si } D^i(x, y; h) \geq 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Dans ce cas, on remarque que $i \in I(-\theta)$ signifie que $\theta_i < 0$.

En considérant l'exemple en input et en sélectionnant la direction $h = (1, 1)$

$$\widehat{DFL}^i(2, 1 - \epsilon, 1; 1, 1) = \theta_2^* = -\epsilon \quad (5.27)$$

\widehat{DFL}^i est bien < 0 contrairement au résultat issu de l'équation (3.5).

Redéfinition de la directionnelle "slacks-based" mesure en output.

$$K(y) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^M : \frac{1}{|K(y)|} \sum_{j \in K(y)} \theta_j \geq \widehat{DFL}^o(x, y, k) \right\}. \quad (5.28)$$

On peut établir le résultat suivant :

Lemme 5.6 *Pour tout $(x, y) \in T$, et $(x, y) \notin T$:*

Il existe des $\theta \in K(y)$ et $j \in J(k)$ tels que $\theta_j < 0$.

Preuve : $(x, y) \notin T$ si et seulement si $y \notin P(x)$. Si $\theta_j \geq 0$ pour tout $\theta \in K(y)$, il vient que $y + \theta \odot h \in P(x)$. Puisque $y + \theta \odot k \in P(x) \geq y$, de par l'hypothèse de libre distribution $y \in P(x)$.

En conclusion $y \notin P(x)$ implique qu'il existe $j \in J(k)$ tel que $\theta_j < 0$. \square

On peut définir la forme modifiée de la directionnelle "slacks-based" mesure en output par :

$$\widehat{DFL}^o(x, y; k) = \begin{cases} \inf_{\theta \in K(y)} \frac{1}{|J(x) \cap J(-\theta)|} \sum_{j \in J(y) \cap J(-\theta)} \theta_j & \text{si } D^o(x, y; k) < 0 \\ DFL^o(x, y; k) & \text{si } D^o(x, y; k) \geq 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

Dans ce cas, on remarque que $j \in J(-\theta)$ signifie que $\theta_j < 0$.

Dans notre exemple, en sélectionnant la direction $k = (1, 1)$ on a :

$$\widehat{DFL}^o\left(1, \frac{1}{2}, 1 + \epsilon; 1, 1\right) = \theta_2^* = -\epsilon \quad (5.30)$$

Le résultat est bien cohérent avec le fait que $(2, 1 - \epsilon, 1)$ n'est pas faisable.

Les définitions suivantes permettent de caractériser la technologie en output :

Lemme 5.7 *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+^M$: $y \in P(x) \iff \widehat{DFL}^o(x, y; k) \geq 0$.*

Preuve : A partir du Lemma 5.6

$\widehat{DFL}^o(x, y; k) > 0$ implique que $y \notin P(x)$. Ainsi $y \in P(x)$ implique que $\widehat{DFL}^o(x, y; k) \leq 0$.

$y \in P(x)$ implique $DFL^o(x, y; k) \leq 0$, aussi, $\widehat{DFL}^o(x, y; k) = DFL^o(x, y; h) \leq 0$. \square

5.3 Implications sur l'indicateur de productivité de Luenberger.

Afin de voir les implications de ces résultats sur l'indicateur de productivité en input nous allons remplacer \widetilde{DFL}^i par \widehat{DFL}^i .

$$\begin{aligned} \widehat{LFL}^i(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, h) &= \frac{1}{2} \left(\widehat{DFL}_t^i(x^t, y^t, h) - \widehat{DFL}_t^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) \right. \\ &\quad \left. + \widehat{DFL}_{t+1}^i(x^t, y^t, h) - \widehat{DFL}_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Revenons à notre exemple numérique en input. Rappelons que $x^t = (1, 1)$, $x^{t+1} = (2, 1 - \epsilon)$ et $h = (1, 1)$ on a :

$$\widehat{DFL}_t^i(x^t, y^t, h) = 0;$$

$$\widetilde{DFL}_t^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) = -\frac{\epsilon}{2};$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^i(x^t, y^t, h) = \frac{1}{2};$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^i(x^{t+1}, y^{t+1}, h) = \frac{2-\epsilon}{2}.$$

$$LFL^i(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, h) = \frac{1}{2} \left[0 - \frac{(\epsilon)}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{2-\epsilon}{2} \right) \right] = \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad (5.32)$$

Ici, il y a bien concordance avec le signe dérivé de l'indicateur standard.

En considérant une orientation en output :

$$\widehat{DFL}_t^o(x^t, y^t, h) = 0;$$

$$\widetilde{DFL}_t^o(x^{t+1}, y^{t+1}, h) = \frac{1}{4};$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^o(x^t, y^t, h) = \frac{1}{2};$$

$$\widetilde{DFL}_{t+1}^o(x^{t+1}, y^{t+1}, h) = \frac{5/2-2\epsilon}{2}.$$

$$LFL^o(x^t, x^{t+1}, y^t, y^{t+1}, h) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(5/2 - 2\epsilon)}{2} + \frac{1}{4} \right] = \epsilon > 0 \quad (5.33)$$

Il y a bien concordance avec le signe dérivé de l'indicateur standard. Rappelons que $LFL^o < 0$ dans (3.12) et qu'il est > 0 dans le cas standard.

Conclusion.

Ce chapitre de thèse met en évidence les problèmes d'infaisabilité des "slacks-based" mesures. Il a été montré que la directionnelle "slacks-based" mesure pose également des problèmes dans sa définition. Il résulte que ces défaillances ont des répercussions sur l'indice de productivité de Luenberger. En effet ce dernier peut indiquer des résultats contradictoires. Après avoir souligné ces limites nous proposons des mesures alternatives. Plus particulièrement, nous suggérons de modifier successivement les définitions de la "slacks-based" mesure et de la directionnelle "slacks-based" mesure. L'extension de ces mesures induit des résultats plus cohérents. Ces nouvelles mesures permettent désormais de caractériser la technologie de production de façon non radiale.

Chapitre 6

Performance de la demande touristique et allocation de ressources marketing : une application au Maroc.

Ce chapitre présente une méthodologie pour déterminer les segments touristiques de marché qui présentent le meilleur potentiel d'amélioration afin de définir les cibles prioritaires pour l'allocation de ressources marketing. Pour cela, nous évaluons la rentabilité espérée de la demande touristique étrangère compte tenu de son instabilité en utilisant l'approche de Markowitz (1952,1959). Initialement ce modèle a vocation à évaluer la performance de portefeuilles d'actifs financiers. Il met en relation la rentabilité espérée d'un portefeuille avec le risque qui lui est associé. Il établit une frontière d'efficience qui caractérisent les portefeuilles optimaux compte tenu du niveau de risque. Notre étude applique ce modèle à l'analyse de la performance touristique de la demande étrangère, en considérant les pays d'origine des touristiques comme les titres financiers au sens de Markowitz. Plus particulièrement le portefeuille étudié ici sera le Maroc. Nous associons la rentabilité à la demande de nuitées hôtelières, et le risque à la variabilité de cette demande. En effet le prix des chambres fluctue peu tandis que la demande varie d'une année à l'autre.

Puis, après avoir déterminé l'ensemble (in)efficient, nous pouvons analyser quelles sont les marges d'amélioration des pays inefficaces. Le but est d'établir les potentiels d'augmentation de la rentabilité et de diminution du risque. L'expansion de la rentabilité peut être mise en oeuvre par des campagnes de marketing visant à promouvoir la destination. La diminution du risque de fluctuation passe par une fidélisation de la demande.

Ainsi cette méthodologie permet de déterminer les segments du marché touristique qui doivent constituer les cibles marketing. Il serait inutile d'investir dans un segment à faible potentiel d'amélioration. Clairement, en établissant les segments prometteurs, le but est d'éviter le gaspillage dans l'allocation des ressources marketing.

La première section présente l'importance du tourisme au Maroc, qui vient légitimer cette application. La seconde section établit le cadre d'analyse théorique. Nous définissons le modèle de Markowitz et les fonctions distances dans l'espace moyenne-variance. Ces outils vont permettre de fournir des recommandations managériales. Ces résultats sont exposés dans la troisième section.

1 Le contexte touristique au Maroc.

1.0.1 Importance du secteur touristique dans l'économie Marocaine.

En 2010, le secteur touristique représente 12% du PIB Marocain et 8% de la population active. Il est ainsi un déterminant fondamental de l'économie du pays.

En 2010, plus de 12 millions de touristes ont séjourné au Maroc. Le secteur de l'hébergement constitue une grande partie de la recette touristique. En 2010, le chiffre d'affaire du secteur hôtelier atteint plus de 5 milliards d'euros. Le pays compte plus de 1600 établissements hôteliers, dont 56% d'hôtels de catégorie 1 à 3 étoiles. 25% sont des hôtels 4 étoiles et 24% sont des 5 étoiles. En 2010, la capacité d'accueil était de 175, 000 de lits. Les principales destinations touristiques Marocaines sont Marrakech, Rabat, Tétouan, Agadir, Tanger, Ouarzazate et Fès. Les principaux touristes sont Européens avec la France, l'Espagne, la Belgique, le Royaume-Unis, l'Allemagne et l'Italie.

Les autorités publiques Marocaines ont la volonté de maintenir et développer ce secteur. Pour cela ils ont mis en place un plan stratégique en deux étapes : *La vision 2010* et *La vision 2020*. Ce plan établit un cahier des charges du tourisme sur le long terme.

1.0.2 Importance de la stratégie marketing en tourisme.

Les pays du Maghreb (Algérie, Tunisie, Maroc, Mauritanie, Libye et Sahara) ont une offre touristique similaire. Ils disposent effectivement d'un climat et d'une position géographique méditerranéenne de proximité semblables. La culture et les traditions, bien que différentes d'un pays à l'autre, présentent des similitudes pour les étrangers. Face à cette concurrence, il est de plus en plus difficile pour les destinations d'attirer des touristes.

Moshin (2005) démontre que les touristes choisissent leur destination selon la perception qu'ils en ont.

Le marketing a vocation à agir sur cette perception des touristes potentiels. Dans cette optique, les stratégies marketing en tourisme tendent à promouvoir le territoire. Cette promotion passe par une communication de l'attractivité de la destination. Internet et les médias sont des réseaux privilégiés pour diffuser ces informations.

Compte tenu de l'importance du tourisme et de la volonté des autorités publiques Marocaines, les stratégies marketing en tourisme sont capitales. Toutefois les campagnes de

marketing ont un coût, aussi il est important qu'elles soient efficaces. Notamment lorsque la promotion s'effectue par le biais des pouvoirs publics, il existe en plus un coût des fonds publics. Dans un souci d'efficacité, il faut éviter toute forme de gaspillage.

Ainsi, ce modèle détermine les segments de marchés qui sont prometteurs, compte tenu des préférences du régulateur. Ces segments constitueront les cibles prioritaires en matière d'allocation de ressources marketing. Le but est d'éviter de gaspiller des fonds publics.

2 La théorie moyenne-variance de Markowitz appliquée au secteur touristique.

Cette section présente la méthodologie de cette étude. Dans la lignée de Botti et al. (2012), nous étendons les résultats du modèle de Markowitz à l'analyse de la demande touristique. La demande globale peut être segmentée, nous considérons ici les nationalités en tant que segments. Nous aurions pu admettre d'autres critères de segmentations tels que les facteurs sociaux-démographiques. Ici, les origines des touristes constitueront les actifs financiers au sens du modèle de Markowitz. Les destinations touristiques représentent les portefeuilles, dans notre cas le Maroc.

Nous présentons également la fonction distance de Morey et Morey (1999) comme un outil de benchmarking. Elle indique l'expansion maximale de la rentabilité espérée d'un portefeuille de touristes, compte tenu du risque qui lui est associé. Elle mesure également la contraction maximale du risque compte tenu de la rentabilité. Pour une vision plus généraliste nous introduisons la directionnelle qui permet de mener les analyses précédentes de façon simultanée.

2.1 Le Modèle de Markowitz.

Il met en relation la rentabilité espérée d'un portefeuille compte tenu de ses actifs avec le risque lié à l'incertitude.

La rentabilité espérée.

La rentabilité d'un portefeuille est définie comme la moyenne périodique des rentabilités de chaque titre, pondérées par leur proportion représentative dans le portefeuille.

Soit le portefeuille x , composé de plusieurs segments de marché (pays) notés, $i=1, \dots, n$. $E[R(x)]$ représente la rentabilité espérée touristique globale de la destination x . Elle est définie par :

$$E[R(x)] = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) \quad (6.1)$$

où x_i représente la proportion de la demande d'un pays i dans la demande globale du portefeuille x . Le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ est tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

$$\text{et, } E(R_i) = \bar{R}_{i,t} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T R_{i,t}.$$

Le risque.

On assimile le risque à la variabilité de la demande. La dispersion d'un titre sur une période est mesurée par l'écart-type (ou similairement au carré, par la variance). La variance mesure la moyenne des carrés des écarts entre les taux de rentabilité effectifs et le taux moyen.

$$V[R(x)] = \sum_{i=1}^j \sum_{j=1}^n \text{cov}(R_i, R_j) \quad (6.2)$$

Cette équation caractérise l'écart des rentabilités par rapport à la moyenne, elle définit ainsi le niveau de risque associé au portefeuille x .

L'espace moyenne-variance.

L'espace de Markowitz caractérise l'ensemble des portefeuilles faisables. En supposant que la distribution du taux de rentabilité suit une loi normale, cet espace est défini par :

$$\mathfrak{N} = \left\{ \left\{ \text{Var}[R(x)], E[R(x)] \right\} : x \in \mathfrak{F} \right\} \quad (6.3)$$

La frontière d'efficience caractérise les portefeuilles optimaux. Ceux-ci correspondent aux meilleures combinaisons (risque-rentabilité). L'espace Moyenne-Variance est repré-

senté dans la figure 30.

Préférences, aversion au risque et choix du portefeuille optimal.

Il faut noter qu'il existe plusieurs type de combinaison risque-rentabilité espérée, elles sont caractérisées par les situations A,B et C sur la graphique de la figure 30. On constate que ceux qui souhaitent une rentabilité plus élevée, doivent prendre des risques plus importants. Aussi, les préférences des investisseurs divergent selon leur degré d'aversion au risque.

Situation A : un risquophobe préférera une combinaison à rentabilité faible sans risque.

Situation B : Un individu neutre à l'égard du risque optera pour une combinaison du type risque-rentabilité moyenne.

Alors qu'un investisseur qui aime le risque préférera un portefeuille avec un risque et une rentabilité espérée élevés (situation C). Pour plus de précisions, se référer à la théorie de l'utilité espérée de Von Newman Moorgensten.

Ainsi, pour mesurer la satisfaction des investisseurs il faut prendre en compte leurs préférences. Elles vont être déterminates quant au choix du portefeuille optimal. C'est plus particulièrement l'aversion au risque qui déterminera le type de combinaison préféré.

La fonction d'utilité, pour un niveau d'aversion au risque ($\phi = \frac{\rho}{\mu}$) donné, est définie par :

$$U_{(\rho,\mu)}(x) = \mu E[R(x)] - \rho Var[R(x)] \quad (6.4)$$

avec $\mu, \rho > 0$.

Morey et Morey (1999) puis Briec, Kerstens, and Lesourd (2004), utilisent $\phi = 0.5$.

En connaissant les préférences des individus on peut leur associer un portefeuille optimal. Et ceci au point de tangence de leur fonction d'utilité à la frontière d'efficience.

Le programme linéaire qui définit un portefeuille optimal pour chaque profil d'inves-

tisseurs est :

$$\begin{aligned} \max U &= \phi E[R(x)] - Var[R(x)] \\ \text{s.c } Ax &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

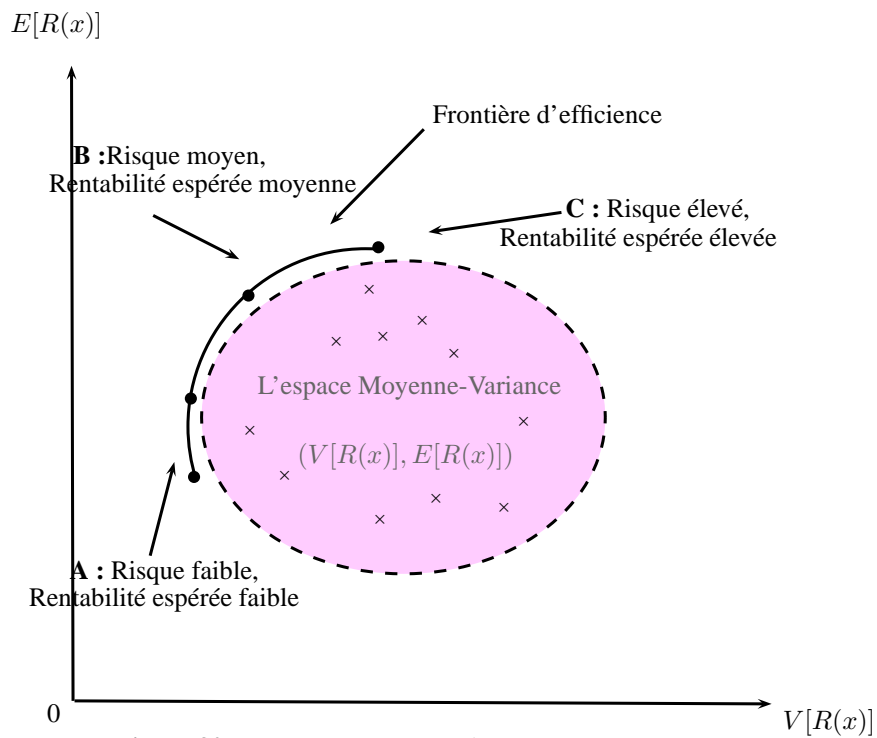


Figure 30 L'espace moyenne-variance

Illustration du modèle avec un exemple numérique.

Selon nos données, considérons le portefeuille constitué par les pays A, l'Allemagne et B, la Belgique décrit ci-dessous :

TABLE 6.1 – Exemple numérique

	A :Allemagne	B : Belgique	X_A	X_B	Variations n-1	
2006	985685	688878	0,58862223	0,41137777	ΔR_A	ΔR_B
2007	988958	667906	0,59688544	0,40311456	0,00332053	-0,03044371
2008	959079	590868	0,6187818	0,3812182	-0,03021261	-0,11534258
2009	895617	582277	0,60600896	0,39399104	-0,06616973	-0,01453963
2010	946323	589418	0,61619961	0,38380039	0,05661572	0,01226392
Total	4775662	3119347	0,60489633	0,39510367		
	Valeurs	estimées pour	$n + 1$			
2011				E(R)	-0,00994166	-0,02940457
2011				var	0,00204388	0,00227799
2011				cov	0,00092276	0,00092276

La rentabilité du marché est donnée par :

$$R_M = \sum_{i=1}^T x_M \bar{R}_M \quad \text{avec} \quad \bar{R}_M = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{Mt} \right)$$

Et la rentabilité espérée du marché est définie par :

$$E(R_M) = X_A E(\bar{R}_A) + X_B E(\bar{R}_B) \text{ avec ,}$$

$$E(R_A) = \sum_{t=1}^5 \Delta R_A$$

$x_M = X_A, X_B$, représentent les proportions respectives de la demande Allemande et Belge dans la demande globale.

$$R_M = X_A \bar{R}_A + X_B \bar{R}_B, \quad \text{avec} \quad \bar{R}_A = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{At} \quad \text{et} \quad \bar{R}_B = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{Bt}$$

$$\bar{R}_A = \frac{1}{5} \cdot 4775662^1 = 955132,$$

$$X_A = \frac{R_A}{R_A + R_B} = \frac{4775662}{775662 + 3119347} = 0.61611961,$$

$$E(R_A) = -0.00994166^2,$$

La rentabilité espérée en 2011 pour le segment A diminuera de 1%.

