HAL
open science

Modélisation cyclostationnaire et séparation de sources des signaux électromyographiques

Julien Roussel

To cite this version:

Julien Roussel. Modélisation cyclostationnaire et séparation de sources des signaux électromyographiques. Autre. Université d'Orléans, 2014. Français. NNT : 2014ORLE2050 . tel-01202686

HAL Id: tel-01202686

https://theses.hal.science/tel-01202686

Submitted on 21 Sep 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE, PHYSIQUE THÉORIQUE ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES

Laboratoire Pluridisciplinaire de Recherche en Ingénierie des Systèmes, Mécanique et Energétique (PRISME)

THÈSE présentée par :

Julien ROUSSEL

Soutenue le : **08 décembre 2014**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université d'Orléans**
Discipline / Spécialité : Sciences et Technologies de l'Ingénieur

Modélisation cyclostationnaire et séparation de sources des signaux électromyographiques

THÈSE dirigée par :

Olivier BUTTELLI	MCF HDR, Université d'Orléans	
Philippe RAVIER	MCF HDR, Université d'Orléans,	*co-directeur*
Michel HARITOPOULOS	MCF, Université d'Orléans,	*co-encadrant*

RAPPORTEURS :

Pierre-Yves GUMÉRY	PU, Université Joseph Fourier de Grenoble
Nadège THIRION-MOREAU	PU, Université du Sud Toulon Var

JURY :

Karim ABED-MERAÏM	PU, Université d'Orléans,	*Président du Jury*
Pierre-Yves GUMÉRY	PU, Université Joseph Fourier de Grenoble	
Nadège THIRION-MOREAU	PU, Université du Sud Toulon Var	
François GUILLET	PU, Université Jean Monnet de St. Etienne	
Mme Christine SERVIÈRE	CR HDR, CNRS Grenoble	
Olivier BUTTELLI	MCF HDR, Université d'Orléans	
Philippe RAVIER	MCF HDR, Université d'Orléans	
Michel HARITOPOULOS	MCF, Université d'Orléans	

Table des matières

Remerciements ..... **v**

Tables des illustrations ..... **vii**

Glossaire des sigles ..... **xi**

Introduction **1**

Chapitre I. Position du problème **3**

1 Physiologie neuromusculaire 3

1.1 Muscle *3*

1.2 Anatomie et physiologie du muscle squelettique *3*

1.3 Potentiel d'action *4*

1.4 Unité motrice *5*

1.5 Train de potentiels d'action et recrutement temporel *7*

1.6 Recrutement spatial des Unités Motrices *8*

2 Signal EMG 8

2.1 Mesure du signal électromyographique *8*

2.2 Potentiel d'action d'unité motrice *10*

2.3 Modèle analytique *11*

2.4 Simulation du signal EMG *13*

2.5 Décomposition de signaux EMG *13*

Chapitre II. Cyclostationnarité d'un train de potentiels d'action d'unité motrice (TPAUM) **17**

1 Processus cyclostationnaire 17

1.1 Introduction *17*

1.2 Cyclostationnarité au sens strict *18*

1.3 Outils d'analyse *20*

1.4 Repliement de spectre *22*

2 Analyse cyclostationnaire du TPAUM 23

2.1 Modèle simplifié *23*

2.2 Modèle réaliste *34*

Chapitre III. Etat de l'art de la décomposition de TPAUM **45**

1 Les premiers développements 45

1.1 Méthodes historiques semi-automatiques par inspection visuelle *45*

1.2 Classifications automatiques *47*

2 Méthodes de séparation de sources 49

2.1 Une nouvelle classe de méthodes ... *49*
2.2 Formulation du problème ... *49*
2.3 Modèles de mélange des données sources ... *50*
2.4 Reformulation du modèle convolutif en modèle linéaire instantané ... *51*
2.5 Détermination du mélange ... *54*
2.6 Indéterminations ... *54*
2.7 Décorrélation des observations par analyse en composantes principales et blanchiment spatial ... *55*
2.8 Séparation de sources ... *56*

3 Etat de l'art des méthodes de décomposition de signaux EMG par séparation de sources ... 57
3.1 Méthodes existantes de décomposition par séparation de sources ... *57*
3.2 Estimation des PAUM à partir du Train d'Impulsion Nerveux (TIN) ... *58*

Chapitre IV. Décomposition des EMG par séparation de sources cyclostationnaires ... 61

1 Séparation de sources stationnaires ou cyclostationnaires à l'ordre 2 ... 61
1.1 Séparation de sources à l'ordre deux par diagonalisation exacte ... *61*
1.2 SOBI : Séparation de sources à l'ordre deux par diagonalisation conjointe approchée ... *62*
1.3 CycloSOBI : séparation de sources cyclostationnaires à l'ordre deux ... *62*

2 Modèle de mélange étendu appliqué aux signaux EMG ... 63
3 Propriétés de la corrélation cyclique des sources étendues ... 64
3.1 Problématique ... *64*
3.2 Autocorrélation cyclique d'une source ... *66*
3.3 Intercorrélation cyclique entre une source et sa version retardée ... *68*
3.4 Décorrélation des sources ... *70*
3.5 A propos du modèle réaliste ... *71*

4 Méthodes proposées pour la séparation au second ordre ... 73

Chapitre V. Résultats expérimentaux et discussion ... 75

1 Analyse de la cyclostationnarité de signaux EMG réels ... 75
1.1 Décomposition des signaux ... *75*
1.2 Analyse cyclostationnaire ... *78*

2 Décomposition par exploitation de la cyclostationnarité ... 83
2.1 Simulations ... *84*
2.2 Résultats de la décomposition ... *85*
2.3 Discussion ... *91*

3 Expérimentation sur des signaux EMG réels ... 92
3.1 Décomposition d'un signal EMG intramusculaire ... *92*
3.2 Tentative de décomposition d'un signal EMG de surface ... *95*

Conclusion et perspectives ... 99

Annexe A. Statistiques et processus stochastiques ... 101

1 Espérance mathématique ... 101
2 Moments ... 101
3 Indépendance ... 102
4 Décorrélation ne signifie pas indépendance ... 103

5 Processus stochastiques 104
5.1 Définition 104

Annexe B. Estimations de la densité spectrale cyclique 105

1 Périodogramme cyclique à temps variable 105
2 Forme quadratique générale de l'estimateur de la DSC 105
3 Périodogramme cyclique moyenné 105

Annexe C. Analyse en composante indépendante 109

1 Méthodes tensorielles ou algébriques 109
1.1 Tenseur de cumulants 109
1.2 Matrices de cumulants 109
1.3 Méthode FOBI « Fourth-Order Blind Identification » 111
1.4 Méthode JADE « Joint Approximante Diagonalization of Eigen-matrices » 111
1.5 Autres Méthodes 114

2 Fonction de Contraste exploitant la non-gaussianité 115
2.1 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur 115
2.2 Méthodes fondées sur la théorie de l'information 116

3 Méthode de séparation utilisant l'information mutuelle 117

Annexe D. Diagonalisation approximative de matrice par itération de Jacobi 119

1 Diagonalisation approchée d'une matrice 119
2 Diagonalisation conjointe approchée 121

Références bibliographiques 123

Liste des conférences 131

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement mes directeurs de thèse, Olivier Buttelli et Philippe Ravier, ainsi que mon co-encadrant, Michel Haritopoulos, pour m'avoir accueilli dans l'équipe signal du laboratoire PRISME de l'université d'Orléans, mais aussi pour l'intérêt porté à mon travail, pour leurs précieux conseils et leur sympathie durant tout le déroulement de la thèse et lors de la rédaction de ce manuscrit. J'ai en effet beaucoup apprécié les soutiens scientifique mais aussi humain qu'ils m'ont témoignés et qui m'ont permis d'effectuer ce travail dans les meilleures conditions qui soient.

Je remercie également le professeur Karim Abed-Meraim pour m'avoir fait l'honneur d'être le président du jury mais également pour ses conseils et son aide précieuse apportée sur différents aspects de cette thèse. Je remercie les professeurs Pierre-Yves Guméry et Nadège Thirion-Moreau, rapporteurs de ce manuscrit, pour leur très attentive relecture et leurs remarques pertinentes faite à l'issu de la relecture de ce manuscrit et lors de la soutenance. Je remercie également les professeurs François Guillet et Christine Servière, pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour leurs remarques sur ce travail.

Je remercie également le professeur Dario Farina, directeur du département "Neurorehabilitation Engineering", de l'université de médecine de Goettingen pour son très agréable accueil au sein de son équipe, sa fructueuse collaboration et le temps qu'il m'a consacré lors de mon séjour. Je lui suis également très reconnaissant pour avoir mis à ma disposition un simulateur de données EMG, développé au sein de son équipe, ainsi que des mesures EMG réelles.

Je tiens également à remercier très chaleureusement Cécile Capdessus pour toute son aide et ses relectures, lors de la rédaction de ce manuscrit, mais également pour ses précieuses recommandations et expertises, pour ses qualités humaines et pour son soutien moral constant tout au long de ces trois années.

Je souhaiterais aussi remercier Francine Weil et ma mère, Catherine Roussel, pour leurs attentives relectures de ce manuscrit.

Je remercie aussi plus généralement tous mes amis et collègues de l'IUT et de l'antenne scientifique de Chartres et tous les membres, permanents et non permanents, des équipes signal et image du laboratoire PRISME à Polytech'Orléans pour leur accueil chaleureux, leur agréable compagnie et la bonne ambiance générale.

Tables des illustrations

Figure 1 : Vue en coupe d'un muscle squelettique. 4
Figure 2 : Schéma d'une Unité Motrice. 5
Figure 3 : Illustration du positionnement des fibres de deux unités motrices. 6
Figure 4 : Exemple de train de potentiels d'action d'unité motrice. 7
Figure 5 : Domaine d'utilisation des différents types d'électrodes. 9
Figure 6 : Mesure monopolaire du potentiel d'action d'une fibre. 9
Figure 7 : Illustration du Potentiel d'Action d'Unité Motrice (V_{PAUM}) en 3D. 10
Figure 8 : Représentation 3D d'un Potentiel d'Action d'Unité Motrice (PAUM). 11
Figure 9 : Décomposition de trains de potentiels d'action d'unité motrice (TPAUM). 14
Figure 10 : Représentation à l'ordre deux d'un signal cyclostationnaire. 19
Figure 11 : Illustration de la corrélation cyclique d'un signal cyclostationnaire. 20
Figure 12 : Illustration en 3-D de la densité spectrale cyclique. 21
Figure 13 : Couverture de la DSC d'un signal réel. 22
Figure 14 : Couverture de la DSC d'un signal échantillonné. 22
Figure 15 : Illustration de la DSP de la **partie déterministe** du modèle simplifié. 25
Figure 16 : Illustration de la DSP de la partie stochastique du modèle simplifié. 28
Figure 17 : Illustration de la DSP totale du modèle simplifié 29
Figure 18 : Illustration de la densité spectrale cyclique théorique d'un PAUM ($\mathrm{DSChh}\alpha, f$). 31
Figure 19 : Illustration de la contribution de la gigue sur la DSC théorique d'un TPAUM pour le modèle simplifié. 32
Figure 20 : Illustration de la DSC théorique de la **partie stochastique** d'un TPAUM pour le modèle simplifié. 32
Figure 21 : Illustration de la DSC théorique de la **partie déterministe** d'un TPAUM pour le modèle simplifié. 33
Figure 22 : Illustration de la DSC théorique d'un TPAUM pour le modèle réaliste. 42
Figure 23 : Illustration de la DSC intégrée d'un TPAUM pour le modèle réaliste. 42
Figure 24 : Illustration de la mesure de tension par déclenchement. 45
Figure 25 : Grille de quatre électrodes de surface. 48
Figure 26 : Illustration d'un mélange linéaire instantané de deux sources. 49
Figure 27 : Représentation graphique de la matrice de corrélation cyclique des sources étendues. 66
Figure 28 : Produit de fonctions Gaussiennes retardées. 67

Figure 29 : Représentation graphique de la matrice des coefficients de corrélations cyclique entre un TIN et ses versions retardées. 70

Figure 30 : Coefficient de corrélation maximal entre deux TIN indépendants de fréquence de décharge FD1 et FD2 dans le cas du modèle simplifié. 71

Figure 31 : Matrice de corrélation cyclique de deux TIN retardés selon le modèle réaliste. 72

Figure 32 : Coefficient de corrélation maximal entre deux TIN indépendants de fréquences de décharge FD1 et FD2 dans le cas du modèle réaliste. 73

Figure 33 : Copie d'écran colorisée d'EMGLab [81] - exemple de décomposition d'un signal EMG intramusculaire. 75

Figure 34 : Intervalles inter-décharge (IID) des unités motrices (UM) obtenus par décomposition du signal R00701 [134]. 77

Figure 35 : Intervalles inter-décharge de chaque unité motrice décomposée du signal R00702 [134]. 78

Figure 36 : Densité spectrale cyclique (DSC) du signal R00701. 79

Figure 37 : Densité spectrale cyclique intégrée du signal R00701. 80

Figure 38 : Densité spectrale cyclique intégrée des cinq TPAUM individuels du signal R00701. 81

Figure 39 : Densité spectrale cyclique du signal R00702. 82

Figure 40 : Densité spectrale cyclique intégrée du signal R00702. 82

Figure 41 : Densité spectrale cyclique intégrée des neuf TPAUM individuels du signal R00702. 83

Figure 42 : Taux de détection par SOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité. 86

Figure 43 : Taux de détection par SOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB). 86

Figure 44 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité. 86

Figure 45 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB). 86

Figure 46 : Taux de localisation incorrecte par SOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité. 87

Figure 47 : Taux de localisation incorrecte par SOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB). 87

Figure 48 : Taux de localisation incorrecte par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité. 87

Figure 49 : Taux de localisation incorrecte par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB). 87

Figure 50 : Taux de fausses alarmes par SOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité. 88

Figure 51 : Taux de fausses alarmes par SOBI avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB). 88

Figure 52 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité. 88

Figure 53 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB). 88

Figure 54 : Taux de détection par SOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité. 89

Figure 55 : Taux de détection par SOBI avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB). 89

Figure 56 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité. 89

Figure 57 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB). 89

Figure 58 : Taux de mauvaise localisation par SOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité. 89

Figure 59 : Taux de mauvaise localisation par SOBI avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB). 89

Figure 60 : Taux de mauvaise localisation par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité. ..90

Figure 61 : Taux de mauvaise localisation par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB). 90

Figure 62 : Taux de fausses alarmes par SOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité.....90

Figure 63 : Taux de fausses alarmes par SOBI avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB). 90

Figure 64 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité. 90

Figure 65 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB). 90

Figure 66 : Représentation temporelle d'une portion du signal EMG intramusculaire multi capteurs...92

Figure 67 : Force mesurée pendant l'acquisition du signal intramusculaire.....93

Figure 68 : Sources estimées après décomposition par CycloSOBI du signal intramusculaire réel.....94

Figure 69 : Intervalles inter-décharges instantanés du signal EMG intramusculaire réel décomposée par CycloSOBI.....95

Figure 70 : Représentation temporelle des 500 premières millisecondes du signal EMG de surface.....96

Figure 71 : Mesure de la force au cours de l'acquisition du signal EMG de surface réel.....97

Figure 72 : Source estimée après décomposition du signal EMG de surface réel par CycloSOBI.....97

Figure 73 : Intervalles inter-décharges instantanés du signal EMG de surface réel décomposé par cycloSOBI. 98

Figure 74 : Noyau de l'estimateur de la DSC par périodogramme cyclique moyenné. 107

Figure 75 : Matrice de Cumulants d'ordre 3. 110

Glossaire des sigles

Sigle Français	Désignation	Sigle Anglais	Désignation	p.
%CMV	% Contraction maximale Volontaire	**%MVC**	% Maximum Voluntary Contraction	8
ACI	Analyse en Composante Indépendante	**ICA**	Independent Component Analysis	56
ACP	Analyse en Composante Principale	**PCA**	Principal Component Analysis	46
CC	Corrélation Cyclique	**CC**	Cyclic Correlation	19
DCA	Diagonalisation Conjointe Approchée	**AJD**	Approximate Joint Diagonalization	62
DSC	Densité Spectrale Cyclique	**CSD**	Cyclic Spectrum Density	19
DSCi	Densité Spectrale Cyclique intégrée	**iCSD**	integrated Cyclic Spectrum Density	19
DSP	Densité Spectrale de Puissance	**PSD**	Power Spectrum Density	24
DVP	Décomposition en Valeur Propre	**EVD**	Eigen Value Decomposition	56
ECG	Electrocardiographie	**ECG**	Electrocardiography	57
EMG	Electromyographie	**EMG**	Electromyography	1
EQM	Erreur Quadratique Moyenne	**MSE**	Mean Square Error	46
FM	Fibre Musculaire	**MF**	Muscular Fiber	3
iid	indépendant et identiquement distribué	**iid**	independent and identically distributed	7
IID	Intervalle Inter Décharge	**ISI**	Inter-Spike Interval	7
JNM	Jonction Neuromusculaire	**NMJ**	Neuromuscular Junction	3
MN	Motoneurone	**MN**	Motoneuron	3
PA	Potentiel d'Action	**AP**	Action Potential	3
PAN	Potentiel d'Action Nerveux	**NAP**	Nerve Action Potential	45
PAUM	Potentiel d'Action d'Unité Motrice	**MUAP**	Motor Unit Action Potential	5
RSB	Rapport Signal sur Bruit	**SNR**	Signal to Noise Ratio	8
SOS	Statistiques d'Ordres Supérieurs	**HOS**	Higher-Order Statistics	115
SWV	Spectre de Wigner-Ville	**WVS**	Wigner-Ville Spectrum	19
TF	Transformée de Fourier	**FT**	Fourier Transform	28
TIN	Train d'Impulsion Nerveux	**NPT**	Nerve Pulse Train	11
TMS	Troubles Musculo-Squelettiques	**RSI**	Repetitive Strain Injury	1
TPAUM	Train de Potentiel d'Action d'Unité Motrice	**MUAPT**	Motor Unit Action Potential Train	10
TT	Tubules Transverses	**TT**	Transverse Tubules	4
UM	Unité Motrice	**MU**	Motor Unit	5

Introduction

Les travaux présentés dans cette thèse se placent dans le cadre du développement de méthodes pour le traitement du signal électromyographique (EMG). Celui-ci mesure l'activité électrique musculaire. Dans le domaine de la santé, il est principalement utilisé pour le diagnostic de maladies neuromusculaires [1] (neuropathies telles que la Sclérose Latérale Amyotrophique [2], troubles de la transmission neuromusculaire, myopathies), pour l'évaluation de troubles du contrôle moteur ou encore l'identification de troubles musculo-squelettiques (TMS) comme par exemple le syndrome du canal carpien [3]. Du point de vue technologique, l'électromyographie permet le développement d'interfaces muscle-machine. Les applications sont le contrôle de prothèses robotisées : bioprothèse ou prothèse intelligente [4] ; exosquelette [5]. Cela concerne également le contrôle de chaise roulante [6], le pilotage d'aéronef [7] ou encore l'informatique grand public [8]. Les méthodes d'évaluation et d'aide au diagnostic, à partir du signal EMG, nécessitent d'être encore améliorées. Notamment, parce que cette technique révèle un manque de reproductibilité. De plus, la plupart des applications technologiques, citées précédemment, sont encore au stade de développement. Notamment parce que le signal EMG est de par sa nature complexe et de propriété multifactorielle. C'est pourquoi il est encore nécessaire d'améliorer les méthodes actuelles de traitement de ce signal.

La complexité du signal EMG est définie par le système neuromusculaire qui produit ce signal. En effet, il est composé d'un mélange d'un grand nombre de signaux élémentaires dont les sources sont réparties dans le volume musculaire. La commande de ce système s'organise sur deux niveaux. Le premier s'exprime au niveau élémentaire par la fréquence d'activation de ces sources et le second au niveau du système par une modulation du nombre de sources activées. Il est à noter que les signaux élémentaires ont des caractéristiques différentes en fonction des propriétés physiologiques et anatomiques des sources émettrices, de leur positionnement au sein du muscle ainsi que de leur activation. Ceci définira des caractéristiques de forme d'onde, de fréquence de décharge, de vitesse de conduction différentes en fonction de ces sources et de leur état. Il est donc important d'améliorer la connaissance de ces paramètres au niveau élémentaire.

L'amélioration des connaissances de ce système nécessite de travailler au niveau élémentaire et donc de développer des méthodes de séparation de sources afin de mieux décrire l'activité élémentaire et ses modulations notamment des fréquences de décharge. De plus, ce développement nécessite une modélisation pertinente du signal étudié.

Nous montrerons dans ce manuscrit que les signaux EMG peuvent être modélisés dans un cadre cyclostationnaire élargi et que cette modélisation ouvre de nouvelles perspectives pour la décomposition et l'identification des sources élémentaires. L'approche cyclostationnaire a déjà été explorée [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16]. Cependant, elle était utilisée sur une approche globale de l'activité musculaire pour rendre compte d'activités cycliques coordonnées de différents segments corporels (marche, pédalage…). Nous montrerons ici la propriété de cyclostationnarité floue des signaux élémentaires générés par chaque unité fonctionnelle du muscle et proposerons une nouvelle technique de séparation de ces signaux basée sur cette approche.

Chapitre I. Position du problème

1 Physiologie neuromusculaire

1.1 Muscle

Le muscle est un organe qui assure les fonctions mécaniques du corps animal. Il assure notamment le déplacement des segments corporels, la contraction cardiaque ou encore les fonctions de vasoconstriction/vasodilatation des vaisseaux. Un tissu musculaire est composé de cellules musculaires appelées myocytes ou fibres musculaires (FM). On distingue les muscles striés squelettiques (contractions volontaires), cardiaques et muscles lisses (contraction involontaire).

- **Muscles striés** : ils sont caractérisés par la présence de stries visibles organisées perpendiculairement à l'axe des cellules musculaires. Ces dernières sont de forme allongées et polynucléées (à plusieurs noyaux), et sont dénommées rhabdomyocytes.
- **Muscles lisses** : ils sont caractérisés par une absence de stries et un corps cellulaire mononucléé (à un noyau) ; on peut citer par exemple quelques organes disposant de tels muscles comme les poumons, muscles gastro-intestinaux, peau, artères.

Les muscles striés squelettiques, à la différence des autres types de muscles, sont sous le contrôle d'une commande volontaire.

1.2 Anatomie et physiologie du muscle squelettique

Un muscle est constitué d'un grand nombre de FM, de quelques centaines jusqu'à plusieurs centaines de milliers, ce nombre dépend de la taille du muscle considéré et de sa spécialisation fonctionnelle. Les FM sont regroupées par quelques dizaines dans des *fascicules.* Un ensemble de *faisceaux* forme le muscle (Figure 1). Aux extrémités du muscle, la partie blanche représente les tendons qui permettent la liaison mécanique entre les fibres et les os sur lesquels le muscle est rattaché (muscle strié squelettique).

La FM humaine a une longueur pouvant atteindre plusieurs centimètres et un diamètre variant de 10 à 100 µm [17]. Elle est composée d'une membrane cellulaire appelée sarcolemme et de myofibrilles à l'intérieur (Figure 1). Les myofibrilles sont formées d'unités contractiles, nommées sarcomères, disposées en série.

La FM est innervée par un motoneurone (MN) dont le corps cellulaire est localisé dans la corne ventrale de la moelle épinière (système nerveux central). Au niveau du muscle, La jonction entre une FM et un motoneurone est dénommée jonction neuromusculaire (JNM). La commande motrice du système nerveux central vers la périphérie est assurée par un signal électrique (potentiel d'action, PA) qui se propage le long de la membrane du motoneurone puis le long du sarcolemme. Le sarcolemme

s'invagine régulièrement pour former des tubules transverses (TT) le long de la FM. Au niveau des TT, le signal électrique est internalisé et transformé en signal chimique (couplage électromécanique) qui déclenchera la contraction des sarcomères.

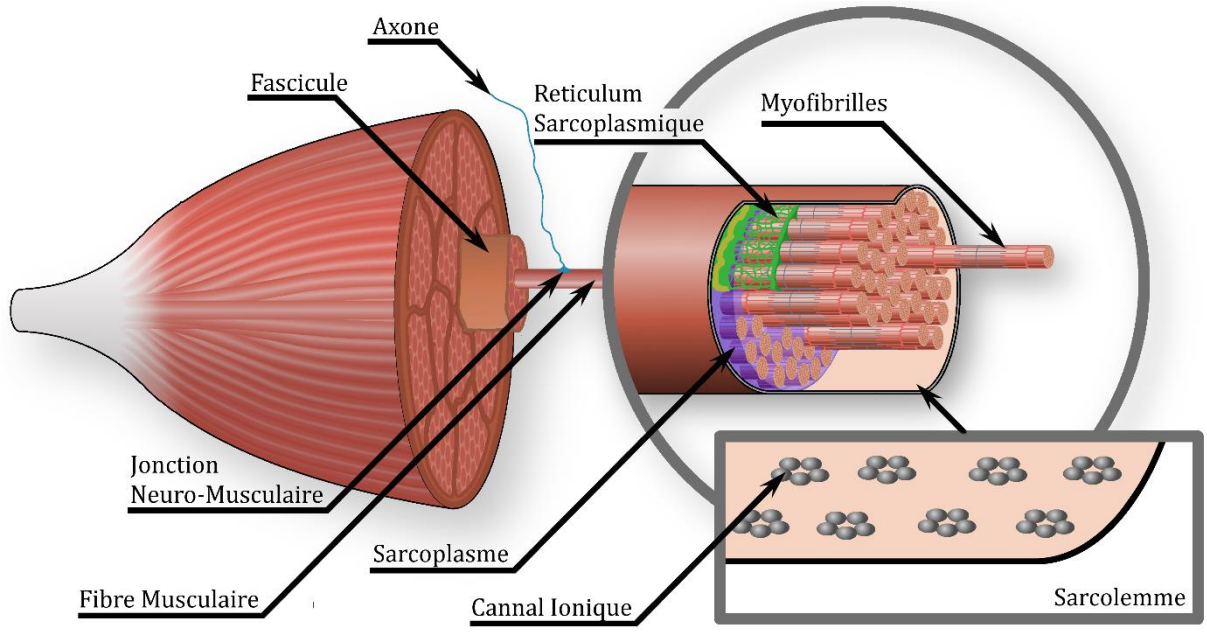

Figure 1 : Vue en coupe d'un muscle squelettique.
Représentation avec ses différents niveaux de structuration ; du macroscopique au microscopique, le muscle s'organise en *fascicules* regroupant chacun un ensemble de fibres musculaires ; chaque fibre musculaire est elle-même structurée en myofibrilles.

1.3 Potentiel d'action

Au repos musculaire, la polarité membranaire est négative à l'intérieur de la cellule et positive à l'extérieur. Lors de l'activation de la FM, une inversion de la polarité membranaire se produit et donne le PA (membrane chargée négativement à l'extérieur et positivement à l'intérieur). Ce phénomène, d'une durée de 2 à 3 ms, est produit par le mouvement transmembranaire d'ions [18], entrée d'ions sodium (Na^+) suivie d'une sortie d'ions potassium (K^+) du fait de l'ouverture de canaux ioniques électro-sensibles spécifiques à ces ions. Cette inversion de polarité est un phénomène local, ce qui induit une différence de répartition de charge entre la portion de membrane dépolarisée et celles limitrophes de polarité inverse puisque ces dernières sont au repos. Ceci produira un champ électrique qui viendra contaminer et donc activer l'ouverture des canaux ioniques électro-sensibles (Na^+, K^+) de ces zones limitrophes. Le PA va donc se propager de proche en proche, de la JNM jusqu'aux tendons (structure passive) où le signal s'atténue progressivement. Ce signal ne peut se propager que dans un sens, du fait d'une période réfractaire des canaux ioniques préalablement sollicités. À la suite de cette perturbation, la cellule rétablira le potentiel de repos membranaire en pompant activement les ions préalablement mobilisés (extraction du sodium, repompage du potassium) permettant ainsi la possibilité de récréer un PA à la suite du précédent.

La présence d'une dépolarisation en un point de la membrane forme un tripôle électrostatique qui génère alors un champ électrique mesurable à distance. Bien que la modélisation de la densité de courant par un modèle tripolaire [19] soit une simplification, il a été montré que cette approximation est valide lorsque le point de mesure (électrode) est à une distance d'au moins un millimètre de la fibre [20].

Une FM n'est jamais activée seule mais l'est avec un ensemble d'autres FM innervées par le même MN définissant l'unité fonctionnelle du muscle dénommée unité motrice (UM, [21]). En fait, à distance, ce n'est pas le champ électrique généré par une seule FM mais la somme des champs générés par l'ensemble des FM des UM actives qui est enregistrée. Le champ électrique d'une UM sera défini comme le potentiel d'action d'unité motrice (PAUM).

1.4 Unité motrice

Cette unité fonctionnelle élémentaire (Figure 2), est composée d'un ensemble de FM, toutes de même type et réparties sur un territoire musculaire ; les FM d'une UM n'étant pas réparties de façon contigüe (Figure 3). Le nombre de fibres dans une UM varie en fonction du muscle étudié et du type, pouvant aller jusqu'à un millier dans les muscles de la jambe [22]. Par exemple, on dénombre en moyenne près de 100 fibres dans le cas de petites UM et plusieurs centaines pour les grosses UM [23]. La distribution des fibres au sein de l'UM est reportée comme étant aléatoire sur une région ellipsoïdale [24].

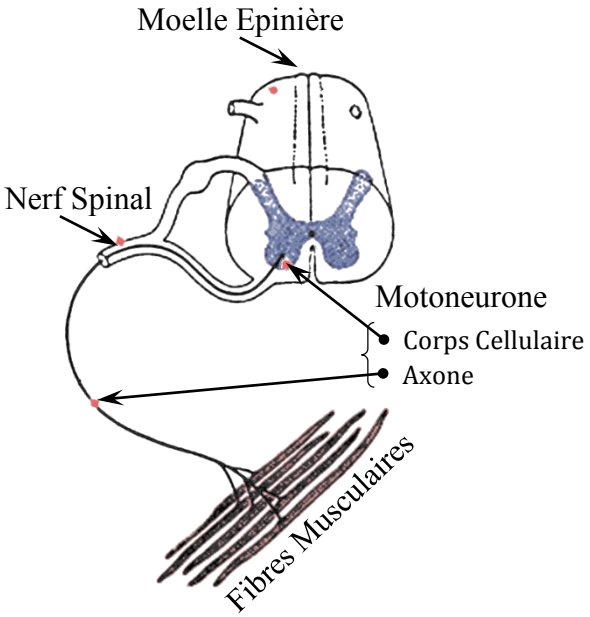

Figure 2 : Schéma d'une Unité Motrice.
Composée d'un motoneurone dont le corps cellulaire est localisé dans la corne ventrale de la moelle épinière, son axone sortant du système nerveux central par la racine ventrale pour former à la périphérie, au niveau de ses terminaisons, après ramification, une jonction neuromusculaire avec un ensemble de fibres musculaires [25].

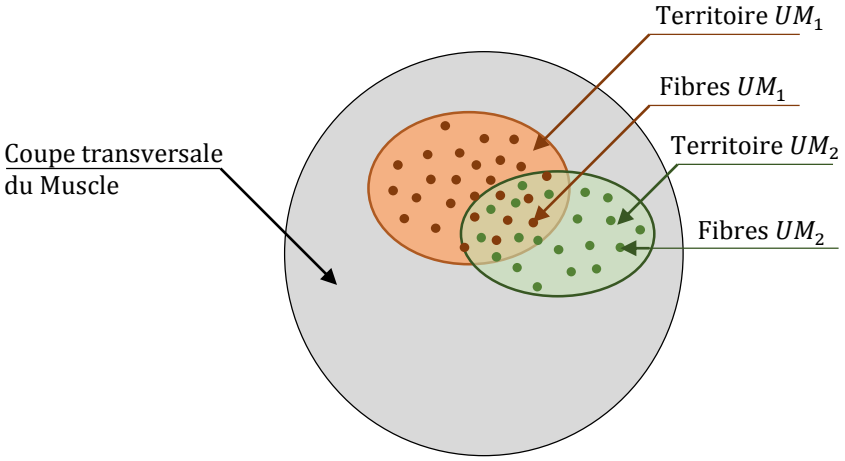

Figure 3 : Illustration du positionnement des fibres de deux unités motrices.
Il est montré deux unité motrices : UM_1 (rouge) et UM_2 (vert) dans une représentation schématique en coupe d'un muscle.

On peut caractériser les UM à partir de différentes propriétés structurelles : les plus grosses comportent plus de FM, dont le diamètre ainsi que celui du MN sont plus importants ; les plus petites comportent moins de FM, dont le diamètre ainsi que celui du MN sont plus petits. Il est également possible d'établir une classification histochimique et métabolique des UM [26, 22] notamment à partir de l'activité ATPasique de leurs FM. Cette activité définit la cinétique des réactions chimiques entre les deux acteurs de premier plan qui opèrent la contraction (molécules d'actine et de myosine). A partir de cette activité, il a été défini 3 catégories de FM et donc d'UM, les types I, IIa et IIb. D'autres classifications se sont intéressées aux réponses mécaniques élémentaires des UM (secousse ou "twitch" en Anglais) [22]. À partir de ces réponses mécaniques des UM dites "slow twitch", "fast twitch resistant" et "fast twitch fatigable" ont été définies.

Cette classification s'est établie en évaluant les temps de montée et de relaxation de la "twitch" mais également en fonction de la décroissance de l'amplitude de la "twitch" lors d'un test de fatigue. Des études croisées ont été réalisées entre ces méthodes : en règle générale, les plus grosses UM sont plutôt orientées vers des typologies de type IIb qui correspondent à des "fast twitch fatigable" et les plus petites UM sont plutôt orientées vers des profils typologiques de type I avec des comportements mécaniques "slow twitch". La classification peut également être étendue aux propriétés électriques des fibres nerveuses et musculaires [27] *i.e.* vitesse de conduction plus faible pour les petites UM et vitesse de conduction plus rapide pour les plus grosses UM.

La nomenclature changera donc en fonction des méthodes d'investigation mises en œuvre. De plus, cette distinction entre UM est une caricature de la réalité et dépend du pouvoir discriminant des méthodes de classification. En fait, il existe des UM de type intermédiaire entre celles précédemment citées et il apparaît un *continuum* d'UM des plus petites aux plus grosses.

La régulation de la force musculaire au sein du muscle est effectuée au moyen de deux modes opératoires : un premier au niveau de l'UM par la modulation de la fréquence de décharge, également appelée **recrutement temporel** [28] ; un second au niveau musculaire par la modulation du nombre d'UM recrutées ou **recrutement spatial**.

1.5 Train de potentiels d'action et recrutement temporel

Un seul PA ne permettant pas une contraction effective au niveau du muscle, il est nécessaire pour le système neuromusculaire de générer des trains de PA (Figure 4) qui favoriseront la fusion des réponses mécaniques élémentaires (secousses). Cette fusion sera d'autant plus importante que les trains de potentiels d'action seront denses et donc réalisés à des fréquences de décharge plus élevées. La régulation de la tension mécanique au niveau de l'UM se réalisera donc en modulant ces fréquences de décharge. La force augmente avec le taux de décharge [29].

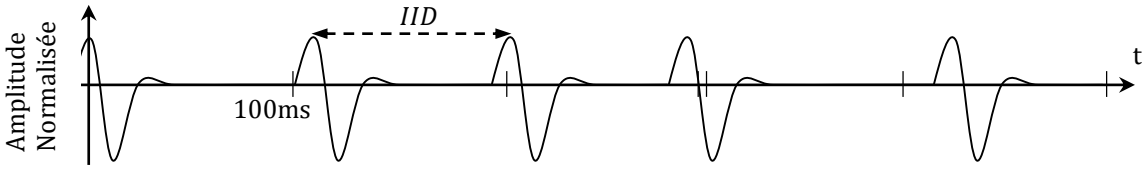

Figure 4 : Exemple de train de potentiels d'action d'unité motrice.
Les potentiels d'action sont générés avec une fréquence de décharge de 10Hz incluant une variation stochastique de l'Intervalle Inter-Décharge (IID).

Par ailleurs, il est important de noter que, la stratégie de recrutement dépend également de la fatigue musculaire [30, 31]. Des phénomènes de synchronisation de fréquence de décharge entre UM apparaissent et modifient alors la force appliquée, ce qui modifiera en conséquence les fréquences de décharge et le nombre d'UM recrutées.

La fréquence des décharges (FD), définie par l'inverse de la moyenne des intervalles inter-décharge (IID), varie de quelques décharges par seconde à, dans un cas extrême sur l'adducteur du pouce, cinquante décharges par seconde [32] ; la fréquence de décharge instantanée de ce même muscle pouvant atteindre cent cinquante décharges par seconde.

Dans le cas d'une contraction isotonique (tension mécanique stable) et isométrique (longueur musculaire fixe) la fréquence de décharge moyenne d'une unité motrice est constante, mais on observe [33, 34] que l'intervalle inter-décharge subit une "gigue" temporelle (ou "jitter" en Anglais) aléatoire. Il est important de ne pas la confondre avec la "gigue" neuromusculaire provoquée par un retard aléatoire du temps de transmission du potentiel d'action dans les jonctions neuromusculaires composant l'unité motrice [35], qui induit une légère déformation du potentiel d'action d'unité motrice entre deux décharges. Nous faisons référence ici à la gigue produite par le motoneurone lui-même. Clamann [34] modélise les IID par une distribution gaussienne tronquée.

1.6 Recrutement spatial des Unités Motrices

La seconde modalité de recrutement des UM est spatiale et joue sur le nombre d'UM actives pour réguler la force. Le principe de la taille de Henneman [36, 37, 17, 38] énonce, dans le cas d'une montée de force progressive, que l'ordre de recrutement des UM est lié à la taille de leur motoneurone, les plus petites unités étant recrutées en premier. Par ailleurs, l'évolution du recrutement des UM dépend du muscle étudié. Par exemple, il a été rapporté [17] que les petits muscles recrutaient la grande majorité de leurs UM dès 50% de la contraction maximale volontaire (%CMV) alors que pour de plus gros muscles, le recrutement spatial restait prépondérant jusqu'à 70%CMV.

2 Signal EMG

2.1 Mesure du signal électromyographique

Alors que, nous l'avons vu, les PA émis par les fibres musculaires appartenant aux UM recrutées émettent un champ électrostatique mesurable à distance, la mesure et l'identification de ces signaux (PAUM) est complexe.

La Figure 9 récapitule les différentes techniques de mesure en fonction de la méthode et du domaine d'étude : au niveau cellulaire, en électrophysiologie, avec des microélectrodes implantées dans la cellule, permettant ainsi la mesure du PA ; au niveau segmentaire, en biomécanique, avec des électrodes de surface disposées sur le muscle. Des niveaux intermédiaires sont représentés, permettant l'étude au niveau des UM et du muscle avec des méthodes invasives par électrode implantée mais aussi au moyen d'une matrice d'électrodes disposées à la surface du muscle.

Les électrodes intramusculaires sont des aiguilles directement implantées dans le muscle. Celles-ci présentent l'avantage de fournir un signal peu bruité car proche de la source d'émissions (fibres musculaires) et avec un nombre d'unités motrices mesurées assez faible ce qui permet une bonne identification de celles-ci. Une telle méthode présente une vue locale du muscle étudié et le caractère invasif de l'aiguille limite le nombre d'électrodes implantables et son utilisation en dehors de centres médicaux. *A contrario,* la mesure de surface, réalisée au moyen d'électrodes placées sur la peau, est non-invasive. L'éloignement de l'électrode au regard des fibres émettrices de signaux réduit considérablement l'amplitude du signal et diminue ainsi le rapport signal sur bruit (RSB). De plus, bien qu'offrant une vue plus globale du muscle, on observe un mélange très important des PAUM ce qui complexifie leur identification. Le signal ainsi observé, sera alors dénommé signal électromyographique de surface (EMGs).

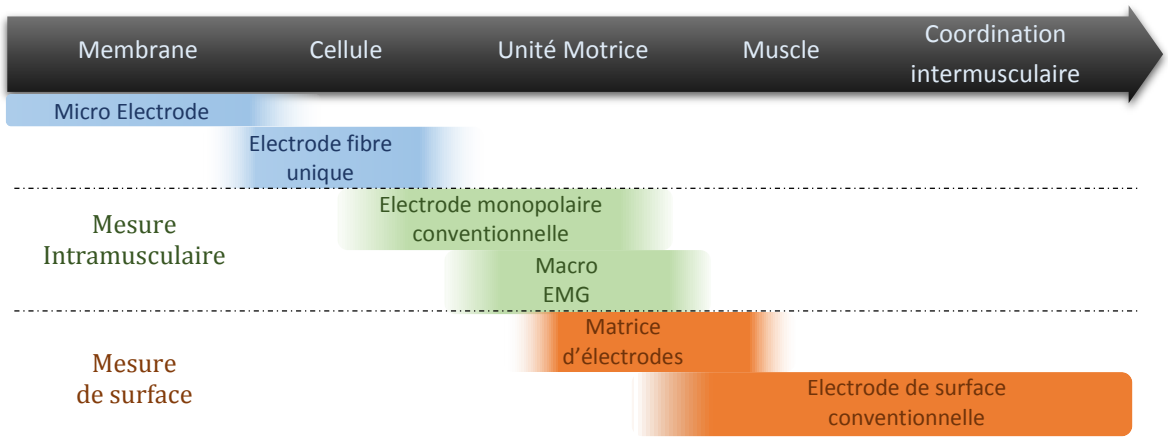

Figure 5 : Domaine d'utilisation des différents types d'électrodes.
Représentation (Diagramme redessiné de Hogrel [39]) d'une vue la plus localisée (intracellulaire) à la plus globale (muscle entier) (de gauche à droite). En bleu est représenté les mesures intracellulaires, en vert les mesures intramusculaires (mais à l'extérieur des cellules) et en rouge les méthodes non-invasives par mesure de surface.

A distance (Figure 6), le signal EMG pour une fibre peut être modélisé par un tripôle (+-+). Ce tripôle peut être découpé en deux parties, avec un front et une queue, chaque partie étant modélisée par deux dipôles [40]. Le potentiel de chaque dipôle est proportionnel à l'angle solide entre l'électrode et celui-ci. Les deux dipôles étant opposés, l'un aura une contribution positive sur la mesure et le second une action négative.

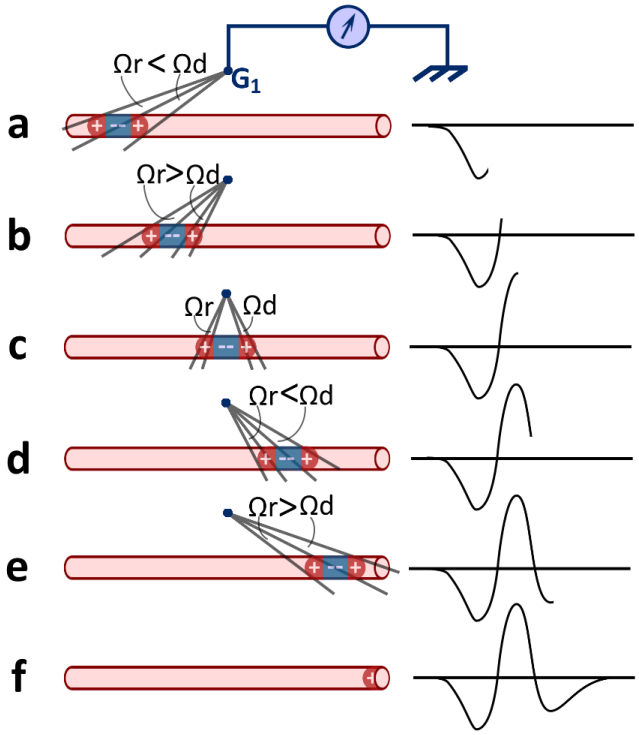

Figure 6 : Mesure monopolaire du potentiel d'action d'une fibre.
La figure, adaptée de Kimura [40], représente la mesure du potentiel électrique à distance (point G1) généré par un potentiel d'action (PA) d'une fibre musculaire. Le PA est modélisé par un tripôle électrostatique se déplaçant de la gauche vers la droite (a-f).

2.2 Potentiel d'action d'unité motrice

Le potentiel d'action d'unité motrice (PAUM) est le champ électrique résultant de la somme des champs électriques émis par chacune des fibres de l'unité motrice (Figure 7). Le train de PA générera alors un train de potentiel d'action d'unité motrice (TPAUM). Le potentiel électrique généré par ce champ possède une distribution spatiale propre à l'unité motrice et dépend de beaucoup de paramètres tels que le nombre de fibres, leurs tailles, la vitesse de conduction, la localisation de la jonction neuromusculaire...

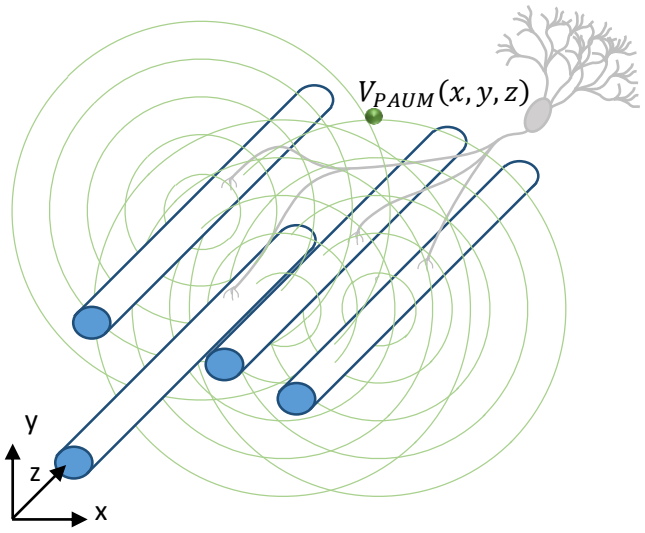

Figure 7 : Illustration du Potentiel d'Action d'Unité Motrice (V_{PAUM}) en 3D.
En vert sont représentées les lignes de champs électriques générés par chaque fibre musculaire (bleue).

En pratique le PAUM est modifié par les tissus environnants : les autres fibres musculaires, la graisse et la peau, toutes ces couches agissant comme un filtre passe-bas. La Figure 8 montre un exemple de distribution spatiale d'un PAUM mesuré à la surface de la peau à l'aide d'électrodes dites de surface.

Il est important de remarquer que la forme d'onde du PAUM évolue significativement le long de l'axe x à cause d'une part de l'effet de filtrage des tissus biologiques mais également des différentes contributions de chaque fibre. De plus, des différences de formes sont observées le long de l'axe z en plus d'un simple délai, ceci à cause des variations de vitesse de conduction des différentes fibres composant l'unité motrice. Bien que toutes les fibres d'une même unité motrice soient de même type, de légères variations de vitesse de conduction peuvent apparaître.

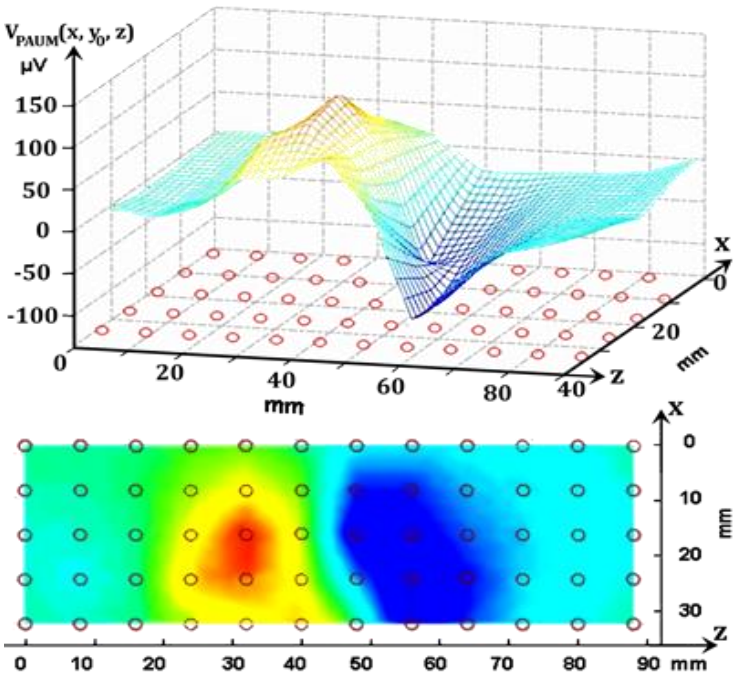

Figure 8 : Représentation 3D d'un Potentiel d'Action d'Unité Motrice (PAUM).
Distribution 3D d'un PAUM (Extrait de Merletti *et al*. [41]) en fonction de la localisation d'électrodes de recueil d'un capteur matriciel. Le positionnement est référencé au regard de la disposition des électrodes (cercle rouge) sur la matrice. La quantité de tension électrique du PAUM est définie du bleu foncé vers le rouge foncé de la plus négative à la plus positive (µV).

2.3 Modèle analytique

Le TPAUM peut être modélisé par la somme d'impulsions arrivant à différentes dates :

$$TPAUM_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{i,j}\left(t - \mathfrak{T}_{k,i}\right) \tag{1}$$

où i désigne l'indice de l'UM considérée, $\mathfrak{T}_{k,i}$ désigne l'instant d'arrivée du PAUM d'indice k de l'UM i, et $h_{i,j}(t)$ désigne le PAUM de l'unité motrice i mesuré par un capteur d'indice j. Nous l'avons vu au cours de l'introduction, le PAUM possède une distribution spatiale spécifique et la mesure dépend donc de la localisation de l'électrode.

Le train d'impulsions nerveux (TIN), que nous appellerons $s_j(t)$, est indépendant du point de mesure. Il correspond aux impulsions brutes, modélisées par des impulsions de Dirac, générées par le motoneurone. L'équation (1) devient alors un produit de convolution entre le PAUM et le TIN.

$$TPAUM_{i,j}(t) = h_{i,j}(t) \otimes s_j(t) \tag{2}$$

Le symbole $\otimes$ désigne l'opérateur de convolution et le TIN est défini par :

$$s_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - \mathfrak{T}_{k,j}\right) \tag{3}$$

Le signal EMG mesuré par le capteur d'indice i, que nous appelons $y_i(t)$, est la somme de tous les TPAUM générés par chaque unité motrice :

$$y_i(t) = \sum_j TPAUM_{i,j}(t) + b_i(t) \tag{4}$$

où $b_i(t)$ désigne le bruit contaminant directement l'électrode ou le système de mesure. En injectant les équations (2) et (3) dans (4) on a :

$$y_i(t) = \sum_j \left(h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - \mathfrak{T}_{k,j}\right) \right) + b_i(t) \tag{5}$$

Il est largement admis dans la littérature que le TPAUM n'est pas strictement périodique. Lors d'une contraction isométrique à force constante et sans fatigue, l'intervalle inter-décharges précédemment introduit est en moyenne constante avec un délai additif aléatoire. Ce modèle de gigue dans l'IID permet donc écrire la relation suivante :

$$\mathfrak{T}_{k,j} = kT_j + \tau_{k,j} \tag{6}$$

où T_i désigne la période moyenne de décharge de l'unité motrice i définie comme étant l'inverse de la fréquence de décharge et $\tau_{k,i}$ désigne une gigue temporelle aléatoire.

