



**HAL**  
open science

# Entropie minimale des espaces localement symétriques

Louis Merlin

► **To cite this version:**

| Louis Merlin. Entropie minimale des espaces localement symétriques. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0110 . tel-01193090

**HAL Id: tel-01193090**

**<https://theses.hal.science/tel-01193090>**

Submitted on 4 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

présentée à

**l'Université de Bordeaux**

par **Louis Merlin**

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

\*\*\*\*\*

## **Entropie minimale des espaces localement symétriques**

*(Minimal entropy for locally symmetric spaces)*

\*\*\*\*\*

Soutenue le 9 Juillet 2014 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, après avis de :

G. BESSON	Directeur de recherches, Université Grenoble	<b>Rapporteur</b>
M. HERZLICH	Professeur, Université Montpellier 2	<b>Rapporteur</b>

et devant la commission d'examen composée de :

C. BAVARD	Professeur, Université de Bordeaux	<b>Directeur</b>
G. BESSON	Directeur de recherches, Université de Grenoble	<b>Rapporteur</b>
M. HERZLICH	Professeur, Université Montpellier 2	<b>Rapporteur</b>
F. PAULIN	Professeur, Université Paris-Sud	Président du jury
J-F. QUINT	Directeur de recherches, Université de Bordeaux	
L. BESSIERES	Professeur, Université de Bordeaux	



# Entropie minimale des espaces localement symétriques

Louis Merlin

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Matériel géométrique</b>	<b>7</b>
2.1	Espaces symétriques . . . . .	7
2.1.1	Groupes et algèbres de Lie . . . . .	8
2.1.2	Géométrie des espaces symétriques . . . . .	10
2.1.2.1	Structure riemannienne . . . . .	10
2.1.2.2	Étude des plats des espaces symétriques . . . . .	12
2.1.2.3	Décompositions du groupe d'isométrie . . . . .	13
2.1.2.4	Sous-groupes paraboliques . . . . .	14
2.1.2.5	Deux applications de la décomposition d'Iwasawa . . . . .	15
2.1.3	Compactifications . . . . .	15
2.1.3.1	Le bord visuel et la géométrie de Tits . . . . .	15
2.1.3.2	Le bord de Furstenberg . . . . .	21
2.1.4	L'exemple de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . . . . .	22
2.2	Entropies . . . . .	25
2.2.1	Entropie volumique . . . . .	25
2.2.2	Entropie topologique . . . . .	29
2.2.3	Comparaisons . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Chapitre 2 : Entropie minimale des espaces localement symétriques</b>	<b>32</b>
3.1	La méthode de preuve . . . . .	35
3.1.1	Le volume sphérique . . . . .	36
3.1.2	Méthode de calibration . . . . .	40
3.2	Utilisation de l'application barycentre . . . . .	42
3.2.1	L'application barycentre . . . . .	43
3.2.2	Les espaces symétriques de courbure strictement négative . . . . .	44
3.2.3	Les produits d'espaces symétriques de rang 1 . . . . .	46
3.2.4	Les limites de l'application barycentre . . . . .	51
3.3	Le cas des réseaux cocompacts de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})^2$ . . . . .	52
3.3.1	Exemples divers de variétés quotients de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . . . . .	53
3.3.2	Retour à la dimension 2 . . . . .	55
3.3.3	Le cas de deux facteurs $\mathbb{H}^2$ . . . . .	57

3.3.3.1	Une expression combinatoire du volume dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . . .	57
3.3.3.2	Une équation d'invariance . . . . .	58
3.3.3.3	Fermeture de la forme . . . . .	59
3.3.3.3.1	Sur l'espace des mesures . . . . .	59
3.3.3.3.2	Preuve de la fermeture . . . . .	60
3.3.3.4	Inégalité de calibration . . . . .	62
3.4	Deux applications . . . . .	73
3.4.1	Une estimation du volume minimal . . . . .	74
3.4.2	Une borne sur le degré des applications vers $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Une reformulation heuristique du problème de l'entropie minimale</b>	<b>80</b>
<b>B</b>	<b>Remerciements</b>	<b>88</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### Résumé

Nous donnons dans cette thèse une preuve du problème de l'entropie volumique minimale dans les quotients compacts de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Une conjecture de Gromov et Katok prétend en effet que, sur un espace localement symétrique  $(M, g_0)$ , la métrique de plus petite entropie volumique parmi les métriques de volume fixé est la métrique  $g_0$ . Le texte se veut relativement abordable. C'est pourquoi nous avons intégré un premier chapitre qui contient une bonne partie du matériel qui sera utilisé par la suite. Puis nous passons en revue les preuves des différents cas du problème déjà traités. Le cas des quotients compacts de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  n'était pas connu avant ce travail ; nous en détaillons minutieusement la preuve. Notre démarche consiste à faire fonctionner la méthode de calibration imaginée dans [BCG95]. Nous présentons aussi les principales applications qui découlent de la preuve de la conjecture de Gromov et Katok. Nous concluons par une discussion heuristique qui explique les enjeux du problème que nous étudions.

### Abstract

In this thesis we give an overview of the volume entropy rigidity problem. A conjecture by Gromov and Katok states that, on a locally symmetric space  $(M, g_0)$ , the symmetric metric  $g_0$  has minimal volume entropy among metrics with the same total volume. The text is self-contained, assuming a basic knowledge in differential geometry. Therefore we discuss in the first chapter some background material used in the sequel. The case of compact quotients of  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  was unknown before this work ; we give a fully detailed proof. The key-point is to build a calibrating form as in [BCG95]. As a by-product, we present some applications provided by the proof of the volume entropy rigidity conjecture. We conclude by an informal section explaining the motivations of the problem to a non-mathematical reader.

Ce travail apporte une contribution à l'étude de la géométrie des espaces symétriques. L'esprit qui anime cette thèse n'est pas d'examiner plus profondément encore cette classe de variétés riemanniennes. En effet cette théorie est déjà bien aboutie ([Ebe96, Hel62]). L'objectif est plutôt d'en donner des caractérisations. Comment reconnaître la géométrie symétrique ? On peut envisager d'utiliser plusieurs objets, et plusieurs formulations équivalentes de la définition des espaces symétriques existent déjà. On peut en donner une version géométrique (les symétries locales peuvent être réalisées par des isométries), une version algébrique (il existe un groupe de Lie  $G$  - semi-simple en courbure négative - et un sous-groupe compact maximal  $K$  tel que l'espace soit de la forme  $G/K$ ) ou encore une version plus analytique (le tenseur de courbure est parallèle).

Soit  $(\widetilde{M}, g_0)$  un espace symétrique. Une méthode générale consisterait à trouver des fonctions sur l'espace des métriques sur  $M$  qui atteignent un (unique) extremum en la métrique  $g_0$ . En 1982, M.Gromov suggère l'utilisation de l'entropie volumique et formule la conjecture suivante.

**Conjecture 1.0.1** ([Gro83] p.58). *Soit  $(M, g_0)$  une variété hyperbolique compacte. Parmi toutes les métriques de volume fixé,  $g_0$  est une métrique de plus petite entropie volumique.*

La question a ensuite été étendue dans [BCG91] de la manière suivante

**Conjecture 1.0.2** ([BCG91] p.420). *Soit  $(M, g_0)$  une variété localement symétrique de courbure strictement négative, irréductible et compacte. Parmi toutes les métriques de volume fixé,  $g_0$  est une métrique de plus petite entropie volumique.*

La question demeure pertinente si  $(M, g_0)$  est de courbure négative ou nulle. En rang supérieur irréductible cependant, il n'existe aucune raison de croire que la conjecture reste vraie ; bien qu'aucun contre-exemple ne soit apparu. Dans le cas où la métrique n'est pas irréductible, on fait une hypothèse de normalisation plus restrictive. En effet, il existe une unique métrique *symétrique* de plus petite entropie volumique à volume fixé. C'est cette métrique que l'on appelle alors  $g_0$ . L'entropie volumique est le taux de croissance exponentielle du volume des boules dans le revêtement universel  $\widetilde{M}$ . A.Katok formulait une conjecture similaire avec l'entropie topologique du flot géodésique. On peut aussi s'intéresser au cas d'égalité pour produire la caractérisation souhaitée. L'hypothèse sur le volume est indispensable. En effet, une perturbation de la métrique par homothétie en modifie l'entropie mais une dilatation d'une métrique symétrique est encore symétrique. Le volume compense ce comportement vis-à-vis des dilatations. Plus précisément, si  $g$  est une autre métrique sur  $M$  d'entropie volumique  $h$ , on peut chercher à prouver l'inégalité

$$h^n \text{Vol}(g) \geq h_0^n \text{Vol}(g_0),$$

où  $h_0$  est l'entropie volumique de  $g_0$ .

L'hypothèse sur la courbure est aussi naturelle. En effet l'annulation de l'entropie volumique est une propriété de nature topologique (qui ne dépend pas de la métrique, voir [Šva55]). Il est facile de voir que si un espace symétrique n'est pas à courbure négative

ou nulle, son entropie est nulle. Ainsi toutes les métriques que l'on peut considérer sur l'espace ont aussi une entropie nulle.

Ainsi donc, selon cette conjecture, on pourrait reconnaître la géométrie symétrique avec seulement deux nombres : l'entropie volumique et le volume. Cela semble très surprenant. En effet, chacune des définitions équivalentes des espaces symétriques que nous avons brièvement donnée fait apparaître une situation compliquée. Pour vérifier qu'un espace riemannien est symétrique, il faut par exemple trouver, pour chaque point de l'espace, et pour chaque géodésique à travers ce point, une isométrie qui retourne la géodésique. Les preuves de la conjecture de Gromov sont donc des caractérisations très puissantes de la géométrie symétrique.

Le théorème principal de cette thèse est une preuve de la conjecture de Gromov dans le cas des quotients compacts de produits d'espaces hyperboliques.

**Théorème 1.0.3** (Merlin). *Soit  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  et soit  $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Alors pour toute métrique  $g$  sur  $M$ , on a*

$$h^4(g) \text{Vol}(g) \geq h^4(g_0) \text{Vol}(g_0)$$

où  $g_0$  est la métrique de  $M$  qui descend de la métrique hyperbolique dans chaque facteur.

Le texte est organisé autour de la preuve de ce théorème. Les prérequis nécessaires pour en aborder la lecture sont limités. Nous avons regroupé dans un premier chapitre le matériel géométrique qu'il est indispensable de maîtriser. Ce chapitre préliminaire est séparé en deux parties.

Nous donnons tout d'abord de manière synthétique quelques éléments de la théorie des espaces symétriques. La preuve du théorème principal s'appuie sur le bord de l'espace et c'est donc un premier objectif que d'en détailler les différentes structures. Plusieurs compactifications existent et nous privilégions celles par le bord visuel et par le bord de Furstenberg. Ces notions générales sont illustrées par le cas de l'espace  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

Nous examinons ensuite le concept d'entropie volumique d'une variété riemannienne compacte. La structure d'espace symétrique permet de mener à bien plusieurs calculs explicites. Nous interprétons l'entropie dans un contexte dynamique, via le théorème de Manning, et cette comparaison sera utilisée pour produire une belle application aux preuves de la conjecture de Gromov.

Le deuxième chapitre, avant de s'attaquer à la preuve du théorème principal, passe en revue les cas déjà connus dans la conjecture de Gromov. Le premier à avoir contribué à ce problème est probablement A.Katok. L'article [Kat88] traite le cas des surfaces de genre supérieur à 2.

Gromov obtenait une version non optimale, de la forme suivante :

**Théorème 1.0.4** ([Gro83]). *Soit  $M$  un quotient compact de l'espace hyperbolique  $(\mathbb{H}^n, g_0)$ . Pour toute métrique  $g$  sur  $M$  de même volume que  $g_0$ , on a  $\text{ent}(g) \geq \text{cste}(n) \text{ent}(g_0)$  où  $\text{cste}$  est une constante qui vérifie  $0 < \text{cste} < 1$ .*

On peut aussi mentionner la contribution de Hamenstadt qui faisait une hypothèse de normalisation plus restrictive.

**Théorème 1.0.5** ([Ham89]). *Soit  $(M, g_0)$  un espace localement symétrique de courbure strictement négative normalisée de sorte que  $K(g_0) \leq -1$ . Soit  $g$  une métrique sur  $M$  telle que  $K(g) \leq -1$ . Alors*

$$h(g) \geq h(g_0).$$

Cette hypothèse est plus forte qu'une normalisation par le volume (diminuer la courbure fait augmenter le volume).

La principale avancée dans l'étude de la conjecture d'entropie minimale est sa preuve dans le cas des espaces symétriques de rang 1.

**Théorème 1.0.6** (G.Besson, G.Courtois et S.Gallot [BCG95]). *Soit  $(M, g_0)$  un quotient compact d'un espace symétrique de rang 1 (un espace hyperbolique réel, complexe, quaternionique, ou un plan hyperbolique de Cayley). Pour toute métrique  $g$  sur  $M$ , on a*

$$h^n(g) \text{Vol}(g) \geq h^n(g_0) \text{Vol}(g_0).$$

De plus, le cas d'égalité n'a lieu que si  $g$  et  $g_0$  sont homothétiques. Nous discutons la méthode utilisée pour parvenir au résultat précédent. Elle fait intervenir de façon décisive l'application barycentre, qui est une adaptation d'une notion bien connue pour des points du bord. Si on prend une famille de points pondérés (ou plus généralement une mesure de probabilité) et qu'on envoie ces points au bord, existe-t-il toujours un barycentre de ces points? Selon les cas, la réponse diffère mais en courbure strictement négative, on peut montrer que c'est bien vrai.

C.Connell et B.Farb dans [CF03b] adapte la méthode du barycentre au cas des quotients de produits d'espaces symétriques de courbures strictement négatives qui ne possèdent pas de facteur de dimension 2 et démontrent une inégalité similaire. Ils étudient aussi le cas des espaces de volumes finis.

**Théorème 1.0.7** (C.Connell et B.Farb [CF03b]). *Soit  $(M^n, g_0)$  un quotient de volume fini d'un espace symétrique  $\widetilde{M}^n$  qui est un produit d'espaces de rang 1 sans facteur  $\mathbb{H}^2$ . Pour toute autre métrique  $g$  sur  $M^n$  de volume fini,*

$$h^n(g) \text{Vol}(g) \geq h^n(g_0) \text{Vol}(g_0).$$

Le cas des quotients de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  n'est donc pas connu avant ce travail. Nous utilisons une méthode différente de la méthode du barycentre (pour laquelle nous montrons ses limites) qui consiste à faire fonctionner la méthode de calibration. Pour cela on plonge  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  de façon (presque) isométrique dans la sphère unité d'un espace de Hilbert. Nous cherchons ensuite une forme différentielle sur cet espace de Hilbert qui est maximale sur le plongement. L'inégalité vérifiée par cette forme différentielle se traduit en une inégalité sur les entropies. La construction de notre forme différentielle s'inspire de

résultats récents de cohomologie bornée.

Lorsque l'on démontre une inégalité de la forme

$$h^n(g) \text{Vol}(g) \geq h^n(g_0) \text{Vol}(g_0),$$

il est tentant de chercher à montrer que le volume minimal de la variété est atteint par la métrique localement symétrique. Cela répondrait à une autre question posée par Gromov. Nous examinons les liens entre les deux problèmes dans la partie applications. Nous obtenons en particulier un résultat partiel :

**Corollaire 1.0.8** (Merlin). *Nous avons*

$$\text{MinVol}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2/\Gamma) \geq \frac{4}{81} \text{Vol}(g_0)$$

où  $g_0$  est la métrique hyperbolique dans chaque facteur  $\mathbb{H}^2$  et  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$ .

Une autre application consiste à majorer le degré d'une application  $f : Y \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2/\Gamma$  où  $Y$  est une 4 variété riemannienne.

**Corollaire 1.0.9** (Merlin). *Le degré d'une telle application vérifie*

$$|\text{deg } f| \leq \frac{h(g)^4 \text{Vol}(g)}{h(g_0)^4 \text{Vol}(g_0)}$$

Remarquons qu'aucune hypothèse n'est exigée sur la géométrie de  $Y$ . Ce résultat est donc meilleur que celui de [LS09] pour les quotients de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

Nous terminons cette thèse par une reformulation informelle du problème de l'entropie minimale qui est destinée à un public plus large. Nous cherchons à expliquer simplement la relation entre la conjecture de Gromov et l'inégalité isopérimétrique.

## Chapitre 2

# Matériel géométrique

### 2.1 Espaces symétriques

La structure d'espace symétrique est très courante en géométrie riemannienne et a été très étudiée ([Ebe96] en donne un bon aperçu, [Hel62] en fait un exposé plus complet). Il s'agit d'exemples sur lesquels chaque énoncé général est testé en priorité. Une définition rapide pourrait être de dire que ce sont des espaces pour lesquels la géométrie est la même en chaque point. Il n'y aurait pas d'intérêt, dans ce chapitre, à développer une théorie complète des espaces symétriques puisque la littérature est déjà abondante sur le sujet. C'est pourquoi les deux premières sections sont écrites de manière très synthétique.

Un des intérêts de la structure d'espace symétrique de type noncompact (courbure négative ou nulle) est que son étude, dans le cas simplement connexe, peut être menée de façon purement algébrique. Les structures algébriques (groupes et algèbres de Lie) qui interviennent seront présentées dans la première section. Le passage de l'algèbre à la géométrie sera esquissé à la deuxième section. Nous présenterons bien sûr des applications géométriques qui découlent de cette technologie. L'objectif est d'introduire le matériel nécessaire à la section suivante.

Nous insistons davantage sur les possibilités de compactifications des espaces symétriques, un sujet beaucoup moins classique. La théorie générale des bords des espaces symétriques semble tombée en désuétude et il ne nous a pas paru nécessaire d'en faire un compte-rendu systématique comme dans [GJT98]. Le procédé général de compactification consiste à plonger l'espace symétrique  $G/K$  dans un  $G$ -espace métrique localement compact et à passer à l'adhérence.

Nous présenterons deux types de compactifications, par le bord visuel et par le bord de Furstenberg. Toutes deux encodent d'une certaine manière la géométrie de l'espace. Les informations géométriques qui se déposent sur le bord visuel sont plutôt de nature topologique, via la métrique de Tits, ou combinatoire, via la structure d'immeuble de Tits. La description algébrique du bord de Furstenberg ( $G/P$ ) donne un point de vue

différent, bien qu'essentiellement équivalent.

Notre donnerons l'exemple récurrent de l'espace symétrique  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  qui joue un rôle important dans la suite de ce mémoire.

### 2.1.1 Groupes et algèbres de Lie

Nous présentons ici deux catégories algébriques qui réapparaîtront plus loin dans un contexte géométrique.

**Définition 1.** *La catégorie des groupes de Lie est constituée des éléments suivants :*

1. *Les objets sont des groupes munis d'une structure de variété différentielle de sorte que les applications usuelles du groupe (multiplication et prise d'inverse) soient lisses.*
2. *Les morphismes sont des homomorphismes de groupes qui sont des applications lisses.*

A un revêtement fini près, tous les groupes de Lie sont des groupes de matrices. On construit ainsi une grande variété d'exemples (appelés groupes classiques).

**Définition 2.** *La catégorie des algèbres de Lie est constituée des éléments suivants :*

1. *Les objets sont des espaces vectoriels  $\mathfrak{g}$  munis d'une application bilinéaire (appelé crochet de Lie)*

$$[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

*telle que*

- $\forall x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = -[y, x]$  et
- (identité de Jacobi)  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

2. *Les morphismes sont des applications linéaires qui préservent le crochet de Lie.*

On dit que deux éléments  $x$  et  $y$  commutent si  $[x, y] = 0$ .

Un exemple important d'algèbre de Lie est l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie. C'est par définition l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur le groupe qui sont invariants par l'action des translations à gauche par des éléments de  $G$ . En effet, à un élément  $g \in G$ , on peut associer un difféomorphisme de la variété  $G$  en faisant agir  $g$  sur  $G$  par translation. Le crochet de Lie est alors donné par le crochet habituel des champs de vecteurs tangents. On note  $\text{Lie}(G)$  l'algèbre de Lie de  $G$ . On peut en donner une autre description :

1. L'espace vectoriel est l'espace tangent en  $e \in G$
2. Le crochet de deux vecteurs tangents est construit de la manière suivante. On part d'un élément  $g \in G$ . La conjugaison par  $g$  est notée  $i_g$ . Dériver en  $e$  cette

application  $i_g$  donne un endomorphisme inversible de  $T_eG$ . Ainsi on dispose d'une application

$$Ad : G \longrightarrow \text{GL}(T_eG),$$

que l'on peut à nouveau dériver en  $e$ . On obtient alors une application

$$ad : T_eG \longrightarrow \text{End}(T_eG).$$

Finalement, on forme le crochet par

$$[X, Y] = ad(X)(Y).$$

Par analogie avec cette situation, on appelle d'ailleurs représentation adjointe d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , sa représentation dans  $\text{GL}(\mathfrak{g})$  donnée par

$$\begin{array}{ccc} ad : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \text{GL}(\mathfrak{g}) \\ & X & \longmapsto & Y \mapsto [X, Y] \end{array} .$$

La forme de Killing sera utilisée plus loin pour donner aux espaces symétriques une structure de variété riemannienne. Elle est définie comme suit :

$$B(X, Y) = \text{trace}(adX \circ adY).$$

C'est une forme bilinéaire symétrique.

Un cas particulier d'algèbre de Lie, très important puisqu'il correspond à une situation géométrique de courbure négative, est la notion d'algèbre de Lie semi-simple. Un idéal d'une algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel stable par prise de crochet avec n'importe quel élément de l'algèbre de Lie. Une algèbre de Lie est dite simple si elle n'a pas d'idéaux non triviaux, et si elle n'est pas abélienne.

**Théorème 2.1.1.** *On dit qu'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple si elle vérifie une des propriétés équivalentes suivantes*

1.  $\mathfrak{g}$  est somme directe d'idéaux simples.
2.  $\mathfrak{g}$  n'admet pas d'idéal abélien non nul.
3. La forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  est non dégénérée.

### Système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple complexe

La définition générale d'un système de racines peut être trouvée dans le chapitre 5 de [Ser01], ainsi que les notions associées de diagramme de Dynkin et de matrice d'un système de racines. Le cours de F.Paulin [Pau] est peut-être plus accessible.

Il est possible d'établir une classification complète des algèbres de Lie semi-simples complexes par leurs systèmes de racines. Ensuite, on peut montrer que les algèbres de Lie et les groupes de Lie se correspondent. Plus précisément, on a une équivalence de

catégories entre groupes de Lie connexes modulo revêtements et algèbres de Lie (dans le cas réel aussi). Nous ne détaillerons pas ces arguments qui poussent trop loin pour notre propos l'étude des groupes et algèbres de Lie. Nous mentionnons seulement la décomposition d'une algèbre de Lie en espaces de racines parce que nous nous en réservons pour la description des plats des espaces symétriques.

Soit alors  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple complexe  $\mathfrak{g}$ , c'est-à-dire une sous algèbre de Lie abélienne maximale telle que pour tout  $h \in \mathfrak{h}$ ,  $adh$  soit diagonalisable. Il existe toujours des algèbres de Cartan pour toute algèbre de Lie semi-simple. Une telle algèbre abélienne maximale est égale à son commutant et tous les éléments de la forme  $adh$  pour  $h \in \mathfrak{h}$  commutent. Un théorème classique d'algèbre linéaire affirme alors qu'on peut diagonaliser simultanément tous les éléments de la forme  $adh$ . On note alors par  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  les racines de sorte que les espaces propres communs s'écrivent

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \forall h \in \mathfrak{h}, adh(x) = \alpha(h)x\}$$

et leur somme directe engendre  $\mathfrak{g}$ . On appelle cette décomposition de  $\mathfrak{g}$ , la décomposition en espaces de racines. Si  $\alpha$  n'est pas une racine, alors  $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ , de sorte que nous convenons de ne retenir dans la décomposition que les espaces qui sont non triviaux.

Si l'algèbre de Lie est réelle, il existe des sous-algèbres de Lie abéliennes maximales telles que les éléments  $adh$  soient diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ .

**Remarque** Anticipons légèrement sur le paragraphe suivant. Nous allons considérer des plats de l'espace symétrique  $G/K$ . Les plats sont des sous-algèbres abéliennes maximales de  $\mathfrak{p} = T_{eK}G/K$ . Ils diffèrent donc des sous-algèbres de Cartan au sens où ils sont inclus dans  $\mathfrak{p}$ . En contre-partie nous montrerons que tous les éléments d'un plat sont diagonalisables, même dans le cas réel. Ainsi donc, les éléments semi-simples et non diagonalisables d'une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre réelle sont contenus dans un supplémentaire de  $\mathfrak{p}$  et la discussion qui précède s'applique aussi dans les plats des espaces symétriques. En particulier la même décomposition en espaces de racines peut être obtenue.

## 2.1.2 Géométrie des espaces symétriques

Nous suivons pour cette partie la présentation du chapitre 2 de [Ebe96]. Donnons tout d'abord la définition d'un espace symétrique, la plus géométrique possible. Elle exprime qu'un espace symétrique est une variété riemannienne qui possède beaucoup d'isométries.

### 2.1.2.1 Structure riemannienne

**Définition 3.** Une variété riemannienne  $\widetilde{M}$  simplement connexe et de courbure négative est un espace symétrique si les symétries géodésiques locales

$$S_p : \exp_p(tv) \mapsto \exp_p(-tv),$$

pour un vecteur  $v$  fixé, s'étendent en des isométries globales de  $\widetilde{M}$ . Nous dirons que  $\widetilde{M}$  est de type noncompact s'il n'est pas le produit riemannien d'un espace euclidien avec un autre espace symétrique.

On note par  $G$  la composante connexe de l'identité du groupe d'isométrie. On peut alors donner une description beaucoup plus algébrique d'un espace symétrique. En effet le groupe  $G$  agit transitivement sur  $\widetilde{M}$ , c'est un groupe de Lie semi-simple (i.e dont l'algèbre de Lie est semi-simple) à centre trivial. Si  $\widetilde{M}$  est de type noncompact,  $G$  est un produit de groupes simples dont aucun n'est compact, ce qui explique la terminologie. Ces groupes qui apparaissent dans la décomposition de  $G$  en produit correspondent aux idéaux simples de l'algèbre de Lie de  $G$ . Soit  $K$  le sous-groupe de  $G$  qui laisse fixe un point de  $\widetilde{M}$ . Il est alors classique de prouver que  $G/K$  possède une structure de variété différentielle puisque  $K$  est compact (il suffirait que  $K$  soit fermé). Cette structure est diffeomorphe à  $\widetilde{M}$ . C'est donc une isométrie si on transporte la métrique par le diffeomorphisme. Nous exprimerons cette métrique à l'aide de la forme de Killing du groupe.

Inversement si  $G$  est un groupe de Lie semi-simple à centre fini et sans facteur compact et si  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$ , on peut construire une métrique sur  $G/K$  de la manière habituelle : on forme un produit scalaire  $K$ -invariant sur le tangent en  $K$  avec un produit scalaire quelconque que l'on moyenne contre une mesure de Haar, puis on décale cette métrique par l'action de  $G$ . On peut montrer que cette métrique est de courbure négative et qu'elle est symétrique ([Hel62] p.175).

La géométrie d'un espace symétrique est donc la même en chaque point. En fait, on peut lire une bonne partie des informations géométriques à niveau infinitésimal, c'est-à-dire dans l'algèbre de Lie. Plus précisément, chaque point  $p \in \widetilde{M}$  détermine une décomposition de l'algèbre de Lie qui servira à étudier la géométrie au voisinage de  $p$ . Pour définir cette décomposition, on part de l'involution du groupe

$$\sigma_p(g) = S_p \circ g \circ S_p,$$

que l'on dérive en  $e$ . On obtient une involution linéaire  $\theta_p$  de l'algèbre de Lie, qui préserve les crochets. La décomposition de  $\mathfrak{g}$  est la décomposition en espaces propres de  $\theta_p$  :  $\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta_p X = X\}$  et  $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta_p X = -X\}$ . Bien sûr,  $\theta_p$  est diagonalisable et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{p}.$$

On ne rappelle pas systématiquement la dépendance en  $p$  des sous-espaces  $\mathfrak{t}$  et  $\mathfrak{p}$ .  $\mathfrak{t}$  s'identifie à l'algèbre de Lie de  $K = \text{Stab}(p)$  et  $\mathfrak{p}$  s'identifie au tangent  $T_p \widetilde{M}$ . Les identifications se font à l'aide de la différentielle  $d_e p$  de l'application

$$\begin{aligned} p: G &\longrightarrow \widetilde{M} \\ g &\longmapsto g(p) \end{aligned}$$

en  $e$ ;  $\mathfrak{t}$  est le noyau de  $d_e p$  et  $d_e p$  restreint à  $\mathfrak{p}$  est un isomorphisme. On peut alors ramener le produit scalaire de  $T_p \widetilde{M}$  sur  $\mathfrak{p}$  par

$$Q(X, Y) = \langle d_e p(X), d_e p(Y) \rangle_p .$$

Il est remarquable de constater que le produit scalaire  $Q$  est (presque) déterminé par la restriction de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{p}$ . Écrivons

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{p}_k$$

où chaque  $\mathfrak{p}_i$  s'identifie au tangent d'un facteur de de Rham de  $\widetilde{M}$ . Il existe alors des constantes  $\lambda_i$  de sorte que

$$Q|_{\mathfrak{p}_i} = \lambda_i B|_{\mathfrak{p}_i}.$$

On peut donc normaliser la métrique de  $\widetilde{M}$  en imposant que

$$\langle d_e p(X), d_e p(Y) \rangle_p = B(X, Y),$$

ce que l'on fera par la suite. On définit aussi un produit scalaire sur toute l'algèbre de Lie par

$$\Phi_p(X, Y) = -B(\theta_p X, Y).$$

### 2.1.2.2 Étude des plats des espaces symétriques

Comme précédemment on fixe un point  $p$  dans  $\widetilde{M}$  qui induit une décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_p \oplus \mathfrak{t}_p$ . Soit  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$  une sous-algèbre abélienne maximale. Les éléments  $adX$  pour  $X \in \mathfrak{a}$  sont symétriques pour le produit scalaire  $\Phi_p$ , donc diagonalisables. Puisque  $\mathfrak{a}$  est abélienne, les éléments  $adX$  commutent deux à deux. La même discussion qu'au paragraphe précédent, lorsque nous avons considéré des sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie, conduit à la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en espaces de racines

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où  $\Lambda$  est l'ensemble des racines non triviales.

Une sous-algèbre abélienne s'envoie par l'exponentielle sur un plat de l'espace symétrique, c'est-à-dire un sous-espace isométrique à un espace euclidien. On peut en effet exprimer le tenseur de courbure en une formule qui fait intervenir les crochets de Lie,

$$R(X, Y)Z = -[[X, Y], Z].$$

Il devient alors évident que si  $X$  et  $Y$  commutent, l'espace qu'ils engendrent s'envoie sur un plat.

La dimension d'une sous-algèbre abélienne maximale ne dépend ni du point base  $p$ , ni du choix de la sous-algèbre dans  $\mathfrak{p}_p$ . On appelle cette dimension le rang de l'espace symétrique. C'est aussi la dimension maximale d'un espace euclidien plongé dans  $\widetilde{M}$ . En effet toutes ces algèbres se correspondent sous l'action de  $Ad(G)$  sur  $\mathfrak{g}$ .

