HAL
open science

Ramification des revêtements inséparables en caractéristique p>0.

Gabriel Zalamansky

To cite this version:

Gabriel Zalamansky. Ramification des revêtements inséparables en caractéristique p>0.. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2015. Français. NNT : 2015PA066168 . tel-01207531

HAL Id: tel-01207531

https://theses.hal.science/tel-01207531

Submitted on 1 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE
l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Discipline :

Mathématiques

École doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Présentée par

Gabriel ZALAMANSKY

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Ramification des revêtements inséparables en caractéristique $p > 0$.

Soutenue le 2 Juillet 2015 devant le jury composé de :

M. ROMAGNY Matthieu	Université Rennes I	Directeur de thèse
M. BORNE Niels	Université Lille I	Rapporteur
M. MORET-BAILLY Laurent	Université Rennes I	Examinateur
M. PERRET Marc	Université Toulouse II	Examinateur
M. DOS SANTOS Joao Pedro	Université Paris VI	Examinateur

Résumé

Résumé

Dans cette thèse, on introduit la notion de revêtement potentiellement inséparable et on se propose de développer une théorie de la ramification pour ces derniers. Le langage utilisé est celui des schémas en groupoïdes.

Après avoir établi quelques résultats préliminaires au chapitre 1, on prouve au chapitre 2 un théorème de quotient d'un schéma en groupoïdes par un sous-groupoïde.

Au chapitre 3, on utilise ces résultats pour entreprendre l'étude générale du formalisme des revêtements inséparables.

Enfin, au chapitre 4, on spécialise au cas des revêtements sous un schéma en groupes diagonalisable et on étudie en détail la structure de ces derniers. En particulier, on exprime le lieu Gorenstein de ces morphismes en fonction des constantes de structure du revêtement et on prouve dans ce cadre une formule analogue à la formule de Riemann-Hurwitz des revêtements ramifiés classiques.

Mots-clefs

Revêtements, ramification, morphismes inséparables, groupoïdes, quotients, torseurs, schémas en groupes diagonalisables, morphismes Gorenstein, formule de Riemann-Hurwitz

---

Ramification theory for inseparable coverings

Abstract

In this thesis, we introduce the notion of inseparable coverings and we try to develop a ramification theory for such objects. We make use of the groupoid scheme formalism.

In section 1, we establish preliminary results on scheme epimorphisms. We use these results in the next section to prove a quotient theorem for groupoid schemes.

Then in section 3 we introduce the general formalism of inseparable coverings.

Finally, in the last section we consider in greater details inseparable coverings given by the action of a diagonalizable group scheme. We compute the Gorenstein locus of these mrophisms and we prove a formula analogous to the classical Riemann-Hurwitz formula.

Keywords

Coverings, Ramification, inseparable morphisms, groupoids, quotients, torsors, diagonalizable group schemes, Gorenstein morphisms, Riemann-Hurwitz formula

Remerciements

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans la contribution décisive de mes professeurs, collègues et amis que je voudrais remercier ici, en tentant de n'oublier personne.

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Matthieu Romagny, mon directeur de thèse pour m'avoir initié à la géométrie algébrique en caractéristique positive ainsi qu'au métier de chercheur. J'ai bien sûr beaucoup bénéficié de son expertise mais également de son enthousiasme à toute épreuve. Il s'est toujours montré disponible et bienveillant, même lorsqu'il s'agissait de corriger les notes obscures que je lui envoyais. Je souhaite à tous les étudiants d'avoir un directeur comme lui.

Ensuite je souhaite remercier Niels Borne et Jakob Stix pour avoir bien voulu être les rapporteurs de cette thèse et pour leurs remarques pertinentes. Je remercie également Niels Borne, Joao-Pedro Dos Santos, Laurent Moret-Bailly et Marc Perret de l'honneur qu'ils me font en participant au jury de ma soutenance.

Durant ces années de thèse, j'ai eu le privilège de faire partie du projet ANR ARIVAF. Au-delà du soutient matériel dont j'ai bénéficié grâce à lui, j'ai beaucoup appris au contact de ses membres et de leurs invités. Je tiens donc à remercier vivement Anna, Cédric, Dajano, Niels, Sylvain, Fabien, Pierre, Jilong, Nicolas et Leonardo pour avoir porté ce projet, pour leurs encouragements et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'ai une pensée particulière pour mes camarades doctorants, compagnons d'infortune qui m'ont rendu la thèse plus agréable. À Jussieu, j'ai eu le bonheur de côtoyer Christophe, Samuel, les deux Thomas, Christian, Anne, François, Florent, Clément, Olivier, Maÿlis, Thibaud...Je m'aperçois qu'il est impossible d'en dresser une liste exhaustive, alors j'assure quiconque a un jour siégé dans un bureau du cinquième étage du couloir 15-16 de mon soutient inconditionnel et de mon indéfectible amitié. J'éprouve les mêmes sentiments à l'égard des doctorants de l'IRMAR, qui m'ont accueilli avec une grande gentillesse à Rennes lors de ma dernière année, notamment Tristan, Basile, Gwezheneg, Yvan, Vincent, Charles, Kodjo et tous les autres.

On choisit bien souvent de se lancer dans de longues études suite à la rencontre d'enseignants exceptionnels, qui savent faire naître chez leurs élèves la passion de la connaissance. Je ne déroge pas à la règle. C'est d'abord Guillaume Roussel, professeur de Maths.Sup' au lycée Montaigne de Bordeaux, qui m'a donné envie d'entreprendre des études de mathématiques. À l'Université de Bordeaux, j'ai eu ensuite la chance d'assister aux cours d'Alain Yger, Ahmed Sebbar, Alain Hénaut, Christophe Bavard, Qing Liu, Anna Cadoret et Stanislas Kupin qui m'ont conforté dans mon choix. Cette thèse, modeste témoignage de reconnaissance et d'admiration, leur est dédiée.

Enfin je remercie bien évidemment mes parents, ma famille, mes amis de longue date et Marie pour leur amour. Je n'en dit pas plus, car ils savent ce qu'ils représentent pour moi. De simples remerciements ne sauraient en rendre compte.

À mes parents,
Marie,
et les copains.

Table des matières

Introduction **9**

1 Épimorphismes effectifs de schémas **15**
1.1 Épimorphismes de schémas 16
1.2 Épimorphismes effectifs 19

2 Groupoïdes **27**
2.1 Rappels et définitions 27
2.2 Quotient catégorique d'un schéma par un groupoïde fini localement libre . . 31
2.3 Quotient dans la catégorie des S-schémas affines 33
2.4 Homogénéité des orbites et morphisme j 35
2.5 Quotient d'un groupoïde par un sous-groupoïde 36

3 Revêtements généralisés **45**
3.1 La catégorie des revêtements généralisés 45
3.1.1 Définitions 45
3.1.2 Dévissage 48
3.1.3 Revêtements Galoisiens 49
3.2 Stabilisateurs et dévissage 49
3.3 Un diviseur de ramification pour les revêtements généralisés 54
3.4 Cas particulier des revêtements galoisiens génériquement étales 59
3.5 Comportement du diviseur de ramification par dévissage 61

4 Revêtements sous les schémas en groupes diagonalisables **67**
4.1 Actions de schémas en groupes diagonalisables 67
4.2 Revêtements sous les groupes diagonalisables 68
4.2.1 Structure locale 69
4.3 Revêtements Gorenstein sous $\mu_{p^n,S}$ 71
4.3.1 Faisceaux dualisants 71
4.3.2 Le cas des $\mu_{p^n,S}$-revêtements 72
4.4 Ramification des revêtements sous les p-groupes diagonalisables 76
4.5 Dévissage du diviseur de ramification des μ_{p^n}-revêtements 80
4.6 Comparaison avec le faisceau dualisant 82

Bibliographie **87**

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des revêtements inséparables de schémas en caractéristique positive. Notre but est de développer une théorie de la ramification qui étend celle des revêtements génériquement étales.

Rappelons qu'on appelle revêtement génériquement étale un morphisme de schémas $f : Y \longrightarrow X$ fini, surjectif, localement libre et étale au-dessus d'un ouvert schématiquement dense de X. Ces objets forment une catégorie fibrée au-dessus de la catégorie des schémas $\mathrm{Et} \longrightarrow \mathrm{Sch}$ dont la fibre en un schéma X est la catégorie Et/X des revêtements génériquement étales de X. Rappelons brièvement les propriétés principales des revêtements génériquement étales et de leur ramification.

(E_1) La catégorie Et est stable par composition : si $Y \longrightarrow X$ est un revêtement de X et si $Z \longrightarrow Y$ est un revêtement de Y alors la composée $Z \longrightarrow X$ est encore un revêtement de X.

(E_2) La catégorie Et possède une sous-catégorie pleine Et^{G} dont les objets sont dits galoisiens. Il s'agit des revêtements $Y \longrightarrow X$ dont le groupe d'automorphismes $G := \mathrm{Aut}_X(Y)$ agit transitivement sur les fibres. De plus les revêtements galoisiens peuvent se dévisser : si $Z \longrightarrow X$ est un revêtement galoisien de groupe G et $H \lhd G$ est un sous-groupe distingué de G, on obtient un revêtement $Z \longrightarrow Y := Z/H$ galoisien de groupe H et un revêtement $Y \longrightarrow X$ galoisien de groupe G/H dont la composition donne le revêtement initial.

(E_3) Pour les revêtements $f : Y \longrightarrow X$ suffisamment réguliers, il existe une notion de diviseur de ramification, que l'on note $R_{Y/X}$. Ce dernier mesure l'obstruction de f à être étale. On le définit comme le diviseur $R_{Y/X} = \mathrm{Div}(\Omega^1_{Y/X})$ associé au faisceau $\Omega^1_{Y/X}$ des formes différentielles relatives de f, qui est un faisceau de torsion puisque f est génériquement étale. Cette notion est transitive par composition : Si Z/X est un revêtement se factorisant en $g : Z \longrightarrow Y$ suivi de $Y \longrightarrow X$ on a l'égalité de diviseurs sur Z

$$R_{Z/X} = R_{Z/Y} + g^* R_{Y/X} \tag{1}$$

La théorie de la ramification des extensions d'anneaux locaux génériquement séparables permet le calcul des multiplicités locales du diviseur de ramification.

Nous souhaitons construire et étudier une catégorie analogue de revêtements inséparables jouissant de telles propriétés.

Lorsque l'on tente de généraliser ces définitions aux cas des morphismes finis plats éventuellement inséparables, le fait que le faisceau des formes différentielles ne soit plus de torsion ôte l'espoir de calquer les constructions de (E_3). Pour la définition habituelle de ramification, un morphisme inséparable est ramifié partout. Cependant, on peut faire

l'observation que si $f : Y \longrightarrow X$ est un revêtement galoisien de groupe G, alors f est étale si et seulement si l'action de G sur Y est libre, c'est-à-dire si et seulement si f est un G-torseur. Le diviseur de ramification $R_{Y/X}$ mesure alors également le défaut de f à être un G-torseur. Cette dernière remarque sert de guide pour adapter les définitions ci-dessus au cas des morphismes finis et plats de schémas munis d'une action génériquement libre d'un schéma en groupes infinitésimal. En effet, si $f : Y \longrightarrow X$ est un tel morphisme, on peut toujours poser la question de mesurer l'obstruction de f à être un torseur. Ceci mène à considérer qu'un revêtement quotient $Y \longrightarrow X = Y/G$ est non ramifié si et seulement si G agit librement. Pour ce point de vue, les torseurs jouent alors le rôle d'objets galoisiens non ramifiés.

On est alors confronté à un autre problème. En effet, contrairement au cas génériquement étale, un même morphisme peut être vu alternativement comme le quotient d'une action avec ou sans point fixe. C'est le phénomène qu'illustre le morphisme de Frobenius relatif de la droite affine sur un corps k de caractéristique positive, qui peut être vu comme un $\alpha_{p,k}$-torseur ou comme le quotient d'une action de ce même schéma en groupes, cette fois avec un point fixe en 0. Il peut également être vu comme le quotient d'une action du schéma en groupes $\mu_{p,k}$, non isomorphe à $\alpha_{p,k}$. On constate donc que ni le groupe de structure, ni le caractère ramifié ou non ne sont déterminés par le seul morphisme $Y \longrightarrow X$. Dans une telle situation, la question de décider si un morphisme de quotient est un torseur n'a donc de sens que relativement à un groupe et à une action, c'est-à-dire seulement si on impose la donnée du groupe agissant et de l'action.

Ces phénomènes montrent que, afin d'obtenir une théorie similaire à la théorie classique des revêtements génériquement étales, la définition de revêtement généralisé doit faire intervenir une donnée supplémentaire, pour pallier à l'absence de choix privilégié de groupe d'automorphismes. Nous proposons d'utiliser les groupoïdes qui donnent un cadre naturel, incluant les actions de schémas en groupes mais aussi les feuilletages infinitésimaux et suffisamment souple pour obtenir la plupart des propriétés analogues à celles listées ci-dessus. Plus précisément, on propose la définition suivante (def. 3.1.1.1) :

Définition 1 *Soit X un schéma. On appelle pré-revêtement (généralisé) de X un couple $(Y \longrightarrow X, \mathcal{G} \rightrightarrows Y)$, avec*

1) $Y \longrightarrow X$ un morphisme fini localement libre de schémas.

2) $\mathcal{G} \rightrightarrows Y$ un groupoïde en schémas fini, localement libre, laissant X invariant et agissant librement sur un ouvert schématiquement dense de Y.

On abrègera souvent la notation d'un pré-revêtement en $(Y, \mathcal{G})$. On dit que $(Y, \mathcal{G})$ est un revêtement de X si de plus $[\mathcal{G} : Y] = [Y : X]$ et qu'il est galoisien si de plus $\mathcal{G}$ est le groupoïde correspondant à l'action sur Z d'un schéma en groupes fini localement libre d'ordre $[Y : X]$.

Décrivons plus en détails le contenu de cette thèse.

On commencera, dans un premier chapitre, par rappeler quelques résultats sur les épimorphismes effectifs de schémas qui joueront un rôle dans le théorème de quotient par un sous-groupoïde au chapitre 2. Nous prouvons ensuite une version précisée d'un résultat de factorisation en épimorphismes finis annoncé par Grothendieck dans [Gro95] [1]. On démontrera également un critère d'effectivité pour les épimorphismes finis, améliorant

1. Nous remercions l'utilisateur « user27920 » du site Mathoverflow pour ses remarques et suggestions qui ont permis à cette preuve de voir le jour.

un résultat antérieur d'Olivier [Oli70] et Mesablishvili [Mes04] dans ce cadre. Ce dernier permet de tester l'effectivité d'un épimorphisme après un nombre fini de changements de base, par opposition au théorème d'Olivier et Mesablishvili. On obtient le résultat suivant (th. 1.2.10 et rq. 1.2.11) :

Théorème 1 *Soit Y un schéma noethérien et $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme fini. Supposons que pour toute factorisation de f en produit $X \xrightarrow{g} E \xrightarrow{h} Y$ de deux morphismes finis schématiquement dominants, les conditions suivantes soient satisfaites :*

1. *Le changement de base $g_X : X \times_Y X \longrightarrow X \times_Y E$ de g par f est schématiquement dominant.*
2. *Le changement de base $X \times_Y E \longrightarrow E \times_Y E$ de g par h est schématiquement dominant.*

Alors f est un épimorphisme effectif.

Afin de disposer d'un formalisme assez souple pour l'étude des revêtements inséparables de schémas, on est amené à étudier le problème de la construction d'un groupoïde quotient par un sous-groupoïde. Cette construction est nécessaire si l'on souhaite pouvoir dévisser les revêtements généralisés, comme dans le cas classique. C'est l'objet du second chapitre. On commence par y rappeler certaines notions générales sur la catégorie des schémas en groupoïdes, ainsi que le théorème de quotient par un groupoïde fini localement libre de [Gro11a, Exp. V], dû à Grothendieck. Ensuite, étant donnés un schéma en groupoïdes $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ et un sous-groupoïde fini localement libre $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ agissant librement au-dessus d'un ouvert schématiquement dense de Z, on utilisera ces outils pour dégager des conditions suffisantes à la construction d'un quotient de $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ par $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ dans la catégorie des schémas en groupoïdes. En se restreignant à un ouvert schématiquement dense U de Z sur lequel $\mathcal{H}$ agit librement, il est facile de trouver les schémas $\mathcal{Q}$ et Y destinés respectivement à devenir les schémas des flèches et des objets du groupoïde quotient. On posera

$$\mathcal{Q} := \mathcal{H}\backslash\mathcal{G}/\mathcal{H} \quad \text{et} \quad Y = Z/\mathcal{H}.$$

Les morphismes $s, t : \mathcal{G} \rightrightarrows Z$ induisent des morphismes $\sigma, \tau : \mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ qui seront les morphismes source et but du quotient. La difficulté est alors de montrer que l'on peut construire un morphisme de composition $\bar{c} : \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$ qui munit $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ d'une structure de schéma en groupoïdes et tel que le couple de projections canoniques $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\pi : Z \longrightarrow Y$ induise un morphisme de groupoïdes $(\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$ qui vérifie la propriété universelle attendue dans la catégorie des schémas en groupoïdes. Pour ce faire, la première stratégie que nous adopterons consistera à introduire un groupoïde intermédiaire $\mathcal{H}^3 \times \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$ correspondant à une action de $\mathcal{H}^3$ sur les paires de flèches composables de $\mathcal{G}$ et à dégager des conditions suffisantes sur $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ pour que le quotient de ce groupoïde intermédiaire s'identifie à $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$, auquel cas on obtiendra le morphisme $\bar{c}$ cherché en factorisant la composition de $\mathcal{G}$. Nous verrons que l'on est dans cette situation notamment lorsque les morphismes $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ et $p \times p : \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$ donnés par la projection canonique p sont plats. Le fait remarquable est alors que l'on obtient un théorème de quotient exempt de toute hypothèse de normalité sur $\mathcal{H}$. Néanmoins, comme les actions en présence sont à priori non libres, la compréhension de ces morphismes est très délicate car on ne connait pas les foncteurs de points de leurs sources. On donnera des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Enfin, une autre approche consiste à imposer, au lieu des hypothèses de platitude des morphismes de quotients, des propriétés d'homogénéité sur les orbites de $\mathcal{H}$. Il s'agit ici d'imposer que le morphisme $j_Y : \mathcal{H} \rightrightarrows Z \times_Y Z$ induit par les morphismes source et but

de $\mathcal{H}$ soit un épimorphisme effectif. Un tel groupoïde fini localement libre et dont l'action est libre sur un ouvert schématiquement dense sera appelé *raisonnable*. On détaillera cette notion dans la section 2.4. Sous cette hypothèse, on présentera une autre construction du morphisme de composition de $\mathcal{Q}$ en passant par un autre quotient intermédiaire. C'est ce qui a motivé la recherche de critères d'effectivité d'un épimorphisme fini entreprise au chapitre 1. On obtiendra alors l'énoncé suivant (th. 2.5.1) :

Théorème 2 *Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde et $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ un sous-groupoïde fini et localement libre de $\mathcal{G}$ agissant librement sur un ouvert schématiquement dense de Z, avec des orbites contenues dans des ouverts affines. Soit Y le quotient de $\mathcal{G}$ par l'action de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{Q}$ le quotient de $\mathcal{G}$ par l'action de $\mathcal{H}^2$ par pré- et post-composition. On note $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ le morphisme de quotient. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) Le morphisme $\theta : \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}/\mathcal{H}^3 \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$ induit par $p \times p$ est un isomorphisme.

(ii) Les groupoïdes $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ sont donnés par l'action de groupes finis constants et le groupoïde $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$.

(iii) Le morphisme $\mathcal{Q} \longrightarrow Y$ est plat et le groupoïde $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est raisonnable et distingué dans $\mathcal{G}$.

Alors on peut munir $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ d'une structure de groupoïde qui en fait un quotient de $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ par $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ dans la catégorie des schémas en groupoïdes, c'est-à-dire qui vérifie la propriété universelle suivante :

Un morphisme de S-groupoïdes $(\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{T} \rightrightarrows T)$ se factorise par $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ si et seulement si son noyau est contenu dans $\mathcal{H}$.

Enfin, dans les cas (ii) et (iii), le groupoïde $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ est fini et localement libre.

Pour conclure cette partie, on donnera des exemples et contre-exemples de groupoïdes raisonnables.

Dans le troisième chapitre, on commencera par introduire la notion de revêtement généralisé. On obtiendra une catégorie Rev $\longrightarrow$ Sch, fibrée en schémas et dont la fibre en un schéma X est la catégorie Rev_X des revêtements de X. On cherchera ensuite à déterminer dans quelle mesure cette catégorie possède des propriétés similaires à celle des revêtements génériquement étales. En particulier, on s'intéressera au problème du dévissage des revêtements généralisés. On montrera, grâce à notre théorème de quotient 2, que dans les cas d'application de ce dernier on peut également dévisser les revêtements généralisés. On obtient l'énoncé suivant (th. 3.1.2.1) :

Théorème 3 *Soit X un S-schéma, $(Z \longrightarrow X, \mathcal{G})$ un (pré-)revêtement de X et $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$. On note $Y = Z/\mathcal{H}$. On suppose que $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ vérifie l'une des conditions d'application du théorème 2 et on note $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ le groupoïde quotient de $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ par $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$. Si $Z \longrightarrow Y$ est plat alors*

(i) $(Z \longrightarrow Y, \mathcal{H})$ est un (pré-)revêtement de Y.

(ii) $(Y \longrightarrow X, \mathcal{Q})$ est un (pré-)revêtement de X. Dans ce cas les morphismes de quotient induisent un morphisme de (pré-)revêtements de X

$$(Z \longrightarrow X, \mathcal{G}) \longrightarrow (Y \longrightarrow X, \mathcal{Q}).$$

En particulier on voit que, comme dans le cas des revêtements classiques, si $(Z, \mathcal{G})$ est un revêtement généralisé galoisien de groupe G fini localement libre et H est un sous-groupe fini localement libre et distingué de G, on peut dévisser $(Z, \mathcal{G})$ en l'action de H sur Z suivie

de l'action de G/H sur Z/H. Dans une seconde section, on étudiera les stabilisateurs des schémas en groupoïdes correspondant à des revêtements généralisés de schémas. Le but est d'étudier le comportement de ces stabilisateurs par dévissage. Le résultat principal de cette section est le suivant (th. 3.2.6) :

Théorème 4 *Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde fini localement libre. Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ un sous-groupoïde fermé, fini localement libre et agissant librement sur on ouvert schématiquement dense de Z. On suppose que l'on est dans l'une des situations d'application du théorème 2 et l'on note $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ le groupoïde quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$ et $p = (p, \pi) : (\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$ le morphisme de quotient, que l'on suppose plat. Alors p induit une suite de Z-schémas en groupes $1 \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\alpha} \pi^* \mathrm{St}_{\mathcal{Q}}$, exacte au sens où :*
(i) $\mathrm{St}_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ *est une immersion fermée.*
(ii) $\mathrm{St}_{\mathcal{H}} \simeq \ker(\alpha)$.

Dans la troisième section de ce chapitre, on utilisera une construction générale de [MFK94] due à Mumford, Forgarty et Kirwan, qui permet d'associer un diviseur de Cartier effectif à un faisceau de torsion sur un schéma suffisamment régulier, pour définir un invariant de ramification pour les revêtements généralisés à l'aide des idéaux d'augmentation des stabilisateurs de leurs groupoïdes structuraux. Plus précisément, on proposera la définition suivante (def. 3.3.5) :

Définition 2 *Soit X un S-schéma et $(Z \longrightarrow X, \mathcal{G} \rightrightarrows Z)$ un revêtement de X. On définit son diviseur de ramification comme étant le diviseur $\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = \mathrm{Div}(\sigma_* \mathfrak{m}_{\mathcal{G}})$ associé à l'idéal d'augmentation $\mathfrak{m}_{\mathcal{G}}$ du stabilisateur $\sigma : \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \longrightarrow Z$ du groupoïde $\mathcal{G}$.*

On donnera ensuite des exemples de revêtements inséparables dont on calculera la ramification. Dans la section suivante, on se propose de comparer l'invariant de ramification ainsi défini avec celui de la théorie classique dans le cas des revêtements galoisiens génériquement étales sous des groupes constants d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles. On montrera que ces deux invariants sont égaux. Enfin, dans la dernière section de chapitre, on étudiera le comportement de cet invariant par dévissage. Comme dans la théorie classique, on posera la question de l'existence d'une formule permettant de relier le diviseur de ramification d'un revêtement généralisé à ceux obtenus lorsqu'on le dévisse. D'après ce qui précède, c'est le cas pour les revêtements galoisiens modérés. La suite exacte du théorème 4 montre que c'est également le cas lorsque le sous-groupoïde par lequel on dévisse contient toute la ramification. Enfin, on donnera des exemples montrant que notre invariant de ramification ne vérifie pas en général la formule 1 de la théorie classique.

Dans la quatrième et dernière partie de cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement aux revêtements généralisés galoisiens sous des schémas en groupes infinitésimaux diagonalisables. On souhaite relier l'invariant de ramification défini dans le chapitre précédent à la géométrie de ces derniers. Plus précisément, à l'instar de la théorie classique, on cherche à relier le diviseur de ramification d'un revêtement sous un schéma en groupes diagonalisable au faisceau dualisant du morphisme de quotient. Après quelques rappels généraux sur les schémas en groupes diagonalisables, on déterminera dans la section 4.2 la structure locale des revêtements sous de tels groupes. On verra qu'ils sont déterminés par un nombre fini de sections du faisceau structural du schéma de base, qu'on appellera constantes de structure du revêtement. Dans la section suivante, on dégage une condition nécessaire et suffisante sur les constantes de structure d'un revêtement sous μ_{p^n} pour que le morphisme de quotient soit Gorenstein, c'est-à-dire que son faisceau dualisant soit inversible. On obtient le résultat suivant (4.3.2.1) :

Théorème 5 *Soit $f : Y \longrightarrow X$ un μ_{p^n}-revêtement. On note*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$$

la $\mathcal{O}_X$-algèbre de fonctions de Y, graduée par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ on note U_{ij} l'ouvert de X où le morphisme de faisceaux inversibles

$$\mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_j \longrightarrow \mathcal{A}_{i+j}$$

induit par la multiplication de $\mathcal{A}$ est un isomorphisme. Pour tout $l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ on pose $U_l = \cap_{i+j=l} U_{ij}$.

Alors l'ouvert de X au-dessus duquel le revêtement $f : Y \longrightarrow X$ est Gorenstein est la réunion des U_l pour $l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. En particulier, le revêtement f est Gorenstein si et seulement si

$$X = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} U_l.$$

Signalons que des résultats similaires ont été obtenus indépendamment dans [Ton14]. Ensuite, on calculera explicitement les invariants de ramification des revêtements sous les schémas en groupes diagonalisables et on déterminera leur comportement par dévisage. On verra que, là encore, la formule (1) est vérifiée. Ceci nous permettra, dans la dernière section de ce chapitre, d'utiliser les résultats récents de [Tzi15] pour relier la ramification des revêtements sous les schémas en groupes diagonalisables à leur ramification. On obtient le théorème suivant (th. 4.6.2) :

Théorème 6 *Soit X un k-schéma de dimension 1, où k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $(Y \longrightarrow X, \mathcal{G})$ un revêtement galoisien de X sous un schéma en groupes diagonalisable avec Y régulier. Si le morphisme $Y \longrightarrow X$ est Gorenstein, alors on a*

$$\omega_{Y/X} = \mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{G}}),$$

où $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ désigne l'invariant de ramification défini en 2 et $\omega_{Y/X}$ désigne le faisceau dualisant du morphisme $Y \longrightarrow X$.

Dans le cas d'un revêtement de courbes projectives lisses, on obtiendra comme corollaire une formule reliant les genres des courbes en présence, prouvant ainsi un exact analogue de la formule de Riemann-Hurwitz dans ce cadre et généralisant le résultat [Ems13, cor. 7.3].

Chapitre 1

Épimorphismes effectifs de schémas

Le chapitre 2 a pour but de montrer l'existence du quotient catégorique d'un schéma en groupoïdes $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ par un sous-groupoïde $\mathcal{H} \rightrightarrows X$ sous des conditions assez générales (en particulier, en imposant le moins possible d'hypothèses de platitude). Pour cela, on aura besoin de considérer les groupoïdes finis localement libres $\mathcal{H} \rightrightarrows Y$ dont le morphisme de composantes source et but $\mathcal{H} \longrightarrow X \times_Y X$ (où $Y = X/\mathcal{H}$) est un épimorphisme effectif. Dans cette optique on est amené à étudier les critères d'effectivité d'un épimorphisme. L'objet de ce chapitre est de donner quelques rappels et compléments sur la notion d'épimorphisme effectif. On prouvera un critère pratique d'effectivité pour un épimorphisme de schémas.

Il existe peu de critères pour tester l'effectivité d'un épimorphisme. Le résultat le plus connu est le suivant dû à Olivier ([Oli70, cor. au th. 2.6]) et Mesablishvili ([Mes04, th. 5.11]).

1.0.1 Théorème.
Soit f un morphisme quasi-compact de schémas. Alors f est un épimorphisme effectif universel si et seulement si f est universellement schématiquement dominant.

Un morphisme obtenu comme quotient d'un schéma par l'action d'un groupoïde est un épimorphisme effectif. Dans un tel exemple, le fait que la formation du quotient commute au changement de base est assez rare, et plus rare encore pour des quotients de groupes unipotents comme ceux qui motivent notre étude. À cause de cela, il est rare ou en tout cas difficile à vérifier que le morphisme de quotient est un épimorphisme effectif *universel*, et le fait que le théorème d'Olivier et Mesablishvili ne permet de détecter que ceux-ci est un problème. Ces considérations nous amènent à essayer de trouver des variantes du théorème précédent qui soient effectives au sens où elles demandent de tester que f reste schématiquement dominant après un nombre prescrit, aussi petit que possible, de changements de base. Nous présentons ci-dessous une telle variante, pour les épimorphismes finis.

Pour ce faire, on démontrera une version précisée d'un résultat énoncé par Grothendieck dans son exposé n° 190 au Séminaire Bourbaki de 1959 que l'on utilisera ensuite. Dans [Gro95] partie A, par. 1, page 190-08, Grothendieck écrit : « On peut prouver que si S est un préschéma noethérien, tout morphisme fini $S' \to S$ qui est un épimorphisme, est le composé d'une suite finie d'épimorphismes stricts (également finis) ». Le terme *strict* est synonyme de *effectif* dans ce contexte. Plus précisément, on donnera en 1.2.7 une démonstration constructive du fait que tout épimorphisme fini se factorise en un nombre fini d'épimorphismes effectifs et que cette factorisation est fonctorielle. On se servira de ce résultat pour démontrer le théorème principal de ce chapitre, qui affirme qu'un épimorphisme

fini de schémas est un épimorphisme effectif si et seulement si il reste schématiquement dominant après certains changements de bases, en nombre fini. On renvoie à 1.2.10 et 1.2.11 pour les énoncés précis.

1.1 Épimorphismes de schémas

On commence par rassembler quelques résultats sur les épimorphismes de schémas qui nous seront utiles.

1.1.1 Définition.
On dit qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ entre objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un épimorphisme s'il est simplifiable à droite, c'est-à-dire que pour tout objet Z de $\mathcal{C}$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathrm{Hom}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,Z) \\ & g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

est injective. On dira parfois que f est simplifiable à droite.

1.1.2 Remarques.
- Il est clair que la composition de deux épimorphismes est un épimorphisme.
- Les épimorphismes d'ensembles sont les surjections.
- Tout morphisme surjectif d'anneaux commutatifs est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple les morphismes de localisation sont des épimorphismes d'anneaux commutatifs.
- Compte tenu de l'équivalence de catégories entre les schémas affines et les anneaux commutatifs, on voit immédiatement qu'un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow B$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme) d'anneaux si et seulement si le morphisme de schémas affines correspondant $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est un épimorphisme (resp. monomorphisme) de schémas affines. En revanche il n'est pas vrai en général que $\mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ soit un épimorphisme (resp. monomorphisme) dans la catégorie de tous les schémas.