2.2 Les fonctions distance.

Les fonctions distance projettent les portefeuilles inefficaces sur la frontière efficiente. La fonction directionnelle projette un portefeuille x en direction $g = (-g_V, g_E)$ sur la frontière efficiente. Cette projection correspond à la contraction et l'expansion maximale du risque et de la rentabilité espérée.

La fonction de Morey et Morey (2005), du type Shephard, est un cas particulier de la fonction directionnelle. Elle projette un portefeuille sur la frontière soit en réduisant le risque, dans ce cas $g = (-g_V, 0)$. Soit en augmentant la rentabilité espérée, $g = (0, g_E)$.

Soit l'ensemble des réalisations définit dans l'espace de Markowitz par :

$$T = \left\{ V', E' \in \mathbb{R}_+^2; \exists x \in \mathfrak{S}, (V', E') \leq (-Var[R(x)], E[r(x)]) \right\} \quad (6.6)$$

La fonction directionnelle dans le modèle de Markowitz.

Selon Bricc al. (2004), la fonction distance directionnelle peut être utilisée pour calculer l'efficience du marché. Intégrée dans le modèle de Markowitz, en sélectionnant la direction $g = (-g_V, g_E)$, la mesure directionnelle est définie par :

$$D_g(x) = \sup \left\{ \delta, (Var[R(x)] - \delta g_V, E[R(x)] + g_E) \in T \right\} \quad (6.7)$$

En sélectionnant la direction $g = (h, k)$, la fonction directionnelle mesure de façon simultanée la contraction et l'expansion maximale du risque et de la rentabilité espérée. Une représentation est donnée dans la figure 31 ci-dessous. Lorsque la fonction distance directionnelle est = 0 cela signifie que le portefeuille est efficient. Il n'y a donc pas de marge d'amélioration possible.

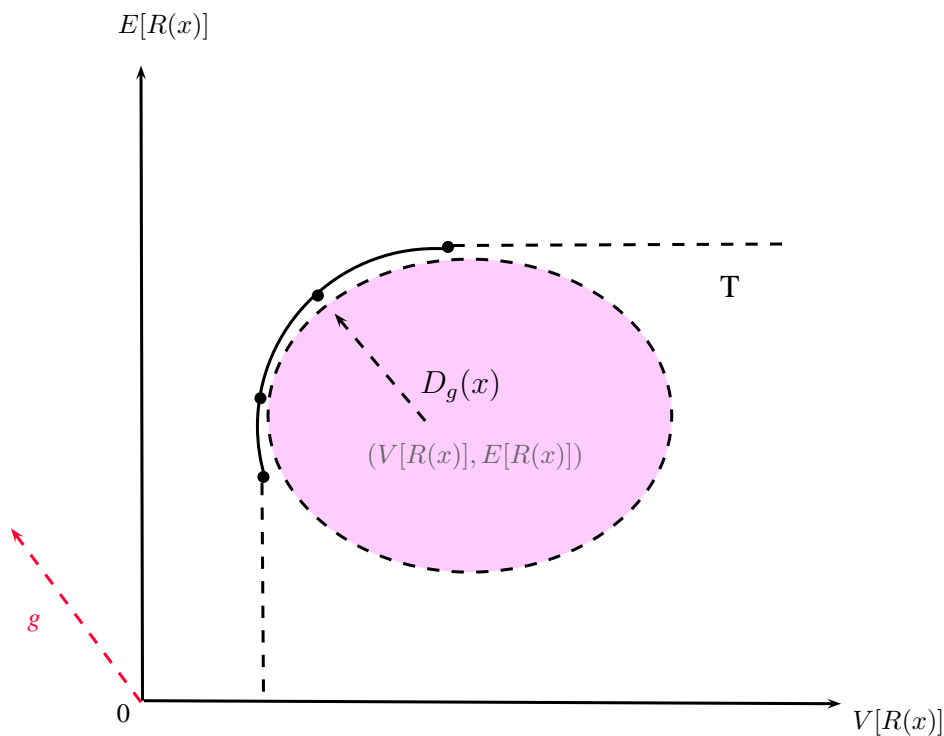


Figure 31 La fonction distance dans l'espace moyenne-variance

La fonction distance de Morey et Morey.

Lorsque cette mesure est orientée en rentabilité, $g = g_E$. Lorsque l'objectif est la diminution du risque, $g = g_V$. Notons que selon Chambers et al. (1998) $\delta_E = 1 - \theta$ et $\delta_V = 1 - \lambda$.

Pour un objectif de rentabilité, la fonction de Morey et Morey (2005) est définie par :

$$M_{g_E}(x) = \{ \sup(\theta : Var[R(x)], \theta E[R(x)]) \in T \} \quad (6.8)$$

Cette mesure caractérise l'expansion maximale de la rentabilité espérée compte tenu du niveau du risque donné.

Dans une optique de réduction du risque, la fonction de Morey et Morey (2005) est définie par :

$$M_{g_V}(x) = \{ \inf(\lambda : \lambda Var[R(x)], E[R(x)]) \in T \} \quad (6.9)$$

Cette mesure traduit la contraction maximale du risque compte tenu du niveau de rentabilité espérée.

La figure suivante illustre la fonction de Morey et Morey dans le plan moyenne-variance.

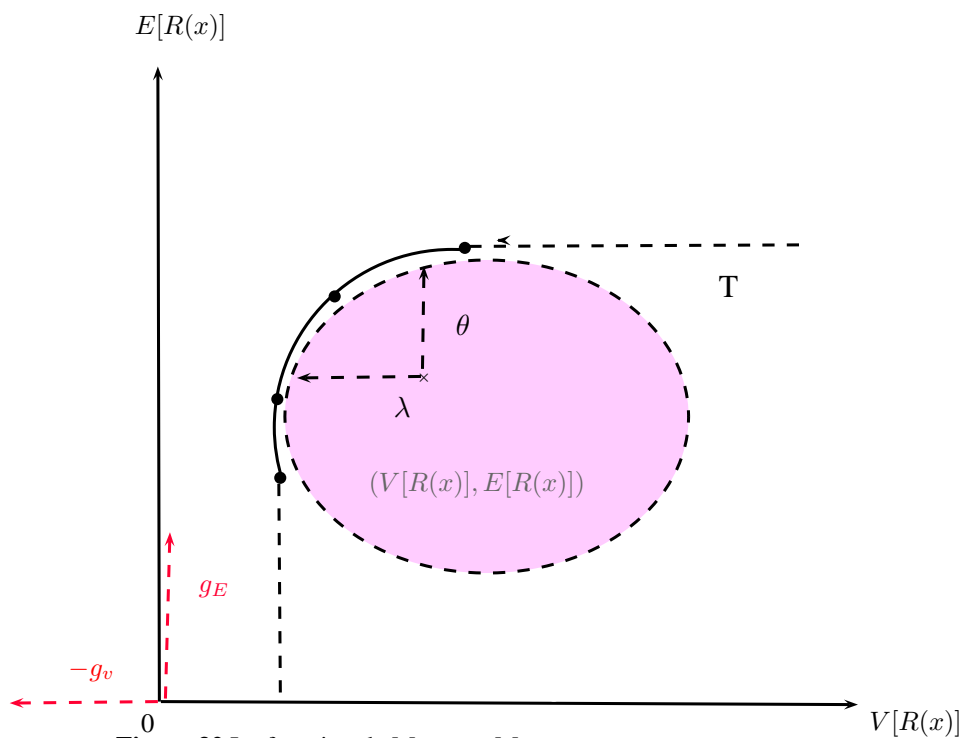


Figure 32 La fonction de Morey et Morey

3 Analyse empirique : description des données, résultats et recommandations.

Le portefeuille touristique Marocain est composé de 30 titres qui correspondent aux pays d'origine des touristes. Pour calculer la rentabilité nous considérons le nombre annuel de nuitées passées au Maroc entre 2006 et 2010, ainsi qu'un vecteur prix normé 1. Les statistiques de ces données sont exposées en annexe du chapitre 6 dans la table 8.6.

3.1 Présentation des résultats.

La table 6.2 (plus bas) fournit les résultats pour la fonction distance directionnelle. La première et la seconde colonnes établissent respectivement les niveaux actuels de rentabilité et de volatilité de la demande.

La troisième colonne indique les résultats de la directionnelle en direction $g = g_E$. Elle traduit les gains de rentabilité réalisables. La quatrième colonne fournit les résultats de la directionnelle en direction $g = g_V$. Elle donne ainsi, les diminutions du risque possibles. Dans notre étude seule la demande Française est efficiente et ne présente au-

cun potentiel d'amélioration. Pour les autres pays, on constate qu'il existe des marges d'amélioration. Par exemple, le Maroc peut espérer accroître le nombre de nuitées des Allemands de 279520, tout en réduisant la volatilité de cette demande à 23910 nuitées, en 2011. On peut également espérer augmenter la rentabilité de la demande Mauritanienne de 12165 nuitées tout en diminuant le risque de volatilité. Et ainsi de suite,... La dernière colonne indique le score d'efficacité relatif.

La table 8.7 en appendix du chapitre 6 fournit les résultats de la fonction de Morey et Morey dans un objectif de maximisation de la rentabilité. La table 8.8 indique les résultats de cette mesure dans une optique de minimisation du risque.

3.2 Implications managériales.

Les résultats indiquent qu'il existe des potentiels d'amélioration pour certains segments. Les figures suivantes établissent une classification des cibles marketing selon les préférences du régulateur. Lorsque celui-ci est peu averse au risque, il recherche la maximisation de la rentabilité. Si le régulateur est averse au risque, il cherche à minimiser les risques. Et lorsqu'il est neutre au risque il cherche l'augmentation/réduction simultanée de la rentabilité/risque.

Maximisation de la rentabilité.

Cet objectif est défini par la mesure de Morey de Morey orientée en rentabilité espérée ($g = g_E$). Le potentiel d'expansion de la rentabilité est établi par la différence entre la rentabilité espérée et la rentabilité actuelle.

Minimisation du risque.

Si au contraire on souhaite minimiser la volatilité de la demande, on s'intéressera à la fonction de Morey et Morey orientée en risque, ($g = -g_V$). Le potentiel de diminution du risque résulte de la différence entre le niveau de risque actuel moins celui espéré.

Recherche simultanée de la baisse du risque et de la hausse de la rentabilité.

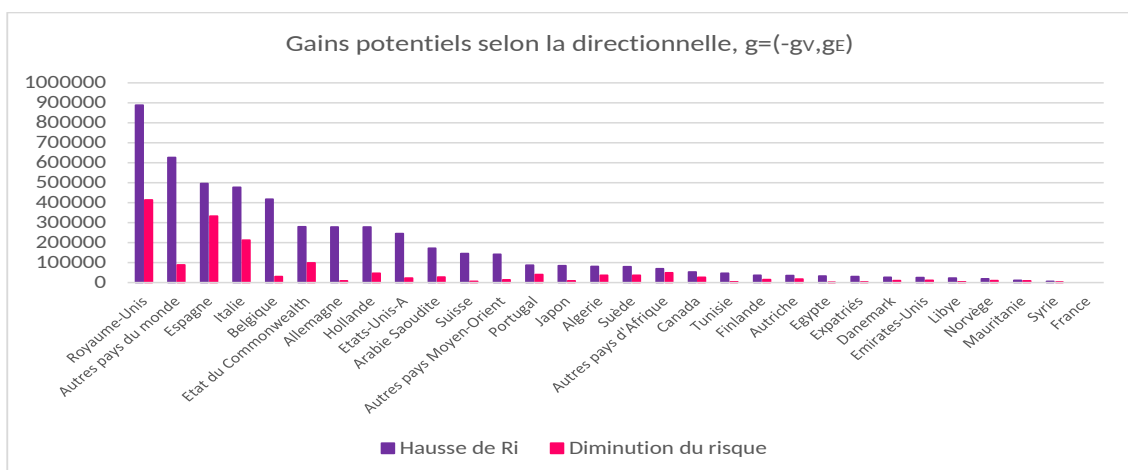
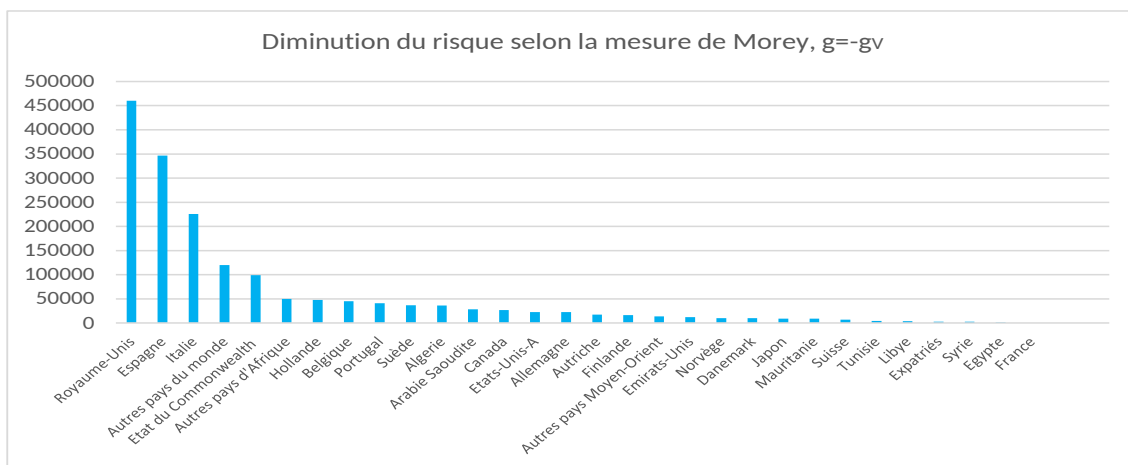
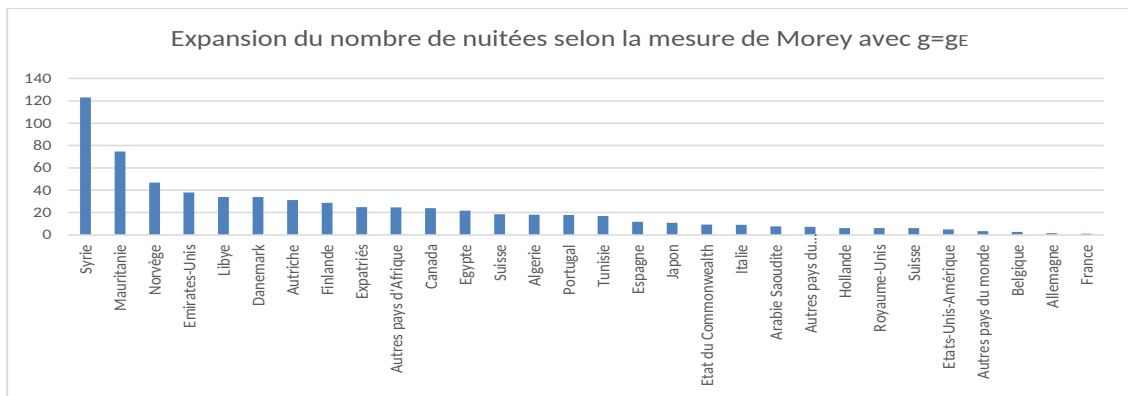
Dans cet objectif, c'est la directionnelle qui permet de mesurer les potentiels d'amélio-

TABLE 6.2 – Résultats de la directionnelle

Fonction distance	$E(R_i)$	σ	δg_E	$-\delta g_V$	Efficiencie
France	6025431	340046	6025431	340046,2	1,000
Allemagne	955131	33802	1234651	23909,9	0,774
Mauritanie	12167	8966	24332	1,1	0,621
Espagne	517424	346726	1014581	13581,2	0,614
Autres pays d'Afrique	70481	49988	140960	1,2	0,613
Belgique	623868	45103	1042663	14825,9	0,600
Autres pays du monde	902390	128628	1529672	39214,4	0,596
Royaume-Uni	1016516	473700	1905603	59382,6	0,588
Italie	504581	225586	981882	12196,6	0,563
Norvège	19921	10041	39842	0,5	0,560
Canada	54160	26951	108319	1,0	0,558
Autriche	35617	17716	71234	0,2	0,558
Emirates-Unis	25903	12250	51804	0,3	0,553
Portugal	87431	41041	174861	0,9	0,552
Suède	80536	37119	161070	0,9	0,551
Syrie	6175	2775	12348	0,9	0,548
Algérie	81851	36583	163701	0,8	0,548
Finlande	37407	16207	74813	0,6	0,545
Danemark	27466	9936	54932	0,2	0,532
Etat du Commonwealth	279654	99085	559305	0,8	0,530
Libye	23329	4078	46657	0,2	0,508
Hollande	278409	47622	556811	1,0	0,507
Arabie Saoudite	173164	28402	346323	1,0	0,507
Japon	85032	9330	170062	0,3	0,503
Autres pays Moyen-Orient	141862	14073	283718	0,6	0,502
Expatriés	30720	2893	61435	0,6	0,502
Etats-Unis-Amérique	246603	22963	493199	0,6	0,502
Tunisie	47291	4366	94576	0,5	0,502
Suisse	145543	7008	291079	0,3	0,501
Egypte	33122	1280	66221	0,9	0,501

ration.

Les graphiques suivants fournissent les résultats pour chacun des objectifs définis précédemment. Le premier graphique indique l'expansion maximale du nombre de nuitées, selon la mesure de Morey. Le second graphique fournit la diminution maximale du risque. Enfin le dernier graphique fournit simultanément l'expansion maximale de la rentabilité espérée et la diminution maximale du risque. Dès lors on peut établir les cibles marketing suivantes :



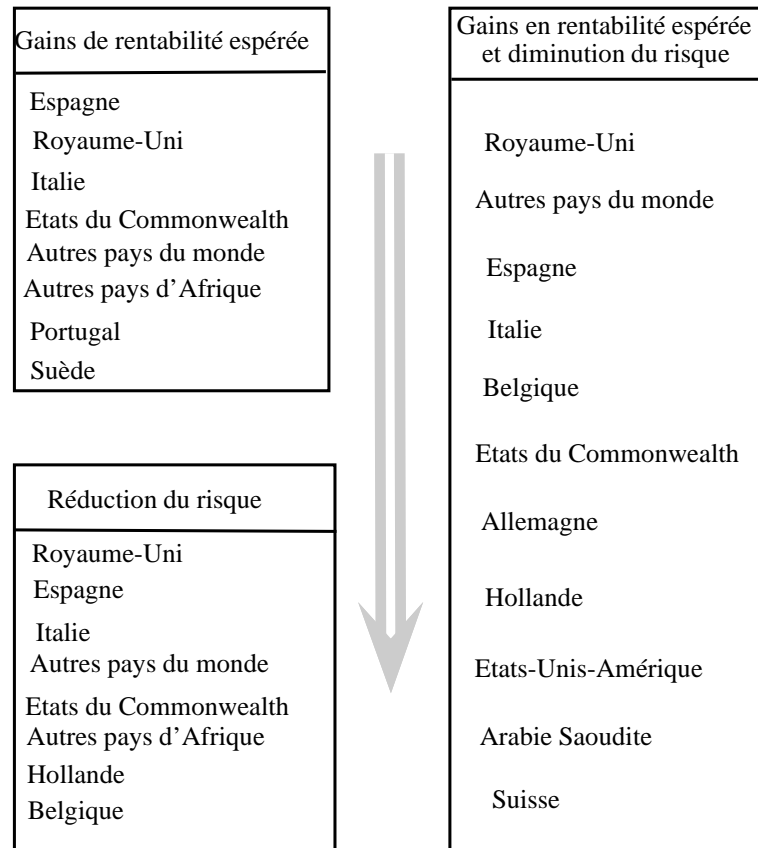


Figure 33 Détermination des cibles marketing prioritaires

Conclusion.

