



Université Paris-Sud

ÉCOLE DOCTORALE 422:
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS
ET DES SYSTÈMES

Laboratoire des Signaux et Systèmes

Université Libanaise

SYNTHÈSE EN FRANÇAIS DE LA

Thèse de doctorat

GÉNIE INFORMATIQUE, AUTOMATIQUE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

par

Amina MORTADA

Roulement de Variétés Différentielles de Dimensions Quelconques

Date de Soutenance: 18/11/2014

Composition du jury:

Directeurs de thèse :	Yacine CHITOUR Ali WEHBE	Professeur, (Uni. Paris-Sud) Professeur, (Uni. Libanaise)
Co-encadrant :	Petri KOKKONEN	Chercheur, (Varian Medical Systems)
Rapporteurs :	Irina MARKINA Frédéric JEAN	Professeur, (Uni. de Bergen) Professeur, (ENSTA-ParisTech)
Examineurs :	Dorothee NORMAND-CYROT Fátima SILVA-LEITE Mohamad MEHDI	Directeur de recherche, (Uni. Paris-Sud) Professeur, (Uni. de Coimbra) Professeur, (Uni. Libanaise)

1 Introduction

Ces dernières années, les études sur les systèmes dynamiques commandés de différentes disciplines se progressent très vivement. Parmi ces systèmes, nous nous intéressons dans cette thèse par le modèle de roulement de deux variétés Riemanniennes connexes et orientés (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) de dimensions n et \hat{n} respectivement. Deux types de contraintes sont considérés, ils sont notés par roulement sans pivotement et roulement sans pivotement et sans glissement. La plupart des travaux dans ce domaine traite le cas où les deux variétés ont même dimensions [8, 9, 11].

En particulier, considérons le problème de roulement de deux surfaces convexes l'une sur l'autre comme par exemple le roulement d'une boule sur un plan dans \mathbb{R}^3 . Lorsque les deux surfaces sont en point de contact, leurs vecteurs normaux extérieurs sont opposés en ce point. Un tel roulement sans glissement exige qu'au point de contact, le vecteur vitesse tangent à la première surface est égale au vecteur vitesse tangent à la deuxième surface tourné d'un angle $\theta(\cdot)$. Tandis que la condition d'absence de pivotement signifie que les axes de rotation de deux surfaces restent dans le plan tangent commun, ce qui traduit en une condition sur $\dot{\theta}(\cdot)$. Alors, l'espace d'état de ce modèle de roulement sans pivotement, ni glissement est de dimension cinq parce que, comme on a vu, un point de cet espace est défini en fixant un point sur chaque surface et un angle.

Généralement, l'espace d'état de roulement des deux variétés Riemanniennes est un espace fibré et sa fibre typique est l'ensemble des isométries formées entre les espace tangents des variétés considérées. Géométriquement, le roulement sans rotation signifie que l'image d'un champ de vecteurs parallèle à une courbe dans M par A est un champ de vecteurs parallèle à une courbe dans \hat{M} . Comme ceci, la distribution de roulement sans pivotement \mathcal{D}_{NS} sur Q est définie comme étant la dérivation du transport parallèle des champs de vecteurs X et \hat{X} tangents à M et \hat{M} respectivement. Par ailleurs, la distribution \mathcal{D}_R qui décrit les deux contraintes du roulement est une sous-distribution de \mathcal{D}_{NS} , obtenue en faisant $\hat{X} = AX$. Ainsi, on a défini les deux systèmes dynamiques commandés affines sans dérivées $(\Sigma)_{NS}$ et $(\Sigma)_R$ sur Q correspondants à \mathcal{D}_{NS} et à \mathcal{D}_R respectivement.

Le point focal est de résoudre le problème de la commandabilité de $(\Sigma)_R$ et $(\Sigma)_{NS}$ par des outils géométriques sur M et \hat{M} . Plus précisément, c'est de chercher des conditions nécessaires et/ou des conditions suffisantes afin d'obtenir que pour toute paire (q_{init}, q_{final}) de points dans Q , il existe une courbe $q(\cdot)$ tangente à \mathcal{D}_R (à \mathcal{D}_{NS} respectivement) et qui oriente le système $(\Sigma)_R$ ($(\Sigma)_{NS}$ respectivement) de $(q_{init}$ à q_{final}). Cette approche nous motive de chercher l'ensemble atteignable par de telles courbes à partir d'un point quelconque $q_0 \in Q$. Ce sont les orbites de roulement associées à \mathcal{D}_{NS} et \mathcal{D}_R . On dit que le système de roulement est complètement commandable si les orbites de roulement des certains points sont égales à l'espace d'état.

Au titre de l'exemple précédent, c'est-à-dire lorsque M et \hat{M} sont deux variétés Riemanniennes de dimensions 2, le système $(\Sigma)_R$ est complètement commandable si et seulement si les variétés ne sont pas isométrique. En particulier, la dimension des ensembles atteignables soit 2 ou 5 (cf. [1]). D'autre part, [11] nous donne des réponses

satisfaisantes pour la question de la commandabilité de $(\Sigma)_R$ dans le cas où les deux variétés sont de dimensions 3. Les mêmes auteurs fournissent des conditions nécessaires et suffisantes pour la commandabilité lorsque l'une des variétés est de courbure constante (cf. [12]).

Les travaux de Y. Chitour et P. Kokkonen traitent le cas de roulement sans pivotement et sans glissement d'une variété Riemannienne, lisse, connexe et orientée (M, g) sur une variété Riemannienne complète (\hat{M}, \hat{g}) de courbure constante et de même dimension que M . En particulier, si la courbure de \hat{M} est nulle, alors $(\Sigma)_R$ est complètement contrôlable si et seulement si le groupe d'holonomie de M , par rapport à la connexion de Levi-Civita, est égal au groupe spécial orthogonal $SO(n)$. Le deuxième auteur explique dans [24] et [26] le développement des variétés affines qui n'ont pas nécessairement des tenseurs de torsion nuls.

Dans Chapitre 2 de cette thèse, on présente dans deux parties les définitions d'espace d'état, des relèvements, des distributions de roulement des deux variétés Riemanniennes, lisses, connexes et du développement de roulement des variétés affines. La référence de base dans la première partie est [10] où on étend ses définitions et ses résultats vers le cas où les deux dimensions n et \hat{n} , des variétés considérées (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) respectivement, ne sont pas égales. Par exemple, lorsque $n \geq \hat{n}$, il nous faut prendre en compte que l'image d'une isométrie A doit être dans l'espace tangent $T_{\hat{x}}\hat{M}$ en un point fixé \hat{x} . Dans la deuxième partie, on joint le contexte de développement des variétés affines qui est défini dans [24] et le contexte de roulement sans pivotement par rapport à une connexion affine quelconque qui est donné dans [26], alors on définit le développement de roulement des variétés affines.

On introduit les principaux résultats sur la contrôlabilité du système de roulement des variétés Riemanniennes de différentes dimensions dans Chapitre 3. Concernant le système $(\Sigma)_{NS}$, dû aux études dans [8] et [9], la résolution du problème de la commandabilité est clairement reliée à la caractérisation des groupes d'holonomie de M et \hat{M} . Alors que dans le cas de $(\Sigma)_R$, la situation est plus compliquée. La première propriété remarquable est que la distribution de roulement \mathcal{D}_R est de dimension n . Ce qui nous conduit à la conclusion suivante: le problème de roulement des deux variétés à deux dimensions différentes n'est pas symétrique en prenant en compte l'ordre de deux variétés. D'où, la stratégie consiste à calculer les crochets de Lie dans l'espace des sections de \mathcal{D}_R . Le premier crochet de Lie duquel nous permet de définir le tenseur Rol disant *la courbure de roulement*, il peut-être considéré comme étant la différence entre les deux tenseurs de courbure de Riemann de M et \hat{M} . On constate que la commandabilité de $(\Sigma)_R$ se rattache d'une manière directe à ces valeurs des courbures et à leurs dérivées covariantes. Dans cette description, il y en a un résultat important: lorsque $n < \hat{n}$ strictement et la courbure de \hat{M} est constante alors le problème de roulement sans pivotement et sans glissement n'est pas commandable.

Par contre, lorsque $(n, \hat{n}) = (2, 3)$, on a réussi à trouver quelques conditions nécessaires pour la non-commandabilité dont soit \mathcal{D}_R est involutive et M est isométrique à une sous-variété totalement géodésique de \hat{M} , soit \hat{M} est un produit tordu d'un intervalle réel avec une sous-variété totalement géodésique de dimension 2, soit M est de courbure

constante et \hat{M} est isométrique localement au produit Riemannien d'un intervalle réel avec une sous-variété de dimension 2. Les calculs de Chapitre 4 montrent aussi que la dimension de chaque orbite appartient à l'ensemble $\{2, 5, 6, 7\}$.

Dans le dernier chapitre, on définit le groupe d'holonomie H_{Δ}^{∇} à partir des lacets tangents à une distribution complètement commandable Δ sur une variété affine M par rapport à une connexion affine ∇ . De plus, le développement de roulement d'une variété affine (M, ∇) sur $(\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$, où $\hat{\nabla}^n$ est la connexion Euclidienne, nous permet de définir le groupe d'holonomie affine \mathcal{H}^{∇} sur M et le groupe d'holonomie horizontal affine $\mathcal{H}_{\Delta_R}^{\nabla}$ sur Δ . Ce sont des sous-groupes du groupe $\text{Aff}M$ de tous les transformations affines inversibles de M sur elle-même. Nous avons prouvé que $\mathcal{H}_{\Delta_R}^{\nabla}$ est un sous-groupe de Lie de $\text{Aff}(n)$ et H_{Δ}^{∇} est un sous-groupe de Lie de $\text{GL}(n)$. On a aussi répondu à une question n'est pas évidente telqu'on a montré qu'en général, la fermeture de groupe d'holonomie horizontal restreint $(H_{\Delta}^{\nabla})^0$ n'est pas égale au groupe d'holonomie complet de M . Pour cela, on a étudié le roulement d'un groupe de Carnot homogène d'ordre 2 (M, g) munie de la métrique Riemannienne g sur (\mathbb{R}^n, s^n) où s^n est la métrique Euclidienne. On a le résultat grâce au fait que les groupes d'holonomie affines ont les même structures géométriques des orbites de développement de roulement sur un espace Euclidien.