La notion suivante de chambre de Weyl nous aidera à donner plus de structure aux bords des espaces symétriques.

- Définition 4.** 1. Si  $\mathfrak{a}$  est une sous-algèbre abélienne maximale de  $\mathfrak{p}$ , une chambre de Weyl du premier type, notée  $\mathcal{W}$  est une composante connexe du complémentaire des hyperplans définis par les racines.
2. Une chambre de Weyl du second type, notée  $W$  est la trace sur la sphère unité de  $\mathfrak{p}$  d'une chambre de Weyl du second type.

Plus tard, nous enverrons les chambres de Weyl au bord de l'espace symétrique :

$$\mathcal{W}(\infty) = \{\gamma(\infty), \text{ où } \gamma \text{ est une géodésique de vitesse initiale dans une chambre du second type}\}.$$

Pour un point  $p \in \widetilde{M}$  fixé, il y a bijection entre les chambres de Weyl à l'infini et les chambres de Weyl du second type de  $T_p^1$ .

Nous appelons élément régulier un vecteur tangent tel que  $\alpha(X) \neq 0$  pour toute racine  $\alpha$  déterminée par  $\mathfrak{a}$ . Ainsi, une chambre de Weyl est en bijection avec une classe d'équivalence d'éléments réguliers, deux éléments  $X$  et  $Y$  étant équivalents si les signes de  $\alpha(X)$  et  $\alpha(Y)$  sont les mêmes pour toute racine.

### 2.1.2.3 Décompositions du groupe d'isométrie

Le groupe  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$  est un groupe de Lie semi-simple. Soit  $g$  une matrice de  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ . Les vecteurs-colonne de  $g$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$  à laquelle on peut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Il existe une matrice triangulaire supérieure  $q$ , telle que  $qg$  soit une base orthonormée, c'est-à-dire  $qg \in K = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ . On peut écrire cette matrice triangulaire supérieure comme produit  $q = na$  où  $n$  est une matrice unipotente et  $a$  est une matrice diagonale à coefficients positifs et de déterminant 1, dont les valeurs propres sont rangées dans l'ordre croissant (quitte à réappliquer une matrice de permutation qui est un élément de  $K$ ). Une chambre de Weyl de  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$  est donnée par l'ensemble des matrices diagonales de traces nulles et de valeurs propres rangées dans l'ordre croissant. Finalement on écrit, pour tout  $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ , la décomposition d'Iwasawa :

$$g = kan.$$

Il est remarquable que cette décomposition se généralise à tous les groupes de Lie semi-simples : si  $G$  est un groupe semi-simple, tout élément de  $G$  s'écrit aussi

$$g = kan,$$

de sorte que  $\mathrm{Ad}(k) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathrm{Ad}(a)$  est diagonale avec des coefficients positifs et les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant et  $\mathrm{Ad}(n)$  est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On peut prendre  $k$  dans le compact maximal  $K$ ,  $a$  dans l'exponentielle d'une chambre de Weyl,  $A = \exp(\mathfrak{a}_+)$ , et  $n$  dans l'exponentielle de la sous-algèbre de Lie correspondant au supplémentaire de  $\mathfrak{a}$  donné par les racines non nulles :

$$N = \exp(\mathfrak{n}) = \exp \left\{ \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha \right\}.$$

La décomposition est unique une fois que l'on a fixé une sous-algèbre abélienne maximale. L'existence de cette décomposition se démontre en utilisant des sous-groupes paraboliques.

Reprenons la matrice  $g$  de  $SL_n(\mathbb{R})$  et écrivons la décomposition polaire de  $g$  :

$$g = k_1 s,$$

où  $k_1 \in SO_n(\mathbb{R})$  et  $s$  est une matrice symétrique réelle définie et positive. Le théorème spectral montre que  $s$  est diagonalisable en base orthonormée : il existe  $k_2 \in SO_n(\mathbb{R})$  tel que

$$s = k_2 a^t k_2.$$

Finalement, on écrit  $g = k_1 k_2 a^t k_2$ , ou plutôt

$$G = K A_+ K$$

en réordonnant les valeurs propres de  $a$ . Comme précédemment cette décomposition se généralise à tous les groupes de Lie semi-simples,  $K$  étant remplacé par le sous-groupe compact maximal, et  $A_+$  étant l'image d'une chambre de Weyl. Cette décomposition s'appelle la décomposition de Cartan de  $G$ . Remarquons que contrairement à la décomposition d'Iwasawa, l'écriture en produit n'est pas unique.

#### 2.1.2.4 Sous-groupes paraboliques

Anticipons légèrement sur la suite et définissons le bord de l'espace symétrique  $G/K = \bar{M}$  comme l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques, deux rayons étant équivalents s'ils restent à distance bornée. Nous donnerons des informations beaucoup plus précises sur le bord d'un espace symétrique en [2.1.3](#)

**Définition 5.** *Un sous-groupe parabolique est le stabilisateur d'un point du bord.*

La décomposition suivante permet de compléter la preuve de la décomposition d'Iwasawa.

**Proposition 2.1.2.** *On a  $P = MAN$  où  $A$  et  $N$  ont déjà été définis et où  $M$  est le centralisateur dans  $K$  d'une chambre de Weyl.*

Nous ne donnons pas une preuve formelle de cette décomposition. Remarquons simplement qu'elle est très intuitive dans la mesure où  $A$  est un groupe constitué de loxodromiques fixant le point à l'infini que stabilise  $P$ ,  $N$  est constitué des éléments paraboliques que stabilise  $P$  (autrement dit si  $\gamma$  est une géodésique définissant le point à l'infini,  $n\gamma$  est une géodésique à distance bornée). Enfin  $M$  est constitué des transformations qui consistent à tourner autour d'une géodésique dirigée vers le point à l'infini (les éléments elliptiques dont les points fixes contiennent la géodésique).

Nous utiliserons aussi que, si  $P = P_x = \text{Stab}(x)$  est le stabilisateur d'un point à l'infini, alors  $P$  est aussi le stabilisateur de  $y$  si et seulement si  $y$  est dans la même chambre de Weyl à l'infini que  $x$ . La preuve de cette assertion passe par une étude de l'algèbre de Lie de  $P$  ([\[Ebe96\]](#) p.107).

### 2.1.2.5 Deux applications de la décomposition d'Iwasawa

Ce paragraphe contient simplement deux remarques qui serviront à étudier les bords des espaces symétriques. Une première remarque, évidente, qui découle directement de la décomposition d'Iwasawa est que le groupe  $A_+N$  agit simplement transitivement sur  $\widetilde{M}$ .

Par ailleurs lorsque nous étudierons l'ensemble des chambres de Weyl, nous aurons besoin du résultat suivant qui est aussi une conséquence de la décomposition d'Iwasawa :

**Corollaire 2.1.3.** *Soit  $\mathcal{W}(\infty)$  une chambre de Weyl à l'infini. Pour un point  $x \in \widetilde{M}$  fixé, il existe un unique plat passant par  $x$  et asymptotique à la chambre de Weyl  $\mathcal{W}(\infty)$ .*

**Démonstration :** Si  $\mathcal{W}(\infty) = (A_+x_o)(\infty)$ . D'après ce qui précède, il existe des éléments  $a$  et  $n$  des groupes  $A_+$  et  $N$ , déterminés de manière unique tels que  $x = anx_o$ . Il est alors facile de voir que les plats  $F = Ax_o$  et  $anF$  restent à distance bornée.  $\square$

### 2.1.3 Compactifications

Le contenu de ce paragraphe et du suivant est centré autour de la notion de bord d'un espace symétrique. Nous pensons en priorité aux espaces de rang supérieur. Dans cette partie, nous introduisons le bord visuel et montrons qu'il permet de reconnaître (si  $rg\widetilde{M} \geq 2$ ) la géométrie de l'intérieur. Les informations que contiennent le bord visuel peuvent être organisées selon un axe topologique (métrique de Tits) ou combinatoire (immeuble de Tits). L'équivalence de ces deux points de vue ainsi que l'analyse de la géométrie qui est déposée sur le bord est l'objectif du paragraphe suivant.

Le bord de Furstenberg possède une description plus géométrique ( $G/P$ ) et une bonne connaissance du groupe de Lie  $G$  donne accès plus rapidement à ses caractéristiques. Comme il est une orbite du groupe  $G$  (et même en fait du sous-groupe  $K$ ), de nombreux problèmes qui font intervenir la géométrie du bord de Furstenberg se ramènent à un problème sur les groupes. Son comportement vis-à-vis des produits lui donne une importance décisive dans le problème de l'entropie minimale sur l'espace  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

On désigne par  $\widetilde{M}$  un espace symétrique simplement connexe et par  $M$  un quotient compact. Lorsque nous énonçons un résultat qui est valide pour une variété de Hadamard quelconque, nous remplacerons les notations par  $\widetilde{X}$  et  $X$ .

#### 2.1.3.1 Le bord visuel et la géométrie de Tits

Une première façon de compactifier la variété  $X$  est de la plonger dans l'espace métrique des fonctions continues sur  $X$  et de passer à l'adhérence. Notons alors  $\mathcal{C}(X)$  l'espace des fonctions continues sur  $X$ . On peut plonger  $X$  dans  $\mathcal{C}(X)$  par

$$\Phi : x \mapsto d_x(\cdot) = d(x, \cdot).$$

Nous allons définir dans quelques lignes une autre compactification de  $\tilde{X}$  qui sera équivalente à celle-ci moyennant la précaution suivante. On considère en fait l'espace  $\mathcal{C}'(X)$  obtenu à partir de  $\mathcal{C}(X)$  en le quotientant par les fonctions constantes. Si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{C}(X)$ , on note  $\bar{f}$  son image dans le quotient. Un banal exercice de topologie montre que  $X$  se plonge dans  $\mathcal{C}(X)$  par le procédé précédent. Puis, la définition de la topologie quotient rend évident le fait que  $X$  se plonge aussi dans  $\mathcal{C}'(X)$ . On note alors  $\bar{X}$  l'adhérence de l'image de  $X$  dans  $\mathcal{C}'(X)$  et  $\partial X = \bar{X} - \Phi(X)$ . Notons que ce procédé fait sens pour toutes les variétés riemanniennes.

Nous allons maintenant supposer que  $X$  est simplement connexe (nous la notons donc  $\tilde{X}$ ) et nous allons décrire une compactification plus géométrique.

Soit  $c_1$  et  $c_2$  deux géodésiques de  $\tilde{X}$  de vitesse constante égale à 1. Ces géodésiques sont dites asymptotiques si elles restent à distance bornée :

$$\sup_t d(c_1(t), c_2(t)) < \infty.$$

Les classes d'équivalence ainsi définies sont appelées points à l'infini. On note l'ensemble des classes d'équivalence par  $\partial\tilde{X}$ .

**Remarque** Nous prendrons garde à ne pas confondre la géodésique en tant qu'application et son image dans la variété. A l'image d'une géodésique  $c$  correspondent deux points à l'infini, celui dans la classe d'équivalence de  $t \mapsto c(t)$  et celui de  $t \mapsto c(-t)$ .

**Remarque** Notons que cette démarche de compactification se généralise aux espaces hyperboliques, ouvrant ainsi la voie à l'étude des groupes hyperboliques (les graphes de Cayley de groupes fondamentaux de variétés à courbure négative sont quasi-isométriques au revêtement universel), initiée par Gromov (voir [LHG90]). C'est à ma connaissance le cadre d'application le plus général de ce procédé, bien que la famille des groupes hyperboliques ne contienne pas les réseaux des groupes de Lie de rang supérieur.

La topologie naturelle qui se dépose sur le bord est métrisée de la manière suivante : soit  $x$  un point de  $\tilde{X}$  ; toutes les classes d'équivalence de géodésiques possèdent un représentant passant par  $x$ . On pose alors, pour  $z_1$  et  $z_2$  dans  $\tilde{X}$ , correspondant aux géodésiques passant par  $x$ ,  $c_1$  et  $c_2$ ,

$$\angle_x(z_1, z_2) = \angle(c_1'(0), c_2'(0)).$$

Cette topologie ne dépend pas de  $x$ . Elle définit un homéomorphisme de  $\partial\tilde{X}$  sur la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ , identifiée au tangent unitaire en  $x$  puisque  $\angle(c_1'(0), c_2'(0))$  est une métrique qui induit la topologie de la sphère. L'identification du bord à la sphère dépend en revanche du point  $x$ .

Une troisième façon de compactifier les variétés de Hadamard consiste à utiliser le théorème de Hadamard. En effet, ce résultat prouve que  $\tilde{X}$  est difféomorphe à une boule

ouverte (on montre qu'en chaque point  $x \in \tilde{X}$ , l'application exponentielle est un revêtement). On peut donc compactifier  $\tilde{X}$  en ajoutant une sphère, ce qui est cohérent avec ce qui précède.

On peut alors montrer que ces compactifications coïncident et qu'elles définissent des espaces homéomorphes (et homéomorphes à une boule fermée). On montre en fait que les fonctions de Busemann constituent le bord de  $\tilde{X}$  dans le premier modèle. Le quotient de  $\mathcal{C}(X)$  par les constantes permet d'identifier  $(x, c) \mapsto B(x, c)$  et  $(y, c) \mapsto B(y, c)$ , puis  $(x, c) \mapsto B(x, c)$  et  $(x, c') \mapsto B(x, c')$  si  $c$  et  $c'$  restent à distance bornée.

On constate donc que n'importe quelle variété de Hadamard de dimension  $n$  conduit à une compactification par une sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$ . À ce stade la topologie qui a été ajoutée à cette sphère est la topologie usuelle. Ainsi peu de propriétés géométriques de  $\tilde{X}$  se reflètent sur le bord. Il est donc intéressant de définir une nouvelle topologie sur  $\mathbb{S}^{n-1}$  qui rendra mieux compte de la géométrie intérieure.

### Métrie de Tits sur $\partial\tilde{X}$

Rappelons que l'on a défini une métrique sur  $\partial\tilde{X}$  par l'angle entre deux points du bord regardé depuis un point  $x$  :

$$\angle_x(z_1, z_2) = \angle(c'_1(0), c'_2(0)).$$

On forme alors

$$\angle(z_1, z_2) = \sup_x \angle(z_1, z_2)$$

et cela définit une métrique complète sur  $\partial\tilde{X}$  ([BGS85] p.39). Elle n'induit pas la même topologie sur le bord que la topologie de la sphère. Par exemple il est facile de voir que si  $Z_1$  et  $z_2$  sont les deux extrémités d'une même géodésique, alors  $\angle(z_1, z_2) = \pi$ , en regardant l'angle depuis un des points de la géodésique. Pour les espaces symétriques de rang 1, par exemple, pour lesquels tout couple de points du bord est joignable par une géodésique, la topologie de  $\angle$  est discrète. C'est d'ailleurs pourquoi nous avons annoncé que nous portons une attention plus particulière aux espaces symétriques de rang supérieur puisqu'en rang 1, la métrique  $\angle$  n'a pas plus d'intérêt que la topologie usuelle de la sphère.

Nous utilisons ensuite une remarquable idée due à Gromov pour transformer la distance  $\angle$  en une distance qui ressemble à une distance riemannienne, tout en préservant la topologie.

En effet, si  $(M, d)$  est un espace métrique, on définit une nouvelle distance sur  $M$ , appelée distance géodésique associée à  $d$  :

$$T(a, b) = \inf_{\gamma} l(\gamma),$$

où l'infimum porte sur toutes les courbes continues  $\gamma$  joignant  $a$  à  $b$ . La longueur de la courbe  $\gamma$  est calculée comme le supremum des longueurs des lignes affines avec des sommets sur l'image de  $\gamma$ . C'est une façon de définir une métrique sur une variété puisqu'il est facile de montrer que la longueur d'une courbe lisse est aussi l'intégrale de sa norme riemannienne.

**Définition 6.** *La métrique de Tits sur le bord, notée  $T$ , est la distance géodésique associée à  $\triangleleft$ .*

Nous quittons maintenant la théorie générale des variétés de Hadamard. Des informations complémentaires peuvent être trouvées dans [BGS85] ou [Gro07]. Signalons en particulier la belle théorie qui consiste à étudier l'emprise de la métrique de Tits sur la courbure limite au bord.

Soit donc  $\widetilde{M}$  un espace symétrique de type noncompact. Nous allons expliquer comment la métrique de Tits permet de retrouver des informations sur la géométrie de  $\widetilde{M}$ . Les preuves peuvent être trouvées dans les appendices 4 et 5 de [BGS85] ou dans [Ebe96]. Un premier résultat montre que la métrique de Tits détecte les produits.

**Théorème 2.1.4.**

1. Si  $\widetilde{M}$  est un produit,  $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ , on note  $\partial\widetilde{M}_i \subset \partial\widetilde{M}$  les bords des facteurs et on a
  - (a) Si  $z_i \in \partial\widetilde{M}_i$ , alors  $T(z_1, z_2) = \pi/2$ .
  - (b) Si  $z$  est un point du bord, il est contenu dans une unique géodésique entre un point de  $\partial\widetilde{M}_1$  et  $\partial\widetilde{M}_2$ .

*Par exemple, nous avons vu que le bord de  $\mathbb{H}^2$  est un cercle discret. Par ailleurs le bord de  $\mathbb{R}$  est constitué de deux points, disons le pôle nord et le pôle sud de la sphère bord de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . La métrique de Tits sur cette sphère est la métrique SNCF, où Paris est remplacé par le pôle nord (ou le pôle sud).*

2. Inversement supposons que le bord  $\widetilde{M}$  contienne deux sous-ensembles  $A_1$  et  $A_2$  vérifiant les propriétés (a) et (b) ci-dessus. Alors  $\widetilde{M}$  est un produit  $\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$  avec  $\partial\widetilde{M}_i = A_i$ .

Enfin le résultat le plus abouti de cette section est le suivant, répondant à la question de la caractérisation de la géométrie de  $\widetilde{M}$  par la topologie du bord, soulevée dans l'introduction.

**Théorème 2.1.5.** *Soit  $\widetilde{M}$  un espace symétrique de type noncompact de rang supérieur à 2 et soit  $\widetilde{X}$  une variété de Hadamard de même dimension. On suppose que les bords munis des métriques de Tits sont isométriques, ou de manière équivalente (voir plus bas) que les structures d'immeubles de Tits sont les mêmes. Alors  $\widetilde{X}$  et  $\widetilde{M}$  sont homothétiques.*

**Remarque** On ne peut bien sûr pas s'attendre à une caractérisation plus précise (par exemple à isométrie près) puisque la métrique de Tits est inchangée sous l'effet d'une homothétie de la métrique riemannienne intérieure.

### Structure d'immeuble de Tits sur $\partial\widetilde{M}$

Nous allons maintenant expliquer que les chambres de Weyl et les murs des chambres à l'infini forment une partition de  $\partial\widetilde{M} = \mathbb{S}^{n-1}$  qui a une structure d'immeuble de Tits. Rappelons que l'on peut pousser une chambre de Weyl  $\mathfrak{a}^+$  d'un plat passant par  $x$  à l'infini par

$$\mathfrak{a}^+(\infty) = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \text{ où } c(t) = \exp(tH), H \in \mathfrak{a}^+ \right\}.$$

On fait de même avec les murs. Cela étant on a le résultat suivant :

**Proposition 2.1.6.** *Les chambres de Weyl à l'infini et les murs à l'infini partitionnent le bord  $\partial\widetilde{M}$ .*

**Démonstration :** Nous allons faire usage de la décomposition d'Iwasawa  $G = KAN^+$  exposée au paragraphe précédent. Cette décomposition montre que le sous-groupe  $AN^+$  agit simplement transitivement sur  $\widetilde{M}$ . Par ailleurs il est facile de voir que  $AN^+$  stabilise (point par point) les chambres de Weyl à l'infini ; un petit calcul dans le groupe montre qu'une géodésique et son image par un élément  $an$  restent à distance bornée. Ainsi donc si  $W_1$  et  $W_2$  sont deux chambres ayant une limite de géodésique en commun, alors il existe  $an$  tel que  $W_1 = anW_2 = W_2$ . Un raisonnement similaire s'applique pour les murs.

Il est par ailleurs évident que les chambres et les murs recouvrent la sphère à l'infini.  $\square$

Donnons maintenant la définition abstraite d'un immeuble de Tits et vérifions que les chambres de Weyl satisfont les axiomes d'un immeuble.

Un complexe est un ensemble partiellement ordonné (on note s'il y a lieu  $a \leq b$  et on dit que  $a$  est un mur de  $b$ ) tel que l'ensemble des murs d'un élément quelconque a une structure, en tant qu'ensemble ordonné, isomorphe à l'ensemble des sous parties d'un ensemble fini. Le rang d'un élément est le cardinal de cet ensemble. On suppose que le rang des éléments est borné par un nombre fini appelé rang du complexe.

Un complexe est dit *fin* si tout élément de corang 1 (le rang du complexe moins 1) est un mur d'exactly deux éléments de rang maximum. On dit qu'il est *épais* sinon.

**Définition 7.** *Un immeuble est un couple  $(\Lambda, \mathcal{A})$  où  $\Lambda$  est un complexe et  $\mathcal{A}$  est un ensemble de sous complexes (dont les éléments sont appelés appartements) tel que :*

1.  $\Lambda$  est épais.
2. Tous les appartements sont fins.
3. Etant donnés deux éléments de  $\Lambda$ , il existe un appartement qui les contient tous les deux.

4. Si  $b_1$  et  $b_2$  sont des éléments de  $\Lambda$  contenus simultanément dans deux appartements  $A$  et  $A'$ , alors il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés de  $A$  sur  $A'$  laissant stables  $b_1$ ,  $b_2$  et leurs murs.

La terminologie est assez explicite sur la manière dont nous allons procéder pour donner un exemple d'immeuble de Tits. On définit  $\mathcal{T}(\widetilde{M})$  comme l'ensemble des chambres de Weyl à l'infini et de leurs murs, auquel on ajoute l'élément  $\emptyset$  qui est un mur de tous les autres éléments.

Pour un point  $x$  donné dans l'espace symétrique  $\widetilde{M}$ ,  $\mathcal{T}(\widetilde{M})$  est aussi l'ensemble des chambres de Weyl et de leurs murs de tous les plats passant par  $x$ . On peut identifier l'élément  $x$  lui-même à  $\emptyset$ .

L'immeuble de Tits  $\mathcal{T}(\widetilde{M})$  est encore l'ensemble de toutes les chambres de Weyl et de tous leurs murs ; deux éléments étant identifiés si leur distance de Hausdorff est finie.

L'équivalence de ces définitions ainsi que la vérification que  $\mathcal{T}(\widetilde{M})$  constitue bien un immeuble de Tits au sens abstrait provient des généralités sur les espaces symétriques du paragraphe 2.1.2.

### Comparaison des informations données par la métrique de Tits et la structure d'immeuble de Tits

Il reste à voir que les deux points de vue combinatoire et topologique sont équivalents. Ainsi la métrique de Tits détermine l'immeuble de Tits et inversement.

Supposons donnée la métrique de Tits. Tout d'abord il est facile de voir qu'une géodésique de  $T$  se divise en morceaux contenus dans des chambres de Weyl. En effet si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux points du bord, ils sont contenus dans un plat  $F$ . Si  $x$  est un point de  $F$ , alors

$$T(z_1, z_2) \triangleleft_x (z_1, z_2)$$

et donc il y a une géodésique de  $z_1$  à  $z_2$  par définition de la distance géodésique.

Si  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas à l'opposé dans le plat  $F$ , la géodésique est unique et contenue dans le bord de  $F$ . D'ailleurs c'est un arc de grand cercle puisque la trace de la topologie au bord d'un plat est la topologie usuelle de la sphère (de dimension convenable), donnée par la métrique riemannienne de la sphère. Si  $z_1$  et  $z_2$  sont opposés, la géodésique n'est pas forcément unique, mais cela ne pose pas problème. C'est la même configuration que celle qui induit des points conjugués lorsqu'ils sont diamétralement opposés sur la sphère. Il est possible aussi que  $z_1$  et  $z_2$  soient contenus dans des plats différents.

On tire de cette discussion "l'algorithme" suivant : un point  $z$  du bord est dans un mur de rang  $k$  s'il existe un voisinage de  $z$  pour la métrique de Tits qui est homéomorphe à une boule dans  $\mathbb{R}^k$ . On peut ainsi reconstruire l'immeuble par la métrique.

Inversement, la métrique qui se dépose sur un mur de rang  $k$  est la métrique riemannienne de la sphère. La relation d'ordre permet de recoller les morceaux de l'espace métrique ainsi défini.

### 2.1.3.2 Le bord de Furstenberg

Comme annoncé, nous allons maintenant décrire une autre méthode de compactification, dont l'intérêt réside dans la richesse de sa structure algébrique, qui permet d'exploiter des connaissances sur la structure du groupe d'isométrie  $G$  de  $\widetilde{M}$ . Des exemples précis d'utilisations seront discutés au chapitre suivant.

Si  $v_1$  et  $v_2$  sont des vecteurs unitaires tangents réguliers (non nécessairement tangents au même point), chacun définit une chambre de Weyl du deuxième type (plongée dans l'espace symétrique). Rappelons que c'est la composante connexe de  $\exp(v_i)$ , dans l'unique plat auquel ils sont tangents, du complémentaire des hyperplans définis par les racines. Comme pour le bord visuel, nous identifions deux chambres de Weyl si elles restent à distance de Hausdorff bornée,

$$H(\mathcal{W}(v_1), \mathcal{W}(v_2)) \leq \infty.$$

Cette identification est nécessaire; il se peut que des plats soient parallèles. Le bord de Furstenberg est alors par définition l'ensemble des classes d'équivalence de chambres de Weyl. Il est noté  $\partial_F \widetilde{M}$ . Notons tout de suite que  $\partial_F \widetilde{M}$  et  $\partial \widetilde{M}$  coïncident en rang 1. Par ailleurs il n'y a qu'une classe d'équivalence de chambre de Weyl si on se restreint aux chambres issues d'une même fibre  $T_x^1 \widetilde{M}$ . Une dernière façon de définir le bord de Furstenberg est de considérer l'ensemble des chambres de Weyl à l'infini. L'équivalence de ces points de vue a été remarquée plus haut.

L'objectif de ce paragraphe est de préciser les structures que l'on peut ajouter à  $\partial \widetilde{M}$ . Elles sont surtout de nature algébrique mais  $\partial \widetilde{M}$  est naturellement muni d'une topologie.

$G$  agit sur l'ensemble des chambres de Weyl par

$$g(x) = g(W(v)) = W(g(v))$$

et l'action descend sur le bord de Furstenberg puisque si des chambres sont à distance bornée, leurs images par  $g$  le sont aussi,  $g$  étant une isométrie.

On définit une application  $S$  de  $\partial_F \widetilde{M}$  sur l'ensemble  $R$  des vecteurs réguliers de la manière suivante. On fixe un point  $p$  de l'espace symétrique. A un point  $x$  de  $\partial_F \widetilde{M}$ , il correspond une unique chambre du second type  $W$  dans  $T_p^1 \widetilde{M}$ . On note alors  $S(x)$  le centre de gravité de  $W$ .

On construit alors une topologie sur  $\partial_F \widetilde{M}$  en imposant que  $S$  soit une isométrie pour la métrique angulaire sur la sphère  $T_p^1 \widetilde{M}$  :

$$\angle_p(x_1, x_2) = \angle_p(S(x_1), S(x_2)).$$

La topologie induite par cette distance ne dépend en fait pas de  $p$  et l'action de  $G$  est continue ([Ebe96] p.237-238).

**Théorème 2.1.7** (structure du bord de Furstenberg).

1. **Aspects algébriques** Le groupe  $G$  (ou même  $K$ ) agit transitivement sur le bord de Furstenberg. Le stabilisateur d'une chambre de Weyl,  $x$  est un sous-groupe parabolique minimal  $P_x$  (c'est aussi le stabilisateur de n'importe quel élément régulier qui pointe vers la chambre de Weyl).
2. **Aspects topologiques** Le bord de Furstenberg est compact pour la topologie définie plus haut. Il est isomorphe à l'orbite de  $G$ ,  $G/P_x$ , avec la topologie quotient.

**Remarque** Le fait que les sous-groupes paraboliques minimaux soient tous conjugués rend vraisemblable le point 2 ci-dessus : la topologie de  $P_x$  ne dépend pas de la chambre  $x$ .

Le résultat suivant deviendra l'intérêt majeur du bord de Furstenberg :

**Proposition 2.1.8.** Soit  $\widetilde{M}$  un espace symétrique de type non compact qui est un produit non trivial  $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \cdots \times \widetilde{M}_k$ . Alors le bord de Furstenberg  $\partial_F \widetilde{M}$  est homéomorphe au produit

$$\partial_F \widetilde{M}_1 \times \cdots \times \partial_F \widetilde{M}_k$$

En effet dans le cas où l'espace symétrique est un produit, le groupe d'isométrie est lui-même un produit. On conclut en se souvenant que le bord de Furstenberg est une orbite du groupe.

**Remarque** Une telle décomposition en produit n'est bien sûr pas valable pour l'immeuble de Tits. Les éléments qui pointent vers une chambre de Weyl, ont, eux, une structure produit.

#### 2.1.4 L'exemple de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$

L'espace symétrique  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  joue un rôle particulier dans la suite de ce mémoire. C'est pourquoi, nous allons expliciter les constructions précédentes dans ce cas. Ce n'est pas l'exemple privilégié habituellement ; Jean-François Quint a l'habitude de dire que si on comprend ce qui se passe dans  $\mathbb{H}^n$  et dans  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ , on peut parvenir à un énoncé général. La discussion sur la structure du bord de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  n'apparaît pas dans les sources standards...mais elle est bien connue.

Le bord visuel de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  est la sphère de dimension 3,  $\mathbb{S}^3$  puisque  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  est une variété de Hadamard de dimension 4. Le rang de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  est 2 ; en général, le rang d'un produit est la somme des rangs, puisqu'on peut former une sous-algèbre abélienne maximale d'un produit en faisant la somme directe d'algèbres abéliennes maximales des facteurs. Le système de racines d'un plat est réductible puisque  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  est un produit. Comme il n'y a qu'un seul type de système de racines de dimension 1,  $A_1$ , on en déduit

celui de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 : A_1 \times A_1$  (constitué des vecteurs de la base unité de  $\mathbb{R}^2$  et de leurs opposés).

Les chambres de Weyl à l'infini sont donc des quarts de cercle et les murs sont des points. Il existe deux familles de géodésiques singulières, celles de la forme

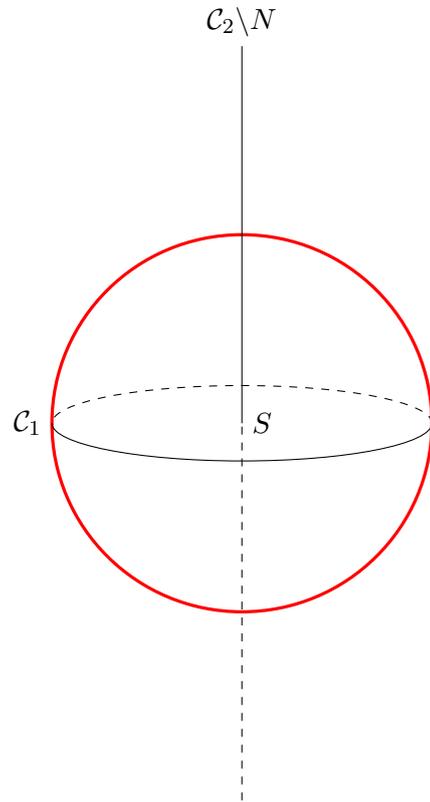
$$\gamma(t) = (c(t), c_1),$$

où  $c_1$  est un point du deuxième facteur  $\mathbb{H}^2$  et  $c$  est une géodésique du premier facteur ; et celles de la forme

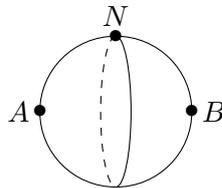
$$\gamma(t) = (c_2, c(t)),$$

où les rôles sont inversés.

