



**HAL**  
open science

# Une approche multifractale pour la modélisation du micro-mélange à grand nombre de Schmidt

Jonathan Vahe

► **To cite this version:**

Jonathan Vahe. Une approche multifractale pour la modélisation du micro-mélange à grand nombre de Schmidt. Physique [physics]. INSA de Rouen, 2014. Français. NNT : 2014ISAM0023 . tel-01204633

**HAL Id: tel-01204633**

**<https://theses.hal.science/tel-01204633>**

Submitted on 24 Sep 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# THÈSE

présentée par

**Jonathan Vahe**

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen**

Discipline : Énergétique  
Spécialité : Mécanique des Fluides  
Formation doctorale : Sciences Physiques, Mathématiques  
et de l'Information pour l'Ingénieur  
Laboratoire d'accueil : UMR-CNRS-6614-CORIA

## **Une approche multifractale pour la modélisation du micro-mélange à grand nombre de Schmidt**

Directeur de thèse : Luc Vervisch

soutenue le 6 octobre 2014 devant le jury composé de :

Rapporteurs :

Laurent Gicquel      Senior Researcher (CERFACS)  
Serge Simoens      Directeur de Recherche au CNRS (LMFA/ECL)

Examineurs :

Guillaume Balarac      Maître de Conférences (Université de Grenoble, CNRS-LEGI)  
Jerzy Baldyga      Professeur (Warsaw University of Technology)  
Gerard Fernandez      Directeur R&D (PARALGO)  
Julien Réveillon      Professeur (Normandie Université, CNRS-CORIA)  
Luc Vervisch      Professeur (Normandie Université, CNRS-CORIA)



**Résumé : Une approche multifractale pour la modélisation du micro-mélange à grand nombre de Schmidt.**

Cette thèse est consacrée à la simulation du mélange de scalaires passifs à grand nombre de Schmidt (faible diffusion), au moyen d'un modèle de sous-maille structurel pour la Simulation aux Grandes Echelles (LES pour Large Eddy Simulation) reposant sur le caractère multifractal des champs de gradient en turbulence. L'analyse multifractale des champs de dissipation scalaire permet, à l'aide d'une description statistique des singularités, de prendre en compte l'intermittence inhérente à ces champs. Des simulations numériques directes du mélange à différents nombres de Schmidt supérieurs à l'unité sont mises en oeuvre. Une analyse multifractale au moyen de différentes méthodes est menée afin d'obtenir les spectres de singularités de la dissipation scalaire. Une implantation du modèle de sous-maille multifractal pour la vitesse, proposé par Burton et al., est d'abord réalisée dans le code volumes finis YALES2. Une modification du modèle équivalent pour les scalaires, reposant sur une cascade multiplicative pour reconstruire la dissipation scalaire de sous-maille, est proposée afin de prendre en compte le micro-mélange à grand nombre de Schmidt. Ce modèle de sous-maille est alors évalué au moyen de tests a priori.

Mots-clés : Micro-mélange - Simulation aux Grandes Echelles - Modèle de sous-maille - Intermittence - Multifractal

**Abstract : A multifractal approach for modeling turbulent micro-mixing at high Schmidt numbers.**

This thesis is focused on the simulation of turbulent mixing of passive scalars at high Schmidt numbers (low diffusivity). The modeling work is based on a structural subgrid-scale model for Large Eddy Simulation relying on the multifractal nature of gradient fields in turbulence. The multifractal formalism provides a mean to handle the characteristic intermittency of scalar dissipation fields through a statistical description of their singularities. Direct Numerical Simulations of mixing at several Schmidt numbers above unity are run with a dedicated code. Different methods are used to perform a multifractal analysis of scalar dissipation. The multifractal subgrid-scale model of Burton et al. for velocity is implemented in the Finite Volume code YALES2. A modification of the equivalent multifractal model for scalars is proposed to take into account micro-mixing at high Schmidt numbers. The model shows satisfactory results when tested a priori against direct simulations.

Keywords : Micro-mixing - Large Eddy Simulation - Subgrid-scale model - Intermittency - Multifractal



# Remerciements<sup>1</sup>

Tout d'abord je remercie Luc Vervisch, mon directeur de thèse, pour m'avoir proposé cette thèse qui a pris une direction inattendue, pour moi et sans doute pour lui.

Je remercie les membres du jury pour l'attention qu'ils ont bien voulu porter à mon travail, ainsi que tous les personnels du CORIA pour l'accueil au sein du laboratoire.

Merci à Vincent Moureau et Ghislain Lartigue pour leur compétence, leur disponibilité et leur enthousiasme.

Merci aux collègues thésards et post-doc du CORIA, de part et d'autre du paravent, dont je ne citerai pas tous les noms ici. Qu'ils sachent que je suis fier de les compter parmi mes potes. Parmi eux, un merci particulier à Guimch pour son aide et son amitié, ainsi que les conversations, pas que scientifiques mais toujours intéressantes, que l'on a pu avoir.

Je remercie énormément Gérard avec qui j'ai beaucoup appris, qui me soutient depuis quelques années et dont la générosité et la compétence scientifique ne sont plus à démontrer.

Enfin, merci à ma famille... pour tout.

---

1. Ces remerciements ne contiennent aucune blague ou anecdote amusante.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
1.1 Contexte de l'étude . . . . .	9
1.1.1 Le problème du micro-mélange . . . . .	9
1.1.2 Difficultés en modélisation : intermittence et anisotropie à petite échelle .	10
1.1.3 Difficultés en simulation numérique . . . . .	11
1.1.4 Vers une modélisation structurale basée sur l'analyse multifractale . . . .	12
1.2 Plan du manuscrit . . . . .	13
<b>2 Le micro mélange</b>	<b>15</b>
2.1 Scalaires passifs à grand nombre de Schmidt . . . . .	15
2.1.1 Généralités . . . . .	15
2.1.2 Phénoménologie . . . . .	18
2.1.3 Gradient scalaire et dissipation scalaire . . . . .	22
2.2 Micro-mélange et turbulence . . . . .	22
2.2.1 Bref aperçu de la turbulence selon Kolmogorov . . . . .	23
2.2.2 Anisotropie et intermittence . . . . .	26
2.2.3 Aspect fractal . . . . .	29
2.2.3.1 Objet fractal . . . . .	29
2.2.3.2 Extension à la multifractalité . . . . .	34
2.2.3.3 Description fractale de la turbulence . . . . .	39
2.3 Conséquences en simulation . . . . .	42
<b>3 Simulation aux grandes échelles</b>	<b>45</b>
3.1 Concept . . . . .	45
3.1.1 Equations . . . . .	45
3.1.2 Filtrage . . . . .	48
3.2 Micro-mélange et simulation . . . . .	49
3.2.1 Modèles LES . . . . .	49
3.2.2 Modélisation RANS . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Modèle multifractal</b>	<b>53</b>
4.1	Principe du modèle . . . . .	53
4.1.1	Caractère multifractal des champs de gradient . . . . .	53
4.1.2	Formulation du modèle . . . . .	54
4.1.3	Stabilité numérique et limiteur de cascade inverse . . . . .	60
4.2	Test sur la vitesse . . . . .	60
4.2.1	Implantation . . . . .	60
4.2.2	THI . . . . .	63
4.2.2.1	Hypothèses . . . . .	63
4.2.2.2	Résultats . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Modèle multifractal pour les scalaires</b>	<b>77</b>
5.1	Dérivation du modèle LES pour les scalaires à grand Schmidt . . . . .	77
5.1.1	Initiateur de la cascade . . . . .	78
5.1.2	Expression du scalaire de sous-maille . . . . .	80
5.1.3	Formulation du modèle . . . . .	82
5.1.4	Commentaires . . . . .	82
5.2	Simulation numérique directe . . . . .	82
5.2.1	Conditions de simulation . . . . .	82
5.2.2	Code utilisé . . . . .	83
5.2.3	Résultats sur le champ scalaire . . . . .	87
5.2.3.1	Champs instantanés . . . . .	87
5.2.3.2	Anisotropie aux petites échelles . . . . .	90
5.2.3.3	Intermittence . . . . .	92
5.2.3.4	Analyse multifractale . . . . .	93
5.2.4	Obtention des multiplicateurs . . . . .	99
5.3	Tests a priori du modèle LES . . . . .	104
5.3.1	Conditions de simulation . . . . .	104
5.3.2	Reconstruction des termes LES . . . . .	104
5.3.3	Résultats . . . . .	105
5.3.3.1	Vitesse . . . . .	106
5.3.3.2	Scalaire . . . . .	111
5.3.3.3	Discussion . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>125</b>
6.1	Conclusions . . . . .	125
6.2	Perspectives . . . . .	127
	<b>Bibliographie</b>	<b>134</b>
<b>A</b>	<b>Analyse multifractale</b>	<b>136</b>
A.1	Mesure . . . . .	136
A.2	Méthode des moments . . . . .	136
A.3	Méthode WTMM : Wavelet Transform Maxima Modulus . . . . .	137
A.3.1	Transformée en ondelette continue . . . . .	137
A.3.2	WTMM : Wavelet-Transform Modulus-Maxima . . . . .	138

# Nomenclature

## Lettres romaines

Symbole	Signification	Unités
$\underline{u}$	Vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
$U$	Vitesse caractéristique	$m.s^{-1}$
$L$	Longueur caractéristique, échelle intégrale	$m$
$P$	Pression	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$k$	Énergie cinétique	$m^2.s^{-2}$
$k$	Nombre d'onde	$m^{-1}$
$\mathcal{M}$	Multiplicateur de cascade	—
$\mathcal{I}$	Facteur d'intermittence	—
$\mathcal{S}^q$	Moment statistique centré normalisé d'ordre $q$	—
$\mathcal{S}_\varphi^q(\underline{r})$	Fonction de structure d'ordre $q$ de $\varphi$	—

## Lettres grecques

Symbole	Signification	Unités
$\phi$	Scalaire (normalisé)	—
$\Gamma$	Diffusivité moléculaire	$m^2.s^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
$\rho$	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
$\underline{\underline{\tau}}^*$	Tenseur des contraintes de sous-maille	$m^2.s^{-2}$
$\underline{\underline{\sigma}}^*$	Vecteur flux de sous-maille	$m.s^{-1}$
$\eta_\lambda$	Échelle de Taylor	$m$
$\eta_k$	Échelle de Kolmogorov	$m$
$\eta_b$	Échelle de Batchelor	$m$
$\varepsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique	$m^2.s^{-3}$
$\chi$	Taux de dissipation scalaire	$s^{-1}$
$\underline{\omega}$	Vorticité	$s^{-1}$
$\Omega$	Enstrophie	$s^{-1}$

## Nombres adimensionnels

Symbole	Signification	Expression
$Re$	Nombre de Reynolds	$Re = \frac{UL}{\nu}$
$Sc$	Nombre de Schmidt	$Sc = \frac{\nu}{\Gamma}$
$Pe$	Nombre de Peclet	$Pe = \frac{UL}{\Gamma} = Re.Sc$
$CFL$	Nombre de Courant-Friedrich-Levi	$CFL = \frac{Udt}{\Delta}$
$Fo$	Nombre de Fourier	$Fo = \frac{U\Gamma}{\Delta}$

## Indices et exposants

Symbole	Signification
0	Relatif à l'état initial
:	Vecteur (tenseur de rang 1)
⋮	Matrice (tenseur de rang 2)
$M$	Maximum
$m$	Minimum
$t$	Turbulent
$s$	"SubGrid-Scale" : contribution de sous-maille

## Opérateurs

Symbole	Signification
$\bar{\varphi}$	Filtre
$\tilde{\varphi}$	Filtre Test
$\langle \varphi \rangle$	Moyenne d'ensemble
$\nabla$	Opérateur gradient
$\nabla \cdot$	Opérateur divergence
$\nabla \times$	Opérateur rotationnel
$\nabla^2$ ou $\Delta$	Opérateur laplacien
$\varphi_{,i}$	Dérivée partielle
$\varphi_{;i}$	Dérivée covariante

## Acronymes

Terme	Signification
YALES2	"Yet Another LES Solver", solveur LES développé au CORIA
LES	Large-Eddy Simulation, simulation aux grandes échelles
DNS	Direct Numerical Simulation, simulation numérique directe

TVD Total Variation Diminishing, propriété de stabilité de schéma numérique

### Termes anglais non traduits

Terme	Signification
overshoot	Valeur, généralement non physique, représentant un dépassement local
skewness	Moment statistique centré normalisé d'ordre 3
flatness	Moment statistique centré normalisé d'ordre 4



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte de l'étude</b>	<b>9</b>
1.1.1	Le problème du micro-mélange	9
1.1.2	Difficultés en modélisation : intermittence et anisotropie à petite échelle	10
1.1.3	Difficultés en simulation numérique	11
1.1.4	Vers une modélisation structurelle basée sur l'analyse multifractale	12
<b>1.2</b>	<b>Plan du manuscrit</b>	<b>13</b>

---

### 1.1 Contexte de l'étude

#### 1.1.1 Le problème du micro-mélange

La modélisation et la compréhension fine des phénomènes contrôlant le mélange d'un scalaire passif dans un écoulement turbulent sont des problèmes encore ouverts [15]. De nombreux procédés industriels reposent sur le mélange de réactifs et bénéficient donc de la recherche dans ce domaine. La maîtrise des mécanismes d'interaction entre le mélange d'un scalaire passif, qui peut être assimilé à la concentration d'un des constituants chimiques du fluide considéré, et les processus chimiques est primordiale. Les particularités propres à la dynamique du mélange à petite échelle, ou *micro-mélange*, doivent être maîtrisées dans les configurations industrielles, comme souligné par Warhaft [87] :

*« if the engineer is going to progress in determining reaction rates, dispersion and mixing, then he or she must focus on the small scales and their morphology, because it is here that the strong departures from simple Gaussian behavior occur. The resulting skewed and intermittent fluctuations play a vital role in effecting the ultimate smearing and mixing at the molecular scale, where reactions and combustion occur. »*

En génie chimique ou génie des procédés par exemple, c'est la mise en contact à l'échelle moléculaire des réactifs qui conditionnera l'efficacité et la qualité de la réaction. Cette échelle spatiale, bien inférieure aux macro-échelles caractéristiques des écoulements dans lesquels se produisent ces réactions, nécessite une description précise des phénomènes mis en jeu. Le mélange intime des réactifs peut être réalisé par une homogénéisation due à la diffusion seule. Le phénomène physique mis en jeu est alors extrêmement simple et bien connu du point de

vue de la mécanique des fluides. Il est cependant très lent et, en conséquence, inexploitable du point de vue pratique. La solution consiste donc à apporter de l'énergie au système afin d'accélérer ce processus, ceci via un flux de masse convectif.

Pour accélérer le mélange, la méthode utilisée en pratique est des plus intuitive. De la même façon qu'il est nécessaire de "touiller" la grenadine dans de l'eau pour obtenir un "bon" mélange dans un temps suffisamment court, l'agitation turbulente est utilisée en génie des procédés lorsque l'on souhaite homogénéiser la composition d'un fluide. Caractérisée par une grande gamme d'échelles spatiales et temporelles, encore au cœur de nombreuses études, la turbulence est un sujet d'investigation vaste et riche. Dans certaines conditions, qui seront associées plus loin dans ce manuscrit aux grands nombres de Schmidt (*i.e.* une faible diffusion du scalaire) et de Reynolds (les fluctuations du champ de vitesse s'épanouissent sur une large étendue d'échelles spatiales et temporelles), la description de la dynamique du scalaire passif présente une complexité propre s'ajoutant à la difficulté inhérente à la description de la dynamique du champ de vitesse seul. Il est d'usage d'utiliser le terme de *micro-mélange* pour désigner ce champ de recherche en mécanique des fluides.

### 1.1.2 Difficultés en modélisation : intermittence et anisotropie à petite échelle

Durant cette thèse, on s'est placé dans le cadre de l'étude d'un écoulement indilatable et incompressible, à viscosité cinématique constante, susceptible de représenter le mélange liquide/liquide. Le coefficient de diffusion moléculaire du scalaire est aussi supposé constant. Malgré ces approximations, il est largement reconnu que l'équation de transport, pourtant linéaire, d'un scalaire passif dans un champ turbulent génère une dynamique quasi-pathologique, *i.e.* imprédictible par les théories statistiques pionnières de la turbulence homogène et isotrope, à savoir K41 (Kolmogorov et Obukhov, 1941) pour la vitesse, et KOC (Kolmogorov, Obukhov et Corrsin, 1960) pour le scalaire, en particulier aux petites échelles. Historiquement, l'échec de ces théories "classiques" de la turbulence a été associé aux notions statistiques d'*intermittence* et d'*anisotropie* à petites échelles.

L'intermittence est une propriété statistique caractérisant un phénomène non-gaussien, qui montre des bouffées d'activité : si l'on se place en un point de l'espace et que l'on mesure, par exemple, la concentration d'un scalaire dans un écoulement turbulent, on obtient un signal présentant de larges et soudaines fluctuations. Le poids statistique de ces événements rares et violents ("queues" des fonctions densité de probabilité) a généralement une contribution négligeable sur la moyenne, mais devient important au niveau des moments statistiques d'ordres plus élevés, dans le cas de phénomènes statistiquement non-gaussiens<sup>1</sup>. Cette propriété de la turbulence à petite échelle introduit donc une difficulté de taille en modélisation.

L'anisotropie du champ scalaire à petite échelle est également à l'origine d'interrogations. La persistance de l'anisotropie aux petites échelles apparaît comme héritée de l'anisotropie des grandes échelles, elles-mêmes dépendantes des conditions du forçage. Cette observation trou-

---

1. Pour un signal turbulent suivant une loi statistique gaussienne, la moyenne et la variance de ce signal (moments d'ordre 1 et 2) contiennent toute l'information statistique.

blante remet en question la validité de l'hypothèse d'isotropie nécessaire à l'établissement des théories K41 et KOC. Un cadre théorique plus général est nécessaire.

Ainsi, intermittence et anisotropie sont deux propriétés structurelles de la turbulence et du mélange à petite échelle. Il s'agit d'ingrédients essentiels qu'il est important d'intégrer à la modélisation. Dans le paragraphe suivant, on présente brièvement les difficultés inhérentes à la description numérique du micro-mélange.

### 1.1.3 Difficultés en simulation numérique

Pour des scalaires peu diffusifs, la dynamique du micro-mélange peut être à l'origine de la génération d'échelles de fluctuations spatiales et temporelles potentiellement beaucoup plus petites pour le scalaire que pour la vitesse, ce qui rend la simulation numérique de toutes les échelles (ou DNS pour *Direct Numerical Simulation*) inenvisageable dans la plupart des applications industrielles, même dans le cas de nombre de Reynolds très modérés. Les contraintes en termes de maillages (*i.e.* résolution spatiale) et de pas de temps d'intégration numérique (*i.e.* résolution temporelle) impliquent, en effet, un coût de calcul prohibitif. Pour contourner cette limitation, il est nécessaire d'introduire une couche de modélisation, qui apparaît donc comme un enjeu crucial en simulation numérique également, la qualité de la prédiction fournie par le code CFD (*Computational Fluid Dynamics*) étant bien entendue conditionnées par la validité des modèles. Deux stratégies peuvent alors être adoptées :

- selon la simulation aux grandes échelles (en anglais *Large Eddy Simulation*, ou LES), on résout les équations de Navier-Stokes sous leur forme filtrée en espace, cette opération de filtrage (ou de moyenne spatiale) faisant apparaître des termes supplémentaires qu'il est nécessaire de modéliser. Les solutions filtrées sont moins raides que celles obtenues par DNS et moins de mailles sont donc nécessaires pour les capter numériquement. En pratique ceci est réalisé en augmentant la viscosité du fluide d'un facteur proportionnel au nombre de Reynolds turbulent basé sur la taille de la cellule de calcul et les fluctuations de vitesse non-résolues. On réduit ainsi le coût de calcul, mais celui-ci demeure conséquent car la simulation préserve le caractère instationnaire de l'écoulement et cette approche n'a pas encore pleinement investi la Recherche et Développement. Cependant, avec l'essor des puissances de calcul, l'intégration de la LES dans les outils quotidiens de l'ingénieur apparaît comme évidente à plus ou moins brève échéance.
- selon l'approche *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*, ou RANS, on intègre numériquement les équations de Navier-Stokes moyennées (selon une moyenne de Reynolds fréquemment assimilée à une moyenne temporelle), ce qui appelle trois remarques. Tout d'abord, à l'instar de l'opération de filtrage pour la LES, la moyenne temporelle des équations de Navier-Stokes fait apparaître des termes à modéliser dans le système obtenu. Ici en pratique la viscosité est augmentée d'un facteur proportionnel au nombre de Reynolds turbulent de l'écoulement, basé sur l'échelle intégrale de longueur et toutes les fluctuations de vitesse. De plus, en RANS, rigoureusement, seule la solution stationnaire a du sens, les transitoires obtenus n'étant que des étapes sans représentativité physique, nécessaires au calcul. Partant de cette propriété, on a recours en RANS à des méthodes numériques permettant d'accélérer la convergence vers l'état stationnaire, et donc de réduire dras-

tiquement le coût de calcul<sup>2</sup>. Enfin, on conçoit qu'une solution moyennée en temps est plus régulière qu'une solution instantanée et nécessite donc moins de mailles pour être représentée numériquement (on n'entre pas ici dans les détails inhérents à la résolution des couches limites qui invalide partiellement ce constat). Le gain en terme de temps de calcul que permet l'approche RANS est donc substantiel, ce qui fait d'elle l'outil numérique privilégié pour l'industriel à l'heure actuelle.

Dans la suite de ce manuscrit, on se concentrera plus spécifiquement sur la modélisation LES du micro-mélange. Dans ce contexte, il existe deux grandes classes de modèles :

- Les **modèles fonctionnels** reproduisent le transfert d'énergie cinétique net des échelles résolues aux échelles de sous-maille. Ils rendent compte d'une cascade énergétique moyenne des grandes aux petites échelles. Les modèles fonctionnels les plus utilisés, notamment dans l'industrie, sont ceux basés sur le concept de viscosité tourbillonnaire (utilisé en RANS ou LES) introduit par Boussinesq en 1872. Leur validité repose sur un accord approximatif avec les données expérimentales qui, le plus souvent, se concentrent sur des grandeurs moyennes et leurs variances. Les moments statistiques d'ordres plus élevés ne sont pas pris en compte par ces modèles qui ne sont pas conçus pour rendre compte de l'intermittence de la turbulence développée. De plus, d'un point de vue plus théorique, dans un gaz dilué constitué de sphères dures, les particules s'entrechoquent de manière aléatoire, indépendante et ponctuelle et la description de ces interactions est faite en termes de probabilité de transition. Le libre parcours moyen de ces particules est très petit devant l'échelle de variation spatiale de la vitesse moyenne du gaz, et l'hypothèse de séparation d'échelle est justifiée. Dans ce paradigme, le concept de diffusion ou de viscosité émerge naturellement. Cependant, l'agitation turbulente résulte de l'interaction continue entre de nombreux tourbillons couplés les uns avec les autres par des mécanismes inertiels et visqueux selon l'équation de Navier-Stokes : l'analogie de Boussinesq est donc discutable.
- Les **modèles structurels** ont pour ambition de reconstruire les structures de sous-maille, de façon à modéliser leur impact sur la dynamique des champs résolus. Ainsi, ils apparaissent comme des outils indispensables à la modélisation haute-fidélité de la turbulence. Le modèle de similarité d'échelles de Bardina et al. [8] entre dans cette catégorie. Les auteurs supposent une similarité entre les plus petites échelles résolues et les plus grandes échelles de sous-maille. Par nature, la modélisation structurelle est donc beaucoup plus adaptée à la description statistique fine des propriétés structurelles de la turbulence aux petites échelles et plus spécifiquement, à la description de son intermittence.

#### 1.1.4 Vers une modélisation structurelle basée sur l'analyse multifractale

Les sous-sections 1.1.2 et 1.1.3 montrent qu'un modèle de sous-maille LES pour le micro-mélange construit à partir de moments statistiques d'ordres faibles, typiquement moyenne et variance, ne saurait représenter correctement le comportement intermittent de la quantité

---

2. Il existe également une déclinaison instationnaire de l'approche RANS appelée U-RANS (Unsteady-RANS), largement utilisée dans l'industrie, mais dont la validité est sujette à caution. On ne s'étendra pas sur ce sujet dans ce manuscrit.

physique considérée. De plus, dans ce cadre, une modélisation de type structurelle apparaît comme toute indiquée. Reste à déterminer une loi permettant de déduire de la structure du champ résolu celle du champ de sous-maille.

Le début des années 70 voit l'émergence d'une petite révolution dans le domaine des mathématiques, plus précisément en géométrie. Mandelbrot (1924-2010), mathématicien franco-américain, introduit en 1974 le concept fécond de *fractalité*, qui trouve très vite des applications dans de nombreux champs de la physique, et notamment en théorie et modélisation de la turbulence. La richesse particulière à la dynamique de la turbulence amène les chercheurs à généraliser l'idée de Mandelbrot, en définissant la *multifractalité*. Le nouveau formalisme qu'ils proposent offre un cadre théorique particulièrement puissant pour la modélisation de l'intermittence.

## 1.2 Plan du manuscrit

Partant de ces constats, le présent manuscrit s'organise comme suit :

1. La présente *introduction*
2. *Micro-mélange* : où les équations relatives à l'évolution d'un scalaire dans un écoulement turbulent sont présentées. La topologie et les phénomènes liés aux champs scalaires dans le cas de grands nombres de Schmidt sont abordés, ainsi que les grandeurs d'intérêt pour leur étude. Une analyse du point de vue de la turbulence est présentée, d'abord selon les théories K41, puis d'un point de vue multifractal après introduction des concepts d'intermittence et d'anisotropie.
3. *Simulation aux grandes échelles* : où le concept général de la LES est présenté, ainsi que des considérations sur le filtrage inhérent à celui-ci. Différents modèles existants pour la simulation du micro-mélange sont abordés.
4. *Modèle multifractal* : ce chapitre présente le concept d'un modèle LES multifractal pour la vitesse basé sur une cascade sur les champs d'ensrophie, puis sa dérivation formelle. Ce modèle est implanté dans un code de calcul CFD et des tests *a posteriori* sont présentés.
5. *Modèle multifractal pour les scalaires* : dans ce chapitre, un modèle LES similaire au précédent est dérivé pour simuler le mélange de scalaires à grand nombre de Schmidt. Les résultats d'une simulation numérique directe à plusieurs nombres de Schmidt (1 à 150) sont présentés. Le modèle LES lui-même est dérivé et discuté. Des tests *a priori* du modèle sont ensuite menés sur la configuration de la DNS. Enfin, quelques tests ultérieurs et applications envisageables sont présentés.
6. *conclusion*



# Chapitre 2

## Le micro mélange

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Scalars passifs à grand nombre de Schmidt</b>	<b>15</b>
2.1.1	Généralités	15
2.1.2	Phénoménologie	18
2.1.3	Gradient scalaire et dissipation scalaire	22
<b>2.2</b>	<b>Micro-mélange et turbulence</b>	<b>22</b>
2.2.1	Bref aperçu de la turbulence selon Kolmogorov	23
2.2.2	Anisotropie et intermittence	26
2.2.3	Aspect fractal	29
2.2.3.1	Objet fractal	29
2.2.3.2	Extension à la multifractalité	34
2.2.3.3	Description fractale de la turbulence	39
<b>2.3</b>	<b>Conséquences en simulation</b>	<b>42</b>

---

Ce chapitre présente quelques aspects du micro-mélange et plus généralement du mélange d'un scalaire passif dans un écoulement turbulent à masse volumique constante. La mise en évidence de l'interaction entre la turbulence et le micro-mélange suit une description plus phénoménologique, et les grandes lignes de la modélisation du micro-mélange sont présentées.

### 2.1 Scalars passifs à grand nombre de Schmidt

#### 2.1.1 Généralités

Le mélange d'un scalaire passif dans un écoulement est assimilé à l'homogénéisation d'un système binaire conservatif, le passage d'un état où les composants sont "séparés" à un état d'équilibre où ils sont indiscernables l'un de l'autre. Dans ce contexte, le scalaire peut représenter la concentration d'un produit chimique dans un fluide, la température, un taux d'humidité, etc... Le mélange se produit spontanément dès lors qu'il y a ségrégation, sous l'effet de la diffusion d'un produit dans l'autre, la vitesse de cette diffusion étant directement liée au gradient local de concentration et à un coefficient de diffusion moléculaire.

Ainsi, une goutte de grenadine déposée dans un verre d'eau sans vitesse initiale va diffuser

dans le verre jusqu'à homogénéisation de la concentration. La diffusion est un phénomène "lent", dont le temps caractéristique est  $\tau_d \approx L^2/\Gamma$ ,  $L$  étant une longueur caractéristique du milieu considéré et  $\Gamma$  la diffusivité du produit diffusant dans ce milieu. Pour la grenadine dans le verre, ce temps est de l'ordre de l'heure. La soif aidant, on préférera "touiller" la grenadine dans le verre, forçant le mélange en injectant de l'énergie dans le système.

C'est là le rôle de la turbulence dans les systèmes physiques où le mélange est présent ou souhaité : la dispersion d'un polluant atmosphérique est accélérée par l'effet convectif du vent, un mélangeur rotatif est ajouté aux réacteurs chimiques, afin de fournir l'énergie nécessaire à l'homogénéisation la plus rapide du système. Les réactions n'ont lieu que lorsque les réactifs sont mis en contact au niveau moléculaire, que ce soit dans les liquides ou les gaz. Pour contrôler la réaction, on doit connaître les phénomènes menant à ce mélange intime.

Pour décrire le mélange d'un scalaire passif  $\phi$  dans un écoulement, la résolution de l'équation de transport de ce scalaire est suffisante. Cette équation est linéaire en  $\phi$  :

$$\phi_{,t} + \underline{u} \cdot \nabla \phi - \Gamma \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)$$

où  $\underline{u}$  est le vecteur vitesse. Le champ scalaire est influencé par la vitesse au travers du terme de convection  $\underline{u} \cdot \nabla \phi$ , tandis que la diffusion se produit avec le coefficient  $\Gamma$ , la diffusivité moléculaire du scalaire (unités  $m^2.s^{-1}$ ), qui peut être différente de la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide.

Dans le contexte du mélange liquide/liquide d'un scalaire passif, étudié ici, les équations qui régissent l'évolution de la vitesse sont les équations de Navier Stokes incompressibles 2.2, dans lesquelles la viscosité  $\nu$  et la masse volumique  $\rho$  sont considérées constantes et homogènes, et les effets de compressibilité sont négligés (on considère les effets de compressibilité négligeables lorsque le nombre de Mach est faible, généralement  $Ma = U/a < 0.3$  où  $a$  est la célérité du son dans le milieu et  $U$  la norme d'une vitesse caractéristique  $\underline{U}$ ).

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\underline{u}_{,t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \nu \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0 \quad (2.2b)$$

L'adimensionalisation des équations 2.1 et 2.2b fait apparaître des nombres sans dimension permettant de paramétrer ces équations. En effet, en définissant les quantités sans dimension

$$x_i^+ = \frac{x_i}{d} \quad ; \quad \underline{u}^+ = \frac{\underline{u}}{U} \quad ; \quad t^+ = \frac{tU}{d} \quad ; \quad P^+ = \frac{P}{\rho U^2}, \quad (2.3)$$

il vient

$$\underline{u}_{,t^+} + \underline{u}^+ \cdot \nabla \underline{u}^+ - Re^{-1} \nabla^2 \underline{u}^+ + \nabla P^+ = 0 \quad (2.4)$$

$$\phi_{,t^+} + \underline{u}^+ \cdot \nabla \phi - (ReSc)^{-1} \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.5)$$

où

$$Re = \frac{Ud}{\nu} \quad (2.6)$$

$$Sc = \frac{\nu}{\Gamma} \quad (2.7)$$

Le nombre de Reynolds  $Re$  consiste en un rapport des effets convectifs sur les effets diffusifs. Un écoulement turbulent est caractérisé par une prédominance des effets convectifs sur une large gamme d'échelle  $d$ . L'activité turbulente augmente donc avec le nombre de Reynolds,  $Re = 1$  indiquant un équilibre entre les deux phénomènes conduisant à un écoulement laminaire. Le nombre de Peclet  $Pe = ReSc$  qui apparaît dans 2.5 renseigne sur l'action concomitante de la convection par le champ de vitesse  $\underline{u}$  et la diffusion du fait de  $\Gamma$ .

L'action de la diffusion est de dissiper les fluctuations locales, en lissant les gradients (le terme de diffusion s'écrivant en fonction du gradient  $\Gamma \nabla \cdot \nabla \phi$  ou  $\nu \nabla \cdot \nabla \underline{u}$ ). Pour la vitesse, ce phénomène intervient des plus grandes échelles de l'écoulement, où il est négligeable devant les interactions convectives non-linéaires, jusqu'aux plus petites échelles où l'énergie est dissipée en chaleur. Cette dernière échelle, dite échelle visqueuse, la plus petite où des fluctuations subsistent encore, est l'échelle de Kolmogorov  $\eta_k$ .

Lorsque l'on considère des scalaires à faible diffusivité, on a  $\Gamma < \nu$  et le nombre de Schmidt  $Sc$  devient supérieur à l'unité. Les structures du scalaire observées deviennent alors plus petites que celles de la vitesse, des gradients de scalaire subsistant à des échelles inférieures à celle de Kolmogorov. Pour décrire totalement le champ scalaire, il est alors nécessaire de descendre à des échelles très petites. Les exemples de scalaires à faible diffusivité incluent notamment bon nombre de réactifs chimiques en phase liquide. Cette problématique est donc relativement générique.

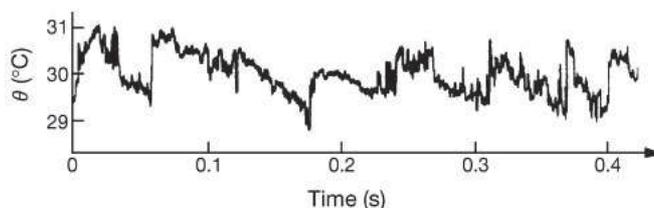
Une analyse dimensionnelle [10] fournit une échelle caractéristique de dissipation des gradients scalaires correspondant à la plus petite échelle du champ scalaire, dite échelle de Batchelor quand  $Sc > 1$  :

$$\eta_b = \eta_k / \sqrt{Sc} \quad (2.8)$$

Le *micro-mélange* concerne l'ensemble des phénomènes permettant d'atteindre l'homogénéité au niveau moléculaire. Il est concomitant au macro-mélange, associé aux phénomènes convectifs de taille caractéristique celle du dispositif (*échelle intégrale*  $L$ ), et au méso-mélange, associé aux échanges turbulents convectifs de la zone inertielle. A la fin, c'est toujours la diffusion moléculaire qui permet l'homogénéisation, mais les phénomènes complexes intervenant simultanément dans les trois régimes de mélanges conditionnent fortement l'efficacité du mélange. En effet, le micro-mélange est lié à la déformation des éléments fluides par les contraintes laminaires qui augmentent localement les gradients de scalaire, favorisant ainsi la diffusion aux petites échelles.

De cette efficacité dépendent dans bien des cas les propriétés des produits de réaction chimique (polymérisation, précipitation, produits de combustion tels que les NOx, qui dépendent des espèces radicalaires au nombre de Schmidt non unitaire, ...).

Une des particularités des champs de scalaire en écoulement turbulent est la présence de structures en "ramp-cliff" dans les enregistrements du scalaire, tant spatiaux que temporels. Ces structures, dont un exemple est présenté en Fig. 2.1, consistent en une évolution lente du scalaire suivie de forts changements, assimilables à des fronts scalaires. Ces structures en ramp-cliff sont fortement liées à des propriétés caractéristiques des petites échelles des champs scalaires en écoulement turbulent, à savoir l'*intermittence* et l'*anisotropie* [36, 66, 74].



**Fig. 2.1 :** Exemple d'évolution temporelle en un point de la température considérée comme un scalaire passif, montrant les structures ramp-cliff. Figure issue de [77].

### 2.1.2 Phénoménologie

Le mélange du scalaire résulte de l'action simultanée de la convection par le champ de vitesse et de la diffusion, augmentée par les gradients locaux de scalaire. Ces gradients sont liés à la structure du champ de vitesse transportant le scalaire. L'étude des gradients de vitesse renseigne ainsi sur la structure des champs de concentration en espèces chimiques et de température.

#### Structures en feuillets

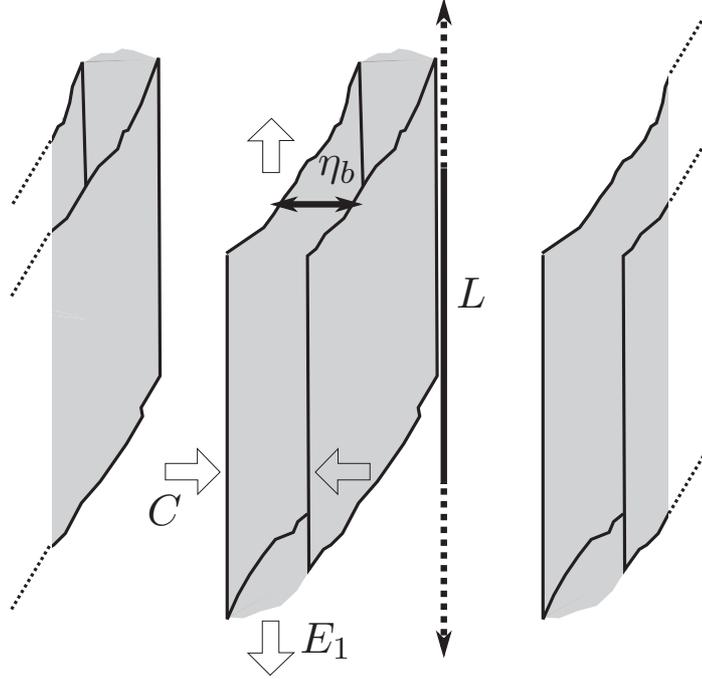
Un écoulement turbulent possède 3 directions principales correspondant aux vecteurs propres du tenseur gradient de vitesse. Dans le cas où les valeurs propres sont toutes réelles, deux directions correspondent en général à un allongement des structures fluides, et une correspond à une compression de celles-ci. Ceci peut être vu en admettant que les directions principales sont alignées avec les axes de l'espace cartésien  $\mathbb{R}^3$ , les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes étant alors diagonales. Par incompressibilité, il vient nécessairement que l'une de ces composantes est négative, l'autre positive et l'une a un signe indéterminé [74]. Il s'avère que cette dernière est généralement positive.

Sous l'effet de ces contraintes, dans les zones de déformation où les valeurs propres sont réelles, les structures scalaires aux échelles proches de celle de Kolmogorov sont allongées dans une direction, subissent un rapide rétrécissement dans une autre et sont légèrement épaissies dans une dernière. Des structures en feuillet sont formées (Fig. 2.2), de longueur caractéristique la longueur intégrale  $L$ . Elles sont caractérisées par de très forts gradients dans la direction d'étrécissement, qui favorisent la diffusion du scalaire dans cette direction. La diffusion diminue les gradients. Un équilibre est trouvé entre l'étrécissement lié à la vitesse et l'épaississement dû à la diffusion. Une longueur caractéristique émerge alors : l'échelle de Batchelor  $\eta_b$  [10]. C'est la plus petite épaisseur sur laquelle se développent les gradients de vitesse.

En même temps que ces structures sont formées, elles sont entraînées par les tourbillons qui les courbent et les replient, avec des longueurs caractéristiques de l'ordre de  $10\eta_k$  (taille des petits tourbillons stables).

Le plissement de ces feuillets est dépendant de la vorticité et de la turbulence locales, ainsi que du nombre de Schmidt. Dans la direction normale des feuillets, le scalaire varie fortement, présentant des gradients importants.

Du fait de l'élongation des structures tourbillonnaires dans une direction, du fluide est incorporé depuis l'environnement vers ces structures dans les directions normales à la direction d'allongement (cf. Fig. 2.3). Ce phénomène est appelé *engouffrement* (*engulfment*). Le problème



**Fig. 2.2 :** Organisation du champ scalaire en feuillets sous l'effet des déformations par le champ de vitesse. La direction principale  $E_1$  du tenseur des contraintes correspond à une forte élongation,  $C$  est une direction de compression par le champ de vitesse. Les feuillets ont une extension caractéristique de l'ordre de l'échelle intégrale  $L$  et une épaisseur caractéristique  $\eta_b$ , l'échelle de Batchelor.

peut alors être modélisé par un écoulement 1D centripète dont la vitesse serait

$$\underline{u} = u_r \underline{r} = -\Psi r \underline{r} \quad (2.9)$$

où  $\Psi$  est une constante qui peut être reliée à un taux de déformation visqueux [6], et se comporte comme l'inverse du temps caractéristique de Kolmogorov :

$$\frac{1}{\Psi} \sim \tau_k = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (2.10)$$

où  $\varepsilon$  est le taux de dissipation moyen de l'énergie cinétique turbulente (cf. 2.2).

L'estimation de l'échelle de Batchelor peut ainsi être trouvée :

$$\eta_b \sim \left(\frac{\Gamma}{\Psi}\right)^{1/2} = \frac{\eta_k}{\sqrt{Sc}} \quad (2.11)$$

avec  $\eta_k \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ .

Le temps caractéristique de formation d'une telle structure est alors

$$\tau_{diff} \sim -\frac{1}{\tau_k} \ln\left(\frac{\eta_b}{\eta_k}\right) \sim \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \ln(Sc) \quad (2.12)$$

Les signaux en ramp-cliff observés lors de l'advection-diffusion du scalaire sont liés à ce couplage entre le champ de contrainte local et le gradient scalaire. Les cliffs correspondent

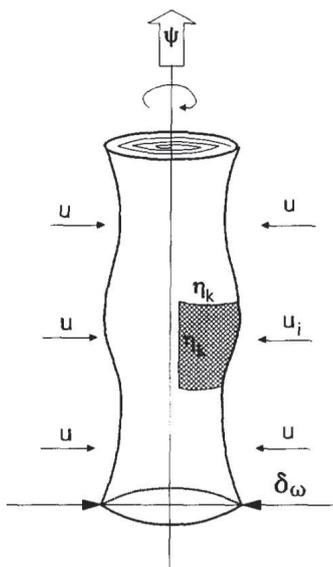


Fig. 2.3 : Entraînement depuis l'environnement des tubes tourbillonnaires. Tiré de [6]. La longueur caractéristique  $\delta_\omega$  est celle des petits tourbillons stables, i.e.  $\delta_\omega \sim 10\eta_k$ .

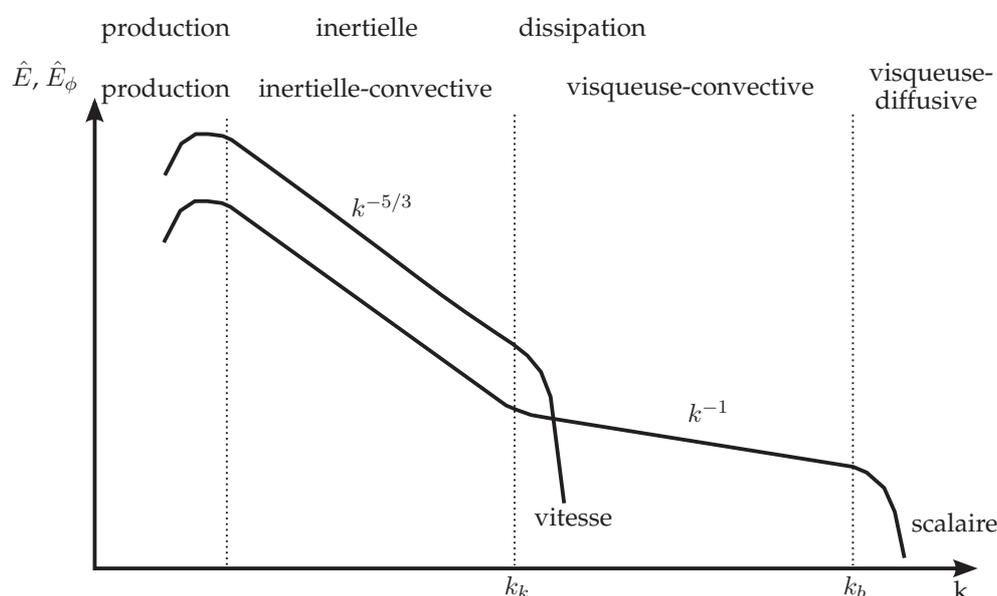
à de forts gradients d'un certain signe (positifs dans la suite) et les rampes à de faibles gradients de signe opposé (négatifs). L'observation des fonctions densité de probabilité des gradients de scalaire en présence d'un gradient moyen [74] montrent que les gradients positifs de grande amplitude sont associés à des régions où la déformation est importante (vecteurs propres réels du tenseur des contraintes) tandis que les gradients négatifs de scalaire apparaissent lorsque déformation et vorticité sont d'égale importance (valeurs propres réelle et complexes conjuguées). Les fronts (gradients positifs forts) sont donc créés dans la situation décrite précédemment, où les déformations donnent naissance aux structures en feuillet, tandis que les rampes (gradients négatifs plus faibles) apparaissent derrière ces structures du fait de l'action simultanée des déformations et de la rotation par le champ de vitesse. Même à Schmidt petit, les structures en feuillet existent toujours. Dans ce cas cependant, elles sont plus rapidement dissipées par la diffusion qui contrebalance l'affinement de ces structures [15].

Bien que la réduction de l'anisotropie aux petites échelles quand le nombre de Schmidt augmente soit encore sujette à étude, elle est généralement associée au fait que les fronts scalaires (gradients forts) sont moins susceptibles d'être réduits dans les zones de vorticité/déformation. Quand la diffusivité du scalaire est faible, les structures en feuillet sont moins dissipées et sont donc plus susceptibles de perdurer dans les zones de forte vorticité. Ces structures auront alors tendance à s'enrouler sur elles-mêmes, créant des tubes et conduisant à la présence de gradients forts tant négatifs que positifs, responsables de la réduction de l'anisotropie. On observera plutôt pour les grands Schmidt des pics de gradient plus symétriques en espace, constituant des singularités associées à une forte intermittence.

La présence de fluctuations du scalaire aux échelles plus petites que celle de Kolmogorov est également visible sur le spectre de l'énergie du scalaire en turbulence homogène. La Fig. 2.4 compare les spectres dans l'espace de Fourier de l'énergie cinétique  $\mathbf{k} = \frac{1}{2}u^2$  et de l'énergie du scalaire  $\mathbf{k}_\phi = \frac{1}{2}\phi^2$  en turbulence homogène isotrope.

Classiquement le spectre de la vitesse fait apparaître trois zones :

- la zone de *production* correspond aux grandes échelles, de l'ordre de celle du dispositif et de l'échelle intégrale  $L$ . C'est à ces échelles que l'énergie est produite, les grandes structures dépendant de la géométrie du dispositif.
- la zone *inertielle* est dominée par les effets convectifs qui transfèrent l'énergie vers les petites échelles, avec un taux de transfert constant  $\langle \varepsilon \rangle$ . C'est cette hypothèse d'équilibre, chaque tranche  $[k, k+dk]$  du spectre recevant l'énergie des échelles supérieures et la redistribuant aux échelles inférieures à un taux identique, qui a permis de déduire la fameuse forme en  $k^{-5/3}$  de la zone inertielle. Cette zone correspond aux échelles supérieures à celle de Kolmogorov  $k < k_k$ .
- la zone *dissipative* correspond aux échelles où la dissipation visqueuse de l'énergie prédomine. Les fluctuations de vitesse disparaissent et leur énergie est convertie en chaleur. Cette zone correspond à  $k > k_k$ .



**Fig. 2.4 :** Spectres  $\hat{E}$  et  $\hat{E}_\phi$  en échelle log-log de l'énergie cinétique  $k$  et de l'énergie du scalaire  $k_\phi$  dans l'espace de Fourier. Le nombre d'onde  $k$  est homogène à l'inverse d'une longueur,  $k \sim \frac{1}{\eta}$ . Les différentes zones du spectres sont décrites en haut pour la vitesse et en dessous pour le scalaire [41].

Le spectre du scalaire à grand Schmidt est plus complexe [10, 41, 44] :

- la zone de *production*, similaire à celle de la vitesse, correspond à la création de structures dont la taille est de l'ordre de l'échelle intégrale  $L$ .
- la zone *inertielle-convective*, pour  $k < k_k$ , a la même pente  $-5/3$  que la zone inertielle pour la vitesse. En effet, le transfert d'énergie vers les petites échelles se fait essentiellement ici par convection. La cascade de tourbillons de plus en plus petits transfère donc l'énergie du scalaire de la même façon que l'énergie cinétique, les poches de scalaire étant déformées et brisées en poches plus petites par l'action du champ de vitesse. La diffusion est négligeable par rapport aux effets convectifs dans cette zone.
- dans la zone *visqueuse-convective*, pour  $k_k < k < k_b$ , la diffusion moléculaire du scalaire

commence à gagner en importance. La dynamique reste essentiellement contrôlée par les déformations laminares liées à la viscosité du fluide, jusqu'à un équilibre avec la diffusion moléculaire pour  $\eta \sim \eta_b$ . C'est dans la zone visqueuse-convective que sont formés les feuillets scalaires décrits précédemment. Le spectre d'énergie est proportionnel à  $k^{-1}$  dans cette zone [41].

- la zone *visqueuse-diffusive* enfin ( $k > k_b$ ) est dominée par des phénomènes de diffusion moléculaire, qui dissipent les fluctuations petites échelles du scalaire. Le spectre est considéré comme variant en  $\exp(-k)$  dans cette zone.

### 2.1.3 Gradient scalaire et dissipation scalaire

Si les équations d'évolution de la vitesse contiennent un terme non-linéaire explicitement responsable des transferts d'énergie entre les échelles, l'équation de transport du scalaire est quant à elle linéaire. Or on observe bien sur le spectre du scalaire à grand Schmidt un transfert d'énergie entre les échelles même aux échelles inférieures à celles de la vitesse (partie visqueuse convective).

L'interaction du champ de vitesse avec le champ scalaire et l'influence des gradients de vitesse sur ceux du scalaire, qui conditionne la création des structures en feuillet décrites précédemment, est visible à travers l'équation de transport de la *dissipation scalaire*. La dissipation scalaire  $\chi$  est une quantité liée aux petites échelles responsable de la disparition des fluctuations du scalaire. Elle apparaît dans l'équation de transport de l'énergie scalaire  $\mathbf{k}_\phi = 1/2\phi^2$ , obtenue en multipliant 2.1 par  $\phi$  :

$$\mathbf{k}_{\phi,t} + \underline{u} \cdot \nabla \mathbf{k}_\phi - \Gamma \nabla^2 \mathbf{k}_\phi - \chi = 0 \quad (2.13)$$

La dissipation scalaire dépend des gradients locaux de scalaire :

$$\chi = \Gamma \nabla \phi \cdot \nabla \phi \quad (2.14)$$

La dissipation scalaire est responsable de la disparition des fluctuations aux petites échelles, son importance est donc cruciale dans l'étude du micro-mélange.

L'interaction entre les gradients du champ de vitesse et ceux du champ scalaire, décrite dans la section précédente, est visible à travers l'équation de transport de la dissipation scalaire :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = - \underbrace{\Gamma g_i S_{ij} g_j}_{(1)} + \underbrace{\Gamma \nabla^2 \chi}_{(2)} - \underbrace{2\Gamma^2 (\nabla \underline{g})^2}_{(3)} \quad (2.15)$$

où

$$\underline{g} = \nabla \phi \quad \text{et} \quad \underline{S} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)$$

Dans 2.15, le terme (1) correspond à l'étirement par le gradient de vitesse, et donc au couplage du champ scalaire avec le champ de vitesse, le terme (2) correspond au transport diffusif et le terme (3) à la destruction des fluctuations de dissipation par la diffusivité moléculaire.

## 2.2 Micro-mélange et turbulence

La dynamique du scalaire est fortement lié à la turbulence de l'écoulement dans lequel il évolue, mais possède ses spécificités propres [77]. A la complexité inhérente à la description de

la turbulence s'ajoute celle liée aux grands nombres de Schmidt. On décrit dans cette section l'évolution de la modélisation de la turbulence. Une partie importante de la description des modèles de turbulence est une reproduction (très simplifiée !) du livre de Frisch [33].

Cette section propose d'abord une description succincte de la turbulence telle qu'initialement décrite par Kolmogorov. Le concept d'intermittence, qui fait défaut à cette théorie, est introduit, ainsi que celui d'anisotropie des petites échelles dans les champs scalaires. Les notions de fractale et de multifractale sont ensuite présentées. Les modèles de turbulence reposant sur ces concepts sont décrits en fin de section.

### 2.2.1 Bref aperçu de la turbulence selon Kolmogorov

Cette section concerne les travaux pionniers, et les plus connus, de Kolmogorov, datant de 1941 et regroupés sous le nom de *théorie K41*. Ils consistent en une description statistique de la turbulence homogène isotrope, encore utilisée aujourd'hui dans de nombreux modèles. Le pendant de cette théorie sur la vitesse, mais appliquée au scalaire, est attribué à Kolmogorov, Obukhov et Corrsin et porte le nom de *théorie KOC*.

La turbulence est caractérisée par une multiplicité d'échelles spatiales et temporelles. La dynamique de la turbulence est donc très complexe. Les modélisations de la turbulence s'attachent donc à décrire celle-ci *statistiquement*, c'est à dire en terme de *fonctions densité de probabilité* (pdf). Une description statistique correcte de la turbulence peut ensuite être utilisée en simulation pour créer des modèles d'évolution fidèles. En outre, les expériences semblent démontrer l'existence d'une certaine universalité statistique des écoulements à haut  $Re$  et haut  $Sc$ .