On s'intéressera ici aux épimorphismes dans la catégorie $\mathcal{C} = \mathrm{Sch}/S$ des schémas sur une base S. Sauf précision contraire, le terme *épimorphisme* signifiera *épimorphisme de S-schémas*. Dans cette catégorie il n'existe pas de théorème de structure général sur les épimorphismes (ni sur les monomorphismes). Nous disposons néanmoins de quelques résultats. Le lemme ci-dessous est extrait de [Gro63, Exp. VIII, Prop 5.1].

1.1.3 Lemme.
Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas qui vérifie les deux conditions suivantes :
1. f est surjectif
2. $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ est injectif.
Alors f est un épimorphisme de S-schémas (et même d'espaces annelés sur S).

Preuve :
Soient Z un S-schéma et g, h deux S-morphismes $Y \rightrightarrows Z$ tels que $g \circ f = h \circ f$. On note g_0 et h_0 les applications ensemblistes sous-jacentes à g et h. Comme f est surjectif, l'égalité $g \circ f = h \circ f$ implique $g_0 = h_0$ et donc l'égalité des images inverses $g^{-1}\mathcal{O}_Z = h^{-1}\mathcal{O}_Z$. Notons $\mathcal{F}$ ce faisceau. Par adjonction les données de $g^\sharp$ et $h^\sharp$ sont équivalentes aux données de morphismes g' et $h' : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$. Par hypothèse $g \circ f = h \circ f$ donc $(g \circ f)^{-1}\mathcal{O}_Z = f^{-1}\mathcal{F} =$

$(h \circ f)^{-1}\mathcal{O}_Z$ et les morphismes $f^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ et $f^{-1}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ sont égaux. Appliquant une nouvelle fois l'isomorphisme d'adjonction on trouve que les composées $\mathcal{F} \xrightarrow{g'} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\sharp} f_*\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{F} \xrightarrow{h'} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\sharp} f_*\mathcal{O}_X$ sont égales. Or par hypothèses $f^\sharp$ est injective donc $g' = h'$ puis $g^\sharp = h^\sharp$ et enfin $g = h$. Comme remarqué dans [SGA1] cette preuve n'utilise pas le fait que les espaces annelés $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ et $(Z, \mathcal{O}_Z)$ soient des schémas et s'applique donc telle quelle dans la catégorie des S-espaces annelés.

□

1.1.4 Corollaire.
Les morphismes fidèlement plats sont des épimorphismes universels.

L'implication du lemme 1.1.3 n'est pas une équivalence puisqu'il existe des épimorphismes de schémas non surjectifs.

En revanche, ils sont toujours schématiquement dominants, au sens suivant :

1.1.5 Définition.
Un morphisme de schémas $s : S' \longrightarrow S$ est dit schématiquement dominant s'il ne se factorise par aucun sous-schéma fermé strict de S.

1.1.6 Remarque. Cette définition diffère de celle donnée dans EGA.

Les sous-schémas fermés de S correspondant aux idéaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_S$, on voit que s est schématiquement dominant si et seulement si le plus grand sous-idéal quasi-cohérent de $\ker(s^\sharp)$ est nul. Bien sûr si $s^\sharp$ est injectif alors s est schématiquement dominant au sens ci-dessus mais la réciproque est fausse. Elle est vraie lorsque s est quasi-compact et quasi-séparé.

1.1.7 Lemme.
Un épimorphisme de schémas est schématiquement dominant.

Preuve : Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme de schémas. Soit $Z \hookrightarrow Y$ un sous-schéma fermé par lequel f se factorise. Le coproduit de Y par Y au-dessus de Z existe dans la catégorie des schémas (d'après [Fer03, Théorème 7.1]) et l'on a le diagramme cocartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Y \coprod_Z Y \end{tikzcd}$$

Comme f se factorise par Z on a $u \circ f = v \circ f$ et donc $u = v$. Soit $U = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de Y et I l'idéal définissant $U \cap Z$. On a $U \coprod_{U \cap Z} U = \mathrm{Spec}(A \times_{A/I} A)$. Alors l'égalité $u = v$ signifie que deux éléments de A ont même image dans A/I si et seulement si ils sont égaux. Ainsi $I = \{0\}$ et $Z = Y$.

□

La réciproque n'est pas vraie : il existe des morphismes schématiquement dominants qui ne sont pas des épimorphismes. On doit imposer une condition supplémentaire pour obtenir une équivalence.

1.1.8 Lemme.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un épimorphisme de S-schémas.*
2. *f est schématiquement dominant et ne se factorise par aucun sous-schéma ouvert strict de Y.*
3. *f ne se factorise par aucun sous-schéma strict de Y.*

Preuve :

Supposons 1. D'après le lemme précédent, f est schématiquement dominant. Si f se factorise par un ouvert U, on considère le recollement $Y \coprod_U Y$ de deux copies de Y le long de U. On dispose du diagramme cocartésien

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Y \coprod_U Y \end{tikzcd}$$

et l'on a $u \circ f = v \circ f$ et donc $u = v$ puis $U = Y$.

Supposons 2. Soit Z un S-schéma et u, v deux morphismes $Y \rightrightarrows Z$ tels que $u \circ f = v \circ f$. Alors f se factorise par le schéma $E_{u,v}$ donné par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} E_{u,v} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "(u,v)\circ\Delta_Y"] \\ Z \arrow[r, "\Delta_Z"'] & Z \times_S Z \end{tikzcd}$$

Comme la diagonale de Z est une immersion, il existe un ouvert $j : W \hookrightarrow Y$ de Y et une immersion fermée $i : E_{u,v} \hookrightarrow W$ tels que f se factorise par $j \circ i$. En particulier f se factorise par W donc $W = Y$. Mais alors $E_{u,v}$ est un sous-schéma fermé de Y par lequel f se factorise et l'on a $E_{u,v} = Y$ et donc $u = v$. Ainsi f est un épimorphisme.

Enfin, on constate que les conditions 2. et 3. sont équivalentes. En effet, on a clairement $3 \Rightarrow 2$. Mais si 2. est vérifiée, soit Z un sous-schéma de Y par lequel f se factorise. Alors il existe une immersion ouverte $j : Z' \hookrightarrow Y$ et une immersion fermée $i : Z \hookrightarrow Z'$ telles que f se factorise par $j \circ i$. Comme précédemment, on en conclut que $Z = Z' = Y$.

□

1.1.9 Remarques.

- On voit que si f est schématiquement dominant alors c'est un épimorphisme de schémas séparés puisque si Z est séparé alors $E_{u,v}$ est toujours un sous-schéma fermé de Y.
- Si f est fini alors f est quasi-compact et quasi-séparé donc f est schématiquement dominant si et seulement si $f^\sharp$ est injectif. D'autre part un morphisme fini et schématiquement dominant est surjectif d'après le théorème de Cohen-Seidenberg. Ainsi d'après le lemme 1.1.3, un morphisme fini et schématiquement dominant est un épimorphisme.

1.2 Épimorphismes effectifs

1.2.1 Définition.

On dira qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme effectif si pour tout Y-schéma T le digramme

$$\mathrm{Hom}_S(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(X, Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_S(X \times_Y X, Z)$$

induit par f et les deux projections $X \times_Y X \rightrightarrows X$ est exact (c'est-à-dire que la première flèche est injective et que son image est l'égalisateur des deux suivantes).

On dira que f est un épimorphisme effectif universel si pour tout changement de base $S' \longrightarrow S$ le morphisme $f' : X \times_S S' \longrightarrow Y \times_S S'$ est un épimorphisme effectif.

1.2.2 Remarques.

- Il est équivalent de demander que le diagramme du produit fibré

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

  soit à la fois cartésien et cocartésien.
- La définition se formule de la même façon dans toutes les catégories avec produits fibrés.
- On peut montrer que dans une catégorie abélienne, tous les épimorphismes sont effectifs.
- Il existe des épimorphismes de S-schémas non effectifs. Par exemple, considérons le morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de normalisation de la courbe d'équation $y^3 = x^4$. On a $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ avec $A = \frac{k[x,y]}{(y^3-x^4)}$ et $B = k[t]$, le morphisme $A \longrightarrow B$ étant donné par $x \mapsto t^3$ et $y \mapsto t^4$. Le morphisme f est fini et schématiquement dominant donc surjectif. De plus le comorphisme $f^\sharp$ est injectif. Ainsi d'après 1.1.3, c'est un épimorphisme. On verra en 1.2.9 que f n'est pas effectif, sa factorisation canonique en produit d'épimorphismes effectifs comportant deux crans.

La question de savoir si un épimorphisme est effectif est en général difficile. Le lemme suivant donne un critère facile d'effectivité :

1.2.3 Lemme.

Un morphisme de schémas qui admet une section est un épimorphisme effectif.

Preuve :

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme admettant une section $s : Y \longrightarrow X$. Soient Z un S-schéma et $x : X \longrightarrow Z$ un S-morphisme dans le noyau de la double flèche $\mathrm{Hom}_S(X, Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_S(X \times_Y X, Z)$. Si p_1 et p_2 désignent les deux projections on a donc $x \circ p_1 = x \circ p_2$. On remarque que le couple de morphismes $(\mathrm{id}_X, s \circ f)$ définit un X-point de $X \times_Y X$ puisque $f \circ s \circ f = f$. Ainsi $x \circ s \circ f = x$ et donc x se factorise par Y. L'unicité d'une telle factorisation est évidente : si z_1 et z_2 sont deux Y-points de Z tels que $z_1 \circ f = z_2 \circ f$ alors $z_1 = z_2$ en composant à droite par s.

□

Un autre cas bien connu est le suivant. On renvoie à [Gro63, V, Cor. 5.3] pour la preuve.

1.2.4 Lemme.
Un morphisme fidèlement plat et quasi-compact est un épimorphisme effectif universel.

1.2.5 Lemme.
Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme et $u : Y' \longrightarrow Y$ un épimorphisme effectif. Posons $X' = X \times_Y Y'$, $Y'' = Y' \times_Y Y'$ et $X'' = X \times_Y Y''$.
Supposons en outre que :
(i) $f' : X' \longrightarrow Y'$ est un épimorphisme effectif ;
(ii) $u_X : X' \longrightarrow X$ est un épimorphisme ;
(iii) $f'' : X'' \longrightarrow Y''$ est un épimorphisme.
Alors f est un épimorphisme effectif.

Preuve : On considère le diagramme suivant, dans lequel tous les carrés sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
X' \times_T X' \arrow[u] \arrow[r, shift left, "q_1"] \arrow[r, shift right, "q_2"'] & X' \arrow[u, "u_X"] \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[u, "u"'] \\
 & X'' \arrow[u, shift left, "r_1"] \arrow[u, shift right, "r_2"'] \arrow[r, "f''"] & Y'' \arrow[u, shift left, "s_1"] \arrow[u, shift right, "s_2"']
\end{tikzcd}$$

où l'on a noté $f' : X' \longrightarrow Y'$ et $f'' : X'' \longrightarrow Y''$ les morphismes correspondant aux changements de base de f respectivement par $Y' \longrightarrow Y$ et $Y'' \longrightarrow Y$. Comme $uf' = u_X f$ est un épimorphisme, f est un épimorphisme. Soit Z un schéma et $g : X \longrightarrow Z$ tel que $gp_1 = gp_2$. On a alors $gu_X q_1 = gu_X q_2$. Puisque f' est effectif il existe $h : Y' \longrightarrow Z$ tel que $gu_X = hf'$. De plus comme $gu_X r_1 = gu_X r_2$ on a $hs_1 f'' = hs_2 f''$ et comme f'' est un épimorphisme on a $hs_1 = hs_2$. Comme u est effectif, il existe $k : Y \longrightarrow Z$ tel que $h = ku$. On a alors $gu_X = hf' = kuf' = kfu_X$. Comme u_X est un épimorphisme on a $g = kf$. Ainsi f est un épimorphisme effectif.

□

Lorsqu'on spécialise au cas des morphismes finis, l'équivalence mentionnée dans la quatrième remarque de 1.1.2 devient vraie.

Pour tout S-schéma $f : X \longrightarrow S$ on posera $\mathcal{A}_X = f_*\mathcal{O}_X$.

1.2.6 Lemme.
Soit $f : S' \longrightarrow S$ un morphisme et $S'' = S' \times_S S'$. On considère les assertions :
(i) le morphisme f est un épimorphisme effectif ;
(ii) le diagramme de faisceaux $\mathcal{A}_S \longrightarrow \mathcal{A}_{S'} \rightrightarrows \mathcal{A}_{S'}$ est exact.
Si f est quasi-compact et quasi-séparé, (i) implique (ii). Si f est une submersion, (ii) implique (i).

Preuve :
(i) $\Rightarrow$ (ii) Posons $\mathcal{A} = \mathcal{A}_S$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{S'}$ et $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}_{S''}$. On note $\mathcal{B}$ le noyau de $\mathcal{A}' \rightrightarrows \mathcal{A}''$. D'après 1.1.7, $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est injective. Posons $T = \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{B})$ et $S'_{\mathrm{aff}} = \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}')$. Les morphismes $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}'$ induisent des morphismes de schémas $S' \xrightarrow{\pi} S'_{\mathrm{aff}} \xrightarrow{g} T \xrightarrow{h}$ tels que $f = hg\pi$. Comme $g\pi p_1 = g\pi p_2$ et que f est un épimorphisme effectif, il existe $e : S \longrightarrow T$ tel que $g\pi = ef$. Ainsi $g\pi = ehg\pi$ de sorte que $e^\sharp$ est une section de l'injection $h^\sharp : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ qui est donc un isomorphisme.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Il s'agit de 1.1.3.

$\square$

Donnons à présent l'énoncé de la version précisée du théorème de factorisation en épimorphismes effectifs de Grothendieck annoncé en introduction.

1.2.7 Théorème.
Soit $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme fini. On suppose de plus que Y est noethérien. Alors il existe une unique factorisation de f comme composée d'un nombre fini de morphismes :

$$X \longrightarrow X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow Y$$

vérifiant les propriétés suivantes :
(i) pour tout $i < n$, le morphisme $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ est un épimorphisme effectif fini ;
(ii) pour tout $i < n$, on a un isomorphisme $X_i \times_{X_{i+1}} X_i \simeq X_i \times_Y X_i$.
En particulier f est effectif si et seulement si $n = 1$. Cette factorisation est fonctorielle en f ; on l'appelle la factorisation canonique de f.

1.2.8 Remarque.
La factorisation que l'on obtiendra est fonctorielle, au sens où, étant donnés deux épimorphismes finis $f : X \longrightarrow Y$ et $f' : X' \longrightarrow Y'$ qui s'insèrent dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd},$$

les morphismes α et β induisent des morphismes

$$\begin{tikzcd} X_0 = X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & X_n = Y \arrow[d, "\beta"] \\ X'_0 = X' \arrow[r] & X'_1 \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & X'_n \end{tikzcd}$$

entre chaque cran des factorisations de f et f' en produit d'épimorphismes effectifs, où l'on a fait la convention de compléter la factorisation la plus courte par le morphisme identité pour que les deux factorisations obtenues aient la même longueur.

Preuve :
On introduit la suite de $\mathcal{O}_Y$-algèbres quasi-cohérentes $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :
– On pose $\mathcal{A}_0 = f_*\mathcal{O}_X$.
– Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout ouvert $U \subset Y$ on pose

$$\mathcal{A}_{n+1}(U) = \{a \in \mathcal{A}_n(U) \mid a \otimes 1 = 1 \otimes a \in \mathcal{A}_n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}_n(U)\}$$

Comme f est un épimorphisme, $f^\sharp$ est injective. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a des injections de $\mathcal{O}_Y$-algèbres $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{A}_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{A}_n$. Elles sont finies puisque f l'est.

Le noyau de la surjection $\mathcal{A}_n \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n \otimes_{\mathcal{A}_{n+1}} \mathcal{A}_n$ est engendré localement par les $1 \otimes a - a \otimes 1$ pour $a \in \mathcal{A}_{n+1}$. Par définition il est est donc nul, et l'on a

$$\mathcal{A}_n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}_n \simeq \mathcal{A}_n \otimes_{\mathcal{A}_{n+1}} \mathcal{A}_n.$$

Le diagramme $\mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{A}_n \rightrightarrows \mathcal{A}_n \otimes_{\mathcal{A}_{n+1}} \mathcal{A}_n$ est donc exact. Posons $X_n = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_n)$ (spectre relatif de la $\mathcal{O}_Y$-algèbre quasi-cohérente $\mathcal{A}_n$). D'après le lemme ci-dessus, le morphisme $X_n \longrightarrow X_{n+1}$ correspondant à $\mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{A}_n$ est un épimorphisme effectif.

Montrons que la suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Remarquons tout d'abord que $(\mathcal{A}_n)$ est constante à partir du rang m si et seulement si $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{A}_m$ est un isomorphisme. En effet, si $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1}$ alors la multiplication

$$\mathcal{A}_n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$$

est un isomorphisme. Alors $X_n \longrightarrow Y$ est un monomorphisme. Comme il est schématiquement dominant et fini, d'après [Gro66, 8.11.5], c'est un isomorphisme. Il s'ensuit que $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{A}_n$ est un isomorphisme.

On voit ensuite que l'on peut se ramener au cas où Y est affine. En effet, Y étant noethérien par hypothèses, il existe un recouvrement de Y par un nombre fini d'ouverts affines. Si $Y = \bigcup_{i=1}^{l} U_i$ est un tel recouvrement et si pour tout $1 \leqslant i \leqslant l$ il existe un entier n_i tel que la suite $(\mathcal{A}_{n|U_i})$ est constante à partir du rang n_i, alors la suite $(\mathcal{A}_n)$ est constante à partir du rang $N = \max_i(n_i)$. Dès lors on peut supposer que $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine. Les faisceaux $\mathcal{A}_n$ sont alors déterminés par les A-algèbres de leurs sections globales, que l'on notera A_n.

De plus si en un point $y \in Y$ on dispose d'un isomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \simeq \mathcal{A}_{n,y}$ alors cet isomorphisme s'étend en un isomorphisme $\mathcal{O}_{Y_{|U_y}} \simeq \mathcal{A}_{n,|U_y}$ sur un voisinage U_y de y. Comme Y est noethérien donc quasi-compact, il suffit donc de montrer que pour tout $y \in Y$, la suite $(\mathcal{A}_{n,y})$ est constante à partir d'un certain rang.

Quitte à localiser en l'image d'un point de X on peut donc supposer que A est un anneau local de dimension finie d. On note s le point fermé de Y.

On va raisonner par récurrence sur d.

Si $d = 0$ alors A est noethérien de dimension 0 donc artinien. Comme A_N est fini sur A donc de longueur finie donc artinien et que chaque A_{n+1} est un sous-A-module de A_n, la suite (A_n) est stationnaire.

Soit $d > 0$ et supposons la propriété démontrée pour les schémas possédant une dimension $< d$. Comme $U := Y \setminus \{s\}$ est noethérien, pour montrer que la suite $(\mathcal{A}_{n|U})$ est stationnaire on peut, quitte à le recouvrir par des ouverts affines, supposer qu'il est affine de dimension $d-1$. Par hypothèse de récurrence la suite $(A_{n|U})$ est constante à partir d'un certain rang N. Alors comme noté précédemment, pour tout ouvert $V \subset U$ le morphisme $A_{|V} \longrightarrow A_{N|V}$ est un isomorphisme. On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Comme A est noethérien, $\mathfrak{m}$ admet un système fini de générateurs $(m_1, ..., m_l)$. Soit i un entier entre 1 et l. Posons $M = A_N/A$. On a $D(m_i) \subset U$ donc $A \longrightarrow A_N$ est un isomorphisme après localisation en m_i, c'est-à-dire que $M_{m_i} = 0$. Ainsi tout $x \in M$ est annulé par une puissance de m_i. Comme M est fini, on en déduit qu'il existe un entier n_i tel que pour tout x de M on ait $m_i^{n_i} x = 0$. Si $n = \max_i n_i$ on a donc $m_i^n M = 0$ pour tout i. Par suite on a $\mathfrak{m}^t M = 0$ avec $t = nl + 1$. Ainsi M est un $A/\mathfrak{m}^t$-module fini. Comme $A/\mathfrak{m}^t$ est artinien on en déduit que M est de longueur finie. La suite décroissante $(A_n/A)_{n\geqslant N}$ de sous-modules de A_N/A est donc stationnaire. On en déduit que la suite (A_n) est elle-même stationnaire.

On a donc une factorisation de f sous la forme

$$X \longrightarrow X_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_{N-1} \longrightarrow X_N \simeq Y$$

avec pour tout i, $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ épimorphisme effectif. Cette factorisation est fonctorielle et

$$X_i \times_{X_{i+1}} X_i \simeq X_i \times_Y X_i$$

par construction.

□

1.2.9 Exemple.

Reprenons l'exemple du morphisme de normalisation $f : X \longrightarrow Y$ de la courbe cuspidale d'équation $y^3 = x^4$ donné 1.2.2. Nous allons voir que sa décomposition canonique en produit d'épimorphismes finis effectifs est de longueur $n = 2$, de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y \\ \mathbb{A}^1_k & & \begin{array}{c}\text{singularité}\\ \text{spatiale}\\ y^2 = xz\\ z^2 = x^2y\\ yz = x^3\end{array} & & \begin{array}{c}\text{singularité}\\ \text{planaire}\\ \text{cuspidale}\\ y^3 = x^4\end{array} \end{array}$$

On a $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ avec $A = k[x, y]/(y^3 - x^4)$ et $B = k[t]$, le morphisme $A \to B$ étant donné par $x = t^3$ et $y = t^4$, i.e. $A \simeq k[t^3, t^4] \hookrightarrow k[t]$. On écrit :

$$B \otimes_A B = \frac{k[t_1, t_2]}{(t_1^3 - t_2^3, t_1^4 - t_2^4)}$$

et les deux flèches $B \rightrightarrows B \otimes_A B$ envoient t sur t_1 et t_2 respectivement. L'anneau

$$B_1 = \ker(B \rightrightarrows B \otimes_A B)$$

contient A ainsi que l'élément t^5, puisque $t_1^5 = t_1t_2^4 = t_1t_2t_1^3 = t_1^4t_2 = t_2^5$. Il contient donc $k[t^3, t^4, t^5]$. En observant que l'annulateur de $t_1 - t_2$ dans $B \otimes_A B$ est l'idéal engendré par $t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2$ et $(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2)$, on voit que B_1 ne contient pas d'élément de la forme $at + bt^2$. Ceci montre que $B_1 = k[t^3, t^4, t^5]$. En posant $z = t^5$ on obtient une présentation :

$$B_1 = \frac{k[x, y, z]}{(y^2 - xz, z^2 - x^2y, yz - x^3)}.$$

En particulier B_1 est un $k[x]$-module libre de rang 3 avec pour base $\{1, y, z\}$. Nous allons montrer que l'on a $A = \ker(B_1 \rightrightarrows B_1 \otimes_A B_1)$. On écrit :

$$B_1 \otimes_A B_1 = \frac{k[x, y, z_1, z_2]}{(y^2 - xz_1, z_1^2 - x^2y, yz_1 - x^3, x(z_1 - z_2), y(z_1 - z_2), z_1^2 - z_2^2)}.$$

et les deux flèches $B_1 \rightrightarrows B_1 \otimes_A B_1$ envoient z sur z_1 et z_2 respectivement. Soit $P = a(x) + b(x)y + c(x)z$ un élément de B_1 tel que $P(x, y, z_1) = P(x, y, z_2)$, c'est-à-dire que $c(x)z_1 = c(x)z_2$. Compte tenu de la structure de l'annulateur de $z_1 - z_2$ dans $B_1 \otimes_A B_1$, ceci implique que x divise $c(x)$, donc $P \in k[x, y, xz] = k[x, y] = A$, comme annoncé.

Nous terminons cet exemple par une remarque à propos des hypothèses du théorème 1.2.10 dans ce cas. Il s'agit de souligner le fait suivant : alors que les morphismes $X \longrightarrow X_1 \longrightarrow Y$ induisent des isomorphismes $V \xrightarrow{\sim} V_1 \xrightarrow{\sim} U$ en restriction aux lieux de lissité des trois schémas considérés, l'ouvert $V_1 \times_U V_1$ n'est pas schématiquement dense dans $X_1 \times_Y X_1$. En effet, dans chacune des courbes en question l'ouvert de lissité est l'ouvert $x \neq 0$. Le morphisme de restriction des fonctions de $X_1 \times_Y X_1$ à $V_1 \times_U V_1$ est le morphisme de k-algèbres $B_1 \otimes_A B_1 \to (B_1 \otimes_A B_1)[1/x]$, dont le noyau contient $z_1 - z_2$. Ce phénomène est bien sûr dû à l'apparition au bord de points immergés.

La conjonction de ces résultats permet de montrer le résultat suivant :

1.2.10 Théorème.

Soit Y un schéma noethérien et $f : X \longrightarrow Y$ un épimorphisme fini. Supposons que pour toute factorisation de f en produit $X \xrightarrow{g} E \xrightarrow{h} Y$ de deux morphismes finis schématiquement dominants, les conditions suivantes soient satisfaites :

1. *Le changement de base $g_X : X \times_Y X \longrightarrow X \times_Y E$ de g par f est schématiquement dominant.*
2. *Le changement de base $X \times_Y E \longrightarrow E \times_Y E$ de g par h est schématiquement dominant.*

Alors f est un épimorphisme effectif.

Preuve :

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un tel épimorphisme.

D'après le théorème 1.2.7 on dispose d'une factorisation de f en une suite de morphismes

$$X \longrightarrow X_1 \longrightarrow ... \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow Y$$

avec pour tout i, $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$ épimorphisme effectif. Soit i un entier entre 0 et n et formons le changement de base $X \times_Y X_i \longrightarrow X_i$ de f par $X_i \longrightarrow Y$. Changeant encore de base par $X_{i-1} \longrightarrow X_i$ on voit que $(X \times_Y X_i) \times_{X_i} X_{i-1} \simeq X \times_Y X_{i-1}$

On la donc le diagramme de changements de bases successifs par les X_i :

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
X \times_Y X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
X \times_Y X_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

En particulier on a, pour tout i entre 0 et n, les factorisations $X \longrightarrow X_i \longrightarrow Y$ de f en produit de morphismes finis et schématiquement dominants.

Or la diagonale de f est une section de $X \times_Y X \longrightarrow X$ donc d'après 1.2.3, c'est un épimorphisme effectif. La condition 1. appliquée successivement aux factorisations

$$X \longrightarrow X_i \longrightarrow Y$$

montre que toutes les flèches verticales gauches dans le diagramme ci-dessus sont schématiquement dominantes. Étant finies, ce sont des épimorphismes.

De même en appliquant la condition 2. on trouve que pour tout i le morphisme

$$X_i \times_Y X_i \longrightarrow X_{i+1} \times_Y X_{i+1}$$

est schématiquement dominant. Mais pour tout i on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X_i \times_Y X_i \arrow[r] \arrow[d] & X_i \times_Y X_i \arrow[d] \\ X \times_Y X_{i+1} \times_Y X_{i+1} \arrow[r] & X_{i+1} \times_Y X_{i+1} \end{tikzcd}$$

de sorte que si la flèche horizontale supérieure est schématiquement dominante, alors la flèche horizontale inférieure l'est également. Comme $X \times_Y X \longrightarrow X$ est schématiquement dominant on en déduit que pour tout i, $X \times_Y X_i \times_Y X_i \longrightarrow X_i \times_Y X_i$ est schématiquement dominant, donc un épimorphisme. Mais on a $X_i \times_{X_{i+1}} X_i \simeq X_i \times_Y X_i$ de sorte que, d'après le lemme 1.2.5, si $X \times_Y X_i \longrightarrow X_i$ est un épimorphisme effectif alors $X \times_Y X_{i+1} \longrightarrow X_{i+1}$ aussi. Mais $X \times_Y X \longrightarrow X$ admet une section, la diagonale de f, donc est un épimorphisme effectif d'après 1.2.3. On peut donc utiliser n fois le lemme 1.2.5 pour descendre l'effectivité de $X \times_Y X \longrightarrow X$ à f.

□

1.2.11 Remarque.

On voit qu'il suffit en fait de tester les conditions du théorème pour un nombre fini de factorisations, celles données par 1.2.7.

Chapitre 2

Groupoïdes

Au chapitre suivant, on proposera une définition généralisée de la notion de revêtement, qui fera intervenir la notion de groupoïde agissant. Dans ce chapitre, après avoir mis en place le vocabulaire des schémas en groupoïdes et rappelé le théorème de quotient de Grothendieck sur l'existence du quotient d'un schéma par un groupoïde fini localement libre, nous étudions le problème de la construction du *groupoïde quotient* d'un groupoïde par un sous-groupoïde fini localement libre dans la catégorie des schémas. Le résultat principal du chapitre (théorème 2.5.1) propose deux conditions suffisantes distinctes d'existence pour ce dernier quotient.
Notons que le problème de construire le quotient d'un groupoïde par un sous-groupoïde présente une différence majeure avec le cas du quotient d'un groupe par un sous-groupe. En effet, si $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ est un groupoïde et $\mathcal{H} \rightrightarrows X$ est un sous-groupoïde fini localement libre, on voit que le schéma des flèches $\mathcal{Q}$ du groupoïde quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ doit être construit comme le schéma quotient de $\mathcal{G}$ par le groupoïde produit $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ agissant par pré- et post-composition sur les éléments de $\mathcal{G}$. La différence majeure avec les quotients de groupes est que cette action n'est pas libre en général. Ainsi le schéma $\mathcal{Q}$ ne représente pas à priori un faisceau fppf quotient et on ne sait donc pas décrire ses points.
Dans la définition de revêtements généralisés que nous proposons, le groupoïde qui intervient agit librement sur un ouvert schématiquement dense de son schéma des objets. On est donc principalement intéressé par les groupoïdes dont l'action est génériquement libre. Une conséquence surprenante de cette hypothèse et du fait que les points de $\mathcal{Q}$ ne se décrivent pas par le procédé faisceautique ensembliste habituel est que la condition naturelle de sous-groupoïde distingué, nécessaire à l'existence d'un quotient dans le cas des groupoïdes ensemblistes, ne l'est pas dans le contexte des groupoïdes en schémas. De fait, nous obtenons un théorème de quotient exempt d'une telle hypothèse.

2.1 Rappels et définitions

On commence par rappeler la notion de groupoïde en ensembles. Les définitions suivantes seront ensuite transposées dans le cadre des groupoïdes en schémas.

2.1.1 Définitions.

Un groupoïde est une petite catégorie dont tous les morphismes sont inversibles. Considérons un groupoïde dont on notera X l'ensemble des objets, $\mathcal{G}$ l'ensemble des morphismes, $s, t : \mathcal{G} \longrightarrow X$ les applications source et but, $c : \mathcal{G} \times_{s,t} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ la composition. Il existe une application inverse $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ et une application neutre $e : X \longrightarrow \mathcal{G}$ qui à un objet $x \in X$ associe le morphisme identique id_x. Elles sont déterminées par $(X, \mathcal{G}, s, t, c)$. On

désigne par j le morphisme donné par le couple d'applications (s,t). On notera souvent $j : \mathcal{G} \longrightarrow X \times X$, $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ (ou $\mathcal{G}$ lorsque X est sous-entendu) un groupoïde.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on dira qu'un quintuplet $(X, \mathcal{G}, s, t, c)$ est un $\mathcal{C}$-groupoïde si X et $\mathcal{G}$ sont des objets de $\mathcal{C}$, si s, t, c sont des morphismes dans $\mathcal{G}$ et si pour tout objet T de $\mathcal{C}$, le quintuplet des T-points $(X(T), \mathcal{G}(T), s(T), t(T), c(T))$ est un groupoïde en ensembles.

Un morphisme entre deux groupoïdes $(X, \mathcal{G}, s, t, c)$ et $(X', \mathcal{G}', s', t', c')$ est un foncteur entre les deux catégories qu'ils définissent. Un tel foncteur est déterminé par une application $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ vérifiant la condition de compatibilité $c' \circ (f \times f) = f \circ c'$. Notons qu'alors f induit un morphisme $f_0 : X \longrightarrow X'$ défini pour tout $x \in X$ par $f_0(x) = s'(f(\mathrm{id}_x))$. On a alors $(f_0 \times f_0) \circ j = j' \circ f$.

On utilisera souvent la notation $x \xrightarrow{g} y$ pour signifier que $g \in \mathcal{G}$ est tel que $s(g) = x$ et $t(g) = y$. L'idée sous-jacente à cette notation est que g « relie » x à y.