2 Notations

Le long de cette thèse, on note par A_j^i l'élément en $i^{\text{ème}}$ -ligne et $j^{\text{ème}}$ -colonne d'une matrice réelle A et par A^T sa matrice transposée. En outre, soit $L : V \rightarrow W$ un morphisme \mathbb{R} -linéaire où V et W sont deux espaces \mathbb{R} -linéaires de dimensions n et n' respectivement. Si $F = (v_i)_{i=1}^n$ et $G = (w_j)_{j=1}^{n'}$ sont deux bases de V et W respectivement, alors la $(n' \times n)$ -matrice réelle qui représente L par rapport aux F et G est notée par $\mathcal{M}_{F,G}(L)$ et donnée par $L(v_i) = \sum_j \mathcal{M}_{F,G}(L)_i^j w_j$. Par ailleurs, si g et h sont des produits scalaires sur V et W respectivement, nous symbolisons l'application transposé (adjointe) de L par rapport à g et h par $L^{T_{g,h}} : W \rightarrow V$ où $g(L^{T_{g,h}}w, v) = h(w, Lv)$. Ainsi, on écrit $(\mathcal{M}_{F,G}(L))^T = \mathcal{M}_{F,G}(L^{T_{g,h}})$.

Dans la suite, toutes les variétés considérées sont lisses, connexes et de dimension finie. Soient E, M, F des variétés différentielles, un espace fibré $\pi_{E,M} : E \rightarrow M$ est un morphisme lisse qui vérifie que pour tout $x \in M$ il existe un voisinage U de x dans M et un difféomorphisme $\tau : \pi_{E,M}^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que $pr_1 \circ \tau = \pi_{E,M}|_{\pi^{-1}(U)}$, où pr_1 signifie la projection sur le premier facteur. On appelle $E|_x := \pi_{E,M}^{-1}(x)$ la fibre au-dessus du point x , F la fibre typique de $\pi_{E,M}$ et τ sa trivialisatoin locale. La fibre typique est unique à un difféomorphisme près. De plus, une section lisse du fibré $\pi_{E,M}$ est un lisse morphisme $s : M \rightarrow E$ qui satisfait $\pi_{E,M} \circ s = \text{id}_M$. L'ensemble de toutes les sections de π est noté par $\Gamma(E)$. Si F est un espace \mathbb{R} -linéaire de dimension finie, on dit que $\pi_{E,M}$ est un fibré vectoriel. D'autre part, si G est un groupe de Lie, alors $\pi : E \rightarrow M$ est un fibré principal de groupe structural G sur M s'il existe une action libre de G sur E qui conserve les fibres de π (cf. [23]).

Soit $\Gamma(E)$ l'espace des sections lisses du fibré vectoriel E sur M . Une connexion linéaire sur E est un morphisme $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \times T^*M)$ linéaire sur \mathbb{R} et qui vérifie la règle de Leibniz sur l'ensemble des fonctions lisses $C^\infty(M)$. On note par $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des sections lisses du fibré tangent TM . Une connexion affine ∇ sur M est une connexion linéaire sur TM et qui est donnée par le morphisme bilinéaire sur \mathbb{R} suivant,

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M); \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y.$$

Elle est linéaire sur $C^\infty(M)$ par rapport au premier facteur et vérifiée la règle de Leibniz sur $C^\infty(M)$ par rapport au deuxième facteur. Ainsi, on dit que (M, ∇) est une variété affine. De plus, si l'application exponentielle \exp_x^∇ de (M, ∇) est définie sur l'ensemble de l'espace tangent $T_x M$ pour tout $x \in M$, alors (M, ∇) est géodésiquement complète. La connexion Euclidienne ∇^n sur \mathbb{R}^n est une connexion affine tel que $\nabla_{E_i}^n E_j = 0$ pour n'importe quels deux champs de vecteurs entre la base canonique $\{E_1, \dots, E_n\}$ sur \mathbb{R}^n . Les définitions intrinsèques du tenseur de courbure R^∇ et du tenseur de torsion T^∇ associés à la connexion affine ∇ sont,

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \\ T^\nabla(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \end{aligned}$$

où X, Y et Z sont des champs de vecteurs quelconques sur M . Si $T^\nabla(X, Y)$ est nulle pour tout champs de vecteurs X et Y sur M , alors on dit que la connexion ∇ est sans torsion ou symétrique. Une variété M munie d'une métrique définie positive g est appelée variété Riemannienne et notée par (M, g) . De plus, dans cette thèse, on admet qu'une variété Riemannienne est complète et orientée. Dans ce dernier cas, on utilise $\|v\|_g$ pour noter $g(v, v)^{1/2}$ pour tout $v \in T_x M$ et $x \in M$.

On rappelle qu'une distribution Δ sur la variété M est un sous-fibré lisse de TM de telle sorte que pour tout $x \in M$, $\Delta|_x$ est localement engendrée par m champs de vecteurs linéairement indépendants. On dit alors que Δ est de dimension m . A partir de $\Delta|_x$, on définit, en $x \in M$, la collection des distributions $\Delta^1|_x \subset \Delta^2|_x \subset \dots \subset \Delta^r|_x \subset \dots$ vérifiée $\Delta^1|_x := \Delta|_x$ et $\Delta^{s+1}|_x := \Delta^s|_x + [\Delta^1, \Delta^s]|_x$ pour $s \geq 1$. On dit que la distribution Δ est complètement commandable si, pour tout $x \in M$, il exist un entier $r = r(x)$ tel que $\Delta^r|_x = T_x M$. Ainsi, r est l'ordre de $\Delta|_x$. D'autre part, une courbe absolument continue $c : I \rightarrow M$ définie sur un intervalle réel $I \subset \mathbb{R}$ est Δ -admissible courbe si elle est tangente à Δ presque partout (p.p.): $\dot{c}(t) \in \Delta|_{c(t)}$ pour presque tout $t \in I$. Fixons $x_0 \in M$, une Δ -orbite en x_0 est l'ensemble de points finaux atteints par toutes les courbes Δ -admissibles qui commencent par x_0 . Par Théorème de l'Orbite, $\mathcal{O}_\Delta(x_0)$ est une sous-variété lisse immergée de M contenant x_0 (cf. [1], [20]). Il convient de noter qu'on peut restreindre la définition de l'orbite aux courbes continues par morceaux. Une distribution Δ' sur M est une sous-distribution de Δ si $\Delta' \subset \Delta$. Evidemment, on a $\mathcal{O}_{\Delta'}(x_0) \subset \mathcal{O}_\Delta(x_0)$ pour tout $x_0 \in M$. On note que l'évaluation de l'algèbre de Lie engendré par Δ en $x \in M$ par $Lie(\Delta)_x$.

Soit $\pi : E \rightarrow M$ un espace fibré et $y \in E$. On note par $V|_y(\pi)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs $Y \in T|_y E$ tels que $\pi_*(Y) = 0$. Si π est un espace fibré alors la collection des espaces $V|_y(\pi)$, $y \in E$ définit une sous-variété lisse $V(\pi)$ de TE , c'est la

distribution verticale. Dans ce dernier cas, $\pi_{V(\pi)} := \pi_{TE}|_{V(\pi)}$ est un sous-fibré vectoriel de $\pi_{TE} : TE \rightarrow E$.

Supposons maintenant que $\pi : E \rightarrow M$ et $\eta : F \rightarrow M$ sont deux fibrés vectoriels sur la variété différentielle M . On note par $C^\infty(\pi, \eta)$ l'ensemble des morphismes $f : E \rightarrow F$ tel que $\eta \circ f = \pi$. Fixons $f \in C^\infty(\pi, \eta)$ et $u, w \in \pi^{-1}(x)$, alors la dérivée verticale de f en u dans la direction de w est le morphisme \mathbb{R} -linéaire suivant

$$\begin{aligned} \nu(\cdot)|_u(f) : \pi^{-1}(x) &\rightarrow \eta^{-1}(x) \\ w &\mapsto \nu(w)|_u(f) := \frac{d}{dt}\bigg|_0 f(u + tw). \end{aligned} \quad (1)$$

Selon cette définition, $\nu(w)|_u$ est bien un élément de $V|_u(\pi)$. En conséquence, $w \rightarrow \nu(w)|_u$ est un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire entre $\pi^{-1}(x)$ et $V|_u(\pi)$ avec $\pi(u) = x$.

En théorie de groupes de Lie, puisque l'espace tangent $T_x M$ d'une variété n -dimensionnelle lisse connexe M en x est identifié à l'espace Euclidien \mathbb{R}^n , alors le groupe $\text{GL}(T_x M)$ de tous les endomorphismes linéaires et inversibles de $T_x M$ est isomorphe au groupe $\text{GL}(n)$ de toutes les matrices réelles et inversibles $n \times n$. Si, de plus, (M, g) est une variété Riemannienne, alors le groupe $\text{O}(n)$ de toutes les transformations g -orthogonales de $T_x M$ en $x \in M$ est isomorphe à $\text{O}(n)$. De même, on a bien $\text{SO}(T_x M) = \text{SO}(n)$ et $\mathfrak{so}(T_x M) = \mathfrak{so}(n)$. On note par $\mathfrak{so}(M) := \bigcup_{x \in M} \mathfrak{so}(T_x M)$ l'ensemble $\{B \in T^*M \otimes TM \mid B^T + B = 0\}$ avec B^T est la matrice transposée de B dans $\text{GL}(n)$.

D'autre part, si $(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^{\hat{n}}$ est l'ensemble de matrices réelles $\hat{n} \times n$, le groupe spécial orthogonal est donné par

$$\text{SO}(n) = \{A \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \mid A^T A = A A^T = \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Puisque, dans ma texte, nous nous intéressons à des variétés des dimensions différentes, nous introduisons

$$\text{SO}(n, \hat{n}) := \begin{cases} \{A \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid A^T A = \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}, & \text{if } n < \hat{n}, \\ \{A \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid A A^T = \text{id}_{\mathbb{R}^{\hat{n}}}\}, & \text{if } n > \hat{n}, \\ \text{SO}(n), & \text{if } n = \hat{n}, \end{cases} \quad (2)$$

où A^T est la matrice transposée de A par rapport au produit scalaire de l'espace vectoriel approprié.