Pour décrire la pdf  $p(\varphi)$  d'une quantité  $\varphi$ , on utilise ses *moments statistiques d'ordre  $q$* , dont la définition est rappelée ici :

$$\mathcal{M}^q(\varphi) = \langle \varphi^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi) \varphi^q d\varphi \quad (2.16)$$

Connaître tous les moments d'une pdf revient à connaître cette pdf, donc à connaître statistiquement le champ  $\varphi$ .  $\langle \cdot \rangle$  est la moyenne statistique.

La description statistique de la turbulence se fait notamment par la description de ses *fonctions de structure*. La fonction de structure d'ordre  $q$  d'une quantité  $\varphi$  est une statistique en 2 points définie comme le moment de l'incrément de  $\varphi$ . Les incréments de  $\varphi$  sont définis comme

$$\Delta_{\underline{r}}\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x} + \underline{r}) - \varphi(\underline{x}) \quad (2.17)$$

où  $\underline{r}$  est l'incrément de longueur, et la fonction de structure est donc

$$\mathcal{S}_{\varphi}^q(\underline{r}) = \langle (\Delta_{\underline{r}}\varphi)^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\Delta_{\underline{r}}\varphi) (\Delta_{\underline{r}}\varphi)^q d\Delta_{\underline{r}}\varphi \quad (2.18)$$

Les théories de la turbulence comme K41 s'attachent à modéliser les incréments de vitesse ( $\varphi = \underline{u}$ ) tandis que la théorie KOC applique les mêmes arguments aux incréments du scalaire ( $\varphi = \phi$ ). Dans la suite on parlera essentiellement de la théorie K41. Le cadre de ces théories étant une turbulence homogène et isotrope, les incréments et leurs moments pourront être réécrits en 1 dimension  $\Delta_r\varphi(x)$  et  $\mathcal{S}_{\varphi}^q(r)$ .

La théorie de Kolmogorov se place dans le cadre de la turbulence statistiquement homogène et isotrope. Elle repose sur une description des transferts d'énergie cinétique dans la zone inertielle, c'est à dire sur des échelles comprises entre la longueur intégrale  $L$  et l'échelle de Kolmogorov  $\eta_k$ . Pour décrire ces transferts, K41 utilise le principe introduit par Richardson [71] d'une cascade multiplicative pour l'énergie, des grandes échelles vers les petites échelles. Dans ce modèle, illustré en Fig. 2.5, l'énergie est injectée aux grandes échelles, typiquement au niveau de l'échelle intégrale  $L$ , et transférée à chaque étape  $i$  de la cascade des échelles  $r^i L$  vers les échelles  $r^{i+1} L$  ( $0 < r < 1$ ) à un taux constant égal au taux moyen de dissipation de l'énergie  $\langle \varepsilon \rangle$ , jusqu'à l'échelle  $\eta_k$  où l'énergie est dissipée par les mécanismes visqueux avec le même taux. Le taux de dissipation de l'énergie cinétique est défini comme

$$\varepsilon = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.19)$$

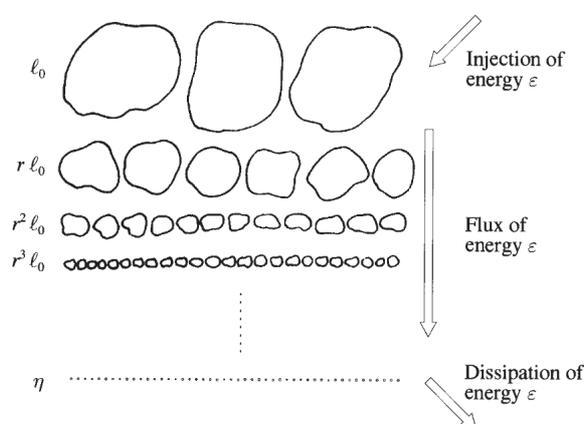


Fig. 2.5 : cascade de Richardson. Figure issue de [33].  $l_0$  est ici la longueur intégrale  $L$ .

Deux hypothèses sont à la base de cette représentation :

- similarité d'échelle :  $r$  est supposé constant tout au long des étapes de la cascade,
- interactions locales : les échelles  $r^i L$  n'interagissent qu'avec les échelles  $r^{i+1} L$  et  $r^{i-1} L$ .

L'hypothèse de similarité d'échelle implique que l'activité de la turbulence à chaque échelle recouvre l'intégralité de l'espace, et ce même aux plus petites échelles, les structures de volume  $V$  représentées donnant naissance à  $n$  structures (ici  $n = 2$ ) de volume  $V/n$ .

L'hypothèse des interactions locales implique une décorrélation des grandes et des petites échelles. Les petites échelles sont alors supposées *universelles*, ne dépendant plus des mécanismes de production à grande échelle.

Plus formellement, les hypothèses de la théorie K41 sont les suivantes : dans la limite des  $Re$  infinis,

- toutes les symétries possibles des équations de Navier-Stokes sont rétablies statistiquement à petites échelles et loin des frontières du domaine physique ;
- l'écoulement est auto-similaire aux petites échelles, c'est à dire qu'il n'existe qu'un unique  $h$  tel que :

$$\Delta_{\lambda r} u(x) = \lambda^h \Delta_r u(x) \quad (2.20)$$

qui peut être écrit sous la forme d'une loi d'échelle

$$\frac{\Delta_r u}{u_L} \sim \left(\frac{r}{L}\right)^h \quad (2.21)$$

où  $u_L$  est la vitesse associée à l'échelle intégrale  $L$ .

– le taux moyen de dissipation de l'énergie par unité de masse est fini et strictement positif

A l'aide du principe de cascade et d'arguments dimensionnels, la théorie K41 permet de déduire, à partir des hypothèses précédentes<sup>1</sup> une loi d'échelle pour les fonctions de structure :

$$\frac{S_u^q(r)}{u_L^q} \sim \left(\frac{r}{L}\right)^{\zeta_q} \quad (2.22)$$

avec

$$\zeta_q^{K41} = \frac{q}{3} \quad (2.23)$$

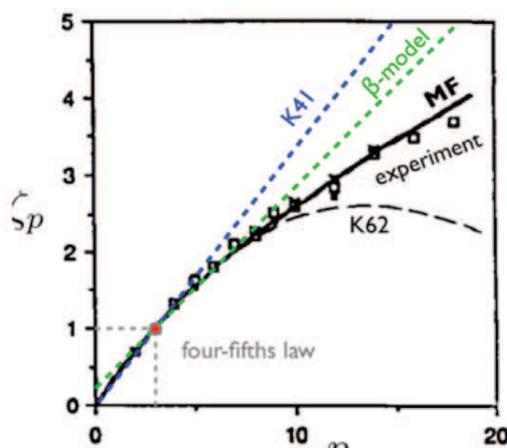


Fig. 2.6 : spectres  $\zeta_q$  des exposants des fonctions de structure  $S_u^q(r)$ .

L'ensemble des valeurs  $\zeta_q$  est appelé *spectre des exposants des fonctions de structure*. Reproduire correctement le spectre expérimental est l'enjeu de tous les modèles de turbulence présentés dans cette section. A ce titre, la Fig. 2.6 montre les limites de la théorie K41. Le spectre  $\zeta_q$  obtenu expérimentalement pour des ordres  $q$  jusqu'à 20 est comparé au spectre linéaire prédit par K41, ainsi que par d'autres modèles constituant des raffinements successifs des travaux de Kolmogorov, et qui seront présentés en 2.2.3.3. Les fonctions de structure d'ordre faible sont correctement représentées jusqu'à  $q = 4$ , mais une déviation importante est observée pour les moments d'ordre plus élevé.

On verra que la raison principale de l'échec de la théorie de Kolmogorov à prédire les moments élevés est l'intermittence, décrite en 2.2.2.

Quelques informations supplémentaires liées à la théorie K41 et qui seront utilisées dans la suite sont données ci-après.

1. L'hypothèse d'auto-similarité stricte joue ici un rôle central. C'est elle qui sera remise en question dans les descriptions suivantes de la turbulence

- L'échelle dissipative de Kolmogorov, supposée la plus petite échelle de l'écoulement, est évaluée comme :

$$\eta_k \sim \left( \frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.24)$$

- Historiquement on utilise, pour construire un nombre de Reynolds représentatif de l'écoulement, l'échelle de Taylor  $\eta_\lambda$  définie à l'aide du rapport :

$$\eta_\lambda^2 = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \rangle} \quad (2.25)$$

En turbulence isotrope, on peut montrer que l'échelle de Taylor vaut :

$$\eta_\lambda = \left( \frac{15 \langle u^2 \rangle \nu}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

Le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor et la valeur RMS de la vitesse est :

$$Re_\lambda = \sqrt{\frac{15}{\nu \langle \varepsilon \rangle}} \langle u^2 \rangle \quad (2.27)$$

- A partir de la loi d'échelle 2.22 et de 2.23, on retrouve la fameuse progression en  $k^{-5/3}$  du spectre de l'énergie cinétique dans la zone inertielle, pour  $q = 2$ , par une transformée de Fourier. L'expression exacte donnée par Kolmogorov est :

$$\hat{E}(k) = C \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.28)$$

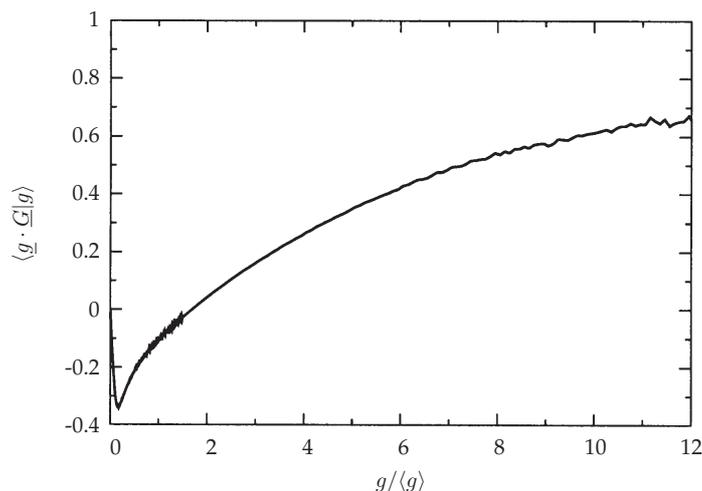
où  $C$  est une constante *universelle*. Si la loi en  $k^{-5/3}$  est en excellent accord avec l'expérience, c'est l'universalité de la constante qui a très vite été remise en question. Cette remarque est bien sûr également valable pour la théorie KOC, qui prévoit une loi en  $k^{-5/3}$  pour l'évolution du spectre d'énergie du scalaire dans la zone inertielle-convective.

## 2.2.2 Anisotropie et intermittence

### Anisotropie du champ scalaire

L'isotropie correspond à l'absence de direction privilégiée dans un écoulement. Même dans le cas où une direction privilégiée existe aux grandes échelles, le champ de vitesse est supposé présenter une isotropie croissante à mesure que l'on descend vers les petites échelles de la cascade turbulente, l'énergie se répartissant avec une égale probabilité selon les 3 directions à chaque itération du transfert d'énergie. De la même façon, on pourrait s'attendre à ce que le champ scalaire présente la même isotropie croissante aux petites échelles. Il s'avère que l'anisotropie persiste bien plus longtemps dans les petites échelles du champ scalaire. Ce phénomène est fortement lié et visible à travers les structures en ramp-cliff.

On peut voir en Fig. 2.7 que dans le cas où un gradient de scalaire existe au niveau des grandes échelles de l'écoulement, du fait de la géométrie des conditions limites par exemple, les gradients locaux du scalaire de norme importante ont une tendance plus marquée à s'aligner avec ce gradient moyen. Les gradients plus faibles sont quant à eux plus isotropes. Ceci caractérise l'anisotropie des champs de gradient scalaire à petite échelle.



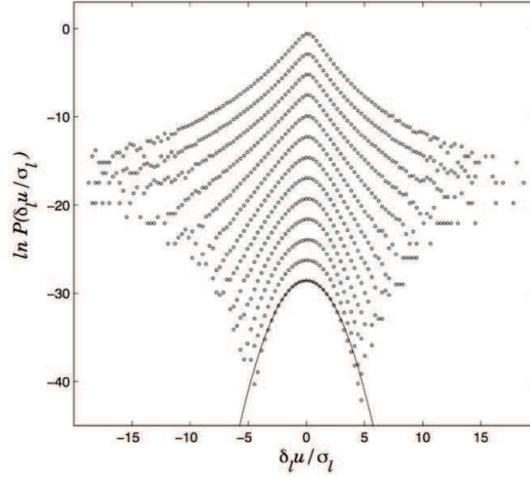
**Fig. 2.7 :** moyenne du produit scalaire du gradient de scalaire local par le gradient scalaire moyen  $G$  de forçage, conditionnée par la valeur de la norme du gradient local. 1=alignement, 0=isotropie. THI forcée à  $Re_\lambda = 85$ ,  $Sc = 0.7$ . Figure issue de [15].

La persistance de l'anisotropie aux petites échelles diminue quand augmente le nombre de Schmidt [15]. En effet, on a vu que les gradients de scalaire à petite échelle de norme importante sont créés dans les zones où prédominent les déformations laminaires. Quand le nombre de Schmidt est faible, les zones où la vorticité domine favorisent la dissipation des gradients par diffusion. Quand le nombre de Schmidt augmente, la diminution de la diffusivité du scalaire inhibe la dissipation des gradients, augmentant leur propension à s'enrouler sous l'effet des tourbillons. L'enroulement implique alors la présence de forts gradients orientés dans toutes les directions, produisant des pdf de gradient plus symétriques à grand Schmidt. Ce phénomène est explicité en section 5.2.3.2.

### Intermittence

L'intermittence aux petites échelles, qui remet en question la théorie d'universalité de Kolmogorov, a été mise en évidence en 1949 par Batchelor et Townsend [11]. Ils calculent les dérivées successives du champ de vitesse et observent dans ces champs des zones d'activité forte côtoyant des zones calmes, cette tendance augmentant avec l'ordre de la dérivée, le comportement des champs devenant ainsi de plus en plus "binaire". Statistiquement, les zones calmes correspondent à des événements dont l'ordre de grandeur est proche de la moyenne, tandis que les zones d'activité correspondent à des "accidents", des événements d'amplitude pouvant être supérieure de plusieurs ordres de grandeur à la moyenne [27] caractérisant des explosions locales d'activité de la turbulence.

La turbulence pleinement développée est alors caractérisée par des statistiques non-gaussiennes des champs de gradient aux petites échelles. La traîne de ces pdf, qui décroit moins rapidement que la gaussienne, indique la présence de ces événements rares mais catastrophiques. Cette propriété est visible en Fig.2.8 pour les incréments de vitesse. Le taux de dissipation montre également une forte intermittence [54].



**Fig. 2.8** : fonctions densité de probabilité des incréments de vitesse longitudinaux  $\Delta_l u$  obtenus expérimentalement à  $Re_\lambda = 300$  pour différents incréments de longueur  $l$ . De haut en bas,  $l/L$  varie de 0.00092 à 1. La gaussienne de même variance pour  $l = L$  est tracée en trait continu pour comparaison. Figure issue de [21].

Le champ de dissipation du scalaire passif est plus intermittent encore que celui de l'énergie cinétique [65]. Des statistiques non gaussiennes sont observées même quand le champ de vitesse est gaussien (modèle de Kraichnan) [34], preuve que le champ scalaire peut être intermittent même en l'absence d'intermittence dans le champ le convectant. L'intermittence spatiale du champ scalaire à grand nombre de Schmidt est visible dans les fronts qui le caractérisent, qui peuvent être considérées comme des quasi-discontinuités du champ scalaire. Ces fronts correspondent aux événements rares de plus grande amplitude, dont la fréquence augmente avec le nombre de Schmidt [20].

L'intermittence correspond à des événements éloignés de la moyenne, mais elle peut avoir une influence importante. En termes spectraux, on verra par exemple qu'elle modifie la forme du spectre en zone inertielle prévue par Kolmogorov

$$\hat{E}(k) \sim \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.29)$$

en

$$\hat{E}(k) \sim \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} (kL)^{-\alpha} \quad (2.30)$$

Cette modification introduit en premier lieu une dépendance à l'échelle intégrale  $L$  qui peut être préjudiciable aux mises à l'échelle par similitudes<sup>2</sup>. L'exposant  $\alpha$  est cependant très faible et cette modification peut être négligée pour les grandes échelles  $k \sim L^{-1}$ . Pour les petites échelles proches de Kolmogorov en revanche, la différence peut être importante. Le micro-mélange par exemple, à Schmidt élevé, est fortement influencé par l'intermittence interne du champ de vitesse.

2. un modèle réduit expérimental en laboratoire d'un procédé industriel produira une structure de la turbulence différente, même à nombre de Reynolds équivalent.

L'intermittence est caractérisée par une flatness non nulle des pdf (moment statistique d'ordre 4), et de façon générale par des fonctions de structure d'ordre pair élevé qui restent importantes.

Le *facteur d'intermittence*, noté  $\mathcal{I}$ , fournit un moyen spatial de mesurer cette intermittence. Formellement, il est défini pour une condition  $A$  comme :

$$\mathcal{I} = \langle \gamma \rangle \quad (2.31)$$

où la fonction caractéristique  $\gamma$  de la condition  $A$  est définie par :

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } A \text{ est vraie en } x, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Sous une hypothèse d'ergodicité, le facteur peut donc représenter la probabilité d'occurrence d'une condition  $A$  dans un volume donné.

Sreenivasan dans [78] fournit une description plus imagée de ce facteur pour la dissipation, qui présente également l'avantage de faire le lien avec les modèles de turbulence présentés ci-après : sur un domaine cubique divisé en  $n$  sous-cubes, la dissipation ne sera active que dans un nombre  $m$  d'entre-eux. Le facteur d'intermittence, défini comme la fraction de l'espace où la dissipation est active, vaudra alors :

$$\mathcal{I} = \frac{m}{n} \quad (2.33)$$

Cette modélisation n'est cependant pas réaliste, l'activation de la dissipation n'étant naturellement pas binaire. L'idée est donc de considérer que pour chaque sous-cube de taille  $l$ , contenant une dissipation donnée  $\varepsilon_l$ , les sous-cubes de longueur  $l/2$  verront leur dissipation multipliée par un facteur  $g$ ,  $g$  étant une variable aléatoire avec  $\langle g \rangle = 1$ .

La notion d'intermittence a remis en question les théories K41 et KOC, et notamment la loi d'échelle impliquée par la cascade de Richardson. La modification de la loi d'échelle, qui fait le lien entre grandes et petites échelles, amène à la notion d'objets dont les propriétés dépendent de l'échelle à laquelle ils sont observés : les *fractales*.

### 2.2.3 Aspect fractal

Une description de la notion de fractalité est présentée ici, nécessaire pour la compréhension des modèles de turbulence ayant suivi K41.

#### 2.2.3.1 Objet fractal

Une fractale est un ensemble, au sens mathématique du terme (par exemple un ensemble de points dans  $\mathbb{R}^3$ ).

La fractale est introduite par Mandelbrot comme un objet "rugueux", présentant des aspérités à toutes les échelles d'observation [52]. L'exemple le plus connu est celui de la côte de Grande-Bretagne : des zooms successifs font apparaître des structures similaires aux structures présentes dans le zoom précédent. La présence de ces structures implique que la longueur mesurée de la courbe évolue avec la profondeur du zoom. La Fig. 2.9 montre ainsi l'évolution de la longueur mesurée en fonction de la longueur unitaire de mesure. Dans le cas d'un objet euclidien, la

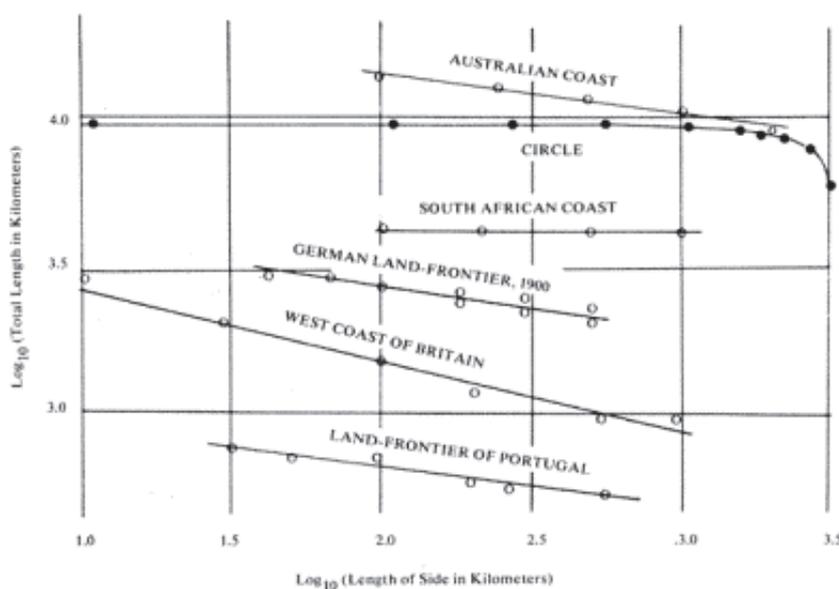


Fig. 2.9 : évolution en log-log de la longueur d'objets fractals et euclidiens en fonction de la longueur de mesure, tiré de [70]

mesure évolue rapidement vers une valeur fixe quand l'échelle de mesure tend vers 0, tandis que pour des objets géologiques tels que les côtes, la longueur évolue continûment en fonction de la longueur de mesure, caractérisant un comportement fractal.

La Fig. 2.9 fait apparaître une relation linéaire en log-log entre la longueur des côtes et la longueur de mesure :

$$\log L = A \log h \quad (2.34)$$

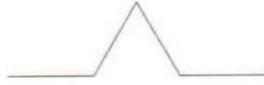
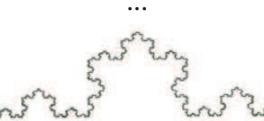
La longueur des côtes évolue donc selon une loi puissance en fonction de la longueur de mesure :

$$L \sim h^A \quad (2.35)$$

Le réel  $D = -A$ , exposant d'échelle de la mesure de longueur, rend compte de l'évolution de la mesure de longueur en fonction de l'échelle de cette mesure, et est appelé *dimension fractale*. La dimension fractale peut prendre des valeurs non entière.

### Une fractale déterministe : la courbe de Koch

Il est possible de construire des objets fractals à l'aide d'algorithmes itératifs [29] : la courbe de Koch est un exemple de fractale construite de façon déterministe. L'étape 0 consiste en un segment de longueur 1. A chaque étape, chaque segment de longueur  $\epsilon_n$  est remplacé par 4 segments de même longueur  $\epsilon_{n+1} = \frac{1}{3}\epsilon_n$ , les deux segments centraux formant la pointe d'un triangle isocèle (cf. Tab. 2.1). Chaque étape correspond donc à 4 reproductions d'une homothétie de rapport 1/3 de l'étape précédente. La fractale est obtenue après un nombre infini d'itérations.

$n$	longueur segment $\epsilon_n$	nbre segments $N_n$	longueur $L_n$	courbe
0	1	1	1	
1	1/3	4	4/3	
2	1/3 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>	(4/3) <sup>2</sup>	
...	...	...	...	...
n	1/3 <sup>n</sup>	4 <sup>n</sup>	(4/3) <sup>n</sup>	

**Tab. 2.1** : description de la courbe de Koch en fonction du nombre d'étapes  $n$  de sa construction

On peut voir que le nombre de segments nécessaires à la construction de la courbe de Koch évolue selon une loi puissance en fonction de la longueur de mesure  $\epsilon_n$  :

$$N_n \sim \epsilon_n^{-D} \quad \text{avec } D = \frac{\log 4}{\log 3} \quad (2.36)$$

Dans le cas d'une fractale déterministe construite selon un algorithme répétant à chaque étape  $n$  copies d'homothéties de l'étape précédente de rapport  $h$ , la dimension fractale est toujours

$$D = -\frac{\log n}{\log h} \quad (2.37)$$

La mesure d'un objet fractal évoluant avec l'échelle à laquelle on l'observe (et tendant vers l'infini quand l'échelle diminue), on ne peut pas à proprement parler mesurer un objet fractal (une définition de la notion de mesure peut être trouvée en Annexe A). La notion de *dimension* est plus adaptée pour décrire les objets fractals.

On peut trouver plusieurs définitions de dimensions fractales [83]. Elles permettent de décrire comment l'ensemble fractal "remplit" son espace support. On définira par exemple :

- pour déterminer la *dimension de Hausdorff*, on couvre la fractale  $F$  du minimum possible de boules de diamètre  $r$  inférieur à  $\epsilon$ , et on définit une forme de "volume" de ces boules comme  $r^d$ . La dimension de Hausdorff est alors l'exposant critique  $D_H$  tel que pour  $d < D_H$ , le volume total nécessaire pour couvrir la fractale  $\sum r^d$  tend vers l'infini quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , et pour  $d > D_H$ ,  $\sum r^d$  tend vers 0.

$$D_H = \min\{d / \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon^d(F) = 0\} \quad (2.38)$$

où

$$\mu_\epsilon^d(F) = \min_{r < \epsilon} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r^d / F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_r \right\} \quad (2.39)$$

et  $B_r$  est une boule de diamètre  $r$ .

Cette définition mathématiquement bien posée conduit à un calcul de dimension difficile en pratique.

- la *dimension de capacité* ou *dimension de box counting* mesure comment évolue le nombre de boîtes de taille  $\epsilon$  pavant l'espace qui contiennent un point de la fractale, quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{\log M(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (2.40)$$

où  $M(\epsilon)$  est le nombre de boîtes de taille  $\epsilon$  contenant un point de la fractale.

- la *dimension d'information* mesure la quantité d'information nécessaire pour décrire la fractale, sous la forme de la variation avec la taille de boîte de la probabilité de trouver un point de la fractale dans ces mêmes boîtes :

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{\sum_{k=1}^{M(\epsilon)} p_k \log p_k}{\log \epsilon} \quad (2.41)$$

où  $p_k = N_k/N$  où  $N$  est le nombre de points de la fractale et  $N_k$  le nombre de points dans la boîte  $k$ .

- la *dimension de corrélation* mesure le nombre de paires de points dans la fractale dont la distance est inférieure à  $\epsilon$ .

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \frac{\log \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(\epsilon - |x_i - x_j|)}{\log \epsilon} \quad (2.42)$$

où  $H$  est la fonction de Heavyside.

D'une façon générale, la dimension fractale est l'opposé de l'exposant d'échelle associé à la variation de la mesure quand l'échelle varie :

$$\mu_\epsilon \sim \epsilon^{-D} \quad (2.43)$$

Les objets fractals ont généralement une dimension fractale supérieure à leur dimension topologique, indiquant qu'ils "remplissent" mieux leur espace support que les objets euclidiens de même dimension.

### Une fractale stochastique : le mouvement brownien

Le processus de construction d'un objet fractal peut également être stochastique. Le *processus de Wiener* par exemple, est un *processus de Lévy* (collection de valeurs aléatoires dont les incréments sont statistiquement indépendants) dont les incréments obéissent à une loi normale.

Les lois pour construire l'ensemble  $W_t, t \in \mathbb{R}^+$  du processus de Wiener sont les suivantes :

- $W_0 = 0$
- la fonction  $W$  est partout presque sûrement continue (*i.e.* continue avec une probabilité de 1)
- les incréments de  $W_t$  sont statistiquement indépendants et obéissent à une loi normale :  $\forall 0 \leq s < t, W_t - W_s \sim N(0, t - s)$  avec  $N(0, t - s)$  la loi normale de moyenne nulle et de variance  $t - s$ .

Le processus de Wiener est associé en physique au mouvement brownien car il modélise le mouvement d'une particule soumise à un grand nombre de chocs (assimilés alors à une force aléatoire obéissant à une loi normale).

L'équivalent d'un échantillonnage d'une réalisation du processus de Wiener, obtenu par une itération discrète, est visible en Fig. 2.10.

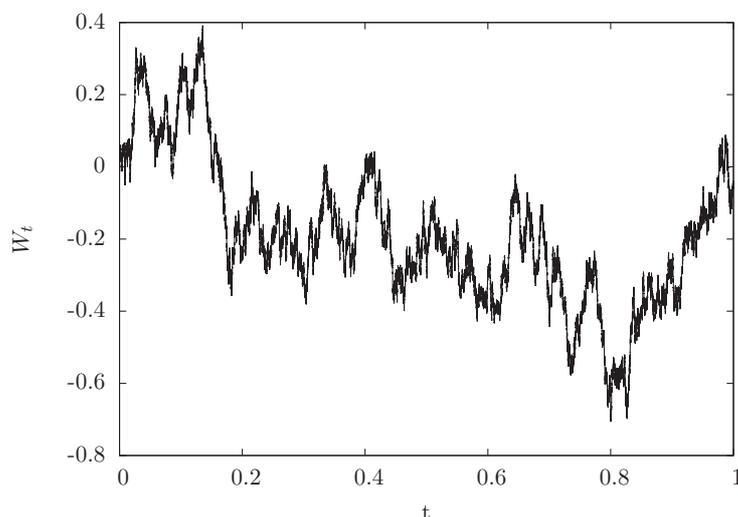


Fig. 2.10 : exemple d'itération discrète sur  $2^{16}$  pas de temps du processus de Wiener approximant une réalisation du mouvement brownien

Le processus de Wiener présente des propriétés d'auto-similarité. On peut montrer en effet qu'une dilatation d'échelle  $t \rightarrow at$  d'un mouvement brownien produit un mouvement brownien. On a alors

$$W_{at} \sim \sqrt{a}W_t \quad (2.44)$$

L'auto-similarité d'échelle est illustrée en Fig. 2.11, où des zooms successifs sur le processus initial donnent l'impression d'obtenir le même signal.

Le scaling en  $\sqrt{t}$  du mouvement brownien est à rapprocher du phénomène de diffusion, dans lequel la longueur caractéristique varie elle aussi en fonction de la racine du temps de diffusion<sup>3</sup>.

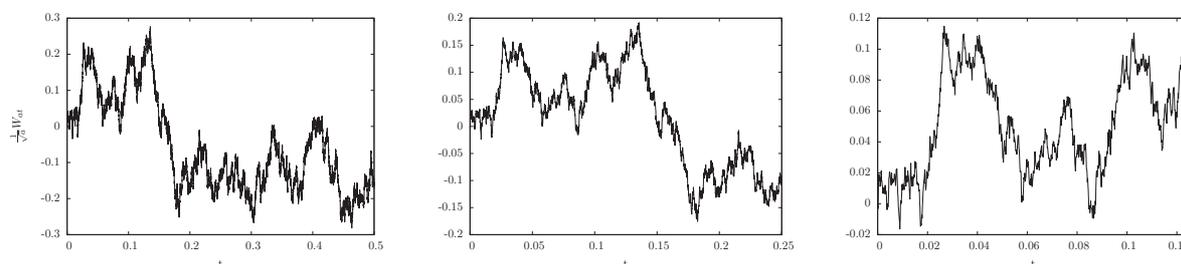


Fig. 2.11 : auto-similarité du processus de Wiener. Les graphes sont ceux de  $1/\sqrt{a}W_{at}$  pour  $a = 2$ ,  $a = 4$  et  $a = 8$

3. Le nombre de Fourier caractérisant le transfert par diffusion s'écrit  $Fo = \frac{\Gamma t}{L^2}$

La dimension fractale du graphe du processus de Wiener, tel que présenté en Fig. 2.10, peut être obtenue par box-counting et vaut

$$D = \frac{3}{2} \quad (2.45)$$

### 2.2.3.2 Extension à la multifractalité

La dimension fractale permet de décrire comment évolue une mesure sur un ensemble au voisinage d'un point, selon une loi puissance si cet ensemble est fractal :

$$\mu(B_\epsilon(\underline{x})) = \epsilon^{-D} \quad (2.46)$$

où  $B_\epsilon(\underline{x})$  est une boule de taille  $\epsilon$  centrée en  $\underline{x}$ .

Si l'exposant d'échelle dépend de la position  $x$ , la mesure est alors dite multifractale et le comportement fractal devient local. L'ensemble constitué des différentes fractales  $\mathcal{F}_D$  ayant une dimension fractale  $D$  est alors un *ensemble multifractal*. Pour étudier un tel ensemble, on peut alors décrire la répartition statistique des différentes dimensions fractales de la multifractale. Dans le cas de l'étude d'un champ défini sur  $\mathbb{R}^n$ , tel que le taux de dissipation dans un écoulement turbulent en 3 dimensions, caractérisé par des pics d'activité soudaine très localisés, ce sont ces zones d'activité qui s'organisent selon un arrangement multifractal. Les brusques variations spatiales du champ sont assimilées à des *singularités* du champ. Les ensembles de points présentant la même singularité constituent alors des fractales, et le champ lui-même est dit multifractal.

### Singularité

La notion de singularité est fortement liée à la dérivabilité. Un signal 1D  $\varphi$  infiniment dérivable en un point  $x_i$  peut être assimilé localement à sa décomposition en série de Taylor en  $x_i$  :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \varphi}{dx^n}(x_i) \times (x - x_i)^n \quad (2.47)$$

Dans le cas d'un front ou d'un pic, le signal présente une quasi-discontinuité et le signal n'est plus dérivable en  $x_i$  que  $n$  fois où  $n \in \mathbb{N}$ . Le signal est alors assimilable à

$$\varphi(x) = \varphi(x_i) + \frac{d\varphi}{dx}(x - x_i) + \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{d^n\varphi}{dx^n}(x - x_i)^n + a_\alpha(x - x_i)^{\alpha_i} \quad (2.48)$$

L'exposant non entier  $\alpha_i$  est appelé *exposant de Hölder* et permet de mesurer la singularité de  $\varphi$  en  $x_i$ . La définition formelle de l'exposant de Hölder est la suivante :  $\alpha_i$  est le plus grand exposant,  $n < \alpha_i < n + 1$ , tel qu'il existe un polynôme  $P_n$  de degré  $n$  vérifiant

$$\exists a_\alpha \in \mathbb{R} / |\varphi(x) - P_n(x - x_i)| \leq a_\alpha |x - x_i|^{\alpha_i} \quad (2.49)$$

Ainsi, l'exposant de Hölder constitue une forme de généralisation de la dérivée. Un exposant  $\alpha_i < 1$  indiquera un signal non dérivable, donc une singularité forte. Plus  $\alpha_i$  est grand, plus la singularité sera faible. La définition en 2.49 permet de décomposer localement le signal  $\varphi$  en une composante polynomiale, variant de façon régulière, et une composante singulière variant selon une loi puissance :

$$\varphi(x_i + \epsilon) - P_n(\epsilon) \sim \epsilon^{\alpha_i} \quad (2.50)$$

### Analyse multifractale

L'analyse multifractale des champs turbulents s'effectue en construisant le *spectre des singularités*  $f(\alpha)$  qui associe à chaque singularité  $\alpha$  présente dans le champ la dimension fractale  $f(\alpha)$  de l'ensemble des points  $x_i$  présentant une singularité  $\alpha_i = \alpha$  [39].

Les *dimensions fractales généralisées* constituent une autre description possible d'un ensemble multifractal [83]. En associant une mesure  $\mu$  à l'ensemble considéré, les dimensions généralisées  $D_q$  correspondent aux exposants d'échelle des moments d'ordre  $q$  de la mesure  $\mu$ . Pour déterminer les dimensions généralisées  $D_q$ , on construit d'abord les *fonctions de partition*  $Z(q, \epsilon)$ . Pour ce faire, on couvre le support de la mesure de boîtes  $B_i(\epsilon)$  de taille  $\epsilon^4$ , et on définit la fonction de partition comme

$$Z(q, \epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \mu^q(B_i(\epsilon)) \quad (2.51)$$

où  $N(\epsilon)$  est le nombre de boîtes. La fonction de partition est donc équivalente à un box-counting pondéré grâce aux exposants  $q$ , qui favorisent les singularités plus ou moins fortes, comme on le verra plus loin avec la transformée de Legendre.

Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , la fonction de partition obéit à une loi puissance

$$Z(q, \epsilon) \sim \epsilon^{\tau(q)} \quad (2.52)$$

Les fonctions  $\tau(q)$  sont appelés *exposants de masse*. Ils sont déterminés simplement pour chaque valeur de  $q$  comme pour une monofractale par :

$$\tau(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log Z(q, \epsilon)}{\log \epsilon} \quad (2.53)$$

Ils sont reliés aux dimensions généralisées par

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q - 1} \quad (2.54)$$

Pour décrire les propriétés multifractales des signaux, on utilisera plus souvent les exposants de masse que les dimensions généralisées.

Les dimensions fractales classiques présentées en 2.2.3.1 peuvent être retrouvées grâce aux dimensions généralisées [83] :

- Pour  $q = 0$ ,  $D_0$  est la dimension de box-counting.
- Pour  $q = 1$ , la quantité  $D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{q-1} \frac{\log Z(q, \epsilon)}{\log \epsilon} \right)$  est la dimension d'information.
- Pour  $q = 2$  enfin, on retrouve la dimension de corrélation.

On peut montrer que le spectre des singularités  $f(\alpha)$  et les exposants de masse  $\tau(q)$  sont reliés entre eux : les exposants sont obtenus par une transformée de Legendre du spectre des singularités [83]

$$\tau(q) = \min_{\alpha} (\alpha q - f(\alpha)) \quad (2.55)$$

---

4. Dans le cas d'un champ turbulent par exemple, le pavage revient à créer un histogramme du champ avec des intervalles  $\epsilon$  (les boîtes) et la mesure peut être le rapport  $n_i/n_t$  du nombre d'événements dans la boîte  $i$  sur le nombre d'événements total.

Dans la pratique cependant, les exposants  $\tau(q)$  sont plus souvent déterminés en premier et le spectre des singularités est obtenu par la transformée de Legendre de  $\tau$ <sup>5</sup>, qui est la transformée inverse de la précédente si la fonction  $\tau$  est concave :

$$f(\alpha) = \min_q(q\alpha - \tau(q)) \quad (2.56)$$

Pour comprendre la relation existant entre ces deux quantités, plaçons-nous dans le cadre de l'étude d'un champ ou d'un signal  $\varphi$  défini dans  $\mathbb{R}^n$ . La fonction de partition  $Z(q, \epsilon)$  peut être vue comme une approximation à une échelle  $\epsilon$  donnée (dite "coarse grained") du moment d'ordre  $q$  de la pdf de  $\varphi$ <sup>6</sup> :

$$Z(q, \epsilon) \sim \int_{\varphi} \varphi^q p(\varphi) d\varphi \quad (2.57)$$

A cette échelle, le signal  $\varphi$  présente des singularités, il peut donc être localement assimilé à  $\epsilon^\alpha$  pour une certaine gamme d'exposants de Hölder  $\alpha$  obéissant à une distribution  $p(\alpha)$ . On a alors

$$Z(q, \epsilon) \sim \int_{\alpha} (\epsilon^\alpha)^q p(\alpha) d\alpha \quad (2.58)$$

$f(\alpha)$  étant la dimension fractale de l'ensemble des points présentant une singularité  $\alpha$ , on peut postuler pour sa distribution une forme  $p(\alpha) = \rho(\alpha)\epsilon^{-f(\alpha)}$ . Il vient alors

$$Z(q, \epsilon) \sim \int_{\alpha} \rho(\alpha)\epsilon^{\alpha q - f(\alpha)} d\alpha \quad (2.59)$$

Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'intégrale est dominée par le terme  $\epsilon^{\min(\alpha q - f(\alpha))}$  (steepest descent). Par identification avec 2.52, on obtient 2.55.

Les considérations liées aux fonctions de partition, ainsi qu'à la transformée de Legendre sont fortement inspirées de la thermodynamique<sup>7</sup>. Le formalisme multifractal a en effet été développé dans cette optique. Dans ce contexte, les champs étudiés par l'analyse multifractale peuvent être vus comme des "gaz de singularités".

## Comprendre les résultats de l'analyse multifractale

L'analyse multifractale est une description statistique par nature. Elle permet d'étudier la répartition statistique des comportements locaux d'un champ défini spatialement. De ce fait, elle fournit une description compacte de phénomènes complexes, qui conservent leur complexité à toutes les échelles.

Un spectre des singularités typique d'un champ multifractal est visible en Fig. 2.12. Les abscisses correspondent aux exposants de Hölder  $\alpha$ , les ordonnées à la dimension fractale  $f(\alpha)$  associée. Les points les plus à gauche correspondent donc aux singularités les plus fortes. Le spectre étant une courbe continue, le champ possède une gamme continue de singularités sur des ensembles intriqués, ce qui constitue la signature des champs multifractals.

5. L'annexe A fournit un aperçu de méthodes pratiques permettant d'obtenir le spectre des singularités d'un signal, telles que la méthode des moments ou la méthode WTMM (Wavelet-Transform Modulus-Maxima).

6. La mesure  $\mu$  est alors une mesure de probabilité

7.  $q$  joue alors le rôle de l'inverse de la température,  $\tau(q)$  celui de l'énergie libre.

L'écartement des branches de la courbe renseigne sur la complexité des singularités du champ, un spectre large indiquant une intrication complexe des singularités. Un champ monofractal verra ainsi son spectre des singularités réduit à un point (les exposants de masse variant alors linéairement en  $q$ , signe d'une seule similarité d'échelle).

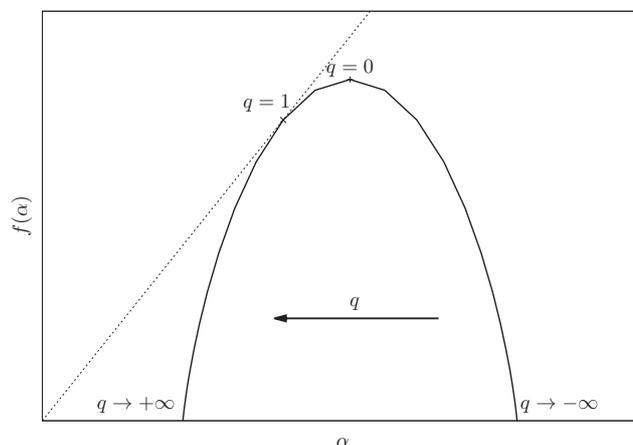


Fig. 2.12 : spectre des singularités d'un signal multifractal

Les exposants de masse fournissent une information sélective sur l'évolution de la fonction de partition en fonction de la densité locale. En effet, pour  $q > 0$ , la fonction de partition  $Z(q, \epsilon) \sim \epsilon^{\tau(q)}$ , qui évalue le nombre de fois où l'on rencontre un point de la multifractale, varie plus vite avec  $\epsilon$ . Les exposants  $q$  positifs favorisent donc les zones denses du champ. Pour  $q < 0$ ,  $\tau(q) < 0$  et  $Z$  varie moins vite avec  $\epsilon$ , caractérisant des zones moins denses.

Quand  $q = 0$ ,  $Z(q, \epsilon)$  devient le nombre de boîtes nécessaires pour couvrir l'ensemble, de sorte que  $\tau(q = 0) = -D$  devient l'opposé de la dimension fractale du support de la mesure. Dans le cas de l'étude des singularités d'un champ, on a généralement  $\tau(0) = -1$ .

Pour  $q = 1$ , les moments de la mesure n'évoluent plus en fonction de  $\epsilon$ , et l'on obtient  $\tau(1) = 0$ . Ces informations sont contenues dans le spectre des singularités. Ainsi, pour  $q \rightarrow +\infty$ , comme le spectre reste fini,  $\alpha \rightarrow \alpha_m$ . A l'inverse, quand  $q \rightarrow -\infty$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha_M$ . Sur le spectre, l'augmentation de  $q$  favorise donc l'observation des zones plus singulières et  $\alpha$  évolue dans le sens inverse de  $q$ .

Le maximum du spectre est atteint pour  $q = 0$ , pour lequel  $f(\alpha)$  est la dimension du support de la mesure  $f(\alpha) = -\tau(0)$ . Pour  $q = 1$ ,  $\alpha = f(\alpha)$  est la dimension fractale de la mesure.

### Exemple de mesure multifractale : la cascade binomiale

La cascade binomiale est construite sur l'intervalle initial  $I = [0, 1]$  à l'aide d'un processus multiplicatif récursif [72]. L'intervalle initial a pour mesure  $\mu(I) = 1$ . A chaque étape, on divise en 2 segments égaux chaque intervalle et on attribue au segment gauche un poids  $p_1$  et au segment droit un poids  $p_2 = 1 - p_1$ . A la première étape, on a donc deux intervalles dyadiques  $I_0$  et  $I_1$  ayant pour mesures  $\mu(I_0) = p_1$  et  $\mu(I_1) = p_2$ . Au bout de  $n$  étapes, chacun des  $2^n$  intervalles dyadiques a une mesure du type  $\mu = p_1^{n_1} p_2^{n-n_1}$ .

Une telle cascade est présentée en Fig. 2.13 pour  $p_1 = 0.3$  et  $n = 13$ .

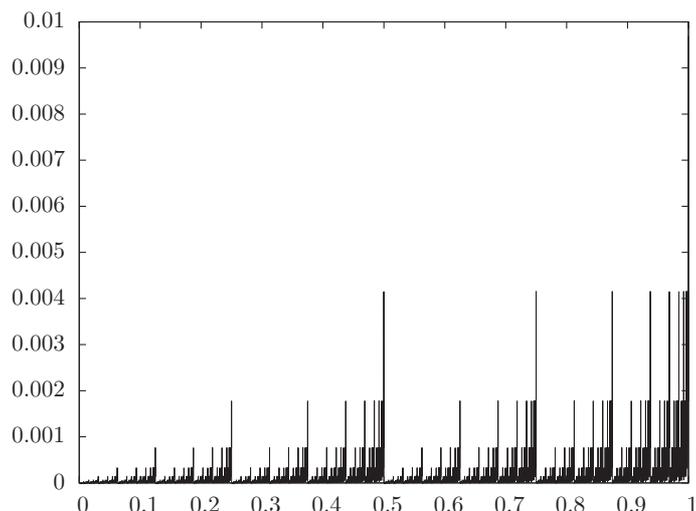


Fig. 2.13 : Représentation de la mesure binomiale pour 13 pas de la cascade.  $p_1 = 0.3$

La mesure multifractale, que constitue la limite quand  $n \rightarrow \infty$  de la cascade, possède un spectre multifractal analytique, présenté en Fig. 2.14. Notons qu'il ne s'agit pas ici de l'analyse multifractale d'un champ défini spatialement. La binomiale en Fig. 2.13 est la mesure multifractale dont la fonction de partition présente une loi d'échelle. Dans le cas d'un signal, la mesure multifractale est construite comme la probabilité d'occurrence d'une singularité.

Le spectre des singularités est ici symétrique, les singularités les plus fortes étant représentées à proportions égales des singularités faibles. Les exposants de Hölder extrêmes dépendent du poids  $p_1$  utilisé pour construire la binomiale :

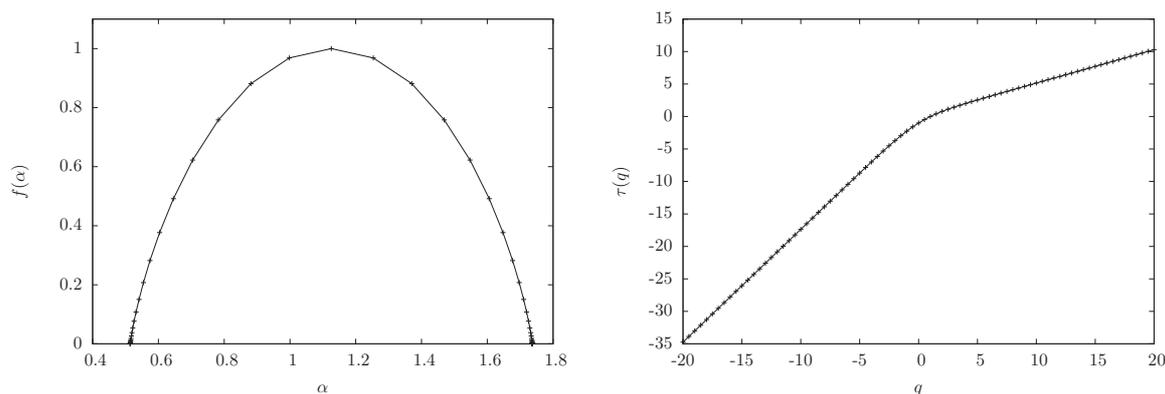
$$-\log_2 p_2 \leq \alpha \leq -\log_2 p_1 \quad (2.60)$$

pour  $p_1 < p_2$ .

La dimension fractale supérieure est  $\tau(0) = 1$ , qui est la dimension de l'intervalle  $[0, 1]$ , support de la mesure. La dimension fractale  $D_1$  de la mesure, obtenue pour  $\alpha = f(\alpha)$ , est

$$D_1 = -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2) \quad (2.61)$$

Une cascade multiplicative très simple peut donc permettre la construction d'objets multifractals. Le principe de cascade multiplicative est au cœur des concepts multifractals appliqués à la turbulence. Le modèle LES présenté en 4 repose essentiellement sur la reconstruction de champs de sous-maille ayant les bonnes propriétés statistiques à l'aide d'une cascade multiplicative.



**Fig. 2.14 :** spectre des singularités  $f(\alpha)$  à gauche et exposants de masse  $\tau(q)$  à droite pour la mesure binomiale avec  $p_1 = 0.3$ . Les limites du spectre des singularités sont  $\alpha_m = -\log_2 p_2$  et  $\alpha_M = -\log_2 p_1$

### 2.2.3.3 Description fractale de la turbulence

Lorsque l'on parle d'objet fractal, la mesure devient dépendante de l'échelle. Elle n'est donc plus une donnée ou un événement mais devient un "processus". Certains champs turbulents, qui montrent des propriétés fractales, peuvent être décrits de la même façon : leur mesure devient dépendante de l'échelle considérée et la description du processus menant à l'échelle donnée fournit la mesure à cette échelle. Cette observation permet de transférer les notions d'universalité, avancées notamment par Kolmogorov, depuis des **mesures ou valeurs** vers des **processus**. Il s'ensuit une description très compacte de phénomènes complexes, ouvrant la voie à des modélisations nouvelles.

Cette section décrit quelques évolutions de la description de la turbulence ayant mené à la notion de multifractalité.

## K62

La première remarque remettant en question une partie de la théorie K41 est attribuée à Landau. Elle entraîne la remise en question de l'hypothèse selon laquelle le transfert d'énergie à chaque étape de la cascade se produit à un taux constant  $\langle \varepsilon \rangle$ . La Fig. 2.15, montrant le caractère intermittent de la dissipation via ses importantes fluctuations spatio-temporelles, justifie cette remise en question.

En 1962, dans une première tentative de rendre compte de l'intermittence, Kolmogorov et Obukhov proposent un modèle, connu sous le nom K62, dans lequel le taux de dissipation de l'énergie cinétique à chaque étape obéit à une loi log-normale [43]. La moyenne de la dissipation reste cependant inchangée. Cette correction aboutit à un spectre des exposants des fonctions de structure quadratique

$$\zeta_q^{K62} = \frac{q}{3} + \frac{\mu}{18} (3q - q^2) \quad (2.62)$$

Les différents spectres donnés ici sont représentés en Fig. 2.6. K62 permet d'obtenir une bonne approximation des exposants jusqu'à l'ordre 8.

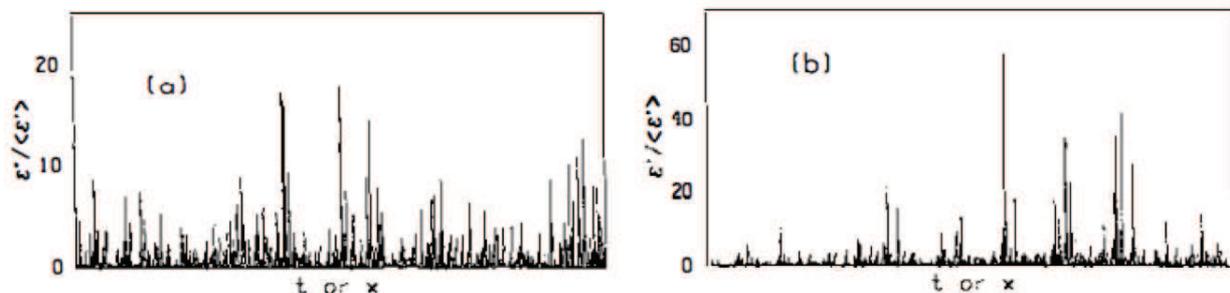


Fig. 2.15 : évolution spatiale ou temporelle de  $\varepsilon' = (du/dt)^2$ , utilisé comme substitut de la dissipation  $\varepsilon$  en utilisant l'hypothèse de Taylor d'écoulement gelé ( $\partial/\partial t = -U\partial/\partial x$  où  $U$  est la vitesse moyenne dans la direction  $x$ ) en plaque plane (a) et en couche limite atmosphérique (b). Figure issue de [80]

**$\beta$ -model**

Une prise en compte fractale de l'intermittence, basée sur des idées introduites par Mandelbrot et Kraichnan [45], est proposée par Frisch en 1977 [35]. Elle repose sur le concept de dimension fractale proposée par Mandelbrot en tant que mesure de la façon dont un ensemble couvre l'espace. L'observation de l'intermittence force à constater qu'aux petites échelles, l'activité de la turbulence ne remplit pas l'espace. Frisch propose donc le  $\beta$ -model, soit une cascade dans laquelle, à chaque étape, l'énergie est transférée vers une partie seulement, notée  $\beta$ , du volume disponible. A chaque étape d'une telle cascade, représentée en Fig. 2.16, l'activité de la turbulence remplit de moins en moins l'espace.