Deux modèles de gigues peuvent être définis conduisant à des statistiques différentes pour $\tau_{k,j}$

- **Modèle simplifié** : La gigue $\tau_{k,i}$ est caractérisée par une variable aléatoire stationnaire indépendante et identiquement distribuée (iid) de distribution Gaussienne. L'équation (5) s'écrit alors :

$$y_i(t) = \sum_j \left(h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - kT_j + \tau_{k,j}\right) \right) + b_i(t) \tag{7}$$

- **Modèle réaliste** : la variation de l'intervalle inter-décharge (IID) est caractérisé par une variable aléatoire iid de distribution Gaussienne [34]. Dans ce cas, on considère $\mathfrak{T}_{k,j} - \mathfrak{T}_{k-1,j} = T_j + \tau_{k,j} - \tau_{k-1,j}$ comme une distribution gaussienne ce qui fait que la gigue est dépendante de la valeur précédente et selon :

$$\tau_{k,j} = \tau_{k-1,j} + \epsilon_{k,j} = \sum_{p=0}^{k} \epsilon_{p,j} \tag{8}$$

où $\epsilon_{k,j}$ est une variable iid de distribution Gaussienne de moyenne nulle. Par convention on pose $\tau_{0,j} = \epsilon_{0,j}$. En conséquence $\tau_{k,j}$ est une marche aléatoire. L'équation (5) s'écrit finalement :

$$y_i(t) = \sum_j \left(h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(t - kT_j + \sum_{p=0}^{k} \epsilon_{p,j} \right) \right) + b_i(t) \tag{9}$$

À partir de ce modèle, il est alors possible de simuler un signal EMG en générant indépendamment l'activité de chaque UM puis en réalisant un mélange de celles-ci. Le second modèle est qualifié de « réaliste » car il correspond mieux aux observations de Clamman [34].

2.4 Simulation du signal EMG

Une manière courante et simple de simuler un signal EMG est l'utilisation d'un modèle de densité spectrale de puissance d'un EMG. Shwedyk *et al.* [42] proposent le modèle suivant :

$$DSP_{EMG}(f) = k \cdot \frac{f_H^4 \cdot f^2}{(f^2 + f_L^2) \cdot (f^2 + f_H^2)^2} \tag{10}$$

où f_L et f_H désignent respectivement les limites de fréquences basses et hautes du spectre EMG et k désigne un facteur d'amplitude. Le signal EMG peut ainsi être simulé par un bruit blanc filtré par la racine carrée du modèle de l'équation (10). Un tel modèle a été utilisé dans le passé, par exemple, pour la mesure de la vitesse de conduction moyenne [43], [44]. En revanche, celui-ci ne peut être utilisé dans le cas de l'évaluation de la cyclostationnarité, le signal simulé étant stationnaire. De plus, le signal ne résultant pas d'un mélange d'unités motrices, les méthodes de décomposition échoueront.

Une autre approche, consiste à simuler séparément les trains de potentiels d'action d'unités motrices et de réaliser le mélange de celles-ci. Dans un premier temps le PAUM est, soit extrait d'un signal réel (intramusculaire, par exemple), soit simulé. Une approche réaliste est de simuler, pour chaque fibre, la propagation du PA, issue du modèle de Hodgkin et Huxley [18], à travers le volume conducteur (tissu musculaire, graisse et peau) jusqu'au capteur [45], [46], [47], [48]. Le PAUM est alors la somme de tous les PA de chaque fibre composant l'unité motrice. La simulation, autant que l'analyse, du train de PAUM est quant à elle réalisée par une répétition retardée du PAUM, comme décrit par l'équation (1).

Puisque le signal EMG mesuré résulte d'un mélange d'UM, comme décrit à l'équation (4), des méthodes de décomposition des TPAUM sont nécessaires pour l'analyse des UM.

2.5 Décomposition de signaux EMG

Comme nous l'avons vu au cours de l'introduction, le signal EMG résulte du mélange des unités motrices recrutées. Le principe de la décomposition est, à partir d'une ou plusieurs observations, de retrouver les trains de potentiels d'action originaux (Figure 9).

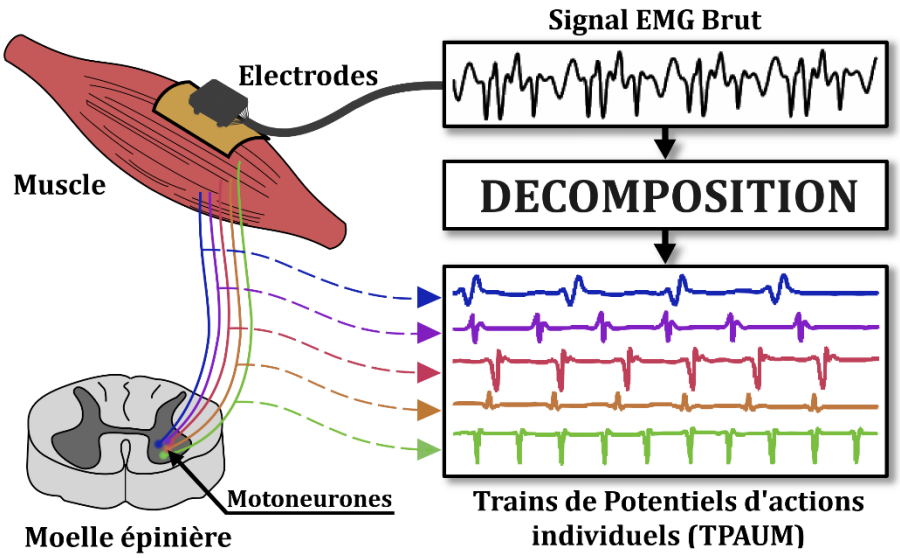

Figure 9 : Décomposition de trains de potentiels d'action d'unité motrice (TPAUM).
A partir des mesures d'une ou plusieurs électrode(s) (graphe en noir), l'algorithme de décomposition retrouve les TPAUM de chaque unité motrice active et mesurable (graphes en couleurs) (redessiné de Lucas *et al.* [49]).

La décomposition des UM est un sujet d'intérêt majeur dans le traitement des signaux EMG. Par exemple, une myopathie peut être diagnostiquée par classification des PAUM [50] ou encore par étude des vitesses de conduction de l'unité motrice [40]. Il a par ailleurs été montré que les statistiques sur les instants de décharge permettent d'analyser les stratégies de recrutement spatio-temporel des UM.

La décomposition reste encore un défi, les méthodes actuelles ne permettant d'analyser qu'une très faible portion des unités motrices actives. Les algorithmes existants sont souvent appliqués aux signaux intramusculaires (méthodes invasives et localisées). Les quelques méthodes existantes pour les signaux de surface utilisent soit un filtrage spatial limitant l'analyse à une zone locale, soit nécessitant des conditions particulières : très faible %CMV et condition isométrique à force constante. La raison de ces restrictions provient principalement du nombre extrêmement important de signaux mélangés lors des analyses en surface ou lorsque la force dépasse quelques dizaines de %CMV. La superposition importante des PAUM entraîne alors des difficultés majeures pour des algorithmes fondés sur la reconnaissance de forme et le nombre important d'UM actives entraîne des difficultés pour les méthodes fondées sur la séparation de sources.

En résumé, nous avons vu dans cette partie que le signal EMG résulte de la sommation de TPAUM générés par un ensemble d'unités fonctionnelles élémentaires : les unités motrices. Chacune d'elles est caractérisée par une forme d'onde, le PAUM, représentée sur un espace quadridimensionnel (l'espace et le temps) et par une fréquence de décharge, dépendant du niveau de contraction, du type de fibre et de la fatigue musculaire. Bien que les PAUM soient différents, ils ont une forme d'onde relativement proche et sont par conséquent difficiles à différencier. Enfin, à force constante, le train de PAUM présente une fréquence moyenne de répétition des décharges constante. Une variation aléatoire, de l'IID, de l'ordre de 10 à 20% de l'IID moyen, est cependant à noter.

La mesure du signal EMG peut être effectuée par le biais d'électrodes intramusculaires ou de surface. Les électrodes intramusculaires permettent une mesure précise et localisée du muscle, mais cet examen clinique reste invasif. Les électrodes de surface, non-invasives, permettent une mesure globale de l'activité du muscle mais complexifient fortement le traitement des données et notamment les algorithmes de décomposition réalisant la séparation des TPAUM au sein du signal EMG mesuré.

Un modèle analytique des trains de décharges a enfin été défini selon deux modèles de gigues. La première méthode définit la gigue comme un processus iid stationnaire et la seconde définit celle-ci comme une marche aléatoire. Ce modèle sera utilisé par la suite pour l'étude théorique des signaux EMG ainsi que pour les simulations.

Dans ce document, nous nous intéresserons tout particulièrement à l'analyse de la cyclostationnarité d'un TPAUM en condition isométrique et à force constante.

Chapitre II. Cyclostationnarité d'un train de potentiels d'action d'unité motrice (TPAUM)

De nombreux auteurs montrent qu'il est possible d'observer les fréquences de décharges sur la densité spectrale de puissance du signal EMG ainsi que sur la transformée de Fourier du signal rectifié, bien que ces signaux ne soient pas strictement périodiques.

Nous proposons ici d'étudier le modèle des signaux EMG à la lumière de la théorie cyclostationnaire qui est un outil d'étude des périodicités sous-jacentes.

A partir du modèle analytique défini au Chapitre I.2.3, on propose d'analyser la cyclostationnarité d'un TPAUM. Une telle analyse permettra de justifier, dans la suite de ce document, l'utilisation d'une méthode de séparation de sources appliquée aux signaux cyclostationnaires et d'apporter une réponse théorique à la présence d'énergie aux fréquences de décharge dans la densité spectrale de puissance du signal EMG.

Le modèle, décrit par l'équation (6), peut se décliner de deux manières. Un modèle simplifié consiste à considérer la gigue temporelle comme étant un processus iid Gaussien tel que décrit par l'équation (7). Un modèle plus réaliste est de considérer, non pas la gigue, mais l'intervalle entre les impulsions, comme iid Gaussien, tel que décrit dans [34] et reporté dans l'équation (9). Un tel modèle a été également proposé dans [51], [52] et [53] pour l'application aux signaux mécaniques de vibrations de roulement à bille défectueux. Nous verrons que ce modèle n'est plus tout à fait cyclostationnaire, mais peut être qualifié de cyclostationnaire flou [53].

1 Processus cyclostationnaire

1.1 Introduction

La théorie de la cyclostationnarité remonte aux années 70. Elle a été introduite dans la thèse de Hurd [54] puis reprise par Gardner dans les années 80 [55] [56] [57] [58] [59]. De nombreuses applications ont vu le jour, telles qu'en télécommunications [59], au diagnostic d'engrenage [60] ou de roulement à billes [61], ou encore en radioastronomie [62]. La cyclostationnarité est définie comme une extension du concept de stationnarité ou comme un cas particulier de la non-stationnarité. Un tel signal est défini par une périodicité à l'ordre n de ses statistiques.

1.2 Cyclostationnarité au sens strict

La cyclostationnarité au sens strict d'un signal se traduit par une fonction de répartition périodique, de période T :

$$F_X(x,t) = F_X(x,t+kT)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \;\; et \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

En théorie des probabilités, la fonction de répartition d'une variable aléatoire est entièrement décrite par tous ses moments. On peut donc en conclure que tous les moments statistiques d'un signal cyclostationnaire au sens strict sont des fonctions périodiques du temps :

$$\mathcal{M}_x^n(t) = \mathcal{M}_x^n(t+kT)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{Z} \quad et \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{12}$$

- ***Cyclostationnarité à l'ordre n***

On distinguera, tout comme pour la classe stationnaire, différents ordres [Gar94, Spo94].

- Au premier ordre, la moyenne est périodique :

$$m_x(t) = \mathbb{E}[x(t)] = m_x(t+kT)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \;\; et \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

avec $\mathbb{E}[\cdot]$ l'opérateur d'espérance mathématique.

- Au second ordre, la fonction d'autocorrélation est périodique. On a alors :

$$\Gamma_{xx}(t,\mu) = \mathbb{E}[x(t+\mu)\cdot x^*(t)] = \Gamma_{xx}(t+kT,\mu)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,, \mu \in \mathbb{R} \;\; et \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

où $\cdot^*$ désigne l'opérateur de conjugaison complexe. Notons ici que la variable considérée est centrée. Selon les auteurs, d'autres formulations peuvent être données pour la définition de la fonction d'autocorrélation instantanée. Certains auteurs [63] proposent la définition :

$$\Gamma_{xx}\,(t,\mu) = \mathbb{E}[x(t+\gamma\mu)\cdot x^*(t-\bar{\gamma}\mu)]\,, \quad avec\; \bar{\gamma} = 1-\gamma \tag{15}$$

où γ est un paramètre choisi en fonction de la définition. Avec $\gamma = 1$, on retrouve la définition précédente ; avec $\gamma = 1/2$, on obtient une forme symétrique ou centrée.

- ***Cyclostationnarité au sens large***

Un signal est dit cyclostationnaire au sens large lorsque ses moments d'ordre un et deux sont conjointement périodiques.

La Figure 10 résume les différents modes de représentation au second ordre des signaux stationnaires, non stationnaires et cyclostationnaires. Les signaux non-stationnaires possèdent une fonction d'autocorrélation variable dans le temps. Celle-ci dépend alors de deux paramètres : le temps t et le retard μ. Il est possible d'appliquer la transformée de Fourier sur le temps t et sur le délai μ, donnant respectivement les fréquences α dites cycliques et les fréquences f spectrales. On a donc quatre représentations possibles.

- La première est l'autocorrélation qui dépend de t et de $\boldsymbol{\mu}$.

- La seconde est la représentation temps-fréquence obtenue en appliquant la transformée de Fourier sur $\boldsymbol{\mu}$. La fréquence obtenue est appelée fréquence spectrale notée f.
- La troisième est la corrélation cyclique (CC) obtenue par la transformée de Fourier sur t. La fréquence obtenue est appelée fréquence cyclique notée $\boldsymbol{\alpha}$.
- La quatrième est la densité spectrale cyclique (DSC) obtenue par la double transformée de Fourier sur t et $\boldsymbol{\mu}$. L'intégration de la DSC sur f forme la densité spectrale cyclique intégrée (DSCi).

Ces deux dernières représentations sont particulièrement intéressantes dans le cas d'un signal cyclostationnaire car son autocorrélation étant périodique en t, on observera des raies en fréquence cyclique à la fréquence de cyclostationnarité et ses multiples entiers.

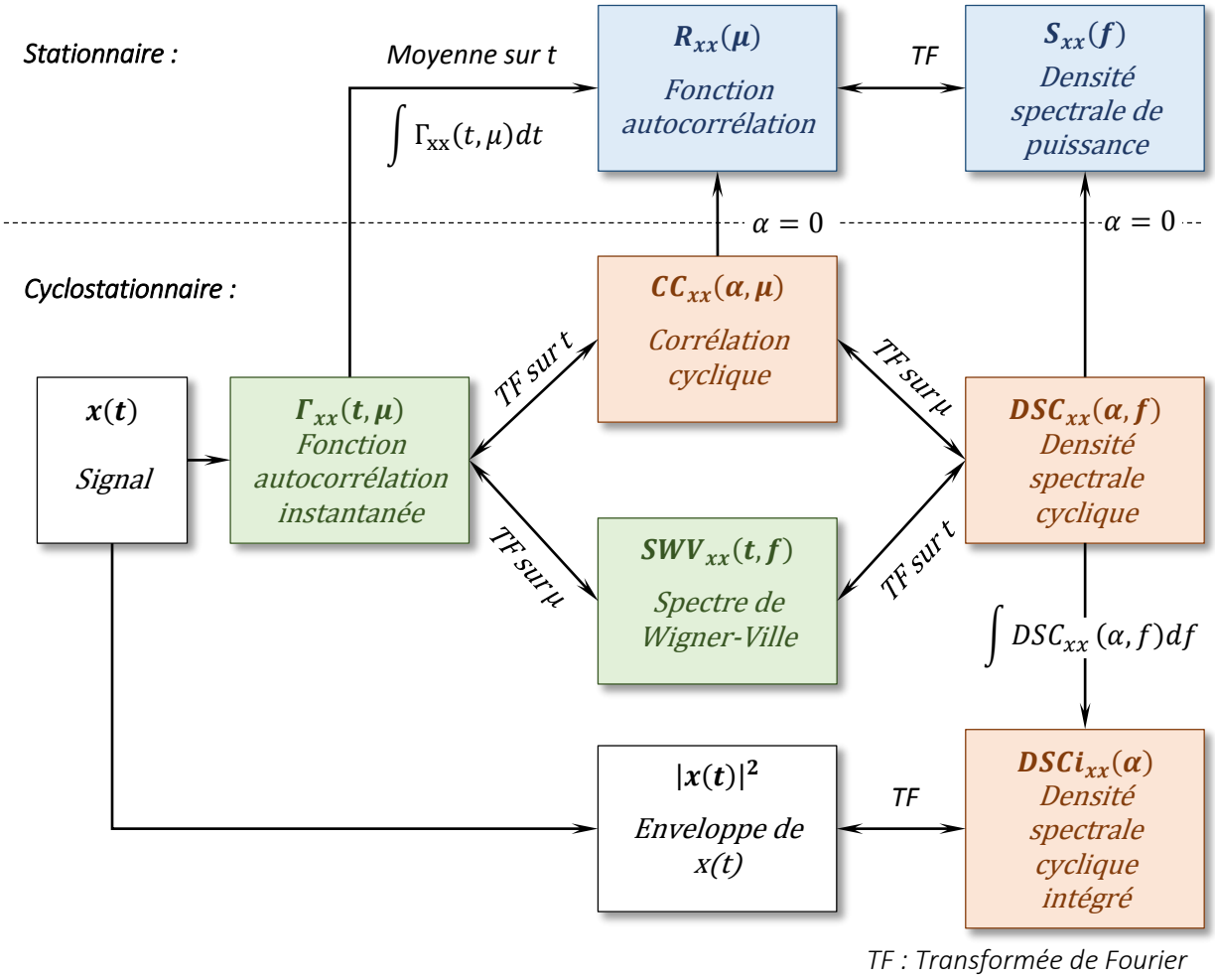

Figure 10 : Représentation à l'ordre deux d'un signal cyclostationnaire.
En vert, la fonction d'autocorrélation et le spectre temps-fréquence sont des outils d'analyse des signaux non-stationnaires.
En rouge des outils d'analyse de signaux cyclostationnaires sont présentés : la corrélation cyclique (CC), la densité spectrale cyclique (DSC) et la densité spectrale cyclique intégrée (DSCi).
En bleu, les outils d'analyse classique des signaux stationnaires.

1.3 Outils d'analyse

Les outils d'analyse de la cyclostationnarité à l'ordre deux, introduit précédemment, sont définis comme suit.

- ***Corrélation cyclique (CC)***

Elle est définie par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation en fonction du temps :

$$\mathrm{CC}_{xx}(\alpha,\mu) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{xx}(t,\mu) e^{-2i\pi\alpha t} dt \tag{16}$$

Dans le cas d'un signal cyclostationnaire, celui-ci étant périodique sur t, on observe alors des raies aux multiples entiers de l'inverse de la période. La Figure 11 illustre la représentation de la fonction de corrélation cyclique d'un signal cyclostationnaire de période T.

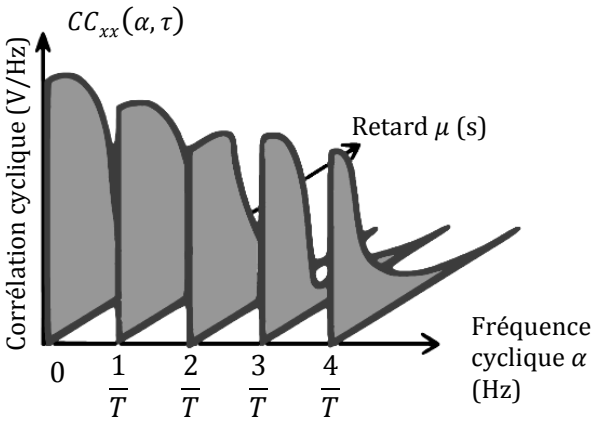

Figure 11 : Illustration de la corrélation cyclique d'un signal cyclostationnaire.
La corrélation cyclique est non nulle uniquement pour les fréquences cycliques multiples de la fréquence cyclique fondamentale du signal 1/T.

- ***Densité spectrale cyclique ou corrélation spectrale***

La densité spectrale cyclique est définie par la double transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation sur t et sur μ :

$$DSC_{xx}(\alpha,f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{xx}(t,\mu) e^{-2i\pi(f\mu+\alpha t)} dt d\mu \tag{17}$$

Il est également possible de définir la DSC directement en fréquence. En effet, par changement de variable, on peut déduire que l'équation (17), s'écrit comme l'autocorrélation fréquentielle de x (cf. équation (18)). La DSC met en évidence la corrélation entre les composantes fréquentielles du signal étudié, ce qui explique que certains auteurs parlent de corrélation spectrale plutôt que de densité spectrale cyclique.

$$DSC_{xx}(\alpha,f) = \mathbb{E}\left[X\left(f+\frac{1}{2}\alpha\right)X^*\left(f-\frac{1}{2}\alpha\right)\right] \tag{18}$$

Comme représenté Figure 12, la périodicité sur t d'un signal cyclostationnaire se traduit sur la DSC par la présence de raies aux multiples de l'inverse de la période.

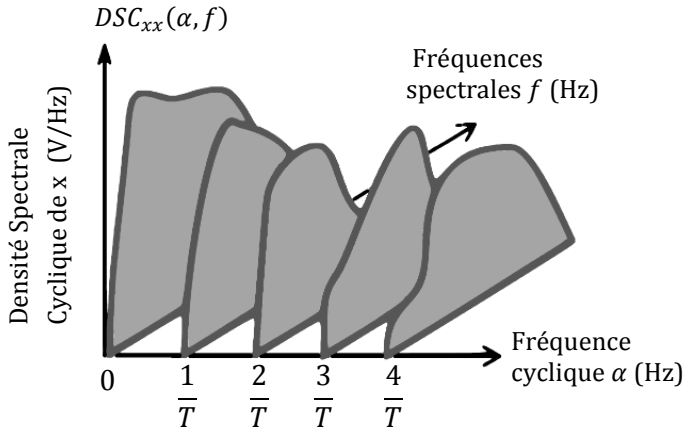

Figure 12 : Illustration en 3-D de la densité spectrale cyclique.
La figure montre la densité spectrale cyclique (DSC) d'un signal cyclostationnaire de fréquence fondamentale T^{-1}. On observe un contenu spectral non nul uniquement aux multiples de la fréquence cyclique fondamentale.

- ***Analyse d'enveloppe***

Randall et Antoni [61] montrent qu'il est intéressant d'étudier la densité spectrale cyclique intégrée (DSCi) sur f. On définit le spectre cyclique intégré par :

$$DSCi_{xx}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} DSC_{xx}(f, \alpha)\, df \tag{19}$$

Par substitution avec la définition de l'équation (17) on obtient :

$$DSCi_{xx}(\alpha) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \Gamma_{xx}(t, \mu) e^{-2i\pi(f\mu + \alpha t)} dt d\mu df \tag{20}$$

En isolant l'intégrale sur f, on remarque que celle-ci est la transformée de Fourier sur μ de la constante 1 ce qui est équivaut à la fonction delta-Dirac centrée en $\mu = 0$:

$$DSCi_{xx}(\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{xx}(t, \mu) \delta(\mu) d\mu \cdot e^{-2i\pi\alpha t} dt \tag{21}$$

Il en résulte que la DSCi est équivalente à la transformée de Fourier sur le temps t de la fonction d'autocorrélation à $\mu = 0$:

$$DSCi_{xx}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{xx}(t, 0) e^{-2i\pi\alpha t} dt \tag{22}$$

Or pour un retard μ nul, la fonction d'autocorrélation équivaut au module carré de x. On en déduit que la DSCi est également la transformée de Fourier du module au carré du signal étudié :

$$DSCi_{xx}(\alpha) = TF\big[\mathbb{E}[|x(t)|^2]\big](\alpha) \tag{23}$$

On note que ce résultat est uniquement valable pour les signaux à moyenne nulle.

L'estimation et l'interprétation de la DSCi peuvent être erronées de par la présence de repliement de spectre, même lorsque le théorème de Nyquist-Shannon est respecté. Il convient donc de prendre certaines précautions pour la calculer.

1.4 Repliement de spectre

Il est bien connu que le respect du théorème de Nyquist-Shannon permet d'éviter le phénomène de repliement de spectre lors de l'échantillonnage du signal. Randall et ses co-auteurs montrent que le respect de ce théorème n'est en soit pas suffisant lorsqu'on estime la DSCi. En effet, de par la périodicité du spectre d'un signal échantillonné, la DSC présente également une périodicité comme le montre la Figure 14 par comparaison avec la DSC d'un signal continu de bande passante f_{max}, Figure 13. Dans le cas d'un signal échantillonné la bande passante est alors définie par la fréquence de Nyquist-Shannon soit $f_e/2$ où f_e désigne la fréquence d'échantillonnage.

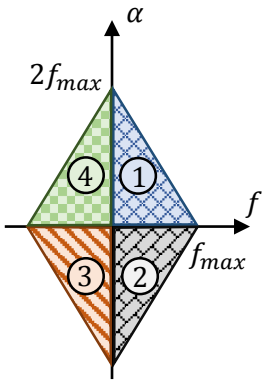

Figure 13 : Couverture de la DSC d'un signal réel. Signal de bande passante f_{max} (extrait de [61]).

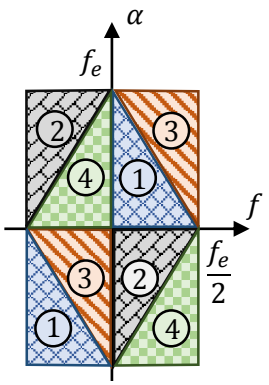

Figure 14 : Couverture de la DSC d'un signal échantillonné. Signal de fréquence d'échantillonnage f_e (extrait de [61]).

En conséquence, l'intégration sur f du spectre cyclique de l'équation (18), équivalant à la transformée de Fourier du signal rectifié au carré donnée à l'équation (23), est susceptible d'introduire des composantes « parasites » provoquées par la redondance des parties 3 et 2 des Figure 13 et Figure 14. Deux solutions sont alors proposées dans [61] pour éviter ce problème : soit de sur-échantillonner d'un facteur 2 ou supérieur, soit d'utiliser le signal analytique. La dernière solution, assez commode, permet de supprimer la composante négative du spectre du signal et ainsi supprimer tout repliement et même toute redondance de l'information. Toutefois il est à noter que si la bande passante du signal est inférieure à $f_e/4$, l'effet du repliement sera minimisé.

On propose maintenant d'appliquer ces outils d'analyse aux 2 modèles de TPAUM introduits au chapitre précédent, dénommés « modèle simplifié » et « modèle réaliste », exposés au Chapitre I.2.3.

2 Analyse cyclostationnaire du TPAUM

2.1 Modèle simplifié

2.1.1 Modèle et considérations

On considère dans un premier temps le modèle simplifié lorsque le glissement temporel $\tau_{k,j}$ est supposé blanc et stationnaire. Ce modèle est alors équivalent à un modèle classiquement utilisé en analyse vibratoire pour décrire les vibrations de roulements endommagés. Les propriétés de cyclostationnarité de ce modèle ont été étudiées dans [61] et on propose d'en rappeler les principaux résultats. Le modèle de TPAUM est le suivant :

$$x_{i,j}(t) = h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(t - kT_j - \tau_{k,j}\right) \tag{24}$$

avec $\mathbb{E}\left[\tau_{k,j}\right] = 0, \mathbb{E}\left[\tau_{p,j}\tau_{k,j}\right] = \sigma_{i,j}^2 \delta_{p-k}$ et $h_{i,j}(t)$ le PAUM. Enfin on considère $\varphi_j(\tau)$ la densité de probabilité de $\tau_{k,j}$ quel que soit k. On rappelle que i désigne le capteur et j l'UM.

Il est possible de décomposer le TPAUM en deux parties : une partie dite harmonique ou du 1er ordre qui correspond à la moyenne statistique du signal que l'on notera $\bar{x}(t)$ et une partie stochastique définie comme le signal centré, notée $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \overline{x_{i,j}}(t) &= \mathbb{E}\left[x_{i,j}(t)\right] \\ \widetilde{x_{i,j}}(t) &= x_{i,j}(t) - \overline{x_{i,j}}(t) \end{aligned} \tag{25}$$

où $\mathbb{E}[\cdot]$ désigne l'opérateur d'espérance mathématique. Comme il a été fait dans [61] on propose dans cette partie d'étudier séparément la partie déterministe et la partie stochastique.

En définitive, chaque grandeur évaluée dans la suite (fonction d'autocorrélation instantanée $\Gamma_{xx}(t,\mu)$, densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ et densité spectrale cyclique $DSC_{xx}(\alpha, f)$) sera la somme de cette grandeur évaluée dans sa version stochastique mais calculée sur des signaux centrés et de cette même grandeur évaluée dans sa version déterministe.

Plus précisément, nous aurons :

$$\Gamma_{xx}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[x\left(t + \frac{\mu}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{26}$$

décomposé en

$$\Gamma_{xx}(t,\mu) = \Gamma_{\tilde{x}\tilde{x}}(t,\mu) + \bar{x}\left(t + \frac{\mu}{2}\right) \bar{x}^*\left(t - \frac{\mu}{2}\right) \tag{27}$$

Aussi,

$$S_{xx}(f) = \mathbb{E}[|X(f)|^2] \tag{28}$$

décomposé en

$$S_{xx}(f) = S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) + |\bar{X}(f)|^2 \tag{29}$$

Et

$$DSC_{xx}(\alpha, f) = \mathbb{E}\left[X\left(f + \frac{\alpha}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\alpha}{2}\right)\right] \tag{30}$$

décomposé en

$$DSC_{xx}(\alpha, f) = DSC_{\tilde{x}\tilde{x}}(\alpha, f) + \bar{X}\left(f + \frac{\alpha}{2}\right)\bar{X}^*\left(f - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{31}$$

Par souci de simplification de notation, les symboles ˜ seront omis pour les calculs de la partie stochastique.

2.1.2 Etude de la partie déterministe du TPAUM

Soit $\overline{x_{i,j}}(t)$ la partie moyenne (1er ordre) du TPAUM définie par :

$$\overline{x_{i,j}}(t) = \mathbb{E}\left[h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\big(t - kT_j - \tau_{k,j}\big)\right] \tag{32}$$

Les opérateurs d'espérance mathématique et de convolution étant linéaires, il est possible de simplifier l'équation par :

$$\overline{x_{i,j}}(t) = h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\big[\delta\big(t - kT_j - \tau_{k,j}\big)\big] \tag{33}$$

Cette dernière équation peut être réécrite à l'aide du produit de convolution :

$$\overline{x_{i,j}}(t) = h_{i,j}(t) \otimes \varphi_j(t) \otimes \delta_{T_j}(t) \tag{34}$$

avec $\delta_{T_j}(t) = \sum_k \delta\big(t - kT_j\big)$ un peigne de Dirac de période T_j. On pose $\overline{X_{i,j}}(f) = TF\big[\overline{x_{i,j}}(t)\big]$. On a alors :

$$\overline{X_{i,j}}(f) = T_j^{-1} \cdot H_{i,j}(f) \cdot \Phi_j(f) \cdot \delta_{T_j^{-1}}(f) \tag{35}$$

Enfin le module carré de cette équation, densité spectrale de puissance de la partie déterministe du TPAUM, est égal à :

$$\boxed{\left|\overline{X_{i,j}}(f)\right|^2 = T_j^{-2}\delta_{T_j^{-1}}(f) \cdot \left|H_{i,j}(f)\right|^2 \cdot \left|\Phi_j(f)\right|^2} \tag{36}$$

En supposant Gaussienne la densité de probabilité de la gigue, on a :

$$\varphi_j(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma_j^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \tag{37}$$

La transformée de Fourier d'une fonction Gaussienne s'écrit :

$$\phi_j(f) = TF\big[\varphi_j(t)\big](f) = e^{-2\pi^2\sigma_j^2 f^2} \tag{38}$$

Finalement, sa densité spectrale de puissance (DSP) s'écrit :

$$\left|\phi_j(f)\right|^2 = e^{-4\pi^2\sigma_j^2 f^2} \tag{39}$$

La bande passante à -3dB est donnée par :

$$\left|\phi_j(f_{-3dB})\right|^2 = 1/2 \tag{40}$$

soit

$$f_{-3dB} = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi\sigma_j} \tag{41}$$

Cette fréquence de coupure va impacter fortement la DSP du TPAUM qui tend vers les basses fréquences avec l'augmentation de la puissance de gigue.

La Figure 15 illustre la DSP de la partie déterministe du TPAUM en supposant un IID moyen de 100ms, soit une fréquence de décharge de 10Hz et une gigue gaussienne d'écart-type égal à 10% de l'IID moyen, soit 10ms. La DSP du PAUM, $h_{i,j}(t)$, est calculée en utilisant la formule de Shwedyk *et al.* [42], donnée à l'équation (10).

L'équation (36) peut être décomposée en trois parties distinctes. Nous avons d'une part la contribution de la gigue (tirets bleus sur la Figure 15a) qui forme un filtre passe-bas dont la bande passante à -3dB est donnée par l'équation (41), ici $f_{-3dB} = 13{,}25Hz$, d'autre part la contribution du PAUM (tirets rouges sur la Figure 15a) et enfin le train d'impulsions moyen donné par $\delta_{T_j^{-1}}(f)$ (trait vert sur la Figure 15a). Finalement la Figure 15a montre la contribution totale de la partie harmonique dans la DSP, normalisée par rapport à la DSP du MUAP. Celle-ci présente un spectre de raies, montrant la périodicité de la partie moyenne. Seule une faible contribution subsiste à cause du filtrage passe-bas de la gigue et du filtrage passe-haut du PAUM.

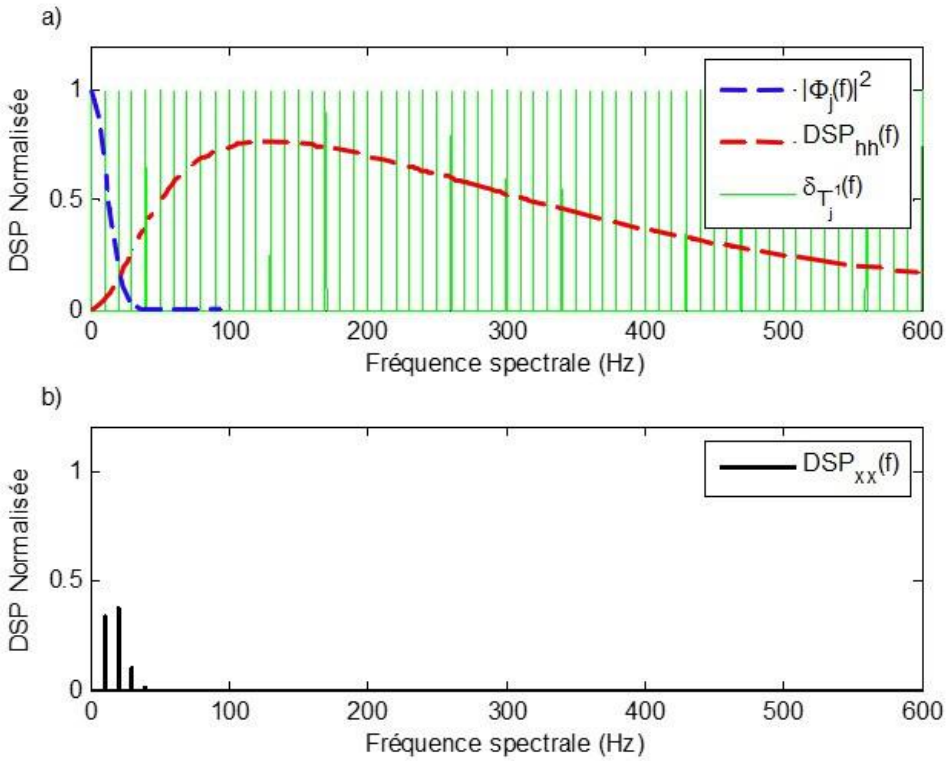

Figure 15 : Illustration de la DSP de la **partie déterministe** du modèle simplifié.
En a) la DSP est décomposée en trois parties, la contribution de la gigue (tirets bleus), la contribution du PAUM (tirets rouges) et la contribution du train d'impulsions nerveux (en vert). En b) la DSP résultante du TPAUM est donnée par le produit des trois contributions données en a).

2.1.3 Fonction d'autocorrélation instantanée du TPAUM

Dans le but de calculer la densité spectrale de puissance (à partir de la DSP instantanée moyennée) puis la densité spectrale cyclique d'un TPAUM, nous commencerons par calculer la fonction d'autocorrélation de celui-ci. Soit $\Gamma_{\mathrm{xx}}(t,\tau)$ la fonction d'autocorrélation instantanée de x définie par :

$$\Gamma_{\mathrm{xx}}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[x\left(t+\frac{\mu}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\right] - \overline{x_{i,j}}\left(t+\frac{\mu}{2}\right)\overline{x_{i,j}}^*\left(t-\frac{\mu}{2}\right) \tag{42}$$

En injectant l'équation (24) dans l'espérance mathématique, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[x\left(t+\frac{\mu}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{i,j}\left(t+\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right)\cdot\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right)^*\right]\end{aligned} \tag{43}$$

Les opérateurs d'espérance mathématique et de convolution étant linéaires il est possible de simplifier l'équation comme :

$$\mathbb{E}\left[x\left(t+\frac{\mu}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\right] = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ l\in\mathbb{Z}}} \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)h_{i,j}^*\left(t+\frac{\mu}{2}-lT_j-\tau_{l,j}\right)\right] \tag{44}$$

Or, de par l'indépendance de $\tau_{k,i}$ et $\tau_{l,i}$ pour tout $k \neq l$, l'espérance du produit des deux termes est égale aux produits des espérances. Par séparation des auto-termes et termes croisés on obtient alors la relation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[x\left(t+\frac{\mu}{2}\right)x^*\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\right] = &\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)h_{i,j}^*\left(t+\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right]\\ &+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ l\in\mathbb{Z}\\ k\neq l}} \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right]\mathbb{E}\left[h_{i,j}^*\left(t+\frac{\mu}{2}-lT_j-\tau_{l,j}\right)\right]\end{aligned} \tag{45}$$

Par ailleurs, on a :

$$\overline{x_{l,j}}\left(t+\frac{\mu}{2}\right)\overline{x_{l,j}}^*\left(t-\frac{\mu}{2}\right) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ l\in\mathbb{Z}}} \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right]\mathbb{E}\left[h_{i,j}^*\left(t+\frac{\mu}{2}-lT_j-\tau_{l,j}\right)\right] \tag{46}$$

Les termes croisés entre les équations (45) et (46) s'annulent et l'équation (42) devient alors :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{xx}}(t,\mu) = &\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)h_{i,j}^*\left(t+\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right]\\ &-\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right]\mathbb{E}\left[h_{i,j}^*\left(t+\frac{\mu}{2}-kT_j-\tau_{k,j}\right)\right]\end{aligned} \tag{47}$$

Par la définition de l'espérance mathématique (voir Annexe A.1) on peut également écrire que :

$$\mathbb{E}\left[h_{i,j}(t-\tau_{k,j})\right] = \int_{\mathbb{R}} h_{i,j}(t-\tau_{k,j})\varphi_j(\tau_{k,j})d\tau_{k,j} \tag{48}$$

Ce qui correspond à la définition du produit de convolution. Finalement on en déduit que l'équation (48) s'écrit :

$$\mathbb{E}\left[h_{i,j}(t-\tau_{k,j})\right] = h_{i,j}(t) \otimes \varphi_j(t) \tag{49}$$

En injectant ce résultat dans l'équation (47), la fonction d'autocorrélation instantanée devient :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{xx}}(t,\mu) = & \left(h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\cdot h_{i,j}^{*}\left(t+\frac{\mu}{2}\right)\right)\otimes\varphi_j(t)\otimes\delta_{T_j}(t) \\ & -\left(\left(h_{i,j}\otimes\varphi_j\right)\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\cdot\left(h_{i,j}^{*}\otimes\varphi_j\right)\left(t+\frac{\mu}{2}\right)\right)\otimes\delta_{T_j}(t)\end{aligned} \tag{50}$$

Pour simplifier les notations on pose :

$$\mathrm{R}_{\mathrm{hh}}(t,\mu) = h_{i,j}\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\cdot h_{i,j}^{*}\left(t+\frac{\mu}{2}\right) \tag{51}$$

et

$$\mathrm{R}_{\widetilde{\mathrm{hh}}}(t,\mu) = \left(h_{i,j}\otimes\varphi_j\right)\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\cdot\left(h_{i,j}^{*}\otimes\varphi_j\right)\left(t+\frac{\mu}{2}\right) \tag{52}$$

Finalement on a :

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{xx}}(t,\mu) = \left(\mathrm{R}_{\mathrm{hh}}(t,\mu)\otimes\varphi_j(t) - \mathrm{R}_{\widetilde{\mathrm{hh}}}(t,\mu)\right)\otimes\delta_{T_j}(t)} \tag{53}$$

2.1.4 Densité Spectrale de Puissance

La DSP d'un signal non stationnaire correspond à la moyenne temporelle du spectre instantané de celui-ci, soit :

$$S_{xx}(f) = \int_{\mathbb{R}} TF[\Gamma_{\mathrm{xx}}(t,\mu)](t,f)dt \tag{54}$$

Des équations (54) et (53) on déduit la DSP du TPAUM :

$$S_{xx}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\mathrm{xx}}(t,\mu)e^{-2i\pi\mu f}d\mu dt \tag{55}$$

soit, en utilisant l'équation (53) :

$$S_{xx}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\mathrm{R}_{\mathrm{hh}}(t,\mu)\otimes\varphi_j(t) - \mathrm{R}_{\widetilde{\mathrm{hh}}}(t,\mu)\right)e^{-2i\pi\mu f}d\mu\otimes\delta_{T_j}(t)dt \tag{56}$$

Or d'après le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\otimes g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt\cdot\int_{\mathbb{R}} g(t)dt \tag{57}$$

Alors,

$$\begin{aligned}S_{xx}(f) = & \left(\iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma_{\mathrm{hh}}(t,\mu)e^{-2i\pi\mu f}d\mu dt\cdot\int_{\mathbb{R}}\varphi_i(t)dt - \iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma_{\widetilde{\mathrm{hh}}}(t,\mu)e^{-2i\pi\mu f}d\mu dt\right) \\ & \cdot\int_{\mathbb{R}}\delta_{T_j}(t)dt\end{aligned} \tag{58}$$

Or $\varphi_j(t)$ est une densité de probabilité, donc par définition $\int_{\mathbb{R}}\varphi_j(t)dt = 1$.

$$S_{xx}(f) = T^{-1}\iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma_{\mathrm{hh}}(t,\mu)e^{-2i\pi\mu f}d\mu dt - T^{-1}\iint_{\mathbb{R}^2}\Gamma_{\widetilde{\mathrm{hh}}}(t,\mu)e^{-2i\pi\mu f}d\mu dt \tag{59}$$

De plus l'équation (18) conduit à la relation suivante :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\mathrm{hh}}(t,\mu) e^{-2i\pi(\mu f+\alpha t)} d\mu dt = H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) H_{i,j}^{*}\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{60}$$

avec $H_{i,j}(f)$ la transformée de Fourier (TF) de $h_{i,j}(t)$. Donc pour $\alpha = 0$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\mathrm{hh}}(t,\mu) e^{-2i\pi\mu f} d\mu dt = \left|H_{i,j}(f)\right|^2 \tag{61}$$

et de plus,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\widetilde{\mathrm{hh}}}(t,\mu) e^{-2i\pi\mu f} d\mu dt = \left|H_{i,j}(f)\right|^2 \cdot \left|\phi_j(f)\right|^2 \tag{62}$$

avec $\phi_j(f)$ la TF de $\varphi_j(t)$. La DSP s'écrit finalement :

$$\boxed{S_{xx}(f) = T_j^{-1} \cdot \left|H_{i,j}(f)\right|^2 \cdot \left(1 - \left|\phi_j(f)\right|^2\right)} \tag{63}$$

La Figure 16 montre la DSP d'un TPAUM décrite par l'équation (63). L'équation (63) peut être décomposée en deux parties. Nous avons d'une part la contribution de la gigue (tirets bleus sur la Figure 16a) qui forme un filtre passe-haut dont la bande passante à -3dB est donnée par l'équation (41), ici on a $f_{-3dB} = 13{,}25Hz$, et d'une autre part nous avons la contribution du PAUM (tirets rouge sur la Figure 16a). Finalement la Figure 16b montre la DSP normalisée du TPAUM. On remarque que ce dernier est continu et ne révèle donc aucune périodicité.

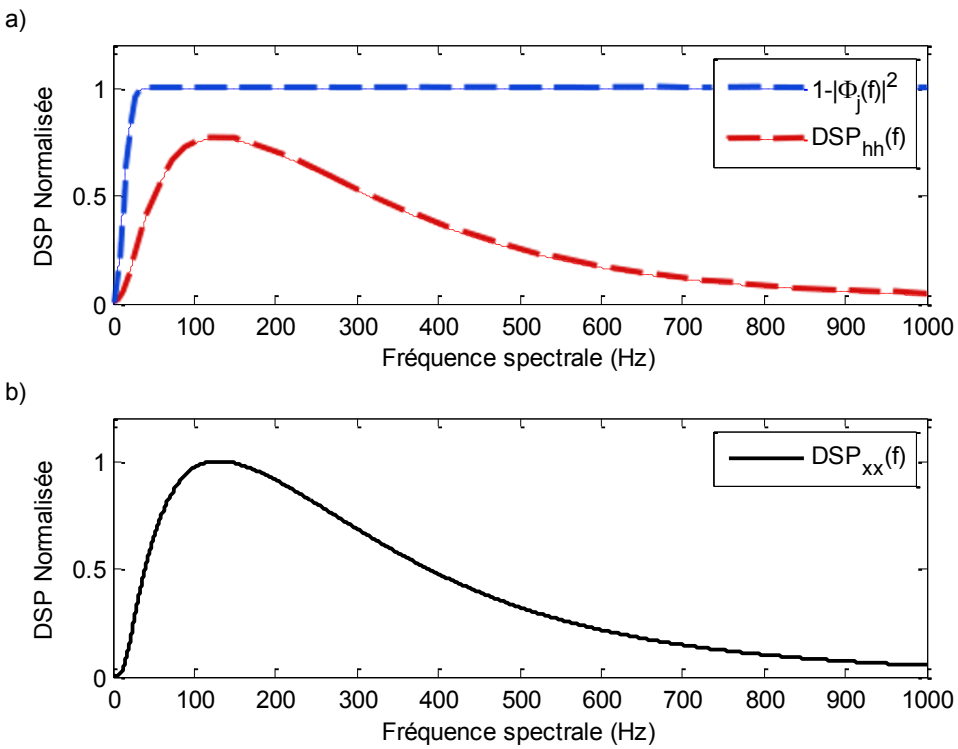

Figure 16 : Illustration de la DSP de la partie stochastique du modèle simplifié.
En a) il est montré la contribution de la gigue sur la densité spectrale de puissance (tiret bleu) et de la densité spectrale de puissance d'un PAUM (tiret rouge). En b) la DSP résultante du TPAUM est le produit des deux contributions données en a).

En ajoutant les résultats des parties déterministe et stochastique, on en déduit en Figure 17 la DSP finale du TPAUM.

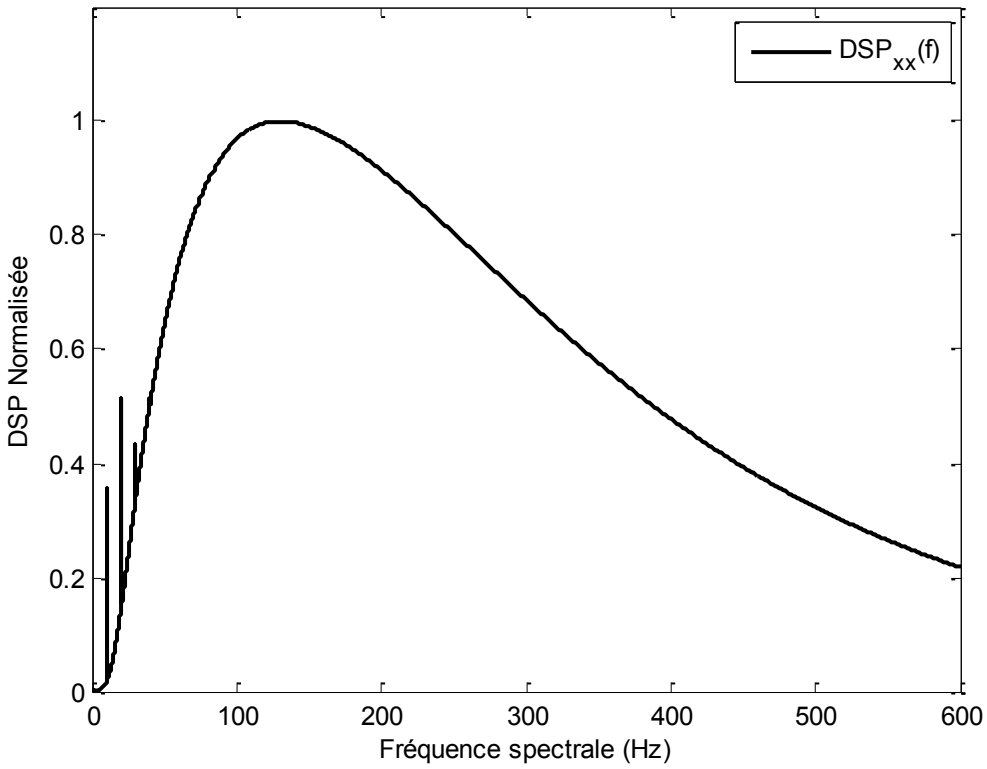

Figure 17 : Illustration de la DSP totale du modèle simplifié

2.1.5 Densité spectrale cyclique

Nous nous intéressons en premier lieu à la DSC de la partie stochastique.

Rappelons que la DSC, d'un signal noté x(t) s'écrit :

$$DSC_{xx}(\alpha, f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{xx}(t,\mu) e^{-2i\pi(\alpha t + f\mu)} dt d\mu \tag{64}$$

En injectant la solution trouvée dans l'équation (53), on a :

$$DSC_{xx}(\alpha, f) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\Gamma_{\mathrm{hh}}(t,\mu) \otimes \varphi_j(t) - \Gamma_{\widetilde{\mathrm{h}}\widetilde{\mathrm{h}}}(t,\mu) \right) \cdot e^{-2i\pi f\mu} d\mu \right) \otimes \delta_{T_j}(t) e^{-2i\pi\alpha t} dt \tag{65}$$

On reconnait ici la transformée de Fourier d'un produit de convolution :

$$\begin{aligned} DSC_{xx}(\alpha, f) = \Bigg(& \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\mathrm{hh}}(t,\mu) e^{-2i\pi(f\mu + \alpha t)} d\mu dt \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(t) e^{-2i\pi\alpha t} dt \\ & - \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\widetilde{\mathrm{h}}\widetilde{\mathrm{h}}}(t,\mu) e^{-2i\pi(f\mu + \alpha t)} d\mu dt \Bigg) \cdot \int_{\mathbb{R}} \delta_{T_j}(t) e^{-2i\pi\alpha t} dt \end{aligned} \tag{66}$$

Cette équation se simplifie comme :

$$DSC_{xx}(\alpha,f) = T_j^{-1} \cdot \left(DSC_{hh}(\alpha,f) \cdot \Phi_j(\alpha) - DSC_{\tilde{h}\tilde{h}}(\alpha,f)\right) \cdot \delta_{T_j^{-1}}(\alpha) \tag{67}$$

avec

$$DSC_{\tilde{h}\tilde{h}}(\alpha,f) = DSC_{hh}(\alpha,f) \cdot DSC_{\Phi\Phi}(\alpha,f)$$

$$DSC_{hh}(\alpha,f) = H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) \cdot H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$DSC_{\Phi\Phi}(\alpha,f) = \Phi_j\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Phi_j^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{DSC_{xx}(\alpha,f) = T_j^{-1} \cdot DSC_{hh}(\alpha,f) \cdot \left(\Phi(\alpha) - DSC_{\Phi\Phi}(\alpha,f)\right) \cdot \delta_{T_j^{-1}}(\alpha)} \tag{68}$$

En supposant que la gigue possède une densité de probabilité gaussienne, on déduit de l'équation (38) la DSC de sa densité de probabilité :

$$DSC_{\Phi\Phi}(\alpha,f) = e^{-2\pi^2\sigma_j^2\left(2f^2+\frac{\alpha^2}{2}\right)} \tag{69}$$

On peut séparer la DSC du TPAUM en trois parties distinctes : une contribution de la DSC du PAUM $\mathrm{DSC_{hh}}(\alpha,f)$, représentée Figure 18 avec les mêmes paramètres que précédemment, une contribution de la gigue, représentée Figure 19 et donnée par $\Phi(\alpha) - \mathrm{DSC_{\Phi\Phi}}(\alpha,f)$, et une contribution du train d'impulsion donnée par $T_j^{-1}\delta_{T_j^{-1}}(\alpha)$. Cette dernière montre un spectre de raies en fréquence cyclique et un spectre blanc continu en fréquence spectrale.