Nous donnons la forme matricielle suivante $I_{n, \hat{n}} \in \text{SO}(n, \hat{n})$,

$$I_{n, \hat{n}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{if } n \leq \hat{n}, \\ \begin{pmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^{\hat{n}}} & 0 \end{pmatrix}, & \text{if } n \geq \hat{n}. \end{cases} \quad (3)$$

Retournons aux notions de la géométrie différentielle, on note par $T_m^k M$ l'espace des sections de (k, m) -fibré tensoriel de (M, ∇) . Si $\gamma : I \rightarrow M$ est une courbe absolument continue dans M et définie sur un intervalle réel $I \ni 0$, alors le transport parallèle

$(P^\nabla)_0^t(\gamma)T_0$ d'un tenseur $T_0 \in T_m^k|_{\gamma(0)}M$ par rapport à ∇ le long de γ en $t \in I$ est la solution unique de l'ODE

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}((P^\nabla)_0^t(\gamma)T_0) = 0, \quad \text{p.p. } t \in I,$$

de la condition initiale,

$$(P^\nabla)_0^0(\gamma)T_0 = T_0.$$

Soit $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ une autre variété affine et $f : M \rightarrow \hat{M}$ un lisse morphisme. Alors, on dit que f est affine si pour toute courbe absolument continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, on a

$$f_*|_{\gamma(1)} \circ (P^\nabla)_0^1(\gamma) = (P^{\hat{\nabla}})_0^1(f \circ \gamma) \circ f_*|_{\gamma(0)}. \quad (4)$$

On utilise la notation $\text{Aff}(M)$ pour le groupe de toutes les transformations affines et inversibles de la variété M et on l'appelle le groupe affine de M . En particulier, le groupe affine de l'espace \mathbb{R}^n muni de la connexion Euclidienne est noté par $\text{Aff}(n)$. Rappelons aussi que $\text{Aff}(n)$ est égal au produit semi-direct $\mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n)$ où le produit de groupe \diamond est donné par

$$(v, L) \diamond (u, K) := (Lu + v, L \circ K).$$

En outre, un morphisme lisse $f : M \rightarrow \hat{M}$ est une isométrie locale entre deux variétés Riemanniennes (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) si, pour tout $x \in M$, $f_*|_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \hat{M}$ est un morphisme isométrique. En addition, si f est bijectif alors elle est une isométrie et on dit que (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) sont isométriques. Ces variétés sont localement isométriques s'il existe une variété Riemannienne (N, h) et des isométries locales $F : N \rightarrow M$ et $G : N \rightarrow \hat{M}$ qui sont aussi des revêtements. Par ailleurs, on utilise $\text{Iso}(M, g)$ pour noter le groupe de Lie des isométries de (M, g) . De plus, pour toute courbe absolument continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ et $F \in \text{Iso}(M, g)$, on a (cf. [32], page 41, Eq. (3.5))

$$F_*|_{\gamma(t)} \circ (P^{\nabla^g})_s^t(\gamma) = (P^{\nabla^g})_s^t(F \circ \gamma) \circ F_*|_{\gamma(s)}, \forall s, t \in [0, 1]. \quad (5)$$

Dans les équations (4) et (5), f_* et F_* sont les applications tangentes de f et F respectivement.

D'autre part, on dit d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ un lacet basé en point $x \in M$ s'il vérifie $\gamma(a) = \gamma(b) = x$. On note par $\Omega_M(x)$ l'ensemble de tous les lacets absolument continus $[0, 1] \rightarrow M$ basés en point $x \in M$. Pour toutes courbes absolument continues $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ et $\delta : [0, 1] \rightarrow M$ sur M satisfaites $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = \delta(0) = y$ et $\delta(1) = z$ où $x, y, z \in M$, on définit l'opération " \cdot " de telle sorte que $\delta \cdot \gamma$ est la courbe absolument continue

$$\delta \cdot \gamma : [0, 1] \rightarrow M; \quad (\delta \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (6)$$

Les définitions de transport parallèle et d'ensemble des lacets nous permettent de définir le groupe d'holonomie $H^\nabla|_x$ de M en x par rapport à ∇ comme suivant

$$H^\nabla|_x = \{(P^\nabla)_0^1(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_M(x)\}.$$

Pour tout $x \in M$, $H^\nabla|_x$ est un sous-groupe de $GL(T_xM)$, c'est-à-dire le groupe de toutes matrices $n \times n$ inversibles. Dans la situation où M est connexe, on peut joindre deux points quelconques x et y de M par une courbe absolument continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Ainsi, on aura $(P^\nabla)_0^1(\gamma)H^\nabla|_x(P^\nabla)_1^0(\gamma) = H^\nabla|_y$, ou également, $H^\nabla|_x$ et $H^\nabla|_y$ sont deux sous-groupes conjugués de $GL(T_xM)$. Si (M, g) est une variété Riemannienne et ∇ est la connexion Levi-Civita associée à g alors $H^\nabla|_x$ est un sous-groupe de $O(T_xM)$. De plus, supposons que M est orientée, alors $H^\nabla|_x$ est un sous-groupe de $SO(T_xM)$. Prenons un repère orthonormal F de M défini localement en x , on a

$$H^\nabla|_F = \{\mathcal{M}_{F,F}(A) \mid A \in H^\nabla|_x\}.$$

C'est bien un sous-groupe de $SO(n)$. En particulier, les deux groupes de Lie $H^\nabla|_F$ et $H^\nabla|_x$ sont isomorphes. On notera l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie $H^\nabla|_x$ (resp. $H^\nabla|_F$) par $\mathfrak{h}^\nabla|_x$ (resp. $\mathfrak{h}^\nabla|_F$). Ainsi, $\mathfrak{h}^\nabla|_x$ est sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(T_xM)$ et $\mathfrak{h}^\nabla|_F$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{so}(n)$.

Fixons deux entiers naturels $k, m \in \mathbb{N}$, l'ensemble de tous les morphismes linéaires $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ est noté par $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m)$. On définit $O_k(\mathbb{R}^m)$ l'ensemble de tous $B \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m)$ vérifié

- (i) Si $k \leq m$, $\|Bu\|_{\mathbb{R}^m} = \|u\|_{\mathbb{R}^k}$ pour tout $u \in \mathbb{R}^k$;
- (ii) Si $k \geq m$, B est surjective et $\|Bu\|_{\mathbb{R}^m} = \|u\|_{\mathbb{R}^k}$ pour tout $u \in (\ker B)^\perp$ (où S^\perp est le complément orthogonal de $S \subset \mathbb{R}^k$ par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^k}$).

Selon cette définition, on obtient les propositions suivantes

1. $O_k(\mathbb{R}^m)$ est une sous-variété lisse et fermée de $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m)$.
2. La restriction du morphisme $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{L}_m(\mathbb{R}^k); A \mapsto A^{\overline{T}}$, où $A^{\overline{T}}$ est la transpose de A , sur $O_k(\mathbb{R}^m) \rightarrow O_m(\mathbb{R}^k)$ est un difféomorphisme.
3. Si $k \neq m$, alors $O_k(\mathbb{R}^m)$ est connexe. Si $k = m$, $O_k(\mathbb{R}^k)$ est difféomorphe à $O(k)$ l'ensemble de $k \times k$ -matrices orthogonales.

Ensuite, on va restreindre les définitions et les propriétés précédentes sur une variété Riemannienne (M, g) de dimension n . Donc, pour tout point x de M et tout $k \in \mathbb{N}$, on note par $\mathcal{L}_k(M)|_x$ l'espace des morphismes linéaires $\mathbb{R}^k \rightarrow T_xM$. On pose $\mathcal{L}_k(M) := \bigcup_{x \in M} \mathcal{L}_k(M)|_x$.

Definition 2.1. On définit le sous-ensemble $O_k(M)$ de $\mathcal{L}_k(M)$ de tous les éléments $B \in \mathcal{L}_k(M)|_x$, $x \in M$ vérifié

- (i) Si $1 \leq k \leq \dim M$, $\|Bu\|_g = \|u\|_{\mathbb{R}^k}$ pour tout $u \in \mathbb{R}^k$;
- (ii) Si $k \geq \dim M$, B est surjective et $\|Bu\|_g = \|u\|_{\mathbb{R}^k}$ pour tout $u \in (\ker B)^\perp$ (où \perp est l'orthogonal par rapport au produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^k).

En d'autres termes, $O_k(M)$ est constitué des isométries partielles $\mathbb{R}^k \rightarrow T_x M$ qui sont de rang maximal.

Considérons $\pi_{\mathcal{L}_k(M)} : \mathcal{L}_k(M) \rightarrow M; B \mapsto x$ pour $B \in \mathcal{L}_k(M)|_x$ et $\pi_{O_k(M)} := \pi_{\mathcal{L}_k(M)}|_{O_k(M)} : O_k(M) \rightarrow M$.

Proposition 2.2. 1. Pour n'importe quel $k \in \mathbb{N}$, $\pi_{\mathcal{L}_k(M)}$ est un fibré vectoriel lisse sur M isomorphe à la somme de Whitney $\bigoplus_{i=1}^k TM \rightarrow M$.

2. Le morphisme $\pi_{O_k(M)}$ est un sous-fibré lisse de $\pi_{\mathcal{L}_k(M)}$ d'une fibre typique égale à $O_k(\mathbb{R}^n)$ où \mathbb{R}^n est munie de la métrique Euclidienne.

3. $O_k(M)$ est connexe pour n'importe quel $k \neq n$.

4. $O_n(M)$ est connexe si M n'est pas orientable.

Pour la preuve des Proposition ci-dessus, voir Part 3, section 9 en [24]).

Dans cette thèse, on désigne par $(\overline{M}, \overline{g}) := (M, g) \times (\hat{M}, \hat{g})$ le produit Riemannien des variétés M et \hat{M} muni par le produit métrique $\overline{g} := g \oplus \hat{g}$. De même, $\nabla, \hat{\nabla}, \overline{\nabla}$ (resp. R, \hat{R}, \overline{R}) sont les connections Levi-Civita (resp. les tenseurs de courbure de Riemann) de $(M, g), (\hat{M}, \hat{g}), (\overline{M}, \overline{g})$, respectivement. D'après la formule de Koszul, on a,

$$\overline{\nabla}_{(X, \hat{X})}(Y, \hat{Y}) = (\nabla_X Y, \hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y}), \quad \forall X, Y \in VF(M), \quad \forall \hat{X}, \hat{Y} \in VF(\hat{M}), \quad (7)$$

et,

$$\overline{R}((X, \hat{X}), (Y, \hat{Y}))(Z, \hat{Z}) = (R(X, Y)Z, \hat{R}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z}), \quad \forall X, Y, Z \in T_x M, \quad \forall \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z} \in T_{\hat{x}} \hat{M}. \quad (8)$$

Finalement, on rappelle que si (U, ρ) est une variété Riemannienne munie de la métrique Riemannienne ρ et si (N, ρ_N) est une sous-variété de (U, ρ) munie de la métrique induite de ρ sur N , alors N est totalement géodésique si toute géodésique de (N, ρ_N) est une géodésique de (U, ρ) . D'autre part, si (V, ϱ) est une autre variété Riemannienne et $f \in C^\infty(U)$. Définissons la métrique h_f sur $U \times V$ par

$$h_f = pr_1^*(\rho) + (f \circ pr_1)^2 pr_2^*(\varrho),$$

où pr_1 et pr_2 sont les projections dans le premier et le deuxième facteurs du produit $U \times V$ respectivement. Alors, la variété Riemannienne $(U \times V, h_f)$ est dite le produit tordu de (U, ρ) et (V, ϱ) pour la fonction tordue f .