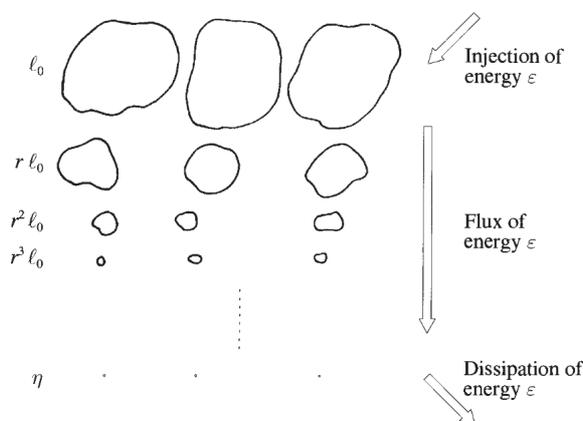


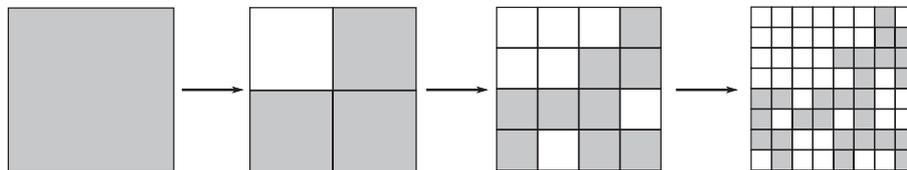
Fig. 2.16 : cascade du  $\beta$ -model représentant le transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles. Figure issue de [33].

Plus formellement, à chaque étape de la cascade, les tourbillons de taille  $l_n = L2^{-n}$  produisent en moyenne  $N$  tourbillons de taille  $l_{n+1} = L2^{-(n+1)}$ , avec  $\beta = N/2^d \leq 1$  où  $d$  est la dimension de l'espace. En considérant que les tourbillons à l'échelle intégrale  $L$  remplissent tout l'espace, le fluide actif n'occupera au bout de  $n$  étapes qu'une fraction  $\beta^n$  de l'espace. Ce procédé est décrit en Fig. 2.17 pour  $d = 2$  et  $\beta = 3/4$ . La dimension fractale d'un ensemble créé avec ce procédé dans un espace de dimension  $d$  est

$$D = d + \log_2 \beta \tag{2.63}$$

L'énergie cinétique massique présente au niveau des échelles  $l_n$  est donc une portion  $\beta^n$  de celle prédite par K41, ce qui se traduit au niveau du spectre par

$$\hat{E}(k) = \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} (kL)^{-\frac{1}{3}(3-D)} \quad (2.64)$$



**Fig. 2.17 :** représentation des premières étapes du  $\beta$ -modèle, pour  $d = 2$  et  $\beta = 3/4$ , illustrant le caractère fractal du modèle. Les parties grisées représentent les volumes actifs. La dimension fractale du sous-ensemble grisé est  $D = \log_2 3$

En terme de spectre des exposants des fonctions de structure, on obtient dans l'espace 3D :

$$\zeta_q^\beta = \frac{q}{3} + (3 - D) \left(1 - \frac{q}{3}\right) \quad (2.65)$$

ce qui constitue une correction du modèle K41. Ce modèle, linéaire également, dévie de l'expérience pour les ordres élevés (cf. Fig. 2.6).

Il est intéressant de constater qu'en utilisant les mêmes arguments dimensionnels d'équivalence des temps visqueux et convectifs que Kolmogorov, on peut retrouver ici une échelle visqueuse modifiée :

$$\eta_\nu \sim \left(\frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle}\right)^{\frac{1}{D+1}} L^{\frac{3-D}{D+1}} \quad (2.66)$$

qui est bien égale à l'échelle de Kolmogorov pour  $D = 3$ . La dimension fractale moyenne  $D$  peut en pratique prendre des valeurs inférieures ( $D = 2.87$ , cf. [7]).

## Modèle multifractal

Une modification du  $\beta$ -modèle, introduisant un rapport  $\beta$  variant à chaque étape, est proposée dans [60]. En choisissant à chaque étape parmi 2 valeurs possibles de 0.5 et 1 pour  $\beta$ , le spectre des exposants de structure obtenu se rapproche du spectre expérimental. Cette simple correction constitue une entrée dans les modèles multifractals pour la turbulence.

Le modèle multifractal en tant que tel est proposé par Frisch. Dans ce modèle, les singularités de la dissipation sont localisées sur des sous-ensembles de différentes dimensions fractales. Une explication est donnée dans [13] : on commence par rappeler l'équation 2.21, à savoir que l'incrément de vitesse varie dans la zone inertielle comme

$$\frac{\Delta_r u}{u_L} \sim \left(\frac{r}{L}\right)^h \quad (2.67)$$

Là où la théorie K41 permettait de déterminer  $h = 1/3$ , la description multifractale de la turbulence indique que l'exposant  $h$  varie spatialement :  $h = h(x)$ .

Si  $h \geq 1$  le gradient de vitesse reste faible aux petites échelles et le champ de gradient est régulier. Si  $h < 1$  en revanche, le champ de gradient devient singulier. Une description fractale de la turbulence émet l'hypothèse que la condition  $h < 1$  intervient sur un ensemble fractal  $F$  de dimension fractale  $D_F < 3$ , tandis que le champ de gradient reste régulier sur le complément  $\bar{F}$  de  $F$ .

Si l'on considère maintenant les sous-ensembles  $\Omega(h)$  de  $F$  contenant les points où l'incrément scale en  $r^h$ , la dimension fractale de ces ensembles devient une fonction  $D(h)$  et l'ensemble  $F$  est multifractal.

On a alors une probabilité  $r^{3-D(h)}$  que  $\Delta_r u$  scale en  $r^h$ . La fonction de structure de la vitesse, moment d'ordre  $q$  de l'incrément, s'écrit alors :

$$\mathcal{S}_u^q(r) = \int r^{hq} r^{3-D(h)} d\Delta u \quad (2.68)$$

Par un argument de type "steepest descent" (cf. 2.2.3.2), l'intégrale est équivalente quand  $r \rightarrow 0$  à  $r^{\min_h(hq+3-D(h))}$ . On obtient donc le spectre des exposants des fonctions de structure :

$$\zeta_q^{MF} = \min_{\alpha} (\alpha q + 3 - f(\alpha)) \quad (2.69)$$

où  $f(\alpha)$  est le spectre des singularités des incréments de vitesse. Notons que la connaissance du spectre des singularités est suffisante pour connaître toutes les fonctions de structure, donc pour connaître les incréments de vitesse. Le spectre des singularités de la dissipation étant lié au spectre des singularités des incréments, connaître le spectre de la dissipation est suffisant.

On peut voir en Fig. 2.6 que l'accord avec l'expérience est excellent.

De la même façon que le beta-model permettait de trouver une échelle visqueuse modifiée par la dimension fractale de la beta-cascade, l'échelle visqueuse va ici dépendre des différentes dimensions fractales présentes dans le champ de dissipation. En fait, dans un écoulement turbulent, il n'existe pas une échelle visqueuse mais un ensemble continu d'échelles visqueuses correspondant à la dissipation visqueuse de l'énergie, et dont la distribution dépend notamment de l'échelle intégrale.

## 2.3 Conséquences en simulation

Les modèles de turbulence permettent de mieux décrire les champs turbulents et de comprendre les phénomènes complexes mis en jeu. Cette description peut être utilisée en simulation afin de construire des modèles susceptibles de reproduire fidèlement ces phénomènes. Les modèles *structuraux*, qui tirent partie de la description de la turbulence peuvent ainsi tirer partie des avancées en matière de description de la turbulence.

A cet égard, la notion de cascade qui apparaît comme centrale dans le cadre de la description fractale de la turbulence, est particulièrement intéressante. A partir de quantités connues, telles que les champs turbulents aux grandes échelles, on peut retrouver à l'aide d'un processus multiplicatif les propriétés statistiques de l'écoulement.

L'enjeu de l'utilisation d'une description multifractale des champs turbulents en simulation numérique du scalaire est double :

- d'une part elle peut permettre de construire des modèles plus fidèles, susceptibles de reproduire au mieux l'évolution des champs scalaires,

- d'autre part elle est susceptible de fournir une description statistique détaillée des champs, qui permet alors un couplage direct avec d'autres phénomènes tels que la chimie.

Pour la simulation aux grandes échelles, décrite au chapitre suivant, l'idéal serait un modèle permettant de reproduire l'évolution locale des pdf du scalaire à grand Schmidt en fonction des quantités aux grandes échelles. La multifractalité associée aux champs de gradient du scalaire semble alors une voie intéressante.



# Chapitre 3

## Simulation aux grandes échelles

### Sommaire

---

<b>3.1 Concept</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1.1 Equations . . . . .	45
3.1.2 Filtrage . . . . .	48
<b>3.2 Micro-mélange et simulation</b> . . . . .	<b>49</b>
3.2.1 Modèles LES . . . . .	49
3.2.2 Modélisation RANS . . . . .	52

---

### 3.1 Concept

#### 3.1.1 Equations

La turbulence étant caractérisée par une grande gamme d'échelles spatiales et temporelles, qui augmente avec le nombre de Reynolds et le nombre de Schmidt<sup>1</sup>, il n'est possible de simuler numériquement toutes ces échelles avec la puissance de calcul actuelle que pour des écoulements relativement canoniques ou à faible Reynolds. Le concept de la *simulation aux grandes échelles*, ou LES pour Large Eddy Simulation, repose sur la séparation des grandeurs simulées en une partie résolue au moyen d'équations d'évolution et d'une partie modélisée. La partie résolue correspond aux phénomènes "grandes échelles", tandis que le modèle reproduit l'interaction entre ces échelles résolues et les phénomènes se produisant aux échelles inférieures non représentées. L'échelle de coupure est alors l'échelle  $\Delta$  de la maille de la grille LES dans le cas d'opérations de filtrage implicite, ou la taille  $\Delta$  d'un filtre appliqué sur le maillage dans le cas de filtrage LES explicite. Ainsi, les grandeurs simulées  $\varphi$  peuvent être décomposées en une partie résolue et une contribution de sous-maille (Sub-Grid Scale) :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi^s \tag{3.1}$$

En LES, l'opération de séparation des échelles est généralement réalisée à l'aide d'un opérateur de filtrage spatial  $(\bar{\cdot})$ . Les équations résolues en LES dans le contexte présent sont les équations

---

1. le nombre de points nécessaire pour représenter l'ensemble des échelles du scalaire à  $Sc > 1$  dans un écoulement turbulent varie en  $N \sim Re^{9/4} Sc^{1/2}$ .

de Navier-Stokes incompressible 2.2, filtrées à l'aide de cet opérateur. Sous l'hypothèse de commutation du filtre et des dérivations spatiales et temporelle, on obtient :

$$\nabla \cdot \bar{\underline{u}} = 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial \bar{\underline{u}}}{\partial t} + \bar{\underline{u}} \cdot \nabla \bar{\underline{u}} - \nu \nabla^2 \bar{\underline{u}} + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} = -\nabla \cdot \bar{\underline{\tau}} \quad (3.2b)$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &= \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j + \underbrace{\overline{u_i u_j^s} + \overline{u_i^s u_j} + \overline{u_i^s u_j^s}}_{\tau_{ij}^*} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le même procédé est applicable à l'équation de transport d'un scalaire passif. En filtrant (2.1), on obtient l'équation LES du scalaire :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \bar{\underline{u}} \cdot \nabla \bar{\phi} - \Gamma \nabla^2 \bar{\phi} = -\nabla \cdot \bar{\underline{\sigma}} \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \overline{u_i \phi} - \bar{u}_i \bar{\phi} \\ &= \overline{u_i \phi} - \bar{u}_i \bar{\phi} + \underbrace{\overline{u_i \phi^s} + \overline{u_i^s \phi} + \overline{u_i^s \phi^s}}_{\sigma_i^*} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notons que seul un filtrage spatial est appliqué, le fait de négliger le filtrage temporel revenant à négliger certaines interactions grandes échelles/petites échelles, faisant ainsi certaines hypothèses sur les structures cohérentes et la "mémoire" des écoulements turbulents [25, 28], qui ne seront pas développées ici. Une partie de l'information fréquentielle peut être perdue en résolvant les équations LES avec un pas de temps différent de celui nécessaire à la résolution des équations non filtrées.

La formulation d'un modèle LES pour le scalaire (resp. la vitesse) consiste en l'écriture d'une expression pour  $\sigma_i$  (resp.  $\tau_{ij}$ ). Dans la mesure où  $\underline{\sigma}$  comme  $\underline{\tau}$  contiennent des termes ne faisant intervenir que des grandeurs résolues, on trouvera certains modèles donnant une expression pour  $\underline{\sigma}$  (resp.  $\underline{\tau}$ ), ou seulement pour le vecteur (resp. tenseur) flux de sous-maille  $\underline{\sigma}^*$  (resp.  $\underline{\tau}^*$ ), dont la modélisation est suffisante pour fermer le modèle. Dans le second cas, les équations de la LES deviennent :

$$\nabla \cdot \bar{\underline{u}} = 0 \quad (3.6a)$$

$$\frac{\partial \bar{\underline{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\underline{u}} \bar{\underline{u}} - \nu \nabla^2 \bar{\underline{u}} + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} = -\nabla \cdot \bar{\underline{\tau}}^* \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\underline{u}} \bar{\phi} - \Gamma \nabla^2 \bar{\phi} = -\nabla \cdot \bar{\underline{\sigma}}^* \quad (3.6c)$$

Les équations de la LES, dans leur formulation 3.2 et 3.4, sont identiques aux équations originelles non filtrées, adjointes d'un terme source  $\nabla \cdot \underline{\tau}$  ou  $\nabla \cdot \underline{\sigma}$ , qui représente les interactions entre les échelles résolues et les échelles de sous-maille.

La résolution de l'équation de transport filtrée du scalaire 3.4 ou 3.6c fait intervenir la vitesse de sous-maille, reflétant l'interaction entre les champs de vitesse et de scalaire  $y$  compris en sous-maille. Il est montré dans [24] que dans le cas d'une THI, le flux scalaire de sous-maille s'aligne préférentiellement avec les directions principales du tenseur des contraintes de sous-maille, plutôt qu'avec les quantités résolues telles que le gradient moyen. Un modèle LES pour le scalaire permettant de prendre en compte au moins partiellement le modèle pour la vitesse dans sa formulation peut donc être judicieux.

Spectralement, le filtrage LES est généralement représenté sous la forme en Fig.3.1, le terme source LES représentant la "pente" au niveau de la fréquence de coupure  $k_\Delta$ .

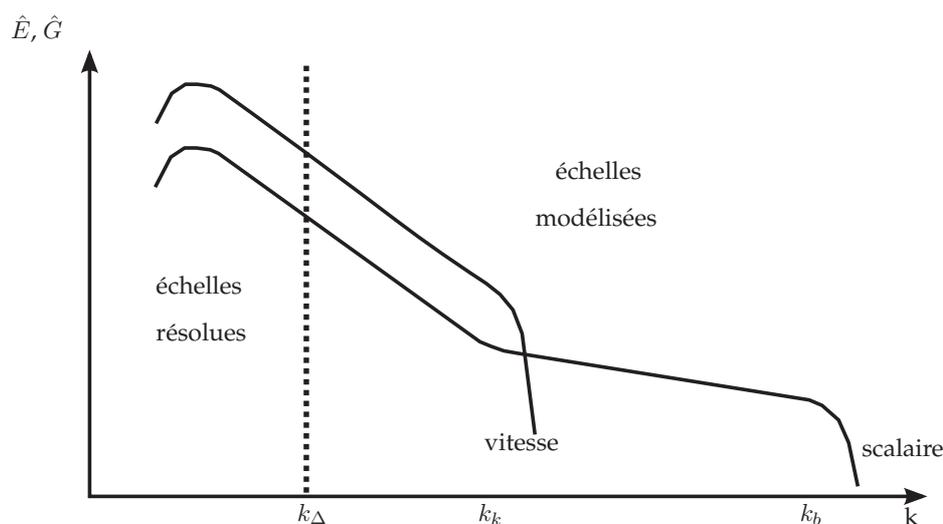


Fig. 3.1 : Représentation spectrale d'un modèle LES pour la vitesse et le scalaire

En théorie il est possible d'écrire un modèle LES "idéal" qui reproduit au mieux les statistiques en 1 et 2 points du champ turbulent [48, 56]. Reposant sur des moyennes conditionnelles sur le domaine LES entier, il nécessite en tout point de connaître le champ LES de tous les autres points du domaine de calcul. Le caractère extrêmement peu compact de ce modèle le rend donc difficile à appliquer en pratique. On peut cependant alléger son utilisation en reconstruisant les moyennes conditionnelles à l'aide d'estimations stochastiques tirées de DNS préalables [1]. Pour étendre l'utilisation de la LES optimale à des écoulements arbitraires, l'estimation peut également être réalisée en se basant sur la théorie de la turbulence homogène isotrope de Kolmogorov [40].

Il existe des modèles dits à zéro équation qui forment directement le tenseur des contraintes en fonction des grandeurs résolues, et des modèles ajoutant à la résolution des équations filtrées une ou des équations d'évolution de grandeurs permettant de calculer le flux de sous-maille. Pour la vitesse, on pourra par exemple dériver une équation d'évolution de  $k^s$  [63], l'énergie cinétique de sous-maille, qui compose en partie le tenseur des contraintes de sous-maille ( $2k^s = \text{tr}(\underline{\tau})$ ). Seules les modèles à zéro équation seront présentés plus avant ici.

### 3.1.2 Filtrage

La description spectrale de la LES en Fig. 3.1 correspond à la décomposition d'Obukhov des variables  $\varphi$  considérées, basée sur une décomposition de Fourier :

$$\varphi(\underline{r}) = \varphi_{k_\Delta}^< + \varphi_{k_\Delta}^> = \sum_{k \leq k_\Delta} \hat{\varphi}_k e^{ik \cdot \underline{r}} + \sum_{k > k_\Delta} \hat{\varphi}_k e^{ik \cdot \underline{r}} \quad (3.7)$$

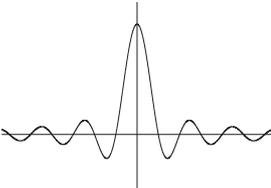
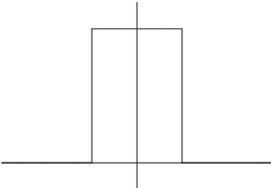
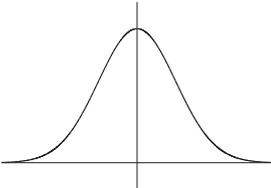
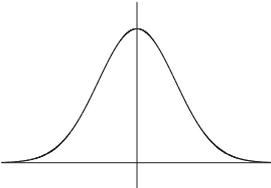
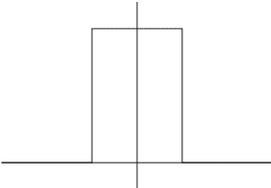
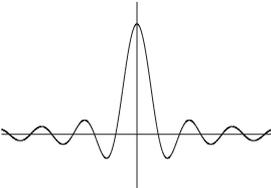
Pour obtenir les équations de conservation des quantités grandes échelles, on exprime généralement l'opérateur de filtrage  $\overline{(\cdot)}$  comme la convolution dans l'espace physique du champ  $\varphi$  avec un noyau de convolution  $G(\underline{x})$  normalisé sur le domaine de calcul.

$$\overline{\varphi}(\underline{x}) = \int_D \varphi(\underline{x}') G(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \quad (3.8)$$

La séparation d'échelle ne peut toutefois être nette à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral. Ceci peut être exprimé à l'aide du principe d'incertitude d'Heisenberg :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 dx \times \int_{\mathbb{R}} k^2 |\hat{\varphi}(k)|^2 dk > \frac{\pi}{2} \quad (3.9)$$

De ce fait, plus le noyau de convolution sera localisé en espace, moins le filtrage sera localisé en fréquence. Quelques filtres fréquemment utilisés en LES sont présentés en Tab. 3.1, qui illustrent cet inconvénient.

	expression	espace physique	espace spectral
sinus cardinal	$G(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{\pi x}{\sigma}\right)$		
gaussienne	$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$		
porte	$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & \text{si }  x  < \sigma, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$		

**Tab. 3.1 :** Expressions des noyaux de filtres de convolution dans l'espace physique et formes dans l'espace physique et spectral

Le filtre boîte dans l'espace physique, ou filtre porte, qui présente une échelle de coupure nette, correspond à un sinus cardinal dans l'espace de Fourier, qui est une fonction oscillante, ce qui implique une amplification non homogène des fréquences du signal filtré. Il prend de

plus des valeurs négatives dans l'espace spectral. Le sinus cardinal permet un filtrage spectral franc, mais est très mal localisé en espace, la convolution dans l'espace physique devenant très coûteuse. Le filtre gaussien présente une décroissance rapide tant dans l'espace physique que spectral, ce qui permet d'approximer le filtrage par une convolution sur un support réduit (un support d'une largeur minimale de  $6\sigma$  permet une erreur acceptable). Le filtrage gaussien est donc très utilisé en LES. Kwak dans [46] présente le filtre gaussien comme mathématiquement et physiquement pratique.

La gaussienne est également une fonction de Green pour la diffusion, ce qui signifie que la convolution d'une gaussienne avec un signal  $S_0$  est solution de l'équation de diffusion avec  $S_0$  comme condition initiale. Dans ce cas, l'écart type de  $G$  peut être relié à des paramètres physiques de l'équation de diffusion : on peut vérifier que  $G(x)$  est solution de l'équation de diffusion d'une distribution de Dirac avec  $\sigma^2 = 2\Gamma\Delta t$  comme écart type pour  $G$ .

Le problème du filtrage en LES est qu'il reste une opération mal définie, qui permet essentiellement de dériver conceptuellement les équations de la LES, mais ne laisse que peu d'information quant à la façon de traiter les résultats des simulations. En effet, comment reconstruire le champ complet à partir des seules informations du champ filtré ? Seule la connaissance explicite de l'opérateur de filtrage permet cette opération de déconvolution. Or l'application du filtrage est implicite en LES du fait de la description des grandeurs filtrées sur un maillage. Le filtrage en vérité dépend donc du maillage, de la discrétisation en général, etc... et ne peut donc être connu explicitement.

Il existe cependant des méthodes de déconvolution approchée reposant sur des séries tronquées de l'inverse de l'opérateur de filtrage [81]. Cette procédure suppose toutefois la connaissance préalable du filtre  $G$  utilisé pour obtenir les équations de la LES.

L'hypothèse de commutation également peut poser problème en maillage non structuré. En effet, l'erreur de commutation est proportionnelle à  $d\Delta(x)/dx$  [85], qui s'annule pour un maillage uniforme mais conduit à des valeurs potentiellement importantes pour des maillages fortement non structurés (géométries complexes, couches limites, ...)

La formulation utilisée pour résoudre la LES a également son rôle à jouer : les éléments finis par exemple fournissent une base mathématique pour un filtrage modal des champs, par exemple par prolongation puis projection des champs à filtrer. Une définition équivalente dans l'espace physique de ce genre de filtrage est cependant difficile à obtenir analytiquement.

## 3.2 Micro-mélange et simulation

Cette section présente de façon non-exhaustive quelques modèles utilisés en simulation numérique du micro-mélange.

### 3.2.1 Modèles LES

Les modèles les plus utilisés actuellement sont des modèles "eddy diffusivity", calqués sur les modèles LES "eddy viscosity" pour la vitesse, qui font l'hypothèse, dite du gradient, d'un alignement des directions du tenseur des contraintes de sous-maille avec le gradient de vitesse

résolu. Ils modélisent l'activité de sous-maille de la turbulence comme une diffusion avec un coefficient  $\nu_t$  de *diffusion turbulente* dépendant des quantités résolues.

$$\tau_{ij} = \nu_t \bar{S}_{ij} \quad (3.10)$$

où

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \nu_t = -2(C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \quad (3.11)$$

Pour éviter des composantes diagonales négatives dans le tenseur de contrainte de sous-maille, le modèle est modifié [2] pour prendre la forme

$$\tau_{ij} = \nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \quad (3.12)$$

La constante  $C_s$  est généralement prise égale à 0.17. Une procédure dynamique a cependant été développée qui permet de calculer  $C_s(\underline{x}, t)$  [37, 38]. Elle implique de filtrer un certain nombre de champs résolus à une échelle test  $\Delta_t > \Delta$  mais permet d'adapter la constante sans connaissance préalable sur le champ à résoudre.

Si ses bases théoriques d'assimilation de la turbulence de sous-maille à un phénomène diffusif sont faibles, voire fausses, le modèle présente l'avantage d'une grande stabilité numérique du fait même de son caractère diffusif.

Pour le scalaire, ces modèles se transposent :

$$\sigma_j = \Gamma_t \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} = \frac{\nu_t}{Sc_t} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j} \quad (3.13)$$

où le Schmidt turbulent peut être pris constant (généralement proche de 0.7) ou avoir une expression déterminée dynamiquement [37].

Les modèles de similarité d'échelle, introduits dans [8], sont intéressants en ce qu'ils constituent une entrée dans les modèles structurels. Ils se basent en effet sur l'hypothèse que les champs de vitesse aux grandes échelles et aux petites échelles présentent des similarités d'échelle. Ils remettent donc en question l'hypothèse d'universalité selon laquelle à grand Reynolds les petites échelles sont décorrélatées des grandes échelles en introduisant une notion de fractalité dans le champ de vitesse. Dans ces modèles, le champ de sous-maille peut être directement déduit du champ résolu et d'un filtrage supplémentaire appelé *filtrage test*  $\widetilde{(\cdot)}$  à une échelle  $\Delta_t > \Delta$ . Pour reconstruire le tenseur de sous-maille, le modèle de similarité considère que le processus pour passer de  $\widetilde{\underline{u}}$  à  $\underline{\bar{u}}$  est le même que pour passer de  $\underline{\bar{u}}$  à  $\underline{u}$ . Ainsi, les échelles résolues de la LES sont considérées comme des "échelles de sous-maille" pour l'échelle  $\Delta_t$  du filtrage test et le tenseur de sous-maille prend la forme :

$$\tau_{ij} = C_{sim} (\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widetilde{\bar{u}_i} \widetilde{\bar{u}_j}) \quad (3.14)$$

Ces modèles présentent des taux de corrélation *a priori* bien meilleurs que les modèles eddy viscosity[53]. S'ils semblent permettre une bonne prédiction du tenseur de sous-maille, ils se révèlent souvent numériquement instables, puisque leur construction autorise une remontée d'énergie des échelles modélisées vers les échelles résolues, donc un terme source localement positif dans l'équation d'énergie. On peut donc adjoindre au flux de sous-maille obtenu à l'aide de ces modèles une partie de type eddy viscosity afin de rendre le modèle suffisamment dissipatif [8]. Le modèle obtenu est appelé *modèle mixte* et présente également de bons taux de

corrélation lors des tests *a priori*. La constante  $C_{sim}$ , initialement prescrite en fonction de la simulation considérée, peut être calculée à l'aide d'une procédure dynamique similaire à celle utilisée pour le modèle de Smagorinsky, faisant donc intervenir un troisième filtrage à une échelle supérieure à  $\Delta_t$ .

Le filtre de base implicite de la LES et le filtre test doivent avoir la même forme et ne différer qu'en taille pour que l'hypothèse d'auto-similarité soit vérifiée [19], ce qui constitue une hypothèse supplémentaire puisque le filtre implicite  $\overline{(\cdot)}$  n'est pas connu explicitement.

Les modèles structurels tels que le modèle de similarité d'échelles sont intéressants en ce qu'ils ne se contentent pas de fournir un modèle pour le flux de sous-maille susceptible de reproduire les interactions entre les échelles résolues et modélisées, qui est le but des modèles fonctionnels. En effet, en se basant sur des considérations physiques, ils peuvent fournir des informations structurelles ou statistiques sur les variables de sous-maille. L'idéal pour décrire la turbulence ou le mélange de sous-maille serait de fournir une description complète du champ de sous-maille. D'un point de vue statistique, récupérer la fonction densité de probabilité du champ de sous-maille suffit à décrire ce champ. Dans le cas du mélange, connaître la pdf des concentrations de sous-maille (ou à défaut ses premiers moments) permet par exemple d'intégrer les réactions chimiques sans modélisation supplémentaire.

Certains modèles, dits à "pdf présumée", reposent sur la spécification *a priori* d'une forme de la pdf du scalaire qui est alors entièrement décrite par un nombre fini de paramètres. Des équations d'évolution pour ces paramètres (par exemple la moyenne et la variance) doivent être écrites qui nécessitent à leur tour une fermeture [26].

Les modèles d'évolution des pdf [32, 64] apparaissent comme une voie intéressante. Ils consistent en l'écriture d'équations d'évolution de la pdf du scalaire, fermées par des modèles de mélange, où l'effet des réactions apparaît comme un terme source ne nécessitant pas de modélisation. Le terme de micro-mélange nécessitant une fermeture est la dissipation scalaire conditionnée par le scalaire. La résolution de l'évolution des pdf eulériennes comprenant un grand nombre de degrés de liberté, on lui substitue une formulation lagrangienne où l'évolution de particules est obtenue à l'aide d'un processus stochastique de type Monte-Carlo. On fait ainsi évoluer un grand nombre de particules transportant les propriétés du fluide, et les statistiques eulériennes sont récupérées au moyen d'une interpolation.

Ces méthodes peuvent être couplées à des modèles LES [42, 67]. Les équations d'évolution des pdf intègrent alors directement le filtrage par convolution de la LES et les variables filtrées de la LES eulérienne nourrissent le processus stochastique d'évolution des particules lagrangiennes dans chaque cellule.

Parmi les modèles de fermeture du micro-mélange, le plus utilisé est le modèle IEM pour "Interaction by Exchange with the Mean" et ses modifications [76, 86]. L'avancement du scalaire sur une particule est défini dans ce modèle comme une relaxation vers la moyenne, le coefficient de relaxation dépendant d'un temps de mélange à déterminer. Parmi les autres modèles de micro-mélange pour les méthodes de pdf lagrangiennes, on peut citer EMST (Euclidian Minimum Spanning Trees [82]), ou PSP (parametrized Scalar Profile [55]).

### 3.2.2 Modélisation RANS

Une description détaillée des modélisations RANS (Reynolds Average Navier-Stokes) ne sera pas entreprise ici. On se contentera de rappeler leur principe. Les équations de Navier-Stokes sont ici moyennées par une moyenne de Reynolds, chaque variable étant séparée en une contribution moyenne et une contribution fluctuante. Le RANS, moins coûteux que la LES, est très utilisé dans l'industrie. Comme pour la LES, la résolution des équations des quantités moyennées doit être fermée. La fermeture est souvent réalisée à l'aide de l'établissement d'échelles caractéristiques de temps et d'espace en chaque cellule, dépendant de la variable moyenne résolue. On pourra par exemple déterminer à l'aide d'une équation d'évolution pour l'énergie cinétique turbulente et sa dissipation un temps et une échelle de brassage turbulent, permettant de reconstruire une viscosité tourbillonnaire qui ferme l'équation de transport de la vitesse moyenne (modèle  $k - \epsilon$ ). Les fermetures des équations RANS pour le mélange scalaire sont souvent basées sur des considérations phénoménologiques.

Les modèles de micro-mélange pour les pdf lagrangiennes peuvent être formulés dans un contexte RANS comme dans un contexte LES.

Notons que bien que le RANS ne se préoccupe que de moyennes, des modifications des modèles de mélange liées à l'intermittence peuvent lui être apportées. A titre d'exemple, une correction multifractale proposée dans [7] d'un modèle phénoménologique précédent [5] influe sur le calcul des temps caractéristiques de mélange en modélisation RANS.

# Chapitre 4

## Modèle multifractal

### Sommaire

---

<b>4.1 Principe du modèle</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1.1 Caractère multifractal des champs de gradient . . . . .	53
4.1.2 Formulation du modèle . . . . .	54
4.1.3 Stabilité numérique et limiteur de cascade inverse . . . . .	60
<b>4.2 Test sur la vitesse</b> . . . . .	<b>60</b>
4.2.1 Implantation . . . . .	60
4.2.2 THI . . . . .	63
4.2.2.1 Hypothèses . . . . .	63
4.2.2.2 Résultats . . . . .	66

---

Le caractère multifractal des champs de gradient en turbulence a été mis en évidence expérimentalement et numériquement pour une gamme d'écoulements différents, tant dans le cas d'écoulement isotropes et homogènes que pour des écoulements fortement cisailés tels que des couche limite atmosphériques [27, 54].

Cela implique une certaine universalité des processus physiques reliant les grandes et petites échelles, qui permet de construire des modèles adaptés à de vastes gammes d'écoulements, basés sur les propriétés physiques des champs.

On présente ici un modèle LES proposé par Burton [17, 18], le modèle *MFLES*, qui utilise le caractère multifractal de l'enstrophie pour reconstruire à partir de la vitesse résolue la vitesse de sous-maille et, partant, le tenseur flux de sous-maille. Le modèle est implanté dans le code YALES2 ([www.coria-cfd.fr](http://www.coria-cfd.fr)) et testé *a posteriori*.

### 4.1 Principe du modèle

#### 4.1.1 Caractère multifractal des champs de gradient

On a vu dans le cas de la cascade binomiale (cf. 2.2.3.2) que l'on pouvait créer un objet multifractal à l'aide d'un procédé multiplicatif itératif. De la même façon, un champ multifractal peut être considéré comme résultant d'une cascade multiplicative depuis une échelle initiale

jusqu'à une échelle finale<sup>1</sup>. Si le champ est multifractal, les multiplicateurs à chaque étape de la cascade (valeurs par lesquelles on multiplie le champ à l'étape  $n$  pour obtenir le champ à l'étape  $n+1$ ) obéissent à la même loi de probabilité. Ainsi, un champ multifractal relève de l'application d'une cascade multiplicative dont la pdf des multiplicateurs est invariante d'échelle [22].

Il est donc possible, à partir de la connaissance du champ à une échelle quelconque, de reconstruire le champ aux échelles inférieures, et notamment jusqu'aux plus petites échelles de l'écoulement. En fait, il est possible de reconstruire un champ ayant des propriétés statistiques mimant celles d'un champ réel.

On peut alors imaginer appliquer ce principe dans un modèle LES. Le champ de dissipation (ou d'enstrophie) étant connu ou calculable à une certaine échelle (par exemple l'échelle  $\Delta$  de la maille LES), il est possible de reconstruire le champ jusqu'à l'échelle dissipative. L'état initial de la cascade (la valeur du champ à l'échelle considérée) est appelé *initiateur* de la cascade. Il est noté  $\varphi(\epsilon_0)$ . On divise ensuite l'échelle initiale par 2 (cascade dyadique) et on obtient une valeur de  $\varphi$  pour chacun des sous-ensembles de volume  $\epsilon_0^3/2^d$  ( $d$  est la dimension) en multipliant  $\varphi(\epsilon_0)$  par des valeurs  $\mathcal{M}$  tirées aléatoirement selon la pdf des multiplicateurs. En 3D, on obtient donc huit valeurs

$$\varphi(\epsilon_0/2) = 2^3 \mathcal{M} \varphi(\epsilon_0) \quad (4.1)$$

Au bout de  $n$  étapes, la valeur dans tous les sous-ensembles d'échelle  $\epsilon_0/2^n$  est déterminée selon

$$\varphi(\epsilon_0/2^n) = \varphi(\epsilon_0) 2^{3n} \prod_{i=1}^n \mathcal{M}_i \quad (4.2)$$

où les  $\mathcal{M}_i$  obéissent à la même pdf.

#### 4.1.2 Formulation du modèle

La dérivation du modèle est décrite dans [18]. Il repose sur le caractère multifractal des champs d'enstrophie. L'enstrophie  $\Omega$  est définie comme :

$$\Omega = \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} = \omega_i \omega_i \quad (4.3)$$

où  $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$  est la vorticité.

Le principe d'un modèle LES est de reconstruire le tenseur (pour la vitesse) ou vecteur (pour le scalaire) de sous-maille qui caractérise les échanges entre les échelles résolues et les échelles modélisées. La multifractalité des champs de gradient permet précisément, via la cascade multiplicative, d'exprimer à partir d'une quantité connue à une certaine échelle, les quantités correspondantes à toutes les échelles inférieures, jusqu'à l'échelle dissipative estimée. La formulation multifractale se prête donc très bien au formalisme de la LES. En substance, étant

---

1. Un objet multifractal au sens strict du terme relève d'une cascade infinie. En physique, on rencontre plutôt des pseudo-multifractales ou des multifractales observables, dont la cascade possède une échelle d'arrêt. Par commodité, on les appelle multifractale. En turbulence, l'échelle d'arrêt sera typiquement l'échelle visqueuse de dissipation.

connue la valeur de l'enstrophie à l'échelle du maillage, la donnée de la pdf des multiplicateurs et du nombre de pas de la cascade est suffisante pour reconstruire le tenseur/vecteur de sous-maille.

La construction du modèle se fait en plusieurs étapes :

- détermination de l'initiateur de la cascade multifractale (enstrophie à faire cascader)
- calcul du nombre d'étapes de la cascade, déduction de l'enstrophie de sous-maille
- calcul de la moyenne de la vitesse de sous-maille en fonction de l'enstrophie
- construction du tenseur de sous-maille

On verra que c'est la troisième étape qui contient le plus d'hypothèses et est la plus susceptible d'être améliorée.

### Initiateur de la cascade

Pour appliquer la cascade multifractale, il est nécessaire de connaître l'initiateur de celle-ci, c'est à dire l'enstrophie totale présente dans la maille, *i.e.* l'enstrophie présente à toutes les échelles inférieures à celle de la maille. Cette enstrophie est notée  $\Omega^s$ . Pour déterminer l'initiateur, on utilise la loi d'échelle sur l'enstrophie qui stipule que l'enstrophie se comporte en moyenne en  $k^{1/3}$  dans la zone inertielle. Si l'échelle LES  $\Delta$  se situe dans la zone inertielle, la loi d'échelle permet de connaître l'évolution de  $\hat{\Omega}$  de cette échelle jusqu'à l'échelle dissipative, et par intégration la totalité de l'enstrophie à faire cascader.  $\Omega^s$  correspond donc à l'aire hachurée sous la courbe en Fig.4.1 :

$$\Omega^s = \int_{k_\Delta}^{k_\eta} \hat{\Omega}(k) dk \quad (4.4)$$

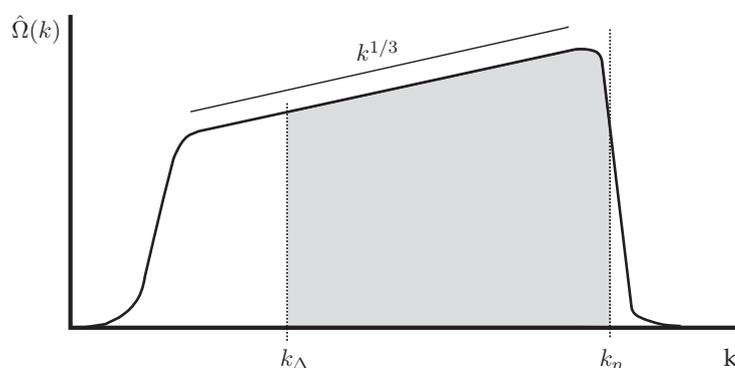


Fig. 4.1 : représentation en log-log du spectre de l'enstrophie

Toutefois on ne connaît que la pente dans l'espace spectral de cette courbe. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \Omega^s &= \int_{k_\Delta}^{k_\eta} \hat{\Omega} dk \\ &= A \left[ k_\eta^{4/3} - k_\Delta^{4/3} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Il faut donc déterminer  $A$ . Pour ce faire, on évalue à l'aide de quantités calculables dans l'espace physique l'enstrophie  $\Omega^\Delta$  présente entre les échelles  $\Delta$  et  $a\Delta$ ,  $a > 1$ , qui obéit à la

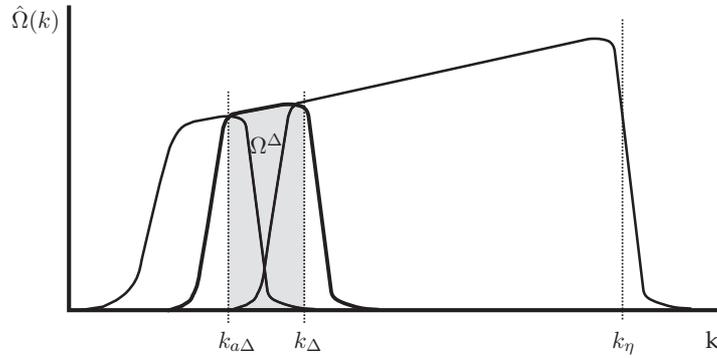
même loi en  $k^{1/3}$  si l'échelle  $a\Delta$  est elle-aussi dans la zone inertielle. La vitesse résolue  $\bar{u}$  est filtrée à l'échelle  $a\Delta$  pour obtenir une vitesse  $\underline{u}^\Delta$  :

$$\underline{u}^\Delta = \bar{u} - \overline{(\bar{u})}^{a\Delta} \quad (4.6)$$

On assimile alors  $\Omega^\Delta$  à l'enstrophie associée à la vitesse  $\underline{u}^\Delta$  :

$$\Omega^\Delta = (\nabla \times \underline{u}^\Delta) \cdot (\nabla \times \underline{u}^\Delta) \quad (4.7)$$

Du fait de la nature non linéaire de l'enstrophie, la définition 4.7 de  $\Omega^\Delta$  dans l'espace physique conduit normalement à une valeur plus grande que l'aire sous le spectre d'enstrophie entre  $\Delta$  et  $a\Delta$  (partie grisée en Fig. 4.2). En choisissant  $a$  suffisamment petit, du fait de la symétrie des zones dues aux termes croisés de l'enstrophie, on peut cependant assimiler 4.7 à la définition spectrale de  $\Omega^\Delta$  en 4.8 (cf. [18]). On choisira donc  $a = 2$  dans la suite, qui permet également d'assurer que  $a\Delta$  reste dans la zone inertielle.



**Fig. 4.2 :** schéma de l'effet du filtrage à  $a\Delta$ . La partie grisée correspond à la définition spectrale de  $\Omega^\Delta$ , la ligne continue correspond à la définition de  $\Omega^\Delta$  dans l'espace physique.

On peut donc écrire spectralement  $\Omega^\Delta$  :

$$\begin{aligned} \Omega^\Delta &= \int_{k_{a\Delta}}^{k_\Delta} \hat{\Omega} dk \\ &= A \left[ k_\Delta^{4/3} - k_{2\Delta}^{4/3} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

fournissant ainsi une expression pour la constante A :

$$A = \Omega^\Delta k_\Delta^{-4/3} \left( 1 - \left( \frac{k_{2\Delta}}{k_\Delta} \right)^{4/3} \right)^{-1} \quad (4.9)$$

En remplaçant cette expression dans 4.5, il vient :

$$\Omega^s = \Omega^\Delta \left[ \left( \frac{\Delta}{\eta_k} \right)^{4/3} - 1 \right] \left[ 1 - 2^{-4/3} \right]^{-1} \quad (4.10)$$

qui constitue l'expression en fonction de quantités connues de l'initiateur utilisé dans la suite.

### Cascade multifractale

L'application de  $\mathcal{N}$  pas de la cascade multifractale sur l'initiateur  $\Omega^s$  fournit une valeur de la norme de la vorticité  $|\omega^s|$  en tout point  $\underline{x}$  de la sous-maille [18] :

$$|\omega^s|(\underline{x}) = \left[ \Omega^s (2^{\mathcal{N}})^3 \prod_{n=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{M}_n(\underline{x}) \right]^{1/2} \quad (4.11)$$

Cette valeur correspond à une réalisation de la cascade pour chaque  $\underline{x}$ , les multiplicateurs  $\mathcal{M}_n$  obéissant à la même distribution. Il est important de noter que la cascade, stochastique, appliquée à une quantité initiale ne reconstruit pas le champ exact mais un champ ayant les mêmes propriétés statistiques.

Le nombre de pas  $\mathcal{N}$  de la cascade multifractale est déterminé comme le nombre d'étapes d'un processus dyadique de division de la longueur permettant de passer de l'échelle  $\Delta$  à l'échelle  $\eta_k$  de dissipation, soit

$$\mathcal{N} = \log_2\left(\frac{\Delta}{\eta_k}\right) \quad (4.12)$$

Le rapport  $\Delta/\eta_k$  est fourni ici encore par une loi d'échelle classique :

$$\frac{\Delta}{\eta_k} \sim Re^{9/4} \quad (4.13)$$

Le nombre de Reynolds doit être représentatif des phénomènes à l'échelle de la maille. On peut donc considérer un Reynolds de maille construit sur la vitesse résolue ou sur son gradient.

$$Re_{\Delta} = \frac{\Delta |\bar{u}|}{\nu} \quad (4.14)$$

$$Re_{\Delta} = \frac{\Delta^2 |\nabla \bar{u}|}{\nu} \quad (4.15)$$

Le choix du Reynolds utilisé peut dépendre du cas considéré, la seconde définition du Reynolds étant par exemple plus adaptée à un écoulement cisailé.

### Vitesse moyenne de sous-maille

L'équation 4.11 ne fournit que la norme de la vorticité. On recourt donc à une cascade additive d'orientations successives des vecteurs de vorticité pour reconstruire la direction de  $\omega(\underline{x})$ . En effet l'orientation de la vitesse de sous-maille est fortement corrélée à celle de la vitesse résolue [8, 50]. Il en est de même pour la vorticité. En partant de l'orientation de  $\omega^{\Delta}$  notée  $\underline{e}^{\Delta}$ , la vorticité au cours de la descente de la cascade s'oriente successivement suivant des vecteurs unitaires  $\underline{e}_n$ . Les incréments d'orientation sont notés  $\delta_n$  et la cascade additive d'orientation de la vorticité s'écrit :

$$\forall n \leq \mathcal{N}, \quad \underline{e}_n = \underline{e}_{n-1} + \delta_n \quad (4.16)$$

Du fait de l'orientation préférentielle de  $\omega^s$  selon  $\omega^{\Delta}$ , la cascade additive de décorrélation est considérée comme isotrope, avec  $\langle \delta_n \rangle = 0$ .

En introduisant le facteur d'intermittence  $\mathcal{I}$ ,

$$\mathcal{I} = \int \omega^s \cdot \omega^{\Delta} d\underline{x} \quad / \quad \int |\omega^s| |\omega^{\Delta}| d\underline{x} \quad (4.17)$$

on peut écrire la vorticité en tout point  $\underline{x}$  de sous-maille :

$$\underline{\omega}^s(\underline{x}) = |\underline{\omega}^s|(\underline{x}) \left( \mathcal{I} \underline{e}^\Delta + (1 - \mathcal{I}) \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \underline{\delta}_n \right) \quad (4.18)$$

La valeur recherch e est l'espérance  $\langle \underline{\omega}^s \rangle$  de ce champ. Elle fait nécessairement intervenir des corrélations entre les multiplicateurs  $\mathcal{M}_n$ , présents dans l'expression de  $|\underline{\omega}^s|$ , et les incréments  $\underline{\delta}_n$  de 4.18. Les moyennes des incréments d'angle conditionnées par la valeur des multiplicateurs,  $\langle \underline{e}_n \cdot \underline{e}_{n+1} | \mathcal{M}_n \rangle$ , montrent une faible corrélation pour les grandes valeurs des multiplicateurs, on peut donc négliger ces corrélations. Sous cette hypothèse, l'espérance devient :

$$\langle \underline{\omega}^s \rangle = \mathcal{I} \langle |\underline{\omega}^s| \rangle \underline{e}^\Delta + (1 - \mathcal{I}) \langle |\underline{\omega}^s| \rangle \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \langle \underline{\delta}_n \rangle \quad (4.19)$$

Sous l'hypothèse de cascade additive isotrope :

$$\langle \underline{\omega}^s \rangle = \mathcal{I} 2^{3/2\mathcal{N}} \left\langle \prod_{n=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{M}_n^{1/2} \right\rangle (\Omega^s)^{1/2} \underline{e}^\Delta \quad (4.20)$$

Les intégrales de Biot-Savard, de la même façon que pour les champs magnétiques, permettent de reconstruire explicitement une expression algébrique de  $\underline{u}^{sgs}$  en tout point de sous-maille en fonction de la vorticité.

$$\underline{u}^s(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \underline{\omega}^s(\underline{x}') \times \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3 \underline{x}' \quad (4.21)$$

L'intégrale de Biot-Savard pour la moyenne s'écrit :

$$\langle \underline{u}^s \rangle = \frac{1}{4\pi} \int \langle \underline{\omega}^s \rangle \times \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3 \underline{x}' \quad (4.22)$$

La distribution des multiplicateurs  $\mathcal{M}_n$  étant la même pour tous  $\underline{x}$ , on peut sortir les multiplicateurs de l'intégrale. On fait alors apparaître l'intégrale de Biot-Savard pour  $\underline{\omega}^\Delta$ , qui vaut  $\underline{u}^\Delta$  :

$$\langle \underline{u}^s \rangle = \mathcal{I} 2^{3/2\mathcal{N}} \left\langle \prod_{n=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{M}_n^{1/2} \right\rangle \left( \frac{\Omega^s}{\Omega^\Delta} \right)^{1/2} \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int (\Omega^\Delta)^{1/2} \underline{e}^\Delta \times \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3 \underline{x}'}_{\underline{u}^\Delta} \quad (4.23)$$

Enfin, les multiplicateurs étant statistiquement indépendants, on obtient une expression pour  $\underline{u}^s$  :

$$\begin{aligned} \langle \underline{u}^s \rangle &= \mathcal{I} 2^{3/2\mathcal{N}} \langle \mathcal{M}^{1/2} \rangle^{\mathcal{N}} \left( \frac{\Omega^s}{\Omega^\Delta} \right)^{1/2} \underline{u}^\Delta \\ &= \mathcal{I} 2^{3/2\mathcal{N}} \langle \mathcal{M}^{1/2} \rangle^{\mathcal{N}} \left[ \left( 2^{4/3\mathcal{N}} - 1 \right) \left( 1 - 2^{-4/3} \right)^{-1} \right]^{1/2} \underline{u}^\Delta \end{aligned} \quad (4.24)$$

Reste à évaluer le facteur d'intermittence. Ceci est réalisé en passant à la limite. En effet,  $\underline{u}^s$  doit rester fini quand  $Re_\Delta$  tend vers l'infini, donc quand  $\mathcal{N}$  tend vers l'infini, impliquant le comportement asymptotique suivant :

$$C_b = \mathcal{I} 2^{3/2\mathcal{N}} \langle \mathcal{M}^{1/2} \rangle^{\mathcal{N}} 2^{2/3\mathcal{N}} \quad (4.25)$$

où  $C_b$  est une constante. Le facteur d'intermittence est donc

$$\mathcal{I} \sim C_b 2^{-3/2\mathcal{N}} \langle \mathcal{M}^{1/2} \rangle^{-\mathcal{N}} 2^{-2/3\mathcal{N}} \quad (4.26)$$

On obtient donc une expression de  $\underline{u}^s$  en fonction de  $\underline{u}^\Delta$  et  $\mathcal{N}$  uniquement :

$$\underline{u}^s = C_b 2^{-2/3\mathcal{N}} \left[ \left( 2^{4/3\mathcal{N}} - 1 \right) \left( 1 - 2^{-4/3} \right)^{-1} \right]^{1/2} \underline{u}^\Delta \quad (4.27)$$

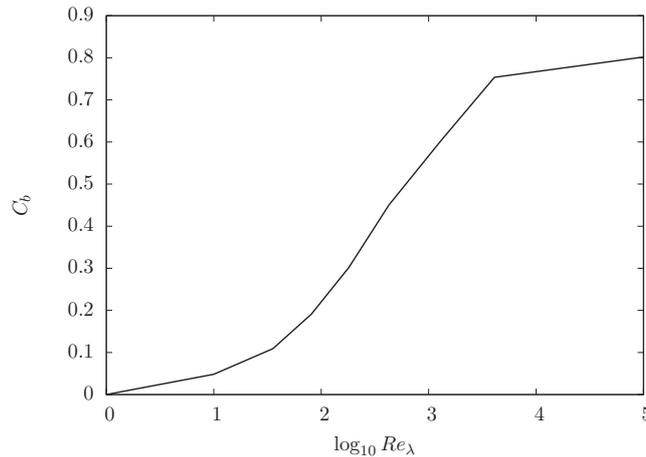
La formulation finale du modèle est donc :

$$\underline{\tau}^* = B \overline{\underline{u}^\Delta \underline{u}} + B \overline{\underline{u} \underline{u}^\Delta} + B^2 \overline{\underline{u}^\Delta \underline{u}^\Delta} \quad (4.28)$$

avec

$$B = C_b 2^{-2/3\mathcal{N}} \left[ \left( 1 - 2^{-4/3} \right)^{-1} \left( 2^{4/3\mathcal{N}} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (4.29)$$

Du fait du passage à la limite, la constante  $C_b$  est censée être universelle, ne dépendant pas du nombre de Reynolds. Du fait qu'elle intègre toute l'information liée aux multiplicateurs, donc à l'intermittence, il s'avère que cette constante montre une dépendance au nombre de Reynolds. Burton dans [16] détermine à l'aide de tests *a priori* du modèle sur des THI la dépendance de  $C_b$  au nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor. Comme on peut le voir en Fig. 4.3, la constante tend asymptotiquement vers une constante quand  $Re_\lambda \rightarrow \infty$ . De la



**Fig. 4.3** : évolution de la constante  $C_b$  du modèle en fonction du nombre de Reynolds  $Re_\lambda$ . Figure issue de [16]

même façon on peut s'attendre à ce que la constante  $C_b$  dépende de la géométrie de la simulation et des conditions limites ainsi que du régime local de l'écoulement en géométrie complexe.

Une discussion du modèle, dédiée au scalaire mais applicable à la vitesse, peut être trouvée en sections 5.1.4 et 5.3.3.3.

### 4.1.3 Stabilité numérique et limiteur de cascade inverse

Le modèle multifractal formulé ainsi fournit une expression non linéaire pour le tenseur de sous-maille. Il n'est donc pas dissipatif comme peuvent l'être les modèles de gradient tels les modèles de Smagorinsky. De la même façon que pour un modèle de similarité, on pourrait donc lui adjoindre une partie dissipative afin de construire un modèle mixte.