Cette méthodologie permet de définir les cibles prioritaires des campagnes marketing. Elle a également l'avantage de prendre en compte les préférences du régulateur vis à vis du risque. Celles-ci détermineront les portefeuilles optimaux et la stratégie d'allocation de ressources promotionnelles.

Il serait intéressant d'approfondir le rôle de la diversification en tourisme. La théorie des portefeuilles montre clairement que l'inclusion de plusieurs titres dans un portefeuille réduit son risque. Ainsi il faudrait analyser les effets de la diversification des touristes sur le risque. Pour cela il faut mesurer la corrélation entre les actifs. Dans le cas où les taux de rentabilité sont corrélés de manière parfaitement négative, la diversification permet de

supprimer le risque. A l'inverse, si les actifs sont parfaitement corrélés, la diversification est inutile.

Chapitre 7

Méthodologie pour la pratique de benchmarking dans le tourisme et application empirique aux régions Françaises.

Le tourisme représente une source de revenu importante pour beaucoup de pays dans le monde. En 2013, il constitue 9% du revenu mondial et 6.5% du PIB Français. Le secteur touristique génère 8% de l'emploi dans le monde et près de 4% en France. De plus, les flux touristiques mondiaux ne cessent de s'accroître depuis la démocratisation des transports. Selon un rapport de l'organisme mondial du tourisme¹ les arrivées de touristes internationaux² dans le monde ont augmenté de 5% en 2013 jusqu'à atteindre 1 milliard 87 millions d'arrivées. Ce secteur est ainsi en pleine croissance. De fait le tourisme est un enjeu stratégique de développement pour les nations.

Dans un contexte de concurrence internationale accrue, le secteur touristique doit être le plus performant possible. Dans cette optique, de nombreuses études analysent le taux d'occupation³ des hôtels ou celui des campings. Ces études sont souvent initiées par les observatoires régionaux du tourisme et les instituts de statistiques tels que l'INSEE⁴ ou l'OCDE⁵.

Toutefois, ces études sont limitées dans la mesure où l'évaluation de la performance est mono-input/output. En économie du tourisme le cadre d'analyse est multidimensionnel. Plus particulièrement lorsque l'on souhaite adopter une position macro-économique. La demande touristique globale comprend plusieurs outputs tels que les recettes hôtelières, celles des campings, de la restauration, des attractions... Et l'offre touristique mobilise également plusieurs inputs comme la capacité d'accueil en hébergement, les emplois, les infrastructures, l'accessibilité... Aussi de nombreux articles de recherche proposent d'évaluer la performance touristique avec la méthode DEA. Barros (2005) évalue l'efficacité des hôtels de la chaîne publique Pousadas avec la méthode DEA. Il utilise un modèle orienté en output avec une hypothèse de rendements d'échelle variables.

Barros et Dieke (2008) estiment l'efficacité technique des hôtels en Angola avec la méthode DEA. Ils supposent que la technologie est à rendements d'échelle constants. Barros et al. (2011) évaluent la performance des destinations touristiques en France avec la méthode DEA. Ils privilégient une orientation output et comparent les modèles CRS et

1. Le rapport est en libre téléchargement sur : <http://www.veilleinfotourisme.fr>

2. Visiteurs qui passent la nuit

3. Selon l'INSEE, il correspond au rapport du nombre de chambres/emplacements occupés sur le nombre de chambres/emplacements offerts par les hôtels et campings ouverts

4. L'institut national de la statistique et des études économiques

5. L'organisation de coopération et de développement économique

VRS.

D'autres études utilisent les indicateurs de productivité de Malmquist et de Luenberger pour estimer les changements d'efficacité dans le temps. Dans cette lignée, Hwang et Chang (2003) ont mesuré la productivité managériale des hôtels à Taïwan en utilisant l'indice de Malmquist. Ils ont utilisé un modèle orienté en output avec une hypothèse de rendements d'échelle constants.

Assaf et Barros (2011) mesurent la performance des hôtels d'une chaîne en Arabie Saoudite avec l'indice de productivité de Malmquist. Notre application propose d'analyser la productivité touristique Française avec la méthode DEA, en catégorisant l'offre et la demande touristique. On distinguera le tourisme balnéaire, du tourisme de montagne, du tourisme urbain ou rural. Le principal intérêt de cette catégorisation est d'établir des groupes de DMUs plus homogènes pour la pratique de benchmarking. Cette catégorisation est élaborée selon des variables exogènes (non contrôlées par le manager) fixes : des variables géographiques. Et implique que nous supposons que l'offre touristique est la variable déterminante dans le choix de la destination pour le touriste potentiel.

1 Définition d'un cadre d'analyse théorique pour la pratique de benchmarking dans le secteur touristique.

Le territoire Français est largement diversifié en matière de ressources géographiques. Il existe des zones côtières bordées par la mer, des zones montagneuses caractérisées par un relief important et des zones urbaines caractérisées par un patrimoine historique. Cette diversité induit différents types de tourisme. En effet on peut distinguer plusieurs types de tourisme selon les activités qu'offre la destination touristique. Aussi on peut considérer quatre catégories de tourisme :

- Le tourisme balnéaire qui est lié à la présence de la mer et donc aux activités de plages.
- Le tourisme de montagne qui est lié au relief montagneux qui permet la pratique d'activités alpines.
- Le tourisme urbain découle de l'existence de patrimoine historique et ainsi que d'acti-

tés culturelles.

- Enfin a contrario du tourisme urbain, les zones très peu urbanisées induisent un tourisme rural.

Cette application propose un nouveau cadre théorique pour analyser la performance touristique. Dans un premier temps nous considérerons les départements métropolitains Français en tant que DMUs. On en recense 96.

Nous choisissons de catégoriser les départements selon des critères géographiques non contrôlables par le manager. Ce modèle permet d'établir des comparaisons intra-catégorielle. On obtient des groupes de DMUs plus homogènes et pour établir des recommandations managériales plus réalistes.

Puis nous agrégeons les scores des départements selon leur région d'appartenance. Il y a 22 régions métropolitaines en France.

Ce choix émerge des constats suivants :

- Le territoire Français est divisé en régions administratives qui sont elles mêmes constituées de plusieurs départements. Les départements sont largement diversifiés. En d'autres termes, une région peut être constituée de départements balnéaires et/ou de départements montagneux et/ou de départements urbains ou ruraux.

Aussi, il semble intéressant d'opérer à une catégorisation départementale.

- Les décisions publiques peuvent être prises au niveau régional. Notamment concernant les choix d'investissement en infrastructures.

- La stratégie marketing en tourisme passe par la promotion culturelle (valorisation des produits du terroir, du patrimoine, des traditions, ...). Et ces spécialités locales s'inscrivent dans un environnement régional (Catalans, Corses, Basques, Bretons...). Cette étape s'inscrit dans la volonté d'étendre l'analyse à l'échelle macroéconomique. Et plus particulièrement concernant l'allocation de ressources marketing. Dans ce chapitre nous proposons une interprétation du progrès technologique. Nous l'assimilons à la capacité des régions à promouvoir leur territoire.

Enfin, nous avons souhaité tester la pertinence du modèle proposé. Pour cela nous intro-

duisons deux autres modèles sans catégorisation. L'un considère les départements comme les DMUs, mais sans considérer de catégorie. L'autre considère les régions en tant que DMUs. En comparant les résultats, notre modèle fournit des recommandations plus pertinentes.

1.1 Etape 1 : Catégorisation des départements selon la nature du tourisme qu'ils proposent.

La première étape consiste à catégoriser les DMUs selon la nature du tourisme qu'elles proposent, et à calculer les scores d'efficacité départementaux. On utilise un modèle à rendements d'échelle constants, orienté en output. Constatant que les conditions géographiques déterminent l'offre touristique, nous pouvons les assimiler à des variables non contrôlables par le manager.

Pour cela nous considérons le vecteur des inputs fixes exogènes $x'_{m'i} = (x'_{1,i}, x'_{2,i}, x'_{3,i})$ où i représente le nombre de DMUs.

- Soit $x'_{1,i}$ le nombre de kilomètres de plages. $x'_{1,i} > 1$ implique que la DMU appartiendra à la catégorie littoral. Par exemple, $x'_{1,j} > 1$ signifie que la DMU j appartient à la catégorie 1 car elle possède des plages et donc propose un tourisme balnéaire.
- Soit $x'_{2,i}$ l'altitude, mesurée en mètre, $x'_{2,i} > 1000$ implique que la DMU i appartient à la catégorie 2 montagne.
- Soit $x'_{3,i}$ le taux d'urbanisation de la DMU, évalué par le rapport de la population des communes urbaines à la population totale. $x'_{3,i} > 0.61$ induit que la DMU appartient à la catégorie 3 urbaine. Alors que $x'_{3,i} < 0.61$ implique que la DMU appartient à la catégorie 4 rurale.

Cette méthode d'analyse donne la possibilité d'élaborer des comparaisons dans des groupes plus homogènes et donc d'établir des benchmark plus pertinents. Un département peut appartenir à plusieurs catégories, c'est le cas des Pyrénées Orientales par exemple, qui offre un tourisme balnéaire et de montagne. Ainsi Paris ne pourra jamais être le benchmark de la Corse ou de l'Ariège par exemple.

TABLE 7.1 – Catégorisation des départements

LITTORAL Tourisme banéaire	Alpes-Maritimes, Aude, Bouches-du-Rhône, Calvados, Charente-Maritime, Corse-du-Sud, Cotes-d'Armor, Eure, Finistère, Gard, Gironde, Haute Corse, Hérault, Ille et Vilaine, Landes, Loire-Atlantique, Manche, Morbihan, Nord, Pas-de-Calais, Pyrénées Atlantiques, Pyrénées Orientales, Seine-Maritime, Somme, Var, Vendée
MONTAGNE Tourisme sportif et de nature	<i>Vosges</i> : Moselle, Bas-Rhin, Haut-Rhin, Haute-Saône, Vosges <i>Jura</i> : Ain, Doubs, Jura, <i>Alpes du Nord</i> : Hautes-Alpes, Isère, Savoie, Haute-Savoie <i>Alpes du Sud</i> : Alpes des Haute Provence, Alpes Maritimes, Corse, Drôme, Vaucluse <i>Pyrénées</i> : Ariège, Aude, Haute-Garonne, Hérault, Pyrénées Atlantiques, Pyrénées Orientales, Hautes-Pyrénées
URBAiN Tourisme culturel, d'affaire	Côte-d'Or, Essone, Eure-et-Loire, , Haute-Vienne, Hauts-de-Seine, Indre-et-Loire, Loire, Loiret, Maine-et-Loire, Marne, Meurthe-et-Moselle, Oise, Paris, Puy-de-Dôme, Rhône, Sarthe, Seine-et-Marne, Seine-Saint-Denis, Tarn
RURAL Tourisme culturel et de campagne	Aisne, Allier, Ardèches, Ardennes, Aube, Aveyron, Cantal, Charente, Cher, Corrèze, Creuse, Deux-Sèvres, Dordogne, Gers, Haute-Loire, Haute Marne, Indre, Loir-et-Cher, Lot, Lozère, Mayenne, Meuse, Nièvre , Oise, Orne, Saône-et-Loire, Tarn-et-Garonne, Vienne, Yonne, Haute-Pyrénées

On catégorise des DMUs selon des variables fixes pour gagner du temps dans le traitement des données. Ainsi en ajoutant une contrainte supplémentaire le programme linéaire sélectionnera automatiquement les DMUs concernées. Il faut noter que la fonction distance ne s'applique pas sur les input non-contrôlables.

$$x'_{1j} > 1, \quad x'_{2j} > 1000, \quad x'_{3j} > 0.61, \quad x'_{4j} < 0.61$$

La table 7.1 présente la catégorisation des Dmus :

1.2 Etape 2 : calcul des scores d'efficience et de productivité au niveau régional.

La seconde étape consiste à calculer les scores d'efficacité et les indicateurs de productivité des régions. Pour cela nous agrégeons les scores départementaux de chaque région.

Si l'on s'intéresse à l'environnement régional c'est parce que les décisions en matière

d'allocation publique budgétaire s'effectuent davantage au niveau régional.

De plus, les stratégies marketing en matière de tourisme tendent à promouvoir la culture, le patrimoine et les produits du terroir des destinations touristiques. Ces biens culturels sont régionaux c'est à dire qu'ils s'inscrivent dans une tradition régionale plutôt que départementale. Lorsque l'on considère les spécialités culinaires, les traditions ou encore la linguistique avec les patois, on s'aperçoit que ces produits culturels sont spécifiques aux régions. Voilà pourquoi nous étendons cette analyse au niveau régional.

La figure suivante récapitule la méthodologie proposée :

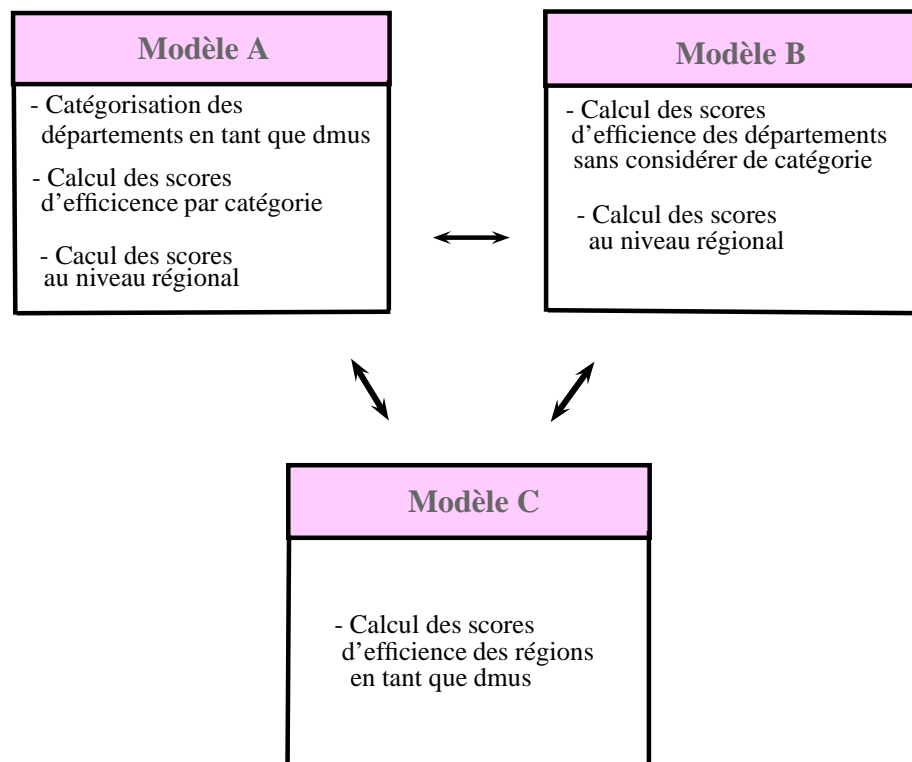


Figure 34 : Méthodologie

2 Analyse empirique : données, résultats et interprétations.

Nous présentons les données et résultats pour le modèle A. Puis nous comparerons ces résultats avec ceux des modèles B et C décrit précédemment.

2.1 Description des données.

La capacité d'accueil des hotels et celle des campings ainsi que les emplois dans le secteur de l'hébergement sont les input qui permettent de produire les output. Ces derniers correspondent au nombre de nuitées vendues à l'année dans les hotels et dans les campings. La table 7.2 présente les statistiques de ces variables pour l'année 2011. Toutes les données sont issues de l'INSEE.

TABLE 7.2 – Définition et statistiques des input et des output

Inputs-outputs	Moyenne	Std. Dev	Variance	Min	Max
Nuitées Hotels (en milliers)	2066326	3950164	15603794356033	143447	36886543
Nuitées Campings (en milliers)	1112272	1694246	2870470082836	1	7692804
Salariés dans hébergements	9768	15577	242628858	673	141956
Capacité (emplacements)	9447	11434	130730785	1	55896
Capacité (chambres) Hotel	6371	8675	75260735	738	78152

2.2 Résultats et interprétation.

La table 8.9 en Annexe présente les scores d'efficacité et de productivité des DMUs de la catégorie littoral.

La première colonne (TC) nous renseigne sur les variations de l'efficacité technologique entre 2009 et 2011. Un score supérieur/inférieur à 1 indique un gain/perte de productivité technique entre ces deux périodes.

La seconde colonne (EC) présente les variations de l'efficacité technique entre 2009 et 2011. Un score supérieur/inférieur à 1 indique un gain/perte de productivité technique.

La troisième colonne (TFPG) fournit le score de productivité globale de 2009 à 2011. Un score supérieur/inférieur à 1 indique un gain/perte de productivité pour la firme entre ces deux périodes.

La quatrième et la cinquième colonnes donnent respectivement les scores d'efficacité technique (TE) pour l'année 2009 et 2010.

Considérons le cas du Languedoc-Roussillon. Cette région est composée des départe-

ments suivants : l'Aude, la Lozère, l'Hérault et les Pyrénées-Orientales. Notons que certains de ces départements appartiennent à plusieurs catégories. Pour obtenir le score d'un département au sens de ce modèle, nous calculons la moyenne arithmétique des scores relatifs à chaque catégorie.

La table 7.3 fournit les scores de productivité de cette région pour le modèle A. On constate que la région a bénéficié de gains de productivité ($TFPG = 1,00375$) entre 2009 et 2011. Ces gains ne résultent pas d'un choix productif plus efficace ($EC = 0.995$), mais de l'existence de progrès technologiques ($TC = 1,00875$). Enfin les deux dernières colonnes nous fournissent les scores d'efficacité technique au sens de Debreu-Farrell.

TABLE 7.3 – Le cas du Languedoc-Roussillon

DMUs	TC	EC	TFPG	TE(2009)	TE(2011)
Aude	1,035	0,98	1,015	93,6	91,74
Lozère	1	1	1	100	100
Hérault	1	1	1	100	100
Pyrénées-Orientales	1	1	1	100	100
Scores au niveau régional	1,00875	0,995	1,00375	98,4	97,935

2.3 Recommandations managériales.

Sur l'efficacité technique

La table 8.10 en Annexe du chapitre établit les Benchmarks et les λ . Ils indiquent l'expansion maximale des output réalisable, compte tenu des "benchmarks" associés à la DMU. Le département de l'Eure pourrait améliorer son efficience en s'inspirant à 14% des Bouches-du-Rhône, son "benchmark".

La table 8.11 indique les potentiels gains d'efficacité. Elle définit les quantités d'output que les firmes inefficaces doivent produire pour devenir efficaces, compte tenu de leur niveau d'input. Elle établit également les possibilités de réduction de la quantité de facteurs de production mobilisée.

En considérant le département Seine-et-Marne, on constate qu'il peut accroître son efficacité :

En augmentant de 10% le nombre de nuitées vendues dans les hotels, et de 55% le nombre de nuitées vendues dans les campings, compte tenu de ses inputs. Si l'on adoptait une orientation en input. Ce département pourrait réduire la capacité d'accueil des hotels et campings, respectivement de 9% et 40%, et diminuer de 9% la quantité d'emplois, compte tenu du niveau actuel des outputs. Toutefois il semble plus pertinent d'adopter une analyse en output. En effet, la contraction du nombre d'emplois liés au tourisme aurait un effet néfaste au niveau macroéconomique. Alors que l'augmentation des outputs permet d'accroître le revenu touristique aussi bien au niveau microéconomique qu'au niveau macroéconomique.

Proposition d'interprétation de l'efficacité technologique en tourisme.

Nous proposons d'assimiler le progrès technique en tourisme à la capacité des autorités publiques à promouvoir leur territoire. Rappelons que les variations de productivité qui ne sont pas expliquées par une modification de la combinaison productive, résultent de changements technologiques.