2.1.2 Exemples.

- Toute relation d'équivalence donne lieu à un groupoïde en ensembles, de la façon suivante :
  Si E est une relation d'équivalence sur A, on obtient un groupoïde (E, A, s, t, c) en posant $s(x,y) = x$, $t(x,y) = y$, $c(x,y,z,x) = (z,y)$.
- Si X est un ensemble et G un groupe agissant sur X on obtient un groupoïde $G \times X \rightrightarrows X$ en posant, pour tout $(g,x) \in G \times X$,
  - $s(g,x) = x$
  - $t(g,x) = g.x$
  - $c((g,x),(g',x')) = (gg',x')$
  - $e(x) = (1_G, x)$
  - $i(g,x) = (g^{-1}, g.x)$.

  Le morphisme j est donné par :

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \times X \\ (g,x) & \mapsto & (x, g.x) \end{array}.$$

  Cet exemple sert d'inspiration pour adapter aux groupoïdes les notions de théorie des groupes. Si $(X, \mathcal{G}, s, t, c)$ est un groupoïde, on pense à $\mathcal{G}$ comme « agissant sur X » et si $x \xrightarrow{g} y$ on notera parfois $y = g.x$. De même si $(g,h) \in \mathcal{G} \times_{s,t} \mathcal{G}$ on notera souvent $gh := c(g,h)$ et $i(g) = g^{-1}$.

Les différentes constructions naturelles (produits, noyaux et à plus forte raison images, quotients, conoyaux) dépendent beaucoup de la catégorie $\mathcal{C}$ dans laquelle on considère les groupoïdes. Nous développons ici le formalisme des groupoïdes dans la catégorie des schémas.

Soit S un schéma et Sch/S la catégorie des schémas au-dessus de S. On appellera S-schéma en groupoïdes ou simplement S-groupoïde les Sch/S-groupoïdes.

On détaille dans ce cadre certaines constructions catégoriques naturelles.

2.1.3 Produits.

Si $(X, \mathcal{G}, s, t, c)$ et $(X, \mathcal{G}', s', t', c')$ sont deux S-groupoïdes on peut définir leur produit $(X, \mathcal{G}'', s'', t'', c'')$ de la façon suivante :

- $\mathcal{G}''$ est donné par le produit fibré $\mathcal{G} \times_{X \times_S X} \mathcal{G}'$.

– Les morphismes source et but sont donnés par $\mathrm{pr}_1 \circ s$ et $\mathrm{pr}_2 \circ t$.
– La composition se fait composante par composante : si $\alpha'' = (\alpha, \alpha')$ et $\beta'' = (\beta, \beta')$ sont dans $\mathcal{G}''$ on pose $\alpha''\beta'' = (\alpha\beta, \alpha'\beta')$ lorsque cela a un sens.

Les deux projections induisent des morphismes de groupoïdes $\mathcal{G}'' \longrightarrow \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'' \longrightarrow \mathcal{G}'$. Le groupoïde $(X, \mathcal{G}'', s'', t'', c'')$ est le produit des groupoïdes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ dans la catégorie $\mathrm{Gpd}\,/X$ des groupoïdes d'objets X. On le notera $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$.

2.1.4 Préimages.

Soient Y, X deux S-schémas et $f : Y \longrightarrow X$ un S-morphisme. Si $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ est un groupoïde sur X on définit la préimage de $\mathcal{G}$ par f de la façon suivante :
– On pose $f^*\mathcal{G} = (Y \times_S Y) \times_{f\times f, X\times_S X} \mathcal{G}$.
– On pose $f^*s(y_1, y_2, g) = y_1$ et $f^*t(y_1, y_2, g) = y_2$.
– La composition est donnée par $f^*c((y_1, y_2, g), (z_1, z_2, h)) = (y_1, z_2, gh)$.

On vérifie que $(Y, f^*\mathcal{G}, f^*s, f^*t, f^*c)$ est un S-groupoïde, on l'appelle la préimage de $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ par f. On la notera souvent $\mathcal{G}_{|Y}$.

2.1.5 Sous-groupoïdes.

Si $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ est un S-groupoïde, on appelle sous-groupoïde (resp. sous-groupoïde fermé, resp. sous-groupoïde ouvert) un S-groupoïde $\mathcal{H} \rightrightarrows X$ muni d'une immersion (resp. immersion fermée, resp. immersion ouverte) $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ qui est un morphisme de groupoïdes. Cela signifie que la structure de groupoïde de $\mathcal{H}$ est induite par celle de $\mathcal{G}$.

2.1.6 Noyaux.

Soit f un morphisme entre deux groupoïdes $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ et $\mathcal{G}' \rightrightarrows X'$. On appelle noyau de f, et l'on note $\ker(f)$ le groupoïde de base X suivant :
– Le schéma des flèches est le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d, "e'"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G}' \end{tikzcd}$$

– Les morphismes source et but sont les composées $\ker f \longrightarrow \mathcal{G} \rightrightarrows X$.
– La composition est induite par celle de $\mathcal{G}$.

Les points de $\ker(f)$ sont les points de $\mathcal{G}$ dont l'image par f est une identité de $\mathcal{G}'$. Notons que e' est une immersion puisque $s \circ e' = \mathrm{id}_{X'}$. Ainsi $\ker(f) \longrightarrow \mathcal{G}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$.

2.1.7 Stabilisateurs.

Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un S-groupoïde. On définit son stabilisateur, que l'on note $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$, par le produit fibré de $\mathcal{G} \longrightarrow X \times_S X$ avec le morphisme diagonal de X :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "\Delta_X"] & X \times_S X \end{tikzcd} .$$

Les points de $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ sont les points de $\mathcal{G}$ dont la source et le but sont égaux. La composition c induit un morphisme $\mathrm{St}_{\mathcal{G}} \times_X \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ qui fait de $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ un X-schéma en groupes. Il s'agit du plus grand sous-groupoïde de $\mathcal{G}$ qui est un X-schéma en groupes.

2.1.8 Sous-groupoïdes distingués.

Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un groupoïde et $\mathcal{H} \rightrightarrows X$ un sous-groupoïde. On dit que $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$ et on note $\mathcal{H} \lhd \mathcal{G}$ si pour tous $h \in \mathrm{St}_{\mathcal{H}}$ et $g \in \mathcal{G}$ on a $ghg^{-1} \in \mathcal{H}$. Notons que la condition $h \in \mathrm{St}_{\mathcal{H}}$ est celle sous laquelle le produit ghg^{-1} est défini. Ainsi la condition $\mathcal{H} \lhd \mathcal{G}$ ne dépend que du stabilisateur de $\mathcal{H}$. En particulier si $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ est trivial alors tout sous-groupoïde de $\mathcal{G}$ est distingué.

Si $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ est donné par l'action d'un S-schéma en groupes G sur X et $\mathcal{H} \rightrightarrows X$ est l'action d'un sous-groupe H de G alors $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$ si et seulement si le stabilisateur H_x est distingué dans G pour tout $x \in X$, au sens habituel de la théorie des groupes.

En particulier pour tout groupe G et tout sous-groupe $H \subset G$, le groupoïde $H \times_S G \rightrightarrows G$ correspondant à l'action de H par translation sur G est toujours distingué dans $G \times_S G \rightrightarrows G$, même lorsque H n'est pas distingué dans G.

Notons également que le stabilisateur d'un groupoïde, muni de la structure induite, forme toujours un sous-groupoïde distingué du groupoïde ambiant.

2.1.9 Exemples. Dans ces exemples, en prévision de la suite, on notera plutôt $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ les groupoïdes.

- *Actions de schémas en groupes.*
  L'exemple 2.1.2 a un exact analogue dans la catégorie Sch/S : on obtient un S-groupoïde $G \times_S Z \rightrightarrows Z$ en faisant agir un S-schéma en groupes G sur un S-schéma Z.

- *Relations d'équivalence.*
  Si X et Y sont des S-schémas on dira qu'un morphisme $j : Y \longrightarrow X \times_S X$ est une S-relation d'équivalence (ou simplement relation d'équivalence) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
  (i) Pour tout S-schéma T, l'image de l'application induite $j(T) : Y(T) \longrightarrow X(T) \times X(T)$ est une relation d'équivalence ensembliste.
  (ii) j est un monomorphisme dans Sch/S.

  Lorsque $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ est donné par l'action d'un S-schéma en groupes G sur Z, j est une S-relation d'équivalence si et seulement si G agit librement sur Z, si et seulement si $\mathrm{St}_{\mathcal{G}} \longrightarrow Z$ est un isomorphisme. On étend cette terminologie au cas général : si $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ est un groupoïde tel que j est un monomorphisme on dira que $\mathcal{G}$ agit librement sur Z.

- *Action sur les flèches par pré- et post-composition.*
  Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un groupoïde et $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ un sous-groupoïde. On peut former un groupoïde

$$(\mathcal{H} \times_Z \mathcal{H}) \times_{(s,s),Z\times_S Z(t,s)} \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}$$

  dont les applications source et but sont données par $s(\varphi, \psi, g) = g$ et $t(\varphi, \psi, g) = \varphi g \psi^{-1}$. Les flèches de ce groupoïde sont donc de la forme

$$(\varphi, \psi, g) : g \longrightarrow \varphi g \psi^{-1}.$$

Deux flèches (φ, ψ, g) et (φ', ψ', g') sont composables si $g = \varphi' g' \psi'^{-1}$, auquel cas leur composée est $(\varphi\varphi', \psi\psi', g')$. Ce groupoïde interviendra dans la formulation de l'énoncé du théorème 2.5.1. On y fera référence comme « le groupoïde $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}$ correspondant à l'action de $\mathcal{H}^2$ sur $\mathcal{G}$ par pré- et post-composition ». Remarquons que l'égalité $g = \varphi g \psi^{-1}$ entraine l'appartenance de φ et ψ au stabilisateur de $\mathcal{H}$. Ainsi si $\mathcal{H}$ agit librement sur Z alors $\mathcal{H}^2$ agit librement sur $\mathcal{G}$.

- *Action sur les paires de flèches composables par pré- et post-composition.*
  Avec les notations de l'exemple précédent, considérons le groupoïde

$$\mathcal{H}^3 \times_{Z^3} (\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}) \rightrightarrows \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G},$$

dont les applications source et but s'écrivent respectivement $s(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$ et $t(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta) = (\lambda\alpha\mu{-}1, \mu\beta\nu^{-1})$. (Par souci de lisibillité, nous avons simplifié la graphie du schéma des flèches du groupoïde, qui est un produit convenablement fibré de manière à assurer la composabilité évidente des flèches qui apparaissent.) Les flèches sont donc de le forme

$$(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \longrightarrow (\lambda\alpha\mu^{-1}, \mu\beta\nu^{-1}).$$

Deux flèches $(\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta)$ et $(\lambda', \mu', \nu', \alpha', \beta')$ sont composables si

$$(\alpha, \beta) = (\lambda'\alpha'\mu'^{-1}, \mu'\beta'\nu'^{-1}),$$

auquel cas leur composée est $(\lambda\lambda', \mu\mu', \nu\nu', \alpha', \beta')$. Ce groupoïde interviendra lui aussi dans le théorème 2.5.1 et on y fera référence comme au « groupoïde $\mathcal{H}^3 \times (\mathcal{G} \times_Z \mathcal{G}) \rightrightarrows \mathcal{G} \times_Z \mathcal{G}$ correspondant à l'action de $\mathcal{H}^3$ par pré- et post-composition simultanée sur les paires de flèches composables de $\mathcal{G}$ ». De même, on constate que si $\mathcal{H}$ agit librement sur Z alors $\mathcal{H}^3$ agit librement sur $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$.

2.2 Quotient catégorique d'un schéma par un groupoïde fini localement libre

2.2.1 Définition.

On dit qu'un S-groupoïde $(X, \mathcal{G}, s, t, c)$ est fini localement libre si le morphisme s (ou, de façon équivalente, t) l'est. On dira que $\mathcal{G}$ est d'ordre n et on notera $o(\mathcal{G}) = n$ (ou $[\mathcal{G} : X] = n$) si $\mathcal{G}$ est fini localement libre et si $\deg(s) = n$.

2.2.2 Lemme.

(1) Si $\mathcal{G}_1 \rightrightarrows X$ et $\mathcal{G}_2 \rightrightarrows X$ sont deux S-groupoïdes finis localement libres alors le groupoïde produit $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ l'est aussi et l'on a $o(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2) = o(\mathcal{G}_1)o(\mathcal{G}_2)$.

(2) Si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de S-schémas et $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ un groupoïde fini localement libre alors $f^*\mathcal{G}$ est aussi fini localement libre et $o(f^*\mathcal{G}) = o(\mathcal{G})$.

Preuve :

(1) On constate que le morphisme $(\mathrm{id}, i_1 \times i_2)$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{G}_1 \times_{X \times_S X} \mathcal{G}_2$ et la diagonale de $\mathcal{G}_1 \times_{s_1,s_2} \mathcal{G}_2 \times_S \mathcal{G}_1 \times_{s_1,s_2} \mathcal{G}_2$ de sorte que $\mathcal{G}_1 \times_{X \times_S X} \mathcal{G}_2$ est fini localement libre d'ordre $\deg(\mathcal{G}_1 \times_{s_1,s_2} \mathcal{G}_2 \longrightarrow X) = o(\mathcal{G}_1)o(\mathcal{G}_2)$.

(2) En effet $\mathcal{G} \times_{s,X} Y \longrightarrow Y$ est fini localement libre de rang $\deg(s) = o(\mathcal{G})$.

□

On rappelle ici la notion de quotient d'un schéma par un groupoïde fini localement libre. Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde fini localement libre. Le morphisme

$$j : \mathcal{G} \longrightarrow Z \times_S Z$$

est une S-pré-relation d'équivalence. Pour tout S-schéma T, on note $\sim_T$ la relation d'équivalence induite sur l'ensemble $Z(T)$.

2.2.3 Théorème. *[Gro11a, Exp V, th. 4.1]*
Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde. On suppose vérifiées les conditions suivantes :
- *$\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ est fini localement libre*
- *Pour tout $z \in Z$, l'ensemble $s(t^{-1}(z))$ (que l'on appellera l'orbite de z) est contenu dans un ouvert affine de Z.*

Alors il existe un conoyau $p : Z \longrightarrow Y$ de la double flèche $\mathcal{G} \longrightarrow Z$ dans la catégorie Sch/S. *On notera parfois $Y = Z/\mathcal{G}$ et on dira que Y est le quotient de Z par l'action de $\mathcal{G}$. Le schéma Y vérifie la propriété universelle du quotient, c'est-à-dire représente le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sch}/S & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ T & \mapsto & \{f \in Z(T) \mid f \circ s = f \circ t\} \end{array}$$

Le morphisme p est ouvert, entier et $(s,t) := j_Y : \mathcal{G} \longrightarrow Z \times_Y Z$ est fini et surjectif. Si $Z = \mathrm{Spec}(A)$ est affine alors Y est aussi affine, égal à $\mathrm{Spec}(B)$, où $B = \{a \in A, \mid s^\sharp(a) = t^\sharp(a)\}$ est le sous-anneau des éléments $\mathcal{G}$-invariants de A.

Si de plus l'action de $\mathcal{G}$ sur Z est libre, alors $p : Z \longrightarrow Y$ est fini localement libre, le morphisme $j_Y = \mathcal{G} \longrightarrow Z \times_Y Z$ est un isomorphisme et Y représente le faisceau fppf quotient $(X/\mathcal{G})_{\mathrm{fppf}}$, faisceautisé pour la topologie fppf du préfaisceau

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sch}/S & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ T & \mapsto & Z(T)/\sim_T \end{array}$$

Enfin dans ce cas la formation du quotient commute au changement de base, c'est-à-dire que pour tout morphisme $Y' \longrightarrow Y$, le schéma Y' est le conoyau du groupoïde $\mathcal{G}_{|Z \times_Y Y'}$ défini ci-dessus.

2.2.4 Remarques.
(i) Si on accepte de travailler avec des espaces algébriques plutôt qu'avec des schémas, on peut se passer de la condition portant sur les orbites des points de Z. On renvoie à [Ryd13, Th. 5.3] pour un énoncé détaillé. Cette hypothèse sera souvent sous-entendue.
(ii) Lorsque $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ n'agit pas librement, le faisceau fppf quotient $(Z/\mathcal{G})_{\mathrm{fppf}}$ peut ne pas être représentable. On dira parfois que $Z/\mathcal{G}$ est le quotient schématique de Z par $\mathcal{G}$.
(iii) *Théorème de Lagrange pour les schémas en groupoïdes.*
Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde et $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ un sous-groupoïde. Considérons le groupoïde

$$\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{G}$$

dont les flèches sont de la forme $g \xrightarrow{(g,h)} gh$, c'est-à-dire l'action de $\mathcal{H}$ à droite sur $\mathcal{G}$. Il s'agit d'une action libre. Si $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ et $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ sont finis localement libres à orbites contenues dans des ouverts affines alors le théorème précédent s'applique et

on dispose du schéma quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Le morphisme but $t : \mathcal{G} \longrightarrow Z$ étant invariant pour l'action de $\mathcal{H}$, il se factorise par $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "t"'] & \mathcal{G}/\mathcal{H} \arrow[dl, "t'"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Comme p est fini localement libre par le théorème précédent, le critère de platitude par fibres assure que t' est plat. On a alors $\deg(t) = \deg(p)\deg(t')$. Or $\deg(p) = [\mathcal{H} : Z]$ et $\deg(t') = [\mathcal{G}/\mathcal{H} : Z]$ donc

$$[\mathcal{G} : Z] = [\mathcal{G}/\mathcal{H} : Z][\mathcal{H} : Z].$$

Ainsi l'ordre de $\mathcal{H}$ divise l'ordre de $\mathcal{G}$.

2.2.5 Exemples. Reprenons les deux derniers exemples de 2.1.9. Avec les notations précédentes, supposons que $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ soit fini, localement libre et agisse de telle sorte que ses orbites soient contenues dans des ouverts affines de Z.

- On constate qu'alors le groupoïde $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}$ correspondant à l'action de $\mathcal{H}$ par pré- et post-composition sur $\mathcal{G}$ est également fini localement libre. En effet, le morphisme source s' de $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{G}$ est le changement de base par $\mathcal{G} \xrightarrow{s} Z$ du carré du morphisme source de $\mathcal{H}$, selon le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^2 \times \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^2 \arrow[d, "(s,s)"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

  Comme t' et s' sont échangés par l'inversion, on en déduit que $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}$ est également fini et localement libre. Ainsi, si l'on suppose que ses orbites sont incluses dans des ouverts affines de $\mathcal{G}$, on dispose du schéma quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, que l'on notera $\mathcal{Q}$.
- On voit de même que si $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est fini localement libre alors $\mathcal{H}^3 \times \mathcal{G} \times_Z \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G} \times_Z \mathcal{G}$ est aussi fini localement libre. Si l'on suppose que ses orbites sont contenues dans des ouverts affines de $\mathcal{G} \times_Z \mathcal{G}$, on dispose également du schéma quotient de $\mathcal{G} \times_Z \mathcal{G}$ par ce groupoïde, que l'on notera $\mathcal{G} \times_Z \mathcal{G}/\mathcal{H}^3$.

2.3 Quotient dans la catégorie des S-schémas affines

Il existe une notion plus faible de quotient d'un schéma par un groupoïde qui ne nécessite aucune hypothèse : le quotient dans la catégorie des schémas affines sur S. Nous détaillons cette construction.

On aura besoin de la notion d'enveloppe affine d'un schéma, que l'on introduit maintenant.

Soit Z un S-schéma quasi-compact et quasi-séparé. On cherche à construire un schéma Z_{aff}, affine sur S et tel que, pour tout schéma Y affine sur S, on ait

$$\mathrm{Hom}_S(Z, Y) \simeq \mathrm{Hom}_S(Z_{\text{aff}}, Y).$$

Si $f : Z \longrightarrow S$ est un S-schéma quasi-compact et quasi-séparé alors $f_*\mathcal{O}_Z$ est une sous-$\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente, que l'on notera plus simplement $\mathcal{A}_Z$. Nous pouvons alors donner la définition suivante :

2.3.1 Définition.

Soit $f : Z \longrightarrow S$ un S-schéma quasi-compact et quasi-séparé. On définit l'enveloppe affine de Z, que l'on note Z_{aff}, comme le S-schéma affine $\text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}_Z)$, où $\mathcal{A}_Z$ est la $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente construite ci-dessus. Cette construction est fonctorielle en X et on a un morphisme canonique $Z \longrightarrow Z_{\text{aff}}$ correspondant à l'inclusion $\mathcal{A}_Z(Z) \hookrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$.

Alors Z_{aff} vérifie la propriété universelle voulue :

Pour tout S-schéma T affine sur S, l'application

$$\text{Hom}_S(Z, T) \longrightarrow \text{Hom}_S(Z_{\text{aff}}, T)$$

est un isomorphisme. C'est une conséquence directe de [Gro61, prop.1.2.7]

Nous allons utiliser cette construction pour construire le quotient d'un S-schéma par un groupoïde dans la catégorie des S-schémas affines.

Soit Z un S-schéma quasi-compact et quasi-séparé et $(s, t) : \mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde agissant sur Z. On dispose des S-schémas affines $\mathcal{G}_{\text{aff}} = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}_\mathcal{G})$ et $Z_{\text{aff}} = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}_Z)$. Les flèches s et t induisent des morphismes $(s^\sharp, t^\sharp) : \mathcal{A}_Z \rightrightarrows \mathcal{A}_\mathcal{G}$. Notons $\mathcal{A}_0 = \ker(\mathcal{A}_Z \rightrightarrows \mathcal{A}_\mathcal{G})$ leur égalisateur. L'égalisateur d'un couple de morphismes de $\mathcal{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes est encore quasi-cohérent. Posons $Y = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}_0)$.

2.3.2 Proposition.

Le schéma Y vérifie la propriété universelle suivante :

Tout morphisme $\mathcal{G}$-invariant $Z \longrightarrow T$ vers un S-schéma affine se factorise de façon unique par Y.

Preuve : C'est une conséquence immédiate des constructions ci-dessus.

En effet, soit $f : Z \longrightarrow T$ un morphisme $\mathcal{G}$-invariant vers un S-schéma affine $T = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_T)$. Par construction, f se factorise par $f_{\text{aff}} : Z_{\text{aff}} \longrightarrow T$. Ce morphisme est également $\mathcal{G}$-invariant donc l'image de $f_{\text{aff}}^\sharp : \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{A}_Z$ est contenue dans $\mathcal{A}_0$, de sorte que f_{aff} se factorise par $Y = \text{Spec}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}_0)$. Par suite f se factorise par Y.

L'unicité est immédiate car les morphismes $Z \longrightarrow Z_{\text{aff}}$ et $Z_{\text{aff}} \longrightarrow Y$ sont des épimorphismes. En effet un morphisme de schémas $U \longrightarrow V$ dont le but est affine est un épimorphisme si et seulement si $\mathcal{O}_V(V) \longrightarrow \mathcal{O}_U(U)$ est injective.

□

En d'autres termes, Y est un quotient de Z par $\mathcal{G}$ dans la catégorie des schémas affines sur S.

2.3.3 Remarque.

On n'a donc besoin d'aucune hypothèse pour construire le quotient d'un S-schéma par un groupoïde quasi-compact et quasi-séparé dans la catégorie des schémas affines.

Cependant il s'agit d'un notion très faible de quotient. On ne peut rien dire en général sur la géométrie de Y et le morphisme $Z \longrightarrow Y$. En particulier ce dernier n'est pas en général un quotient de Z dans la catégorie des tous les S-schémas : on ne peut pas étendre la propriété universelle du quotient aux morphismes $\mathcal{G}$-invariants vers les S-schémas non affines.

2.4 Homogénéité des orbites et morphisme j

Dans cette section, on s'intéresse à diverses notions de transitivité sur les orbites pour l'action d'un groupoïde. Nous reprendrons certaines de ces notions pour énoncer notre théorème de quotient dans la section suivante.

Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un groupoïde fini, localement libre et à orbites contenues dans des ouverts affines. Par définition, pour tout S-schéma V et tout morphisme $\mathcal{G}$-invariant $Z \longrightarrow V$, on dispose d'un morphisme

$$j_V = (s,t) : \mathcal{G} \longrightarrow Z \times_V Z.$$

Si $Y = Z/\mathcal{G}$ est le quotient du groupoïde, les qualités d'épimorphicité du morphisme j_Y mesurent le degré d'homogénéité des orbites de l'action de $\mathcal{G}$. Rappelons par exemple que j_Y est un isomorphisme si et seulement si l'action de $\mathcal{G}$ sur Z est libre, si et seulement si j_Y est un épimorphisme. On sait, d'après 2.2.3, que j_Y est fini et surjectif. Ainsi, d'après 1.1.9 c'est un épimorphisme si et seulement s'il est schématiquement dominant. L'exemple suivant montre que ce n'est pas toujours le cas.

2.4.1 Exemple. On considère un anneau k, le point épais $Z = \mathrm{Spec}(k[x]/(x^4))$, et le groupe $G = \mu_{3,k} = \mathrm{Spec}(k[z]/(z^3-1))$ agissant sur Z par $x \mapsto zx$. Le quotient est le schéma $Y = \mathrm{Spec}(k[y]/(y^2))$ avec $y = z^3$, et on a $Z \times_Y Z = \mathrm{Spec}(k[x_1,x_2]/(x_1^4, x_2^4, x_1^3 - x_2^3))$. Le morphisme $j_Y : G \times Z \to Z \times_Y Z$ est donné par le morphisme de k-algèbres $k[x_1,x_2]/(x_1^4, x_2^4, x_1^3 - x_2^3) \to k[x,z]/(x^4, z^3)$ tel que $x_1 \mapsto x$ et $x_2 \mapsto zx$. L'élément $(x_1x_2)^2$ est non nul et est envoyé sur $z^2x^4 = 0$, donc $j_Y^\sharp$ n'est pas injectif et j_Y n'est pas schématiquement dominant.

En général, même en considérant des cas à priori moins pathologiques que l'exemple précédent, notamment en partant de groupoïdes agissant sur un schéma de base Z réduit, des nilpotents peuvent apparaître dans les anneaux de fonctions des produits fibrés du type $Z \times_Y Z$, en particulier lorsque $Z \longrightarrow Y$ est inséparable et il n'est pas aisé de décider si le morphisme j_Y est schématiquement dominant. On est alors amené à distinguer les groupoïdes pour lesquels le morphisme j_Y possède de bonnes propriétés.

2.4.2 Définition.
Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un groupoïde fini localement libre à orbites contenues dans ouverts affines et $Y = Z/\mathcal{G}$ le quotient. On dit que $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ est *correct* si le morphisme $j_Y : \mathcal{G} \longrightarrow Z \times_Y Z$ est un épimorphisme, i.e. est schématiquement dominant. On dit que $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ est *raisonnable* si le morphisme j_Y est un épimorphisme effectif.

Ainsi si $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ est un groupoïde correct, le morphisme de quotient $Z \longrightarrow Y$ est $\mathcal{G}$-invariant, est un épimorphisme effectif, et j_Y est un épimorphisme. Réciproquement, le lemme suivant montre que ces trois propriétés caractérisent le quotient.

2.4.3 Lemme. *Soit $Z \to V$ un morphisme $\mathcal{G}$-invariant qui est un épimorphisme effectif et tel que $j_V : \mathcal{G} \to Z \times_V Z$ est un épimorphisme. Alors $Z \to V$ identifie V au quotient de Z par $\mathcal{G}$, i.e. le morphisme $Z/\mathcal{G} \to V$ est un isomorphisme.*

Preuve : Il suffit de montrer que $Z \longrightarrow V$ vérifie la propriété universelle du quotient de Z par $\mathcal{G}$, c'est-à-dire que tout morphisme $\mathcal{G}$-invariant $f : Z \to W$ se factorise de manière unique par $Z \to V$. Par hypothèse, ce dernier morphisme est un épimorphisme effectif. Pour montrer que f se factorise par $Z \longrightarrow V$, Il suffit donc de montrer que $f \circ \mathrm{pr}_1 = f \circ \mathrm{pr}_2$, où $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : Z \times_V Z \to Z$ sont les deux projections. Comme par hypothèses j_V est un

épimorphisme, il suffit de montrer que $f \circ \mathrm{pr}_1 \circ j_V = f \circ \mathrm{pr}_2 \circ j_V$. Or cette dernière égalité n'est rien d'autre que l'égalité $f \circ s = f \circ t$ qui est vérifiée lorsque f est $\mathcal{G}$-invariant. $\square$

Dans la section suivante, étant donné un groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$, on sera amené à déterminer les flèches de $\mathcal{G}$ invariantes sous l'action de son stabilisateur par multiplication à gauche. Le prochain lemme répond à cette question dans le cas des groupoïdes raisonnables.

2.4.4 Lemme.
Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un groupoïde fini localement libre raisonnable, à orbites contenues dans des ouverts affines. Soit $Y = Z/\mathcal{G}$. Alors le quotient de $\mathcal{G}$ par l'action à gauche de son stabilisateur dans la catégorie des schémas affines est $Z \times_Y Z$, c'est-à-dire que l'on a l'égalité d'algèbres de fonctions $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} \simeq \mathcal{O}_{Z \times_Y Z}$.

Preuve :
En effet, remarquons que l'on a l'isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathcal{G} \times_{Z \times_Y Z} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \times_{s,Z,s} \mathcal{G} \\ & (g_1, g_2) & \mapsto & (g_1, g_1 g_2^{-1}) \end{array}$$

Ainsi, si $f : \mathcal{G} \longrightarrow T$ est un morphisme de schémas avec T affine, le diagramme

$$\mathrm{St}_{\mathcal{G}} \times_{s,Z,s} \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G} \xrightarrow{f} T$$

est exact si et seulement si le diagramme

$$\mathcal{G} \times_{Z \times_Y Z} \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G} \xrightarrow{f} T$$

l'est. Par hypothèse, $j_Y : \mathcal{G} \longrightarrow Z \times_Y Z$ est un épimorphisme effectif donc le diagramme ci-dessus est exact si et seulement si f se factorise par j_Y. On voit donc que dans ce cas $Z \times_Y Z$ vérifie la propriété du quotient de $\mathcal{G}$ par l'action à gauche de son stabilisateur dans la catégorie des schémas affines.

$\square$

En résumé, on a la chaîne d'implications, toutes strictes,

groupoïde agissant librement $\Rightarrow$ groupoïde raisonnable $\Rightarrow$ groupoïde correct $\Rightarrow$ groupoïde quelconque.

2.5 Quotient d'un groupoïde par un sous-groupoïde

Étant donnés un S-groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ et un sous-groupoïde $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$, on souhaite construire un quotient $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ de $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ par $\mathcal{H}$ dans la catégorie des S-groupoïdes.

On se place dans les conditions d'application du théorème 2.2.3 : on suppose que $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est fini localement libre, à orbites contenues dans des ouverts affines.

Le schéma pressenti pour être le schéma des objets du groupoïde que l'on cherche à construire est le schéma quotient $Y = Z/\mathcal{H}$, quotient schématique de Z par $\mathcal{H}$ dont l'existence est garantie par le théorème 2.2.3.

Le candidat naturel pour être le schéma des objets est le schéma $\mathcal{Q} = \mathcal{G}/\mathcal{H}^2$, quotient de $\mathcal{G}$ par le groupoïde $\mathcal{H}^2 \times \mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}$ correspondant à l'action de $\mathcal{H}^2$ sur $\mathcal{G}$ par pré- et post-composition, décrit dans l'exemple 2.1.9. Il est facile de trouver les applications $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ destinées à devenir les applications source et but du groupoïde que l'on cherche à construire.

La difficulté est bien sûr de montrer que l'on peut munir $\mathcal{Q}$ d'une loi de composition qui s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \arrow[r, "c"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q} \arrow[r, "\bar{c}"] & \mathcal{Q} \end{tikzcd}$$

Nous y parviendrons dans deux situations distinctes. Dans la première, on supposera que le morphisme

$$p \times p : \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$$

induit par la projection canonique $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est un isomorphisme et on exploitera le fait que l'action de $\mathcal{H}$ sur Z est libre sur un ouvert schématiquement dense. Dans la seconde situation, on fera l'hypothèse que $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est raisonnable.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème de quotient.