La stratégie choisie est ici différente. Le caractère non dissipatif du modèle est lié à la remontée d'énergie possible des échelles de sous-maille vers les échelles résolues, que permet le modèle. Ce "backscattering", bien que physiquement avéré, est source d'instabilité numérique [62] puisqu'une quantité positive d'énergie peut être transférée aux échelles résolues. L'idée est donc de ne laisser remonter qu'un certain pourcentage de cette énergie. Cette méthode, bien que basée sur des phénomènes physiques, n'est motivée que par des considérations d'ordre numérique [17].

L'énergie transférée des échelles résolues vers les échelles de sous-maille peut être évaluée (cf. 4.2) comme :

$$\mathcal{P}^* = -\underline{\underline{\tau}}^* : \underline{\underline{S}} = \sum_{i,j} -\tau_{ij}^* \bar{S}_{ij} \quad (4.30)$$

$$\mathcal{P}^+ = -\overline{\underline{u}} \overline{\underline{u}} : \underline{\underline{S}} = \sum_{i,j} -\overline{\underline{u}_i \underline{u}_j} \bar{S}_{ij} \quad (4.31)$$

où

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Chacun de ces termes est la somme de 9 composantes en 3D, ne faisant intervenir que des quantités résolues ou fournies par le modèle. On peut donc choisir de réduire d'un certain pourcentage les composantes négatives de ces quantités après l'application du modèle.

Les composantes des tenseurs  $\underline{\underline{\tau}}^*$  et  $\overline{\underline{u}} \overline{\underline{u}}$  sont donc réduites d'un certain facteur  $(1 - C)$  avec  $0 \leq C \leq 1$  si ces composantes contribuent à la cascade inverse :

$$\tau_{ij}^* = (1 - C^*) \tau_{ij}^* \quad \text{si} \quad -\tau_{ij}^* \bar{S}_{ij} < 0 \quad (4.32)$$

$$\overline{\underline{u}_i \underline{u}_j} = (1 - C^+) \overline{\underline{u}_i \underline{u}_j} \quad \text{si} \quad -\overline{\underline{u}_i \underline{u}_j} \bar{S}_{ij} < 0 \quad (4.33)$$

où les coefficients  $C^*$  et  $C^+$  du limiteur de cascade inverse peuvent être choisis constants ou déterminés dynamiquement [17].

## 4.2 Test sur la vitesse

### 4.2.1 Implantation

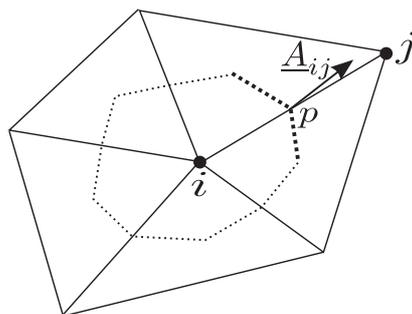
Le modèle est destiné à être utilisé dans un contexte industriel et scientifique. Cependant, la LES nécessite des schémas de discrétisation d'ordre suffisamment élevé pour donner des résultats précis. YALES2 est un code répondant à ces deux critères.

## YALES2

Ce code, développé au CORIA<sup>2</sup> [57] possède en effet les propriétés suivantes :

- *code de calcul Volumes Finis (VF) incompressible*, destiné à résoudre des équations de conservation,
- *grille non structurée*, basée sur un maillage dual constitué de triangles (2D) ou de tétraèdres (3D), permettant la simulation de géométries complexes fréquentes dans un contexte industriel,
- *discrétisations spatiale et temporelle jusqu'à l'ordre 4*, le schéma spatial étant centré,
- *code massivement parallèle* présentant un scaling performant jusqu'à plusieurs milliers de processeurs.

YALES2 est un code résolvant les équations de Navier-Stokes incompressibles dans leur formulation Volumes Finis. Il prend en entrée des maillages non structurés constitués de triangles, quadrangles en 2D, et de tétraèdres et hexaèdres en 3D, susceptibles de paver des géométries complexes. Les volumes de contrôle  $\Omega$ , polyédriques sont ensuite reconstruits : leurs centres sont les nœuds du maillage dual fourni et les cellules sont découpées pour reconstruire les faces des volumes de contrôle en pointillés sur le schéma 4.4. Les sommets du volume de contrôle sont donc les centres des segments et des éléments.



**Fig. 4.4 :** Construction des volumes de contrôle  $\Omega$  dans le code YALES2 en 2D.  $\Omega$  est délimité par le contour en pointillés.

Au centre  $p$  de chaque segment, constituant une paire de nœuds, est associée la normale sortante  $\underline{A}_{ij}$  de la facette correspondante (en pointillés gras dans 4.4). Cette normale est estimée comme la moyenne des normales des surfaces constituant la facette (2 surfaces en 2D) ; sa norme correspond à l'aire totale de cette facette.

Les flux nécessaires à la formulation VF sont calculés au niveau de ces paires. A partir de l'intégrale sur un volume de contrôle de l'équation de quantité de mouvement

$$\int_{\Omega} \underline{u}_{,t} dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} \underline{u} dV - \nu \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \underline{u} dV + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \nabla P dV = 0 \quad (4.34)$$

le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire

$$\int_{\Omega} \underline{u}_{,t} dV + \int_{\omega} \underline{u} \underline{u} \cdot dS - \nu \int_{\omega} \nabla \underline{u} \cdot dS + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \nabla P dV = 0 \quad (4.35)$$

2. Merci à Vincent Moureau et Ghislain Lartigue du laboratoire CORIA, ainsi qu'au groupement scientifique SUCCESS pour la mise à disposition du code YALES2.

où  $\omega$  est le contour du volume de contrôle  $\Omega$ . Pour obtenir l'ordre 2 en espace, une vitesse convective  $\underline{U}_{ij}$  est reconstruite au niveau des paires de nœuds :

$$\underline{U}_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{u}_i + \underline{u}_j). \quad (4.36)$$

et le gradient de vitesse au niveau des paires est reconstruit à partir des valeurs de vitesse en  $i$  et  $j$  à l'ordre 1. En considérant que  $\omega = \bigcup_j A_{ij}$ , où  $\pi(i)$  est l'ensemble des points  $j$  partageant une paire avec  $i$ , et que les quantités  $\underline{u}_{,t}$  et  $\nabla P$  sont homogènes sur le volume  $\Omega$ , 4.35 peut être réécrite

$$V \underline{u}_{i,t} + \underline{u}_i \sum_{j \in \pi(i)} \underline{U}_{ij} \cdot \underline{A}_{ij} - \nu \sum_{j \in \pi(i)} \nabla \underline{u}_{ij} \cdot \underline{A}_{ij} + \frac{V}{\rho} \nabla P_i = 0 \quad (4.37)$$

qui est l'équation discrète à résoudre.

### formulation incompressible

Comme dans beaucoup de codes incompressibles, la condition d'incompressibilité (équation de continuité 2.2a) n'est pas directement résolue mais agit comme une contrainte imposée à travers le champ de pression. Cette méthode conduit à séparer l'avancement en temps en deux opérations (operator splitting) selon la méthode décrite dans [23] :

- *étape de prédiction* : un champ de vitesse non solénoïdal  $\underline{u}^*$  est calculé à l'aide du champ de pression en début de pas de temps.
- *étape de correction* : un nouveau champ de pression résultant de l'imposition de la contrainte d'incompressibilité est calculé ; le champ de vitesse est alors modifié à l'aide de ce nouveau champ.

Le champ de pression est donc vu non pas comme un champ physique, mais plutôt comme un multiplicateur de Lagrange permettant l'application implicite de la contrainte d'incompressibilité.

L'étape de prédiction se fait par application de la relation algébrique suivante :

$$\underline{u}^* = \underline{u}^n - \frac{\delta t}{V} \left( \frac{1}{\rho} \nabla P^n + \nabla \cdot \underline{u}^n \underline{u}^n - \nu \Delta \underline{u}^n \right) \quad (4.38)$$

On obtient ensuite une équation de Poisson pour la pression en appliquant l'opérateur divergence à l'équation de quantité de mouvement (2.2b) et en remplaçant  $\nabla \nabla \underline{u}^{n+1} = 0$  dans cette équation :

$$\nabla^2 p^* = \rho \nabla \cdot \underline{u}^* \quad (4.39)$$

La vitesse est enfin corrigée grâce au gradient de cette nouvelle pression :

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^* - \frac{\delta t}{\rho} \nabla p^* \quad (4.40)$$

L'équation 4.39 est résolue à l'aide d'un solveur linéaire DPCG (Deflated Preconditioned Conjugate Gradient) faisant appel à la déflation sur plusieurs niveaux de grille [51].

Le modèle multifractal lui-même implique le calcul, au début de chaque pas de temps, du terme  $\nabla \cdot \underline{\tau}$  de l'équation 3.2b. En formulation VF, ce terme est calculé comme la somme sur les facettes du flux associé au tenseur  $\tau$  :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\tau} &= \sum_{j \in \pi(i)} \underline{\tau}_{ij} \cdot \underline{A}_{ij} \\ &= \sum_{j \in \pi(i)} \frac{1}{2} (\underline{\tau}_i + \underline{\tau}_j) \cdot \underline{A}_{ij} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Le modèle peut également être implanté dans tout code résolvant les équations de Navier-Stokes. On rappelle à cet égard qu'un modèle LES peut n'apparaître que comme l'ajout d'un terme source aux équations de transport des quantités filtrées.

Une contrainte supplémentaire apparaît cependant, liée à la nécessité d'un filtrage des champs résolus lors de l'application du modèle, pour le calcul de  $\underline{\sigma}$  ou  $\underline{\tau}$  : il est nécessaire de pouvoir appliquer ce filtrage, et cela impose certaines restrictions notamment dans un code non structuré. Dans ce contexte, un filtrage par moyenne des points adjacents est aisé à implanter (filtre porte (Tab. 3.1)), et le filtrage gaussien peut être approché par l'application d'une série tronquée d'opérateurs laplacien [58]. Cette facilité d'application dans un code non structuré a présidé au choix de ces deux opérateurs de filtrage dans l'implantation du modèle. Le filtrage implicite de Raymond [69], supposé spectralement plus sélectif qu'un filtrage gaussien, était également disponible dans le code. Les tests du modèle ont montré que ce filtre apportait des résultats moins bons qu'avec les filtres moyenne ou gaussien.

L'algorithme permettant d'appliquer le modèle multifractal est donc le suivant :

- filtrage de  $\bar{u}$  à  $2\Delta$ , calcul de  $\underline{u}^\Delta$  via 4.6
- en tout point, calcul de  $Re_\Delta$ , calcul de  $\mathcal{N} = \log_2 \Delta / \eta_k$ ,  
calcul de  $\mathcal{B} = C_b 2^{-2/3\mathcal{N}} \left[ (1 - 2^{-4/3})^{-1} (2^{4/3\mathcal{N}} - 1) \right]^{1/2}$
- en tout point assemblage de  $\sigma^* = B \overline{\underline{u}^\Delta \bar{u}} + B \overline{\bar{u} \underline{u}^\Delta} + B^2 \overline{\underline{u}^\Delta \underline{u}^\Delta}$
- filtrage de  $\bar{u} \bar{u}$
- limitation du backscattering par diminution des composantes négatives de  $\mathcal{P}^*$  (resp.  $\mathcal{P}^+$ ) d'un pourcentage  $C^*$  (resp.  $C^+$ )
- avancement en temps à l'aide de  $\nabla \cdot \sigma^*$  et  $\nabla \cdot \overline{\bar{u} \bar{u}}$

En terme de temps de calcul, le modèle lorsque le limiteur est activé sur  $\mathcal{P}^*$  et  $\mathcal{P}^+$  est environ 30% plus coûteux qu'un Smagorinsky dynamique localisé.

## 4.2.2 THI

### 4.2.2.1 Hypothèses

Les tests *a posteriori* présentés ici visent essentiellement à valider l'implantation du modèle LES multifractal (MFLES) dans le code YALES2. Une validation plus poussée peut être trouvée dans [18] et [17]. Les résultats consistent essentiellement en spectres d'énergie issus de calculs de turbulence homogène isotrope, ainsi que de courbes d'évolution des grandeurs turbulentes intégrées sur le domaine, comparés entre des simulations directes et des simulations grandes échelles. L'énergie turbulente n'est pas forcée afin de tester la réponse du modèle à la

décroissance de la turbulence, en terme de stabilité et de fidélité.

Deux cas de THI sont considérés, correspondant à deux jeux de propriétés de la turbulence ainsi que de maillage. Les propriétés initiales des deux cas sont résumées dans le tableau 4.1.

L'opérateur  $\overline{(\cdot)}$  utilisé pour calculer les grandeurs qui seront comparées à celles produites par le modèle LES est un filtrage gaussien.

	cas 1	cas 2	unités
$Re_\lambda$	35	83	[-]
$\nu$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$[m^2.s^{-1}]$
$u'$	70	118	$[m.s^{-1}]$
$L_t$	$2.2 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	[m]
$\eta_k$	$6.01 \times 10^{-5}$	$3.92 \times 10^{-5}$	[m]
$d$	$7.5 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-2}$	[m]
$\tau$	$3.5 \times 10^{-5}$	$4.9 \times 10^{-5}$	[s]
maillage DNS	$128^3$	$256^3$	[-]
maillage LES	$16^3$	$16^3$	[-]

**Tab. 4.1 :** propriétés initiales des THI utilisées pour les tests du modèle MFLES sur la vitesse.  $d$  est la taille du domaine et  $L_t$  la longueur intégrale.

Le champ de vitesse de la DNS est initialisé suivant un spectre de Passot-Pouquet [61]. Le champ LES initial résulte du filtrage au moyen d'un filtre gaussien de ce même champ.

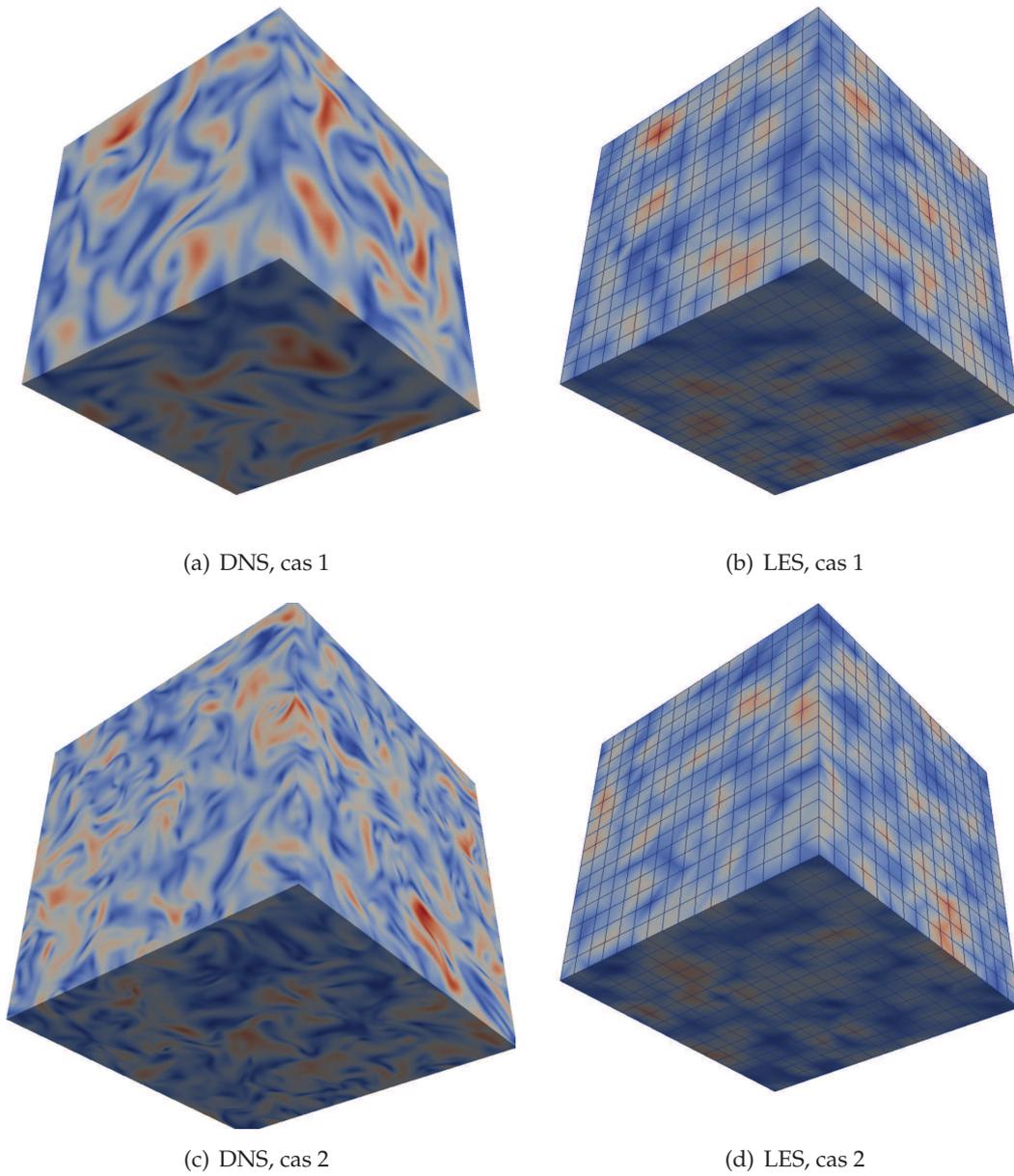
Le spectre d'initialisation est peu physique et la dissipation passe par une phase d'augmentation avant de décroître réellement. Les modèles de LES - Smagorinsky comme multifractal - sont incapables de reproduire l'évolution initiale du calcul pour s'ajuster au spectre non physique initial. Afin de tester réellement la capacité des modèles à reproduire la décroissance de la turbulence, le champ initial utilisé dans la LES résultera donc plutôt du filtrage du champ DNS au début de la réelle décroissance de la THI, correspondant ici à  $t = 1.0 \times 10^{-5}s$  pour le cas 1 et  $t = 4.998 \times 10^{-5}s$  pour le cas 2. Les champs de vitesse correspondants sont reproduits en Fig. 4.5.

En sus d'une reproduction correcte des spectres d'énergie, la validité du modèle peut être évaluée en comparant, *a posteriori* entre la DNS et le calcul LES, le transfert d'énergie cinétique depuis les échelles résolues vers les échelles de sous-maille. En effet, l'équation de transport de l'énergie cinétique résolue s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i} - \bar{\epsilon} - \mathcal{P} \quad (4.42)$$

Dans 4.42,  $\bar{\epsilon}$  représente la dissipation de l'énergie résolue,

$$\bar{\epsilon} = \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (4.43)$$



**Fig. 4.5 :** champs de vitesse initiaux des tests sur la vitesse

$\mathcal{F}$  est un vecteur flux dont l'intégrale sur le domaine périodique de la THI est nulle :

$$\mathcal{F}_i = \bar{u}_j (\overline{u_i u_j} + \tau_{ij}^*) - \bar{u}_i k + \bar{u}_i \frac{\bar{p}}{\rho} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (4.44)$$

et  $\mathcal{P}$ , la production d'énergie de sous-maille, est constitué de deux contributions  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* + \mathcal{P}^+$  :

$$\mathcal{P}^* = -\tau^* : \bar{S} \quad (4.45a)$$

$$\mathcal{P}^+ = -\bar{u} \bar{u} : \bar{S} \quad (4.45b)$$

où

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.46)$$

Pour être validé, le modèle doit notamment correctement reproduire les valeurs intégrées de production d'énergie de sous-maille  $\mathcal{P}$ . La dissipation totale  $\bar{\varepsilon} + \mathcal{P}^* + \mathcal{P}^+$  est également un indicateur de la fidélité globale du modèle.

#### 4.2.2.2 Résultats

##### Cas 1

La constante  $C_b$  du modèle dépend du nombre de Reynolds  $Re_\lambda$ . La courbe 4.3 d'après Burton [16] préconise pour  $Re_\lambda = 35$  une constante

$$C_b = 0.117 \quad (4.47)$$

Cette constante, issue d'une régression minimisant l'erreur commise sur la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$ , n'est pas forcément celle qui reproduira au mieux les spectres DNS et la décroissance correcte de la turbulence. De plus, elle peut dépendre de l'implantation numérique effective du modèle, Burton la dérivant à partir d'un code éléments finis tandis que la présente implantation repose sur une formulation volumes finis. Le filtrage, de la DNS comme des champs LES, est en outre différent dans les deux cas : Burton utilise des filtres boîte pour calculer les champs résolus LES, et un filtrage de Legendre pour le calcul de  $\underline{u}^\Delta$ .

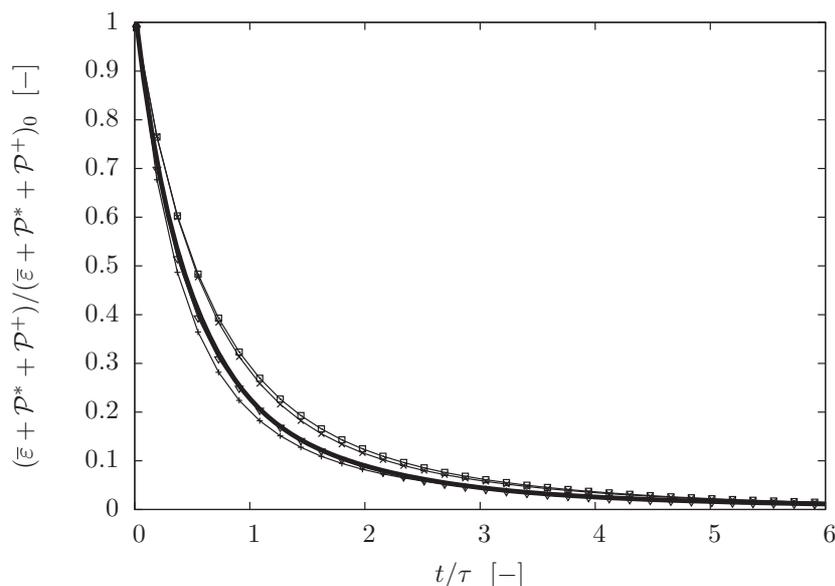
Afin de tester toutes les hypothèses, les présents résultats utilisent plusieurs  $C_b$ , comprenant notamment la constante admise par Burton de 0.117. Une valeur beaucoup plus élevée de 1.25 est trouvée en essayant de reproduire la décroissance de la turbulence par le modèle, c'est à dire en faisant varier cette constante jusqu'à trouver la courbe d'évolution de la dissipation totale  $\bar{\varepsilon} + \mathcal{P}^* + \mathcal{P}^+$  du modèle la plus proche de la DNS. Cette courbe est représentée en Fig. 4.6 pour  $C_b = 1.25$  et  $C_b = 0.117$ , avec des valeurs du limiteur de cascade inverse de  $BSSL = 15\%$ . L'accord est excellent avec la DNS pour la plus forte constante  $C_b$ . Pour la plus faible en revanche, la dissipation totale est systématiquement surestimée. A titre de comparaison, les courbes correspondantes pour les modèles de Smagorinsky sont incluses. Le Smagorinsky dynamique est relativement proche de la courbe DNS, tandis que la LES multifractale à  $C_b = 0.117$  est moins bonne que le Smagorinsky classique pour ce critère.

La dissipation totale est une donnée importante pour tester la bonne reproduction de la décroissance de la turbulence par le modèle. Cette dissipation contient plusieurs termes qui peuvent être explicités séparément. Si la dissipation totale permet d'évaluer la fidélité globale de celui-ci, l'action directe du modèle est évaluée via  $\mathcal{P}^*$ . Les courbes d'évolution temporelle de cette quantité sont reproduites en Fig. 4.7 pour  $C_b = 1.25$  et 4.8 pour  $C_b = 0.117$ .

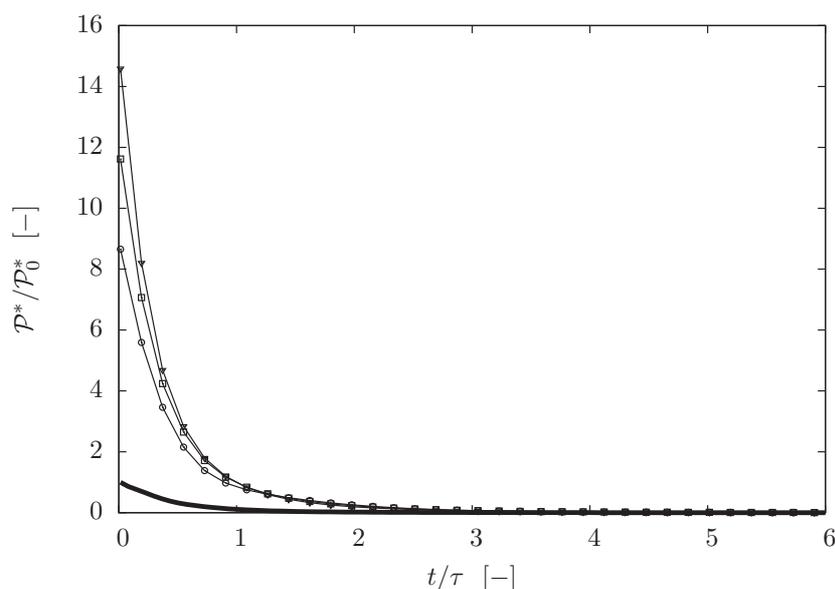
La production de sous-maille est surestimée d'un ordre de grandeur quand la constante vaut 1.25, tandis que la constante de  $C_b = 0.117$  permet une excellente reproduction de  $\mathcal{P}^*$  obtenue dans la DNS pour une limitation de cascade inverse de 15%.

Notons qu'appliquer à la constante un facteur 10 conduit à une multiplication par 10 de la valeur de  $\mathcal{P}^*$  prédite par le modèle, correspondant donc à un instant donné à une multiplication par 10 du tenseur  $\sigma^*$ . Celui-ci n'est pourtant pas linéaire en  $C_b$ . Ceci fournit un indice pour expliquer le fait qu'une des valeurs de  $C_b$  reproduit correctement la dissipation totale mais pas la production de sous-maille, et inversement pour l'autre valeur. En effet, on est ici à faible  $Re_\lambda$ , associé à un faible rapport  $\Delta/\eta_k$ . La vitesse  $\underline{u}^\Delta$  prend donc de petites valeurs, la partie quadratique en  $C_b$  de l'expression de  $\sigma^*$  devenant négligeable.

Un facteur  $128/16 = 8$  entre l'échelle de coupure LES et l'échelle de Kolmogorov est loin d'être

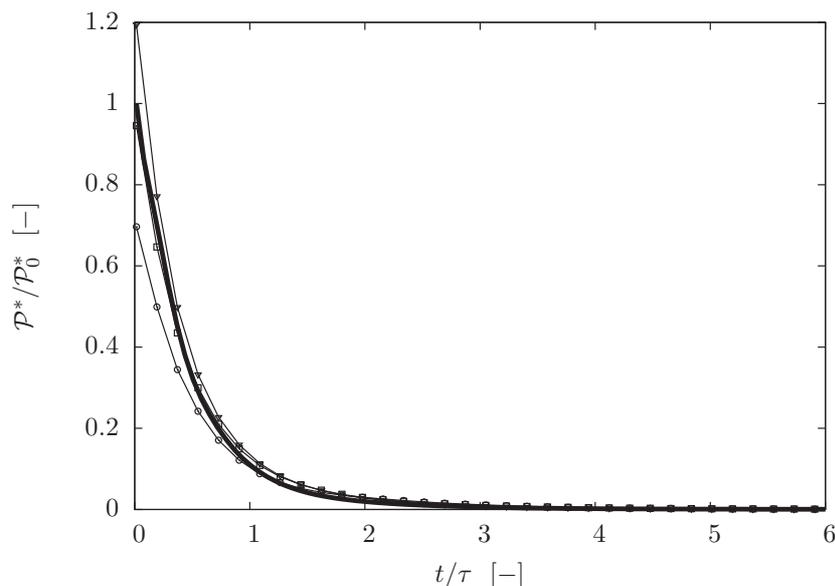


**Fig. 4.6 :** cas 1 - évolution de la dissipation totale  $\bar{\varepsilon} + \mathcal{P}^* + \mathcal{P}^+$  au cours du temps. Les valeurs sont normalisées par  $(\bar{\varepsilon} + \mathcal{P}^* + \mathcal{P}^+)_0$ , valeur de la dissipation totale initiale issue de la DNS.  
 — : DNS ;  $\square$  :  $C_b = 0.117$  ;  $\nabla$  :  $C_b = 1.25$  ;  $\times$  : Smagorinsky classique ; + : Smagorinsky dynamique



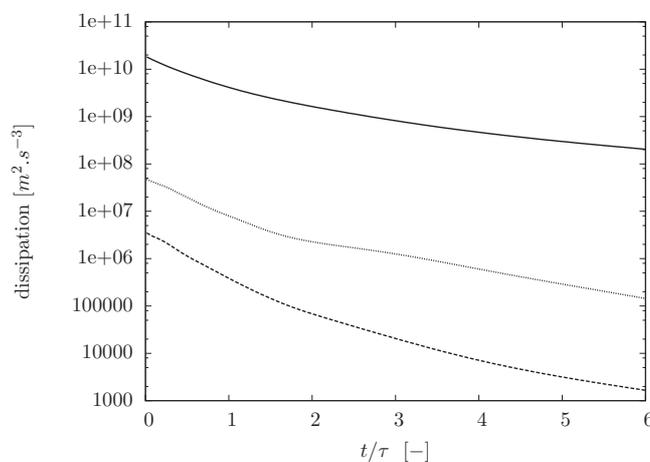
**Fig. 4.7 :** cas 1 - évolution de la partie non-résolue  $\mathcal{P}^*$  de la production de sous-maille au cours du temps pour différentes valeurs du limiteur de backscattering.  $C_b = 1.25$ .  
 — : DNS ;  $\circ$  : limiteur 0% ;  $\square$  : limiteur 15% ;  $\nabla$  : limiteur 30%

représentatif d'un cadre réel d'application de la LES, de sorte que l'influence du modèle reste limitée. L'énergie transférée des échelles résolues vers les échelles de sous-maille est peu importante au regard de la dissipation visqueuse de l'énergie cinétique résolue (le facteur entre les deux est de l'ordre de 5000), dont l'évolution est reproduite en fig. 4.9. Un test plus résolu, à  $Re$  plus élevé permettant un filtrage à une échelle plus éloignée de l'échelle dissipative, semble



**Fig. 4.8 :** cas 1 - évolution de la partie non-résolue  $\mathcal{P}^*$  de la production de sous-maille au cours du temps pour différentes valeurs du limiteur de backscattering.  $C_b = 0.117$ .  
 — : DNS ;  $\circ$  : limiteur 0% ;  $\square$  : limiteur 15% ;  $\nabla$  : limiteur 30%

nécessaire. Ce test correspond au cas 2.

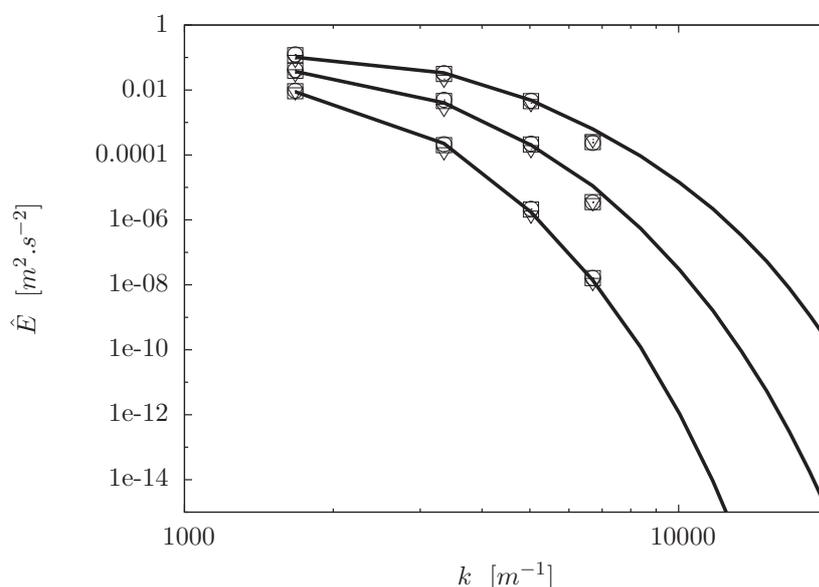


**Fig. 4.9 :** cas 1 - évolution des différents taux de transfert d'énergie au cours du temps, issus de la DNS.  
 —  $\bar{\epsilon}$  ; - - -  $\mathcal{P}^*$  ; .....  $\mathcal{P}^+$

L'effet de la constante du modèle sur la reproduction des spectres d'énergie cinétique est présenté en Fig. 4.10. Les spectres de la DNS sont représentés à différents instants, ainsi que ceux de la LES pour  $C_b = 0.117$ ,  $C_b = 1.25$  et pour une valeur intermédiaire. Les petites échelles résolues sont très peu affectées par le changement de constante, en lien avec la faible contribution de  $\sigma^*$  à la dissipation totale. En revanche, les échelles intermédiaires sont mieux reproduites avec les constantes plus faibles qu'avec  $C_b = 1.25$ , qui conduit à une sous-estimation

systematique de leur énergie.

Une meilleure reproduction des spectres conduirait donc à préférer une valeur de 0.117 pour la constante du modèle.



**Fig. 4.10 :** cas 1 - évolution des spectres d'énergie cinétique lors de la décroissance de la turbulence pour différentes constantes  $C_b$ . Initialement,  $Re_\lambda = 35$ . La DNS comprend  $128^3$  points et la LES  $16^3$ . Les spectres correspondent respectivement (du haut vers le bas) à  $\frac{t}{\tau} = 2.9, 5.7$  et  $11.4$ .

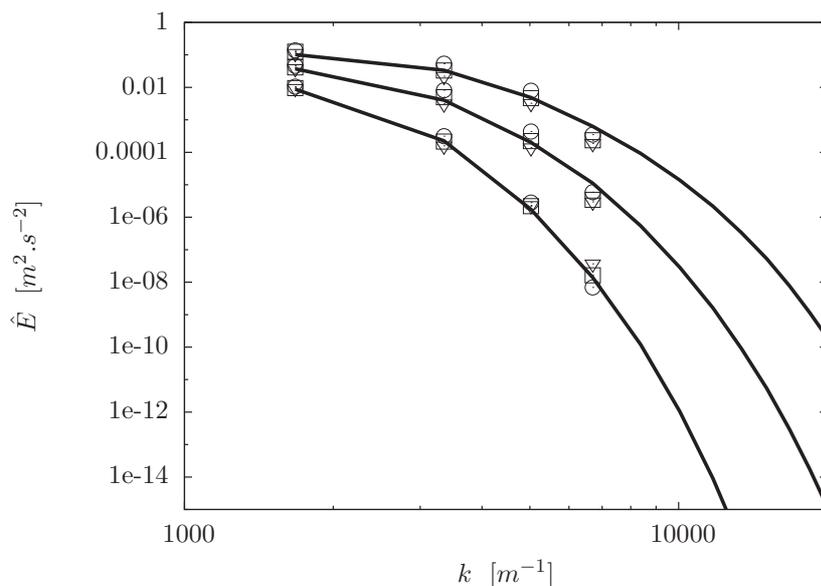
— : DNS ;  $\circ$  :  $C_b = 0.118$  ;  $\square$  :  $C_b = 0.3$  ;  $\nabla$  :  $C_b = 1.25$

L'influence de la valeur du limiteur de backscattering est montrée en Fig. 4.11 pour  $C_b = 0.117$ . Le calcul reste stable même en l'absence de limiteur. La turbulence n'étant pas forcée, cette constatation n'est cependant guère étonnante.

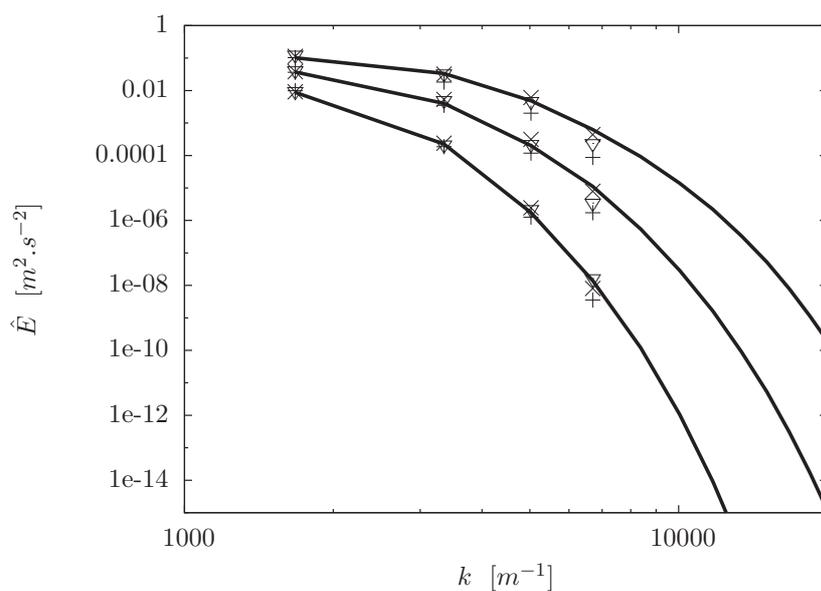
Le limiteur montre une action au-delà de la simple stabilisation numérique : il modifie également la fidélité du modèle. On peut voir qu'il influe sur toute la largeur du spectre, mais de façon plus prégnante aux petites échelles résolues. Dans tous les cas l'énergie des échelles médianes est légèrement surestimée, tandis que les échelles proches de l'échelle de coupure voient leur énergie sous-estimée par le modèle par rapport à la DNS, au moins en début de calcul. Dans ces calculs, les deux termes  $\mathcal{P}^+$  et  $\mathcal{P}^*$  sont limités avec le même facteur. La limitation de  $\mathcal{P}^+$ , qui influe plus sur les échelles médianes, bénéficie d'avantage d'une valeur de 15%, tandis qu'une valeur plus faible pour la limitation de  $\mathcal{P}^*$  semble judicieuse pour reproduire au mieux les petites échelles.

Au vu des courbes d'évolution temporelle des termes de transfert d'énergie vers les petites échelles, une valeur de 15% de limitation est retenue comme procurant une meilleure fidélité.

La Fig. 4.12 compare les spectres obtenus pour les valeurs retenues de la MFLES ( $C_b = 0.117$  et  $BSL = 15\%$ ) avec ceux tirés du modèle Smagorinsky classique et de sa version dynamique localisée. Si le modèle ne reproduit pas exactement les spectres de la DNS, il reste meilleur que le dynamique localisé, sans toutefois égaler la reproduction des spectres DNS par le Smagorinsky classique.



**Fig. 4.11 :** cas 1 - évolution des spectres d'énergie cinétique lors de la décroissance de la turbulence pour différentes valeurs du limiteur de backscattering. THI décroissante à  $Re_\lambda = 35$ .  
 — : DNS ;  $\circ$  : limiteur 0% ;  $\square$  : limiteur 15% ;  $\nabla$  : limiteur 30%

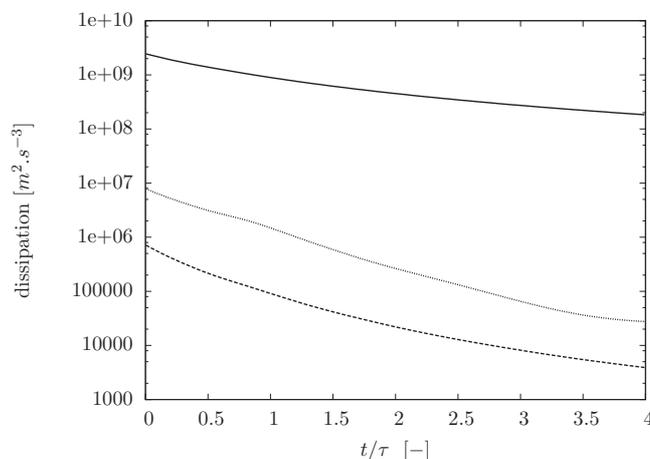


**Fig. 4.12 :** cas 1 - comparaison des spectres obtenus par MFLES, modèle de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique localisé.  
 — : DNS ;  $\nabla$  : MFLES ;  $\times$  : Smagorinsky classique ; + : Smagorinsky dynamique

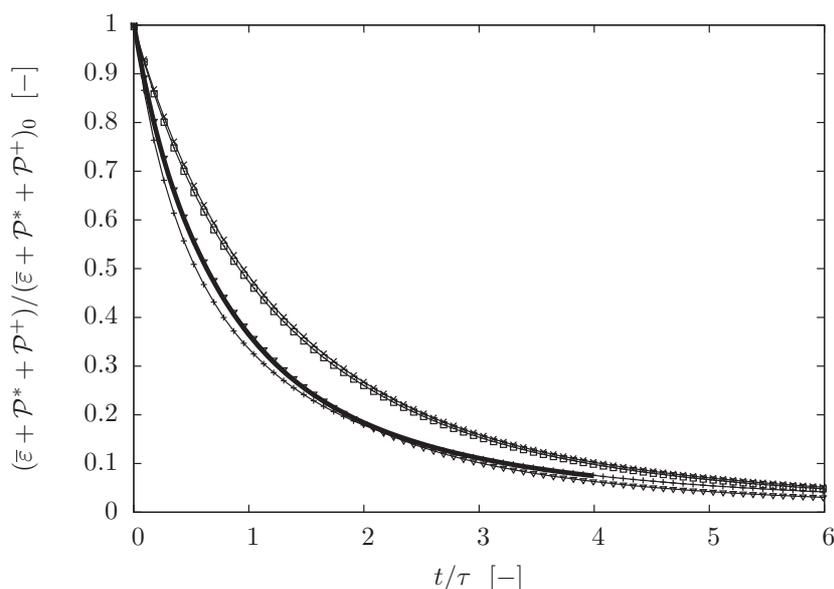
## Cas 2

Le deuxième cas testé est une THI à un  $Re$  plus élevé de 83. Le rapport entre la dissipation visqueuse des échelles résolues et la production de sous-maille due au modèle (Fig. 4.13) reste cependant de l'ordre de 3000 en début de décroissance. Pour ce nombre de Reynolds, la

constante issue de 4.3 vaut  $C_b = 0.28$  tandis que celle donnant la meilleure adéquation entre la courbe de dissipation totale LES et celle de la DNS vaut  $C_b = 1.7$ . La courbe correspondante en Fig.4.14 montre les mêmes tendances que pour le cas 1.



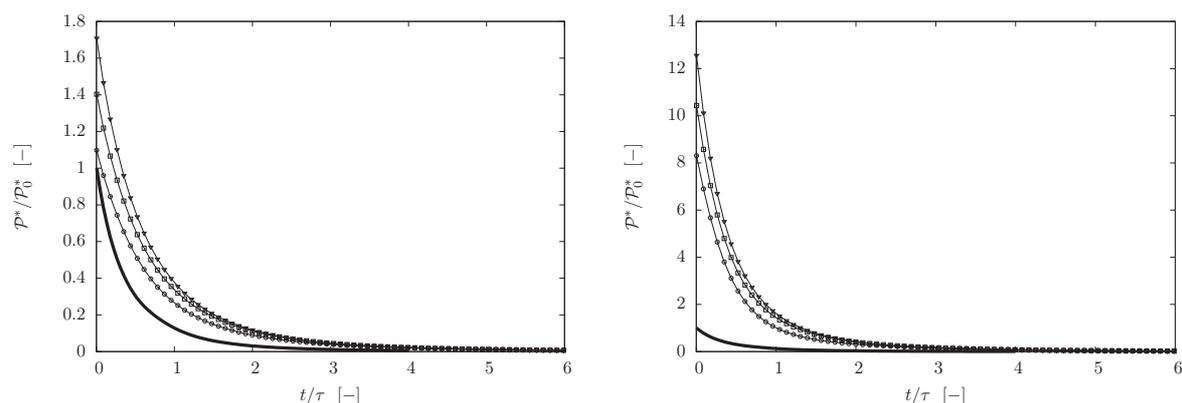
**Fig. 4.13 :** cas 2 - évolution des différents taux de transfert d'énergie au cours du temps, issus de la DNS.  
 —  $\bar{\varepsilon}$ ; - - -  $\mathcal{P}^*$ ; .....  $\mathcal{P}^+$



**Fig. 4.14 :** cas 2 - évolution de la dissipation totale  $\bar{\varepsilon} + \mathcal{P}^* + \mathcal{P}^+$  au cours du temps.  
 — : DNS;  $\square$  : MFLES  $C_b = 0.28$ ;  $\nabla$  : MFLES  $C_b = 1.7$ ;  $\times$  : Smagorinsky classique; + : Smagorinsky dynamique

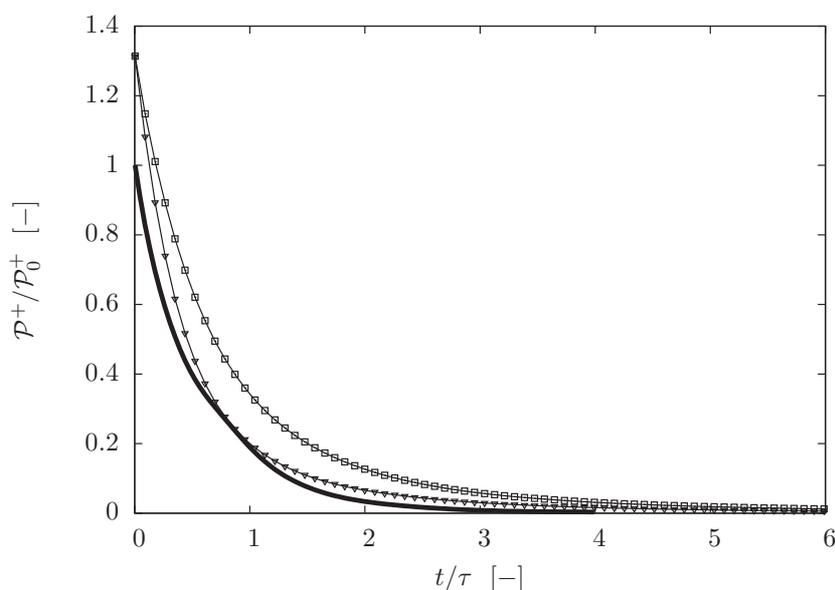
La partie non résolue  $\mathcal{P}^*$  de la production de sous-maille, visible en Fig. 4.15 pour les deux constantes  $C_b$ , présente une évolution également similaire au cas 1. Si  $C_b = 0.28$  produit une dissipation moins bonne pour ce Reynolds plus élevé, l'accord reste cependant satisfaisant. La constante plus élevée persiste à surestimer grandement la production de sous-maille.

La valeur initiale de  $\mathcal{P}^+$  (Fig. 4.16) est différente de celle de la DNS alors même que cette

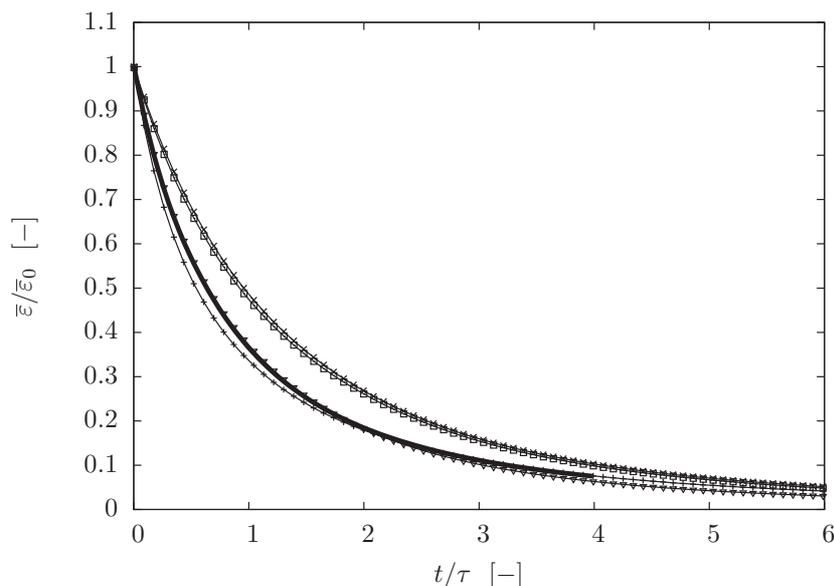


**Fig. 4.15 :** cas 2 - évolution de la partie non-résolue  $\mathcal{P}^*$  de la production de sous-maille au cours du temps pour différentes valeurs du limiteur de backscattering.  $C_b = 0.28$  (gauche) et  $C_b = 1.7$  (droite)  
 — : DNS ;  $\circ$  : limiteur 0% ;  $\square$  : limiteur 15% ;  $\nabla$  : limiteur 30%

quantité ne dépend que de grandeurs résolues. Cela est dû au limiteur de cascade inverse de 15%, qui augmente l'énergie transférée aux échelles de sous-maille (les courbes correspondantes, mais sans limitation, sont en dessous de la courbe DNS). Cette tendance se poursuit tout au long du calcul, conduisant à surestimer systématiquement la production de sous-maille, de façon cependant moins importante pour la constante  $C_b = 1.7$ .  $\mathcal{P}^+$  ne renseignant que sur les grandeurs résolues, le meilleur comportement avec la plus grande constante est dû au fait que celle-ci reproduit mieux la dissipation totale, donc l'évolution de  $\bar{u}$  moyenne sur le domaine. La courbe d'évolution de l'énergie cinétique résolue moyenne  $\bar{k}$ , non reproduite ici car n'apportant pas d'information supplémentaire par rapport à la Fig. 4.14, le confirme.



**Fig. 4.16 :** cas 2 - évolution de la partie résolue  $\mathcal{P}^+$  de la production de sous-maille au cours du temps.  
 — : DNS ;  $\square$  : MFLES  $C_b = 0.28$  ;  $\nabla$  : MFLES  $C_b = 1.7$  ;



**Fig. 4.17** : cas 2 - évolution de la dissipation visqueuse résolue  $\bar{\epsilon}$  au cours du temps.

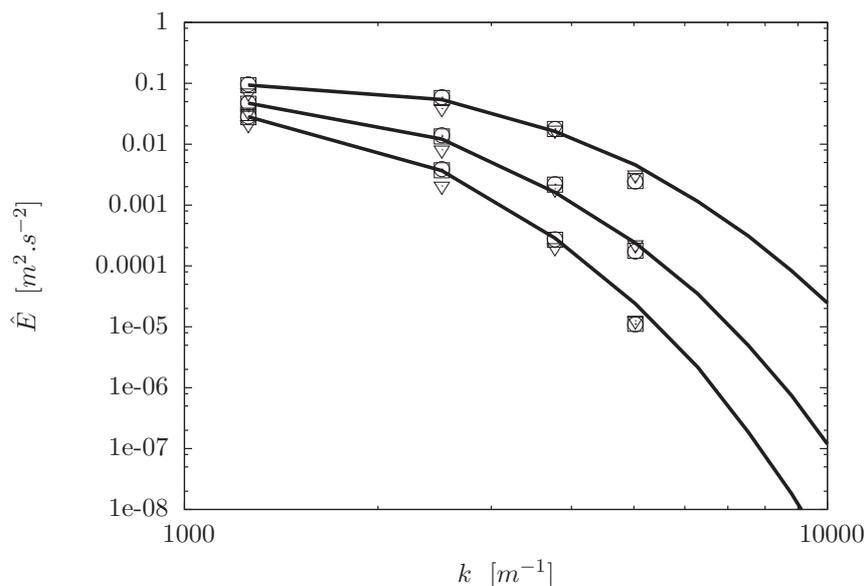
— : DNS ;  $\square$  : MFLES limiteur 15% ;  $\nabla$  : MFLES limiteur 30% ;  $\times$  : Smagorinsky classique ; + : Smagorinsky dynamique

La courbe d'évolution de la dissipation visqueuse résolue, en Fig. 4.17, est très similaire à celle de la dissipation totale, en accord avec le rapport trop important du taux de dissipation visqueuse sur la production de sous-maille due au modèle. Ce constat contraint à ne considérer que les courbes de la production de sous-maille pour juger du modèle, du fait du nombre de Reynolds testé, trop faible même dans le cas 2.

L'effet de la constante du modèle sur les spectres, visible en Fig. 4.18, est plus important pour cette valeur du Reynolds que dans le cas 1. La constante élevée reproduit mal les spectres de la DNS en sous-estimant l'énergie à toutes les échelles. La constante  $C_b = 0.28$  produit des spectres satisfaisants, bien que l'énergie au niveau de l'échelle de coupure soit trop faible, en accord avec la dissipation totale trop élevée tracée en Fig. 4.14.

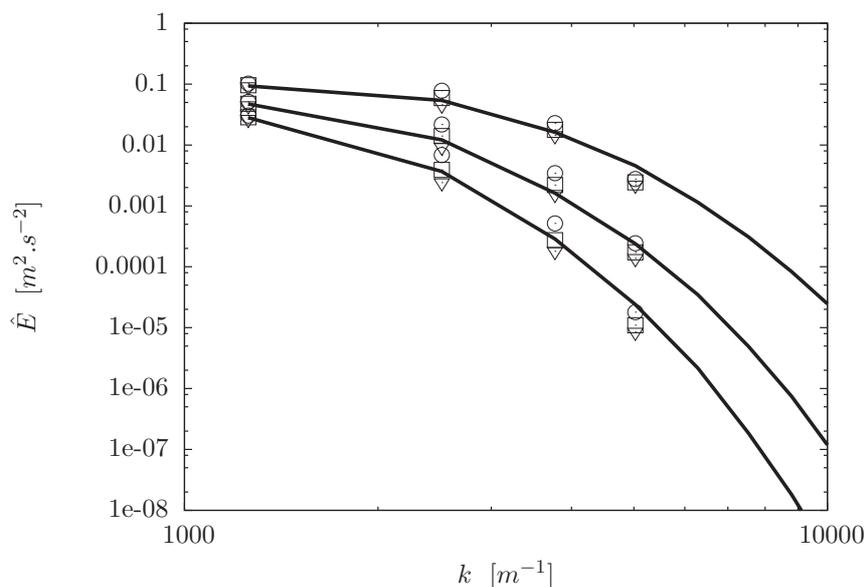
L'effet du limiteur est présenté en Fig.4.19 pour cette valeur de la constante. Cet effet est ici plus visible aux échelles intermédiaires que pour un nombre de Reynolds plus faible. Le limiteur de 15% donne les résultats les plus fidèles. L'énergie des petites échelles résolues est toujours trop faible, même sans limitation de la cascade inverse.