3 Les Résultats

3.1 Roulement et Développement des variétés

Dans cette section, on va présenter les définitions fondamentales de roulement et de développement des variétés. On commence par fixer deux variétés Riemanniennes connexes complètes orientées (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) de dimensions n et \hat{n} respectivement.

Definition 3.1. *L'espace d'état $Q = Q(M, \hat{M})$ de roulement de M sur \hat{M} est défini comme suivant:*

(i) *si $n \leq \hat{n}$,*

$$Q(M, \hat{M}) := \{A \in T^*M \otimes T\hat{M} \mid \hat{g}(AX, AY) = g(X, Y), X, Y \in T_x M, x \in M\}.$$

(ii) *si $n \geq \hat{n}$,*

$$Q(M, \hat{M}) := \{A \in T^*M \otimes T\hat{M} \mid \hat{g}(AX, AY) = g(X, Y), X, Y \in (\ker A)^\perp, \text{im}(A) \text{ est dans l'espace tangent de } \hat{M}\}.$$

On écrit $q = (x, \hat{x}; A)$ pour un point $q \in Q$. On a $x = \pi_{Q(M, \hat{M}), M}(q)$ et $\hat{x} = \pi_{Q(M, \hat{M}), \hat{M}}(q)$, où

$$\begin{aligned} \pi_{Q(M, \hat{M}), M} &:= \pi_{T^*M \otimes T\hat{M}, M}|_{Q(M, \hat{M})} : Q(M, \hat{M}) \rightarrow M, \\ \pi_{Q(M, \hat{M}), \hat{M}} &:= \pi_{T^*M \otimes T\hat{M}, \hat{M}}|_{Q(M, \hat{M})} : Q(M, \hat{M}) \rightarrow \hat{M}. \end{aligned}$$

Ecrivant la matrice transposée de A par rapport à la métrique (g, \hat{g}) comme $A^T : T_{\hat{x}}\hat{M} \rightarrow T_x M$, on a $(\ker A)^\perp = \text{im}(A^T)$. D'où, si $n \leq \hat{n}$ alors $A^T A = \text{id}_{T_x M}$ et si $n \geq \hat{n}$ alors $AA^T = \text{id}_{T_{\hat{x}}\hat{M}}$.

Proposition 3.2. (i) *$Q := Q(M, \hat{M})$ est une sous-variété lisse et fermée de $T^*M \otimes T\hat{M}$, sa dimension est égale à*

$$\dim(Q) = n + \hat{n} + n\hat{n} - \frac{N(N+1)}{2}, \text{ where } N := \min\{n, \hat{n}\}.$$

*De plus, $\pi_{Q, M}$ est un sous-fibré de $\pi_{T^*M \otimes T\hat{M}, M}$ de la fibre typique $O_n(\hat{M})$.*

(ii) *L'application*

$$\bar{T}_{M, \hat{M}} : T^*M \otimes T\hat{M} \rightarrow T^*\hat{M} \otimes TM; (x, \hat{x}; A) \mapsto (\hat{x}, x; A^T),$$

est un difféomorphisme et sa restriction sur $Q := Q(M, \hat{M})$ est aussi un difféomorphisme,

$$\bar{T}_Q := \bar{T}_{M, \hat{M}}|_Q : Q(M, \hat{M}) \rightarrow Q(\hat{M}, M) =: \hat{Q}; \bar{T}_Q(x, \hat{x}; A) = (\hat{x}, x; A^T). \quad (9)$$

(iii) *Si $n \neq \hat{n}$ ou bien si une de deux variétés M et \hat{M} n'est pas orientable, alors Q est connexe.*

L'application inverse de $\bar{T}_{M, \hat{M}}$ est le morphisme

$$\bar{S} : \hat{Q} \rightarrow Q; \bar{S}(\hat{x}, x; B) = (x, \hat{x}; B^T).$$

\bar{S} est bien définie parce que $(\ker B)^\perp = \text{im}(B^T)$ et $BB^T = \text{id}_{T_x M}$.

Corollary 3.3. $\pi_{Q(M,\hat{M})} : Q(M, \hat{M}) \rightarrow M \times \hat{M}$ est un espace fibré et sa fibre typique est difféomorphe à $O_n(\mathbb{R}^{\hat{n}})$.

Remark 3.4. Si $n \neq \hat{n}$, on peut prouver (iii) de Proposition 3.2 facilement en utilisant le corollaire précédent avec le fait que $O_n(\mathbb{R}^{\hat{n}})$ est connexe (voir Notation 2.2). De toute évidence, on va considérer $SO(n, \hat{n})$ comme le fibre typique de $\pi_{Q(M,\hat{M})}$.

Proposition 3.5. Soit $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ et soit $B \in T_x^*M \otimes T_{\hat{x}}\hat{M}$. Le champ de vecteurs $\nu(B)|_q$ est tangent à Q , en d'autres mots, il est bien un élément de $V|_q(\pi_Q)$ si et seulement si

$$(i) \quad A^T B \in \mathfrak{so}(T_x M), \text{ si } n \leq \hat{n}.$$

$$(ii) \quad BA^T \in \mathfrak{so}(T_{\hat{x}} \hat{M}), \text{ si } n \geq \hat{n}.$$

Puisque nous nous intéressons en roulement sans pivotement ni glissement, nous écrivons ces conditions géométriquement en prenant d'abord une courbe absolument continue $q : [a, b] \rightarrow Q; t \mapsto (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ sur Q , alors

Definition 3.6. (i) La courbe $q(\cdot)$ décrit un roulement de M contre \hat{M} sans pivotement si

$$\bar{\nabla}_{(\dot{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))} A(t) = 0 \text{ p.p. } t \in [a, b]. \quad (10)$$

$$\bar{\nabla}_{(\dot{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))} A(t) = 0 \text{ p.p. } t \in [a, b]. \quad (11)$$

(ii) La courbe $q(\cdot)$ décrit un roulement de M sur \hat{M} sans glissement si

$$A(t)\dot{\gamma}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t) \text{ p.p. } t \in [a, b]. \quad (12)$$

(iii) La courbe $q(\cdot)$ décrit un roulement de M contre \hat{M} sans glissement ni pivotement si (i) et (ii) sont vérifiés.

(iii) peut reformuler comme suivant, les courbes $q(\cdot)$ de Q qui décrivent un mouvement de roulement sans pivotement ni glissement de M contre \hat{M} sont exactement les courbes intégrales du système de commandes affine sans dérive suivant

$$(\Sigma)_R \begin{cases} \dot{\gamma}(t) & = u(t), \\ \dot{\hat{\gamma}}(t) & = A(t)u(t), \\ \bar{\nabla}_{(u(t), A(t)u(t))} A(t) & = 0, \end{cases} \quad \text{for a.e. } t \in [a, b], \quad (13)$$

où le contrôle u est fonction mesurable définie sur un intervalle réel fini $I \subset \mathbb{R}$ et eue des valeurs dans TM .

Afin de définir les distributions de roulement, il est nécessaire de qualifier quelques termes d'où la proposition suivante.

Proposition 3.7. Soit A_0 un $(1,1)$ -tensor sur $M \times \hat{M}$ appartient à $T_1^1(x_0, \hat{x}_0)(M \times \hat{M})$ avec $(x_0, \hat{x}_0) \in M \times \hat{M}$ et soit $t \mapsto (\gamma(t), \hat{\gamma}(t))$ une courbe absolument continue sur $M \times \hat{M}$ et définie sur l'intervalle réel $I \ni 0$ tel que $\gamma(0) = x_0, \hat{\gamma}(0) = \hat{x}_0$. Alors,

$$\begin{aligned} A_0 \in T^*M \otimes T\hat{M} &\implies A(t) = P_0^t(\hat{\gamma}) \circ A_0 \circ P_t^0(\gamma) \in T^*M \otimes T\hat{M} & \forall t \in I, \\ A_0 \in Q &\implies A(t) = P_0^t(\hat{\gamma}) \circ A_0 \circ P_t^0(\gamma) \in Q & \forall t \in I. \end{aligned}$$

Les définitions de relèvement et de la distribution de roulement sans pivotement sont déterminées prochainement.

Definition 3.8. (i) Fixons $q = (x, \hat{x}; A) \in T^*M \otimes T\hat{M}$, $X \in T_xM$ et $\hat{X} \in T_{\hat{x}}\hat{M}$, le relèvement de roulement sans pivotement de (X, \hat{X}) est l'unique vecteur $\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q$ de $T_x^*M \otimes T_{\hat{x}}\hat{M}$ en q donné par

$$\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 P_0^t(\hat{\gamma}) \circ A \circ P_t^0(\gamma) \quad (\in T_q(T^*M \otimes T\hat{M})),$$

où γ (resp. $\hat{\gamma}$) est une courbe lisse sur M (resp. \hat{M}) vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = X$ (resp. $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}$ et $\dot{\hat{\gamma}}(0) = \hat{X}$).

(ii) La distribution de roulement sans pivotement \mathcal{D}_{NS} sur $T^*M \otimes T\hat{M}$ est une distribution lisse de dimension $(n + \hat{n})$ définie par

$$\mathcal{D}_{NS}|_q = \mathcal{L}_{NS}(T_{(x, \hat{x})}(M \times \hat{M}))|_q.$$

Ainsi, on définit le relèvement et la distribution de roulement sans pivotement et sans glissement.