La contribution de la gigue est un filtre passe-haut en fréquences cycliques et spectrales. On a :

$$\Phi(\alpha) - DSC_{\Phi\Phi}(\alpha,f) = e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2} - e^{-2\pi^2\sigma_j^2\left(2f^2+\frac{\alpha^2}{2}\right)} \tag{70}$$

En $\alpha = 0$ et à -3dB la fréquence de coupure en fréquence spectrale est donnée par l'équation (41). En prenant le cas où $f \gg \alpha$, on a :

$$\Phi(\alpha) - DSC_{\Phi\Phi}(\alpha,f) = e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2} - e^{-2\pi^2\sigma_j^2\left(2f^2+\frac{\alpha^2}{2}\right)} \approx e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2} \tag{71}$$

Sous cette condition, la fréquence de coupure en fréquence cyclique à -3dB est donnée par :

$$\alpha_{-3dB} = \frac{\sqrt{\ln(2)}}{\sqrt{2}\pi\sigma_j} = \sqrt{2} \cdot f_{-3dB} \tag{72}$$

Dans notre exemple, nous avons $f_{-3dB} = 13{,}25Hz$ et $\alpha_{-3dB} = 18{,}74Hz$.

La Figure 20 montre le résultat complet de la DSC du TPAUM, donnée en équation (68). On observe donc finalement un spectre de raies en fréquence cyclique mettant en évidence le caractère cyclostationnaire du TPAUM, la fréquence de cyclostationnarité étant égale à la fréquence de décharge de l'UM. Enfin, on remarque que pour une fréquence cyclique fixée égale à un multiple de la fréquence de cyclostationnarité, la DSC du TPAUM est égale, à un coefficient près, à la DSP du PAUM. Ceci tient compte de l'approximation donnée en équation (71) qui est valable pour une fréquence spectrale

grande devant la fréquence cyclique. Cette dernière est généralement égale à quelques dizaines de hertz au maximum et, comme l'illustre la Figure 18, la fréquence spectrale du PAUM est généralement négligeable dans ces fréquences. Sous cette condition et à la fréquence de cyclostationnarité, $\alpha = T_j^{-1}$, on a :

$$DSC_{xx}\left(T_j^{-1}, f\right) \approx T_j^{-1} e^{-2\pi^2 cv_j^2} \cdot \mathrm{DSP_{hh}}(f) \tag{73}$$

où cv est le coefficient de variation de la gigue, défini comme l'écart-type de la gigue relatif à la période de décharge moyenne :

$$cv_j = \frac{\sigma_j}{T_j} \tag{74}$$

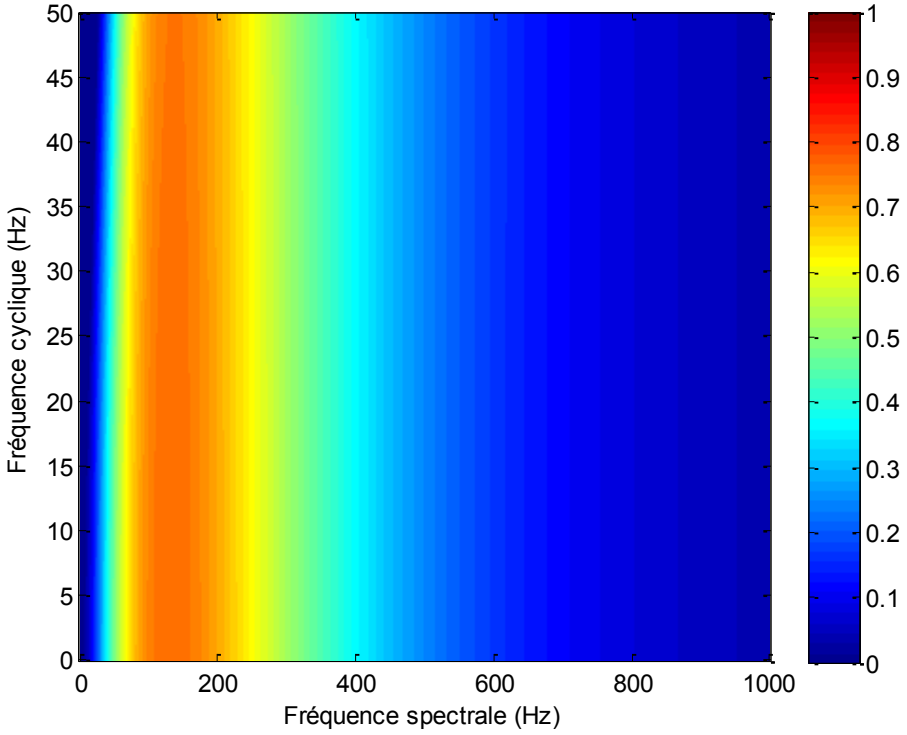

Figure 18 : Illustration de la densité spectrale cyclique théorique d'un PAUM ($\mathrm{DSC_{hh}}(\alpha, f)$).

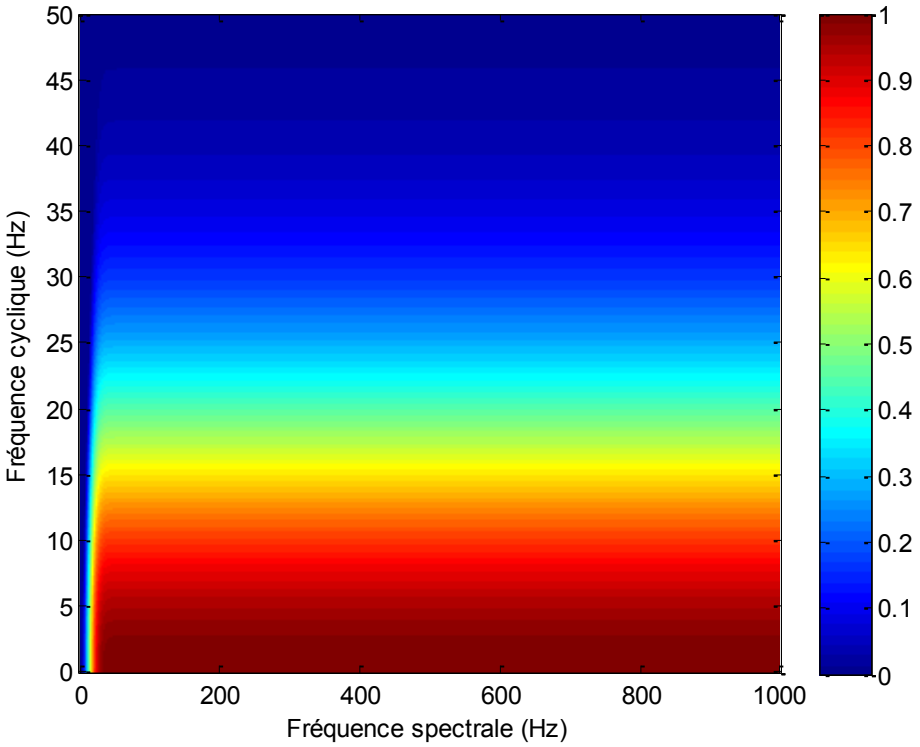

Figure 19 : Illustration de la contribution de la gigue sur la DSC théorique d'un TPAUM pour le modèle simplifié. Composante $\Phi(\alpha) - DSC_{\Phi\Phi}(\alpha, f)$.

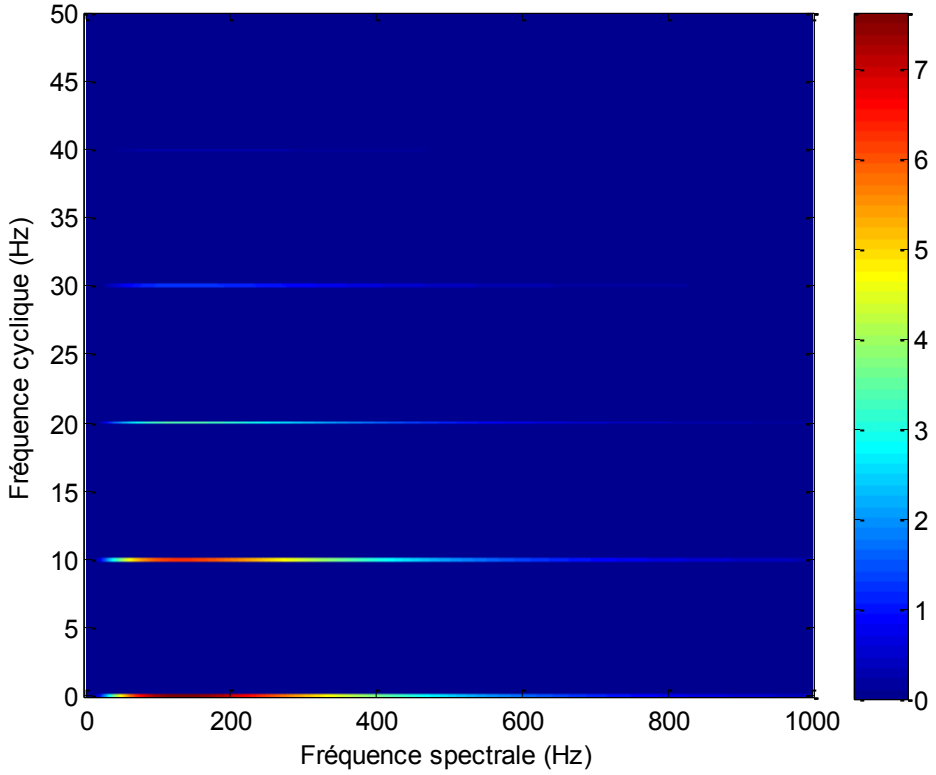

Figure 20 : Illustration de la DSC théorique de la **partie stochastique** d'un TPAUM pour le modèle simplifié. Ce plan est le produit des plans des Figure 18 et Figure 19 avec le train d'impulsions $\delta_{T_j^{-1}}(\alpha)$.

Enfin, on propose de calculer la DSC de la partie déterministe. On a :

$$\begin{aligned}\overline{X_{i,j}}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)\overline{X_{i,j}}^{*}\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \\ = T_j^{-2}\cdot H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)H_{i,j}^{*}\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot \Phi_j\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)\Phi_j^{*}\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cdot\,\delta_{T_j^{-1}}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)\delta_{T_j^{-1}}\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned} \tag{75}$$

Or, on peut simplifier le produit des distributions de Dirac par :

$$\begin{aligned}\delta_{T_i^{-1}}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)\delta_{T_i^{-1}}\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) = \sum_k\sum_l \delta\left(f+\frac{\alpha}{2}+kT_j^{-1}\right)\delta\left(f-\frac{\alpha}{2}+lT_j^{-1}\right) \\ = \delta_{T_j^{-1}}(f)\delta_{T_j^{-1}}(\alpha)\end{aligned} \tag{76}$$

Finalement, la contribution de la partie moyenne vaut :

$$\boxed{\overline{X_{i,j}}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)\overline{X_{i,j}}^{*}\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) = T_j^{-2}\cdot DSC_{hh}(\alpha,f)\cdot DSC_{\Phi\Phi}(\alpha,f)\cdot\delta_{T_j^{-1}}(f)\delta_{T_j^{-1}}(\alpha)} \tag{77}$$

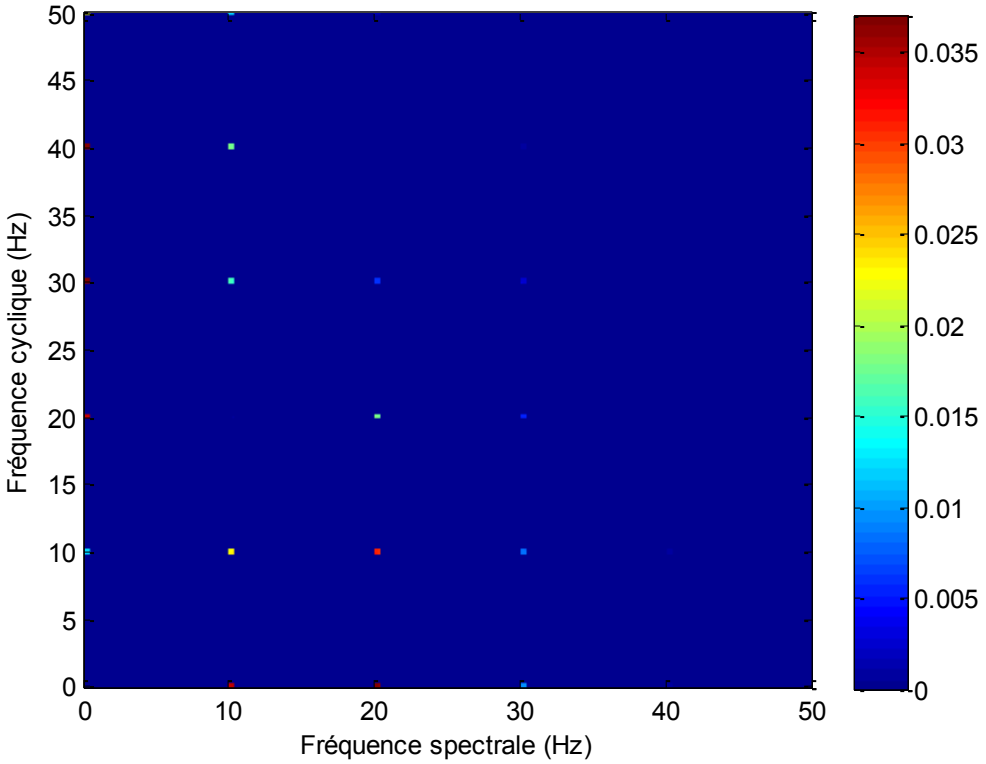

Figure 21 : Illustration de la DSC théorique de la **partie déterministe** d'un TPAUM pour le modèle simplifié.

La Figure 21 illustre la DSC théorique de la partie déterministe d'un TPAUM pour le modèle simplifié. On remarque que l'essentiel de l'énergie de celle-ci est localisé sur les basses fréquences, la fréquence de coupure à –3dB du terme $\mathrm{DSC}_{\Phi\Phi}(\alpha,f)$ étant représentée par une ellipsoïde d'équation :

$$\left(\frac{f}{f_{-3dB}}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\alpha_{-3dB}}\right)^2 = 1 \tag{78}$$

où f_{-3dB} et α_{-3dB} représentent respectivement les fréquences de coupure en fréquences spectrales et cycliques données aux équations (41) et (72). De plus, $\mathrm{DSC_{hh}}(\alpha, f)$, représentée par la Figure 18, possède une énergie négligeable aux basses fréquences rendant ainsi la partie déterministe négligeable devant la partie stochastique.

2.2 Modèle réaliste

2.2.1 Modèle et considérations

On suppose maintenant le modèle suivant, plus réaliste, considérant un intervalle inter décharge (IID) stationnaire plutôt que l'instant de décharge. En reprenant le modèle général de l'équation (1), on a :

$$x_{i,j}(t) = h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(t - \mathfrak{T}_{k,j}\right) \tag{79}$$

où l'IID est défini par $\mathfrak{T}_{k,j} - \mathfrak{T}_{k-1,j} = T_j + \epsilon_{k,j}$ avec $\epsilon_{k,j}$ une gigue iid distribuée selon une loi normale centrée de variance σ_j^2. On a donc la relation suivante :

$$\mathfrak{T}_{k,j} = \epsilon_{0,j} + \sum_{p=1}^{k}\left(T_j + \epsilon_{p,j}\right) = kT_j + \sum_{p=0}^{k} \epsilon_{p,j} \tag{80}$$

On pose $\tau_{k,j} = \sum_{p=0}^{k} \epsilon_{p,j}$. A la différence du modèle simplifié, $\tau_{k,j}$ n'est plus stationnaire mais suit toujours une loi normale centrée de variance $\sigma_{0,j}^2 + k \cdot \sigma_j^2$ où $\sigma_{0,j}^2$ est une variance initiale à k=0 introduite pour éviter toute perte de généralité.

$$x_{i,j}(t) = h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(t - kT_j - \tau_{k,j}\right), \qquad \tau_{k,j} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_{0,j}^2 + k \cdot \sigma_j^2\right) \tag{81}$$

On note $\varphi_j(\tau)$ la densité de probabilité de $\epsilon_{p,j}$ et $\varphi_{k,j}(\tau)$ celle de $\tau_{k,j}$.

Reprenons alors le même type de calculs que ceux de la sous-section Chapitre II.2.1.1.

2.2.2 Partie déterministe

On rappelle que la partie déterministe du signal est définie par :

$$\overline{x_{i,j}}(t) = \mathbb{E}\left[x_{i,j}(t)\right] \tag{82}$$

Soit, en injectant dans cette formule le modèle de l'équation (79) :

$$\overline{x_{i,j}}(t) = h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[\delta\left(t - kT_j - \tau_{k,j}\right)\right] \tag{83}$$

L'espérance mathématique s'écrivant comme un produit de convolution entre la distribution de Dirac et la densité de probabilité de la gigue, on obtient finalement :

$$\overline{x_{i,j}}(t) = h_{i,j}(t) \otimes \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{k,j}\left(t - kT_j\right) \tag{84}$$

La transformée de Fourier s'écrit :

$$\overline{X_{i,j}}(f) = H_{i,j}(f) \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_{k,j}(f) e^{-2i\pi k T_j f} \tag{85}$$

La TF de la densité de probabilité de la gigue de distribution Gaussienne vaut :

$$\Phi_{k,j}(f) = e^{-2\pi^2\left(\sigma_{0,j}^2 + k\cdot\sigma_j^2\right)f^2} \tag{86}$$

Ainsi, l'équation (85) s'écrit :

$$\overline{X_{i,j}}(f) = H_{i,j}(f) \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2\left(\sigma_{0,j}^2 + k\cdot\sigma_j^2\right)f^2} e^{-2i\pi k T_j f} \tag{87}$$

Soit après simplification :

$$\overline{X_{i,j}}(f) = H_{i,j}(f) e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2 f^2} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(e^{-2\pi^2\sigma_j^2 f^2 - 2i\pi T_j f}\right)^k \tag{88}$$

En supposant f non nulle, on reconnait une suite géométrique de raison $e^{-2\pi^2\sigma_j^2 f^2 - 2i\pi T_j f}$ de module inférieur à 1. On en déduit :

$$\boxed{\overline{X_{i,j}}(f) = H_{i,j}(f) \cdot \frac{e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2 f^2}}{1 - e^{-2i\pi f T_j - 2\pi^2\sigma_j^2 f^2}}} \tag{89}$$

2.2.3 Autocorrélation instantanée

Pour ces calculs, on ne décompose pas en partie stochastique et déterministe.

On pose alors $\Gamma_{\overline{\overline{xx}}}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[x_{i,j}\left(t + \frac{\mu}{2}\right) x_{i,j}^*\left(t - \frac{\mu}{2}\right)\right]$. En injectant dans cette formule le modèle de l'équation (81) on a :

$$\Gamma_{\overline{\overline{xx}}}(t,\mu) = \sum_{k,l} \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot h_{i,j}^*\left(t - lT_j - \tau_{l,j} - \frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{90}$$

Il est possible de décomposer $\tau_{k,i}$ et $\tau_{l,i}$ en deux variables indépendantes, en supposant k=l, k<l puis k>l. A cette fin, posons:

$$\begin{cases} \Gamma_{\overline{\overline{xx}}}^{\substack{k>l\\k,l}}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot h_{i,j}^*\left(t - lT_j - \tau_{l,j} - \frac{\mu}{2}\right)\right], & \forall k > l \\ \Gamma_{\overline{\overline{xx}}}^{\substack{k<l\\k,l}}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot h_{i,j}^*\left(t - lT_j - \tau_{l,j} - \frac{\mu}{2}\right)\right], & \forall k < l \\ \Gamma_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot h_{i,j}^*\left(t - kT_j - \tau_{k,j} - \frac{\mu}{2}\right)\right] \end{cases} \tag{91}$$

On a alors :

$$\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}(t,\mu) = \sum_{\substack{k,l \\ k>l}} \Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{\overset{k>l}{k,l}}(t,\mu) + \sum_{\substack{k,l \\ k<l}} \Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{\overset{k<l}{k,l}}(t,\mu) + \sum_{k} \Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{k,k}(t,\mu) \tag{92}$$

- ***Avec k= l***

Le cas le plus trivial est lorsque k est égal à l. On a :

$$\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{k,k}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot h_{i,j}^{*}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} - \frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{93}$$

Par définition de l'espérance mathématique on obtient :

$$\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{k,k}(t,\mu) = \int_{\mathbb{R}} h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot h_{i,j}^{*}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} - \frac{\mu}{2}\right) \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j} \tag{94}$$

- ***Avec k < l***

Lorsque $k < l$ on peut décomposer $\tau_{l,i}$ comme suit :

$$\tau_{l,j} = \sum_{p=0}^{l} \epsilon_{p,j} = \sum_{p=0}^{k} \epsilon_{p,j} + \sum_{p=k+1}^{l} \epsilon_{p,j} = \tau_{k,j} + \widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} \tag{95}$$

avec $\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} = \sum_{p=k+1}^{l} \epsilon_{p,j}$. On a alors :

$$\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{\overset{k<l}{k,l}}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) h_{i,j}^{*}\left(t - lT_j - \tau_{k,j} - \widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} - \frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{96}$$

On note $\varphi_{l-k-1}(\tau)$ la densité de probabilité de $\widetilde{\tau_{k,l}}$. Par définition, $\epsilon_{p,j}$ et $\epsilon_{m,j}$ étant mutuellement indépendants pour tout p différent de m, on en déduit aisément que $\tau_{k,j}$ et $\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}}$ le sont également. En utilisant la définition de l'espérance mathématique, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{\overset{k<l}{k,l}}(t,\mu) = \iint_{\mathbb{R}^2} & h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) h_{i,j}^{*}\left(t - lT_j - \tau_{k,j} - \widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} - \frac{\mu}{2}\right) \\ & \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\varphi_{l-k-1,j}(\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}})\, d\tau_{k,j}\, d\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}}\end{aligned} \tag{97}$$

Il est alors possible d'écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{\overset{k<l}{k,l}}(t,\mu) = \int_{\mathbb{R}} & h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \\ & \cdot \int_{\mathbb{R}} h_{i,j}^{*}\left(t - lT_j - \tau_{k,j} - \widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} - \frac{\mu}{2}\right) \varphi_{l-k-1,j}(\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}}) d\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j}\end{aligned} \tag{98}$$

En remplaçant la deuxième intégrale par un produit de convolution, l'équation se simplifie :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{XX}}}}^{\overset{k<l}{k,l}}(t,\mu) = \int_{\mathbb{R}} & h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot \left(h_{i,j}^{*} \otimes \varphi_{l-k-1,j}\right)\left(t - lT_j - \tau_{k,j} - \frac{\mu}{2}\right) \\ & \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j}\end{aligned} \tag{99}$$

- ***Avec k>l***

On définit $\tau_{k,j} = \tau_{l,j} + \widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}}$ avec $\varphi_{l,j}(\tau)$ la densité de probabilité de $\tau_{l,j}$ et $\phi_{k-l-1,j}(\tau)$ la densité de probabilité de $\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}}$.

$$\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k<l \\ k,l}}(t,\mu) = \iint_{\mathbb{R}^2} h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{l,j} - \widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} + \frac{\mu}{2}\right) h_{i,j}^*\left(t - lT_j - \tau_{l,j} - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \varphi_{l,j}(\tau_{k,j})\varphi_{k-l-1,j}(\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}})\, d\tau_{l,j}\, d\widetilde{\tau_{k,l,\mathrm{j}}} \tag{100}$$

Sur le même principe que précédemment, on trouve :

$$\boxed{\Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k>l \\ k,l}}(t,\mu) = \int_{\mathbb{R}} \left(\left(h_{i,j} \otimes \phi_{k-l-1,j}\right)\left(t - kT_j + \frac{\mu}{2} - \tau_{l,j}\right) \cdot h_{i,j}^*\left(t - lT_j - \frac{\mu}{2} - \tau_{l,j}\right)\right) \cdot \varphi_{l,j}(\tau_{l,j}) d\tau_{l,j}} \tag{101}$$

2.2.4 Densité spectrale cyclique

La DSC du TPAUM s'écrit :

$$DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}(f,\alpha) = \iint \Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}(t,\mu) e^{-2i\pi(\alpha t + f\mu)} dt d\mu \tag{102}$$

On pose :

$$\begin{cases} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k<l \\ k,l}}(f,\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k<l \\ k,l}}(t,\mu) e^{-2i\pi(\alpha t + f\mu)} dt d\mu \\ DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k>l \\ k,l}}(f,\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k>l \\ k,l}}(t,\mu) e^{-2i\pi(\alpha t + f\mu)} dt d\mu \\ DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{k,k}(f,\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{k,k}(t,\mu) e^{-2i\pi(\alpha t + f\mu)} dt d\mu \end{cases} \tag{103}$$

En injectant l'équation (92) dans ces expressions, la DSC du TPAUM se décompose comme suit :

$$DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}(f,\alpha) = \sum_{\substack{k,l \\ k<l}} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k<l \\ k,l}}(f,\alpha) + \sum_{\substack{k,l \\ k>l}} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k>l \\ k,l}}(f,\alpha) + \sum_{k} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{k,k}(f,\alpha) \tag{104}$$

Comme précédemment étudions chaque cas indépendamment.

- ***Si k=l***

En utilisant le résultat obtenu à l'équation (94), on trouve :

$$DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{k,k}(f,\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} h_{i,j}\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot h_{i,j}^*\left(t - kT_j - \tau_{k,j} - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j}\, e^{-2i\pi(f\mu + \alpha t)} dt d\mu \tag{105}$$

On pose $\begin{cases} t^+ = t + \frac{\mu}{2} \\ t^- = t - \frac{\mu}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{t^+ + t^-}{2} \\ \mu = t^+ - t^- \end{cases}$

$$DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(f,\alpha) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h_{i,j}(t^+ - kT_j - \tau_{k,j}) e^{-2i\pi\left(\frac{\alpha}{2}+f\right)t^+} dt^+ \cdot \int_{\mathbb{R}} h_{i,j}^*(t^- - kT_j - \tau_{k,j}) e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)t^-} dt^- \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j} \tag{106}$$

Soit, après application des TF sur t^+ et t^- :

$$DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(f,\alpha) = \int_{\mathbb{R}} H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) e^{-2i\pi\left(\frac{\alpha}{2}+f\right)(kT_j+\tau_{k,j})} \cdot H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)(kT_j+\tau_{k,j})} \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j} \tag{107}$$

Soit, après simplification :

$$DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(f,\alpha) = H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-2i\pi\alpha kT_j} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\alpha\tau_{k,j}} \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j} \tag{108}$$

On reconnait la TF de $\phi_{k,j}(\tau_{k,j})$, on a alors :

$$DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(f,\alpha) = H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-2i\pi\alpha kT_j} \cdot \Phi_{k,j}(\alpha) \tag{109}$$

Or $\tau_{k,j}$ présente une distribution Gaussienne de variance $\sigma_{k,j}^2 = \sigma_{0,j}^2 + k \cdot \sigma_j^2$. La transformée de Fourier de la densité de probabilité vaut donc :

$$\Phi_{k,j}(\alpha) = TF[\varphi_{k,j}(t)](\alpha) = e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2}\left(e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^k \tag{110}$$

En injectant ce résultat dans l'équation (109), on obtient :

$$DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(f,\alpha) = H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-2i\pi\alpha kT_j} \cdot e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2}\left(e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^k \tag{111}$$

La somme sur k de ce résultat vaut :

$$\sum_k DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(f,\alpha) = H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-2i\pi\alpha T_j - 2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^k \tag{112}$$

On reconnait ici une suite géométrique, donc finalement, en posant :

$$DSC_{hh}(f,\alpha) = H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{113}$$

on a, lorsque $\alpha > 0$:

$$\sum_k DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k,k}(f,\alpha) = DSC_{hh}(f,\alpha) \cdot \frac{e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2}}{1 - e^{-2i\pi\alpha T_j - 2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}} \tag{114}$$

- ***Si k<l***

En utilisant les résultats dans les équations (99) et (100), on trouve :

$$DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{k<l,l}(f,\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} h_{i,j}\left(t - k\cdot T_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right) \cdot \left(h_{i,j}^* \otimes \varphi_{l-k-1,j}\right)\left(t - l\cdot T_j - \tau_{k,j} - \frac{\mu}{2}\right) \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j}\, e^{-2i\pi(f\mu+\alpha t)} dt d\mu \tag{115}$$

On pose $\begin{cases} t^+ = t + \frac{\mu}{2} \\ t^- = t - \frac{\mu}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{t^+ + t^-}{2} \\ \mu = t^+ - t^- \end{cases}$

$$\begin{aligned} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = & \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} h_{i,j}(t^+ - kT_j - \tau_{k,j}) e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)t^+} dt^+ \\ & \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (h_{i,j} \otimes \varphi_{l-k-1,j})(t^- - lT_j - \tau_{k,j}) e^{-2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)t^-} dt^- \right)^* \\ & \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j} \end{aligned} \tag{116}$$

En appliquant les transformées de Fourier on obtient :

$$\begin{aligned} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = & \int_{\mathbb{R}} H_{i,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)(kT_j+\tau_{k,j})} \cdot H_{i,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \Phi_{l-k-1,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \\ & \cdot e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)(lT_j+\tau_{k,j})} \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j} \end{aligned} \tag{117}$$

Après réorganisation, on obtient :

$$\begin{aligned} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = & DSC_{hh}(f,\alpha) \cdot \left(e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^k \left(e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^l \cdot \Phi_{l-k-1,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \\ & \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\alpha\tau_{k,j}} \cdot \varphi_{k,j}(\tau_{k,j})\, d\tau_{k,j} \end{aligned} \tag{118}$$

Enfin, on reconnaît la transformée de Fourier de $\phi_{k,j}(\tau_{k,j})$. On a alors :

$$\begin{aligned} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = & DSC_{hh}(f,\alpha) \cdot \left(e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^k \left(e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^l \cdot \Phi_{l-k-1,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \\ & \cdot \Phi_{k,j}(\alpha) \end{aligned} \tag{119}$$

La double somme sur k et l avec l strictement supérieur à k de cette équation donne :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k,l \\ k<l}} DSC_{\overline{\overline{\mathrm{xx}}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = & \quad DSC_{hh}(f,\alpha) \\ & \cdot \sum_{\substack{k,l \\ k<l}} \left(e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^k \left(e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^l \\ & \cdot \Phi_{l-k-1,j}^*\left(f-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Phi_{k,j}(\alpha) \end{aligned} \tag{120}$$

$\tau_{l-k-1,j}$ présente une distribution Gaussienne de variance $(\mathrm{l}-\mathrm{k}-1)\cdot\sigma_j^2$, on a alors :

$$\Phi_{l-k-1,j}(\alpha) = \left(e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^l \left(e^{+2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^k e^{+2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2} \tag{121}$$

En injectant ce résultat dans l'équation (120), on a après simplification :

$$\sum_{\substack{k,l \\ k<l}} DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = \quad DSC_{hh}(f,\alpha) \quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(\alpha^2-\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)}\right)^k \cdot \sum_{l=k+1}^{\infty}\left(e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right)^l\right) \cdot e^{+2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2} e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2} \tag{122}$$

On reconnait ici une suite géométrique sur l, avec $\sigma_j^2 > 0$ et $f \neq \frac{\alpha}{2}$ on peut donc simplifier l'équation par :

$$\sum_{\substack{k,l \\ k<l}} DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = \quad DSC_{hh}(f,\alpha) \quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(\alpha^2-\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)}\right)^k \cdot \frac{\left(e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right)^{k+1}}{1-e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2}}\right) \cdot e^{+2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2} e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2} \tag{123}$$

Soit après simplification :

$$\sum_{\substack{k,l \\ k<l}} DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = \quad DSC_{hh}(f,\alpha) \quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-2i\pi\alpha T_j-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^k \cdot \frac{e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2}}{1-e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2}} \cdot e^{+2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2} e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2} \tag{124}$$

On reconnait enfin une seconde suite géométrique sur k, en supposant $\alpha \neq 0$:

$$\sum_{\substack{k,l \\ k<l}} DSC_{\overline{\overline{xx}}}^{\substack{k,l \\ k<l}}(f,\alpha) = \quad DSC_{hh}(f,\alpha) \quad \cdot \frac{1}{1-e^{-2i\pi\alpha T_j-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}} \cdot \frac{e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j}}{1-e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2}} \cdot e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2} \tag{125}$$

- ***Si k>l***

Lorsque k est strictement supérieur à l, la même analyse est possible. De l'équation (101), on a :

$$DSC_{\widetilde{\widetilde{\mathrm{xx}}}}^{k,l\,k>l}(f,\alpha) = \iint_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}}\left(\left(h_{i,j}\otimes\phi_{k-l-1,j}\right)\left(t-kT_j+\frac{\mu}{2}-\tau_{l,j}\right)\cdot h_{i,j}^{*}\left(t-lT_j-\frac{\mu}{2}-\tau_{l,j}\right)\right) \cdot \varphi_{l,j}(\tau_{l,j})d\tau_{l,j}\, e^{-2i\pi(f\mu+\alpha t)}dtd\mu \tag{126}$$

Après simplification, on obtient :

$$DSC_{\widetilde{\widetilde{\mathrm{xx}}}}^{k,l\,k>l}(f,\alpha) = DSC_{hh}(f,\alpha)\cdot\left(e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^{k}\left(e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j}\right)^{l}\cdot\Phi_{k-l-1,j}\left(f+\frac{\alpha}{2}\right) \cdot\Phi_{l,j}(\alpha) \tag{127}$$

Avec $\Phi_{k-l-1,j}(\alpha) = \left(e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^{k}\left(e^{+2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}\right)^{l} e^{+2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}$, la double sommation de $DSC_{\widetilde{\widetilde{\mathrm{xx}}}}^{k,l\,k>l}(f,\alpha)$ avec k strictement supérieur à l devient :

$$\sum_{\substack{k,l\\k>l}} DSC_{\widetilde{\widetilde{\mathrm{xx}}}}^{k,l\,k>l}(f,\alpha) = DSC_{hh}(f,\alpha)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\left(\left(e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(\alpha^2-\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)}\right)^{l} \cdot\sum_{k=l+1}^{\infty}\left(e^{+2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)^2}\right)^{k}\right) \cdot e^{+2\pi^2\sigma_j^2\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)^2} e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2} \tag{128}$$

Finalement :

$$\sum_{\substack{k,l\\k<l}} DSC_{\widetilde{\widetilde{\mathrm{xx}}}}^{k,l\,k<l}(f,\alpha) = DSC_{hh}(f,\alpha)\cdot\frac{1}{1-e^{-2i\pi\alpha T_j-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}} \cdot\frac{e^{+2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j}}{1-e^{+2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j-2\pi^2\sigma_j^2\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)^2}} \cdot e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2} \tag{129}$$

En utilisant les résultats trouvés dans les équations (114), (125) et (129) reportés dans l'équation (104), la DSC totale vaut :

$$\boxed{DSC_{\widetilde{\widetilde{\mathrm{xx}}}}(f,\alpha) = DSC_{hh}(f,\alpha)\cdot\frac{e^{-2\pi^2\sigma_{0,j}^2\alpha^2}}{1-e^{-2i\pi\alpha T_j}\cdot e^{-2\pi^2\sigma_j^2\alpha^2}} \cdot\left(\frac{e^{2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j}}{1-e^{+2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)T_j}e^{-2\pi^2\sigma_j^2\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)^2}}+\frac{e^{2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j}}{1-e^{+2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)T_j}e^{-2\pi^2\sigma_j^2\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)^2}}+1\right)} \tag{130}$$

La Figure 22 illustre la DSC du TPAUM selon le modèle réaliste et la Figure 23 montre la DSCi, c'est-à-dire l'intégration sur les fréquences spectrales de la DSC.

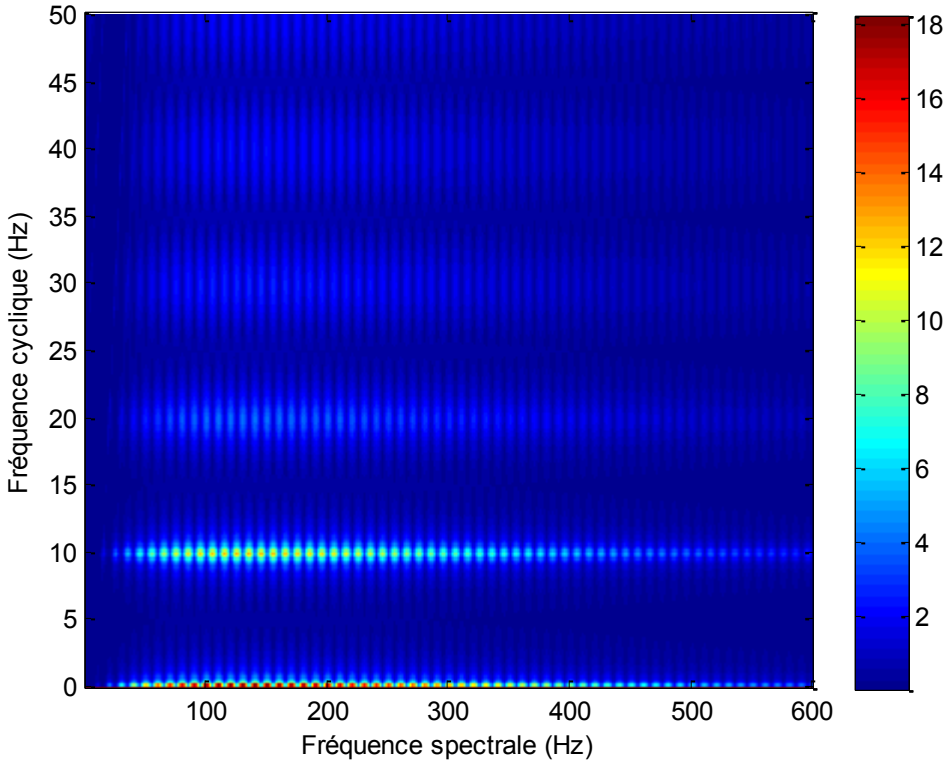

Figure 22 : Illustration de la DSC théorique d'un TPAUM pour le modèle réaliste.

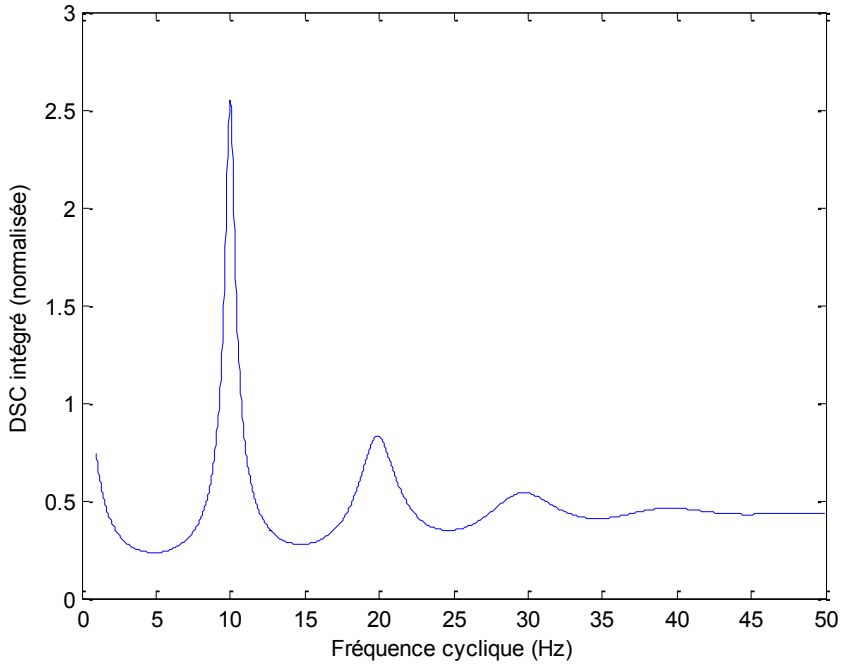

Figure 23 : Illustration de la DSC intégrée d'un TPAUM pour le modèle réaliste.

On remarque que, contrairement au modèle simplifié, la DSC et la DSCi du modèle réaliste mettent en évidence la présence de fréquences cycliques incertaines. En effet, on observe un paquet d'énergie autour de la fréquence de décharge (ici 10Hz) et de ses harmoniques. Bonnardot [53] décrit ce phénomène dans son manuscrit de thèse et le qualifie de **cyclostationnaire floue**. Des calculs similaires sur ce modèle ont été réalisés dans [52].

Après un bref rappel du concept de cyclostationnarité, nous avons analysé dans ce chapitre la pertinence de ce concept pour la caractérisation des modèles des TPAUM. Il a été montré la propriété de cyclostationnarité des TPAUM selon le modèle simplifié : la densité spectrale cyclique présente un spectre de raies le long des fréquences cycliques. Sur le modèle réaliste il a été montré que la densité spectrale cyclique ne présente plus un spectre de raies parfait, mais présente des paquets d'énergie, en fréquence cyclique, autour de la fréquence de décharge et de ses harmoniques. On fait référence ici à la propriété de cyclostationnarité floue du TPAUM.

L'étude cyclostationnaire présentée dans ce chapitre porte sur un TPAUM. Les observations recueillies sur le réseau de capteurs (EMG) sont des mélanges convolutifs de plusieurs TPAUM, induit par une répartition spatiale importante des fibres de l'UM et par l'effet de filtrage généré par les couches de tissus entre les fibres et les électrodes. Leurs fréquences de décharge étant différentes, chaque TPAUM génère des paquets d'énergie différents sur la DSCi. Nous proposons d'utiliser cette diversité pour la décomposition des EMG en TPAUM. Nous commencerons par un état de l'art de ces méthodes dans le chapitre suivant pour en dériver ensuite un algorithme utilisant la propriété de cyclostationnarité et de cyclostationnarité floue des TPAUM.

Chapitre III. Etat de l'art de la décomposition de TPAUM

1 Les premiers développements

1.1 Méthodes historiques semi-automatiques par inspection visuelle

Comme évoqué en introduction de cette thèse, accéder aux trains individuels de potentiels d'action à partir des mesures globales pourrait ouvrir de nombreuses perspectives tant pour des applications médicales que technologiques. Pour cette raison, de nombreuses techniques de décomposition des signaux EMG ont été proposées. Les premières méthodes considèrent la classification de Potentiels d'Action Nerveux (PAN). Similaire à l'EMG, la mesure du PAN est directement effectuée sur le nerf. Une telle classification permet de déterminer les caractéristiques indépendantes de chaque fibre nerveuse (axone).

L'une des premières techniques ayant émergé date des années 60 [64]. Celle-ci propose une méthode de classification automatique et en ligne des PAN. Un oscilloscope déclenche, par seuillage, au début de chaque PAN, la mesure de la tension, recueillie par une électrode, à deux instants t1 et t2 fixés après l'instant de dépassement du seuil (Figure 24).

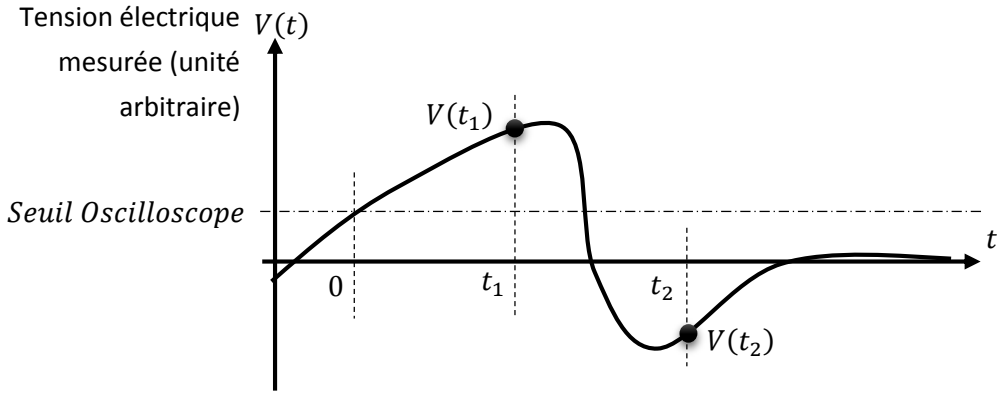

Figure 24 : Illustration de la mesure de tension par déclenchement.
Après un dépassement de la tension du seuil de déclenchement d'un oscilloscope (instant t=0), un système électronique mesure et convertit numériquement deux tensions aux instants t1 et t2 suivant le déclenchement.

Un ordinateur réalise ensuite un histogramme bi-varié entre les tensions mesurées $V(t_1)$ et $V(t_2)$. Un opérateur choisit alors les instants t_1 et t_2 tels que chaque train de PAN indépendant apparaissent en différentes régions isolées de l'histogramme. Après une identification manuelle de chaque cluster, le programme identifie chaque PAN. Une telle méthode requiert donc un

faible taux de superposition de PAN ainsi qu'un faible mélange. De plus l'algorithme nécessite l'intervention d'un opérateur expérimenté pour le choix des instants de mesure t1 et t2.

Quelques années plus tard, Keehn [65] propose une autre méthode en trois étapes : une détection des PAN, par détecteur d'énergie, puis une classification manuelle par l'intervention d'un opérateur et enfin une vérification automatique de classification. Cette dernière réalise un moyennage, pour chaque classe identifiée par l'opérateur, de tous les PAN. Ensuite, une classification automatique est effectuée, vérifiant, par seuillage de la distance moyenne entre le PAN moyen et chaque PAN considéré, la classification de l'opérateur.

Schmidt *et al.* [66] proposent une méthode supervisée itérative considérant deux sites d'enregistrements. Un opérateur sélectionne un PA de référence (appelé MASK) correspondant à une classe spécifique de PAN (appartenant à une fibre nerveuse spécifique). Puis chaque PAN est comparé aux classes par calcul de l'erreur moyenne normalisée entre les PAN de référence et le PAN considéré. Un histogramme des erreurs est ensuite affiché et l'opérateur détermine le seuil d'acceptabilité, c'est-à-dire l'erreur maximale, considérant les PAN comme appartenant à la classe.

D'autres méthodes similaires ont été développées en augmentant ou en choisissant d'autres paramètres caractérisant la forme d'onde du PAN (ou PAUM dans le cas des signaux EMG). Par exemple, Dill *et al.* [67] et Mishelevich [68] proposent de comparer les PAN par leur amplitude et leur durée (incluant la durée, due à la vitesse de conduction, entre les deux mesures).

Prochazka *et al.* [69] introduisent une méthode manuelle assistée par ordinateur permettant de résoudre les superpositions de deux PAUM dans le cas de signaux EMG. Chaque PAUM est comparé, par l'erreur quadratique moyenne (EQM), aux PAUM de référence (établis par l'opérateur). Si l'EQM minimum est petite alors le PAUM est répertorié comme appartenant à l'une des classes, sinon, si l'EQM minimum dépasse un seuil, le PAUM est alors considéré comme un mélange de plusieurs PAUM. Un opérateur traite chaque PAUM mélangé en effectuant une soustraction avec l'un des PAUM de référence. Dans [70], les auteurs améliorent la méthode par une résolution, automatiquement et en ligne, des superpositions.

Alors que le nombre de paramètres augmente avec l'apparition de nouvelles méthodes et avec les capacités de calcul grandissantes des ordinateurs, Vibert et Costa [71] proposent d'utiliser l'analyse en composantes principales (ACP) pour réduire l'espace des paramètres caractérisant la forme d'onde du pic (PAN ou PAUM). Le principal intérêt de la technique réside dans le fait que, à partir des paramètres mesurés présentant une corrélation entre eux, l'ACP permet de fournir un ensemble de paramètres décorrélés. Les auteurs utilisent huit paramètres mesurés sur le pic (trois amplitudes, trois durées et deux pentes). Ils montrent ainsi que deux composantes principales sont suffisantes pour effectuer la classification des pics.

Ces méthodes étaient principalement fondées sur des systèmes électroniques et sur une inspection visuelle par un opérateur, ce qui présente certains inconvénients : les opérations sont longues et complexes et ne fonctionnent plus lorsque le nombre d'unités motrices mélangées devient grand (trop

de superposition de PAUM). Au début des années 80 des méthodes entièrement automatiques de classification des PA apparaissent, considérant notamment les PA musculaires.

1.2 Classifications automatiques

Agnier *et al.* [72] proposent une détection des PAUM par seuillage de l'amplitude. Les PAUM de trop grande longueur (impossibles physiologiquement) sont éliminés, puis deux méthodes de classification sont établies : une basée sur le coefficient d'intercorrélation maximal entre les PAUM détectés et une seconde sur la détection d'extrema dans les PAUM.

Lefever et De Luca [73, 74] proposent un algorithme novateur complet de décomposition entièrement automatisé (l'intervention de l'opérateur est possible mais pas obligatoire). La classification est fondée sur un détecteur de type maximum a posteriori modifié, donnée en équation (131) et tenant compte des variations de l'amplitude du PAUM d'une décharge à l'autre. Ceci permettant de comparer un PAUM de référence, d'indice i et noté s_i, avec un PAUM mesuré, noté r. L'intérêt d'une telle méthode est qu'elle permet de tenir compte de la probabilité, notée P_i, d'apparition du PAUM lorsque la distance moyenne est similaire entre plusieurs jeux $(r\,;s_i)$, ce qui est le cas lorsque plusieurs PAUM de référence (classiquement appelé « Template » dans la littérature anglophone) ont une forme d'onde très similaire.

$$MAP(r,i) = \frac{|r - s_i|^2}{|s_i|^2} - w\ln(P_i) \tag{131}$$

Dans l'équation (131), le terme w spécifie un coefficient empirique modulant l'effet de P_i sur l'équation. La probabilité P_i est calculée à l'instant considéré (instant de la décharge s(t)) tenant compte de l'intervalle inter décharge (IID) de l'UM i, de sa distribution considérée Gaussienne et de l'instant de la dernière décharge. La variance et la moyenne de la distribution de l'instant d'arrivée de la décharge sont automatiquement calculées par un algorithme adaptatif, ce qui autorise une variation de la distribution de l'IID au cours du temps. Après un test préliminaire par un seuil sur l'équation (131) permettant de classifier le PAUM, ce dernier ne sera accepté dans cette classe que s'il est à la fois d'amplitude et de forme similaires, sinon il sera considéré comme une superposition. Cette dernière est traitée en recalculant l'équation (131) avec un deuxième PAUM de référence. S'il y a plus de deux PAUM superposés, le pic sera éliminé. Un dernier point clé de cette méthode est la prise en compte de l'erreur d'alignement des PAUM compte tenu de l'échantillonnage. Dans [75] il est proposé une amélioration de cette technique par une auto-adaptation du PAUM de référence au cours du temps et par une prise en compte de la variation de l'IID pour le calcul de P_i dans l'équation (131). Dès lors, la méthode est généralisée dans le cas d'une contraction à force non-constante et/ou non-isométrique, tant que la variation reste lente (de l'ordre de 10 à 15 %CMV/s).