La reproduction des spectres par le modèle multifractal est au global assez bonne pour  $C_b = 0.28$  et 15% de limitation, comme en témoigne la comparaison avec les modèles de Smagorinsky en Fig. 4.20. Le modèle dynamique peine à reproduire les spectres DNS à tout instant et à toutes les échelles. Le modèle classique de Smagorinsky, connu pour produire de bons résultats en Turbulence homogène isotrope, est effectivement assez fidèle. La LES multifractale donne des résultats légèrement meilleurs que celui-ci sur les échelles intermédiaires, bien que les échelles les plus petites soient moins bien représentées.



**Fig. 4.18 :** cas 2 - évolution des spectres d'énergie cinétique lors de la décroissance de la turbulence pour différentes constantes  $C_b$ . Initialement,  $Re_\lambda = 83$ . La DNS comprend  $256^3$  points et la LES  $16^3$ . Les spectres correspondent respectivement (du haut vers le bas) à  $\frac{t}{\tau} = 2.04, 4.69$  et  $7.55$ .

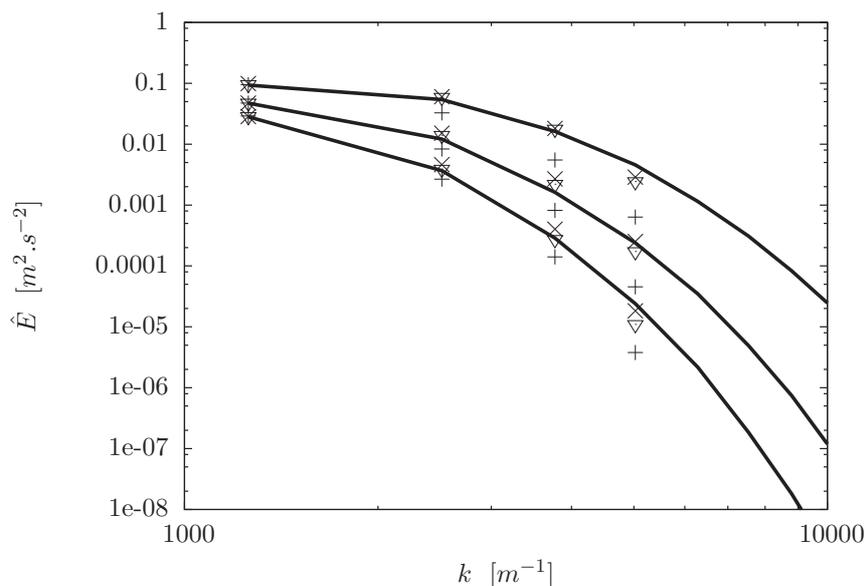
— : DNS ;  $\circ$  :  $C_b = 0.28$  ;  $\square$  :  $C_b = 0.4$  ;  $\nabla$  :  $C_b = 1.7$



**Fig. 4.19 :** cas 2 - évolution des spectres d'énergie cinétique lors de la décroissance de la turbulence pour différentes valeurs du limiteur de backscattering.  $C_b = 0.28$ .

— : DNS ;  $\circ$  : limiteur 0% ;  $\square$  : limiteur 15% ;  $\nabla$  : limiteur 30%

Les calculs ont été lancés également sans modèle afin de tester l'influence du modèle. Pour le cas 1, les résultats sont légèrement meilleurs avec le modèle multifractal au niveau des spectres mais l'influence est faible. Le modèle multifractal montre un effet plus important pour le cas 2, où l'amélioration en terme de spectres est plus visible.



**Fig. 4.20 :** cas 2 - comparaison des spectres obtenus par MFLES, modèle de Smagorinsky et Smagorinsky dynamique localisé.

—— : DNS ;  $\nabla$  : MFLES ;  $\times$  : Smagorinsky classique ; + : Smagorinsky dynamique

## Conclusions

Les deux cas de turbulence homogène isotrope testés montrent que le modèle multifractal tel qu'il a été implanté dans le code YALES2 se comporte de façon satisfaisante.

La constante  $C_b$  du modèle dépend du nombre de Reynolds considéré. La valeur tirée de la courbe 4.3 provient d'une régression sur  $\underline{u}^s$ , en minimisant l'erreur produite par le modèle dans la reproduction des valeurs de la vitesse de sous-maille issue d'une simulation directe. A faible nombre de Reynolds, cela revient à une régression sur le tenseur de sous-maille  $\underline{\tau}^*$ . La production d'énergie de sous-maille associée à ce tenseur,  $\mathcal{P}^*$ , telle que prédite par le modèle, est d'ailleurs moins bonne à  $Re_\lambda = 83$  que pour une plus faible valeur de 35. Les valeurs plus élevées de la constante présentées dans ces tests permettent quant à elles de minimiser l'erreur sur la dissipation totale du modèle LES, autrement dit celle associée au tenseur  $\underline{\tau}$ . Les tests présentés ici n'ont qu'un nombre de Reynolds très faible. Quand celui-ci augmente, la dissipation visqueuse des échelles résolues  $\bar{\varepsilon}$  tend vers zéro. La partie de la dissipation totale de sous-maille que le modèle doit reproduire fidèlement est alors bien  $\mathcal{P}^*$ , qui conditionne alors toute la dynamique. De plus la vitesse de sous-maille est alors mieux reproduite par le modèle, ce qui peut être avantageux si celle-ci doit être utilisée dans la fermeture de modèles liés à d'autres phénomènes physiques.

Le limiteur de cascade inverse, bien que destiné uniquement à assurer la stabilité numérique du modèle multifractal par nature non diffusif, influe sur les grandeurs calculées par le modèle et leur évolution lors du calcul. Afin d'assurer la stabilisation sans nuire à la fidélité du modèle, une valeur de 15% semble appropriée. Cette valeur est celle préconisée par Burton [17].

Il est intéressant de constater que, bien que le modèle multifractal soit sous cette implantation un modèle localisé, il se comporte sur une turbulence homogène isotrope plus comme le

modèle classique de Smagorinsky que comme la version de Germano et Lilly. Il est en effet meilleur sur les spectres que le Smagorinsky dynamique, et surestime dans les cas testés la dissipation totale de l'énergie des échelles résolues, comme le fait le modèle classique. On peut y voir l'avantage des modèles structurels : le modèle de gradient classique reproduit assez bien une THI *en moyenne*, alors que le modèle localisé ne peut capter les écarts locaux à la moyenne, produisant des spectres peu fidèles quand le nombre de Reynolds augmente. Un modèle structurel semble plus à même de reproduire ces écarts, bien que les courbes d'évolution montrent qu'il produise en moyenne une dissipation de sous-maille trop élevée. Cet avantage est bien sûr plus intéressant sur des cas autres qu'homogènes et isotropes, pour lesquels le modèle classique ne fonctionne pas aussi bien.

Pour finir, ces tests valident l'implantation du modèle multifractal dans YALES2 et notamment le caractère localisé du calcul du nombre de Reynolds  $Re_{\Delta}$  associé à la maille LES. Ces tests soulignent cependant l'importance donnée à la constante  $C_b$  du modèle, qui concentre une grande partie de l'information multifractale et de la variabilité du modèle. Cette importance est regrettable en ce qu'elle force à une forme de régression *a priori* sur un paramètre, ce qui réduit l'intérêt du caractère structurel du modèle. Rendre  $C_b$  dynamique et localisé pourrait être une option.

# Chapitre 5

## Modèle multifractal pour les scalaires

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Dérivation du modèle LES pour les scalaires à grand Schmidt</b>	<b>77</b>
5.1.1	Initiateur de la cascade	78
5.1.2	Expression du scalaire de sous-maille	80
5.1.3	Formulation du modèle	82
5.1.4	Commentaires	82
<b>5.2</b>	<b>Simulation numérique directe</b>	<b>82</b>
5.2.1	Conditions de simulation	82
5.2.2	Code utilisé	83
5.2.3	Résultats sur le champ scalaire	87
5.2.3.1	Champs instantanés	87
5.2.3.2	Anisotropie aux petites échelles	90
5.2.3.3	Intermittence	92
5.2.3.4	Analyse multifractale	93
5.2.4	Obtention des multiplicateurs	99
<b>5.3</b>	<b>Tests a priori du modèle LES</b>	<b>104</b>
5.3.1	Conditions de simulation	104
5.3.2	Reconstruction des termes LES	104
5.3.3	Résultats	105
5.3.3.1	Vitesse	106
5.3.3.2	Scalaire	111
5.3.3.3	Discussion	121

---

Une dérivation du modèle MFLES appliqué aux scalaires à grand Schmidt est présenté dans ce chapitre. Une simulation numérique directe du transport de scalaires à différents Schmidt en écoulement turbulent ont permis de mener des tests *a priori* du modèle proposé.

### 5.1 Dérivation du modèle LES pour les scalaires à grand Schmidt

Sur la base de son modèle pour la vitesse décrit en 4.1.2, Burton dérive un modèle similaire pour le scalaire [16], basé sur une cascade de la dissipation scalaire, qui possède elle aussi un

caractère multifractal [65, 79]. Ce modèle n'est dérivé que dans les cas où :

- $Sc = 1$ , la cascade intervenant entre l'échelle de coupure de la LES et l'échelle de Kolmogorov,
- $Sc > 1$ , l'échelle de coupure de la LES devant se situer dans la zone visqueuse-convective avec une cascade depuis cette échelle jusqu'à l'échelle de Batchelor. Cette configuration implique une résolution de toutes les échelles de la vitesse.

Cette section propose une modification du modèle multifractal pour les scalaires à grand Schmidt susceptible de simuler le transport de scalaire avec une fréquence de coupure LES située dans la zone inertielle.

### 5.1.1 Initiateur de la cascade

Comme pour la vitesse, il est nécessaire pour appliquer le modèle de reconstruire à partir des quantités résolues l'initiateur de la cascade, c'est à dire la quantité de dissipation scalaire à répartir par la cascade. Le modèle s'applique de la même façon au scalaire et à la vitesse. La différence tient dans les lois d'échelle distinctes relatives aux grandeurs considérées. Ainsi, le spectre de la dissipation scalaire à  $Sc > 1$  comporte une zone inertielle-convective et une zone visqueuse-convective. L'initiateur de la cascade  $\chi^s$  est donc constitué de deux contributions  $\chi_{IC}^s$  et  $\chi_{VC}^s$  représentées en Fig. 5.1.

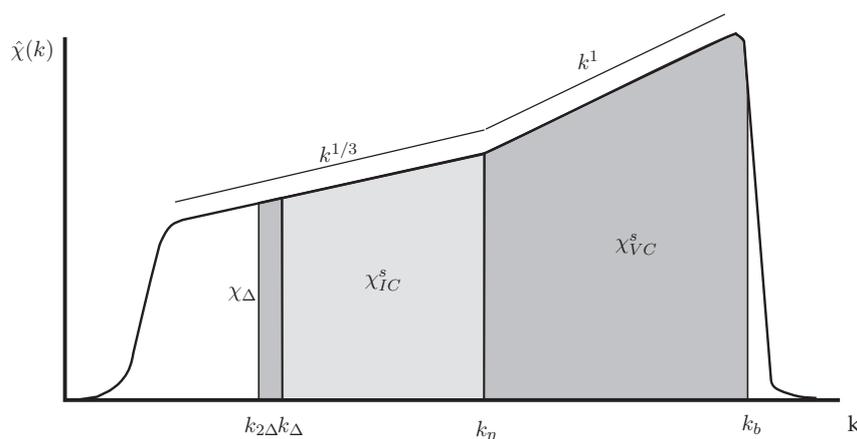


Fig. 5.1 : spectre schématique de la dissipation scalaire pour  $Sc > 1$

$$\begin{aligned}
 \chi^s &= \int_{k_\Delta}^{k_b} \hat{\chi}(k) dk \\
 &= \chi_{IC}^s + \chi_{VC}^s \\
 &= \int_{k_\Delta}^{k_\eta} \hat{\chi}(k) dk + \int_{k_\eta}^{k_b} \hat{\chi}(k) dk
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Les échelles de Kolmogorov et Batchelor sont ici estimées à l'aide du nombre de Reynolds de maille  $Re^\Delta$  (4.13) pour  $\eta$  et du nombre de Schmidt  $Sc$  pour  $\eta_b$ .

Pour estimer  $\chi_{IC}^s$ , on recourt à la similarité d'échelle : la dissipation évolue de la même façon entre  $k_\Delta$  et  $k_\eta$  que entre  $k_{2\Delta}$  et  $k_\Delta$  si  $k_{2\Delta}$  est également dans la zone inertielle-convective, or la

dissipation  $\chi^\Delta$  entre  $k_{2\Delta}$  et  $k_\Delta$  peut être estimée dans l'espace physique à l'aide de quantités résolues :

$$\chi^\Delta \approx \Gamma \nabla \phi^\Delta \cdot \nabla \phi^\Delta \quad (5.2)$$

où

$$\phi^\Delta = \bar{\phi} - \bar{\phi}^{2\Delta} \quad (5.3)$$

l'opérateur  $\bar{(\cdot)}^{2\Delta}$  étant un filtrage à l'échelle  $2\Delta$ .

$$\begin{aligned} \chi^\Delta &= \int_{k_{2\Delta}}^{k_\Delta} \hat{\chi}(k) dk \\ &= Ak_{2\Delta}^{4/3} \left[ \left( \frac{k_\Delta}{k_{2\Delta}} \right)^{4/3} - 1 \right] \\ &= Ak_{2\Delta}^{4/3} (2^{4/3} - 1) \end{aligned} \quad (5.4)$$

donc

$$A = \chi^\Delta k_{2\Delta}^{-4/3} (2^{4/3} - 1)^{-1} \quad (5.5)$$

ce qui permet le calcul de  $\chi_{IC}^s$  :

$$\begin{aligned} \chi_{IC}^s &= \int_{k_\Delta}^{k_\eta} \hat{\chi}(k) dk \\ &= Ak_\Delta^{4/3} \left[ \left( \frac{k_\eta}{k_\Delta} \right)^{4/3} - 1 \right] \\ &= \chi^\Delta (1 - 2^{-4/3})^{-1} \left[ 2^{4/3 \mathcal{N}_{IC}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $\mathcal{N}_{IC}$  est le nombre de pas de cascade dans la zone inertielle-convective  $\mathcal{N}_{IC} = \log_2 \frac{\Delta}{\eta_k}$ .

Le même principe est appliqué pour le calcul de la dissipation en zone visqueuse-convective. On définit les quantités suivantes, représentées en Fig. 5.2 :  $\chi^+$  est la dissipation entre  $k^{2\eta}$  et  $k^\eta$  et  $\chi^-$  est la dissipation entre  $k^\eta$  et  $k^{\eta/2}$ .

$$\begin{aligned} \chi^+ &= \int_{k_{2\eta}}^{k_\eta} \hat{\chi} dk \\ &= \chi^\Delta k_{2\Delta}^{-4/3} (2^{4/3} - 1)^{-1} k_{2\eta}^{4/3} \left[ \left( \frac{k_\eta}{k_{2\eta}} \right)^{4/3} - 1 \right] \\ &= \chi^\Delta \left( \frac{\Delta}{\eta} \right)^{4/3} \\ &= \chi^\Delta 2^{4/3 \mathcal{N}_{IC}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Par continuité du spectre de dissipation :

$$\chi^- \approx \chi^+ \quad (5.8)$$

et on peut exprimer  $\chi_{VC}^s$  en fonction de  $\chi^-$  :

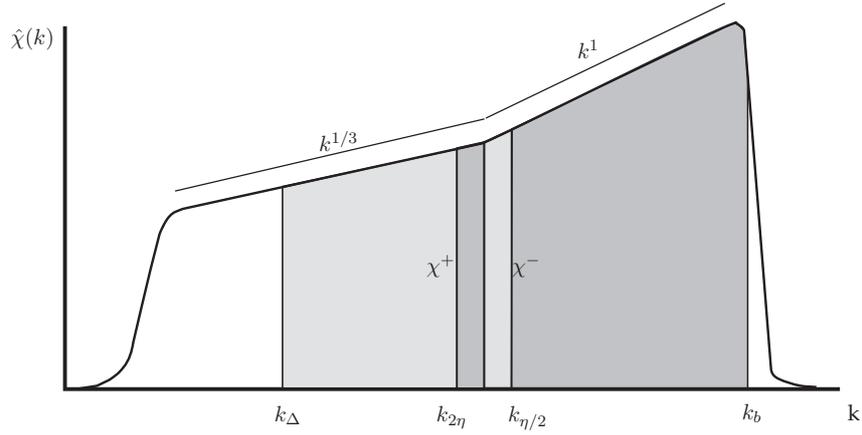


Fig. 5.2 : représentation de  $\chi^+$  et  $\chi^-$  sur le spectre de dissipation scalaire.

$$\begin{aligned}\chi_{VC}^s &= \int_{k_\eta}^{k_b} \hat{\chi} dk \\ &= Bk_\eta^2 \left[ \left( \frac{k_b}{k_\eta} \right)^2 - 1 \right]\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}\chi^- &= \int_{k_\eta}^{k_{\eta/2}} \hat{\chi} dk \\ &= Bk_\eta^2 \left[ \left( \frac{k_{\eta/2}}{k_\eta} \right)^2 - 1 \right] \\ &= Bk_\eta^2 (2^2 - 1)\end{aligned}\quad (5.10)$$

donc

$$B = \chi^\Delta 2^{4/3N_{IC}} k_\eta^{-2} (2^2 - 1)^{-1}\quad (5.11)$$

En remplaçant  $B$  dans 5.9, il vient :

$$\chi_{VC}^s = \chi^\Delta \frac{1}{3} 2^{4/3N_{IC}} [2^{2N_{VC}} - 1]\quad (5.12)$$

où  $N_{VC}$  est le nombre de pas de cascade dans la zone visqueuse-convective  $N_{VC} = \log_2 \frac{\eta k}{\eta_b}$ .

L'expression finale de l'initiateur de la cascade est donc

$$\chi^s = \chi^\Delta \left[ \left(1 - 2^{-4/3}\right)^{-1} \left(2^{4/3N_{IC}} - 1\right) + \frac{2^{4/3N_{IC}}}{3} (2^{2N_{VC}} - 1) \right]\quad (5.13)$$

### 5.1.2 Expression du scalaire de sous-maille

A partir de l'initiateur de la cascade, on applique la même méthode que pour la vitesse.

### Norme du gradient de scalaire de sous-maille

La cascade binomiale stochastique est appliquée à  $\chi^s$  pour récupérer un champ de norme de gradient de scalaire en tout point  $\underline{x}$  de la maille :

$$|\nabla\phi^s|(\underline{x}) = \left[ \frac{\chi^s}{\Gamma} 2^{3N_{IC}} \left( \prod_{i=1}^{N_{IC}} \mathcal{M}_i^{IC}(\underline{x}) \right) 2^{3N_{VC}} \left( \prod_{i=1}^{N_{VC}} \mathcal{M}_i^{VC}(\underline{x}) \right) \right]^{1/2} \quad (5.14)$$

### Orientation du gradient de scalaire de sous-maille et intermittence

On introduit le facteur d'intermittence du gradient de scalaire qui dépend du nombre de pas de cascade :

$$\mathcal{I}(N_{IC}, N_{VC}) = \frac{\int_{\underline{x}'} \nabla\phi^s \cdot \nabla\phi^\Delta d^3\underline{x}'}{\int_{\underline{x}'} |\nabla\phi^s| |\nabla\phi^\Delta| d^3\underline{x}'} \quad (5.15)$$

qui permet d'écrire en moyenne sur la maille :

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi^s \rangle &= \langle |\nabla\phi^s| \rangle \mathcal{I}(N_{IC}, N_{VC}) \frac{\nabla\phi^\Delta}{|\nabla\phi^\Delta|} \\ &= \mathcal{I}(N_{IC}, N_{VC}) \left( \frac{\chi^s}{\Gamma} \right)^{1/2} 2^{3/2(N_{IC}+N_{VC})} \langle (\mathcal{M}^{IC})^{1/2} \rangle_{N_{IC}} \langle (\mathcal{M}^{VC})^{1/2} \rangle_{N_{VC}} \frac{\nabla\phi^\Delta}{|\nabla\phi^\Delta|} \end{aligned} \quad (5.16)$$

### Moyenne de scalaire sur la sous-maille

On peut exprimer le scalaire en fonction de son gradient, de la même façon que l'intégrale de Biot-Savard permettait d'exprimer la vitesse en fonction de la vorticité :

$$\langle \phi^s \rangle = \nabla \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\underline{x}'} \frac{\langle \nabla\phi^s \rangle}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}' \quad (5.17)$$

Selon la même procédure qu'en section 4.1.2, l'équation 5.17 permet d'exprimer le scalaire de sous-maille moyen en fonction de  $\phi^\Delta$  :

$$\langle \phi^s \rangle = \mathcal{I}(N_{IC}, N_{VC}) 2^{3/2(N_{IC}+N_{VC})} \langle (\mathcal{M}^{IC})^{1/2} \rangle_{N_{IC}} \langle (\mathcal{M}^{VC})^{1/2} \rangle_{N_{VC}} \left( \frac{\chi^s}{\chi^\Delta} \right)^{1/2} \phi^\Delta \quad (5.18)$$

###   valuation du facteur d'intermittence par passage à la limite

Quand les nombres de pas de cascade  $N_{IC}$  et  $N_{VC}$  tendent vers l'infini, le scalaire de sous-maille tend vers une constante finie :

$$cste \sim \mathcal{I}(N_{IC}, N_{VC}) 2^{3/2(N_{IC}+N_{VC})} \langle (\mathcal{M}^{VC})^{1/2} \rangle_{N_{VC}} \langle (\mathcal{M}^{IC})^{1/2} \rangle_{N_{IC}} 2^{2/3N_{IC}+N_{VC}} \quad (5.19)$$

On peut donc finalement exprimer la moyenne du scalaire de sous-maille en fonction de  $\phi^\Delta$ ,  $N_{IC}$ ,  $N_{VC}$  et une constante  $C_d$  :

$$\langle \phi^s \rangle = C_d 2^{-2/3N_{IC}-N_{VC}} \left[ \left( 1 - 2^{-4/3} \right)^{-1} \left( 2^{4/3N_{IC}} - 1 \right) + \frac{2^{4/3N_{IC}}}{3} \left( 2^{2N_{VC}} - 1 \right) \right]^{1/2} \phi^\Delta \quad (5.20)$$

### 5.1.3 Formulation du modèle

La formulation du modèle intègre l'expression de la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$  donnée en 4.27 et celle dérivée en 5.20. Le flux de sous-maille s'exprime donc comme :

$$\sigma^* = D\overline{\underline{u}\phi^\Delta} + B\overline{\underline{u}^\Delta\overline{\phi}} + BD\overline{\underline{u}^\Delta\phi^\Delta} \quad (5.21)$$

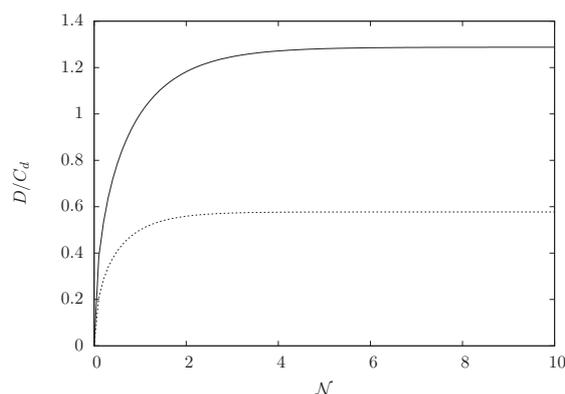
avec

$$B = C_b 2^{-2/3\mathcal{N}_{IC}} \left[ \left(1 - 2^{-4/3}\right)^{-1} \left(2^{4/3\mathcal{N}_{IC}} - 1\right) \right]^{1/2} \quad (5.22)$$

$$D = C_d 2^{-2/3\mathcal{N}_{IC} - \mathcal{N}_{VC}} \left[ \left(1 - 2^{-4/3}\right)^{-1} \left(2^{4/3\mathcal{N}_{IC}} - 1\right) + \frac{2^{4/3\mathcal{N}_{IC}}}{3} \left(2^{2\mathcal{N}_{VC}} - 1\right) \right]^{1/2} \quad (5.23)$$

### 5.1.4 Commentaires

La partie dépendante de  $\mathcal{N}$  dans l'expression du scalaire de sous-maille, égale à  $D/C_d$  est une puissance de 2. Elle évolue très rapidement en fonction de  $\mathcal{N}$  (que ce soit  $\mathcal{N}_{IC}$  ou  $\mathcal{N}_{VC}$ ) pour atteindre une valeur asymptotique.



**Fig. 5.3 :** évolution de la partie dépendante de  $\mathcal{N}$  dans le coefficient d'auto-similarité du modèle multifractal en zone inertielle-convective ( $\mathcal{N}_{VC} = 0$ , évolution en fonction de  $\mathcal{N}_{IC}$ , ligne pleine) et en zone visqueuse-convective ( $\mathcal{N}_{IC} = 0$ , évolution en fonction de  $\mathcal{N}_{VC}$ , ligne pointillée).

Le modèle MFLES apparaît donc comme un modèle de similarité d'échelle modifié, qui fournit une expression pour le scalaire de sous-maille (ou la vitesse de sous-maille) en fonction du scalaire résolu (ou la vitesse résolue) filtré à une échelle test supérieure à l'échelle de coupure LES.

## 5.2 Simulation numérique directe

### 5.2.1 Conditions de simulation

La simulation est celle de l'advection-diffusion de poches de scalaires pour différents nombres de Schmidt par une turbulence homogène isotrope figée. Cinq nombres de Schmidt supérieurs à 1 sont considérés, pour un nombre de Reynolds de 25.

Le champ de vitesse est obtenu par un forçage linéaire dans le code YALES2. Le champ initial est généré selon un spectre synthétique de Passot-Pouquet. Ce champ initial n'influe pas sur la solution finale forcée, et n'a d'importance que dans la mesure où il permet d'obtenir plus ou moins vite une solution stationnaire. Ce champ de vitesse est ensuite figé pour la suite de l'étude. un autre code discuté ci-après est utilisé pour résoudre l'équation du scalaire.

L'idéal pour des THI est d'utiliser un code spectral, qui permet à la fois une précision numérique plus grande et un forçage efficace sur des bandes du spectre choisies, correspondant généralement aux zones physiques de production de l'énergie (faibles nombres d'onde). Ce choix n'a pas été retenu ici principalement pour utiliser des outils déjà disponibles et par manque de temps. Il s'est avéré *a posteriori* que, le temps de forçage linéaire étant beaucoup plus long que pour un forçage spectral, le développement d'un code spectral eût été judicieux.

grandeur	valeur	unité
$u'_i$	22.4	$[m.s^{-1}]$
$\nu$	$10^{-3}$	$[m^2.s^{-1}]$
$L$ (intégrale)	$2 \times 10^{-3}$	$[m]$
$\eta_k$	$1.11 \times 10^{-4}$	$[m]$
$\varepsilon$	6634118	$[m^2.s^{-3}]$
$Re_\lambda$	25	$[-]$

**Tab. 5.1 :** propriétés de la THI utilisées dans la DNS. Le domaine cubique a un côté de  $L_t = 10^{-2}m$ . Le maillage de  $1024^3$  points a un espacement homogène et isotrope de  $\delta = 9.77 \times 10^{-6} m$ .

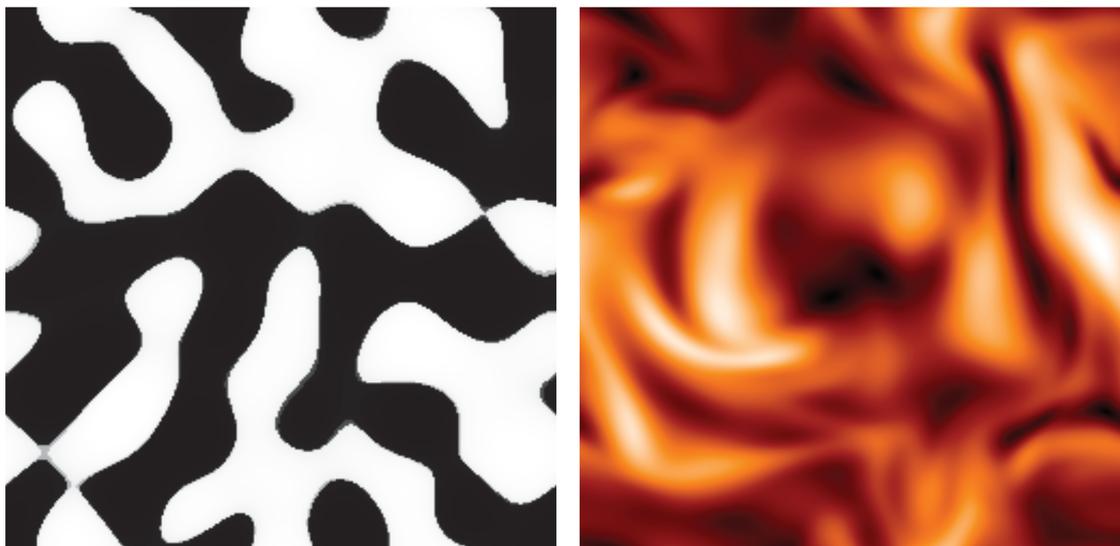
Des poches de scalaire, dont une représentation est visible en Fig. 5.4(a) et dont les propriétés sont résumées en Tab. 5.2, sont générées avec deux longueurs caractéristiques de  $0.4L_t$  et  $0.05L_t$ .

grandeur	valeur					unité
Sc	1	10	50	100	150	$[-]$
$\Gamma$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$2 \times 10^{-5}$	$10^{-5}$	$6.67 \times 10^{-6}$	$[m^2.s^{-1}]$
$\eta_b$	$1.11 \times 10^{-4}$	$3.5 \times 10^{-5}$	$1.57 \times 10^{-5}$	$1.11 \times 10^{-5}$	$9.05 \times 10^{-6}$	$[m]$

**Tab. 5.2 :** propriétés des scalaires utilisées dans la DNS. Le scalaire à  $Sc = 150$  est légèrement sous-résolu ( $\eta_b/\delta = 1.08$ ).

### 5.2.2 Code utilisé

La simulation a été réalisée à l'aide du code de calcul grOlapin écrit à cet effet en Fortran (norme 90). Ce code est parallélisé à l'aide de MPI et résout les équations de transport du scalaire en différences finies par le champ de vitesse figée sur une grille cartésienne régulière.



(a) la pdf du scalaire est constituée de deux demi-gaussiennes centrées en 0 et 1. Le spectre du scalaire contient de l'énergie sur deux nombres d'onde correspondant à  $0.4L_t$  et  $0.05L_t$ .

(b) norme du champ de vitesse

*Fig. 5.4 : représentation sur un plan de coupe du domaine des poches de scalaire utilisées comme champ initial (a) et du champ de vitesse (b).*

### méthodes numériques

Des schémas d'ordre élevé (jusqu'à 8 spatialement) ont été envisagés pour l'écriture du code. L'analyse de stabilité a mis en avant un critère CFL beaucoup trop restrictif, qui imposait un travail conséquent de développement de schémas plus robustes. Les schémas compacts décrits dans [49] ont été abandonnés du fait de leur caractère implicite qui rend leur parallélisation trop coûteuse. De plus, les schémas d'ordre élevé ne sont pas forcément adaptés à la résolution de fronts raides comme peut l'exiger la simulation d'écoulements peu diffusifs en conditions DNS.

Le choix s'est donc porté sur des schémas spatiaux d'ordre 2 qui rendent accessible la simulation pour un coût de calcul très faible. Ainsi, une méthode de type MUSCL a été implantée qui permet de conserver la monotonie [84] du schéma même en présence de fronts de scalaire. Ce schéma TVD (Total Variation Diminishing) repose sur une limitation de la pente au cours du calcul. Le limiteur utilisé est celui de Van Albada :

$$L = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1}, \quad (5.24)$$

$$\text{où } r = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\phi_{i+1} - \phi_i} \quad (5.25)$$

L'avancement en temps est réalisé à l'aide d'un Runge-Kutta d'ordre 2, dont l'algorithme en dimension 1 est décrit ci-après :

- 1<sup>er</sup> pas RK centré

$$\text{pente } p_i = \frac{1}{2\delta}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) \quad (5.26)$$

$$\phi_i^* = \phi_i^n - \frac{1}{2} dt u_i p_i \quad (5.27)$$

- 2<sup>eme</sup> pas reconstruit décentré avec limiteur

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{dt}{\delta} u_i (\phi_{i+\frac{1}{2}}^l - \phi_{i-\frac{1}{2}}^l) \quad (5.28)$$

Les  $\phi^l$  sont les valeurs de  $\phi$  interpolées entre 2 points à partir des gradients limités (à gauche ou à droite en fonction du signe de  $u_i$ ) :

– reconstruction à gauche si  $u > 0$  :

$$p_{moy} = \frac{1}{\delta}(\phi_{i+1}^* - \phi_i^*) \quad (5.29a)$$

$$a = 2p_i - p_{moy} \quad (5.29b)$$

$$b = p_{moy} \quad (5.29c)$$

$$p_i^l = \frac{a^2 b + ab^2}{a^2 + b^2} \quad (5.29d)$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^l = \phi_i^* + \frac{1}{2} \delta p_i^l \quad (5.29e)$$

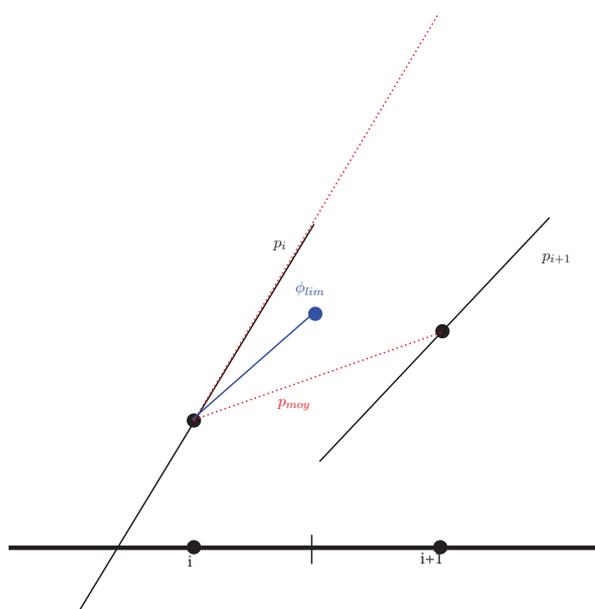


Fig. 5.5 : reconstruction à gauche de  $\phi_{i+1/2}$  si  $u_i > 0$

– reconstruction à droite si  $u < 0$  :

$$p_{moy} = \frac{1}{\delta}(\phi_{i+1}^* - \phi_i^*) \quad (5.30a)$$

$$a = 2p_{i+1} - p_{moy} \quad (5.30b)$$

$$b = p_{moy} \quad (5.30c)$$

$$p_{i+1}^l = \frac{a^2 b + ab^2}{a^2 + b^2} \quad (5.30d)$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}^l = \phi_{i+1}^* - \frac{1}{2}\delta p_{i+1}^l \quad (5.30e)$$

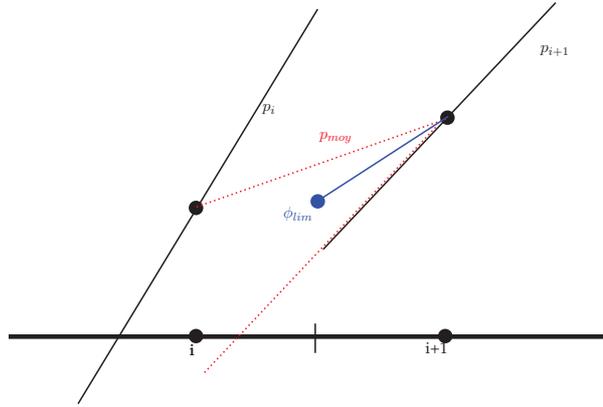


Fig. 5.6 : reconstruction à droite de  $\phi_{i+1/2}$  si  $u_i < 0$

### Analyse de stabilité

Une analyse de stabilité linéaire [3] permet de déterminer que ce schéma est stable sous la contrainte d'un critère  $CFL \leq 1$ .

### forçage du scalaire

Pour étudier la réduction de l'anisotropie du scalaire aux petites échelles, un gradient moyen est imposé sur le scalaire. Il consiste en l'ajout d'un gradient homogène de scalaire  $\underline{\alpha}$  dans la résolution de l'équation de transport du scalaire, qui conduit à l'adjonction d'un terme supplémentaire de forçage  $f_\phi = \underline{u} \cdot \underline{\alpha}$ . L'ajout du gradient est équivalent à un forçage du scalaire. Il permet donc également d'atteindre un état statistiquement stationnaire, impliquant la conservation de l'énergie moyenne  $\langle k_\phi \rangle = \langle \phi^2 \rangle$  du scalaire sur le domaine au cours du temps. Le terme source sur l'énergie correspondant à ce gradient doit donc être égal à la dissipation scalaire moyenne. En effet la conservation de l'énergie scalaire s'écrit :

$$k_{\phi,t} + \underline{u} \cdot \nabla k_\phi + \chi - \Gamma \nabla^2 k_\phi + \phi' \underline{u} \cdot \underline{\alpha} = 0 \quad (5.31)$$

La moyenne de (5.31) sur un domaine périodique devient

$$\langle k_\phi \rangle_t + \langle \chi \rangle + \langle \phi' \underline{u} \rangle \cdot \underline{\alpha} = 0 \quad (5.32)$$

Pour maintenir une énergie constante il est donc nécessaire d'imposer un gradient moyen de la forme :

$$\alpha_i = \frac{-\langle \chi \rangle}{\langle \phi u_i \rangle} \quad (5.33)$$

Ce gradient, s'il conserve l'énergie moyenne sur le domaine périodique, ne conserve pas la valeur moyenne du scalaire (on a  $\langle \phi' \rangle_t = -\langle \underline{u} \cdot \underline{\alpha} \rangle$ ). Pour éviter une dérive de  $\phi'$ , on modifie le terme source dans l'équation de transport en prenant en compte la vitesse moyenne :

$$f_\phi = (\underline{u} - \langle \underline{u} \rangle) \cdot \underline{\alpha} \quad (5.34)$$

Dans ce cas le gradient moyen à imposer a pour expression

$$\alpha_i = \frac{-\langle \chi \rangle}{\langle \phi(u_i - \langle u_i \rangle) \rangle} \quad (5.35)$$

Le terme source est relaxé pour éviter les oscillations :

$$\alpha_i = \beta \frac{(\langle \phi'^2 \rangle - \langle \phi'^2 \rangle^0)}{\delta t \langle \phi(u_i - \langle u_i \rangle) \rangle} \quad (5.36)$$

Le coefficient de relaxation  $\beta$  peut être choisi arbitrairement afin de permettre une relaxation suffisamment rapide vers l'état d'équilibre tout en limitant les overshoots locaux provoqués par un trop fort gradient moyen.

Pour réaliser cette simulation, le code grOlapin a tourné sur la machine Turing de l'IDRIS, une IBM Blue Gene/Q. 12 calculs de 20 h ont été nécessaires, mobilisant 4096 processus MPI pour le maillage de  $1024^3$  points.

## 5.2.3 Résultats sur le champ scalaire

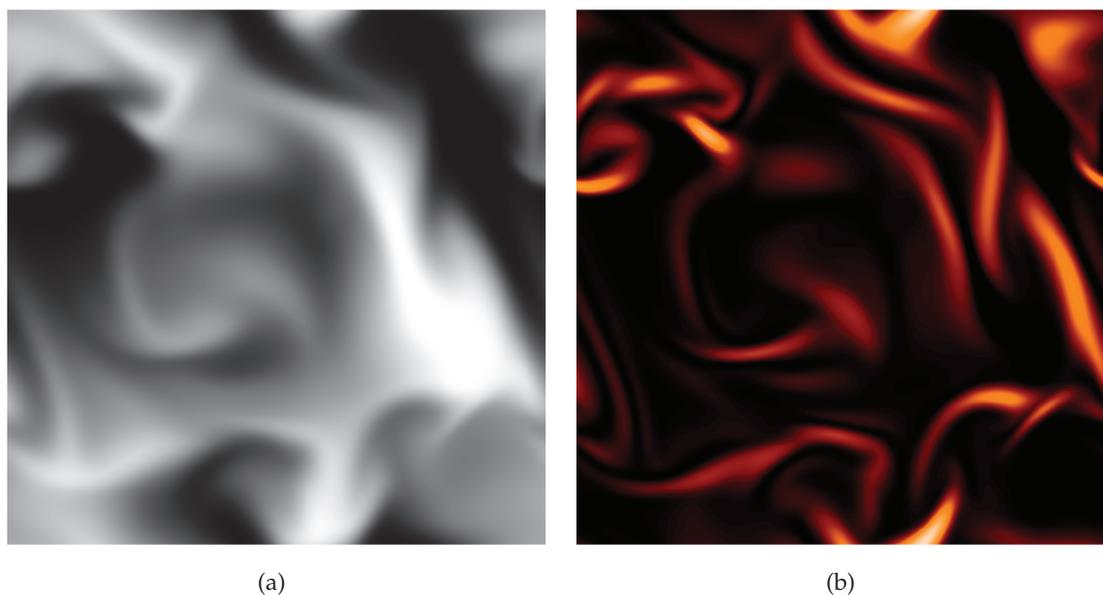
### 5.2.3.1 Champs instantanés

Les Fig. 5.7 à 5.9 montrent pour trois nombres de Schmidt les champs du scalaire et la dissipation scalaire correspondante sur un plan de coupe du domaine cubique, après qu'un état statistiquement stationnaire a été atteint. L'intermittence spatiale est visuellement reconnaissable dans les champs de dissipation, qui montrent des structures similaires aux filaments de vorticité observés en turbulence<sup>1</sup>. Ces structures indiquent que la dissipation se concentre dans des zones de forte activité entourées de zones plus calmes. Une description en termes de statistiques lagrangiennes est nécessaire pour confirmer cette observation et sera présentée plus loin.

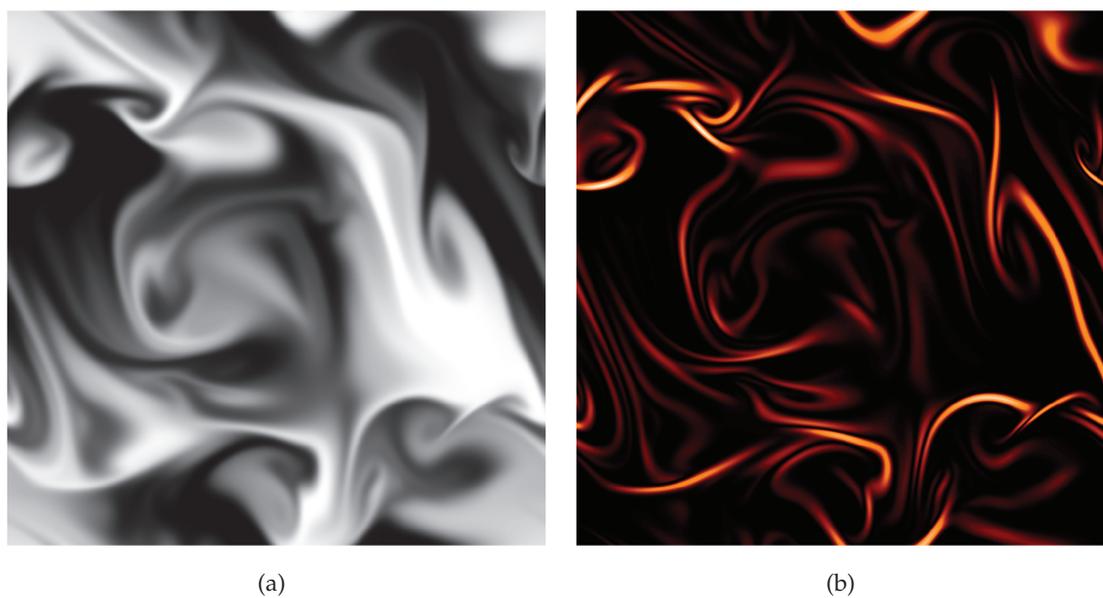
Le champ scalaire montre quant à lui des grandes structures similaires pour les différents nombres de Schmidt présentés, avec toutefois des structures internes plus complexes et striées quand le Schmidt augmente.

---

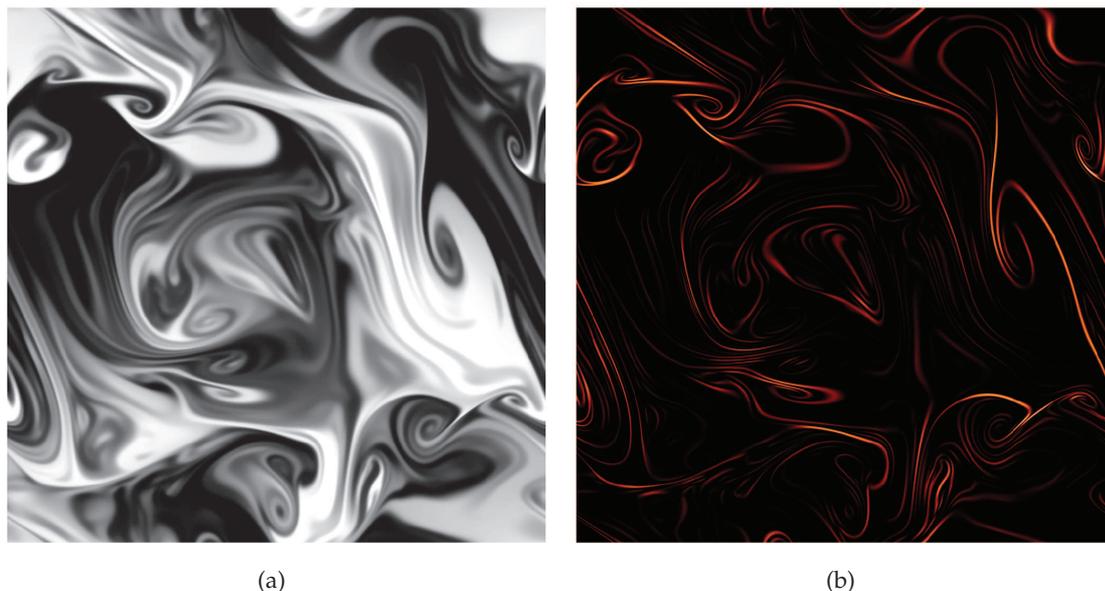
1. On sait cependant que ces filaments ne sont pas suffisants pour expliquer à eux seuls l'intermittence des champs turbulents [73]



*Fig. 5.7 : contours instantanés de scalaire et de dissipation scalaire sur un plan pour  $Sc = 1$ . Valeur  $\max \chi_M = 12766s^{-1}$*

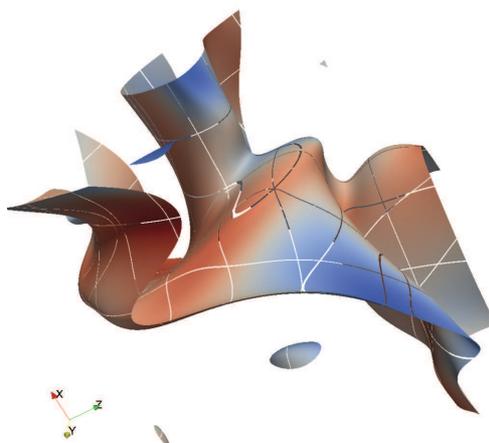


*Fig. 5.8 : contours instantanés de scalaire et de dissipation scalaire sur un plan pour  $Sc = 10$ . Valeur  $\max \chi_M = 9086s^{-1}$*



*Fig. 5.9 : contours instantanés de scalaire et de dissipation scalaire sur un plan pour  $Sc = 150$ . Valeur  $\max \chi_M = 8994s^{-1}$*

Les Fig. 5.10 à 5.12 montrent des iso-surfaces de scalaire  $\phi = 0.5$  sur  $1/8^{\text{ème}}$  du domaine total de simulation. Le scalaire s'organise en feuillets qui sont plissés et déformés par le champ de vitesse. La complexité des structures augmente logiquement avec le nombre de Schmidt. On peut observer pour  $Sc = 150$  un exemple d'enroulement des structures en feuillet, comme décrit dans la section 2.1.2. Cet enroulement est responsable de la réduction de l'anisotropie aux petites échelles quand le nombre de Schmidt augmente, ainsi qu'on le verra plus loin. Ces surfaces sont colorées par une composante  $\omega_1 = \underline{\omega} \cdot \underline{x}$  de la vorticité pour permettre la visualisation. Dans la mesure où l'on observe ici des structures instantanées du scalaire créées par un champ de vitesse figé, ces visualisations ne sauraient permettre une analyse phénoménologique poussée du mélange, et seul une analyse statistique est valide.



*Fig. 5.10 : isosurface de scalaire,  $\phi = 0.5$ , colorée par  $\omega_1$ .  $Sc = 1$ .*

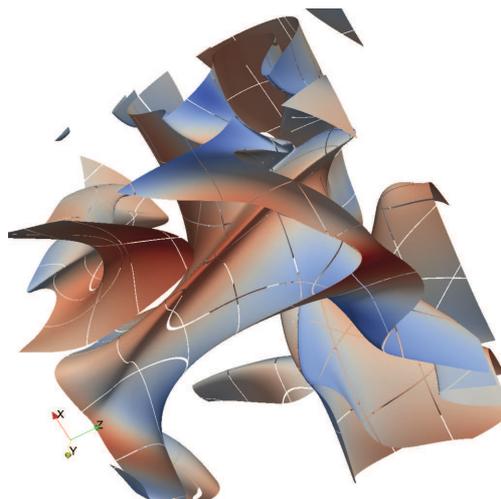


Fig. 5.11 : *idem* Fig. 5.10.  $Sc = 10$ .

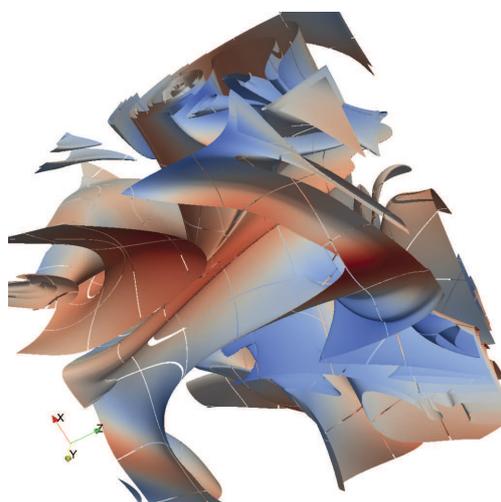


Fig. 5.12 : *idem* Fig. 5.10.  $Sc = 150$ .

### 5.2.3.2 Anisotropie aux petites échelles

Les scalaires dans ces simulations sont soumis à un gradient moyen dans une direction  $z$  de l'espace, qui correspond à l'introduction d'une anisotropie des grandes échelles. On étudie ici la persistance de cette anisotropie aux petites échelles.

Pour ce faire il est nécessaire d'introduire une quantité statistique importante, le moment centré normalisé. Le moment centré d'ordre  $q$  d'une variable  $\varphi$  est défini comme

$$\mathcal{M}^q(\varphi) = \int_{\varphi} (\varphi - \langle \varphi \rangle)^q p(\varphi) d\varphi \quad (5.37)$$

où  $p(\varphi)$  est la fonction densité de probabilité de  $\varphi$  et  $\langle \varphi \rangle$  sa moyenne. Le moment central normalisé est alors défini comme

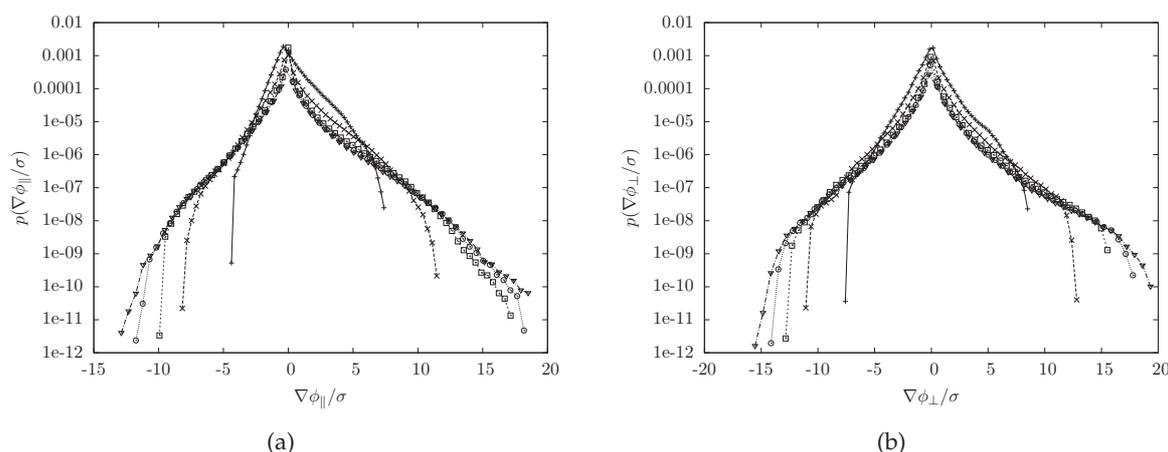
$$\mathcal{S}^q(\varphi) = \frac{\mathcal{M}^q(\varphi)}{(\mathcal{M}^2(\varphi))^{q/2}} \quad (5.38)$$

On appelle *skewness* le moment centré normalisé d'ordre 3 et *flatness* celui d'ordre 4. Les moments centrés normalisés, souvent nommés simplement moments, permettent de comparer directement les moments d'ordre  $q > 2$  de deux variables aléatoires, même si celles-ci n'ont pas la même moyenne ou la même variance.