Definition 3.9. (i) Pour $q = (x, \hat{x}; A) \in T^*M \otimes T\hat{M}$ et $X \in T_xM$, on définit le relèvement de roulement de X comme étant l'unique vecteur $\mathcal{L}_R(X)|_q$ de $T_x^*M \otimes T_{\hat{x}}\hat{M}$ en q suivant

$$\mathcal{L}_R(X)|_q := \mathcal{L}_{NS}(X, AX)|_q.$$

(ii) La distribution de roulement \mathcal{D}_R sur $T^*M \otimes T\hat{M}$ est une distribution lisse de dimension égale à n définie en chaque $q = (x, \hat{x}; A) \in T^*M \otimes T\hat{M}$ par

$$\mathcal{D}_R|_q = \mathcal{L}_R(T_x(M))|_q.$$

Par Proposition 3.7, $\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q$ et $\mathcal{L}_R(X)|_q$ appartiennent à T_qQ pour tout $q \in Q$, $X \in T_xM$ et $\hat{X} \in T_{\hat{x}}\hat{M}$ vérifiant les données de Définition 3.8. Ainsi, $\mathcal{D}_{NS}|_q \subset T_qQ$ et $\mathcal{D}_R|_q \subset T_qQ$ pour tout $q \in Q$. Donc, $\mathcal{D}_{NS}|_Q$ et $\mathcal{D}_R|_Q$ sont distributions lisses sur Q de dimension $n + \hat{n}$ et n respectivement, on les note simplement par \mathcal{D}_{NS} et dr . Certaines propriétés de ces distributions sont collectées dans les corollaires suivantes.

Corollary 3.10. Concernant le roulement sans pivotement, on a les propriétés suivantes,

(i) Pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in T^*M \otimes T\hat{M}$ (resp. $\in Q$), $(\pi_{T^*M \otimes T\hat{M}})_*$ (resp. $(\pi_Q)_*$) est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{NS}|_q$ à $T_{(x, \hat{x})}(M \times \hat{M})$.

(ii) Soient $\bar{X} \in T_{(x, \hat{x})}(M \times \hat{M})$, A une section locale de $\pi_{T^*M \otimes T\hat{M}}$ et A_* sa dérivation, alors

$$\mathcal{L}_{NS}(\bar{X})|_{A(x, \hat{x})} = A_*(\bar{X}) - \nu(\bar{\nabla}_{\bar{X}}A)|_{A(x, \hat{x})}. \quad (14)$$

(iii) Une courbe absolument continue $t \mapsto q(t) = (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ dans $T^*M \otimes T\hat{M}$ ou Q définie sur un intervalle réel I est tangente à \mathcal{D}_{NS} presque partout sur I si et seulement si $\bar{\nabla}_{(\dot{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))}A = 0$ presque partout sur I .

(iv) On a, $T(T^*M \otimes T\hat{M}) = \mathcal{D}_{NS} \oplus_{T^*M \otimes T\hat{M}} V(\pi_{T^*M \otimes T\hat{M}})$ et $TQ = \mathcal{D}_{NS} \oplus_Q V(\pi_Q)$.

Corollary 3.11. Concernant le roulement sans pivotement et sans glissement, on a les propriétés suivantes,

(i) Pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$, $(\pi_{Q, M})_*$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_R|_q$ à T_xM .

(ii) Fixons $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ et une courbe absolument continue $\gamma : [0, a] \rightarrow M$, $a > 0$ telle que $\gamma(0) = x_0$, alors il existe une unique courbe absolument continue $q : [0, a'] \rightarrow Q$, $q(t) = (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$, $0 < a' \leq a$, tangente à \mathcal{D}_R presque partout et telle que $q(0) = q_0$. On la note par par

$$t \mapsto q_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q_0)(t) = (\gamma(t), \hat{\gamma}_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q_0)(t); A_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q_0)(t)). \quad (15)$$

De plus, si (\hat{M}, \hat{g}) est une variété complète, alors $a' = a$.

(iii) Si $q : [0, a] \rightarrow Q$ est une courbe tangente à \mathcal{D}_R presque partout alors elle peut s'écrire comme $q_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q(0))$ où $\gamma = \pi_{Q, M} \circ q$.

(iv) Une courbe absolument continue $t \mapsto q(t) = (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ définie sur un intervalle réel I est une courbe de roulement dans Q si et seulement si elle est tangente à \mathcal{D}_R presque partout sur I , c'est-à-dire si et seulement si $\dot{q}(t) = \mathcal{L}_R(\dot{\gamma}(t))|_{q(t)}$ presque partout sur I .

Remark 3.12. On définit une bijection $\Lambda_x^{\nabla^h}(\cdot)$ entre l'ensemble des courbes a.c. $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ commençant du point $x \in M$ et un ouvert de l'espace de Banach des courbes a.c. $[0, 1] \rightarrow T_xM$ commençant de 0 comme suivant

$$\Lambda_x^{\nabla}(\gamma)(t) = \int_0^t (P^{\nabla})_s^0(\gamma) \dot{\gamma}(s) ds \in T_xM, \quad \forall t \in [0, 1].$$

La même définition est appliquée sur \hat{M} . L'écriture intrinsèque de la courbe de roulement de conditions initiales (γ, q_0) est:

$$q_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q_0)(t) = (\gamma(t), \hat{\Lambda}_{\hat{x}_0}^{-1}(A_0 \circ \Lambda_{x_0}(\gamma))(t); P_0^t(\hat{\Lambda}_{\hat{x}_0}^{-1}(A_0 \circ \Lambda_{x_0}(\gamma))) \circ A_0 \circ P_t^0(\gamma)). \quad (16)$$

Si $\widehat{\mathcal{L}}_{NS}$ et $\widehat{\mathcal{L}}_R$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}_{NS}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_R$) sont les relèvements de roulement (resp. les distributions de roulement) de $\widehat{Q} := Q(\widehat{M}, M)$, alors $\dim \widehat{\mathcal{D}}_{NS} = n + \hat{n} = \dim \mathcal{D}_{NS}$ tandis que $\dim \widehat{\mathcal{D}}_R = \hat{n}$ et $\dim \mathcal{D}_R = n$. Par conséquent, le modèle de roulement des variétés M et \widehat{M} à dimensions différentes n'est pas symétrique par rapport à l'ordre de M et \widehat{M} .

Proposition 3.13. *Soit $\overline{T} := \overline{T}_Q$ le morphisme défini par (9), on a,*

1. $\overline{T}_* \mathcal{D}_{NS} = \widehat{\mathcal{D}}_{NS}$,
2. $\overline{T}_* V(\pi_Q) = V(\pi_{\widehat{Q}})$,
3. lorsque $n \leq \hat{n}$, alors $\overline{T}_* \mathcal{D}_R \subset \widehat{\mathcal{D}}_R$.

On va présenter les différents types des crochets de Lie sur Q .

Proposition 3.14. *Soit $\mathcal{O} \subset T^*M \otimes T\widehat{M}$ une sous-variété immergée. Prenons $\overline{T} = (T, \widehat{T})$, $\overline{S} = (S, \widehat{S}) \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T(M \times \widehat{M})})$ tels que pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, on a $\mathcal{L}_{NS}(\overline{T}(q))|_q$, $\mathcal{L}_{NS}(\overline{S}(q))|_q \in T_q \mathcal{O}$ et soient $U, V \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T^*M \otimes T\widehat{M}})$ tels que pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, on a $\nu(U(q))|_q$, $\nu(V(q))|_q \in T_q \mathcal{O}$. Alors,*

1.
$$[\mathcal{L}_{NS}(\overline{T}(\cdot)), \mathcal{L}_{NS}(\overline{S}(\cdot))]|_q = \mathcal{L}_{NS}(\mathcal{L}_{NS}(\overline{T}(q))|_q \overline{S} - \mathcal{L}_{NS}(\overline{S}(q))|_q \overline{T})|_q + \nu(AR(T(q), S(q)) - \widehat{R}(\widehat{T}(q), \widehat{S}(q))A)|_q,$$
2.
$$[\mathcal{L}_{NS}(\overline{T}(\cdot)), \nu(U(\cdot))]|_q = -\mathcal{L}_{NS}(\nu(U(q))|_q \overline{T})|_q + \nu(\mathcal{L}_{NS}(\overline{T}(q))|_q U)|_q,$$
3.
$$[\nu(U(\cdot)), \nu(V(\cdot))]|_q = \nu(\nu(U(q))|_q V - \nu(V(q))|_q U)|_q.$$

Les deux côtés des Equations 1. , 2. et 3. sont tangents à \mathcal{O} .

On peut généraliser Remarque 3.12 pour obtenir un modèle de roulement des variétés affines, c'est qu'on l'appelle le développement de roulement. Soient (M, ∇) et $(\widehat{M}, \widehat{\nabla})$ deux variétés affines de dimension n avec ∇ et $\widehat{\nabla}$ sont connexions affines complètes associées à M et \widehat{M} respectivement. On a les définitions suivantes tirées de [10] et [24] concernant le développement des variétés affines.

Definition 3.15. *Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe a.c. sur M commençant en x_0 . Le développement de γ dans $T_{x_0}M$ par rapport à ∇ est la courbe a.c. $\Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma) : [0, 1] \rightarrow T_{x_0}M$ définie par*

$$\Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma)(t) = \int_0^t (P^\nabla)_s^0(\gamma) \dot{\gamma}(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Definition 3.16. *Soient $(x_0, \hat{x}_0) \in M \times \widehat{M}$, $A_0 \in T_{x_0}^*M \otimes T_{\hat{x}_0}\widehat{M}$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe a.c. commençant en $\gamma(0) = x_0$. Le développement de γ sur \widehat{M} en passant par A_0 par rapport à $\widehat{\nabla}$ est la courbe a.c. $\Lambda_{A_0}^{\widehat{\nabla}}(\gamma) : [0, 1] \rightarrow M$ définie par*

$$\Lambda_{A_0}^{\widehat{\nabla}}(\gamma)(t) := (\Lambda_{\hat{x}_0}^{\widehat{\nabla}})^{-1}(A_0 \circ \Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma))(t), \quad t \in [0, 1].$$

De plus, le transport parallèle relative de A_0 le long de γ par rapport à $\bar{\nabla}$ est le morphisme linéaire suivant

$$(P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0 : T_{\gamma(t)}M \rightarrow T_{\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t)}\hat{M}, \text{ such that for } t \in [0, 1],$$

$$(P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0 := (P^{\hat{\nabla}})_0^t(\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)) \circ A_0 \circ (P^{\nabla})_t^0(\gamma).$$

Ainsi,

Definition 3.17. L'espace d'état de développement de roulement de (M, ∇) sur $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ est

$$Q := Q(M, \hat{M}) = \{A \in T_x^*M \otimes T_{\hat{x}}\hat{M} \mid A \in GL(n), x \in M \text{ et } \hat{x} \in \hat{M}\}.$$

Un point $q \in Q$ est rédigé comme avant, c'est-à-dire $q = (x, \hat{x}; A)$.