McGill *et al.* [76] proposent un nouvel algorithme autorisant la décomposition d'un maximum de 15 PAUM à 30%CMV sur des signaux de 10s sous la condition de contraction isométrique à force constante. L'algorithme applique un filtre préliminaire au signal EMG, augmentant la nature « pointue » du PAUM pour faciliter son identification. Après classification, les PAUM identifiés sont finalement vérifiés en observant les statistiques de décharges. Les véritables PAUM sont ensuite

déduits par un moyennage du signal brut synchronisé sur les décharges de chaque UM (voir Chapitre III.3.2). Un autre point novateur est l'algorithme de classification qui utilise la méthode décrite dans [77] et qui permet l'alignement haute-résolution de deux signaux échantillonnés à faible fréquence. Cette opération étant effectuée dans le domaine fréquentiel, la comparaison entre le PAUM étudié et le PAUM de référence est directement réalisée dans ce domaine en calculant la distance moyenne.

Les travaux de Broman [78] suivis par ceux de Stashuk et Rodrick [79] conduisent au développement d'une méthode de décomposition en plusieurs passes. Alors que l'estimation de la probabilité de décharge utilisée dans [73, 74] est en pratique assez difficile, les auteurs proposent d'identifier et classifier dans un premier temps un certain nombre de PAUM de référence par mesure de distance uniquement, puis d'appliquer un algorithme utilisant les données acquises pour améliorer itérativement la décomposition. Ce dernier utilise une classification fondée sur l'inférence bayésienne, en calculant le « poids d'évidence » maximum qui s'appuie sur un certain nombre de paramètres jugés statistiquement significatifs des PAUM de référence.

McGill [80] s'intéresse à la résolution des superpositions de plusieurs PAUM et propose une méthode itérative supprimant un à un les PAUM superposés. McGill *et al.* proposent par la suite un logiciel complet et ergonomique, dénommé EMGLab [81] et développé sous l'environnement Matlab®, permettant la décomposition automatique ou manuelle de PAUM à partir de signaux intramusculaires mono ou multi-capteurs. La séparation utilise les algorithmes proposés par McGill *et al.* [76], [77] et [80].

De Luca *et al.* [49] proposent une méthode appliquée à l'EMG de surface. Les auteurs utilisent une grille de 4 électrodes fournissant 4 observations différentielles (Figure 25).

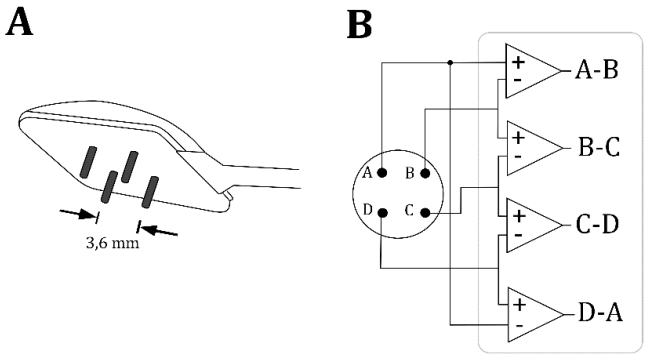

Figure 25 : Grille de quatre électrodes de surface.
Les quatre électrodes (A), séparées d'une distance de 3.6mm, sont connectées par un montage différentiel fournissant ainsi quatre observations (B) bipolaires (adapté de De Luca *et al.* [49]).

L'algorithme de décomposition applique un filtre passe-bande 250Hz-2KHz puis utilise le récepteur MAP, sur le signal segmenté pour pré-décomposer le signal [73]. Le seuil appliqué sur le récepteur, équation (131), est volontairement configuré le plus bas possible, rendant dans un premier temps la détection très sensible aux variations de formes d'onde, fournissant ainsi plusieurs signaux en sortie pour un même TPAUM. Les signaux de sortie sont ensuite comparés entre eux, par comparaison du PAUM de référence, puis fusionnés lorsque ceux-ci sont considérés similaires. La similarité est calculée par le coefficient de corrélation entre les PAUM de référence. Enfin les superpositions sont résolues itérativement.

2 Méthodes de séparation de sources

2.1 Une nouvelle classe de méthodes

Toutes ces méthodes ont un inconvénient commun et inhérent à l'approche utilisée : un faible taux de superposition de PAUM est nécessaire. Ces méthodes sont donc restreintes à une analyse locale du muscle (électrodes intramusculaires ou filtrage spatial d'électrodes de surfaces) et à un faible taux de contraction. Une approche récente pour la séparation de signaux est la séparation de sources, s'appuyant généralement sur des mesures multi-capteurs.

2.2 Formulation du problème

Il devient possible de séparer plusieurs sources lorsque l'on dispose de plusieurs observations qui représentent chacune un mélange des sources. La diversité spatiale des observations permettent d'obtenir un mélange différent des sources pour chaque observation. La Figure 26 montre un exemple de mélange de deux sources. On considère dans cet exemple deux voitures émettant chacun un son. Ces derniers sont transmis dans l'air, sont atténués puis sont mesurés à l'aide de deux microphones disposés différemment dans l'espace. Chaque microphone recevra le son mélangé des deux voitures, mais avec un mélange différent. Ceci à cause des distances microphone-voiture différentes. Les coefficients d'atténuation entre chaque voiture et chaque microphone sont représentés par les lettres A, B, C et D. Les observations, notées $y_1(t)$ et $y_2(t)$, correspondent à la somme pondérée du son des voitures.

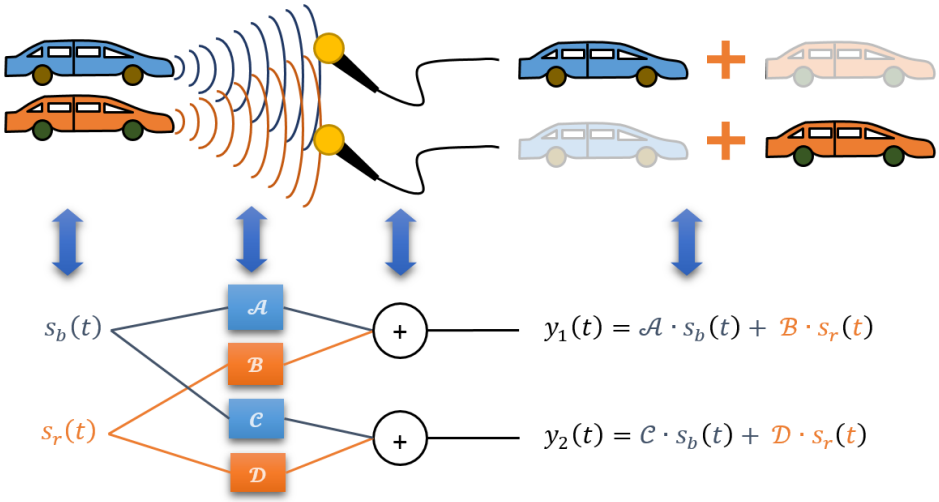

Figure 26 : Illustration d'un mélange linéaire instantané de deux sources.
La figure montre deux sources $s_b(t)$ et $s_r(t)$ (désignant respectivement le bruit du véhicule bleu et du véhicule rouge) mélangées et acquises par deux capteurs (microphones). Le problème se résume par un système linéaire à deux équations, reliant les observations $y_1(t)$ et $y_2(t)$ aux sources.

La séparation n'est possible que dans le cas où : $\mathcal{A} \cdot \mathcal{D} \neq \mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$, c'est-à-dire lorsque les deux microphones ne sont pas localisés au même point dans l'espace. Dans le cas contraire, l'information d'un microphone est alors redondante par rapport à l'autre et nous ne disposons plus que d'une seule

observation qui n'est plus suffisante pour en déduire les sources. D'un point de vue mathématique, la matrice de mélange est singulière et le système d'équations n'est pas inversible. Il existe toutefois des méthodes permettant la résolution de tels problèmes.

2.3 Modèles de mélange des données sources

On distingue trois classes principales de mélange : le mélange linéaire instantané, le mélange convolutif (également linéaire) et les mélanges non-linéaires.

2.3.1 Mélange linéaire instantané

Le mélange linéaire instantané consiste en un simple mélange des différentes sources avec un coefficient multiplicateur, ou facteur d'échelle. C'est le cas représenté à la Figure 26 avec deux sources et deux capteurs. On considère M observations (capteurs) d'indice i et notées $y_i(t)$. Soit $a_{i,j}$ le coefficient appliqué à la source j, noté $s_j(t)$, et N le nombre de sources. On a alors :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \cdot s_j(t)\,, \qquad \forall i \in [\![1, M]\!] \tag{132}$$

On peut l'écrire sous forme matricielle, en posant $Y(t) = [y_1(t) \ \dots \ y_M(t)]^T$ le vecteur des observations avec M le nombre de capteurs, $\cdot^T$ l'opérateur de transposition, $S(t) = [s_1(t) \ \dots \ s_N(t)]^T$ le vecteur des sources et A la matrice de mélange :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & \dots & a_{M,N} \end{bmatrix} \tag{133}$$

Alors l'équation (132) peut être réécrite sous forme du produit matriciel suivant :

$$Y(t) = A \cdot S(t) \tag{134}$$

2.3.2 Mélange linéaire convolutif

On considère cette fois que le signal n'est pas seulement atténué lors de sa transmission entre la source et le capteur mais subit une déformation linéaire, *i. e.* un filtrage. Le mélange convolutif remplace donc le simple coefficient $a_{i,j}$, équation (132), par la réponse impulsionnelle du filtre, notée $h_{i,j}(\tau)$, représentant le canal de propagation depuis la source jusqu'au capteur. Le mélange est donc une opération de convolution entre la source et la réponse impulsionnelle du canal. L'équation (132) devient :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(h_{i,j} \otimes s_j\right)(t) \tag{135}$$

où $\otimes$ désigne l'opérateur de convolution. En notation matricielle on a alors :

$$Y(t) = (H \otimes S)(t) \tag{136}$$

où $Y(t)$ est le vecteur des observations, $S(t)$ le vecteur des sources et $H(\tau)$ est la matrice des filtres définie par :

$$H(\tau) = \begin{bmatrix} h_{1,1}(\tau) & \dots & h_{1,N}(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M,1}(\tau) & \dots & h_{M,N}(\tau) \end{bmatrix} \tag{137}$$

Ce type de problème peut être simplifié dans le domaine fréquentiel. En effet la convolution de deux fonctions dans le domaine temporel est équivalente à une multiplication dans le domaine fréquentiel. En d'autres termes cela signifie que le coefficient d'atténuation entre la source et le capteur est dépendant de la fréquence :

$$TF[Y](f) = TF[H](f) \cdot TF[S](f) \tag{138}$$

où TF représente l'opérateur de Transformée de Fourier.

Un cas particulier des mélanges convolutifs est le cas d'un simple retard provoqué par le temps de propagation. Dans ce cas la matrice de mélange est une matrice de distributions de Dirac retardées de par un délai, dénoté $u_{i,j}$, et multipliées par un simple coefficient, dénoté$a_{i,j}$, où i et j désignent respectivement la ligne et la colonne des coefficients de la matrice :

$$H(\tau) = \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdot \delta(\tau - u_{1,1}) & \dots & a_{1,N} \cdot \delta(\tau - u_{1,N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} \cdot \delta(\tau - u_{M,1}) & \dots & a_{M,N} \cdot \delta(\tau - u_{M,N}) \end{bmatrix} \tag{139}$$

On retrouve un mélange linéaire instantané lorsque tous les délais sont nuls : $u_{i,j} = 0 \ \ \forall i, j$.

2.3.3 Mélange non-linéaire

Il s'agit de tous les autres types de mélange. En séparation de sources, ce type de mélange est très complexe et seuls des cas particuliers peuvent être traités avec certaines connaissances *a priori* supplémentaires. C'est par exemple le cas des mélanges *post non-linéaires* [82]. Le mélange est dans ce cas linéaire (instantané ou convolutif) puis il subit une déformation non linéaire. Avec $\{g_i(y),\ i \in [\![1, M]\!]\}$ un ensemble de fonctions non linéaires associées à chaque observation, l'équation (135) devient :

$$y_i(t) = g_i\left(\sum_{j=1}^{N} (h_{i,j} \otimes s_j)(t)\right) \tag{140}$$

2.4 Reformulation du modèle convolutif en modèle linéaire instantané

Nous avons vu que le problème du mélange convolutif peut être traité dans le domaine fréquentiel. Dans cette partie nous montrerons une autre approche, introduite par Gorokhov et Loubaton [83] puis réutilisé par de nombreux auteurs tels que dans [84], qui consiste à réécrire un modèle de mélange convolutif, défini en équation (141), en un mélange linéaire instantané.

On considère le modèle à temps-discret suivant avec une période d'échantillonnage T_e :

$$Y(n) = (H \otimes S)(n) + B(n) \tag{141}$$

où $Y(n) = [y_1(n) \dots y_M(n)]^T$ est un vecteur de M observations, $S(t) = [s_1(n) \dots s_N(n)]^T$ est un vecteur de N sources, $B(n) = [b_1(n) \dots b_M(n)]^T$ un vecteur représentant le bruit contaminant l'espace des observations, $H(m)$ une matrice de filtre de taille $M \times N$ et de durée finie égale à $L \cdot T_e$:

$$H(m) = \begin{bmatrix} h_{1,1}(m) & \cdots & h_{1,N}(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M,1}(m) & \cdots & h_{M,N}(m) \end{bmatrix} \tag{142}$$

Le symbole $\otimes$ désigne l'opérateur de convolution discrète défini par :

$$\left(h_{i,j} \otimes s_j\right)(n) = \sum_{m=0}^{L} h_{i,j}(m) \cdot s_i(n-m) \tag{143}$$

Dans le cas matriciel défini par l'équation (141), l'opérateur de convolution discrète délivre un vecteur dont la i^{ème} colonne s'écrit :

$$\{(H \otimes S)(n)\}_i = \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=0}^{L-1} h_{i,j}(m) \cdot s_j(n-m) \tag{144}$$

On note que $h_{i,j}(m)$ est à durée finie (de taille L). La somme sur m est donc réduite dans l'équation précédente de 0 à L-1, tous les autres termes étant nuls. Posons $\overline{S}(n) = [\overline{s_1}(n) \quad \cdots \quad \overline{s_{LN}}(n)]^T$ un vecteur de sources étendu de taille LN défini par :

$$\overline{S}(n) = [s_1(n)\, s_1(n-1) \dots s_1(n-L+1) \dots s_N(n) \dots s_N(n-L+1)]^T \tag{145}$$

Définissons également $\overline{H}$ une matrice de mélange étendue par :

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} \overline{h_{1,1}} & \cdots & \overline{h_{1,LN}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{h_{M,1}} & \cdots & \overline{h_{M,LN}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^e & \cdots & h_{1,N}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M,1}^e & \cdots & h_{N,M}^e \end{bmatrix} \tag{146}$$

Avec $\overline{h_{i,j}}$ les éléments de la matrices $\overline{H}$ et $h_{i,j}^e$ un sous vecteur indépendant du temps donné par :

$$h_{i,j}^e = [h_{i,j}(0) \quad \cdots \quad h_{i,j}(L-1)] \tag{147}$$

La dimension de la matrice de mélange étendue est alors de $M \times LN$. L'équation (144) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\{(H \otimes S)(n)\}_i = \sum_{j=1}^{LN} \overline{h_{i,j}} \cdot \overline{s_j}(n) \tag{148}$$

Ainsi le modèle de l'équation (141) s'écrit comme un mélange linéaire instantané :

$$Y(n) = \overline{H} \cdot \overline{S}(n) + B(n) \tag{149}$$

Le problème de la séparation de sources convolutif peut alors être réduit à un problème de séparation de mélange linéaire instantané et autorise ainsi l'utilisation des méthodes traitant ce type de cas. Mais nous avons vu que la résolution de problème sous-déterminé (plus de sources que de capteur) est complexe. Dans ce modèle nous augmentons artificiellement le nombre de sources : de N sources réelles on obtient LN sources « virtuelles ». Nous devons donc avoir un nombre de capteurs M supérieur ou égal à LN, ce qui, en pratique, peut être difficile. Une solution proposée est d'augmenter

artificiellement le nombre de capteurs par des décalages temporels successifs de un échantillon. On pose alors $\bar{Y}(n) = [\overline{y_1}(n) \quad \dots \quad \overline{y_M}(n)]^T$, appelé vecteur des sources étendues, défini par :

$$\bar{Y}(n) = [y_1(n)\, y_1(n-1) \dots y_1(n-K+1) \dots y_M(n) \dots y_M(n-K+1)]^T \tag{150}$$

$\bar{Y}(n)$ est un vecteur de taille MK où K désigne le nombre de répétitions décalées dans le temps de l'observation. Le vecteur des sources étendues, défini dans l'équation (145), est alors redéfini par :

$$\bar{S}(n) = [s_1(n)\, s_1(n-1) \dots s_1(n-L-K+1) \dots s_N(n) \dots s_N(n-L-K+1)]^T \tag{151}$$

Sa dimension est donc de $N \cdot (L+K-1)$. La matrice de mélange étendue est redéfinie par :

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^E & \cdots & h_{1,N}^E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M,1}^E & \cdots & h_{M,N}^E \end{bmatrix} \tag{152}$$

où $h_{i,j}^E$ sont des sous matrices de dimension $K \times (L+K-1)$ définies par :

$$h_{i,j}^E = \begin{bmatrix} h_{i,j}(0) & h_{i,j}(1) & \cdots & h_{i,j}(L-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{i,j}(0) & \cdots & h_{i,j}(L-2) & h_{i,j}(L-1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & h_{i,j}(0) & \cdots & h_{i,j}(L-1) \end{bmatrix} \tag{153}$$

La matrice de mélange étendue $\bar{H}$ est alors de taille $KM \times (L+K-1)N$.

La condition pour que le mélange ne soit pas sous-déterminé est que le nombre sources étendues soit inférieur ou égal au nombre d'observations étendues. La condition sur K est donc la suivante :

$$K \geq \left[\frac{(L-1)N}{M-N}\right]_{sup} \tag{154}$$

où $[\cdot]_{sup}$ désigne la valeur entière supérieure la plus proche. Le nombre d'observations « réelles » supplémentaires, donné par M-N et nécessaire pour un mélange déterminé ou surdéterminé, est donc inversement proportionnel à K et tend asymptotiquement vers 0 :

$$M - N \geq \left[\frac{(L-1)N}{K}\right]_{sup} \tag{155}$$

On note donc qu'un K grand devant L réduit le nombre de capteurs jusqu'à N+1 mais augmente quadratiquement la taille de la matrice de mélange et par conséquent les coûts de calcul :

$$N_{\bar{H}} = KMN(L+K-1) \underset{K \gg L}{\sim} K^2 MN \tag{156}$$

2.5 Détermination du mélange

Le nombre de sources composant le mélange n'étant pas nécessairement égal au nombre d'observations, trois cas de détermination du mélange se présentent :

- **Mélange sous-déterminé** : plus de sources que d'observations (M<N). A n'est pas inversible, il est alors nécessaire d'introduire des connaissances *a priori* supplémentaires. Dans le cas linéaire, la connaissance de A permet de retrouver les sources à un vecteur aléatoire près. Il existe des solutions dans le cas de sources parcimonieuses ou discrètes.
- **Mélange déterminé** : autant de sources que d'observations (M=N) et l'inverse de A permet de retrouver les sources.
- **Mélange sur-déterminé** : plus d'observations que de sources (M>N). Dans le cas linéaire, des solutions existent si la matrice de mélange est de rang plein. Par exemple, un prétraitement par analyse en composantes principales (ACP) peut permettre de réduire la dimension du vecteur des observations pour se ramener à un mélange déterminé.

2.6 Indéterminations

Sous l'unique hypothèse d'indépendance des sources certaines limitations ont été établies.

2.6.1 Indétermination d'échelle

L'énergie des sources, ou leur amplitude, ne peut être déterminée. Les sources et la matrice de mélange étant inconnues, il est possible de multiplier l'énergie d'une source par un facteur d'amplitude et de diviser la colonne correspondante de la matrice de mélange par ce même facteur. L'observation (mélange) faite de cette source sera alors la même :

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} \cdot a_{11} & \cdots & P_N^{-1} a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1^{-1} \cdot a_{M1} & \cdots & P_N^{-1} a_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \cdot s_1 \\ \vdots \\ P_N^{-1} \cdot s_N \end{bmatrix}, \qquad \forall P_i \in \mathbb{R}^*$$

Cette ambiguïté est supprimée en supposant la variance des sources égale à 1. On remarque également que le signe de la source ne peut être retrouvé, P_i pouvant être négatif.

2.6.2 Indétermination de permutation

De même on remarque que l'ordre des sources peut être modifié à la fois dans la matrice de mélange et dans le vecteur des sources sans modifier l'observation :

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1N} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{MN} & \cdots & a_{M1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_N \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix}$$

On en conclut que l'ordre de sources ne peut être retrouvé sans contraintes ou connaissances *a priori* supplémentaires.

Les techniques de séparation de sources, qui permettent d'estimer les sources à partir des observations, sont fondées sur le modèle du mélange ainsi que sur les connaissances a priori sur les sources : indépendance, corrélation temporelle, cyclostationnarité… Une majorité de ces techniques comprennent une étape de blanchiment des observations.

2.7 Décorrélation des observations par analyse en composantes principales et blanchiment spatial

2.7.1 Définition

Le blanchiment fréquentiel, par analogie aux fréquences lumineuses, consiste à égaliser la densité spectrale de puissance. D'après le théorème de Wiener-Khintchine la fonction d'autocorrélation est alors une distribution de Dirac centrée en 0. Le blanchiment fréquentiel revient alors à décorréler temporellement les données.

On peut étendre ce même principe aux données multi-capteurs. Des données spatialement blanches signifient qu'elles sont décorrélées entre elles et possèdent une variance unitaire. En termes statistiques on dit qu'elles sont indépendantes à l'ordre 2 ou décorrélées. Si l'on considère un jeu de N données représentées par le vecteur $S(t) = [s_1(t) \ \dots \ s_N(t)]^T$ de moyenne nulle et spatialement blanc, alors la matrice de covariance instantanée vaut :

$$C_{SS}(t,0) = \mathbb{E}[S(t)S^H(t)] = I_d, \qquad \forall t \tag{157}$$

où l'exposant H désigne l'opération de transposition conjuguée et I_d désigne la matrice identité.

2.7.2 Blanchiment d'un mélange

Il a été montré [85] qu'il est possible de réduire le problème de la séparation de sources en appliquant une étape de blanchiment, si l'on considère que les sources $s_i(t)$ sont mutuellement décorrélées. On considère ici que les sources sont stationnaires et centrées et on considère également un mélange linéaire instantané :

$$Y(t) = A \cdot S(t) \tag{158}$$

où $Y(t) = [y_1(t) \ \dots \ y_M(t)]^T$ désigne le vecteur des M observations et A est la matrice de mélange de taille $M \times N$. Le blanchiment spatial de ces données consiste à trouver une matrice W telle que les données issues de cette transformation soient spatialement blanches :

$$Z(t) = W \cdot Y(t) \tag{159}$$

où $Z(t) = [z_1(t) \ \dots \ z_M(t)]^T$ désigne le vecteur des M observations blanchies et W la matrice de blanchiment de taille $N \times N$. Une méthode usuelle pour trouver W est de diagonaliser la matrice de covariance des observations, notée C_{YY}, par une décomposition en valeurs propres :

$$C_{YY} = \mathbb{E}[Y(t)Y^H(t)] = E \cdot D \cdot E^{-1} \tag{160}$$

où E désigne la matrice des vecteurs propres et D la matrice diagonale des valeurs propres. La matrice de covariance C_{yy} est symétrique et E est unitaire. On a alors $E^{-1} = E^H$ et on obtient :

$$D = E^H \cdot C_{yy} \cdot E \tag{161}$$

On remarque que D est alors la matrice de covariance de $E^H \cdot Y(t)$. Ces données étant décorrélées, une simple normalisation permet de trouver une matrice de covariance égale à la matrice identité. On a donc :

$$D^{-\frac{1}{2}} \cdot E^H \cdot C_{yy} \cdot E \cdot D^{-\frac{1}{2}} = I_d \tag{162}$$

En posant $W = D^{-\frac{1}{2}} \cdot E^H$, la matrice de covariance de $Z(t)$ définie dans l'équation (159) vaut :

$$C_{zz} = \mathbb{E}[Z(t)Z^H(t)] = I_d \tag{163}$$

On peut remarquer que la solution n'est pas unique. Si l'on considère une matrice U unitaire quelconque appliquée aux données blanchies, avec $Z' = U \cdot Z$ on a :

$$C_{Z'Z'} = U \cdot C_{ZZ} \cdot U^H = U \cdot I_d \cdot U^H = I_d \tag{164}$$

On en déduit que la matrice $U \cdot W$ est également une matrice de blanchiment. Ceci montre que la décorrélation à l'ordre 2 n'est pas suffisante pour séparer les sources. En revanche le problème de séparation de sources est maintenant réduit à la recherche d'une matrice unitaire.

$R_{XX} \leftarrow \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_n [X(n) \cdot X(n)^H]$
$(U, D) \leftarrow \mathrm{DVP}(\mathrm{R_x} = UDU^H)$
$W \leftarrow D^{-1/2} \cdot U^H$
$Z(n) \leftarrow W \cdot X(n)$

Tableau 1 : Algorithme de Blanchiment par Décomposition en Valeurs Propres (DVP) de la matrice de Covariance des observations adaptée aux données non-bruitées.

2.8 Séparation de sources

Comme décrit à l'Annexe A.4, la décorrélation des observations est une condition nécessaire mais non suffisante de leur indépendance. Une solution est de considérer l'hypothèse d'indépendance entre les sources : c'est l'Analyse en Composante Indépendante (ACI). Considérant le problème d'un mélange linéaire instantané, l'ACI a vu le jour dans les articles de Hérault, Jutten et Ans dans les années 80 par l'utilisation d'un réseau de neurones [86]. Plusieurs approches ont alors émergé exploitant diverses propriétés inhérentes à l'indépendance. J.-L. Lacoume [87] puis J.-F. Cardoso [88] ont proposé l'utilisation des statistiques d'ordres supérieurs et notamment les cumulants d'ordres quatre mesurant un écart entre la distribution de l'observation et une distribution gaussienne sans tenir compte de l'énergie (moment d'ordre 2). On trouvera une bibliographie étendue dans [89]. D'autres méthodes se sont ensuite intéressées au principe de maximisation de l'information mutuelle : infomax [90]. Des méthodes par optimisation du « point fixe » [91], [92], [93], dénommées FastICA, ont vu le jour, qui présentent une complexité de calcul plus faible que les autres méthodes existantes. Un résumé des méthodes d'ACI les plus courantes peut être trouvé en Annexe C.

A la fin des années 80, Fety et Uffelen [94] proposent d'introduire un nouvel *a priori* dans le cadre de la séparation de sources. En effet, les sources ne sont pas, en général, iid dans le temps, c'est-à-dire

qu'elles possèdent une structuration temporelle propre qui se traduit par une autocorrélation non-nulle pour différents retards non nuls. D'un point de vue fréquentiel de telles sources possèdent un spectre coloré. Cette propriété se vérifie en pratique dans la plupart des applications : biomédical, astronomie, signaux audio… L'exploitation de la structure temporelle (ou fréquentielle) des sources autorise alors la séparation à l'ordre 2 sous réserve qu'il y ait une diversité suffisante du contenu spectral entre les sources. De plus, les méthodes au second ordre ouvrent la perspective de séparer des sources gaussiennes et/ou dépendantes. Seule l'hypothèse de décorrélation mutuelle des sources reste nécessaire. Différentes approches ont été étudiées : méthodes fondées sur la diagonalisation conjointe [95, 94, 96, 97, 98, 99, 100, 101], sur le maximum de vraisemblance [102, 103] ou encore sur l'information mutuelle [104].

Intéressons-nous à présent aux tentatives qui ont été faites pour extraire des TPAUM par séparation de sources.

3 Etat de l'art des méthodes de décomposition de signaux EMG par séparation de sources

Les algorithmes de séparation de sources permettent de retrouver les signaux sources à partir de données multi-capteurs. Certains auteurs se sont intéressés à la séparation de sources des signaux électromyographiques. On distingue deux principales applications des méthodes de séparation de sources. Au niveau macroscopique, des auteurs ont tenté de séparer l'activité de différents muscles, en considérant généralement un modèle linéaire instantané [105], [106], [107], [108] et [109]. D'autres auteurs tentent la séparation du signal électrocardiographique (ECG) du signal EMG [110]. Au niveau microscopique, la séparation de sources peut être utilisée pour la décomposition d'UM.

3.1 Méthodes existantes de décomposition par séparation de sources

Garcia *et al.* testent l'application de FastICA sur un signal EMG [111]. FastICA est utilisé ici comme un outil de prétraitement pour appliquer un algorithme de décomposition standard sur un signal EMG de surface. Les auteurs supposent un mélange linéaire instantané des sources. Une telle hypothèse peut en effet se justifier lorsqu'il n'y a aucun délai entre les sources et aucune variabilité du PAUM d'une même source entre les capteurs. En pratique de telles conditions sont peu réalistes, cependant des résultats intéressants ont été obtenus sur la base de signaux présentant une faible quantité de sources à estimer. Dans [112], toujours en considérant un modèle de mélange linéaire instantané, les auteurs appliquent et comparent les algorithmes JADE et FastICA sur des signaux EMG synthétiques.

Holobar *et al.* [113] proposent une méthode de décomposition utilisant le plan temps-fréquence obtenue par application de la transformée de Wigner-Ville aux signaux EMG. Les auteurs considèrent ici un modèle de mélange convolutif réécrit en mélange linéaire instantané tel que décrit au Chapitre III.2.4 selon l'équation (149). Les auteurs modélisent les sources par un train d'impulsions de Dirac tel que décrit dans le premier modèle des équations (3) et (6) en considérant un glissement temporel gaussien et stationnaire. La méthode, s'appuyant sur [114], utilise la diagonalisation conjointe approchée (décrite en Annexe D.2) de matrices des transformées de Wigner-Ville en différents points

temps-fréquence. La principale difficulté dans cet algorithme est le choix des points temps-fréquence pour la diagonalisation conjointe. En effet, la transformée de Wigner-Ville présente une forte sensibilité aux termes croisés et la matrice des transformées de Wigner-Ville des sources est alors bloc-diagonale dans le cas général. Il est donc capital de n'utiliser que les points temps-fréquence pour lesquels la matrice est diagonale. Dans [115] il est proposé un critère de sélection de tels points t-f.

Dans [116] et [117] est présentée une approche similaire réalisant la diagonalisation conjointe de $Q_{zz}(\tau) = R_{zz}(\tau) \cdot R_{zz}(-\tau)$ où z représente les données blanchies. Il est démontré que la matrice $R_{ss}(\tau) \cdot R_{ss}(-\tau)$ est diagonale quel que soit τ et ainsi la diagonalisation conjointe de matrices $Q_{xx}(\tau)$ en différents τ permet de retrouver les signaux sources aux indéterminations de l'ACI près.

Dans [118] Qiang *et al.* appliquent une méthode de séparation de sources en mélange convolutif fondée sur la maximisation de l'information mutuelle [119].

Dans [120], Holobar et Zazula apportent une nouvelle solution de séparation de trains de Dirac en mélange convolutif, adaptée au modèle décrit par l'équation (3). Les auteurs considèrent un mélange linéaire instantané étendu, décrit par l'équation (149). Chaque signal source (TIN) est estimé par l'estimateur linéaire du minimum de l'erreur quadratique moyenne donnée par :

$$\widehat{s_i}(n) = \Gamma_{\bar{y}\bar{s_i}}^{T} \cdot \Gamma_{\bar{y}\bar{y}}^{-1} \cdot \bar{y}(n) \tag{165}$$

où $\Gamma_{\bar{y}\bar{s_i}}^{T}$ est la transposée du vecteur formé par la corrélation entre les observations étendues, notées $\bar{y}(n) = [y_1(n) \dots y_1(n-K-L+1) \dots y_N(n-K-L+1)]^T$, et la source $\bar{s_i}$ à estimer. $\Gamma_{\bar{y}\bar{s_i}}^{T}$ devant être connue à l'avance, les auteurs proposent une estimation itérative de la source en prenant $\Gamma_{\bar{y}\bar{s_i}}^{T} = \bar{y}(n_0)^T$ comme point de départ où n_0 est l'instant estimé d'une décharge de la source $\bar{s_i}$. Un second instant de décharge est ensuite estimé en recherchant le maximum de l'équation (165) et $\Gamma_{\bar{y}\bar{s_i}}^{T}$ est mis à jour. La méthode est ensuite améliorée par une approche d'optimisation par descente du gradient [121].

Ning et Farina [122] proposent une méthode fondée sur SOBI permettant la séparation de signaux dont le mélange est décrit par le modèle convolutif simplifié de l'équation (139). Les auteurs montrent qu'une source retardée peut être approximée par :

$$s_j(t-\tau) \approx s_j(t) - \tau \dot{s}_j(t) \tag{166}$$

où $\dot{s}(t)$ est la dérivée de s(t). Ainsi, $s_j(t)$ et $\dot{s}_j(t)$ peuvent être considérées comme deux sources distinctes. Les auteurs montrent également que la matrice de corrélation égalisée des sources étendues, matrice reportée dans l'équation (167), est diagonale. Les sources étendues peuvent par conséquent être identifiées par une méthode de diagonalisation au second ordre telle que SOBI.

$$\widetilde{R_{\bar{s}\bar{s}}}(\mu) = \frac{R_{\bar{s}\bar{s}}(\mu) + R_{\bar{s}\bar{s}}(-\mu)}{2} = \begin{bmatrix} R_{SS}(\mu) & 0 \\ 0 & R_{\dot{S}\dot{S}}(\mu) \end{bmatrix} \tag{167}$$

3.2 Estimation des PAUM à partir du Train d'Impulsion Nerveux (TIN)

Alors que le signal source, estimé selon le modèle ACI linéaire instantané, ne contient que la source (TIN), l'information sur la forme d'onde (PAUM) peut être déduite de deux manières : par identification

de la matrice de mélange étendue, ou par moyennage de chaque observation synchronisée sur chaque décharge [123]. En posant $y_j(t)$ la j^{ème} observation et $T_{i,k}$ l'instant de la k^{ème} décharge de la i^{ème} source, alors le PAUM de cette même source observée sur la jème observation, notée $PAUM_{i,j}(t)$, peut être estimé par :

$$PAUM_{i,j}(t) \triangleq \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \mathrm{y_j(t - T_{i,k})} \tag{168}$$

La qualité du résultat obtenu dépendra de la précision de la décomposition. Des fausses détections de décharges augmenteront l'erreur d'estimation et il en va de même lorsque les impulsions sont mal localisées dans le temps. On notera que la fréquence d'échantillonnage a un impact direct sur la localisation des impulsions.

Nous avons rappelé le principe dans ce chapitre de méthodes de décomposition des signaux EMG. Les premières méthodes, basées sur de la reconnaissance de forme, permettaient d'assister un opérateur pour la classification puis la décomposition des TPAUM. Avec les progrès technologiques, de nouvelles méthodes de classification automatique des PAUM ont permis une décomposition non-supervisée des TPAUM. Les méthodes par reconnaissance de forme ne peuvent fonctionner que lorsque le taux de superposition des PAUM est faible. L'arrivée de la séparation de sources a été un troisième tournant dans la décomposition car elle ouvre la perspective d'une décomposition avec un mélange plus important de TPAUM, ce qui est notamment le cas lorsque l'activité EMG est mesurée par des électrodes de surfaces et lorsque la force de contraction relative à la CMV devient importante.

Etant donné que notre étude du modèle des signaux EMG a porté sur les statistiques à l'ordre deux, nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement aux méthodes fondées sur ces statistiques.

Chapitre IV. Décomposition des EMG par séparation de sources cyclostationnaires

1 Séparation de sources stationnaires ou cyclostationnaires à l'ordre 2

1.1 Séparation de sources à l'ordre deux par diagonalisation exacte

On rappelle que nous avons le modèle de séparation, dans le cas linéaire instantané, suivant :

$$X(t) = AS(t) + B(t) \tag{169}$$

où $X(t) = [x_1, \dots, x_M]^T$ est le vecteur des observations, $S(t) = [s_1, \dots, s_N]^T$ le vecteur des sources, A la matrice de mélange et $B(t) = [b_1, \dots, b_M]^T$ un vecteur de bruit contaminant l'espace des capteurs. Ce dernier est généralement supposé blanc, stationnaire, d'énergie σ_B^2 égale sur toutes les observations et décorrélé des sources. La matrice de corrélation des sources est supposée diagonale, car les sources sont supposées mutuellement décorrélées, et de covariance unitaire.

$$R_{s_i s_j}(\tau) = \mathbb{E}\left[s_i(t) s_j^H(t-\tau)\right] = \delta_{ij} R_{s_i s_i}(\tau), \qquad avec\ R_{s_i s_i}(0) = 1 \tag{170}$$

La matrice de corrélation des observations s'écrit alors :

$$R_{XX}(\tau) = \mathbb{E}[X(t)X^H(t-\tau)] = AR_{SS}(\tau)A^H + \sigma_B^2 I_d \delta(\tau) \tag{171}$$

Fêty et Uffelen [94] proposent de résoudre le problème par la diagonalisation conjointe (exacte) de $R_{XX}(0)$ et $R_{XX}(\tau)$. La méthode AMUSE [96] fonctionne sur le même principe en utilisant l'étape de préblanchiment. Il ne reste alors qu'à rechercher la matrice unitaire inconnue par une décomposition en valeurs propres de la matrice de corrélation des données blanchies à $\tau > 0$.

$Z(n) \leftarrow$ **Préblanchiment par Analyse en Composante Principale**
Décomposition en valeur propre de $R_{zz}(\tau)$ $(R, D) \leftarrow DVP(R_{zz}(\tau) = RDR^H)$
Estimation des sources : $S(n) = R \cdot Z(\mathrm{n})$

Tableau 2 : Algorithme de AMUSE [96].

Il est évident que la qualité de la séparation est conditionnée par le choix du retard τ. Il a été proposé dans [124] d'utiliser le retard pour lequel les valeurs propres de la matrice de corrélation des données sont les plus distinctes possibles. Une telle méthode est lourde en termes de coût de calcul et peut être prohibitive dans le cas d'un grand nombre de sources.

Diverses méthodes consistent à diagonaliser la somme de plusieurs matrices de corrélations à différents délais. Cette méthode est généralisée par l'algorithme TDSEP [98] qui diagonalise

conjointement un ensemble de deux matrices formées par la somme pondérée de diverses matrices de corrélation :

$$M_0 = \sum_i m_{0,i} \cdot R_{XX}(\tau_{0,i}), \qquad M_1 = \sum_i m_{1,i} \cdot R_{XX}(\tau_{1,i}) \tag{172}$$

1.2 SOBI : Séparation de sources à l'ordre deux par diagonalisation conjointe approchée

Belouchrani et Abed-Meraim proposent, quelques années après AMUSE, la méthode SOBI [97] qui généralise la méthode en diagonalisant un jeu de K>2 matrices de corrélation. La méthode utilise une diagonalisation approximative car elle ne peut être théoriquement exacte. Similairement à la méthode JADE [125] présentée en Annexe C.1.4, la méthode SOBI utilise l'algorithme de diagonalisation conjointe approchée (DCA) de Cardoso et Souloumiac [126] présenté en Annexe D.2. L'algorithme est résumé par :

$Z(n) \leftarrow$ **Préblanchiment par Analyse en Composantes Principales**

Calcul d'un ensemble de P matrices de Corrélation des données blanchies
$\mathrm{M}_p \leftarrow R_{XX}(\tau_p)$

Calcul de la matrice unitaire de rotation optimale par DCA :
$R \leftarrow \underset{\mathrm{U}}{\operatorname{argmax}} \left[\sum_{p=1}^{P} \left|diag\left(U \cdot \mathrm{M}_p \cdot U^T\right)\right|^2\right]$

Estimation des sources
$S(n) = R \cdot Z(\mathrm{n})$

Tableau 3 : Algorithme de SOBI (extrait de [97]).

Les auteurs de TDSEP [98] proposent également de diagonaliser conjointement un ensemble de K matrices formées par la somme de matrices de covariances telle que présentée à l'équation (172).

Pour pouvoir mettre à profit les caractéristiques cyclostationnaires mises en évidence au Chapitre II, nous allons nous intéresser à une extension de l'algorithme SOBI au cas des signaux cyclostationnaires. Il s'agit de l'algorithme cycloSOBI.

1.3 CycloSOBI : séparation de sources cyclostationnaires à l'ordre deux

Ce type de méthode s'intéresse non seulement au contenu fréquentiel spectral mais également au contenu fréquentiel cyclique. Au second ordre de nombreuses méthodes ont émergé [127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135]. On citera notamment l'extension de SOBI aux signaux cyclostationnaires : CycloSOBI [134] de Boustany et Antoni. Avec le même principe que SOBI, cycloSOBI diagonalise conjointement un jeu de P matrices de corrélations cycliques, sélectionnées à différents délais et fréquences cycliques. L'algorithme peut se résumer ainsi :

$Z(n) \leftarrow$ **Préblanchiment par Analyse en Composante Principale**

Calcul d'un ensemble de P matrices de corrélations cycliques des données blanchies
$\mathrm{M}_p \leftarrow R_{XX}(\alpha_p, \tau_p)$

Calcul de la matrice unitaire de rotation optimale par DCA :
$R \leftarrow \underset{\mathrm{U}}{\operatorname{argmax}} \left[\sum_{p=1}^{P} \left|diag\left(U \cdot \mathrm{M}_p \cdot U^T\right)\right|^2\right]$

Estimation des sources
$S(n) = R \cdot Z(\mathrm{n})$

Tableau 4 : Algorithme de CycloSOBI

Etudions maintenant s'il est possible d'appliquer l'algorithme cycloSOBI à un modèle étendu des signaux EMG.

2 Modèle de mélange étendu appliqué aux signaux EMG

Nous avons vu dans le Chapitre I.2.3 que le signal EMG résulte de la convolution entre une forme d'onde, générée par l'effet de filtrage inhérent aux tissus musculaires, graisseux et épidermiques, et un train d'impulsion de Dirac représentant le train de décharge du motoneurone, dénommée TIN.

Reprenons le modèle général énoncé dans l'équation (79) et considérons N UM actives (sources) et M électrodes (observations). Appelons $H(\mu)$ la matrice des filtres du canal. On a :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(h_{i,j} \otimes s_j\right)(t) + b_i(t) \tag{173}$$

ou sous forme matricielle :

$$Y(t) = (H \otimes S)(t) + B(t) \tag{174}$$

où $b_i(t)$ représente le bruit contaminant l'observation d'indice i. Le vecteur de bruit $B(t) = [b_1(t) \dots b_M(t)]^T$ est supposé blanc gaussien iid et indépendant des sources et des filtres des canaux de propagations, $y_i(t)$ représente l'observation d'indice i et $s_j(t)$ la source (TIN) d'indice j :

$$s_j(t) = \sum_k \delta\left(t - kT_j - \tau_{k,j}\right) \tag{175}$$

Selon la méthode énoncée au Chapitre III.2.4 on propose de reformuler ce problème en un mélange linéaire instantané. On introduit alors le vecteur des sources étendu donné par :

$$\bar{S}(t) = [s_1(t)\, s_1(t - T_e) \dots s_1(t - (L + K - 1)T_e) \dots s_N(t - (L + K - 1)T_e)]^T \tag{176}$$

avec $(L - 1)T_e$ la longueur maximale des filtres $h_{i,j}(\mu)$, T_e la période d'échantillonnage et K le nombre de répétitions des observations. On introduit également le vecteur des observations étendu :

$$\overline{Y}(t) = [y_1(t)\, y_1(t - T_e) \dots y_1(t - (K - 1)T_e) \dots y_N(t - (K - 1)T_e)]^T \tag{177}$$

puis la matrice de mélange étendue :

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^{e} & \cdots & h_{1,M}^{e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1}^{e} & \cdots & h_{N,M}^{e} \end{bmatrix} \tag{178}$$

avec les sous-matrices $h_{1,M}^{e}$ données par :

$$h_{i,j}^{e} = \begin{bmatrix} h_{i,j}(0) & h_{i,j}(T_e) & \cdots & h_{i,j}\big((L-1)T_e\big) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{i,j}(0) & \cdots & h_{i,j}\big((L-2)T_e\big) & h_{i,j}\big((L-1)T_e\big) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{i,j}(0) & \cdots & h_{i,j}\big((L-1)T_e\big) \end{bmatrix} \tag{179}$$

On introduit enfin le vecteur de bruit étendu :

$$\overline{B}(t) = [b_1(t)\, b_1(t-T_e) \ldots b_1(t-(K-1)T_e) \ldots b_N(t-(K-1)T_e)]^T \tag{180}$$

Finalement l'équation (174) est reformulée comme suit :

$$\overline{Y}(t) = \overline{H} \cdot \bar{S}(t) + \overline{B}(t) \tag{181}$$

On rappelle que K doit respecter la condition suivante de manière à assurer que le mélange reste (sur) déterminé (voir Chapitre III.2.4) :

$$K \geq \left[\frac{(L-1)N}{M-N}\right]_{sup} \tag{182}$$

Pour pouvoir appliquer l'algorithme cycloSOBI à ce modèle étendu, nous devons maintenant vérifier que la matrice de corrélation cyclique des sources étendues est diagonale quelle que soit la fréquence cyclique choisie.

3 Propriétés de la corrélation cyclique des sources étendues

3.1 Problématique

La méthode cycloSOBI [134], appliquée aux signaux cyclostationnaires, utilise le caractère diagonal de la matrice de covariance cyclique des sources.

Pour appliquer cette méthode au modèle étendu, de l'équation (181), nous devons nous assurer que la matrice de corrélation cyclique des sources étendues est diagonale. Nous avons vu que le modèle des sources étendues représenté par l'équation (176), inclut des sources et des versions retardées avec un pas de 1 échantillon de ces mêmes sources.

Soient deux sources s_i et s_j respectivement retardées de $\Delta_1$et Δ_2 représentant des décalages d'un nombre entier d'échantillons des sources et variant de 0 à $(L+K-1)T_e$:

$$\begin{aligned} s_{i\Delta_1}(t) &= s_i(t-\Delta_1) \\ s_{j\Delta_2}(t) &= s_j(t-\Delta_2) \end{aligned} \tag{183}$$

Soit $\Gamma_{s_{i\Delta_1},s_{j\Delta_2}}(\alpha,\mu)$ l'intercorrélation cyclique entre ces deux sources. D'après l'équation (176), la matrice de corrélation des sources étendues, notée $\Gamma_{\overline{SS}}(\alpha,\mu)$, peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathrm{CC}_{\overline{SS}}(\alpha,\mu)=\begin{bmatrix}\mathrm{CC}_{\overline{S_1S_1}}(\alpha,\mu) & \cdots & \mathrm{CC}_{\overline{S_1S_M}}(\alpha,\mu)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{CC}_{\overline{S_NS_1}}(\alpha,\mu) & \cdots & \mathrm{CC}_{\overline{S_NS_M}}(\alpha,\mu)\end{bmatrix} \tag{184}$$

où la sous-matrice $\mathrm{CC}_{\overline{S_iS_j}}(\alpha,\mu)$ est la matrice de corrélation cyclique de la source i avec la source j à différents retards $\Delta_1$et Δ_2, multiples de T_e, définie par :

$$\mathrm{CC}_{\overline{S_iS_j}}(\alpha,\mu)=\begin{bmatrix}\mathrm{CC}_{s_is_j}(\alpha,\mu) & \mathrm{CC}_{s_is_{j,T_e}}(\alpha,\mu) & \cdots & \mathrm{CC}_{s_is_{j,(L+K-1)T_e}}(\alpha,\mu)\\ \mathrm{CC}_{s_{i,T_e}s_j}(\alpha,\mu) & \mathrm{CC}_{s_{i,T_e}s_{j,T_e}}(\alpha,\mu) & \cdots & \mathrm{CC}_{s_{i,T_e}s_{j,(L+K-1)T_e}}(\alpha,\mu)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{CC}_{s_{i,(L+K-1)T_e}s_j}(\alpha,\mu) & \mathrm{CC}_{s_{i,(L+K-1)T_e}s_{j,T_e}}(\alpha,\mu) & \cdots & \mathrm{CC}_{s_{i,(L+K-1)T_e}s_{j,(L+K-1)T_e}}(\alpha,\mu)\end{bmatrix} \tag{185}$$

La Figure 27 représente schématiquement l'équation (184). Celle-ci se décompose comme suit.

- Nous avons d'une part les corrélations cycliques entre une source retardée de Δ_1 et la même source retardée de Δ_2, les retards étant des multiples entiers de la période d'échantillonnage. Ce type de sous-matrice est représenté sur la Figure 27 par les carrés mauves. Celle-ci se décompose en termes diagonaux et hors diagonaux.
    - Les termes diagonaux, en rouge vif, représentent les autocorrélations des sources et des sources retardées, soit le cas où $i=j$ et $\Delta_1=\Delta_2$. Ces termes représentant tous les termes diagonaux de $\Gamma_{\overline{SS}}(\alpha,\mu)$, ils doivent donc être non-nuls.
    - Les termes non diagonaux, en orange, représentent les inter-corrélations entre deux sources identiques mais un avec un retard différent, soit le cas $i=j$ et $\Delta_1\neq\Delta_2$. Ces termes doivent être nuls.
- D'autre part nous avons les sous-matrices de corrélations cycliques entre une source i retardée de Δ_1 et une source j retardée de Δ_2 (représentée sur la Figure 27 par les carrés bleu clair). Celle-ci se décompose également en termes diagonaux et hors diagonaux devant nécessairement être nuls.
    - Les termes diagonaux, en vert foncé, représentent les inter-corrélations de deux sources différentes retardées d'une même valeur, soit le cas où $i\neq j$ et $\Delta_1=\Delta_2$.
    - Les termes non diagonaux, en vert clair, représentent les inter-corrélations de deux sources différentes avec un retard différent, soit le cas où $i\neq j$ et $\Delta_1\neq\Delta_2$.

Dans l'objectif de démontrer que la matrice de corrélation cyclique $\Gamma_{\overline{SS}}(\alpha,\mu)$ est, sous certaines conditions, diagonale nous calculerons dans un premier temps l'autocorrélation cyclique des sources. Nous étudierons ensuite l'effet d'un retard pour évaluer la sous-matrice de corrélation cyclique d'une même source avec retard (sous-matrices mauves dans la Figure 27).