2.5.1 Théorème. *Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde et $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ un sous-groupoïde fini et localement libre de $\mathcal{G}$ agissant librement sur un ouvert schématiquement dense de Z, avec des orbites contenues dans des ouverts affines. Soit Y le quotient de $\mathcal{G}$ par l'action de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{Q}$ le quotient de $\mathcal{G}$ par l'action de $\mathcal{H}^2$ par pré- et post-composition. On note $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ le morphisme de quotient. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) Le morphisme $\theta : \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}/\mathcal{H}^3 \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$ induit par $p \times p$ est un isomorphisme.

(ii) Les groupoïdes $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ sont donnés par l'action de groupes finis constants et le groupoïde $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$.

(iii) Le morphisme $\mathcal{Q} \longrightarrow Y$ est plat et le groupoïde $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est raisonnable et distingué dans $\mathcal{G}$.

Alors on peut munir $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ d'une structure de groupoïde qui en fait un quotient de $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ par $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ dans la catégorie des schémas en groupoïdes, c'est-à-dire qui vérifie la propriété universelle suivante :

Un morphisme de S-groupoïdes $(\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{T} \rightrightarrows T)$ se factorise par $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ si et seulement si son noyau est contenu dans $\mathcal{H}$.

Enfin, dans les cas (ii) et (iii), le groupoïde $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ est fini et localement libre.

2.5.2 Remarques.

1) On est dans la situation (i) notamment lorsque les morphismes

$$p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

et

$$p \times p : \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$$

sont plats.

Soit $U \subset Z$ un ouvert schématiquement dense au-dessus duquel $\mathcal{G}$, donc $\mathcal{H}$, agissent librement. Par platitude, la préimage de U dans $\mathcal{G}$ est schématiquement dense. Notons-la W. Encore par platitude, l'image $p(W)$ de W dans $\mathcal{Q}$ est un ouvert schématiquement dense qui représente le faisceau fppf quotient de W par $\mathcal{G}'$.

Si $p \times p$ est plat, on peut se placer en un point d'un ouvert schématiquement dense de $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$ sur lequel l'action est libre pour calculer son degré, donc supposer que $\mathcal{Q}$ représente le faisceau fppf quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G}'$. Soit alors $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ un point de

$\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$. Deux points (α, β) et (α', β') de $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$ relèvent $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ si et seulement si fppf localement il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathcal{H}^3$ tel que $(\alpha', \beta') = (\lambda\alpha\mu^{-1}, \mu\beta\nu^{-1})$. On voit donc que le degré de $p \times p$ est $o(\mathcal{H})^3$.

Ainsi $p \times p$ est fidèlement plat, $\mathcal{H}^3 \times \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$-invariant et de même ordre que ce groupoïde. On sait, d'après 3.1.1.3 que cela implique que $(\mathcal{G} \times_Z \mathcal{G})/\mathcal{H}^3$ s'identifie à $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$.

En particulier, si $\mathcal{G}$ est donné par l'action d'un S-schéma en groupes G fini localement libre et si $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est donné par l'action d'un sous-groupe distingué H de G de telle sorte que $Z \longrightarrow Y = Z/H$ soit plat, alors la condition (i) du théorème est vérifiée. En effet, démontrons que dans ce cas on a $\mathcal{Q} = G/H \times_S Y$. On va montrer que $\mathcal{Q}$ et $G/H \times_S Y$ vérifient la même propriété universelle. Explicitons l'action de $\mathcal{H}^2$ sur $\mathcal{G}$ dans ce cas. Elle s'écrit $(h, k).(g, z) = (hgk^{-1}, kz)$. Comme H est distingué dans G, la flèche

$$G \times_S Z \longrightarrow G/H \times_S Y$$

induite par les deux projections canoniques est $\mathcal{H}^2$-invariante.
Soit un morphisme $f : G \times_S Z \longrightarrow T$ tel que le diagramme

$$\mathcal{H}^2 \times (G \times_S Z) \rightrightarrows (G \times_S Z) \xrightarrow{f} T$$

soit exact. Soient h et k deux points de H. Alors pour tout point (g, z) de $G \times_S Z$ on a $(hg, kz) = ((hgkg^{-1})gk^{-1}, kz)$. Or comme H est distingué dans G on voit que $h' := hgkg^{-1}$ est encore un point de H. Ainsi $(hg, kz) = (h', k).(g, z)$. De plus le quotient de $G \times_S Z$ par l'action de $H \times_S H$ définie sur les points par $(h, k).(g, z) = (hg, k.z)$ est $G/H \times_S Y$. En effet $H \times_S G \longrightarrow S$ est plat donc la formation du quotient de Z par H commute au changement de base par G. Ainsi le quotient de $G \times_S Z$ par l'action de H sur le deuxième facteur est $G \times_S Y$. De plus l'action de H sur G est libre donc la formation du quotient $G/H \longrightarrow S$ commute à tout changement de base. Donc le quotient de $G \times_S Y$ par l'action de H sur le premier facteur est $G/H \times_S Y$. On en déduit que le quotient de $G \times_S Z$ par l'action produit de H^2 est bien $G/H \times_S Y$. Ainsi, puisque le morphisme f est invariant pour cette action, il se factorise par $G/H \times_S Y$. On voit donc que le morphisme $G \times_S Z \longrightarrow G/H \times_S Y$ est $\mathcal{H}^2$-invariant et vérifie la propriété universelle du quotient de $G \times_S Z$ par l'action de $\mathcal{H}^2$, d'où la conclusion. On a donc $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} = G \times_S G \times_S Z$ et $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q} = G/H \times_S G/H \times_S Y$. Ainsi $p \times p$ n'est autre que le produit au-dessus de S de deux copies du morphisme de quotient $G \longrightarrow G/H$ avec $Z \longrightarrow Y$. On voit donc que $p \times p$ est plat.

2) On rappelle que les actions de $\mathcal{H}^2$ et $\mathcal{H}^3$ sur $\mathcal{G}$ sont libres si $\mathrm{St}_{\mathcal{H}}$ est trivial, cf. 2.1.9. on utilisera ce fait dans la démonstration.

Preuve :

(i) Supposons que le morphisme $\theta : (\mathcal{G} \times_Z \mathcal{G})/\mathcal{H}^3 \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$ soit un isomorphisme. On constate que la composition $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \xrightarrow{c} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est $(\mathcal{H}^3 \times \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G})$-invariante. Par hypothèse elle se factorise par $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Z,\tau} \mathcal{Q}$. On note $\bar{c}$ le morphisme obtenu. On a alors le diagramme commutatif recherché.

Vérifions que $\bar{c}$ définit bien une structure de groupoïde $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ et que p induit un morphisme de groupoïdes $(\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$:

La flèche $Z \xrightarrow{e} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{H}$-invariante donc induit une flèche $Y \xrightarrow{\bar{e}} \mathcal{Q}$. De même $\mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{G}'$-invariante donc induit un morphisme $\bar{i} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$.

Les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \arrow[r, "c"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] & Z \arrow[l, "e"'] \arrow[d] \\ \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q} \arrow[r, "\bar{c}"] & \mathcal{Q} & Y \arrow[l, "\bar{e}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathcal{Q} \arrow[r, "\bar{i}"] & \mathcal{Q} \end{tikzcd}$$

sont donc commutatifs. Il en découle immédiatement que $(Y, \mathcal{Q}, \sigma, \tau, \bar{c})$ est un groupoïde et que $\bar{e}$ et $\bar{i}$ en sont respectivement la section neutre et le morphisme d'inversion.

(ii) Pour tout schéma X, on notera $X_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ le schéma local de X en un point x. Fixons des points $g \in G$ et $z \in Z$. Notons $\mathcal{O}^{sh}_{Z,z}$ le hensélisé strict de l'anneau $\mathcal{O}_{Z,z}$. Comme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{sh}_{Z,z}) \longrightarrow Z_z$ est fidèlement plat, par descente on peut supposer, ce que l'on fera par la suite, que $\mathcal{O}_{Z,z}$ est strictement hensélien. Notons q l'image de (g, z) dans $\mathcal{Q}$ et y l'image de z dans Y. Notons $H_z = \{h \in H, hz = z\}$ le stabilisateur de z ; le morphisme $Z_z \to Y_y$ s'identifie au quotient $Z_z \to Z_z/H_z$, car Z_z est le spectre d'un anneau strictement hensélien, donc n'a pas d'extension étale non triviale et H_z s'identifie alors au groupe d'inertie en z. Le groupe $H \times H$ agit sur $\mathcal{G} = G \times Z$ par $(\lambda, \mu).(g, z) = (\lambda g \mu^{-1}, \mu z)$, de sorte que le stabilisateur de (g, z) est le sous-groupe :

$$\Gamma = \{(g\mu g^{-1}, \mu) \in H \times H;\ \mu \in H_z \cap g^{-1} H_z g\}$$

qui est isomorphe à $K_{(g,z)} := H_z \cap g^{-1} H_z g$. Le schéma local de $\mathcal{G}$ en (g, z) est $\{g\} \times Z_z$, et l'action de Γ dessus se fait par l'action de $K_{(g,z)}$ sur Z_z. Ainsi le morphisme $\mathcal{G}_{(g,z)} \to \mathcal{Q}_q$ s'identifie au quotient $Z_z \to Z_z/K_{(g,z)}$ et le morphisme $\sigma : \mathcal{Q}_q \to Y_y$ s'identifie à $Z_z/K_{(g,z)} \to Z_z/H_z$. Sous l'hypothèse que $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$, on a $K_{(g,z)} = H_z$ et $\sigma : \mathcal{Q}_q \to Y_y$ est un isomorphisme. En particulier $\sigma : \mathcal{Q} \to Y$ est localement libre, de même que $\tau = \sigma \bar{i} : \mathcal{Q} \to Y$.

D'après (i), pour conclure il suffit de montrer que $\theta : \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}/\mathcal{H}^3 \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$ est un isomorphisme. Notons $V \subset Z$ l'ouvert maximal (schématiquement dense) sur lequel $\mathcal{G}$ agit librement, $U \subset Y$ son image par $Z \longrightarrow Y$, et $U' \subset \mathcal{Q}$ sa préimage dans $\mathcal{Q}$ par σ ou τ (qui sont égales). Comme $\sigma, \tau : \mathcal{Q} \to Y$ sont plates, l'ouvert $U' \times_{\sigma,U,\tau} U'$ est schématiquement dense dans $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$. Il s'ensuit que θ est schématiquement birationnel. Nous allons voir que de plus, c'est un isomorphisme sur les schémas locaux. Notons $((g_1, z_1), (g_2, z_2))$, avec $z_1 = g_2 z_2$, un point de $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$. Soit (q_1, q_2) son image dans $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$, avec $\sigma(q_1) = \tau(q_2)$. Nous utiliserons les notations simplifiées $H_i = H_{z_i}$ et $K_i = K_{(g_i,z_i)} = H_i \cap g_i^{-1} H_i g_i$, et $Z_i = Z_{z_i}$, pour $i = 1, 2$. Le groupe H^3 agit sur $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} = G \times G \times Z$ par $(\lambda, \mu, \nu).(g, g', z) = (\lambda g \mu^{-1}, \mu g' \nu^{-1}, \nu z)$. On voit que le stabilisateur de $((g_1, z_1), (g_2, z_2))$, identifié à (g_1, g_2, z_2), est le groupe

$$\Delta = \left\{(g_1 g_2 \nu (g_1 g_2)^{-1}, g_2 \nu g_2^{-1}, \nu) \in H^3;\ \nu \in H_2 \cap g_2^{-1} H_2 g_2 \cap (g_1 g_2)^{-1} H_2 g_1 g_2\right\}$$

qui est isomorphe à $L_{12} := H_2 \cap g_2^{-1} H_2 g_2 \cap (g_1 g_2)^{-1} H_2 g_1 g_2$. Le schéma local de $\mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$ en le point $((g_1, z_1), (g_2, z_2))$ s'identifie à Z_2, et l'action de Δ dessus s'identifie à l'action de L_{12} sur Z_2. Compte tenu de la description précédente des morphismes $\mathcal{G} \to \mathcal{Q}$ et $\sigma, \tau : \mathcal{Q} \to Y$, on voit que le morphisme θ s'identifie sur les anneaux locaux au morphisme

$$Z_2/L_{12} \longrightarrow Z_1/K_1 \times_{\mathrm{can}, Z_1/H_1, g_2} Z_2/K_2.$$

Sous l'hypothèse que $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$, on a $H_1 = H_2 = K_1 = K_2 = L_{12}$. Alors le morphisme précédent est isomorphe à l'identité $Z_2/H_2 \to Z_2/H_2$, donc est

un isomorphisme, comme désiré. Finalement θ est un morphisme fini, plat, schématiquement birationnel, donc c'est un isomorphisme.

(iii) On suppose maintenant que $\mathcal{H}$ est raisonnable et distingué dans $\mathcal{G}$.

On introduit le groupoïde $\mathcal{G}_2 \rightrightarrows \mathcal{G}_1$ défini de la manière suivante :

- $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{H} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$ est l'ensemble des triplets (α, φ, β) composables.
- $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{H} \times (\mathrm{St}_{\mathcal{H}} \rtimes \mathcal{H}) \times \mathcal{H}^2) \times \mathcal{G}_1$
  est l'ensemble des octuplets $(\kappa, \lambda, \chi, \mu, \nu, \alpha, \varphi, \beta)$ avec $(\kappa, \mu, \nu) \in \mathcal{H}^3$, $(\chi, \lambda) \in \mathrm{St}_{\mathcal{H}} \rtimes \mathcal{H}$ et $(\alpha, \varphi, \beta) \in \mathcal{G}_1$ vérifiant les relations de composabilité requises pour que ce qui va suivre ait du sens.
- Les flèches sont de la forme $(\alpha, \varphi, \beta) \longrightarrow (\kappa\alpha\lambda^{-1}, \lambda\chi\varphi\mu^{-1}, \mu\beta\nu^{-1})$, selon le dessin suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r, "\beta"] & y \arrow[d, bend right, "\mu"'] & y \arrow[r, "\varphi"] & z \arrow[r, "\chi"] & z \arrow[d, bend right, "\lambda"'] & z \arrow[r, "\alpha"] & t \arrow[d, bend right, "\kappa"'] \\
x' \arrow[ur, bend left, "\nu^{-1}"] & & y' \arrow[u, bend right, "\mu^{-1}"'] & & & z' \arrow[u, bend right, "\lambda^{-1}"'] & & t'
\end{tikzcd}$$

Afin d'alléger les notations, on a omis les conditions de composabilité dans la définition de $\mathcal{G}_2$.
La composition est définie pour $\theta_i = (\kappa_i, \lambda_i, \chi_i, \mu_i, \nu_i, \alpha_i, \varphi_i, \beta_i)_{i=1,2}$ tels que $(\alpha_1, \beta_1, \varphi_1) = (\kappa_2\alpha_2\lambda_2^{-1}, \lambda_2\chi_2\varphi_2\mu_2^{-1}, \mu_2\beta_2\nu_2^{-1})$ par

$$\theta_1\theta_2 = (\kappa_1\kappa_2, \lambda_1\lambda_2, \chi_1^{\lambda_2}\chi_2, \mu_1\mu_2, \nu_1\nu_2, \alpha_2, \varphi_2, \beta_2),$$

où l'on a posé, pour $(\chi, \lambda) \in \mathrm{St}_{\mathcal{H}} \times_{s,Z,t} \mathcal{H}$, $\chi^\lambda = \lambda^{-1}\chi\lambda$.

On désigne par $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ le quotient du groupoïde $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ dans la catégorie des schémas affines sur Y, cf. 2.3. Il convient de noter que, le stabilisateur $\mathrm{St}_{\mathcal{H}}$ étant à priori non plat, l'existence d'un quotient dans la catégorie des Y-schémas n'est pas garantie. Cependant comme tous les schémas qui interviennent ici sont finis, donc affines, sur Y, la notion faible de 2.3 sera suffisante ici.

Notons $\bar{\alpha}$ l'image d'un élément $\alpha \in \mathcal{G}$ dans $\mathcal{Q}$. Le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \longrightarrow & \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q} \\ (\alpha, \varphi, \beta) & \mapsto & (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \end{array}$$

est $\mathcal{G}_2$-invariant vers un Y-schéma affine, donc se factorise par une flèche

$$\gamma : \mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}.$$

On va voir en 2.5.3 que si $\mathcal{H}$ est raisonnable alors γ est un isomorphisme. Supposons ceci acquis. Remarquons que le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \bar{c}' : & \mathcal{G}_1 & \longrightarrow & \mathcal{Q} \\ & (\alpha, \varphi, \beta) & \mapsto & \overline{\alpha\varphi\beta} \end{array}$$

est $\mathcal{G}_2$-invariant. En effet, soit $(\kappa, \lambda, \chi, \mu, \nu, \alpha, \varphi, \beta) \in \mathcal{G}_2$. On a $\bar{c}'(\kappa\alpha\lambda^{-1}, \lambda\chi\varphi\mu^{-1}, \mu\beta\nu^{-1}) = \overline{\kappa\alpha\chi\varphi\beta\nu^{-1}}$
Or $\mathcal{H}$ est distingué dans $\mathcal{G}$ donc il existe $\chi' \in \mathcal{H}$ tel que $\alpha\chi = \chi'\alpha$ de sorte que

$$\bar{c}'(\kappa\alpha\lambda^{-1}, \lambda\chi\varphi\mu^{-1}, \mu\beta\nu^{-1}) = \overline{\kappa\chi'(\alpha\varphi\beta)\nu^{-1}} = \bar{c}'(\alpha, \varphi, \beta).$$

Comme $\mathcal{Q}$ est fini, donc affine, sur Y, $\bar{c}'$ induit un morphisme $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{Q}$. On définit alors la composition dans $\mathcal{Q}$ à l'aide de l'isomorphisme $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q} \simeq \mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{Q}$. On note $\bar{c}$ le morphisme obtenu.

Vérifions que cette construction définit bien une structure de groupoïde $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ et que p induit un morphisme de groupoïdes $(\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$:

– La flèche $Z \xrightarrow{e} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{H}$-invariante donc induit une flèche $Y \xrightarrow{\bar{e}} \mathcal{Q}$. De même $\mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{G}'$-invariante donc induit un morphisme $\bar{i} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$.

– Si $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G}$ alors l'isomorphisme envoie $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ sur l'image de $(\alpha, \mathrm{id}_{s(\alpha)}, \beta)$ dans $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ Ainsi $\bar{c}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \overline{\alpha\beta}$.

Les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \times_{s,Z,t} \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] & Z \arrow[l, "e"'] \arrow[d] \\ \mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q} \arrow[r] & \mathcal{Q} & Y \arrow[l, "\bar{e}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathcal{Q} \arrow[r, "\bar{i}"] & \mathcal{Q} \end{tikzcd}$$

sont donc commutatifs. Il en découle immédiatement que $(Y, \mathcal{Q}, \sigma, \tau, \bar{c})$ est un groupoïde et que $\bar{e}$ et $\bar{i}$ en sont respectivement la section neutre et le morphisme d'inversion.

Il reste à prouver le lemme suivant.

2.5.3 Lemme.
Si $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est raisonnable, le morphisme γ est un isomorphisme.

Preuve :

(a) On commence par montrer que γ est un isomorphisme si $\mathcal{H}$ agit librement. Dans ce cas l'action de $\mathcal{G}'$ sur $\mathcal{G}$ est également libre. Les schémas Y et $\mathcal{Q}$ représentent donc aussi les faisceaux fppf quotients. Montrons que γ est un monomorphisme de faisceaux. Soit T un Y-schéma et $(\alpha_i, \varphi_i, \beta_i)_{i=1,2}$ deux T-points de $\mathcal{G}_1$ tels que $(\bar{\alpha_1}, \bar{\beta_1}) = (\bar{\alpha_2}, \bar{\beta_2})$ dans $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}(T)$. Alors localement pour la topologie fppf sur T, il existe $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathcal{H}(T)$ tels que $\alpha_2 = \kappa\alpha_1\lambda^{-1}$ et $\beta_2 = \mu\beta_1\nu^{-1}$. Les flèches φ_1 et $\lambda^{-1}\varphi_2\mu$ de $\mathcal{H}$ ont toutes deux pour source $t(\beta_1)$ et pour but $s(\alpha_1)$. Elles diffèrent donc par un élément du stabilisateur de $\mathcal{H}$. comme ce dernier est trivial , on a $\varphi_1 = \lambda^{-1}\varphi_2\mu$. Ainsi $(\alpha_1, \varphi_1, \beta_1)$ et $(\alpha_2, \varphi_2, \beta_2)$ sont localement dans la même $\mathcal{G}_2$-orbite, donc égaux dans $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2(T)$.

On montre maintenant que γ est un épimorphisme de faisceaux. Soit T un schéma et un point de $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}(T)$, que l'on relève en un point $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}(T) \times \mathcal{G}(T)$, fppf-localement sur T. Comme l'image de $\sigma(\bar{\alpha}) = \tau(\bar{\beta})$, fppf-localement sur T il existe $\varphi \in \mathcal{H}$ de source $s(\alpha)$ et de but $t(\beta)$. Le point $(\alpha, \varphi, \beta) \in \mathcal{G}_1(T)$ s'envoie donc par γ sur le pont initial de $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}(T)$.

(b) Dans le cas général, soit $U \subset Z$ la réunion des ouverts sur lesquels $\mathcal{H}$ agit librement et $V \subset Y$ l'image par $\pi : Z \longrightarrow Y$ de U. Comme π est plat et schématiquement dominant, V est un ouvert schématiquement dense de Y. Comme $\mathcal{Q} \longrightarrow Y$ est plat, la préimage $\mathcal{Q}_{|V}$ de V dans $\mathcal{Q}$ est schématiquement dense et $\mathcal{Q}_{|V} \times_{\sigma,V,\tau} \mathcal{Q}_{|V} = (\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q})_V$ est un ouvert schématiquement dense de $\mathcal{Q} \times_{\sigma,Y,\tau} \mathcal{Q}$. Or en restriction à $U = \pi^{-1}(V)$, l'action de $\mathcal{H}$ est libre. D'après (a), la restriction $\gamma_{|V}$ est donc un isomorphisme. Ainsi γ est schématiquement dominant. Le morphisme $\gamma^\sharp : \mathcal{O}_{\mathcal{Q}\times_{\sigma,Y,\tau}\mathcal{Q}} \longrightarrow \gamma_*\mathcal{O}_{\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2}$ est donc injectif. On montre maintenant que $\gamma^\sharp$ est un surjectif. Soit $x \in \mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ et f une fonction locale en x (c'est-à-dire dans la tige en x

du faisceau $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}_1})^{\mathcal{G}_2} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ des fonctions $\mathcal{G}_2$-invariantes sur $\mathcal{G}_1$). En particulier f est invariante sous l'action du stabilisateur de $\mathcal{H}$, de sorte que f est dans la tige en x du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} (\mathcal{O}_{\mathcal{H}})^{\mathrm{St}_{\mathcal{H}}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$. Mais par hypothèses, $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est raisonnable donc on a, d'après le lemme 2.4.4, $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}^{\mathrm{St}_{\mathcal{H}}} \simeq \mathcal{O}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Z$ et donc

$$\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} (\mathcal{O}_{\mathcal{H}})^{\mathrm{St}_{\mathcal{H}}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{\mathcal{G}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$$

Par ailleurs f est invariante par l'action de $\mathcal{G}'$ sur les deux facteurs de sorte que f provient de $(\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^{\mathcal{G}'} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_{\mathcal{G}})^{\mathcal{G}'} = \mathcal{O}_{\mathcal{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$, ce qu'on voulait.

□

Vérifions enfin que l'on a la propriété universelle annoncée. Si $f : (\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{T} \rightrightarrows T)$ est un morphisme de groupoïdes dont le noyau contient $\mathcal{H}$ alors f est $\mathcal{H}^2$-invariante donc se factorise par $\mathcal{Q}$. A fortiori l'application induite $Z \longrightarrow T$ sur les schémas d'objets est $\mathcal{H}$-invariante donc se factorise par Y. Ainsi f se factorise par $(\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$. Réciproquement, tout morphisme qui se factorise par $(\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$ doit contenir $\mathcal{H}$ dans son noyau.

□

2.5.4 Remarque. *Ordre du quotient.*

On sait déjà, d'après la remarque 2.2.4, que l'ordre d'un sous-groupoïde divise l'ordre du groupoïde ambiant. Dans le cas où il existe un groupoïde quotient, on peut préciser ce résultat. La situation est là encore analogue à celle des groupes finis classiques.

Avec les hypothèses et notations du théorème, si $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\pi : Z \longrightarrow Y$ sont plats, on a $[\mathcal{G} : Z] = [\mathcal{H} : Z][\mathcal{Q} : Y]$. En effet, si tel est le cas alors $\mathcal{Q}$ est plat sur Y par le critère de platitude par fibres. De plus par définition de $\mathcal{Q}$, on a $\deg(p) = [\mathcal{H} : Z]^2$ et $\deg(\pi) = [\mathcal{H} : Z]$.

La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \mathcal{Q} \arrow[d, "\sigma"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

montre que $\deg(p)[\mathcal{Q} : Y] = [\mathcal{G} : Z] \deg(\pi)$ d'où l'égalité :

$$[\mathcal{G} : Z] = [\mathcal{H} : Z][\mathcal{Q} : Y].$$

2.5.5 Exemples. A propos de l'hypothèse « raisonnable ».

On note $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps de caractéristique $p > 0$. Tous les schémas sont définis sur k.

– Considérons le groupoïde $\mathcal{G}$ défini par l'action de $\mu_p = \mathrm{Spec}(\frac{k[t]}{t^p-1})$ sur $Z = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[z])$ par $z \mapsto tz$.
Le quotient de Z par ce groupoïde est donné par $Y = \mathrm{Spec}(k[y])$ et le morphisme quotient par $y \mapsto z^p$.
On a $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} = \frac{k[t]}{t^p-1,(t-1)z}$. L'action de $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ sur $\mathcal{G}$ par composition est donnée par le morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \frac{k[z,t]}{t^p-1} & \longrightarrow & \frac{k[z,t,t']}{t^p-1,t'^p-1,(t'-1)z} \\ z & \mapsto & z \\ t & \mapsto & tt' \end{array}$$

Les invariants de cette action sont les $P(z,t) \in \frac{k[z,t]}{t^p-1}$ dont l'image par la coaction a un degré nul en t'. Or l'image par la coaction de $\sum_{i,j} a_{ij} z^i t^j$ est $\sum_{i,j} a_{ij} z^i t^j t'^j$. Donc P est invariant si et seulement si tous ses termes de degré non nul en t ont le même degré en z, c'est-à-dire que P est un polynôme en z et tz.
Or on a $Z \times_Y Z = \mathrm{Spec}(\frac{k[z_1,z_2]}{z_1^p-z_2^p})$. Le morphisme $\mathcal{G} \longrightarrow Z \times_Y Z$ est donné par le morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} \frac{k[z_1,z_2]}{z_1^p-z_2^p} & \longrightarrow & \frac{k[z,t]}{t^p-1} \\ z_1 & \mapsto & z \\ z_2 & \mapsto & tz \end{array}$$

Il est injectif car $\mathcal{G} \longrightarrow Z \times_Y Z$ est schématiquement birationnel.
D'après ce qui précède, ce morphisme induit un isomorphisme $\frac{k[z_1,z_2]}{z_1^p-z_2^p} \simeq (\frac{k[z,t]}{t^p})^{\mathrm{St}}$. Ce groupoïde est donc raisonnable.

– Considérons maintenant le groupoïde $\mathcal{G}$ donné par l'action de $\alpha_p = \mathrm{Spec}(\frac{k[t]}{t^p})$ sur $Z = \mathrm{Spec}(k[z])$ par $z \mapsto \frac{z}{1+tz}$.
Son stabilisateur est $\mathrm{St}_{\mathcal{G}} = \mathrm{Spec}(\frac{k[z,t]}{t^p,tz^2})$, agissant sur $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(\frac{k[z,t]}{t^p})$ par la formule

$$\begin{array}{ccc} \frac{k[z,t]}{t^p} & \longrightarrow & \frac{k[z,t,t']}{t^p,t'^p,t'z^2} \\ z & \mapsto & z \\ t & \mapsto & t+t' \end{array}$$

On a encore $Z \times_Y Z = \mathrm{Spec}(\frac{k[z_1,z_2]}{z_1^p-z_2^p})$. Le morphisme $\mathcal{G} \longrightarrow Z \times_Y Z$ est donné par le morphisme d'algèbres

$$j_Y^\sharp : \begin{array}{ccc} \frac{k[z_1,z_2]}{z_1^p-z_2^p} & \longrightarrow & \frac{k[z,t]}{t^p} \\ z_1 & \mapsto & z \\ z_2 & \mapsto & \frac{z}{1+tz} = z(1-tz+t^2z^2-...+(-1)^{p-1}z^{p-1}t^{p-1}) \end{array}$$

On constate que $t^2z^2 \in \frac{k[z,t]}{t^p}$ est invariant sous la coaction du stabilisateur. En effet il est envoyé sur $(t+t')^2z^2 = t^2z^2 + tt'z^2 + t'^2z^2 = t^2z^2$.
L'image de $j_Y^\sharp$ est constituée des expressions polynomiales en z et $\frac{z}{1+tz}$ à coefficients dans k. Elles s'écrivent $\sum_{i,j} a_{ij} z^{i+j}(1-tz+t^2z^2-...+(-1)^{p-1}t^{p-1}z^{p-1})^j$. Il s'agit de

sommes de monômes dans lesquels le degré en t est soit nul soit strictement inférieur au degré en z. On voit donc que t^2z^2, bien qu'invariant, n'est pas dans l'image de $j_Y^\sharp$.
Ainsi ce groupoïde n'est pas raisonnable.

Chapitre 3

Revêtements généralisés

Dans ce chapitre, on introduit la notion de revêtement généralisé sous l'action d'un groupoïde. Il s'agit de proposer un cadre adapté à l'étude des morphismes, éventuellement purement inséparables, qui sont génériquement des torseurs sous des schémas en groupes. On est naturellement amené à considérer la notion de groupoïde agissant génériquement librement sur un schéma. Ceci permet d'inclure dans notre formalisme des morphismes qui ne sont plus des morphismes de quotient par l'action d'un schéma en groupes mais aussi des feuilletages.

Dans une première partie, après avoir rappelé la notion de groupoïde agissant sur un schéma, on définira la catégorie des (pré-)revêtements généralisés, que l'on appellera souvent simplement (pré-)revêtements. On étudiera la possibilité de composer les pré-revêtements. Pour ce faire, il est nécessaire de ne pas imposer que les groupoïdes qui interviennent agissent transitivement sur les orbites.

Dans un second temps, on s'intéressera au problème du dévissage des pré-revêtements. On rassemblera quelques lemmes utiles sur les liens entre morphismes de groupoïdes et morphismes induits sur les stabilisateurs. Enfin, on prouvera le résultat principal de cette section (th. 3.2.6) qui affirme l'existence d'une suite exacte reliant les stabilisateurs des différents groupoïdes qui interviennent lors du dévissage d'un pré-revêtement.

Dans une troisième section, on rappellera la construction de Mumford qui permet d'associer un diviseur de Cartier effectif à un faisceau de torsion sur un schéma assez régulier et on utilisera cette construction pour proposer une définition d'invariant de ramification pour l'action d'un groupoïde. On montrera dans une quatrième partie que l'on retrouve le diviseur de ramification des revêtements galoisiens modérés classiques, c'est-à-dire les morphismes de quotient sous l'action de groupes constants d'ordres premiers aux caractéristiques résiduelles. Enfin on étudiera le comportement de cet invariant par dévissage, en appliquant les résultats du chapitre précédent, en particulier le théorème 2.5.1.

3.1 La catégorie des revêtements généralisés

3.1.1 Définitions

On définit la notion de revêtement ramifié sous un groupoïde puis on discute certaines constructions dans la catégorie de ces revêtements. On fixe un S-schéma X.

3.1.1.1 Définition.

On appelle *pré-revêtement* de X un couple $(Y \longrightarrow X, \mathcal{G} \rightrightarrows Y)$, où

– Y est un S-schéma

– $\mathcal{G} \rightrightarrows Y$ un X-groupoïde fini localement libre à orbites incluses dans des ouverts affines et dont l'action est génériquement libre, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert schématiquement dense $V \subset Y$ tel que $\mathcal{G}_{|V}$ agisse librement sur V.
– $Y \longrightarrow X$ est un morphisme fini localement libre $\mathcal{G}$-invariant, c'est-à-dire égalisant la double flèche $\mathcal{G} \rightrightarrows Y$.
On abrégera souvent la notation $(Y \longrightarrow X, \mathcal{G} \rightrightarrows Y)$ en $(Y \longrightarrow X, \mathcal{G})$ ou même $(Y, \mathcal{G})$. On dira que Y et $\mathcal{G}$ sont respectivement l'espace total et le groupoïde de structure du pré-revêtement $(Y, \mathcal{G})$.