Le relèvement de développement de non-pivotement, la distribution de développement de non-pivotement, le relèvement de développement de roulement et la distribution de développement de roulement sont données comme suivants.

Definition 3.18. Soit $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$, $(X, \hat{X}) \in T_{(x, \hat{x})}(M \times \hat{M})$ et γ (resp. $\hat{\gamma}$) une courbe a.c. sur M (resp. sur \hat{M}) commençant par x (resp. \hat{x}) avec vitesse initiale X (resp. \hat{X}). Le relèvement de développement de non-pivotement de (X, \hat{X}) est l'unique vecteur $\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q$ de T_qQ en $q = (x, \hat{x}; A)$ qui vérifie

$$\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (P^{\hat{\nabla}})_0^t(\hat{\gamma}) \circ A \circ (P^{\nabla})_t^0(\gamma).$$

La distribution de développement de non-pivotement \mathcal{D}_{NS} en $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ est la lisse distribution de dimension $2n$ qui est égale à

$$\mathcal{D}_{NS}|_q := \mathcal{L}_{NS}(T_{(x, \hat{x})}M \times \hat{M})|_q.$$

Si $\hat{X} = AX$, alors le relèvement de développement de roulement en $q \in Q$ est le morphisme injectif $\mathcal{L}_R(X)|_q$

$$\mathcal{L}_R(X)|_q := \mathcal{L}_{NS}(X, AX)|_q = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (P^{\hat{\nabla}})_0^t(\hat{\gamma}) \circ A \circ (P^{\nabla})_t^0(\gamma).$$

La distribution de développement de roulement \mathcal{D}_R en $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ est la lisse distribution de dimension n qui est égale à

$$\mathcal{D}_R|_q := \mathcal{L}_R(T_xM)|_q.$$

On dit que la courbe absolument continue $I \ni t \mapsto q(t) = (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ sur Q est une courbe de développement de roulement si et seulement si elle est tangente à \mathcal{D}_R presque partout sur I , c'est-à-dire si et seulement si $\dot{q}(t) = \mathcal{L}_R(\dot{\gamma}(t))|_{q(t)}$ presque partout sur I .

Proposition 3.19. *Pour tout $q_0 := (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ et toute courbe a.c. $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ de position initiale x_0 , il existe des courbes a.c. et uniques $\hat{\gamma}(t) := \Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t)$ et $A(t) := (P^{\bar{\nabla}})^t_0(\gamma)A_0$ telles que $A(t)\hat{\gamma}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t)$ et $\bar{\nabla}_{(\hat{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))}A(t) = 0$, pour tout $t \in [0, 1]$.*

Notons R^∇ et T^∇ (resp. $\hat{R}^{\hat{\nabla}}$ et $\hat{T}^{\hat{\nabla}}$) sont le tenseur de courbure et le tenseur de torsion respectivement de M par rapport à ∇ (resp. de \hat{M} par rapport à $\hat{\nabla}$). Alors Proposition 3.7, Lemma 3.18, Proposition 3.24, Proposition 3.26, Proposition 4.1, Proposition 4.6 de [26] nous donnent la proposition suivante.

Proposition 3.20. *Soit $\mathcal{O} \subset T^*M \otimes TM$ une sous-variété immergée. Prenons $\bar{Z} = (Z, \hat{Z})$, $\bar{S} = (S, \hat{S}) \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T^*M \otimes TM})$ tels que, pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, on a $\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(q))|_q$, $\mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(q))|_q \in T_q\mathcal{O}$ et soient $U, V \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T^*M \otimes TM})$ tels que pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, on a $\nu(U(q))|_q$, $\nu(V(q))|_q \in T_q\mathcal{O}$. Alors,*

$$\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q \bar{S}(\cdot) := \bar{\nabla}_{\bar{Z}(A)}(\bar{S}(A)) - \nu(\bar{\nabla}_{\bar{Z}(A)}A)|_q \bar{S}(\cdot), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(\cdot)), \mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(\cdot))]|_q &= \mathcal{L}_{NS}(\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q \bar{S}(\cdot) - \mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(A))|_q \bar{Z}(\cdot))|_q \\ &\quad - \mathcal{L}_{NS}(T^\nabla(Z(q), S(q)), \hat{T}^{\hat{\nabla}}(\hat{Z}(q), \hat{S}(q)))|_q \\ &\quad + \nu(AR^\nabla(Z(q), S(q)) - \hat{R}^{\hat{\nabla}}(\hat{Z}(q), \hat{S}(q))A)|_q, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_R(Z(\cdot)), \mathcal{L}_R(S(\cdot))]|_q &= \mathcal{L}_R([Z(q), S(q)])|_q \\ &\quad + \mathcal{L}_{NS}(AT^\nabla(Z(q), S(q)) - \hat{T}^{\hat{\nabla}}(AZ(q), AS(q)))|_q \\ &\quad + \nu(AR^\nabla(Z(q), S(q)) - \hat{R}^{\hat{\nabla}}(AZ(q), AS(q))A)|_q, \end{aligned} \quad (19)$$

$$[\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(\cdot)), \nu(U(\cdot))]|_q = -\mathcal{L}_{NS}(\nu(U(A))|_q \bar{Z}(\cdot))|_q + \nu(\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q U(\cdot))|_q, \quad (20)$$

$$[\nu(U(\cdot)), \nu(V(\cdot))]|_q = \nu(\nu(U(A))|_q V - \nu(V(A))|_q U)|_q. \quad (21)$$

3.2 Des Résultats sur la Commandabilité

Utilisons Equation 1. de Proposition 3.14 pour introduire la notion de la courbure de roulement.

Definition 3.21. *Pour un point $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$, on définit la courbure de roulement Rol_q en q par*

$$\text{Rol}_q(X, Y) := AR(X, Y) - \hat{R}(AX, AY)A, \quad X, Y \in T_x M.$$

Nous écrivons $\text{Rol}_q(X, Y) = \text{Rol}(X, Y)(A)$.

D'où le crochet

$$[\mathcal{L}_R(X), \mathcal{L}_R(Y)]|_q = \mathcal{L}_R([X, Y])|_q + \nu(\text{Rol}_q(X, Y))|_q.$$

Nous passons maintenant à présenter un principal résultat de la commandabilité du système de roulement sans pivotement de (M, g) sur (\hat{M}, \hat{g}) . Soit $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$, fixons des repères orthonormaux F et \hat{F} de M et \hat{M} en x et \hat{x} respectivement. On note par $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}|_F \subset \mathfrak{so}(n)$ et $\hat{\mathfrak{h}} := \hat{\mathfrak{h}}|\hat{F} \subset \mathfrak{so}(\hat{n})$ les algèbres de Lie des groupes d'holonomie de M et \hat{M} par rapport aux repères F et \hat{F} respectivement.

Theorem 3.22. *Soit $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$, l'intersection de l'orbite $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_{NS}}(q_0)$ avec la fibre de π_Q au-dessus de (x_0, \hat{x}_0) vérifie*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D}_{NS}}(q_0) \cap \pi_Q^{-1}(x_0, \hat{x}_0) = \{\hat{h} \circ A_0 \circ h \mid \hat{h} \in \hat{H}|_{\hat{x}_0}, h \in H|_{x_0}\} =: \hat{H}|_{\hat{x}_0} \circ A_0 \circ H|_{x_0},$$

Ainsi, sur l'espace tangent, on a

$$\begin{aligned} T_{q_0} \mathcal{O}_{\mathcal{D}_{NS}}(q_0) \cap V|_{q_0}(\pi_Q) &= \nu(\{\hat{k} \circ A_0 - A_0 \circ k \mid k \in \mathfrak{h}|_{x_0}, \hat{k} \in \hat{\mathfrak{h}}|\hat{x}_0\})|_{q_0} \\ &=: \nu(\hat{\mathfrak{h}}|\hat{x}_0 \circ A_0 - A_0 \circ \mathfrak{h}|_{x_0})|_{q_0}. \end{aligned}$$

Le système de roulement $(\Sigma)_{NS}$ n'est pas commandable dans $T^*M \otimes T\hat{M}$. Tandis que dans Q , on va établir prochainement deux conditions équivalentes à la commandabilité de $(\Sigma)_{NS}$.

Theorem 3.23. *Fixons deux bases orthonormales F et \hat{F} de M et \hat{M} en x et \hat{x} respectivement. Alors, le système de roulement sans pivotement $(\Sigma)_{NS}$ de M sur \hat{M} est complètement commandable si et seulement si, pour tout $A \in \text{SO}(n, \hat{n})$, on a*

$$\hat{\mathfrak{h}}A - A\mathfrak{h} = \begin{cases} \{B \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid A^T B \in \mathfrak{so}(n)\}, & \text{si } n < \hat{n}, \\ \{B \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid BA^T \in \mathfrak{so}(\hat{n})\}, & \text{si } n > \hat{n}. \end{cases}$$

Theorem 3.24. *Supposons que (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) sont simplement connexes. Alors, le système de roulement sans pivotement $(\Sigma)_{NS}$ de M sur \hat{M} est complètement commandable si et seulement si*

$$\hat{\mathfrak{h}}I_{n, \hat{n}} - I_{n, \hat{n}}\mathfrak{h} = \begin{cases} \{B \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid I_{n, \hat{n}}^T B \in \mathfrak{so}(n)\}, & \text{si } n \leq \hat{n}, \\ \{B \in (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^{\hat{n}} \mid BI_{n, \hat{n}}^T \in \mathfrak{so}(\hat{n})\}, & \text{si } n \geq \hat{n}. \end{cases}$$

Concernant la commandabilité du système de roulement sans pivotement ni glissement $(\Sigma)_R$ de (M, g) sur (\hat{M}, \hat{g}) , on a les résultats suivants.

Proposition 3.25. *Fixons un $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$, un X quelconque de $\text{VF}(M)$ et une série réelle $(t_n)_{n=1}^\infty$ qui vérifie $t_n \neq 0$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$. Supposons qu'on a*

$$V|_{\Phi_{\mathcal{L}_R(X)}(t_n, q_0)}(\pi_Q) \subset T(\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)), \quad \forall n. \quad (22)$$

Alors $\mathcal{L}_{NS}(Y, \hat{Y})|_{q_0} \in T_{q_0}(\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0))$ pour tout champ de vecteurs Y orthogonal à $X|_{x_0}$ dans $T_{x_0}M$ par rapport à g et tout champ de vecteurs \hat{Y} orthogonal à $A_0 X|_{x_0}$ dans $T_{\hat{x}_0}\hat{M}$ par rapport à \hat{g} et appartenant à $A_0(X|_{x_0})^\perp$. Par suite, la codimension de l'orbite de roulement $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ dans Q est plus petite ou égale à $|\hat{n} - n| + 1$.