Selon l'INSEE, *"l'activité touristique repose sur la capacité d'une destination à attirer des visiteurs"*. Ainsi l'attractivité est un déterminant décisif de l'offre touristique. Botti et al. (2008) définissent les composants de l'attraction touristique. Nous exposons dans la figure 43 en Annexe du Chapitre 7, l'approche de Benckendorff (2006). Elle classifie les attractions touristiques. Nous nous permettons de rajouter la sphère publique, non pas en tant qu'attraction, mais parce qu'elle a un impact direct sur la quantité et la qualité de ces attractions, par le biais des politiques publiques.

En effet, les régions investissent dans les domaines de l'éducation ou de la santé, des transports, ou de la culture. Pour cela une part du budget régional est allouée à la provision de ces biens. Analysons l'influence des autorités publiques sur l'offre et la demande touristique. L'investissement en capital humain (formation, santé) a un impact direct sur la productivité du travail et donc sur la compétitivité de l'offre touristique.

Les pouvoirs publics peuvent investir dans les transports en commun, les infrastructures

routières, les ports ou encore les aéroports...La quantité et la qualité de l'offre en transport sont des déterminants de l'accessibilité et donc de la demande touristique.

Les dépenses dans la culture (préservation du patrimoine, construction et entretien des musées) accroissent l'attractivité et donc la demande touristique.

La réglementation favorise/défavorise les flux touristiques (visa, taxes de séjour,...).

Prenons l'exemple de la région du Languedoc-Roussillon. En 2014 son budget est de 1.187 milliards d'euros. Sa répartition dans les domaines qui ont des liens directs ou indirects avec le tourisme est telle que :

131 millions d'euros sont investis dans le capital humain par le biais des lycées, universités. 35.9 millions d'euros sont consacrés aux ports de Sète et de Port-la-Nouvelle.

131 millions d'euros sont investis dans les transports pour la construction et l'entretien du réseau ferroviaire.

14 millions d'euros sont alloués à la construction de grands équipements culturels.

Aussi nous suggérons d'assimiler le progrès technologique (TC) à la capacité des régions à promouvoir leur territoire.

2.4 Pertinence du modèle.

La table 8.12 en Annexe du chapitre 5 fournit le détail des scores d'efficacité régionaux pour les trois modèles. La figure 35, représente les scores départementaux pour les modèles A et B.

On constate, que le modèle B est plus discriminatoire que le modèle A, 20 DMUs sont efficaces avec un score de 1 contre 9 au sens du dernier. La définition de benchmarks est toutefois moins cohérente que pour le modèle A. En effet dans le modèle B, Seine-et-Marne est référencé comme benchmark pour 86 DMUs. Ainsi notre méthodologie permet bien d'établir des benchmarks plus pertinents. Si l'on s'intéresse aux scores d'efficacité régionaux pour les trois modèles, on constate que le modèle C est sensiblement le moins discriminatoire.

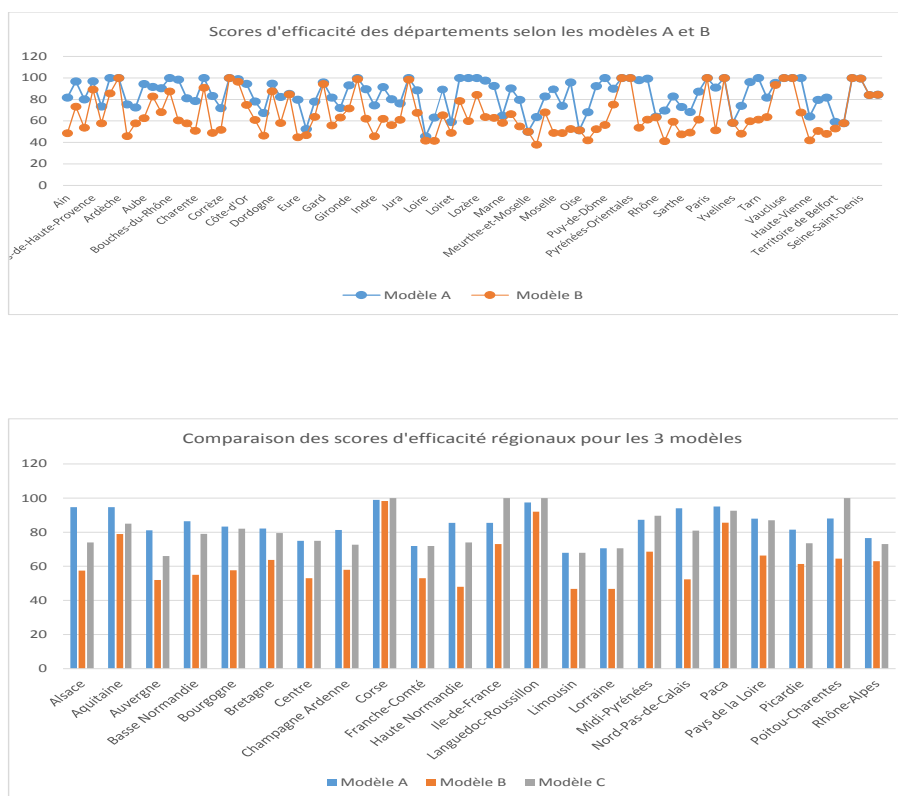


Figure 35 Comparaison des modèles A, B et C

Conclusion.

Ce chapitre propose une méthodologie pour évaluer l'efficacité et la productivité touristique des régions Françaises. Dans un premier temps nous mesurons l'efficience des départements relativement à leur catégorie (balnéaire, montagne, urbaine, rurale). Ces catégories sont définies selon des variables exogènes fixes : les conditions géographiques. Ces variables ne sont pas contrôlables, nous les introduisons simplement pour définir les catégories de tourisme. Puis nous agrégeons ces scores au niveau régional afin d'estimer l'efficacité globale de la région. Cette étape nous permet d'analyser la productivité au niveau macro-économique. Une interprétation du progrès technique a d'ailleurs été proposé en ce sens. Nous suggérons de l'assimiler à la capacité des pouvoirs publics à promouvoir leur territoire. Les résultats indiquent des perspectives d'amélioration pour les départements. Ainsi, cette étude fournit une grille d'analyse qui permet d'évaluer la performance touristique en distinguant la nature du tourisme.

Chapitre 8

Analyses empiriques de la performance touristique du Languedoc-Roussillon dans un contexte transfrontalier.

Comme nous l'avons dans les chapitres précédents le tourisme est un secteur dynamique, il est un levier de développement économique pour les régions. Dans ce qui suit nous nous focalisons plus particulièrement sur le tourisme dans le Languedoc-Roussillon. Cette région a la particularité d'être transfrontalière avec l'Espagne et l'Andorre. En France 20% du territoire est frontalier avec d'autres nations. Ce contexte accroît la concurrence entre les régions et les pays frontaliers. Il est donc important d'évaluer la performance touristique des régions frontalières vis-à-vis des autres régions Françaises mais aussi relativement aux régions frontalières Européennes. Les applications qui suivent intègre cette dimension en tenant compte de ce contexte frontalier.

La première application est une analyse empirique de l'efficacité des stations de ski dans le massif des Pyrénées. Plus particulièrement cette étude évalue la performance managériale des remontées mécaniques pour les principaux domaines skiables du massif Pyrénéen. Cette montagne est partagé par le territoire Français, Espagnol et Andorran. Notre étude inclut les stations de ski Françaises, Espagnoles et Andorranes dans l'analyse. Les scores d'efficacité sont évalués avec la mesure de Debreu-Farrell, et comparés avec ceux issus de la "slack-based" mesure de Färe-Lovell. Nous utilisons un modèle à rendements d'échelle constants, orienté en output. Le but est d'établir dans quelles mesures les remontées mécaniques pourraient accroître le nombre de forfaits vendus et donc leur chiffre d'affaires, compte tenu de leur offre actuelle. Les résultats établissent que certains domaines skiables, comme par exemple les Angles dans les Pyrénées-Orientales, pourraient accroître leur efficacité technique.

La seconde application évalue la performance du secteur de l'hébergement touristique des régions Françaises, en se focalisant sur la demande Européenne en 2013. Plus précisément l'application analyse l'efficacité technique et allocative de la demande touristique¹ qui émane des pays Européens frontaliers. Nous utilisons la mesure de Debreu-Farrell en output pour évaluer les scores d'efficacité. Le but est d'analyser dans quelles mesures les régions maximisent la demande frontalière, compte de leur offre d'hébergements touristiques actuelle. L'application établit qu'il existe des gains potentiels réalisables pour le Languedoc-Roussillon.

1. Caractérisée par le nombre de nuitées dans les hotels et dans les campings

1 Analyse de l'efficacité des stations de ski dans le massif des Pyrénées.

Pour la saison 2013-2014, le chiffre d'affaires de l'activité touristique en montagne l'hiver dépassait les 7 milliards d'euros². Le chiffre d'affaires des remontées mécaniques en France s'élevait à 1.3 milliards d'euros pour la saison 2012/2013³. L'activité de montagne génère plus de 120 000 emplois en France. De ce fait, l'économie du ski est un enjeu stratégique de développement. La France compte plus de 200 stations de ski, principalement réparties sur les massifs des Alpes, des Vosges, du Jura et des Pyrénées. Ces stations doivent faire face à une concurrence interne et externe (des autres pays).

Les infrastructures offertes par le domaine skiable sont un facteur d'attractivité déterminant dans le choix de la destination par les skieurs. Ces infrastructures correspondent à la capacité skiable du domaine, à la qualité de la neige et aux remontées mécaniques. De plus, le chiffre d'affaires des remontées mécaniques constitue près de 20% de la recette globale du sport d'hiver. Ainsi, les remontées mécaniques constituent un facteur d'attractivité déterminant. Elles créent des emplois et du revenu.

Les remontées mécaniques utilisent des facteurs de production similaires pour produire des outputs similaires qui sont les forfaits vendus. La méthode DEA est adaptée pour comparer et analyser l'efficacité de ces DMUs. Certaines études ont déjà exploitées ce potentiel d'analyse. Par exemple, Goncalves (2013) utilise une fonction distance directionnelle pour mesurer l'efficacité des domaines skiabiles. Elle introduit l'indicateur de productivité de Luenberger pour évaluer la productivité des stations de ski en France. Son étude intègre 3 output : le chiffre d'affaires des remontées mécaniques, le nombre de journées skieurs vendues et le nombre de passages en remontées mécaniques. Elle considère les nombres de pistes, de jours d'ouvertures et d'emplois (permanents et saisonniers) ainsi que le moment de puissance des remontées mécaniques.

Botti et al. (2012) évaluent la performance des stations de ski avec la méthode DEA. Ils considèrent le nombre de journées skieurs et le chiffre d'affaire des remontées méca-

2. http://www.anmsm.fr/Upload/Mediatheque/dossier1/ANMSM_OSMC_Pvague5.pdf

3. Source : Les Domaines Skiabiles de France

niques en tant qu'output. Ils caractérisent les facteurs de production par le nombre d'emplois, le nombre de jour d'ouverture et le nombre de pistes.

Dans la lignée de ces travaux, la présente étude analyse la performance des domaines skiables dans les Pyrénées, avec la méthode DEA. Elle inclut les domaines skiables Espagnols et Andorran car ils sont des concurrents directs des stations Françaises des Pyrénées, du fait de leur proximité géographique. Le but est de comparer les performances de ces domaines et d'établir des recommandations managériales afin qu'ils améliorent leur compétitivité.

La première section présente l'économie du ski en France et plus précisément dans le massif des Pyrénées. La seconde section expose la méthodologie de l'enquête et présente les données utilisées. La dernière section établit les résultats de l'étude et fournit ainsi les recommandations managériales.

1.1 Cadre d'analyse.

Les 31 stations des Pyrénées réalisent plus de 380 millions de chiffre d'affaires, dont 36 millions pour les stations des Neiges Catalanes⁴. Pour la plupart, les domaines skiables des Pyrénées sont en concurrence les uns avec les autres⁵. Il s'agit d'une concurrence entre les firmes de remontées mécaniques, au niveau microéconomique. Mais il existe également une concurrence macroéconomique entre les collectivités territoriales. En effet, les domaines skiables ont des retombées économiques importantes. Ils soutiennent indirectement d'autres types d'activités profitables telles que la restauration, l'hôtellerie, le thermalisme, la location de motos-neiges... Ces activités mobilisent des emplois et concourent au revenu territorial, notamment par la fiscalité. De fait les domaines skiables sont un enjeu économique pour les collectivités départementales Françaises et Espagnoles et pour le territoire Andorran. Le tableau suivant définit ces deux niveaux de concurrence :

4. Font-Romeu, Les Angles, Formiguères, Porté Puymorens et Puyvalador

5. A noter que deux entreprises se partagent plusieurs domaines. Font Romeu, Artouste, Guzet et Saint Lary sont gérés par la même société Altiservice. Tourmalet, Gourette et Caunteret sont également exploitées par la même société N'PY

TABLE 8.1 – Niveaux de concurrence des DMUs

Concurrence microéconomique	Analyse de l'efficacité des domaines skiables : 31 stations de ski
Concurrence macroéconomique	Analyse de l'efficacité des collectivités territoriales
Départements Français :	Pyrénées-Orientales, Pyrénées Atlantiques, Hautes-Pyrénées, Haute-Garonne et Ariège
Provinces Espagnoles :	Aragon, Catalogne et Gérone
Territoire Andorran	Andorre

1.2 Méthodologie et données.

La performance des remontées mécaniques est évaluée avec la méthode DEA. Nous considérons une technologie à rendements d'échelle variables et un modèle orienté en output. Le choix de cette orientation en output résulte du fait que les input sont difficilement modifiables. Plus particulièrement nous comparons la performance des remontées mécanique avec la mesure Färe-Lovell qui permet d'éviter le problème des "slacks" et avec la mesure de Debreu-Farrell. Avant tout rappelons la définition de ces mesures et des programmes linéaires qui permettent de calculer ces mesures.

La "slack-based" mesure en output est définie par :

$$\widetilde{FL}_t^o(x^t, y^t) = \begin{cases} \sup_{\gamma \in [1, +\infty[^N} \left\{ \frac{1}{|J(y)|} \sum_{j \in J(y)} \gamma_j : \gamma \odot y^t \in L^t(y^t) \right\} & \text{si } \gamma \odot y^t \in L^t(y^t) \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8.1)$$

Le programme linéaire qui permet de la calculer est défini par :

$$\begin{aligned} \widetilde{FL}_o(x, y) = \min \quad & \sum_{i \in I(x)} \frac{\gamma_i}{|J(y)|} \\ \text{s.c.} \quad & \gamma \odot y \leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i, \\ & x \geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i \\ & \sum_{i=1}^j \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \gamma \geq 0. \end{aligned}$$

On définit la mesure de Debreu-Farrell en output de la manière suivante :

$$DF_t^o(x^t, y^t) = \begin{cases} \sup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \{\theta : \theta y^t \in P^t(x^t)\} & \text{si } y^t \in P^t(x^t) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.2)$$

Le programme linéaire qui permet de calculer cette mesure est donné par :

$$\begin{aligned} & \max \quad \theta & (8.3) \\ \text{s.c.} \quad & x \geq \sum_{i=1}^j \theta_i x_i, \\ & \theta y \leq \sum_{i=1}^j \theta_i y_i, \\ & \lambda \geq 0, \quad \theta_i \geq 0. \end{aligned}$$

Dans cette étude nous considérons deux output :

Le nombre de journées skieurs vendues pour la saison 2013-2014 : Output 1.

Le chiffre d'affaires des remontées mécaniques qui permet d'intégrer le prix des forfaits dans l'analyse. Le chiffre d'affaire correspond à la quantité de journées skieurs vendus à un prix p pour la période 2013-2014 : Output 2.

Les infrastructures du domaine skiable constituent les input. Nous en intégrons trois :
Le nombre de kilomètres skiabiles. Il existe un coût d'entretien avec le damage des pistes (achat de dameuses, de carburant et main d'oeuvre) : Input 1.

Le nombre de remontées mécaniques puisqu'elles sont un coût de production important (achat, maintenance, main-d'oeuvre...) : Input 2.

Le nombre de canons à neige. En effet, le recours à la neige artificielle est de plus en plus nécessaire. Et la neige est une condition nécessaire pour attirer les skieurs. L'utilisation de neige artificielle engendre des coûts de production (achat, électricité, eau, stockage, entretien...) : Input 3.

Le tableau suivant fournit les statistiques des input et des output :

TABLE 8.2 – Statistiques des variables

	Moyenne	Somme	Ecart-type	Variance	Minimum	Maximum
Journées skieurs	318152	9862718	337915	1,14186E+11	12500	161532
Chiffre d'affaires	12274984	380524513	14910005	2,22308E+14	200000	7107412
Km skiabiles	59	1826	47	2223	2	210
Remontées mécaniques	19	601	13	175	4	64
Canons à neige	248	7678	243	58941	11	1013

1.3 Résultats.

Par exemple, le domaine des Angles a un score d'efficacité de 64,45 au sens de Färe-Lovell. Ceci signifie que la station est efficace à 64%. Cette station pourrait améliorer sa performance compte tenu de son benchmark Peyragudes.

Les benchmark associés aux stations inefficaces sont donnés dans le tableau en Annexe du Chapitre 8.14.

Notons qu'il n'y a aucune station Espagnole efficace. La France et l'Andorre parviennent donc à avoir une meilleure compétitivité. A ce stade, il serait intéressant d'analyser le nombre de journées skieurs vendus par nationalité. Ceci permettrait de définir les cibles marketing. Toutefois l'absence de données ne le permet pas.

