



HAL
open science

Une peinture aléatoire de la turbulence des fluides

Laurent Chevillard

► **To cite this version:**

Laurent Chevillard. Une peinture aléatoire de la turbulence des fluides. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. ENS Lyon, 2015. tel-01212057

HAL Id: tel-01212057

<https://theses.hal.science/tel-01212057v1>

Submitted on 6 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

présentée à l'

Ecole Normale Supérieure de Lyon

par

LAURENT CHEVILLARD

Spécialité : Physique

Une peinture aléatoire de la turbulence des fluides

Soutenue le : 2 Octobre 2015

Après avis de : MM CHRISTOPHE BAUDET Rapporteurs
ERWAN FAOU
FRANÇOIS PÉTRÉLIS

Devant la commission d'examen formée de :

MM	CHRISTOPHE BAUDET	Professeur des universités	Rapporteur
	BERNARD CASTAING	Professeur des universités	Examineur
	BÉRENGÈRE DUBRULLE	Directrice de recherche, CNRS	Examinatrice
	ERWAN FAOU	Directeur de recherche, INRIA	Rapporteur
	KRZYSZTOF GAWEDZKI	Directeur de recherche, CNRS	Examineur
	FRANÇOIS PÉTRÉLIS	Chargé de recherche, CNRS	Rapporteur
	BART VAN TIGGELEN	Directeur de recherche, CNRS	Examineur

Table des matières

0.1	Avant propos et parcours	5
I	Observations	7
1	Description probabiliste des fluctuations de vitesse eulérienne et lagrangienne	9
1.1	Préambule	9
1.2	Le profil longitudinal de la vitesse eulérienne	10
1.2.1	Un exemple de signal de fil chaud	10
1.2.2	Bilan d'énergie des équations de Navier et Stokes	12
1.2.3	Phénoménologie de Kolmogorov ₄₁ et lois expérimentales	13
1.2.4	Illustration des lois et faillite de l'équation de la chaleur stochastique	14
1.2.5	Représentation gaussienne et mouvement brownien fractionnaire	16
1.2.6	Les transferts d'énergie	18
1.3	Description lagrangienne et extension de la phénoménologie	20
1.4	Mise en évidence du phénomène d'intermittence	21
1.5	Une théorie phénoménologique des fluctuations de vitesse turbulente	24
1.5.1	Formalisme multifractal et propagateur	24
1.5.2	Une approche axiomatique de la turbulence	28
II	Ouverture	31
2	Dynamique lagrangienne du tenseur des gradients de vitesse	33
2.1	Faits expérimentaux	34
2.1.1	Alignement préférentiel de la vorticité	34
2.1.2	Densité des invariants du tenseur des gradients	35
2.2	Equation de transport du tenseur des gradients	37
2.2.1	Non localité du hessien de pression et correction visqueuse	37
2.2.2	Interaction locale et approximation d'Euler restreint	38
2.3	Fermeture basée sur la déformation fluide	39
2.3.1	Mécanique de la déformation et tenseur de Cauchy-Green	39
2.3.2	Le modèle de la tétrade et un frottement visqueux non linéaire	40

2.3.3	Transformation lagrangienne et déformation fluide	40
2.3.4	Déformation fluide récente et stationnarisation	42
2.3.5	Prédictions et confrontation aux expériences	43
2.3.6	Perspectives	44
III	Une peinture aléatoire de la turbulence des fluides	47
3	Représentation stochastique de la structure locale de la turbulence	49
3.1	Le chaos multiplicatif gaussien	50
3.1.1	Retour sur les propriétés statistiques du champ de dissipation . . .	50
3.1.2	Un champ aléatoire lognormal pour la dissipation	52
3.2	Mécanisme d'étirement de la vortacité	56
3.2.1	Une forme intégrale des équations d'Euler	56
3.2.2	Construction d'un champ aléatoire incompressible de vecteurs . . .	58
3.3	Un chaos multiplicatif gaussien matriciel	62
3.3.1	L'ensemble des matrices gaussiennes isotropes	62
3.3.2	Propriétés multifractales	63
3.3.3	Densité conjointe des matrices	63
3.4	Définition et propriétés statistiques d'une mesure signée 1D	64
3.4.1	Définition d'un ersatz unidimensionnel	64
3.4.2	Simulations	66
3.4.3	Analyse théorique	68
3.4.4	Retour sur l'interprétation des simulations numériques	71
3.4.5	Perspectives	75
A	Calculs relatifs au processus dissipatif	77
A.1	Préliminaires et notations	77
A.2	Moyenne, variance et fonction de structure d'ordre 2	78
A.2.1	Moyenne	78
A.2.2	Variance	78
A.2.3	Fonction de structure d'ordre 2	79
A.3	Fonction de structure d'ordre 3	80
A.3.1	Préliminaires	80
A.3.2	Calcul de la fonction de structure d'ordre 3	81
A.3.3	Comportement asymptotique	83
A.4	Fonction de structure d'ordre 4	83
A.4.1	Comportement asymptotique	86

0.1 Avant propos et parcours

Chère lectrice, cher lecteur, il s'agit ici du manuscrit de mon habilitation à diriger des recherches. Il ne s'agit en rien d'un cours, comme j'ai beaucoup de plaisir à le faire en master, mais plutôt une présentation personnelle, d'une étude personnelle, sur un sujet qui me tient à coeur.

D'avance, je prie certains de mes collaborateurs de m'excuser de ne pas présenter ici plusieurs sujets auxquels j'ai participé. Je pense en particulier à la notion de turbulence dans l'espace de Fourier que j'ai découvert avec Christophe Baudet et Yves Gagne, dans le cadre de la thèse de Nicolas Mazellier, lors de mon premier séjour postdoctoral à Grenoble. Je pense aussi à cette turbulence des superfluides, qui est avant tout un sujet expérimental, à laquelle nous avons participé avec Bernard Castaing, dans le cadre de la thèse de Sophie Villerot, en étudiant l'équation de Schrodinger non linéaire.

Je vous présenterai mon parcours dans le vaste domaine de la turbulence des fluides, mes choix, mes rencontres, et la science qui en a découlé (c'est le cas de le dire).

Donner une définition précise à la turbulence des fluides n'est pas aisé, voire impossible. Tant par sa nature et sa complexité, la turbulence est étudiée par une communauté très variée, constituée par les ingénieurs, les mécaniciens, les physiciens et les mathématiciens, notamment. C'est probablement pour cette raison qu'il est très difficile d'en donner une définition. En ce qui concerne le physicien que je suis, la question, extraite à cette tentative universaliste (avortée), devient mieux posée. Il s'agit de mesurer, le plus précisément possible, et modéliser, la vitesse d'un fluide pleinement turbulent, typiquement l'eau et l'air, lorsque le fluide est libre (la paroi n'a pas d'influence) et dans lequel aucune direction n'est privilégiée : c'est la turbulence des fluides *homogènes et isotropes*.

Ma thèse, débutée en 2001 à Bordeaux (Centre de Recherche Paul Pascal) sous la direction d'Alain Arneodo, et soutenue en 2004 à l'ENS de Lyon après un déménagement de toute l'équipe, s'inscrit pleinement dans ce cadre phénoménologique. Le laboratoire de Physique de l'ENSL était alors un lieu privilégié pour l'étude de la turbulence et une conjonction de compétences expérimentales et théoriques. Ce fut une chance inouïe pour moi d'être accueilli dans cette effervescence. Je vous propose dans le premier chapitre de cette habilitation, intitulé *Observations*, un résumé de cette période qui a conduit à une théorie phénoménologique des fluctuations de vitesse Eulérienne et Lagrangienne.

Dans le second chapitre, intitulé *Ouverture*, je vous propose une présentation de la thématique que j'ai développée avec Charles Meneveau à l'université Johns Hopkins de Baltimore lors de mon second séjour postdoctoral. Lors de mes premières années d'enfant turbulent, résumées dans le premier chapitre, j'ai pris un soin particulier, largement motivé par la difficulté de la tâche, à éviter de faire appel aux principes fondamentaux de la dynamique afin de modéliser les mesures expérimentales et les simulations numériques. Ces équations de champs, sulfureuses, bien connues du monde scientifique, portent le nom des physiciens Navier et Stokes. Le titre *Ouverture* choisi pour ce chapitre renvoie à deux aspects découverts lors de mon voyage aux Etats-Unis. Tout d'abord, c'est une ouverture personnelle aux richesses liées à la non-linéarité et à la non-localité de ces équations aux dérivées partielles. Ce titre de chapitre renvoie aussi au type d'approche que nous avons

adopté afin de prédire le comportement des gradients de vitesse : une approche de *fermeture*. Nous allons voir comment *fermer*, de la manière la plus réaliste possible, les termes de pression et visqueux afin de se ramener à un problème beaucoup plus simple, gouverné par une équation aux dérivées ordinaires, dont la physique est riche. Et au terme de *fermeture*, je préférerai toujours le terme d'*ouverture*, qui me semble plus fertile.