Corollary 3.26. *Supposons qu'il existe un point $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ et un nombre $\epsilon > 0$ tel que pour tout $X \in \text{VF}(M)$ satisfaisant $\|X\|_g < \epsilon$ sur M , on a*

$$V|_{\Phi_{\mathcal{D}_R(X)}(t, q_0)}(\pi_Q) \subset T\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0), \quad |t| < \epsilon.$$

Alors l'orbite $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ est ouverte dans Q . En conséquence, $(\Sigma)_R$ est complètement commandable si et seulement si

$$\forall q \in Q, \quad V|_q(\pi_Q) \subset T_q\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q).$$

Soient (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) des variétés Riemanniennes de dimensions n et \hat{n} respectivement.

Corollary 3.27. *Supposons que $n \leq \hat{n}$. Alors, les deux cas suivants sont équivalents,*

- (i) \mathcal{D}_R est involutive,
- (ii) les courbures de (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) sont constantes et égales.

Autrement, si $n > \hat{n}$, alors les deux cas suivants sont équivalents,

- (a) \mathcal{D}_R est involutive,
- (b) (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) sont des variétés plates.

Proposition 3.28. *Supposons que (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) sont complètes. Les propositions suivantes sont équivalentes*

- (i) *Il existe un point $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ tel que $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ est une variété intégrale de \mathcal{D}_R .*
- (ii) *Il existe un point $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ tel que*

$$\text{Rol}_q(X, Y) = 0, \quad \forall q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0), \quad X, Y \in T_x M.$$

- (iii) *Il existe une variété Riemannienne complète (N, h) , a un revêtement Riemannien $F : N \rightarrow M$ et un lisse morphisme $G : N \rightarrow \hat{M}$ vérifiant*

- (1) *si $n \leq \hat{n}$, G est une immersion Riemannienne dont l'image des h -géodésiques par G sont des \hat{g} -géodésiques,*
- (2) *si $n \geq \hat{n}$, G est une submersion Riemannienne dont la distribution co-noyau $(\ker G_*)^\perp \subset TN$ est involutive et les fibres $G^{-1}(\hat{x})$ sont variétés totalement géodésiques de (N, h) pour tout $\hat{x} \in \hat{M}$.*

La proposition et la corollaire suivantes établissent des conditions nécessaires de la non-commandabilité du système $\Sigma_{(R)}$ lorsque $n < \hat{n}$.

Proposition 3.29. *Soient (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) deux variétés Riemanniennes de dimensions n et \hat{n} respectivement avec $n < \hat{n}$. Assumer qu'il existe une sous-variété Riemannienne complète et totalement géodésique \hat{N} de \hat{M} d'une dimension égale à m avec $n \leq m < \hat{n}$. Alors, le système de roulement $\Sigma_{(R)}$ de $Q(M, \hat{M})$ n'est pas complètement contrôlable.*

Corollary 3.30. *Considérons une variété Riemannienne (M, g) de dimension n et une variété Riemannienne (\hat{M}, \hat{g}) d'une courbure constante et de dimension \hat{n} avec $n < \hat{n}$. Alors le système de roulement sans pivotement ni glissement de (M, g) sur (\hat{M}, \hat{g}) n'est pas contrôlable.*

3.3 Roulement de Variété Riemannienne 2-dimensionnelle sur Variété Riemannienne 3-dimensionnelle

Une application d'un système de roulement des variétés Riemanniennes à deux dimensions différentes est le cas de roulement d'une variété Riemannienne de dimension 2 sur une autre de dimension 3. D'abord, on fixe un $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ puis on définit un repère g -orthonormal local $X, Y \in T_x M$. Notons $\hat{Z}_A := \star(AX \wedge AY) \in T_{\hat{x}} \hat{M}$, alors AX, AY, \hat{Z}_A forment un repère orthonormal et local dans $T_{\hat{x}} \hat{M}$.

La courbure Gaussienne de M est $K(x) := g(R(X, Y)Y, X)$. Tandis que les courbures sur \hat{M} sont

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_A^1 &:= \hat{g}(\hat{R}(AY, \hat{Z}_A)\hat{Z}_A, AY) = -\hat{g}(\hat{R}(\star AX), \star AX), \\ \hat{\sigma}_A^2 &:= \hat{g}(\hat{R}(AX, \hat{Z}_A)\hat{Z}_A, AX) = -\hat{g}(\hat{R}(\star AY), \star AY), \\ \hat{\sigma}_A^3 = \hat{\sigma}_A &:= \hat{g}(\hat{R}(AX, AY)AY, AX) = -\hat{g}(\hat{R}(\star \hat{Z}_A), \star \hat{Z}_A), \\ \Pi_X(q) &:= \hat{g}(\hat{R}(\star \hat{Z}_A), \star AX), \\ \Pi_Y(q) &:= \hat{g}(\hat{R}(\star \hat{Z}_A), \star AY), \\ \Pi_Z(q) &:= \hat{g}(\hat{R}(\star AX), \star AY).\end{aligned}$$

Devant ces notations, $Rol_q(X, Y)$ sera égal à

$$Rol_q(X, Y) = AR(X, Y) - \hat{R}(AX, AY)A = \begin{pmatrix} 0 & -(K - \hat{\sigma}_A) \\ K - \hat{\sigma}_A & 0 \\ \Pi_Y & -\Pi_X \end{pmatrix}.$$

On a résolu ce problème de commandabilité par distinguer plusieurs cas.

Theorem 3.31. *Soient (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) deux variétés Riemanniennes de dimensions 2 et 3 respectivement, on rédige les conditions nécessaires de la non-commandabilité du système de roulement sans pivotement ni glissement de (M, g) sur \hat{M}, \hat{g} comme suivant,*

1. *Si $K - \hat{\sigma}_A = 0$ sur un ouvert de $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ et $(\Pi_X, \Pi_Y) = 0$ sur un voisinage de \hat{x} , alors $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0) = 2$ et M est isométrique à une sous-variété Riemannienne totalement géodésique de \hat{M} .*

2. Si $K - \hat{\sigma}_A \neq 0$ sur un ouvert de $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ et $(\Pi_X, \Pi_Y) = 0$ sur un voisinage de \hat{x} , alors $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0) = 5$ et \hat{M} est un produit tordu d'un intervalle réel avec une sous-variété Riemannienne totalement géodésique de dimension 2.
3. Si $K - \hat{\sigma}_A = 0$ sur un ouvert de $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ et $(\Pi_X, \Pi_Y) \neq 0$ sur un voisinage de \hat{x} , alors $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0) = 7$, M est de courbure constante et \hat{M} ressemble localement au produit Riemannien d'un intervalle réel et une sous-variété Riemannienne de dimension 2.
4. Si $K - \hat{\sigma}_A \neq 0$ sur un ouvert de $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ et $(\Pi_X, \Pi_Y) \neq 0$ sur un voisinage de \hat{x} , alors la dimension de $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ est égale à 5 ou 6 ou 7. Si $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0) = 5$ alors M est une variété plate et \hat{M} ressemble localement au produit Riemannien d'un intervalle réel et une sous-variété Riemannienne totalement géodésique de dimension 2.

Concernant le dernier cas du théorème précédent, on n'a pas réussi à trouver les aspect géométriques de M et de \hat{M} lorsque $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0) = 6$ et lorsque $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0) = 7$.

3.4 Le Groupe d'Holonomie Distributionnel

Soit (M, ∇) une variété affine et soit Δ une distribution complètement contrôlable sur M .

Definition 3.32. On définit l'ensemble de lacets absolument continues et Δ -admissible basés en $x \in M$ par

$$\Omega_\Delta(x) := \{\gamma \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ a.c., } \gamma(a) = \gamma(b) = x \text{ et } \dot{\gamma}(t) \in \Delta|_{\gamma(t)} \text{ p.p.}\}.$$

Proposition 3.33. Pour chaque $x \in M$, $\Omega_\Delta(x)$ n'est pas vide et il est stable pour la loi " \cdot " donnée dans (6).

On définit le groupe d'holonomie associé à la distribution Δ comme suivant.

Definition 3.34. Le groupe d'holonomie associé à la distribution Δ en un point $x \in M$ est

$$H_\Delta^\nabla|_x := \{(P^\nabla)_0^1(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_\Delta(x)\}.$$

Proposition 3.35. Pour tout points $x \in M$, $H_\Delta^\nabla|_x$ est un sous-groupe de $H^\nabla|_x$. Si y est autre point de M alors $H_\Delta^\nabla|_x$ et $H_\Delta^\nabla|_y$ sont des sous-groupes conjugués.

La question fondamentale ici, est-ce que la fermeture de H_Δ^∇ est égale, en général, à H^∇ ? La réponse est non et notre preuve est un exemple de roulement de groupe de carnot homogène d'ordre 2 sur un espace Euclidien. Pour cela, on considère le développement de roulement de (M, ∇) sur l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ et on désigne la situation à partir des résultats de Section 4 dans [12].

Proposition 3.36. *L'espace fibré $\pi_{Q,M} : Q \rightarrow M$ est un $\text{Aff}(n)$ -fibré principal avec l'action à gauche $\mu : \text{Aff}(n) \times Q \rightarrow Q$ donnée par*

$$\mu((\hat{y}, C), q) = (x, C\hat{x} + \hat{y}; C \circ A), \text{ pour } q = (x, \hat{x}; A) \in Q.$$

L'action μ conserve la distribution \mathcal{D}_R , c'est-à-dire que pour tout $q \in Q$ et $B \in \text{Aff}(n)$, on a $(\mu_B)_* \mathcal{D}_R|_q = \mathcal{D}_R|_{\mu_B(q)}$ où $\mu_B : Q \rightarrow Q; q \mapsto \mu(B, q)$. De plus, il existe un sous-groupe unique \mathcal{H}_q^∇ de $\text{Aff}(n)$ qu'on l'appelle le groupe d'holonomie affine de (M, ∇) et qui vérifie

$$\mu(\mathcal{H}_q^\nabla \times \{q\}) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x).$$

Si $q' = (x, \hat{x}'; A') \in Q$ appartient à la même fibre de $\pi_{Q,M}$ au-dessus de q , alors \mathcal{H}_q^∇ et $\mathcal{H}_{q'}^\nabla$ sont conjugués dans $\text{Aff}(n)$ et les classes de conjugaison de \mathcal{H}_q^∇ sont de la forme $\mathcal{H}_{q'}^\nabla$. Cette classe de conjugaison est notée par \mathcal{H}^∇ .