Une fois les benchmark établis, il est possible de caractériser les gains possibles en efficacité, pour toutes les stations inefficaces. Compte tenu de la quantité d'input mobilisée, certaines stations devraient pouvoir augmenter leur performance. Pour cela, elles doivent accroître le nombre de journées skieurs vendues. Le tableau suivant fournit ces gains potentiels en output :

En considérant la station des Angles, on trouve qu'il existe des possibilités d'amélioration compte tenu des infrastructures du domaine skiable et de son benchmark. En effet, la station pourrait accroître de 21,46% le nombre de journées skieurs vendues pour atteindre 456450 forfaits journée vendus. Elle pourrait également accroître de plus de 30% son chiffre d'affaires, jusqu'à 17116887 euros. Pour cela la station doit agir sur le niveau de la demande de forfait par le biais de campagnes marketing ou en investissant dans l'attraction du domaine. La station pourrait accroître le prix des forfaits, compte tenu des

TABLE 8.3 – Scores d'efficacité

Stations	"Slack-based" mesure
Grandvalira	100
Saint Lary	100
Font Romeu	100
Peyragudes	100
Cauterets	100
Gourette	100
La Quillane	100
Vallnord	87,39
Baqueira	80,72
Grand Tourmalet	79,99
Formigal	69,47
Ax 3 Domaines	68,52
Les Angles	64,45
Luchon-Superbagnères	62,28
Val Louron	61,17
La Molina et Masela	59,42
Formiguères	55,56
Gavarnie	54,13
Vallter	51,94
Cerler	51,81
Port Ainé, Esport Esqui et Tavascan	51,62
Vall de Nùria	50,5
Porté Puymorens	50,16
Cambre d'Aze	49,01
Astun-Candanchú	48,96
Guzet	47,96
Panticosa	47,7
Port del Comte	47,22
Boí Taull	46,74
Puyvalador	45,12
Goulier Neige	45,1

TABLE 8.4 – Gains potentiels en quantité d'output

Stations	Output 1 actuel	Output 1 visé	Gain(%)	Output 2 actuel	Output 2 visé	Gain(%)
Vallnord	741 343	803 787	8,42	28 912 377	30 105 715	4,13
Baqueira	772 555	988 870	28	37 082 640	37 082 640	0
Tourmalet	600 000	682 916	13,82	24 000 000	24 479 947	2
Formigal	543 412	623 112	14,67	23 366 716	23 366 716	0
Ax	383 800	434 617	13,24	12 665 400	16 227 988	28,13
Les Angles	375 800	456 450	21,46	13 153 000	17116887	30,14
La Molina	716 929	935 521	30,49	29 394 089	35 082 052	19,35
Cerler	245 061	344 752	40,68	9 802 440	12 928 216	31,89
Astun	242 000	380 120	57,07	8 470 000	13 527 244	59,71
Luchon	213 000	280 251	31	6 390 000	10 433 457	63,28
Val Louron	116 000	148 385	27,92	3 004 400	5 164 814	71,91
Port Comte	115 000	183 906	59,92	3 680 000	6 896 463	87,4
Cambre	114 361	180 429	57,77	3 259 288	6 599 881	102,49
Boí Taull	102 456	168 545	64,5	3 995 784	6 298 490	57,63
Guzet	98 000	154 618	57,77	2 842 000	5 632 121	98,17
Formiguères	93 229	126 384	35,56	2 703 641	4 606 565	70,38
Panticosa	86 519	136 765	58,08	2 855 127	4 838 294	69,46
Puymorens	85 480	121 425	42,05	2 478 920	4 391 709	77,16
Port Ainé	151 800	224 145	47,66	4 857 600	8 405 452	73,04
Vallter	60 000	94 311	57,19	1 500 000	3 264 023	117,6
Puyvalador	40 384	66 597	64,91	109 0368	241 5583	121,54
Vall Nùria	38 859	61 972	59,48	1 126 911	2 323 958	106,22
Goulier	12 500	21 275	70,2	200 000	733 352	266,68
Gavarnie	55 310	64 025	15,76	1 438 060	2 176 849	51,37

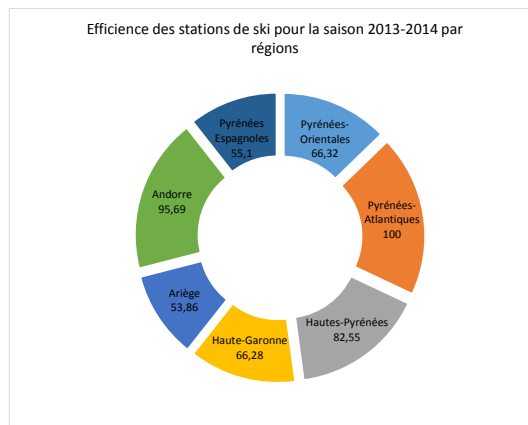


Figure 36 Scores d'efficacité

infrastructures offertes et du prix du forfait des concurrents. Cette stratégie risque toutefois d'impacter la demande.

La figure 36 fournit les scores d'efficacité des remontées mécaniques au niveau régional. Seule la région des Pyrénées-Atlantiques avec la seule station de Gourette est efficace. Ces résultats sont obtenus par la moyenne des scores individuels des stations de ski qui composent la région. Et ces mesures individuelles de l'efficacité sont données dans le tableau 8.13 en Annexe.

1.4 Conclusion.

Pour davantage de précision, il conviendrait de raffiner l'analyse en intégrant d'autres données. Il serait intéressant d'évaluer l'efficacité allocative des remontées mécaniques en détaillant le nombre de journées vendues par type de forfait. En effet, il existe essentiellement 3 types de forfaits (1 jour, 1 séjour ou 1 saisonnier) qui ont chacun des prix différents. Ce prix influence le chiffre d'affaires. Notre étude ne considère que le nombre de journées skieurs vendues dans sa globalité pour tous les types de forfaits. L'absence de données ne permet malheureusement pas d'intégrer les différents prix des forfaits dans l'analyse.

Malgré cela, nous avons pu comparer et classer les stations de ski des Pyrénées selon leur score d'efficacité au sens de Färe-Lovell. On constate qu'il existe un potentiel d'amélioration pour certaines stations dans les Pyrénées-Orientales puisque seule Font-Romeu est techniquement efficace.

2 Performance touristique de la demande frontalière.

La construction de l'Union Européenne, avec la libre circulation des hommes et des marchandises, a facilité les flux humains entre les territoires d'Europe. D'après une enquête d'Eurostat ⁶ en 2013, 70% des Européens ont fait un voyage d'au moins une nuitée en Europe et 38% ont passé leurs vacances dans un autre pays Européen. La clientèle européenne contribuerait pour moitié à la croissance des arrivées de touristes en France en 2013 ⁷.

Puisque le tourisme est une source de revenu pour les régions, puisque la demande Européenne représente une part importante de la recette touristique, et puisque le contexte Européen a induit une concurrence touristique accrue, les régions doivent être de plus en plus compétitives pour maintenir et accroître ce revenu. Dans cet objectif, elles recherchent le meilleur rapport entre le produit touristique et les ressources employées. Le développement touristique passe par la promotion du territoire et de ses traditions. Ainsi la dépense en marketing constitue une ressource nécessaire pour cet essor. Comme la performance touristique résulte d'une gestion efficace des inputs et des outputs, il faut veiller à ce que l'allocation des ressources en marketing, soit optimale. Il est inutile d'allouer des ressources promotionnelles vers la clientèle déjà efficace.

Au delà des stratégies marketing issues de la sphère privée, les régions disposent d'un budget public pour la promotion touristique du territoire. Il est donc important d'identifier les cibles marketing efficaces pour éviter le gaspillage des ressources.

Cette étude évalue l'efficacité technique et allocative de la demande Européenne dans le secteur de l'hébergement touristique, des régions Françaises en 2013.

Puis, nous proposons un modèle qui permet de centrer l'analyse sur l'efficacité la demande frontalière. L'objectif est d'établir dans quelles mesures il est possible d'accroître le tourisme transfrontalier.

La demande touristique de proximité, c'est-à-dire, celle qui émane des pays frontaliers, est un enjeu stratégique pour le développement touristique et économique. En effet

6. En libre téléchargement sur <http://www.veilleinfotourisme.fr>

7. En libre téléchargement sur <http://www.entreprises.gouv.fr>

la proximité géographique de cette demande est un avantage puisqu'elle réduit considérablement le temps et le coût du transport.

Compte tenu de la contrainte budgétaire des Européens, la demande frontalière est ainsi une cible à fort potentiel. Notre méthodologie permet d'identifier les régions qui ne maximiseraient pas cette demande de proximité. L'application suivante établit clairement les gains potentiels sur la demande frontalière. Ceux-ci peuvent être réalisés par des communications en marketing ou par des accords et partenariats frontaliers. La méthodologie est illustrée avec le cas des régions PACA et Rhône-Alpes, qui sont transfrontalières avec la Suisse et l'Allemagne. Puis nous considérons le Languedoc-Roussillon, région transfrontalière avec l'Espagne et l'Andorre.

2.1 Méthodologie et données.

Dans cette étude, la demande touristique est caractérisée par le nombre de nuitées des touristes Européens par nationalité, dans l'hôtellerie et les campings. Les facteurs de production sont la capacité d'accueil de l'hébergement (dans les hôtels et les campings) et le nombre d'emplois dans le secteur de l'hébergement touristique.

Soient les inputs suivants :

- x_1 : le nombre d'emplois dans les hébergements touristiques.
- x_2 : Le nombre de lits disponibles dans les hôtels et dans les campings.

Soient les outputs suivants :

- y_1 : le nombre de nuitées dépensées par les Allemands.
- y_2 : le nombre de nuitées dépensées par les Belges.
- y_3 : le nombre de nuitées dépensées par les Espagnols.
- y_4 : le nombre de nuitées dépensées par les Italiens.
- y_5 : le nombre de nuitées dépensées par les Suisses.
- y_6 : le nombre de nuitées dépensées par les Anglais.

L'efficacité technique et allocative sont évaluées avec la méthode DEA. Nous considérons une technologie de production à rendements d'échelle constants. Le modèle est orienté

en output, puisque le but est d'établir dans quelles mesures les régions peuvent accroître la demande touristique frontalière compte tenu de leur offre actuelle. L'étude intègre les prix des outputs. Ils correspondent à la dépense journalière moyenne par nationalité. L'efficacité en revenu est calculée avec la fonction de Debreu-Farrell en output. Elle projette les DMUs sur les fonctions de revenu plutôt que sur la technologie de production. Cette mesure est définie dans le premier chapitre par l'équation (1.46).

En 2011, en France les Allemands dépensaient en moyenne 75 euros par jour, les Belges 91, les Espagnols 83, les Italiens 65, les Suisses 97 et les Anglais 55 euros.

Le tableau ci-dessous fournit les statistiques de ces variables pour la période 2013 :

TABLE 8.5 – Statistiques des variables

	Moyenne	Somme	Variance	Min	Max
Emplois x_1	31 024	651 498	645 651 143	5 047	105 486
Capacité d'accueil x_2	64 427	1 352 973	236 150 1634	17 068	163 649
Nuitées Allemandes y_1	465 434	977 4123	28 577 382 1852	27 106	205 9500
Nuitées Belges y_2	360 769	7 576 159	128 749 765 085	41 062	1 460 094
Nuitées Espagnoles y_3	123 361	2 590 589	23 702 662 557	14 509	554 407
Nuitées Italiennes y_4	195 415	4 103 707	98 114 042 422	9 102	1 319 700
Nuitées Suisses y_5	142 491	2 992 315	35 285 188 778	7 746	717 002
Nuitées Anglaises y_6	548 389	11 516 163	193 063 520 556	54 846	1 628 958

Dans un premier temps nous évaluons l'efficacité de la demande touristique Européenne en considérant tous les outputs (Modèle 1).

Il est possible à ce stade qu'une région soit performante bien que sa demande frontalière ne soit pas optimale. En effet lorsque l'on tient compte de toutes les origines, une DMU peut compenser son manque d'efficacité pour la demande frontalière par la demande non frontalière. Cette hypothèse motive la démarche proposée.

Nous nous focalisons sur l'efficacité de la demande frontalière à la région que l'on souhaite étudiée. Pour cela sont retenues comme outputs les demandes touristiques des pays frontaliers. Par exemple pour évaluer la performance de la demande touristique frontalière du Rhône-Alpes ou celle de la région PACA, nous sélectionnons deux outputs qui correspondent aux nuitées dépensées par les touristes des pays frontaliers. Pour cela nous recentrons l'analyse sur la demande Suisse y_5 et la demande Italienne y_4 (Modèle 2).

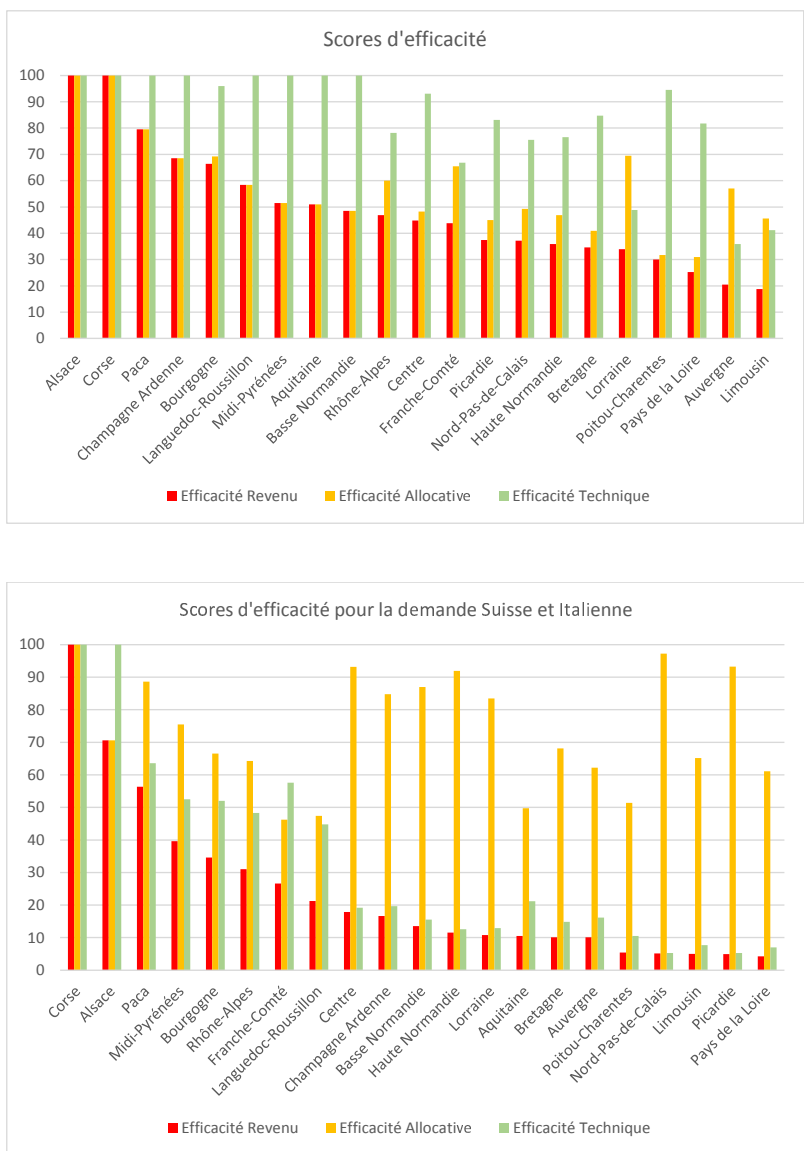


Figure 37 Scores d'efficacité Modèles 1 et 2

Pour évaluer la performance de la demande touristique frontalière au Languedoc-Roussillon nous sélectionnons la demande Espagnole $y = y_3$ (Modèle 3).

Si l'on souhaite évaluer l'efficacité de la demande frontalière de l'Alsace, on retient la demande Belge et la demande Allemande, soit $y = y_1 + y_2$, etc...

2.2 Résultats et recommandations managériales.

Le premier graphique fournit les scores d'efficacité au sens de Debreu-Farrell pour le premier modèle c'est à dire lorsque $y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6$. Dans ce cas, la région Rhône-Alpes a une efficacité en revenu de 0.47 ; une efficacité allocative de 0.6 et une efficacité technique de 0.78. Ses benchmarks sont l'Alsace (1.83), la Champagne-Ardenne (2, 29), (1.22), les Midi-Pyrénées (0.14) et la région PACA (0.19). Les benchmarks sont donnés dans le tableau 8.15 en Annexe du Chapitre 8. Le Rhône-Alpes devrait accroître essentiellement le nombre de nuitées des touristes Allemands, Italiens et Belges.

La région PACA est techniquement efficace à 100% et son efficacité allocative et en revenu est de 0.7.

Le Languedoc Roussillon a une efficacité allocative de 0.58 et une efficacité technique de 100.

Le second graphique fournit les scores d'efficacité pour le second modèle. Nous considérons la région Rhône-Alpes pour laquelle on sélectionne $y = y_4 + y_5$. Cela signifie que l'on ne tient compte que de la demande frontalière Italienne et Suisse. Dans ce cas, la région Rhône-Alpes a une efficacité en revenu de 0.31 ; une efficacité allocative de 0.64 et une efficacité technique de 0.48. Des benchmarks sont La Corse (0, 87) et l'Alsace (3.63). Ils sont donnés dans le tableau 8.17 en Annexe du Chapitre 8. Le Rhône-Alpes pourrait accroître la demande Italienne à 1145778 nuitées ainsi que la demande Suisse à 1063160 nuitées.

Concernant la régions PACA, ses scores de performance tendent à être inférieurs. En effet, dans ce cas la région PACA est technique efficace à 63.6% contre 100 dans le modèle précédent. L'efficacité allocative de la région augmente toutefois. Ses scores d'efficacité allocative et en revenu sont respectivement de 0.88 et 0.56, contre 0.7 et 0.7 dans le modèle précédent. Dans ce cas la région PACA pourrait accroître la demande des touristes Italiens et Suisses jusqu'à respectivement 2074914 et 1127315 nuitées.

Lorsque l'on limite les outputs à la demande frontalière, les scores d'efficacité de la région Rhône-Alpes se dégradent. Nous allons voir que l'on observe des faits similaires pour le

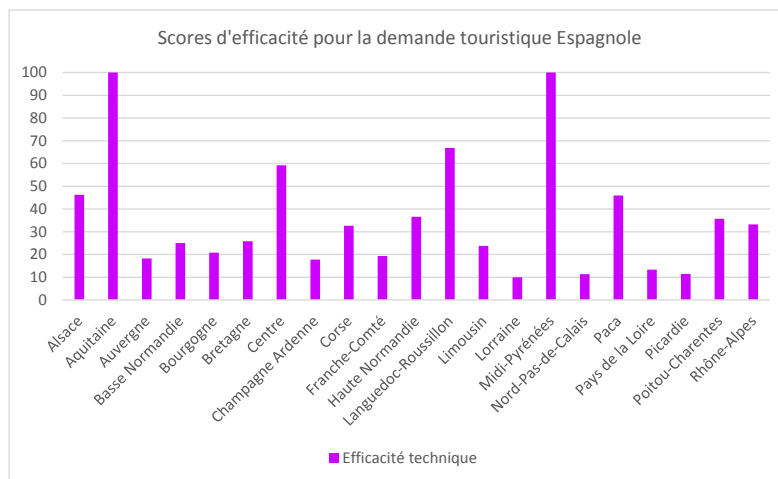


Figure 38 Scores d'efficacité Modèle 3

Languedoc-Roussillon dans le troisième modèle.

Le graphique précédent donne les scores d'efficacité pour le troisième modèle, qui n'intègre seulement les nuitées espagnoles.

On constate que lorsque l'on sélectionne $y = y_3$, la région Languedoc-Roussillon n'est plus efficiente. En effet, son score d'efficacité technique baisse à 0.86, ce qui signifie que la DMU n'est efficace qu'à 86%. Ses benchmarks sont l'Aquitaine et les Midi-Pyrénées. Ces deux régions sont également frontalières à l'Espagne. Elles sont efficaces et maximisent la demande frontalière compte tenu de leur technologie de production. Ainsi ces résultats montrent qu'il existe des marges d'amélioration pour le Languedoc-Roussillon compte tenu des performances réalisées par ses benchmarks. Cette région pourrait accroître le nombre de nuitées Espagnoles pour atteindre 664823 nuitées. La région du Languedoc-Roussillon aurait tout intérêt à promouvoir son territoire en Espagne.

2.3 Conclusion.

Cette étude fournit une méthodologie pour analyser l'efficacité technique et allocative de la demande touristique par nationalité et plus particulièrement de la demande frontalière. Ceci nous permet de déterminer des cibles marketing par nationalité. L'application a établi qu'il existe des gains potentiels d'efficacité pour certaines régions notamment pour Languedoc-Roussillon. Toutefois, il est aurait été pertinent d'introduire la demande An-

dorrane dans l'analyse. De plus on aurait pu considérer les départements Français plutôt que les régions en tant que DMU. Or ceci n'a pu être réalisé faute de données disponibles.

Conclusion Générale.

La théorie microéconomique développe des méthodes qui permettent de quantifier les phénomènes économiques. A travers la notion d'efficacité au sens de Pareto, on peut comparer et définir des situations optimales. Les outils issus de la microéconomie permettent de réaliser des études de "benchmarking". Les indices d'efficacité développés dans ce travail, sont construits à partir du concept de fonction distance. Les mesures de l'efficacité caractérisent en effet, un écart à la frontière. Les indicateurs de productivité évaluent les variations d'efficacité au cours du temps, à partir des fonctions distance. Les fonctions distance sont des outils qui permettent d'appréhender l'efficacité et la productivité.

Cette thèse fournit une contribution théorique et empirique à la théorie de la microéconomie de la production.