Le lieu des points singuliers à l'infini est donc une réunion de deux cercles. Les points à l'infini correspondant aux géodésiques singulières du premier type forment en effet un cercle puisque toutes les géodésiques obtenues avec des constantes différentes sont asymptotiques. Par ailleurs ces deux cercles à l'infini sont orthogonaux puisque des géodésiques singulières de types différents sont orthogonales. Les chambres de Weyl constituent une partition de la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Ainsi donc l'immeuble de Tits est le joint des deux cercles orthogonaux. Cela n'est pas très visuel. Cherchons à rendre cette partition en chambres de Weyl plus maniable. Pour cela, on peut retirer un point à la sphère  $\mathbb{S}^3$  et, par projection stéréographique, représenter l'immeuble de Tits dans  $\mathbb{R}^3$ . Notons les cercles singuliers  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . On prend un point  $N$  de  $\mathcal{C}_2$  et on effectue la projection stéréographique à travers le point  $N$ .

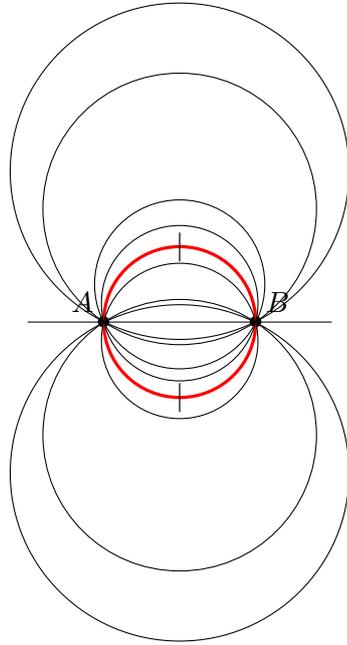


La droite verticale est l'image du cercle  $\mathcal{C}_2$ . La sphère en gras est l'image de la 2-sphère de  $\mathbb{S}^3$  orthogonale à la droite Nord-Sud. L'intérieur de cette sphère est l'hémisphère sud de  $\mathbb{S}^3$ . Regardons ce que sont les images des chambres de Weyl. Pour cela on coupe la sphère  $\mathbb{S}^3$  par un hyperplan  $P$  contenant  $\mathcal{C}_2$  et deux points diamétralement opposés du cercle  $\mathcal{C}_1$ . C'est une sphère équatoriale dont la trace de l'immeuble de Tits est d'ailleurs l'immeuble au bord de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . La restriction de la projection stéréographique à cette sphère est la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^2$  à travers le pôle nord.



On s'intéresse aux chambres de Weyl joignant les points  $A$  et  $B$  à des points du cercle  $\mathcal{C}_1$ . La projection stéréographique est conforme donc les droites et cercles deviennent des droites ou des cercles et les relations d'orthogonalité sont préservées. Le résultat obtenu est un bouquet de cercles dont deux jouent des rôles particuliers vis-à-vis des choix que l'on a effectués. Le cercle en gras est l'image de l'équateur ; l'intérieur est l'image de l'hémisphère sud et l'extérieur l'image de l'hémisphère nord. Le "cas limite" de la droite

$(AB)$  est l'image du cercle contenu dans le plan  $ANS'N$ .



Revenons au cas général. Lorsque l'on fait varier le plan  $P$  par lequel on a coupé la sphère  $\mathbb{S}^3$ , on obtient pour image des chambres de Weyl, une surface de révolution obtenue en faisant tourner le bouquet de cercles autour de l'axe Nord-Sud. Les "cas limite" forment un faisceau de droites qui sont les images des chambres reliant un point du cercle  $\mathcal{C}_1$  au pôle nord (à l'extérieur de la sphère en pointillé) ou au pôle sud (à l'intérieur de la sphère). La réunion de ces droites est le plan de l'image du cercle  $\mathcal{C}_1$ . Par ailleurs les "vrais" cercles donnent lieu à 4 chambres de Weyl repérées sur le dessin en coupe. La sphère en gras est elle-même la réunion des cercles en gras de la vue en coupe. Il n'est pas facile d'illustrer la situation complète par un dessin.

Le bord de Furstenberg s'identifie au produit des deux cercles singuliers. En effet une chambre de Weyl est une composante connexe du joint des deux cercles discrets; elle est donc repérée par un couple de points  $(\theta_1, \theta_2)$  sur le tore. Le bord de Furstenberg est donc un tore de Clifford (engendré par deux cercles orthogonaux) de la sphère  $\mathbb{S}^3$ . On remarque au passage que la topologie que nous avons définie sur le bord de Furstenberg n'est pas la trace de la topologie du bord visuel.

## 2.2 Entropies

### 2.2.1 Entropie volumique

L'entropie volumique est le taux de croissance exponentielle du volume des boules. Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte et  $(\tilde{X}, g)$  son revêtement universel rie-

mannien. Fixons un point  $x \in \tilde{X}$ . Dans les cas importants pour le problème de l'entropie minimale, le volume de la boule de centre  $x$  et de rayon  $R$  croît de façon exponentielle avec  $R$ . C'est pourquoi on s'intéresse à la quantité suivante

$$\frac{\log(\text{Vol}(B(x, R)))}{R}$$

et on espère obtenir des résultats de convergence en faisant tendre  $R$  vers l'infini. Ces résultats existent et sont prouvés en détails dans [Man79]. En fait la quantité précédente est presque sous-linéaire, comme on le constate à l'avant-dernière ligne de calcul du bas de la page 568 de [Man79]. Le résultat obtenu est indépendant de  $x$  puisque par compacité, il existe un réel  $a$  (par exemple le diamètre de  $X$ ) tel que

$$\text{Vol}(B(x, R - a)) \leq \text{Vol}(B(y, R)) \leq \text{Vol}(B(x, R + a)),$$

pour  $R$  suffisamment grand et pour tout couple de points  $(x, y)$  de  $\tilde{X}$ . Ainsi l'entropie volumique est

$$h_v(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{Vol}(B(x, R)))}{R}.$$

Elle ne dépend que du revêtement universel.

**Exemple 2.2.1.**

1. *L'entropie volumique de la sphère est nulle puisque la sphère est simplement connexe donc elle est son propre revêtement universel. Bien sûr le volume des boules de la sphère est borné.*
2. *Dans les quotients de l'espace euclidien, l'entropie est nulle aussi. Il existe en effet une constante  $C$  telle que le volume des boules de rayon  $R$  de  $\mathbb{R}^n$  soit*

$$C \cdot R^n.$$

*La croissance est donc polynomiale.*

*Nous allons examiner ces phénomènes et nous montrerons que, dans les deux cas précédents, l'entropie est nulle parce que la métrique n'est pas de courbure négative.*

Donnons encore quelques exemples de calculs explicites de l'entropie volumique. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées. On peut, dans un premier temps, chercher à calculer explicitement le volume des boules. Dans l'espace hyperbolique, la métrique s'exprime en coordonnées sphériques par

$$dx^2 = \sinh^{n-1} dr^2 + d\theta^2$$

et on obtient

$$\text{Vol}(B(x, R)) = c_n \int_0^R \sinh^{n-1}(t) dt$$

où  $c_n$  est le volume de la boule  $\mathbb{S}^{n-1}$ . En faisant tendre  $R$  vers l'infini et en passant au log, on obtient l'entropie volumique de tous les quotients compacts de  $\mathbb{H}^n$  :  $n - 1$ .

Cette méthode est en fait assez limitée puisqu'elle demande de connaître explicitement le volume des boules. Pour les espaces symétriques de rang 1, on peut démontrer la proposition suivante qui est classique mais qui ne possède pas, à ma connaissance, de démonstration directe.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $G/K$  un espace symétrique de rang 1 (la métrique est donnée par la forme de Killing, ce qui fixe la normalisation);  $P = MAN$  la décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique minimal.  $P$  n'est pas unimodulaire et sa fonction modulaire vérifie*

$$\Delta(ma_t n) = \exp(-h(G/K)t).$$

**Démonstration (incomplète) :** On rappelle que l'on dispose pour le groupe  $G$  des deux décompositions de Cartan et d'Iwasawa, une fois que l'on a fixé un sous-groupe compact maximal (correspondant à l'origine  $o \in G/K$ ). La décomposition de Cartan est plus adaptée au calcul du volume des boules. En effet

$$\text{Vol}(B(o, R)) = \text{Vol}(\{KA_tK; t \leq R\} \cdot o).$$

En effet  $d(k_1 a_t k_2, o) = t$  et  $K$  agit transitivement sur la sphère (c'est d'ailleurs pourquoi la proposition ne s'énonce qu'en rang 1). Par ailleurs

$$\text{Vol}(\{NA_tK; t \leq R\} \cdot o)$$

est le volume de l'horoboule basée en  $\text{Stab}(N)$  et qui est l'intérieur de la ligne de niveau  $R$  de la fonction de Busemann. L'idée qui pourrait résumer cette proposition s'exprime alors ainsi : lorsque  $t$  est grand, les orbites de  $KA_tK$  et  $NA_tK$  se ressemblent beaucoup. La difficulté technique tient au fait que le volume de l'horoboule est infini. Lorsque le point  $x$  tend vers le bord, la boule de centre  $x$  tend vers l'horoboule, au sens suivant :

$$\sup_{x \in \widetilde{M}} |\mathbb{1}_{B \cap C}(x) - \mathbb{1}_{H \cap C}(x)| \rightarrow 0,$$

où  $H$  est l'horoboule,  $B$  la boule, la limite est prise lorsque le centre de la boule tend vers un point du bord et  $C$  est un compact arbitraire de  $\widetilde{M}$ . Ainsi

$$\text{Vol } H \cap C - \text{Vol } B \geq \varepsilon$$

On conclut en utilisant la description de la mesure de Haar vis-à-vis de la décomposition d'Iwasawa :

**Lemme 2.2.2.** *Pour toute fonction  $\varphi$  mesurable bornée sur le groupe  $G$ , on a*

$$\int_G \varphi(g) dg = \int_{KP} \Delta(p)^{-1} dk dp.$$

Ce lemme provient (presque) directement du fait que les groupes  $G$  et  $K$  sont unimodulaires. □

Par ailleurs l'expression de la fonction modulaire de  $P$  est connue. En effet, pour un groupe de Lie  $H$ , la fonction modulaire est donnée par  $h \mapsto \det(\text{Ad}_h)^{-1}$ . On peut alors faire le calcul dans le cas des espaces hyperboliques réels, complexes ou quaternioniques. On obtient dans chaque cas, la valeur de l'entropie correspondante :

1.  $h(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n) = n - 1$ , ce que nous avons déjà vu.
2.  $h(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n) = 2n$ .
3.  $h(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}^n) = 2(2n + 1)$

Nous allons considérer des produits d'espaces symétriques. Donnons la formule de l'entropie d'un produit :

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ . On désigne par  $h$  l'entropie d'un quotient compact de  $\widetilde{M}$  ; par  $h_i$  celle d'un quotient compact de  $\widetilde{M}_i$ . Alors*

$$h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

**Démonstration :** La preuve fait apparaître une autre méthode pratique de calcul de l'entropie (voir la remarque qui suit). Elle est décrite en détails à la toute fin de [BCG91]. En fait l'entropie s'exprime dans l'algèbre de Lie. Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple,  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie,  $\mathfrak{a}_+$  une chambre de Weyl à laquelle correspond une famille de racines privilégiées  $\Lambda_+$  pour lesquelles

$$\forall a \in \mathfrak{a} \forall \alpha \in \Lambda_+, \alpha(a) > 0.$$

A chaque racine  $\alpha \in \Lambda_+$  correspond, en utilisant l'isomorphisme donné par la forme de Killing, un vecteur  $e_\alpha$  de  $\mathfrak{g}$ . On note aussi  $m_\alpha$  la multiplicité de la racine, c'est-à-dire la dimension de l'espace propre commun à tous les éléments de  $\mathfrak{a}$  correspondant à  $\alpha$ . Finalement on peut montrer que l'entropie est la norme du vecteur

$$H = \sum_{\alpha \in \Lambda_+} m_\alpha e_\alpha.$$

Ainsi l'entropie se comporte vis-à-vis des produits comme une norme euclidienne.  $\square$

On déduit aussi de cette proposition le comportement de l'entropie sous l'effet d'une dilatation de la métrique :

$$h(\lambda \cdot g) = \frac{1}{\lambda} h(g).$$

**Remarque** La preuve de la proposition permet de calculer l'entropie des quotients compacts de  $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SO}_n(\mathbb{R})$ . En effet, tous les objets nécessaires pour expliciter le vecteur  $H$  sont connus (voir [Ebe96] p.91). Les racines non nulles sont de la forme

$$\alpha_{i,j}(A) = A_{ii} - A_{jj}$$

pour  $i \neq j$ . Celles qui sont positives correspondent aux indices  $(i, j)$  tels que  $i > j$ . Après calculs, on trouve la norme du vecteur  $H$  et on a

$$h(\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SO}_n(\mathbb{R})) = n/2,$$

ce qui est cohérent avec le cas  $n = 2$ .

## 2.2.2 Entropie topologique

Dans cette section, nous définissons un concept profond en dynamique. Il s'agit de donner une mesure de la façon dont un système dynamique est chaotique. Le système dynamique auquel nous pensons est le flot géodésique d'une variété compacte. Rappelons que c'est un système défini sur le tangent unitaire de la variété. Une définition heuristique pourrait être la suivante. L'entropie topologique d'un système dynamique est le taux de croissance exponentielle du nombre d'orbite que l'on peut distinguer avec une précision arbitraire. Nous suivons la présentation de Bowen dans [Bow71].

### Entropie calculée avec des ensembles $(\varepsilon, n)$ -séparants

Soit  $X$  un espace métrique compact et soit  $f : X \rightarrow X$  une dynamique topologique. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit une nouvelle métrique sur  $X$  par

$$d_n(u, v) = \max_{0 \leq k \leq n} d(f^k(u), f^k(v)).$$

Les boules  $B_n(x, \varepsilon)$  pour cette distance sont constituées des points dont les orbites restent à distance  $\varepsilon$  de celle de  $x$ .

Un ensemble  $S$  est alors  $(\varepsilon, n)$ -séparant si

$$\forall (x, y) \in S^2, d_n(x, y) \geq \varepsilon.$$

Les orbites des points d'un ensemble séparant peuvent donc être reconnues avec une précision  $\varepsilon$  jusqu'au temps  $n$ . En utilisant la compacité, on peut montrer que les ensembles séparants existent bien. Pour déterminer combien d'orbites peuvent être reconnues, on a intérêt à maximiser la taille d'un ensemble séparant :

**Définition 8.** On note  $Sep(n, \varepsilon)$  la taille maximale d'un ensemble  $(\varepsilon, n)$ -séparant.

Notre but est alors de faire grandir  $n$  pour augmenter la taille des orbites que l'on sait distinguer puis de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 pour augmenter la précision. On considère alors le taux de croissance exponentielle lorsque  $n$  tend vers l'infini. On pose

$$Sep(\varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(Sep(n, \varepsilon))}{n}.$$

Il n'est pas certain que la limite existe (elle n'existe d'ailleurs pas toujours) donc on prend la  $\limsup$  par précaution. Nous verrons cependant que la  $\limsup$  est une vraie limite dans les cas qui nous intéressent. La fonction  $\varepsilon \rightarrow Sep(\varepsilon)$  est croissante lorsque  $\varepsilon$  décroît. On peut donc considérer la quantité suivante

$$h_{\text{top}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Sep(\varepsilon).$$

## Entropie calculée par des ensembles $(\varepsilon, n)$ -denses

La définition précédente pose un problème pratique. Il est assez facile de trouver des ensembles séparants mais il est compliqué de vérifier qu'ils sont maximaux. Cela permet souvent de donner une estimation inférieure de l'entropie topologique. La méthode suivante est, en quelque sorte, une méthode duale qui permet de donner des valeurs approchées par valeurs supérieures.

On dit qu'un ensemble  $S$  est  $(\varepsilon, n)$ -dense si pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in S$  tel que

$$d_n(x, y) < \varepsilon.$$

Dans l'esprit de ce qui précède, on définit  $Den(\varepsilon, n)$  comme le cardinal minimum d'un ensemble  $(\varepsilon, n)$ -dense.

### Proposition 2.2.4.

$$h_{top} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(Den(n, \varepsilon))}{n}$$

La preuve de cette proposition n'est pas difficile. Elle résulte directement des inégalités

$$Den(\varepsilon, n) \leq Sep(\varepsilon, n) \leq Den(2\varepsilon, n).$$

Supposons maintenant que la dynamique est donnée par le flot géodésique sur une variété de courbure négative. Un phénomène général en courbure négative, que l'on peut voir comme une propriété de convexité (voir le début de [BGS85]), affirme que les géodésiques s'écartent. Ainsi, en courbure négative, il semble possible de différencier avec une précision arbitraire deux orbites du flot géodésique. Cette explication rend vraisemblable l'énoncé suivant, prouvé rigoureusement par Katok dans [Kat82]

**Théorème 2.2.5.** *Un note  $l(\gamma)$  la longueur de la géodésique  $\gamma$ . Alors*

$$h_{top}(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log(\#\{\gamma \text{ telle que } l(\gamma) \leq R\})}{R}$$

### 2.2.3 Comparaisons

Il existe bien sûr des liens entre les notions que nous venons de définir. Nous allons expliciter ces liens. Un de nos premiers objectifs est de justifier le fait que le problème de l'entropie minimale n'est pertinent que pour un espace symétrique de courbure négative ou nulle. Soit donc  $(\widetilde{M}, g_0)$  un espace symétrique qui n'est pas partout de courbure négative ou nulle. Puisque la métrique  $g_0$  est homogène, la courbure est de signe constant, donc ici par hypothèse positif ou nul. La classification des espaces symétriques montre qu'alors  $\widetilde{M}$  est le produit d'un espace euclidien avec des sphères. L'entropie de chacun des facteurs est nulle donc la courbure de  $g_0$  est nulle. Par ailleurs l'annulation de l'entropie est une contrainte de nature topologique. Plus précisément, on définit l'entropie algébrique d'un groupe  $\Gamma$  supposé finiment engendré de la manière suivante. On prend

un système de générateurs symétrique de  $\Gamma$ , disons  $S$ . Ce système de générateurs permet de construire une métrique sur le groupe  $\Gamma$ . On pose en effet

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \min \{k \text{ tel que } \gamma_1 \cdot \gamma_2^{-1} = s_1 \cdots s_k\}.$$

L'entropie algébrique de  $\Gamma$  est alors

$$h_{alg}(\Gamma) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B(e, R))}{R}.$$

Autrement dit c'est l'entropie volumique du graphe de Cayley de  $\Gamma$  construit avec le système de générateurs  $S$ . On dit que le groupe est à croissance exponentielle si

$$\#B(e, R) \geq a^R$$

pour une constante  $a > 1$  ou à croissance polynômiale si

$$\#B(e, R) \leq cste \cdot R^n$$

pour un entier  $n$ . Il est facile de voir que le type de croissance ne dépend pas du système de générateurs. De manière générale, la croissance d'un groupe ne dépend que modérément du système de générateurs choisi.

Revenons à notre contexte. Dans [Mil68], Milnor a comparé l'entropie volumique avec l'entropie du groupe fondamental. On peut reformuler avec le langage de la géométrie des groupes ses résultats.

**Théorème 2.2.6.**

1. *Le type de croissance d'un groupe est invariant par quasi-isométrie.*
2. *Le graphe de Cayley de  $\pi_1(M)$  est quasi-isomorphe au revêtement universel  $\widetilde{M}$ .*
3. *Si la courbure d'une variété  $(X, g)$  est positive, le groupe fondamental est à croissance polynomiale, le degré maximal  $n$  étant d'ailleurs la dimension.*

On déduit donc de ces résultats que pour toute métrique  $g$  sur  $M$ , son entropie est nulle. Le problème de l'entropie minimale n'a donc pas d'intérêt. Si la courbure est strictement positive, on peut conclure directement puisque, dans ce cas, le revêtement universel est compact (théorème de Myers [GHL04] p.137).

En quelque sorte l'entropie volumique a plus d'emprise sur la topologie de la variété sous-jacente que l'entropie topologique puisque sa nullité ou non ne dépend que de l'entropie algébrique du groupe. Il existe des exemples de métriques sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui ont une entropie topologique positive. En contre-partie, on s'attend donc à ce que l'entropie volumique ne capture qu'une partie de la complexité topologique. C'est bien le cas :

**Théorème 2.2.7** ([Man79]). *Soit  $X$  une variété riemannienne compacte. Alors  $h_{top} \geq h_{vol}$ . On a cependant égalité en courbure négative ou nulle.*

L'inégalité pour une variété riemannienne quelconque n'est pas triviale. En effet, on peut avoir une entropie volumique non nulle, même si la courbure n'est pas partout négative, contrairement aux espaces symétriques (voir plus loin les théorèmes d'entropies minimales qui s'appliquent à des métriques de courbures quelconques).

## Chapitre 3

# Chapitre 2 : Entropie minimale des espaces localement symétriques

### Introduction

Ce chapitre contient le cœur de mes travaux de thèse. Une grosse partie des idées qui y sont exposées sont originales et conduisent à une preuve de la conjecture de l'entropie minimale dans le cas des quotients compacts de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Une version courte et en anglais de ce texte, destinée à la publication, est disponible sur ma page web et sur le serveur de dépôt d'archives Arxiv.

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, dont le revêtement universel est noté  $(\widetilde{M}, g)$ . On note de la même façon les métriques sur  $M$  et  $\widetilde{M}$  puisqu'elles se correspondent en imposant que le revêtement soit une isométrie locale. Rappelons que l'entropie volumique, telle qu'elle a été définie au chapitre précédent est le taux de croissance du volume des boules dans  $\widetilde{M}$ , ou plus précisément, pour un point  $x \in \widetilde{M}$ ,

$$h(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{Vol}(B(x, R)))}{R}.$$

La limite converge et ne dépend pas de  $x$ .

On espère que la connaissance de l'entropie permet de retrouver des propriétés de la métrique. Ce problème est toutefois irréaliste. En effet l'entropie se comporte comme l'inverse d'une distance, puisque l'on a la relation suivante :

$$h(\lambda^2 g) = \frac{1}{\lambda} h(g)$$

pour tout réel  $\lambda \neq 0$  de sorte que l'entropie ne permet même pas de caractériser une classe de métriques homothétiques. Il semble donc naturel d'associer à l'entropie un autre invariant qui pourrait être utilisé conjointement. L'outil le plus simple à notre disposition est le volume de la métrique  $g$ . On peut définir alors une autre notion d'entropie qui,

cette fois, est invariante par perturbation homothétique de la métrique. On appelle en effet entropie normalisée de  $g$ , la quantité suivante

$$\text{ent}(g) = h(g)^n \text{Vol}(g).$$

La question se pose alors ainsi : quelles sont les valeurs que peut prendre  $\text{ent}(g)$  lorsque l'on fait varier  $g$  sur une structure différentiable donnée ? Ou de manière équivalente : quelles sont les valeurs de  $h$  pour les métriques de volume 1 ?

En 1983, à la suite d'un travail fondamental sur le volume des variétés sur lequel nous reviendrons ([Gro82]), Gromov dans [Gro83] propose de restreindre son attention au cas des variétés hyperboliques. La conjecture de Gromov que nous allons énoncer est aujourd'hui résolue dans le cas hyperbolique mais la question demeure pertinente pour les espaces localement symétriques.

**Conjecture 3.0.8.** *Supposons que  $M$  supporte une métrique localement symétrique  $g_0$  normalisée de sorte  $\text{Vol}(g_0) = 1$ . Alors  $g_0$  est la métrique de plus petite entropie parmi les métriques sur  $M$  de volume 1.*

Un énoncé, évidemment équivalent, sur lequel se sont concentrés les efforts jusqu'à présent, consiste à prouver que

$$\text{ent}(g) \geq \text{ent}(g_0) \tag{3.0.1}$$

Gromov lui-même obtenait d'ailleurs déjà dans [Gro82] une version non optimale de cette inégalité.

**Théorème 3.0.9** (Gromov [Gro82]).  *$\text{ent}(g) \geq cste \text{ent}(g_0)$  où  $cste$  est une constante qui ne dépend que de la dimension de  $M$  mais qui vérifie  $0 < cste < 1$ .*

A défaut de pouvoir obtenir une inégalité optimale, on pourra d'ailleurs chercher à prouver un énoncé tel que celui de M.Gromov. Il est aussi intéressant de savoir si l'entropie minimale est atteinte uniquement par une certaine métrique. Le résultat ainsi produit est un théorème de rigidité qui caractérise une géométrie.

Nous avons déjà expliqué au chapitre précédent l'interprétation dynamique de l'entropie volumique. En courbure négative en effet, entropies topologiques et volumiques coïncident. Notons qu'en général la connaissance de la dynamique permet de retrouver beaucoup d'informations géométriques puisque le flot géodésique donne le spectre marqué des longueurs (l'application qui, à chaque classe d'homotopie libre de  $M$ , associe la longueur de la géodésique périodique qu'elle contient ; cette application est bien définie en courbure négative). Ici il s'agit d'exploiter des informations beaucoup plus faibles que la donnée du spectre des longueurs puisque l'entropie topologique est une quantité asymptotique. Le livre [BGM71] est une bonne référence pour la manipulation de ces objets.

Lorsque l'on obtient une inégalité du type 3.0.8, il est tentant de chercher à démontrer que le volume minimal de la variété est atteint pour la métrique localement symétrique.

Ceci répondrait à une question posée par Gromov dans les années 1970 : étant donnée une structure différentielle compacte  $M$ , quelle métrique riemannienne de courbure sectionnelle comprise entre  $-1$  et  $1$  a le plus petit volume ? On appelle volume minimal d'une variété compacte  $M$  et on note  $\text{MinVol}$  la borne inférieure des volumes des métriques sur  $M$  dont la courbure varie entre  $-1$  et  $1$ . Comme pour l'entropie, on se demande aussi quelle métrique atteint le volume minimal (si elle existe). En dimension 2 la réponse découle rapidement du théorème de Gauss-Bonnet. Au paragraphe 3.4 nous verrons que le volume minimal d'un espace hyperbolique est donné par la métrique hyperbolique.

Lorsque la variété n'est pas compacte, le problème semble plus difficile. Le cas du volume minimal de  $\mathbb{R}^2$  traité dans [BP86] montre que le minimum peut être atteint par une métrique singulière. L'exposé de P. Pansu au séminaire Bourbaki ([Pan97]) traite le sujet de façon plus complète.

Dans les paragraphes suivants, nous allons discuter les résultats obtenus pour démontrer la conjecture 3.0.8 et nous verrons quelques applications. Deux articles fondamentaux des auteurs G. Besson, G. Courtois et S. Gallot sont à la base de toutes les méthodes qui existent actuellement.

Dans le premier de ces articles [BCG91], il est démontré le théorème suivant :

**Théorème 3.0.10** ([BCG91]). *Si  $g_0$  est une métrique localement symétrique irréductible de type non compacte ( $K(g_0) \leq 0$ ) sur  $M$  une variété compacte et si  $g$  est une autre métrique sur  $M$  qui est dans la classe conforme de  $g_0$ , alors*

$$\text{ent}(g) \geq \text{ent}(g_0).$$

Ceci donne donc une réponse partielle à 3.0.8 puisque la métrique  $g$  dont on veut comparer l'entropie à celle de  $g_0$  doit se situer dans la classe conforme de  $g_0$ .

Cependant dans un second temps ([BCG95]), les mêmes auteurs parviennent au résultat suivant, plus complet :

**Théorème 3.0.11** ([BCG95]). *Si  $(M, g_0)$  est un espace localement symétrique compact de rang 1 (de courbure strictement négative) et si  $g$  est une autre métrique sur  $M$ , alors*

$$\text{ent}(g) \geq \text{ent}(g_0)$$

A ce stade, il reste à traiter le cas des espaces localement symétriques de courbure négative ou nulle. Une nouvelle étape est franchie dans [CF03b] par C. Connell et B. Farb et de manière indépendante par les trois premiers auteurs dans [BCG07]. Chaque article traite le cas des produits d'espaces localement symétriques de rang 1 dont le revêtement universel ne contient pas de facteur  $\mathbb{H}^2$ . Connell et Farb adaptent la preuve au cas des espaces de volumes finis.

**Théorème 3.0.12** ([CF03b]). *Soit  $(M, g_0)$  une variété riemannienne de volume fini qui est localement produit d'espaces symétriques de rang 1 et où  $g_0$  est la métrique localement symétrique de plus petite entropie normalisée. Alors, pour toute autre métrique  $g$  sur  $M$ , on a*

$$\text{ent}(g) \geq \text{ent}(g_0).$$

Enfin, je traite dans ce mémoire le cas des quotients par des réseaux cocompacts de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  et j'obtiens un résultat analogue :

**Théorème 3.0.13** (Merlin 2014). *Soit  $(M, g_0)$  un espace symétrique compact localement isométrique à  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  muni de la métrique hyperbolique dans chaque facteur. Pour toute autre métrique  $g$  sur  $M$ , on a*

$$\mathrm{ent}(g) \geq \mathrm{ent}(g_0).$$

Notons qu'avant ce travail, aucun résultat de ce type concernant l'espace symétrique produit de facteur  $\mathbb{H}^2$  n'est connu. En particulier le théorème principal de [BCG91] fait une hypothèse d'irréductibilité de l'espace, et cette hypothèse n'est bien sûr pas vérifiée dans les produits de  $\mathbb{H}^2$ . Remarquons aussi que le "degree theorem" de Connell et Farb (voir le paragraphe 3.2 sur l'application barycentre) ne s'applique pas dans ce cas.

### 3.1 La méthode de preuve

Deux des théorèmes que nous allons présenter utilisent un schéma de preuve commun. On introduit dans un premier temps un invariant de la structure différentielle de  $\widetilde{M}$  appelé Volume Sphérique et qui ressemble au volume simplicial de [Gro82] mais qui est plus maniable dans ce cas là. Il est facile d'approcher le Volume Sphérique par une quantité qui dépend de l'entropie d'une autre métrique sur  $\widetilde{M}$ . Il s'agira ensuite de réaliser le volume sphérique et pour cela, nous utiliserons une méthode de calibration.