On dira qu'un pré-revêtement $(Y, \mathcal{G})$ est un revêtement si de plus l'ordre de $\mathcal{G}$ est égal au degré du morphisme $Y \longrightarrow X$.

3.1.1.2 Remarques.

- Puisque $Y \longrightarrow X$ est fidèlement plat, l'image $U \subset X$ de V par ce morphisme est un ouvert schématiquement dense de X. On dira aussi que $\mathcal{G}$ agit librement au-dessus de U.
- Dans la définition d'un pré-revêtement, on n'impose pas que $\mathcal{G}$ agisse transitivement sur l'espace total. Cela a pour conséquence que X ne s'identifie pas forcément au quotient de l'espace total par le groupoïde agissant. C'est le cas lorsqu'on est en présence d'un revêtement, en vertu du lemme suivant.

3.1.1.3 Lemme.
Si $(Y, \mathcal{G})$ est un revêtement de X alors on a un isomorphisme $X \simeq Y/\mathcal{G}$.

Preuve :
Soit $(Y, \mathcal{G})$ un revêtement de X. Nous allons montrer que les hypothèses du lemme 2.4.3 sont satisfaites. Comme $Y \longrightarrow X$ est fidèlement plat il suffit de montrer que le morphisme

$$j_X : \mathcal{G} \longrightarrow Y \times_X Y$$

est un épimorphisme. Ce dernier étant fini, d'après la remarque 1.1.9, il suffit de montrer qu'il est schématiquement dominant. Soit $V \subset Y$ un ouvert schématiquement dense de Y sur lequel $\mathcal{G}$ agit librement. Alors $V \longrightarrow V/\mathcal{G}$ est plat de degré $o(\mathcal{G}) = [Y : X]$. Ainsi si W désigne l'image de V dans X, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & W \\ U/\mathcal{G} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

d'où on conclut que $U/\mathcal{G} \longrightarrow W$ est fini et plat de degré 1, c'est-à-dire un isomorphisme. Ainsi $Z/\mathcal{G} \longrightarrow X$ est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert schématiquement dense de X. De plus, par platitude de $Y \longrightarrow X$, la préimage $U \times_V U$ de U dans $Y \times_X Y$ est un ouvert schématiquement dense et l'on a $U \times_{U/\mathcal{G}} U \simeq U \times_V U$. Or l'action de $\mathcal{G}$ est libre au-dessus de U, de sorte que $j_U : \mathcal{G} \longrightarrow U \times_{U/\mathcal{G}} U$ est un isomorphisme. On en déduit que j_X est schématiquement birationnel donc en particulier schématiquement dominant. Ainsi, d'après 1.1.9, c'est un isomorphisme. D'après 2.4.3, on a donc $X \simeq Y/\mathcal{G}$.

□

3.1.1.4 Définition.

Si $(Y_1, \mathcal{G}_1)$ et $(Y_2, \mathcal{G}_2)$ sont deux pré-revêtements de X un morphisme entre ces deux pré-revêtements est un morphisme de groupoïdes $(f, f_0) : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "s_1"'] \arrow[d, shift left, "t_1"] & \mathcal{G}_2 \arrow[d, shift right, "s_2"'] \arrow[d, shift left, "t_2"] \\
Y_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[dr] & Y_2 \arrow[d] \\
& X
\end{tikzcd}$$

3.1.1.5 Remarque.

Les morphismes qui interviennent dans un revêtement sont tous finis donc en particulier propres. Or d'après [Gro66, 8.11.5], un monomorphisme de schémas est propre si et seulement si c'est une immersion fermée. Ainsi un groupoïde fini plat $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ agit librement si et seulement si j est une immersion fermée.

Soit X un S-schéma. Étant donnés un pré-revêtement $(Y, \mathcal{G})$ de X et un pré-revêtement $(Z, \mathcal{H})$ de Y on cherche à construire un pré-revêtement de X, composé des précédents. On propose la définition suivante :

3.1.1.6 Définition.

Si $(Y, \mathcal{G})$ est un pré-revêtement de X et $(Z, \mathcal{H})$ est un pré-revêtement de Y, on note $(Y, \mathcal{G}) \circ (Z, \mathcal{H})$ le pré-revêtement de X construit de la manière suivante :

- L'espace total est Z.
- La flèche $Z \longrightarrow X$ est la composition des flèches $Z \longrightarrow Y$ et $Y \longrightarrow X$.
- Le groupoïde structural est $\mathcal{H} \times g^*\mathcal{G}$.

3.1.1.7 Lemme.

Avec les notations et définitions précédentes, $(Y, \mathcal{G}) \circ (Z, \mathcal{H})$ *est un pré-revêtement de* X.

Preuve :

Notons $\mathcal{K} = \mathcal{H} \times g^*\mathcal{G}$. Par définition la composée $f \circ g$ est $\mathcal{K}$-invariante. Comme $(Y, \mathcal{G})$ est un pré-revêtement de X il existe un ouvert schématiquement dense $U \subset Y$ tel que $\mathcal{G}_{|U} \longrightarrow U \times_X U$ soit une immersion fermée. Si $V = U \times_Y X$ on obtient alors par changement de base par $g \times g$ une immersion fermée $g^*\mathcal{G}_{|V} \longrightarrow V \times_X V$. De plus $V \subset X$ est un ouvert schématiquement dominant de X par platitude de g.

Remarquons que $Z \times_Y Z$ est un sous-schéma fermé de $Z \times_X Z$, obtenu en changeant de base $Z \times_X Z \longrightarrow Y \times_X Y$ par l'immersion diagonale $Y \hookrightarrow Y \times_X Y$. Il existe un ouvert $V' \subset Z$ schématiquement dense de Z et une immersion fermée $\mathcal{H}_{|V'} \longrightarrow V' \times_Y V'$. Par composition on obtient une immersion fermée $\mathcal{H}_{|V'} \longrightarrow V' \times_X V'$. L'intersection $V \times_Z V'$ est encore un ouvert schématiquement dense de Z (par platitude des immersions fermées). La flèche $\mathcal{H} \times g^*\mathcal{G} \longrightarrow Z \times_X Z$ est donnée par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \times g^*\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[d] \\
g^*\mathcal{G} \arrow[r] & Z \times_X Z
\end{tikzcd}$$

□

3.1.1.8 Remarque.

On constate que, même si les groupoïdes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ agissent transitivement, le groupoïde structural de la composition $\mathcal{H} \times g^*\mathcal{G}$ peut ne plus agir transitivement. En d'autres termes, la composition de deux revêtements n'est plus en général un revêtement mais seulement un pré-revêtement.

3.1.2 Dévissage

Soit X un S-schéma. On pose maintenant le problème suivant : étant donné un pré-revêtement $(Z, \mathcal{G})$ de X et un sous-groupoïde $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, construire un pré-revêtement $(Y, \mathcal{Q})$ de X avec $Y = Z/\mathcal{H}$. Nous utilisons les constructions de la section 2.5.

3.1.2.1 Théorème.

Soit $(Z, \mathcal{G})$ un pré-revêtement de X et $\mathcal{H}$ un sous-groupoïde fini localement libre de $\mathcal{G}$. On note $Y = Z/\mathcal{H}$. On suppose que $Z \longrightarrow Y$ est plat et que $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ vérifie l'une des conditions d'application du théorème 2.5.1. On note $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ le groupoïde quotient de $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ par $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$.

Alors :

(i) $(Z, \mathcal{H})$ est un pré-revêtement de Y.

(ii) Si $Z \longrightarrow Y$ est plat, $(Y, \mathcal{Q})$ est un pré-revêtement de X.

Les morphismes de quotient induisent un morphisme de pré-revêtements de X

$$(Z, \mathcal{G}) \longrightarrow (Y, \mathcal{Q}).$$

de plus si $(Z \longrightarrow X, \mathcal{G})$ est un revêtement alors il en va de même pour $(Z \longrightarrow Y, \mathcal{H})$.

Preuve :

(i) Si U est un ouvert schématiquement dominant sur lequel $\mathcal{G}$ agit librement alors $\mathcal{G}_{|U} \longrightarrow U \times_X U$ est une immersion fermée et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{|U} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G}_{|U} \arrow[d] \\ U \times_Y U \arrow[r] & U \times_X U \end{tikzcd}$$

Comme $U \times_Y U \longrightarrow U \times_X U$ est une immersion fermée, on en déduit que

$$\mathcal{H}_{|U} \longrightarrow U \times_Y U$$

est également une immersion fermée.

(ii) Si $\mathcal{G}$ agit librement sur Z alors $\mathcal{Q}$ agit librement sur Y, comme on le voit on considérant les faisceaux quotients que représentent Y et $\mathcal{Q}$. Si $U \subset Z$ est un ouvert schématiquement dense sur lequel $\mathcal{G}$ agit librement alors par fidèle platitude de $Z \longrightarrow Y$, son image $V \subset Y$ est un ouvert schématiquement dense de Y sur lequel $\mathcal{Q}$ agit librement. De plus le critère de platitude par fibres montre que $Y \longrightarrow X$ est plat puisque $Z \longrightarrow X$ et $Z \longrightarrow Y$ le sont.

□

3.1.3 Revêtements Galoisiens

3.1.3.1 Définition.

On dira qu'un revêtement $(Y, \mathcal{G})$ d'un schéma X est galoisien s'il existe un S-schéma en groupes fini localement libre G d'ordre $[Y : X]$ agissant sur Y librement sur un ouvert schématiquement dense tel que $\mathcal{G}$ soit le groupoïde induit par cette action, donc que $\mathcal{G} = G \times_S Y$.

Dévissage des revêtements galoisiens

En général, le problème du dévissage d'un revêtement est délicat et l'on doit vérifier que le groupoïde par lequel on quotiente vérifie les conditions d'application du théorème 2.5.1. Une situation pour laquelle il est aisé de vérifier de telles hypothèses est lorsque les groupoïdes en présence sont donnés par des actions de groupes, c'est-à-dire le cas galoisien.

3.1.4 Proposition. *Soit X un S-schéma, $(Z, \mathcal{G})$ un revêtement galoisien de X donné par l'action d'un S-schéma en groupes fini localement libre sur Z.*

Soit $H \lhd G$ un sous-groupe distingué et $Y = Z/H$. Alors si $Z \longrightarrow Y$ est plat, l'action résiduelle de G/H sur Y donne lieu à un revêtement galoisien de X par lequel $(Z, \mathcal{G})$ se factorise.

Preuve :

Il suffit de noter que H agit librement sur G donc que $G \longrightarrow G/H$ est plat. Alors la formation du quotient $Y = Z/H$ commute au changement de base par G/H. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times_S Z \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ G/H \times_S Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd},$$

d'où la conclusion. □

Si $(Y, \mathcal{G})$ est un pré-revêtement d'un S-schéma X, on considère le stabilisateur $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$. Il s'agit d'un Y-schéma en groupes fini. Puisque $\mathcal{G}$ agit librement sur un ouvert schématiquement dense, $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ est génériquement trivial. On en déduit que son idéal d'augmentation, que l'on note $\mathfrak{m}_{\mathcal{G}}$, est un faisceau de torsion. On peut considérer qu'il s'agit d'une mesure du défaut de $\mathcal{G}$ à agir librement, c'est-à-dire d'un mesure de la ramification du pré-revêtement $(Y, \mathcal{G})$, destinée à remplacer le faisceau des formes différentielles d'un morphisme génériquement étale.

Dans cette optique, on cherche à étudier le comportement de ce faisceau par dévissage. On obtiendra une suite exacte reliant les idéaux d'augmentation de $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{Q}$, que l'on peut envisager comme un analogue de la première suite exacte fondamentale des 1-formes.

3.2 Stabilisateurs et dévissage

On considère un pré-revêtement $(Z, \mathcal{G})$ d'un S-schéma X. Si $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ est un sous-groupoïde fini localement libre $\mathcal{G}$ vérifiant une des conditions d'application du théorème 2.5.1, on considère le pré-revêtement quotient $(Y, \mathcal{Q})$ par lequel $(Z, \mathcal{G})$ se factorise. On cherche à relier $\mathfrak{m}_{\mathcal{H}}$, $\mathfrak{m}_{\mathcal{G}}$ et $\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}$.

On commence par énoncer deux lemmes généraux sur les relations entre morphismes de groupoïdes et morphismes induits sur les stabilisateurs.

3.2.1 Lemme. *Soit $f = (f, f_0) : (\mathcal{A} \rightrightarrows A) \longrightarrow (\mathcal{B} \rightrightarrows B)$ un morphisme de S-groupoïdes. f induit un morphisme $f' : \mathrm{St}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{B}}$ et l'on a $\ker f' = \ker f \cap \mathrm{St}_{\mathcal{A}} = \ker f \times_{\mathcal{A}} \mathrm{St}_{\mathcal{A}}$.*

Preuve :

Puisque f est un morphisme de groupoïdes, si un élément de $\mathcal{A}$ a même source et but alors $f(a)$ aussi. On obtient donc un morphisme $\mathrm{St}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{B}}$. On vérifie que c'est un morphisme de schémas en groupes.

Comme $\ker f = B \times_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$, on a $\ker f \times_{\mathcal{A}} \mathrm{St}_{\mathcal{A}} = B \times_{\mathcal{B}} \mathcal{A} \times_{\mathcal{A}} \mathrm{St}_{\mathcal{A}} = B \times_{\mathcal{B}} \mathrm{St}_{\mathcal{A}}$. Or $B \longrightarrow \mathcal{B}$ se factorise par les immersions fermées $B \hookrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{B}} \hookrightarrow \mathcal{B}$ de sorte que

$$B \times_{\mathcal{B}} \mathrm{St}_{\mathcal{A}} = B \times_{\mathrm{St}_{\mathcal{B}}} \mathrm{St}_{\mathcal{A}} = \ker f'.$$

□

3.2.2 Lemme.

Soit $f = (f, f_0) : (\mathcal{A} \rightrightarrows A) \longrightarrow (\mathcal{B} \rightrightarrows B)$ un morphisme de groupoïdes et $f^*\mathcal{B} \rightrightarrows A$ le groupoïde de base A, préimage de $\mathcal{B}$ par $f_0 : A \longrightarrow B$. Alors f induit un morphisme de groupoïdes $\widetilde{f} : (\mathcal{A} \rightrightarrows A) \longrightarrow (f^*\mathcal{B} \rightrightarrows A)$ et l'on a $\ker \widetilde{f} = \ker f \cap \mathrm{St}_{\mathcal{A}} = \ker f \times_{\mathcal{A}} \mathrm{St}_{\mathcal{A}}$.

Preuve :

La préimage $f^*\mathcal{B}$ est définie par le produit fibré $\mathcal{B} \times_{B \times_S B} A \times_S A$. Puisque f est un morphisme de groupoïdes le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\ A \times_S A \arrow[r] & B \times_S B \end{tikzcd}$$

On obtient donc un morphisme

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f} : & \mathcal{A} & \longrightarrow & f^*\mathcal{B} \\ & r & \mapsto & (f(r), s(r), t(r)) \end{array}$$

où s et t sont les morphismes source et but dans $\mathcal{A}$.

La section neutre de $f^*\mathcal{B}$ est donnée par

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & f^*\mathcal{B} \\ a & \mapsto & (\mathrm{id}_{f_0(a)}, a, a) \end{array}$$

Ainsi $\ker(\widetilde{f}) = \ker f \cap \mathrm{St}_{\mathcal{A}}$.

□

3.2.3 Remarque. Le noyau de $\mathcal{A} \longrightarrow f^*\mathcal{B}$ est donc le même que celui du morphisme de A- schémas en groupes $f' : \mathrm{St}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{B}}$. On voit en particulier que si $\mathcal{A}$ agit librement, le noyau de $\mathcal{A} \longrightarrow f^*\mathcal{B}$ est trivial pour tout morphisme $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

On spécialise maintenant la situation à celle rencontrée lors du dévissage d'un revêtement, à savoir le quotient par un sous-groupoïde.

3.2.4 Lemme.

Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un groupoïde agissant librement sur un ouvert schématiquement dense de Z et $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ un sous-groupoïde localement libre vérifiant l'une des conditions d'applicaiton du théorème 2.5.1.. On note $Y = Z/\mathcal{G}$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{G}/\mathcal{G}'$, où $\mathcal{G}' = (\mathcal{H} \times_S \mathcal{H}) \times_{(s,s),Z\times Z,(t,s)} \mathcal{G}$ correspond à l'action de $\mathcal{H}^2$ par pré- et post-composition. Sous ces hypothèses, on sait d'après le théorème 2.5.1 qu'il existe une structure de groupoïde $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$. On l'appelle le groupoïde quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$. On note

$$p = (p, \pi) : (\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$$

le morphisme de quotient.

On a la propriété universelle suivante : Un morphisme de groupoïdes

$$(\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{T} \rightrightarrows T)$$

se factorise par p si et seulement si $\mathcal{H}$ est contenu dans son noyau.

Preuve : On notera c', s', t' les morphismes composition, source et but dans $\mathcal{T}$. Le sens « seulement si » est évident puisque $\ker p$ contient $\mathcal{H}$. On note $j_{\mathcal{Q}}$, $j_{\mathcal{G}}$, $j_{\mathcal{T}}$ les morphismes de composantes source et but dans les groupoïdes correspondants.

Soit $f = (f, f_0) : (\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{T} \rightrightarrows T)$ un morphisme de groupoïdes. On suppose que $\ker f$ contient $\mathcal{H}$.

Alors le morphisme f_0 est $\mathcal{H}$-invariant puisque $j_{\mathcal{T}} \circ f = f_0 \circ j_{\mathcal{G}}$. Ainsi f_0 se factorise par $\bar{f}_0 : Y \longrightarrow T$.

De même f est $\mathcal{G}'$-invariant donc se factorise par $\bar{f} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{T}$.

Vérifions que $(\bar{f}, \bar{f}_0)$ est un morphisme de groupoïdes.

Comme (f, f_0) est un morphisme de groupoïdes on a $j_{\mathcal{T}} \circ f = f_0 \circ j_{\mathcal{G}}$. Or $f = \bar{f} \circ p$ et $f_0 = \bar{f}_0 \circ \pi$. Donc $j_{\mathcal{T}} \circ \bar{f} \circ p = \bar{f}_0 \circ \pi \circ j_{\mathcal{G}}$. Comme (p, π) est un morphisme de groupoïdes on a $\pi \circ j_{\mathcal{G}} = j_{\mathcal{Q}} \circ p$.

Ainsi $j_{\mathcal{T}} \circ \bar{f} \circ p = \bar{f}_0 \circ j_{\mathcal{Q}} \circ p$. Mais p est un épimorphisme de schémas car p est surjectif et $p^\sharp$ est injectif.

On a donc $j_{\mathcal{T}} \circ \bar{f} = \bar{f}_0 \circ j_{\mathcal{Q}}$ et le diagramme suivant, dont il faut montrer qu'il commute.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q} \times_{\bar{s},\bar{t}} \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}\times\bar{f}"'] & \mathcal{Q} \arrow[d, "\bar{f}"] \\
\mathcal{T} \times_{s',t'} \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{T}
\end{tikzcd}$$

Comme f est un morphisme de groupoïdes on a $c' \circ (f \times f) = f \circ c$.

Par ce qui précède $f = \bar{f} \circ p$ de sorte que l'égalité précédente s'écrit aussi

$$\bar{f} \circ \bar{c} \circ (p \times p) = c' \circ (\bar{f} \times \bar{f}) \circ (p \times p).$$

Comme $p \times p$ est un épimorphisme, le diagramme ci-dessus est bien commutatif et $(\bar{f}, \bar{f}_0)$ est bien un morphisme de groupoïdes.

□

3.2.5 Proposition.

Avec les hypothèses et notations du lemme précédent, si $\mathcal{H}$ agit librement sur un ouvert schématiquement dense de Z et si $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ et $Z \longrightarrow Y$ sont plats on a $\ker p \simeq \mathcal{H}$.

Preuve : On note $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ l'idéal qui définit $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$. Soit $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ une section globale. Cette section définit une fonction $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{A}^1$, $\mathcal{G}'$-invariante et nulle sur $\mathcal{H}$. Elle induit une fonction $\bar{f} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{A}^1$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "e"'] & Y \arrow[d, "\bar{e}"] \\
\mathcal{H} \arrow[ur, "s"] \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{Q} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
 & \mathbb{A}^1 &
\end{tikzcd}$$

On a $\bar{f} \circ \bar{e} \circ \pi = f \circ e = 0$ et π est un épimorphisme donc $\bar{f} \circ \bar{e} = 0$ puis $f \in \mathfrak{m}_Q$, l'idéal noyau de $\bar{e}^\sharp$. Ainsi $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{Q}} \subset \mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}$.

Réciproquement, si $f \in \mathfrak{m}_Q$ on a $\bar{f} \circ \bar{e} = 0$. Or d'après le diagramme ci-dessus,

$$(\bar{f} \circ \bar{e}) \circ (\pi \circ s) = f \circ i.$$

Donc $f \circ i = 0$, f s'annule sur $\mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{I}_H \cap \mathcal{O}_Q$.

On a donc $\mathcal{I}_H \cap \mathcal{O}_Q = \mathfrak{m}_Q$.

Le noyau $\ker p$ est défini par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\ker p \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\bar{e}"'] \\
\mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{Q}
\end{tikzcd}$$

Son faisceau de fonctions est donc $\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}} \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{\mathcal{G}}/\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$.

Comme $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{Q}} = \mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}$ on a $\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$. On en déduit une surjection

$$\mathcal{O}_{\mathcal{G}}/\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{G}}/\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

et une immersion fermée $\mathcal{H} \hookrightarrow \ker p$.

Soit $U \subset Z$ un ouvert schématiquement dense sur lequel $\mathcal{H}$ agit librement. On peut supposer que U est saturé, ie $U = \pi^{-1}(\pi(U))$.

Alors l'action de $\mathcal{G}'_{|U} = ((\mathcal{H} \times_S \mathcal{H}) \times_{(s,s),Z\times Z,(t,s)} \mathcal{G})_{|U}$ sur $\mathcal{G}_{|U}$ est également libre.

En effet, pour $g \in \mathcal{G}$ et $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, l'égalité $g = \varphi g \psi^{-1}$ entraine $g\psi = \varphi g$ et donc $s(\psi) = t(\psi) = s(g)$ et $s(\varphi) = t(\varphi) = t(g)$. Donc φ et ψ sont dans le stabilisateur de $\mathcal{H}_{|U}$ qui est trivial.

Alors $\mathcal{Q}_{|U}$ et $V = \pi(U)$ représentent les faisceaux quotients associés (la formation du quotient commute au changement de base par $U \hookrightarrow Z$, qui comme toute immersion ouverte est plate).

On vérifie que $\mathcal{H}_{|U}$ est le noyau de la projection $\mathcal{G}_{|U} \longrightarrow \mathcal{Q}_{|V}$.

En effet, si T est un S-schéma et $g \in G(T)$ est tel que $p(g) = 1_{\pi(x)}$, où $x = s(g)$, il existe un recouvrement fppf $T' \longrightarrow T$ et φ, ψ dans $\mathcal{H}(T')$ tels que, en restriction à T', $1_x = \varphi g \psi^{-1}$, donc $g = \varphi^{-1}\psi \in \mathcal{H}(T')$.

On voit donc que l'immersion $\mathcal{H} \hookrightarrow \ker p$ induit un isomorphisme $\mathcal{H}_{|U} \simeq \ker p_{|U}$. Or $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est plat donc $\ker p \longrightarrow Y$ est plat. Notons $z : \ker p \longrightarrow Z$ et $y : \ker p \longrightarrow Y$.

Puisque U est saturé, on a $z^{-1}(U) = y^{-1}(V) \subset \ker p$. Notons W cet ouvert. Le morphisme π est fidèlement plat donc V est schématiquement dense dans Y. Comme y est plat, W est schématiquement dense dans $\ker p$.

La préimage de U dans $\ker p$ est donc schématiquement dense. Ainsi $\ker p_{|U}$ est schématiquement dense dans $\ker p$. L'immersion fermée $\mathcal{H} \hookrightarrow \ker p$ est schématiquement dominante, c'est donc un isomorphisme.

□

3.2.6 Théorème.

Soit $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ un S-groupoïde fini localement libre. Soit $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ un sous-groupoïde fermé, fini localement libre et agissant librement sur on ouvert schématiquement dense de Z. On suppose que l'on est dans l'une des situations d'application du théorème 2.5.1 et l'on note $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ le groupoïde quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$ et $p = (p, \pi) : (\mathcal{G} \rightrightarrows Z) \longrightarrow (\mathcal{Q} \rightrightarrows Y)$ le morphisme de quotient, que l'on suppose plat. Alors p induit une suite de Z-schémas en groupes $1 \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\alpha} \pi^* \mathrm{St}_{\mathcal{Q}}$, exacte au sens où :

(i) $\mathrm{St}_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ *est une immersion fermée.*

(ii) $\mathrm{St}_{\mathcal{H}} \simeq \ker(\alpha)$.

Preuve :

Le morphisme p induit un morphisme $\widetilde{p} : \mathcal{G} \longrightarrow \pi^*\mathcal{Q}$ dont le noyau est $\ker p \times_{\mathcal{G}} \mathrm{St}_G$ d'après le lemme 3.2.2. Notons $\alpha : \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \pi^* \mathrm{St}_{\mathcal{Q}}$ le morphisme induit sur les stabilisateurs.

(i) $\mathrm{St}_{\mathcal{H}} \longrightarrow St_{\mathcal{G}}$ est le changement de base de l'immersion fermée $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ par la diagonale $Z \hookrightarrow Z \times_Y Z$. C'est donc encore une immersion fermée.

(ii) On a d'après les lemmes 3.2.1 et 3.2.2, $\ker \alpha = \ker \widetilde{p}$. D'après la proposition précédente, $\ker p = \mathcal{H}$. Ainsi $\ker \alpha = \mathcal{H} \times_{\mathcal{G}} \mathrm{St}_{\mathcal{G}} = \mathrm{St}_{\mathcal{H}}$.

□

3.2.7 Corollaire.

Avec les notations et hypothèses précédentes, on a la suite exacte de $\mathcal{O}_Z$-modules

$$0 \longrightarrow \pi^*\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} \longrightarrow \mathfrak{m}_{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathfrak{m}_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0$$

où $\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}$, $\mathfrak{m}_{\mathcal{G}}$ et $\mathfrak{m}_{\mathcal{H}}$ sont les idéaux d'augmentation des Z-schémas en groupes $\mathrm{St}_{\mathcal{Q}}$, $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ et $\mathrm{St}_{\mathcal{H}}$.

Preuve :

$\mathrm{St}_{\mathcal{H}}$ est un sous-schéma en groupes fermé de $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$, changement de base de l'immersion fermée $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ par la diagonale $Z \longrightarrow Z \times_S Z$.

Soit $\mathcal{J}$ le noyau de la surjection $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{H}}}$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{H}}} \longrightarrow 0.$$

L'idéal définissant $\ker \alpha$ est $\pi^*\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}}$.

Comme $\ker \alpha \simeq \mathrm{St}_{\mathcal{H}}$, on a $\mathcal{J} = \pi^*\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}}$, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi^*\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{H}}} \longrightarrow 0$$

puis, quotientant par $\mathcal{O}_Z$ qui est facteur direct de $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{H}}}$, la suite exacte annoncée.

□

3.3 Un diviseur de ramification pour les revêtements généralisés

Diviseur associé à un faisceau cohérent

On rappelle une construction générale, en suivant [MFK94, V, §3].

Soit X un $\mathcal{S}$-schéma noethérien.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. On suppose satisfaites les deux conditions suivantes :

(i) le support de $\mathcal{F}$ ne contient aucun point associé (c'est-a-dire de profondeur 0) de X.

(ii) Pour tout point $x \in X$, $\mathcal{F}$ est de Tor-dimension finie, c'est-à-dire admet une résolution projective finie.

Enfin, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang r on note $\det(\mathcal{E})$ le faisceau inversible $\Lambda^r\mathcal{E}$.

3.3.1 Lemme. *Si* $0 \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de faisceaux localement libres sur* X*, on a un isomorphisme canonique* $\bigotimes_{i=0}^{n} \det(\mathcal{E}_i)^{(-1)^i} \simeq \mathcal{O}_X$.

On renvoie à [MFK94, V, §3, Lemma 5.6] pour la preuve.

Par hypothèse, tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{F}$ possède une résolution finie

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \longrightarrow 0$$

par des $\mathcal{O}_U$-modules libres $\mathcal{E}_i$. Soit $U' = U \setminus \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$. Appliquant le lemme ci-dessus à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{n_{|U'}} \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{E}_{0_{|U'}} \longrightarrow 0$$

on obtient un isomorphisme $\mathcal{O}_{U'} \simeq \bigotimes_{i=0}^{n} \det(\mathcal{E}_i)_{|U'}^{(-1)^i}$. De plus comme les $\mathcal{E}_i$ sont libres sur U, on a un isomorphisme $\bigotimes_{i=1}^{n} \det(\mathcal{E}_i)^{(-1)^i} \simeq \mathcal{O}_U$. En les composant on obtient un automorphisme de $\mathcal{O}_{U'}$ et donc une section (unique à un inversible près) $f \in \mathcal{O}_X(U')$. Or par hypothèse U' contient tous les points associés de U donc, d'après [Gro66, 11.10.2], U' est schématiquement dense dans U puisque X est noethérien. Ainsi on a un isomorphisme de faisceaux de fonctions rationnelles $\mathcal{K}_{U'} \simeq \mathcal{K}_U$ et f définit un diviseur de Cartier sur U. D'après [MFK94, V,§3,p.106], on peut recouvrir X par des ouverts comme ci-dessus pour obtenir un diviseur de Cartier effectif $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$ qui ne dépend pas des résolutions choisies.

Vérifions que ce diviseur est effectif. D'après [Mum66, 9 p.65] Il suffit de le vérifier en tous les points de profondeur 1.

Soit $x \in X$ de profondeur 1 et

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow ... \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \longrightarrow 0$$

une résolution (libre, cohérente) de $\mathcal{F}$ dans un voisinage U de x. On pose $\widetilde{\mathcal{E}} = \ker(\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{F})$.

3.3.2 Lemme.

Il existe un voisinage $U_0 \subset U$ *de* x *sur lequel* $\widetilde{\mathcal{E}}$ *est libre.*

Preuve :

D'après la formule d'Auslander-Buschbaum [BH93, I.3.3] on a, pour tout $\mathcal{O}_{X,x}$-module M de dimension projective finie,

$$1 = \mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathrm{dimp}(M) + \mathrm{prof}(M),$$

où dimp désigne la dimension projective. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est local, un $\mathcal{O}_{X,x}$-module est projectif si et seulement si il est libre. Ainsi si $\widetilde{\mathcal{E}_x}$ n'est pas libre on a $\mathrm{dimp}(\widetilde{\mathcal{E}_x}) = 1$ et $\mathrm{prof}(\widetilde{\mathcal{E}_x}) = 0$. Or $\mathrm{prof}(\widetilde{\mathcal{E}_x}) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}^i(k(x), \widetilde{\mathcal{E}_x}) \neq 0\}$ donc il existe un morphisme non nul de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules $k(x) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}_x}$ et par composition avec l'injection $\widetilde{\mathcal{E}_x} \longrightarrow \mathcal{E}_{0,x}$ on obtient un morphisme non nul $k(x) \longrightarrow \mathcal{E}_{0,x}$. On a alors $\mathrm{prof}(\mathcal{E}_{0,x}) = 0$. Mais $\mathcal{E}_{0,x}$ est libre donc $\mathrm{dimp}(\mathcal{E}_{0,x}) = 0$, ce qui contredit la formule d'Auslander-Buschbaum. Ainsi $\widetilde{\mathcal{E}_x}$ est libre. Comme $\widetilde{\mathcal{E}}$ est cohérent, il est libre sur un voisinage de x.