La persistance de l'anisotropie aux petites échelles peut être quantifiée à l'aide de la skewness de la composante du gradient local de scalaire parallèle à la direction de forçage :

$$\mathcal{S}^3(\nabla_{\parallel}\phi) \quad (5.39)$$

Un champ de gradient isotrope montrera une symétrie de sa distribution autour de 0, traduite par des moments impairs faibles. Une skewness positive indique quant à elle une prédominance des gradients positifs (*i.e.* dans le sens du forçage grandes échelles) indiquant la persistance d'une direction privilégiée du gradient aux petites échelles. Les fonctions densité de probabilité présentées ci-après sont obtenues sur un total de plus de  $10^{10}$  événements. Les histogrammes les représentant sont donc considérés comme convergés statistiquement, en sorte qu'ils sont une représentation fidèle des pdf correspondantes.



**Fig. 5.13 :** pdf (échelle log) de la composante parallèle (a) et d'une composante perpendiculaire (b) du gradient scalaire. Le gradient est normalisé par son écart type.

+ :  $Sc = 1$  ; × :  $Sc = 10$  ; □ :  $Sc = 50$  ; ○ :  $Sc = 100$  ; ▽ :  $Sc = 150$

Les propriétés statistiques des composantes du gradient scalaire parallèle au gradient moyen et perpendiculaire à celui-ci sont résumées dans le Tab. 5.3. L'écart type dépend logiquement du Schmidt mais il est sensiblement le même pour les composantes parallèles et perpendiculaires du gradient. La skewness  $\mathcal{S}_3$  en revanche diffère selon la composante considérée, caractérisant la persistance de l'anisotropie : elle est environ 2.5 fois supérieure pour la composante parallèle, qui est donc moins symétrique. De plus, tandis que la skewness reste sensiblement constante pour la composante perpendiculaire quelque soit le nombre de Schmidt, elle diminue en fonction du  $Sc$  pour la composante parallèle, indiquant que l'anisotropie petites échelles diminue quand le  $Sc$  augmente.

La traîne de la pdf de  $\nabla\phi_{\parallel}$  en Fig. 5.13(a) est plus importante du côté des valeurs positives. Il y a donc plus de gradients positifs, et leur amplitude maximale est supérieure à celle des

gradients négatifs. Les pdf montrent que la réduction de l'anisotropie avec l'augmentation du nombre de Schmidt est due à une augmentation du nombre d'événements où le gradient est négatif, tandis que la population des gradients positifs reste constante (à partir de  $Sc = 50$ ). Les gradients positifs correspondent aux cliffs, d'amplitude élevée, tandis que les gradients négatifs sont associés aux rampes, dans la direction inverse du gradient moyen. La réduction de l'anisotropie petites échelles quand le nombre de Schmidt augmente semble donc liée à la réduction du nombre des structures en ramp-cliff observées dans les champs de scalaire à faible nombre de Schmidt.

Sc	composante parallèle			composante perpendiculaire		
	moyenne	$\sigma$	$\mathcal{S}^3$	moyenne	$\sigma$	$\mathcal{S}^3$
1	0	392	1.44	0	414	0.60
10	0	878	1.64	0	891	0.59
50	0	1515	1.54	0	1521	0.63
100	0	1845	1.40	0	1847	0.63
150	0	2026	1.30	0	2027	0.62

**Tab. 5.3 :** propriétés statistiques des gradients de scalaire parallèles et perpendiculaires au gradient moyen

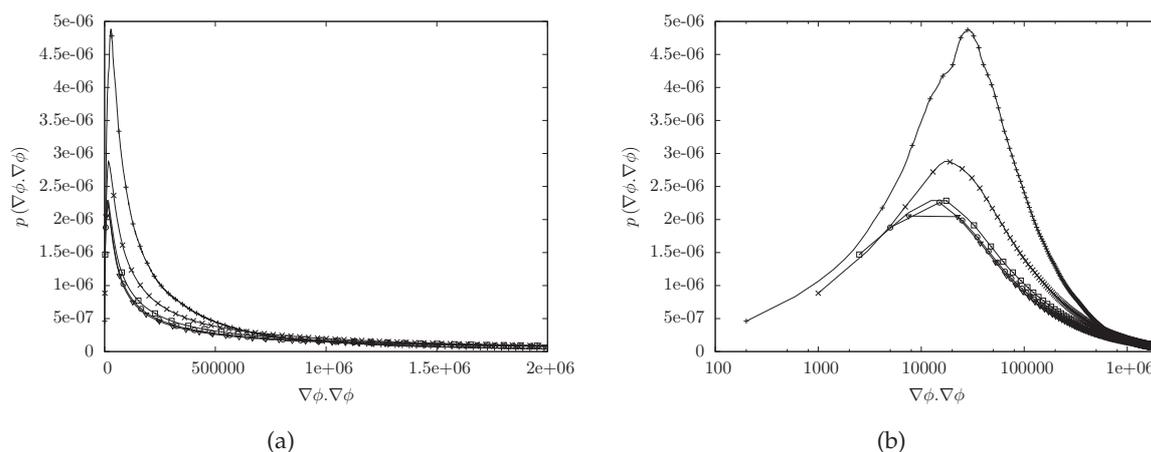
### 5.2.3.3 Intermittence

L'intermittence dans les champs turbulents est caractérisée par la présence de zones spatiales de forte activité turbulente coexistant avec des zones calmes où l'activité est faible. Pour le scalaire, l'activité de la turbulence peut être mesurée à l'aide de la dissipation scalaire  $\chi$ . D'un point de vue statistique, l'intermittence est liée aux statistiques non-gaussiennes des champs turbulents. Les pdf présentent alors de longues traînes à la décroissance moins rapide qu'une exponentielle, correspondant à des événements rares mais violents. L'intermittence est alors mesurée à l'aide de la *kurtosis*, qui correspond à la flatness  $\mathcal{S}^4$  de la pdf auquel on a ôté la flatness d'une gaussienne de même écart-type, qui vaut 3.

$$\mathcal{K} = \mathcal{S}^4 - 3 \quad (5.40)$$

Les pdf de  $\nabla\phi \cdot \nabla\phi$  sont présentées en Fig. 5.14. La diffusivité  $\Gamma$  a été retirée afin de pouvoir comparer les pdf pour les différents Schmidt. La pdf pour  $Sc = 1$  présente bien un pic vers sa valeur moyenne et une décroissance forte, tandis que lorsque la diffusivité diminue, les pdf de la dissipation sont plus plates et leurs traînes pour les grandes valeurs de la dissipation sont supérieures.

La flatness de la dissipation scalaire est présentée en Tab. 5.4 pour les différents Schmidt considérés. Pour toutes les valeurs de Schmidt, la flatness est positive, montrant que même pour  $\Gamma = \nu$  et avec le faible nombre de Reynolds considéré, le scalaire présente un caractère intermittent, alors même que le champ de vitesse est figé. À l'exception d'une anomalie inexplicée pour  $Sc = 50$ , la flatness augmente avec le nombre de Schmidt caractérisant une intermittence croissante en accord avec les observations eulériennes des Fig. 5.7 à 5.9.



**Fig. 5.14 :** pdf de  $\nabla\phi \cdot \nabla\phi$  en fonction du nombre de Schmidt. L'axe des abscisses est en log dans (b)  
 + :  $Sc = 1$ ; × :  $Sc = 10$ ; □ :  $Sc = 50$ ; ○ :  $Sc = 100$ ; ▽ :  $Sc = 150$

Sc	moyenne	kurtosis $\mathcal{K}$
1	422	8.45
10	184	9.12
50	93	8.48
100	75	11.64
150	65	14.45

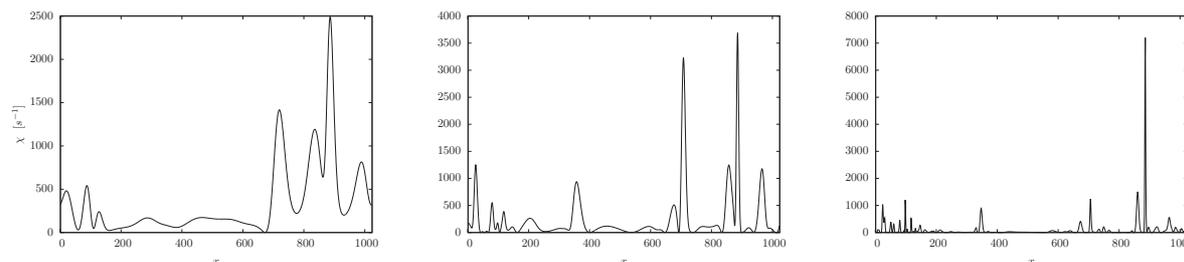
**Tab. 5.4 :** propriétés statistiques de  $\chi = \Gamma \nabla\phi \cdot \nabla\phi$  pour les différents nombre de Schmidt considérés

### 5.2.3.4 Analyse multifractale

L'analyse multifractale permet d'étudier la répartition statistique des singularités d'un champ turbulent. Elle permet de caractériser l'intermittence de ces champs. Le spectre des singularités ainsi construit en fonction du nombre de Schmidt permet de nourrir un modèle structurel.

L'analyse est ici réalisée sur des lignes choisies arbitrairement dans le champ DNS, représentant des échantillons du champ de dissipation scalaire  $\chi$  multifractal. La méthode WTMM, décrite en Annexe A, est utilisée. Un exemple des données utilisées est présenté en Fig. 5.15, où l'on peut voir croître le niveau de singularité avec le nombre de Schmidt. Du fait du nombre de Peclet fini toutefois, on peut constater *de visu* que le signal, même à  $Sc = 150$ , reste faiblement singulier. Les transformées en ondelette correspondantes, avec une ondelette mère de type sombrero (dérivée d'ordre 2 du noyau gaussien) sont présentées en Fig. 5.16 en regard des squelettes montrant les lignes de maxima. Ces squelettes montrent une complexité croissante des singularités avec le nombre de Schmidt. On observe sur les squelettes que certaines singularités grandes échelles se retrouvent pour les trois nombres de Schmidt, dans des zones proches spatialement.

Les fonctions de partition sont ensuite obtenues en utilisant les coefficients d'ondelette pour réaliser une forme de "box counting" le long des lignes de maxima. Une régression en log-log



**Fig. 5.15 :** signaux de dissipation scalaire le long d'une ligne issue de la DNS étudiés par analyse multifractale. Les échantillons comportent 1024 points. De gauche à droite,  $Sc = 1$ ,  $Sc = 10$  et  $Sc = 150$

en fonction de l'échelle  $a$  est réalisée sur une plage d'échelles où  $Z(q, a)$  est considérée comme variant linéairement, afin d'obtenir les fonctions exposants d'échelle  $\tau(q)$  (cf annexe A). Les courbes correspondantes sont présentées en Fig. 5.17.

Les spectres multifractals sont enfin obtenus par transformée de Legendre de  $\tau(q)$ .

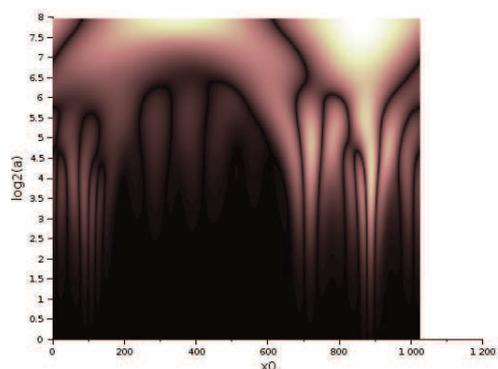
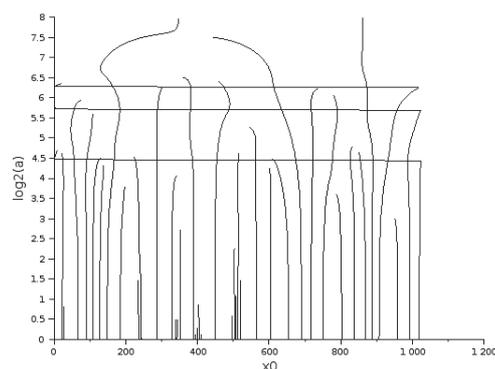
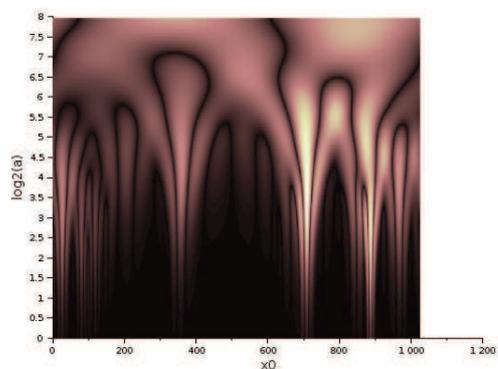
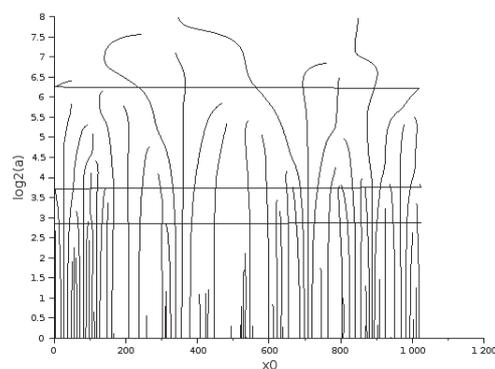
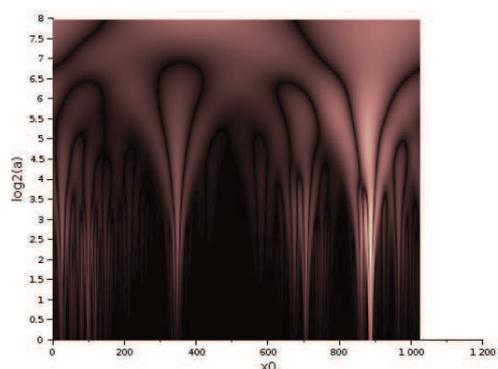
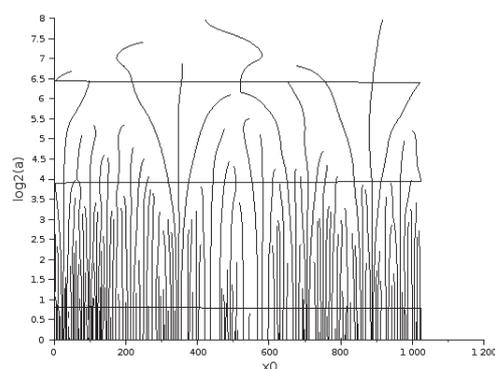
La méthode WTMM montre ici une grande variabilité dans les résultats obtenus. Les exposants de masse dépendent fortement de la plage d'échelles choisie pour la régression des fonctions de partition. La transformée de Legendre exacerbe encore même les faibles variations de  $\tau(q)$ . Il est difficile de croire en l'existence d'une zone d'évolution linéaire des fonctions de structure en Fig. 5.17 pour les valeurs de  $q$  négatives, et les spectres sont généralement trouvés en testant différentes zones de régression jusqu'à obtenir un résultat satisfaisant, remettant en question leur validité.

Ce comportement semble lié au caractère faiblement multifractal des signaux étudiés. On peut voir en effet sur les spectres de singularité que les courbes présentent pour les faibles nombres de Schmidt un point anguleux au niveau de leur maximum. Ce maximum de plus n'atteint pas la valeur 1, dimension fractale du support de la mesure. Pour un signal monofractal, le spectre des singularités dégénère en un point. La méthode WTMM, testée sur des signaux monofractals a tendance à produire tout de même un spectre, avec un point d'inflexion et une longue branche droite similaire à celle observée en Fig. 5.18(a).

La conclusion sur les spectres obtenus est donc que les signaux étudiés ne semblent pas assez singuliers, le nombre de Pelet étant trop faible, pour fournir des résultats fiables par WTMM. Le faible nombre d'échantillons statistiques (le signal n'est échantillonné que sur 1024 points) pourrait également être en cause, les singularités devant être statistiquement représentées pour être détectées. La branche droite des spectres ( $q < 0$ ) est sans doute un artefact lié à la méthode (WTMM a tendance à sur-représenter les points régulier) et la branche gauche doit être observée avec circonspection.

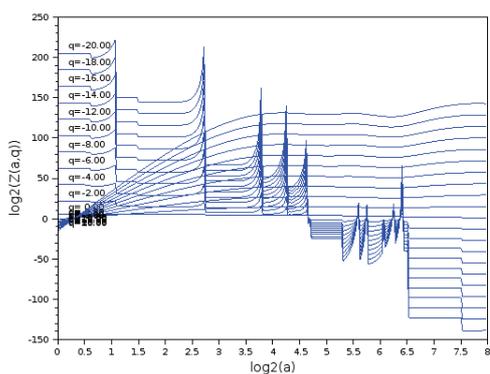
Les valeurs les plus singulières peuvent toutefois être comparées pour les différents Schmidt. On peut voir que l'augmentation du nombre de Schmidt conduit bien à l'apparition d'exposants de Hölder plus faibles.

On voit donc clairement avec cette analyse l'influence du  $Pe$  fini. L'augmentation du nombre de Schmidt ( $Sc = 150$ ) permet de commencer à obtenir des spectres acceptables (valeur maximale de 1, pas de point d'inflexion) mais ceux-ci sont encore trop sensibles et difficile-

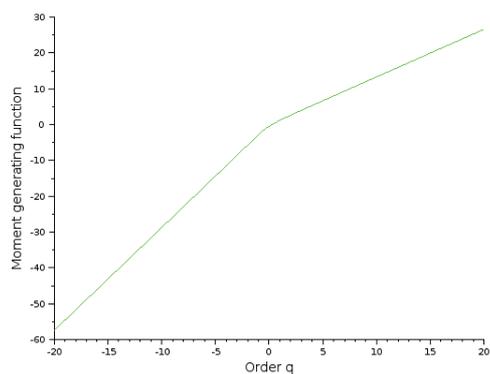
(a)  $Sc = 1$ (b) squelette  $Sc = 1$ (c)  $Sc = 10$ (d) squelette  $Sc = 10$ (e)  $Sc = 150$ (f) squelette  $Sc = 150$ 

*Fig. 5.16 : transformées en ondelette et squelettes correspondants pour les données présentées en Fig. 5.16. L'ondelette mère est un sombrero.*

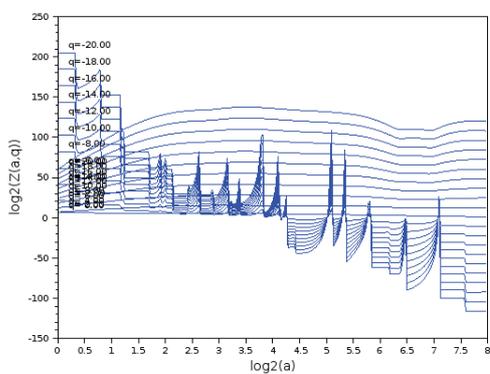
ment exploitables en l'état. Le problème de  $Pe$  fini provient principalement du faible nombre de Reynolds utilisé dans ces simulations.



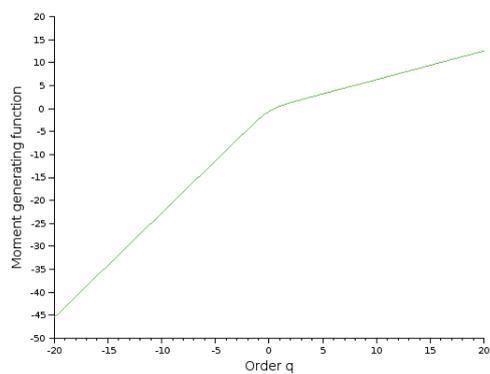
(a)  $Sc = 1$



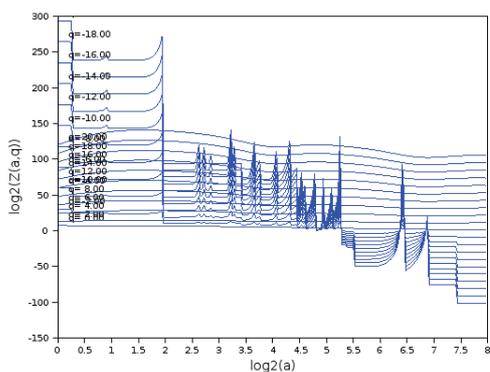
(b)  $Sc = 1$ , régression sur  $0 < \log_2(a) < 8$



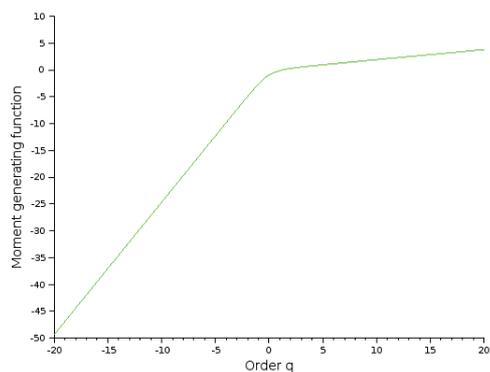
(c)  $Sc = 10$



(d)  $Sc = 10$ , régression sur  $0 < \log_2(a) < 8$



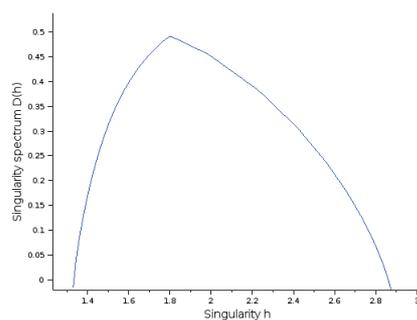
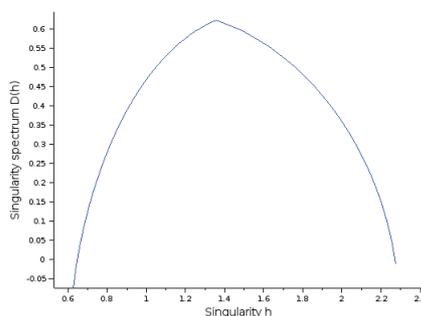
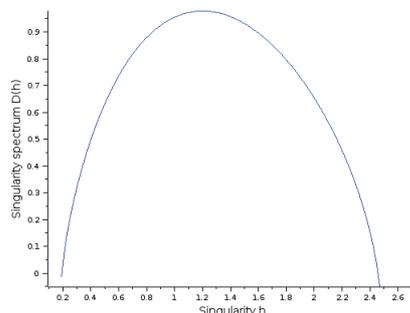
(e)  $Sc = 150$



(f)  $Sc = 150$ , régression sur  $2 < \log_2(a) < 8$

**Fig. 5.17 :** fonctions de partitions  $Z(q, a)$  et exposants de masse  $\tau(q)$  obtenues par régression linéaire en  $\log\text{-}\log$  de  $Z(q, a)$  sur une plage d'échelle.

L'analyse multifractale a cependant pu être menée sur un jeu de données à  $Re_\lambda = 130$  et  $Sc = 128$ . Ces données proviennent de calculs de THI forcée menés dans [47] pour tester un

(a)  $Sc = 1$ (b)  $Sc = 10$ (c)  $Sc = 150$ **Fig. 5.18** : spectres multifractals

modèle hybride spectral/particulaire<sup>2</sup>. Le signal de la dissipation sur 3072 points est reproduit en Fig. 5.19 et montre un comportement déjà beaucoup plus intermittent.

La complexité de la transformée en ondelette de ce signal et du squelette correspondant (Fig. 5.20) confirme cette observation. Le squelette montre par exemple une densité bien plus importante des singularités aux petites échelles. Malgré des variations locales, les fonctions de partition en Fig. 5.21 présentent un comportement linéaire beaucoup plus marqué. Le spectre obtenu est dès lors beaucoup plus digne de confiance.

2. On remercie ici Guillaume Balarac pour avoir gracieusement accepté de fournir ces données.

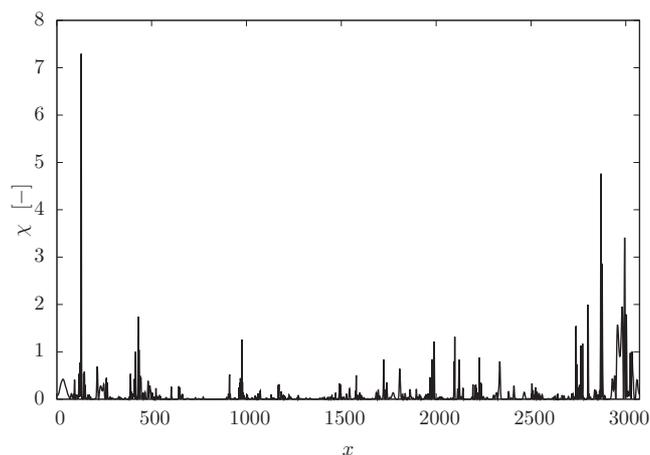


Fig. 5.19 : signal de dissipation sur une ligne,  $Re = 130$ ,  $Sc = 128$ ,  $THI$  forcée issue de [47]

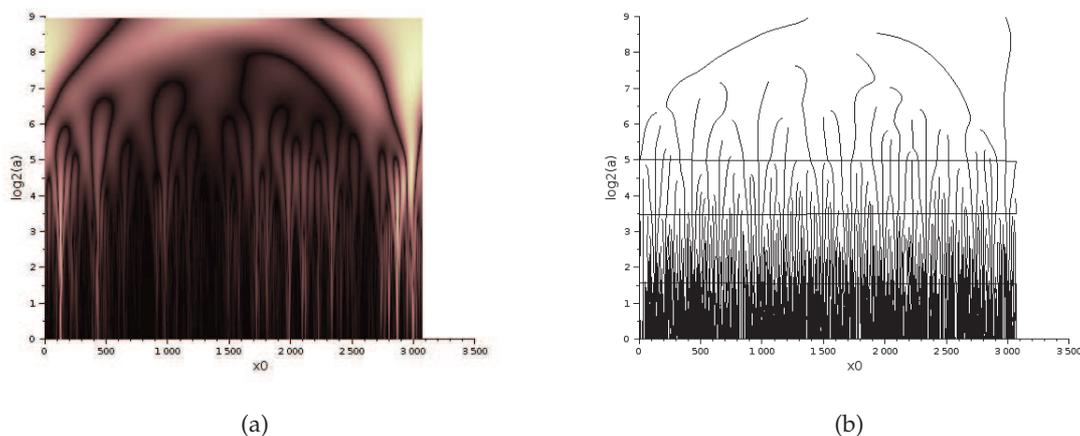


Fig. 5.20 : transformée en ondelette (sombbrero) du signal de la Fig. 5.19 et squelette correspondant

Comme le spectre montre la dimension fractale de chaque ensemble iso-Hölder dans l'écoulement, il est possible de reconstruire la pdf de la partie singulière de la dissipation dans le champ, qu'il faut ensuite relier à la densité de probabilité du champ correspondant. Un modèle LES basé sur ce genre de caractérisation serait puissant dans la mesure où il permettrait de reconstruire l'ensemble des moments statistiques de la quantité de sous-maille. Le processus de reconstruction de la pdf reste difficile et le passage des gradients, dont on peut espérer reconstruire leur pdf du fait qu'ils sont multifractals, au scalaire lui-même, est loin d'être immédiat.

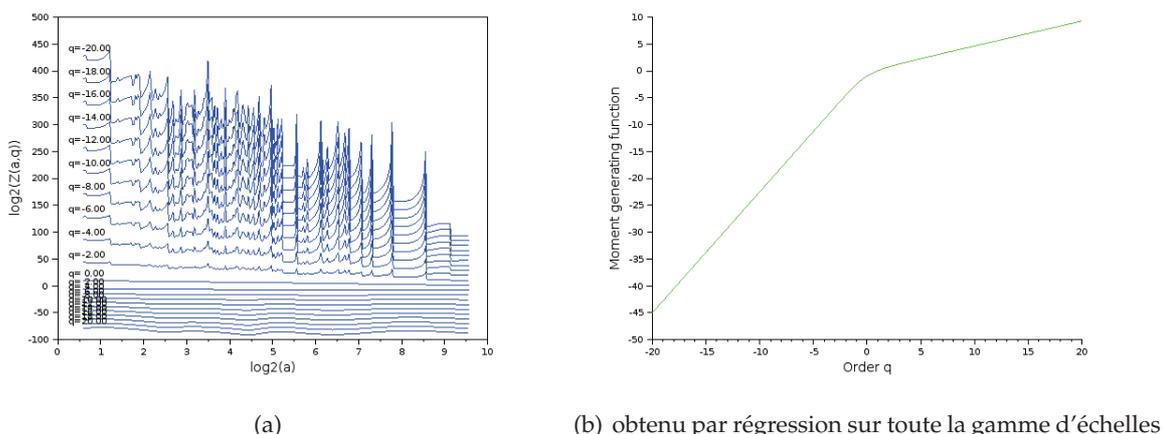


Fig. 5.21 : fonctions de partitions  $Z(q, a)$  et exposants de masse  $\tau(q)$

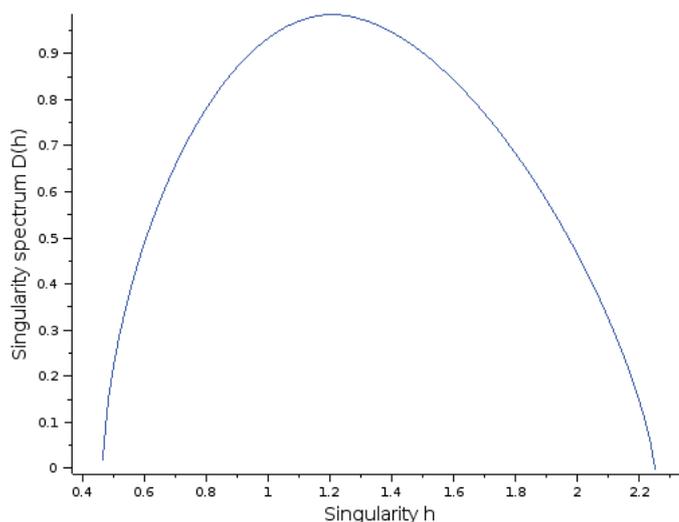


Fig. 5.22 : spectre multifractal

### 5.2.4 Obtention des multiplicateurs

Le spectre des singularités d’une mesure multifractale peut être obtenu selon différentes méthodes. Il peut notamment être déduit de la pdf des multiplicateurs de la mesure [80]. Dans cette section, les multiplicateurs du champ de dissipation scalaire sont extraits de la DNS.

La procédure de construction des multiplicateurs d’une mesure est la suivante : supposons que la mesure soit connue sur un échantillon de taille  $\epsilon$  en dimension  $d$ . On découpe le support de la mesure en  $n$  boîtes plus petites de taille  $\epsilon/a$ , avec  $a^d = n$  (on parlera de fractionnement en base  $n$ )<sup>3</sup>. Les multiplicateurs sont alors définis comme les rapports de la mesure des plus

3. Le nombre de boîtes  $n$  peut être choisi arbitrairement, mais les pdf dépendront forcément de la base choisie.

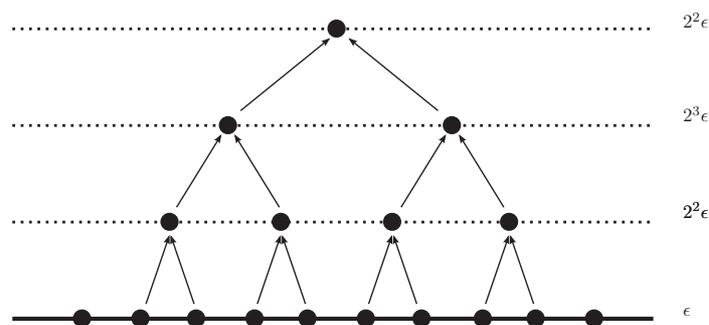
petites boîtes sur celle de la boîte de taille supérieure. On répète cette opération jusqu'aux plus petites échelles, obtenant à chaque étape  $n$  réalisations du multiplicateur par boîte.

Une réalisation  $i$  du multiplicateur permettant de passer de l'échelle  $\epsilon$  à l'échelle  $\epsilon/a$  en base  $n$  est :

$$\mathcal{M}_{n,i} = \frac{\chi_i(\epsilon/a)}{\chi(\epsilon)} = \frac{\chi_i(\epsilon/a)}{\sum_{j=1}^n \chi_j(\epsilon/a)} \quad (5.41)$$

Ici on considère la dissipation scalaire  $\chi$  comme une mesure (la construction des multiplicateurs permet d'assurer la propriété d'additivité) dont on veut tester le caractère multifractal. Les données étant tirée de champs 3D de la DNS, la dimension fractale du support de la mesure est  $D_0 = 3$ . La construction des multiplicateurs, présentée en Fig. 5.27 appliquée au cas 3D avec  $a = 2$  implique  $n = 8$ .

Pour reconstruire les multiplicateurs de la dissipation scalaire, l'opération est réalisée à l'envers : on part de la valeur de  $\chi$  calculée sur la grille DNS 3D (les boîtes sont donc considérées comme de taille  $\epsilon = \delta$ , l'espacement de la grille), puis on somme  $n = 2 \times 2 \times 2$  valeurs de  $\chi$  pour obtenir la valeur de la mesure sur la boîte de taille  $2\delta$ . On récupère alors 8 réalisations des multiplicateurs, et on répète l'opération selon la procédure décrite en Fig. 5.23 dans un cas 1D.



**Fig. 5.23 :** Procédé de calcul des multiplicateurs  $\mathcal{M}_n$  en 1D ( $d = 1$ ,  $n = 2$ ) à partir d'une échelle  $\epsilon$ . A chaque étape, on joint  $n = 2^d$  blocs de mesure pour calculer la mesure à l'échelle supérieure  $a\epsilon$ . Chaque groupe de flèches correspond à une somme.

On obtient ainsi une séquence de multiplicateurs  $\mathcal{M}_n(\epsilon_k) = \chi(a^{k-1}\delta)/\chi(a^k\delta)$ . Les pdf des multiplicateurs ont été obtenues ici pour  $k = 2$  à 6 étapes de cascade avec  $d = 3$ ,  $a = 2$ ,  $n = 8$  correspondant à des boîtes de taille maximale  $64\delta$ . La zone visqueuse-convective pour les différents  $Sc > 1$  de la DNS, identifiée par l'échelle supposée  $\eta_b$  correspondante, est représentée en Fig. 5.24. Les pdf des multiplicateurs correspondent donc à la zone visqueuse-convective du scalaire

- à  $Sc = 150$  pour  $k = 1, 2, 3$
- à  $Sc = 100$  et  $Sc = 50$  pour  $k = 2, 3$
- à  $Sc = 10$  pour  $k = 3$ .

Pour des valeurs de  $k$  inférieures, le scalaire est censé être homogène, ainsi que la dissipation, ce qui correspond à une seule valeur  $1/n$  de  $\mathcal{M}_k$ . Pour  $k = 5$  et 6, les multiplicateurs correspondent à une étape de la cascade dans la zone inertielle-convective.

L'équation 5.42 pour retrouver les exposants de masse faisant intervenir la base  $n$  choisie, les spectres des singularités obtenus, eux, ne dépendront plus de  $n$ .

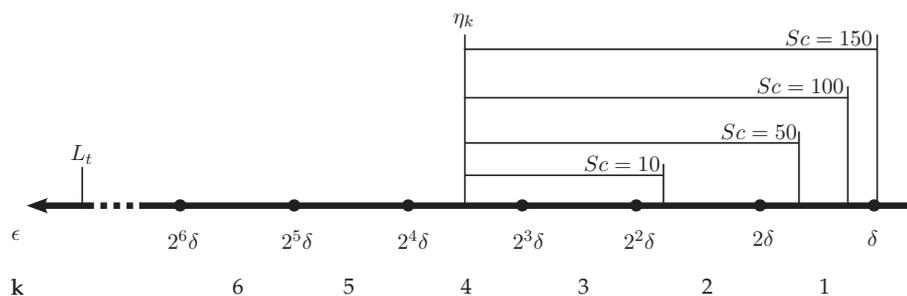


Fig. 5.24 : représentation en fonction de l'échelle  $\epsilon$  (échelle log) des zones visqueuse-convectives des différents scalaires de la DNS et des indices  $k$  de la séquence de multiplicateurs  $\mathcal{M}(\epsilon_k)$  obtenue.

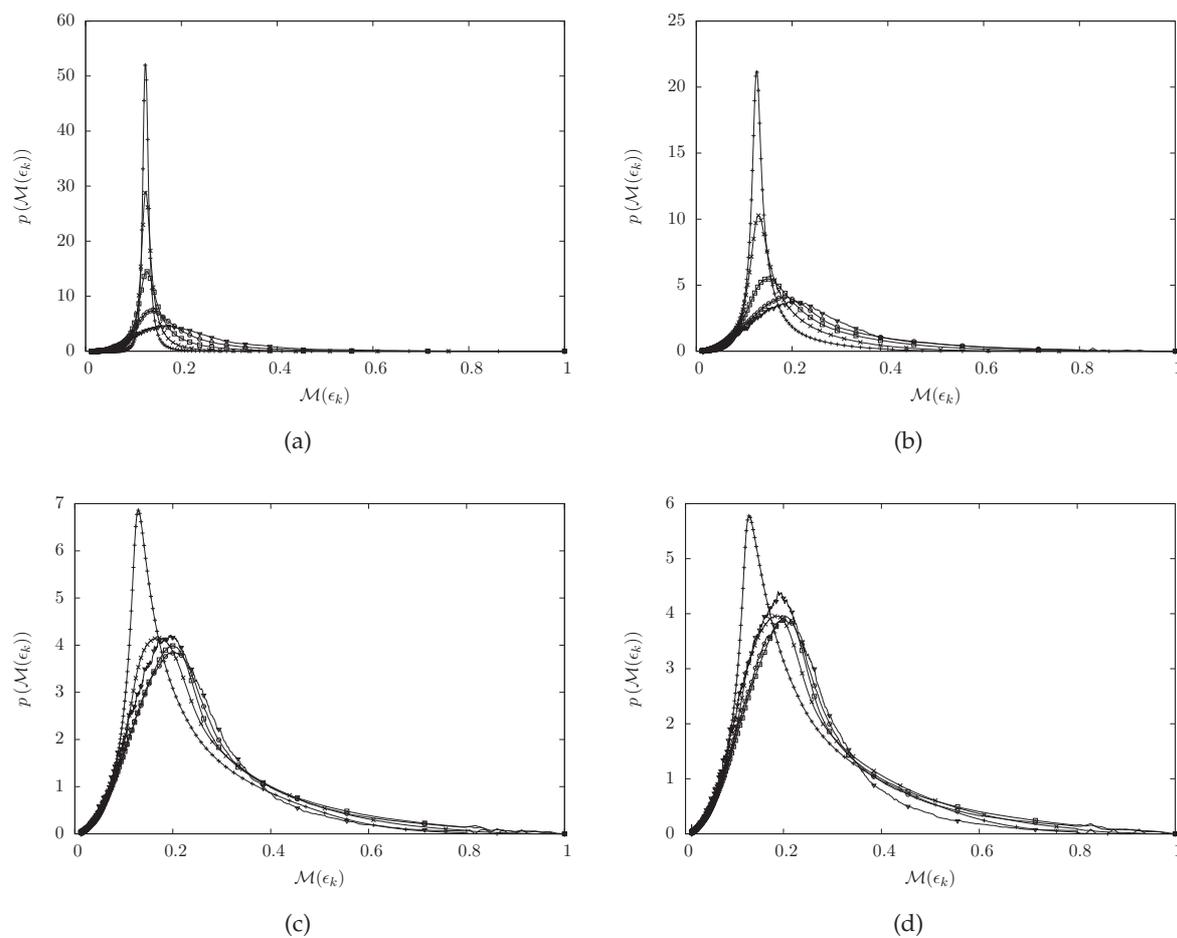
Les pdf  $p(\mathcal{M}_s(\epsilon_k))$  des multiplicateurs obtenues pour les différentes valeurs de  $k$  sont reportées pour  $Sc = 1$  et  $Sc = 150$  en Fig 5.25.

Pour  $Sc = 1$ , la pdf se rapproche effectivement d'un pic de Dirac en  $1/8$  pour  $k = 1$  mais les multiplicateurs sont multiples sur toutes les échelles supérieures. La vision idéale d'un point d'arrêt net de la cascade énergétique est donc fortement remise en cause, la pdf relaxant vers le Dirac sur toute la gamme d'échelles inférieures à  $\eta_k$ . Les pdf pour  $Sc = 10$  montrent un comportement similaire sur la zone visqueuse-convective, la dégénérescence vers le Dirac commençant avant l'échelle  $\eta_b$  correspondant à des fluctuations nulles. Pour les nombres de Schmidt supérieurs, si ce comportement est également observé, les pdf des échelles supérieures montrent une tendance à se superposer. Pour  $Sc = 10$ , les pdf de  $k = 5$  et  $k = 6$  sont très similaires, pour  $Sc = 50$  et  $100$  la similarité tient sur  $k = 4$  à  $6$ , tandis que les pdf des multiplicateurs pour  $Sc = 150$  sont assimilables, dans la limite de la barre d'erreur, pour  $k \geq 3$ .

On observe donc une invariance d'échelle des multiplicateurs de la cascade, sur une certaine gamme d'échelles dépendant du nombre de Schmidt (et possiblement du nombre de Reynolds). L'invariance d'échelle des multiplicateurs de la cascade multiplicative est une caractérisation de la multifractalité. Ce constat valide le concept de processus multiplicatif pour modéliser une mesure turbulente mais conforte dans l'idée qu'il existe, associées à cette cascade, une multiplicité d'échelles de coupure, dont l'échelle visqueuse calculée sur la base de considérations dimensionnelles ne représenterait qu'une forme de valeur moyenne. Ces différentes échelles de coupure semblent présenter une grande variabilité. Leur dépendance aux nombres de Schmidt et Reynolds pourrait être étudiée avec des plages d'étude plus larges (grands nombres de Peclet), les 2 étapes pour  $Sc > 10$  disponibles ici n'étant pas suffisantes.

Sur la plage d'invariance d'échelle, les multiplicateurs de la cascade ne semblent que peu dépendre du nombre de Schmidt. La Fig. 5.26 montre la pdf des multiplicateurs à l'étape 5 pour les différents Schmidt. Ces pdf ont été filtrées à l'aide d'une moyenne glissante de largeur 1% environ de la largeur du signal, afin de les rendre lisibles. Ces pdf correspondant aux grandes échelles sont en effet établies sur un moins grand nombre d'échantillons et sont très bruitées. Ce sont ces pdf qui sont utilisées dans la suite pour déterminer le spectre des singularités.

Il est établi dans [14, 22] que les fonctions densité de probabilité des multiplicateurs d'une



*Fig. 5.25 : pdf des multiplicateurs  $\mathcal{M}(\epsilon_k)$  à différentes étapes de la cascade pour  $Sc = 1$  (a),  $Sc = 10$  (b),  $Sc = 100$  (c),  $Sc = 150$  (d).*

*+ :  $k = 2$ ;  $\times$  :  $k = 3$ ;  $\square$  :  $k = 4$ ;  $\circ$  :  $k = 5$ ;  $\nabla$  :  $k = 6$*

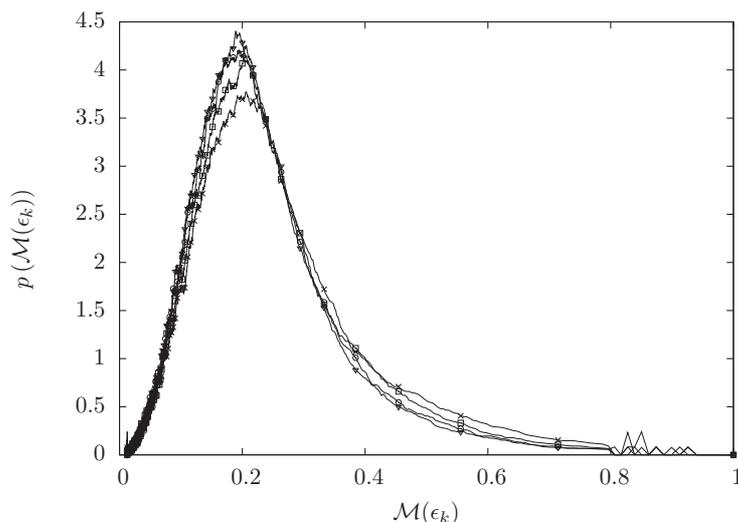


Fig. 5.26 : pdf des multiplicateurs de la mesure multifractale pour  $k = 5$ . Les pdf ont été filtrées à l'aide d'une moyenne glissante pour atténuer le bruit.

$\times$  :  $Sc = 10$ ;  $\square$  :  $Sc = 50$ ;  $\circ$  :  $Sc = 100$ ;  $\nabla$  :  $Sc = 150$

mesure multifractale permettent de recouvrer le spectre des singularités de cette mesure. Cette méthode, simple et robuste, est parfois préférable à la méthode des moments ou à WTMM. Quand la pdf des multiplicateurs est connue dans une base  $n$ , les exposants de masse s'expriment simplement en fonction de ses moments :

$$\tau(q) = -D_0 - \log_a \langle \mathcal{M}^q \rangle \quad (5.42)$$

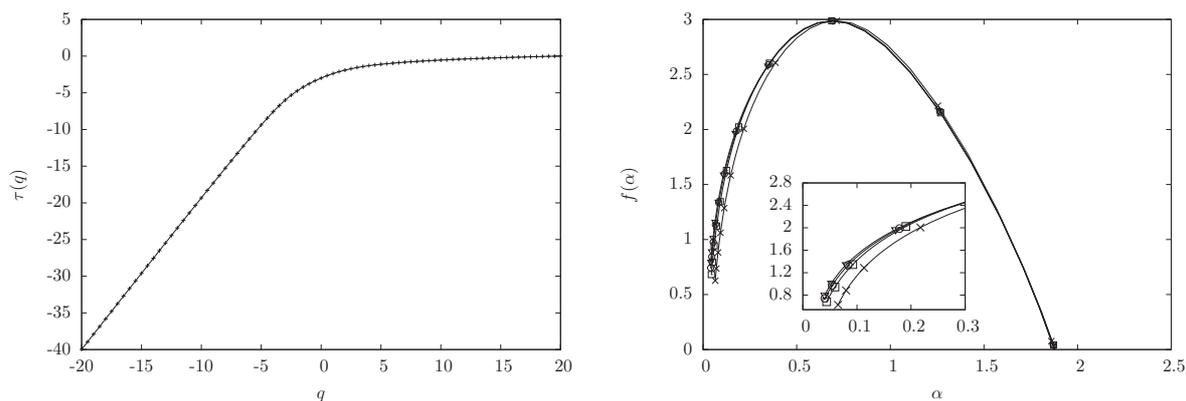
où  $D_0$  est la dimension fractale du support de la mesure (ici  $D_0 = 3$ ).

En appliquant 5.42 puis la transformée de Legendre, on obtient le spectre présenté en Fig. 5.27.

Les spectres obtenus possèdent une forme similaire. Les branches droites des spectres, correspondant aux valeurs les plus régulières, sont confondues pour tous les nombres de Schmidt considérés. La branche gauche en revanche est très dépendante du nombre de Schmidt, présentant plus d'événements singuliers quand le Schmidt augmente, en accord avec le caractère plus intermittent des champs associés.

Il est tentant de comparer ces spectres avec ceux obtenus dans la section précédente. Ils ne correspondent cependant pas tout à fait à la même étude. Tout d'abord, la méthode WTMM a montré une grande variabilité dans les résultats produits, notamment en fonction de l'intervalle de régression de  $Z$  en fonction de  $\epsilon$ . Ensuite, si les spectres de la section précédente sont ceux des singularités du champ de dissipation scalaire DNS réel (ou au moins d'un échantillon 1D de celui-ci), les spectres présentés ici correspondent au champ de dissipation considéré comme une mesure multifractale. A travers le choix d'une échelle  $k$  pour la pdf des multiplicateurs, on a admis que le champ étudié par cette méthode relevait de l'application d'une cascade multiplicative dont les multiplicateurs obéissent à cette pdf invariante d'échelle. Les singularités étudiées dans cette section sont donc celles d'un champ idéalisé, sans considérations de nombres d'étapes de cascade notamment.

Si un modèle devait être construit sur la base du spectre multifractal du champ de dissipation



**Fig. 5.27 :** exposants de masse et spectres des singularités de la mesure  $\chi$  dans la zone d'invariance d'échelle pour différents Schmidt. Les courbes de  $\tau(q)$  étant très proches les unes des autres, seule celle pour  $Sc = 150$  est tracée. L'insert dans la figure du spectre est un zoom sur la branche gauche des valeurs les plus singulières.

$\times$  :  $Sc = 10$ ;  $\square$  :  $Sc = 50$ ;  $\circ$  :  $Sc = 100$ ;  $\nabla$  :  $Sc = 150$

scalaire, la présente méthode des multiplicateurs semble la plus appropriée pour déterminer le spectre des singularités.

### 5.3 Tests a priori du modèle LES

Les tests *a priori* du modèle MFLES consistent en la comparaison à un instant donné des quantités issues d'une DNS avec celles prédites par le modèle LES à partir des quantités filtrées provenant de la DNS. Si ce type de test ne permet pas d'évaluer l'évolution temporelle ni la stabilité d'un modèle, il donne en revanche une information importante sur sa fidélité. Ici, il permet également de trouver la constante du modèle  $C_b$  ou  $C_d$  nécessaire à sa fermeture.

#### 5.3.1 Conditions de simulation

Les tests sont effectués sur une solution de la DNS (Tab.5.2) après établissement des conditions stationnaires. Le  $Re_\lambda$  de 24 est faible, la longueur de coupure de la LES se situant donc nécessairement proche de l'échelle de Kolmogorov. Trois scalaires, aux nombres de Schmidt de 1, 10 et 150, sont retenus pour les tests. La LES considérée consiste en un filtrage d'échelle caractéristique  $\Delta$  correspondant à 16 fois la longueur  $\delta$  de la maille DNS, soit  $\Delta = 1.562 \times 10^{-4}m$ . Rappelons que l'échelle de Kolmogorov moyenne de la THI considérée est de  $\eta_k = 1.108 \times 10^{-4}m$ . Le rapport de dimension LES/DNS est de 16, quelque soit le nombre de Schmidt considéré. Dans ces conditions, le domaine DNS entier de  $1024^3$  points serait simulé en LES à l'aide de  $64^3$  points.

#### 5.3.2 Reconstruction des termes LES

Le flux de sous-maille de la LES du scalaire s'écrit :

$$\sigma_i^* = \overline{u_i \phi^s} + \overline{u_i^s \phi} + \overline{u_i^s \phi^s} \quad (5.43)$$

Les différents termes de la relation 5.43 nécessitent l'application de l'opérateur de filtrage  $\overline{(\cdot)}$ . Le filtrage effectué ici sur la DNS est un filtrage gaussien. Le filtrage est appliqué effectivement comme un filtre de convolution sur le maillage DNS, avec comme variance  $\sigma$  la demi dimension de la maille LES  $\Delta/2$ . Les valeurs de sous-maille  $(\cdot)^s$  sont obtenues par soustraction du champ filtré au champ DNS ( $\phi^s = \phi - \overline{\phi}$ ,  $\underline{u}^s = \underline{u} - \overline{\underline{u}}$ ). On obtient donc chacun des termes de la somme dans la relation 5.43 en tout point du maillage DNS. Les comparaisons avec les valeurs produites par la LES se font donc à partir des moyennes sur la maille LES de ces quantités, par exemple :

$$\sigma_{LES}^* \sim \langle \sigma_{DNS}^* \rangle \quad (5.44)$$

où  $\langle (\cdot) \rangle$  représente une moyenne volumique sur la maille de LES.

Afin de tester l'équivalence du filtrage appliqué par le solveur LES sur le maillage LES  $\widetilde{\overline{\underline{u}\phi}}$  et le filtrage DNS  $\overline{\underline{u}\phi}$ , on récupère également le terme convectif résolu  $\overline{\underline{u}\phi}$ .

Le post-traitement nécessite en tout plus de 40 opérations de filtrage gaussien pour les 3 scalaires considérés. Du fait de la lourdeur d'un tel post-traitement, les comparaisons seront effectuées sur moins de 1/8 du domaine DNS. Le nombre d'échantillons correspond à un cube de 20 points de coté, soit 8000 points.

### 5.3.3 Résultats

Deux nombres sont utilisées pour évaluer la corrélation des valeurs DNS et LES d'une quantité  $\varphi$ . Le Coefficient de corrélation de Pearson,

$$\rho = \frac{\sum_i (\varphi_i^D - \langle \varphi_i^D \rangle) (\varphi_i^L - \langle \varphi_i^L \rangle)}{\sqrt{\sum_i (\varphi_i^D - \langle \varphi_i^D \rangle)^2} \sqrt{\sum_i (\varphi_i^L - \langle \varphi_i^L \rangle)^2}} \quad (5.45)$$

où  $(\cdot)^D$  représente une valeur extraite de la DNS et  $(\cdot)^L$  une valeur modélisée, indique à quel point les deux jeux de donnée sont linéairement liés, sans indication sur la valeur de la pente. Il est compris entre -1 et 1, 1 indiquant une parfaite colinéarité, -1 de même mais avec une pente opposée et 0 une absence de linéarité.

Le coefficient de détermination

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (\varphi_i^D - \varphi_i^L)^2}{\sum_i (\varphi_i^D - \langle \varphi_i^D \rangle)^2} \quad (5.46)$$

indique quant à lui à quel point les deux jeux de donnée sont corrélés, donc si le modèle "fit" correctement les données DNS. En l'absence de régression fournissant les valeurs modélisées, il peut prendre des valeurs négatives. En effet, il consiste en un rapport entre la variance du modèle par rapport aux données et la variance des données elle-mêmes. Si la variance des données DNS est faible, l'erreur de prédiction du modèle peut lui être supérieure, le rapport devenant plus grand que 1.