D'après [27] et le produit semi-direct $\text{Aff}(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n)$, on a le prochain corollaire.

Corollary 3.37. *La projection du groupe d'holonomie affine \mathcal{H}_q^∇ de (M, ∇) sur $\text{SO}(n)$ est le groupe d'holonomie H^∇ de (M, ∇) .*

Considérons maintenant une distribution lisse complètement commandable Δ sur (M, ∇) .

Definition 3.38. *La distribution de roulement Δ_R de Δ est la sous-distribution lisse de \mathcal{D}_R définie en $(x, \hat{x}; A) \in Q$ par*

$$\Delta_R|_{(x, \hat{x}; A)} = \mathcal{L}_R(\Delta|_x)|_{(x, \hat{x}; A)}. \quad (23)$$

Puisque Δ est complètement commandable, on a,

Corollary 3.39. *Pour tout $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ et toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a.c. et Δ -admissible qui commence en x_0 , il existe une unique courbe $q_{\Delta_R}(\gamma, q_0) : [0, 1] \rightarrow Q$ a.c. et Δ_R -admissible.*

Corollary 3.40. *L'action μ mentionnée dans Proposition 3.36 conserve la distribution Δ_R . De plus, il existe un sous-groupe unique $\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla$ de \mathcal{H}_q^∇ qu'on l'appelle le groupe d'holonomie affine sur Δ_R et qui vérifie*

$$\mu(\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla \times \{q\}) = \mathcal{O}_{\Delta_R}(q) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x),$$

où $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ est l'orbite associée à la distribution Δ_R en q_0 .

Comme ce qui précède, on a le corollaire suivant d'après [27].

Corollary 3.41. *La projection du groupe d'holonomie horizontal affine $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ sur Δ_R sur $\text{SO}(n)$ est le groupe d'holonomie horizontal H_{Δ}^∇ sur Δ .*

Proposition 3.42. *Pour tout $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$, la restriction de $\pi_{Q,M} : Q \rightarrow M$ sur l'orbite $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ est une submersion dans M .*

Corollary 3.43. *Pour tout $x \in M$, le fibre $\pi_{Q,M}^{-1}(x) \cap \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ de $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ au-dessus de x est vide ou bien une sous-variété plongée et fermée dans $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ de dimension $\delta = \dim \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) - \dim M$.*

Le résultat principal de la dernière partie de la thèse est le suivant.

Proposition 3.44. *Le groupe d'holonomy horizontal H_{Δ}^{∇} est un sous-groupe de Lie de $GL(n)$ et le groupe d'holonomie horizontal affine $\mathcal{H}_{\Delta_R}^{\nabla}$ est un sous-groupe de Lie de $Aff(n)$.*

On donne la définition de groupe de Carnot homogène d'ordre 2 sur \mathbb{R}^N comme elle est citée dans [5].

Definition 3.45. *A. Soit \circ un loi de groupe sur \mathbb{R}^N , le groupe (\mathbb{R}^N, \circ) est un groupe de Lie sur \mathbb{R}^N si l'application*

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N; \quad (x, y) \mapsto y^{-1} \circ x$$

est un lisse morphisme.

B. On dit que (\mathbb{R}^N, \circ) est un groupe de Lie homogène s'il existe N -uplet des nombres réels $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ vérifiant $1 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N$ et tels que la dilatation

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N; \quad \delta_\lambda(x_1, \dots, x_N) = (\lambda^{\sigma_1} x_1, \dots, \lambda^{\sigma_N} x_N)$$

est un automorphisme de groupe pour tout réel $\lambda > 0$. On note ce groupe de Lie homogène par $(\mathbb{R}^N, \circ, \delta_\lambda)$.

C. On dit que le groupe de Lie $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, \circ)$ est groupe de Carnot homogène si les deux conditions suivantes sont satisfaites,

C-1. \mathbb{R}^N peut être écrire comme $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_r}$ et la dilatation $\delta_\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,

$$\delta_\lambda(x) = \delta_\lambda(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) = (\lambda x^{(1)}, \lambda^2 x^{(2)}, \dots, \lambda^r x^{(r)}), \text{ pour } x^{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i},$$

est un automorphisme de groupe pour tout réel $\lambda > 0$.

C-2. Notons l'algèbre de Lie de \mathbb{G} comme \mathfrak{g} . Prenons les champs de vecteurs Z_i , pour $i = 1, \dots, N_1$, convenus avec les champs de vecteurs canoniques sur \mathbb{R}^N , c'est-à-dire les $\frac{\partial}{\partial x_i}$. On a

$$Lie(Z_1, \dots, Z_{N_1}) = \mathfrak{g},$$

où $Lie(Z_1, \dots, Z_{N_1})$ est l'algèbre de Lie engendré par les vecteurs Z_i , $i = 1, \dots, N_1$.

On constate d'après le roulement du groupe de Carnot \mathbb{G} homogène d'ordre 2 et de dimension N sur l'espace Euclidien \mathbb{R}^N le suivant.

Proposition 3.46. *Si \mathbb{G} est un groupe de Carnot homogène d'ordre 2, de dimension $N \geq 3$ et muni de la connexion de Levi-Civita ∇^g associée à une métrique Riemannienne g , alors,*

- a) *Le groupe d'holonomie horizontal affine $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ est un sous-groupe de $\text{SE}(N)$ de dimension $2N$,*
- b) *Le groupe d'holonomie horizontal H_Δ^∇ est un sous-groupe de Lie compact et connexe de $\text{SO}(N)$ de dimension N ,*
- c) *Les inclusions $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla \subset \text{SE}(m+n)$ et $H_\Delta^\nabla \subset \text{SO}(m+n)$ sont strictes si et seulement si $N > 3$.*

References

- [1] Agrachev A., Sachkov Y., *An intrinsic Approach to the control of Rolling Bodies*. Proceedings of the Conference on Decision and Control, Phoenix, vol. I, pp. 431-435, (1999)
- [2] Agrachev A., Sachkov Y., *The Orbit Theorem and its Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 87, pp. 63-80, (2004)
- [3] Bellaïche A., *The tangent space in sub-Riemannian geometry* Progress in Mathematics, Birkhauser, Vol 144, (1996)
- [4] Besse A., *Einstein Manifolds*, Springer (2007)
- [5] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F., *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics, (2007)
- [6] Cartan E., *La géométrie des espaces de Riemann* Memorial of mathematical sciences 9, 1-61, (1925)
- [7] Chitour Y., *A Continuation Method for Motion-Planning Problems*. ESAIM-COCV, 12, pp. 139-168, (2006)
- [8] Chitour Y., Godoy Molina M., Kokkonen P., *The Rolling Problem: Overview and Challenges*. arXiv: 1301.6370, (2013)
- [9] Chitour Y., Godoy Molina M., Kokkonen P., *Symmetries of the Rolling Model*. arXiv: 1301.2579, (2013)
- [10] Chitour Y., Kokkonen P., *Rolling Manifolds: Intrinsic Formulation and Controllability*. Preprint, arXiv:1011.2925v2, (2011)
- [11] Chitour Y., Kokkonen P., *Rolling Manifolds and Controllability: the 3D case*. Submitted, (2011)
- [12] Chitour Y., Kokkonen P., *Rolling Manifolds on Space Forms*. Ann. I. H. Poincaré - AN 29, 927-954, (2012)
- [13] Drager D.L., Lee J.M., Park E., Richardson K., *Smooth distributions are finitely generated*, Ann. Glob. Anal. Geom., (2012)
- [14] Falbel E., Gorodsky C., Rumin M., *Holonomy of sub-Riemannian manifolds* International Journal of Mathematics, Vol 8, 317-344, (1997)
- [15] Godoy Molina M., Grong E., Markina I., Leite F.S., *An intrinsic formulation of the rolling manifolds problem* Journal of Dynamical Control Systems, Vol 18, (2012)
- [16] Goto M., *On an Arcwise Connected Subgroup of a Lie Group*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 20, No. 1, (Jan., 1969)

- [17] Harms P., *The Poincaré Lemma in Subriemannian Geometry*, arXiv:1211.3531, (2012)
- [18] Hilgert J., Neeb K.H., *Structure and Geometry of Lie Groups*, Springer, (2011)
- [19] Jean F., *Sub-Riemannian Geometry*. Lectures given at the Trimester on Dynamical and Control Systems, Trieste, September - December, (2003)
- [20] Jean F., *Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique*. Notes de cours, Édition (2011/2012)
- [21] Jean F., *Control of Nonholonomic Systems: from Sub-Riemannian Geometry to Motion PLanning*. Springer Briefs in Mathematics, (2014)
- [22] Jurdjevic V., *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, (1997)
- [23] Joyce D., *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*. Published in the United States by Oxford University PressInc., New York, (2007)
- [24] Kokkonen P., *A Characterization of Isometries between Riemannian Manifolds by using Development along Geodesic Triangles*. Published in Archivum Mathematicum, Tomus 48, Number 3, (2012)
- [25] Kokkonen P., *Étude du Modèle des Variétés Roulantes et de sa Commandabilité*. PhD thesis, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00764158>, (2012)
- [26] Kokkonen P., *Rolling of Manifolds without Spinning*. Published in Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 19, No. 1 (January), (2013)
- [27] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*. Vol. I, Wiley-Interscience, (1996)
- [28] Mortada A., Chitour Y., Kokkonen P., *Rolling manifolds of different dimensions*. Submitted, arXiv:1312.4885, (2013)
- [29] Ozeki H., *Infinitesimal holonomy groups of bundle connections*. Nagoya Math, J., 10, 105-123, (1956)
- [30] Postnikov M. M., *Geometry VI - Riemannian geometry*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer, (2001)
- [31] Rifford L., *Subriemannian Geometry and Optimal Transport*. Springer Briefs in Mathematics, (2014)
- [32] Sakai T., *Riemannian Geometry*. Translations of Mathematical Monographs, 149. American Mathematical Society, Providence, RI, (1996)
- [33] Sharpe R.W., *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program* Graduate Texts in Mathematics, 166. Springer-Verlag, New York, (1997)

- [34] Spivak M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 2, Publish or Perish, 3rd edition, (1999)
- [35] Sussmann, H., *Smooth Distributions Are Globally Finitely Spanned*, Analysis and Design of Nonlinear Control Systems, (2008)
- [36] Vilms J., *Totally Geodesic Maps*. J. Differential Geometry, 4, 73-79, (1970)