Fraîchement nommé chargé de recherche de la section 5 du CNRS au laboratoire de Physique, je fais la rencontre de Raoul Robert lors d'un groupe de recherche de turbulence. Ce fut à la fois un choc et un déclic. Commençons par le déclic. Admettons tout d'abord que la (ou les) solution(s) stationnaire(s) des équations de Navier et Stokes sont représentatives des écoulements réels étudiés dans le premier chapitre. Puisqu'une approche rigoriste de ces solutions est aujourd'hui hors de portée, permettons-nous alors d'en donner, temporairement, une représentation stochastique à l'aide d'un *pinceau* aléatoire, qui permet de reproduire les propriétés statistiques observées empiriquement. Ce sera le sujet du troisième chapitre de cette habilitation, intitulé *une peinture aléatoire de la turbulence*. Le choc quant à lui est venu après que nous ayons proposé avec mes collègues mathématiciens, Raoul Robert donc, et Vincent Vargas, une telle toile reproduisant de manière surprenante l'ensemble, ou presque, des fluctuations turbulentes : il fallait développer une théorie mathématique capable de donner un sens à l'objet, sophistiqué, que nous avions proposé. C'est cet objectif qui occupe, depuis, la majeure partie de mon temps. Je vous présenterai dans ce chapitre les succès et échecs (partiels) de ce programme mathématique, un travail effectué en collaboration avec C. Garban, R. Pereira, R. Rhodes et V. Vargas.

Première partie

Observations

Chapitre 1

Description probabiliste des fluctuations de vitesse eulérienne et lagrangienne

1.1 Préambule

Comme de nombreux domaines de la physique, la turbulence des fluides est avant tout, je crois, une science expérimentale. Nous présenterons dans ce chapitre une *description* des signaux expérimentaux, et nous nous limiterons à ceux, judicieusement choisis, qui se rapprochent autant qu'il est possible d'une turbulence homogène et isotrope. Dans le cadre d'une description eulérienne des fluides, nous nous concentrons tout d'abord sur un profil spatial longitudinal de la vitesse.

Nous ne ferons ici que très peu appel aux principes fondamentaux de la dynamique, dont la description en terme de champs est donnée par les équations de Navier-Stokes. Toutefois, nous articulerons l'interprétation des données autour du bilan d'énergie cinétique qui est facilement obtenu à partir de ces équations. Après avoir présenté la première axiomatique de Kolmogorov datant de 1941, je vous propose de la discuter dans le cadre d'une équation beaucoup plus simple, l'équation de la chaleur avec un terme de forçage aléatoire, qui je l'espère vous convaincra que le fluide turbulent est une machine infernale à dissiper de l'énergie. Nous montrerons ensuite, et ceci nous sera d'une grande utilité dans le chapitre consacré à définir une représentation aléatoire de la turbulence, qu'il est possible de définir rigoureusement un champ aléatoire, gaussien, répondant aux critères de l'axiomatique. Nous constaterons ensuite que ce monument gaussien s'effondre devant la présence des transferts d'énergie, dont la physique est claire je pense et notamment cohérente avec l'unique propriété statistique exacte des solutions stationnaires de l'équation de Navier-Stokes, à savoir la loi des $4/5^{\text{ième}}$.

Dans une description lagrangienne du fluide, on s'intéressera aussi au profil temporel de la vitesse d'une particule fluide le long de sa trajectoire. Ce fut une grande chance pour moi d'accéder à des mesures récentes de suivi de particules et des simulations numériques réalisées au sein du laboratoire de Physique de l'ENSL.

Ceci nous mènera au coeur de mon sujet de doctorat : décrire dans un cadre pro-

babilliste unifié, avec un nombre optimal de paramètres libres, les fluctuations de vitesse eulérienne et lagrangienne. Nous justifions le terme d'unification par la prise en compte, outre la description lagrangienne, de plusieurs phénomènes observés sur les mesures et les simulations : (i) le caractère fortement non gaussien des fluctuations, c'est le phénomène d'intermittence, et plus généralement un phénomène de multifractalité, (ii) la prédiction du comportement des fluctuations de vitesse aux échelles dissipatives, se donnant l'ensemble des paramètres libres estimés aux échelles inertielles (échelles qui sont mesurables), et (iii) en ce qui concerne les fluctuations eulériennes, un modèle probabiliste prenant en compte la dissymétrie des densités de probabilité.

Donnons-nous une vitesse caractéristique σ , que nous prendrons égale à l'écart-type de vitesse (par isotropie, la moyenne est nulle), une grande échelle L , typiquement l'échelle de corrélation du champ de vitesse et ν la viscosité dynamique du fluide. Donnons-nous donc un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \sigma L/\nu$. Nous utiliserons souvent dans la suite un nombre de Reynolds \mathcal{R}_λ basé sur une petite échelle (dite de Taylor) et qui se comporte comme $\mathcal{R}_\lambda \sim \sqrt{\mathcal{R}_e}$. Alors nous verrons que cette description unifiée nécessite la donnée de paramètres libres supplémentaires permettant (i) la reproduction de la loi approximative des $2/3$ régissant la décroissance de la fonction de corrélation de la vitesse, (ii) de prendre en compte les corrections intermittentes liées au développement de la non gaussianité des fluctuations et (iii) un taux réaliste de transfert d'énergie au travers des échelles.

1.2 Le profil longitudinal de la vitesse eulérienne

Définissons le champ de vitesse par $(u_i(x, t))_{1 \leq i \leq 3}$, et $x \in \mathbb{R}^3$, et adoptons la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Le profil longitudinal de la vitesse suivant une direction quelconque est par définition le profil spatial de la projection de la vitesse suivant cette direction. Nous noterons abusivement $\delta_\ell u(x)$ l'incrément longitudinal de la vitesse sur une échelle ℓ la quantité scalaire

$$\delta_\ell u(x) = [u_i(x + \ell, t) - u_i(x, t)] \frac{\ell_i}{|\ell|}. \quad (1.1)$$

Par la suite, nous désignerons, aussi de manière abusive, par ℓ la norme du vecteur échelle qui intervient dans la relation précédente.

1.2.1 Un exemple de signal de fil chaud

Nous ne discuterons pas ici des conditions d'application de l'hypothèse de Taylor permettant de réinterpréter un signal temporel acquis en laboratoire comme un profil longitudinal spatial, et renvoyons le lecteur vers par exemple ces références classiques [1–3]. Mentionnons néanmoins que l'hypothèse de Taylor, qui schématiquement considère que les fluctuations turbulentes sont figées dans le temps et advectées en bloc par un fort écoulement moyen, entraîne un artefact lors de l'estimation des corrélations d'ordre supérieurs (typiquement les corrélations des incréments) [4]. En ce qui concerne la statistique à un

point des incréments, nous admettrons que les écoulements que nous étudierons (typiquement souffleries et jets) répondent en bonne approximation aux critères de l'hypothèse de Taylor, et qu'ils sont aussi en bonne approximation homogènes et isotropes.

A ma connaissance, le fil chaud est de loin la technique expérimentale la plus performante pour mesurer un profil turbulent sur une large gamme d'échelles, depuis la grande échelle L , et ce jusqu'à l'échelle dissipative de Kolmogorov η_K à partir de laquelle les variations spatiales du champ de vitesse sont lisses. Ce domaine d'échelles caractéristiques est appelé domaine *inertiel*. Mentionnons toutefois que la mesure est fine puisque l'ordre de grandeur de l'échelle de Kolmogorov dans un écoulement typique de laboratoire peut être une dizaine de micromètres. Nous donnons un exemple d'un tel signal dans la figure 1.1.