Pour chaque grandeur testée, ces deux quantités seront données dans la suite. Les tests portent sur trois grandeurs de rangs différents. Pour le scalaire, il s'agit de  $\phi^s$ ,  $\sigma^*$  et  $\nabla \cdot \sigma^*$ .

Le terme  $\nabla \cdot \sigma^*$ , constituant le terme source apparaissant effectivement dans l'équation résolue par le solveur LES, est important car il permet de tester, en plus de  $\sigma^*$  seul, la façon dont le modèle est implanté numériquement. Ainsi, la divergence sera par exemple écrite sous forme de somme de flux dans un code VF, une validation de  $\nabla \cdot \sigma^*$  permettant alors de tester l'influence effective du modèle.

### 5.3.3.1 Vitesse

Les modèles pour la vitesse et le scalaire sont liés puisque l'expression du flux de sous-maille du scalaire fait intervenir la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$ . Le modèle sur la vitesse est donc testé en premier lieu.

Dans un premier temps, la constante  $C_b$  est déterminée comme celle donnant la meilleure corrélation avec les données DNS. La vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$  et le terme source LES  $\nabla \cdot \tau^*$  obtenus avec cette valeur de  $C_b$  sont ensuite comparés avec les valeurs DNS.

#### Détermination de la constante $C_b$ du modèle

La vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$  est calculée dans le modèle comme

$$\underline{u}^s = C_b f(\mathcal{N}) \underline{u}^\Delta \quad (5.47)$$

où  $f$  est une fonction s'annulant pour  $\mathcal{N} = 0$ , permettant au modèle de prendre en compte la relaminarisation, du fait qu'un nombre de Reynolds de maille  $Re_\Delta$  inférieur ou égal à l'unité indique l'absence d'activité turbulente de sous-maille. Dans le présent domaine de test, le nombre de pas de cascade  $\mathcal{N}$  s'annule pour environ 10% des points de calcul.

Régresser la constante  $C_b$  pour obtenir la meilleure corrélation entre la vitesse de sous-maille LES et DNS revient à trouver le facteur  $C_b$  permettant une relation linéaire de pente 1 entre les données LES et les données DNS. De ce point de vue, les points où  $\mathcal{N}$  s'annule apparaissent comme pathologiques. La régression de  $C_b$  s'effectue donc sur un jeu de données dont on a retiré les points incriminés. Le calcul des coefficients de corrélation dans la suite s'effectue cependant sur l'ensemble complet des données test.

La détermination de la constante  $C_b$  s'effectue en calculant les valeurs de  $\rho$  et  $R^2$  correspondant au jeu de données DNS et aux jeux de données LES calculés en faisant varier  $C_b$ . Les résultats sont présentés en Fig. 5.28.

Comme  $\underline{u}^s$  est linéaire en  $C_b$ , et que  $\rho$  rend compte d'une corrélation linéaire entre les données et le modèle,  $\rho$  reste constant quelque soit  $C_b$ . La valeur de  $C_b$  choisie est donc celle qui maximise  $R^2$ . Elle diffère en fonction de la composante de  $\underline{u}^s$  considérée. C'est donc la moyenne des trois valeurs qui est retenue. La constante  $C_b$  est donc fixée à 1.21.

Pour  $Re_\lambda = 24$ , la Fig. 4.3 préconise une valeur  $C_b = 0.099$ . Cette différence de valeur semble s'expliquer par les conditions particulières du test. Du fait qu'on considère ici une LES très résolue d'un écoulement au Reynolds déjà faible, le Reynolds associé à la maille LES est très faible, de l'ordre de l'unité, conduisant à un nombre de pas de la cascade multifractale compris entre 0 et 2. Cet état de fait implique une grande variabilité relative des quantités prédites par le modèle, produisant des erreurs locales potentiellement plus importante que dans un cadre d'application LES typique où le nombre de pas de cascade sera plutôt supérieur à 10. On verra dans la suite que cette erreur est notamment due à la coupure associée au caractère entier du nombre de pas de cascade.

La différence de constante peut être associée au faible Reynolds delta moyen ainsi qu'à la différence d'implantation du modèle dans le code, bien qu'une si forte différence puisse difficilement lui être intégralement imputée.

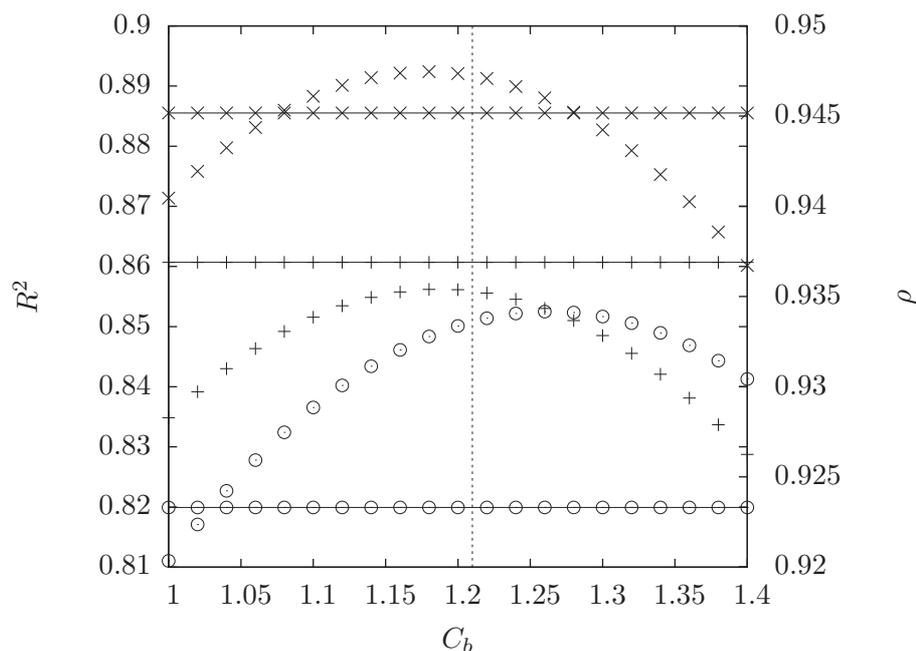


Fig. 5.28 : courbes d'évolution des coefficients  $R^2$  (symboles) et  $\rho$  (traits pleins) pour la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$ , en fonction de la constante  $C_b$  du modèle.

$$+ : u_x^s; \times : u_y^s; \circ : u_z^s$$

### Courbes d'évolution des grandeurs de sous-maille

La Fig. 5.29, présentant une comparaison des vitesses de sous-maille issues de la DNS et calculées par le modèle LES le long d'une ligne du domaine de test, montre que le modèle reproduit correctement la dynamique de la vitesse de sous-maille. Cette vitesse évolue peu spatialement, en accord avec le rapport  $\Delta/\eta$  faible, la vitesse étant presque résolue directement.

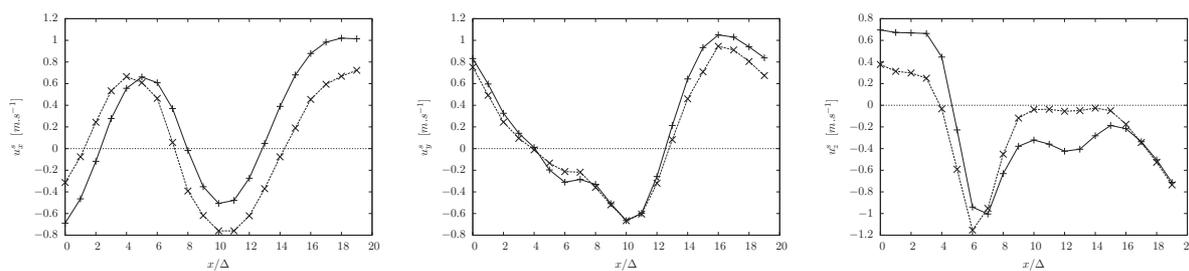


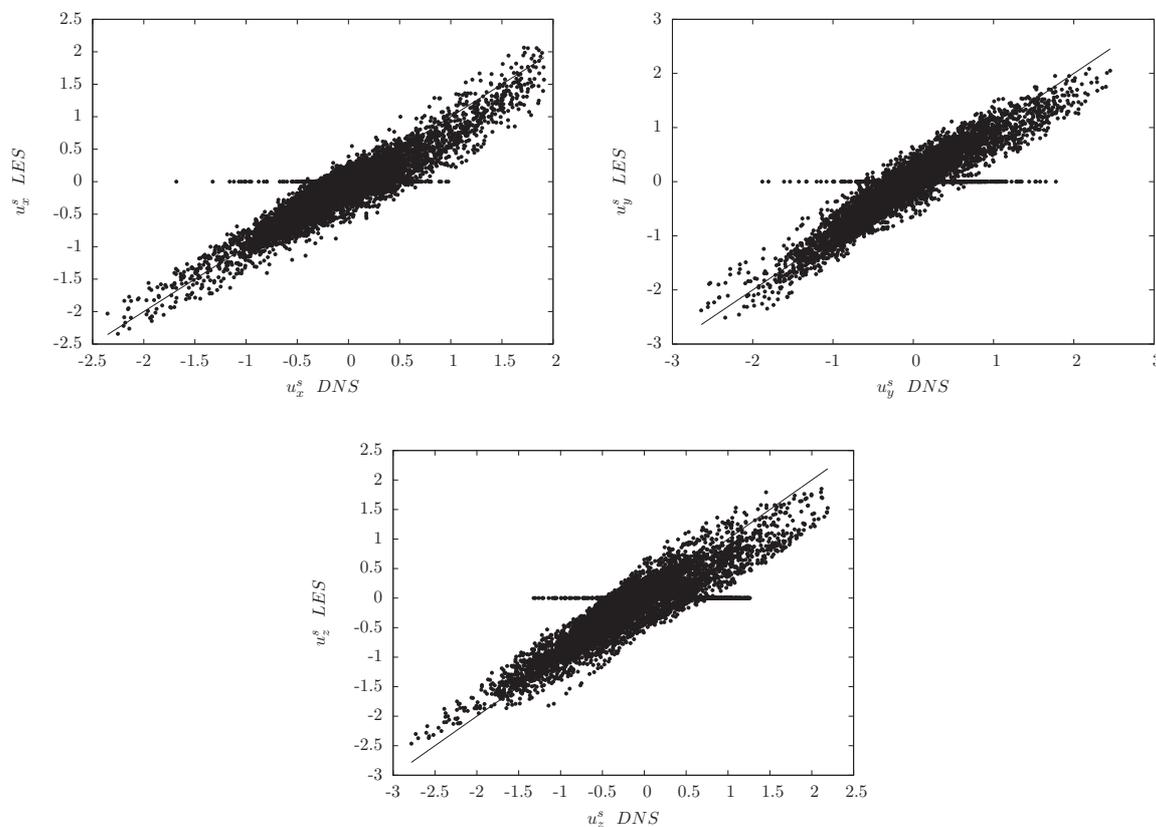
Fig. 5.29 : évolution spatiale des composantes (x, y, et z de gauche à droite) de la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$  le long d'une ligne du domaine de test.

$$+ : DNS; \times : LES$$

### Graphes de dispersion

Les graphes de dispersion correspondant sont visibles en 5.30, ainsi que les coefficients de

corrélation associés. Les coefficients de Pearson de l'ordre de 0.9 indiquent une grande linéarité entre les données LES et DNS. Les coefficients de détermination de l'ordre de 0.8 sont très bons pour la vitesse de sous-maille.



**Fig. 5.30 :** graphes de dispersion des composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  de la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$  tirée de la DNS et prédite par le modèle. Les coefficients sont respectivement :  $\rho \sim 0.922$  et  $R^2 \sim 0.828$  ( $x$ ) ;  $\rho \sim 0.917$  et  $R^2 \sim 0.838$  ( $y$ ) ;  $\rho \sim 0.890$  et  $R^2 \sim 0.788$  ( $z$ )

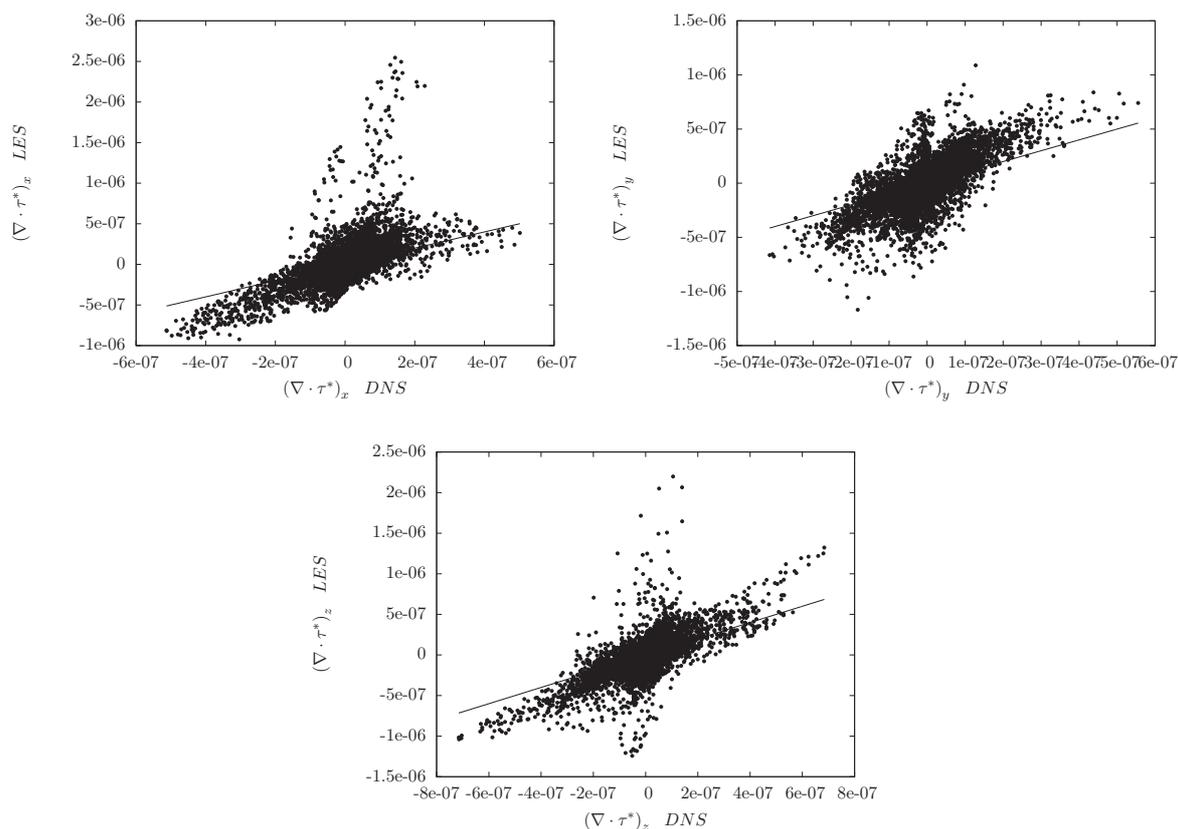
Ces graphes laissent apparaître une partie horizontale où la vitesse prédite par le modèle est nulle, mais pas celle issue de la DNS. Ces points correspondent aux données exclues de la régression de  $C_b$  discutées précédemment, où le champ de vitesse est considéré par le modèle comme résolu directement. Ces points représentant 10% de l'ensemble des valeurs testées, les coefficients de corrélation sont susceptibles d'augmenter dans une configuration de simulation aux grandes échelles plus classique où les nombres de Reynolds de maille sont moins faibles. La Fig. 5.32 montrera néanmoins que ces points correspondent à des valeurs acceptables du terme  $\nabla \cdot \tau^*$ .

Les graphes de dispersion de ce terme source LES,  $\nabla \cdot \tau^*$ , sont présentés en Fig. 5.31. Si le coefficient  $\rho$  présente des valeurs honorables de l'ordre de 0.65, le coefficient de détermination  $R^2$  négatif indique une grande dispersion. Ceci peut être expliqué notamment par la configuration de test du modèle. En effet, la fréquence de coupure LES est ici située juste en dessous de celle de kolmogorov moyenne, de sorte que le nombre de pas de la cascade prédit par le modèle varie seulement de 0 à 2. Une erreur sur cette valeur conduit à un changement de valeur très important pour le terme source LES. L'erreur relative dans cette configuration est beaucoup

plus importante que pour une configuration LES classique.

Cette dispersion, graphiquement, est liée à deux facteurs :

- il existe une constellation de points proches de l'axe vertical, où la divergence issue de la DNS est proche de zéro tandis que celle provenant de la LES prend des valeurs importantes,
- le modèle présente une tendance à surestimer en valeur absolue le terme source LES (la vitesse de sous-maille est quant à elle sous-estimée en valeur absolue).



**Fig. 5.31 :** graphes de dispersion des composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  de la divergence du tenseur de sous-maille  $\nabla \cdot \tau^*$  tirée de la DNS et prédite par le modèle. Les coefficients sont respectivement :  $\rho \sim 0.621$  et  $R^2 \sim -4.76$  ( $x$ ) ;  $\rho \sim 0.713$  et  $R^2 \sim -2.57$  ( $y$ ) ;  $\rho \sim 0.712$  et  $R^2 \sim -1.30$  ( $z$ )

Concernant le premier point, la Fig. 5.32 montre le même graphe de dispersion de  $(\nabla \cdot \tau^*)_x$  mais en fonction du nombre de pas de cascade prédit par le modèle. On peut y voir que ces valeurs dispersées correspondent aux nombres de Reynolds  $Re_\Delta$  les plus élevés ( $\mathcal{N} = 2$ ).

Le problème dans cette configuration peut provenir du fait que le nombre de pas de cascade est calculé comme la partie entière de  $\log_2 Re_\Delta^{9/4}$ . Un test a alors été effectué en ajoutant systématiquement un pas de cascade. En conservant la constante  $C_b$  correspondant au calcul précédent, on obtient de meilleures corrélations tant pour la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$  que pour le terme source  $\nabla \cdot \tau^*$ . La première voit sa valeur moyenne augmenter tandis que le second diminue, tous deux se rapprochant des valeurs DNS. Les coefficients obtenus sont en effet :

- pour la vitesse  $\rho \sim 0.934$  et  $R^2 \sim 0.837$  ( $x$ ) ;  $\rho \sim 0.940$  et  $R^2 \sim 0.862$  ( $y$ ) ;  $\rho \sim 0.924$  et  $R^2 \sim 0.852$  ( $z$ )

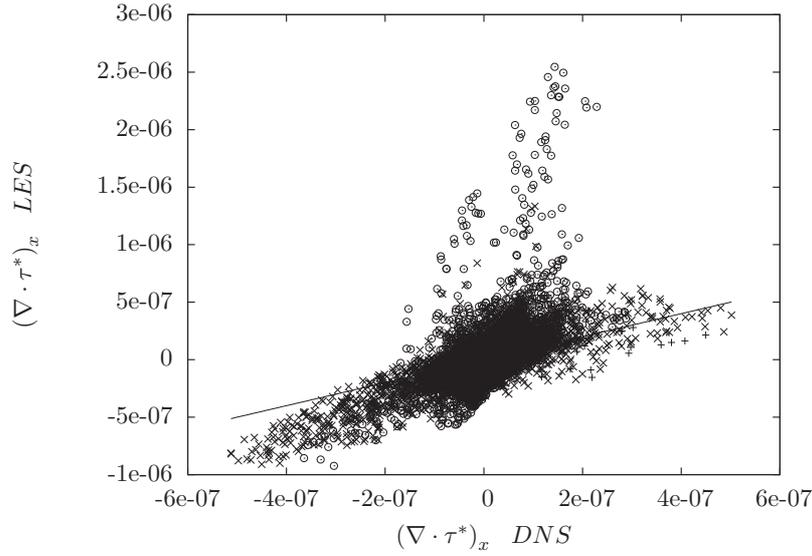


Fig. 5.32 : graphe de dispersion d'une composante du terme source LES.  
Symboles + :  $\mathcal{N} = 0$ ;  $\times$  :  $\mathcal{N} = 1$ ;  $\circ$  :  $\mathcal{N} = 2$

- pour le terme source  $\rho \sim 0.561$  et  $R^2 \sim -1.07$  (x);  $\rho \sim 0.668$  et  $R^2 \sim 0.276$  (y);  $\rho \sim 0.625$  et  $R^2 \sim 0.339$  (z).

Cette correction permet également de retirer la partie horizontale des graphes de dispersion 5.30 réduisant la linéarité des données, expliquant l'augmentation du coefficient  $\rho$  pour la vitesse de sous-maille.

Cette correction, bénéfique dans ce cas d'application où le nombre de Reynolds  $Re_\Delta$  est très proche de l'unité, peut cependant difficilement être extrapolée au cadre plus classique d'application d'un modèle LES à  $Re_\Delta$  élevé. Elle met toutefois en lumière une difficulté liée au caractère entier du nombre de pas de cascade, même à Reynolds élevé. Ainsi, le modèle ne fera pas de différence entre un Reynolds de 480 et de 640 par exemple, produisant tous deux un nombre d'étapes de cascade  $\mathcal{N} = 20$ .

D'autre part, le fait que les disparités les plus importantes entre la DNS et la LES interviennent lorsque la valeur du terme source DNS est proche de zéro tandis que celle provenant de la LES est surestimée pourrait être due à une mésestimation du nombre de Reynolds  $Re_\Delta$  lui-même. Les corrélations ont donc également été calculées en considérant le nombre de Reynolds basé sur le cisaillement

$$Re_\Delta = \frac{\Delta^2 \|\nabla \bar{u}\|}{\nu} \quad (5.48)$$

Si cela permet en effet de réduire la dispersion des valeurs de la divergence de  $\tau^*$ , obtenant des coefficients de détermination de l'ordre de  $-0.6$ , on observe une chute importante des coefficients de Pearson, ceux-ci avoisinant  $\rho \sim 0.1$ . Le nombre de Reynolds lié au cisaillement permet d'obtenir de meilleurs résultats sur les points où le nombre de pas de cascade est important, mais fournit au global des résultats dégradés. La réponse du modèle concernant la vitesse de sous-maille est quant à elle nettement moins bonne, avec des coefficients  $\rho \sim 0.3$  et  $R^2 \sim 0.1$ . On note cependant de façon intéressante un resserrement des valeurs des coefficients pour les différentes composantes considérées, comme si utiliser un nombre de Reynolds basé sur le gradient de vitesse permettait de mieux prendre en compte l'anisotropie locale du champ

de vitesse.

### Fonctions densité de probabilité

Les pdf de la vitesse de sous-maille de la DNS et de la LES sont présentées en Fig. 5.33. Un certain déficit de convergence statistique rend difficile une analyse précise. Un pic autour de zéro apparaît dans les pdf de la LES, correspondant à la partie horizontale des graphes de dispersion en Fig. 5.30. En dehors de ce pic, l'accord est assez bon au niveau des queues de pdf.

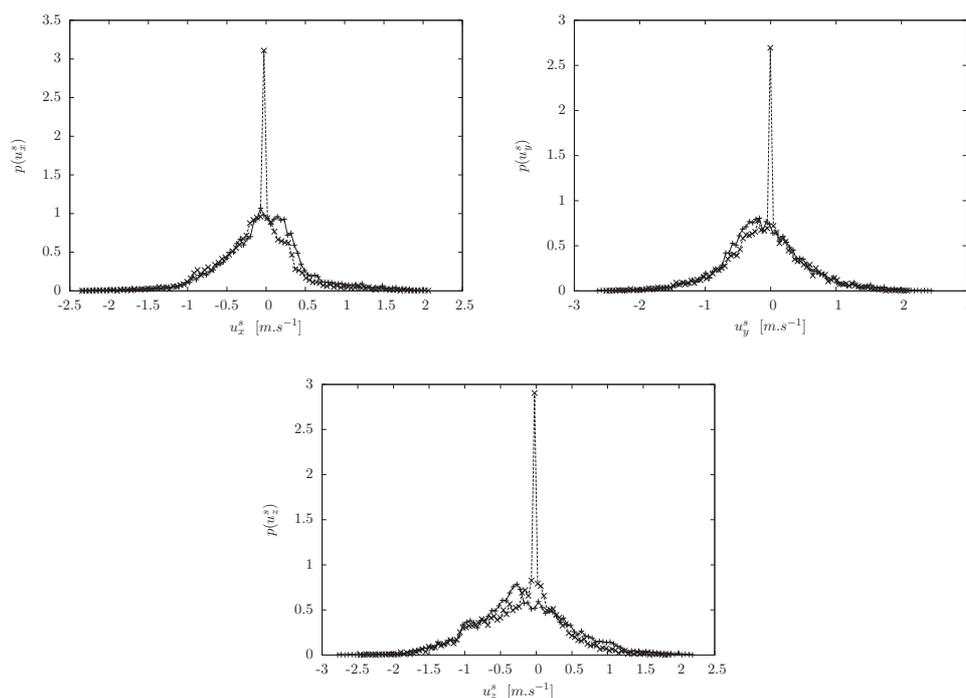


Fig. 5.33 : fonctions densité de probabilité des composantes  $x$ ,  $y$  et  $z$  de la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$ .  
+ : DNS ; x : LES

#### 5.3.3.2 Scalaire

Cette section présente la validation du filtrage de la partie convective de l'équation de transport LES du scalaire, puis la détermination des constantes  $C_d$  du modèle en fonction des différents Schmidt étudiés. Les différentes quantités calculées par le modèle sont ensuite comparées à leurs valeurs tirées de la DNS.

#### Filtrage du terme convectif

L'implantation du modèle LES dans le code YALES2 utilise la formulation 3.6c, qui fait intervenir le terme  $\overline{\bar{u}\bar{\phi}}$  dans la partie convective. Les quantités filtrées  $\bar{u}$  et  $\bar{\phi}$  accessibles au solveur LES sont en réalité  $\langle \bar{u} \rangle$  et  $\langle \bar{\phi} \rangle$  (où  $\langle \cdot \rangle$  représente une moyenne sur la maille), et l'opération de

filtrage nécessaire au calcul du terme convectif est supposée être effectuée sur l'ensemble des valeurs filtrées de sous-maille. L'opération réalisée par le solveur LES est en fait un filtrage  $\widetilde{(\cdot)}$  sur le maillage LES des quantités filtrées moyennées sur la maille. Le but est ici de vérifier l'exactitude de la relation

$$\widetilde{\langle \bar{u} \rangle \langle \bar{\phi} \rangle} = \overline{\bar{u} \bar{\phi}} \quad (5.49)$$

La Fig. 5.34 consiste en une comparaison entre le filtrage gaussien de  $\overline{\bar{u} \bar{\phi}}$  effectué sur le maillage DNS et un filtrage de même échelle caractéristique  $\Delta$  de  $\langle \bar{u} \rangle \langle \bar{\phi} \rangle$ , effectué sur le maillage LES, cette dernière quantité étant notée  $\widetilde{\bar{u} \bar{\phi}}$  par simplicité. Le filtrage DNS est un filtrage par convolution sur maillage structuré respectant la règle des  $3\Delta$ , tandis que le filtrage gaussien sur maillage LES repose sur les séries tronquées de laplacien implantées dans YALES2. Les coefficients de corrélation  $R^2$  comme  $\rho$  sont supérieurs à 0.996 pour toutes les valeurs testées. Même pour le Schmidt élevé, qui présente des variations de sous-maille plus importantes, l'accord est excellent et valide l'utilisation de ce filtrage dans la suite des calculs LES. Cette validation ne s'applique pas qu'au scalaire et est également valable pour la partie convective de l'équation LES de quantité de mouvement.

### Détermination de la constante du modèle

Comme pour la vitesse, la constante  $C_d$  associée au modèle pour le scalaire est régressée en minimisant le coefficient  $R^2$  de la quantité de sous-maille,  $\phi^s$ . Contrairement à la vitesse, l'ensemble des points est considéré, indépendamment de la valeur du nombre de pas de cascade, et ce même pour  $Sc = 1$ . Les courbes correspondantes en Fig. 5.35 permettent de déterminer les valeurs  $C_d = 1.4$  pour  $Sc = 1$ ,  $C_d = 2.74$  pour  $Sc = 10$  et  $C_d = 4.08$  pour  $Sc = 150$ . Le faible  $Re_\Delta$  ne permet pas de considérer ces constantes comme universelles. L'effet du limiteur de cascade inverse a été testé et donne des résultats moins bon avec que sans, pour la corrélation de  $\phi^s$  comme  $\sigma^*$ . La suite des tests n'utilise donc pas de limitation de cascade inverse pour le scalaire.

### Courbes d'évolution spatiale

Les Fig. 5.36 et 5.37 présentent des courbes d'évolution typiques du scalaire de sous-maille, du flux de sous-maille et de sa divergence, issus de la DNS et prédits par le modèle. La dynamique plus importante quand le Schmidt augmente est visible. Cette dynamique est bien reproduite par le modèle, y compris à  $Sc = 150$  où les variations inter-maille sont importantes. L'amplitude des variations brusques du scalaire de sous-maille de la DNS est parfois légèrement sous-estimée par le modèle.

Le meilleur accord sur les composantes ( $y$ ) du vecteur flux que sur les autres composantes, déjà observable en Fig. 5.29, est dû au hasard de l'échantillon choisi.

Si l'accord est plutôt bon pour le scalaire de sous-maille et le vecteur flux, il diminue quand on considère la divergence, tendance confirmée par les graphes de dispersion présentés ci-après.

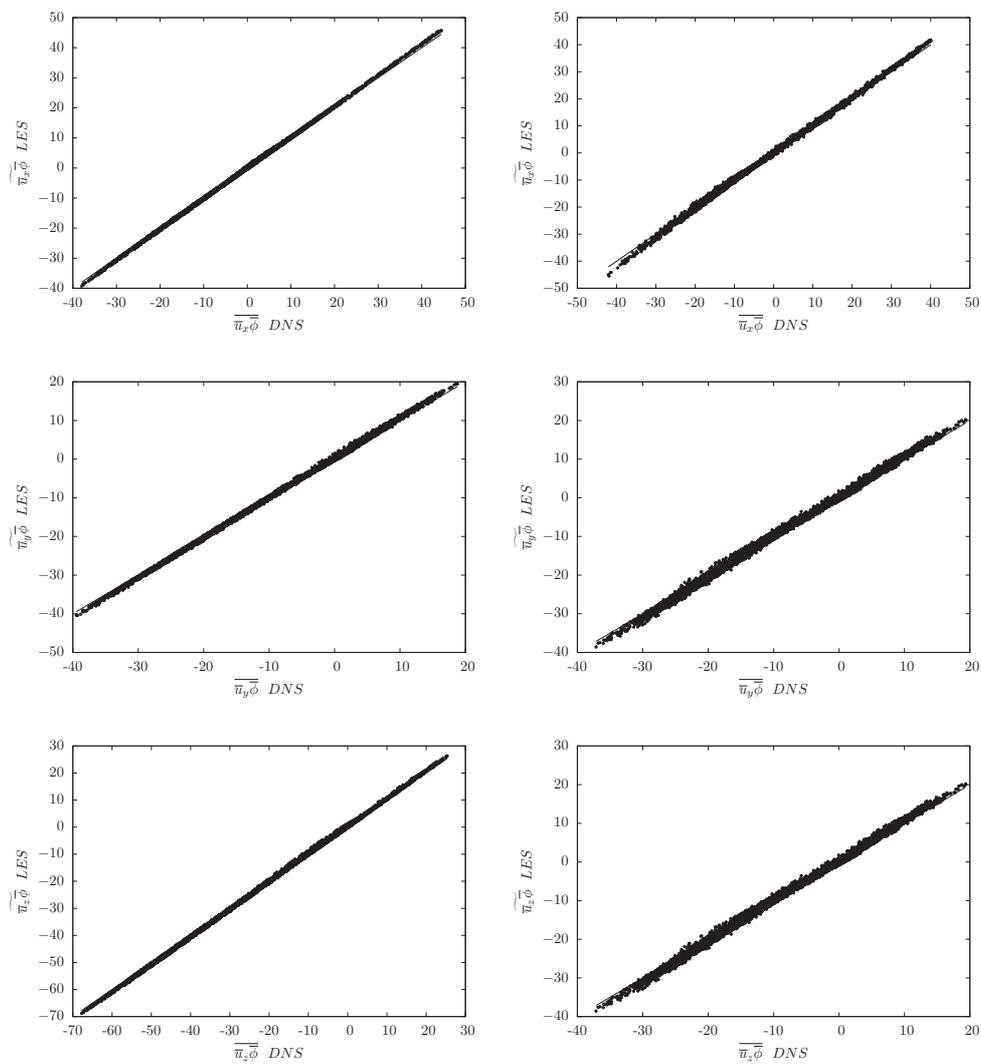


Fig. 5.34 : graphes de dispersion de  $\widetilde{u_i\phi}$  en fonction de  $\overline{u_i\phi}$  pour 3 composantes de la vitesse et pour  $Sc = 1$  (gauche) et  $Sc = 150$  (droite).

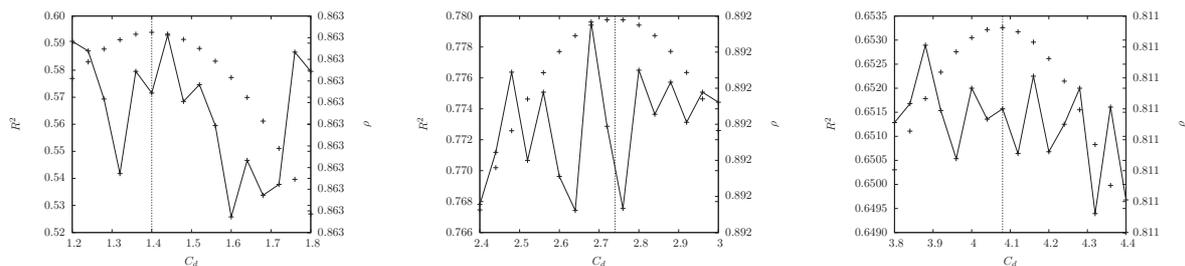


Fig. 5.35 : courbes d'évolution des coefficients  $R^2$  (symboles) et  $\rho$  (lignes) pour le scalaire de sous-maille  $\phi^s$ , en fonction de la constante  $C_d$  du modèle, pour (de gauche à droite)  $Sc = 1$ ,  $Sc = 10$  et  $Sc = 150$ .

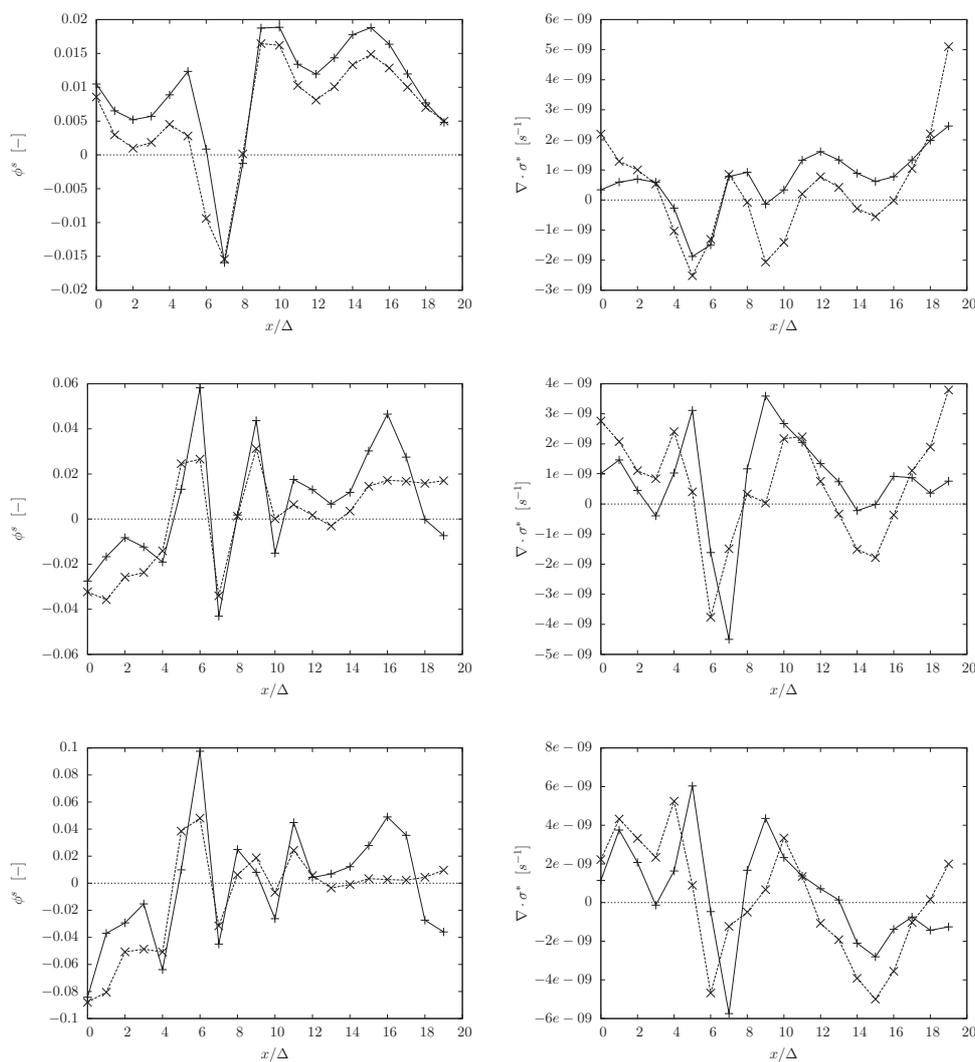
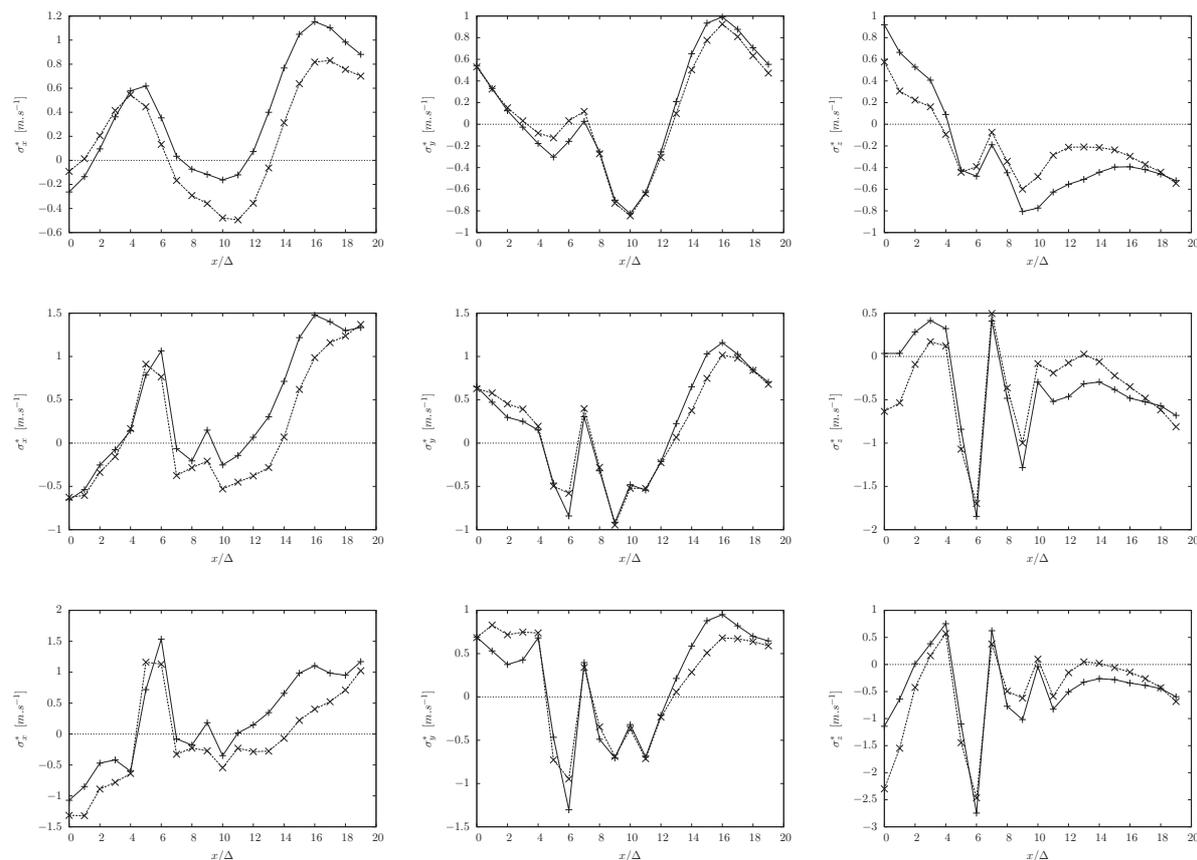


Fig. 5.36 : évolution spatiale du scalaire de sous-maille  $\phi^s$  (gauche) et du terme source LES  $\nabla \cdot \sigma^*$  (droite) le long d'une ligne du domaine de test pour  $Sc = 1$  (haut),  $Sc = 10$  (centre),  $Sc = 150$  (bas).  
+ : DNS ; x : LES



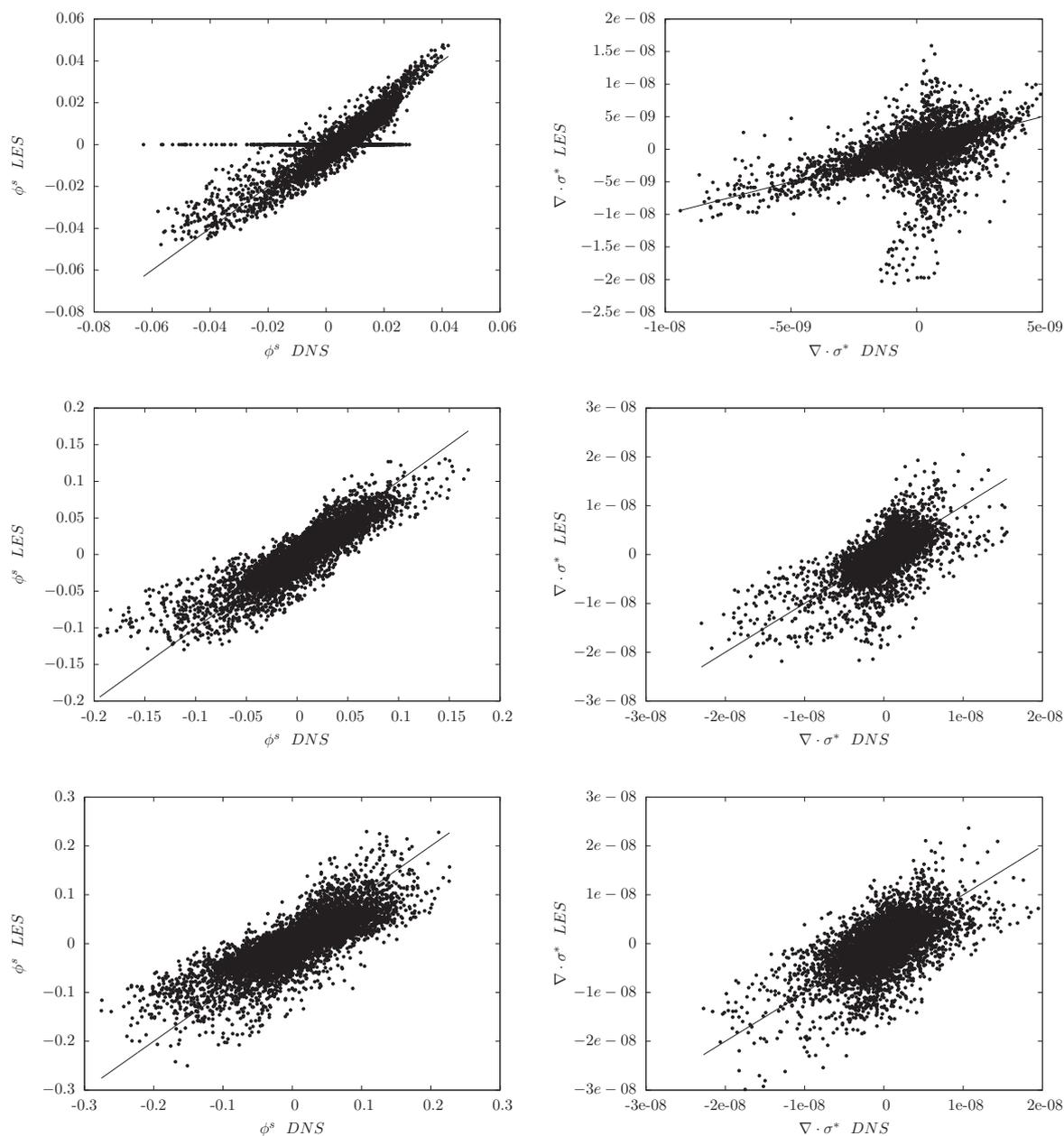
**Fig. 5.37 :** évolution spatiale des composantes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  de gauche à droite) du flux de sous-maille  $\sigma^*$  le long d'une ligne du domaine de test pour  $Sc = 1$  (haut),  $Sc = 10$  (centre),  $Sc = 150$  (bas).  
+ : DNS ; × : LES

### Graphes de dispersion

Les graphes de dispersion pour le scalaire de sous-maille, le flux de sous-maille et sa divergence sont présentés pour les trois nombres de Schmidt considérés en Fig. 5.38 et 5.39. L'influence du modèle sur la vitesse et du nombre de cascade nulle dans la zone inertielle-convective est très visible sur les graphes du scalaire à  $Sc = 1$ , alors qu'elle est moins prégnante quand le nombre de Schmidt augmente. Lorsque le nombre de Schmidt vaut 1, le modèle pour le scalaire à grand Schmidt dégénère correctement vers une configuration sans zone visqueuse-convective.

L'augmentation du nombre de Schmidt semble mener à une plus grande dispersion des valeurs de  $\phi^s$  autour de l'axe  $y = x$ , tendance confirmée par les valeurs de  $R^2$ , faible pour  $Sc = 1$  du fait des points pathologiques déjà cités, augmentant pour  $Sc = 10$  puis diminuant pour  $Sc = 150$ . Les valeurs de  $\rho$ , supérieures à 0.8 et de  $R^2$ , supérieures à 0.6, sont assez bonnes.

L'accord concernant le flux de sous-maille  $\underline{\sigma}^*$  entre la DNS et la LES est lui excellent, les coefficients de corrélation reproduits dans le Tab.5.5 étant supérieurs à 0.9, tandis que  $R^2$  est supérieur à 0.8 pour  $Sc > 1$ . Les valeurs du flux de sous-maille à  $Sc = 1$ , bien que moins



**Fig. 5.38** : graphes de dispersion du scalaire de sous-maille  $\phi^s$  (gauche) et du terme source LES  $\nabla \cdot \sigma^*$  (droite) tirés de la DNS et prédits par le modèle pour  $Sc = 1$  (haut),  $Sc = 10$  (centre) et  $Sc = 150$  (bas).

Les coefficients sont respectivement

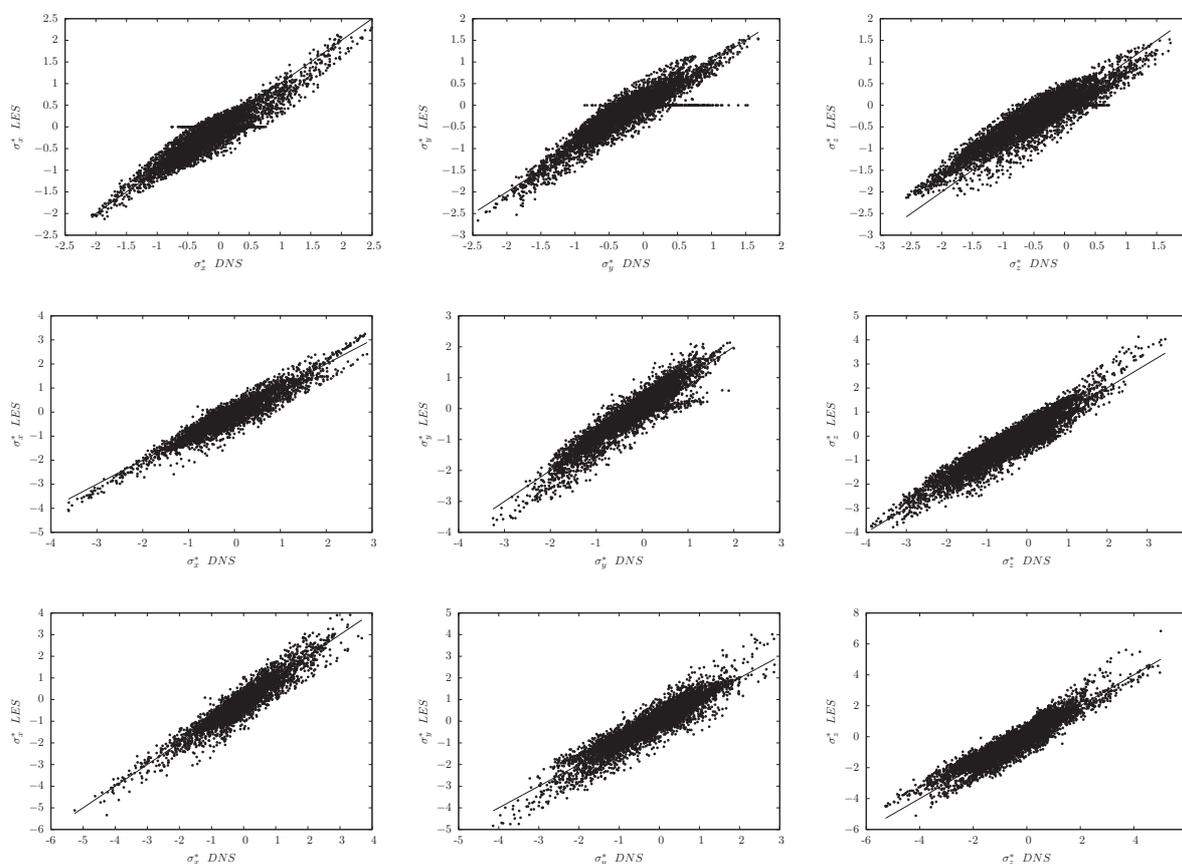
pour  $\phi^s$  :  $\rho \sim 0.863$  et  $R^2 \sim 0.594$  ( $Sc = 1$ );  $\rho \sim 0.892$  et  $R^2 \sim 0.780$  ( $Sc = 10$ );  $\rho \sim 0.811$  et  $R^2 \sim 0.653$  ( $Sc = 150$ )  
 pour  $\nabla \cdot \sigma^*$  :  $\rho \sim 0.504$  et  $R^2 \sim -1.54$  ( $Sc = 1$ );  $\rho \sim 0.670$  et  $R^2 \sim 0.127$  ( $Sc = 10$ );  $\rho \sim 0.625$  et  $R^2 \sim 0.0892$  ( $Sc = 150$ )

bonnes, ne souffrent que peu des approximations observées dans le modèle pour la vitesse au chapitre précédent.

La corrélation du terme source LES  $\nabla \cdot \sigma^*$  est nettement moins bonne. Bien que les coefficients

de Pearson entre 0.5 et 0.7 soient acceptables, les valeurs de  $R^2$ , comme dans le cas de la vitesse, sont très faibles. Elles le sont toutefois moins que pour la divergence du tenseur de sous-maille du modèle pour la vitesse, qui étaient toutes négatives. Cette "correction" par l'ajout d'une partie visqueuse-convective observée quand  $Sc > 1$  semble confirmer l'influence négative de la faible largeur spectrale de la zone inertielle-convective du présent cas test.

La brusque dégradation des coefficients de corrélation lorsque l'on prend la divergence d'une quantité, alors même que le calcul de la divergence est numériquement identique pour les quantités issues de la DNS et produites par le modèle grandes échelles, est générale et a été observée pour toutes les quantités considérées. Malgré le caractère structuré du maillage dédié à la THI utilisé ici, le calcul de la divergence est bien écrit en formulation volumes finis non structurés comme décrit au paragraphe 4.2.1. La divergence en un point est donc une combinaison linéaire des quantités sur les mailles adjacentes. On peut par conséquent s'attendre à des résultats encore dégradés sur un maillage non structuré.



**Fig. 5.39 :** graphes de dispersion des composantes ( $x$ ,  $y$  et  $z$  de gauche à droite) du vecteur flux de sous-maille  $\sigma^*$  tiré de la DNS et prédit par le modèle pour  $Sc = 1$  (haut),  $Sc = 10$  (centre) et  $Sc = 150$  (bas). Les coefficients de corrélation sont indiqués en Tab. 5.5.