Il est préférable de rappeler dès à présent quelques définitions. On note  $(\widetilde{X}, g)$  une variété riemannienne complète de courbure négative ou nulle et simplement connexe. Quand on suppose que  $(\widetilde{X}, g)$  est un espace symétrique de type noncompact, on utilise plutôt la notation  $(\widetilde{X}, g) = (\widetilde{M}, g_0)$  comme dans [Ebe96]. L'entier  $n$  désigne toujours la dimension de  $\widetilde{X}$ . On fixe une fois pour toutes un point base  $o$  dans  $X$ . Ceci permet le calcul des fonctions de Busemann et l'identification du bord à la sphère. Le noyau de Poisson de la métrique  $g$  sera souvent utilisé dans la suite. Il est noté  $p_0$  et est défini par

$$p_0(x, \theta) = e^{-h(g)B_o(x, \theta)},$$

où  $h(g)$  est l'entropie volumique de la métrique  $g$  et  $B_o$  désigne la fonction de Busemann au point base  $o$ . Elle prend comme argument un point intérieur  $x \in X$  et un point du bord  $\theta \in \partial\widetilde{X}$ . Lorsque l'espace est symétrique et que l'on remplace le bord visuel par le bord de Furstenberg (qui donc est identifiable au produit des bords visuel de chacun des facteurs), on appelle noyau de Poisson le produit des noyaux de Poisson dans les facteurs ; défini donc sur les points du bord de Furstenberg. Dans le cas du disque hyperbolique par exemple, on retrouve le noyau de Poisson habituel de l'analyse harmonique

$$p_o(x, \theta) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \theta|^2}$$

et on en déduit celui du produit  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  sur les points du bord de Furstenberg :

$$p_o((x_1, x_2), (\theta_1, \theta_2)) = \frac{1 - |x_1|^2}{|x_1 - \theta_1|^2} \frac{1 - |x_2|^2}{|x_2 - \theta_2|^2}.$$

### 3.1.1 Le volume sphérique

Nous réintroduisons maintenant un objet, apparu pour la première fois dans [BCG91], qui aura une importance décisive dans la preuve de la conjecture 3.0.8. Dans cette partie, on suppose que  $\widetilde{M}$  est une espace symétrique de type non compact de rang 1 (courbure négative) ou un produit d'espaces de rang 1. Si  $\widetilde{M}$  est un produit, on adoptera la convention qui consiste à noter encore  $p_o$  le produit des noyaux de Poisson. Par ailleurs,  $M = \Gamma \backslash \widetilde{M} = \pi_1(M) \backslash \widetilde{M}$  est un quotient compact de  $\widetilde{M}$ . On considère les deux représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $\text{Isom}(\widetilde{M}, g)$  et dans  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$ . La première est classique, la seconde est donnée par la formule suivante

$$\gamma \cdot f(\theta) = f(\gamma^{-1}(\theta)) \sqrt{p_o(\gamma(o), \theta)}$$

où  $p_o$  est le noyau de Poisson de  $M$  (voir au-dessus). C'est la formule de changement de variable (adaptée à  $L^2$ ) puisque le noyau de Poisson est le jacobien d'une isométrie agissant au bord. On note alors  $\mathcal{N}$  la famille des immersions lipschitziennes

$$\Phi : \widetilde{M} \longrightarrow L^2(\partial_F \widetilde{M})$$

qui sont équivariantes pour les deux représentations et qui sont à valeurs dans la sphère unité de  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$  :

$$\forall x \in \widetilde{M} \|\Phi(x)\|_{L^2} = 1$$

Bien sûr ces fonctions peuvent être considérées comme des fonctions de 2 variables  $x \in \widetilde{M}$  et  $\theta \in \partial_F \widetilde{M}$  par  $\Phi : (x, \theta) \mapsto \Phi(x)(\theta)$ . On enrichit  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$  de sa métrique hilbertienne standard. Le volume sphérique est alors défini par

$$\text{SphereVol}(M) = \inf_{\Phi \in \mathcal{N}} \{\text{Vol } \Phi(U) \subset L^2(\partial_F \widetilde{M})\}$$

où  $U$  est un domaine fondamental pour  $\rho$ . De façon plus explicite

$$\text{SphereVol}(M) = \inf_{\Phi \in \mathcal{N}} \left\{ \int_M \sqrt{\det_g(g_\Phi(x))} \cdot dv_g(x) \right\} .$$

où  $g_\Phi$  est la métrique image inverse de la métrique canonique de  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$  sur  $\widetilde{M}$  et  $\det_g(g_\Phi)$  est calculé dans une base orthonormale pour  $g$ .

Remarquons l'analogie avec le volume simplicial défini par Gromov dans [Gro82]. Dans ce papier, l'auteur plonge l'espace symétrique dans l'espace des chaînes simpliciales muni d'une norme  $L^1$ . Ici, on plonge  $\widetilde{M}$  dans un espace  $L^2$ , ce qui offre des possibilités géométriques proche de structure de variété riemannienne.

Les méthodes que nous allons passer en revue pour démontrer la conjecture 3.0.8 se proposent d'établir dans un premier temps, à l'aide d'exemples d'immersions de  $\mathcal{N}$ , l'inégalité

$$\text{SphereVol}(M) \leq \left( \frac{h(g)^2}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(M, g)$$

Donnons dès maintenant ces exemples et la preuve de l'inégalité précédente. Avec la métrique  $g$  sur  $\widetilde{M}$ , on construit

$$\Psi_c(x, \theta) = \left( \int_{\widetilde{M}} e^{-cd(x,y)} p_0(y, \theta) dv_g(y) \right)^{1/2}$$

où  $d$  est la distance associée à  $g$  et  $p_0$  le noyau de Poisson de  $(\widetilde{M}, g_0)$ . On choisit  $c > h(g)$  pour que l'intégrale converge. Ensuite on normalise pour avoir un élément de norme  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$  égale à 1 :

$$\Phi_c(x, \theta) = \frac{\Psi_c(x, \theta)}{\left( \int_{\partial_F \widetilde{M}} \Psi_c^2(x, \theta) d\theta \right)^{1/2}}$$

Notons que ces fonctions  $\Phi_c$  resserviront. Elles jouent, en particulier dans [BCG95], un rôle important dans la preuve du cas d'égalité. Intuitivement, les fonctions  $\Phi_c$  sont construites en comparant les mesures de Patterson-Sullivan (des détails seront donnés plus bas) de la métrique  $g$  et de la métrique symétrique  $g_0$ . L'opération de comparaison est ici la convolution. Dans le cas où les métriques sont comparables (i.e sous les hypothèses du cas d'égalité), on s'attend à des phénomènes de convergence lorsque  $c$  tend vers l'entropie. En attendant, nous allons les utiliser pour contrôler le volume sphérique. On montre dans [BCG95] p.742 le lemme suivant qui peut, sans difficulté, être utilisé dans le cas où  $M$  est de rang supérieur à 1.

**Lemme 3.1.1** ([BCG95] p.742). *Les applications  $x \mapsto \Phi_c(x, \cdot)$  pour  $c > h(g)$  sont  $C^1$ , équivariantes pour l'action de  $\pi_1(M)$  dans l'espace hilbertien  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$ . Les dérivées directionnelles sont données par*

$$u \cdot \Psi_c(x, \theta) = \frac{1}{2\Psi_c(x, \theta)} \left( -c \int_{\widetilde{M}} e^{-cd(x,y)} u \cdot d(x, y) p_0(y, \theta) dv_g(y) \right).$$

Il s'agit de justifier que l'on peut dériver sous le signe intégral.

Grâce aux dérivées directionnelles du lemme précédent, on peut calculer les métriques  $g_{\Phi_c}$  et on obtient

**Proposition 3.1.2.**

$$\text{SphereVol}(M) \leq \left( \frac{h(g)^2}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(M, g)$$

**Démonstration :** La preuve est calquée sur le chapitre 3 de [BCG95] qui traite le cas des espaces de rang 1.

On s'intéresse d'abord à la trace de la métrique. Nous obtiendrons ensuite des informations sur le volume à l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique. On calcule bien sûr la quantité  $\text{trace}_g(g_{\Phi_c})$  pour les immersions  $\Phi_c$  définies plus haut. Prenons  $(e_1, \dots, e_n)$  une base  $g$ -orthonormée de  $T_x \widetilde{M}$ . Avec la formule de la dérivée des  $\Phi_c$  et la définition de la métrique  $g_{\Phi_c}$ , on obtient

$$\text{trace}_g(g_{\Phi_c})(x) = \sum_{i=1}^n \int_{\partial_F \widetilde{M}} (e_i \cdot \Phi_c)^2(x, \theta) d\theta$$

Comme dans [BCG91] p.430, en utilisant le théorème de Pythagore, on a

$$\text{trace}_g(g_{\Phi_c})(x) \leq \frac{1}{\int_{\partial_F \widetilde{M}} \Psi_c^2(x, \theta) d\theta} \left( \sum_i \int_{\partial_F \widetilde{M}} (e_i \cdot \Psi_c)^2(x, \theta) d\theta \right).$$

Et maintenant avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la formule de la dérivée partielle des  $\Psi_c$ , on trouve :

$$\begin{aligned} (e_i \cdot \Psi_c)^2(x, \theta) &\leq \frac{c^2}{4\Psi_c^2} \left( \int_{\widetilde{M}} e^{-cd(x,y)} p_0(x, \theta) dv_g(y) \right) \left( \int_{\widetilde{M}} e^{-cd(x,y)} (e_i \cdot d)^2 p_0(x, \theta) dv_g(y) \right) \\ &\leq \frac{c^2}{4} \left( \int_{\widetilde{M}} e^{-cd(x,y)} (e_i \cdot d)^2(x, y) p_0(x, \theta) dv_g(y) \right). \end{aligned}$$

La différentielle de  $d$  est de norme 1 pour la métrique  $g$  et il suit

$$\sum_{i=1}^n (e_i \cdot d)^2(x, y) = 1.$$

On a maintenant

$$\sum_{i=1}^n (e_i \cdot \Psi_c)^2(x, y) \leq \frac{c^2}{4} \Psi_c^2(x, \theta)$$

et

$$\text{trace}_g(g_{\Phi_c})(x) \leq \frac{c^2}{4}.$$

Revenons au volume sphérique. On a, grâce à l'inégalité déjà obtenue et avec l'inégalité

de la moyenne arithmético-géométrique,

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(\Phi_c) &= \int_M \left( \det_g(g_{\Phi_c}) \right)^{1/2} dv_g(x) \\
&= \int_M \left( \det_g(g_{\Phi_c}) \right)^{\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2}} dv_g(x) \\
&\leq \int_M \left( \frac{1}{n} \text{trace}(g_{\Phi_c}) \right)^{n/2} dv_g(x) \\
&\leq \int_M \left( \frac{c^2}{4n} \right)^{n/2} dv_g(x) \\
&= \left( \frac{c^2}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(g).
\end{aligned}$$

On conclut en utilisant que

$$h(g) = \inf \left\{ c / \Psi_c(x, \cdot) \in L^2(\partial_F \tilde{M}) \right\}.$$

La seule différence avec la même preuve de [BCG95] est la convention sur le noyau de Poisson et le bord de Furstenberg qui permet de traiter simultanément le cas des espaces de rang 1 et le cas produit. Cette proposition diffère légèrement de la majoration du volume sphérique de [BCG91] puisque l'on définit comme dans [BCG95] le volume sphérique pour des applications à valeurs dans le bord.  $\square$

Dans un second temps, avec une méthode dite de calibration, nous montrerons comment prouver que

$$\text{SphereVol}(M) = \left( \frac{h(g_0)^2}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(M, g_0)$$

Dans le paragraphe suivant nous présenterons la méthode de calibration et quelques possibilités d'applications. Dans le paragraphe 3.2, nous étudierons l'article [BCG95] et construirons une application qui permettra d'obtenir une inégalité de calibration. Enfin, il sera question au paragraphe 3.3 de mon résultat cité plus haut et de sa preuve. Seules les démonstrations du dernier paragraphe seront rédigées en détails puisqu'elles sont inédites ; les autres peuvent être trouvées dans les articles originaux des auteurs cités.

Terminons cette section en mentionnant que le volume sphérique a été étudié en tant que tel, indépendamment de son utilité dans le problème de l'entropie minimale. Besson, Courtois et Gallot (voir [BCG96]) conjecturaient depuis longtemps qu'il ne dépendait que de la topologie de  $M$ , par exemple du groupe fondamental. Il est en effet presque évident que seule la structure différentielle de  $M$  influe sur le volume sphérique et que la métrique n'intervient pas : précomposer une immersion de  $\mathcal{N}$  par un difféomorphisme de  $M$  donne encore une immersion de  $\mathcal{N}$ . En fait on a le résultat plus précis suivant :

**Théorème 3.1.3** ([Bru08]). *On suppose  $M$  orientable. Le volume sphérique ne dépend que de l'image de la classe fondamentale par l'application classifiante de  $\tilde{M}$ .*

### 3.1.2 Méthode de calibration

La méthode de calibration a été utilisée par de nombreux auteurs (voir les travaux [BGM71] ou [Mor90] sur lesquels nous reviendrons, et bien sûr [BCG95]). Cette brève section a pour but d'en expliquer la mise en œuvre et les possibles applications. De manière rapide la méthode consiste à exploiter la donnée d'une  $n$ -forme différentielle (en dimension  $n$ ) qui est maximale sur chaque repère orthonormé tangent.

Soit  $\omega$  une  $n$ -forme sur  $M$ .

**Définition 9.** On appelle comasse de  $\omega$  la quantité

$$\text{comasse}(\omega) = \sup |\omega_y(Y_1, \dots, Y_n)|$$

où le supremum est calculé pour tous les repères orthonormés  $(Y_1, \dots, Y_n)$  de  $T_y M$ .

Nous dirons alors que  $\omega$  est une forme calibrante si elle est fermée et si, pour tout repère orthonormé  $(X_1, \dots, X_n)$  tangent à  $M$ , on a

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = \text{comasse}(\omega).$$

Pour alléger les notations par la suite, nous supposons que  $\omega$  est normalisée de sorte que  $\text{comasse}(\omega) = 1$ . Une sous-variété  $S$  de  $M$  est calibrée si

$$\sup \{\omega_x(\xi) \text{ où } \xi \text{ est tangent à } S \text{ en } x\} = 1.$$

Il est aussi utile pour la suite de constater que si  $\Phi$  est une immersion d'une variété  $M$  dans une variété  $M'$ , l'image de  $M$  par  $\Phi$  est calibrée par une forme  $\omega \in \Omega^n(M')$  si et seulement si

$$|\omega_{\Phi(x)}(d\Phi(U_1), \dots, d\Phi(U_n))| = \text{comasse}(\omega) \|d\Phi(U_1) \wedge \dots \wedge d\Phi(U_n)\|$$

pour tout  $x \in M$  et toute base  $(U_1, \dots, U_n)$  de  $T_x M$ .

Nous allons maintenant donner quelques exemples de formes calibrantes et nous montrerons qu'elles permettent de donner des solutions élégantes à des problèmes classiques.

**Application 1 : Sous-variétés d'aire minimale.** Dans [Mor90], F.Morgan s'intéresse au problème suivant :

**Problème 3.1.4.** Soit  $M$  une variété riemannienne complète. Parmi les sous-variétés  $S$  de  $M$  qui sont dans la même classe d'homologie, laquelle est d'aire minimale pour la métrique induite par  $M$  ?

Une remarque simple montre que si  $S$  est calibrée, elle minimise l'aire dans sa classe d'homologie. Il est en effet facile de voir que

$$\text{Aire}(S') \geq \int_{S'} \omega = \int_S \omega = \text{Aire}(S)$$

où  $\omega$  est une forme calibrante.

Dans la suite de cet article, l'auteur cherche alors à trouver des formes calibrantes.

Un premier exemple est donné par la forme de Kähler d'une variété complexe. L'inégalité de calibration est en effet l'inégalité classique de Wirtinger (voir [Fed69] p.40). M.Berger étend l'inégalité de Wirtinger au cas des variétés quaternions-kählériennes dans [Ber72]. On obtient ainsi d'autres exemples de sous-variétés d'aire minimisante.

**Application 2 : Calcul des carcan.** A nouveau dans [Ber72], l'auteur utilise des inégalités de calibration pour produire des inégalités de type systoliques (l'auteur dit "carcaniques").

**Application 3 : Réaliser le volume sphérique.** Nous allons maintenant décrire la méthode de [BCG95] qui permet de montrer que

$$\text{SphereVol}(M) = \left( \frac{h(g_0)^2}{4n} \right)^{n/2} \text{Vol}(M, g_0)$$

Il s'agit en fait d'expliquer le résultat suivant :

**Proposition 3.1.5.** *S'il existe une  $n$ -forme différentielle sur  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$  qui calibre l'immersion  $\Phi_0$ , alors  $\text{SphereVol}(M) = \text{Vol}(\Phi_0)$*

**Démonstration :** On peut en effet définir de manière équivalente le volume d'une immersion  $\Phi$  par

$$\sup_{\omega} = V_{\Phi}(\omega)$$

où le supremum porte sur toutes les  $n$ -formes  $\omega$  et où

$$V_{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\text{comasse}(\omega)} \int_M \Phi^* \omega.$$

Si on considère maintenant le supremum de  $V_{\Phi}(\omega)$  pour toutes les  $n$ -formes fermées  $\omega$  on obtient un invariant appelé masse de  $\Phi$ .

Si  $\Phi_0$  est l'immersion calibrée et si  $\Phi$  est homotope à  $\Phi_0$  alors

$$\text{Vol}(\Phi_0) = \text{masse}(\Phi_0) = \text{masse}(\Phi) \leq \text{Vol}(\Phi).$$

La première égalité découle de l'inégalité de calibration (rappelons qu'une forme calibrante est fermée). La seconde égalité provient du fait que  $\Phi_0$  et  $\Phi$  sont homotopes. Pour conclure il reste à remarquer que dans  $\mathcal{N}$ , toutes les applications sont homotopes par l'homotopie canonique

$$H(t, x) = ((1-t)\Phi_0^2(x) + t\Phi^2(x))^{\frac{1}{2}}.$$

□

Il resta alors à faire le calcul du volume de  $\Phi_0$ . Nous renvoyons à [BCG95] pour le cas des espaces de rang 1. Plaçons-nous ici dans le cas qui fait l'objet de ce mémoire.

**Lemme 3.1.6.** *Soit  $M$  un quotient compact de*

$$(\mathbb{H}^2)^n.$$

*On plonge  $(\mathbb{H}^2)^n$  dans l'espace  $L^2(\mathbb{T}^n)$  par le produit des noyaux de Poisson du disque*

$$\Phi_0(x_1 \cdots, x_n, \theta_1, \cdots, \theta_n) = \frac{1 - |x_1|^2}{|x_1 - \theta_1|^2} \cdots \frac{1 - |x_n|^2}{|x_n - \theta_n|^2}.$$

*Alors*

$$\text{Vol}(\Phi_0) = \left( \frac{h(g_0)^2}{8n} \right)^n = \left( \frac{1}{8} \right)^n.$$

**Démonstration :** La dernière égalité du lemme provient du fait que

$$h(g_0)^2 = \sum_{k=0}^n h(g_{\text{hyp}})^2 = n,$$

où  $g_{\text{hyp}}$  est la métrique hyperbolique du disque. La situation se présente complètement sous forme de produit. Il s'agit donc de rappeler pourquoi, dans le cas de  $\mathbb{H}^2$ , on a  $\text{Vol}(\Phi_0) = \frac{1}{8}$ . Ce calcul est fait à la page 743 de [BCG95].  $\square$

Cette idée est une variante de l'application 1 adaptée à un espace de dimension infinie. Pour terminer la preuve de 3.0.8 il reste à construire la forme calibrante  $\omega$ . Dans le paragraphe suivant nous présenterons la méthode due à G. Besson, G. Courtois et S. Gallot dans [BCG95]. Elle repose sur la construction d'une application barycentre. Dans le dernier paragraphe, nous utiliserons une technique pour produire des formes différentielles sur  $L^2(\mathbb{T}^2)$  utilisant un cocycle borné de la variété quotient.

## 3.2 Utilisation de l'application barycentre

Dans cette partie nous complétons la preuve de 3.0.8 pour le cas des espaces localement symétriques de rang 1 (de courbure strictement négative) et les produits de tels espaces. Pour la suite nous noterons  $S^\infty$  la sphère unité de  $L^2(\partial_F \tilde{M})$ . S'il y a confusion, nous compléterons la notation par  $S^\infty(\partial_F \tilde{M})$ . Le bord visuel est noté comme d'habitude  $\partial \tilde{M}$ .

G.Besson, G.Courtois et S.Gallot proposent dans [BCG95] de construire une application

$$\pi : S^\infty \longrightarrow \tilde{M}$$

de manière à ce que  $\pi^*(\omega_0)$  calibre l'image de  $\Phi_0$  où  $\omega_0$  est la forme volume associée à la métrique localement symétrique  $g_0$  de  $\tilde{M}$ .  $\tilde{M}$  correspond à l'orbite de la fonction  $\mathbf{1}$  sous l'action de  $\text{Isom}(\tilde{M})$  par le noyau de Poisson  $\Phi_0$ . La forme  $\pi^*(\omega_0)$  est en fait construite à l'aide d'une application de projection de  $S^\infty$  sur l'orbite.

### 3.2.1 L'application barycentre

L'application en question est en fait l'application barycentre introduite par Furstenberg dans [Fur63] pour les mesures sur le disque, généralisée ensuite dans [DE86] pour les mesures sur le bord de l'espace hyperbolique de dimension quelconque. Besson, Courtois et Gallot étendent ensuite sa définition au cas des variétés riemanniennes de courbure majorée par un réel négatif, un résultat facilement généralisable aux espaces  $CAT(-1)$ . Enfin Connell et Farb donne, à ma connaissance, le résultat d'existence le plus général à ce jour. Expliquons brièvement ces quelques résultats successifs d'existence.

Soit  $(M, g_0)$  un espace symétrique de type non-compact. A l'aide de la distance induite par  $g_0$  et d'un point base fixé  $o$ , on peut calculer les fonctions de Busemann

$$B_o(x, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - t$$

où  $\gamma$  est une géodésique partant de  $o$  et qui pointe vers  $\theta$ . Cette quantité doit être comprise comme la distance du point  $x \in M$  au point à l'infini  $\theta$ . Soit alors  $\mu$  une mesure sur le bord, que l'on peut imaginer à densité (ce sera suffisant pour notre application) mais ce n'est pas le contexte le plus général. On cherche un point  $x$  de l'espace symétrique qui aurait la plus petite distance moyenne aux points du bord. Introduisons alors la quantité qui représente la distance moyenne de  $x$  aux points du bord

$$\mathcal{B}(x) = \int_{\widetilde{\partial M}} B_o(x, \theta) d\mu(\theta).$$

Les résultats que nous allons citer se proposent d'établir des conditions pour que la fonction  $\mathcal{B}$  admette un unique minimum. Les conditions peuvent porter soit sur le type de mesure considérée, soit sur le type d'espace symétrique.

**Définition 10.** *Si la fonction  $\mathcal{B}$  possède un unique minimum, on l'appelle barycentre de la mesure  $\mu$ .*

**Théorème 3.2.1** ([BCG95]). *Si la mesure  $\mu$  est sans atomes (les points ne sont pas chargés), ou même sans atomes de masse plus grande que  $\frac{1}{2}$  et que l'espace symétrique est de courbure strictement négative, la fonction  $\mathcal{B}$  est strictement convexe et tend vers l'infini lorsque  $x$  se rapproche du bord. Elle a donc un unique minimum.*

La preuve n'est pas très compliquée et a inspiré toutes les démarches de généralisation. En courbure négative les fonctions de Busemann sont convexes (car la fonction distance est convexe, voir le début de [BGS85]). Il s'ensuit que la moyenne de telles fonctions,  $\mathcal{B}$ , est aussi convexe. La stricte convexité est facile à prouver à l'aide de l'expression explicite de la hessienne,

$$d_x^2 \mathcal{B} \cdot hk = \int_{\widetilde{\partial M}} d_x^2 B_{(x, \theta)} \cdot hk d\mu(\theta).$$

La hessienne des fonctions de Busemann est la seconde forme des horosphères tangentes au bord en  $\theta$  (dans la direction des horosphères). Il est donc facile de tirer de l'équation de Gauss (par exemple) sur la courbure de Gauss des hypersurfaces que les valeurs

propres de la hessienne  $d_x^2 B(x, \theta)$  sont minorées par un réel strictement positif. Il reste à examiner ce qui peut se produire dans la direction normale à l'horosphère, où la hessienne des fonctions de Busemann s'annule. C'est là qu'intervient l'hypothèse restrictive sur la mesure. En effet pour un  $x$  donné, les points du bord où la hessienne de  $B$  s'annule sont les deux points limite de la géodésique passant par  $x$  et normale à l'horosphère. Par hypothèse ces deux points ne peuvent contenir toute la masse de  $\mu$ .

Le résultat d'existence du barycentre le plus général est encore une propriété de convexité de la fonction "moyenne des distances au bord".

**Théorème 3.2.2** ([CF03b]). *On suppose que  $\widetilde{M}$  est une variété riemannienne simplement connexe de courbure négative ou nulle et de courbure de Ricci majorée par un réel négatif (ce qui se produit si  $\widetilde{M}$  n'est pas plate et possède un quotient compact). On suppose aussi que  $\widetilde{M}$  n'a pas de facteur de de Rham isométrique à  $\mathbb{R}$ . Si  $\mu$  est une mesure sur le bord (i.e sur la sphère par le théorème sur les variétés d'Hadamard) et que*

1. *Soit  $\widetilde{M}$  est un espace symétrique et le support de  $\mu$  est contenu dans le bord de Furstenberg,*
2. *Soit le rang géométrique de  $\widetilde{M}$  est 1 et le support de  $\mu$  est toute la sphère  $\partial\widetilde{M}$ ,*

*alors  $\mathcal{B}$  est strictement convexe.*

Le point 2 s'éloigne de notre contexte ; nous n'en donnerons pas la preuve. Elle est de toute façon très proche du cas symétrique. Le point 1 s'adapte du théorème précédent de la façon suivante. Supposons que pour une géodésique  $\gamma$  et un point  $\xi$  du bord de Furstenberg, la fonction  $t \mapsto B(\gamma(t), \xi)$  ne soit pas strictement convexe. Alors il est facile de voir que  $\gamma$  est contenue dans le même plat que la chambre de Weyl  $\xi$  et que la géodésique  $\gamma$  est régulière. Il ne peut donc y avoir qu'un nombre fini de tels couples  $(\gamma, \xi)$  puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de chambres de Weyl par plat, qui par hypothèse ne condensent pas tout la masse.

### 3.2.2 Les espaces symétriques de courbure strictement négative

Rappelons tout d'abord que pour les variétés considérées ici le bord de Furstenberg  $\partial_F M$  coïncide avec le bord visuel. Cependant l'utilisation du bord de Furstenberg est plus adaptée aux espaces de rangs supérieurs, notamment grâce à son comportement vis-à-vis des produits.

Il faut montrer que l'application barycentre permet la construction de la forme calibrante, via le procédé expliqué à la fin de la section 3.1.2. Nous renvoyons au chapitre 5 de [BCG95] pour les détails. Remarquons toutefois que la manière dont on a construit l'application  $\pi$  donne directement et de manière explicite sa différentielle, comme il est habituel avec les fonctions définies implicitement. Il s'agit ensuite de majorer avec soin son ensemble de valeurs. La régularité de  $\pi$  s'obtient à l'aide d'un argument classique avec le théorème des fonctions implicites. On montre ensuite que l'application est une submersion ; la différentielle dans l'espace horizontal est calculée explicitement. Tout ceci

se fait au prix d'une petite discussion en fonction du corps de base ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  ou  $\mathbf{Ca}$ ). Plus précisément,

**Proposition 3.2.3.**  $\pi$  est une submersion de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\pi_1 X$ -équivariante de  $S_+^\infty$  dans  $\tilde{X}$ . Son espace horizontal  $\mathcal{H}_\phi$  au point  $\phi \in \pi^{-1}(x)$  est l'espace engendré par les fonctions  $E_\phi^i : \theta \rightarrow -\phi(\theta)dB_{(x,\theta)}(e_i)$  où les  $e_i$  forment une base  $g_0$ -orthonormée de  $T_x\tilde{X}$ . De plus il existe une base  $L^2$ -orthonormée  $E_\phi^{u_i}$  de  $\mathcal{H}_\phi$  telle que

$$d_\phi\pi(E_\phi^{u_i}) = 2(I - H_x - \sum_{k=1}^{d-1} J_k H_x J_k)^{-1} \circ H_x^{1/2}(e_i)$$

où

- $h$  est le champ de formes quadratiques défini par  $h_x(U, V) = \int_{\partial\tilde{X}} dB_{(x,\theta)}(U)dB_{(x,\theta)}(V)\phi^2(\theta)d\theta$  et  $H$  est le champ d'endomorphismes de  $T_x\tilde{X}$  associé à  $h$  via l'égalité  $g_0(H_x U, V) = h_x(U, V)$
- $d$  est la dimension du corps de base sur  $\mathbb{R}$  selon que  $\tilde{X}$  est un espace hyperbolique réel, complexe, quaternionique ou un plan hyperbolique de Cayley. Les endomorphismes  $J_k$  sont alors les endomorphismes orthogonaux de  $T_x\tilde{X}$  induits par la multiplication des éléments de carré  $-1$  du corps de base ( $1 \leq k \leq d-1$ ).

La puissance de cette proposition réside dans le fait qu'elle permet de faire fonctionner de manière très efficace les techniques "d'eigenvalues matching" de C.Connell et B.Farb que nous rencontrerons dans le paragraphe suivant. Mentionnons enfin pour terminer une application qui est la conséquence de la comparaison des différentes notions d'entropies du chapitre précédent.

### Un théorème de rigidité dynamique

Le corollaire suivant est de nature dynamique. L'étude du cas d'égalité dans l'inégalité entre entropie et volumes est un ingrédient essentiel. C'est un résultat du dernier chapitre de [BCG95]. Il ne s'applique pas dans notre cas puisque le cas d'égalité n'est pas démontré dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Soit encore  $(M, g_0)$  un espace localement symétrique compact, localement isométrique à un produit d'espaces de rang 1, sans facteurs  $\mathbb{H}^2$ . Soit aussi  $(Y, g)$  une variété riemannienne (on peut penser à  $Y = M$  mais nous avons vu une résolution de la conjecture dans le cas où les métriques vivent sur des structures différentielles différentes, reliées par une application continue de degré non nul).

**Théorème 3.2.4.** *Supposons que les flots géodésiques associés à  $g$  et  $g_0$  sont  $\mathcal{C}^1$ -conjugués par un difféomorphisme entre fibrés unitaires tangents. Alors  $g$  et  $g_0$  sont isométriques.*

C'est une conséquence bien naturelle du problème de rigidité entropique puisque la connaissance de la dynamique donne beaucoup plus d'informations que le seul invariant asymptotique de l'entropie. Plus précisément, la conjugaison des flots prouve que les entropies topologiques sont les mêmes. Puis, par le théorème de comparaison entre entropies topologiques et volumiques du chapitre précédent, on a en fait égalité des entropies volumiques.

Par ailleurs, P.Foulon dans sa thèse démontrait que la  $\mathcal{C}^1$ -conjugaison des flots implique que les variétés aient mêmes volumes.

La preuve est donc faite dans le cas où  $Y = M$ . Sinon, il manque un argument qui explique que  $Y$  et  $M$  sont reliées par une application de degré 1. En fait  $Y$  et  $M$  sont des  $K(\pi, 1)$ . C'est évident pour  $M$  mais en l'absence d'hypothèse sur la courbure, c'est plus difficile pour  $Y$ . Le résultat est démontré à l'appendice D de [BCG95]. Les groupes fondamentaux des fibrés unitaires tangents sont isomorphes aux groupes fondamentaux des variétés elles-mêmes en dimension plus grande que 3 (théorème de Thom, voir [BT82]). Ainsi

$$\pi_1(Y) = \pi_1(UY) = \pi_1(UM) = \pi_1(M),$$

ce qui suffit à assurer l'existence de l'équivalence d'homotopie cherchée.