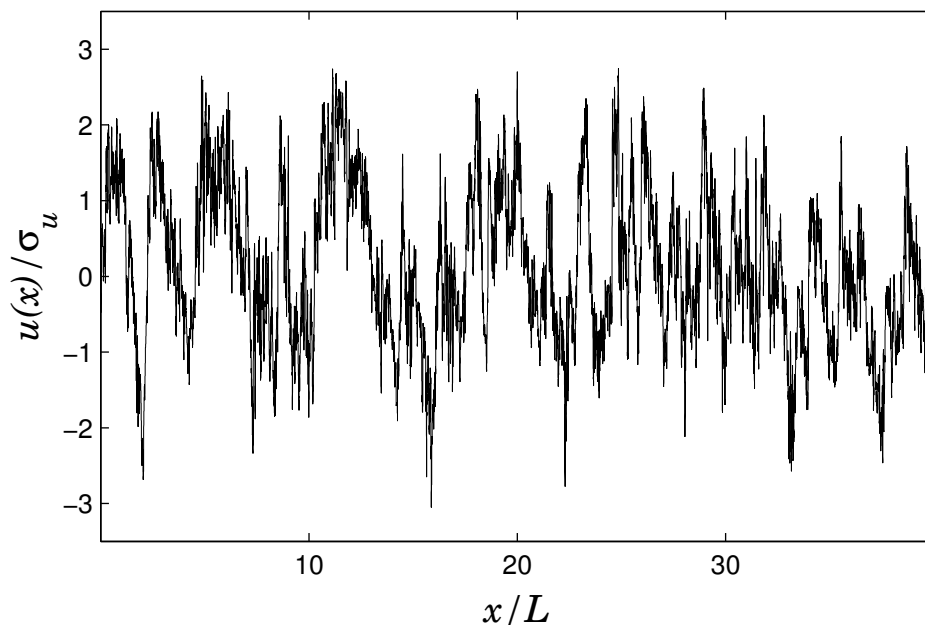


FIGURE 1.1 – Profil spatial de la vitesse longitudinale $u(x)$, normalisée par son écart-type, enregistrée dans l'expérience de turbulence de jet de Baudet et Naert à l'ENS de Lyon ($\mathcal{R}_e \approx 10^4$).

Nous constatons que le signal de vitesse turbulente est de nature aléatoire, corrélé typiquement sur la grande échelle de l'écoulement L , et fortement irrégulier. Cette mesure uni-dimensionnelle d'un écoulement turbulent est à la base de la phénoménologie développée par Kolmogorov. Afin de l'introduire, étudions le bilan d'énergie des équations de Navier et Stokes.

1.2.2 Bilan d'énergie des équations de Navier et Stokes

La dynamique du champ de vitesse est donnée par les équations de Navier et Stokes

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f_i \quad (1.2)$$

où p est le champ de pression, complètement déterminé par la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} u = 0$, à savoir l'équation de Poisson,

$$\Delta p = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

et ν la viscosité dynamique du fluide considéré. Nous ajoutons aux effets de pression et visqueux un terme de forçage qui représente de manière schématique les forces volumiques induites par le mécanisme de déstabilisation du fluide à l'aval de la grille dans une soufflerie ou à la sortie de la buse d'un jet. Numériquement, typiquement, f est un champ aléatoire gaussien, lisse en espace et corrélé sur la grande échelle L , dont l'évolution temporelle est donnée par, par exemple, une marche brownienne (Ornstein-Uhlenbeck). Ce champ de force volumique f est aussi de divergence nulle.

Effectuons alors le bilan d'énergie cinétique E_c définie par

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx,$$

que nous supposons finie à tout instant. En multipliant l'équation 1.2 par u_i , en intégrant sur tout l'espace, il est très facile de se convaincre que le terme non-linéaire ainsi que la pression ne participent pas au bilan d'énergie cinétique d'un écoulement incompressible. On obtient alors le bilan très simple suivant

$$\frac{dE_c}{dt} = -\nu \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} f_i u_i dx,$$

qui illustre la compétition entre la dissipation d'énergie ε donnée par

$$\varepsilon = \nu \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2, \quad (1.3)$$

et l'injection d'énergie $f \cdot u$. Ayant implicitement supposé que les écoulements que nous étudions sont homogènes et isotropes, et par une nécessité expérimentale évidente, permettons-nous alors le raccourci qui consiste à remplacer la somme sur tout l'espace par une moyenne d'ensemble, ce qui revient à estimer l'espérance mathématique par une moyenne empirique. Cette question est rigoureusement discutée dans le cadre des solutions statistiques des équations de Navier-Stokes par les auteurs de la référence [5]. Nous admettrons donc qu'en tant que variable aléatoire, le champ de vitesse répond au bilan suivant

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathbb{E}|u|^2}{dt} = -\mathbb{E}[\varepsilon] + \mathbb{E}[f \cdot u]. \quad (1.4)$$

Remarquons que les hypothèses d’isotropie et d’homogénéité permettent alors d’exprimer les moyennes des gradients des trois composantes de la vitesse dans les trois directions en fonction du seul gradient longitudinal [6] que nous noterons par exemple $\partial_x u_x$. La moyenne de la dissipation (Eq. 1.3) est donc accessible expérimentalement avec le seul profil longitudinal acquis avec un fil chaud. Le coeur de la phénoménologie de Kolmogorov se propose d’expliquer comment un fluide turbulent se comporte, notamment la dissipation visqueuse moyenne $\mathbb{E}[\varepsilon] = 15\nu\mathbb{E}[(\partial_x u_x)^2]$, lorsque la turbulence atteint un régime stationnaire, c’est-à-dire $d\mathbb{E}[|u|^2]/dt = 0$.

1.2.3 Phénoménologie de Kolmogorov₄₁ et lois expérimentales

La physique de Kolmogorov est largement discutée dans la littérature, nous reprendrons ici les grandes lignes de la référence [2]. Nous proposons ici un rappel rapide de cette physique en articulant la présentation autour de trois axiomes dont la seule justification est à ma connaissance de nature expérimentale.

Postulat de stationnarité

Pour un terme de forçage f donné, le champ de vitesse solution des équations de Navier et Stokes Eq. 1.2 converge à $t \rightarrow \infty$ vers une solution stationnaire, dont la variance est indépendante de la viscosité.

Mentionnons que la convergence vers une solution stationnaire est très particulière des écoulements tri-dimensionnels. Le cas bi-dimensionnel est très différent (l’énergie remonte dans les échelles) et un terme supplémentaire (terme d’Eckman) est nécessaire pour stationnariser la solution. Tester expérimentalement l’indépendance de la variance vis-à-vis de la viscosité est plus difficile, car il faut, a priori, changer de fluide, ou trouver un fluide dont la viscosité peut être modifiée. Une telle expérience a été conçue à Grenoble [7] en exploitant la forte dépendance de la viscosité de l’hélium gazeux proche du point critique vis-à-vis de la température. Les auteurs de la Ref. [7] n’indiquent pas de modification notable de la variance de l’écoulement obtenu lorsque la viscosité diminue.

Postulat portant sur la dissipation

Dans ce cadre stationnaire, la dissipation moyenne $\mathbb{E}[\varepsilon]$ tend vers une limite finie non nulle lorsque la viscosité tend vers 0.

C’est un postulat fort, largement corroboré par les mesures expérimentales et les simulations numériques [8], et qui a des conséquences importantes sur les fluctuations de vitesse à toutes les échelles. En particulier, la variance des gradients diverge lorsque $\nu \rightarrow 0$. De plus, comme la dissipation moyenne devient indépendante de la viscosité, elle ne peut être déterminée que par les caractéristiques de l’écoulement aux grandes échelles, typiquement l’écart-type de vitesse σ et la grande échelle L . Dimensionnellement, nous n’avons pas d’autres choix que

$$\mathbb{E}[\varepsilon] \underset{\nu \rightarrow 0}{\propto} \frac{\sigma^3}{L}, \quad (1.5)$$

et nous verrons qu'elle est valeur de la constante multiplicative qui se doit être universelle.

Cela implique aussi que la corrélation entre le forçage et la vitesse $\mathbb{E}(f.u)$ tend elle-même vers une limite finie non nulle. En d'autres termes, lorsque la viscosité tend vers 0, l'écoulement conserve une corrélation forte avec le terme de forçage, qui est indépendant de la viscosité. Et c'est bien ce que nous observons dans la figure 1.1 : à grande échelle, l'écoulement hérite des échelles caractéristiques du terme de forçage, et lorsque la viscosité tend vers 0, sa variance reste finie (et de l'ordre de celle du forçage). Ainsi, afin d'atteindre un régime stationnaire, l'écoulement développe des gradient de vitesse infiniment grands tout en maintenant une amplitude de vitesse finie. Afin de concilier une variance bornée et des gradients infiniment grands, il va développer des irrégularités, c'est le sujet du troisième postulat.