$\Gamma_{\overline{SS}}(\alpha,\mu) =$

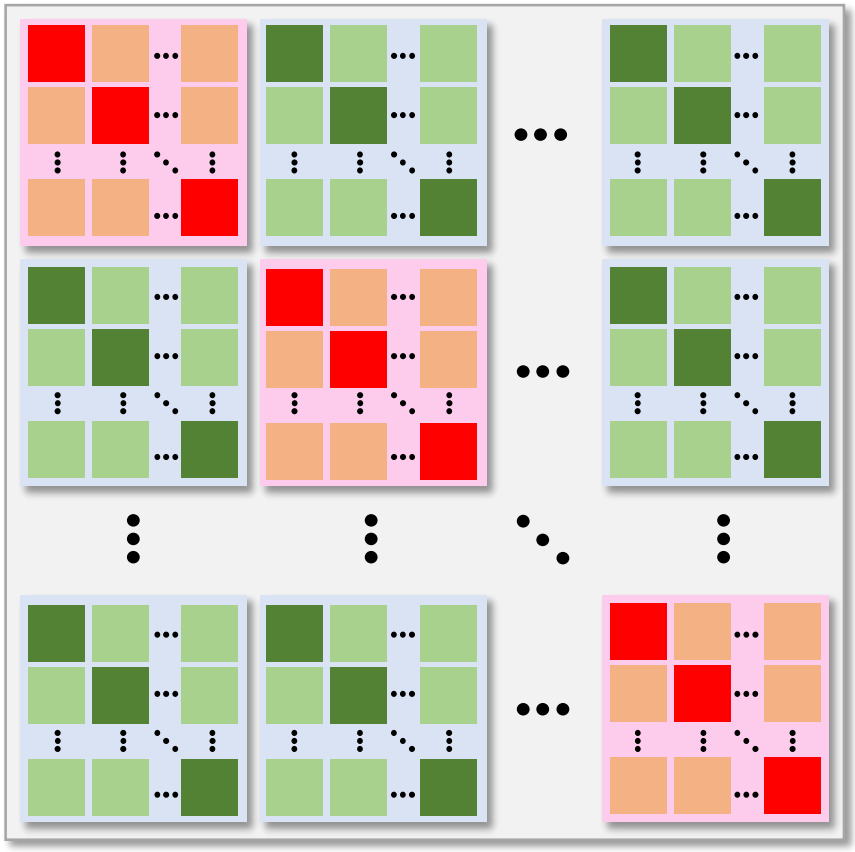

Figure 27 : Représentation graphique de la matrice de corrélation cyclique des sources étendues.
La matrice de corrélation cyclique des sources étendues est décomposée en sous matrices représentant, en mauve, les corrélations entre une source et elle-même retardée et en bleu entre deux sources distinctes retardées. Sur chaque sous matrice mauve les termes diagonaux, représentés en rouge vif, désignent les autocorrélations des sources et des sources retardées. Les termes non diagonaux en orange représentent les inter-corrélations entre deux même sources mais retardées. Les termes représentés en vert foncé sont les inter-corrélations entre deux sources distinctes non retardées. Enfin les termes représentés en vert clair sont les inter-corrélations entre deux sources distinctes et retardées l'une par rapport à l'autre.

3.2 Autocorrélation cyclique d'une source

Dans un premier temps calculons l'autocorrélation cyclique de $s_j(t)$ sans retard. On a par définition :

$$\Gamma_{s_j s_j}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[s_j\left(t+\frac{\mu}{2}\right)\cdot s_j^*\left(t-\frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{186}$$

Soit en utilisant le modèle défini en équation (175) :

$$\Gamma_{s_j s_j}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_k \delta\left(t-kT_j-\tau_{k,j}+\frac{\mu}{2}\right)\right)\cdot\left(\sum_l \delta\left(t-lT_j-\tau_{l,j}-\frac{\mu}{2}\right)\right)\right] \tag{187}$$

Après développement, nous avons :

$$\Gamma_{s_j s_j}(t,\mu) = \sum_k \mathbb{E}\left[\delta\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right)\delta\left(t - kT_j - \tau_{k,j} - \frac{\mu}{2}\right)\right] + \sum_{\substack{k,l \\ k\neq l}} \mathbb{E}\left[\delta\left(t - kT_j - \tau_{k,j} + \frac{\mu}{2}\right)\right]\mathbb{E}\left[\delta\left(t - lT_j - \tau_{l,j} - \frac{\mu}{2}\right)\right] \tag{188}$$

et après simplification, on a :

$$\Gamma_{s_j s_j}(t,\mu) = \delta_{T_j}(t) \otimes \left(\delta\left(t + \frac{\mu}{2}\right)\delta\left(t - \frac{\mu}{2}\right)\right) \otimes \varphi_j(t) + \sum_{\substack{k,l \\ k\neq l}} \varphi_j\left(t - kT_j + \frac{\mu}{2}\right)\varphi_j\left(t - lT_j - \frac{\mu}{2}\right) \tag{189}$$

Si l'on suppose que $\varphi_j(\tau)$ représente une fonction gaussienne tronquée de largeur γ_j alors le produit $\varphi_j\left(t - kT_j + \frac{\mu}{2}\right)\varphi_j\left(t - lT_j - \frac{\mu}{2}\right)$ pour $k \neq l$ sera toujours nul si l'intervalle de temps $T_j - \mu - \gamma_j$ est supérieur à 0 (voir Figure 28) et donc si la condition suivante est respectée :

$$\mu < T_j - \gamma_j \tag{190}$$

Or, nous avons vu que $T_j - \gamma$ est toujours strictement positive.

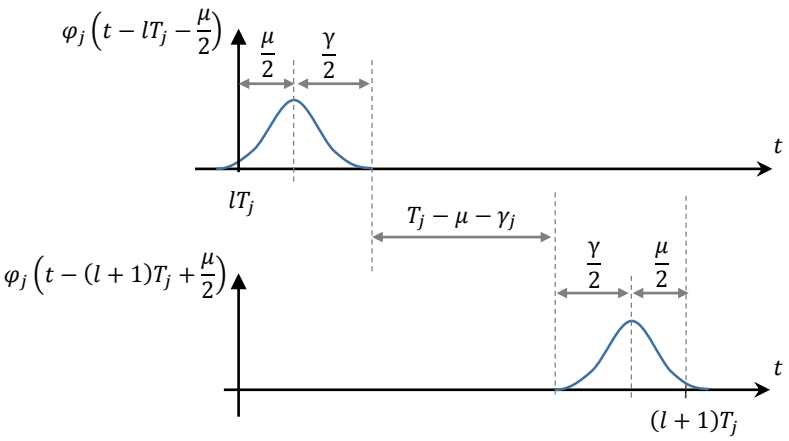

Figure 28 : Produit de fonctions Gaussiennes retardées.
Illustration de deux fonctions gaussiennes tronquées, de durée γ_j, et décalées dans le temps. Si $T_j - \mu - \gamma_j > 0$ alors le produit de ces deux fonctions gaussiennes tronquées est nul.

On en déduit que :

$$\varphi_j\left(t - kT_j + \frac{\mu}{2}\right)\varphi_j\left(t - lT_j - \frac{\mu}{2}\right) \approx 0, \qquad \forall k \neq l \tag{191}$$

On a alors :

$$\Gamma_{s_j s_j}(t,\mu) \approx \delta_{T_j}(t) \otimes \left(\delta\left(t + \frac{\mu}{2}\right)\delta\left(t - \frac{\mu}{2}\right)\right) \otimes \varphi_j(t) \tag{192}$$

Qui peut également se simplifier de la manière suivante :

$$\Gamma_{s_j s_j}(t,\mu) \approx \left(\delta_{T_j}(t) \otimes \varphi_j(t)\right)\delta(\mu) \tag{193}$$

Après application de la TF par rapport à t, la corrélation cyclique vaut :

$$\boxed{\mathrm{CC}_{s_j s_j}(\alpha,\mu) \approx T_j^{-1}\delta_{T_j^{-1}}(\alpha)\Phi_j(\alpha)\delta(\mu)} \tag{194}$$

3.3 Intercorrélation cyclique entre une source et sa version retardée

On considère ici les matrices d'intercorrélation entre deux sources identiques avec des retards différents, représentées en mauve sur la Figure 27.

Soit une source $s_j(t)$ définie en équation (175). On considère deux versions retardées de Δ_1 et Δ_2 de cette même source, respectivement notées $s_{j,\Delta_1}(t)$ et $s_{j,\Delta_2}(t)$. On a :

$$s_{j,\Delta_1}(t) = s_j(t-\Delta_1) \tag{195}$$
$$s_{j,\Delta_2}(t) = s_j(t-\Delta_2) \tag{196}$$

L'intercorrélation cyclique de ces deux sources est donnée par :

$$\mathrm{CC}_{s_{j,\Delta_1} s_{j,\Delta_2}}(\alpha,\mu) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[s_j\left(t+\frac{\mu}{2}-\Delta_1\right)\cdot s_j^*\left(t-\frac{\mu}{2}-\Delta_2\right)\right] e^{-2i\pi\alpha t}dt \tag{197}$$

Par changement de variable, avec $\mu' = \mu - \Delta_1 + \Delta_2$ et $t' = t - \frac{\Delta_1}{2} - \frac{\Delta_2}{2}$, on obtient :

$$\mathrm{CC}_{s_{j,\Delta_1} s_{j,\Delta_2}}(\alpha,\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[s_j\left(t' + \frac{\mu'}{2}\right)\cdot s_j^*\left(t' - \frac{\mu'}{2}\right)\right] e^{-2i\pi\alpha t'}dt'\right) e^{-i\pi\alpha(\Delta_1+\Delta_2)} \tag{198}$$

Et on reconnaît alors l'autocorrélation de la source originale retardée de $\Delta_1 - \Delta_2$ modulée par une exponentielle complexe :

$$\mathrm{CC}_{s_{j,\Delta_1} s_{j,\Delta_2}}(\alpha,\mu) = \mathrm{CC}_{s_j s_j}(\alpha,\mu-\Delta_1+\Delta_2)e^{-i\pi\alpha(\Delta_1+\Delta_2)} \tag{199}$$

On en déduit que l'intercorrélation cyclique d'une source retardée de Δ_1 avec une source retardée de Δ_2 vaut :

$$\mathrm{CC}_{s_j s_j}(\alpha,\mu) \approx \delta(\mu-\Delta_1+\Delta_2)T_j^{-1}\delta_{T_j^{-1}}(\alpha)\Phi_j(\alpha)e^{-i\pi\alpha(\Delta_1+\Delta_2)} \tag{200}$$

La condition établie à l'équation (190) n'est plus exacte, le délai relatif entre les deux sources $|\Delta_1 - \Delta_2|$ intervenant également. Le délai relatif maximum est donné par $(L+K-1)T_e$. La condition de l'équation (190) devient :

$$\mu < T_j - \gamma_j - (L+K-1)T_e \tag{201}$$

On remarque que la sous-matrice, donnée à l'équation (200), n'est pas diagonale mais l'est pour le cas $\mu = 0$. Finalement on obtient :

$$\boxed{\mathrm{CC}_{s_{j,\Delta_1} s_{j,\Delta_2}}(\alpha,0) = \begin{vmatrix} T_j^{-1}\delta_{T_j^{-1}}(\alpha)\Phi_j(\alpha)e^{-2i\pi\alpha\Delta} & \forall\,\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0 & sinon \end{vmatrix}} \tag{202}$$

Les sous matrices de corrélation sont donc diagonales, sous la condition suivante :

$$T_j > \gamma_j + (L + K - 1)T_e \tag{203}$$

On peut considérer que γ_j est égal à 3 fois l'écart-type de la gigue, une gaussienne étant d'amplitude inférieure à 1% au-delà. On peut exprimer la condition en fonction du coefficient de variation cv. L'écart-type est de $\sigma_j = cv \cdot T_j$, alors $\gamma_j = 3 \cdot \sigma_j = 3 \cdot cv \cdot T_j$. Avec K définit par l'équation (182) et en posant $\mathrm{D_{PAUM}} = (L - 1)\mathrm{T_e}$, la condition sur la longueur du PAUM s'écrit :

$$\mathrm{D_{PAUM}} < (1 - 3 \cdot cv) \cdot T_j \cdot \frac{M - N}{M} \tag{204}$$

Ou peut également écrire la limite de fréquence de décharge par :

$$1/T_j < \frac{1 - 3 \cdot cv}{\mathrm{D_{PAUM}}} \cdot \frac{M - N}{M} \tag{205}$$

Cette condition montre une limite garantissant le caractère diagonal de la matrice de corrélation cyclique d'une source et ses versions retardées. Cette limite dépend du coefficient de variation de la gigue et de la période inter-décharge, mais aussi du nombre de sources N et de capteurs M, le coefficient K étant dépendant de ces paramètres par l'équation (182).

La Figure 29 montre les coefficients de corrélations cycliques entre un TIN de fréquence de décharge égale à 11hz et ses versions retardées. Celle-ci correspond à une des sous-matrices rouges de la Figure 27.

Lorsque la condition de l'équation (204) n'est plus respectée, c'est-à-dire lorsque le délai donné par $(L + K - 1)T_e$ devient supérieur à $(1 - 3 \cdot cv) \cdot T_j$, un coefficient de corrélation cyclique non nul apparait dans les termes non-diagonaux et dégradera les performances de la méthode. Dans cet exemple nous avons considéré un coefficient de variation cv égal à 10%. La limite de $(L + K - 1)T_e$ est donc de 63,6ms, comme nous pouvons l'observer sur la Figure 29. Malgré le non-respect de la condition de l'équation (204), on remarque que sur cet exemple on remarque que le coefficient de corrélation maximal est de 0,035 environ, donc égal à 3,5% des termes diagonaux, et reste donc assez faible.

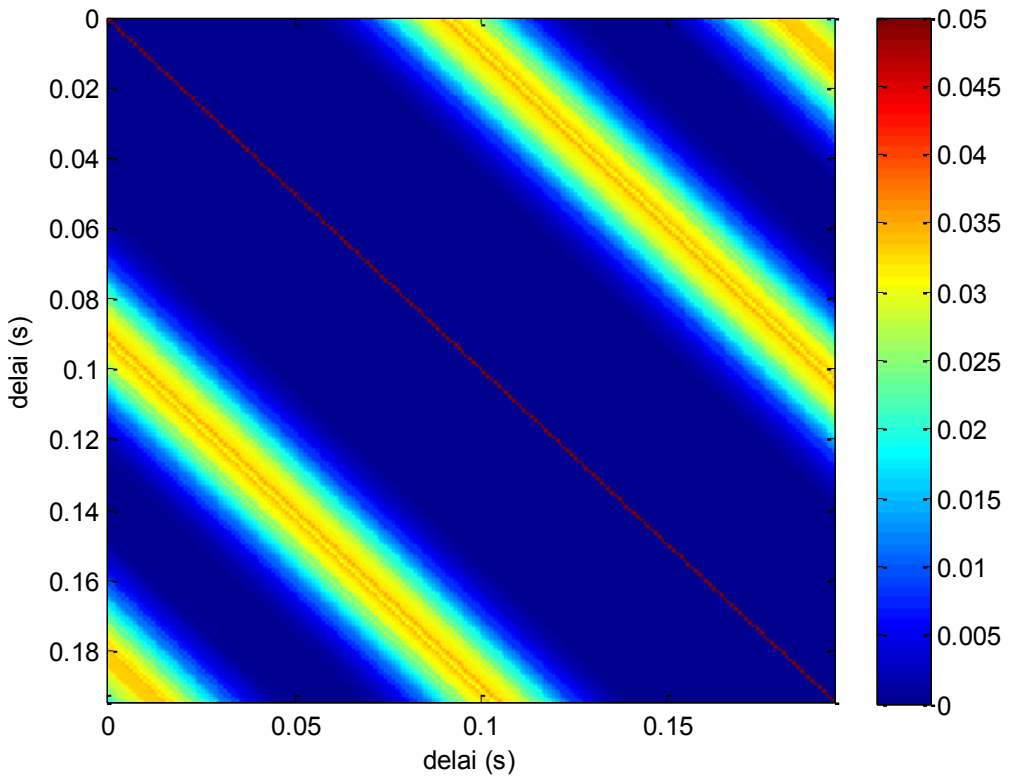

Figure 29 : Représentation graphique de la matrice des coefficients de corrélations cyclique entre un TIN et ses versions retardées.

La matrice de corrélation cyclique d'un TIN est représentée ici par une image où la couleur représente le coefficient de corrélation cyclique entre le TIN et une version retardée de celui-ci. Le TIN possède une fréquence de décharge de 11Hz et la fréquence cyclique choisie pour le calcul de la corrélation cyclique est également de 11Hz. Les termes diagonaux, égaux à 1, ont été limités à 0.1 pour plus de visibilité des autres termes sur la figure. L'abscisse et l'ordonnée indiquent le délai en secondes. Un maximum de 0.035 est mesuré à un délai égal à la période inter-décharge moyenne.

3.4 Décorrélation des sources

On considère ici les sous-matrices bleues de la Figure 27. Soit la fonction d'intercorrélation entre la i^{ème} source retardée de Δ_1 et la jème source retardée de Δ_2, respectivement notées $s_{i,\Delta_1}(t)$ et $s_{j,\Delta_2}(t)$, définie par :

$$\Gamma_{s_{i,\Delta_1},s_{j,\Delta_2}}(t,\mu) = \mathbb{E}\left[s_i\left(t+\frac{\mu}{2}-\Delta_1\right)s_j^*\left(t-\frac{\mu}{2}-\Delta_2\right)\right] \tag{206}$$

En utilisant la définition de l'équation (175), on a :

$$\Gamma_{s_{i,\Delta_1},s_{j,\Delta_2}}(t,\mu) = \sum_{k,l}\mathbb{E}\left[\delta\left(t-kT_i-\tau_{k,i}+\frac{\mu}{2}-\Delta_1\right)\delta\left(t-lT_j-\tau_{l,j}-\frac{\mu}{2}-\Delta_2\right)\right] \tag{207}$$

En supposant $\tau_{k,i}$ indépendant de $\tau_{l,j}$ pour tout i différent de j on a alors :

$$\Gamma_{s_{i,\Delta_1},s_{j,\Delta_2}}(t,\mu) = \sum_{k,l} \mathbb{E}\left[\delta\left(t - kT_i - \tau_{k,i} + \frac{\mu}{2} - \Delta_1\right)\right] \mathbb{E}\left[\delta\left(t - lT_j - \tau_{l,j} - \frac{\mu}{2} - \Delta_2\right)\right] \tag{208}$$

En reconnaissant le produit de convolution généré par l'espérance mathématique des impulsions de Dirac retardées par une gigue temporelle, on en déduit que :

$$\Gamma_{s_{i,\Delta_1},s_{j,\Delta_2}}(t,\mu) = \sum_{k,l} \phi_i\left(t - kT_i + \frac{\mu}{2} - \Delta_1\right) \phi_j\left(t - lT_j - \frac{\mu}{2} - \Delta_2\right) \tag{209}$$

En $\mu = 0$, on a :

$$\mathbb{E}\left[s_i(t-\Delta_1)s_j^*(t-\Delta_2)\right] = \sum_{k,l} \phi_i(t - kT_i - \Delta_1)\phi_j(t - lT_j - \Delta_2) \tag{210}$$

Par une simulation numérique, on représente le coefficient de corrélation entre deux TIN indépendants. La Figure 30 montre le taux de corrélation en fonction des fréquences de décharge des deux TIN variant entre 0 et 50Hz. On remarque que cette corrélation est inférieure à 5%.

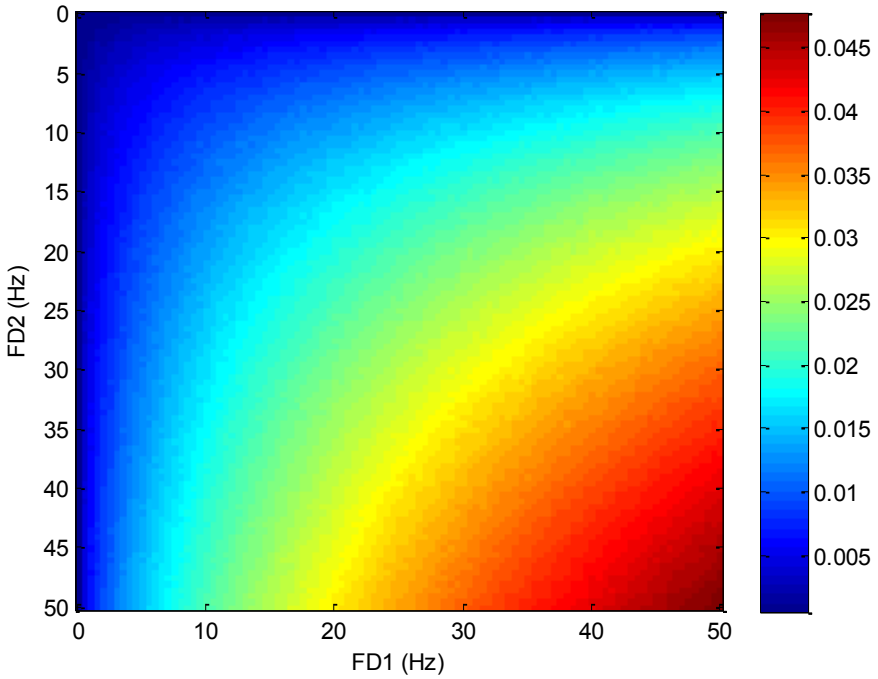

Figure 30 : Coefficient de corrélation maximal entre deux TIN indépendants de fréquence de décharge FD1 et FD2 dans le cas du modèle simplifié.

3.5 A propos du modèle réaliste

Bien que la diagonalité de la matrice de corrélation cyclique des sources étendues n'ait pas été démontré pour le cas du modèle réaliste, on propose de réaliser des simulations numériques comme cela a été fait pour le modèle simplifié. On génère une source TIN selon le modèle réaliste avec un coefficient de variation de 10% et un IID moyen de 11Hz.

On représente dans un premier temps en Figure 31 les coefficients d'intercorrélation entre deux sources identiques retardées d'un délai Δ_1 et Δ_2 tous deux multiples entiers de la période d'échantillonnage. Celle-ci forme alors la sous-matrice mauve en Figure 27 normalisée par rapport à la diagonale, soit l'énergie du signal.

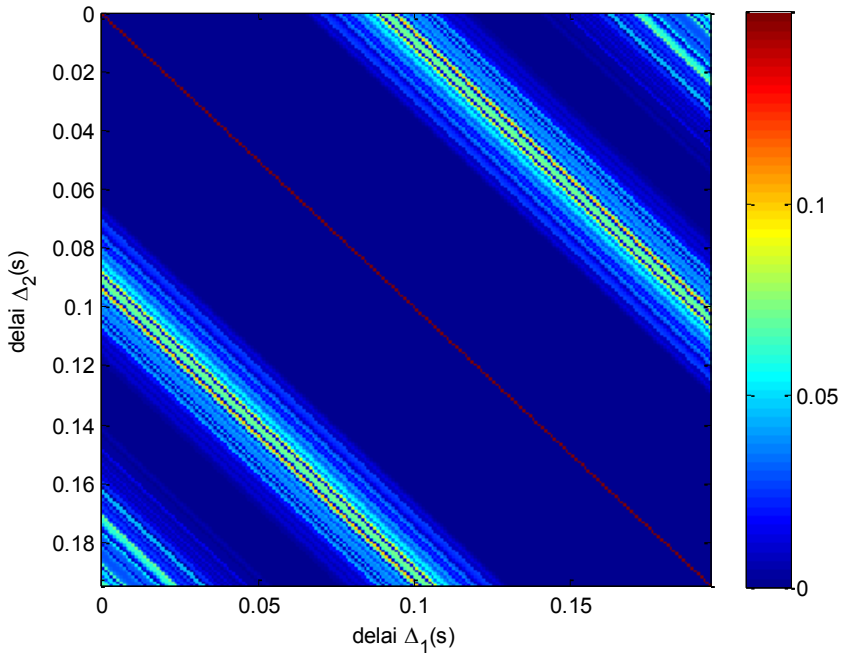

Figure 31 : Matrice de corrélation cyclique de deux TIN retardés selon le modèle réaliste.

On remarque que la condition énoncée à l'équation (204) reste valable. On observe toutefois une augmentation du taux de corrélation par rapport au modèle simplifié lorsque le délai dépasse la condition. Ici le coefficient de corrélation atteint un maximum de 0,11.

Dans un second temps, on représente en Figure 32 le coefficient de corrélation maximal entre deux TIN indépendants à différentes fréquences de décharge. On montre ainsi le coefficient normalisé maximal d'une sous-matrice bleue de la Figure 27.

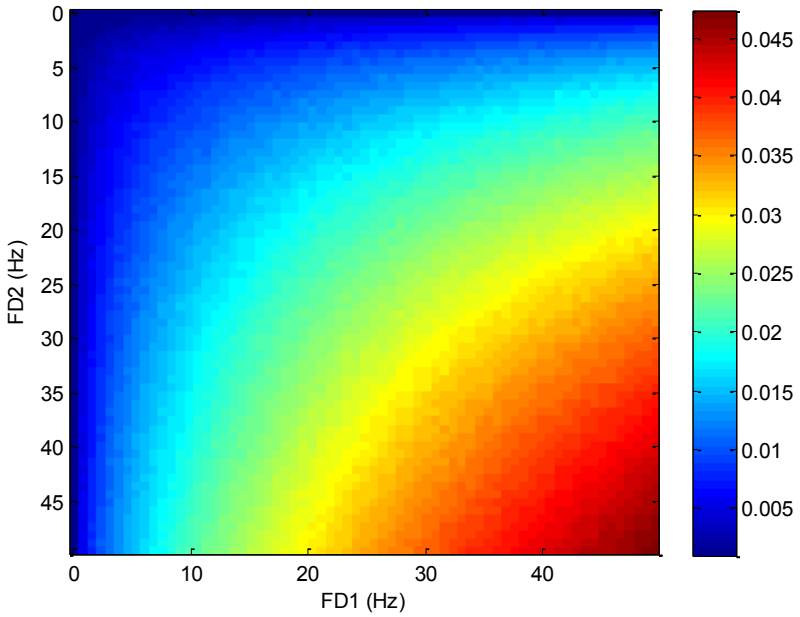

Figure 32 : Coefficient de corrélation maximal entre deux TIN indépendants de fréquences de décharge FD1 et FD2 dans le cas du modèle réaliste.

4 Méthodes proposées pour la séparation au second ordre

Nous avons montré sur le modèle simplifié que la matrice de corrélation cyclique est diagonale pour un retard μ nul. Sur ce modèle, il apparaît que pour une fréquence cyclique donnée, seulement une source et ses versions retardées sont activent, car il a été défini au chapitre I que chaque unité motrice à une fréquence de décharge différente. Si on considère le modèle réaliste nous avons vu que la densité spectrale cyclique intégrée montre des lobes et donc la présence de périodes cycliques incertaines. Plusieurs UM sont donc susceptibles de partager les mêmes UMs ce qui interdit l'utilisation des méthodes ne considérant qu'une source active par fréquence cyclique. La méthode CycloSOBI est alors intéressante car elle permet de séparer des sources ayant un contenu spectral cyclique différent mais autorisant des recouvrements du spectre. Nous chercherons donc à identifier les fréquences cycliques de plus grande énergie pour appliquer la méthode.

Le vecteur des observations est étendu en ajoutant K répétitions retardées successivement de un échantillon, conformément à l'équation (150). Les observations sont d'abord blanchies par ACP. On recherche ensuite P fréquences cycliques pour lesquelles la trace de la corrélation cyclique des données non étendues est maximale. Les matrices de corrélations cycliques complètes sont ensuite calculées pour le modèle étendu aux fréquences cycliques sélectionnées. Enfin on applique la méthode de diagonalisation conjointe de Cardoso *et al.* (voir Annexe D.2) pour l'identification de la matrice unitaire de séparation. Les composantes sont ensuite générées en appliquant la transformation unitaire aux données blanchies. Les TIN sont alors reconstruits en appliquant un seuil aux

composantes. Enfin les PAUM peuvent être identifiés par un moyennage synchronisé sur les décharges, les TIN (voir Chapitre III.3.2). Le Tableau 5 résume la méthode.

$\bar{Y} \leftarrow$ Extension des données par K=(L-1)N/(M-N) retards successifs
$\bar{Z} \leftarrow W \cdot \bar{Y}$ Blanchiment des observations étendues
$\alpha_p \leftarrow$ Recherche des P valeurs les plus élevées de la trace de $CC_{ZZ}(\alpha, 0)$
$M_p \leftarrow$ Calcul des matrices de $CC_{ZZ}(\alpha_p, 0)$
$U \leftarrow$ Diagonalisation conjointe des P matrices M_p
$\bar{S} \leftarrow U \cdot \bar{Z}$ Calcul des composantes sources
$TIN_j \leftarrow$ Reconstruction des TIN par seuillage et élimination des sources redondante
$PAUM_j \leftarrow$ Identification des PAUM par moyennage synchronisé sur les impulsions du TIN_j

Tableau 5 : Algorithme de décomposition proposé.

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques algorithmes de séparation de sources à l'ordre deux, et notamment pour la séparation de signaux cyclostationnaires. Nous en avons dérivé un algorithme de décomposition de signaux EMG adaptés aux mélanges convolutifs et exploitant la propriété de cyclostationnarité et de cyclostationnarité floue des modèles de TPAUM définis au chapitre I. Pour cela, nous avons démontré que la réécriture du modèle de mélange convolutif en mélange linéaire instantané est possible et permet ainsi la décomposition d'UM par une méthode de séparation de sources à l'ordre deux lorsque l'autocorrélation cyclique est calculée sans retard ($\mu = 0$).

Dans ce qui suit, nous appliquerons les méthodes d'analyses de la cyclostationnarité définies au chapitre II sur des signaux EMG réels pour vérifier la validité des modèles cyclostationnaires proposés. Nous mesurerons les performances de l'algorithme de décomposition proposé ici par des simulations de Monte-Carlo réalisées sur des PAUM issus d'un signal EMG réel.

Chapitre V. Résultats expérimentaux et discussion

1 Analyse de la cyclostationnarité de signaux EMG réels

On propose de réaliser une analyse cyclostationnaire de TPAUM réels. Dans cet objectif, nous avons décomposé des signaux EMG réels pour obtenir les TPAUM. Nous utiliserons une base de données de signaux intramusculaires à faible %CMV. Ceux-ci présentent l'avantage d'être décomposables aisément avec une méthode de décomposition par reconnaissance de forme.

1.1 Décomposition des signaux

1.1.1 Signaux et méthodes

On propose ici d'utiliser deux signaux mono-capteurs disponibles sur la base EMGLab [136] et dénommés R00701 et R00702. Ces derniers ont été mesurés par deux électrodes intramusculaires à fils fins insérées dans le *biceps brachial* à une profondeur de 10mm. Ces deux électrodes filaires, séparées d'une distance de 10 à 15mm, permettent une mesure bipolaire du signal. Les sujets réalisent une contraction de 10s à force constante sous condition isométrique. Les signaux sont échantillonnés à une fréquence de 8KHz. Le premier signal mesure l'activité EMG pour une force de 10%CMV et le second est mesuré pour une force de 20%CMV.

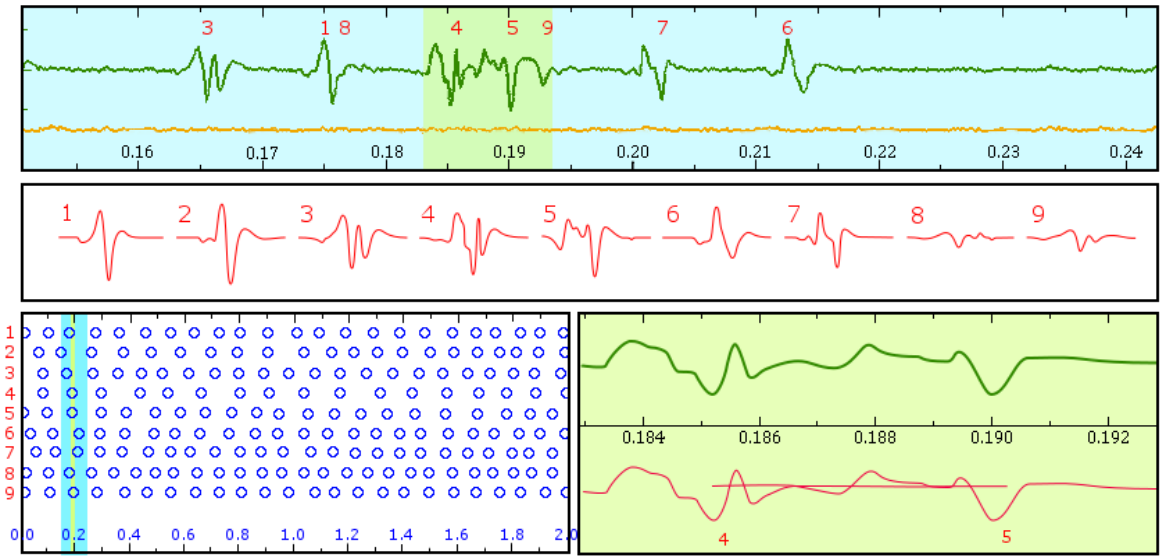

Figure 33 : Copie d'écran colorisée d'EMGLab [81] - exemple de décomposition d'un signal EMG intramusculaire.
L'encadré supérieur montre une portion, représentée sur un fond bleu, de 10ms du signal EMG. La courbe inférieure en orange, montre le résidu de la décomposition et la courbe supérieure verte représente le signal EMG brut. Les PAUM sont identifiés par un numéro. L'encadré du milieu montre les PAUM de référence, en rouge, correspondant aux UM identifiées. L'encadré inférieur gauche montre les trains de décharge de chaque UM sur une durée de deux secondes. Enfin l'encadré inférieur droit montre une portion, sur fond vert, de quelques ms du signal EMG, en vert, et les PAUM de référence, en rouge, avec leurs numéros, respectivement de haut en bas. Les PAUM 4 et 5 ont été identifiés sur cette portion.

Après une décomposition automatique avec correction manuelle, par le logiciel EMGLab [81] (voir Figure 33) nous avons pu identifier les TIN de chaque UM mesurable. Enfin, on estime les statistiques des décharges de chaque UM en mesurant pour chaque TIN l'IID moyen et son écart-type, pour en déduire la fréquence de décharge moyenne de l'UM et le coefficient de variation de la gigue défini à l'équation (74).

1.1.2 Analyse d'un signal à 10% CMV

Le premier signal utilisé est le R00701 [136]. La mesure est effectuée sur un patient sain sur le *biceps brachial* avec une force de 10% CMV, contrôlée avec un dynamomètre. La mesure est effectuée sur 10s. Il résulte de la décomposition avec EMGLab 5 UM avec des IID moyens de 75 à 93ms, ce qui correspond à des fréquences de décharge allant de 10,72Hz à 13,26Hz (Tableau 6). On note un écart-type de l'IID variant de 7 à 8ms, ce qui nous permet de calculer le coefficient de variation (cv), qui va de 8,88 à 10,98%.

UM#	IID (ms)	FD (Hz)	cv (%)
1	93 ± 8	10,72	08,88
2	89 ± 8	11,20	09,30
3	85 ± 9	11,73	10,98
4	92 ± 8	10,88	09,06
5	75 ± 7	13,26	09,30

Tableau 6 : Statistiques des décharges du signal EMG intramusculaire R00701 [136] après décomposition.
Pour chaque unité motrice (UM) décomposée, on mesure l'intervalle inter-décharge (IID) moyen avec son écart-type. Il en est déduit la fréquence de décharge moyenne (FD) de l'unité-motrice et le coefficient de variation (cv) de la gigue relatif à l'IID moyen.

Le Tableau 6 montre des valeurs physiologiquement acceptables au regard de la force exercée et du muscle. En effet, pour des niveaux de force relativement faibles, les fréquences de décharge sont souvent comprises entre 8 et 13 Hz. La Figure 34 détaille les IID de chaque UM au cours du temps, montrant la stabilité de la fréquence de décharge et l'absence de valeurs aberrantes.

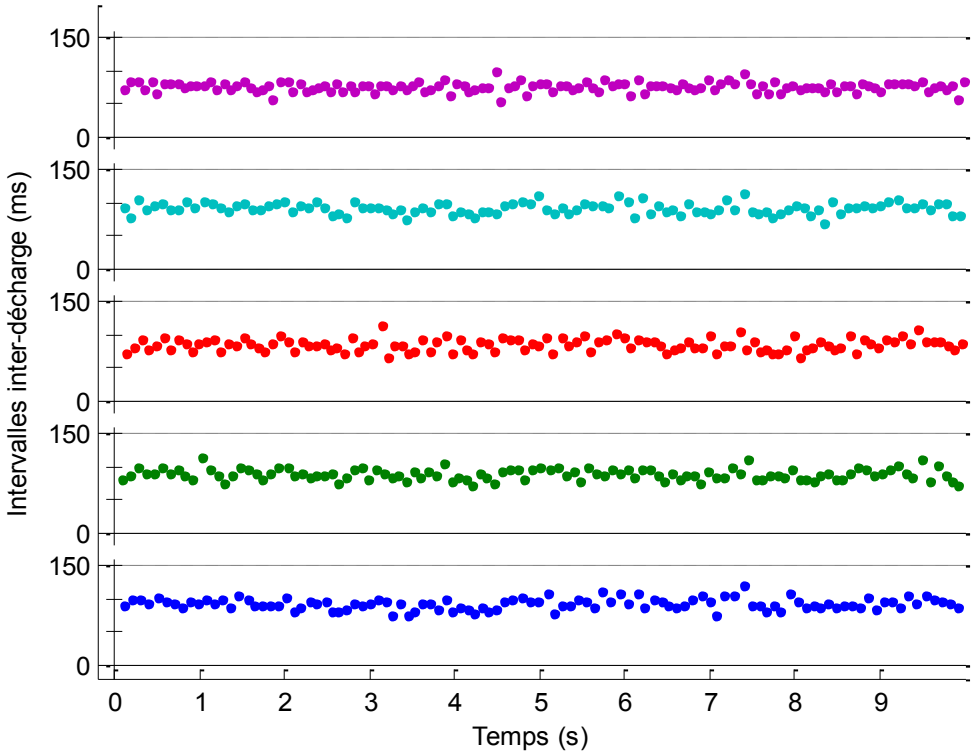

Figure 34 : Intervalles inter-décharge (IID) des unités motrices (UM) obtenus par décomposition du signal R00701 [136]. On représente les IID instantanés, en ordonnée, des UM 1 à 5, respectivement de bas en haut, en fonction du temps en abscisse.

1.1.3 Analyse d'un signal à 20%CMV

Le second signal utilisé est le R00702 [136]. La mesure est effectuée dans les mêmes conditions que le premier mais avec une force de contraction de 20% CMV. La décomposition avec EMGLab donne 9 UM actives avec des IID moyens variant de 74ms à 106ms, soit des fréquences de décharges de 9,44Hz à 13,43 Hz (Tableau 7). On détermine un coefficient de variation de l'IID allant de 9,94% à 16,09%.

UM#	IID (ms)	FD (Hz)	cv (%)
1	88 ± 12	11,32	13,39
2	87 ± 14	11,53	16,06
3	87 ± 90	11,55	09,94
4	106 ± 16	09,44	15,51
5	96 ± 13	10,47	13,55
6	86 ± 90	11,66	10,76
7	79 ± 90	12,69	11,56
8	74 ± 60	13,43	08,71
9	86 ± 11	11,66	12,84

Tableau 7 : Statistiques des décharges du signal EMG intramusculaire R00702 [136] après décomposition.
Pour chaque unité motrice (UM) décomposée, on mesure l'intervalle inter-décharge (IID) moyen avec son écart-type. Il en est déduit la fréquence de décharge moyenne (FD) de l'unité-motrice et le coefficient de variation (cv) de la gigue relatif à l'IID moyen.

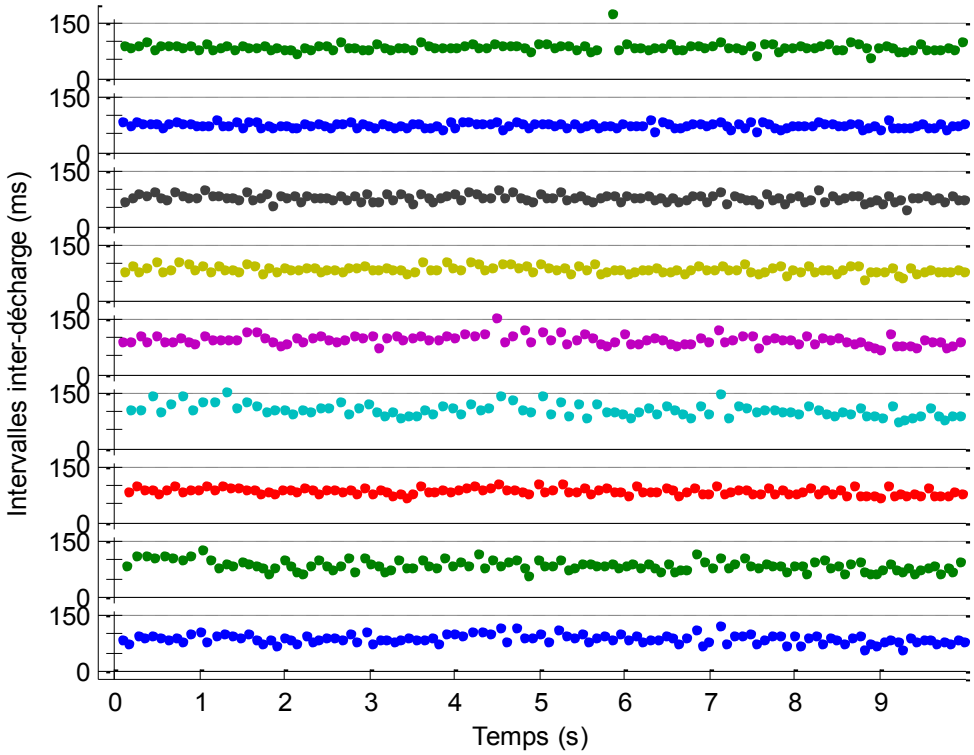

Figure 35 : Intervalles inter-décharge de chaque unité motrice décomposée du signal R00702 [136].
On représente les IID instantanés, en ordonnée, des UM 1 à 9, respectivement de bas en haut, en fonction du temps en abscisse.

La Figure 35 montre l'évolution, pour chaque UM, de l'IID en fonction du temps. On note que globalement les valeurs restent proches de la moyenne. On observe toutefois un IID présentant une valeur deux fois plus élevée que la moyenne pour la 9ème UM à la 6ème seconde environ. Ceci laisse à supposer qu'un PAUM n'a pas été correctement détecté, bien qu'il soit visuellement absent du signal résiduel fourni par EMGLab. Cette petite incohérence aura un impact limité sur nos résultats compte tenu du nombre de décharges présentes et peut être ignorée.

1.2 Analyse cyclostationnaire

1.2.1 Méthode

Sur ces deux signaux nous calculons une estimée de la densité spectrale cyclique en utilisant le périodogramme cyclique moyenné, décrit en Annexe B.3, sur le signal brut, puis sur chaque TPAUM reconstitué. Ces derniers sont générés par la convolution des TIN issus de la décomposition avec les PAUM de référence correspondants. Enfin nous intégrons la DSC sur les fréquences spectrales. Il est alors possible d'évaluer la cyclostationnarité de chacun d'entre eux puis de les comparer avec la DSC intégrée théorique calculée à partir du modèle réaliste fourni à l'équation (130). Pour calculer cette dernière, nous prenons les fréquences de décharge et les coefficients de variation du Tableau 6 et du Tableau 7.

La DSC intégrée est particulièrement intéressante ici car elle représente la transformée de Fourier du signal rectifié au carré, outil classiquement utilisé dans l'analyse spectrale des signaux EMG [137]. En outre, elle est équivalente à la fonction d'autocorrélation cyclique avec un retard nul, outil sur lequel est fondée la méthode de décomposition proposée au Chapitre IV.4.

1.2.2 Paramètres utilisés

Le périodogramme cyclique moyenné est calculé sur une durée totale de 10s. Le signal est découpé en tranches de 100ms avec une fenêtre de Hann et un taux de recouvrement de 2/3. Nous avons ainsi 300 tranches pour le calcul de la moyenne. La résolution en fréquence spectrale (voir Annexe B.3) est donc de 10Hz et la résolution en fréquence cyclique est de 0,1Hz. La DSCi est calculée, pour chaque fréquence cyclique, par la moyenne empirique de la DSC.

1.2.3 Analyse du signal R00701

Le premier signal est analysé dans un premier temps par le calcul de la DSC du signal brut, donnée à la Figure 36. On rappelle que les fréquences de décharge des unités motrices contenues dans ce signal varient de 10,72Hz à 13,26Hz. On observe, en effet, très nettement la présence de concentrations d'énergie aux fréquences cycliques variant de 10 à 12Hz. On voit également les harmoniques des concentrations d'énergie présentées précédemment de 20 à 24Hz. En fréquences spectrales, on observe un spectre continu sur une bande de 50 à 500Hz puis une légère présence énergétique entre 600 et 1000Hz, correspondant typiquement à la DSP d'un PAUM.

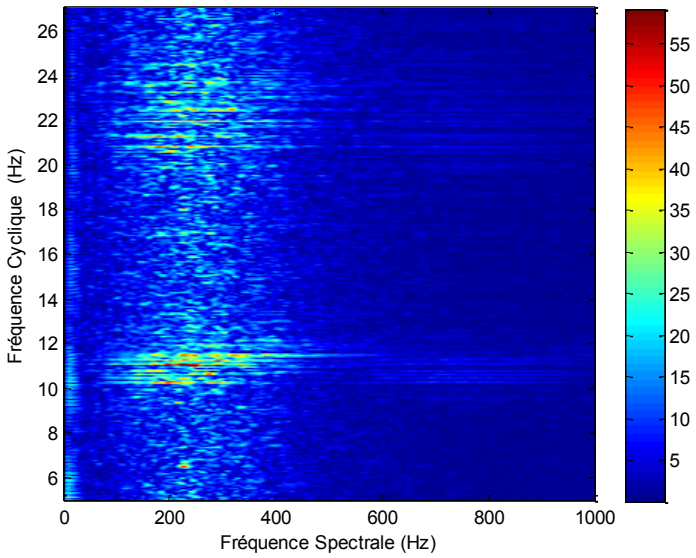

Figure 36 : Densité spectrale cyclique (DSC) du signal R00701.
On représente les fréquences cycliques en ordonnée et les fréquences spectrales en abscisse de la DSC du signal. La valeur de cette dernière est représentée par une échelle de couleur du bleu au rouge. Les valeurs correspondantes (en unité²/Hz) sont indiquées sur la barre de droite.

La Figure 37 montre la DSC intégrée sur les fréquences spectrales, ce qui représente la densité de puissance moyenne du signal en fonction de la fréquence cyclique. On y retrouve les composantes de forte amplitude, mais certains TPAUM se retrouvent masqués dans la DSCi compte tenu de leur faible amplitude.

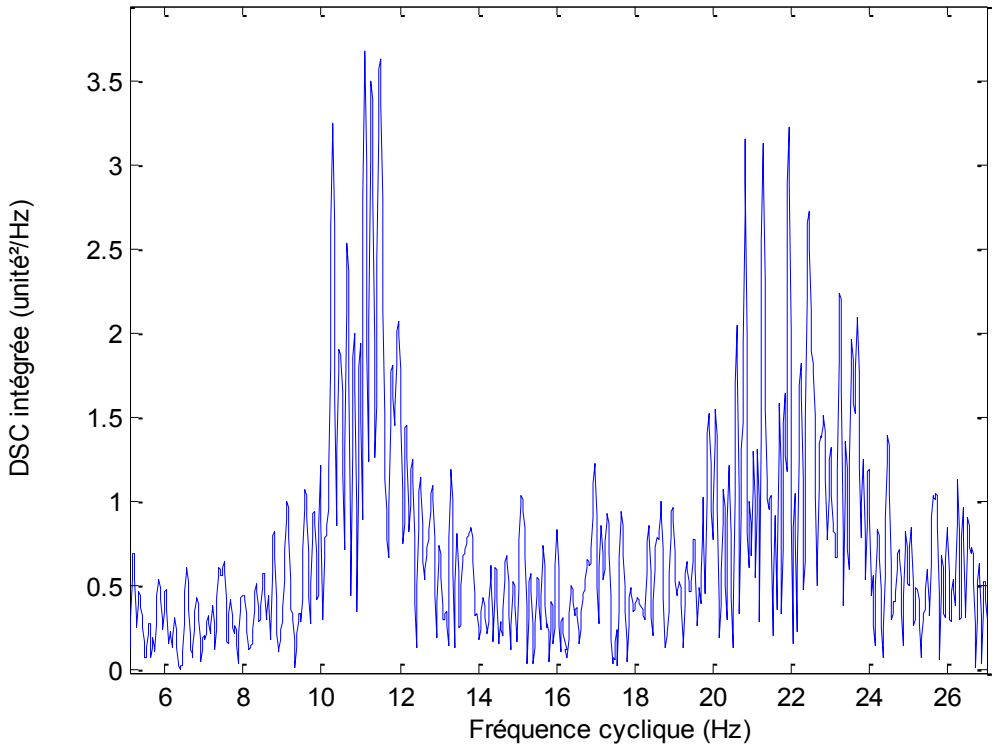

Figure 37 : Densité spectrale cyclique intégrée du signal R00701.
On représente la densité spectrale cyclique intégrée sur les fréquences spectrales. En ordonnée est représentée la densité d'énergie moyenne en fonction de la fréquence cyclique donnée en abscisse.

Ces différences sont mises en évidence sur la Figure 38, qui représente pour chaque TPAUM sa densité spectrale cyclique intégrée sur les fréquences spectrales pour chaque UM. Il apparaît que les UM 4 et 5 sont de très faible énergie comparées aux UM 1 et 2, ce qui les rend indiscernables sur la DSC et la DSCi du signal EMG brut.

La Figure 38 permet également de comparer la DSCi des signaux TPAUM décomposés avec les DSCi théoriques calculées à partir des données du Tableau 7. Pour le calcul des DSCi théoriques, on calcule la DSC à partir de l'équation (130) puis on intègre numériquement sur les fréquences spectrales. De façon générale, la répartition de l'énergie obtenue par calcul de la DSCi suit bien l'allure de la courbe théorique, ce qui permet de valider le cadre théorique proposé au Chapitre II.