Le premier apport théorique réside dans l'introduction de nouvelles mesures de l'efficacité technique. Elles redéfinissent la "slacks-based" et la directionnelle "slacks-based" mesures. Les "slack-based" mesures sont des fonctions distances particulières. Elles permettent d'établir une caractérisation complète de la technologie. Elles fournissent une mesure de l'efficacité forte, au sens de Koopmans. Ces fonctions projettent les vecteurs de production sur la frontière efficiente forte (hors zone de mix-efcience). Il a été démontré, notamment à travers un exemple numérique, que les mesures de Färe-Lovell, telles qu'elles sont définies de façon standard, ne permettent pas de caractériser la technologie de production. Il résulte que ce type de mesure ne permet pas d'évaluer l'efficacité et les variations de productivité. Pour surmonter ce problème, nous proposons de reformuler successivement la "slack-based" et la directionnelle "slack-based" mesures. Pour cela nous définissons une contrainte, qui permet de ne sélectionner, que les solutions faisables de la mesure de Färe-Lovell.

La seconde contribution théorique de cette thèse est la construction d'un indicateur so-

cial de Luenberger-Hicks-Moorsteen. Ce nouvel indicateur permet d'évaluer l'efficacité des politiques publiques dans la provision de biens sociaux. Il s'inscrit dans la théorie de Sen. En effet, nous avons montré qu'il est possible d'établir une analogie entre la théorie des capacités de Sen et la théorie de la production. On peut assimiler le processus de production standard à la notion de capacités, définies par Sen. Les capacités décrivent le processus par lequel, un agent transforme des ressources en bien-être. Les capacités représentent la capacité des agents à transformer les ressources auxquelles ils ont accès en bien-être. On peut assimiler la notion de capacité au processus de production. Au niveau microéconomique, les fonctions distance mesure les capacités individuelles, c'est à dire la capacité des individus à transformer des ressources en bien-être. Au niveau macroéconomique, les fonctions distance mesurent la capacité d'une nation à améliorer les capacités individuelles par le biais des politiques publiques. Dès lors, nous proposons un indicateur qui évalue la production de biens publics en terme de capacités. Une production de biens publics est efficace lorsqu'elle maximise le niveau des capacités. Puis, nous proposons un indicateur construit à partir d'une fonction directionnelle sociale. Celle-ci est définie comme un sous-vecteur des vecteurs de ressources publiques, dans une direction fixée sur les ressources publiques.

Ce travail introduit un troisième apport théorique en définissant un indicateur de productivité, pour les mesures additives et pour les multiplicatives de l'efficacité. Cet indicateur intègre une dimension supplémentaire dans l'évaluation de la productivité afin de caractériser plus précisément les variations de productivité. En effet, nous proposons de distinguer 2 catégories de ressources, selon le contexte d'étude. L'indicateur généralisé permet de considérer deux catégories distinctes de ressources, dans le processus de production. Il est montré que dans des cas particuliers, l'indicateur de productivité généralisé, coïncide avec l'indicateur de Luenberger-Hicks-Moorsteen et l'indicateur de Luenberger. Dans la version multiplicative de notre indicateur, il existe des cas où l'on retrouve l'indicateur de Hicks-Moorsteen, ou l'indice de Malmquist.

Le dernier apport théorique de ce travail réside dans la démonstration du paradoxe de la fonction distance directionnelle, sous l'hypothèse d'une technologie à rendements d'échelle constants. Il a été montré que l'indicateur de Luenberger basé sur la fonction directionnelle ne permet pas d'évaluer la productivité sous l'hypothèse de rendements

d'échelle constants. Ce problème découle du degré d'homogénéité de la fonction distance directionnelle, lorsque l'on considère une technologie de production à rendements d'échelle constants. La mesure directionnelle vérifie l'hypothèse de commensurabilité faible. Elle est donc sensible aux variations de quantités de ses attributs. Cette mesure peut induire des résultats incohérents. Nous exposons ce problème à travers un exemple numérique simplifié. Puis, nous confirmons cette démonstration par une application empirique. L'étude réalisée compare les scores de productivité de l'indicateur de Luenberger avec ceux de l'indicateur proportionnel. Ces résultats sont contradictoires et montrent que l'indicateur de Luenberger standard conduit à des erreurs d'interprétations. Nous suggérons d'évaluer la productivité avec un indicateur de Luenberger proportionnel. En effet, la fonction proportionnelle, au même titre que la mesure de Debreu-Farrell, satisfait l'hypothèse de commensurabilité forte. Ces fonctions distance sont homogènes de 0, elles sont ainsi invariantes aux changements de quantités. De fait, ce type de mesure permet bien d'appréhender l'efficacité et la productivité.

Finalement cette thèse expose 4 analyses empiriques sur l'étude de la performance des destinations touristiques. Ces applications illustrent de façon concrète la pertinence des instruments de mesure empruntés la microéconomie de la production. Chacune de ces applications conceptualise un cadre d'analyse théorique pour évaluer l'efficacité, la productivité pour fournir des perspectives d'amélioration aux centres de décision, dans le secteur touristique. La première application propose une méthodologie qui permet d'évaluer la rentabilité espérée de la demande touristique d'une destination, par nationalité. Cette méthode est empreintée à la théorie financière. Plus précisément nous utilisons le cadre d'analyse de l'espace Moyenne-Variance, défini par Markowitz. En ce sens, on assimile la demande touristique des destinations touristiques, à des portefeuilles de touristes. Le but est d'évaluer la rentabilité espérée de la demande touristique par nationalité, pour la période à venir. De plus, cette méthode permet de définir les nationalités de touristique qui ont le meilleur potentiel de croissance. Autrement dit, il est possible de cibler les nationalités "volatiles", qui ont la rentabilité espérée la plus élevée. La seconde application définit un cadre d'analyse conceptuel pour évaluer la performance touristique par type de tourisme. Le modèle mesure la productivité des destinations touristiques avec la méthode DEA. La particularité du modèle réside dans le fait, qu'il catégorise

les DMU, selon la nature du tourisme qu'elles proposent ; littoral, montagne ou urbain. Ce modèle permet d'élaborer des comparaisons dans des groupes homogènes. Les DMU sont catégorisées selon des variables fixes incontrôlables. La troisième application empirique évalue l'efficacité des stations de ski dans le massif des Pyrénées. Plus précisément nous mesurons l'efficacité technique des remontées mécaniques, au sens de Färe-Lovell et Debreu-Farrell. Nous intégrons les remontées mécaniques Françaises, Espagnoles et Andoranes. Notre étude fournit des perspectives pour accroître l'efficacité de certains domaines skiables. La dernière application analyse la performance de la demande touristique Espagnole, dans la région du Languedoc-Roussillon. Plus précisément, cette étude mesure l'efficacité de la demande de nuitées Espagnoles dans le Languedoc-Roussillon, relativement aux autres régions Françaises. Il est établi que cette région n'est pas efficace et devrait s'inspirer de son "benchmark", la région Midi-Pyrénées.

Annexe Chapitre 1 : les rendements d'échelle dans la technologie de production

Les technologies à rendements d'échelles constants

Ce cas peut être illustré de la manière suivante. Lorsque l'on double la quantité d'input, la quantité d'output double par la même. La ci-dessous, représente une technologie de production à rendements d'échelle constants.

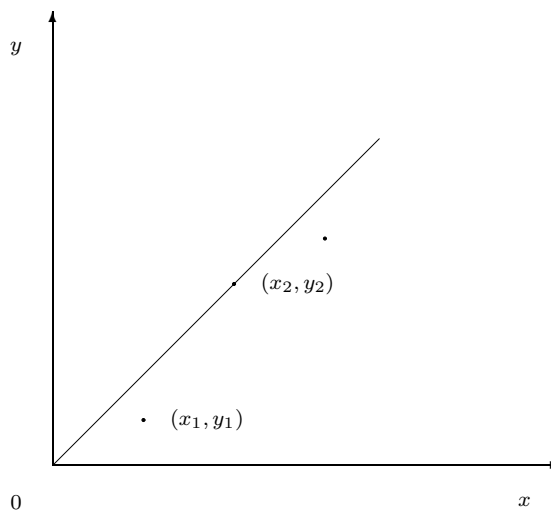


Figure 39 Rendements d'échelle constants.

Les technologies à rendements d'échelles variables

Certaines situations économiques induisent des technologies à rendements d'échelles croissants. C'est le cas en présence d'économie d'échelle ou de synergies de production. D'autres situations économiques impliquent une technologie à rendements d'échelle décroissants. Le modèle VRS vise à prendre en compte l'inefficacité allocative dans le calcul de l'efficacité. Celle-ci résulte de l'effet de taille de la firme. La figure suivante représente une technologie de production à rendements d'échelle variables.

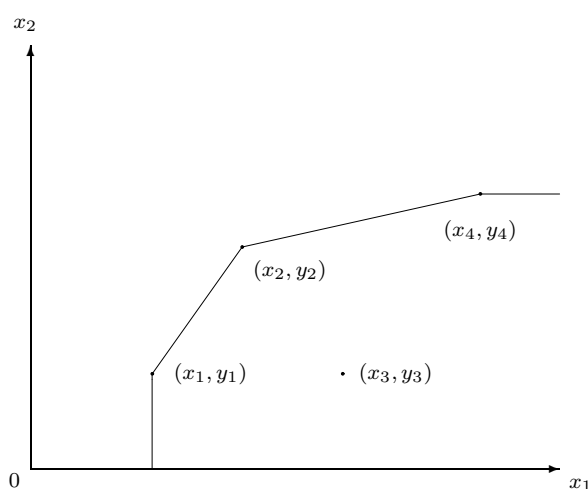


Figure 40 Technologie à rendements d'échelle variables.

Les technologies à rendements d'échelles non croissants

Seiford (1990) propose de formaliser une technologie à rendements d'échelles non croissants. Le graphique ci-dessous illustre ce type de technologie de production.

Les technologies à rendements d'échelles non décroissants

C'est Grosskopf (1986) qui a introduit cette hypothèse dans la technologie. Les technologies de production à rendements d'échelles non décroissants peuvent être représentés de la manière suivante :

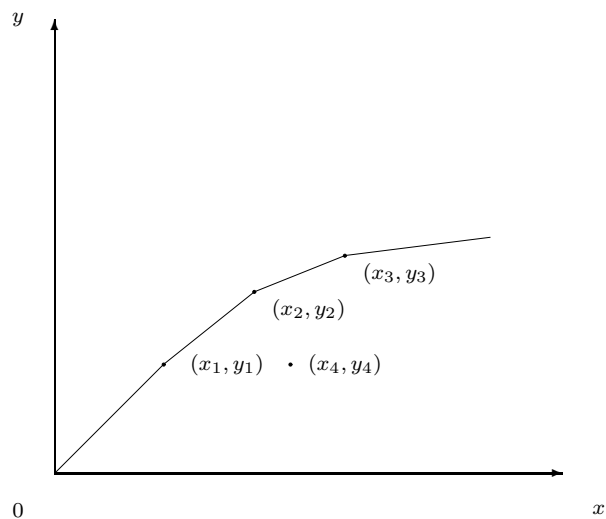


Figure 41 Technologie à rendements d'échelle non croissants.

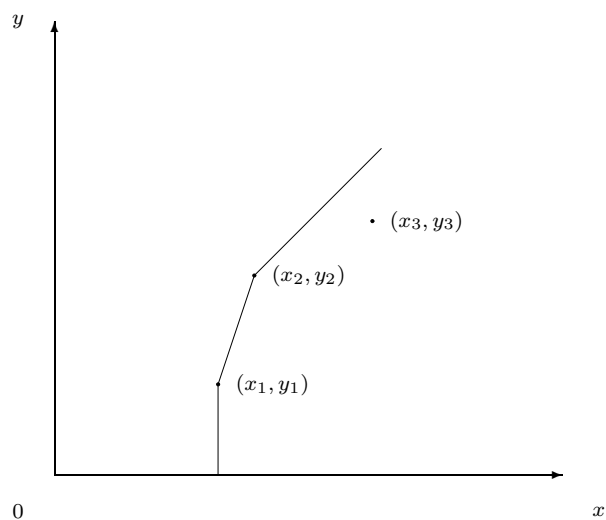


Figure 42 Technologie à rendements d'échelle non décroissants.

**Annexe du Chapitre 6 sur l'analyse de
l'efficacité de la demande touristique au
Maroc**

TABLE 8.6 – Statistiques du nombre de nuitées passées au Maroc,(2006-2010), par origine

Pays	Min	Max	Moyenne	Ecart-type
Algerie	12927	113135	81852	36583
Tunisie	42721	54755	47292	4366
Mauritanie	1094	20995	12168	8966
Autres pays d'Afrique	10352	124825	70482	49988
Canada	769	73286	54161	26951
USA	216569	286115	246604	22963
Japon	75639	102374	85033	9330
Etats indépendants du Commonwealth	147803	438862	279655	99085
Danemark	14677	40514	27467	9936
Finlande	7021	52178	37408	16207
Norvège	2908	31766	19922	10041
Suède	12176	123801	80537	37119
Royaume-Unis	92997	1367142	1016517	473700
Italie	57073	657142	504582	225586
Portugal	9696	132303	87432	41041
Espagne	92199	816985	517425	346726
Autriche	3253	54171	35618	17716
Belgique	582277	688878	623869	45103
France	5550236	6419752	6025432	340046
Allemagne	895617	988958	955132	33802
Hollande	208963	340763	278410	47622
Suisse	139685	155585	145544	7008
Libyan	19002	30617	23330	4078
Arabie Saoudite	141703	220651	173165	28402
Syrie	935	8481	6176	2775
Emirats-Etats-Unis	2982	39581	25904	12250
Egypte	31791	35422	33123	1280
Autres pays du Moyen-Orient	121514	158933	141863	14073
Autres pays du reste du monde	765954	1145382	902391	128628
Expatriés	27363	35912	30721	2893

TABLE 8.7 – Expansion de la rentabilité espérée

Expansion de la rentabilité espérée	$E(R_i)$	σ	θ	Efficienc
France	6025431	340046	6025431	1
Allemagne	955131	33802	1427175	1
Belgique	623868	45103	1640175	3
Autres pays du monde	902390	128628	3058175	3
Etats-Unis-Amérique	246603	22963	1216175	5
Suisse	145543	7008	862175	6
Royaume-Unis	1016516	473700	6025431	6
Hollande	278409	47622	1687175	6
Autres pays Moyen-Orient	141862	14073	1025175	7
Arabie Saoudite	173164	28402	1323175	8
Italie	504581	225586	4496175	9
Etat du Commonwealth	279654	99085	2600175	9
Japon	85032	9330	916175	11
Espagne	517424	346726	6025431	12
Tunisie	47291	4366	800175	17
Portugal	87431	41041	1564175	18
Algérie	81851	36583	1480175	18
Suède	80536	37119	1490175	19
Egypte	33122	1280	719175	22
Canada	54160	26951	1295175	24
Autres pays d'Afrique	70481	49988	1731175	25
Expatriés	30720	2893	763175	25
Finlande	37407	16207	1073175	29
Austriche	35617	17716	1106175	31
Danemark	27466	9936	930175	34
Libye	23329	4078	793175	34
Emirats-Unis	25903	12250	983175	38
Norvège	19921	10041	932175	47
Mauritanie	12167	8966	907175	75
Syrie	6175	2775	760175	123

TABLE 8.8 – Diminution du risque

Diminution du risque	$E(R_i)$	σ	λ	Efficienc
France	6025431	340046	340046	1
Allemagne	955131	33802	11027	0,326
Autres pays du monde	902390	128628	8735	0,0679
Royaume-Unis	1016516	473700	13666	0,028
Egypte	33122	1280	0,0000017	0,00000000134
Syrie	6175	2775	0,0000017	0,00000000062
Expatriés	30720	2893	0,0000017	0,00000000059
Libye	23329	4078	0,0000017	0,00000000042
Tunisie	47291	4366	0,0000017	0,00000000039
Suisse	145543	7008	0,0000017	0,00000000025
Mauritanie	12167	8966	0,0000017	0,00000000019
Japon	85032	9330	0,0000017	0,00000000018
Danemark	27466	9936	0,0000017	0,00000000017
Norvège	19921	10041	0,0000017	0,00000000017
Emirats-Unis	25903	12250	0,0000017	0,00000000014
Autres pays Moyen-Orient	141862	14073	0,0000017	0,00000000012
Finlande	37407	16207	0,0000017	0,00000000011
Autriche	35617	17716	0,0000017	0,00000000010
Etats-Unis-Amérique	246603	22963	0,00000171831	0,00000000007
Canada	54160	26951	0,0000017	0,00000000006
Arabie Saoudite	173164	28402	0,0000017	0,00000000006
Algerie	81851	36583	0,0000017	0,00000000005
Suède	80536	37119	0,0000017	0,00000000005
Portugal	87431	41041	0,0000017	0,00000000004
Hollande	278409	47622	0,0000017	0,00000000004
Autres pays d'Afrique	70481	49988	0,0000017	0,00000000003
Etat du Commonwealth	279654	99085	0,0000017	0,00000000002
Belgique	623868	45103	0	0
Italie	504581	225586	0	0
Espagne	517424	346726	0	0

**Annexe Chapitre 7 sur l'étude de
l'efficacité touristique des départements
et régions de France par type de
tourisme**

TABLE 8.9 – Résultats des scores d'efficacité et de productivité pour la catégorie littoral

LITTORAL	TC	EC	TFPG	2009	2011
Alpes-Maritimes	1	1	1	100	100
Bouches-du-Rhône	1	1	1	100	100
Calvados	1	1	1	100	98,4
Charente-Maritime	1	1	1	100	100
Corse-du-Sud	1	1	1	100	100
Haute-Corse	1	1	0,98	100	97,9
Hérault	1	1	1	100	100
Landes	1	1	1	100	100
Pyrénées-Orientales	1	1	1	100	100
Vendée	1	1	1	100	100
Somme	1	1	1,01	97,6	96,2
Var	1	1	1,02	97,1	95,5
Nord	1	1	1,01	96,2	95,8
Seine-Maritime	1	1	0,98	95	91,1
Pyrénées-Atlantiques	1,1	1	0,99	94,3	89,3
Gard	1	1	1,06	93,8	95,9
Pas-de-Calais	1	1	1,01	93,1	92,5
Manche	1	1	1,03	92	92,5
Aude	1	1	1,03	91,7	90,9
Gironde	1	1	1,06	90,4	93,2
Loire-Atlantique	1	1	1,01	90,3	89,2
Côtes-d'Armor	1	1	1	80,4	78,2
Morbihan	1	1	1,07	80,2	82,8
Eure	1	1	1,03	78,6	79,8
Finistère	1	1	1,04	77,9	78
Ille-et-Vilaine	1	1,7	1,62	53,5	89,6
<i>Moyenne</i>			1.04	92.4	93.3
<i>Min</i>			0.98	53.5	78
<i>Max</i>			1.62	100	100

TABLE 8.10 – Définition des "Benchmark"

Littoral 2011	Alpes- Maritimes	Bouches- du-Rhône	Charente- Maritime	Corse- du-Sud	Hérault	Landes	Pyrénées- Orientales	Vendée
Bouches-du-Rhône	0	1	0	0	0	0	0	0
Charente-Maritime	0	0	1	0	0	0	0	0
Corse-du-Sud	0	0	0	1	0	0	0	0
Eure	0	0,14	0	0	0	0	0	0
Gard	0	0,08	0	0,01	0,17	0	0,3	0
Hérault	0	0	0	0	1	0	0	0
Landes	0	0	0	0	0	1	0	0
Nord	0	0,69	0	0	0	0	0	0
Pas-de-Calais	0	0,45	0	0	0	0	0	0
Pyrénées-Orientales	0	0	0	0	0	0	1	0
Somme	0	0,14	0	0	0,06	0	0	0
Var	0	0,13	0	0,39	0,57	0	0,36	0
Vendée	0	0	0	0	0	0	0	1
Haute-Corse	0,01	0	0,01	0,67	0,01	0	0	0
Aude	0,05	0	0,06	0,12	0,13	0	0	0
Côtes-d'Armor	0,05	0	0,07	0	0,21	0	0	0
Finistère	0,05	0,01	0	0	0,53	0	0	0
Loire-Atlantique	0,05	0,38	0	0	0,22	0	0	0
Gironde	0,06	0,38	0	0	0,44	0	0	0
Morbihan	0,06	0	0,2	0	0,34	0	0	0
Seine-Maritime	0,06	0,36	0	0	0	0	0	0
Manche	0,09	0	0,16	0	0,04	0	0	0
Ille-et-Vilaine	0,16	0,24	0	0	0,05	0	0	0
Pyrénées-Atlantiques	0,24	0	0,13	0,15	0,11	0	0	0
Calvados	0,31	0	0,09	0	0,05	0	0	0
Alpes-Maritimes	1	0	0	0	0	0	0	0