Loi des 2/3

Dans ce cadre stationnaire, lorsque la viscosité tend vers 0, le champ de vitesse devient irrégulier, et aux petites échelles ℓ , la fonction de structure d'ordre 2 se comporte approximativement comme une loi de puissance d'exposant 2/3, c'est-à-dire $\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} c_K (\mathbb{E}[\varepsilon] \ell)^{2/3}$.

Cette loi est très bien vérifiée expérimentalement [2]. Dans l'espace spectral, cette loi est équivalente à un comportement en loi de puissance d'exposant -5/3 du spectre de puissance (défini comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de la vitesse). La constante c_K est appelée constante de Kolmogorov dans la littérature [2], et est universelle ($c_K \approx 2$).

1.2.4 Illustration des lois et faillite de l'équation de la chaleur stochastique

Permettons-nous ici d'illustrer ces postulats expérimentaux de la turbulence en comparant avec les statistiques obtenues pour la solution de l'équation de la chaleur stochastique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u + f. \quad (1.6)$$

Ici, $u(x, t)_{x \in \mathbb{R}^d}$ est un scalaire, par exemple une composante du champ de vitesse, l'équation 1.6 étant linéaire, la dynamique de chaque composante est indépendante des autres. Nous ne nous attendons pas avec cette dynamique linéaire (et locale dans l'espace spectral) de reproduire la phénoménologie de Kolmogorov précédemment rappelée (section 1.2.3). Néanmoins, l'équation de la chaleur forcée présente un bilan d'énergie similaire à celui des équations de Navier-Stokes (Eq. 1.4), à savoir dans ce cadre scalaire

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathbb{E}u^2}{dt} = -\nu \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + \mathbb{E}(fu),$$

et il est tentant de comparer, dans un cadre stationnaire, le comportement de la variance $\mathbb{E}u^2$ du champ et de ses gradients $\mathbb{E}(\partial_i u)^2$ lorsque la viscosité tend vers 0 pour ces deux dynamiques. Ils se révéleront fondamentalement différents.

La physique de Kolmogorov suggère fortement que les échelles caractéristiques du forçage f déterminent en partie celles du champ de vitesse. Permettons nous donc de considérer un forçage lisse en espace, d'échelle caractéristique L . Pour simplifier la présentation, considérons une force delta-corrélée en temps. Dans le cadre de ce modèle simple, les quantités telles que la dérivée par rapport au temps de la variance et la corrélation entre vitesse et forçage seront elles aussi des quantités distributionnelles. Néanmoins, nous verrons que variance de u et de ses gradients sont des quantités finies. Prenons alors un modèle gaussien pour la force, de moyenne nulle et de covariance

$$\mathbb{E}[f(x, t)f(y, s)] = \frac{V^2}{T} e^{-\frac{|x-y|^2}{2L^2}} \delta(t-s).$$

Nous nous intéresserons à la solution à grands temps, sans perte de généralité considérons une situation initiale où le fluide est au repos, $u(x, 0) = 0$. Cette équation aux dérivées partielles linéaire possède une unique solution donnée par

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{[4\pi\nu(t-s)]^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\nu(t-s)}} f(y, s) dy ds.$$

Si les intégrales suivantes existent, alors la covariance du champ est donnée par

$$\mathbb{E}[u(x, t)u(y, t)] = \frac{V^2}{T} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{1}{[4\pi\nu(t-s)]^d} e^{-\frac{|x-z_1|^2 + |y-z_2|^2}{4\nu(t-s)} - \frac{|z_1-z_2|^2}{2L^2}} dz_1 dz_2 ds.$$

L'intégrale gaussienne sur l'espace est facilement obtenue et la covariance se simplifie en

$$\mathbb{E}[u(x, t)u(y, t)] = \frac{V^2}{T} \int_0^t \frac{L^d}{[L^2 + 4\nu(t-s)]^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{L^2 + 4\nu(t-s)}} ds,$$

ou encore, après un changement de variables,

$$\mathbb{E}[u(x, t)u(y, t)] = V^2 \frac{L^2}{4\nu T} \int_1^{1+4\nu t/L^2} \frac{1}{s^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{L^2 s}} ds. \quad (1.7)$$

Nous voyons donc qu'en dimension d'espace $d \geq 3$, l'équation de la chaleur stochastique 1.6, avec un forçage lisse en espace, converge vers une solution stationnaire (et homogène) de variance finie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[u^2] = V^2 \frac{L^2}{(d/2 - 1)4\nu T}.$$

Ainsi, contrairement aux écoulement turbulents, régis par les équations de Navier et Stokes, dans lesquels la variance de la solution stationnaire est indépendante de la viscosité aux faibles viscosités, l'équation de la chaleur prédit un écoulement stationnaire de variance inversement proportionnelle à la viscosité. En ce sens, nous dirons que la turbulence est une machine infernale à dissiper de l'énergie.

De manière similaire, en ce qui concerne la variance des gradients, nous obtenons

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\partial_i u)^2] = 2V^2 \frac{1}{2d\nu T},$$

montrant que la dissipation visqueuse $\nu \mathbb{E}[(\partial_i u)^2]$ tend, tout comme pour les écoulements turbulents, vers une limite finie non nulle lorsque $\nu \rightarrow 0$. Ainsi, l'équation de la chaleur développe des gradients infinis, non pas suite à des variations à petites échelles du champ de vitesse comme il est observé dans les écoulements turbulents et illustré par la loi des $2/3$, mais parce que la vitesse elle-même diverge. L'équation de la chaleur conduit donc à un processus lisse en espace, c'est-à-dire non rugueux, dont la grande échelle augmente avec le temps, comme nous pouvons le voir dans l'équation 1.7. Et le forçage à lui seul ne détermine absolument pas la variance de la solution stationnaire !

1.2.5 Représentation gaussienne et mouvement brownien fractionnaire

Nous voyons donc que les solutions stationnaires des équations de Navier et Stokes dissipent de manière très efficace l'énergie injectée au travers de la force f , de telle sorte que la variance de la vitesse devient indépendante de la viscosité. Posons-nous alors la question suivante : est-il possible de donner une représentation aléatoire, c'est-à-dire une processus stochastique, répondant aux 3 lois-principes de Kolmogorov (c.f. section 1.2.3) ? La réponse est oui, donnée par Kolmogorov lui-même, formaliser dans un très bel article [9], et ce processus porte le nom de mouvement brownien fractionnaire. Donnons-nous une échelle dissipative, typiquement l'échelle de Kolmogorov η_K que nous doutons bien tendre vers 0 lorsque la viscosité tend vers 0, et une grande échelle L . Définissons le processus aléatoire scalaire suivant, $x \in \mathbb{R}^d$ et $d \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{\eta_K}(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \varphi_L(x-y) \frac{1}{|x-y|_{\eta_K}^{d/2-H}} W(dy), \quad (1.8)$$

où l'on a défini une norme régularisée à l'échelle η_K , typiquement $|x|_{\eta_K} = \sqrt{|x|^2 + \eta_K^2}$, et φ_L une troncature sur la grande échelle L , typiquement une fonction \mathcal{C}^∞ , isotrope (qui ne dépend que de la norme de son argument), à support compact ou à décroissance suffisamment rapide au-delà de l'échelle L . Nous allons voir que les formes précises de la régularisation et de la troncature n'importent que très peu car, le processus converge vers une processus limite indépendant de la régularisation lorsque $\eta_K \rightarrow 0$, et seule la valeur de φ_L à l'origine détermine les statistiques aux petites échelles. Ce processus est défini comme le lissage par convolution d'une mesure blanche gaussienne $W(dy)$ de moyenne nulle et de variance dy , c'est donc un processus gaussien homogène. Le paramètre libre H est appelé exposant de Hurst (ou de Hölder).

Ainsi, en particulier, au sens de la variance (convergence L^2), le processus converge vers un processus limite, que nous noterons $u = \lim_{\eta_K \rightarrow 0} u_{\eta_K}$, ou de manière équivalente lorsque $\nu \rightarrow 0$, sa variance est donnée par

$$\mathbb{E}u^2 = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \varphi_L^2(y) \frac{1}{|y|^{d-2H}} dy = \omega_d \int_0^\infty \varphi_L^2(\rho) \frac{1}{\rho^{1-2H}} d\rho,$$

où ω_d est le volume de la sphère unité en dimension d . Cette limite est indépendante de la régularisation à petites échelles. La singularité est intégrable pour un exposant de Hurst

$H > 0$. Nous voyons donc que ce processus, pour $H > 0$, répond au premier critère de Kolmogorov en assurant une variance indépendante de la viscosité lorsque celle-ci tend vers 0. Remarquons aussi que la troncature φ_L assure l'existence de cette intégrale, donc une variance finie à ce processus, et à ce stade sa forme détermine sa valeur précise.