□

Dès lors, puisque le résultat de dépend pas de la résolution choisie, on peut calculer $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$ en un point de codimension 1 à partir d'une résolution de longueur 2. En notant h la flèche $\widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}_0$ on a alors $\mathrm{Div}(\mathcal{F})_x = (\det(h))_x$. Ainsi $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$ est effectif en tout point de profondeur 1, donc effectif.

Lorsque X est régulier en codimension 1 on peut préciser $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$:

3.3.3 Lemme.

On suppose que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Soit $\pi \in A$ une une uniformisante. Alors il existe un A-module M tel que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et l'on a $\mathrm{Div}(\mathcal{F}) = (\pi^{l_A(M)})$, où $l_A(M)$ est la longueur du A-module M.

Preuve :

Il suffit d'écrire $M \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} A/\pi^{n_i}$ pour un certain r-uplet d'entiers $(n_1, .., n_r)$. On a alors la résolution

$$0 \longrightarrow A^r \xrightarrow{h} A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où h est la matrice diagonale $(\pi^{n_i}\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$, de déterminant $\pi^{l_A(M)}$.

□

Ce résultat permet de calculer $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$ dans le cas où X est régulier en codimension 1. En effet, si x est un point de codimension 1 et $U = \mathrm{Spec}(A)$ un voisinage affine de x, comme le localisé $\mathcal{O}_{X,x}$ est un A-module plat on peut tensoriser une résolution projective cohérente de $\mathcal{F}$ sur U par $\mathcal{O}_{X,x}$ pour obtenir une résolution libre de $\mathcal{F}_x$. La multiplicité de $\mathrm{Div}(\mathcal{F})$ en x est donc la même que celle de $\mathrm{Div}(\widetilde{\mathcal{F}_x})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, à savoir $l_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x)$.

3.3.4 Remarque.

On peut définir plus généralement les déterminant et diviseur d'un complexe parfait $\mathcal{F}_\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-modules acyclique en tout point de profondeur 0. On obtient un diviseur $\mathrm{Div}(\mathcal{F}_\bullet)$ sur X tel que $\mathcal{O}_X(\mathrm{Div}(\mathcal{F}_\bullet)) \simeq \det(\mathcal{F}_\bullet)$.

Diviseur de ramification associé à un revêtement

On utilise les notions de la section précédente afin de proposer une définition d'invariant de ramification pour un revêtement de schéma.

3.3.5 Définition.
Soit $(Y, \mathcal{G})$ un pré-revêtement d'un S-schéma X. On suppose que Y est régulier en codimension 1, de sorte que tous les $\mathcal{O}_Y$-modules admettent des résolutions projectives au voisinage des points de codimension 1. Soit $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ le stabilisateur du groupoïde $\mathcal{G} \rightrightarrows Y$. On note $\sigma : \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \longrightarrow Y$ le morphisme de structure faisant de $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ un Y-schéma en groupes. Puisque $(Y, \mathcal{G})$ est un pré-revêtement, $\mathcal{G} \rightrightarrows Y$ est génériquement libre donc son stabilisateur est génériquement trivial. Ainsi $\sigma_* \mathfrak{m}_{\mathcal{G}}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module de torsion. D'après ce qui précède, on peut définir son diviseur sur Y. On pose

$$\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = \mathrm{Div}(\sigma_* \mathfrak{m}_{\mathcal{G}})$$

On dira que $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ est le diviseur de ramification du pré-revêtement $(Y, \mathcal{G})$.

Reprenons les exemples des actions des schémas en groupes α_p et μ_p sur la droite affine d'un corps k de caractéristique $p > 0$ donnés en 2.5.5 et calculons leurs diviseurs de ramification.

3.3.6 Exemples.

- Considérons le groupoïde $\mathcal{G}$ défini par l'action de $\mu_p = \mathrm{Spec}(\frac{k[t]}{t^p - 1})$ sur $X = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[z])$ donnée par $z \mapsto tz$.
  Le quotient de Z par ce groupoïde est donné par $Y = \mathrm{Spec}(k[y])$ et le morphisme quotient par $y \mapsto z^p$.
  Le produit fibré définissant le stabilisateur $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ est donné par le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{St}_{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[d] & G \times_k Z \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Z \times_k Z \end{tikzcd}$$

  Le comorphisme définissant la diagonale $Z \hookrightarrow Z \times_k Z$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} k[z_1, z_2] & \longrightarrow & k[z] \\ z_1, z_2 & \mapsto & z \end{array}$$

  Le comorphisme $G \times_k Z \longrightarrow Z \times_k Z$ est quant à lui donné par

$$\begin{array}{ccc} k[z_1, z_2] & \longrightarrow & \frac{k[z,t]}{t^p - 1} \\ z_1 & \mapsto & z \\ z_2 & \mapsto & tz \end{array}$$

  Ainsi on a $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} = \frac{k[z,t]}{t^p - 1} \otimes_{k[z_1, z_2]} k[z] = \frac{k[z,t]}{t^p - 1, (t-1)z}$. L'idéal d'augmentation de $\mathrm{St}_{\mathcal{G}}$ est donc

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{G}} = (t-1) \frac{k[z,t]}{t^p - 1, (t-1)z}.$$

  On obtient la résolution libre de $\sigma_* \mathfrak{m}_{\mathcal{G}}$ suivante :

$$0 \longrightarrow k[z]^{p-1} \xrightarrow{\times z} k[z]^{p-1} \longrightarrow (t-1) \frac{k[z,t]}{t^p - 1, (t-1)z} \longrightarrow 0,$$

où la première flèche est la multiplication de toutes les coordonnées par z. Son déterminant vaut z^{p-1}. Ainsi le diviseur de ramification de cette action est supporté au point 0 et a pour multiplicité $p-1$, c'est-à-dire

$$\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = (p-1)[0]$$

- On considère à présent le groupoïde $\mathcal{G}$ donné par l'action de $\alpha_p = \mathrm{Spec}(\frac{k[t]}{t^p})$ sur $Z = \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[z])$ par $z \mapsto \frac{z}{1+tz} = z(1 - tz + t^2z^2 - ... + (-1)^{p-1}t^{p-1}z^{p-1})$. Le morphisme diagonal $Z \hookrightarrow Z \times_k Z$ est le même que dans l'exemple précédent et le comorphisme de

$$G \times_k Z \longrightarrow Z \times_k Z$$

est donné par

$$\begin{array}{ccc} k[z_1, z_2] & \longrightarrow & \frac{k[z,t]}{t^p} \\ z_1 & \mapsto & z \\ z_2 & \mapsto & \frac{z}{1+tz} \end{array}$$

On a donc $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G}}} = \frac{k[z,t]}{t^p-1} \otimes_{k[z_1,z_2]} k[z] = \frac{k[z,t]}{t^p-1, tz^2}$ car $z - \frac{z}{1+tz} = \frac{tz^2}{1+tz}$.
On obtient alors la résolution libre de $\sigma_*\mathfrak{m}_{\mathcal{G}}$ suivante :

$$0 \longrightarrow k[z]^{p-1} \xrightarrow{\times z^2} k[z]^{p-1} \longrightarrow t\frac{k[z,t]}{t^p, tz^2} \longrightarrow 0,$$

où la première flèche est la multiplication de toutes les composantes par z^2. Ce morphisme est de déterminant $z^{2(p-1)}$. On a donc dans ce cas

$$\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = 2(p-1)[0].$$

- Donnons maintenant un exemple en dimension supérieure.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et k un corps de caractéristique $p > 0$. Considérons l'action du groupe $\mathrm{GL}_n = \mathrm{Spec}\,\frac{k[a_{ij},y]}{(\det(a_{ij})y-1)}$ sur $\mathrm{M}_n \simeq \mathbb{A}^{n^2} = \mathrm{Spec}\,k[z_{ij}]$ par multiplication à gauche :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n \times_k \mathrm{M}_n & \longrightarrow & \mathrm{M}_n \\ (P, M) & \mapsto & PM \end{array}$$

Pour tout entier $\alpha \geqslant 0$, notons G_α le noyau du α-ème morphisme de Frobenius

$$F_\alpha : \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n^{(\alpha)}.$$

Si $\beta \geqslant \alpha$, G_α est un sous-groupe de G_β.
On a

$$\mathrm{G}_\alpha = \mathrm{Spec}\left(\frac{k[a_{ij},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n]}{a_{ij}^{p^\alpha}\ \ i \neq j\ ,\ a_{ii}^{p^\alpha} - 1}\right)$$

(notons que les relations ci-dessus impliquent l'inversibilité du déterminant), c'est-à-dire

$$\mathrm{G}_i = \mathrm{Spec}(k[a_{ij}]/\mathfrak{m}^{[p^\alpha]}),$$

où $\mathfrak{m}^{[p^\alpha]}$ désigne l'idéal engendré par les puissances p^α-ièmes de l'idéal d'augmentation de GL_n. Il s'agit d'un k-schéma en groupes fini d'ordre $p^{\alpha n^2}$.

L'action de GL_n définie ci-dessus induit pour tout entier $\alpha > 0$ une action de G_α sur M_n. La coaction est donnée par le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \rho : & k[z_{ij}] & \longrightarrow & k[z_{ij}, a_{ij}]/\mathfrak{m}^{[p^\alpha]} \\ & z_{ij} & \mapsto & \displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_{il} z_{lj} \end{array}$$

Remarquons que cette action est libre sur l'ouvert schématiquement dense $\mathrm{GL}_n \subset \mathrm{M}_n$. Notons $Z = \mathrm{Spec}(k[z_{ij}]_{(\Delta)})$, où

$$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} z_{i,\sigma(i)}$$

désigne le déterminant en les z_{ij}. Il s'agit d'un polynôme irréductible, de sorte que Z est un diviseur premier dans M_n. Les actions de GL_n et de ses noyaux de Frobenius sur M_n induisent des actions sur Z. Notons que, puisque M_n est régulier, $k[z_{ij}]_{(\Delta)}$ est un anneau de valuation discrète, en particulier ce dernier est sans torsion. De plus la normalité est préservée par passage aux invariants sous l'action d'un groupoïde fini localement libre. Ainsi le schéma quotient Z/G_α est également normal. On en conclut que le morphisme de quotient $Z \longrightarrow Z/\mathrm{G}_\alpha$ est fini plat, de degré $p^{\alpha n^2}$. Or le morphisme correspondant au morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} k[y_{ij}]_{\Delta'} & \longrightarrow & k[z_{ij}]_\Delta \\ y_{ij} & \mapsto & z_{ij}^{p^\alpha} \end{array},$$

où Δ' désigne le déterminant en les variables y_{ij}, est également G_α-invariant, fini et plat de degré $p^{\alpha n^2}$. Notons $Y = \mathrm{Spec}(k[y_{ij}]_{\Delta'})$. Comme Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète et que Z/G_α est sans torsion, le morphisme Z/G_α est plat. Par ce qui précède, il est de degré 1. C'est donc un isomorphisme et l'on a $Z/\mathrm{G}_\alpha \simeq Y$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ un entier. On cherche à calculer le stabilisateur du groupoïde $\mathcal{G}_\alpha \rightrightarrows Z$ défini par l'action du α-ième noyau de Frobenius de GL_n décrite ci-dessus. Pour alléger les notations, on le notera St_α.
Ce dernier est donné par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \mathrm{St}_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & Z \times_k Z \end{tikzcd}$$

On a donc

$$\mathcal{O}_{\mathrm{St}_\alpha} = \mathcal{O}_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{O}_{Z \times_k Z}} \mathcal{O}_Z = \frac{A[a_{ij}]}{\mathfrak{m}^{[p^\alpha]}, \displaystyle\sum_l a_{il} z_{lj} - z_{ij}},$$

où l'on a posé $A = k[z_{ij}]_{(\Delta)}$.
Les relations $\displaystyle\sum_l a_{il} x_{lj} - z_{ij} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ expriment le fait que, si P désigne la matrice des (a_{ij}) et X désigne la matrice des (z_{ij}), on a $PX = X$, ce qui s'écrit aussi $QX = 0$, où Q est la matrice $P - \mathrm{I}_n$.
De plus la matrice X est de rang maximal dans $\mathrm{Frac}(A)$ puisqu'elle est inversible dans $k((z_{ij})_{i,j})$. Remarquons aussi que tous ses coefficients sont inversibles dans A puisqu'aucun des z_{ij} n'est divisible par Δ. L'algorithme du pivot de Gauss montre

alors qu'on peut trouver une matrice T, produit de transvections à coefficients dans A, telle que $XT = D_n(\Delta)$, où $D_n(\Delta)$ est la matrice de dilatation $\mathrm{I}_n + (\Delta - 1)E_{nn}$, matrice diagonale à coefficients égaux à 1 excepté le dernier valant Δ.

Comme T est inversible la relation $QX = 0$ équivaut à $QXT = 0$, soit à $QD_n(\Delta) = 0$. On trouve alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j \neq n \Rightarrow a_{ij} = 0,$$

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!],\ \Delta a_{in} = 0.$$

et

$$\Delta(a_{nn} - 1) = 0.$$

On convient de noter $a_i = a_{in}$ pour $i \in [\![1,n-1]\!]$ et $a_n = a_{nn} - 1$. On a alors la présentation de $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{H},d}}$ suivante :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{St}_\alpha} = \frac{A[a_1,\dots,a_n]}{a_1^{p^\alpha},\dots,a_n^{p^\alpha},\Delta a_1,\dots,\Delta a_n}$$

Calculons maintenant le diviseur de ramification associé à l'action de $\mathcal{G}_\alpha$ sur Z.

En tant que A-module, $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_\alpha}$ est engendré par les monômes de la forme $a_1^{i_1}\dots a_n^{i_n}$ avec $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $i_j \leqslant p^\alpha - 1$. L'idéal d'augmentation de St_α est engendré par les mêmes expressions avec la condition supplémentaire que les i_j ,ne soient pas tous nuls. Ces monômes sont au nombre de $p^{\alpha n} - 1$. On obtient donc une surjection

$$A^{\oplus p^{\alpha n - 1}} \longrightarrow \mathfrak{m}_{\mathrm{St}_\alpha}$$

envoyant chaque copie de A sur la droite engendrée par le monôme correspondant dans $\mathfrak{m}_\alpha$.
Le noyau de cette surjection est l'image du morphisme $A^{\oplus p^{\alpha n-1}} \longrightarrow A^{\oplus p^{\alpha n}-1}$ qui multiplie chaque coordonnée par Δ.
Le déterminant de ce morphisme est $\Delta^{p^{\alpha n}-1}$.
On trouve ainsi

$$R_\alpha = \mathrm{Div}(\mathfrak{m}_{\mathrm{St}_\alpha}) = (p^{\alpha n} - 1)(\Delta).$$

3.4 Cas particulier des revêtements galoisiens génériquement étales

Comme rappelé dans l'introduction, la théorie classique de la ramification associe à tout morphisme fini génériquement étale de schémas

$$f : Y \longrightarrow X$$

un diviseur qui mesure l'obstruction de f à être étale.

On cherche dans cette sous-section à relier cette théorie au formalisme développé dans cette thèse.

On démontre le résultat suivant, qui relie le diviseur de ramification classique avec la définition 3.3.5 dans le cas des revêtements modérés galoisiens génériquement étales.

3.4.1 Proposition.

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un revêtement génériquement étale galoisien de groupe G, au sens de [Gro63]. On suppose que Y est régulier en codimension 1 et on note $\mathcal{G}$ le groupoïde induit par l'action de G. Soit $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ le diviseur associé au stabilisateur du groupoïde $G \times_X Y \rightrightarrows Y$ défini par l'action de G sur Y et $\mathrm{R}_{Y/X} = \mathrm{div}(\Omega^1_{Y/X})$ le diviseur de la théorie classique. On a l'égalité

$$\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = \mathrm{R}_{Y/X}\,.$$

Preuve :

Il s'agit de montrer une égalité de diviseurs, on peut donc pour cela se placer en un point de codimension 1 de Y. De plus par hypothèse, Y est régulier en codimension 1. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(A_0)$ sont des spectres d'anneaux de valuations discrètes dont l'extension de corps des fractions K/K_0 est galoisienne de groupe G.

Si B est une A_0-algèbre, on notera $B[G]$ l'algèbre des fonctions de G considéré comme B-schéma en groupes constant, dont une B-base est formée par les fonctions

$$\begin{array}{rccc} e_g : & G & \longrightarrow & B \\ & h & \mapsto & \delta_{h,g} \end{array}$$

La multiplication est donc donnée par $e_g e_{g'} = \delta_{g,g'} e_g$.

L'action de G sur Y est équivalente à la donnée, pour chaque élément $g \in G$, d'un automorphisme de A-algèbres que l'on note encore

$$g := (g^\sharp)^{-1} : A \longrightarrow A.$$

Le comorphisme de $G \times_X Y \longrightarrow Y$ s'écrit alors

$$\begin{array}{rccc} \rho^\sharp : & A & \longrightarrow & A \otimes_{A_0} A_0[G] \simeq A[G] \\ & a & \mapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} g^{-1}(a) e_g \end{array}$$

La flèche $j : G \times_X Y \longrightarrow Y \times_X Y$ est quant à elle donnée par

$$\begin{array}{rccc} j^\sharp : & A \otimes_{A_0} A & \longrightarrow & A[G] \\ & a \otimes b & \mapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} a g^{-1}(b) e_g \end{array}$$

Calculons l'idéal I définissant le stabilisateur St du groupoïde $G \times_X Y \rightrightarrows Y$.

Il s'agit de l'idéal engendré par l'image par $j^\sharp$ de l'idéal définissant l'immersion diagonale

$$Y \hookrightarrow Y \times_X Y$$

(notons que Y est affine donc séparé). On sait que l'idéal de la diagonale de Y est engendré par les expressions de la forme $(1 \otimes a - a \otimes 1)$ pour $a \in A$. Or on a

$$j^\sharp(1 \otimes a - a \otimes 1) = \sum_{g \in G} (g^{-1}(x) - x) e_g$$

car, dans $A[G]$, on a $1 = \displaystyle\sum_{g \in G} e_g$. Ces expressions engendrent l'idéal I.

L'idéal d'augmentation $\mathfrak{m}$ de St est engendré par les images des e_g pour $g \neq 1$ dans $A[G]/I$.

Notons de plus que si $t = \sum_{g \in G} t_g e_g \in A[G]$ et $u = \sum_{g \in G} (g^{-1}(a) - a) e_g$ pour un certain $a \in A$, on a

$$tu = \sum_{g \in G} t_g (g^{-1}(a) - a) e_g$$

car $e_g e_{g'} = \delta_{g,g'} e_g$.

Ainsi on a un isomorphisme de A-algèbres

$$\mathcal{O}_{\mathrm{St}} = \bigoplus_{g \in G} A/I_g,$$

où I_g est l'idéal engendré par les expressions $(g^{-1}(a) - a)$ pour $a \in A$.

Par suite, comme A-module, on a

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{g \neq 1} A/I_g.$$

Par hypothèses, l'extension résiduelle de A/A_0 est séparable donc, d'après [Ser68, III, §6, prop.12], A est monogène sur A_0. Notons x un générateur et v la valuation dans A. Pour tout $g \in G$ on a

$$v(I_g) = v(g^{-1}(x) - x) := i_G(g)$$

Avec ces notations on a

$$\mathfrak{m} \simeq \bigoplus_{g \in G} A/\pi^{i_G(g)},$$

où π désigne une uniformisante de A.

On obtient alors une résolution de $\mathfrak{m}$ par des A-modules libres :

$$0 \longrightarrow A^{\oplus |G|-1} \longrightarrow A^{\oplus |G|-1} \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0,$$

où M est une matrice diagonale de taille $|G|-1$ dont les éléments diagonaux sont les $\pi^{i_G(g)}$. Son déterminant a pour valuation $\sum_{g \neq 1} i_G(g)$.

Or on sait, d'après [Ser68, IV, prop. 4], que

$$\sum_{g \neq 1} i_G(g) = v(\mathfrak{D}_{A/A_0}),$$

où $\mathfrak{D}_{A/A_0}$ désigne la différente de l'extension A/A_0.

On voit donc que les multiplicités des diviseurs $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ et $\mathrm{R}_{Y/X}$ sont égales en tout point de codimension 1 de Y, d'où le résultat annoncé.

□

3.5 Comportement du diviseur de ramification par dévissage

Comme rappelé dans l'introduction, une des principales propriétés du diviseur de ramification de la théorie classique est son comportement par dévissage : si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

de revêtements génériquement étales alors on a l'égalité de diviseurs de ramification

$$\mathrm{R}_{Z/X} = \mathrm{R}_{Z/Y} + f^* \mathrm{R}_{Y/X}\,.$$

On commence par l'observation suivante, conséquence facile de la proposition 3.2.6.

3.5.1 Proposition.
Soient X un schéma, $(Z, \mathcal{G})$ un revêtement de X. Soit $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ un sous-groupoïde fini localement libre de $\mathcal{G}$ tel que $(Z, \mathcal{H})$ soit un revêtement de $Y := Z/\mathcal{H}$. On note f le morphisme de quotient $Z \longrightarrow Y$. On suppose qu'il existe un groupoïde quotient $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{H}$ et que $(Y, \mathcal{Q})$ est un revêtement de X. Alors si $\mathcal{Q} \rightrightarrows Y$ agit librement, on a $\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}}$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du corollaire 3.2.7. En effet, on voit que si $\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}} = 0$ alors $\mathfrak{m}_{\mathcal{G}} \simeq \mathfrak{m}_{\mathcal{H}}$. Les diviseurs qu'ils définissent sont donc égaux. □

Dans la suite de cette section on reprend les actions des exemples 3.3.6 et on détermine le comportement de leurs diviseurs de ramification par dévissage.

3.5.2 Exemples. La lettre k désigne toujours un corps de caractéristique $p > 0$.

- Soit $n > 1$ un entier. On considère l'action du schéma en groupes $G := \alpha_{p^n} = \mathrm{Spec}(\frac{k[t]}{t^{p^n}-1})$ sur la droite affine $Z := \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[z])$ donnée par la formule

$$t.z = \frac{z}{1+tz}.$$

  On notera X le quotient de Z par cette action. On a $X \simeq \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x])$, le morphisme de quotient $Z \longrightarrow X$ étant donné par le morphisme d'algèbres $x \mapsto z^{p^n}$. Soit $1 \leqslant m < n$ un entier. Considérons le schéma en groupes $H := \alpha_{p^m} = \mathrm{Spec}(\frac{k[s]}{s^{p^m}})$ comme sous-schéma en groupes de G via la surjection $t \mapsto s$. On a $G/H \simeq \alpha_{p^{n-m}} = \mathrm{Spec}(\frac{k[u]}{p^{n-m}})$ et le morphisme de quotient $G \longrightarrow G/H$ est donné par le morphisme d'algèbres $u \mapsto t^{p^m}$. L'action de G sur Z induit une action de H, par la même formule. Notons Y le quotient de Z par H. On a encore $Y \simeq \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[y])$, le morphisme de quotient $f : Z \longrightarrow Y$ étant donné par $y \mapsto z^{p^m}$. Enfin on vérifie que l'action résiduelle de G/H sur Y se fait également via la même formule. Notons respectivement $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{Q}$ les groupoïdes induits par ces actions et $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$, $\mathrm{R}_{\mathcal{H}}$ et $R_{\mathcal{Q}}$ leurs diviseurs de ramification. Des calculs identiques à ceux de 3.3.6 montrent que l'on a $\mathrm{St}_{\mathcal{G}} = \mathrm{Spec}(\frac{k[z,t]}{t^{p^n}, tz^2})$, $\mathrm{St}_{\mathcal{H}} = \mathrm{Spec}(\frac{k[z,s]}{t^{p^m}, sz^2})$ et $\mathrm{St}_{\mathcal{Q}} = \mathrm{Spec}(\frac{k[y,u]}{u^{p^{n-m}}, uy^2})$. Ainsi on a $\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = 2(p^n-1)[0]$, $\mathrm{R}_{\mathcal{H}} = 2(p^m-1)[0]$ et $f^*\mathrm{R}_{\mathcal{Q}} = 2p^m(p^{n-m}-1)[0]$. On voit donc que l'on a, comme dans la théorie classique, l'égalité

$$\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}} + f^* \mathrm{R}_{\mathcal{Q}}$$

  entre les diviseurs de ramification.

Cependant, on va voir qu'il ne s'agit pas d'un fait général. Les actions de noyaux de Frobenius du groupe spécial linéaire rencontrées en 3.3.6 donnent un contre-exemple.

- Soient $0 < \alpha < \beta$ deux entiers. Soient G_α et G_β les noyaux de Frobenius d'ordre α et β de $\mathrm{GL}_{n,k}$. On note $\mathcal{H} \rightrightarrows Z$ et $\mathcal{G} \rightrightarrows Z$ les groupoïdes donnés par les actions de G_α et G_β sur $Z = \mathrm{Spec}(k[z_{ij}]_{(\Delta)})$, où Δ est le déterminant en les variables z_{ij}, décrites en 3.3.6. Ces groupoïdes sont finis et localement libres de sorte qu'on dispose des schémas quotients
$$Y := Z/\mathcal{G}_\alpha \quad \text{et} \quad X := Z/\mathcal{G}_\beta$$
Le même raisonnement que dans 3.3.6 montre que l'on a $Y = \mathrm{Spec}(k[y_{ij}]_{(\Delta')})$ et $X = \mathrm{Spec}(k[x_{ij}]_{\Delta''})$, où Δ' et Δ'' désignent respectivement les déterminants en les variables y_{ij} et x_{ij}. Les morphismes de quotients sont donnés respectivement par $y_{ij} \mapsto z_{ij}^{p^\alpha}$ et $x_{ij} \mapsto z_{ij}^{p^\beta}$. De plus d'après [Jan03, I, § 9.4] on a $\mathrm{G}_\beta / \mathrm{G}_\alpha \simeq \mathrm{G}_{\beta-\alpha}$. L'action résiduelle de $\mathrm{G}_{\beta-\alpha}$ sur Y se fait encore par multiplication des matrices. Les calculs de 3.3.6 montrent que l'on a $\mathrm{R}_\beta = (p^{\beta n} - 1)[\Delta]$, $\mathrm{R}_\alpha = (p^{\alpha n} - 1)[\Delta]$ et $\mathrm{R}_{\beta-\alpha} = (p^{(\beta-\alpha)n} - 1)[\Delta']$, où l'on a noté R_i le diviseur de ramification correspondant à l'action de G_i. Or Δ' est envoyé sur Δ^{p^α} par le comorphisme de $f : Z \longrightarrow Y$. On a donc $f^*[\Delta'] = p^\alpha[\Delta]$. Ainsi on a $\mathrm{R}_\alpha + f^* \mathrm{R}_{\beta-\alpha} = (p^{\alpha n} - 1)[\Delta] + p^\alpha(p^{(\beta-\alpha)n} - 1)[\Delta]$. On voit donc que
$$\mathrm{R}_\beta \neq \mathrm{R}_\alpha + f^* \mathrm{R}_{\beta-\alpha}\,.$$

Dans l'exemple précédent, on a $\mathrm{R}_\beta = \mathrm{R}_\alpha + p^{\alpha(n-1)} f^* \mathrm{R}_{\beta-\alpha}$. L'exemple suivant montre qu'en général il n'est pas possible de trouver un coefficient entier $c(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{Q}) := c$ tel que $\mathrm{R}_\mathcal{G} = \mathrm{R}_\mathcal{H} + c f^* \mathrm{R}_\mathcal{Q}$.

- Soit A la sous-variété de M_3 formée par les matrices de la forme
$$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_0 & x_3 \\ 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix}$$
et $\mathrm{G} \subset A$ le groupe de ses éléments inversibles, c'est-à-dire les matrices M de la forme ci-dessus pour lesquelles x_0 est inversible. Soit $i > 1$ un entier et G_i le i-ème noyau de Frobenius de G. L'action de G sur le localisé de A en x_0 par multiplication induit une action de G_i dont on va calculer le stabilisateur. On note $\mathcal{O}$ l'anneau de fonctions de A localisé en x_0. Comme en 3.3.6, on montre que l'on a $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})/\mathrm{G}_i = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{p^i})$. Pour décrire le stabilisateur de G_i, on doit résoudre l'équation $PM = M$. Notons
$$P - 1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$$
avec $a_0^{p^i} = a_1^{p^i} = a_2^{p^i} = a_3^{p^i} = 0$. On obtient le système suivant :
$$\begin{cases} a_0 x_0 = 0 \\ a_0 x_1 + a_1 x_0 = 0 \\ a_0 x_2 + a_1 x_3 + a_2 x_0 = 0 \\ a_0 x_3 + a_3 x_0 = 0. \end{cases}$$
Remarquons que, dans $\mathcal{O}$, les éléments x_1, x_2 et x_3 sont inversibles. La seconde équation s'écrit donc aussi $a_0 = -x_1^{-1} x_0 a_1$. En reportant cette expression dans la troisième équation on trouve $a_1(x_3 - x_1^{-1} x_0 x_2 a_1) + a_2 x_0 = 0$ puis en multipliant par x_1 on a $a_1(x_1 x_3 - x_0 x_2) + a_2 x_1 x_0 = 0$. De même dans la dernière équation on trouve

$-x_0x_3a_1 + x_0x_1a_3 = 0$. Le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x_0a_0 = 0 \\ x_1a_0 + x_0a_1 = 0 \\ (x_1x_3 - x_0x_2)a_1 + x_0x_1a_2 = 0 \\ x_3(-x_0a_1) + x_0x_1a_3 = 0 \end{cases}$$

De plus l'élément $d := x_1x_3 - x_0x_2 \in \mathcal{O}$ est également inversible. La troisième équation du système ci-dessus s'écrit donc aussi $a_1 = d^{-1}x_0x_1a_2$. En reportant dans la dernière équation on trouve $x_0x_1(x_0x_3a_2d^{-1}+a_3) = 0$. Comme $x_1^{-1}d$ est inversible, cette dernière équation est équivalente à $x_0(x_0x_3a_2+da_3) = 0$. On a alors le système

$$\begin{cases} x_0a_0 = 0 \\ x_1a_0 + x_0a_1 = 0 \\ da_1 + x_0x_1a_2 = 0 \\ (x_0x_3a_2 + da_3)x_0 = 0 \end{cases}$$

De la troisième équation on tire $a_1 = -d^{-1}x_0x_1a_2$. En reportant dans la seconde on trouve $a_0 = -x_1^{-1}x_0a_1 = x_0^2d^{-1}a_2$. La première équation devient alors $x_0^3a_2d^{-1} = 0$ et est donc équivalente à $x_0^3a_2 = 0$. Ainsi, en posant $a_3' = x_0x_3a_2 + da_3$ et $z = x_0$, on trouve que l'équation $PM = M$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} a_1 = -d^{-1}zx_1a_2 \\ a_0 = d^{-1}z^2a_2 \\ z^3a_2 = 0 \\ za_3' = 0 \end{cases}$$

Le stabilisateur de l'action de G_i sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ est donc le $\mathcal{O}$-schéma affine d'anneau

$$\frac{\mathcal{O}[a_2, a_3']}{a_2^{p^i}, (a_3')^{p^i}, z^3a_2, za_3'}$$

Son idéal d'augmentation $\mathfrak{m}_i$ est engendré comme $\mathcal{O}$-module par :

- les éléments a_2^j avec $1 \leqslant j \leqslant p^i - 1$, annulés par z^3, en nombre $p^i - 1$,
- les éléments $a_2^j(a_3')^k$ avec $0 \leqslant j \leqslant p^i - 1$ et $1 \leqslant k \leqslant p^i - 1$, annulés par z, en nombre $p^i(p^i - 1)$.

On obtient donc une résolution de $\mathfrak{m}_i$ comme $\mathcal{O}$-module de la forme suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus p^{2i}-1} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}^{\oplus p^{2i}-1} \longrightarrow \mathfrak{m}_i \longrightarrow 0,$$

où φ est une matrice diagonale dont $p^i - 1$ termes diagonaux valent z^3, les autres valant z. Son déterminant est donc $\det(\varphi) = z^{3(p^i-1)+p^i(p^i-1)} = z^{(p^i+3)(p^i-1)}$. Ainsi, en notant R_i diviseur de ramification associé à cette action on a

$$\mathrm{R}_i = (p^i + 3)(p^i - 1)[z].$$

Étudions maintenant son comportement par dévissage. On se donne deux entiers naturels $1 < i < j$. On note $Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, $Y = Z/\mathrm{G}_i = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{p^i})$ et $X = Z/\mathrm{G}_j = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}^{p^j})$. Ici encore on a $\mathrm{G}_j / \mathrm{G}_i \simeq \mathrm{G}_{j-i}$. Le morphisme de quotient $f : Z \longrightarrow Y$ est donné par l'élévation à la puissance p^i-ème sur les anneaux de fonctions. On a donc, d'après les calculs précédents, $f^*\mathrm{R}_{j-i} = p^i(p^{j-i} + 3)(p^{j-i} - 1)[z] = (p^j + 3p^i)(p^j - p^i)[z]$.