### 3.2.3 Les produits d'espaces symétriques de rang 1

Le travail [BCG95] que nous venons d'exposer a connu l'intéressante suite [BCG96] qui a servi de passerelle pour les résultats futurs. Cet article de survol ne démontre pas de nouveaux résultats mais donne un point de vue essentiel sur la compréhension de la preuve de 3.0.8 dans le cas de courbure strictement négative.

La question du calcul de l'entropie minimale d'une structure différentiable et la caractérisation du cas d'égalité se posent aussi lorsque la métrique  $g$  vit sur une autre variété  $Y$  reliée à  $M$  par une application de degré non nul  $f$ . Dans ce contexte on cherche alors à montrer que

$$\text{ent}(g) \geq |\deg f| \text{ent}(g_0) \tag{3.2.1}$$

et à caractériser le cas d'égalité. Bien sûr cet énoncé implique 3.0.8 en prenant  $Y = M$  avec une métrique quelconque et  $f = \text{id}$ . Un résultat du type 3.2.1 pour les espaces symétriques de rang 1 est déjà présent dans [BCG95].

La méthode proposée par les trois auteurs dans [BCG96] consiste à relever  $f$  en une application  $\tilde{f}$  entre revêtements universels

$$\tilde{f} : \tilde{Y} \mapsto \tilde{M}.$$

On cherche ensuite à déformer  $\tilde{f}$  en une application suffisamment régulière  $F$  qui lui est homotope et qui diminue les volumes à un facteur  $\left(\frac{h(g)}{h(g_0)}\right)^2$  près :

$$|\text{Jac}(F)| \leq \left(\frac{h(g)}{h(g_0)}\right)^2.$$

Pour simplifier la construction de  $F$ , nous supposons que la courbure de  $(Y, g)$  est négative, le cas général est légèrement plus technique (voir remarque 3.2.3). On utilise

les mesures de Patterson-Sullivan sur  $(Y, g)$  pour plonger dans un premier temps  $Y$  dans l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\partial\tilde{Y}$  (notons cet ensemble  $\mathcal{A}(\partial\tilde{Y})$ ). Nous utilisons indifféremment les ensembles de mesures ou les sous-ensembles de  $L^2$ . Il ne serait pas approprié de donner un panorama complet sur les mesures de Patterson-Sullivan ; présentons simplement quelques idées heuristiques. Soit  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $\tilde{M}$ . Il n'est pas nécessaire d'imposer que  $\Gamma$  soit un réseau mais ce sera le cas dans notre situation. Les mesures de Patterson-Sullivan rendent compte de la manière dont l'orbite d'un point sous  $\Gamma$  de  $\tilde{M}$  se répartit au bord. La discussion est moins technique si on suppose  $\Gamma$  cocompact, hypothèse que l'on suppose vérifiée maintenant pour éviter des considérations qui nous entraîneraient trop loin. Pour un paramètre  $s > h(g)$  et un point  $y \in \tilde{Y}$ , on forme la mesure suivante supportée sur l'orbite de  $y$  sous  $\Gamma$  :

$$\nu_{s,y}(x) = \frac{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(y,\gamma(x))} \delta_{\gamma(x)}}{\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(y,\gamma(x))}}.$$

La série diverge pour  $s = h(g)$  de sorte que si  $s \rightarrow h(g)$  le support des mesures précédentes se concentre sur le bord (plus généralement sur l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite  $\Gamma \cdot y$ ). Comme  $\tilde{Y} \cup \partial\tilde{Y}$  est compact, on peut considérer une valeur d'adhérence faible de la famille  $(\nu_{y,s})$  lorsque  $s$  tend vers  $h(g)$ . Ces mesures (paramétrées par le point  $y \in \tilde{Y}$ ) sont les mesures de Patterson-Sullivan du groupe  $\Gamma$ . Des théorèmes d'unicité de ces mesures (i.e de convergence de la famille  $(\nu_{y,s})$ ) existent mais n'ont pas d'intérêt ici. Une version assez générale peut s'énoncer comme un corollaire du théorème de Roblin. Les mesures de Patterson-Sullivan  $(\nu_y)$  possèdent les propriétés suivantes :

- Propriétés 3.2.5.**     1. *La famille est  $\Gamma$ -équivariante au sens où  $\nu_{\gamma y} = \gamma_* \nu_y$ .*  
                           2. *Elles sont toutes dans la même classe de Radon-Nikodym avec*

$$\frac{d\nu_y}{d\nu_{y'}}(\theta) = e^{-B_{y'}(y,\theta)}.$$

Des familles de telles probabilités ont été construites pour tout groupe de Lie semi-simple à centre fini et tout groupe  $\Gamma$  Zariski-dense dans [Qui02]. C'est à ce jour le théorème le plus général pour les espaces symétriques. On peut même considérer des topologies plus exotiques (groupe défini sur un corps valué localement compact, par exemple des groupes  $p$ -adiques). Le support de ces probabilités est contenu dans une orbite du groupe d'isométrie, c'est-à-dire dans le bord de Furstenberg. Dans le cas des produits d'espaces de rang 1, il est montré dans [CF03b] que le support est constitué de tout le bord de Furstenberg (voir les relations avec la propriété 3.2.2) à l'aide d'une élégante propriété de convergence qui décrit le comportement des mesures de Patterson-Sullivan lorsque le paramètre approche le bord.

Si on suppose l'espace  $(\tilde{Y}, g)$  symétrique il existe une unique famille de probabilités avec les mêmes dérivées de Radon-Nikodym les unes par rapport aux autres (propriété 2) et équivariante sous l'effet de tout le groupe d'isométrie de  $\tilde{Y}$ . On reconnaît bien sûr le plongement par le noyau de Poisson. On appelle cette famille de mesures, les mesures

de Patterson-Sullivan de l'espace symétrique.

Revenons à notre situation. L'application  $f$  s'étend aux bords  $\partial\tilde{Y}$  de  $\tilde{Y}$  et  $\partial\tilde{M}$  de  $\tilde{M}$  et opère par image directe sur les mesures

$$\bar{f} : \mathcal{A}(\partial\tilde{Y}) \mapsto \mathcal{A}(\partial\tilde{M})$$

La composition du plongement de  $\tilde{Y}$  dans  $\mathcal{A}(\partial\tilde{Y})$ , de l'application  $\bar{f}$  puis de l'application barycentre est l'application  $F$  que nous recherchons :

$$F(y) = \pi(\bar{f}_*(\nu_y)).$$

Toutes les applications impliquées dans la définition de  $F$  sont équivariantes sous l'action de  $\pi_1(Y)$  et  $\pi_1(X)$  (la seule assertion non évidente est donnée par la propriété 1 des mesures de Patterson-Sullivan) de sorte que l'application  $F$  est en fait bien définie sur les quotients  $Y = \pi_1(Y)\backslash\tilde{Y}$  et  $M = \pi_1(M)\backslash\tilde{M}$ . L'inégalité annoncée sur le jacobien est alors obtenue de la même manière que l'inégalité de calibration. En effet comme dans la discussion du paragraphe précédent, la différentielle de  $F$  est assez explicite et on peut réutiliser la description de la différentielle de l'application barycentre donnée par la proposition 3.2.3. Il suffit ensuite d'intégrer "la déformation de l'élément de volume"  $\text{Jac}(F)$  pour obtenir une inégalité du type 3.2.1.

Le cas d'égalité  $h(g_0) = h(g)$  et  $\text{Vol}(g_0) = \text{Vol}(g)$  fait apparaître que dans ce cas  $F$  est une isométrie.

Un des avantages de cette modification dans la preuve de 3.2.1 est que l'isométrie dans le cas d'égalité est explicite. Un autre corollaire intéressant de 3.0.11 est une preuve directe du théorème de rigidité de Mostow :

**Théorème 3.2.6** (Mostow). *Soit  $(M, g_0)$  un espace symétrique de rang 1 et  $(Y, g)$  une variété riemannienne homotope à  $M$ . Alors l'application  $F$  est une isométrie*

Remarquons qu'ici l'isométrie est obtenue par un procédé explicite. Un des autres avantages de cette méthode est qu'aucun espace de dimension infinie n'apparaît. La complexité technique est donc largement diminuée.

A l'aide de l'application  $F$ , C. Connell et B. Farb parviennent à démontrer 3.2.1 dans le cas des produits d'espaces symétriques de rang 1.

**Théorème 3.2.7** ([CF03b] et [BCG07]). *Soit  $(M, g_0)$  une variété riemannienne de volume fini qui est localement produit d'espaces symétriques de rang 1 sans facteurs localement  $\mathbb{H}^2$  et où  $g_0$  est la métrique localement symétrique de plus petite entropie normalisée. Alors, pour toute autre métrique  $g$  sur  $M$ , on a*

$$\text{ent}(g) \geq \text{ent}(g_0).$$

Il existe en effet une unique métrique de plus petite entropie normalisée parmi les métriques localement symétriques. Elle est facile à calculer avec un argument standard d'extrema liés (voir le chapitre 2 de [CF03b]). La différentielle de l'application  $F$  est donnée (presque) immédiatement par le théorème des fonctions implicites et l'inégalité de Hölder par

$$|\text{Jac } F(y)| \leq \frac{\det \left( \int_{\partial_F \widetilde{M}} dB_{0_{(F(y), \theta)}}^2(\cdot, \cdot) d\nu_y(\theta) \right)^2}{\det \left( DdB_{0_{(F(y), \theta)}} \cdot (D_y F(\cdot), \cdot) d\nu_y(\theta) \right)}.$$

Les images par  $\tilde{f}$  des mesures de Patterson-Sullivan ont un support commun dans le bord de Furstenberg de  $\widetilde{M}$  qui dans le cas d'un produit d'espaces symétriques est lui-même un produit puisque c'est une orbite du groupe  $\text{Isom}(\widetilde{M})$ . Il suffit alors de faire un travail semblable à [BCG95] facteurs par facteurs. C'est l'intérêt essentiel du bord de Furstenberg.

**Remarque** Nous allons décrire les modifications qu'il faut apporter à la construction de  $F$  lorsque l'espace  $\widetilde{Y}$  n'est pas partout à courbure négative. La principale difficulté provient du fait que le bord de  $\widetilde{Y}$  n'est plus nécessairement identifiable à une sphère puisque la variété n'est plus une variété de Hadamard. On remplace alors dans ce cas la famille des mesures de Patterson-Sullivan par la famille de mesures (cette fois à support dans  $\widetilde{Y}$ )

$$\nu_{s,y}(z) = \int_{\widetilde{Y}} e^{-sd(y,z)} dv_g(z),$$

normalisées de manière à former des probabilités. Il faut comprendre ces mesures comme un analogue des séries de Poincaré, la mesure de Dirac étant remplacée par la mesure de volume donnée par la métrique  $g$ . Cette fois, on ne peut pas s'attendre à des phénomènes de convergence lorsque  $s$  tend vers l'entropie  $h(g)$ . Il faut donc garder ce paramètre  $s$ . On peut ensuite pousser ces mesures par l'application  $\tilde{f}$ , puis les convoler par les mesures de Patterson-Sullivan de l'espace symétrique  $\widetilde{M}$ . Ces mesures sont notées  $\sigma_{y,s}$  pour un point  $y \in \widetilde{Y}$  et le paramètre  $s > h(g)$ . On construit enfin les applications  $F_s$  par  $F_s(y) = \pi(\sigma_{y,s})$ . Modulo ces changements il est facile d'adapter la fin de la preuve. L'inégalité obtenue sur le jacobien s'écrit

$$|\text{Jac } F(y)| \leq \left( \frac{s}{h(g)} \right)^n,$$

ce qui suffit, puisque  $s$  est arbitrairement proche de  $h(g)$ .

Plus récemment des résultats partiels ont été obtenus. G.Knieper dans [Kni05] a montré un énoncé semblable à 3.0.8 pour une métrique  $g$  dans la classe conforme d'une métrique localement symétrique de courbure sectionnelle négative ou nulle (sans aucune hypothèse supplémentaire). Il semble que G.Robert avait obtenu un tel résultat dans sa thèse en démontrant une propriété de convexité de la fonctionnelle entropie volumique. Ce résultat qui n'a jamais été publié m'avait été expliqué partiellement par S.Gallot lors de nos discussions à Rome au printemps 2013.

**Remarque** On peut interpréter l'inégalité

$$h^n(g) \text{Vol}(g) \geq |\text{deg}(f)| h^n(g_0) \text{Vol}(g_0)$$

dans un contexte topologique. D'après un théorème de Lafont et Schmidt ([LS06]), le volume simplicial de  $M$  est non nul. Avec le théorème de proportionnalité de Gromov, on en déduit que le volume est un invariant topologique. On peut alors formuler le résultat précédent de la manière suivante : l'application qui fait perdre le moins de complexité topologique est un revêtement.

Mentionnons enfin, pour terminer cette exposé sur l'utilisation de l'application barycentre, le "degree theorem" obtenu par Connell et Farb. Il s'agit d'une version non optimale de 3.2.1, cette fois sans hypothèse sur la métrique à comparer  $g$ .

**Théorème 3.2.8.** *Soit  $M$  un espace localement symétrique de type noncompact et compact sans facteur localement isométrique à  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2$  ou  $\mathcal{P}_3 = SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$ . Alors pour toute application  $f$  d'un espace riemannien compact  $Y$  dans  $M$ , il existe une constante  $C$  ne dépendant que des revêtements universels vérifiant*

$$\text{deg}(f) \leq C \frac{\text{Vol } Y}{\text{Vol } M}.$$

Bien sûr une telle conclusion découle directement d'une majoration du jacobien de l'application  $F$  construite précédemment. Les hypothèses ne sont pas toutes aussi pertinentes : le fait que  $\widetilde{M}$  n'ait pas de facteur  $\mathbb{R}$  est crucial (le tore possède des applications de degré arbitrairement grand) tandis qu'il est probable que les autres restrictions soient superflues. Par exemple la section suivante contient une preuve de ce théorème (avec la constante  $C$  optimale) dans le cas  $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$ . Le cas des surfaces hyperboliques est d'ailleurs bien connu et provient du théorème de Gauss-Bonnet.

La preuve est conduite comme suit. On récupère tout d'abord la majoration du jacobien de l'application  $F$ . Cette expression fait intervenir un majorant qui a la forme du quotient de deux déterminants d'intégrales de matrices. La difficulté est alors de faire fonctionner la technique d' "eigenvalues matching" qui consiste à montrer que si le dénominateur a une petite valeur propre, on pourra trouver au numérateur des valeurs propres comparables. Les petites valeurs propres doivent être petites indépendamment de la mesure qu'on intègre  $\sigma_{s,y}$ .

**Remarque** Puisque cette technique d' "eigenvalues matching" doit être indépendante de la mesure de Patterson-Sullivan à intégrer, elle se ramène à un calcul sur les groupes de Lie (faisant agir transitivement le groupe compact maximal  $K$  sur le bord de Furstenberg). C'est en fait à cet endroit de la preuve que l'hypothèse localement symétrique faite sur la variété riemannienne  $(M, g_0)$  prend tout son sens. L'argument important ici est que le bord possède une description algébrique. C'est d'ailleurs un autre argument, plus conceptuel, en faveur de l'utilisation du bord de Furstenberg.

### 3.2.4 Les limites de l'application barycentre

Si l'application barycentre se révèle particulièrement efficace pour traiter les cas des espaces symétriques qui sont des produits d'espaces de rang 1, il est peu probable de pouvoir en tirer des résultats plus généraux. Sa relative faiblesse peut s'exprimer ainsi. Nous avons vu que le but de la méthode du barycentre consiste à majorer l'expression

$$|\text{Jac } F(y)| \leq \frac{\det \left( \int_{\partial_F \tilde{M}} dB_{0_{(F(y), \theta)}}^2(\cdot, \cdot) d\nu_y(\theta) \right)^2}{\det \left( DdB_{0_{(F(y), \theta)}} \cdot (D_y F(\cdot), \cdot) d\nu_y(\theta) \right)}$$

par une quantité *indépendante de la mesure*  $\nu_y$ . Ceci ne permet que l'utilisation de majorations grossières qui ne rendent pas compte de la possible diversité des mesures de Patterson-Sullivan.

Ceci étant, on peut faire apparaître les limites de l'application barycentre de façon plus précise. Les exemples suivants sont extraits de [CF03c]. Il est impossible d'espérer un théorème de rigidité (i.e traiter le cas d'égalité) dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  comme en témoigne la famille de mesures suivante

$$\mu_{a,b} = \frac{2 + b + 2a \cos\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 + b \cos \theta_2}{(8 + 3a + 4b)\pi^2} d\theta_1 d\theta_2$$

qui ont toutes la même valeur pour  $a = 0$  évaluée sur l'expression majorante du jacobien de l'application  $F$ . Je ne sais pas quelle intuition conduit à regarder cette famille de mesures. Le cas  $\mathbb{H}^2$  lui-même pose déjà problème puisque toutes les métriques hyperboliques minimisent l'entropie normalisée. Contrairement aux dimensions supérieures, où les métriques localement symétriques sont uniques par le théorème de Mostow, il existe en dimension 2 beaucoup de métriques hyperboliques (théorie de Teichmüller).

Plus grave encore, il existe des espaces symétriques (par exemple  $\mathcal{P}_3 = \text{SL}_3(\mathbb{R})/\text{SO}_3(\mathbb{R})$ , pour lequel le "degree theorem" ne s'applique pas) tel que le jacobien de  $F$  n'est pas borné. Pour s'en apercevoir, on peut considérer la situation où l'on fait tendre une suite de points  $y_i$  vers un point du bord tout en restant dans le même plat  $\mathcal{F}_x$ . Le théorème 3.3 à la page 8 de [CF03b] montre que les mesures de Patterson-Sullivan associées  $\nu_{y_i}$  convergent faiblement vers la mesure à 6 atomes de masses  $1/6$  en les chambres de Weyl en  $x$  du bord du plat  $\mathcal{F}_x$ . Puisque les atomes sont organisés de façon symétrique, le barycentre de la mesure limite est le point  $x$ . Il est alors facile de voir que  $F(y_i)$  tend vers l'infini. Bien sûr ce phénomène est spécifique à  $\mathcal{P}_3$  puisque le degree theorem est valable et est prouvé en majorant le jacobien de  $F$  dans  $\mathcal{P}_n$  pour  $n > 3$ .

Une véritable nouvelle idée est donc nécessaire pour poursuivre l'étude de la conjecture de Gromov.

### 3.3 Le cas des réseaux cocompacts de $PSL_2(\mathbb{R})^2$

Dans cette partie, nous faisons fonctionner la méthode de calibration dans le cas des quotients compacts de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . La métrique naturelle  $g_0$  est la métrique produit de la métrique hyperbolique standard (à courbure constante  $-1$ ) dans chaque facteur  $\mathbb{H}^2$ . C'est la métrique de plus petite entropie parmi les métriques symétrique. Nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème** (Théorème principal). *Soit  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $PSL_2(\mathbb{R})^2$  et soit  $g$  une métrique sur  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Alors*

$$h(g)^4 \text{Vol}(g) \geq h(g_0)^4 \text{Vol}(g_0).$$

Tout d'abord, rappelons que nous avons plongé  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  (respectivement  $\mathbb{H}^2$  dans la section suivante) dans  $\mathcal{S}^\infty$  par le produit de noyaux de Poisson  $\Phi_0$  (respectivement le noyau de Poisson) ou, d'une manière équivalente, par les mesures de Patterson-Sullivan, déjà définies.

Le tore  $\mathbb{T}^2 = \partial_F(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$  sera considéré comme muni de sa structure d'espace de probabilité que nous décrivons. Le cercle est, avec nos conventions de normalisation, l'espace  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Il est muni de la mesure de Lebesgue normalisée de sorte que  $dx = \frac{\text{Leb}}{2\pi\mathbb{Z}}$ . Le tore est le produit, au sens des espaces mesurés, de deux tels cercles.

Pour appliquer la méthode de calibration, nous devons trouver une 4-forme fermée et  $\Gamma$ -équivariante sur  $\mathcal{S}^\infty(L^2(\mathbb{T}^2))$ . Nous expliquons maintenant de quelle manière nous avons trouvé cette forme.

Nous décrivons plus bas la structure de l'espace affine  $\mathcal{M}_1$  des mesures de masse 1 sur  $\mathbb{T}^2$ . Le tangent à cet espace en une mesure  $\mu$  quelconque est l'espace vectoriel des mesures de masse nulle. La sphère  $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{T}^2)$  se plonge de façon lisse dans  $\mathcal{M}_1$ .

Un procédé général pour construire une  $k$ -forme sur l'espace des mesures consiste à choisir un  $k$ -cocycle combinatoire borné et  $\Gamma = \pi_1(M)$ -équivariant  $c$  sur  $\mathbb{T}^2 = \partial_F \widetilde{M}$  et à lui associer la forme

$$\Omega(c)_\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \int_{(\mathbb{T}^2)^k} c(\theta_0, \dots, \theta_k) d\mu(\theta_0) d\alpha_1(\theta_1) \cdots d\alpha_k(\theta_k).$$

**Remarque** L'application ainsi définie ne permet pas d'injecter la cohomologie bornée de  $M$  (c'est-à-dire celle de  $\Gamma$ ) dans la cohomologie du complexe des formes différentielles équivariantes sur  $\mathcal{M}_1$ . Rappelons que la cohomologie bornée de  $M$  peut-être calculée par des cocycles combinatoires de la forme précédente. Nous montrerons que si  $c$  est fermé, la forme est aussi fermée. De même l'équivariance de  $c$  implique celle de la forme différentielle. En revanche l'application  $c \mapsto \Omega(c)$  ne descend pas en cohomologie (l'image d'un cobord n'est pas nécessairement un cobord du complexe des formes).

Nous insistons donc sur le fait que les propriétés d'une forme différentielle construite à l'aide d'un cocycle (par exemple le fait d'être une forme calibrante) dépend du cocycle utilisé et n'est pas un invariant de la classe de cohomologie définie par ce cocycle.

La forme calibrante que nous recherchons doit être maximale sur le tangent ortho-normé au plongement par le noyau de Poisson. Le lemme suivant décrit cet espace tangent au point base.

**Lemme 3.3.1.** *On considère l'application produit des noyaux de Poisson*

$$\begin{aligned} \Phi_0 : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathcal{S}^\infty \\ (x, y) &\longmapsto \left( (\theta_1, \theta_2) \mapsto \frac{1-|x|^2}{|\theta_1-x|^2} \frac{1-|y|^2}{|\theta_2-y|^2} \right) \end{aligned}$$

Si  $\theta \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  est un point du bord de Furstenberg, on note  $\theta = (x, y)$  ses coordonnées. On considère les quatre fonctions suivantes

$$f(\theta)\sqrt{2}\cos(x), \quad g(\theta) = \sqrt{2}\sin(x), \quad h(\theta) = \sqrt{2}\cos(y) \quad \text{et} \quad k(\theta) = \sqrt{2}\sin(y).$$

Alors

$$T_{\Phi_0(o,o)}\mathcal{S}^\infty = \mathbb{R}f \oplus \mathbb{R}g \oplus \mathbb{R}h \oplus \mathbb{R}k$$

et cette base est  $L^2$ -orthonormée.

**Démonstration :** Il suffit de traiter le cas d'un seul facteur  $\mathbb{H}^2$ . Notons  $x = (x_1, x_2)$  un point de  $\mathbb{H}^2$  dans le modèle de la boule. La quantité  $\frac{1-|x|^2}{|\theta_1-x|^2}$  se dérive par rapport à  $x$  de la manière suivante.

$$\begin{aligned} d_{(x_1, x_2)}\Phi_0 \cdot (h, k)(\theta) &= \frac{-2x_1|\theta-x|^2 - (1-|x|^2)(2x_1 - 2\cos\theta)}{|\theta-x|^4} h \\ &+ \frac{-2x_2|\theta-x|^2 - (1-|x|^2)(2x_2 + 2\sin\theta)}{|\theta-x|^4} k \end{aligned}$$

On constate alors que  $d_{(o,o)}\Phi_0$  est engendré par les deux fonctions

$$\theta \mapsto \cos\theta \quad \text{et} \quad \theta \mapsto \sin\theta.$$

□

Dans la paragraphe suivant, nous donnons des exemples de variétés compactes qui sont des quotients de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Puis nous rappelons la preuve de l'inégalité de calibration dans le cas de la dimension 2. La forme calibrante est construite par le procédé décrit précédemment. Notre réflexion pour généraliser cette forme calibrante s'est donc concentrée sur la recherche d'un cocycle combinatoire que nous présentons au dernier paragraphe avant de faire la preuve de l'inégalité de calibration dans ce cas.

### 3.3.1 Exemples divers de variétés quotients de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$

Avant de détailler cet argument de calibration, il est utile de rappeler certaines constructions classiques de réseaux cocompacts de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Il existe des réseaux cocompacts de deux types et notre théorème s'appliquera pour ces deux familles de réseaux. Souvenons-nous en particulier qu'il existe des quotients de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  qui sont loin d'être des produits de surfaces.

**Théorème 3.3.2** ([Ebe96] p.260). Soit  $\widetilde{M}$  un espace symétrique de type noncompact qui est un produit non trivial d'espaces symétriques de type noncompact  $\widetilde{M} \cong \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ . On note  $G_1$  et  $G_2$  les groupes d'isométries correspondants :  $G_i = \text{Isom}_0(\widetilde{M}_i)$  et  $p_i$  les projections :  $p_i : G = \text{Isom}(\widetilde{M}) \rightarrow G_i$ . Soit  $\Gamma$  un réseau de  $G_1 \times G_2$ . Alors

1. Soit  $\Gamma' = \Gamma_1 \times \Gamma_2$  où  $\Gamma_i$  est un réseau de  $G_i$  et  $\Gamma'$  est un sous-groupe de  $\Gamma$  d'indice fini,
2. Soit chacune des projections de  $\Gamma$ ,  $p_i(\Gamma)$  est dense dans  $G_i$ .

Dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ , il existe des exemples des deux types qui sont cocompacts. Nous allons montrer une construction arithmétique de tels réseaux (les détails peuvent être consultés dans [Kat92] chapitre 5). Les constructions non-arithmétiques existent aussi mais les arguments sont plus délicats. Dans  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , la construction habituelle de réseau arithmétique est la suivante : on prend un corps de nombre  $F$  totalement réel, par exemple  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , puis son anneau d'entier  $E$  qui, dans ce cas, est  $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ . On forme ensuite  $\text{PSL}_2(E)$  qui est un réseau. Le problème de cette construction est que d'une part ces réseaux ne sont jamais cocompacts (il est d'ailleurs remarquable qu'on puisse compter les pointes uniquement à l'aide d'objets arithmétiques) et que, d'autre part, ces réseaux ont de la torsion. On peut éventuellement éliminer la torsion en prenant des sous-groupes de congruences mais il reste le problème de la compacité.

Un autre procédé consiste à utiliser des algèbres de quaternions. Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel de degré  $n$  sur  $\mathbb{Q}$ , que l'on peut supposer galoisien pour simplifier et soit  $(\rho_i)_{i=1, \dots, n}$  les morphismes de Galois de  $F$ , avec la convention  $\rho_1 = id$ . Avec des éléments  $a$  et  $b$  de  $F$ , on forme une algèbre de quaternions notée habituellement

$$A = \left( \frac{a, b}{F} \right).$$

On fait les hypothèses suivantes qui impliquent que  $A$  est un corps gauche (de manière équivalente la norme  $N_A(q) = q\bar{q}$  ne représente pas 0 sur  $F$ ).

1.  $A$  est non ramifiée en la place  $id$  :  $A \otimes \mathbb{R} = \left( \frac{a, b}{\mathbb{R}} \right)$  est isomorphe à l'algèbre de matrices  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  (de manière équivalente la norme de  $A$  représente 0 sur  $\mathbb{R}$ ).
2.  $A$  est ramifiée en les autres places  $\rho_i$  :  $A \otimes \mathbb{R} = \left( \frac{\rho_i(a), \rho_i(b)}{\mathbb{R}} \right)$  est isomorphe au corps gauche des quaternions de Hamilton (la norme de  $A \otimes \mathbb{R}$  ne représente pas 0 sur  $\mathbb{R}$ ).

On peut penser dans un premier temps à  $F = \mathbb{Q}$ . On construit alors une famille d'algèbres de quaternions convenables en prenant  $b$  un nombre premier et  $a$  un entier qui n'est pas un carré modulo  $b$ ,  $\left( \frac{a}{b} \right) = -1$ . Un petit exercice d'arithmétique montre alors que la norme  $N(q) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$  représente 0 sur  $\mathbb{R}$  mais pas sur  $\mathbb{Q}$ . Il nous faut maintenant trouver un analogue de l'anneau des entiers pour former un sous-groupe discret de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Un ordre maximal est un sous-anneau de  $A$  contenant 1 et qui est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang  $4n$  (c'est-à-dire que c'est un réseau de  $A$  comme  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel ; on rappelle que  $F$  est de dimension  $n$  sur  $\mathbb{Q}$ ). A ce stade, nous avons presque

terminé. Il reste à constater que la norme de  $A \otimes \mathbb{R}$  s'identifie au déterminant lors de l'isomorphisme entre  $A \otimes \mathbb{R}$  et  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On restreint alors un ordre maximal aux unités pour la norme. On note cet ensemble  $\mathcal{O}^1$ , qui donc se plonge naturellement dans  $SL_2(\mathbb{R})$ .

**Théorème 3.3.3** ([Kat92] p.129).  $\mathcal{O}^1 / \{\pm id\}$  est un réseau cocompact de  $PSL_2(\mathbb{R})$ .

On peut ensuite éliminer la torsion par un argument général dû à Selberg qui affirme que tout groupe de  $PSL_2(\mathbb{R})$  possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion.

Construisons maintenant des réseaux irréductibles dans le produit  $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$ . Comme précédemment, le cas non cocompact utilise un matériel arithmétique moins complexe. Dans ce cas, on prend  $F$  un corps de nombres totalement réel galoisien quadratique (ou de degré plus grand si le revêtement universel a plus de facteurs  $\mathbb{H}^2$ ). Soit  $E$  son anneau des entiers et soit  $\rho$  le morphisme de Galois non trivial. On rappelle que, si  $l$  est un entier sans facteurs carrés

$$E(\mathbb{Q}(\sqrt{l})) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{a + b\sqrt{l}, a, b \in \mathbb{Z}\} \\ \{\frac{a+b\sqrt{l}}{2}, a, b \in \mathbb{Z}\} \end{array} \right\} & \text{si } l \equiv 2 \pmod{4} \text{ ou } l \equiv 3 \pmod{4} \\ & \text{si } l \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

On forme alors le sous-groupe

$$\{(g, g^\rho) \mid g \in PSL(E)\} \subset PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$$

et on obtient ainsi un réseau irréductible de  $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$ . Bien sûr, il n'est pas cocompact mais cela donne des idées pour construire un réseau cocompact en rassemblant ce procédé et l'utilisation des quaternions. H. Shimizu a détaillé cet argument dans le chapitre 6 de [Shi63]. On part encore d'un corps de nombres  $F$  totalement réel galoisien de degré  $m \geq 2$ . En notant  $\rho_i$  les plongements de Galois, on considère une algèbre de quaternions  $A = \left(\frac{a, b}{F}\right)$  sur  $F$  telle que

1.  $A$  est non ramifiée en  $id$  et  $\rho_2$ .
2.  $A$  est ramifiée aux places  $\rho_i$  pour  $i > 2$  (voir les définitions dans le cas d'un seul facteur).