À une viscosité finie, donc à une échelle dissipative η_K finie, calculons un équivalent de la variance du gradient. En bonne approximation, le gradient est donné par

$$\partial_{x_i} u_{\eta_K}(x) = (H - d/2) \int_{y \in \mathbb{R}^d} \varphi_L(x - y) \frac{x_i - y_i}{|x - y|_{\eta_K}^{d/2+2-H}} W(dy),$$

le terme additionnel lié à la dérivée de φ_L étant complètement négligeable lorsque $\eta_K \rightarrow 0$. Par homogénéité, nous pouvons considérer seulement la valeur de la dérivée en $x = 0$. En dilatant la variable d'intégration y par l'échelle de Kolmogorov η_K , en supposant que l'exposant de Hurst est cette fois-ci pas trop grand $H < 1$ afin de s'assurer de la convergence de l'intégrale restante, nous parvenons à l'équivalent suivant

$$\mathbb{E}|\nabla u_{\eta_K}|^2 \underset{\eta_K \rightarrow 0}{\sim} \eta_K^{-2+2H} (H - d/2)^2 \varphi_L^2(0) \omega_d \int_0^\infty \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1}^{5-2H}} d\rho.$$

Donc, pour un exposant de Hurst $0 < H < 1$, le processus a une variance finie et des gradients qui divergent comme η_K^{-2+2H} . Remarquons aussi que ce comportement divergent des gradients est indépendant de la forme particulière de la troncature φ_L mais seulement de sa valeur à l'origine. Remarquons aussi que cette divergence dépend du mécanisme de régularisation à petite échelle, contrairement à la variance. Ce processus a donc toutes les bonnes propriétés pour bien représenter les deux premières hypothèses de Kolmogorov. En particulier, se donner la bonne dépendance de η_K vis à vis de la viscosité ν (ou du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \sigma L/\nu$ de manière équivalente) suivante

$$\eta_K = L \mathcal{R}_e^{-\frac{1}{2-2H}}$$

nous assure que $\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \mathbb{E}|\nabla u_{\eta_K}|^2$ est finie et strictement positive.

C'est seulement la loi des $2/3$ qui détermine la valeur précise de l'exposant H . En effet, dans la limite de viscosité nulle, l'incrément de vitesse est donné par

$$\delta_\ell u(0) = u(\ell/2) - u(-\ell/2) = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \left[\frac{\varphi_L(\ell/2 - y)}{|\ell/2 - y|^{d/2-H}} - \frac{\varphi_L(\ell/2 + y)}{|\ell/2 + y|^{d/2-H}} \right] W(dy), \quad (1.9)$$

et qui nous donne la fonction de structure d'ordre 2 suivante, sujet de la troisième loi de Kolmogorov,

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2 = \int_{y \in \mathbb{R}^d} \left[\frac{\varphi_L(\ell/2 - y)}{|\ell/2 - y|^{d/2-H}} - \frac{\varphi_L(\ell/2 + y)}{|\ell/2 + y|^{d/2-H}} \right]^2 dy.$$

Afin d'obtenir le comportement de $\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2$ aux échelles $\ell = |\ell|e$ (e est un vecteur unitaire quelconque) infiniment petites, nous dilatons la variable d'intégration par cette même échelle et obtenons l'équivalent suivant, qui fait parfaitement sens pour $H \in]0, 1[$,

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2 \underset{|\ell| \rightarrow 0}{\sim} |\ell|^{2H} \varphi_L^2(0) \int_{y \in \mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{|e/2 - y|^{d/2-H}} - \frac{1}{|e/2 + y|^{d/2-H}} \right]^2 dy,$$

une valeur *universelle*, dans le sens qu'elle est indépendante du profil précis de φ_L , et du mécanisme de régularisation à l'échelle visqueuse. Ainsi, le mouvement brownien fractionnaire Eq. 1.8 est une représentation aléatoire exemplaire du cadre probabiliste énoncé par Kolmogorov si l'on choisit

$$H = \frac{1}{3}.$$

On retrouve notamment la dépendance bien connue de l'échelle de Kolmogorov vis à vis du nombre de Reynolds, $\eta_K = L\mathcal{R}_e^{-3/4}$.

L'incrément de vitesse étant lui-même un processus gaussien, nous obtenons facilement la fonction de structure d'ordre $q \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^{2q} = \frac{(2q)!}{2^q q!} [\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2]^q \underset{|\ell| \rightarrow 0}{\propto} |\ell|^{2qH} \quad (1.10)$$

et

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^{2q+1} = 0.$$

De manière équivalente, l'incrément du mouvement brownien fractionnaire est égal en loi (c'est à dire en distribution) à

$$\delta_\ell u \stackrel{\text{loi}}{=} \left(\frac{|\ell|}{L}\right)^H \delta \quad (1.11)$$

où δ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance $\mathbb{E}\delta^2 = 2\mathbb{E}u^2$, indépendante donc de l'échelle.

1.2.6 Les transferts d'énergie

Nous voyons donc que la turbulence est une machine infernale à dissiper de l'énergie, et le développement de sa nature irrégulière en est une conséquence. Les arguments développés jusqu'à présent s'appliquent aux quantités physiques intervenant dans le bilan d'énergie (Eq. 1.4), c'est-à-dire la variance de la vitesse, la dissipation et l'injection d'énergie. Rappelons qu'à ce niveau de discussion, le terme non linéaire et la pression n'interviennent pas, mais nous nous doutons bien que leur action conjointe est cruciale pour obtenir cette grande efficacité à dissiper de l'énergie. L'effet de la non linéarité est clairement mis en évidence lors du bilan d'énergie cinétique à une échelle ℓ particulière. Définissons alors le champ de vitesse u^ℓ filtré à une échelle ℓ (un scalaire positif) de la manière suivante,

$$u_i^\ell(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \theta_\ell(x-y) u_i(y) dy,$$

où $\theta(x)$ est une fonction scalaire isotrope, bornée à support compact, d'intégrale unité, et $\theta_\ell(x) = \ell^{-3}\theta(x/\ell)$ une approximation du Dirac. Le champ u^ℓ est ainsi lisse en-deça de ℓ . Ceci est largement discuté dans le contexte des simulations des grandes échelles, et je renvoie le lecteur à la Ref. [10] pour une présentation formelle de ces idées.

La dynamique du champ filtré est facilement obtenue à partir des équations de Navier et Stokes (Eq. 1.2) et s'écrit

$$\frac{\partial u_i^\ell}{\partial t} + u_k^\ell \frac{\partial u_i^\ell}{\partial x_k} = -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p^\ell}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i^\ell + f_i^\ell,$$

avec $\text{div } u^\ell = 0$ et où τ_{ij} est le tenseur de sous-maille représentant l'interaction du champ filtré avec les fluctuations à plus petites échelles que ℓ

$$\tau_{ij} = (u_i u_j)^\ell - u_i^\ell u_j^\ell.$$

Le bilan d'énergie cinétique portée par les fluctuations de vitesse aux échelles plus grandes que ℓ est alors donné par

$$\frac{1}{2} \frac{d\mathbb{E}|u^\ell|^2}{dt} = -\Pi^\ell - \nu \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{E} \left(\frac{\partial u_i^\ell}{\partial x_j} \right)^2 + \mathbb{E}(f^\ell \cdot u^\ell), \quad (1.12)$$

qui fait intervenir un terme supplémentaire Π^ℓ par rapport au bilan de l'énergie cinétique totale (Eq. 1.4)

$$\Pi^\ell = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial u_i^\ell}{\partial x_j} \tau_{ij} \right]$$

représentant un taux de transfert d'énergie à travers les échelles. Encore une fois, par incompressibilité, la pression n'influe pas sur ce bilan d'énergie. A une échelle fixée ℓ , typiquement choisie dans le domaine inertiel, les fluctuations des gradients de vitesse sont bornées, et le demeurent lorsque la viscosité tend vers 0. En d'autres termes, à une échelle inertielle, la viscosité n'entre pas dans le jeu car, lorsque $\nu \rightarrow 0$ alors $\nu \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{E} (\partial_j u_i^\ell)^2 \rightarrow 0$. L'échelle caractéristique du forçage est L , que l'on suppose beaucoup plus grande que l'échelle de filtrage ℓ , donc en bonne approximation, $f^\ell \approx f$. Il est alors aisé de se convaincre que dans le cadre stationnaire, $\mathbb{E}(f^\ell \cdot u^\ell) \approx \mathbb{E}(f \cdot u) = \mathbb{E}(f \cdot u) = \mathbb{E}(\varepsilon)$. Toujours dans ce cadre stationnaire, on obtient alors la valeur de ce taux de transfert au travers des échelles,

$$\Pi^\ell = \mathbb{E}(\varepsilon),$$

qui est strictement positif et indépendamment de l'échelle : en moyenne, l'écoulement turbulent transfère l'énergie cinétique aux petites échelles, c'est la cascade directe. Dans un cadre homogène et isotrope, on peut exprimer Π^ℓ en fonction de la seule composante longitudinale de vitesse (Eq. 1.1), et on obtient, en utilisant la relation de Kàrman et Howarth (les calculs sont détaillés dans la référence [2])