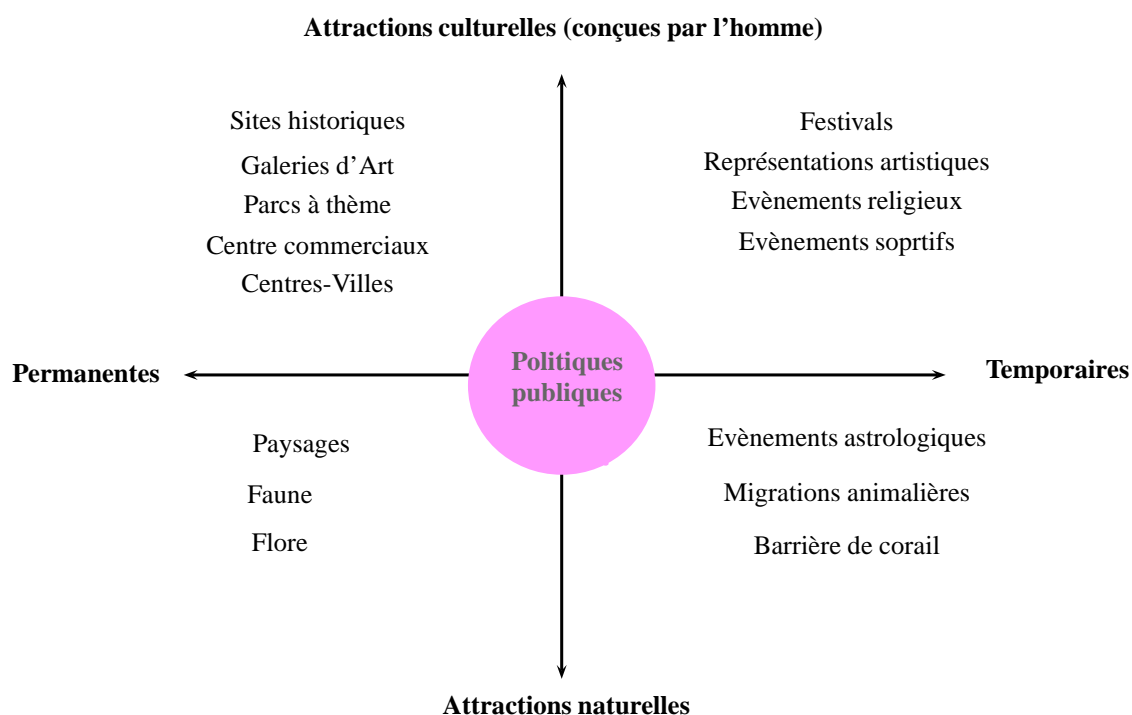


Figure 43 : Classification des attractions touristiques selon Benckendorff

TABLE 8.11 – Potentiels de gains d'efficacité sur les quantités de ressources (en %)

Littoral	Output		Capacité hotels	Input		Montagne	Output		Capacité hotels	Input	
	Nuitées hotels	Nuitées cam- pings		Capacité cam- pings	Emplois		Nuitées hotels	Nuitées cam- pings		Capacité cam- pings	Emplois
Finistère	28	28	-22	-38	-22	Savoie	46	46	-32	-44	-38
C.Armor	28	28	-22	-36	-22	H.Saône	43	43	-30	-63	-46
Eure	25	91	-20	-70	-30	Ariège	38	38	-27	-42	-27
Morbihan	21	21	-17	-28	-17	H.Alpes	36	36	-27	-41	-27
Loire-A	12	12	-11	-35	-11	Jura	31	31	-24	-39	-76
P-A	12	12	-11	-11	-11	Vosges	26	26	-20	-49	-20
Ille&V	12	12	-10	-35	-10	Isère	25	25	-20	-39	-46
Aude	10	10	-9	-9	-9	H.Garon	22	33	-18	-25	-50
Seine-M	10	55	-9	-40	-9	Ain	22	22	-18	-54	-29
P-de-C	8	40	-8	-82	-9	Doubs	21	21	-18	-35	-34
Manche	8	8	-7	-35	-7	Drôme	17	17	-15	-15	-32
Gironde	7	7	-7	-28	-7	H.Savoie	15	15	-13	-31	-15
Var	5	5	-4	-4	-4	Moselle	12	12	-11	-81	-59
Nord	4	95	-4	-40	-27	P-A	10	10	-9	-19	-9
Gard	4	4	-4	-4	-4	Aude	8	8	-7	-14	-7
Somme	4	4	-4	-74	-11	Alpes-H-P	3	3	-3	-11	-3
H.Corse	2	2	-2	-2	-2	Bas-Rhin	2	21	-2	-41	-28
Calvados	2	2	-2	-33	-2	Haut-Rhin	1	1	-1	-36	-14
Rural						Urbain					
H.Loire	58	58	-37	-55	-37	Loire	119	119	-54	-60	-75
Meuse	57	57	-36	-78	-40	T.Belfort	103	69	-41	-41	-41
Creuse	48	48	-33	-51	-33	M&M	100	115	-50	-50	-65
Orne	47	59	-32	-38	-33	Oise	95	156	-49	-67	-68
Corrèze	39	39	-28	-39	-28	Eure&L	90	90	-47	-69	-56
Gers	39	39	-30	-28	-28	Marne	82	54	-35	-35	-46
Nièvre	35	35	-26	-49	-26	Essonne	72	247	-42	-48	-67
2-Sèvres	35	35	-26	-38	-48	Yvelines	72	88	-42	-42	-70
Indre	34	34	-25	-56	-27	Loiret	70	70	-41	-41	-46
Ardennes	33	33	-25	-57	-52	Rhône	58	56	-36	-36	-54
Charente	27	27	-21	-34	-49	H.Vienne	56	56	-36	-49	-41
Mayenne	26	26	-23	-20	-57	C.d'Or	45	6	-19	-5	-5
Allier	25	25	-24	-20	-20	Sarthe	37	37	-27	-38	-41
Cantal	23	52	-19	-19	-19	Indre&L	32	9	-8	-8	-9
Yonne	22	22	-18	-39	-33	Val-Marne	19	49	-16	-16	-30
Tarn&Garon	22	22	-18	-23	-44	Val-d'Oise	18	550	-25	-16	-16
Saône&L	21	21	-17	-19	-17	Maine&L	3	3	-2	-2	-30
Cher	20	37	-17	-42	-22	S-S-Denis	0	277	-7	0	0
Loir&Cher	13	13	-12	-20	-23						
H.Marne	11	11	-12	-20	-23						
Aveyron	11	11	-12	-10	-10						
Aube	6	6	-6	-9	-31						
Dordogne	6	6	-5	-6	-5						
Aisne	3	3	-22	-3	-54						

TABLE 8.12 – Comparaison des scores régionaux d'efficacité technique pour les 3 modèles

Régions	Départements	Modèle A	Modèle B	Modèle C
Alsace	Bas-Rhin, Haut-Rhin	94,7	57,5	74
Aquitaine	Dordogne, Pyrénées-Atlantiques, Gironde, Lot-et-Garonne, Landes	94,7	78,9	85
Auvergne	Allier, Haute-Loire, Cantal, Puy de Dôme	81,13	52	66
Basse Normandie	Calvados, Orne, Manche	86,4	55	79
Bourgogne	Côte-d'Or, Yonne, Nièvre, Saône-et-Loire	83,25	57,7	82
Bretagne	Côtes-D'Amor, Finistère, Ille-et-Vilaine, Morbihan	82,15	63,7	79,5
Centre	Cher, Eure-et-Loire, Indre, Indre-et-Loire, Loire-et-Cher, Loiret	74,89	53	74,9
Champagne Ardenne	Ardennes, Aube, Marne, Haute-Marne	81,24	58	72,7
Corse	Corse-du-Sud, Haute-Corse	98,96	98,27	100
Franche-Comté	Doubs, Jura, Haute-Saône, Territoire-de-Belfort	71,88	53	71,9
Haute Normandie	Eure, Seine-Maritime	85,5	48	74
Ile-de-France	Paris, Seine-et-Marne, Yvelines, Essone, Hauts-de-Seine, Seine-Saint-Denis, Val-de-Marne, Val-d'Oise	90,33	73	100
Languedoc- Roussillon	Aude, Gard, Hérault, Lozère, Pyrénées-Orientales	97,4	92	100
Limousin	Corrèze, Creuse, Haute-Vienne	67,9	46,8	67,9
Lorraine	Meurthe-et-Moselle, Meuse, Moselle, Vosges	70,6	46,8	70,6
Midi-Pyrénées	Ariège, Aveyron, Gers, Haute-Garonne, Lot, Hautes-Pyrénées, Tarn, Tarn-et-Garonne	87,3	68,6	89,6
N-P-de-C	Nord, Pas-de-Calais	94	52,4	80,9
Paca	Alpes-de-Haute-Provence, Hautes-Alpes, Alpes-Maritimes, Bouches-du-Rhône, Var, Vaucluse	95	85,6	92,6
Pays de la Loire	Loire-Atlantique, Maine-et-Loire, Mayenne-Sarthe, Vendée	87,9	66,3	87
Picardie	Aisne, Oise, Somme	81,45	61,4	73,5
Poitou-Charentes	Charente, Charente-Maritime, Deux-Sèvres, Vienne	88	64,5	100
Rhône-Alpes	Ain, Ardèche, Drôme, Isère, Loire, Rhône, Savoie, Haute-Savoie	76,54	63	73

Annexe du Chapitre 8 sur l'analyse de l'efficacité touristique dans un contexte transfrontalier

**Application 1 : Performance des domaines skiables dans le
massif des Pyrénées**

**Application 2 : Performance de la demande touristique fron-
talière**

TABLE 8.13 – Scores d'efficacité pour les mesures de Debreu-Farrell et de Färe-Lovell

Stations	D-F	S-B-M	Prop
Grandvalira	100	100	
Saint Lary	100	100	
Font Romeu	100	100	
Peyragudes	100	100	
Cauterets	100	100	
Gourette	100	100	
La Quillane	100	100	
Vallnord	92,23	87,39	
Baqueira	98,01	80,72	
Grand Tourmalet	87,86	79,99	
Formigal	97,09	69,47	
Ax 3 Domaines	88,31	68,52	
Les Angles	82,33	64,45	
Luchon-Superbagnères	76	62,28	
Val Louron	78,17	61,17	
La Molina et Masela	76,63	59,42	
Formiguères	73,77	55,56	
Gavarnie	86,39	54,13	
Vallter	63,62	51,94	
Cerler	71,08	51,81	
Port Ainé, Espot Esqui et Tavascan	67,72	51,62	
Vall de Nürja	62,7	50,5	
Porté Puymorens	70,4	50,16	
Cambre d'Aze	63,38	49,01	
Astun-Candanchú	63,66	48,96	
Guzet	63,38	47,96	
Panticosa	63,26	47,7	
Port del Comte	62,53	47,22	
Boí Taull	60,79	46,74	
Puyvalador	60,64	45,12	
Goulier Neige	58,75	45,1	

TABLE 8.14 – "Benchmark" des stations inefficientes

Stations inefficientes et benchmarks	Peyragudes	Cauterets	Gourette	La Quillane
Baqueira	1,9	0	0	0
Grand Tourmalet	0,69	1,13	0	0
Formigal	1,2	0	0	0
Ax 3 Domaines	0,8	0,07	0	0
Les Angles	0,88	0	0	0
La Molina et Masela	1,8	0	0	0
Cerler	0,66	0	0	0
Astun-Candanchú	0,33	0,73	0	0
Luchon-Superbagnères	0,49	0,02	0,07	0
Val Louron	0,07	0,4	0	0
Port del Comte	0,35	0	0	0
Cambre d'Aze	0,26	0,17	0	0
Boí Taull	0,31	0,02	0	0
Guzet	0,21	0,17	0	0
Formiguères	0,17	0,13	0	0
Panticosa	0,1	0,29	0	0
Porté Puymorens	0,14	0,16	0	0
Port Ainé, Espot Esqui et Tavascan	0,43	0	0	0
Vallter	0	0,1	0,21	0,04
Puyvalador	0,08	0,08	0	0
Vall de Nürja	0,12	0	0	0
Goulier Neige	0,01	0,06	0	0
Gavarnie	0	0,22	0	0

TABLE 8.15 – Définition des "benchmark" des DMUs inefficientes pour le premier modèle

Benchmarks	Alsace	Aquitaine	Basse-Normandie	Champagne-Ardenne	Corse	Languedoc-Roussillon	Midi-Pyrénées	Paca
Auvergne	0,11	0	0	0,21	0	0,15	0,06	0,02
Bourgogne	0,26	0	0	0,62	0,07	0,07	0	0
Bretagne	0	0,07	1,93	0	0,2	0	0	0
Centre	0,03	0,02	0	1	0	0	0,25	0
Franche-C.	0,2	0	0	0,1	0,31	0	0	0,02
Haute-N.	0	0,02	0	0,71	0	0	0,07	0
Limousin	0	0,07	0,09	0,17	0	0	0	0
Lorraine	0,81	0	0	0,16	0	0,02	0	0
N-Pas-Calais	0	0	0,05	2,95	0	0	0	0
Pays Loire	0	0	2,16	0	0	0	0	0
Picardie	0	0	0,37	0,76	0	0	0	0
Poitou-Cha.	0	0,09	0,83	0	0	0	0	0
Rhône-Alpes	1,83	0	0	2,29	0	0	0,14	0,19

TABLE 8.16 – Gains potentiels en output pour le premier modèle

DMUs/Gains	Output 1 Gain(%)	Output 2 Gain(%)	Output 3 Gain(%)	Output 4 Gain(%)	Output 5 Gain(%)	Output 6 Gain(%)
Auvergne	342,48	178,69	178,69	257,9	178,69	178,69
Bourgogne	38,86	4,16	63,81	21,11	4,16	4,16
Bretagne	18,05	100,57	18,05	115,17	30,04	18,05
Centre	7,43	82,28	7,43	98,99	7,43	7,43
Franche-Comté	77,08	149,13	49,54	1176,11	49,54	49,54
Haute Normandie	30,58	107,97	30,58	82,53	115,79	30,58
Limousin	428,2	142,91	142,91	142,91	161,56	142,91
Lorraine	181,33	104,7	335,53	288,94	650,15	104,7
Nord-Pas-de-Calais	159,1	108,95	58,66	165,75	315,96	32,46
Pays de la Loire	120,9	166,88	80,56	321,75	102,88	22,34
Picardie	110,65	60,93	90,14	132,03	357,64	20,31
Poitou-Charentes	32,98	31,64	5,78	191,72	18,35	5,78
Rhône-Alpes	187,5	68,35	27,95	129,82	27,95	27,95

TABLE 8.17 – Définition des "Benchmark" des régions inefficientes pour le second modèle

Régions	Alsace	Corse
Aquitaine	0,87	3,59
Auvergne	0,4	0,77
Basse Normandie	0,47	0,97
Bourgogne	0,6	0,39
Bretagne	0,89	2,71
Centre	0,31	1,02
Champagne Ardenne	0,29	0,27
Franche-Comté	0,31	0,37
Haute Normandie	0	0,64
Languedoc-Roussillon	0,58	4,06
Limousin	0,19	0,38
Lorraine	0,55	0,42
Midi-Pyrénées	0	2,59
Nord-Pas-de-Calais	0,16	1,54
Paca	2,07	3,23
Pays de la Loire	0,93	2,52
Picardie	0	0,95
Poitou-Charentes	0,32	1,92
Rhône-Alpes	3,63	0,87

1

TABLE 8.18 – Gains potentiels en nuitées Suisses et Italiennes au sens du second modèle

	y_4	y_4	Gains	y_5	y_5	Gain
	Valeur Actuelle	Valeur visée	en %	Valeur Actuelle	Valeur visée	en %
Aquitaine	92101	2028798	2103	190332	898546	372
Auvergne	34942	475856	1262	39835	246191	518
Basse Normandie	85554	590842	591	46554	299335	543
Bourgogne	101313	320336	216	116721	224467	92
Bretagne	128634	1580276	1129	109360	737776	575
Centre	113401	591799	422	52270	272779	422
Champagne Ardenne	37866	192911	409	23929	121908	409
Franche-Comté	18065	249425	1281	84256	146308	74
Haute-Normandie	41866	333299	696	11870	122294	930
Languedoc-Roussillon	176915	2216769	1153	410338	915438	123
Limousin	9102	232287	2452	9137	118715	1199
Lorraine	42120	325511	673	28160	217626	673
Midi-Pyrénées	706458	1346164	91	79454	493937	522
Nord-Pas-de-Calais	43701	828695	1796	17552	332836	1796
Paca	1319700	2074914	57	717002	1127315	57
Pays de la Loire	43880	1489287	3294	49636	711024	1332
Picardie	26085	492032	1786	7746	180537	2231
Poitou-Charentes	27173	1056599	3788	46590	443953	853
Rhône-Alpes	344181	1145778	233	513617	1063160	107

TABLE 8.19 – Définition des "benchmark" des régions inefficentes lorsque $y = y_3$

	Aquitaine	Midi-Pyrénées
Alsace	0	0,38
Auvergne	0	0,45
Basse Normandie	0,01	0,53
Bourgogne	0	0,38
Bretagne	0,5	0,53
Centre	0	0,51
Champagne Ardenne	0	0,21
Corse	0,12	0
Franche-Comté	0	0,26
Haute Normandie	0	0,25
Languedoc-Roussillon	0,86	0
Limousin	0	0,22
Lorraine	0	0,37
Nord-Pas-de-Calais	0	0,65
Paca	0	2,03
Pays de la Loire	0,35	0,72
Picardie	0	0,37
Poitou-Charentes	0,44	0
Rhône-Alpes	0	1,72

TABLE 8.20 – Gains potentiels pour le troisième modèle

	Output 3	Output 3	Gain	Emplois	Gain
	Valeur actuelle	Valeur visée	en %	gain %	en %
Alsace	68125	147405	116	-55	0
Auvergne	31856	174206	447	-3	0
Basse Normandie	52937	211678	300	0	0
Bourgogne	30837	147911	380	-33	0
Bretagne	124440	482358	288	0	0
Centre	118043	199230	69	-37	0
Champagne Ardenne	14579	82152	464	-50	0
Corse	21596	66093	206	0	-47
Franche-Comté	19430	100317	416	-19	0
Haute Normandie	35071	95860	173	-55	0
Languedoc-Roussillon	319651	478205	50	0	-17
Limousin	20000	84275	321	-1	0
Lorraine	14509	144840	898	-52	0
Nord-Pas-de-Calais	28821	253350	779	-49	0
Paca	362017	787681	118	-28	0
Pays de la Loire	63419	475562	650	0	0
Picardie	16175	141514	775	-30	0
Poitou-Charentes	86631	242579	180	0	-13
Rhône-Alpes	220873	664824	201	-47	0

Bibliographie

Articles et ouvrages scientifiques

- [1] Althin R., Färe R. et Grosskopf S. (1996), Profitability and Productivity Changes : An Application to Swedish Pharmacies, *Annals of Operations Research*, 66, 219-230.