Soit ensuite  $\mathcal{O}^1$  le groupe des unités d'un ordre maximal  $\mathcal{O}$ . Alors :

**Théorème 3.3.4.** *Le sous-groupe de  $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$  donné par*

$$\{(g, g^{\rho_2}) \mid g \in \mathcal{O}^1\}$$

*est un réseau cocompact.*

### 3.3.2 Retour à la dimension 2

Nous commençons par rappeler la preuve de l'inégalité entre entropies et volumes dans le cas des variétés hyperboliques de dimension 2 donnée dans [BCG95]. Cette section est l'occasion d'introduire divers outils nécessaires à la preuve générale.

Les auteurs donnent deux preuves différentes de cette inégalité de calibration. La première fait apparaître l'inégalité comme l'inégalité de Wirtinger pour la forme symplectique d'un espace hermitien. Cette preuve ne sera pas exposée puisque nous n'avons pas réussi à la généraliser à  $\mathcal{S}^\infty(L^2(\mathbb{T}^2))$ .

Une deuxième approche, plus directe, consiste à établir l'inégalité de calibration directement. La forme que nous considérons est exprimée sur  $\mathcal{S}^\infty(L^2(\mathbb{S}^1))$  de la manière suivante :

$$\omega_\varphi(f, g) = \int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_0, x_1, x_2) \varphi^2(x_0) \varphi f(x_1) \varphi g(x_2) dx_0 dx_1 dx_2$$

où  $c$  est le cocycle d'Euler du cercle, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} c(x_0, x_1, x_2) = 1 & \text{si les points sont dans le bon ordre cyclique} \\ c(x_0, x_1, x_2) = -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le cocycle  $c$  représente de manière combinatoire le volume des triangles idéaux orientés dans  $\mathbb{H}^2$ . En effet,

$$c(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\pi} \text{Vol}(\mathcal{T}(x_1, x_2, x_3)),$$

où  $\mathcal{T}(x_1, x_2, x_3)$  est le triangle de sommets  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

Il est montré au chapitre 6 de [BCG95] que la fermeture de  $c$  comme cocycle combinatoire implique la fermeture de la forme  $\omega$ . Cet argument sera repris dans le cas général (voir 61). Par ailleurs, l'invariance de  $c$  sous l'action des difféomorphismes directs du cercle permet de montrer que la forme elle-même est  $\text{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ -invariante. Afin de souligner les différences de normalisation sur les mesures avec [BCG95], nous redémontrons brièvement la proposition suivante :

**Proposition 3.3.5** ([BCG95] chapitre 6). *La comasse de  $\omega$  vaut  $\frac{1}{\pi}$ . Elle est atteinte sur les repères orthonormés tangents au plongement par le noyau de Poisson.*

**Démonstration :** Nous justifierons plus loin que si  $f, g$  et  $h$  sont trois fonctions d'intégrales nulles, l'expression

$$\int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_0, x_1, x_2) f(x_0) g(x_1) h(x_2) dx_0 dx_1 dx_2$$

est nulle (voir aussi [BCG95] p.756). Ainsi par exemple, si  $\varphi$  est de norme 1 dans  $L^2$ , et si  $f$  et  $g$  sont tangentes à  $\mathcal{S}^\infty$  en  $\varphi$ , on a

$$\int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_0, x_1, x_2) (\varphi^2(x_0) - 1) \varphi f(x_1) \varphi g(x_2) dx_0 dx_1 dx_2 = 0,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(f, g) &= \int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_0, x_1, x_2) \varphi f(x_1) \varphi g(x_2) dx_0 dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \left( \int_{(\mathbb{S}^1)^2} c(x_0, x_1, x_2) \varphi f(x_1) \varphi g(x_2) dx_1 dx_2 \right) dx_0. \end{aligned}$$

$$\omega_\varphi(f, g) = \int_{(\mathbb{S}^1)^2} \text{signe}(x_2 - x_1) \varphi f(x_1) \varphi g(x_2) dx_1 dx_2$$

puisque  $c(0, x_1, x_2) = \text{signe}(x_1 - x_2)$  (on identifie angles et mesures des angles, la détermination de la mesure ne donne pas d'ambiguïté à la quantité  $x_1 - x_2$ ). En intégrant séparément sur  $x_2 > x_1$  et sur  $x_1 > x_2$ , on obtient

$$\begin{aligned} \omega_\varphi(f, g) &= 2 \int_{x_2 > x_1} \varphi f(x_1) \varphi g(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \varphi g(x_2) \left( \int_0^{x_2} \varphi f(x_1) dx_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

Notons  $F$  et  $G$  les primitive d'intégrales nulles de  $\varphi f$  et  $\varphi g$  respectivement. Ainsi, on a

$$\omega_\varphi(f, g) = 2 \int_{\mathbb{S}^1} F(x) dG(x).$$

On conclut en utilisant l'inégalité isopérimétrique, la quantité  $2 \left| \int_{\mathbb{S}^1} F(x) dG(x) \right|$  s'interprétant comme l'air enclose par la courbe paramétrée  $x \mapsto (F(x), G(x))$ . L'inégalité donne finalement

$$\left| 4\pi \int_{\mathbb{S}^1} F(x) dG(x) \right| = |2\pi \omega_\varphi(f, g)| \leq 2$$

si  $f$  et  $g$  sont normées. Le cas d'égalité se déduit de celui de l'inégalité isopérimétrique. On a égalité, par exemple au point base  $\mathbb{1}$  pour les fonctions

$$f(x) = \sqrt{2} \cos(x) \text{ et } g(x) = \sqrt{2} \cos(x).$$

On rappelle que ces fonctions engendrent le tangent en  $\mathbb{1} = \Phi_0(o)$  du plongement par le noyau de Poisson.  $\square$

### 3.3.3 Le cas de deux facteurs $\mathbb{H}^2$

#### 3.3.3.1 Une expression combinatoire du volume dans $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la classe d'Euler du cercle joue un rôle fondamental. Notre méthode de généralisation s'appuie sur un analogue de cette classe de cohomologie dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Nous ne ferons pas de rappels complets sur la cohomologie bornée des groupes. Nous renvoyons plutôt à [Gui72] et [Mon01].

Une remarque importante concernant le cocycle  $c$  est qu'il représente la classe volume bornée de  $\mathbb{H}^2$ . La correspondance est donnée par l'isomorphisme de Van Est ([Gui72] chapitre III paragraphe 7). M.Bucher dans [BK08b] section 2 a décrit un cocycle analogue à la classe d'Euler dans le cas de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ , c'est-à-dire un 4-cocycle sur  $\mathbb{T}^2$  qui représente la classe volume de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Il s'exprime par

$$C = Atl(c \cup c).$$

Plus explicitement,

$$C(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{1}{120} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_5} \varepsilon(\sigma) c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)})$$

où  $\theta_i = (x_i, y_i)$  est un point du tore.

Le fait que  $C$  représente la classe volume montre que  $C$  est fermé.

Avec le procédé que nous décrivions dans l'introduction de cette section, nous construisons une 4-forme différentielle sur la sphère  $\mathcal{S}^\infty(L^2(\mathbb{T}^2))$  par

$$\begin{aligned} \Omega_\varphi(f, g, h, k) &= \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) \varphi^2(\theta_0) \varphi f(\theta_1) \varphi g(\theta_2) \varphi h(\theta_3) \varphi k(\theta_4) d\Theta \\ &= \frac{1}{120} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_5} \varepsilon(\sigma) \int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) \varphi^2(\theta_0) \varphi f(\theta_1) \varphi g(\theta_2) \varphi h(\theta_3) \varphi k(\theta_4) d\Theta. \end{aligned}$$

Nous avons noté  $\Theta$  la variable sur  $(\mathbb{T}^2)^5$  :  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ .

**Remarque** Il est montré dans [BK08b] que le cocycle  $C$  réalise la norme de Gromov de la classe volume. Cette norme est en fait égale à  $2/3$ . On sait par ailleurs (voir [BK08a]) que la norme de Gromov de la classe de  $C$  est la constante de proportionnalité entre volume et volume simplicial.

### 3.3.3.2 Une équation d'invariance

Nous montrons dans ce paragraphe que la forme  $\Omega$  est invariante sous l'action du groupe

$$G = \text{Diff}^+(\mathbb{S}^1) \times \text{Diff}^+(\mathbb{S}^1).$$

Ce groupe s'injecte dans  $\text{Diff}^+(\mathbb{T}^2)$  par l'application

$$\begin{aligned} f : \quad G &\longrightarrow \text{Diff}^+(\mathbb{T}^2) \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\longmapsto (x, y) \mapsto (\gamma_1(x), \gamma_2(y)) \end{aligned}$$

Par ailleurs l'action de  $G$  sur  $L^2(\mathbb{T}^2)$  prolonge l'action de  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \times \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ . On rappelle que l'action est l'action par changement de variables, adaptée au contexte de  $L^2$

$$\Gamma \cdot \varphi = \sqrt{\text{Jac}_{\Gamma^{-1}}(x, y)} \varphi \circ \Gamma^{-1}(x, y).$$

C'est l'inverse de  $\Gamma$  qui intervient pour former une action à gauche. Prenons alors un difféomorphisme du tore de la forme  $\Gamma : (x, y) \mapsto (\gamma_1(x), \gamma_2(y))$ . On a

$$\begin{aligned} \Gamma^* \Omega_\varphi(f, g, h, k) &= \Omega_{\Gamma \cdot \varphi}(\Gamma \cdot f, \Gamma \cdot g, \Gamma \cdot h, \Gamma \cdot k) \\ &= \Omega_\varphi(f, g, h, k) \\ &= \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) (\Gamma \varphi)^2(\theta_0) \Gamma \varphi \Gamma f(\theta_1) \Gamma \varphi \Gamma g(\theta_2) \Gamma \varphi \Gamma h(\theta_3) \Gamma \varphi \Gamma k(\theta_4) d\Theta \end{aligned}$$

On fait alors le changement de variables  $(\theta_i)_{i=0,\dots,4} = (\Gamma(\theta_i))_{i=0,\dots,4}$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \Gamma^* \Omega_\varphi(f, g, h, k) \\ &= \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Gamma(\theta_0), \Gamma(\theta_1), \Gamma(\theta_2), \Gamma(\theta_3), \Gamma(\theta_4)) \varphi^2(\theta_0) \varphi f(\theta_1) \varphi g(\theta_2) \varphi h(\theta_3) \varphi k(\theta_4) d\Theta \end{aligned}$$

On est alors ramené à justifier l'invariance de  $C$  sous l'action des éléments de  $G$ . On a en effet

$$\begin{aligned} C(\Gamma(\Theta)) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_5} \varepsilon(\sigma) c(\gamma_1(x_{\sigma(0)}), \gamma_1(x_{\sigma(1)}), \gamma_1(x_{\sigma(2)})) c(\gamma_2(y_{\sigma(2)}), \gamma_2(y_{\sigma(3)}), \gamma_2(y_{\sigma(4)})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_5} \varepsilon(\sigma) c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) \\ &= C(\Theta). \end{aligned}$$

La passage à l'avant-dernière ligne se justifie parce que le cocycle d'Euler est invariant par les difféomorphismes directs du cercle.

### 3.3.3.3 Fermeture de la forme

Pour pouvoir appliquer la méthode de calibration, il est nécessaire de disposer d'une forme fermée. Nous obtenons dans cette section le résultat adéquat.

**Proposition 3.3.6.** *La forme  $\Omega$  est fermée.*

Pour montrer cette proposition, il est plus commode d'exprimer la forme  $\Omega$  sur l'espace des mesures. Nous rappelons donc dans un premier temps la structure de cet espace

**3.3.3.3.1 Sur l'espace des mesures** Soit  $\mathcal{M}$  l'espace vectoriel des mesures de Radon sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , dont la masse de la variation totale est finie. En tant que dual de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$ , l'espace des fonctions continues sur le tore,  $\mathcal{M}$  est muni d'une structure d'espace vectoriel topologique. Cette norme en tant qu'espace dual coïncide avec la masse de la variation totale.

Nous allons considérer dans la suite, l'espace affine

$$\mathcal{M}_1 = \{ \mu \in \mathcal{M} \mid \mu(\mathbb{T}^2) = 1 \}.$$

On peut penser à  $\mathcal{M}_1$  comme à une variété différentielle modélée sur un espace vectoriel topologique. L'espace tangent en chaque point est l'espace des mesures de masse nulle.

La forme différentielle  $\Omega$  provient d'une forme sur  $\mathcal{M}_1$  que nous tirerons en arrière via l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{S}^\infty &\longrightarrow \mathcal{M}_1 \\ \varphi &\longmapsto B \mapsto \int_B \varphi^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'image de la fonction  $\varphi$  est la mesure à densité  $\varphi^2$  contre la mesure de Lebesgue.

**Lemme 3.3.7.** *L'application  $\mathcal{A}$  est lisse.*

**Démonstration :** Nous montrons en fait que l'application définie par la même formule de  $L^2$  sur  $\mathcal{M}$  est lisse. Les variétés  $L^2$  et  $\mathcal{M}$  sont des variétés à une carte. Il suffit de montrer que la différentielle de  $\mathcal{A}$  est continue. On a alors

$$d_\varphi \mathcal{A} \cdot f = 2\varphi(\theta)f(\theta)d\theta.$$

En effet un développement limité à l'ordre 1 de  $\mathcal{A}$  montre que le reste de  $\mathcal{A}(\varphi + f)$  est la mesure à densité  $\theta \mapsto f^2(\theta)$ . L'inégalité de Cauchy-Schwartz montre alors que la norme de cette mesure-reste vérifie

$$\|f\|_{\mathcal{M}} \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

La densité de la variation totale de la mesure  $2\varphi(\theta)f(\theta)d\theta$  est  $|2\varphi(\theta)f(\theta)|$ . Ainsi

$$\|d_\varphi \mathcal{A} \cdot f\|_{\mathcal{M}} = \int_{\mathbb{S}^1} |2\varphi(\theta)f(\theta)| d\theta \leq 2 \|\varphi\|_{L^2} \|f\|_{L^2}.$$

Ainsi  $d_\varphi \mathcal{A}$  est continue, de norme inférieure (en fait égale) à  $2 \|\varphi\|_{L^2}$ .  $\square$

Pour montrer la fermeture de  $\Omega$ , nous allons procéder de la manière suivante. Nous exhibons une forme sur  $\mathcal{M}$  (notée  $\Omega'$ ) telle que, en restriction à  $\mathcal{M}_1$ , on ait

$$\Omega = \mathcal{A}^* \Omega'.$$

Il suffit de montrer ensuite que  $\Omega'$  est fermée puisqu'alors on obtient

$$d\Omega = \mathcal{A}^* d\Omega' = 0.$$

Nous prenons comme forme sur l'espace des mesures,

$$\Omega'_\mu(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) d\mu(\theta_0) d\alpha(\theta_1) d\beta(\theta_2) d\gamma(\theta_3) d\delta(\theta_4).$$

### 3.3.3.3.2 Preuve de la fermeture

La forme s'exprime donc sur l'espace des mesures

$$\Omega'_\mu(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) d\mu(\theta_0) d\alpha(\theta_1) d\beta(\theta_2) d\gamma(\theta_3) d\delta(\theta_4).$$

L'intérêt d'avoir transporté  $\Omega$  sur cet espace de mesures est que l'expression est linéaire par rapport à  $\mu$ . Nous utilisons la formule de dérivation de [Lan62] p.84 :

$$\begin{aligned} d\Omega'(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) &= \partial_\mu \Omega_\mu(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \cdot \alpha \\ &- \partial_\mu \Omega_\mu(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon) \cdot \beta \\ &+ \partial_\mu \Omega_\mu(\alpha, \beta, \delta, \varepsilon) \cdot \gamma \\ &- \partial_\mu \Omega_\mu(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) \cdot \delta \\ &+ \partial_\mu \Omega_\mu(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Avec les relations d'antisymétrie de la forme, on obtient finalement

$$d\Omega'(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 5 \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) d\varepsilon(\theta_0) d\alpha(\theta_1) d\beta(\theta_2) d\gamma(\theta_3) d\delta(\theta_4).$$

Nous nous restreignons maintenant à l'espace affine des mesures de masse 1. Le tangent en un point quelconque de cet espace est l'espace vectoriel des mesures de masses nulles. Nous montrons que la forme est fermée en restriction à cet espace. Analysons donc l'expression précédente où chaque mesure tangente est de masse nulle. Nous montrons que, sous cette hypothèse, on a en fait

$$d\Omega'_\mu(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = -5 \int_{(\mathbb{T}^2)^6} \partial C(\theta_0, \dots, \theta_4) d\varepsilon(\theta_0) d\alpha(\theta_1) d\beta(\theta_2) d\gamma(\theta_3) d\delta(\theta_4) d\mu(\theta_5).$$

Rappelons la formule de différentiation combinatoire de  $C$ ,

$$\partial C(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = \sum_{i=0}^5 (-1)^i C(\theta_0, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_5).$$

En effet on a tout d'abord

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\theta_0, \dots, \theta_4) d\varepsilon(\theta_0) d\alpha(\theta_1) d\beta(\theta_2) d\gamma(\theta_3) d\delta(\theta_4) \\ &= \int_{(\mathbb{T}^2)^6} C(\theta_0, \dots, \theta_4) d\varepsilon(\theta_0) d\alpha(\theta_1) d\beta(\theta_2) d\gamma(\theta_3) d\delta(\theta_4) d\mu(\theta_5) \end{aligned}$$

puisque l'on a multiplié par la masse de  $\mu$  qui dorénavant est 1. On reconnaît l'opposé du dernier terme de l'expression de  $\partial C$  (une fois intégré), le terme correspondant à l'indice  $i = 5$ . Le signe provient de la formule de bord de  $C$ . Montrons que chacun des autres termes qui apparaît dans le bord de  $C$  est nul. Ces termes sont, au signe près, de la forme

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^6} C(\theta_0, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_5) d\varepsilon(\theta_0) d\alpha(\theta_1) d\beta(\theta_2) d\gamma(\theta_3) d\delta(\theta_4) d\mu(\theta_5)$$

avec  $i \neq 5$ . En intégrant par rapport à la variable  $\theta_i$  qui n'apparaît pas dans le cocycle dans l'intégrale précédente, on fait apparaître un facteur multiplicatif qui est la masse de l'une des mesures tangentes, supposée être 0.

C'est donc finalement la fermeture de  $C$  comme cocycle combinatoire (voir page 58) qui prouve la proposition.

### 3.3.3.4 Inégalité de calibration

M.Bucher démontre que la norme de Gromov du cocycle  $C$  est égale à  $2/3$  ([BK08b]). On en déduit une majoration grossière de la comasse. En effet,

$$\begin{aligned}
|\Omega_\mu(\alpha, \beta, \gamma, \delta)| &\leq \int_{(\mathbb{T}^2)^5} |C(\Theta)\varphi^2(\theta_0)\varphi f(\theta_1)\varphi g(\theta_2)\varphi h(\theta_3)\varphi k(\theta_4)| d\Theta \\
&\leq \frac{2}{3} \int_{(\mathbb{T}^2)^5} \varphi^2(\theta_0) |\varphi f(\theta_1)\varphi g(\theta_2)\varphi h(\theta_3)\varphi k(\theta_4)| d\Theta \\
&\leq \frac{2}{3} \sqrt{\int f^2(\theta_1)d\theta_1} \sqrt{\int g^2(\theta_2)d\theta_2} \sqrt{\int h^2(\theta_3)d\theta_3} \sqrt{\int k^2(\theta_4)d\theta_4} \\
&= \frac{2}{3} \|f\| \|g\| \|h\| \|k\|.
\end{aligned}$$

En fait, le cocycle  $C$  prend des valeurs maximales sur un sous-ensemble de mesure nulle (les premières coordonnées  $x_i$  doivent être cycliquement ordonnées). Ceci laisse penser que la comasse doit en fait être inférieure strictement à  $2/3$ . Plus précisément, on montre le résultat suivant :

**Proposition 3.3.8.** *La comasse de  $\Omega$  vaut  $\frac{1}{6\pi^2}$  et est atteinte sur les repères orthonormés tangents au plongement par le noyau de Poisson.*

**Démonstration :** On considère les 4 fonctions sur le tore

$$f(\theta) = \sqrt{2} \cos(x),$$

$$g(\theta) = \sqrt{2} \sin(x),$$

$$h(\theta) = \sqrt{2} \cos(y),$$

et

$$k(\theta) = \sqrt{2} \sin(y)$$

où  $\theta = (x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . C'est une famille de fonctions orthonormée. Elles sont toutes tangentes au point  $\varphi = \mathbb{1}$ . Nous allons calculer la valeur de la forme sur ces fonctions. Puis nous montrerons que les valeurs de la forme sont inférieures sur d'autres repères orthonormés. Nous utilisons l'expression explicite du cocycle

$$C(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_5} \varepsilon(\sigma) c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)})$$

Nous cherchons les permutations  $\sigma$  telles que les intégrales

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) f(\theta_1) g(\theta_2) h(\theta_3) k(\theta_4) d\Theta$$

soient non nulles. Nous montrerons ensuite que leurs valeurs sont toutes  $\varepsilon(\sigma) \frac{1}{\pi^2}$ . Pour qu'une telle intégrale soit non nulle, il faut que l'ensemble  $\{\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2)\}$  contienne

l'ensemble  $\{1, 2\}$  et que l'ensemble  $\{\sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)\}$  contienne  $\{3, 4\}$ . En effet, sinon, supposons par exemple que  $\sigma$  soit une permutation avec  $\sigma(i) \neq 1$  pour  $i = 1, 2, 3$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) f(x_1) g(x_2) h(y_3) k(y_4) d\Theta \\ &= \int_{(\mathbb{S}^1)^9} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) \left( \int_{\mathbb{S}^1} f(x_1) dx_1 \right) g(x_2) h(y_3) k(y_4) \frac{d\Theta}{dx_1}. \end{aligned}$$

Pour simplifier, on note abusivement  $\frac{d\Theta}{dx_1}$  la mesure  $dy_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$ . Un terme de la forme précédente est nul puisque

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(x_1) dx_1 = 0.$$

Il y a alors 20 permutations qui vérifient la contrainte précédente qui sont listées (avec leurs signatures) dans le tableau suivant.

Résultats de la permutation	Signature de la permutation
0 1 2 3 4	1
0 1 2 4 3	-1
0 2 1 3 4	-1
0 2 1 4 3	1
1 0 2 3 4	-1
1 0 2 4 3	1
1 2 0 3 4	1
1 2 0 4 3	-1
1 2 3 0 4	-1
1 2 3 4 0	1
1 2 4 0 3	1
1 2 4 3 0	-1
2 0 1 3 4	1
2 0 1 4 3	-1
2 1 0 3 4	-1
2 1 0 4 3	1
2 1 3 0 4	1
2 1 3 4 0	-1
2 1 4 0 3	-1
2 1 4 3 0	1

On vérifie ensuite en utilisant la propriété d'antisymétrie du cocycle  $c$  que chacun des termes

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)})f(x_1)g(x_2)h(y_3)k(y_4)d\Theta$$

correspondant aux permutations ci-dessus est égal à

$$\frac{\varepsilon(\sigma)}{\pi^2}.$$

Prenons par exemple la permutation identité. On a alors

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_0, x_1, x_2)c(y_2, y_3, y_4) \cos(x_1) \sin(x_2) \cos(y_3) \sin(y_4)d\Theta \\ &= \int_{(\mathbb{S}^1)^6} c(x_0, x_1, x_2)c(y_2, y_3, y_4) \cos(x_1) \sin(x_2) \cos(y_3) \sin(y_4)dx_0dx_1dx_2dy_2dy_3dy_4 \\ &= \left( \int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_0, x_1, x_2) \cos(x_1) \sin(x_2)dx_0dx_1dx_2 \right) \\ & \quad \times \left( \int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(y_2, y_3, y_4) \cos(y_3) \sin(y_4)dy_2dy_3dy_4 \right) \end{aligned}$$

Chacun des deux facteurs est égal à la valeur extrême de la forme  $\omega$  qui calibre le plongement  $\Phi_0$  de  $\mathbb{H}^2$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{\pi}$ .

Prenons encore la transposition  $(0, 1, 2, 4, 3)$ , de signature  $-1$ . On a cette fois-ci

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_0, x_1, x_2)c(y_2, y_4, y_3) \cos(x_1) \sin(x_2) \cos(y_3) \sin(y_4) d\Theta \\ &= - \int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_0, x_1, x_2)c(y_2, y_3, y_4) \cos(x_1) \sin(x_2) \cos(y_3) \sin(y_4) d\Theta. \end{aligned}$$

en utilisant l'antisymétrie de  $c$ . Comme précédemment, on obtient

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_0, x_1, x_2)c(y_2, y_4, y_3) \cos(x_1) \sin(x_2) \cos(y_3) \sin(y_4) d\Theta = \frac{-1}{\pi^2}.$$

Prenons un dernier exemple d'une permutation à support plus grand,

$$\sigma = (1, 2, 3, 0, 4)$$

de signature  $-1$ . Le cocycle est transformé de la manière suivante :

$$c(x_1, x_2, x_3)c(y_3, y_0, y_4) = -c(x_3, x_1, x_2)c(y_0, y_3, y_4)$$

La transformation sur les  $x_i$  laisse le signe inchangé tandis que la transformation des  $y_i$  change le signe. On obtient encore

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_1, x_2, x_3)c(y_3, y_0, y_4) \cos(x_1) \sin(x_2) \cos(y_3) \sin(y_4) d\Theta = \varepsilon(\sigma) \frac{1}{\pi^2}.$$

On vérifie ainsi que l'on a bien

$$\Omega_{\mathbb{1}}(f, g, h, k) = \frac{1}{120} \frac{20}{\pi^2} = \frac{1}{6\pi^2}.$$

Notons que, par invariance de  $\Omega$  sous l'effet de  $\text{Diff}^+(\mathbb{S}^1) \times \text{Diff}^+(\mathbb{S}^1)$ , la forme est constante le long du plongement.

Nous allons montrer maintenant que les valeurs de la forme sont inférieures sur les repères orthonormés non tangents au plongement. Nous allons raisonner en termes de coefficients de Fourier dans les développements en série de Fourier des fonctions tangentes. Tout d'abord, nous avons déjà remarqué à la page 61 que l'expression

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) f(\theta_0) g(\theta_1) h(\theta_2) k(\theta_3) t(\theta_4) d\Theta$$

s'annule si les toutes les fonctions  $f, g, h, k$  et  $t$  sont d'intégrales nulles. D'où

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) (\varphi^2(\theta_0) - 1) \varphi f(\theta_1) \varphi g(\theta_2) \varphi h(\theta_3) \varphi k(\theta_4) d\Theta = 0.$$

Puis

$$\begin{aligned}
\Omega_\varphi(f, g, h, k) &= \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) \varphi^2(\theta_0) \varphi f(\theta_1) \varphi g(\theta_2) \varphi h(\theta_3) \varphi k(\theta_4) d\Theta \\
&= \int_{(\mathbb{T}^2)^5} C(\Theta) \varphi f(\theta_1) \varphi g(\theta_2) \varphi h(\theta_3) \varphi k(\theta_4) d\Theta \\
&= \Omega_{\mathbb{1}}(\varphi f, \varphi g, \varphi h, \varphi k)
\end{aligned}$$

Ainsi, quitte à multiplier les fonctions tangentes par  $\varphi$ , il suffit de raisonner sur le tangent en  $\mathbb{1}$ . On rappelle que si  $f$  est une fonction tangente à  $\mathcal{S}^\infty$  en  $\mathbb{1}$ , c'est-à-dire d'intégrale nulle, elle possède un développement en série de Fourier de la forme

$$f(\theta) = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}} \sqrt{2} a_{n_1, n_2} \cos(n_1 x + n_2 y) + b_{n_1, n_2} \sqrt{2} \sin(n_1 x + n_2 y).$$

La convergence de la série est entendue au sens  $L^2$ . Les fonctions

$$\alpha_{n_1, n_2}(x, y) = \sqrt{2} \cos(n_1 x + n_2 y) \text{ et } \beta_{n_1, n_2}(x, y) = \sqrt{2} \sin(n_1 x + n_2 y)$$

constituent une base hilbertienne de  $T_{\mathbb{1}} \mathcal{S}^\infty$ . Les indices doivent être pris dans l'ensemble

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

On construit, de la manière habituelle, une base de  $(T_{\mathbb{1}} \mathcal{S}^\infty)^4$ . Nous adopterons les conventions suivantes. Les éléments de cette base seront notés

$$(\gamma_{n_1, n_2}, \gamma_{m_1, m_2}, \gamma_{p_1, p_2}, \gamma_{q_1, q_2})$$

où  $\gamma_{n_1, n_2}$  est soit la fonction  $\alpha_{n_1, n_2}$ , soit la fonction  $\beta_{n_1, n_2}$ . On note aussi  $\gamma$  une fonction qui est soit la fonction cos, soit la fonction sin. La première étape de notre étude des valeurs de  $\Omega$  sur cette base est donnée par l'observation suivante.