Supposons qu'il existe un entier $c = c(i,j)$ tel que $\mathrm{R}_j = \mathrm{R}_i + cf^* \mathrm{R}_{j-i}$. On doit donc avoir $(p^i+3)(p^i-1) + c(p^j+3p^i)(p^j-p^i) = (p^j+3)(p^j-1)$. Alors on trouve une égalité de la forme $(3-c+(c-1)p^{j-i})p^{i+j} = a$, où les valuations p-adiques des deux termes de l'égalité sont différentes. C'est donc impossible.

Chapitre 4

Revêtements sous les schémas en groupes diagonalisables

Une fois la notion de ramification pour les revêtements généralisés introduite, se pose naturellement la question, à l'instar de la situation classique, de relier la ramification d'un revêtement $(Y \longrightarrow X, \mathcal{G} \rightrightarrows X)$ à la géométrie du morphisme $Y \longrightarrow X$. C'est ce qu'on se propose de faire dans ce chapitre pour les revêtements sous les schémas en groupes diagonalisables.

On fixe un schéma de base S de caractéristique $p > 0$ et un S-schéma noethérien X.

4.1 Actions de schémas en groupes diagonalisables

Nous rassemblons ici quelques définitions et faits utiles sur les schémas en groupes diagonalisables et leurs actions. Pour plus de détails, voir [Gro11b, Exp.VIII].

4.1.1 Définitions.

Un S-schéma en groupes G est dit diagonalisable si il est isomorphe au groupe des caractères d'un S-schéma en groupes constant, c'est-à-dire si il existe un groupe abstrait M et un isomorphisme de S-schémas en groupes $G \simeq \mathrm{Hom}_{S-gp}(M_S, \mathbb{G}_{m,S})$. Cette condition équivaut à l'existence d'un groupe abélien M et d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres de Hopf $\mathcal{O}_G \simeq \mathcal{O}_S[M]$, où $\mathcal{O}_S[M]$ est l'algèbre de M à coefficients dans $\mathcal{O}_S$.

Si M est un groupe on notera $\mathrm{D}(M)$ le S-schéma en groupes diagonalisable qui lui correspond. On obtient un foncteur contravariant $M \mapsto \mathrm{D}(M)$ entre la catégorie des groupes et la catégorie des schémas en groupes diagonalisables. En effet tout morphisme de groupes $M \longrightarrow N$ s'étend de manière unique en un morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres $\mathcal{O}_S[M] \longrightarrow \mathcal{O}_S[N]$ donc en un morphisme $\mathrm{D}(N) \longrightarrow \mathrm{D}(M)$. D'après [Gro11b, Exp.VIII, th 3.1], ce foncteur est exact (où l'on a plongé la catégorie des schémas en groupes dans la catégorie abélienne des faisceaux fppf en groupes).

4.1.2 Exemple.

Si n est un entier naturel, en appliquant D à la suite exacte de groupes abéliens $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ on trouve la suite exacte de faisceaux fppf en groupes

$$1 \longrightarrow \mu_{n,S} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} \xrightarrow{(-)^n} \mathbb{G}_{m,s} \longrightarrow 1,$$

dite suite de Kummer.

Notons que $\mu_{n,S}$ est étale si et seulement si n est premier à toutes les caractéristiques résiduelles de S, auquel cas la suite ci-dessus est exacte pour la topologie étale. C'est une incarnation d'un fait général. On peut en fait montrer l'équivalence suivante (cf [Gro11b, Exp VIII, prop 2.1]) :

$\mathrm{D}(M) \longrightarrow S$ est lisse si et seulement si M est de type fini et l'ordre de son sous-groupe de torsion est premier aux caractéristiques résiduelles de S.

Un groupe diagonalisable est toujours fidèlement plat et affine sur S, cf *loc. cit.*

Rappelons qu'une action d'un S-schéma en groupes G sur un S-schéma X est la donnée d'un morphisme $\rho : G \times_S X \longrightarrow X$ induisant, pour tout S-schéma T, une action du groupe $G(T)$ sur $X(T)$. Les actions de groupes diagonalisables se décrivent facilement en termes d'algèbre graduée.

4.1.3 Définition.
Soient M un groupe abélien et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre. On dit que $\mathcal{A}$ est graduée de type M si elle admet une décomposition comme $\mathcal{O}_S$-module

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in M} \mathcal{A}_m$$

où
- $\mathcal{A}_0$ est une sous-$\mathcal{O}_S$-algèbre de $\mathcal{A}$
- Pour tout $(m, n) \in M^2$, $\mathcal{A}_m.\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{m+n}$

On a alors la proposition suivante, cf [Gro11a, Exp I, 4.7.3] et [Gro11b, Exp VIII, Prop. 4.1-4.6] :

4.1.4 Proposition. *Soit M un groupe abélien. Le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes et graduées de type M et la catégorie opposée à celle des S-schémas affines munis d'une action de* $\mathrm{D}(M)$.

Soit $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ un X-schéma muni d'une action de $D(M)$. Alors $Y \longrightarrow X$ est un $\mathrm{D}(M)$-torseur si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :
(a) Pour tout $m \in M$, $\mathcal{A}_m$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible.
(b) Pour tout $(m, n) \in M^2$, le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{A}_m \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_{m+n}$ induit par la multiplication est un isomorphisme.
Les conditions (a) et (b) sont aussi équivalentes à :
(a') Le morphisme $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{A}_0$ est un isomorphisme.
(b') Pour tout $m \in M$, $\mathcal{A}_m.\mathcal{A}_{-m} = \mathcal{A}_0$.

4.2 Revêtements sous les groupes diagonalisables

Nous fixons X un S-schéma. Comme rappelé ci-dessus, la donnée d'une action d'un schéma en groupes diagonalisable $G = \mathrm{D}(M)$ sur un $\mathcal{S}$-schéma Y et d'un morphisme G-invariant $f : Y \longrightarrow X$ tel que Y/G s'identifie à X est équivalente à la donnée d'une $\mathcal{O}_X$-graduation de type M sur $\mathcal{O}_Y$. On fixe un tel couple (Y, G) et on suppose de plus que G est fini. Alors Y est affine sur X. Notons $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$. Alors $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre finie et on a une décomposition $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in M} \mathcal{A}_m$.

L'action de G sur Y est donnée par le morphisme de $\mathcal{O}_S$-algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[M] \\ a = \sum_{m \in M} a_m & \mapsto & \sum_{m \in M} a_m \otimes m \end{array}$$

La sous-algèbre des invariants est $\mathcal{A}_0$, de sorte que $X \simeq Y/G = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_0)$.

Supposons maintenant que (Y, G) est un revêtement galoisien de X, au sens de la définition 3.1.1.1. Il existe donc un ouvert schématiquement dense $V \subset Y$ sur lequel G agit librement. Quitte à remplacer V par sa G-orbite, on peut supposer que V est G-stable. Alors le morphisme

$$\varphi : G \times_S Y \longrightarrow Y \times_X Y$$

défini sur les foncteurs de points par $(g, y) \mapsto (y, g.y)$ induit un isomorphisme $G \times_S V \simeq V \times_X V$. Ainsi φ est schématiquement dominant. Le morphisme

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \longrightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_G \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y)$$

correspondant est donc injectif. Puisque f est plat, chaque $\mathcal{A}_m$ est $\mathcal{O}_X$-plat donc localement libre. On peut donc recouvrir $X = \cup_i U_i$ par des ouverts affines tels que $\mathcal{A}$ et tous les $\mathcal{A}_m$ soient libres en restriction aux ouverts affines $f^{-1}(U_i)$ de Y. Quitte à recouvrir l'image de U_i par des ouverts affines V_i de S et considérer les restrictions $f^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i$, on peut supposer que S est également affine.

4.2.1 Structure locale

On se place sur un ouvert $f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ comme ci-dessus. Pour décrire la structure locale du revêtement (Y, G) on peut supposer que S, X et Y sont des schémas affines et que $\mathcal{O}_Y$ est libre (nécessairement de rang fini) sur $\mathcal{O}_X$. On note $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(A_0)$ et $S = \mathrm{Spec}(B)$. Soit $m \in M$. Comme A_m est facteur direct de A considéré comme A_0-module, il est projectif donc localement libre si A_0 est noethérien. Quitte à localiser encore dans X, on peut donc supposer que A_m est libre. Pour calculer le rang de A_m on peut se placer sur un ouvert où l'action est libre. Alors la condition (b') de 4.1.4 montre que le rang de A_m sur A_0 est 1.

On a alors le théorème suivant :

4.2.1.1 Théorème. *Avec les notations précédentes, il existe une base $(e_m)_{m \in M}$ de A comme A_0-module avec $e_0 = 1$ et des éléments $(\alpha_{m,n})_{m,n \in M}$ de A_0, non diviseurs de 0, avec $\alpha_{0,n} = \alpha_{m,0} = 1$, $\alpha_{m,n} = \alpha_{n,m}$ et*

$$\forall l, m, n \in M, \ \alpha_{l,m}\alpha_{l+m,n} = \alpha_{m,n}\alpha_{l,m+n},$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $m \in M$, on a $A_m = A_0 e_m$;

(ii) pour tous $m, n \in M$, on a $e_m e_n = \alpha_{m,n} e_{m+n}$.

De plus si $M = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, les éléments $\alpha_{i,j}$ sont déterminés par les $\alpha_{i,1}$. Plus précisément, notons $s(i) \in \mathbb{Z}$ l'unique représentant de $i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ dans $\{0, \ldots, p^n - 1\}$. On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & (i, j) & \mapsto & \frac{1}{p^n}(s(i) + s(j) - s(i+j)) \end{array}.$$

Alors si l'on pose $\beta_0 = 1$, $\beta_{i+1} = \alpha_{0,1} \dots \alpha_{i,1}$ *pour tout* $i \neq p^n - 1$ *et* $f = \alpha_{0,1} \dots \alpha_{p^n-1,1}$, *on a :*

$$\alpha_{i,j} = \beta_{i+1}\beta_i^{-1}\beta_j^{-1} f^{\sigma_{i,j}}. \qquad (\star)$$

Réciproquement, pour tout choix d'un $(p^n - 1)$*-uplet* $(\alpha_{i,1})_{i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ *d'éléments de* A_0 *non diviseurs de* 0 *on obtient un* μ_{p^n}*-revêtement de* $X = \mathrm{Spec}(A_0)$ *de la façon suivante :*

- *On pose* $A = A_0^{\oplus p^n}$, *on attribue à chaque copie de* A_0 *un indice* $i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ *et on note* $e_i = (\delta_{ij})_{j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$.
- *On définit, pour tous* $i, j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, *l'élément* $\alpha_{i,j} \in A_0$ *selon la formule* $(\star)$.
- *On donne à* A *une structure de* A_0*-algèbre* $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$*-graduée en posant, pour chaque* (i, j),

$$e_i e_j = \alpha_{i,j} e_{i+j}.$$

Alors $Y = \mathrm{Spec}(A)$ *est un* μ_{p^n}*-revêtement de* $\mathrm{Spec}(A_0)$.

Preuve : D'après les remarques précédentes, chaque A_m est un module libre de rang 1 sur A_0 dont on note e_m un générateur. On peut de plus choisir $e_0 = 1$. Comme, pour tout $(n, m) \in M^2$ on a $A_m A_n \subset A_{m+n}$, en notant $\alpha_{m,n}$ le déterminant de la multiplication

$$A_m \otimes_{A_0} A_n \longrightarrow A_{m+n}$$

on a $e_m e_n = \alpha_{m,n} e_{m+n}$.

Remarquons d'abord que la commutativité et l'associativité de A s'expriment par les relations suivantes dans A_0 :

- Pour tout $(m, n) \in M^2$, $\alpha_{m,n} = \alpha_{m,n}$
- Pour tout $(l, m, n) \in M^3$, $\alpha_{l,m}\alpha_{l+m,n} = \alpha_{m,n}\alpha_{l,m+n}$.

On peut aussi supposer que $\alpha_{0,m} = \alpha_{m,0} = 1$ pour tout $m \in M$. Puisque le morphisme $\psi : A \otimes_{A_0} A \longrightarrow A \otimes_B B[M]$ induit par $\varphi^\sharp$ est injectif entre deux A_0-modules libres de même rang, son déterminant est non diviseur de zéro dans A_0. Calculons ce dernier sur la base des $e_m \otimes e_n$ à la source et $e_k \otimes l$ au but. On voit la matrice de ψ comme une matrice indexée par M^2.

On a $\psi(e_m \otimes e_n) = e_m(e_n \otimes n) = \alpha_{m,n} e_{m+n} \otimes n$. La matrice de ψ dans ces bases est donc monômiale : son coefficient d'indice $((k, l), (m, n))$ vaut 0 si $(k, l) \neq (m + n, n)$ et $\alpha_{m,n}$ sinon. Son déterminant vaut donc $\varepsilon(\sigma) \prod_{(m,n) \in M^2} \alpha_{m,n}$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation associée. On en conclut que tous les $\alpha_{m,n}$ sont non diviseurs de zéro.

Supposons à présent que $M = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, donc $G = \mu_{p^n,S}$, pour un certain entier naturel n. On peut dans ce cas préciser les observations ci-dessus.

Dans le localisé de A_0 par rapport à la partie multiplicative des éléments non diviseurs de 0, on considère le sous-groupe multiplicatif engendré par les $\alpha_{i,j}$, que l'on note N. On le considère comme un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module trivial.

D'après ce qui précède on a, pour tous i, j et k dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $\alpha_{i,j}\alpha_{i+j,k}\alpha_{j,k}^{-1}\alpha_{j+k,i}^{-1} = 1$, de sorte que la famille $(\alpha_{i,j})$ définit un 2-cocycle de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ à valeurs dans N.

Tout élément $f \in N$ définit un 2-cocycle $(f^{\sigma_{i,j}})$ de telle sorte que si $f = g^{p^n}$ est une puissance p^n-ième, alors $(f^{\sigma_{i,j}})$ est le cobord induit par la cochaine $(g^{-s(i)})$. Or on a, d'après [Ser68, VIII, §4], $H^2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, N) = N/N^{p^n}$. Il existe donc $f \in N$ et un cobord $\beta : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow N$ tel que, pour tous i et j dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$,

$$\alpha_{i,j} = \beta_{i+j}\beta_i^{-1}\beta_j^{-1} f^{\sigma_{i,j}}.$$

Notons que la paire (β, f) n'est pas uniquement déterminée : on obtient encore le cocycle $(\alpha_{i,j})$ en remplaçant (β, f) par $(\{g^{-s(i)}\beta_i\}, g^{p^n} f)$. En particulier, quitte à multiplier par $g = \beta_1$, on peut supposer que $\beta_1 = 1$, ce que l'on fait désormais. Fixons $i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. La relation $(\star)$ avec $j = 0$ montre que $\beta_0 = 1$; pour $j = 1$ elle donne $\beta_{i+1} = \alpha_{i,1}\beta_i f^{-\sigma_{i,1}}$. On distingue deux cas :

– Si $i \neq p^n - 1$ alors $\sigma_{i,1} = 0$ et $\beta_{i+1} = \alpha_{i,1}\beta_i$. Ainsi par récurrence

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i,1} \dots \alpha_{1,1}.$$

– Si $i = p^n - 1$ alors $\sigma_{i,1} = 1$ et comme $\beta_0 = 1$ on a $1 = \alpha_{p^n-1,1}\beta_{p^n-1} f$ et donc

$$f = \prod_{j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \alpha_{j,1}.$$

□

4.3 Revêtements Gorenstein sous $\mu_{p^n,S}$

4.3.1 Faisceaux dualisants

On rappelle ici quelques notions de base de dualité pour les schémas. Soit $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme propre de S-schémas et $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ des faisceaux cohérents sut T.

Si V est un ouvert affine de T', tout morphisme $\varphi : \mathcal{F}_{|f^{-1}(V)} \longrightarrow \mathcal{G}_{|f^{-1}(V)}$ induit des morphismes $H^i(\varphi) : R^i f_* \mathcal{F}(V) \longrightarrow R^i f_* \mathcal{G}(V)$. On obtient, pour tout i, un accouplement naturel

$$f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times R^i f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^i f_* \mathcal{G}.$$

4.3.1.1 Définition.

Soit i un entier naturel.

On dit que f admet un faisceau i-dualisant si il existe un faisceau quasi-cohérent ω_f sur T muni d'un morphisme de $\mathcal{O}_{T'}$-modules

$$tr_f : R^i f_* \omega_f \longrightarrow \mathcal{O}_{T'}$$

tel que, pour tout $\mathcal{O}_T$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, la composition

$$f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F}, \omega_f) \times R^i f_* \mathcal{F} \longrightarrow R^i f_* \omega_f \xrightarrow{tr_f} \mathcal{O}_{T'}$$

induise un isomorphisme de $\mathcal{O}_{T'}$-modules

$$f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F}, \omega_f) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{T'}}(R^i f_* \mathcal{F}, \mathcal{O}_{T'}).$$

Un tel faisceau, s'il existe, est unique. On rappelle le résultat général suivant, cf [Liu02, 6.4, Thm 4.32] :

4.3.1.2 Proposition.

Soit $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme plat, projectif et localement d'intersection complète à fibres de dimension relative $\leqslant r$ avec T' localement noethérien. Alors f admet un faisceau r-dualisant. Si de plus f est lisse alors $\omega_f \simeq \Lambda^r \Omega^1_{T/T'}$.

Si f est fini alors les images directes supérieures s'annulent et la dualité se résume au degré 0. Ces morphismes admettent toujours un faisceau dualisant que l'on peut préciser :

4.3.1.3 Proposition. [Liu02, 6.4.25]

Si $f : T \longrightarrow T'$ est un morphisme fini de schémas localement noethériens alors f admet un faisceau 0-dualisant et l'on a

$$\omega_f \simeq f^!\mathcal{O}_{T'},$$

où $f^!\mathcal{O}_{T'}$ désigne le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{T'}}(f_*\mathcal{O}_T, \mathcal{O}_{T'})$ muni de la structure de $\mathcal{O}_T$-module défini localement par $a.\theta = (x \mapsto \theta(ax))$. La trace tr_f est l'évaluation en 1, définie localement par $tr_f(\theta) = \theta(1)$ pour $\theta \in f^!\mathcal{O}_{T'}$.

On dira que f est Gorenstein si de plus ω_f est inversible.

4.3.1.4 Remarque.

La théorie de dualité que nous présentons ici est une version très simplifiée de la théorie générale. Nous nous limitons aux morphismes projectifs de schémas localement noethériens. La théorie générale concerne les morphismes propres et se formule en termes de catégories dérivées. Voir à ce sujet [Har66]. Nous n'en aurons pas l'usage.

4.3.2 Le cas des $\mu_{p^n,S}$-revêtements

On reprend les notations et hypothèses de la section précédente : on fixe un schéma noethérien S et on se donne un S-schéma X muni d'un $\mu_{p^n,S}$-revêtement que l'on note simplement $f : Y \longrightarrow X$. On cherche à exhiber une condition nécessaire et suffisante sur les constantes de structure du revêtement f introduites dans la proposition 4.2.1.1. On a le résultat suivant :

4.3.2.1 Théorème.

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un μ_{p^n}-revêtement. On note

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$$

la $\mathcal{O}_X$-algèbre de fonctions de Y, graduée par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ on note U_{ij} l'ouvert de X où le morphisme de faisceaux inversibles

$$\mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}_j \longrightarrow \mathcal{A}_{i+j}$$

induit par la multiplication de $\mathcal{A}$ est un isomorphisme. Pour tout $l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ on pose $U_l = \cap_{i+j=l} U_{ij}$.

Alors l'ouvert de X au-dessus duquel le revêtement $f : Y \longrightarrow X$ est Gorenstein est la réunion des U_l pour $l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. En particulier, le revêtement f est Gorenstein si et seulement si

$$X = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} U_l.$$

Preuve :

Remarquons d'abord que, puisque f est fini localement libre de rang p^n, d'après 4.3.1.3 f admet un faisceau 0-dualisant (que l'on appellera simplement dualisant) et l'on a $\omega_f = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f_*\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$ considéré comme $\mathcal{O}_Y$-module.

Supposons que f soit Gorenstein. Comme f est fini localement libre, ω_f est cohérent donc cette condition est équivalente à la condition suivante :

Pour tout $y \in Y$, $\omega_{f,y}$ est libre de rang 1.

Quitte à localiser dans X, on peut supposer que X et Y sont des spectres d'anneaux locaux. On reprend les notations de 4.2.1.1 : on pose $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(A_0)$, où A et A_0 sont des anneaux locaux et A est un A_0-module libre de rang p^n. L'action de $\mu_{p^n,S}$ sur Y est donnée par un cocycle $(\alpha_{i,j})$ vérifiant les propriétés établies en 2.1.2. Enfin on notera $A^* = \mathrm{Hom}_{A_0}(A, A_0)$, que l'on considère comme A-module par la loi $a.\theta = (x \mapsto \theta(ax))$.

Il existe donc une forme linéaire $\varphi : A \longrightarrow A_0$ telle que $A^* = A\varphi$. Notons $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ une A_0-base de A avec $e_0 = 1$ et $(e_i^*)_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ la base duale. Toute forme linéaire $\theta : A \longrightarrow A_0$ s'écrit $\theta = \sum_i \theta_i e_i^*$ comme combinaison linéaire à coefficients dans A_0 des e_i^*. L'égalité $A^* = A\varphi$ signifie qu'on peut trouver, pour tout $j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, un élément $b_j = \sum_i b_{ij} e_i$ tel que $e_j^* = b_j.\varphi$.

Or pour tout triplet $(i, j, k) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^3$ et tout $x \in A$ on a

$$e_i.e_j^*(e_k) = e_j^*(e_i e_k) = e_j^*(\alpha_{i,k} e_{i+k}) = \alpha_{i,k}\delta_{i+k,j},$$

où δ est le symbole de Kronecker, de sorte que

$$e_i.e_j^* = \alpha_{i,j-i} e_{j-i}^*$$

Ainsi, en notant $\varphi = \sum_m \varphi_m e_m^*$, on a

$$\begin{aligned} b_j.\varphi &= \sum_{i,m\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} b_{ij}\varphi_m e_i.e_m^* \\ &= \sum_{i,m\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} b_{ij}\varphi_m \alpha_{i,m-i} e_{m-i}^* \\ &= \sum_{k+l=m} b_{k,j}\varphi_{l+k}\alpha_{k,l} e_l^* \end{aligned}$$

L'égalité $b_j.\varphi = e_j^*$ signifie donc que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} b_{k,j}\varphi_{l+k}\alpha_{k,l} = \delta_{l,j}$. Ainsi φ engendre A^* comme A-module si et seulement si la matrice $M(\varphi) = (\alpha_{i,j}\varphi_{i+j})_{i,j\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ est inversible.

Or, dans le localisé de A_0 par rapport à la partie multiplicative des éléments non diviseurs de 0, on a d'après 4.2.1.1, pour tout $(i, j) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$,

$$\alpha_{i,j}\varphi_{i+j} = \frac{1}{\beta_i\beta_j}\beta_{i+j}\varphi_{i+j} f^{\sigma_{i,j}},$$

de sorte que si $N(\varphi)$ désigne la matrice $(\beta_{i+j}\varphi_{i+j} f^{\sigma_{i,j}})_{i,j\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$, on a

$$\det(M(\varphi)) = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \beta_i^2}\det(N(\varphi))$$

Nous allons calculer le déterminant de la matrice $N(\varphi)$. En notant $\gamma_i = \beta_i\varphi_i$, on a

$$N(\varphi) = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p^n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_0 f \\ \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma_0 f & & \gamma_{p^n-3} f \\ \gamma_{p^n-1} & \gamma_0 f & \gamma_1 f & \cdots & \gamma_{p^n-2} f \end{pmatrix}$$

On remarque que , si n_{ij} désigne le coefficient d'indice (i,j) de $N(\varphi)$, on a

$$n_{ij} = \begin{cases} \gamma_{i+j} & \text{si } s(i)+s(j) \leqslant p^n - 1 \\ \gamma_{i+j} f & \text{sinon} \end{cases}$$

On fait les opérations élémentaires consistant à échanger la i-ème ligne avec la $(p^n - 1 - i)$-ième. On obtient la matrice

$$N'(\varphi) = \begin{pmatrix} \gamma_{p^n-1} & \gamma_0 f & \gamma_1 f & \cdots & \gamma_{p^n-2} f \\ \gamma_{p^n-2} & \gamma_{p^n-1} & \gamma_0 f & \cdots & \gamma_{p^n-3} f \\ \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & & \gamma_0 f \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p^n-1} \end{pmatrix}$$

Les coefficients $(n'_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ de $N'(\varphi)$ sont donnés par

$$n'_{ij} = \begin{cases} \gamma_{j-i-1} & \text{si } s(i) \geqslant s(j) \\ \gamma_{j-i-1} f & \text{sinon} \end{cases}$$

et ne dépendent donc que de la différence entre l'indice de ligne et l'indice de colonne.

Soit $\mathfrak{S}_{p^n}$ le groupe symétrique d'ordre p^n, que l'on voit comme les bijections de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ on note τ_k la permutation $(i \mapsto i+k)$. Remarquons que pour tout couple (k,l) on a $\tau_k \circ \tau_l = \tau_{k+l}$. Ainsi le groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ agit sur $\mathfrak{S}_{p^n}$ par la formule

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_{p^n} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{p^n} \\ (k,\sigma) & \mapsto & \tau_k \circ \sigma \circ \tau_k^{-1} \end{array}$$

On désigne par Ω l'ensemble des orbites de cette action. On a $\mathfrak{S}_{p^n} = \coprod_{\omega\in\Omega} \omega$. On peut regrouper par orbites les termes intervenant dans le déterminant de $N'(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \det(N'(\varphi)) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{p^n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} n'_{i,\sigma(i)} \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{\sigma\in\omega} \varepsilon(\sigma) \prod_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} n'_{i,\sigma(i)} \end{aligned}$$

où ε désigne la signature. C'est un morphisme de groupes vers $\{-1,1\}$ donc elle est constante sur les orbites.

Remarquons de plus que si σ et θ sont dans la même orbite, alors les ensembles $\{n'_{i,\sigma(i)}, i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}$ et $\{n'_{i,\theta(i)}, i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}$ sont égaux. En effet si il existe k tel que $\theta = \tau_k \circ \sigma \circ \tau_k^{-1}$ on obtient une bijection entre ces deux ensembles en envoyant $n'_{i,\theta(i)} = n'_{i,\sigma(i-k)+k}$ sur $n'_{i+k,\sigma(i-k)}$ pour tout i.

Ainsi, si θ et σ sont dans la même orbite on a

$$\varepsilon(\theta) \sum_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} n'_{i,\theta(i)} = \varepsilon(\sigma) \sum_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} n'_{i,\sigma(i)}.$$

Or chaque orbite est, par la formule des classes, de cardinal une puissance de p. De plus l'orbite d'une permutation σ est de cardinal 1 si et seulement si σ commute à tous les τ_k, si

et seulement si $\sigma \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \sigma$ puisque $\tau_k = \tau_1^k$. Si tel est le cas on trouve $\sigma(i) = \sigma(i-1)+1$ puis $\sigma(i) = \sigma(0) + i$ pour tout i, c'est-à-dire que σ est l'une des permutations τ_k. Ces dernières sont de signature 1 pour tout k.

Enfin pour $k \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ on a $\varepsilon(\tau_k) = 1$ et

$$n'_{i,\tau_k(i)} = \begin{cases} \gamma_{k-1} & \text{si } s(i) \geqslant s(i+k) \\ \gamma_{k-1} f & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $\displaystyle\prod_{i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} n'_{i,\tau_k(i)} = \gamma_{k-1}^{p^n} f^{p^n-1-k}$.

Ainsi le déterminant de $N'(\varphi)$ se met sous la forme

$$\det(N'(\varphi)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \gamma_{i-1}^{p^n} f^{p^n-1-i} + pz$$

avec $z \in A_0$ et comme $p = 0$ dans A_0 on a

$$\det(N(\varphi)) = (-1)^{\frac{p^n-1}{2}} \det(N'(\varphi)) = (-1)^{\frac{p^n-1}{2}} \sum_{i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \gamma_{i-1}^{p^n} f^{p^n-1-i}$$

Notons $\varepsilon = (-1)^{\frac{p^n-1}{2}}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ on a

$$\frac{1}{\displaystyle\prod_{j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \beta_j^2} \gamma_{i-1}^{p^n} f^{p^n-1-i} = c_i \varphi_i^{p^n}$$

avec $c_i = \dfrac{\beta_i^{p^n} f^{p^n-1-i}}{\displaystyle\prod_{j \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \beta_j^2}$.

Avec ces notations on a donc

$$\det(M(\varphi)) = \varepsilon \sum_{i \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} c_i \varphi_i^{p^n}.$$

On va donner une autre expression des c_i qui montrera directement que ces derniers sont dans A_0. A cet effet on remarque que si θ_l désigne la forme linéaire dont la j-ième coordonnée vaut δ_{lj}, la matrice $M(\theta_l)$ est une matrice monomiale : son terme d'indice (i,j) vaut $\delta_{l,i+j}\alpha_{ij}$. La signature de la permutation $(i \mapsto l-i)$ étant ε on a $\det(M(\theta_l)) = \varepsilon \displaystyle\prod_{i+j=l} \alpha_{ij}$.

Ainsi on trouve, pour tout $l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$,

$$c_l = \prod_{i+j=l} \alpha_{ij}.$$

On a donc, pour tout $\varphi \in A^*$,

$$\det(M(\varphi)) = \sum_{l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \Big(\prod_{i+j=l} \alpha_{ij}\Big) \varphi_l^{p^n}.$$

La A_0-algèbre A est de Gorenstein si et seulement si on peut trouver $\varphi \in A^*$ qui rende ce déterminant inversible. Puisque A et A_0 sont locaux, c'est le cas si et seulement si il existe $l \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ tel que α_{ij} soit inversible dès que $i+j = l$, auquel cas la forme e_l^* engendre le A-module A^*.

□

4.4 Ramification des revêtements sous les p-groupes diagonalisables

On fixe un S-schéma X. Soit M un p-groupe fini (abstrait) dont on notera $|M|$ le cardinal et $G := \mathrm{D}(M)$ le S-schéma en groupes diagonalisable $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[M])$ associé. On notera X^m l'élément de $\mathcal{O}_S[M]$ correspondant à $m \in M$. La multiplication dans $\mathcal{O}_S[M]$ s'écrit alors $X^m X^n = X^{m+n}$. Soit enfin (Y, G) un revêtement galoisien de groupe G. On propose dans ce chapitre de calculer le diviseur de ramification du revêtement (Y, G), au sens de la définition 3.3.

Il s'agit d'un calcul local. On supposera que Y est régulier en codimension 1. Si y est un point de Y de codimension 1, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un anneau de valuation discrète, que l'on notera A et dont on notera v la valuation. On dispose d'une graduation de type M

$$A = \bigoplus_{m \in M} A_m$$

induite par l'action de G. Comme (Y, G) est un revêtement, chaque A_m est un A_0-module libre de rang 1 dont on notera e_m un générateur. On fera également la convention $e_0 = 1$.