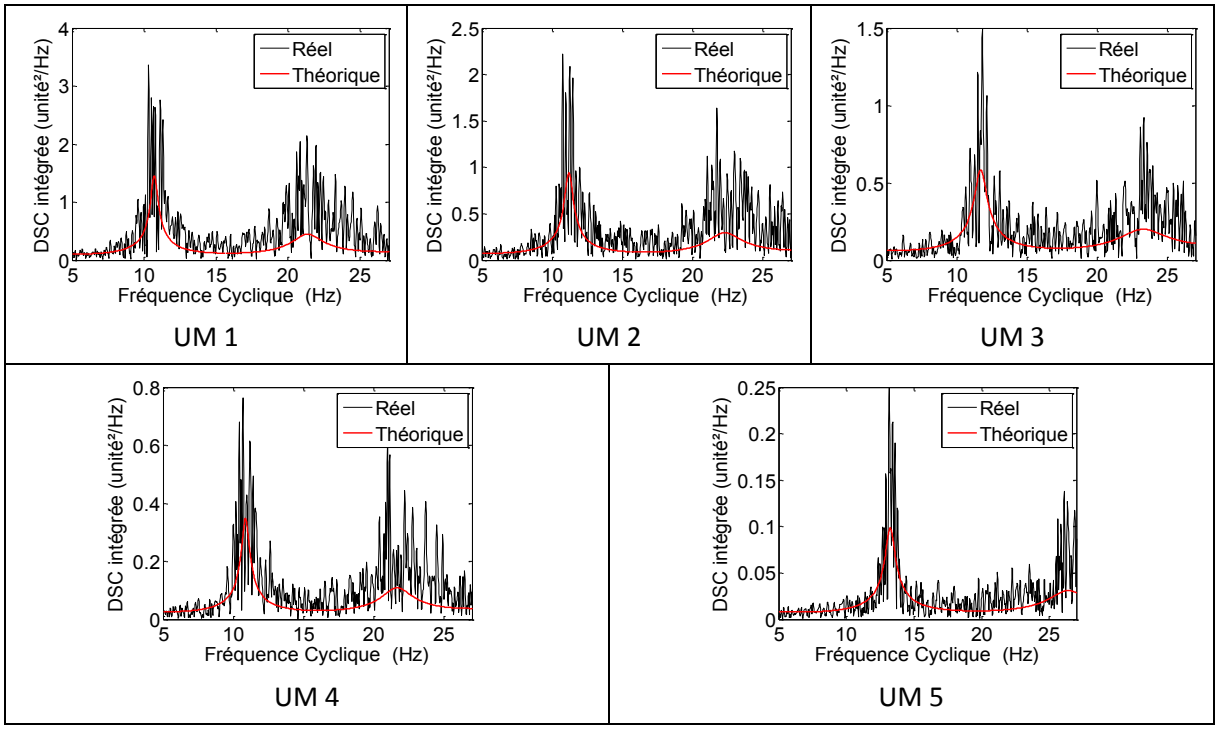

Figure 38 : Densité spectrale cyclique intégrée des cinq TPAUM individuels du signal R00701.
On représente, pour chaque unité motrice décomposée, la densité spectrale cyclique intégrée sur les fréquences spectrales en fonction de la fréquence cyclique donnée en abscisse. En noir est tracée la DSCi estimée à partir des TPAUM décomposés par EMGLab et en rouge est tracée la valeur théorique de la DSCi fournie par le modèle réaliste calculée à partir des valeurs expérimentales du Tableau 6.

1.2.4 Analyse du signal R00702

Dans la même optique, on calcule la DSC du second signal, présentée sur la Figure 39. Un plus grand nombre d'unités motrices est ici actif et leurs fréquences de décharge varient de 9,44Hz à 13,43Hz. On observe principalement sur cette figure une raie à la fréquence cyclique 11,68Hz sur une bande de fréquence spectrale de 100 à 500Hz.

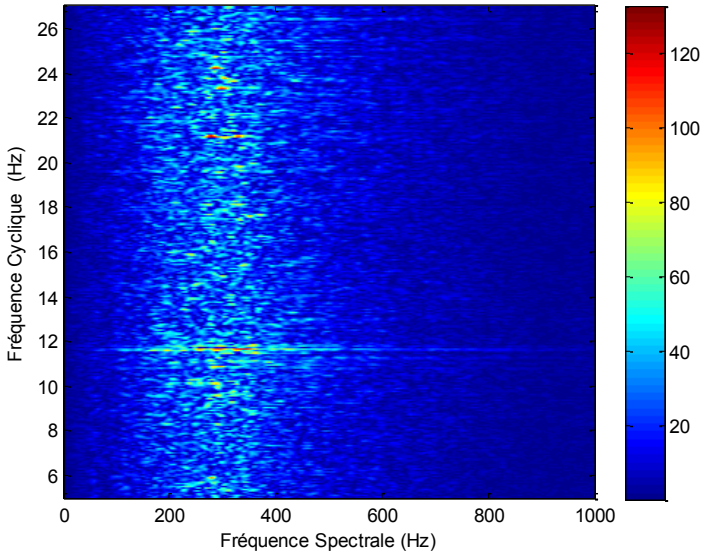

Figure 39 : Densité spectrale cyclique du signal R00702.
On représente les fréquences cycliques en ordonnée et les fréquences spectrales en abscisse de la DSC du signal. La valeur de cette dernière est représentée par une échelle de couleur du bleu au rouge. Les valeurs correspondantes (en unité²/Hz) sont indiquées sur la barre de droite.

La Figure 40 montre la DSC intégrée sur les fréquences spectrales. Celle-ci met en évidence une concentration d'énergie autour de 11Hz et une harmonique autour de 22Hz.

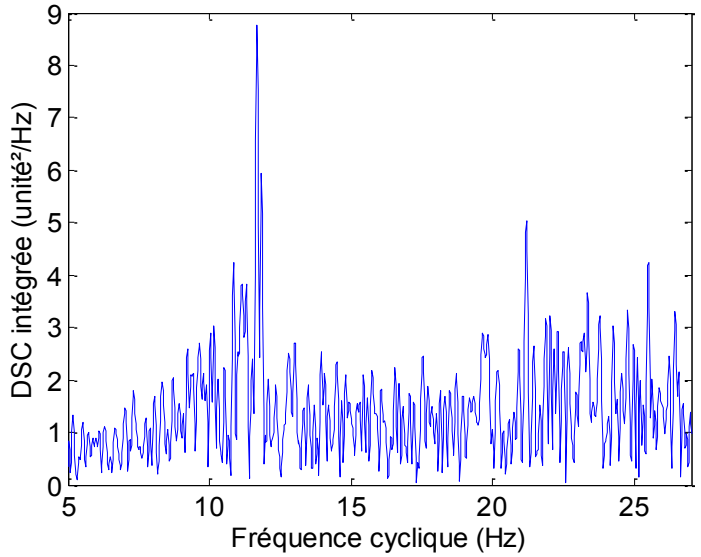

Figure 40 : Densité spectrale cyclique intégrée du signal R00702.
On représente la densité spectrale cyclique intégrée sur les fréquences spectrales. En ordonnée est représentée la densité d'énergie moyenne en fonction de la fréquence cyclique donnée en abscisse.

La Figure 41 permet également de comparer la DSCi des signaux TPAUM décomposés avec les DSCi théoriques calculées à partir des données du Tableau 7.

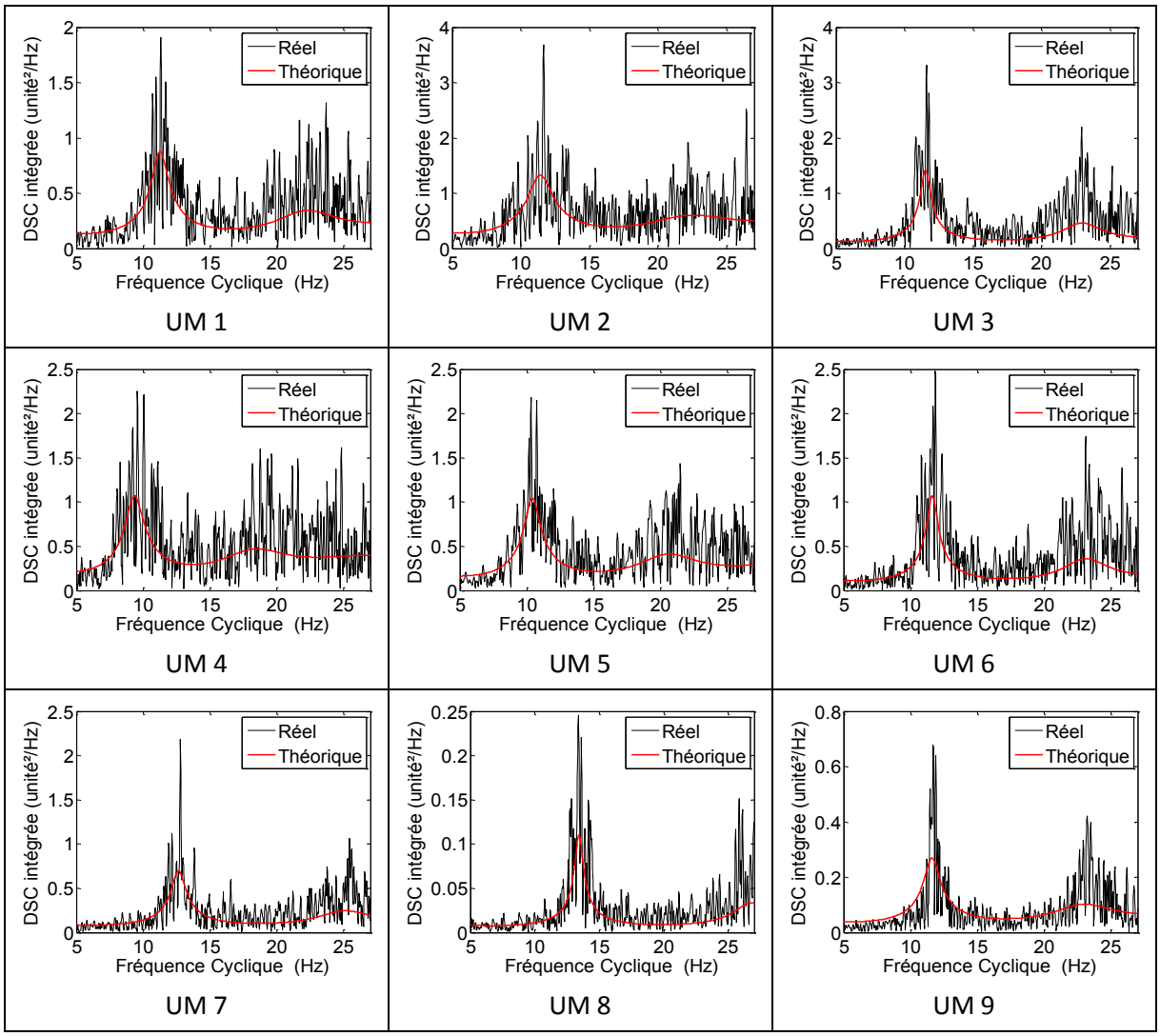

Figure 41 : Densité spectrale cyclique intégrée des neuf TPAUM individuels du signal R00702.
Pour chaque unité motrice décomposée, il est représenté la densité spectrale cyclique intégrée sur les fréquences spectrales en fonction de la fréquence cyclique donnée en abscisse. En noir est tracée la DSCi estimée à partir des TPAUM décomposés et en rouge est tracée la valeur théorique de la DSCi fournie par le modèle réaliste calculé à partir des valeurs expérimentales du Tableau 7.

Cette dernière figure montre clairement pourquoi seule les UM 2 et 3 apparaissent sur la Figure 39 et la Figure 40. En effet, celles-ci ont une énergie plus importante que les autres UM.

2 Décomposition par exploitation de la cyclostationnarité

Avant d'appliquer la technique proposée à un ensemble de mesures réelles, nous avons évalué ses performances sur des simulations.

2.1 Simulations

2.1.1 Génération du signal

Pour tester la séparation de sources, on a besoin d'un ensemble de mélanges. Les mélanges artificiels sont construits à partir de PAUM réels obtenus par décomposition d'un signal EMG intramusculaire fourni par l'équipe du "Department of Neurorehabilitation Engineering" de l'université de médecine de Göttingen. Les mesures ont été réalisées sur l'abducteur du pouce sous condition isométrique avec une force moyenne de 10%CMV.

A partir de ce signal, 5 TPAUM ont été décomposés manuellement à l'aide d'EMGLab puis 5 PAUM ont été identifiés par moyennage synchronisé sur les décharges (voir Chapitre III.3.2). Pour chaque trace de PAUM il est généré 7 voies, à partir de la trace originelle, par 7 décalages temporels successifs de cette première. Il est ainsi simulé la propagation du PAUM recueillie sur 8 points de mesure. Il a également été simulé une atténuation du signal en fonction du point de détection ce qui est habituellement observé lors de recueils expérimentaux. Les simulations ont été réalisées dans le cas non bruité et dans le cas d'un bruit additif stationnaire avec un rapport signal sur bruit (RSB) de 15dB.

Les sources, c'est-à-dire les TIN, sont construites selon les deux modèles traités au Chapitre I.2.3, avec une fréquence d'échantillonnage fixée à 1024Hz, et sur une durée de 10s. La gigue neuromusculaire, que ce soit du modèle simplifié ou réaliste, est fixée par une fréquence de décharge constante et un coefficient de variation de 10%. Le Tableau 8 résume les fréquences de décharge et le nombre d'UM simulées.

Nombre d'UM	Groupe de fréquences de décharge	Fréquences de décharges des unités motrices (Hz)				
		UM 1	UM 2	UM 3	UM 4	UM 5
2	A	11	13			
	B	16	18			
	C	21	23			
	D	41	43			
3	A	10	12	14		
	B	15	17	19		
	C	20	22	24		
	D	40	42	44		
4	A	10	12	14	16	
	B	15	17	19	21	
	C	20	22	24	26	
	D	40	42	44	46	
5	A	9	11	13	15	17
	B	14	16	18	20	22
	C	19	21	23	25	27
	D	39	41	43	45	47

Tableau 8 : Fréquences de décharge des unités motrices simulées.
Ce tableau récapitule toutes les fréquences de décharge utilisées pour les simulations dans les 16 cas de figures étudiés.

2.1.2 Décomposition

La décomposition s'opère suivant deux algorithmes de séparation : SOBI et cycloSOBI, adaptés au contexte convolutif. La taille du filtre L est fixée à 20 échantillons et le nombre de répétitions K de l'observation est calculé pour correspondre à la condition de l'équation (154). Pour 8 capteurs et 5 sources, K est égal à 24. Par ailleurs, le nombre de matrices de corrélations à diagonaliser conjointement est fixé à 4. Celui-ci a été empiriquement déterminé : au-delà de 4, les résultats (le taux de décomposition) n'étaient plus améliorés.

La méthode basée sur SOBI diagonalise conjointement un jeu de 4 matrices de corrélations calculées pour différents retards. La méthode proposée ici, basée sur cycloSOBI, diagonalise conjointement 4 matrices de corrélations cycliques avec un retard nul. La détermination des quatre fréquences cycliques a été réalisée par une détection de maxima sur la trace de la matrice de corrélations cycliques. Les fréquences cycliques ont été sélectionnées dans la bande 5Hz–50Hz correspondant aux extrema physiologiques des fréquences de décharge. Après application aux données blanchies de la transformation unitaire issue de la diagonalisation conjointe, les signaux sources ont été reconstruits par détection des maxima et par application d'un seuil fixé à la moitié de l'amplitude du signal source estimé.

2.1.3 Analyse des performances

Dans l'objectif d'évaluer les performances de la décomposition, les signaux estimés ont été reliés aux TIN générés par une mesure de maximum de corrélation. Chaque source estimée a alors été identifiée et alignée avec les TIN du simulateur. Il est alors possible de comparer les TIN entre eux et de compter, pour chaque UM : le nombre de décharges détectées correctement, de décharges détectées mais mal localisées et le nombre de fausses alarmes. Une décharge est considérée comme mal localisée lorsqu'elle est décalée d'un maximum de deux fois la largeur du filtre L, soit ici 40 échantillons.

2.2 Résultats de la décomposition

Les résultats des méthodes de décomposition basées sur SOBI et cycloSOBI ont été comparés à partir de simulations de Monte-Carlo. Les résultats avec modèle simplifié puis avec modèle réaliste des générations de TIN ont été analysés indépendamment.

2.2.1 Simulations avec modèle simplifié

Les premières expérimentations ont été réalisées en utilisant sur le modèle simplifié de génération des TIN. Chaque figure représente en 3 dimensions un des indicateurs précités en fonction du nombre d'UM, de 2 à 5, et du groupe de fréquences de décharge, dénoté par les lettres A, B, C et D, conformément au Tableau 8. Les scénarios A à D considèrent des fréquences de décharge de plus en plus élevées. Pour chaque indicateur, SOBI et CycloSOBI ont été comparés dans le cas non bruité et avec bruit sur 4 graphes distincts.

La Figure 42 et la Figure 43 présentent les taux de détection de décharges sur les données respectivement non bruitées et bruitées avec un RSB de 15dB, avec la méthode SOBI. De même les résultats de détection avec la méthode cycloSOBI sont présentés dans les Figure 44 et Figure 45. Une diminution des performances avec l'augmentation des valeurs de fréquences de décharge et du nombre d'unités motrices est relevée quelle que soit la méthode. En revanche, la méthode basée sur CycloSOBI présente pour tous les paramètres de meilleurs résultats que SOBI.

Pour des fréquences de décharge inférieures à 18Hz (cas des groupes A et B), la méthode cycloSOBI montre de bons résultats avec un taux de détection moyen entre 95% et 90% dans un cas non bruité, contre 90% à 65% pour SOBI. En présence de bruit cycloSOBI montre des résultats situés entre 100% et 75% alors que SOBI fournit des résultats situés entre 90% et 55%. Lorsque la fréquence de décharge dépasse les 20Hz (cas des groupes C et D), le taux de détection chute fortement pour les deux méthodes. Au niveau du groupe C, le taux de détection sans bruit varie de 95% à 60% pour cycloSOBI et de 60% à 40% pour SOBI. En présence de bruit les performances pour les deux méthodes se situent entre 60 et 45%. Au niveau du groupe D, pour lequel les fréquences de décharge varient de 40 à 47Hz, on atteint 35% de taux de détection quelle que soit la méthode, avec ou sans bruit.

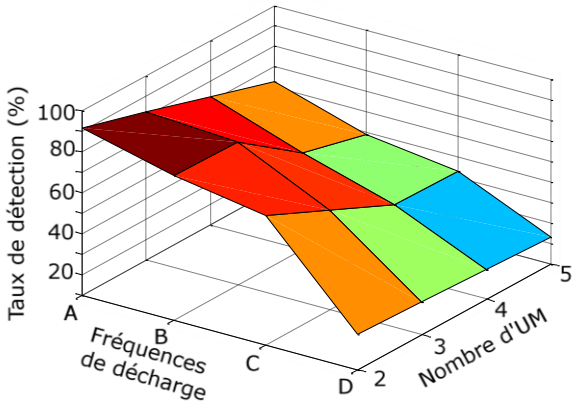

Figure 42 : Taux de détection par SOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité.

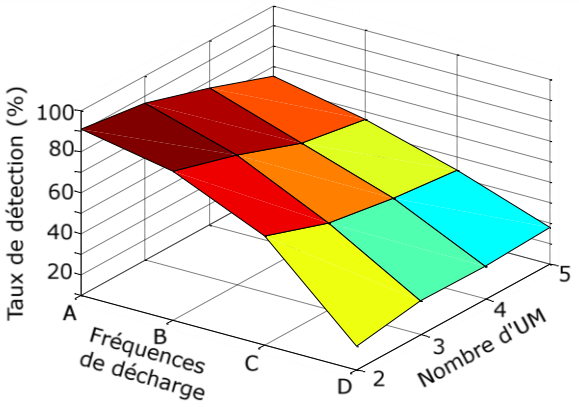

Figure 43 : Taux de détection par SOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB).

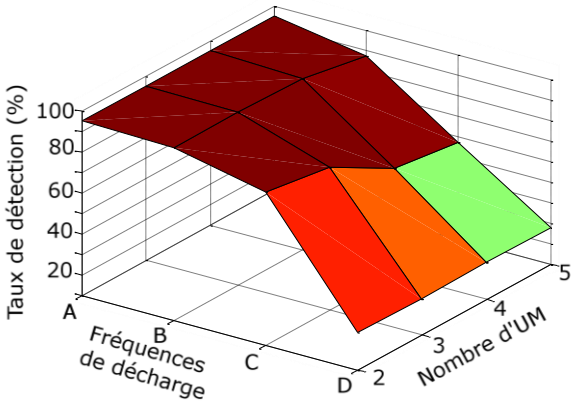

Figure 44 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité.

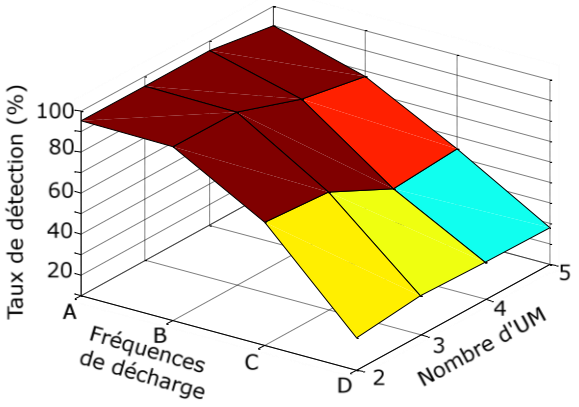

Figure 45 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB).

La Figure 46 reporte le taux de localisation incorrecte des impulsions de SOBI dans le cas non bruité. Ce taux augmente rapidement avec l'augmentation du nombre de sources et de la fréquence de décharge. Celui-ci dépasse les 10% lorsque plus de deux sources sont présentes ou lorsque les fréquences de décharge dépassent les 18Hz. Dans le cas bruité, Figure 47, ce taux dépasse les 20%.

Concernant cycloSOBI, dans le cas non bruité, la Figure 48 présente un très faible taux de mauvaise localisation, proche de 0. Ceci lorsque les fréquences de décharge sont inférieures à 18Hz, correspondant aux groupes A et B. Pour le groupe D, le taux de localisation incorrecte atteint une valeur égale au taux de détection. Enfin, dans le cas bruité, Figure 49, le taux de localisation incorrecte devient supérieur à 10% lorsque la fréquence de décharge dépasse les 18Hz ou lorsqu'il y a plus de 3 UM actives. Au-delà, les taux de localisation incorrecte sont égaux aux taux de détection, indiquant que l'ensemble des détections sont mal localisées.

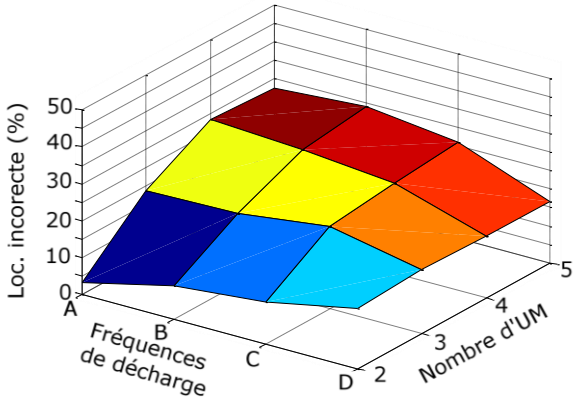

Figure 46 : Taux de localisation incorrecte par SOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité.

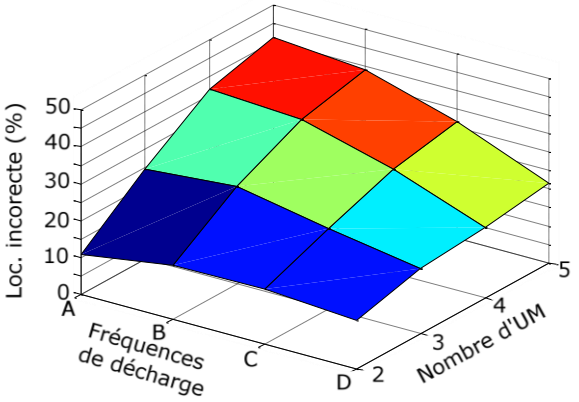

Figure 47 : Taux de localisation incorrecte par SOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB).

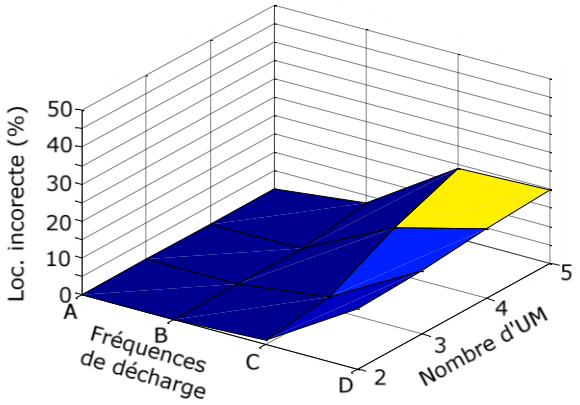

Figure 48 : Taux de localisation incorrecte par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité.

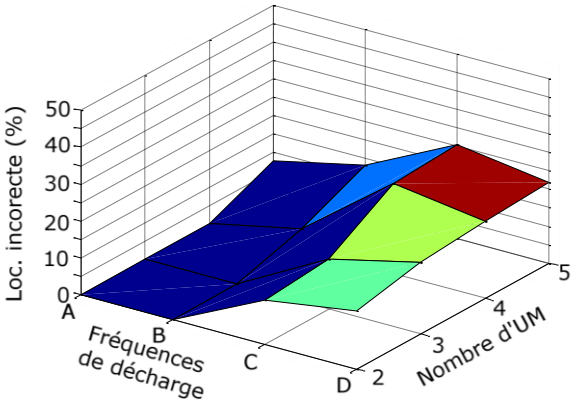

Figure 49 : Taux de localisation incorrecte par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB).

Le taux de fausse alarme est inférieur à 5% en ce qui concerne SOBI dans le cas non bruité, Figure 50, et pratiquement nul pour cycloSOBI, Figure 52. Dans le cas bruité, des fausses détections apparaissent

pour des fréquences de décharge faibles (Groupe A) et leur taux atteint 15% environ dans le cas de SOBI (Figure 51) et moins de 4% dans le cas de cycloSOBI (Figure 53).

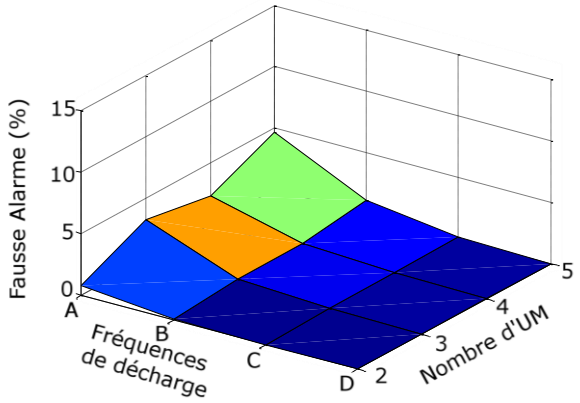

Figure 50 : Taux de fausses alarmes par SOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité.

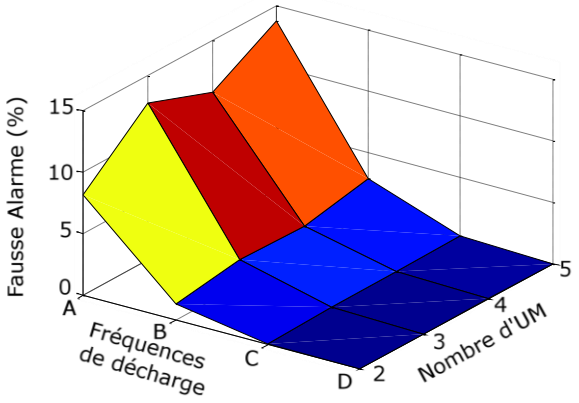

Figure 51 : Taux de fausses alarmes par SOBI avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB).

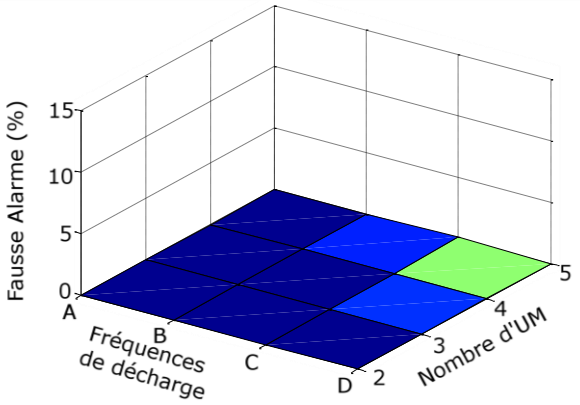

Figure 52 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié non bruité.

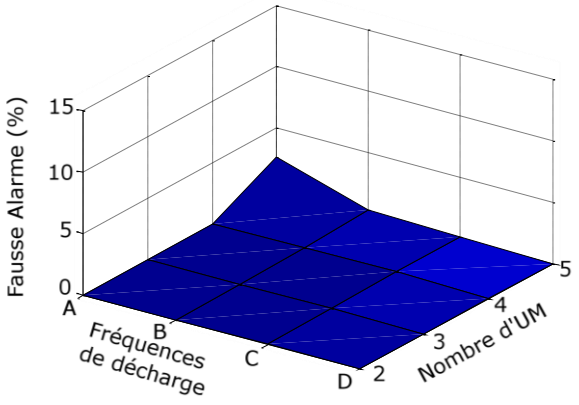

Figure 53 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle simplifié bruité (RSB 15dB).

On observe que globalement cycloSOBI apporte des résultats nettement supérieurs à SOBI sur toutes les performances analysées ici.

2.2.2 Résultats obtenus sur le modèle réaliste

En utilisant les mêmes paramètres, on réalise une seconde série de simulations en utilisant cette fois le modèle réaliste de génération des TIN. Les mêmes observations que dans le cas du modèle simplifié peuvent être faites. Les performances globales sont meilleures sur cycloSOBI que sur SOBI. Nous avons un taux de détection supérieur à 90% par cycloSOBI (Figure 56) dans un cas non bruité pour un taux de décharge faible (inférieur à 18Hz). Les résultats sont identiques à ceux obtenus sur le modèle simplifié, comme on peut le voir de la Figure 54 à la Figure 65.

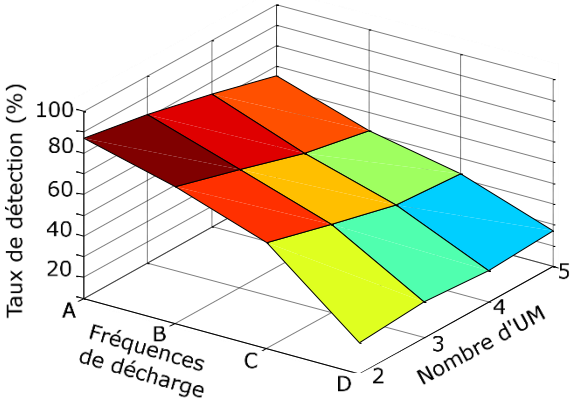

Figure 54 : Taux de détection par SOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité.

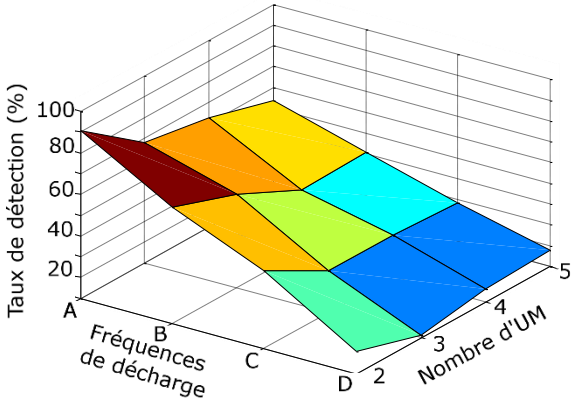

Figure 55 : Taux de détection par SOBI avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB).

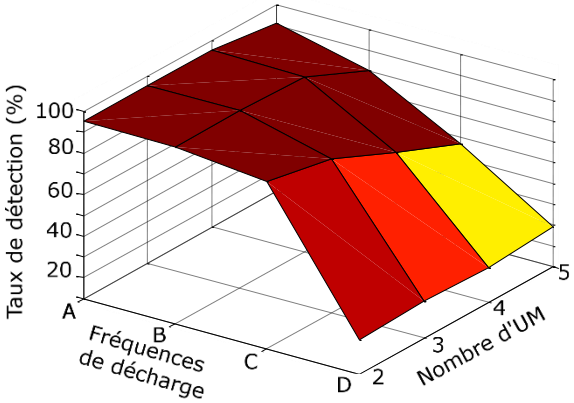

Figure 56 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité.

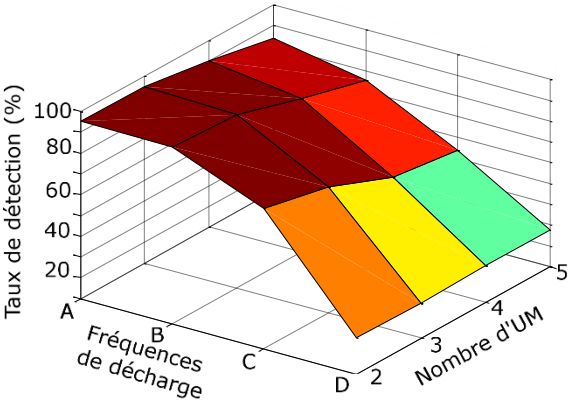

Figure 57 : Taux de détection par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB).

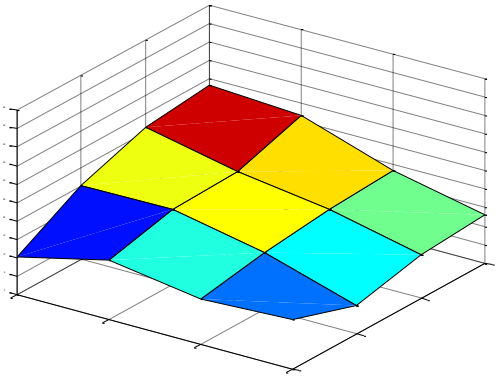

Figure 58 : Taux de mauvaise localisation par SOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité.

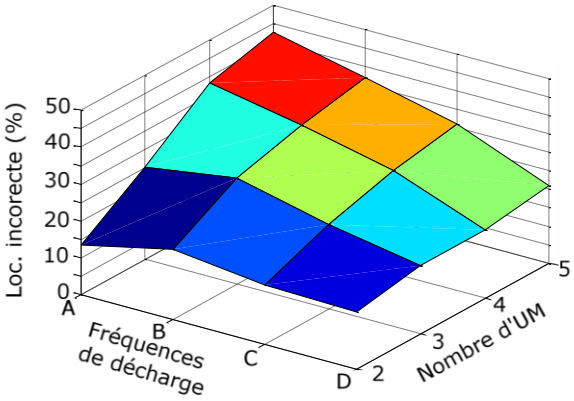

Figure 59 : Taux de mauvaise localisation par SOBI avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB).

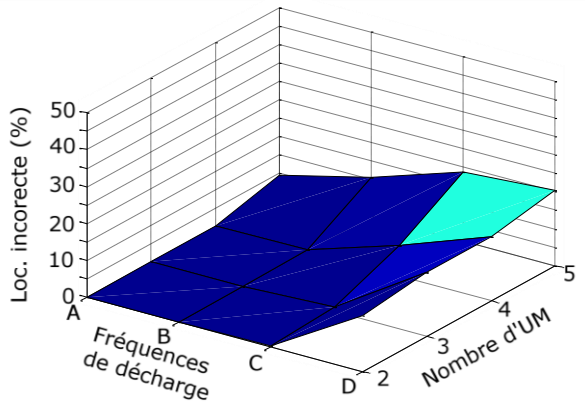

Figure 60 : Taux de mauvaise localisation par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité.

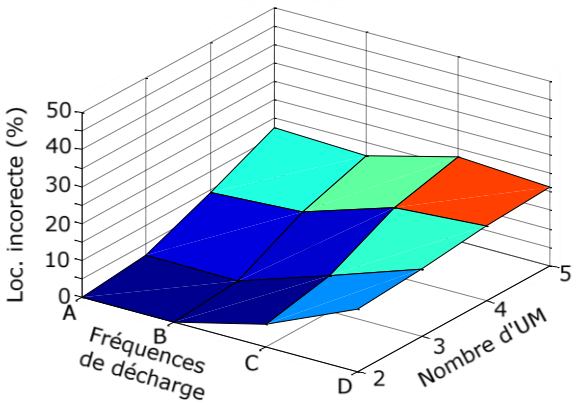

Figure 61 : Taux de mauvaise localisation par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB).

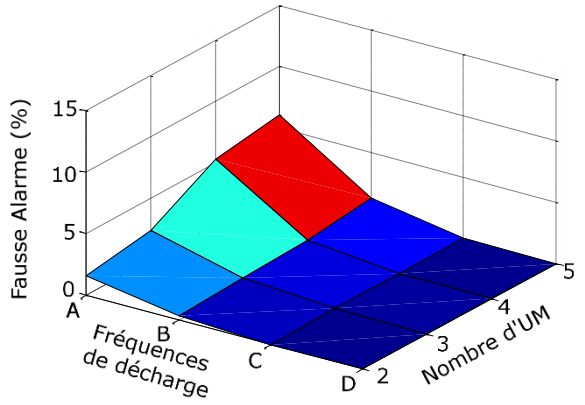

Figure 62 : Taux de fausses alarmes par SOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité.

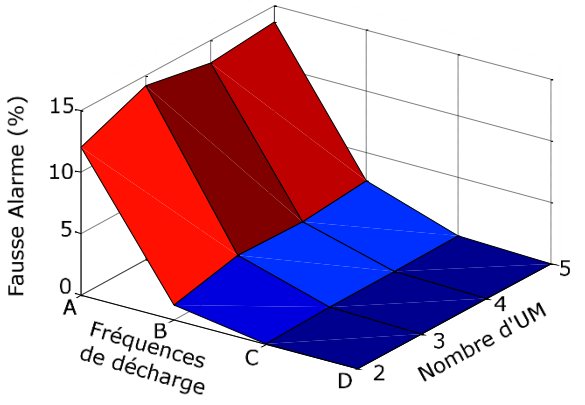

Figure 63 : Taux de fausses alarmes par SOBI avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB).

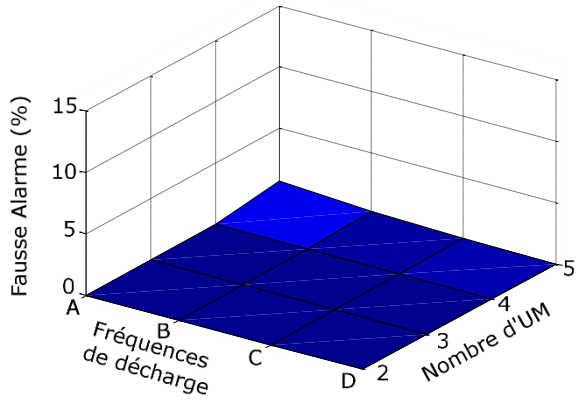

Figure 64 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste non bruité.

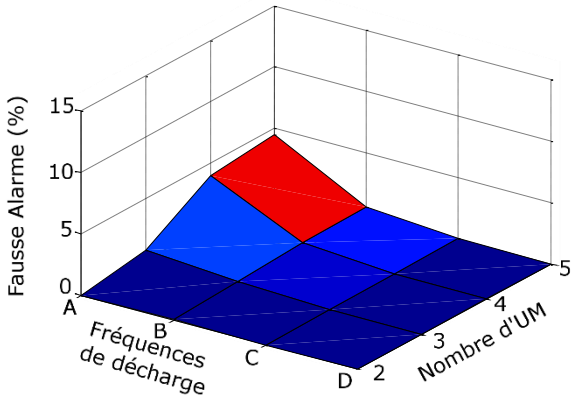

Figure 65 : Taux de fausses alarmes par cycloSOBI convolutif avec modèle réaliste bruité (RSB 15dB).

2.3 Discussion

Dans cette partie nous avons évalué les performances de la méthode proposée sur des simulations. La méthode de référence de séparation de sources à l'ordre deux étant SOBI on propose ici de comparer notre méthode de séparation, basée sur la cyclostationnarité, avec SOBI.

Bien que la méthode SOBI ne soit pas idéale pour les signaux EMG décrits par un modèle étendu car les matrices de corrélation ne sont pas diagonales lorsque $\mu \neq 0$, le choix de délais de quelques échantillons seulement limite l'effet de la non-diagonalité de la matrice et permet tout de même la séparation de quelques sources. On note que la performance reste mitigée même pour des fréquences de décharge faibles et lorsque peu de sources sont actives.

Comparée à la méthode SOBI, cycloSOBI apporte des résultats nettement supérieurs montrant ainsi l'intérêt de l'utilisation de la cyclostationnarité. Les résultats ont montré que la méthode fonctionne aussi bien à partir d'un modèle cyclostationnaire que cyclostationnaire flou, plus réaliste pour les signaux EMG.

La méthode CycloSOBI présente toutefois quelques limitations théoriques pouvant expliquer la dégradation des performances dans certains cas de figure.

Nous voyons sur les résultats de simulation que les performances de séparation chutent lorsque la fréquence de décharge est supérieure à 18Hz. Par ailleurs, on s'aperçoit que sur les résultats, l'augmentation du nombre d'unité motrice est également une limitation. Ceci s'explique encore une fois par la condition énoncée à l'équation (205). En effet cette condition dépend également du nombre d'unités motrices considérées et ainsi la limite en fréquence de décharge décroît avec le nombre d'UM présente dans le signal.

En effet, nous avons établi une condition sur la fréquence de décharge, énoncée à l'équation (205), nécessaire pour obtenir une matrice de corrélation cyclique des TIN diagonale. On rappelle cette condition :

$$FD_{max} = \frac{1 - 3 \cdot cv}{\mathrm{D_{PAUM}}} \cdot \frac{M - N}{M}$$

Avec FD_{max} la fréquence de décharge maximale, cv le coefficient de variation de la gigue, $\mathrm{D_{PAUM}}$ la durée d'un PAUM, M le nombre d'observations et N le nombre de sources. Lorsque cette condition n'est plus respectée, la qualité de la séparation des TIN sera alors diminuée. On note que cette condition provient du recouvrement moyen des impulsions lors de la présence d'un retard dans la corrélation cyclique, inhérent à la réécriture du modèle de mélange. Pour nos simulations nous avons déterminé la longueur des PAUM, dénotée L, de 20 échantillons pour une fréquence d'échantillonnage de 1024Hz. Ainsi la longueur du filtre donnée par $(L - 1) \cdot T_e$ vaut 18,6ms. On considère pour nos simulations un coefficient de variation de la gigue de 10% et une mesure sur huit capteurs. La condition équation (199) sera vérifiée lorsque la fréquence de décharge est inférieure à 28,3Hz pour 2 UM et inférieure à 14,1Hz pour 5 UM. Ceci explique les baisses de performances observées lorsque les signaux

EMG dépassent des fréquences de décharge de 18Hz. On note que bien que la qualité de séparation s'en retrouve diminuée, la condition ne représente pas une limite absolue.

Enfin la présence de bruit dans le signal diminue la qualité de la séparation, quelle que soit la fréquence de décharge. Ceci peut s'expliquer en partie par l'étape de blanchiment qui s'effectue sur la matrice de covariance des observations, dont l'estimée est dégradée par le bruit.

3 Expérimentation sur des signaux EMG réels

3.1 Décomposition d'un signal EMG intramusculaire

Nous avons également tenté d'appliquer notre méthode sur un signal EMG intramusculaire réel. Nous utilisons pour cela le signal d'origine pour nos simulations en exploitant les 15 capteurs disponibles.

La méthode développée dans le présent travail a été appliquée sur 15 signaux EMG intramusculaires réels acquis pendant 10s. Signal qui était également utilisé dans le cadre des simulations présentées au Chapitre V.2.1. La fréquence d'échantillonnage était de 10kHz.

Les 15 signaux EMG sont représentés empilés sur une séquence de 500 ms (Figure 66) et présentent un faible RSB.

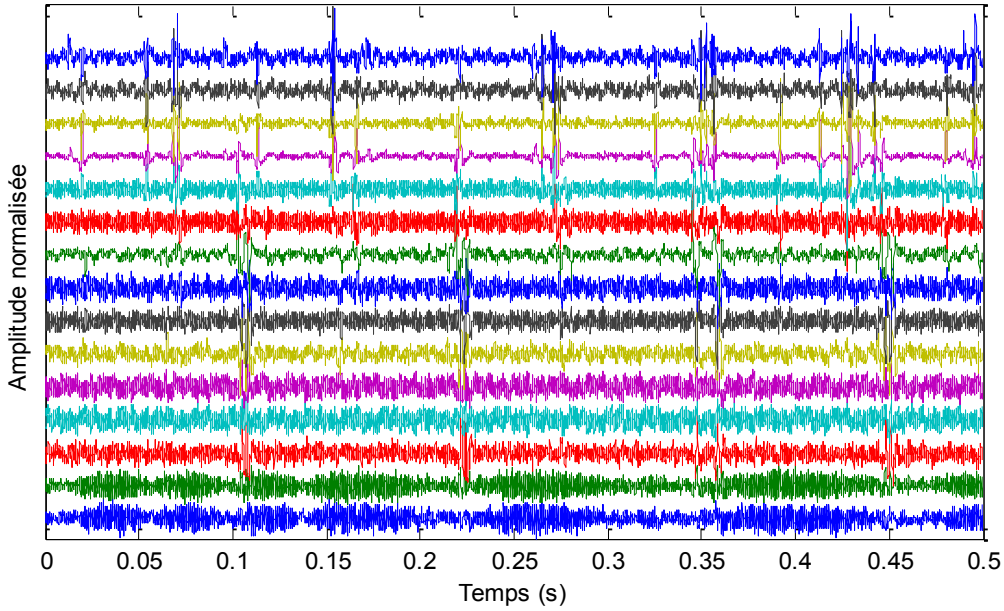

Figure 66 : Représentation temporelle d'une portion du signal EMG intramusculaire multi capteurs.
Ce signal intramusculaire multi-capteurs nous a été procuré par l'équipe du "Department of Neurorehabilitation Engineering" de l'université de médecine de Göttingen. Le signal est acquis à 10% de la contraction musculaire maximale sur l'abducteur du pouce grâce à 15 électrodes bipolaires intramusculaires.

L'acquisition des signaux EMG était synchronisée avec celle du signal Force. Sur la Figure 67 on représente ce signal normalisé par rapport à la valeur moyenne égale à 10%CMV. On représente en

tirets rouges sur cette figure la valeur moyenne plus ou moins l'écart-type. Il est à relever que la force subit une variation de 8,9% de sa valeur moyenne. Ceci induira une augmentation de la variation de la gigue des TPAUM.

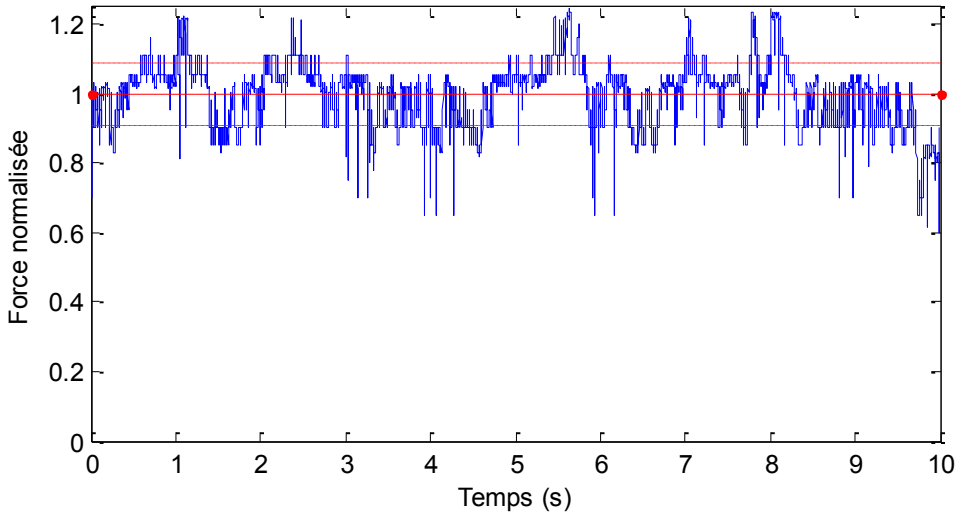

Figure 67 : Force mesurée pendant l'acquisition du signal intramusculaire.
La force est normalisée par rapport à la moyenne égale à 10%CMV. La ligne continue rouge représente la moyen et les lignes en tiret rouge les valeurs de plus/moins son écart-type.

La longueur du filtre L est estimée à 20 échantillons. Après application de notre algorithme de décomposition sur les 15 canaux disponibles, on trace en Figure 68 la valeur absolue des sources estimées après application de la diagonalisation conjointe. Il n'est pas représenté les autres sources telles que le bruit ou des versions retardées des sources

Il est à relever que l'algorithme a identifié 5 sources différentes. A la suite de quoi, une détection par seuillage a été réalisée sur ces 5 sources permettant ainsi une reconstruction des TIN. Puis les IID ont été calculés et sont présentés à la Figure 68 pour chaque source identifiée.

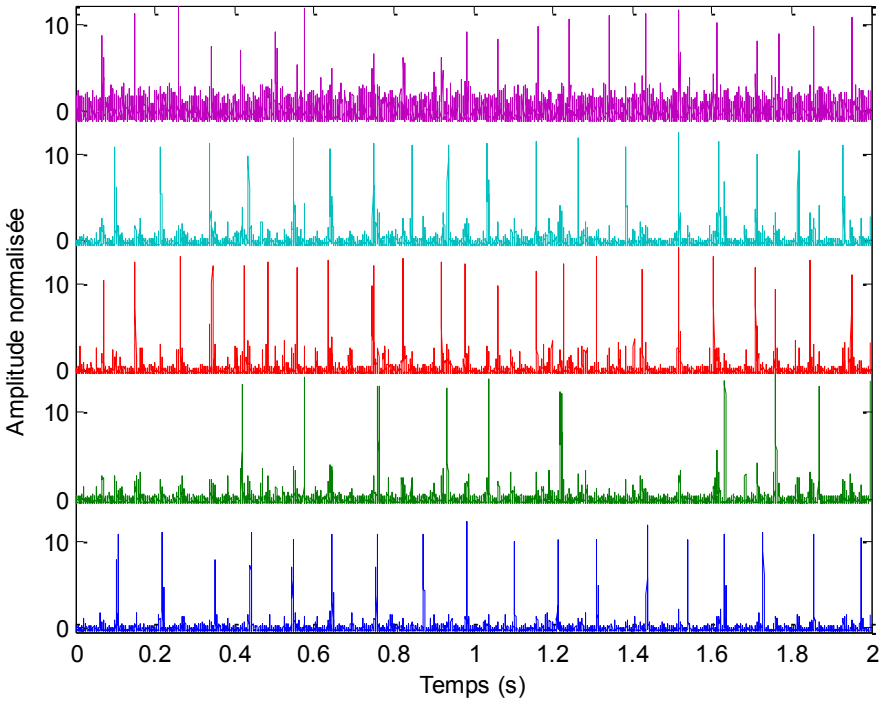

Figure 68 : Sources estimées après décomposition par CycloSOBI du signal intramusculaire réel
Cinq trains d'impulsion nerveux ont été estimés par la méthode. L'ordre des sources est représenté de bas en haut de la figure. Seule les deux premières secondes de signal sont représentées ici.

Le Tableau 9 résume les statistiques de décharge en montrant la moyenne et l'écart-type de l'IID puis les fréquences de décharge et les coefficients de variation déduits de ces valeurs.

MU#	IID (ms)	FD (Hz)	cv (%)
1	116 ± 25	8,61	21,51
2	159 ± 61	6,31	38,40
3	86 ± 23	11,66	26,33
4	113 ±- 23	8,81	20,21
5	220 ± 158	4,54	71,88

Tableau 9 : Statistiques estimées des décharges détectées par la méthodes CycloSOBI sur le signal EMG intramusculaire réel décomposé par CycloSOBI. Il y est représenté les moyennes et écart-types des intervalles inter-décharges (IID), la fréquence de décharge (FD) et le coefficient de variation (cv).

Enfin la Figure 69 représente, au cours du temps, les IID de chaque TIN estimé.