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\delta_\ell u)^3 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -\frac{4}{5} \mathbb{E}(\varepsilon) \ell, \quad (1.13)$$

où il est entendu que nous nous plaçons en régime stationnaire, dans la limite $\nu \rightarrow 0$, et ensuite seulement dans la limite $\ell \rightarrow 0$.

Cette propriété statistique reliant le moment d'ordre impair 3 de l'incrément à la dissipation visqueuse moyenne est appelée loi des 4/5ième. Elle stipule en particulier que le processus vitesse ne peut être gaussien, et montre que la représentation de la turbulence par un mouvement brownien fractionnaire (Eq. 1.8) n'est pas satisfaisante. Nous verrons dans le dernier chapitre de cette habilitation (sections 3.2.2 et 3.4.1) comment construire un champ aléatoire capable de reproduire la loi des 4/5ième. Une vision moderne des transferts d'énergie, formalisée dans le cadre des solutions faibles des équations de Navier et Stokes, est proposée dans la référence [11].

1.3 Description lagrangienne et extension de la phénoménologie

Jusqu'à présent, nous avons principalement parlé des fluctuations spatiale (*eulérienne*) de vitesse longitudinale, des observations à la base de la phénoménologie de Kolmogorov. Nous pourrions aussi nous demander si une phénoménologie similaire peut être développée pour la structure temporelle des fluctuations de vitesse d'une particule fluide le long de sa trajectoire, dans une description *lagrangienne* du fluide. Ce type de questionnement est devenu possible suite à un développement majeur des techniques expérimentales de suivi de particules dans un écoulement turbulent (voir par exemple les revues [12, 13] à ce sujet), notamment au sein du laboratoire de physique de l'ENS de Lyon. Ce fut une grande chance, durant ma thèse de doctorat, d'avoir eu accès à ces mesures (et à ceux qui les ont réalisées!).

Dans la suite, nous noterons $v(t)$ un profil temporel de la vitesse turbulente le long d'une trajectoire d'une particule fluide. A chaque instant t , cette vitesse coïncide avec la valeur du champ eulérien des vitesses au même instant t , et ce à la position de la particule. Nous représentons dans la figure 1.2, un profil temporel d'une composante de la vitesse lagrangienne $v(t)$ le long d'une trajectoire typique d'une particule fluide dans un écoulement de von Karman à un grand nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e \approx 10^4$.

En comparant le signal eulérien de la figure 1.1 avec celui de la vitesse lagrangienne de la figure 1.2, on constate immédiatement que le profil temporel est plus lisse que sa contrepartie eulérienne. Admettons alors un instant que certains aspects de la phénoménologie de Kolmogorov (c.f. section 1.2.3), et nous verrons lesquels, s'appliquent à l'irrégularité observée des fluctuations lagrangiennes. En particulier, admettons qu'un régime inertiel existe, cette fois-ci délimité par une grande échelle temporelle T et la petite échelle dissipative de Kolmogorov τ_{η_K} , dans lequel les fluctuations sont déterminées par la dissipation moyenne de l'écoulement $\mathbb{E}(\varepsilon)$, et que la viscosité n'y est pas significative. Alors dimensionnellement, nous nous attendons à une fluctuation typique de l'ordre de $\mathbb{E}(\delta_\tau v)^2 \propto \varepsilon \tau$, où nous avons défini une variation typique de vitesse sur une échelle τ au travers de l'incrément

$$\delta_\tau v(t) = v(t + \tau) - v(t).$$

Ainsi, ce raisonnement dimensionnel suggère fortement que la vitesse lagrangienne s'apparente à une marche brownienne, donc d'exposant de Hurst $H = 1/2$, plus grand que

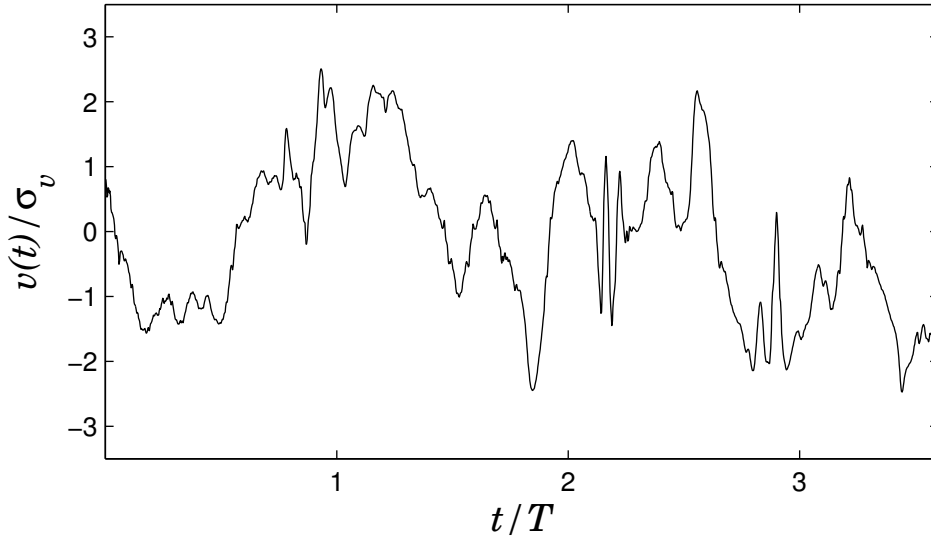


FIGURE 1.2 – Représentation d’une trajectoire typique de l’expérience de Mordant *et al.* [14] : $v(t)/\sigma_v$, où σ_v est l’écart-type, en fonction de t/T .

l’exposant eulérien typique $H = 1/3$. Ceci explique que le profil temporel de la vitesse lagrangienne est plus lisse (en moyenne) que le profil spatial eulérien.

1.4 Mise en évidence du phénomène d’intermittence

Les différents arguments développés jusqu’à présent, aussi bien dans le cadre eulérien que dans le cadre lagrangien, sont pour la plus part basés sur des quantités statistiques de bas ordres, tout comme la variance de la vitesse et de l’incrément de vitesse. C’est une caractérisation statistique très partielle des fluctuations turbulentes. Nous avons néanmoins vu que le moment d’ordre 3 de l’incrément de vitesse eulérien, lié à la physique des transferts d’énergie (loi des 4/5, c.f. Eq. 1.13), est strictement négatif aux petites échelles. Nous nous doutons bien, donc, que la statistique précise des fluctuations de la vitesse aux échelles inertielles et dissipatives ne sont pas gaussiennes. Afin de quantifier précisément cette non gaussianité, nous allons par la suite considérer une description plus générale de ces fluctuations en considérant la densité de probabilité des incréments. Nous noterons $\mathcal{P}_X(x)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire X .

Le coeur de mon sujet de doctorat [18] consistait à estimer cette non gaussianité, dans les cadres eulérien et lagrangien, et en proposer un modèle probabiliste cohérent. Dans la littérature de turbulence, la non gaussianité des densités des incréments eulériens $\mathcal{P}_{\delta_\epsilon u}$ et lagrangiens $\mathcal{P}_{\delta_r v}$ est appelée phénomène d’*intermittence*. Nous représentons dans la figure 1.3, tirée de l’article associé [16], une estimation de ces densités à partir d’un signal eulérien enregistré à la soufflerie de Modane, et à partir des mesures lagrangiennes obtenues par le groupe de Cornell et de l’ENS de Lyon. Dans les deux cadres de description, nous constatons une déformation continue des densités lorsque l’échelle de l’incrément diminue.