### Fonctions densité de probabilité

Les Fig. 5.40 et 5.41 présentent les pdf du scalaire de sous-maille, du flux de sous-maille et

$Sc$	x		y		z	
	$\rho$	$R^2$	$\rho$	$R^2$	$\rho$	$R^2$
1	0.931	0.863	0.917	0.815	0.905	0.773
10	0.941	0.870	0.934	0.834	0.937	0.857
150	0.937	0.859	0.930	0.826	0.935	0.862

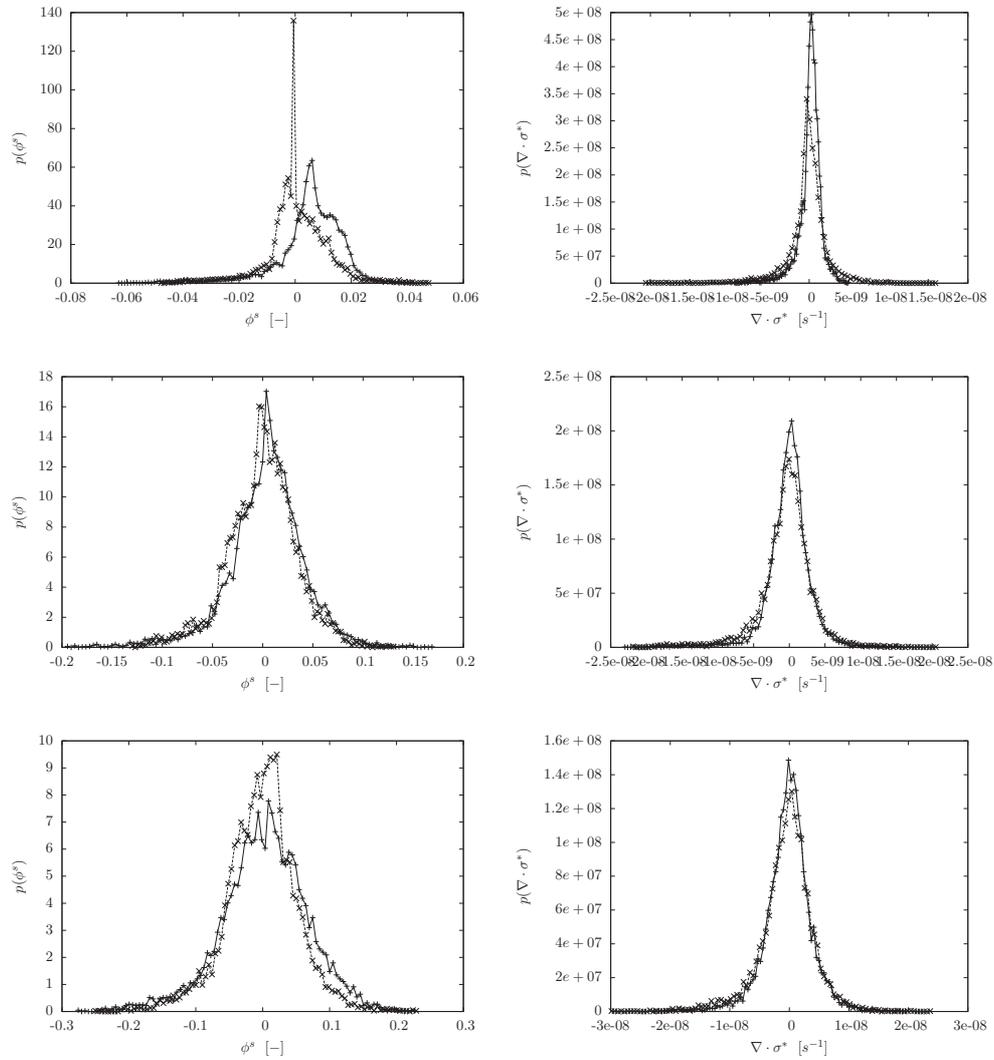
**Tab. 5.5** : coefficients de corrélation pour les graphes de dispersion du vecteur flux de sous-maille  $\underline{\sigma}^*$  présentés en Fig. 5.39

de sa divergence.

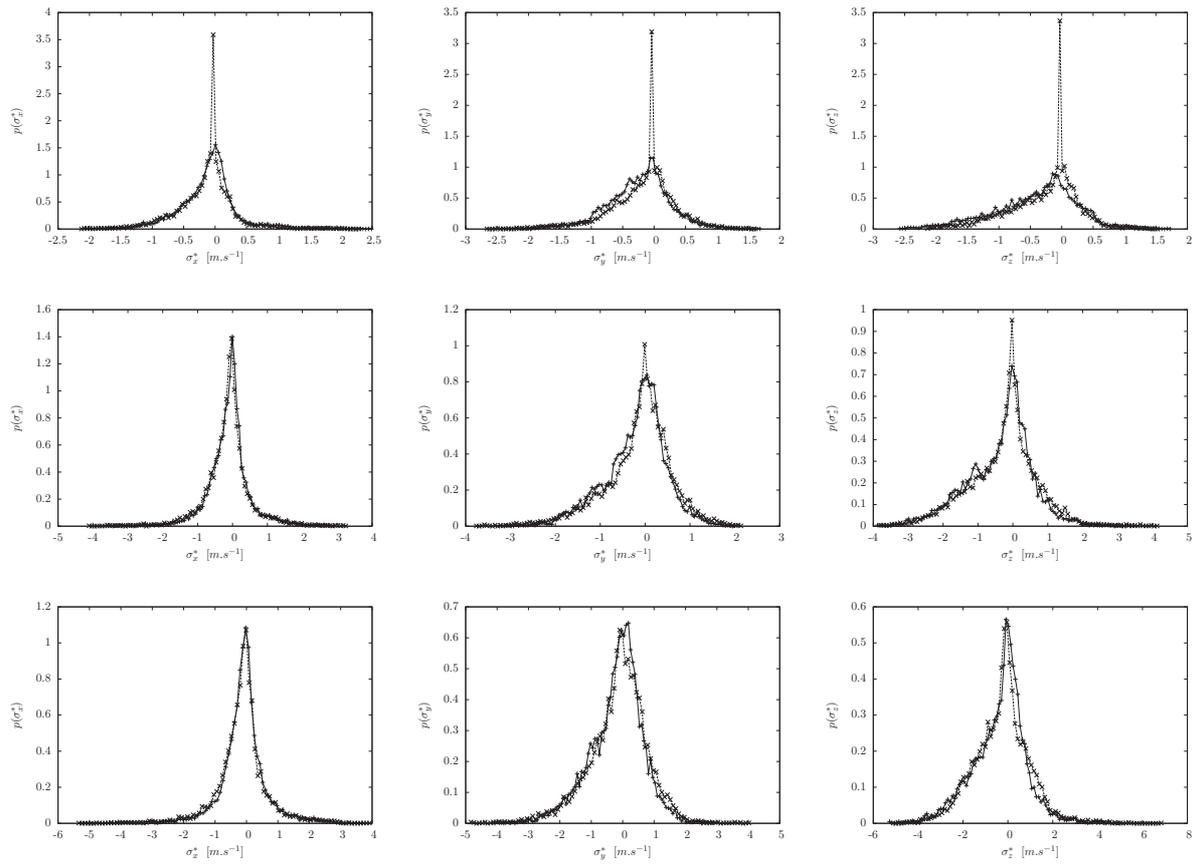
En ce qui concerne le scalaire de sous-maille, l'observation pour  $Sc = 1$  est la même que pour la vitesse de sous-maille  $\underline{u}^s$ . Pour les nombres de Schmidt plus élevés l'accord est bon, le manque d'échantillons statistiques étant visible et rendant toute conclusion plus précise hasardeuse.

La quantité  $\phi^s$  représentée ici est en fait la moyenne, moment d'ordre 1 du scalaire de sous-maille sur la maille. Sa bonne reproduction est donc importante si l'on veut développer un modèle LES multifractal susceptible de reproduire les différents moments statistiques de celui-ci, afin de les utiliser pour la fermeture d'autres modèles par exemple.

Les fonctions densité de probabilité de la divergence de  $\underline{\sigma}^*$  issues de la DNS et de la LES diffèrent essentiellement dans une zone proche de la moyenne. Le modèle semble prédire moins d'événements de faible amplitude que n'en comporte la DNS. Là encore, il serait nécessaire d'augmenter la taille de l'échantillon statistique.



**Fig. 5.40 :** fonctions densité de probabilité du scalaire de sous-maille  $\phi^s$  (gauche) et du terme source LES  $\nabla \cdot \sigma^*$  (droite) pour  $Sc = 1$  (haut),  $Sc = 10$  (centre),  $Sc = 150$  (bas).  
 + : DNS ; x : LES



**Fig. 5.41 :** fonctions densité de probabilité des composantes ( $x, y, z$  de gauche à droite) du vecteur flux de sous-maille  $\sigma^*$  pour  $Sc = 1$  (haut),  $Sc = 10$  (centre),  $Sc = 150$  (bas).  
 + : DNS ; × : LES

### Modèles de Smagorinsky

Les modèles de Smagorinsky n'étant pas des modèles structurels, les tests *a priori* sont peu appropriés pour leur validation. Toutefois, dans le cadre d'une THI, ils peuvent reproduire correctement les grandeurs issues de la DNS. Les modèles classiques et dynamiques ont été testés au regard de la présente DNS. Ces modèles ne fournissant pas de scalaire de sous-maille, seule la corrélation entre  $-\Gamma_t \Delta \phi$  et  $\nabla \cdot \sigma$  est testée.

Pour le modèle classique, la diffusivité turbulente est définie comme  $\Gamma_t = \nu_t / S_{c_t}$  à l'aide d'un Schmidt turbulent qu'il est nécessaire d'évaluer. Il est déterminé, comme pour les constantes  $C_b$  et  $C_d$ , comme celui qui maximise le coefficient de détermination  $R^2$ . Les valeurs trouvées sont respectivement  $S_{c_t} = 0.345$  ( $Sc = 1$ ),  $S_{c_t} = 0.465$  ( $Sc = 10$ ) et  $S_{c_t} = 0.7325$  ( $Sc = 150$ ).

Les graphes de dispersion obtenus avec le modèle classique pour ces valeurs du Schmidt turbulent et avec le modèle dynamique sont présentés en Fig. 5.42.

Les corrélations, issues d'une THI à faible Reynolds, sont plutôt bonnes. Le modèle dynamique donne de meilleurs résultats que sa version classique pour tous les nombres de Schmidt testés, avec des coefficients systématiquement supérieurs mais un écart plus grand quand la diffusivité moléculaire diminue. Il présente également l'avantage de ne pas nécessiter de fitter une constante telle que le nombre de Schmidt turbulent. La valeur choisie de  $S_{c_t}$  peut d'ailleurs faire chuter radicalement les coefficients de corrélation associés au modèle classique, rendant l'utilisation d'une valeur moyenne arbitraire (e.g.  $S_{c_t} = 0.7$ ) quelque peu dangereuse.

Que ce soit pour le modèle classique ou dynamique, on observe une baisse sensible des coefficients de corrélation quand le nombre de Schmidt augmente, même si l'extrapolation à des Schmidt de l'ordre de 1000 ou plus reste difficile.

#### 5.3.3.3 Discussion

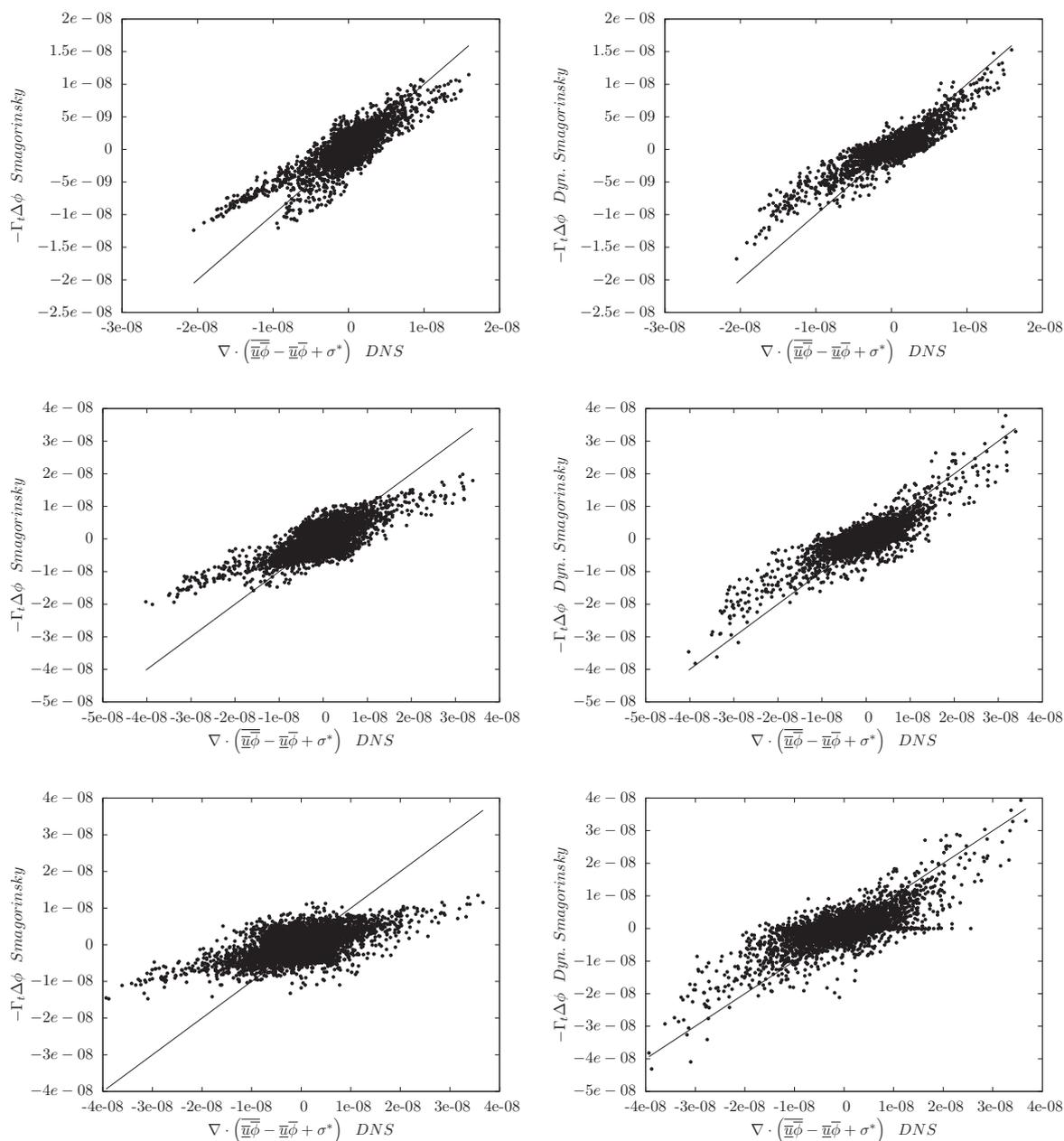
Le modèle multifractal présenté est un modèle structurel qui permet à partir des vitesses et scalaires résolus de reconstruire une importante quantité d'informations. Les coefficients de corrélation associés à ces informations varient énormément. La fidélité du modèle en terme de reconstruction du scalaire de sous-maille est satisfaisante, mais les résultats sur le terme source LES restent mitigés.

Il est difficile d'obtenir de bons résultats pour toutes les quantités considérées même s'il reste possible de régresser une constante  $C_d$  adaptée à chaque quantité considérée. Ce procédé est discutable et le caractère structurel du modèle imposerait, dans la mesure où la constante inclut une partie de l'information d'intermittence (cf. passage à la limite) de régresser la constante en fonction de l'adéquation de  $\phi^s$  aux champs issus de la DNS, comme cela a été fait ici.

Le Reynolds faible utilisé ici, et surtout la faible extension spectrale de la partie modélisée de la vitesse, pose problème pour tirer des conclusions claires. En effet certaines anomalies semblent pouvoir être imputées à ce cas test particulier, mais sans certitudes.

Ainsi, la constante  $C_b$  telle qu'elle a été évaluée ici est plus grande que celle préconisée par Burton, et qui donnait des résultats satisfaisants pour la production de sous-maille  $\mathcal{P}^*$  dans 4.2.2.2. Il est difficile de déterminer si cela provient du faible  $Re_\Delta$  ou d'une autre différence, telle que l'implantation du modèle dans le code numérique. Une différence d'un ordre de grandeur semble trop importante pour être due à l'implantation.

De même, les constantes  $C_d$  du modèle scalaire ne peuvent être extrapolées à des configurations



**Fig. 5.42 :** graphes de dispersion du terme source LES  $\nabla \cdot \sigma$  tiré de la DNS et prédit par les modèles Smagorinsky classique (gauche) et dynamique (droite) pour  $Sc = 1$  (haut),  $Sc = 10$  (centre) et  $Sc = 150$  (bas). Les coefficients de corrélation sont respectivement pour le modèle classique :  $\rho \sim 0.814$  et  $R^2 \sim 0.663$  ( $Sc = 1$ );  $\rho \sim 0.692$  et  $R^2 \sim 0.479$  ( $Sc = 10$ );  $\rho \sim 0.501$  et  $R^2 \sim 0.251$  ( $Sc = 150$ ) pour le modèle dynamique :  $\rho \sim 0.854$  et  $R^2 \sim 0.681$  ( $Sc = 1$ );  $\rho \sim 0.806$  et  $R^2 \sim 0.639$  ( $Sc = 10$ );  $\rho \sim 0.711$  et  $R^2 \sim 0.503$  ( $Sc = 150$ )

différentes, du fait de ce faible  $Re_\Delta$  et parce qu'un seul nombre de Reynolds a été testé.

Les tests *a priori* ne permettent pas de déterminer quelle valeur du limiteur de cascade inverse est nécessaire pour assurer la stabilité du calcul scalaire. La fidélité en terme de repro-

duction du terme source LES était légèrement dégradée avec un limiteur à 15% par rapport à une absence de limitation, quelque soit le nombre de Schmidt, mais avec un effet moindre que pour la vitesse.

D'autre part, il s'avère que ne considérer que des valeurs entières pour le nombre de pas de cascade pose problème, surtout lorsque celui-ci est faible. *A posteriori*, il n'y a en fait aucune raison pratique ou conceptuelle de ne pas autoriser des valeurs réelles pour  $\mathcal{N} = \log_2(\Delta/\eta)$ , d'autant plus que les résultats en section 5.2.4 montrent que le modèle d'une cascade présentant une échelle d'arrêt nette est une idéalisation de la réalité.

De façon plus générale, le modèle MFLES, pour le scalaire ou la vitesse, apparaît au final comme une modification du modèle scale-similarity, même s'il n'a pas été développé dans cette optique. En effet, sa formulation finale consiste en l'expression de la quantité de sous-maille en fonction de la quantité résolue et de son filtrage test à une échelle supérieure. Le facteur de proportionnalité fait intervenir une information locale, sous la forme d'une fonction de  $\mathcal{N}$  le nombre de pas de cascade, et une information "universelle", constituée de la pdf des multiplicateurs. Dans le modèle MFLES, l'information multifractale contenue dans la pdf des multiplicateurs est intégrée à la constante  $C_b$  ou  $C_d$ .

Le formalisme multifractal est une voie encourageante pour construire des modèles LES susceptibles de décrire les statistiques des quantités de sous-maille (telles que la pdf de  $\phi^s$ ) en fonction des grandeurs résolues (telles que la dissipation scalaire à l'échelle  $\Delta$ ). En substance, il permet d'ores et déjà de reconstruire les statistiques de la dissipation en sous-maille. Pour obtenir celles du scalaire de sous-maille, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires, la cascade multiplicative n'étant plus suffisante. En ce sens, le modèle MFLES présenté ici constitue un premier pas : en faisant une hypothèse forte sur la cascade additive des incréments d'orientation, il permet d'obtenir la moyenne du champ de sous-maille, c'est à dire le moment d'ordre 0. En relaxant l'hypothèse sur les corrélations existant entre la norme du gradient et son orientation (autrement dit entre le gradient de scalaire et le scalaire lui-même), il est possible de reconstruire des propriétés statistiques d'ordres plus élevés. Bien sûr, plus l'ordre des statistiques recherché est élevé, plus la quantité d'informations à intégrer au modèle est élevée. L'analyse multifractale des champs turbulents semble susceptible de fournir à terme cette information, nécessaire à la fermeture des statistiques d'ordre élevé.

Ces considérations semblent une voie d'exploration féconde. Des modèles LES basés sur la reconstruction spatiale des champs de sous-maille par *interpolation fractale* ont déjà été proposés [75]. Plus généralement, la *turbulence synthétique* [9], qui consiste en la reproduction de champs possédant certaines propriétés désirées, pourrait à terme permettre d'utiliser une description multifractale de la turbulence pour construire des modèles LES performants.

Notons qu'une modification du modèle MFLES de Burton a déjà été proposée dans [68]. En plus de présenter l'utilisation du modèle dans le cadre Variational Multi-Scale (VMS-LES [12]), les auteurs proposent de reformuler la constante  $C_b$  comme le produit d'un terme constant et d'une contribution dépendant du nombre de Reynolds de maille basé sur le gradient de vitesse, susceptible de prendre en compte l'intermittence due à l'anisotropie locale. Le modèle est appliqué à la simulation d'écoulements en proche paroi. Cette approche constitue une modification intéressante notamment dans le cas de géométries complexes mais n'aurait que peu

d'impact dans le cas présent.

# Chapitre 6

## Conclusion générale

### Sommaire

---

6.1 Conclusions . . . . .	125
6.2 Perspectives . . . . .	127

---

### 6.1 Conclusions

Le mélange d'un scalaire passif à grand nombre de Schmidt dans un écoulement turbulent est un domaine d'étude alliant une grande richesse scientifique et un intérêt industriel. La compréhension des phénomènes de mélange, et notamment ceux intervenant aux petites échelles et constituant le micro-mélange, fait encore l'objet d'études. Si une description phénoménologique du micro-mélange est possible, les nombreuses interactions existant avec ce phénomène doivent être prises en compte pour obtenir une description précise. Des interactions existent entre les grandes et les petites échelles, rendant nécessaire la prise en compte des couplages avec le macro- et le méso-mélange. Des interactions fortes existent avec la turbulence (unidirectionnelles dans le cas d'un scalaire passif) qui influent sur le champ scalaire même aux échelles où la vitesse ne présente plus de fluctuations. Une description précise de ces phénomènes est nécessaire à leur modélisation, qui permet à son tour de simuler efficacement le micro-mélange. La complexité des phénomènes mis en jeu rend particulièrement adaptée une description statistique du micro-mélange.

Dans cette optique, le formalisme multifractal apparaît comme une voie prometteuse pour proposer une description statistique unifiée de la turbulence et du mélange en résultant. Basé sur l'observation d'ensembles intriqués montrant un comportement fractal, il rend compte de la complexité de ces phénomènes sous une forme compacte. Il permet notamment de proposer une modélisation correcte des moments statistiques d'ordre élevé. Ainsi, l'analyse multifractale apparaît comme nécessaire pour prendre en compte l'intermittence, qui est une composante importante du micro-mélange et influe dans nombre de ses applications, telles que la qualité globale des produits de réaction, l'efficacité des réactions chimiques ou l'auto-allumage. L'analyse multifractale étudie la répartition des singularités d'un signal turbulent, et permet ainsi de caractériser les soudaines bouffées d'activité qui rendent compte de l'inhomogénéité des champs de gradient en turbulence et constituent le phénomène d'intermittence. D'autre

part la description des phénomènes, liée aux fractales, sous forme de cascade rend cette approche prometteuse dans le cadre de la simulation.

En faisant un lien, possiblement universel, entre les grandes et les petites échelles, le formalisme multifractal ouvre la voie à des modèles structurels, basés sur la description physique des champs turbulents. La simulation aux grandes échelles, dont l'utilisation en simulation numérique des écoulements ne devrait cesser de croître, peut tirer partie de cette description. Les modèles structurels, par opposition aux modèles fonctionnels, peuvent ainsi permettre d'obtenir des simulations de plus en plus fidèles. Si cette possibilité est intéressante, ce n'est toutefois pas là l'attrait le plus important du formalisme multifractal en LES. La reconstruction des statistiques des champs de sous-maille en fonction des quantités aux grandes échelles grâce à un procédé multifractal serait en effet avantageuse en ce qu'elle permettrait, outre une description précise des champs aux petites échelles, de greffer d'autres phénomènes, intervenant au niveau de ces petites échelles, sans hypothèse de fermeture supplémentaire. Ces propriétés pourraient être utilisées dans le cadre d'écoulements réactifs ou multiphasiques.

L'utilisation de la multifractalité en simulation aux grandes échelles n'est pas encore mûre. Le modèle multifractal (MFLES) proposé par Burton et modifié ici en constitue une petite étape. Il permet, à l'aide d'une cascade multiplicative sur la dissipation scalaire aux grandes échelles, d'évaluer celle-ci aux petites échelles. En appliquant une série d'hypothèses susceptibles d'être ultérieurement relaxées, les intégrales de Biot-Savard ou les intégrales de Green permettent alors d'obtenir une expression pour la moyenne du scalaire de sous-maille. Ces hypothèses rendent la connaissance des multiplicateurs facultative et imposent au modèle un paramètre dépendant du cas simulé.

Le modèle MFLES présente de bons résultats pour la simulation aérodynamique en terme de fidélité. La stabilisation numérique proposée par Burton sous forme d'une limitation de la cascade inverse d'énergie des échelles modélisées vers les échelles résolues permet son utilisation dans des simulations aux grandes échelles. Les résultats mitigés obtenus en écoulement proche paroi peuvent être grandement améliorés par la prise en compte localisée du cisaillement dans le modèle, d'une façon assez simple à mettre en œuvre. Le modèle est assez peu coûteux en temps de calcul relativement au gain en fidélité qu'il procure par rapport aux modèles fonctionnels.

La modification du modèle pour les grands Schmidt proposée dans ce manuscrit consiste en une simple extension du domaine d'application de la cascade multifractale. Les tests *a priori* menés sur une turbulence homogène isotrope sont encourageants et montrent une reproduction correcte des quantités de sous-maille. La petitesse du nombre de Peclet atteignable par simulation directe rend cependant difficile toute conclusion définitive.

Cette remarque est également valable pour les informations issues de la simulation directe elle-même. Au cours de celle-ci, l'évolution de certaines propriétés en fonction de la diffusivité du scalaire a pu être déterminée, en accord avec la littérature et la phénoménologie du mélange. Ainsi, la diminution de l'anisotropie et l'augmentation de l'intermittence avec le nombre de Schmidt ont pu être observées et quantifiées.

Les spectres des singularités du champ de dissipation scalaire ont été obtenus avec différentes méthodes. Si la construction des fonctions de partition basée sur les champs eux-mêmes

(telle que la méthode Wavelet-Transform Modulus-Maxima) présente une grande variabilité du fait sans doute du faible nombre de Peclet, la méthode des multiplicateurs en revanche, qui fournit la pdf des multiplicateurs à chaque étape de la cascade, permet d'une part d'obtenir des spectres des singularités propres, et d'autre part d'utiliser éventuellement les pdf invariantes d'échelle pour bâtir un modèle de la dissipation scalaire.

## 6.2 Perspectives

Le modèle MFLES appliqué au mélange de scalaires passifs à grand nombre de Schmidt pourrait être testé plus avant afin d'obtenir des conclusions plus définitives. L'intégration des modifications concernant un limiteur de backscattering adaptatif ainsi que la prise en compte du cisaillement dans la constante du modèle rendraient celui-ci plus robustes et permettraient d'envisager un certain nombre de cas tests et de cas d'application intéressants.

A terme, l'étude de l'interaction de la chimie avec le modèle devra être envisagée. Dans ce contexte, l'étude de la faisabilité d'un modèle susceptible de reconstruire les statistiques du scalaire de sous-maille à l'aide du formalisme multifractal est fortement privilégiée. A ce propos, bien des aspects doivent être éclaircis. Ainsi, est-il possible de reconstruire directement la pdf du scalaire de sous-maille, ou doit-on se contenter des quelques premiers moments? Le passage de la pdf de la dissipation, que l'on peut espérer évaluer de par son caractère multifractal marqué, à celle du scalaire lui-même peut être envisagé de différentes manières. Expliciter les corrélations existant entre la cascade multiplicative et la cascade additive des incréments d'orientation en est une. Utiliser des données disponibles telles que les moyennes du scalaire conditionnées par son gradient, qui dépendent de la configuration simulée, en est une autre.

Cette thèse a été l'occasion de découvrir notamment le formalisme multifractal. S'il reste beaucoup à faire dans le domaine conjoint de la LES et du multifractal, cette voie semble prometteuse. La puissance et la compacité de la description multifractale des champs turbulents, non dénuée d'un certain esthétisme, incite à la poursuite de cette voie.



## Bibliographie

- [1] R. J. ADRIAN AND P. MOIN, *Stochastic estimation of organized turbulent structure : homogeneous shear flow*, Journal of Fluid Mechanics, 190 (1988), pp. 531–559.
- [2] K. AKSELVOLL AND P. MOIN, *Large eddy simulation of turbulent confined coannular jets and turbulent flow over a backward facing step*, (1995).
- [3] P. ARMINJON, A. ST-CYR, AND A. MADRANE, *New two-and three-dimensional non-oscillatory central finite volume methods on staggered cartesian grids*, Applied numerical mathematics, 40 (2002), pp. 367–390.
- [4] E. BACRY, J. MUZY, AND A. ARNÉODO, *Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis : Exact results*, Journal of Statistical Physics, 70 (1993), pp. 635–674.
- [5] J. BALDYGA, *Turbulent mixer model with application to homogeneous, instantaneous chemical reactions*, Chemical Engineering Science, 44 (1989), pp. 1175–1182.
- [6] J. BALDYGA AND R. POHORECKI, *Turbulent micromixing in chemical reactors—a review*, The Chemical Engineering Journal and the Biochemical Engineering Journal, 58 (1995), pp. 183–195.
- [7] J. BALDYGA AND J. BOURNE, *Interpretation of turbulent mixing using fractals and multifractals*, Chemical engineering science, 50 (1995), pp. 381–400.
- [8] J. BARDINA, J. FERZIGER, AND W. REYNOLDS, *Improved subgrid-scale models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows*, Stanford Report TF-19, 194 (1983), pp. 53–63.
- [9] S. BASU, E. FOUFOULA-GEORGIU, AND F. PORTÉ-AGEL, *Synthetic turbulence, fractal interpolation, and large-eddy simulation*, Physical Review E, 70 (2004), p. 026310.
- [10] G. BATCHELOR, *The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 213 (1952), pp. 349–366.
- [11] G. BATCHELOR AND A. TOWNSEND, *The nature of turbulent motion at large wave-numbers*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 199 (1949), pp. 238–255.
- [12] Y. BAZILEVS, V. CALO, J. COTTRELL, T. HUGHES, A. REALI, AND G. SCOVAZZI, *Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197 (2007), pp. 173–201.
- [13] R. BENZI, L. BIFERALE, G. PALADIN, A. VULPIANI, AND M. VERGASSOLA, *Multifractality in the statistics of the velocity gradients in turbulence*, Physical review letters, 67 (1991), p. 2299.
- [14] S. BODNER, J. SINGER, A. SOLAN, AND Z. HASHIN, *Self-similar multiplier distributions and multiplicative models for energy dissipation in high-reynolds-number turbulence*, Theoretical and Applied Mechanics 1992, (1993), p. 395.

- [15] G. BRETHOUWER, J. HUNT, AND F. NIEUWSTADT, *Micro-structure and lagrangian statistics of the scalar field with a mean gradient in isotropic turbulence*, *Journal of Fluid Mechanics*, 474 (2003), pp. 193–225.
- [16] G. C. BURTON, *The nonlinear large-eddy simulation method applied to  $sc \approx 1$  and  $sc \gg 1$  passive-scalar mixing*, *Physics of Fluids*, 20 (2008), p. 035103.
- [17] G. C. BURTON AND W. J. DAHM, *Multifractal subgrid-scale modeling for large-eddy simulation. ii. backscatter limiting and a posteriori evaluation*, *Physics of Fluids*, 17 (2005), p. 075112.
- [18] G. C. BURTON AND W. J. A. DAHM, *Multifractal subgrid-scale modeling for large eddy simulation. part 1 : Model development and a priori testing*, *Physics of Fluids*, 17 (2005).
- [19] D. CARATI AND E. V. EIJDEN, *On the self-similarity assumption in dynamic models for large eddy simulations*, *Physics of Fluids*, 9 (1997), pp. 2165–2167.
- [20] A. CELANI, A. LANOTTE, A. MAZZINO, AND M. VERGASSOLA, *Fronts in passive scalar turbulence*, *Physics of Fluids*, 13 (2001), pp. 1768–1783.
- [21] L. CHEVILLARD, *Description multifractale unifiée du phénomène d’intermittence en turbulence Eulérienne et Lagrangienne*, PhD thesis, 2004.
- [22] A. B. CHHABRA AND K. SREENIVASAN, *Scale-invariant multiplier distributions in turbulence*, *Physical review letters*, 68 (1992), p. 2762.
- [23] A. J. CHORIN, *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*, *Journal of computational physics*, 2 (1967), pp. 12–26.
- [24] S. G. CHUMAKOV, *A priori study of subgrid-scale flux of a passive scalar in isotropic homogeneous turbulence*, *Physical Review E*, 78 (2008).
- [25] D. CHUNG AND B. MCKEON, *Large-eddy simulation of large-scale structures in long channel flow*, *Journal of Fluid Mechanics*, 661 (2010), pp. 341–364.
- [26] A. W. COOK AND J. J. RILEY, *A subgrid model for equilibrium chemistry in turbulent flows*, *Physics of Fluids*, 6 (1994), pp. 2868–2870.
- [27] D. DONZIS, P. YEUNG, AND K. SREENIVASAN, *Dissipation and enstrophy in isotropic turbulence : resolution effects and scaling in direct numerical simulations*, *Physics of Fluids*, 20 (2008), p. 045108.
- [28] R. DUMAS, L. FULACHIER, E. ARZOUMANIAN, AND A. FAVRE, *Etude de la structure de la turbulence dans une couche limite par les corrélations spatio-temporelles*, *Le Journal de Physique Colloques*, 37 (1976), pp. C1–181.
- [29] C. J. EVERTSZY AND B. B. MANDELBROT, *Multifractal measures*, (1992).
- [30] M. FARGE, *Wavelet transforms and their applications to turbulence*, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24 (1992), pp. 395–458.
- [31] P. FISCHER AND K. TUNG, *Wavelet-based multifractal analysis of atmospheric data*, Draft version, (2010).

- [32] R. O. FOX AND P. YEUNG, *Improved lagrangian mixing models for passive scalars in isotropic turbulence*, *Physics of Fluids*, 15 (2003), pp. 961–985.
- [33] U. FRISCH, *Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [34] U. FRISCH, A. MAZZINO, A. NOULLEZ, AND M. VERGASSOLA, *Lagrangian method for multiple correlations in passive scalar advection*, *Physics of Fluids*, 11 (1999), pp. 2178–2186.
- [35] U. FRISCH, P.-L. SULEM, AND M. NELKIN, *A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence*, *Journal of Fluid Mechanics*, 87 (1978), pp. 719–736.
- [36] A. GARCIA, *Etude et modélisation de la structure fine des champs scalaires en écoulement turbulent*, PhD thesis, Rouen, 2006.
- [37] M. GERMANO, U. PIOMELLI, P. MOIN, AND W. H. CABOT, *A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model*, *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)*, 3 (1991), pp. 1760–1765.
- [38] S. GHOSAL, T. S. LUND, P. MOIN, AND K. AKSELVOLL, *A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows*, *Journal of Fluid Mechanics*, 286 (1995), pp. 229–255.
- [39] T. C. HALSEY, M. H. JENSEN, L. P. KADANOFF, I. PROCACCIA, AND B. I. SHRAIMAN, *Fractal measures and their singularities : the characterization of strange sets*, *Physical Review A*, 33 (1986), p. 1141.
- [40] A. HASELBACHER, R. MOSER, G. CONSTANTINESCU, AND K. MAHESH, *Toward optimal les on unstructured meshes*, in *Proceedings of the Summer Program, 2002*, p. 129.
- [41] P. HUNANA AND G. ZANK, *Passive scalar spectrum in high-schmidt-number stationary and nonstationary turbulence*, *Physical Review E*, 77 (2008), p. 017301.
- [42] F. JABERI, P. COLUCCI, S. JAMES, P. GIVI, AND S. POPE, *Filtered mass density function for large-eddy simulation of turbulent reacting flows*, *Journal of Fluid Mechanics*, 401 (1999), pp. 85–121.
- [43] A. N. KOLMOGOROV, *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number*, *Journal of Fluid Mechanics*, 13 (1962), pp. 82–85.
- [44] R. H. KRAICHNAN, *Convection of a passive scalar by a quasi-uniform random straining field*, *Journal of Fluid Mechanics*, 64 (1974), pp. 737–762.
- [45] ———, *On kolmogorov's inertial-range theories*, *Journal of Fluid Mechanics*, 62 (1974), pp. 305–330.
- [46] D. KWAK, *Three-dimensional time dependent computation of turbulent flow*, (1975).
- [47] J.-B. LAGAERT, G. BALARAC, AND G.-H. COTTET, *Hybrid spectral-particle method for the turbulent transport of a passive scalar*, *Journal of Computational Physics*, (2013).
- [48] J. A. LANGFORD AND R. D. MOSER, *Optimal les formulations for isotropic turbulence*, *Journal of fluid mechanics*, 398 (1999), pp. 321–346.

- [49] S. K. LELE, *Compact finite difference schemes with spectral-like resolution*, Journal of computational physics, 103 (1992), pp. 16–42.
- [50] S. LIU, C. MENEVEAU, AND J. KATZ, *On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet*, Journal of Fluid Mechanics, 275 (1994), pp. 83–119.
- [51] M. MALANDAIN, N. MAHEU, AND V. MOUREAU, *Optimization of the deflated conjugate gradient algorithm for the solving of elliptic equations on massively parallel machines*, Journal of Computational Physics, 238 (2013), pp. 32–47.
- [52] B. B. MANDELBROT, *How long is the coast of britain*, Science, 156 (1967), pp. 636–638.
- [53] C. MENEVEAU AND J. KATZ, *Scale-invariance and turbulence models for large-eddy simulation*, Annual Review of Fluid Mechanics, 32 (2000), pp. 1–32.
- [54] C. MENEVEAU AND K. SREENIVASAN, *The multifractal nature of turbulent energy dissipation*, Journal of Fluid Mechanics, 224 (1991), pp. 429–484.
- [55] D. MEYER AND P. JENNY, *A mixing model for turbulent flows based on parameterized scalar profiles*, Physics of Fluids, 18 (2006), p. 035105.
- [56] R. MOSER, J. LANGFORD, AND S. VÖLKER, *Optimal les : How good can an les be ?*, in Recent Advances in DNS and LES, Springer, 1999, pp. 37–48.
- [57] V. MOUREAU, P. DOMINGO, AND L. VERVISCH, *Design of a massively parallel cfd code for complex geometries*, Comptes Rendus Mécanique, 339 (2011), pp. 141–148.
- [58] V. MOUREAU, P. DOMINGO, AND L. VERVISCH, *From large-eddy simulation to direct numerical simulation of a lean premixed swirl flame : Filtered laminar flame-pdf modeling*, Combustion and Flame, 158 (2011), pp. 1340–1357.
- [59] J.-F. MUZY, E. BACRY, AND A. ARNEODO, *Multifractal formalism for fractal signals : The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method*, Physical review E, 47 (1993), p. 875.
- [60] G. PARISI, R. BENZI, G. PALADIN, AND A. VULPIANI, *On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems*, (1984).
- [61] T. PASSOT AND A. POUQUET, *Numerical simulation of compressible homogeneous flows in the turbulent regime*, Journal of Fluid Mechanics, 181 (1987), pp. 441–466.
- [62] U. PIOMELLI, W. H. CABOT, P. MOIN, AND S. LEE, *Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows*, Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993), 3 (1991), pp. 1766–1771.
- [63] E. POMRANING AND C. J. RUTLAND, *Dynamic one-equation nonviscosity large-eddy simulation model*, AIAA journal, 40 (2002), pp. 689–701.
- [64] S. POPE, *Lagrangian pdf methods for turbulent flows*, Annual review of fluid mechanics, 26 (1994), pp. 23–63.

- [65] R. PRASAD, C. MENEVEAU, AND K. SREENIVASAN, *Multifractal nature of the dissipation field of passive scalars in fully turbulent flows*, *Physical review letters*, 61 (1988), p. 74.
- [66] A. PUMIR, *A numerical study of the mixing of a passive scalar in three dimensions in the presence of a mean gradient*, *Physics of Fluids*, 6 (1994), pp. 2118–2132.
- [67] V. RAMAN AND H. PITSCH, *A consistent les/filtered-density function formulation for the simulation of turbulent flames with detailed chemistry*, *Proceedings of the Combustion Institute*, 31 (2007), pp. 1711–1719.
- [68] U. RASTHOFER AND V. GRAVEMEIER, *Multifractal subgrid-scale modeling within a variational multiscale method for large-eddy simulation of turbulent flow*, *Journal of Computational Physics*, 234 (2013), pp. 79–107.
- [69] W. H. RAYMOND, *High-order low-pass implicit tangent filters for use in finite area calculations*, *Monthly weather review*, 116 (1988), pp. 2132–2141.
- [70] L. F. RICHARDSON, *The problem of contiguity*, *General systems yearbook*, 6 (1961), pp. 139–187.
- [71] L. F. RICHARDSON, *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press, 2007.
- [72] R. H. RIEDI, *Introduction to multifractals*, Rice Univ., Houston, TX, Tech. Rep., (1999).
- [73] S. ROUX, J. MUZY, AND A. ARNEODO, *Detecting vorticity filaments using wavelet analysis : About the statistical contribution of vorticity filaments to intermittency in swirling turbulent flows*, *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 8 (1999), pp. 301–322.
- [74] J. SCHUMACHER AND K. R. SREENIVASAN, *Geometric features of the mixing of passive scalars at high schmidt numbers*, short letter, (2008).
- [75] A. SCOTTI AND C. MENEVEAU, *A fractal model for large eddy simulation of turbulent flow*, *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 127 (1999), pp. 198–232.
- [76] D. A. SHETTY, A. J. CHANDY, AND S. H. FRANKEL, *A new fractal interaction by exchange with the mean mixing model for large eddy simulation/filtered mass density function applied to a multiscalar three-stream turbulent jet*, *Physics of Fluids*, 22 (2010), p. 025102.
- [77] B. I. SHRAIMAN AND E. D. SIGGIA, *Scalar turbulence*, *Nature*, 405 (2000), pp. 639–646.
- [78] K. SREENIVASAN, *On the fine-scale intermittency of turbulence*, *Journal of Fluid Mechanics*, 151 (1985), pp. 81–103.
- [79] K. SREENIVASAN AND R. R. PRASAD, *New results on the fractal and multifractal structure of the large schmidt number passive scalars in fully turbulent flows*, *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 38 (1989), pp. 322–329.
- [80] K. R. SREENIVASAN, *Fractals and multifractals in fluid turbulence*, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23 (1991), pp. 539–604.

- [81] S. STOLZ AND N. ADAMS, *An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation*, *Physics of Fluids*, 11 (1999), pp. 1699–1701.
- [82] S. SUBRAMANIAM AND S. POPE, *A mixing model for turbulent reactive flows based on euclidean minimum spanning trees*, *Combustion and Flame*, 115 (1998), pp. 487–514.
- [83] J. THEILER, *Estimating fractal dimension*, *JOSA A*, 7 (1990), pp. 1055–1073.
- [84] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme. ii. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme*, *Journal of computational physics*, 14 (1974), pp. 361–370.
- [85] O. V. VASILYEV AND D. E. GOLDSTEIN, *Local spectrum of commutation error in large eddy simulations*, *Physics of Fluids*, 16 (2004), pp. 470–473.
- [86] J. VILLERMAUX AND J. DEVILLON, *Représentation de la coalescence et de la redispersion des domaines de ségrégation dans un fluide par un modèle d'interaction phénoménologique*, in *Proceedings of the 2nd International symposium on chemical reaction engineering*, 1972, pp. 1–13.
- [87] Z. WARHAFT, *Passive scalars in turbulent flows*, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 32 (2000), pp. 203–240.



# Annexe A

## Analyse multifractale

L'analyse multifractale d'un champ défini sur  $\mathbb{R}^n$  est l'analyse de la répartition statistique de ses singularités, via l'établissement de son spectre des singularités, qui donne les dimensions fractales des sous-ensembles iso-singuliers.

On donne ici une définition simplifiée d'une mesure, avant de présenter deux méthodes pratiques permettant d'établir le spectre des singularités d'un champ turbulent.

### A.1 Mesure

La définition simple d'une mesure telle qu'elle est utilisée dans le cadre de l'analyse multifractale est donnée ici.

Une mesure  $\mu$  sur un ensemble  $E$  est une fonction d'un sous-ensemble de  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ . Elle possède les propriétés suivantes :

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- $A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ ,
- $\forall x \in E, \mu(\{x\}) = 0$ ,
- $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$  où les  $A_i$  sont des sous-ensembles disjoints de  $E$ .

Une mesure peut être vue comme une probabilité. En fait, pour qu'une mesure soit une *mesure de probabilité*, une condition de normalisation supplémentaire est nécessaire :

$$\mu(E) = 1 \tag{A.1}$$

### A.2 Méthode des moments

La méthode des moments permet de reconstruire les fonctions de partition  $Z(q, \epsilon)$  d'un champ  $\varphi$ , afin de calculer les exposants de masse  $\tau(q)$  correspondants.

Par souci de simplicité, on se placera ici dans le cadre de l'analyse d'un signal 1D  $s(x)$ .

Les fonctions de partition sont vues ici comme les moments d'ordre  $q$  de l'histogramme à l'échelle  $\epsilon$  du signal  $s$ .  $s_m$  et  $s_M$  désigne les valeurs minimale et maximale de  $s$ . On choisit un ensemble d'exposants  $q$ , par exemple  $q \in [-20, 20]$ . Pour chaque valeur de  $\epsilon$ , on découpe l'intervalle  $[s_m, s_M]$  en  $n$  intervalles de largeur  $\epsilon$ . On compte ensuite le nombre  $N_k$  de valeurs

de  $s$  appartenant à chaque intervalle  $k$ . La fonction de partition à l'échelle  $\epsilon$  est alors construite comme

$$Z(q, \epsilon) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{N_k}{N} \right)^q \quad (\text{A.2})$$

où  $N$  désigne le nombre total de valeurs de  $s$ .

Les exposants de masse sont obtenus comme le comportement limite des fonctions de partition quand  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$\tau(q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log Z(q, \epsilon)}{\log \epsilon} \quad (\text{A.3})$$

Cette opération peut être réalisée par une régression linéaire sur le graphe en log-log de  $(\epsilon, Z(q, \epsilon))$ . Le spectre des singularités est alors déduit par une transformée de Legendre :

$$f(\alpha) = \min_q (\alpha q - \tau(q)) \quad (\text{A.4})$$

### A.3 Méthode WTMM : Wavelet Transform Maxima Modulus

Cette analyse permet de caractériser l'aspect multifractal de données (qu'elles soient 1D, 2D ou 3D). Elle est appliquée avec succès en analyse financière, en analyse de transfert de données réseau, en météorologie [31], et bien entendu en turbulence [33].

La méthode WTMM permet de pallier certains défauts de la méthode des moments dans l'analyse multifractal de signaux turbulents. Elle repose sur la transformée en ondelettes continue du signal étudié. L'analyse par ondelette est une analyse en temps-échelle (ou en espace-échelle).

La transformée en ondelette (discrète ou continue) est utilisée dans beaucoup de domaines, notamment l'analyse de signaux acoustiques. Les transformées en ondelette sont utilisées en turbulence par exemple pour le filtrage et la séparation des structures cohérentes et incohérentes (ayant une pdf gaussienne) [30].

#### A.3.1 Transformée en ondelette continue

La transformée en ondelette continue de la fonction univariante  $s$  définie sur  $\mathcal{D}$  consiste à décomposer le signal  $s$  en contributions élémentaires en espace et en échelle. Les ondelettes sont construites à l'aide d'une fonction  $\Psi$ , bien localisée en espace et en fréquence et appelée *ondelette mère*, qui est ensuite translatée et dilatée.

La transformée en ondelette continue de  $s$  est définie comme :

$$T[s](x_0, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathcal{D}} s(x) \Psi^* \left( \frac{x - x_0}{a} \right) dx \quad (\text{A.5})$$

où  $\Psi^*$  est le conjugué complexe de  $\Psi$ .  $x_0$  correspond à la translation de l'ondelette mère et  $a$  à une dilatation. L'opération est donc équivalente à une convolution du signal avec l'ondelette à une certaine échelle  $a$ , et  $T[s](x_0, a)$  fournit une information localisée en espace et en échelle.

Le facteur de normalisation  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  permet à la transformée de conserver l'énergie (norme L2 :  $\|s\|_2 = \|T[s]\|_2$ ). On rencontre parfois également  $\frac{1}{a}$  qui permet de conserver la norme L1.

L'ondelette utilisée est choisie en fonction de l'application considérée, et il existe de multiples ondelettes différentes. Dans le cas de l'analyse multifractale, l'ondelette est utilisée pour filtrer les composantes régulières du signal, et l'ondelette mère doit posséder les propriétés suivantes :

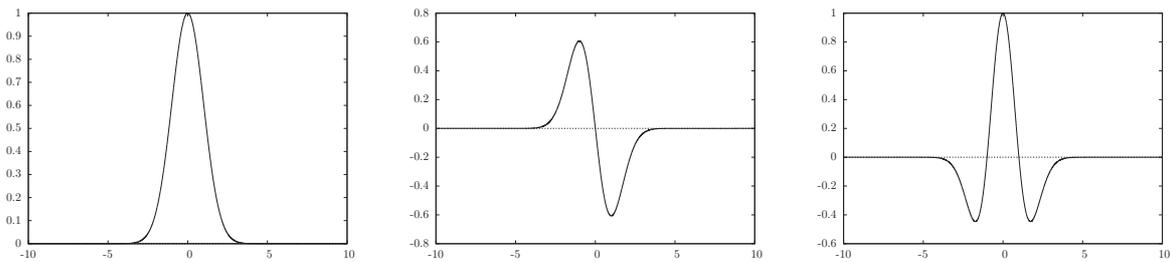
- elle doit être de moyenne nulle,
- elle doit être orthogonale à tous les monômes de degré inférieur à  $m$  arbitraire afin d'ôter toute contribution polynomiale régulière d'ordre inférieur à  $m$ , c'est à dire avoir  $m$  moments nuls.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \Psi(x) dx = 0, \quad \text{pour } 0 \leq k < m \quad (\text{A.6})$$

Une ondelette très utilisée en analyse multifractale est basée sur l'ondelette  $g^{(n)}$ , consistant en la dérivée  $n$ -ième du noyau gaussien :

$$\Psi(x) = g^n(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \quad (\text{A.7})$$

$g^n$  présente l'avantage d'être orthogonale à toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . Les 2 premières ondelettes utilisant  $g^n$  sont tracées en Fig. A.1



*Fig. A.1 : formes du noyau gaussien  $g$ , et de ses dérivées  $g^1$  et  $-g^2$ .  $-g^2$  est fréquemment appelée ondelette chapeau mexicain.*

### A.3.2 WTMM : Wavelet-Transform Modulus-Maxima

La méthode WTMM a été introduite dans [4] pour pallier les inconvénients de la méthode des moments[59]. Elle permet notamment de prévenir la divergence des fonctions de structure pour les exposants négatifs, et d'obtenir les singularités les plus faibles d'un signal.

La méthode propose, plutôt que d'étudier directement le signal, d'étudier sa transformée en ondelette, dont les maxima locaux font apparaître les singularités.

On rappelle ici la définition d'une singularité du signal  $s$  en  $x$ , sous la forme de l'exposant de Hölder  $h$  :

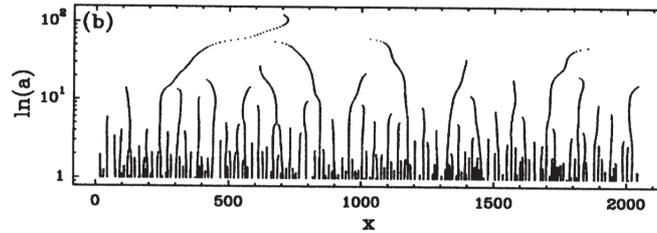
$$|s(x) - P(a)| \sim a^{h(x_0)} \quad (\text{A.8})$$

En choisissant judicieusement l'ondelette analysante, on peut se placer sous l'hypothèse A.6 et dans ce cas si  $m > h(x_0)$ , la transformée en ondelette de  $s$  se comportera localement comme le signal  $s$  lui-même :

$$T[s](x_0, a) \sim a^{h(x_0)} \quad (\text{A.9})$$

Sous réserve que  $m > h(x_0)$ , la transformée en ondelette permet donc de filtrer les composantes régulières du signal pour se concentrer sur ses singularités.

Les fonctions de partition sont ensuite construites sur les maxima locaux des coefficients  $T[s]$  de la transformée en ondelette. Les maxima locaux sont définis, pour chaque échelle  $a$ , comme les maxima de  $|T[s](x_0, a)|$  considérée comme une fonction de  $x_0$ . Ces maxima sont disposés dans le cas d'un signal multifractal le long de lignes qui constituent ce que l'on appelle le *squelette* de la transformée, dont un exemple est présenté en Fig. A.2.



*Fig. A.2 : exemple de squelette obtenu en construisant les lignes de maxima de la transformée en ondelette d'un signal  $s$ . Ces lignes montrent une structure hiérarchique qui caractérise un comportement multifractal. Figure issue de [59].*

Le squelette met en évidence les singularités du signal car si  $s$  possède une singularité  $h < m$  en  $x_0$ , il existe au moins une ligne de maxima qui descend vers  $x_0$ . On construit ensuite les fonctions de partition en faisant du box-counting le long de ce squelette qui représente les singularités, avec les ondelettes considérées comme des "boîtes oscillantes de taille  $a$ " :

$$Z(q, a) = \sum_{l \in \mathcal{L}(a)} \left( \sup_{\substack{(x, a') \in l \\ a' \leq a}} |T[s](x, a')| \right)^q \quad (\text{A.10})$$

où  $\mathcal{L}(a)$  est l'ensemble de toutes les lignes de maxima qui existent à l'échelle  $a$  et qui contiennent des maxima à toutes les échelles inférieures à  $a$ .

On peut alors reconstruire les exposants de masse  $\tau(q)$  de façon classique :

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)} \quad (\text{A.11})$$

Enfin par transformée de Legendre on construit le spectre des singularités :

$$f(\alpha) = \min_q (q\alpha - \tau(q)) \quad (\text{A.12})$$

Du fait qu'elle est localisée en espace également, contrairement à la méthode des moments, la méthode WTMM présente également l'avantage de permettre une localisation spatiale des singularités, susceptible de fournir une représentation des ensembles iso-Hölder.