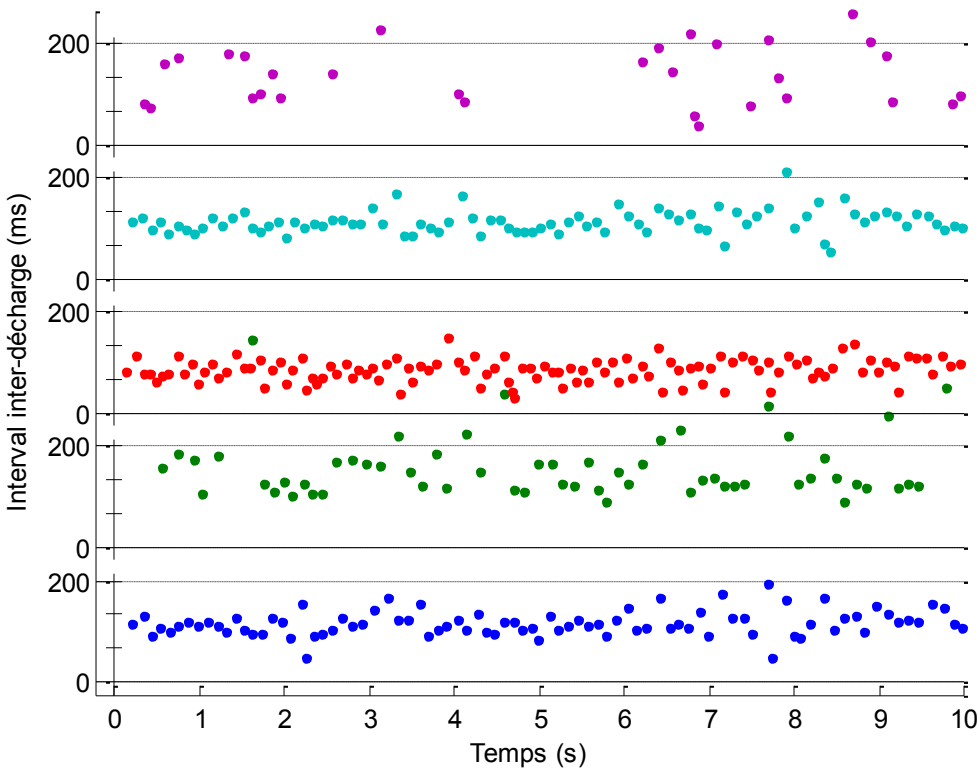

Figure 69 : Intervalles inter-décharges instantanés du signal EMG intramusculaire réel décomposée par CycloSOBI. Les cinq signaux sont représentés par une couleur différente.

On observe sur la Figure 68 et la Figure 69 ainsi que sur le Tableau 9 que la cinquième source, en violet, est mal estimée. La forte variabilité de l'intervalle inter-décharge (Figure 69) de la 5ème source explique pourquoi il est difficile d'identifier ses impulsions Dirac. Si on tient compte de la variation de 8,9% de la force, les quatre autres sources semblent avoir été correctement estimées avec des fréquences de décharge variant de 6,31 à 11,66Hz.

La fréquence de décharge basse du second TIN, représentée en bleu clair, peut s'expliquer par l'activation sporadique de l'unité motrice. On peut voir sur la Figure 68 que l'unité motrice semble inactive les 400 premières millisecondes ainsi qu'entre 1,2s et 1,6s. Ceci induit donc une faible fréquence de décharge et un fort coefficient de variation.

Les difficultés quant à l'identification des sources dans ce signal sont liées à un faible rapport signal sur bruit et à une grande variabilité accrue de la gigue due à une variation importante de la force au cours du temps. On note également que certains capteurs, Figure 66, ne contiennent pas d'information utile, ce qui nuit aux résultats.

3.2 Tentative de décomposition d'un signal EMG de surface

Le signal utilisé ici a été acquis sur le biceps brachial (chef externe) en condition isométrique à force constante à 5%CMV sur un sujet masculin ne présentant aucune pathologie.

La chaine d'acquisition est dotée de huit capteurs en montage différentiel fournissant ainsi 7 voies. Les capteurs, électrodes de surface Ag/AgCl de diamètre 5mm, sont répartis linéairement sur l'axe des fibres musculaires avec une distance inter-électrodes de 7mm. Les signaux sont ensuite amplifiés à 60dB et filtrés avec une bande passante à -3dB de 18Hz à 1,9Khz. Un convertisseur analogique-numérique 16bit est utilisé pour l'acquisition des signaux à une fréquence d'échantillonnage de 10KHz. Les signaux sont enfin sous-échantillonnés à 1KHz. Parallèlement, une jauge de contrainte permet de mesurer la force développée. Ce signal est mesuré et synchronisé avec les mesures EMG.

Le sujet est placé sur un ergomètre développé au laboratoire PRISME. Ce dispositif permet au sujet, attaché par des sangles, d'être maintenu à une position fixe limitant ainsi les contractions non désirées des autres muscles. Le sujet est en position assise le dos contre un siège remontant jusqu'aux épaules. Le coude, commandé par le muscle étudié, était positionné avec une ouverture de 100°.

En premier lieu, la CMV a été déterminée par une série de 3 essais où le sujet devait développer une contraction maximale. Entre chaque essai une période de 3 minutes permettait aux muscles du sujet de récupérer physiquement et éviter ainsi les phénomènes de fatigue musculaire. A l'issue de ces trois expérimentations, la CMV est déterminée par la force maximale. Une récupération de 10mn est ensuite réalisée avant de commencer une expérimentation de 10s à 5%CMV.

La Figure 70 montre une portion de 0,5s du signal EMG acquis sur les sept voies.

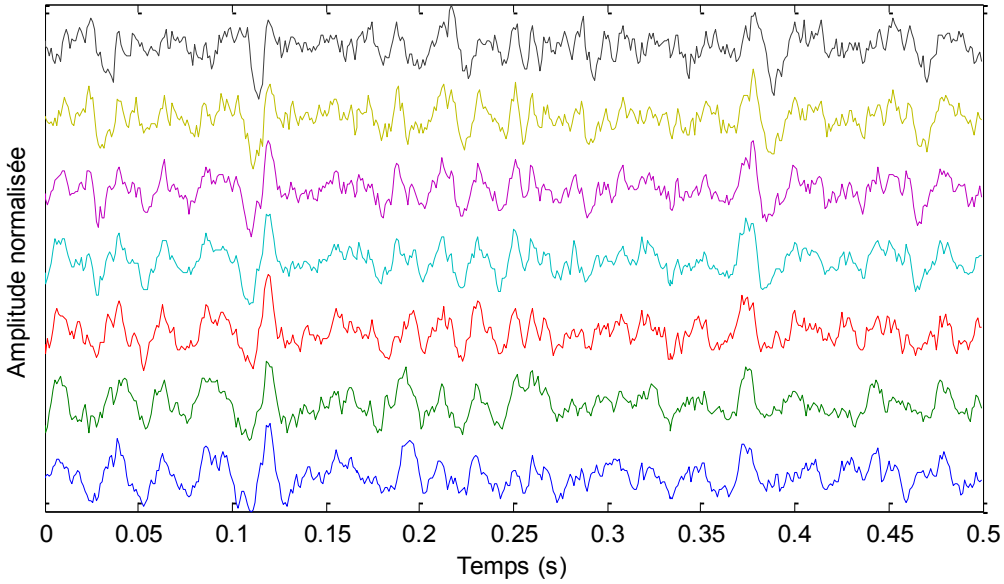

Figure 70 : Représentation temporelle des 500 premières millisecondes du signal EMG de surface.
Les 7 voies de l'acquisition ont été ici représentées par différentes couleurs.

La Figure 71 montre l'évolution de la force normalisée par rapport à la moyenne égale à 5%CMV. Il est montré en rouge l'écart-type normalisé de la force d'une valeur de 1,46% de la valeur moyenne.

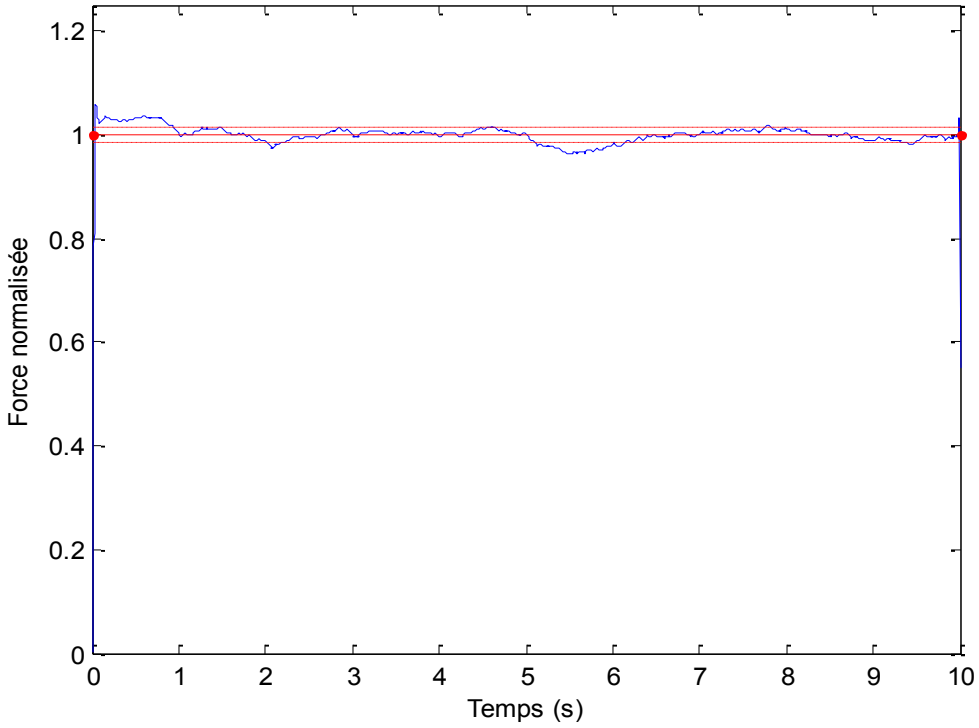

Figure 71 : Mesure de la force au cours de l'acquisition du signal EMG de surface réel.
La force est normalisée par rapport à la moyenne égale à 5%CMV. La ligne continue rouge représente la moyenne et les lignes en tirets rouges les valeurs de plus/moins son écart-type.

Après application de la méthode CycloSOBI, une UM a été décomposée. La Figure 72 montre la source estimée.

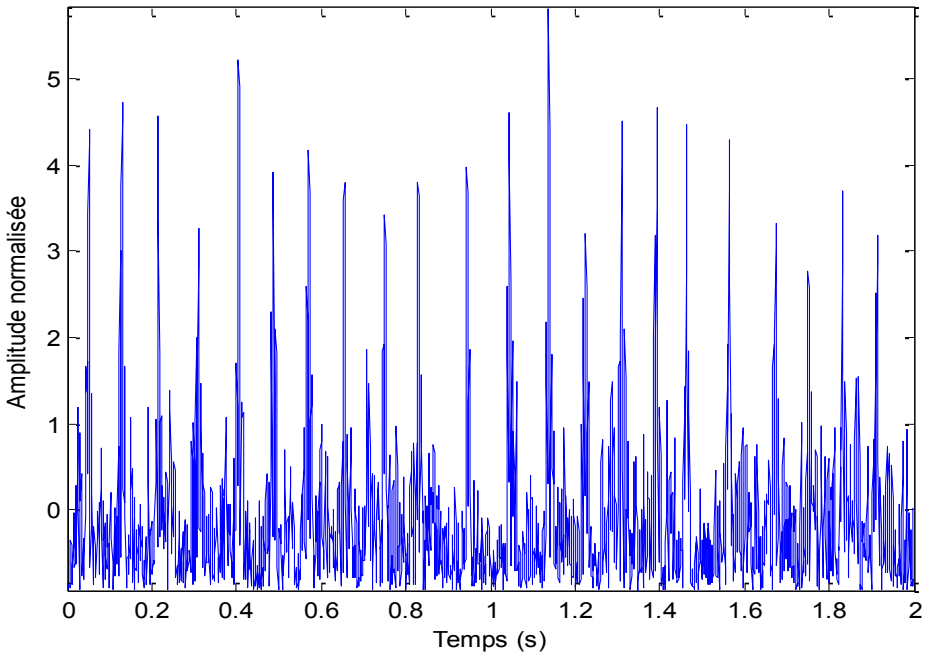

Figure 72 : Source estimée après décomposition du signal EMG de surface réel par CycloSOBI.

Enfin la Figure 73 montre, en fonction du temps, l'IID de la source.

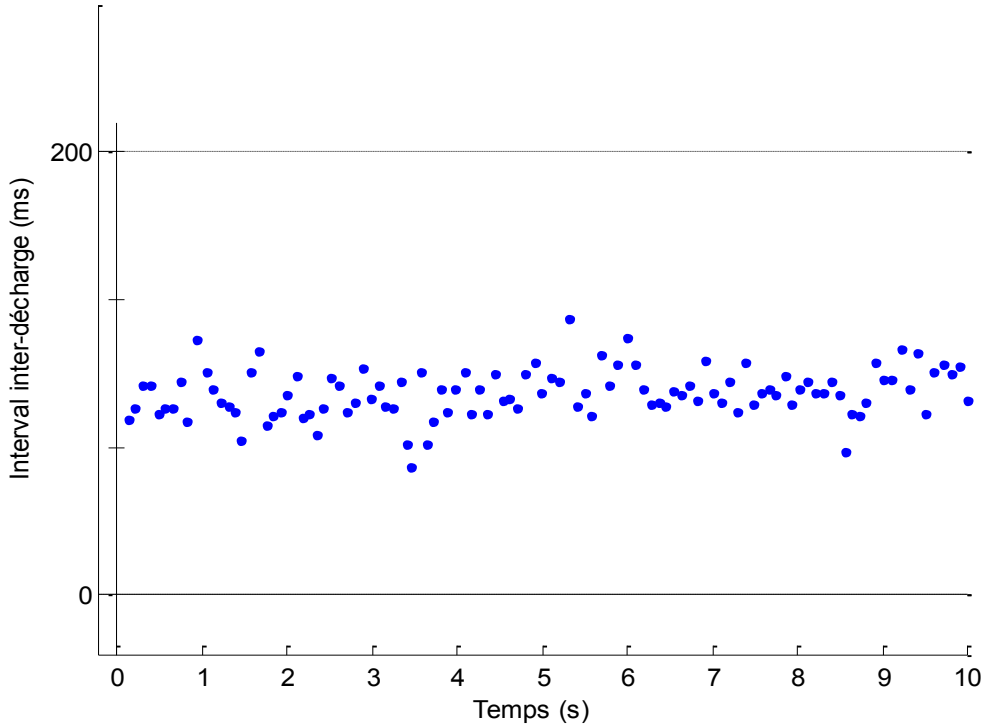

Figure 73 : Intervalles inter-décharges instantanés du signal EMG de surface réel décomposé par cycloSOBI.

L'UM décomposée montre une fréquence de décharge de 10,97Hz et un coefficient de variation de 11,94%. Cette valeur est acceptable physiologiquement et est comparable aux analyses faites sur le même muscle par signaux intramusculaires au Chapitre V.1.1.2. Aucune valeur aberrante ne ressort du tracé de l'IID (Figure 73) montrant que la source a été correctement estimée.

Les difficultés de décomposition de ce signal reposent sur le RSB très faible et inférieur à 1dB. On peut supposer que seule la source la plus énergétique, et donc avec le RSB le plus élevé, a été estimée. De plus, les signaux EMG de surface possèdent un grand nombre de sources actives même pour un faible %CMV. Une méthode de séparation en mélange sous-déterminé serait donc nécessaire pour réaliser une bonne décomposition des signaux EMG de surface.

Conclusion et perspectives

L'identification des trains de potentiels d'action d'unités motrices est un sujet majeur dans le traitement des signaux électromyographiques. Celui-ci est motivé par le besoin d'analyser le fonctionnement des unités fonctionnelles élémentaires du muscle, ou unités motrices. Les méthodes utilisées à l'heure actuelle se limitent à des cas de contractions de faible intensité et utilisent le plus souvent des électrodes intramusculaires, invasives et n'observant qu'une petite portion du muscle. On peut espérer dépasser ces limites en utilisant des techniques de séparation de sources. Les performances de ces méthodes peuvent être améliorées lorsqu'on dispose de connaissances a priori sur les sources.

Dans cet objectif, nous avons étudié les signaux EMG à la lumière du cadre cyclostationnaire. Deux modèles des signaux EMG ont été proposés, correspondant à deux modèles de gigue temporelle : un modèle simplifié et un modèle réaliste. Une étude théorique a permis de montrer que le modèle simplifié est cyclostationnaire tandis que le modèle réaliste est cyclostationnaire flou. Dans ce cas les raies en fréquence cyclique s'élargissent. De ce fait, plusieurs TPAUM peuvent se superposer aux mêmes fréquences cycliques.

Nous avons ensuite validé ce modèle cyclostationnaire flou sur des signaux expérimentaux. Nous avons pour cela décomposé un signal EMG intramusculaire et calculé la DSCi de ces signaux à partir des expressions calculées au chapitre II, pour les comparer à la DSCi estimée sur les TPAUM réels. Les DSCi théoriques et pratiques concordent presque parfaitement.

En conséquence nous avons proposé une méthode de décomposition fondée sur une technique de séparation de sources cyclostationnaires. Après une réécriture du modèle de mélange convolutif en mélange linéaire instantané, nous avons démontré que la séparation de sources par diagonalisation conjointe est possible dans le domaine des fréquences cycliques par l'utilisation de matrices de corrélation cyclique sans retard. Cette dernière est en pratique équivalente à la densité spectrale cyclique croisée intégrée. Du fait de la cyclostationnarité floue, la présence d'énergie de plusieurs TPAUM pour une fréquence donnée complexifie le problème de la décomposition. En effet, Les méthodes de séparation de sources adaptées aux signaux cyclostationnaires utilisent généralement le fait qu'une seule source est présente par fréquence cyclique. De telles méthodes pourraient fonctionner avec le modèle de TPAUM simplifié, mais échoueront dans le cas du modèle réaliste. La méthode proposée dans le présent travail, fondée sur cycloSOBI, n'utilise pas cet *a priori*. Elle permet donc une application aux signaux cyclostationnaires flous comportant des fréquences cycliques communes. Nous avons enfin comparé notre méthode avec l'algorithme SOBI sur des simulations fondées sur des PAUM réels. Il en ressort que notre méthode donne globalement de meilleurs résultats, mais ces simulations ont permis de mettre en évidence plusieurs limitations de la méthode proposée.

En effet, les résultats des simulations se dégradent lorsque la fréquence de décharge et le nombre de sources augmentent. Nous avons établi au chapitre IV une condition sur la fréquence de décharge dépendant de ces deux paramètres ainsi du coefficient de variation de la gigue des TPAUM, de la durée des PAUM, des délais induits par la distance entre les capteurs et la vitesse de conduction du PA. Les TPAUM de fréquences de décharge inférieure à la condition seront alors mal estimés. La contamination des signaux par du bruit diminue également sensiblement la qualité de la séparation, en partie à cause de l'étape de blanchiment, sensible au bruit.

Par ailleurs, les estimateurs de la DSC et de la DSCi sont adaptés aux signaux cyclostationnaires. En présence de signaux cyclostationnaires flous, ceux-ci sont mal adaptés et sont donc susceptibles de dégrader les résultats.

Enfin on note que la complexité de calcul générée par l'étape de diagonalisation conjointe de matrices de corrélations cycliques de grande dimension rend la méthode difficilement utilisable lorsqu'un grand nombre d'unités motrices est présent. La taille de la matrice est directement liée à la durée des PAUM et à la fréquence d'échantillonnage.

- **Perspectives**

Un certain nombre de solutions pourraient être apportées à ces problèmes.

Tout d'abord une meilleure estimation de la DSCi ou corrélation cyclique à retard nul est susceptible d'améliorer les résultats. D'autres estimateurs doivent donc être recherchés pour l'estimation des signaux cyclostationnaires flous.

La méthode CycloSOBI repose sur l'utilisation d'une étape de blanchiment diagonalisant la matrice de corrélation. Il est possible de réduire la sensibilité au bruit, lorsque celui-ci est stationnaire, en évitant l'utilisation de la matrice de covariance qui est dépendante du bruit. Une méthode sans préblanchiment pourrait ainsi améliorer sensiblement les résultats.

D'autres voies pour la décomposition des signaux EMG par utilisation de cyclostationnarité peuvent être explorées. L'utilisation de cycloSOBI requiert la diagonalisation conjointe de matrices de grande dimension notamment par la réécriture du mélange convolutif en mélange linéaire instantané. Ceci peut être évité en passant dans le domaine fréquentiel, c'est-à-dire en utilisant la matrice de densité spectrale cyclique.

Il pourra être exploré également des méthodes adaptées aux mélanges sous-déterminés permettant ainsi de séparer plus de sources que de capteurs.

Enfin l'utilisation de matrices haute densité de capteurs permet d'augmenter le nombre d'observations et ouvre ainsi la perspective d'estimer plus de sources.

Annexe A. Statistiques et processus stochastiques

1 Espérance mathématique

L'espérance mathématique décrit la moyenne d'ensemble d'une variable aléatoire. De manière générale, en introduisant une fonction quelconque $h(x)$ et avec x une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F_x(p)$, l'espérance mathématique est définie par :

$$\mathbb{E}[h(x)] = \int h(s) \cdot dF_x(s) \tag{211}$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'opérateur « Espérance mathématique ». On définit $p_x(s)$ la densité de probabilité de x aussi égale à la dérivée sur s de la fonction de réparation. L'espérance mathématique peut également s'écrire :

$$\mathbb{E}[h(x)] = \int h(s) \cdot p_x(s) \cdot ds \tag{212}$$

Sous l'hypothèse d'ergodicité, l'espérance mathématique de $h(x)$ peut être estimée par la moyenne empirique d'un grand nombre de réalisations. On a alors :

$$\mathbb{E}[h(x)] \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} h(x_n) \tag{213}$$

Avec x_n la n^{ieme} réalisation de x et N le nombre total de réalisations.

2 Moments

L'équation (211) est également appelée moment généralisé d'une variable aléatoire x. Les moments d'ordre n définis classiquement dans la théorie des probabilités sont engendrés par la fonction caractéristique $\Phi_x(\omega)$, en définissant $h(s)$ par une fonction exponentielle :

$$h(s) = e^{-i\omega s} \tag{214}$$

avec i le complexe imaginaire pur de module 1. On a alors, en utilisant l'équation (212),

$$\Phi_x(\omega) = \mathbb{E}[h(x)] = \int e^{-i\omega s} p_x(s) ds = TF[p_x(s)](\omega) \tag{215}$$

On remarque également que la fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la densité de probabilité. Alors que $h(x)$ peut se décomposer en série de Taylor, la fonction caractéristique peut s'écrire :

$$\Phi_x(\omega) = \int \left(1 - i\omega s + \frac{(i\omega)^2}{2} s^2 + \cdots + \frac{(-i\omega)^n}{n!} s^n + \cdots\right) p_x(s) ds \tag{216}$$

Elle se décompose ainsi par :

$$\Phi_x(\omega) = 1 + i\omega\mathbb{E}[x] + \frac{(i\omega)^2}{2}\mathbb{E}[x^2] + \cdots + \frac{(i\omega)^n}{n!}\mathbb{E}[x^n] \tag{217}$$

On appelle alors la relation suivante moment d'ordre n :

$$m_r = \mathbb{E}[x^n] \tag{218}$$

Comme la densité de probabilité de x se déduit par la transformée inverse de la fonction caractéristique, on remarque ainsi que tous les moments d'ordre n, de 1 à l'infini, décrivent totalement la densité de probabilité d'une variable aléatoire. On a :

$$p_x(s) = TF^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iw)^n}{n!}m_r\right](s) \tag{219}$$

avec $TF^{-1}[\cdot]$ l'opérateur « Transformée de Fourier inverse ».

Le moment d'ordre 1, égal à l'espérance de x, correspond donc à la moyenne de la variable aléatoire :

$$m_1 = \mathbb{E}[x] \tag{220}$$

On définit alors les moments centrés comme étant les moments d'ordre supérieur à 1 de x centré :

$$m'_r = \mathbb{E}[(x - m_1)^n] \tag{221}$$

Ainsi le moment d'ordre deux centré est appelé variance de x :

$$VAR_x = \mathbb{E}[(x - m_1)^2] \tag{222}$$

Dans le cas de variables aléatoires multidimensionnelles, la fonction caractéristique définie en équation (215), est alors redéfinie par :

$$\Phi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\omega}) = \int e^{-i\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{s}}p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{s})d\boldsymbol{s} \tag{223}$$

où $\boldsymbol{X} = [x_1, \dots x_N]^T$ désigne un vecteur aléatoire et $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \dots, \omega_N]^T$ et $\boldsymbol{s} = [s_1, \dots, s_N]^T$ représentent deux vecteurs. L'exposant T désigne l'opérateur de transposition. On définit alors similairement les inter-moments d'ordre n. L'inter-moment de x_i et x_j d'ordre 2 centré, aussi appelé covariance, vaut :

$$COV_{ij} = \mathbb{E}\big[(x_i - \mathbb{E}[x_i]) \cdot \big(x_j - \mathbb{E}[x_j]\big)^*\big] = \mathbb{E}\big[x_i x_j\big] - \mathbb{E}[x_i] \cdot \mathbb{E}\big[x_j\big] \tag{224}$$

On définit alors la matrice de covariance de $\boldsymbol{X}$ par la matrice des moments et inter-moments des éléments de $\boldsymbol{X}$ **:**

$$COV_{\boldsymbol{XX}} = \mathbb{E}[(\boldsymbol{X} - \mathbb{E}[\boldsymbol{X}]) \cdot (\boldsymbol{X} - \mathbb{E}[\boldsymbol{X}])^H] \tag{225}$$

3 Indépendance

L'indépendance statistique peut être définie comme suit. On considère deux variables aléatoires (scalaires) x et y. Elles sont indépendantes lorsque x ne donne aucune information sur y et inversement. En statistique, cette notion peut être définie plus rigoureusement par l'utilisation des densités de probabilités de x et de y. on pose $p_{x,y}(x, y)$ la densité de probabilité jointe de x et y. Par définition la densité de probabilité marginale de x puis celle de y s'écrivent :

$$\begin{cases} p_x(x) = \int p_{x,y}(x,y)dy \\ p_y(y) = \int p_{x,y}(x,y)dx \end{cases} \tag{226}$$

Alors

$$x\ et\ y\ indépendants\ \Leftrightarrow\ p_{x,y}(x,y) = p_x(x) \cdot p_y(y) \tag{227}$$

Si on suppose deux fonctions $h_1(x)$ et $h_2(y)$ l'espérance mathématique du produit de $h_1(x)$ et $h_2(y)$ s'écrit :

$$\mathbb{E}[h_1(x) \cdot h_2(y)] = \iint h_1(x) \cdot h_2(y) \cdot p_{x,y}(x,y) \cdot dxdy \tag{228}$$

De la définition de l'équation (227), on en déduit que si x et y sont indépendants, alors :

$$x\ et\ y\ indépendants\ \Rightarrow\ \mathbb{E}[h_1(x) \cdot h_2(y)] = \mathbb{E}[h_1(x)] \cdot \mathbb{E}[h_2(y)] \tag{229}$$

Cette dernière équation montre que la covariance de x et y est nulle si x et y sont indépendants :

$$x\ et\ y\ indépendants\ \Rightarrow\ COV_{x \cdot y} = 0 \tag{230}$$

Il est très important de noter que la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

4 Décorrélation ne signifie pas indépendance

On a démontré dans l'équation (229) que l'indépendance implique la décorrélation. Mais des données décorrélées ne sont pas nécessairement indépendantes. Dans le contre-exemple donné par [138] on suppose un couple $(\mathrm{x}\ ;\ \mathrm{y})$ de variables aléatoires discrètes quelconques définies par :

$$(\mathrm{x}\ ;\ \mathrm{y}) \in \{(0,1); (0,-1); (1,0); (-1,0)\} \tag{231}$$

On suppose également une distribution jointe équiprobable égale à 0,25. Le calcul de la covariance montre alors que ces données sont décorrélées :

$$COV_{x \cdot y} = \left(\frac{1}{4}(0 \cdot 1) + \frac{1}{4}(0 \cdot -1) + \frac{1}{4}(1 \cdot 0) + \frac{1}{4}(-1 \cdot 0)\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0 \tag{232}$$

A partir de l'équation (229), on peut également écrire que l'indépendance implique la relation suivante :

$$x; y\ indépendants\ \Rightarrow\ \mathbb{E}[x^2 \cdot y^2] - \mathbb{E}[x^2] \cdot \mathbb{E}[y^2] = 0 \tag{233}$$

Si on applique cette relation à notre couple $(\mathrm{x}\ ;\ \mathrm{y})$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[x^2 \cdot y^2] - \mathbb{E}[x^2] \cdot \mathbb{E}[y^2] \\ &\quad = \left(\frac{1}{4}(0 \cdot 1)^2 + \frac{1}{4}(0 \cdot -1)^2 + \frac{1}{4}(1 \cdot 0)^2 + \frac{1}{4}(-1 \cdot 0)^2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\ &\quad = -\frac{1}{4} \end{aligned} \tag{234}$$

La valeur étant non-nulle, on en déduit donc que x et y sont, bien que décorrélés, non indépendants. La covariance nulle entre deux variables aléatoires est donc une hypothèse nécessaire à la condition d'indépendance mais non suffisante.

5 Processus stochastiques

5.1 Définition

Les processus stochastiques sont définis par des processus aléatoires fonctions du temps. De tels processus permettent alors la caractérisation des signaux dont on ne peut prédire la forme d'onde. On considère alors chaque valeur prise par le processus dans le temps comme une variable aléatoire. On distingue deux classes principales, les processus stationnaires et les processus non-stationnaires.

Un processus est dit stationnaire lorsque ses propriétés statistiques sont temporellement invariantes. Au sens strict de la stationnarité, cette propriété se traduit par des densités de probabilités jointes invariantes temporellement. En d'autres termes, la densité de probabilité jointe du processus prise entre l'instant t et l'instant t' ne dépend que de la différence entre t et t' et non pas du temps lui-même. Il est alors possible de dériver cette notion aux moments d'ordre n.

A l'ordre un, nous pouvons écrire l'espérance du processus à chaque instant du temps. Avec $x(t)$ un processus stochastique stationnaire quelconque, on a :

$$\mathbb{E}[x(t)] = m_x = C_{-}^{ste}, \qquad \forall\, t \tag{235}$$

A l'ordre deux, d'après les équations (224) et (235), on peut écrire les covariances entre deux instants du temps t et t' de $x(t)$, notées $\Gamma_{xx}(t,t')$:

$$\Gamma_{xx}(t,t') = \mathbb{E}[x(t)x(t')] - m_x^2 \tag{236}$$

Or pour un processus stationnaire et pour une durée t-t' donnée, la covariance est constante quel que soit t. On pose alors $\tau = t - t'$, on a ainsi :

$$\Gamma_{xx}(t,\tau) = \mathbb{E}[x(t)x(t-\tau)] - m_x^2 = \Gamma_{xx}(t+\lambda,\tau), \qquad \forall\, \lambda, t\ et\ \tau \tag{237}$$

Cette dernière expression est couramment appelée fonction d'autocorrélation de x.

Les processus non-stationnaires présentent quant à eux une dépendance au temps. Certaines classes de signaux non stationnaires présentent toutefois des propriétés intéressantes qui peuvent être exploitées, c'est notamment le cas des signaux dit cyclostationnaires qui présentent une périodicité de ses caractéristiques statistiques au cours du temps t.

Annexe B. Estimations de la densité spectrale cyclique

1 Périodogramme cyclique à temps variable

Comme défini en équation (18), le périodogramme cyclique est défini comme l'inter-spectre de $x(t)$ décalé de α en fréquence. L'estimateur du périodogramme cyclique [55] est défini par :

$$DSC_{xx}(t,f,\alpha) \triangleq \frac{1}{\mathrm{T}} \cdot X_T\left(\mathrm{t}, f+\frac{1}{2}\alpha\right) \cdot X_T^*\left(t, f-\frac{1}{2}\alpha\right) \tag{238}$$

avec $X_s(t,f)$ la transformée de Fourier à court terme de $x(t)$ de longueur T à l'instant t et à la fréquence de f:

$$X_T(t,f) \triangleq \int_{t-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{t+\frac{\mathrm{T}}{2}} x(u) \cdot e^{-2i\pi f u}\, du = \int_{-\frac{\mathrm{T}}{2}}^{\frac{\mathrm{T}}{2}} x(\mathrm{t}-\mathrm{s}) \cdot e^{-2i\pi f(\mathrm{t}-\mathrm{s})}\, ds \tag{239}$$

Alors qu'il est possible d'appliquer une fenêtre de lissage temporel ou fréquentiel à notre estimateur équation (238) on peut généraliser l'équation (239) par l'utilisation d'une fenêtre de pondération sur $x(t)$:

$$X_T(t,f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a_T(t-u) \cdot x(u) \cdot e^{-2i\pi f u}\, du \tag{240}$$

2 Forme quadratique générale de l'estimateur de la DSC

Dans [63], il est démontré que n'importe quel estimateur de la DSC peut être écrit à l'aide d'un noyau à deux dimensions noté $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}(t^+,t^-)$:

$$DSC_{xx}(\alpha,f) \triangleq \mathbb{E}\left[\iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}(t^+,t^-)x(t^+)x^*(t^-)\, e^{-2i\pi\left(f(t^+-t^-)+\frac{\alpha}{2}(t^++t^-)\right)} dt^+ dt^-\right] \tag{241}$$

De cette équation, il peut être dérivé différents estimateurs par lissage temporel ou fréquentiel. Dans le cas de signaux échantillonnés de durée finie, nous avons :

$$DSC_{xx}(\alpha,f) \triangleq T_e \sum_{p=1}^{N-1}\sum_{q=1}^{N-1} Q_L(p,q)x(p)x^*(q)e^{-2i\pi\left(f(p-q)+\frac{\alpha}{2}(p+q)\right)T_e} \tag{242}$$

3 Périodogramme cyclique moyenné

Boustany et Antoni [63] proposent une technique permettant l'estimation du spectre cyclique, en étendant le périodogramme moyenné, utilisé pour l'estimation de la DSP des signaux stationnaires, aux signaux cyclostationnaires. Le périodogramme est calculé sur K tranches du signal, de taille N_w, chaque tranche étant pondérée par une fenêtre temporelle $w(n)$. On définit R comme étant le délai

entre deux tranches. L'estimation de la densité spectrale cyclique est donnée par la moyenne des périodogrammes de chacune des tranches :

$$\widehat{DSC}_{xx}(\alpha,f)=\frac{1}{KT_e}\cdot\sum_{k=1}^{K}X_{N_w}^{(k)}\left(f+\frac{1}{2}\alpha\right)\cdot X_{N_w}^{(k)\,*}\left(f-\frac{1}{2}\alpha\right) \tag{243}$$

avec $X_{N_w}^{(k)}(f)$ la transformée de Fourier de la k^ième^ tranche de $x(n)$ pondérée par la fenêtre glissante $w(n)$ de longueur N_w :

$$X_{N_w}^{(k)}(f)=T_e\sum_{n=R}^{R+N_w-1}w(n-kR)\,x(n)e^{-2i\pi fnT_e} \tag{244}$$

On définit $K=\frac{L-Nw}{R}+1$ le nombre de tranches. Dans l'objectif d'étudier le comportement du fenêtrage sur l'estimation de la CSD il est possible d'identifier le noyau de la transformation à partir des équations (242), (243) et (244). On a alors :

$$\begin{aligned}\widehat{DSC}_{xx}(\alpha,f)=\frac{T_e}{K}\sum_{k=1}^{K}&\left(\sum_{n=R}^{R+N_w-1}w(p-kR)\,x(p)e^{-2i\pi\left(f+\frac{\alpha}{2}\right)pT_e}\right)\\&\cdot\left(\sum_{q=R}^{R+N_w-1}w(q-kR)x(q)e^{2i\pi\left(f-\frac{\alpha}{2}\right)qT_e}\right)\end{aligned} \tag{245}$$

Cette expression peut également s'écrire :

$$\begin{aligned}\widehat{DSC}_{xx}(\alpha,f)=T_e\sum_{n=R}^{R+N_w-1}\sum_{q=R}^{R+N_w-1}\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}&w(p-kR)w^*(q-kR)\\&\cdot x(p)x^*(q)e^{-2i\pi\left(f(p-q)+\frac{\alpha}{2}(p+q)\right)T_e}\end{aligned} \tag{246}$$

Donc le noyau vaut :

$$Q_L(p,q)=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}w(p-kR)w^*(q-kR) \tag{247}$$

Et il est montré que sa transformée de Fourier discrète 2-D donne :

$$TFD[Q_L(p,q)](\lambda,\eta)=W(\lambda)W^*(\lambda-\eta)\cdot D_K^{RT_e}(\eta)\cdot e^{-i\pi\eta RT_e(K-1)} \tag{248}$$

La quantité $\mathcal{D}_K^{RT_e}(\eta)$ est le noyau de Dirichlet défini par :

$$\mathcal{D}_K^{RT_e}(\eta)=\frac{1}{K}\cdot\frac{\sin(\pi\eta RT_eK)}{\sin(\pi\eta RT_e)} \tag{249}$$

Par intégration sur λ du noyau, il est possible d'analyser le comportement du périodogramme en fréquence cyclique :

$$\left|B_Q(\eta)\right|=\left|\frac{1}{\mathrm{T_e}}\int_{-\frac{1}{2\mathrm{T_e}}}^{\frac{1}{2\mathrm{T_e}}}Q_L(\lambda,\eta)d\lambda\right|=\left|\mathcal{D}_K^{RT_e}(\eta)\right|\cdot\frac{1}{T_e}\left|W_2(\eta)\right| \tag{250}$$

Avec $W_2(\alpha)=\mathcal{TF}\left[w_{N_w}(n)^2\right](\alpha)$ la transformée de Fourier de la fenêtre élevée au carré.

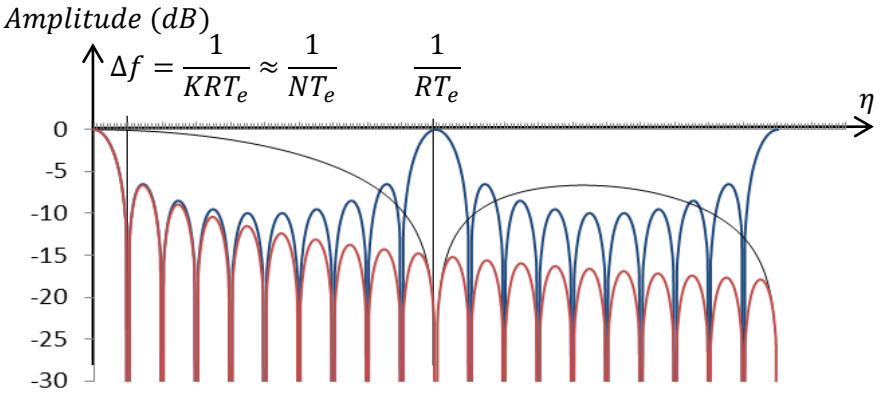

Figure 74 : Noyau de l'estimateur de la DSC par périodogramme cyclique moyenné.
Représentation logarithmique de la transformée de Fourier du noyau intégré sur λ (en rouge). En bleu est représenté le logarithme du noyau de Dirichlet seul ($10log_{10}|\mathcal{D}_K^{RT_e}(\eta)|$), en noir la TF de la fenêtre au carré ($10log_{10}|W_2|$).

Le noyau de Dirichlet (Figure 74) présente la particularité de posséder un lobe principal de bande passante $\Delta f = (KRT_e)^{-1} \cong (NT_e)^{-1}$ mais aussi d'autres lobes d'amplitude 1 avec une périodicité de $(RT_e)^{-1}$ pouvant être totalement supprimés en fixant R de manière à le faire coïncider avec un zéro de $W_2(\alpha)$, c'est-à-dire trouver R tels que $W_2((RT_e)^{-1}) = 0$ comme montré dans l'exemple de la Figure 74. Les auteurs montrent que l'utilisation d'un taux de recouvrement de 66,67% avec une fenêtre de Hamming ou de Hann, ou un taux de 50% avec une fenêtre demi-sinus permet d'atteindre cet objectif.

En conclusion, avec une fenêtre de Hamming de taille N_w, l'estimateur présente les caractéristiques suivantes :

- Résolution cyclique : $\Delta\alpha \cong \frac{1}{NT_e}$
- Résolution fréquentielle : $\Delta f = \frac{1}{N_w T_e}$

Annexe C. Analyse en composante indépendante

1 Méthodes tensorielles ou algébriques

1.1 Tenseur de cumulants

Les tenseurs forment une généralisation de la notion de matrice. Un tenseur d'ordre N est alors défini par un tableau à N dimensions. A l'ordre 1, le tenseur est un vecteur et à l'ordre 2, il est une matrice.

Le tenseur de cumulants généralise donc la notion de matrice de covariance aux ordres supérieurs. La particularité des tenseurs de cumulants est qu'ils sont diagonaux, quel que soit l'ordre, lorsque les signaux étudiés sont indépendants. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux cumulants d'ordre 4

Considérons un vecteur quelconque de N éléments : $\boldsymbol{Z} = [z_1, \dots z_N]^T$. Le tenseur de cumulants d'ordre 4 est donc défini par l'ensemble des cumulants d'ordre 4 croisés entre chaque composante du vecteur. L'élément (i, j, k, l) de ce tenseur s'écrit donc :

$$\{\boldsymbol{Cum_4}(\boldsymbol{Z})\}_{i,j,k,l} = Cum\left[z_i, z_j^*, z_k, z_l^*\right]$$

On suppose également les données blanchies, ce qui signifie que les composantes du vecteur **Z** sont décorrélées et d'énergie unitaire. En d'autres termes la matrice de covariances de Z est égale à la matrice identité. De plus les sources S sont considérées indépendantes et d'énergie unitaire. On a alors

$$\{\boldsymbol{Cum_4}(\boldsymbol{S})\}_{i,j,k,l} = \delta_{ijkl} \cdot \kappa_{s_i} \tag{251}$$

où les $\kappa_{s_i} = Cum[s_i, s_i^*, s_i, s_i^*]$ désignent les auto-cumulants d'ordre 4. A partir du modèle décrit par l'équation (158) et en posant $R = W \cdot A$, l'équation (159) devient :

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S} \tag{252}$$

Les données blanchies rassemblées dans **Z** sont une combinaison linéaire des sources notées **S** où la matrice de mélange **R,** composée des éléments $\{R\}_{ij} = r_{ij}$, est unitaire. Les équations (251) et (252) et la propriété de multi-linéarité du cumulant conduisent à la relation suivante :

$$Cum\left[z_i, z_j^*, z_k, z_l^*\right] = \sum_p r_{ip} r_{jp}^* r_{kp} r_{lp}^* Cum[s_i, s_i^*, s_i, s_i^*] \tag{253}$$

1.2 Matrices de cumulants

Il est possible de simplifier le tenseur d'ordre 4 en réalisant une combinaison linéaire de tranches avec une matrice de pondération (Figure 75). On définit alors la matrice de cumulants $Q_z(M)$ dont l'élément (i, j) est défini par :

$$\{Q_z(M)\}_{i,j} = \sum_{k,l} m_{kl} \cdot Cum[z_i, z_j^*, z_k, z_l^*] \tag{254}$$

où la matrice M, de coefficients m_{kl}, représente la matrice de pondération appliquée aux tranches de cumulants. $Q_z(M)$ peut également s'exprimer sous forme matricielle comme suit [125] :

$$Q_z(M) = \mathbb{E}[(Z^H M Z) Z Z^H] - R_{zz} M R_{zz} - R_{zz} Trace(M R_{zz}) \tag{255}$$

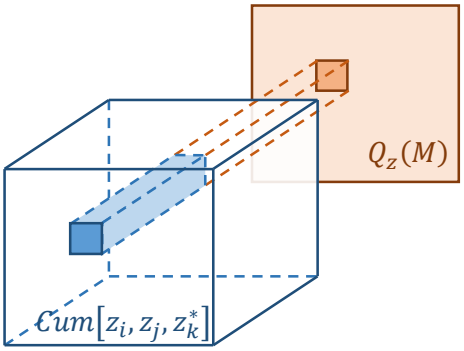

Figure 75 : Matrice de Cumulants d'ordre 3.
Illustration sur un tenseur de cumulants d'ordre 3 $Cum[z_i, z_j, z_k^*]$, représenté par le cube bleu, de la construction de la matrice de cumulants (carré rouge clair). Chaque élément de la matrice de cumulants $Q_z(M)$, carré rouge foncé, est construit par la somme d'une tranche (rectangle bleu foncé) pondérée par le tenseur de pondération M. Dans le cas d'un tenseur du 3ème ordre M est un vecteur, au quatrième ordre, M est une matrice.

Par généralisation du concept de l'algèbre vectorielle, $Q_z(M)$ est en fait une projection, généralisation du produit scalaire, du tenseur de cumulants sur la matrice M. Le tenseur de cumulants peut ainsi être projeté sur une base de $\mathbb{C}^{N\times N}$ formée par N² matrices deux à deux orthogonales.

A partir de l'équation (253), il est possible de déduire que la matrice de cumulants est une matrice hermitienne et peut être diagonalisée par une matrice unitaire, notée R [125] :

$$Q_z(M) = R^H \cdot \Lambda_{\mathrm{M}} \cdot R \tag{256}$$

où par définition Λ_{M} est diagonale et vaut :

$$\Lambda_{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} \kappa_{s_1} \boldsymbol{r_1^H M r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \kappa_{s_N} \boldsymbol{r_N^H M r_N} \end{bmatrix} \tag{257}$$

On en déduit que la matrice R diagonalise $Q_z(M)$ quel que soit M. On peut également écrire l'équation (256) sous forme indicielle [125]. On a alors :

$$Q_z(M) = \sum_{p=1}^{N} r_p^H \cdot M \cdot r_p \cdot r_p \cdot r_p^H \cdot \kappa_{s_p} \tag{258}$$

1.3 Méthode FOBI « Fourth-Order Blind Identification »

Cardoso propose une utilisation de la matrice de cumulants pour la séparation de sources non-Gaussiennes dans un mélange linéaire instantané [139]. La méthode, baptisée FOBI, prend tout simplement le cas $M = I_d$. La matrice de cumulants devient alors :

$$\{Q_z(I_d)\}_{i,j} = \sum_k Cum[z_i, z_j^*, z_k, z_k^*] \tag{259}$$

Ou encore, on peut écrire, à partir de l'équation (255) :

$$Q_z(I_d) = \mathbb{E}[|Z|^2 ZZ^H] - (n+1)I_n \tag{260}$$

$Q_z(I_d)$ et $E[|Z|^2 ZZ^H]$ ayant les même vecteurs propres, diagonaliser $Q_z(I_d)$ revient à diagonaliser la matrice $\mathbb{E}[|Z|^2 ZZ^H]$ ce qui présente l'avantage d'avoir un coût de calcul très faible. On déduit de l'équation (256) que les valeurs propres valent $\lambda_i = \kappa_{s_i} r_i^H I_N r_i = \kappa_{s_i}$. Les sources doivent alors avoir des auto-cumulants d'ordre 4, ou Kurtosis, distincts. Cette méthode présente toutefois un faible coût de calcul par l'utilisation d'une décomposition en valeur propre de $Q_z(I_d)$.

$Z(n) \leftarrow$ Préblanchiment par Analyse en Composante Principale

Calcul de la matrice de cumulants d'ordre 4 = $\boldsymbol{Q_z(I_d)}$:
$Q_{i,j} \leftarrow \sum_k Cum(x_i, x_j, x_k, x_k)$

Calcul de la matrice unitaire de rotation optimale par diagonalisation approchée
$R \leftarrow \underset{\mathrm{U}}{\operatorname{argmax}}[|diag(U \cdot Q_z(\mathrm{I_d}) \cdot U^T)|^2]$

Estimation des sources :
$S(n) = R \cdot Z$

TABLEAU 10 : ALGORITHME GENERAL DE FOBI (DVP : DECOMPOSITION EN VALEUR PROPRE)

1.4 Méthode JADE « Joint Approximante Diagonalization of Eigen-matrices »

La méthode précédente ne permet d'identifier R que si les valeurs propres de $Q_z(I_d)$ sont distinctes. On note que la méthode précédente n'utilise que partiellement l'information disponible sur le tenseur de cumulant. En effet, il existe en réalité N² matrices de cumulants indépendantes alors que FOBI n'en utilise qu'une seule. La méthode JADE [139] [125] de Cardoso et Souloumiac, se base sur le même principe que FOBI en diagonalisant conjointement un ensemble de matrices de cumulants indépendantes.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, le tenseur de cumulants peut être projeté sur une base de N² matrices orthogonales deux à deux. Soit une base du tenseur de cumulants, notée $\mathcal{N}$, formée par N² matrices :

$$\mathcal{N} = \{M_i \mid i \in [\![1; N^2]\!]\} \tag{261}$$

Alors qu'une infinité de bases de matrices de cumulants peuvent être construites, Cardoso [139] propose différentes solutions possibles :

- ***Base arbitraire***

La base la plus évidente consiste à sélectionner un jeu arbitraire de N² matrices formant une base orthonormale du tenseur de cumulants.

- ***Base Canonique***

Une autre construction possible est de construire les matrices de cumulants en utilisant toutes les tranches parallèles du tenseur de cumulants [139]. La base, équation (261), est ainsi formée par toutes les matrices canoniques $M_{kl} = e_k e_l^H$ où $e_k = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^H$ est un vecteur dont seul le k^{ème} élément est non-nul et vaut 1. La matrice de cumulants définie à l'équation (254) s'écrit alors :

$$\{Q_z(M_{kl})\}_{i,j} = Cum\left[z_i, z_j^*, z_k, z_l^*\right] \tag{262}$$

Les auteurs proposent un meilleur choix, plus robuste vis-à-vis de l'erreur d'estimation des Q_z, en utilisant des matrices de cumulants symétriques avec :

$$M_{kl} = \begin{cases} e_k e_k^H & si\ k = l \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_k e_l^H + e_l e_k^H\right) & si\ k < l \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_k e_l^H - e_l e_k^H\right) & si\ k > l \end{cases} \tag{263}$$

$Z(n) \leftarrow$ Préblanchiment par Analyse en Composante Principale

Calcul des matrices de cumulants d'ordre 4 (Base canonique):

$Q_{\mathrm{i,j}}^p \leftarrow Cum\left(z_i, z_j, z_k, z_k\right)$: k=l

$Q_{\mathrm{i,j}}^p \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left[Cum\left(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*\right) + Cum\left(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*\right)\right]$: k<l

$Q_{\mathrm{i,j}}^p \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\left[Cum\left(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*\right) - Cum\left(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*\right)\right]$: k>l

Calcul de la matrice unitaire de rotation optimale par DCA :

$R \leftarrow \underset{\mathrm{U}}{\operatorname{argmax}}\left[\sum_{p=1}^{N^2} |diag(U \cdot \mathrm{Q}^{\mathrm{p}} \cdot U^T)|^2\right]$

Estimation des sources :

$S(n) = R \cdot Z(n)$

Tableau 11 : Algorithme de JADE (DCA : Diagonalisation Conjointe Approchée) utilisant la base canonique

- ***Bases des matrices propres***

Une autre solution, initialement proposée dans [125] et réduisant à N le nombre de matrices à diagonaliser, consiste à choisir l'ensemble des N² matrices propres de Q_z, c'est à dire vérifiant l'égalité suivante :

$$Q_z(M_i) = \lambda_i M_i \tag{264}$$

où M_i désigne la matrice propre et λ_i les valeurs propres. Ainsi la composante (i, j, k, l) du tenseur de cumulants s'écrit :

$$Cum(z_i, z_j, z_k, z_l) = \sum_{p=1}^{N^2} \lambda_p m_{ij}^p m_{kl}^* \tag{265}$$

où m_{ij}^p est la composante (i, j) de la matrice propre M_p.