**Observation 3.3.9.** *Avec les notations précédentes, la forme est nulle sur tous les éléments  $(\gamma_{n_1, n_2}, \gamma_{m_1, m_2}, \gamma_{p_1, p_2}, \gamma_{q_1, q_2})$  dès que l'un des couples d'entiers, par exemple  $(n_1, n_2)$ , vérifie  $n_1 n_2 \neq 0$ .*

**Démonstration :** Nous montrons en fait que, dans ce cas, chacun des termes de  $\Omega$  est nul. Un premier cas de l'énoncé précédent se traite rapidement. Supposons en effet dans un premier temps qu'au moins 3 des 4 couples d'entiers aient deux composantes non nulles. On utilise alors les formules de trigonométrie classiques

$$\alpha_{n_1, n_2}(x, y) = \cos(n_1 x) \cos(n_2 y) - \sin(n_1 x) \sin(n_2 y)$$

et

$$\beta_{n_1, n_2}(x, y) = \sin(n_1 x) \cos(n_2 y) + \cos(n_1 x) \sin(n_2 y).$$

Une fonction

$$(x, y) \mapsto \gamma_{n_1, n_2}(x, y)$$

de la base de  $T_1\mathcal{S}^\infty$  qui vérifie  $n_1n_2 \neq 0$  est une fonction qui dépend effectivement de deux variables (elle n'est constante ni en  $x$ , ni en  $y$ ). Autrement dit, on a

$$\int_{\mathbb{S}^1} \gamma_{n_1, n_2}(x, y) dx = \int_{\mathbb{S}^1} \gamma_{n_1, n_2}(x, y) dy = 0.$$

Considérons un des termes de  $\Omega$ ,

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) \gamma_{n_1, n_2}(x_1, y_1) \gamma_{m_1, m_2}(x_2, y_2) \gamma_{p_1, p_2}(x_3, y_3) \gamma_{q_1, q_2}(x_4, y_4) d\Theta$$

Dans le cas que nous considérons, il y a au moins 8 des variables qui apparaissent dans l'expression

$$\gamma_{n_1, n_2}(x_1, y_1) \gamma_{m_1, m_2}(x_2, y_2) \gamma_{p_1, p_2}(x_3, y_3) \gamma_{q_1, q_2}(x_4, y_4).$$

Parmi ces 8 variables, au moins deux donc ne sont pas dans l'ensemble

$$\{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}\}.$$

On peut supposer par exemple que  $\gamma_{n_1, n_2}$  n'est pas constante en  $x_1$  et que

$$x_1 \notin \{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}\}$$

(les autres cas se traitent symétriquement). On intègre alors par rapport à  $x_1$  et on utilise que

$$\int_{\mathbb{S}^1} \gamma_{n_1, n_2}(x_1, y_1) dx_1 = 0.$$

Supposons maintenant que deux des fonctions parmi les fonctions  $\gamma_{n_1, n_2}$ ,  $\gamma_{m_1, m_2}$ ,  $\gamma_{p_1, p_2}$  et  $\gamma_{q_1, q_2}$  sont constantes en l'une de leurs variables. Sans perte de généralité, on peut supposer que ce sont les fonctions  $\gamma_{p_1, p_2}$  et  $\gamma_{q_1, q_2}$ . Si c'est la même variable qui apparaît dans ces deux fonctions, c'est-à-dire, si

$$\gamma_{p_1, p_2}(x, y) = \gamma(p_1x) \quad \text{et} \quad \gamma_{q_1, q_2}(x, y) = \gamma(q_1x)$$

par exemple (on rappelle que  $\gamma$  est soit la fonction cos soit la fonction sin); alors après avoir utilisé les formules d'addition pour  $\gamma_{n_1, n_2}$  et  $\gamma_{m_1, m_2}$ , on constate que les variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$  apparaissent toutes dans l'expression

$$\gamma_{n_1, n_2}(x_1, y_1) \gamma_{m_1, m_2}(x_2, y_2) \gamma_{p_1, p_2}(x_3, y_3) \gamma_{q_1, q_2}(x_4, y_4).$$

Ainsi chacun des termes de  $\Omega$  est nul comme on le constate en intégrant par rapport à une variable  $x_i$  qui ne figure pas dans  $c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})$ .

On peut donc supposer que

$$\gamma_{p_1, p_2}(x, y) = \gamma(p_1x) \quad \text{et} \quad \gamma_{q_1, q_2}(x, y) = \gamma(q_2y).$$

Après avoir encore utilisé les formules d'addition pour les deux premières fonctions  $\gamma_{n_1, n_2}$  et  $\gamma_{m_1, m_2}$ , on parvient à écrire chaque terme de  $\Omega$  comme somme de 4 termes de la forme suivante :

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) \gamma(n_1x_1) \gamma(n_2y_1) \gamma(m_1x_2) \gamma(m_2y_2) \gamma(p_1x_3) \gamma(q_2y_4) d\Theta.$$

On remarque alors que les variables  $x_1$  et  $y_1$  ainsi que les variables  $x_2$  et  $y_2$  apparaissent. Ceci n'est pas possible dans le cocycle : il y a une et une seule redondance entre les indices correspondants aux variables  $x_i$  et  $y_i$ . Ainsi une des 4 variables  $x_1, x_2, y_1$  ou  $y_2$  ne figure pas dans le cocycle. En intégrant par rapport à cette variable, on montre bien que l'expression

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)})\gamma(n_1x_1)\gamma(n_2y_1)\gamma(m_1x_2)\gamma(m_2y_2)\gamma(p_1x_3)\gamma(q_2y_4)d\Theta$$

est nulle.

Il reste à traiter le cas où seule une des 4 fonctions  $\gamma_{n_1, n_2}, \gamma_{m_1, m_2}, \gamma_{p_1, p_2}$  et  $\gamma_{q_1, q_2}$  n'est pas constante en l'une de ses deux variables. Sans perte de généralité, nous supposons que les trois fonctions  $\gamma_{m_1, m_2}, \gamma_{p_1, p_2}$  et  $\gamma_{q_1, q_2}$  sont constantes en l'une de leurs variables. Comme dans la discussion précédente, un premier cas se traite séparément lorsque ce sont les mêmes variables qui sont utilisées, c'est-à-dire, si

$$\gamma_{m_1, m_2}(x, y) = \gamma(m_1x) \quad , \quad \gamma_{p_1, p_2}(x, y) = \gamma(p_1x) \quad \text{et} \quad \gamma_{q_1, q_2}(x, y) = \gamma(q_1x)$$

par exemple (un autre cas symétrique est celui où ce sont les variables  $y$  qui sont utilisées). Après avoir appliqué la formule d'addition à la première fonction  $\gamma_{n_1, n_2}$ , nous avons à étudier des termes de la forme

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)})\gamma(n_1x_1)\gamma(n_2y_1)\gamma(m_1x_2)\gamma(p_1x_3)\gamma(q_1x_4)d\Theta.$$

Les variables  $x_i$  apparaissent toutes les 4 tandis que trois seulement sont utilisées par le premier facteur du cocycle. En intégrant par rapport à une variable  $x_i$  qui n'est pas dans le cocycle, on montre que ces termes sont nuls. Ainsi donc, on peut supposer par exemple que

$$\gamma_{m_1, m_2}(x, y) = \gamma(m_1x) \quad , \quad \gamma_{p_1, p_2}(x, y) = \gamma(p_1x) \quad \text{et} \quad \gamma_{q_1, q_2}(x, y) = \gamma(q_2y).$$

On est ramené à s'intéresser à des termes de la forme

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)})\gamma(n_1x_1)\gamma(n_2y_1)\gamma(m_1x_2)\gamma(p_1x_3)\gamma(q_2y_4)d\Theta.$$

Pour qu'une expression comme la précédente ne soit pas trivialement nulle, il faut nécessairement que l'ensemble  $\{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\}$  soit l'ensemble  $\{x_1, x_2, x_3\}$  (on intégrerait sinon par rapport à une variable qui n'est pas dans le cocycle). On intègre alors par rapport à  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . Cette intégrale est alors, au signe près,

$$\int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_1, x_2, x_3)\gamma(n_1x_1)\gamma(m_1x_2)\gamma(p_1x_3)dx_1dx_2dx_3.$$

Or, nous avons déjà constaté que, puisque les trois fonctions

$$x \mapsto \gamma(n_1x) \quad , \quad x \mapsto \gamma(m_1x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \gamma(p_1x)$$

sont d'intégrales nulles, on a bien

$$\int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_1, x_2, x_3) \gamma(n_1 x_1) \gamma(m_1 x_2) \gamma(p_1 x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Ceci termine notre discussion et la preuve de l'observation.  $\square$

Ainsi, pour que  $\Omega$  soit non nul sur l'élément

$$(\gamma_{n_1, n_2}, \gamma_{m_1, m_2}, \gamma_{p_1, p_2}, \gamma_{q_1, q_2}),$$

il est nécessaire que les 4 fonctions soient constantes en l'une de leurs variables. En fait, on peut aller encore un peu plus loin

**Observation 3.3.10.** *Soit un 4-uplet de fonction noté comme précédemment*

$$A = (\gamma_{n_1, n_2}, \gamma_{m_1, m_2}, \gamma_{p_1, p_2}, \gamma_{q_1, q_2}).$$

On suppose

$$n_1 n_2 = m_1 m_2 = p_1 p_2 = q_1 q_2 = 0.$$

Pour que  $\Omega$  soit non nulle sur  $A$ , il faut en plus que, parmi les 4 couples d'entiers  $(n_1, n_2)$ ,  $(m_1, m_2)$ ,  $(p_1, p_2)$  et  $(q_1, q_2)$ , 2 des premières coordonnées soient nulles et deux des secondes coordonnées soient nulles.

**Démonstration :** Nous montrons encore que, dans le cas contraire, tous les termes de  $\Omega$  sont nuls. Raisonnons par l'absurde. Quitte à changer l'ordre des fonctions ou le rôle des variables, nous n'avons que deux cas à traiter.

Supposons dans un premier temps que

$$\gamma_{n_1, n_2}(x, y) = \gamma(n_1 x), \gamma_{m_1, m_2}(x, y) = \gamma(m_1 x), \gamma_{p_1, p_2}(x, y) = \gamma(p_1 x) \text{ et } \gamma_{q_1, q_2}(x, y) = \gamma(q_1 x).$$

Comme précédemment, on conclut à la nullité de

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)}) \gamma(n_1 x_1) \gamma(m_1 x_2) \gamma(p_1 x_3) \gamma(q_1 x_4) d\Theta$$

en intégrant par rapport à l'une des variables  $x_i$  qui n'apparaît pas dans le cocycle (il y en a au moins une).

Supposons enfin que

$$\gamma_{n_1, n_2}(x, y) = \gamma(n_1 x), \gamma_{m_1, m_2}(x, y) = \gamma(m_1 x), \gamma_{p_1, p_2}(x, y) = \gamma(p_1 x) \text{ et } \gamma_{q_1, q_2}(x, y) = \gamma(q_2 y).$$

Cette fois-ci il faut distinguer les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_5$  de deux types

1. Celles avec  $\{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\} \neq \{x_1, x_2, x_3\}$ . Dans ce cas on conclut comme d'habitude en intégrant par rapport à une des variables  $x_1, x_2$  ou  $x_3$  qui n'est pas dans  $\{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\}$ .

2. Celles avec  $\{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ . En intégrant par rapport à  $x_1, x_2$  et  $x_3$  dans

$$\int_{(\mathbb{T}^2)^5} c(x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})c(y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}, y_{\sigma(4)})\gamma(n_1x_1)\gamma(m_1x_2)\gamma(p_1x_3)\gamma(q_2y_4)d\Theta,$$

on met en facteur l'expression

$$\int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_1, x_2, x_3)\gamma(n_1x_1)\gamma(m_1x_2)\gamma(p_1x_3)dx_1dx_2dx_3$$

qui est nulle (3 fonctions d'intégrales nulles). □

A ce stade, nous avons montré que, pour que la forme  $\Omega$  soit non nulle sur un 4-uplet,

$$(\gamma_{n_1, n_2}, \gamma_{m_1, m_2}, \gamma_{p_1, p_2}, \gamma_{q_1, q_2})$$

il faut nécessairement que, après permutation des fonctions,

$$\gamma_{n_1, n_2}(x, y) = \gamma(n_1x), \gamma_{m_1, m_2}(x, y) = \gamma(m_1x), \gamma_{p_1, p_2}(x, y) = \gamma(p_2y) \text{ et } \gamma_{q_1, q_2}(x, y) = \gamma(q_2y).$$

Nous ferons dorénavant cette hypothèse sur les 4-uplets considérés. Remarquons que ce sont exactement les mêmes permutations qui contribuent en des termes non nuls dans la somme qui définit  $\Omega$ . Ces permutations sont celles qui sont listées à la page 64. Chacune des termes de cette somme, pour les 20 permutations considérées, sont identiques, tous égaux par exemple à

$$\left( \int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_0, x_1, x_2)\gamma(n_1x_1)\gamma(m_1x_2)dx_0dx_1dx_2 \right) \left( \int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(y_2, y_3, y_4)\gamma(p_2y_3)\gamma(q_2y_4)dy_2dy_3dy_4 \right).$$

La conclusion provient maintenant de l'étude de la forme calibrante en dimension 2. Rappelons que, pour des fonctions  $f$  et  $g$  d'intégrales nulles sur le cercle, nous avons expliqué à la page 56 que

$$\int_{(\mathbb{S}^1)^3} c(x_0, x_1, x_2)f(x_1)g(x_2)dx_0dx_1dx_2 = 2 \int_{\mathbb{S}^1} F(x)g(x)dx$$

où  $F$  est la primitive de  $f$  d'intégrale nulle. Ceci justifie l'observation suivante

**Observation 3.3.11.** *Parmi les 4-uplets considérés,*

$$(\gamma_{n_1, 0}, \gamma_{m_1, 0}, \gamma_{0, p_2}, \gamma_{0, q_2})$$

*pour que  $\Omega$  soit non nulle, il faut encore que, après éventuelle permutation des fonctions, on ait,*

$$n_1 = m_1 \text{ et } p_2 = q_2$$

*et aussi*

$$\gamma_{n_1, 0} = \alpha_{n_1, 0}, \gamma_{m_1, 0} = \beta_{m_1, 0}, \gamma_{0, p_2} = \alpha_{0, p_2} \text{ et } \gamma_{0, q_2} = \beta_{0, q_2}.$$

**Démonstration :** Ce sont en effet les seules possibilités pour que la primitive de  $\gamma_{m_1,0}$  et  $\gamma_{m_1,0}$  ainsi que la primitive de  $\gamma_{0,p_2}$  et  $\gamma_{0,q_2}$  ne soient pas  $L^2(\mathbb{S}^1)$ -orthogonales.  $\square$

Supposons donc que le 4-uplet satisfait les conditions de l'observation précédente et notons

$$n = n_1 = m_1 \quad \text{et} \quad p = p_2 = q_2.$$

Dans ce cas, la valeur de  $\Omega$  est non nulle et on a

$$\begin{aligned} |\Omega(\alpha_{n,0} \wedge \beta_{n,0} \wedge \alpha_{0,p} \wedge \beta_{0,p})| &= \frac{1}{6} \cdot 4 \left( \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\beta_{n,0}^2(x)}{n} dx \right) \left( \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\beta_{0,p}^2(y)}{p} dy \right) \\ &= \frac{1}{6np\pi^2}. \end{aligned}$$

Le coefficient  $\frac{1}{6}$  correspond à la proportion de termes non nuls dans la somme qui décrit  $\Omega$  (c'est-à-dire 20 permutations parmi 120). Le même argument que pour le cas du tangent au noyau de Poisson montre en effet que ces 20 termes ont la même valeur et que ce sont les seuls non nuls.

On constate finalement que les valeurs de la forme sont extrémales lorsque  $n = p = 1$ , c'est-à-dire lorsque le 4-vecteur est tangent au plongement par le noyau de Poisson.

Nous avons maintenant les ingrédients pour démontrer l'inégalité de calibration. Prenons 4 fonctions tangentes  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $k$  que l'on suppose orthonormées. Écrivons leurs décomposition en série de Fourier ;

$$f(\theta) = \sum_{n,p} a_{n,p} \cos(nx + py) + b_{n,p} \sin(nx + py),$$

$$g(\theta) = \sum_{n,p} c_{n,p} \cos(nx + py) + d_{n,p} \sin(nx + py),$$

$$h(\theta) = \sum_{n,p} u_{n,p} \cos(nx + py) + v_{n,p} \sin(nx + py)$$

et

$$k(\theta) = \sum_{n,p} r_{n,p} \cos(nx + py) + s_{n,p} \sin(nx + py).$$

L'ensemble dans lequel les indices  $n$  et  $p$  doivent être pris a été décrit à la page 66. Rappelons que l'on peut supposer les fonctions orthonormées puisque l'inégalité de calibration ne dépend que de l'espace engendré par les fonctions. Nous avons identifié les

termes non nuls de  $\Omega$  lorsque l'on fait jouer les relations de linéarité. Écrivons donc

$$\begin{aligned}
|\Omega(f, g, h, k)| &\leq \frac{1}{6\pi^2} \sum_{n>0, p>0} (|a_{n,0}d_{n,0}| |u_{0,p}s_{0,p}| + |b_{n,0}c_{n,0}| |u_{0,p}s_{0,p}|) \\
&+ \frac{1}{6\pi^2} \sum_{n>0, p>0} (|a_{n,0}d_{n,0}| |v_{0,p}r_{0,p}| + |b_{n,0}c_{n,0}| |v_{0,p}r_{0,p}|) \\
&+ \frac{1}{6\pi^2} \sum_{n>0, p>0} (|a_{0,p}d_{0,p}| |u_{n,0}s_{n,0}| + |b_{0,p}c_{0,p}| |u_{n,0}s_{n,0}|) \\
&+ \frac{1}{6\pi^2} \sum_{n>0, p>0} (|a_{0,p}d_{0,p}| |v_{n,0}r_{n,0}| + |b_{0,p}c_{0,p}| |v_{n,0}r_{n,0}|).
\end{aligned}$$

Les séries sont convergentes puisque les coefficients sont ceux d'une fonction  $L^2$ . Puis on factorise le majorant de  $\Omega$ .

$$\begin{aligned}
|\Omega(f, g, h, k)| &\leq \frac{1}{6\pi^2} \sum_{n>0, p>0} (|a_{n,0}d_{n,0}| + |b_{n,0}c_{n,0}|) (|u_{0,p}s_{0,p}| + |v_{0,p}r_{0,p}|) \\
&+ \frac{1}{6\pi^2} \sum_{n>0, p>0} (|a_{0,p}d_{0,p}| + |b_{0,p}c_{0,p}|) (|u_{n,0}s_{n,0}| + |v_{n,0}r_{n,0}|) \\
&= \frac{1}{6\pi^2} \left( \sum_{n>0} |a_{n,0}d_{n,0}| + |b_{n,0}c_{n,0}| \right) \left( \sum_{p>0} |u_{0,p}s_{0,p}| + |v_{0,p}r_{0,p}| \right) \\
&+ \frac{1}{6\pi^2} \left( \sum_{p>0} |a_{0,p}d_{0,p}| + |b_{0,p}c_{0,p}| \right) \left( \sum_{p>0} |u_{n,0}s_{n,0}| + |v_{n,0}r_{n,0}| \right)
\end{aligned}$$

On utilise ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Le premier facteur par exemple,

$$\sum_{n>0} |a_{n,0}d_{n,0}| + |b_{n,0}c_{n,0}|$$

est le produit scalaire du vecteur

$$(a_{n,0}, b_{n,0})_{n>0}$$

et du vecteur

$$(d_{n,0}, c_{n,0})_{n>0}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|\Omega(f, g, h, k)| &\leq \frac{1}{6\pi^2} \sqrt{\left( \sum_{n>0} a_{n,0}^2 + b_{n,0}^2 \right) \left( \sum_{n>0} d_{n,0}^2 + c_{n,0}^2 \right) \left( \sum_{p>0} u_{0,p}^2 + v_{0,p}^2 \right) \left( \sum_{p>0} s_{0,p}^2 + r_{0,p}^2 \right)} \\
&+ \frac{1}{6\pi^2} \sqrt{\left( \sum_{p>0} a_{0,p}^2 + b_{0,p}^2 \right) \left( \sum_{p>0} d_{0,p}^2 + c_{0,p}^2 \right) \left( \sum_{n>0} u_{n,0}^2 + v_{n,0}^2 \right) \left( \sum_{n>0} s_{n,0}^2 + r_{n,0}^2 \right)}.
\end{aligned}$$

Pour conclure, nous simplifions légèrement les notations. Nous notons  $\varphi$  la fonction de 8 variables donnée par

$$\varphi(x, y, z, t, x', y', z', t') = xyz't' + x'y'zt.$$

Il s'agit de montrer que  $\varphi$  est majorée par 1 lorsque

$$x^2 + x'^2 \leq 1, \quad y^2 + y'^2 \leq 1, \quad z^2 + z'^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad t^2 + t'^2 \leq 1.$$

On majore  $\varphi$  avec des inégalités de Cauchy-Schwartz successives.

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y, z, t, x', y', z', t')| &\leq \sqrt{(xy)^2 + (x'y')^2} \sqrt{(zt)^2 + (z't')^2} \\ &\leq \sqrt[4]{x^4 + x'^4} \sqrt[4]{y^4 + y'^4} \sqrt[4]{z^4 + z'^4} \sqrt[4]{t^4 + t'^4}. \end{aligned}$$

On conclut enfin avec l'inégalité de la moyenne arithmético-géométrique :

$$\sqrt{x^2 + x'^2} \leq x + x'.$$

On obtient

$$|\varphi(x, y, z, t, x', y', z', t')| \leq \sqrt{x^2 + x'^2} \sqrt{y^2 + y'^2} \sqrt{z^2 + z'^2} \sqrt{t^2 + t'^2} \leq 1,$$

ce qui termine la preuve de l'inégalité de calibration. On déduit alors comme prévu par le paragraphe 3.1.2 que l'on a

$$\text{SphereVol}(M) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \text{Vol}(g_0).$$

Compte-tenu de l'inégalité 3.1.2, nous obtenons le théorème principal de cette thèse.  $\square$

**Remarque** On peut montrer, en exprimant les termes non nuls de  $\Omega$

$$|\Omega(\alpha_{n,0} \wedge \beta_{n,0} \wedge \alpha_{0,p} \wedge \beta_{0,p})| = \frac{1}{6np\pi^2}$$

que la forme prend des valeurs maximales uniquement dans l'espace tangent au plongement par le noyau de Poisson. Cette remarque, bien qu'encourageante, ne permet pas d'étudier le cas d'égalité dans l'inégalité sur les entropies.

### 3.4 Deux applications

Nous donnons ici quelques idées d'applications des théorèmes qui démontrent la conjecture 3.0.8. Le chapitre 9 de [BCG95] est plus complet ; seules figurent ici les conséquences les plus spectaculaires.

### 3.4.1 Une estimation du volume minimal

Un corollaire direct que nous évoquions dans l'introduction est la résolution du problème du volume minimal dans le cas hyperbolique réel :

**Corollaire 3.4.1** ([BCG95]). *Supposons que  $M$  supporte une métrique hyperbolique réelle  $g_0$ . Alors*

$$\text{MinVol}(M) = \text{Vol}(M, g_0)$$

L'hypothèse sur la courbure de  $g$  implique que la courbure de Ricci  $\text{Ric}(g)$  est supérieure à  $-(n-1)g$ . On applique alors l'inégalité de Bishop ([GHL04] p.144) qui, à la limite, donne une inégalité entre entropies qui est optimale dans le cas hyperbolique réel (et malheureusement dans ce cas seulement).

Cependant, même si le cas hyperbolique réel est le plus percutant, on peut quand même appliquer le théorème de comparaison de Bishop dans les autres cas.

Écrivons le raisonnement dans le cas  $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

**Corollaire 3.4.2** (Merlin). *Nous avons*

$$\text{MinVol}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 / \Gamma) \geq \frac{4}{81} \text{Vol}(g_0)$$

où  $g_0$  est la métrique hyperbolique dans chaque facteur  $\mathbb{H}^2$  et  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$ .

Bien sûr cette inégalité n'est pas optimale, elle ne permet pas de donner une valeur explicite du volume minimal ; mais c'est probablement la meilleure estimée connue à ce jour (meilleure que [Gro82] p.12). En fait il n'est même pas sûr que le produit des métriques hyperboliques réalise le volume minimal. Une remarque de M.Bucher à la page 2 de [BK08b] montre qu'on s'attend à ce que le volume minimal ne soit pas atteint par une métrique produit. Notons que Gromov prouvait déjà dans [Gro82] que le volume minimal est non nul dans la même situation. La stricte positivité du volume minimal dans le cas des réseaux de volume fini est obtenue par la même discussion à la suite du "degree theorem" de Connell et Farb.

**Démonstration :** La preuve suit celle du chapitre 9 de [BCG95] et réutilise l'inégalité de Bishop. Prenons  $g$  une métrique sur le quotient de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  avec  $|K(g)| \leq 1$ . On en déduit une inégalité sur la courbure de Ricci,

$$\text{Ric}(g) \geq -3g$$

et on peut comparer le volume des boules construites avec  $g$  avec celles construites avec la métrique hyperbolique de dimension 4. Prenant le log et divisant par le rayon, on obtient à la limite,

$$h(g) \leq 3.$$

On réintroduit cette inégalité dans l'inégalité

$$\text{Vol}(g) \geq \left( \frac{\sqrt{2}}{h(g)} \right)^4 \text{Vol}(g_0)$$

□

### 3.4.2 Une borne sur le degré des applications vers $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$

On note encore  $M$  la variété quotient de  $(\mathbb{H}^2)^2$  munie de la métrique hyperbolique dans chaque facteur  $g_0$ . Le but de cette section est de donner une majoration du degré des applications  $f : Y \rightarrow M$  où  $(Y, g)$  est une variété riemannienne compacte de dimension 4. Nous obtenons

**Corollaire 3.4.3** (Merlin). *Le degré d'une telle application vérifie*

$$|\text{deg } f| \leq \frac{h(g)^4 \text{Vol}(g)}{h(g_0)^4 \text{Vol}(g_0)}$$

**Remarque** Il s'agit d'un des cas manquants dans le théorème principal de [CF03a]. Nous obtenons en plus une borne optimale (atteinte par exemple lorsque  $f$  est un revêtement).

**Démonstration :** La preuve de ce corollaire provient de la première partie du chapitre 8 de [BCG95] où sont traités les espaces symétriques de rang 1. Fixons donc une application continue  $f : Y \rightarrow M$ . Nous notons  $f_*$  l'application induite sur les groupes fondamentaux. Nous noterons encore  $f$  l'application induite sur les revêtements universels. Cette dernière application  $f$  vérifie

$$f(\gamma(y)) = f_*(\gamma)f(y)$$

pour  $\gamma \in \pi_1(Y)$ . On peut supposer  $f$  de degré non nul, l'inégalité étant triviale si le degré est nul.

L'idée est d'adapter la définition du volume sphérique dans ce contexte. Nous allons considérer des applications

$$\Phi : \tilde{Y} \rightarrow L^2(\mathbb{T}^2)$$

qui sont

1. des immersions
2. positives
3. à valeurs dans la sphère unité de  $L^2(\mathbb{T}^2)$
4. et équivariantes pour l'action de  $\pi_1(Y)$ , c'est-à-dire vérifiant l'équation

$$\Phi(\gamma(y), \cdot) = f_*(\gamma) \cdot \Phi(y, \cdot).$$

Le volume sphérique correspondant est alors

$$\text{SphereVol}'(f) = \inf\{\text{Vol}(U, \Phi^*(\text{can}))\}$$

où  $U$  est un domaine fondamental de  $\tilde{Y}$  pour l'action de  $\pi_1(Y)$  par isométries et où l'infimum est pris sur l'ensemble des applications  $\Phi$  qui satisfont aux conditions précédentes. Des exemples de telles applications sont bien sûr données par des analogues du cas classique. Rappelons que nous avons noté respectivement  $p_0$  et  $\Phi_0$  le produit des noyaux de Poisson de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  et la racine du produit des noyaux de Poisson. On considère ici

$$\Phi'_0(y, \theta) = \Phi_0(f(y), \theta).$$

Nous aurons besoin aussi des applications

$$\Psi'_c(y, \theta) = \left( \int_{\tilde{Y}} e^{-cd(y,z)} p_0(f(z), \theta) dv_g(z) \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \Phi'_c(y, \theta) = \frac{\Psi_c(y, \theta)}{\left( \int_{\mathbb{T}^2} \Psi_c^2(y, \theta) d\theta \right)^{1/2}}$$

Ces exemples jouent le même rôle que dans le cas classique. La proposition 3.1.2 se réécrit dans ce cas là et permet d'obtenir

$$\text{SphereVol}'(f) \leq \left( \frac{h(g)^2}{16} \right)^2 \text{Vol}(g).$$

Le noyau de Poisson est encore une homothétie ;

$$\text{Vol}(\Phi'_0) = \left( \frac{h(g_0)^2}{16} \right)^2 \text{Vol}(g_0).$$

La forme calibrante permet dans ce contexte de réaliser le nouveau volume sphérique comme le volume du noyau de Poisson.  $\square$

## Chapitre 4

# Conclusion et Perspectives

Le travail qui vient d'être exposé soulève plusieurs questions. Tout d'abord, une autre version de la preuve de l'inégalité de calibration dans le cas de  $\mathbb{H}^2$  fait apparaître l'inégalité comme conséquence de la présence d'une structure kählérienne sur la sphère  $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{L}^2(\mathbb{S}^1))$ . Cette structure avait été étudiée par Kirillov dans [KY87]. Nous n'avons pas réussi à généraliser la démarche de Kirillov et la question de l'existence d'une structure similaire sur  $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{L}^2(\mathbb{T}^2))$ . La réponse à cette question pourrait donner une porte d'entrée pour l'étude de l'entropie minimale des espaces symétriques hermitiens.

C.Connell et B.Farb ont adapté les preuves qui utilisent l'application barycentre à des quotients de volume finis. L'argument principal est de montrer que les applications  $\Phi_c$  sont propres. Il serait intéressant d'étendre notre théorème à des quotients de volume fini de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

La méthode que nous avons utilisée consiste à trouver une forme calibrante pour les quotients de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  en utilisant celle qui calibre les quotients de  $\mathbb{H}^2$ . Il est tentant de chercher à fabriquer une forme calibrante avec celle de  $\mathbb{H}^2$  et celle d'un espace symétrique de rang 1. Ces cas sont encore ouverts.

Un autre cas ouvert qui semble très abordable est celui de quotients d'un nombre quelconque de facteurs  $\mathbb{H}^2$ . Il est très probable que le cup produit de  $n$  cocycles d'Euler permettent de construire une forme calibrante. Malheureusement la lourdeur technique de la preuve dans le cas de deux facteurs  $\mathbb{H}^2$  seulement ne permet pas d'espérer écrire la même preuve. Cependant il est peut-être possible d'analyser plus finement l'application

$$C \mapsto \Omega(C)$$

entre cocycles bornés et formes différentielles sur l'espace  $L^2(\partial_F \widetilde{M})$ . Une description explicite des mesures de Furstenberg permettrait de trouver au moins une calibration non optimale et un théorème du degré. C'est pour l'instant ma priorité.

Dernièrement aussi, des méthodes nouvelles sont apparues pour accéder à la conjecture de Gromov. Manning dans [Man04] a imaginé la technique suivante. Soit  $\Phi$  un flot sur l'espace des métriques riemanniennes d'une variété donnée. On part d'une métrique quelconque  $g$  sur  $M$  (des contraintes techniques peuvent nécessiter quelques restrictions) et on lance le flot avec la condition initiale  $g$ . On espère :

1. Faire diminuer l'entropie le long du flot (éventuellement strictement pour  $t$  suffisamment grand si on veut un résultat de rigidité).
2. Que les métriques  $g_t$  convergent vers la métrique symétrique  $g_0$ , elle-même étant point fixe du flot.

Manning lui-même utilisait le flot de Ricci sur les surfaces :

**Théorème 4.0.4.** *Soit  $g_t$  le chemin de métriques obtenues en suivant le flot de Ricci de condition initiale donnée par une métrique quelconque. Alors l'entropie décroît strictement.*

C'est une conséquence quasi-directe des efforts de [KKPW89] pour dériver l'entropie. Des résultats plus impressionnants ont été obtenus ensuite par S.Tapie et P.Suarez-Serrato en suivant le flot de Yamabe.

**Théorème 4.0.5** ([SST12]). *La métrique d'entropie topologique minimale dans une classe conforme est la métrique de Yamabe (à courbure scalaire constante). En courbure sectionnelle négative, le minimum est unique.*

Mentionnons aussi la formule intégrale de l'entropie, utilisée dans [LW10] avec des techniques analytiques (les mesures de Patterson-Sullivan trouvent une généralisation en termes de courants géodésiques) pour démontrer le résultat suivant :

**Théorème 4.0.6.** *Dans l'espace hyperbolique  $(\mathbb{H}^n, g_0)$ , la métrique  $g_0$  est la métrique de plus petite entropie parmi les métriques sur les quotients compacts,  $M$ , de  $\mathbb{H}^n$  de courbures de Ricci vérifiant*

$$\text{Ric}(g) \geq -(n-1).$$

Ce résultat est plus faible que celui de [BCG95] (il fait une hypothèse de géométrie locale) mais il a l'avantage d'exploiter une méthode complètement différente liée à l'expression suivante de l'entropie

$$h = \frac{1}{C} \int_M \left( \int_{\mathbb{H}^n} \Delta B_\xi(x) d\nu_x(\xi) \right) dx$$

où les  $\nu_x$  sont les mesures de Patterson-Sullivan de la métrique  $g$  et  $C = \int_M \nu_x(\partial\mathbb{H}^n) dx$  (l'intégrale sur  $M$  signifie que l'on intègre sur une période du groupe).