- [2] Atkinson S.E., Cornwell C., Honerkamp O. (2003), Measuring and Decomposing Productivity Change : Stochastic Distance Function Estimation Versus Data Envelopment Analysis, *Journal of Business & Economic Statistics*, 21, 284-294.

- [3] Barros C.P, (2005), Evaluationg the Efficiency of a small hotel chain with a Malmquist Productivity Index, *International Journal of Tourism Research* 7(3),173-84.

- [4] Barros C.P, Dieke P.U.C. (2008), Technical Efficiency of African Hotels, *International Journal of Hospitality Management* 27,438-447.

- [5] Barros C.P, Botti L., Peypoch N., Robinot E., Solonandrasana B., Assaf A.G (2011), Performance of French Destinations : Tourism Attraction Perspectives, *Tourism Management* 32,141-146.

- [6] Basu K. et Kanbur R. (eds) (2009), Arguments for a Better World : Essays in Honor of Amartya Sen (2 volumes), Oxford, Oxford University Press.

BIBLIOGRAPHIE

- [7] Basu K., Lopez-Calva L. (2011), Functionings and Capabilities, in : K. Arrow, A. Sen, K. Suzumura (Eds.), *Handbook of Social Choice and Welfare*, Volume 2, Amsterdam, Elsevier.
- [8] Banker R.D., Charnes A. et Cooper W.W. (1984), Some model for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis, *Management Science* 30, 1078-1092.
- [9] Banker R.D. et Maindiratta A. (1993), Maximum Likelihood Estimation of Monotone Concave Production Frontiers , *Journal of Productivity Analysis*.
- [10] Barros C.P., Dieke P.U.C. (2008), Technical efficiency of African hotels, *International Journal of Hospitality Management* 27.438-447
- [11] Barros C. et Couto. (2013) Productivity analysis of European airlines, *Journal of Air Transport Management* 31,11-13.
- [12] Barros, C. et Peypoch, N. (2010) Productivity changes in Portuguese bus companies, *Transport Policy* 17,295-302.
- [13] Berrebi Z.M. et Silber J. (1988), Distance Functions and the Comparison of Development Levels, *Economics Letters*, 27, 195-200.
- [14] Bjurek H. (1996), The Malmquist Total Factor Productivity Index, *Scandinavian Journal of Economics*, 98(2), 303-313.
- [15] Bjurek H., Førsund F.R. et Hjalmarsson (1998) Malmquist Productivity Indices : An Empirical Investigation, in : R. Färe, S. Grosskopf, R. Russell (eds) *Index Numbers : Essays in Honour of Sten Malmquist*, Boston, Kluwer.

- [16] Blancard S. , Boussemart J.P, Briec W. et Kerstens K. (2006), Short- and Long-Run Credit Constraints in French Agriculture : A Directional Distance Function Framework Using Expenditure-Constrained Profit Functions, *American Journal of Agricultural Economics*, 88(2), 351-364.
- [17] Boussemart, J-P., Briec, W., Kerstens, K. et Poutineau J-C. Luenberger and Malmquist Productivity Indices : Theoretical Comparisons and Empirical Illustration (2003), *Bulletin of Economic Research*, 55 :4, 0307-3378.
- [18] Botti L., Goncalves O. et Peypoch N. (2012), Benchmarking Pyrenean ski resorts, *Revue de Géographie Alpine / Journal of Alpine Research*, 100-4. URL.
- [19] Botti L., Peypoch N., Robinot, E., et Solonandrasana B. (2009), Tourism destination competitiveness : the French regions case. *European Journal of Tourism Research*, 2, 5e24.
- [20] Botti L., Goncalves O. et Ratsimbanierana H. (2012), French destination efficiency : a mean-variance approach, *Journal of Travel Research*, 51(2), 115-129.
- [21] Briec W. (1995), Une nouvelle approche de la mesure de l'efficacité productive, Thèse de doctorat en sciences économiques, Université d'Aix-Marseille, GREQAM.
- [22] Briec W., (1997), A graph type extension of Farrell technical efficiency measure, *Journal of Productivity Analysis*, 8, 95-110.
- [23] Briec W. et Lesourd J-B. (1999) Metric Distance Function and Profit, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 101,15-33.

- [24] Briec W. (2000), An Extended Färe-Lovell Technical Efficiency Measure, *International Journal of Production Economics*, 65(2), 191-199.
- [25] Briec W., Kerstens K. et Lesourd J.B (2004), Single period Markowitz portfolio selection, performance gauging and duality : a variation on the Luenberger shortage function, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 120(1), 1-27.
- [26] Briec W. et Kerstens K. (2004) A Luenberger-Hicks-Moorsteen Productivity Indicator : Its Relation to the Hicks-Moorsteen Productivity Index and the Luenberger Productivity Indicator, *Economic Theory*, 23(4), 925-939.
- [27] Briec W., Kerstens K. et Jokung O. (2007), Mean-variance-skewness portfolio performance gauging : a general shortage function and dual approach, *Management Science*, 53(1), 135-149.
- [28] Briec W. et Kerstens K. (2010), The Luenberger Productivity Indicator : An Economic Specification Leading to Infeasibilities , *Economic Modelling*, 26, 597-600, 2009.
- [29] Briec W. et Peypoch N. (2010), Microéconomie de la production : la mesure de l'efficacité et de la productivité, *De Boeck*.
- [30] Briec W. et Kerstens K. (2011), The Hicks-Moorsteen Productivity Index Satisfies the Determinateness Axiom, *Manchester School*, 79, 765-775.
- [31] Briec W., Cavaignac, L. et Kerstens K. (2011), Directional Measurement of Technical Efficiency of Production : An Axiomatic Approach, *Economic Modelling*, 28(3), 775-781.
- [32] Briec W, Dumas A. et Stenger A. (2013), On the standard achievement and well-being indexes and their relation to the Hicks-Moorsteen productivity index,

Economic Modelling, 35, 900-909.

- [33] Caves D.W., Christensen L.R et Diewert W.E (1982), The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Inputs, Outputs and Productivity, *Econometrica*, 50(6), 1393-1414.
- [34] Chambers R.G. (1998), Input and Output Indicators, in Index Numbers : Essays in Honor of Sten Malmquist, ed. Rolf Färe, Shawna Grosskopf, and R.R. Russell, Boston : Kluwer Academic Publishers.
- [35] Chambers R.G. (2002), Exact Nonradial Input, Output, and Productivity Measurement, *Economic Theory*, 20(4), 751-765.
- [36] Chambers R.G, Chung Y. et Färe R.äre (1996), Benefit and Distance Functions, *Journal of Economic Theory* 70, 407-419.
- [37] Chambers R.G, Chung Y. et Färe R. äre (1998), Profit, Directional Distance Functions, and Nerlovian Efficiency, *Journal of Optimization Theory and Applications* 98/2, 351-364.
- [38] Chambers R.G. et Pope R.D. (1996), Aggregate productivity measures, *American Journal of Agricultural Economics* 7, 1360-1365.
- [39] Charnes A., Cooper W.W. et Rhodes E. (1978), Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.
- [40] Cherchye L., Ooghe E. et Van Puyenbroeck T. (2008), Robust Human Development Rankings, *Journal of Economic Inequality*,6(4), 287-321.

- [41] Chiang W.E., Tsai M.H., Wang L.S.M. (2004), A DEA Evaluation of Taipei Hotels, *Annals of tourism Research*, 3(3),712-5.
- [42] Comim F., Qizilbash M. et Alkire S. (eds) (2008), *The Capability Approach : Concepts, Measures and Applications*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [43] D'Agata A. (2009), Measures of Freedom, *Journal of Socio-Economics*, 38(1), 209-214.
- [44] Despotis D.K. (2005), Measuring Human Development via Data Envelopment Analysis : The Case of Asia and the Pacific, *Omega*, 33(5), 385-390.
- [45] Deutsch J. et Silber J. (2005), Measuring Multidimensional Poverty : An Empirical Comparison of Various Approaches, *Review of Income and Wealth*, 51(1), 145-174.
- [46] Douglas W., Caves W., Christensen L.R. et Diewert E. (1982), The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, *Econometrica*, 50.6, 1393-1414.
- [47] Färe R., Førsund F.R., Grosskopf S., Hayes K.J. et Heshmati A. (2001), A Note on Decomposing the Malmquist Productivity Index by Means of Subvector Homotheticity, *Economic Theory*, 17, 239-245.
- [48] Färe R., Grosskopf S., Lindgren B. et Roos P. (1995), Productivity Developments in Swedish Hospitals : A Malmquist Output Index Approach, in : A. Charnes, W.W. Cooper, A.Y. Lewin, and L. M. Seiford (eds) *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology and Applications*, Boston, Kluwer.

- [49] Färe R. et Primont D. (1995), *Multi-output production and duality : theory and applications*. Boston : Kluwer.
- [50] Färe R., Grosskopf S. et Roos P. (1996), On Two Definitions of Productivity, *Economics Letters*, 53(3), 269-274.
- [51] Färe R., S. Grosskopf et Zaim O. (2002), Hyperbolic Efficiency and Return to the Dollar, *European Journal of Operational Research*, 136, 671-679.
- [52] Färe R., Martins-Filho C et Vardanyan M. (2010), On functional form representation of multi-output production technologies *Journal of Productivity Analysis* 33,81-96.
- [53] Färe R. et V. Zelenyuk (2003), On aggregate Farrell efficiencies, *European Journal of Operational Research*, 146, 615 – 620.
- [54] Farrell M. (1957), The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, 120A(3), 253-281.
- [55] Fuentes H.J., Grifell-Tatjé E. et Perelman S. (2001), A Parametric Distance Function Approach for Malmquist Productivity Index Estimation, *Journal of Productivity Analysis*, 15(1), 79-94.
- [56] Fixler D. et Zieschang K. (1992), Incorporating Ancillary Measures of Process and Quality Changes into a Superlative Productivity Index, *Journal of Productivity Analysis*, 2(*), 245–267.
- [57] Fukuyama H., Weber W.L. (2009), A directional slacks-based measure of technical inefficiency, *Socio Economic Planning Sciences* 43,274-287.

BIBLIOGRAPHIE

- [58] Goncalves O. (2013), Efficiency and productivity of French ski resorts, *Tourism Management*, 36, 650-657.
- [59] Grosskopf S. (2003), Some Remarks on Productivity and its Decompositions, *Journal of Productivity Analysis*, 20, 459 – 474.
- [60] Grosskopf S. (1993), Efficiency and Productivity, in : H. Fried, C.A.K. Lovell, S. Schmidt (eds) *The Measurement of Productive Efficiency : Techniques and Applications*, Oxford, Oxford University Press, 160-194.
- [61] Guironnet J-P. et Peypoch N. (2007), Human capital allocation and overeducation : A measure of French productivity (1987, 1999) *Economic Modelling* 24, 398-410.
- [62] Hulten C.R. (2001), Total Factor Productivity : A Short Biography, in : C.R. Hulten, E.R. Dean, M.J. Harper (eds) *New Developments in Productivity Analysis*, Chicago, University of Chicago Press, 1-47.
- [63] Hwang S-N, Chang T-Y. (2003), Using data envelopment analysis to measure hotel managerial efficiency change in Taiwan, *Tourism Management*, 24, 357-369.
- [64] Koopmans T.C (1951), Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, *Activity Analysis of Production and Allocation*, T.C Koopmans, ed, 36 :27-56
- [65] Luenberger D.G. (1984), *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd Edition, Addison Wesley, Reading, Massachusetts.
- [66] Luenberger D.G. (1992), New Optimality Principles for Economic Efficiency and Equilibrium, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 75, 221-264.

BIBLIOGRAPHIE

- [67] Luenberger D.G. (1995), *Microeconomic Theory*, Boston : McGraw Hill.
- [68] Luenberger D.G. (1996), Welfare from a Benefit Viewpoint, *Economic Theory*,7, 445-462.
- [69] Lovell C., Richardson S., Travers P. et Wood L. (1994), *Resources and Functionings : A New View of Inequality in Australia* in W. Eichhorn (ed.), *Models and Measurement of Welfare and Inequality*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [70] Mahlberg B. et Sahoo B.K. (2011) Radial and non-radial decompositions of Luenberger productivity indicator with an illustrative application, *Int. J. Production Economics*, 131, 721 – 726.
- [71] Malmquist S. (1953), Index numbers and Indifferences surfaces, *Trabajos de Elastistica, T.C Koopmans,ed*, 36 :27-56
- .
- [72] Markowitz H. (1952), Portofolio selection, *Journal of Finance*, 7, 77 – 91.
- [73] Markowitz H. (1959), Portofolio selection : efficient diversification of investments *New York : John Wiley*.
- [74] Mohsin A. (2005), Tourist attitudes and destination marketing : The case of Australia's northern territory and Malaysia, *Tourism Management*, 26,723 – 732.
- [75] Moorsteen R.H. (1961), On measuring productive potential and relative efficiency, *Quarterly Journal of Economics*, 96, 477 – 503.
- [76] Morey M.R. et Morey R.C. (1999),Mutual fund performance appraisals : a multihorizon perspective with endogenous benchmarking, *Omega*, 27, 241 – 258.

BIBLIOGRAPHIE

- [77] Narayan D., Chambers R.G, Shah M.K et Petesch P. (2000), *Voices of the Poor. Crying out for Change*, Oxford University Pressfor the World Bank, New York.
- [78] Nishimizu M. et Page J. (1982) Total Factor Productivity Growth, Technological Progress and Technical Efficiency Change : Dimensions of Productivity Change in Yugoslavia, 1965-78, *Economic Journal*, 92(368), 920-936.
- [79] Ouellette P. et Vierstraete V. (2004) Technological Change and Efficiency in the Presence of Quasi-Fixed Inputs : A DEA Application to the Hospital Sector, *European Journal of Operational Research*, 154(3), 755-763.
- [80] Peypoch N. et Solonandrasana B. (2006), A note on technical efficiency in tourism industry. *Tourism Economics*, 12, 653e657.
- [81] Peypoch, N. (2007), On measuring tourism productivity. *Asia Pacific Journal of Tourism Research*, 12, 237e244.
- [82] Peypoch N.et Solonandrasana B. (2008), Aggregate efficiency and productivity analysis in the tourism industry. *Tourism Economics*, 14, 45e56.
- [83] Ratsimbanierana H., Sbai S. et Stenger A. (2013), Moroccan tourist portfolio efficiency with the mean-variance approach, *European Journal of Tourism Research*, 6(2), 122-131.
- [84] Ramos X. et Silber J. (2005) On the Application of Efficiency Analysis to the Study of the Dimensions of Human Development, *Review of Income and Wealth*, 51(2), 285-309.

BIBLIOGRAPHIE

- [85] Robeyns I. (2005) The Capability Approach : A Theoretical Survey, *Journal of Human Development*, 6(1), 93-117.
- [86] Russell R.R. (1985), Measures of Technical Efficiency, *Journal of Economic Theory*, 35, 109 – 126.
- [87] Russell R.R. (1987), "On the axiomatic Approach to the Measurement of Technical Efficiency", *Journal of Economic Theory*, 51, 255 – 267.
- [88] Seiford L.M. (1990) "Recent development in DEA : the mathematical programming approach to frontier analysis", *Journal of Econometrics*, 46, 7 – 38.
- [89] Sen A. (1985) *Commodities and Capabilities*, Oxford India Paperbacks, Oxford University Press
The Standard of Living : Lecture I, Concepts and Critiques, in G. Hawthorn (ed.).
- [90] Sen A. (1998a) The Standard of Living : Lecture I, Concepts and Critiques, dans G. Hawthorn (ed.), Cambridge University Press.
- [91] Sen A. (1998b) The Standard of Living : Lecture II, Lives and Capabilities, dans G. Hawthorn (ed.), Cambridge University Press.
- [92] Sen A. (2009) L'Idée de Justice, dans Flammarion (ed.).
- [93] Shephard R.W. (1953), *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton NJ.
- [94] Shephard R.W. (1970), *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton NJ.
- [95] Shephard R.W. (1974a), "Semi-homogeneous Production Function and Scaling of Production", *Eichorn*.

BIBLIOGRAPHIE

Henn W., Opitz R., et Shepard R.W, *Production Theory*

.

[96] Shephard R.W (1974b), "Indirect Production Function", *Mathematical Systems in Economics*

.

[97] Solow R.M (1957), "Technical Change and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics*, 39 :312-320

.

[98] Solow R.M (1962), "Technical Progressn Capital Formation and Economic Growth", *American Economic Review*, 52 :76-86

.

[99] Varian H.R. (1984), The Nonparametric Approach to Production Analysis, *Econometrica*, 52, 579 – 597.

[100] Xu Y. (2002) Functioning, Capability and the Standard of Living - An Axiomatic Approach, *Economic Theory*, 20(2), 387-399.

[101] Zaim O., Färe. R et Grosskopf. S (2001) An Economic Approach to Achievement and Improvement Indexes, *Social Indicators Research*, 56, 91-118.

[102] Zelenyuk V. (2006), Aggregation of Malmquist Productivity Indexes, *European Journal of Operational Research*, 174, 1076 – 1086.

Autres documents

Données collectées pour l'analyse de la performance des stations de ski dans les Pyrénées :

[103] *[http : //www.montagneleaders.fr/reportages/top – 100 – 2013 – 2014 – domaines – skiables – chiffre – affaires](http://www.montagneleaders.fr/reportages/top-100-2013-2014-domaines-skiables-chiffre-affaires)*

[104] www.domaines-skiables.fr/downloads/uploads/Indicateurs-et-Analyses2012-Web.pdf

[105] *[http : //www.turiski.es/wp – content/uploads/2013/10/fgc – dossier_informativo – invierno – 2013_14 – CAST.pdf](http://www.turiski.es/wp-content/uploads/2013/10/fgc-dossier_informativo-invierno-2013_14-CAST.pdf)*

[106] *[http : //www.anmsm.fr/Upload/Mediatheque/dossier1/ANMSM_OSM_CPVague5.pdf](http://www.anmsm.fr/Upload/Mediatheque/dossier1/ANMSM_OSM_CPVague5.pdf)*

Données collectées pour l'analyse de la performance touristique des régions française :

[107] L'INSEE : www.insee.fr

[108] www.entreprises.gouv.fr

[109] OCDE, (1996), Technology, productivity and job creation, OCDE, Paris.

RÉSUMÉ

Ce travail contribue à la définition des mesures de l'efficacité et de la productivité dans la théorie micro-économique. Il présente des apports théoriques et empiriques.

En premier lieu, cette thèse élabore une critique sur certaines mesures classiques de l'efficacité et de la productivité. Il est montré que la mesure directionnelle, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, pose un certain nombre de problèmes quant à l'évaluation des variations de la productivité. De plus, il est établi que la "slacks-based" et la directionnelle "slack-based" mesures (ou mesures de Färe-Lovell) ne permettent pas de caractériser la technologie de production. Il résulte que ce type de mesure ne permet pas de caractériser l'efficacité et les variations de productivité. Pour contourner ce problème, une approche alternative est proposée.

Ensuite, cette thèse introduit deux nouveaux indicateurs : un indicateur social de Luenberger-Hicks-Moorsteen et un indicateur de productivité généralisé. La première mesure permet d'évaluer l'effet des politiques sur les capacités au sens de Sen, il consiste en une transposition des indicateurs de Hicks-Moorsteen en considérant le rôle spécifique d'un sous-vecteur prenant en compte les facteurs sociaux. Le second indicateur généralise les indicateurs standards de productivité et permet de retrouver à la fois les indicateurs de Luenberger et le Luenberger-Hicks-Moorsteen comme cas spéciaux de cet indicateur généralisé.

Enfin, cette thèse présente des applications empiriques qui illustrent la méthodologie. Ces études évaluent et comparent la performance des régions touristiques et plus précisément celle du Languedoc-Roussillon, qui mobilise un cadre d'analyse transfrontalier.