La formation du stabilisateur commute au changement de base donc le stabilisateur $\mathrm{St}_{G,y}$ du revêtement en y est donné par la produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{St}_{G,y} & \longrightarrow & G \times_S Y_y \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow \\ Y_y & \longrightarrow & Y_y \times_S Y_y \end{array}$$

où l'on a posé $Y_y = \mathrm{Spec}(A)$. L'immersion diagonale de Y_y est donnée par le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \longrightarrow & A \\ a \otimes b & \mapsto & ab \end{array}$$

Le morphisme $G \times_S Y_y \longrightarrow Y_y \times_S Y_y$ est quant à lui donné par le morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \longrightarrow & A[M] \\ a \otimes b & \mapsto & \displaystyle\sum_{m \in M} b a_m X^m \end{array}$$

On a alors

$$\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{G,y}} = A[M] \otimes_{A \otimes A} A = \frac{A[M]}{\left(\displaystyle\sum_{m \in M} b a_m X^m - ab,\ a, b \in A \right)}.$$

En considérant les éléments e_m pour $m \in M$ on voit que les relations $\displaystyle\sum_{m \in M} b a_m X^m - ab = 0$ pour $a, b \in A$ sont équivalentes aux relations $e_m(X^m - 1) = 0$ pour $m \in M$. On a donc

$$\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{G,y}} = \frac{A[M]}{e_m(X^m - 1),\ m \in M}.$$

Son idéal d'augmentation est engendré par les images des éléments $X^m - 1$, $m \neq 0$ dans $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{\mathcal{G},y}}$.

On notera alors donc

$$\mathfrak{m}_{\mathrm{St}_{G,y}} = \sum_{m \in M^*} (X^m - 1)\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{G,y}}.$$

Remarquons que la collection des éléments $X^m - 1$ pour $m \in M$ forme encore un système de générateurs de $A[M]$. On obtient donc une surjection de A-modules

$$\varphi : A^{\oplus |M|-1} \longrightarrow \sigma_* \mathfrak{m}_{\mathrm{St}_{G,y}}$$

en envoyant le i-ème vecteur de la base canonique de $A^{\oplus |M|-1}$ sur $X^m - 1$. On cherche à déterminer son noyau.

Remarquons d'abord que si e_m est inversible dans A alors $X^m = 1$ dans $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{G,y}}$. Notons de plus que si e_m et $e_{m'}$ sont inversibles alors $e_{m+m'}$ l'est aussi, en vertu de l'égalité $e_m e_{m'} = \alpha_{m,m'} e_{m+m'}$. Ainsi l'ensemble

$$N := \{n \in M \mid e_n \in A^\times\}$$

est un sous-groupe de M. Notons de plus que e_m est inversible si et seulement si e_{-m} l'est, si et seulement si $\alpha_{m,-m}$ est inversible dans A_0, en vertu de l'égalité $e_m e_{-m} = \alpha_{m,-m} \in A_0$. On a donc également $N = \{n \in N \mid \alpha_{n,-n} \in A_0^\times\}$.

On a alors la proposition suivante :

4.4.1 Proposition.

Si $N = \{0\}$ alors il existe $d \in M$ tel que :

(i) e_d est une uniformisante de A.

(ii) Le noyau de φ soit égal au sous-A-module $(e_d A)^{\oplus |M|-1}$ de $A^{\oplus |M|-1}$.

Preuve :

Remarquons d'abord que les valuations des e_m sont distinctes. En effet, soit $(m,n) \in M^2$ tel que $v(e_m) = v(e_n)$. Alors il existe un élément inversible $a \in A^\times$ tel que $e_n = a e_m$. Écrivons

$$a = \sum_{k \in M} a_k e_k.$$

sur la base $(e_i)_i$ de A comme A_0-module. On a alors

$$a e_m = \sum_{k \in M} a_k e_{m+k} = e_n$$

Ainsi on a $a_k = 0$ pour $k \neq n - m$ et donc $a = a_{n-m} e_{n-m} \in A_{n-m}$. Mais $a \in A^\times$ est inversible donc e_{n-m} est également inversible. Comme $N = \{0\}$ on a $n = m$.

Notons ensuite que l'on a, pour tout $m \in M$, $v(e_m) \leqslant |M| - 1$. En effet, supposons qu'il existe $n \in M$ tel que $v(e_n) > |M|$. On peut alors écrire $e_n = \pi^{|M|} b$, où $b \in A$ et π est une uniformisante de A.

Or pour tout $x \in A$ on a $x^{|M|} \in A_0$.

En effet, si $x = \sum_{m \in M} x_m$ s'envoie sur $\sum_{m \in M} x_m X^m$ par la coaction alors, comme $|M|$ est un puissance de p, $x^{|M|}$ s'envoie sur

$$\sum_{m \in M} x_m X^{|M| m}.$$

Mais $|M|$ annule M d'après le théorème de Lagrange. Ainsi pour tout $m \in M$ on a $X^{|M|m} = 1$ et donc $x^{|M|} \in A_0$.

Écrivons alors

$$b = \sum_{k \in M} b_k e_k.$$

On a donc

$$e_n = \sum_{k \in M} \pi^{|M|} b_k e_k.$$

D'après ce qui précède, pour tout $k \in M$ on a $\pi^{|M|} b_k \in A_0$. Ainsi $b_k = 0$ si $k \neq n$ et donc

$$e_n = \pi^{|M|} f_n$$

avec $f_n \in A_n$. On a alors $A_0 e_n \subsetneq A_0 f_n$ ce qui est absurde par définition de e_n.

Ainsi les valuations des e_m sont toutes distinctes et inférieures ou égales à $|M| - 1$. On en conclut que pour tout $i \in \{0, .., |M| - 1\}$ il existe $m \in M$ tel que $v(e_m) = i$. En particulier il existe $d \in M$ tel que $v(e_d) = 1$, c'est-à-dire tel que e_d soit une uniformisante de A. Si $m \in M$ on peut alors écrire $e_m = a e_d^{v(e_m)}$, où $a \in A^\times$ est un inversible de A. Or on a $e_d^{v(e_m)} = \beta e_{v(e_m)d}$, où $\beta \in A_0$. Écrivons $a = \sum_{k \in M} a_k e_k$. On a alors

$$e_m = \sum_{k \in M} \beta a_k e_{k + v(e_m)d}.$$

Puisque $\beta a_k \in A_0$ pour tout $k \in M$ on a $a_k = 0$ pour $k \neq m - v(e_m)d$. Ainsi $a = a_{m - v(e_m)d} e_{m - v(e_m)d}$ est inversible. Comme $N = \{0\}$ on doit avoir $m - v(e_m)d = 0$ et donc $m = v(e_m)d$.

Alors dans $A[M]$ on a l'égalité

$$X^m - 1 = (X^d - 1) \sum_{i=0}^{v(e_m)-1} X^{id}.$$

Dans $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{G,y}}$ on a donc, pour tout $m \in M^*$,

$$e_d(X^m - 1) = 0.$$

Ainsi, si $a \in A$ n'est pas inversible dans A, étant divisible par e_d il vérifie :

$$\forall m \in M^*,\ a(X^m - 1) = 0.$$

Réciproquement, soit $x = (x_k)_{k \in M^*} \in A^{\oplus |M| - 1}$ tel que $\varphi(x) = 0$. Écrivons, pour $k \in M^*$,

$$x_k = y_k + z_k$$

avec $z_k \in e_d A$ et $y_k \in A^\times$.

Alors on a

$$\varphi(x) = \sum_{k \in M} y_k (X^k - 1) = 0.$$

Mais les $X^k - 1$ pour $k \in M$ forment une k_A-base de $k_A[M]$, où k_A est le corps résiduel de A. Dès lors l'égalité ci-dessus implique $y_k = 0$ pour tout $k \in M^*$. Ainsi $x \in (e_d A)^{\oplus |M| - 1}$.

On voit donc que $\ker(\varphi) = (e_d A)^{\oplus |M| - 1}$.

□

4.4.2 Définition.

Avec les définitions précédentes, lorsque $N = \{0\}$ on dira que (Y, G) est totalement ramifié en y.

Avec les notations de la proposition précédente, on a donc la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow A^{\oplus|M|-1} \xrightarrow{\times e_d} A^{\oplus|M|-1} \xrightarrow{\varphi} \sigma_* \mathfrak{m}_{\mathrm{St}_{G,y}} \longrightarrow 0,$$

où la première flèche est la multiplication de toutes les coordonnées par e_d. Son déterminant est $(e_d)^{|M|-1}$, de valuation $|M| - 1$.

Lorsque $N \neq \{0\}$ le calcul ci-dessus permet encore de déterminer la multiplicité en y du diviseur de ramification. On a la proposition suivante :

4.4.3 Proposition.

Avec les définitions et hypothèses précédentes, la multiplicité en y du diviseur de ramification $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ est $|M/N| - 1$.

Preuve :

Notons $H = \mathrm{D}(M/N)$ et $K = \mathrm{D}(N)$. La suite exacte de groupes abstraits

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

donne, par application du foncteur D, la suite exacte de S-schémas en groupes

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

L'action de G sur Y_y se découpe en l'action de H suivie de l'action de G/H, selon le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} Y_y \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_y/H \arrow[dl] \\ & Y_y/G & \end{tikzcd}$$

Cela se traduit sur les anneaux de fonctions de la façon suivante : la graduation de type M

$$A = \bigoplus_{m \in M} A_m$$

correspondant à l'action de G peut se réécrire

$$A = \bigoplus_{\bar{m} \in M/N} \bigoplus_{n \in N} A_{m+n},$$

où l'on a choisi, pour chaque $\bar{m} \in M/N$, un représentant $m \in M$.

Par définition, pour tout couple $(n, n') \in N^2$ on a

$$A_n \otimes_{A_0} A_{n'} \simeq A_{n+n'}$$

de sorte que le morphisme $Y_y/H \longrightarrow Y_y/G$ est un K-torseur. Son diviseur de ramification est donc trivial. D'après 3.2.6, on a donc $\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}}$, où $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont les groupoïdes induits par les actions de G et H.

De plus par définition de N, le revêtement (Y_y, H) de Y_y/H vérifie l'hypothèse de la proposition précédente. La multiplicité de $\mathrm{R}_{\mathcal{H}}$ en y est donc $|M/N| - 1$.

□

On vient donc de démontrer le théorème suivant :

4.4.4 Théorème.

Soit X un S-schéma et (Y, G) un revêtement galoisien de X sous un S-schéma en groupes diagonalisable $G = \mathrm{D}(M)$. On note $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ son diviseur de ramification.

Pour tout point $y \in Y^{(1)} \cap \mathrm{Supp}(\mathrm{R}_{\mathcal{G}})$ de codimension 1 du support de $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$, il existe un sous-groupe maximal $H_y = \mathrm{D}(M/N_y)$ de G tel que

(i) Le revêtement $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}), H_y)$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})/H_y$ induit par l'action de G est totalement ramifié.

(ii) Le revêtement résiduel $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})/H_y \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})/G$ est un G/H_y-torseur.

(iii) La multiplicité de $R_{\mathcal{G}}$ en y est $|M/N_y| - 1$.

4.4.5 Remarque.

Un autre candidat naturel pour mesurer la ramification d'un revêtement généralisé galoisien $(Y \longrightarrow X, G)$ est la partie de codimension 1 du sous-schéma des points fixes de l'action $\rho : G \times_S Y \longrightarrow Y$ de G sur Y. Ce dernier est défini comme le schéma représentant le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Fix}_G : & \mathrm{Sch}/S & \longrightarrow & \mathrm{Ens} \\ & T & \mapsto & \{t \in Y(T) \mid \rho \circ (\mathrm{id}_G \times t) = p_2 \circ (\mathrm{id}_g \times t)\} \end{array},$$

où $p_2 : G \times_S Y \longrightarrow Y$ désigne la seconde projection. Sous des hypothèses raisonnables, le foncteur Fix_G est représentable par un sous-schéma fermé de Y, que l'on note Y_{fix} et dont on note $\mathcal{I}_{\mathrm{fix}}$ le faisceau d'idéaux. On renvoie à [Fog73] pour plus de détails. Explicitons $\mathcal{I}_{\mathrm{fix}}$ dans le cas d'un revêtement $(Y \longrightarrow X, G)$ sous un schéma en groupes diagonalisable $G = D(M)$. Quitte à recouvrir Y par des ouverts affines, on peut supposer que $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et on note $A = \bigoplus_{m \in M} A_m$. Quitte à localiser un peu plus dans Y, on peut supposer que les A_m sont des A_0-modules libres de rang 1, dont on note e_m des générateurs. Soit T un S-schéma et $(t : T \longrightarrow Y) \in \mathrm{Fix}_G(T)$. Alors t correspond à une morphisme $t^\sharp : A \longrightarrow \mathcal{O}_T(T)$. Par définition, $t \in \mathrm{Fix}_G(T)$ si et seulement si, pour tout $a = \sum_{m \in M} a_m \in A$, on a $\sum_{m \in M} t^\sharp(a_m) X^m = t^\sharp(a)$. Comme les variables X^m sont A-libres, on doit avoir

$$t^\sharp(a_m) = \begin{cases} 0 \text{ si} & m \neq 0 \\ a_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est le cas si et seulement si $t^\sharp$ se factorise par A/I, où I est l'idéal engendré par les e_m pour $m \neq 0$. On en déduit que $I_{\mathrm{fix}} =< e_m,\ m \neq 0 >$. En particulier, si A est un anneau de valuation discrète, I_{fix} est engendré par l'élément de valuation minimale parmi les e_m. Si le revêtement est totalement ramifié, on sait d'après 4.4.1 qu'un des e_m est de valuation 1. Alors I_{fix} n'est autre que l'idéal maximal de A. Or, toujours d'après 4.4.1, la multiplicité du diviseur de ramification $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ en un point de codimension 1 est $p^n - 1$. Ainsi, si $(Y \longrightarrow X, G)$ est totalement ramifié on a, en tout point $y \in Y$ de codimension 1,

$$\mathcal{O}_Y(-\mathrm{R}_{\mathcal{G}})_y = (\mathcal{I}_{\mathrm{fix},y})^{\otimes p^n - 1}.$$

4.5 Dévissage du diviseur de ramification des μ_{p^n}-revêtements

Dans cette section on propose d'étudier le comportement par dévissage du diviseur de ramification, évoqué en 3.5.2, dans le cas particulier des μ_{p^n}-revêtements de courbes. On suppose que $S = \mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps algébriquement clos k de caractéristique

$p > 0$. Soit X un schéma k-schéma de dimension 1, p un nombre premier, $n > 1$ un entier naturel et $(Z \longrightarrow X, \mu_{p^n,k})$ un $\mu_{p^n,k}$-revêtement de X, où Z est régulier. On abrégera la notation $\mu_{p^n,k}$ en μ_{p^n}. On se donne un entier naturel $1 < m \leqslant n$ et on considère l'action induite sur Z du sous-groupe $\mu_{p^m} \hookrightarrow \mu_{p^n}$. Notons $\mu_{p^n} = \mathrm{Spec}(\frac{k[t]}{t^{p^n}-1})$ et $\mu_{p^m} = \mathrm{Spec}(\frac{k[s]}{s^{p^m}-1})$. L'immersion fermée $\mu_{p^m} \hookrightarrow \mu_{p^n}$ est donnée par $t \mapsto s$. On dispose du schéma en groupes quotient $\mu_{p^n}/\mu_{p^m} = \mu_{p^{n-m}} = \mathrm{Spec}(\frac{k[u]}{u^{p^{n-m}}})$. Soit $Y = Z/\mu_{p^m}$. Alors $(Z \longrightarrow Y, \mu_{p^m})$ est un μ_{p^m}-revêtement de Y et $(Y \longrightarrow X, \mu_{p^{n-m}})$ est un $\mu_{p^{n-m}}$-revêtement de X. On note St_n, St_m, St_{n-m} les stabilisateurs et R_n, R_m et R_{n-m} les diviseurs de ramification associés à ces actions. Notons enfin $f : Z \longrightarrow Y$ le morphisme de quotient. Alors on a la proposition suivante :

4.5.1 Proposition.

Avec les notations précédentes, on a l'égalité de diviseurs de ramification

$$\mathrm{R}_n = \mathrm{R}_m + f^* \mathrm{R}_{n-m}$$

Preuve :

Pour comparer ces diviseurs, il suffit de se placer un en point de codimension 1 de Z. Comme ce dernier est régulier en codimension 1 et que la normalité est préservée par passage aux anneaux d'invariants sous un schéma en groupes fini, Y et X sont également réguliers en codimension 1. On peut donc supposer que $Z = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et $X = \mathrm{Spec}(C)$ sont des spectres d'anneaux de valuations discrètes. D'après la proposition 3.5.1 et le théorème 4.4.4, on peut également supposer que les revêtements $Z \longrightarrow X$, $Z \longrightarrow Y$ et $Y \longrightarrow X$ sont totalement ramifiés. Alors les calculs de 4.4.1 montrent que l'on a $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_n} = \frac{A[t]}{t^{p^n}-1,\pi(t-1)}$. De même $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_m} = \frac{A[s]}{s^{p^m}-1,\pi(s-1)}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{St}_{n-m}} = \frac{B[u]}{u^{p^{n-m}}-1,\pi'(u-1)}$, où π (resp. π') désigne une uniformisante de A (resp. de B).

Si $f^\sharp : B \longrightarrow A$ désigne le comorphisme de f, on va montrer que l'on a $f^\sharp(\pi') = \pi^{p^m}$. En effet, soit $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}$ une base de A comme B-module adaptée à la graduation $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} A_i$ donnée par l'action de μ_{p^m} sur Z. On remarque que, pour tout i, on a

$$e_i^{p^m} = (\prod_{k=1}^{p^m-1} \alpha_{i,ki}) e_{p^m i} \in A_0 = B.$$

Ainsi le comorphisme du m-ième morphisme de Frobenius relatif

$$\begin{array}{rccc} F_m^\sharp : & A^{(m)} & \longrightarrow & A \\ & a \otimes \lambda & \mapsto & \lambda a^{p^m} \end{array}$$

est à valeurs dans B. On a donc une factorisation

$$\begin{tikzcd} A^{(m)} \arrow[r, "F_m^\sharp"] \arrow[dr, "\tau"'] & A \\ & B \arrow[u, "f^\sharp"'] \end{tikzcd} .$$

Or A, $A^{(m)}$ et B sont des anneaux de valuation discrète donc en particulier intègres. Ainsi les morphismes du diagrammes ci-dessus sont tous plats. Or $f^\sharp$ et $F_m^\sharp$ sont tous les deux de degré p^m. Ainsi τ est fini plat de degré 1, c'est donc un isomorphisme. On a donc

bien $f^\sharp(\pi') = \pi^{p^m}$. Ceci nous permet de calculer le tiré en arrière par f du stabilisateur de l'action de $\mu_{p^{n-m}}$ sur Y. On a

$$\mathcal{O}_{f^* \mathrm{St}_{m-n}} = \frac{B[u]}{u^{p^{n-m}} - 1, \pi'(u-1)} \otimes_B A = \frac{A[u]}{u^{p^{n-m}} - 1, \pi^{p^m}(u-1)}.$$

On peut alors déterminer la multiplicité du diviseur $f^* \mathrm{R}_{n-m}$. En effet on obtient la résolution de l'idéal d'augmentation de $f^* \mathrm{St}_{n-m}$ comme A-module suivante :

$$0 \longrightarrow A^{\oplus p^{n-m}-1} \xrightarrow{\varphi} A^{\oplus p^{n-m}-1} \xrightarrow{\psi} (u-1)\frac{A[u]}{u^{p^{n-m}} - 1, \pi^{p^m}(u-1)} \longrightarrow 0,$$

où ψ envoie le i-ème vecteur de la base canonique de $A^{\oplus p^{n-m}-1}$ sur $(u-1)^i$ et où φ est la multiplication de toutes les coordonnées par π^m. Le déterminant de φ est

$$\det(\varphi) = \pi^{p^n - p^m}.$$

La multiplicité de $f^* \mathrm{R}_{n-m}$ est donc $p^n - p^m$. Or des résolutions similaires montrent que les multiplicités des diviseurs R_n et R_m sont respectivement $p^n - 1$ et $p^m - 1$. Ainsi les diviseurs R_n et $\mathrm{R}_m + f^* \mathrm{R}_{n-m}$ ont même multiplicité en tous les points de codimension 1 de Z, ils sont donc égaux.

□

On cherche désormais à relier l'invariant de ramification défini et calculé ci-dessus avec la géométrie du morphisme $Y \longrightarrow X$. Par analogie avec la situation classique des revêtements génériquement étales, on se propose de le comparer à la classe canonique de $Y \longrightarrow X$.

4.6 Comparaison avec le faisceau dualisant

Dans cette section, on cherche à comparer le diviseur de ramification d'un revêtement sous un schéma en groupes diagonalisable infinitésimal avec le faisceau dualisant du morphisme de quotient. Notons tout d'abord que les morphismes correspondant à des revêtements galoisiens de groupe diagonalisable sont toujours Cohen-Macaulay et que leur faisceau dualisant est localement libre. En effet tout morphisme fini est Cohen-Macaulay d'après 4.3.1.3. De plus par hypothèses les morphismes de revêtements sont localement libres. Or si

$$f : Y \longrightarrow X$$

est fini est localement libre, toujours d'après 4.3.1.3 on a

$$\omega_f = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f_* \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X)$$

qui est également localement libre.

On fera encore l'hypothèse que les schémas qui interviennent sont définis sur le spectre $S = \mathrm{Spec}(k)$ d'un corps k ce caractéristique positive algébriquement clos. On fixe un k-schéma X. Soit (Y, G) un revêtement de X donné par l'action d'un k-schéma en groupes $G = \mathrm{D}(M)$ sur un k-schéma Y régulier en codimension 1, c'est-à-dire une k-courbe lisse.

Cas des μ_{p^n}-revêtements

Supposons d'abord que l'on ait $G = \mu_{p^n}$. Récemment, N.Tziolas, dans [Tzi15] a prouvé le résultat suivant :

4.6.1 Théorème. [Tzi15, Th 8.1]
Soit Y un S-schéma muni d'une action de μ_p et $\pi : Y \longrightarrow X = Y/\mu_p$ le quotient. On suppose que Y admet un faisceau dualisant ω_Y, satisfait la condition S_2 de Serre et que ses singularités éventuelles sont à croisements normaux. Alors X a également un faisceau dualisant ω_X. De plus, si $\mathcal{I}_{\text{fix}}$ désigne le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma des points fixes de Y, on a

$$\omega_Y = (\pi^*\omega_X \otimes \mathcal{I}_{\text{fix}}^{[1-p]})^{[1]},$$

où, pour tout $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{F}$, on a noté $\mathcal{F}^{[n]} = (\mathcal{F}^{\otimes n})^{**}$ la puissance n-ième réflexive de $\mathcal{F}$.

Grâce au formalisme développé dans la partie 3, et aux calculs ci-dessus, on peut étendre ce résultat pour étudier la ramification des revêtements sous les schémas en groupes diagonalisables de hauteur quelconque. On a résultat suivant :

4.6.2 Théorème.
Soit X un k-schéma de dimension 1 et $f : (Y \longrightarrow X, \mu_{p^n})$ un μ_{p^n}-revêtement de X avec Y régulier. On note $\mathcal{G}$ le groupoïde induit par l'action de μ_{p^n} sur Z. On suppose de plus que Y est noethérien, régulier en codimension 1 et que f est Gorenstein. Alors on a

$$\omega_f = \mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{G}}),$$

où $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ désigne le diviseur de ramification du revêtement défini en 3.3 et ω_f le faisceau dualisant de f.

Preuve :
On va montrer le résultat par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, c'est une conséquence du résultat de Tziolas [Tzi15, Th 8.1 - Step 2]. En effet, par hypothèse f est Gorenstein donc ω_f est inversible et en particulier réflexif. Or le résultat susmentionné affirme que l'on a $(\omega_f)^* = \mathcal{I}_{\text{fix}}^{[p-1]}$. Alors $\omega_f = (\mathcal{I}_{\text{fix}}^{[p-1]})^* = (\mathcal{I}_{\text{fix}}^{\otimes p-1})^*$ puisque $(\mathcal{I}_{\text{fix}}^{\otimes p-1})^*$ est le dual d'un module de type fini donc est réflexif. De plus comme Y est noethérien et que $\mathcal{I}_{\text{fix}}^{\otimes p-1}$ est cohérent, d'après [Har66, III, prop. 6.8] pour tout point $y \in Y$ on a $(\mathcal{I}_{\text{fix},y}^{\otimes p-1})^* = (\mathcal{I}_{\text{fix}}^{\otimes p-1})_y^*$. Mais, d'après 4.4.5, pour tout $y \in Y$ de codimension 1 on a $\mathcal{O}_Y(-\mathrm{R}_{\mathcal{G}})_y = \mathcal{I}_{\text{fix},y}^{\otimes p-1}$. Par ce qui précède on a donc, en passant au dual, $\mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{G}})_y = (\mathcal{I}_{\text{fix},y}^{\otimes p-1})^* = (\mathcal{I}_{\text{fix}}^{\otimes p-1})_y^* = \omega_{f,y}$. Ainsi les faisceaux $\mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{G}})$ et ω sont deux faisceaux réflexifs égaux en tout point de codimension 1, ils sont donc égaux et on a bien l'égalité $\mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{G}}) = \omega_f$. Soit $n > 1$ un entier et supposons la formule vraie pour tous les μ_{p^m}-revêtements avec $m < n$. Soit $(Z \longrightarrow X, \mu_{p^n})$ un μ_{p^n}-revêtement de X. Considérons l'action induite du sous-groupe $\mu_{p^{n-1}}$ de μ_{p^n} sur Z et notons $Y = Z/\mu_{p^{n-1}}$ le quotient. Alors $(g : Z \longrightarrow Y, \mu_{p^{n-1}})$ est un $\mu_{p^{n-1}}$-revêtement de Y et l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

qui donne lieu à un revêtement résiduel $(h : Y \longrightarrow X, \mu_p)$ de X. Si $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{Q}$ désignent les groupoïdes associés, on a d'après 4.5.1 $\mathrm{R}_{\mathcal{G}} = \mathrm{R}_{\mathcal{H}} + \pi^* \mathrm{R}_{\mathcal{Q}}$. Or par hypothèse de récurrence,

on a $\mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{Q}}) = \omega_h$ et $\mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{H}}) = \omega_g$. De plus, d'après [Liu02, 6.4, Lemma 4.26], on a $\omega_f = \omega_g \otimes g^*\omega_h$. Ainsi

$$\omega_f = \mathcal{O}_Z(\mathrm{R}_{\mathcal{H}}) \otimes_{\mathcal{O}_Z} g^*\mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{O}_Z(\mathrm{R}_{\mathcal{H}} + g^*\,\mathrm{R}_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{O}_Z(\mathrm{R}_{\mathcal{G}})$$

et la formule est démontrée au rang n.

□

Extension aux revêtements de groupe diagonalisable arbitraire

Les résultats de la section précédente se généralisent par dévissage au cas des revêtements sous un groupe diagonalisable quelconque. En effet, si G est un tel groupe alors il existe des entiers $(n_1, ..., n_r)$ tels que

$$G \simeq \prod_{i=1}^{r} \mu_{p^{n_i},S}$$

Si (Y, G) est un revêtement de X on peut donc décomposer le morphisme

$$f : Y \longrightarrow X$$

donné par ce revêtement en une composée de morphismes de quotients successifs par des groupes du type $\mu_{p^n,S}$. Plus précisément, on décompose f en

$$Y = Y_0 \xrightarrow{f_1} Y_1 \longrightarrow ... \xrightarrow{f_{r-1}} Y_r = X$$

où pour tout $i \in \{1, ...r\}$, Y_i est le quotient de Y_{i-1} par $\mu_{p^{n_i},S}$.

L'application successive de la proposition ci-dessus donne le théorème suivant :

4.6.3 Théorème.
Soit X un k-schéma de dimension 1 et (Y, G) un revêtement galoisien de X avec Y régulier. Si G est diagonalisable et si le morphisme

$$Y \longrightarrow X$$

est Gorenstein alors on a la formule suivante :

$$\omega_{Y/X} = \mathcal{O}_Y(\mathrm{R}_{\mathcal{G}}),$$

où $\mathrm{R}_{\mathcal{G}}$ est le diviseur de ramification du revêtement (Y, G).

4.6.4 Remarque.
Cette formule doit être considérée comme un analogue de la formule de Riemann-Hurwitz pour les morphismes de quotient par des schémas en groupes diagonalisables, comme l'illustre l'application suivante :

4.6.5 Application.
Soit C une courbe projective et lisse sur k. Supposons donnée une action d'un schéma en groupes diagonalisable, libre sur un ouvert schématiquement dense et transitive sur les fibres du quotient $f : C \longrightarrow D := C/G$, qui est fini localement libre d'ordre $|G|$. D'après le théorème précédent on a

$$\omega_{C/D} = \mathcal{O}_C(\mathrm{R}_{\mathcal{G}}).$$

De plus on a

$$\omega_{C/k} \simeq f^*\omega_{D/k} \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_{C/D}.$$

En prenant les degrés de chacun des membres de l'égalité ci-dessus on trouve la formule ci-dessous reliant les genres des courbes C et D :

$$2g(C) - 2 = |G|(2g(D) - 2) + \deg(\mathrm{R}_{\mathcal{G}})$$

On trouve ainsi une formule identique à la formule de Riemann-Hurwitz dans ce cadre.

4.6.6 Exemple.

A titre d'exemple, considérons l'action de $\mu_{p,k}$ sur $\mathbb{P}^1_k$ par multiplication :

$$\begin{array}{ccc} \mu_{p,k} \times_k \mathbb{P}^1_k & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_k \\ (\zeta, t) & \mapsto & \zeta t \end{array}$$

Cette action a deux points fixes : 0 et ∞. Le calcul du stabilisateur en chacun de ces deux points a été détaillé en 3.3.6.

On a donc

$$\mathrm{R}_G = (p-1)[0] + (p-1)[\infty].$$

Ce diviseur est de degré $2(p-1)$. Si $f : \mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$ désigne le morphisme de quotient (qui n'est autre que le morphisme de Frobenius) on a donc

$$\deg(\omega_f) = 2(p-1).$$

Par ailleurs on sait que $\omega_{\mathbb{P}^1_k} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-2)$ est de degré -2. En prenant le degré de chacun des membres dans la formule

$$\omega_{\mathbb{P}^1_k} = f^*\omega_{\mathbb{P}^1_k} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}} \omega_f = f^*\omega_{\mathbb{P}^1_k} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(R_G)$$

on trouve

$$-2 = p(-2) + 2p - 2.$$

Bibliographie

[BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Ems13] Michel Emsalem. Fundamental groupoid scheme. In *Arithmetic and Geometry Around Galois Theory*, pages 247–286. Springer, 2013.

[Fer03] Daniel Ferrand. Conducteur, descente et pincement. *Bull. Soc. Math. France*, 131(4) :553–585, 2003.

[Fog73] John Fogarty. Fixed point schemes. *Amer. J. Math.*, 95 :35–51, 1973.

[Gro61] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8) :222, 1961.

[Gro63] Alexander Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental. Fasc. II : Exposés 6, 8 à 11*, volume 1960/61 of *Séminaire de Géométrie Algébrique*. Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris, 1963.

[Gro66] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28) :255, 1966.

[Gro95] Alexander Grothendieck. Technique de descente et théorèmes d'existence en géometrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 5*, pages Exp. No. 190, 299–327. Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Gro11a] A. Grothendieck. *Schémas en groupes (SGA 3). Tome I. Propriétés générales des schémas en groupes*. Documents Mathématiques (Paris), 7. Société Mathématique de France, Paris, 2011. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64, A seminar directed by M. Demazure and A. Grothendieck with the collaboration of M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Revised and annotated edition of the 1970 French original.

[Gro11b] A. Grothendieck. *Schémas en groupes (SGA 3). Tome II. Propriétés générales des schémas en groupes*. Documents Mathématiques (Paris) , 7. Société Mathématique de France, Paris, 2011. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64. , A seminar directed by M. Demazure and A. Grothendieck with the collaboration of M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Revised and annotated edition of the 1970 French original.

[Har66] Robin Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[Jan03] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 107 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[Mes04] B. Mesablishvili. More on descent theory for schemes. *Georgian Math. J.*, 11(4) :783–800, 2004.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

[Mum66] David Mumford. *Lectures on curves on an algebraic surface*. With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, No. 59. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.

[Oli70] Jean-Pierre Olivier. Descente par morphismes purs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 271 :A821–A823, 1970.

[Ryd13] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *J. Algebraic Geom.*, 22(4) :629–669, 2013.

[Ser68] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Troisième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

[Ton14] Fabio Tonini. Stacks of ramified covers under diagonalizable group schemes. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8) :2165–2244, 2014.

[Tzi15] Nikolaos Tziolas. Quotients of schemes by α_p or μ_p actions in characteristic $p > 0$. *http ://arxiv.org/abs/1412.7941*, 2015.