Ces résultats récents ont considérablement redynamisé le champ de recherches autour des différentes notions d'entropies qui avait subi un coup d'arrêt assez brutal après avoir exploité l'application barycentre.

Une des idées principales de cette thèse consiste à faire jouer un rôle important à la classe volume en cohomologie bornée. Une théorie générale qui fait le lien entre les propriétés du cocycle utilisé et la possibilité de calibrer en construisant une forme à partir du cocycle reste à trouver. Avant cela, j'envisage de me concentrer sur des cas particuliers encore ouverts. La classe volume de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  a été bien étudiée. On peut

chercher à construire une forme calibrante pour les espaces  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^n$  en utilisant comme cocycle le cup produit des cocycles dans les facteurs (puis en alternant).

Dans le même ordre d'idée, on peut chercher à démontrer que le volume sphérique est proportionnel au volume de l'espace localement symétrique. Un tel résultat est la conséquence de l'inégalité de calibration mais il est tentant de l'obtenir directement. On montrerait ainsi que le volume sphérique est un invariant topologique comme dans [Bru08]. Il est équivalent de chercher à comparer volume sphérique et volume simplicial.

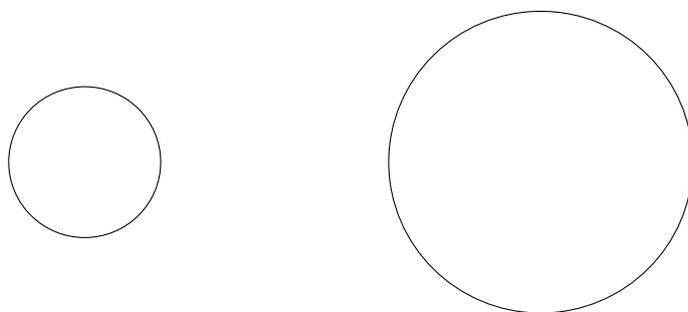
Enfin, on peut envisager d'utiliser d'autres invariants pour tenter de caractériser la géométrie symétrique : peut-on trouver des fonctions définies sur l'espace des métriques riemanniennes d'une structure différentielle donnée qui atteignent un (unique) extremum en la métrique symétrique ? La méthode qui consiste à plonger le revêtement universel dans un espace de Hilbert pourrait éventuellement être réutilisée.

## Annexe A

# Une reformulation heuristique du problème de l'entropie minimale

J'aimerais profiter de l'occasion qui m'est donnée pour conclure cette thèse par un chapitre un peu spécial. Tout au long de ces trois années, mes étudiants, ma famille ou mes amis non géomètres m'ont bien souvent demandé de leur expliquer ce que je faisais, à quoi ça servait, quelles étaient les applications (les plus concrètes possibles) des problèmes qui m'intéressaient. Je voudrais écrire quelques pages pour leur répondre ; pour les remercier de leur intérêt d'une part mais aussi parce que je crois qu'il faut s'efforcer de rendre les mathématiques attrayantes et accessibles. J'espère que les spécialistes me pardonneront de remplacer les formulations d'usage et la rigueur habituelle pour un registre plus heuristique, loin des détails techniques pourtant nécessaires à la production d'une science de qualité.

Mon activité de recherche a constitué en l'étude des espaces riemanniens symétriques. Bien qu'il ne soit pas approprié ici d'en donner une définition précise, je vais chercher à présenter l'intuition que j'en ai. Tout d'abord l'adjectif riemannien signifie qu'on attache une importance particulière à la notion de distance et que les formes géométriques ne peuvent être déformées qu'en préservant cette distance (on dit aussi métrique). Ainsi par exemple on distingue dans cette théorie deux cercles de rayons différents.



*Deux cercles de rayons différents ne sont pas isométriques*

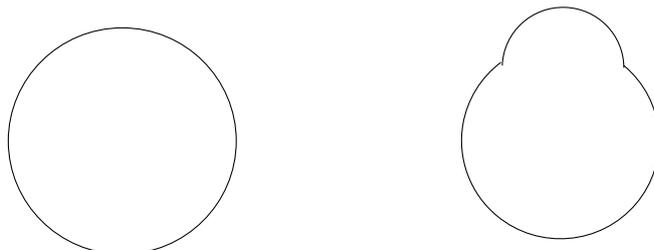
La terminologie renvoie au mathématicien allemand de la fin du  $XIX^{eme}$  Bernhard Riemann, l'inventeur de cette notion (probablement avec l'aide de son directeur de thèse, Carl Friedrich Gauss). Si j'ai évoqué la possibilité de déformer un espace, c'est pour rendre compte d'un point de vue moderne en géométrie et dans l'ensemble des mathématiques qui consiste à penser un concept au travers des transformations qui préservent "une certaine propriété caractéristique de ce concept". Cette idée a été systématisée par le groupe de mathématiciens -pour la plupart français- Bourbaki, dans les années 1930. Les transformations qui préservent la distance sur un cercle (on dit "isométries") sont des rotations : on identifiera donc le cercle à l'ensemble de ses rotations.

Avec cette notion fondamentale de distance vient celle de courbe de plus court chemin (appelée géodésique dans le jargon géométrique). Dans le plan ou dans l'espace (avec la distance habituelle) ce sont des lignes droites, ce qui n'est d'ailleurs pas si simple à démontrer. Les marins savent bien que sur la sphère ces courbes sont des grands cercles (qui passent par deux points diamétralement opposés). En mécanique classique Hadamard a démontré qu'une particule qui se déplace sur une surface dessine une géodésique si son mouvement n'est contraint que par la seule force de réaction du support, sans frottements. Ces géodésiques jouent le rôle de lignes droites, même si une modification de la distance leur donne parfois une allure imprévue.

La distance riemannienne induit aussi une notion de volume (après tout un volume n'est qu'un produit de longueurs), très importante pour mon problème. Le terme volume est ici un terme générique : pour une forme à une dimension (une courbe) il s'agit de sa longueur, pour un objet à deux dimensions, il s'agit de son aire, etc. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de se limiter à la dimension 2 ou 3 (celles du monde physique). La dimension possède une définition abstraite qui permet de l'étendre sans difficulté à des entiers plus grands.

Nous définirons plus loin une dernière notion attachée à celle de métrique riemannienne : la courbure, qui cherche à rendre compte de la façon dont l'espace se tord, mais qui est plus délicate à appréhender.

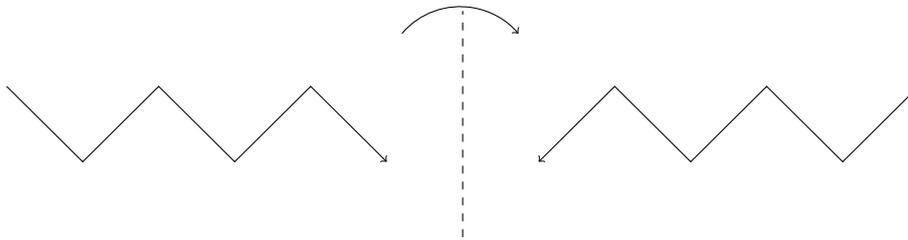
La particularité des espaces riemanniens que j'étudie est qu'ils sont symétriques, autrement dit qu'ils possèdent beaucoup de symétries. Par exemple, le disque dans le plan (avec une distance à définir) est une forme symétrique, tandis que si l'on tire sur le haut du disque, on perd son caractère symétrique.



### *Un disque symétrique et une déformation qui ne l'est plus*

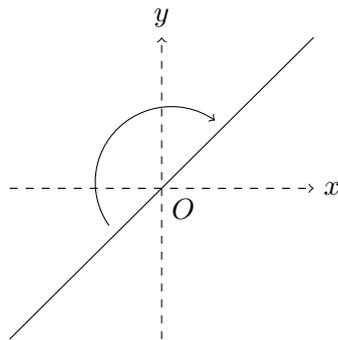
Techniquement, on pourra penser que ces deux géométries proviennent de la même forme mais que l'on a défini différemment la façon de calculer les distances. Ainsi la propriété d'être ou non symétrique est une propriété de la distance riemannienne. Ici je suis obligé de faire mes dessins dans le plan avec une distance (euclidienne) qui préexiste. C'est uniquement pour faciliter l'intuition que j'ai dessiné le second cercle de façon déformée. On peut considérer la situation de manière plus abstraite en pensant que les deux disques ont exactement la même forme mais que les points du second qui sont situés vers le haut sont arbitrairement définis comme étant plus éloignés.

Plus précisément un espace riemannien est symétrique si en chaque point les applications qui renversent les géodésiques partant de ce point sont des isométries. Renverser une géodésique est l'opération qu'il faut penser comme une symétrie.



*Retournement d'une géodésique*

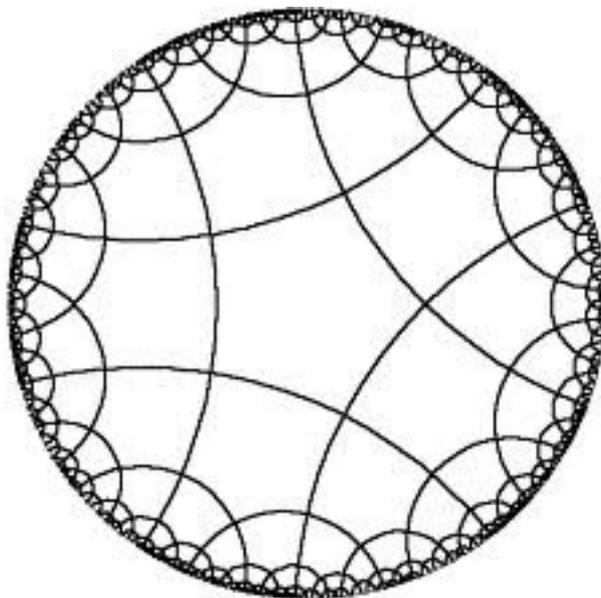
Reprenons l'exemple du plan avec sa distance habituelle et expliquons pourquoi il est un espace symétrique. Choisissons un point, par exemple l'origine et traçons une géodésique passant par ce point (nous avons déjà vu que dans ce cas, les géodésiques sont de vraies lignes droites). On peut retourner la géodésique en appliquant la symétrie centrale par rapport à l'origine et cette transformation conserve les distances.



*Le plan euclidien est symétrique*

Un autre exemple légèrement plus sophistiqué est celui de la géométrie hyperbolique. Cette fois-ci tout se passe à l'intérieur du disque unité mais la distance n'est pas la distance du plan euclidien. On appelle cette distance la distance de Poincaré en référence au

mathématicien Henri Poincaré qui l'a introduite à la toute fin du  $XIX^{eme}$ . Elle donne lieu à la configuration suivante des géodésiques :



*La géométrie hyperbolique : les géodésiques sont des diamètres ou des cercles orthogonaux au bord*

Les isométries sont particulièrement nombreuses (ce sont toutes les applications qui préservent les angles non orientés) et parmi elles, bien sûr, certaines peuvent servir à renverser les géodésiques.

La sphère (ronde) est encore un exemple d'espace symétrique, les isométries de l'espace euclidien de dimension 3 servant à retourner les grands cercles.

Les géométries symétriques sont à bien des égards les géométries les plus naturelles et les plus courantes. La sphère symétrique est celle sur laquelle nous vivons, le plan euclidien est une bonne approximation (locale) de la sphère. Une hypothèse de physique théorique prétend que l'univers est hyperbolique (au moins au voisinage des trous noirs, paraît-il). Les géométries symétriques constituent une classe d'exemples privilégiée sur lesquels chaque problème de géométrie riemannienne est testé en priorité. La présence d'une quantité importante d'isométries offre des passerelles avec d'autres branches des mathématiques.

Bien que la définition d'espace symétrique que j'en donne dans ce chapitre ne soit pas parfaitement rigoureuse, elle fait au moins sentir la formidable quantité de données qu'il faut manipuler pour vérifier qu'une distance est symétrique (en *chaque* point et pour *chaque* géodésique partant de ce point...). L'intérêt de ma thèse et l'essence du problème qui m'a occupé consiste à simplifier cette définition d'espace symétrique. La problématique pourrait s'exprimer ainsi : trouver des objets (en petit nombre et plutôt

faciles à calculer) qui permettent de reconnaître une métrique symétrique.

En 1982 dans un article majeur de la géométrie moderne, Mickaël Gromov pense à utiliser l'entropie volumique comme telle caractéristique de la géométrie symétrique. Il formule une conjecture dans ce sens (Anatole Katok avait eu la même intuition quelques années plus tôt avec une autre notion d'entropie qui s'est révélée être en fait exactement la même dans les cas les plus pertinents). C'est cette conjecture que j'ai cherché à prouver dans certains cas, à la suite d'un papier fondamental de trois chercheurs français, Gérard Besson, Gilles Courtois et Sylvain Gallot.

L'entropie volumique mesure la croissance du volume des boules. Partons d'un point quelconque  $x$  de l'espace riemannien et regardons la boule de centre  $x$  et de rayon  $R$ . Bien sûr cette boule dépend de la métrique riemannienne choisie (la boule est l'ensemble des points à *distance* au plus  $R$  de  $x$ ). On peut ensuite calculer le volume de cette boule qui dépend lui-aussi de la métrique. Dans les cas les plus familiers cette quantité (volume des boules) croît comme une puissance de  $R$  : dans l'espace euclidien à  $n$  dimension, le volume de la boule de rayon  $R$  est égal à

$$C \cdot R^n,$$

où  $C$  est une constante qu'il n'est pas utile de préciser.

Pourtant ce n'est pas la situation la plus courante. Il est en effet bien plus fréquent que ce volume des boules croisse beaucoup plus vite, plus vite que n'importe quelle puissance de  $R$ , à une vitesse exponentielle. Comment imaginer qu'un tel phénomène soit le comportement générique du volume des boules? C'est en fait quelque chose qu'on peut comprendre (ou au moins relier) avec la notion de courbure. La courbure mesure la façon dont un espace riemannien est tordu. Par exemple, la courbure du plan euclidien vaut 0 parce que l'espace est plat, sans courbure. La courbure de la sphère est positive parce qu'elle se replie sur elle-même. Il faut imaginer qu'il existe aussi des géométries à courbure négative, comme si l'espace se déplaçait en chaque point. Ces géométries sont difficiles à se représenter (il n'en existe d'ailleurs pas qui soit plongée dans un espace euclidien ; elles n'ont de sens qu'abstraitement). Néanmoins, les variétés riemanniennes de courbure négative sont les plus répandues. Prenons par exemple le cas des surfaces, les formes de dimension 2. Ces surfaces (fermées et en un seul morceau) ont été toutes répertoriées dans les années 1910. Il en existe trois grandes familles : la sphère, les tores (représentés plus bas avec une image que j'emprunte à "l'image des maths") et les espaces projectifs qui ne se voient pas dans  $\mathbb{R}^3$ .



Surface « de genre 2 »



Surface « de genre 3 »

*Les tores (ou fougasses)*

Si on se pose la question de savoir quelle métrique riemannienne on peut adjoindre à ces surfaces de manière à ce que la courbure soit constante (a priori elle diffère en chaque point), la réponse est la suivante :

1. On peut mettre une métrique de courbure 1 sur la sphère et sur le premier projectif,
2. On peut mettre une métrique de courbure 0 sur le premier tore et le 2<sup>ème</sup> projectif,
3. On peut mettre une métrique de courbure  $-1$  sur toutes les autres.

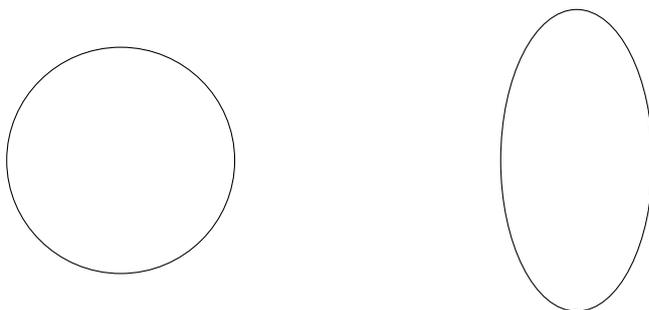
Voilà donc une des raisons pour lesquelles on considère que la géométrie à courbure négative est la plus fréquente -bien qu'elle soit la moins intuitive.

Il est assez délicat de trouver une relation entre la courbure et la croissance du volume des boules mais elle existe pourtant. Reprenons l'exemple de la sphère. On a vu que l'on pouvait décrire comme un phénomène de courbure le fait que la sphère "se referme sur elle-même". Par ailleurs, lorsque le rayon  $R$  augmente, la boule de rayon  $R$  finit par recouvrir intégralement la sphère. La croissance du volume des boules est, dans ce cas, bornée. En courbure nulle, on a déjà vu que le volume croît de façon polynômiale avec le rayon (comme une puissance du rayon). En revanche en courbure négative, on peut démontrer que le volume de la boule croît effectivement de façon exponentielle. C'est le taux de croissance exponentielle qu'on appelle l'entropie volumique de la distance riemannienne. Si la croissance n'est pas exponentielle, l'entropie est nulle.

La courbure est une notion complexe et c'est un premier objectif pour le jeune géomètre d'en acquérir une bonne compréhension. C'est pourquoi la discussion précédente

est assez sophistiquée. Ce qu'il faut retenir c'est, qu'en général, la croissance des boules est très rapide et qu'on mesure cette vitesse de croissance par l'entropie.

Comment peut on alors faire jouer à l'entropie ce rôle de fonction qui caractérise la géométrie symétrique? Je n'ai malheureusement jamais pu discuter avec l'un de ceux qui ont formulé la conjecture mais je m'en suis fait ma propre intuition. Regardons ce qui pourrait ressembler dans le plan à une boule qu'on aurait dessiné avec une métrique symétrique; pensons à un disque qui possède beaucoup de symétries. Regardons aussi une boule dissymétrique, par exemple une ellipse allongée



*Une boule symétrique et une boule dissymétrique*

Un célèbre théorème, très intuitif et probablement déjà connu dans l'antiquité mais dont la démonstration rigoureuse s'est fait attendre, affirme que la courbe fermée de périmètre fixé qui renferme le plus d'aire est le cercle, un peu comme le carré est le quadrilatère de plus grande aire parmi tous les quadrilatères de mêmes périmètres (il est plus symétrique!). Ainsi on peut faire correspondre la géométrie symétrique et l'entropie volumique au travers du problème isopérimétrique (maximiser l'aire avec un périmètre donné). Il est difficile de calculer le périmètre d'une ellipse (c'est le point de départ de la théorie des intégrales elliptiques) donc de compléter l'exemple précédent. En fait dans ce cas, bien que l'aire de la boule symétrique croisse plus vite avec le rayon que le volume de l'ellipse, le périmètre de l'ellipse croît, lui, beaucoup plus vite que le périmètre de la boule (ronde). Ainsi on constate le phénomène suivant : plus une distance possède de symétrie, plus l'entropie est petite. On s'attend donc à ce que la géométrie symétrique soit celle de plus petite entropie.

Ainsi donc l'entropie volumique serait capable de détecter la géométrie symétrique, et de la caractériser. En fait, ce n'est pas encore tout à fait exact. Imaginons que l'on zoome sur une géométrie symétrique (ou de façon plus abstraite que l'on dilate ou rétracte les distances, comme sous l'effet d'un changement d'unité de mesure); la géométrie obtenue ressemble beaucoup à la géométrie de départ. En particulier elle est encore symétrique. Pourtant l'entropie a changé (multiplier les distances par une constante donne une entropie divisée par la racine de la même constante). Pour déterminer précisément une géométrie symétrique il faut donc s'empêcher de zoomer, ou plutôt trouver une autre quantité dépendante de la métrique qui corrige le comportement de l'entropie vis-à-vis

du zoom.

Une des fonctions dont on peut se servir pour cette correction, la plus simple, est la fonction volume. Dans le théorème isopérimétrique, dont on a déjà expliqué les liens avec le problème, il faut fixer la longueur de la courbe et étudier les dispositions de la courbe parmi celles de longueur donnée. Ici une normalisation similaire est nécessaire. Il devient alors raisonnable d'espérer le résultat suivant :

**Conjecture A.0.7** (Gromov, 1982). *Sur une forme géométrique, parmi les distances de volume donné, il en existe une de plus petite entropie qui est symétrique.*

Cette conjecture a fait l'objet d'efforts constants depuis sa formulation mais n'a jamais été démontrée entièrement. Seuls des exemples d'espaces symétriques ont pu être étudiés complètement. Il semble qu'il manque encore une idée pour parvenir à un théorème général. Malheureusement les preuves (partielles) impliquent des outils sophistiqués et ne peuvent donc qu'être expliquées aux spécialistes.

J'ai donc contribué à l'étude de cette conjecture en m'intéressant à un type d'espaces symétriques (de dimension 4) et mon résultat pourrait s'énoncer comme suit :

**Théorème A.0.8** (Merlin, 2013). *Pour ce type d'espaces symétriques, parmi les métriques de volume donné, la métrique localement symétrique est d'entropie minimale (mais rien ne prouve encore que ce soit la seule).*

## Annexe B

# Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Christophe Bavard pour avoir accepté de me prendre en thèse dans des circonstances particulières tout d'abord, puis pour m'avoir constamment soutenu par la suite. Sa disponibilité et sa réactivité face à mes questions ont été des instruments précieux. J'espère avoir encore l'occasion d'être influencé par sa façon de comprendre la géométrie dans la suite de ma carrière.

Gérard Besson a eu le courage de se replonger dans un vieux problème pour m'aider et il ne s'est pas découragé après avoir lu plusieurs preuves fausses de mon résultat principal. Mes séjours à Grenoble ont été des moments importants dans la préparation de ma thèse et je lui suis très reconnaissant de m'avoir donné cette possibilité.

Marc Herzlich et Gérard Besson me font l'honneur d'être rapporteurs de mon travail et de se déplacer pour participer au jury de la soutenance. Qu'ils en soient vivement remerciés !

Frédéric Paulin a eu la gentillesse d'accepter de faire partie du jury. Par la même occasion, je remercie le GDR Platon pour l'organisation de conférences stimulantes. Jean-François Quint a toujours fait preuve de bienveillance à mon égard. Je suis heureux de le retrouver parmi les membres de mon jury. J'ai bénéficié d'une attention courtoise et constante de la part de Laurent Bessières et j'apprécie qu'il fasse partie du jury.

Je n'aurais jamais fait une thèse de géométrie si je n'avais suivi les enseignements passionnants de géométrie et topologie d'Alain Hénaut en Licence. J'ai une pensée particulière pour Pierre Mounoud qui fut mon chargé de TD avant de devenir mon collègue et ami. Je voudrais aussi exprimer ma sympathie à l'équipe de géométrie dont j'ai eu le privilège de faire partie ces dernières années.

Je remercie Arthur pour son attitude humble et servile lorsqu'il fut mon co-bureau et lorsqu'il m'a assisté dans ses fonctions de trésorier à Lambda. La succession au rôle de co-bureau a été assurée avec brio par Zoé qui partage heureusement mon goût pour la géométrie (et la bière).

Merci à Fred pour m'avoir accueilli et intégré dans l'équipe des doctorants. Merci à Pierre Chrétien pour sa gentillesse et ses bons conseils. Pierre Lezowski m'a amené à me questionner sur des œuvres cinématographiques au goût douteux mais cela n'a jamais nui à l'amitié que je lui porte. Nicolas m'a montré de belles applications des inégalités iso-systoliques pour la théorie des codes correcteurs. J'ai eu la chance d'appartenir à la joyeuse bande des doctorants avec Alan, Marie, Jean-Baptiste, Giovanni, Jocelyn, Romain, Camille, Marc, Bruno, Samuel, Marteen, Aurel, Nicolas et ceux que j'oublie.

J'ai été touché de voir l'intérêt qu'avait suscité mon activité auprès de ma famille. Je me souviens que je dois encore à Yannick et Martine une explication de géométrie appliquée. Mes parents et mon frère ont été très présents pendant toutes mes études. Leur soutien constant m'a toujours procuré beaucoup de joie.

Joanna a assisté à tous les moments de la préparation de cette thèse et les multiples rôles qu'elle a joué ont été exécutés à la perfection. Elle a su s'enthousiasmer quand mon humeur s'y prêtait et me redonner courage dans les moments de doute. Ce manuscrit lui doit beaucoup.

J'ai été très ému d'apprendre qu'elle poursuivra l'aventure en post-doc à mes côtés. Sa présence m'est indispensable.

# Bibliographie

- [BCG91] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Volume et entropie minimale des espaces localement symétriques. *Invent. Math.*, 103(2) :417–445, 1991.
- [BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5) :731–799, 1995.
- [BCG96] Gérard Besson, Gilles Courtois, and Sylvestre Gallot. Minimal entropy and Mostow’s rigidity theorems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(4) :623–649, 1996.
- [BCG07] Gérard Besson, Gilles Courtois, and Sylvestre Gallot. Inégalités de Milnor-Wood géométriques. *Comment. Math. Helv.*, 82(4) :753–803, 2007.
- [Ber72] Marcel Berger. Du côté de chez Pu. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5 :1–44, 1972.
- [BGM71] Marcel Berger, Paul Gauduchon, and Edmond Mazet. *Le spectre d’une variété riemannienne*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [BGS85] Werner Ballmann, Mikhael Gromov, and Viktor Schroeder. *Manifolds of nonpositive curvature*, volume 61 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.
- [BK08a] Michelle Bucher-Karlsson. The proportionality constant for the simplicial volume of locally symmetric spaces. *Colloq. Math.*, 111(2) :183–198, 2008.
- [BK08b] Michelle Bucher-Karlsson. The simplicial volume of closed manifolds covered by  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . *J. Topol.*, 1(3) :584–602, 2008.
- [Bow71] Rufus Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153 :401–414, 1971.
- [BP86] Christophe Bavard and Pierre Pansu. Sur le volume minimal de  $\mathbf{R}^2$ . *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(4) :479–490, 1986.
- [Bru08] Michael Brunnbauer. Homological invariance for asymptotic invariants and systolic inequalities. *Geom. Funct. Anal.*, 18(4) :1087–1117, 2008.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.

- [CF03a] Christopher Connell and Benson Farb. The degree theorem in higher rank. *J. Differential Geom.*, 65(1) :19–59, 2003.
- [CF03b] Christopher Connell and Benson Farb. Minimal entropy rigidity for lattices in products of rank one symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.*, 11(5) :1001–1026, 2003.
- [CF03c] Christopher Connell and Benson Farb. Some recent applications of the barycenter method in geometry. In *Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001)*, volume 71 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 19–50. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [DE86] Adrien Douady and Clifford J. Earle. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math.*, 157(1-2) :23–48, 1986.
- [Ebe96] Patrick B. Eberlein. *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.
- [Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [Fur63] Harry Furstenberg. A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 77 :335–386, 1963.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [GJT98] Yves Guivarc’h, Lizhen Ji, and J. C. Taylor. *Compactifications of symmetric spaces*, volume 156 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.
- [Gro82] Michael Gromov. Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (56) :5–99 (1983), 1982.
- [Gro83] Mikhael Gromov. Filling Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(1) :1–147, 1983.
- [Gro07] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, english edition, 2007. Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [Gui72] Alain Guichardet. *Symmetric Hilbert spaces and related topics*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 261. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Infinitely divisible positive definite functions. Continuous products and tensor products. Gaussian and Poissonian stochastic processes.
- [Ham89] Ursula Hamenstädt. A new description of the Bowen-Margulis measure. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(3) :455–464, 1989.
- [Hel62] Sigurdur Helgason. *Differential geometry and symmetric spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XII. Academic Press, New York, 1962.

- [Kat82] A. Katok. Entropy and closed geodesics. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2(3-4) :339–365 (1983), 1982.
- [Kat88] Anatole Katok. Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 8\*(Charles Conley Memorial Issue) :139–152, 1988.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [KKPW89] A. Katok, G. Knieper, M. Pollicott, and H. Weiss. Differentiability and analyticity of topological entropy for Anosov and geodesic flows. *Invent. Math.*, 98(3) :581–597, 1989.
- [Kni05] Gerhard Knieper. The uniqueness of the maximal measure for geodesic flows on symmetric spaces of higher rank. *Israel J. Math.*, 149 :171–183, 2005. Probability in mathematics.
- [KY87] A. A. Kirillov and D. V. Yur'ev. Kähler geometry of the infinite-dimensional homogeneous space  $M = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Rot}(S^1)$ . *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 21(4) :35–46, 96, 1987.
- [Lan62] Serge Lang. *Introduction to differentiable manifolds*. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons, Inc.), New York-London, 1962.
- [LHG90] Pierre de La Harpe and Etienne Ghys. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress Math. Birkhäuser, Boston, MA, 1990.
- [LS06] Jean-François Lafont and Benjamin Schmidt. Simplicial volume of closed locally symmetric spaces of non-compact type. *Acta Math.*, 197(1) :129–143, 2006.
- [LS09] Clara Löh and Roman Sauer. Degree theorems and Lipschitz simplicial volume for nonpositively curved manifolds of finite volume. *J. Topol.*, 2(1) :193–225, 2009.
- [LW10] François Ledrappier and Xiaodong Wang. An integral formula for the volume entropy with applications to rigidity. *J. Differential Geom.*, 85(3) :461–477, 2010.
- [Man79] Anthony Manning. Topological entropy for geodesic flows. *Ann. of Math. (2)*, 110(3) :567–573, 1979.
- [Man04] Anthony Manning. The volume entropy of a surface decreases along the Ricci flow. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(1) :171–176, 2004.
- [Mil68] J. Milnor. A note on curvature and fundamental group. *J. Differential Geometry*, 2 :1–7, 1968.
- [Mon01] Nicolas Monod. *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, volume 1758 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Mor90] Frank Morgan. Calibrations and new singularities in area-minimizing surfaces : a survey. In *Variational methods (Paris, 1988)*, volume 4 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 329–342. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

- [Pan97] Pierre Pansu. Volume, courbure et entropie (d'après G. Besson, G. Courtois et S. Gallot). *Astérisque*, (245) :Exp. No. 823, 3, 83–103, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.
- [Pau] Frédéric Paulin. Leçons de géométrie riemannienne. [http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours\\_georiem.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_georiem.pdf).
- [Qui02] J.-F. Quint. Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur. *Geom. Funct. Anal.*, 12(4) :776–809, 2002.
- [Ser01] Jean-Pierre Serre. *Complex semisimple Lie algebras*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Translated from the French by G. A. Jones, Reprint of the 1987 edition.
- [Shi63] Hideo Shimizu. On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. *Ann. of Math. (2)*, 77 :33–71, 1963.
- [SST12] Pablo Suárez-Serrato and Samuel Tapie. Conformal entropy rigidity through Yamabe flows. *Math. Ann.*, 353(2) :333–357, 2012.
- [Šva55] A. S. Švarc. A volume invariant of coverings. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 105 :32–34, 1955.