En utilisant le modèle de l'équation (252), on pose r_i la i^ème^ colonne de R. Sachant que R est unitaire, on a : $r_a^H r_b = \delta_{ab}$. En posant $M_{ab} = r_a r_b^H$, l'équation (258) devient :

$$Q_z(M_{ab}) = \sum_{p=1} r_p^H (r_a r_b^H) r_p r_p r_p^H \kappa_{s_p} = \delta_{ab} r_a r_a^H \kappa_{s_a} \tag{266}$$

vérifiant ainsi la condition formulée à l'équation (264) lorsque a=b. On en déduit qu'une base, définie par l'équation (261), est formée par les N matrices propres M_{aa} de Q_z de valeurs propres κ_{s_a} :

$$\mathcal{N}^p = \{M_{aa} = r_a r_a^H \mid a \in [\![1; N]\!]\} \tag{267}$$

toutes les autres valeurs propres de Q_z de cumulants étant nulles. Ainsi [125] propose de diagonaliser le jeu de matrices propres : $Q_z(M_i) = \lambda_i M_i$.

Ces dernières peuvent être calculées par un algorithme standard de décomposition en valeurs propres [140] en rassemblant tous les éléments du tenseur de cumulants dans une matrice de dimension N²xN². En posant $\tilde{C}$ la matrice ainsi formée et $\{\widetilde{M}\}_{ip} = \widetilde{m}_{ip}$ le i^ème^ indice du vecteur propre associé à la valeur propre λ_p, l'équation (265) se réécrit :

$$\{\tilde{C}\}_{i,j} = \sum_{p=1,N^2} \lambda_p \widetilde{m_i^p}\, \widetilde{m_j^p}^* \Leftrightarrow \tilde{C} = \widetilde{M} \cdot diag(\lambda_1 \dots \lambda_N^2) \cdot \widetilde{M}^H \tag{268}$$

On trouve ainsi N² paires (valeurs propres ; vecteurs propres) où chaque vecteur propre est formé de N² composantes. La réorganisation de chaque vecteur en matrices de dimension NxN forme les matrices propres du tenseur de cumulants. Les N plus fortes valeurs propres sont sélectionnées, les autres étant normalement nulles. Un algorithme de type Lanczos, dédié aux problèmes de recherche des paires propres $(\lambda_i \cdot V_i)$ lorsque le nombre de valeurs propres est inférieur à N², moins coûteux en calcul, est également proposé dans [140].

$Z(n) \leftarrow$ Préblanchiment par Analyse en Composante Principale

Calcul du tenseur de cumulants d'ordre 4 et mise en forme matricielle

$\{\tilde{C}\}_{m,n} \leftarrow Cum(z_i, z_j, z_k, z_l),\ avec\ m = i + (j-1)N\ et\ n = k + (l-1)N$

Calcul des N plus fortes paires (valeurs propres, matrices propres)

$(\tilde{M},\ \tilde{\Lambda}) \leftarrow DVP(\tilde{C})$

$\{\mathrm{Q}^{\mathrm{p}}\}_{i,j} \leftarrow \{\tilde{\Lambda}\}_{p,p} \cdot \{\tilde{M}\}_{I,p} \qquad avec\ I = i + (j-1) \cdot N$

Calcul de la matrice unitaire de rotation optimale par DCA :

$R \leftarrow \underset{\mathrm{U}}{\operatorname{argmax}} \left[\sum_{p=1}^{N} \left|diag\left(U \cdot \lambda_p \mathrm{M}_p \cdot U^T\right)\right|^2\right]$

Estimation des sources :

$S(n) = R \cdot Z(\mathrm{n})$

Tableau 12 : Algorithme JADE (DVP : Décomposition en Valeurs Propres, DCA : Diagonalisation Conjointe Approchée) utilisant la base formée par N matrices propres du tenseur de cumulants d'ordre 4.

- ***Transformation unitaire***

La matrice de transformation étant unitaire, diagonaliser la matrice revient à minimiser les termes hors-diagonaux ou maximiser les termes diagonaux. La diagonalisation conjointe revient alors la maximisation suivante :

$$R = \underset{\mathrm{U}}{\operatorname{argmax}} \left[\sum_i |diag(U \cdot Q_z(M_i) \cdot U^T)|^2\right]$$

avec $diag(M)$ désignant les termes diagonaux de M. La diagonalisation conjointe est réalisée par l'algorithme de Jacobi étendu [126] (Annexe D.2).

1.5 Autres Méthodes

Historiquement la méthode de P. Comon [141], baptisée COM2, fut la première à émerger parmi les méthodes tensorielles. D'autres méthodes dérivées ont été développées, par exemple la méthode STOTD [142] de L. De Lathauwer propose d'appliquer la méthode à l'ordre 3 alors que E. Moreaux [143] propose une généralisation de JADE, dénommée eJADE, aux ordres quelconques supérieurs ou égaux à 3. La méthode COM1 [144] propose enfin de maximiser la trace du tenseur de cumulants sous l'hypothèse que l'ensemble des cumulants soient de même signe.

Nous avons vu dans ce chapitre quelques méthodes, dont notamment FOBI et JADE, utilisant la diagonalisation de tenseurs de cumulants. Ces algorithmes utilisent l'itération de Jacobi de manière à trouver la matrice de rotation complexe permettant la séparation de données blanchies. Différentes fonctions, dites de contraste, que l'on cherche à maximiser ont été construites sur cette base. Les

différents algorithmes ont montré des performances similaires mais certains algorithmes, bien que restreints à des problèmes particuliers, ont montré des vitesses de convergence plus rapides.

Il est possible d'étendre plus généralement la notion de fonctions de contraste. Il est alors possible d'utiliser différents critères exprimant le « taux » d'indépendance entre les sources. Certains auteurs utilisent la notion d'information mutuelle, issue de la théorie de l'information, ou encore une fois, en se basant sur les cumulants d'ordre strictement supérieur à 2.

2 Fonction de Contraste exploitant la non-gaussianité

2.1 Méthodes basées sur les statistiques d'ordre supérieur

Les premières méthodes qui ont émergé sont les méthodes exploitant la non-gaussianité des sources. Le principe découle du théorème central limite qui montre qu'un mélange de sources iid de distribution quelconque tend vers une distribution gaussienne. Dans le cas d'un mélange linéaire instantané, équation (134), le problème peut alors être résolu en cherchant une matrice de séparation, notée B, telle que les signaux estimés, $\hat{S} = B \cdot Y$, minimisent un critère de gaussianité. Soit $G(s)$ une fonction mesurant la gaussianité de s, on a :

$$B = \underset{M}{\operatorname{argmin}}\, G(M \cdot Y) \tag{269}$$

Divers critères ont alors été utilisés de manière à mesurer la non-gaussianité des sources. Par exemple les statistiques d'ordre strictement supérieur à deux (SOS) sont d'autant plus élevées que les sources sont non-gaussiennes. Le critère basé sur les SOS le plus souvent utilisé est le cumulant d'ordre quatre défini par :

$$\kappa_4(y) = \mathbb{E}[y^2] - 3(\mathbb{E}[y^2])^2 \tag{270}$$

On trouvera dans l'article de Mensour et Jutten [145] une étude sur deux critères fondés sur les cumulants d'ordre quatre.

Historiquement l'algorithme FastICA [93, 138] propose l'estimation des sources en maximisant un tel critère par l'algorithme d'optimisation du point fixe [91] :

$Z(n) \leftarrow$ Préblanchiment par Analyse en Composante Principale

Pour i variant de 1 à N
Estimation d'un vecteur de séparation
$w_i \leftarrow vecteur\ aléatoire\ de\ norme\ 1$
Faire
$w_i \leftarrow w_i + \mathbb{E}[z \cdot (w_i^T \cdot z)^3] - 3w_i$
$w_i \leftarrow w_i / \|w_i\|$
Jusqu'à convergence

Estimation de la source :
$s_i(n) = w_i^T \cdot Z(\mathrm{n})$

Suppression de la contribution de la source dans $Z(\mathbf{n})$:

Fin Pour

Tableau 13 : Algorithme de FastICA de séparation de N sources par maximisation du Kurtosis [91]

2.2 Méthodes fondées sur la théorie de l'information

Un second critère de non-gaussianité utilisé en séparation de sources est la néguentropie. L'entropie d'une variable aléatoire [146], en théorie de l'information, mesure la « structuration de l'information ». Une entropie élevée montre un signal fortement aléatoire et instructuré. L'entropie différentielle généralise la notion d'entropie de Shannon aux vecteurs aléatoires continus et est définie par l'espérance de l'inverse de la densité de probabilité conjointe, notée $\phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})$, du vecteur $\boldsymbol{y}$:

$$H(\boldsymbol{y}) = -\int \log\left(\phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\right) \phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{271}$$

L'intérêt de cette fonction réside dans le fait qu'une distribution gaussienne montre une entropie maximale [147] [148] et peut alors être utilisée comme mesure de la non-gaussianité. On utilisera généralement la notion de néguentropie en séparation de sources qui est nulle pour une variable gaussienne. La néguentropie est alors définie par la différence entre l'entropie d'une variable de distribution gaussienne de même variance que $\boldsymbol{y}$, notée $H(\boldsymbol{y_g})$, et l'entropie de $\boldsymbol{y}$:

$$J(\boldsymbol{y}) = H(\boldsymbol{y_g}) - H(\boldsymbol{y}) \tag{272}$$

L'estimation de la densité de probabilité de y est en pratique difficile et on utilise généralement des fonctions approximant la néguentropie. Hyvärinen [149] propose l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur et fournit l'approximation suivante à un facteur d'échelle près :

$$J(\boldsymbol{y}) \propto \mathbb{E}[G(\boldsymbol{y})] - \mathbb{E}\left[G(\boldsymbol{y_g})\right] \tag{273}$$

Ou $G(y)$ est une fonction non quadratique quelconque et $\propto$ signifie « proportionnel à ». Les auteurs proposent différentes fonctions, équation (274), qui ont prouvé leur efficacité quant à l'estimation de la néguentropie. Les auteurs proposent alors un algorithme de séparation par déflation utilisant une optimisation du point fixe :

$Z(n) \leftarrow$ Préblanchiment par Analyse en Composante Principale

Pour i variant de 1 à N
  Estimation d'un vecteur de séparation
    $w_i \leftarrow vecteur\ aléatoire\ de\ norme\ 1$
    Faire
      $w_i \leftarrow w_i + \mathbb{E}[z \cdot g(w_i^T \cdot z)] - \mathbb{E}[g'(w_i^T \cdot z)]w_i$
      $w_i \leftarrow w_i / \|w_i\|$
    Jusqu'à convergence

  Estimation de la source :
    $s_i(n) = w_i^T \cdot Z(\mathrm{n})$

  Suppression de la contribution de la source dans $Z(\mathbf{n})$:

Fin Pour

Tableau 14 : Algorithme de FastICA de séparation de N sources par maximisation de la néguentropie

où $g(y)$ et $g'(y)$ sont successivement les fonctions dérivée et dérivée seconde de $G(y)$. Les auteurs proposent ces deux fonctions :

$$\begin{array}{lll} G(y) = 1/a_1 \log(\cosh(a_1 y)) & g(y) = \tanh(a_1 y) & g'(y) = a_1(1 - \tanh^2(a_1 y) \\ G(y) = -e^{-y^2/2} & g(y) = y e^{-y^2/2} & g'(y) = (1 - y^2)e^{-y^2/2} \end{array} \tag{274}$$

On note que le choix $g(y) = y^3$ revient au problème de maximisation du Kurtosis. L'algorithme du Tableau 14 forme un ainsi une généralisation de l'algorithme présenté au Tableau 13.

3 Méthode de séparation utilisant l'information mutuelle

Proche du concept de l'entropie, l'information mutuelle est une mesure naturelle de la dépendance entre variables aléatoires. Si on définit $\boldsymbol{y} = [y_1 \dots y_N]^T$ un vecteur de N variables aléatoires, l'information mutuelle entre les y_i est définie par :

$$I(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{N} H(y_i) - H(\boldsymbol{y}) \tag{275}$$

La minimisation d'un tel critère permet alors de trouver une matrice de séparation dans le modèle linéaire instantané.

Annexe D. Diagonalisation approximative de matrice par itération de Jacobi

1 Diagonalisation approchée d'une matrice

Soit A une matrice carrée à valeurs complexes ou réelles et Hermitienne à diagonaliser. Remarquons que la particularité des matrices normales (c'est le cas par exemple des matrices hermitiennes, anti-hermitiennes et unitaires) est qu'elles peuvent être diagonalisées par une transformation unitaire, c'est-à-dire qu'il existe une matrice unitaire U telle que $U^H \cdot A \cdot U$ soit diagonale.

Avec cet objectif, le principe est de rechercher une matrice unitaire U telle que B, donnée par l'équation ci-dessous, soit diagonale :

$$D = UAU^H \tag{276}$$

Une mesure naturelle de la diagonalité d'une matrice est la somme du module carré des éléments hors diagonaux de la matrice. Cette valeur étant nulle pour une matrice diagonale, le problème de diagonalisation peut alors se réduire à la minimisation de cette moyenne :

$$U_{opt} = \underset{U}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j \\ j \neq i}}^{N-1} \left| d_{ij}(U) \right|^2 \right) \tag{277}$$

où $b_{ij}(U)$ représente le terme de la i^{ème} ligne et de la j^{ème} colonne de la matrice UAU^H. Alors que U est unitaire, la minimisation, équation (277), revient alors à maximiser la somme du module carré des éléments diagonaux :

$$U_{opt} = \underset{U}{\operatorname{argmax}} \left(\sum_{i=1}^{N} |d_{ii}(U)|^2 \right) = \underset{U}{\operatorname{argmax}} (\| diag(U^H \cdot A \cdot U\ ) \|^2) \tag{278}$$

Une matrice unitaire peut être décomposée en matrices paramétriques de rotation complexe plane. Une telle matrice, aussi appelée matrice de rotation de Jacobi élémentaire est définie par :

$$J(p,q) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & p & & q & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & cos\theta & \cdots & -sin\theta e^{j\Phi} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & sin\theta e^{-j\Phi} & \cdots & cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array} \tag{279}$$

U est alors construit par le produit des matrices de rotation Jacobi élémentaires :

$$U = \prod_{p=1}^{N-1} \prod_{q=p+1}^{N} J(p,q) \tag{280}$$

Alors l'algorithme de maximisation se décompose en appliquant successivement des matrices de rotations élémentaires sur A jusqu'à ce que A soit diagonale. L'algorithme est décrit comme suit :

```
U ← I
Tant que off(A) > ϵ
    Pour p variant de 1 à N-1
        Pour q variant de p+1 à N
            J ← Recherche de J(p,q) optimal
            A ← J · A · J^H
            U ← U · J^H
        Fin pour
    Fin pour
Fin Tant que
```

Tableau 15 : Algorithme de Diagonalisation de Jacobi Cyclique

La recherche de $J(p,q)$ optimale est ensuite réalisée par diagonalisation exacte [125] de A_{pq}, la matrice 2x2 formée par les éléments (p,q) de la matrice A. Soit J_{pq} la matrice de rotation de Givens élémentaire recherchée formée par les éléments (p,q) de la matrice $J(p,q)$.

On a alors par définition :

$$\begin{aligned} A_{pq} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ J_{pq} &= \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta e^{j\Phi} \\ sin\theta e^{j\Phi} & cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{281}$$

Diagonaliser conjointement revient à maximiser le critère introduit à l'équation (278) soit dans le cas présent, en posant $A'_{pq} = J_{pq}^H \cdot A_{pq} \cdot J_{pq}$:

$$\mathfrak{C}(J_{pq}) = \left\| diag(A'_{pq}) \right\|^2 = |a'_{11}|^2 + |a'_{22}|^2 = |a'_{11} - a'_{22}|^2 + \frac{1}{2}|a'_{11} + a'_{22}|^2 \tag{282}$$

alors que le deuxième terme, qui n'est autre que la trace de A'_{pq}, est invariant à la transformation unitaire. Maximiser l'équation (282) revient donc à minimiser :

$$\mathfrak{C}_2(J_{pq}) = |a'_{11} - a'_{22}|^2 \tag{283}$$

On pose :

$$\begin{Bmatrix} v = [\cos(2\theta) \quad \sin(2\theta) \quad sin2\theta sin\Phi]^T \\ g = [a_{11} - a_{22} \quad a_{12} + a_{21} \quad i(a_{21} - a_{12})] \end{Bmatrix} \tag{284}$$

En injectant dans cette expression l'équation (281) et après simplification, l'équation (283) s'écrit :

$$\mathfrak{C}_2(J_{pq}) = v^T g^H g v \tag{285}$$

Ainsi la diagonalisation par décomposition en valeur propre de $g^H g$ conduit à trouver v. On prendra v comme étant le vecteur propre de la plus forte valeur propre de $g^H g$. On note $v = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$, ainsi, par identification avec les équations (284) et (281), la matrice de rotation de Givens optimale peut être calculée par :

$$J_{pq} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{v_1+1}{2}} & -\frac{v_2+iv_3}{\sqrt{2+2v_1}} \\ \frac{v_2-iv_3}{\sqrt{2+2v_1}} & \sqrt{\frac{v_1+1}{2}} \end{bmatrix} \tag{286}$$

2 Diagonalisation conjointe approchée

On considère cette fois un jeu de P matrice hermitienne de dimension NxN :

$$\mathcal{A} = \{A_k \mid k \in [\![1, P]\!]\} \tag{287}$$

La diagonalisation jointe d'un jeu de matrices normales commutantes consiste à appliquer une transformation unitaire à ce jeu pour diagonaliser simultanément l'ensemble des matrices A_i de $\mathcal{A}$ c'est-à-dire trouver une matrice unitaire U telle que $U \cdot A_k \cdot U^H$ soit diagonale quel que soit $k \in [\![1, P]\!]$. Sous le même principe que précédemment [125] redéfinit le critère de l'équation (278) par :

$$U_{opt} = \underset{U}{\operatorname{argmax}} \left(\sum_k \| diag(U^H \cdot A_k \cdot U) \|^2 \right) \tag{288}$$

On pose alors A_{pq}^k la matrice formée par l'intersection des colonnes et lignes (p, q) de la matrice A_k :

$$\begin{gathered} A_{pq}^k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k \end{bmatrix} \\ J_{pq} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta e^{j\Phi} \\ sin\theta e^{j\Phi} & cos\theta \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{289}$$

Ainsi, avec $A_{pq}^{k\prime} = J_{pq}^H \cdot A_{pq}^k \cdot J_{pq}$ on redéfinit le critère de l'équation (283) pour une rotation élémentaire de Jacobi par :

$$\mathfrak{C}_2(J_{pq}) = \sum_k \left| a_{11}^{k\prime} - a_{22}^{k\prime} \right|^2 \tag{290}$$

Enfin en posant :

$$\left\{ \begin{gathered} v = [\cos(2\theta) \quad \sin(2\theta) \quad sin2\theta sin\Phi]^T \\ g_k = \left[a_{11}^k - a_{22}^k \quad a_{12}^k + a_{21}^k \quad i\left(a_{21}^k - a_{12}^k\right)\right]^T \\ G = [g_1 \quad \cdots \quad g_P]^T \end{gathered} \right\} \tag{291}$$

Le critère de l'équation (290) devient :

$$\mathfrak{C}_2(J_{pq}) = v^T G^H G v \tag{292}$$

La décomposition en valeurs propres de la matrice Hermitienne $G^H G$ permet de retrouver la matrice de rotation de Givens conformément à l'équation (286).

Références bibliographiques

[1] W. W. Campbell, Essentials of Electrodiagnostic Medicine, Demos Medical, 2013.

[2] R. Artois, «La sclérose latérale amyotrophique, affection terrible et méconnue,» *Le Monde,* 30 juin 2002.

[3] P. Benkimoun, «Les TMS, première maladie professionnelle,» *Le Monde,* 15 novembre 2005.

[4] E. C. Hayden, "Rewired nerves control robotic leg," *Nature News,* 2013.

[5] H. Morin, «Homo bionicus descend du singe,» *Le Monde,* 18 octobre 2008.

[6] A. Ferreira, R. L. Silva, W. C. Celeste and T. F. B. Filho, "Human-machine interface based on muscular and brain signals applied to a robotic," *16th Argentine Bioengineering Congress and the 5th Conference of Clinical Engineering, IOP Science,* 2007.

[7] K. Wheeler, "Device control using gestures sensed from EMG," *Soft Computing in Industrial Applications, 2003. SMCia/03. Proceedings of the 2003 IEEE International Workshop on,* 2003.

[8] F. Filloux, «Quoi de neuf chez Microsoft ?,» *Le Monde,* 16 avril 2010.

[9] M. Knaflitz and P. Bonato, "Time-frequency methods applied to muscle fatigue assessment during dynamic contractions," *Journal of Electromyography and Kinesiology, vol. 9, n° 5,* pp. 337-50, 1999.

[10] G. Balestra, S. Frassinelli, M. Knaflitz and F. Molinari, "Time-frequency analysis of surface myoelectric signals during athletic movement," *Engineering in Medicine and Biology Magazine, vol. 20, n° 6,* p. 106–15, 2001.

[11] P. Bonato, S. H. Roy, M. Knaflitz and C. J. De Luca, "Time-frequency parameters of the surface myoelectric signal for assessing muscle fatigue during cyclic dynamic contractions," *Transactions on Bio-Medical Engineering, vol. 48, n° 7,* pp. 745-53, 2001.

[12] J. Karlsson, N. Östlund, B. Larsson and B. Gerdle, "An estimation of the influence of force decrease on the mean power spectral frequency shift of the EMG during repetitive maximum dynamic knee extensions," *Journal of Electromyography and Kinesiology, vol. 13, n° 5,* pp. 461-8, 2003.

[13] H. Cao, I. El Hajj Dib, J. Antoni and C. Marque, "Analysis of muscular fatigue during cyclic dynamic movement," *Proceedings of the 29th Annual International Conference of the IEEE EMBS,* pp. 1880-3, 2007.

[14] G. R. Naik, D. K. Kumar, K. A. Wheeler and S. P. Arjunan, "Estimation of Muscle Fatigue during Cyclic Contractions Using Source Separation Techniques," *Digital Image Computing: Techniques and Applications, Melbourne, VIC,* pp. 217-22, 2009.

[15] Y. Li, Y. Tian, X. Shang and W. Chen, "Modeling and Classification of sEMG Based on Blind Identification Theory," *Lecture Notes in Computer Science - Advances in Neural Networks (ISNN), vol. 6677,* pp. 340-7, 2011.

[16] I. El Hajj Dib, Analyse et modélisation de l'EMG et de la fatigue musculaire lors de mouvements dynamiques cycliques, Compiègne, France: Thèse de l'Université de Technologie de Compiègne (UTC), 2006.

[17] M. Pozzo, D. Farina and R. Merletti, Biomedical Technology and Devices Handbook - Chapitre 4 Electromyography: Detection, Processing and Applications, CRC Press LLC, 2003.

[18] A. L. Hodgkin, A. F. Huxley and B. Katz, "Measurement of Current-Voltage Relations in the Membrane of The Giant Axon of Loligo," *Journal of Physiology, vol. 116,* pp. 424-48, 1952.

[19] R. Plonsey, "The active fiber in a volume conductor," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. BME-21, n° 5,* pp. 371-81, 1974.

[20] S. Andreassen and A. Rosenfalck, "Relationship of intracellular and extracellular action potentials of skeletal muscle fibers," *Crit. Rev. Bioeng., vol. 6, n° 4,* pp. 267-306, 1981.

[21] E. G. T. Liddell and C. S. Sherrington, "Recruitment and some other factors of reflex inhibition," *Proc. R. Soc. London., vol. 97,* p. 488–518, 1925.

[22] R. E. Burke, "Motor Units: Anatomy, Physiology, and Functional Organization," in *Handbook of Physiology, The Nervous System, Motor Control*, John Wiley & Sons, Inc., 2011, pp. 345-422.

[23] R. M. Enoka and A. J. Fuglevand, "Motor Unit Physiology: Some Unresolved Issues," *Muscle Nerve, vol. 24, n° 1,* pp. 4-17, 2001.

[24] S. Bodine-Fowler, A. Garfinkel, R. R. Roy and V. Edgerton, "Spatial distribution of muscle fibers within the territory of a motor unit," *Muscle Nerve, vol. 13, n° 12,* pp. 1133-45, 1990.

[25] J. Basmajian and C. J. De Luca, Muscle Alive, Their Functions Revealed by Electromyography, 4e ed., Williams & Wilkins, 1978.

[26] R. E. Burke, D. N. Levine, P. Tsairis and F. E. Zajac, "Physiological types and histochemical profiles in motor units of the cat gastrocnemius," *J Physiol., vol. 234, n° 3,* pp. 723-48, 1973.

[27] W. Wallinga-De Jonge, F. L. Gielen, P. Wirtz, P. De Jong and J. Broenink, "The different intracellular action potentials of fast and slow muscle fibres," *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol., vol. 60, n° 6,* pp. 539-47, 1985.

[28] E. D. Adrian and D. W. Bronk, "The discharge of impulses in motor nerve fibres. Part II. The frequency of discharge in reflex and voluntary contractions," *J. Physiol., vol. 67, n° 2,* pp. 119-51, 1929.

[29] J. Paillard, «Le codage nerveux des commandes motrices,» *Revue d'Electroencéphalographie et de Neurophysiologie Clinique, vol. 6, n° 4,* pp. 453-72, 1976.

[30] M. S. Stock, T. W. Beck and J. M. Defreitas, "Effects of fatigue on motor unit firing rate versus recruitment threshold relationships," *Muscle & Nerve, vol. 45, n° 1,* pp. 100-9, 2012.

[31] C. J. De Luca, A. M. Roy and Z. Erim, "Synchronization of motor-unit firings in several human muscles," *J. Neurophysiol., vol. 70, n° 5,* pp. 2010-23, 1993.

[32] S. Andreassen and A. Rosenfalck, "Regulation of the firing pattern of single motor units," *Journal of Neurology, Neurosurgery, and Psyy, vol. 43,* pp. 897-906, 1980.

[33] S. Andreassen and L. Arendt-Nielsen, "Muscle Fibre Conduction Velocity in Motor Units of the Human Anterior Tibial Muscle: A New Size Principle Parameter," *J. Physiol., vol. 391,* pp. 561-71, 1987.

[34] H. P. Clamann, "Statistical Analysis of Motor Unit Firing Patterns in a Human Skeletal Muscle," *Biophysical Journal, vol. 9, n° 10,* pp. 1233-51, 1969.

[35] W. H. Calvin and C. F. Stevens, "Synaptic Noise and Other Sources of Randomness in Motoneuron Interspike Intervals," *Journal of Neurophysiology, vol. 31, n° 4,* pp. 574-87, July 1968.

[36] E. Henneman, "Relation between size of neurons and their susceptibility to discharge," *Science, vol. 126,* pp. 1345-7, 1957.

[37] L. M. Mendell, "The size principle: a rule describing the recruitment of motoneurons," *J. Neurophysiol., vol. 93,* pp. 3024-6, 2005.

[38] E. Henneman, G. Somjen and D. O. Carpenter, "Functional Significance of Cell Size in Spinal Motoneurons," *Journal of Neurophysiology, vol. 28,* pp. 560-80, 1965.

[39] J.-Y. Hogrel, *Applications cliniques de l'EMG de surface dans les pathologies neuromusculaires,* 1995.

[40] J. Kimura, Electrodiagnosis in Diseases of Nerve and Muscle: Principles and Practice, Ed. 3, Oxford University Press, 2001.

[41] R. Merletti, A. Holobar and D. Farina, "Two Dimensional High Density Surface EMG (HD-EMG) Technology and Applications," *XVIIth Congress of the International Society of Electrophysiology and Kinesiology (ISEK), Niagara Falls, Canada,* 2008.

[42] E. Shwedyk, R. Balasubramanian and R. Scott, "A Nonstationary Model for the Electromyogram," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. BME-24, n° 5,* pp. 417-24, 1977.

[43] F. Leclerc, Développement d'outils non-stationnaires pour la mesure de délais variables appliqués aux signaux bioélectriques, Orléans, France: Thèse de l'Université d'Orléans, 2008.

[44] G. T. Luu, Contributions à l'estimation de la vitesse de conduction des signaux électromyographiques, Orléans, France: Thèse de l'Université d'Orléans, 2013.

[45] D. Dumitru and J. A. Delisa, "AAEM MINIMONOGRAPH #10: Volume Conduction," *Muscle and Nerve, vol. 14,* pp. 605-24, 1991.

[46] D. Farina and R. Merletti, "A Novel Approach for Precise Simulation of the EMG Signal Detected by Surface Electrodes," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. 48, n° 6,* pp. 637-46, 2001.

[47] D. Farina, L. Mesin, S. Martina and R. Merletti, "A Surface EMG Generation Model With Multilayer Cylindrical Description of the Volume Conductor," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. 51, n° 3,* pp. 415-26, 2004.

[48] L. Mesin and D. Farina, "An Analytical Model for Surface EMG Generation," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. 53, n° 5,* pp. 773-9, 2006.

[49] C. J. De Luca, A. Adam, R. Wotiz, L. D. Gilmore and S. H. Nawab, "Decomposition of Surface EMG Signals," *J. Neurophysiol., vol. 96,* pp. 1646-57, 2006.

[50] J. Coatrieux, P. Toulouse, B. Rouvrais and R. Le Bars, "Automatic classification of electromyographic signals," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, vol. 55, n° 3,* pp. 333-41, 1983.

[51] J. Antoni and R. Randall, "Differential diagnosis of gear and bearing faults," *ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol. 124, n° 2,* pp. 165-71, 2002.

[52] J. Antoni and R. B. Randall, "A stochastic model for simulation and diagnostics of rolling element bearings with localized faults," *ASME Journal of Vibration and Acoustics, vol. 125,* pp. 282-9, 2003.

[53] F. Bonnardot, Comparaison entre les analyses angulaire et temporelle des signaux vibratoires de machines tournantes. Etude du concept de cyclostationnarité floue, Grenoble, France: Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), 2004.

[54] H. L. Hurd, An investigation of periodically correlated processes, Durham, North Carolina, USA: Ph. D. dissertation of the Duke University, 1970.

[55] W. A. Gardner, "Measurement of spectral correlation," *IEEE Trans. Acoust., vol. 34, n° 5,* pp. 1111-23, Oct. 1986.

[56] W. A. Gardner, "The spectral correlation theory of cyclostationary time-series," *Signal Processing, vol. 11,* pp. 13-36, 1986.

[57] W. A. Gardner, Statistical Spectral Analysis. A Non-Probablistic theory, Englewood Clifs, NJ: Prentice-Hall, 1988.

[58] G. D. Z. a. W. A. Gardner, "Degree of cyclo-stationarity and their application to signal detection and estimation," *Signal Processing, vol. 22,* pp. 287-97, 1991.

[59] W. A. Gardner, Cyclostationarity in communications and signal processing, IEEE Press, 1994.

[60] C. Capdessus, Aide au diagnostic des machines tournantes par traitement du signal, Grenoble, France: Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), 1992.

[61] R. B. Randall, J. Antoni and S. Chobsaard, "The Relationship Between Spectral Correlation and Envelope Analysis in the Diagnostics of Bearing Faults and Other Cyclostationary Machine Signals," *Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 15, n° 5,* pp. 945-62, 2001.

[62] R. Weber and C. Faye, "Real Time Detector for Cyclostationary RFI in Radio Astronomy," *EUSIPCO,* 1998.

[63] R. Boustany and J. Antoni, "Cyclic spectral analysis from the averaged cyclic periodogram," *Proceedings of the 16th IFAC World Congress Prague Czech Republic,* 2005.

[64] W. Simon, "The real-time sorting of neuro-electric action potentials in multiple unit studies," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, vol. 18, n° 2,* pp. 192-5, 1965.

[65] D. G. Keehn, "An Iterative Spike Separation Technique," *IEEE transaction on biomedical Engineering, vol. BME-13, n° 1,* pp. 19-28, Janvier 1966.

[66] E. Schmidt and M. Stromberg, "Computer dissection of peripheral nerve bundle activity," *Computers and Biomedical Research, vol. 2, n° 5,* pp. 446-55, 1969.

[67] J. C. Dill, P. C. Lockemann and K.-I. Naka, "An Attempt to Analyse Multi-Unit Recordings," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, vol. 28, n° 1,* pp. 79-82, 1970.

[68] D. J. Mishelevich, "On-Line Real-Time Digital Computer Separation of Extracellular Neuroelectric Signals," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. BME-17, n° 2,* pp. 147-50, 1970.

[69] V. J. Prochazka, B. Conrad and F. Sindermann, "A neuroelectric signal recognition system," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, vol. 32, n° 1,* pp. 95-7, 1972.

[70] V. J. Prochazka and H. H. Kornhuber, "On-line multi-unit sorting with resolution of superposition potentials," *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, vol. 34, n° 1,* pp. 91-3, 1973.

[71] J. F. Vibert and J. Costa, "Spike separation in multiunit records: a multivariate analysis of spike descriptive parameters," *Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol., vol. 47, n° 2,* pp. 172-82, 1979.

[72] J. M. Agnier, B. Rouvrais, J. L. Coatrieux, P.-Y. Arques et R. Le bars, «Presentation de methodes de reconnaissance des signaux d'electromyographie,» *Colloque GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images,* 1981.

[73] R. S. Lefever and C. J. De Luca, "A Procedure for Decomposing the Myoelectric Signal Into Its Constituent Action Potentials - Part I: Technique, Theory, and Implementation," *IEEE Transactions on Bio-Medical Engineering, vol. 29, n° 3,* pp. 149-57, 1982.

[74] R. S. Lefever, A. P. Xenakis and C. J. De Luca, "A Procedure for Decomposing the Myoelectric Signal Into Its Constituent Action Potentials - Part II: Execution and Test for Accuracy," *IEEE Transactions on Bio-Medical Engineering, vol. 29, n° 3,* pp. 158-64, 1982.

[75] B. Mambrito and C. J. De Luca, "A technique for the detection, decomposition and analysis of the EMG signal," *Electroencephalography and clinical neurophysiology, vol. 58, n° 2,* pp. 175-88, 1984.

[76] K. McGill, K. L. Cummins and L. J. Dorfman, "Automatic Decomposition of the Clinical Electromyogram," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. BME-32, n° 7,* pp. 470-7, 1985.

[77] K. McGill and L. J. Dorfman, "High-Resolution Alignment of Sampled Waveforms," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. BME-31, n° 6,* pp. 462-8, 1984.

[78] H. Broman, "Knowledge-based signal processing in the decomposition of myoelectric signals," *IEEE engineering in medicine and biology magazine : the quarterly magazine of the Engineering in Medicine & Biology Society, vol. 7, n° 2,* pp. 24-8, 1988.

[79] D. Stashuk and R. Naphan, "Probabilistic inference-based classification applied to myoelectric signal decomposition," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. 39, n° 4,* pp. 346-55, 1992.

[80] K. C. McGill, "Optimal Resolution of Superimposed Action Potentials," *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on, vol. 49, n° 7,* pp. 640-50, 2002.

[81] K. C. McGill, Z. C. Lateva and H. R. Marateb, "EMGLAB: an interactive EMG decomposition program [The software is available at http://www.emglab.net]," *J. Neurosci. methods, vol. 149, n° 2,* pp. 121-33, 2005.

[82] A. T. e. C. Jutten, "Sources separation in post-nonlinear mixtures," *IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 10, n° 47,* pp. 2807-20, 1999.

[83] A. Gorokhova et P. Loubaton, «Blind identification of MIMO-FIR systems: A generalized linear prediction approach,» *Signal Processing, vol.73, n° 1-2,* pp. 105-124, 1999.

[84] H. Bousbia-Salah, A. Belouchrani and K. Abed-Meraim, "Jacobi-like algorithm for blind signal separation of convolutive mixtures," *IEEE Electronics Letters, vol. 37, n° 16,* pp. 1049-50, 2001.

[85] G. Bienvenu and L. Kopp, "Optimality of high-resolution array processing using the eigensystem approach," *IEEE Trans. ASSP 31,* pp. 1235-48, 1983.

[86] J. Hérault, C. Jutten et B. Ans, «Détection de grandeurs primitives dans un message composite par une architecture de calcul neuromimetique en apprentissage non-supervisé,» *Actes du Xème colloque GRETSI,* pp. 1017-22, 1985.

[87] J.-L. Lacoume and P. Ruiz, "Sources indentification: a solution based on the cumulants," *Spectrum Estimation and Modeling, 1988., Fourth Annual ASSP Workshop on,* pp. 199-203, 1988.

[88] J.-F. Cardoso, "Blind identification of independent signals," *Workshop on Higher-Order Spectral Analysis, Vail, CO, June 1989.*

[89] P. Comon and C. Jutten, Handbook of Blind Source Separation, 2010.

[90] A. J. Bell and T. J. Sejnowski, "An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution," *Neural Comput., vol. 7, n° 6,* p. 1129–59, 1995.

[91] A. Hyvärinen and E. Oja, "A fast fixed-point algorithm for independent component analysis," *Neural Computation, vol. 9, n° 7,* pp. 1483-92, 1997.

[92] A. Hyvarinen, "A family of fixed-point algorithms for independent component analysis: A statistical analysis," *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1997. ICASSP-97., 1997 IEEE International Conference on, vol. 5,* pp. 388-97, 1997.

[93] A. Hyvärinen, "Fast and Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis," *IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 10, n° 3,* pp. 626-34, 1999.

[94] L. Fêty and J.-P. V. Uffelen, "New methods for signal separation," *14th Conf. on HF Radio Systems and Techniques,* pp. 226-30, 1988.

[95] L. Molgedey and H. G. Schuster, "Separation of a mixture of independent signals using time delayed correlations," *Physical Review Letters, vol. 72,* pp. 3634-7, 1994.

[96] L. Tong, V. Soon, Y.-F. Hung and L. R., "AMUSE: A new blin identification algorithm," *Proc. ISCAS'90,* pp. 1784-7, 1990.

[97] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso and E. Moulines, "A blind source separation technique using second order statistics," *IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 45, n° 2,* pp. 434-44, 1997.

[98] A. Ziehe and K.-R. Müller, "TDSEP — an efficient algorithm for blind separation using time structure," *ICANN'98, Perspectives in Neural Computing,* pp. 675-80, 1998.

[99] A. M. Tomé, T. A. R., L. E. W., K. Stadlthanner, R. A. P. and R. Almeida, "Blind source separation using time-delayed signals," *IJCNN'04,* 2004.

[100] A. Yeredor, "Blind separation of gaussian sources via second-order statistics with asymptotically optimal weighting," *IEEE Signal Processing Letters, vol. 7,* pp. 197-200, 2000.

[101] A. Yeredor and E. Doron, "Using farther correlations to further improve the optimally-wieghted SOBI algorithm," *EUSIPCO'2002,* 2002.

[102] D.-T. Pham and P. Garat, "Blind separation of mixture of independent sources through a quasi-maximum likelihood approach," *IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 45,* pp. 1712-25, 1997.

[103] S. Dégerine and A. Zaïdi, "Separation of an instantaneous mixture of gaussian autoregressive sources by the exact maximum likelihood approach," *IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 52,* pp. 1492-512, 2004.

[104] D.-T. Pham, "Blind separation of instantaneous mixture of sources via the gaussian mutual information criterion," *Signal Processing, vol. 81,* pp. 855-70, 2001.

[105] D. Farina, F. Lebrun, C. Févotte, C. Doncarli and R. Merletti, "Blind source separation of multiplicative mixtures of nonstationary," *19° Colloque sur le traitement du signal et des images,* pp. 942-5, 2003.

[106] D. Sueaseenak, T. Chanwimalueang, M. Sangworasil and C. Pintavirooj, "An Investigation of Robustness in Independent Component Analysis EMG," *Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology, 2009. ECTI-CON 2009. 6th International Conference on, vol. 2,* pp. 1102-5, 2009.

[107] G. R. Naik, D. K. Kumar and H. Weghorn, "ICA based identification of sources in sEMG," *Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information (ISSNIP) 2007. 3rd International Conference on,* pp. 619-24, 2007.

[108] G. R. Naik, D. K. Kumar, S. P. Arjunan, M. Palaniswam and R. Begg, "Limitations and Applications of ICA for Surface Electromyogram," *Electromyogr Clin Neurophysiol., vol. 46, n° 5,* pp. 295-309, 2006.

[109] G. R. Naik, D. K. Kumar and M. Palaniswami, "Source identification and separation using sub-band ICA of sEMG," *TENCON 2008 - 2008 IEEE Region 10 Conference,* 2008.

[110] S. Horihata, Z. Zhang, T. Enomoto, H. Toda, T. Imamura, T. Miyake and Y. Yasuda, "Independent Component Analysis using wavelet transform and its application to biological signals," *Wavelet Analysis and Pattern Recognition, 2008. ICWAPR '08. International Conference on, vol. 1,* pp. 436-41, 2008.

[111] G. A. García, R. Nishitani, R. Okuno and K. Akazawa, "Independent Component Anaysis as Preprocessing Tool for Decomposition of Surface Electrode-Array Electromyogram," *4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA2003), Nara, Japan,* 2003.

[112] G. A. García, K. Maekawa and K. Akazawa, "Decomposition of Synthetic Multi-channel Surface-Electromyogram," *Fifth International Conference, ICA 2004, Granada, Spain, September 22-24,* 2004.

[113] A. Holobar and D. Zazula, "Surface EMG Decomposition Using a Novel Approach for Blind Source Separation," *Infor. Med. Slov., vol. 8, n° 1,* pp. 2-14, 2003.

[114] A. Belouchrani and M. Amin, "Blind source separation based on time-frequency signal representations," *Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 46, n° 11,* pp. 2888-97, 1998.

[115] A. Holobar, C. Févotte, C. Doncarli and D. Zazula, "Single autoterms selection for blind source separation in time-frequency plane," *EUSIPCO,* 2002.

[116] A. Holobar and D. Zazula, "A novel approach to convolutive blind separation of close-to-orthogonal pulse sources using second-order statistics," *EUSIPCO,* pp. 381-4, 2004.

[117] A. Holobar, Blind deconvolution of close-to-orthogonal pulse sources applied to surface electromyograms, Maribor, Slovienia: Ph. D. dissertation of the University of Maribor, 2004.

[118] Q. Li, J.-H. Yang, X. Chen, Z. Liang and Y.-x. Ren, "The Decomposition of Surface EMG Signals Based on Blind Source Separation of Convolved Mixtures," *Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE-EMBS 2005. 27th Annual International Conference of the,* pp. 5912-5, 2005.

[119] K. Torkkola, "Blind separation of convolved sources based on information maximization," *Neural Networks for Signal Processing VI. Proceedings of the IEEE Signal Processing Society Workshop,* pp. 423-32, 1996.

[120] A. Holobar and D. Zazula, "Multichannel Blind Source Separation Using Convolution Kernel Compensation," *Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 55, n° 9,* pp. 4487-96, 2007.

[121] A. Holobar and D. Zazula, "Gradient Convolution Kernel Compensation Applied to Surface Electromyograms," *Independent Component Analysis and Signal Separation, Lecture Notes in Computer Science,* pp. 617-24, 2007.

[122] N. Jiang and D. Farina, "Covariance and time-scale methods for blind separation of delayed sources," *Transactions on Biomedical Engineering, vol. 58, n° 3,* pp. 550-6, 2011.

[123] C. Disselhorst-Klug, G. Rau, A. Schmeer and J. Silny, "Non-invasive detection of the single motor unit action potential by averaging the spatial potential distribution triggered on a spatially filtered motor unit action potential," *Journal of Electromyography and Kinesiology, vol. 9, n° 1,* pp. 67-72, January 1999.

[124] A. Zaïdi, Maximum de vraisemblance exact pour la séparation aveugle d'un mélange instantané de sources autorégressives gaussiennes, Grenoble, France: Thèse de l'Université Joseph Fourier, 2000.

[125] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non gaussian signals," *IEE-Proceedings-F, vol. 140, n° 6,* pp. 362-70, dec 1993.

[126] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Jacobi angles for simultaneous diagonalization," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 17,* pp. 161-4, 1996.

[127] K. Abed-Meraim, X. Young, J. H. Manton and H. Yingbo, "A new approach to blind separation of cyclostationary sources," *Signal Processing Advances in Wireless Communications. SPAWC '99. 2nd IEEE Workshop on,* pp. 114-7, 1999.

[128] K. Abed-Meraim, X. Yong, J. H. Manton and H. Yingbo, "Blind source-separation using second order cyclostationary statistics," *IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49,* pp. 694-701, 2001.

[129] N. Cheviet, M. El Badaoui, B. A. and G. F., "Blind separation of cyclostationary sources using non-orthogonal approximate joint diagonalization," *Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop. SAM 2008. 5th IEEE,* pp. 492-5, 2008.

[130] A. Ferreol, P. Chevalier and L. Albera, "Second-order blind separation of first- and second-order cyclostationnary sources - application to AM, FSK, CPFSK, and deterministic sources," *IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 52,* pp. 845-61, 2004.

[131] M. G. Jafari, S. R. Alty and J. A. Chambers, "New natural gradient algorithm for cyclostationary sources," *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings, vol. 151, n° 1,* pp. 62-8, 2004.

[132] P. Jallon and A. Chevreuil, "Separation of instantaneous mixtures of cyclostationary sources with application to digital communication signals," *EUSIPCO'06,* 2006.

[133] D.-T. Pham, "Blind separation of cyclostationary sources using joint block approximate diagonalization," *Lecture Notes in Computer Science, ICA'07,* 2007.

[134] R. Boustany and J. Antoni, "Separation of Rotating Machines Vibration," *Twelfth International Congress on Sound and Vibration,* 2005.

[135] A. Férreol and P. Chevalier, "Higher Order Blind Source Separation using the Cyclostationnarity Property of the signals," *Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-97., IEEE International Conference on, vol. 5,* pp. 4061-4, 1997.

[136] P. A. Mathieu, Online dataset R007 available at http://www.emglab.net.

[137] R. Merletti and P. A. Parker, Electromyography Physiology, Engineering, and Noninvasive Applications, Wiley-IEEE Press, 2004.

[138] A. Hyvärinen and E. Oja, "Independent Component Analysis: Algorithms and Applications," *Neural Networks, vol. 13, n° 4-5,* pp. 411-30, 2000.

[139] J.-F. Cardoso, "Source separation using higher order moments," *Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-89., International Conference on, vol. 4,* pp. 2109-12, 1989.

[140] J.-F. Cardoso and P. Comon, "Tensor-based independent component analysis," *EUSIPCO'90,* 1990.

[141] P. Comon, "Independent component analysis, A new concept?," *Signal Processing, vol. 36,* pp. 287-314, 1994.

[142] L. De Lathauwer, B. De Moor and J. Vandewalle, "Independent component analysis and simultaneous third-order tensor diagonalization," *IEEE Trans. Signal Process., vol. 49,* pp. 2262-71, 2001.

[143] E. Moreau, «Une généralisation de l'algorithme JADE,» *Dix-septieme Colloque GRETSI,* pp. 1137-40, 13-17 sept. 1999.

[144] P. Comon and E. Moreau, "Improved contrast dedicated to blind source separation in communications," *Proc. ICASSP,* pp. 3453-6, April 1997.

[145] A. Mansour and C. Jutten, "Fourth-order criteria for blind sources separation," *IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 43, n° 8,* pp. 2022-5, 1995.

[146] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication," *Reprinted with corrections from The Bell System Technical Journal, vol. 27,* pp. 379–423, 623–56, 1948.

[147] A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. 3rd Edition, McGraw-Hill, 1991.

[148] T. M. Cover and J. A. Thomas, Elements of Information Theory, Wiley, 1991.

[149] A. Hyvärinen, "New approximations of differential entropy for independent component analysis and projection pursuit," *Advances in Neural Information Processing Systems, vol. 10,* pp. 273-9, 1998.

Liste des conférences

- **J. Roussel**, M. Haritopoulos, P. Ravier, O. Buttelli, « A New Cyclostationarity-Based Blind Approach for Motor Unit's Firing Rate Automated Detection in Electromyographic Signals », *EMBS BHI*, Valancia, Spain, 2014

- **J. Roussel**, M. Haritopoulos, P. Ravier, O. Buttelli, « Cyclostationary analysis of electromyographic signals », *Signal Processing Conference (EUSIPCO), Proceedings of the 21st European*, Marrakech, Moroco, 2013

Autres Conférences

- **J. Roussel**, M. Haritopoulos, "Estimation of Foetal Contribution to ECG Recordings Using Oblique Projection Technique Exploiting Cyclostationary Properties of the Heartbeat Signals", *EMBEC*, Dubrovnik, Croatia, 2014

- **J. Roussel**, M. Haritopoulos, E. Sekko, C. Capdessus, J. Antoni, "Application of Speed Transform to the diagnosis of a roller bearing in variable speed", *Surveillance 7*, Chartres, France, 2013

- M. Haritopoulos**, J. Roussel**, C. Capdessus, A.K. Nandi, "Cyclostationarity-Based Estimation of the Foetus Subspace Dimension from ECG Recordings", *XIII Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing*, Seville, Spain, 2013

- P. Ravier, M. Jabloun, **J. Roussel**, C. Capdessus, "PRSA method for transient detection applied to drinking water production surveillance », *Surveillance 7*, Chartres, France, 2013

Julien ROUSSEL

Modélisation cyclostationnaire et séparation de sources des signaux électromyographiques

Résumé :

L'objectif de cette thèse est de développer des méthodes de décomposition des signaux électromyographiques (EMG) en signaux élémentaires, les trains de potentiels d'action d'unité motrice (TPAUM). Nous avons proposé deux modèles de génération des signaux et nous avons mis en évidence la propriété de cyclostationnarité et de cyclostationnarité floue de ces deux modèles. Dans l'objectif de la décomposition, nous avons enfin proposé une méthode de décomposition aveugle à partir de signaux EMG multi-capteurs en utilisant cette propriété. Nous présentons les limitations théoriques de la méthode, notamment par un seuil limite de la fréquence de décharge. Nous avons effectué une évaluation des performances de la méthode proposée avec comparaison à une méthode classique de séparation à l'ordre 2. Il a été montré que l'exploitation de la propriété de cyclostationnarité apportait de meilleures performances de séparation dans le cas bruité et non bruité, sur le modèle cyclostationnaire et sur le modèle cyclostationnaire flou. Les performances se trouvent dégradées lorsque la fréquence de décharge dépasse le seuil théorique. Cette évaluation a été réalisée au moyen de simulations de Monte-Carlo construites sur des observations réelles. Enfin, la méthode appliquée sur des données réelles a montré de bons résultats sur des signaux EMG intramusculaires.

Mots clés : Electromyographie, Séparation de Sources, Décomposition d'Unité Motrice, Cyclostationnarité, Cyclostationnarité Floue

Cyclostationary Modeling and Blind Source Separation of Electromyographic Signals

Abstract:

The aim of this thesis is to develop decomposition methods of electromyographic (EMG) signals into elementary signals, called motor unit action potential trains (MUAPT). We proposed two signal generation models and we have demonstrated the cyclostationary and fuzzy cyclostationary properties of these. We finally proposed a blind decomposition method from multi-sensor EMG signals using these properties. We present the theoretical limitations of the method, in particular the existence of a limiting threshold of the discharge frequency. We conducted a performance evaluation of the proposed method with a comparison with conventional 2nd order separation method. It has been shown that the contribution of cyclostationarity property brings better performance in noisy and noiseless cases and in the cyclostationary and fuzzy cyclostationary model cases. We highlighted a performance degradation when the discharge frequency was beyond the theoretical threshold. This evaluation was performed via Monte Carlo simulations based on real observations. Finally, we presented real EMG signals results. The method has shown good results on intramuscular EMG signals.

Keywords: Electromyography, Source Separation, Motor Unit Decomposition, Cyclostationarity, Fuzzy Cyclostationarity

Laboratoire Pluridisciplinaire de Recherche en Ingénierie des Systèmes, Mécanique et Energétique (PRISME)
Université d'Orléans
8 Rue Léonard de Vinci - 45072 Orléans