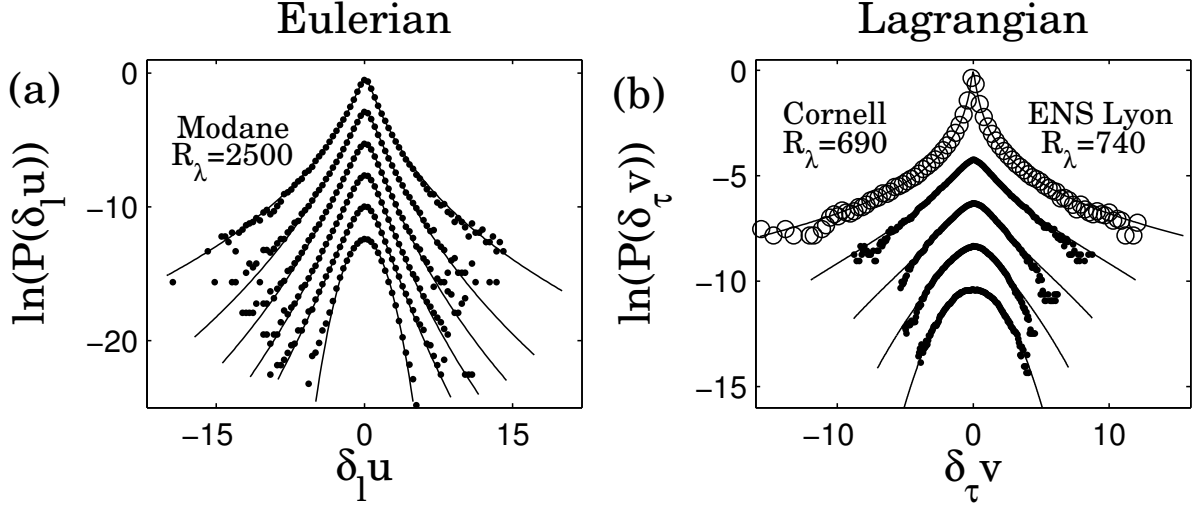


FIGURE 1.3 – (a) Densité de probabilité des incréments de vitesse eulérienne obtenus dans la soufflerie de Modane data [15]. Les échelles représentées sont (du haut vers le bas) : $\ln(\ell/L) = -6.4137, -5.6028, -4.6645, -3.6411, -2.7501, -1.8598, -0.8685, 0.1226$. Toutes les courbes en trait continu représentent nos prédictions théoriques [16]. (b) Densité de probabilité des incréments de vitesse lagrangienne de l’ENS-Lyon, à des échelles τ (du haut vers le bas, symboles \bullet) $\tau/T = 0.07, 0.16, 0.35, 1$ et de l’accélération (université de Cornell, symboles \circ). Les courbes continues représentent nos prédictions théoriques [17].

Le propos de la suite de ce manuscrit est l’exposition de mes travaux de doctorat qui ont permis, pour la première fois à ma connaissance, de décrire dans un cadre théorique unifié l’ensemble des statistiques à 1-point des incréments, en se donnant un nombre optimal de paramètres libres. La représentation des prédictions de ce formalisme est donnée dans cette même figure 1.3 par des traits continus sur lesquels les données expérimentales sont superposées.

De manière équivalente, et plus traditionnelle [2], le phénomène d’intermittence peut être étudié à partir des moments de ces distributions, c’est-à-dire des fonctions de structure. Ainsi, la signature de la déformation continue de ces densités de probabilités à travers les échelles, à des échelles du domaine inertiel, se manifestent par un comportement *anormal* des exposants des lois de puissance des fonctions de structure, comme par exemple dans le cadre eulérien,

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^q \underset{\ell \rightarrow 0}{\propto} \left(\frac{\ell}{L} \right)^{\zeta_q^E}$$

où ζ_q^E est une fonction non linéaire de l’exposant q . Le comportement est *anormal* dans le sens qu’il diffère du comportement gaussien (Eq. 1.10) pour lequel $\zeta_q^E = qH$ est linéaire.

La non linéarité de ζ_q^E est un fait expérimental. Seule la valeur particulière $q = 3$ a un statut rigoureux et est déduite des équations de Navier-Stokes (loi des 4/5). Afin d’illustrer néanmoins que ce spectre est *universel*, indépendant de la géométrie de l’écoulement à

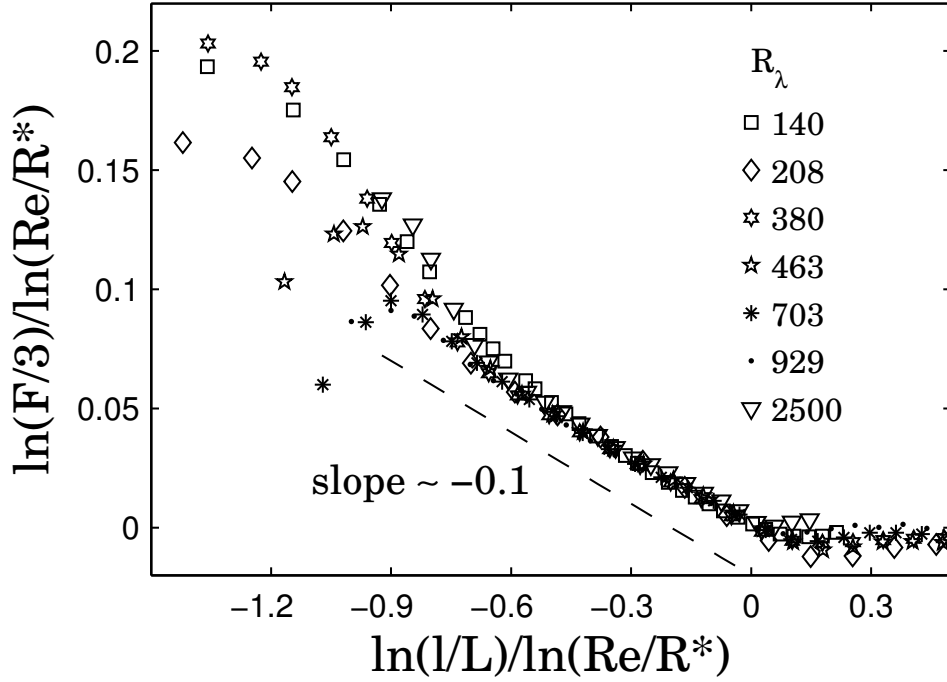


FIGURE 1.4 – Comportement de la flatness des incréments de vitesse eulérienne en fonction des échelles, dans une représentation logarithmique. La constante universelle entrant dans la renormalisation des échelles est $\mathcal{R}^* = 52$. Les différents symboles représentent des nombres de Reynolds différents : $\mathcal{R}_\lambda = 140$ (DNS par E. Lévêque [16]), $\mathcal{R}_\lambda = 208, 463, 703, 929$ (jet d’hélium [7]), $\mathcal{R}_\lambda = 380$ (jet d’air par C. Baudet and A. Naert), $\mathcal{R}_\lambda = 2500$ (soufflerie de Modane [15]).

grande échelle et de la nature du fluide considéré, nous présentons dans la figure 1.4 le comportement de la flatness F des incréments de vitesse défini comme le rapport adimensionné du moment d’ordre 4 sur le carré du moment d’ordre 2

$$F(\ell) = \frac{\mathbb{E}(\delta_\ell u)^4}{[\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2]^2} \stackrel{\ell \rightarrow 0}{\propto} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\zeta_4^E - 2\zeta_2^E}. \quad (1.14)$$

Dans la représentation logarithmique de la figure 1.4, nous faisons le choix de comparer un jeu de mesures et simulations à des nombres de Reynolds $\mathcal{R}_e \propto \mathcal{R}_\lambda^2$ variant sur deux ordres de grandeur, nous renormalisons donc abscisses et ordonnées par $\ln \mathcal{R}_e$ pour tenter d’obtenir une courbe maîtresse. Le domaine inertiel devient alors indépendant du \mathcal{R}_e et s’étale typiquement entre $-3/4$ et 0 , et nous observons bien effectivement un comportement universel. Les échelles plus petites sont dans le domaine dissipatif, et nous observons un comportement plus complexe, qui conserve une dépendance avec \mathcal{R}_e .

Dans le domaine inertiel, si le spectre d’exposants ζ_q^E avait été linéaire, on obtiendrait une flatness indépendante de l’échelle ℓ . Tout au contraire, on constate que pour cette collection de signaux expérimentaux et numériques, à des nombres de Reynolds différents,

ζ_q^E est une fonction non linéaire, avec notamment $\zeta_4^E - 2\zeta_2^E \approx -0.1$. La présentation des données de la figure 1.4 fait aussi intervenir une constante universelle $\mathcal{R}^* = 52$, dont nous verrons par la suite la signification. Pour les spécialistes, \mathcal{R}^* est le pendant intermittent de la constante de Kolmogorov définie dans un contexte non intermittent, et détermine le taux de transfert d'énergie [16].

Une étude similaire a été réalisée dans le contexte lagrangien [17, 19] et mène au même constat d'universalité des fluctuations de vitesse aux échelles inertielles. Dans ce cas, la valeur de l'exposant de la flatness est beaucoup plus élevé et de l'ordre de $\zeta_4^L - 2\zeta_2^L \approx -0.34$: les fluctuations lagrangiennes sont beaucoup plus intermittentes que les fluctuations eulériennes. Cette forte augmentation du niveau de l'intermittence s'explique de manière quantitative en adaptant les arguments de la Ref. [20]. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

1.5 Une théorie phénoménologique des fluctuations de vitesse turbulente

1.5.1 Formalisme multifractal et propagateur

Le phénomène d'intermittence a été beaucoup étudié expérimentalement et théoriquement [2]. Nos travaux à ce sujet sont publiés dans les références [16, 17, 21, 22]. Une approche similaire est adoptée dans la référence [23]. Nous vous proposons dans cette partie une présentation rapide du formalisme sous-jacent aux courbes théoriques de la figure 1.3, et la description à toutes les échelles, inertielles et dissipatives, du comportement de la flatness à travers les échelles (c.f. figure 1.4). Nous allons utiliser deux ingrédients principaux afin de construire un modèle aléatoire de l'incrément. Tout d'abord, le *formalisme multifractal* [2] se propose de donner une amplitude typique locale de l'incrément de vitesse à l'échelle ℓ cohérente en un certain sens géométrique avec le comportement non linéaire du spectre des exposants ζ_q^E . L'approche du *propagateur* [24], qui est un modèle probabiliste, se propose d'assimiler la non gaussianité des densités de probabilité des incréments à un mélange de gaussiennes de différents écart-types.

Le régime inertiel

Commençons par discuter du régime inertiel de la turbulence eulérienne et donnons une loi probabiliste de l'incrément qui permet la prise en compte du phénomène d'intermittence précédemment évoqué. Il s'agit donc de généraliser l'égalité en loi du mouvement brownien fractionnaire (Eq. 1.11). Il est alors naturel de représenter l'incrément comme le produit d'une variable aléatoire gaussienne δ de moyenne nulle et de variance unité, et d'une amplitude fluctuante $(\ell/L)^h$, avec h une variable aléatoire centrée sur approximativement l'exposant de Hurst typique de la turbulence $H = 1/3$, comme il est fait dans

l'approche du *propagateur* [24]. Nous adopterons donc le modèle probabiliste suivant

$$\delta_\ell u \stackrel{\text{loi}}{=} \left(\frac{\ell}{L}\right)^h \delta. \quad (1.15)$$

où δ est une variable aléatoire gaussienne, indépendante de l'échelle, de variance donnée dans l'équation 1.11. Il faut alors donner une loi de probabilité pour la variable aléatoire h , le formalisme multifractal suggère fortement de choisir

$$\mathcal{P}_h(h) \propto \left(\frac{\ell}{L}\right)^{1-\mathcal{D}^E(h)}, \quad (1.16)$$

où $\mathcal{D}^E(h)$ est une fonction universelle, indépendante de l'échelle ℓ , appelée spectre des singularités dans le langage du multifractal [2]. Cette formulation a le bon goût, dans la limite des échelles infiniment petites, d'être cohérente avec un comportement en loi de puissance des fonctions de structure, le spectre des exposants ζ_q^E étant relié au spectre des singularités $\mathcal{D}^E(h)$ par une transformée de Legendre

$$\zeta_q^E = \min_h [qh + 1 - \mathcal{D}^E(h)].$$

Nous supposerons par la suite que les variables aléatoires h et δ sont indépendantes, ce qui détermine complètement la proposition probabiliste du formalisme multifractal et du propagateur (Eq. 1.15).

Dans un cadre non intermittent, on retrouve les statistiques du mouvement brownien fractionnaire pour lequel $h = H = 1/3$ est unique (et déterministe), le spectre $\mathcal{D}^E(h = H) = 1$, et étant égal à $-\infty$ partout ailleurs, et $\zeta_q^E = qH$. Empiriquement, les fluctuations de vitesse eulérienne sont très bien décrites par un spectre de singularités quadratique

$$\mathcal{D}^E(h) = 1 - \frac{(h - c_1)^2}{2c_2}, \quad (1.17)$$

qui stipule que dans le domaine inertiel, l'exposant de holder h , à l'échelle ℓ , est une variable aléatoire gaussienne, de moyenne c_1 , et de variance $c_2/\ln(L/\ell)$. Une transformée de Legendre donne alors $\zeta_q^E = c_1q - c_2q^2/2$. La loi des 4/5 (Eq. 1.13) impose $\zeta_3^E = 1$, c'est-à-dire $c_1 = 1/3 + 3c_2/2$. Nous utiliserons cette valeur pour c_1 dans la suite du document, et conserverons c_2 comme seul paramètre libre de cette description quadratique.

Extension aux échelles dissipatives

Nous ne développerons pas ici les arguments subtils liés à la modélisation des échelles dissipatives [2, 16]. Nous rappellerons quelques points importants.

- Dans ce cadre intermittent (Eq. 1.15), l'échelle dissipative est elle-même fluctuante, et reflète l'idée que les singularités h du régime inertiel sont dissipées à des échelles d'autant plus petites (resp. grandes) que la singularité est forte, h petit (resp. faibles, h grand) [25].

Un paramétrage naturel de l'échelle dissipative $\eta(h)$ à un nombre de Reynolds fini \mathcal{R}_e est le suivant

$$\eta(h) = L \left(\frac{\mathcal{R}_e}{\mathcal{R}^*} \right)^{-\frac{1}{1+h}} \quad (1.18)$$

qui fait intervenir une constante universelle $\mathcal{R}^* = 52$, que nous discuterons dans la suite, et un exposant fluctuant h dont la densité est celle donnée par le formalisme multifractal (c.f. Eq. 1.16) à l'échelle dissipative η , c'est-à-dire [26]

$$\mathcal{P}_h(h) \propto \left(\frac{\eta}{L} \right)^{1-\mathcal{D}^E(h)} \propto \left(\frac{\mathcal{R}_e}{\mathcal{R}^*} \right)^{-\frac{1-\mathcal{D}^E(h)}{1+h}}. \quad (1.19)$$

Remarquons que cette densité est normalisable, et connue dans le langage de la statistique comme une loi inverse-gaussienne généralisée lorsque $h \geq -1$. Remarquons que même si l'exposant de Holder h est supposé gaussien dans le régime inertiel, en cohérence avec un spectre des singularités quadratique (Eq. 1.17), alors quand bien même, aux échelles dissipatives, celui-ci devient non gaussien, de densité donnée par l'équation 1.19. Cette non-gaussianité supplémentaire va se révéler fondamentale dans le cadre de la modélisation stochastique (voir section 3.4.5).

La modélisation des échelles dissipatives permet de prédire la statistique des incréments à des échelles infiniment petites. A ces échelles, le champ de vitesse est lisse, l'incrément de vitesse est donc proportionnel à l'échelle ℓ selon $\delta_\ell u = \ell \partial_x u_x$, en cohérence avec un développement de Taylor, et l'extension de la loi de fluctuation (Eq. 1.15) obtenue par continuation à l'échelle (fluctuante) $\ell = \eta(h)$ est donnée par

$$\delta_\ell u \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{\ell}{L} \left(\frac{\eta(h)}{L} \right)^{h-1} \delta, \quad (1.20)$$

ce qui nous donne une prédiction pour le gradient de vitesse $\partial_x u_x$. Nous pouvons donc désormais prédire précisément le lien entre dissipation moyenne et écoulement de grande échelle. Ainsi, des calculs dans ce cadre permettent de préciser la relation 1.5 et d'obtenir un équivalent de la dissipation moyenne

$$\mathbb{E}[\varepsilon] \underset{\nu \rightarrow 0}{\sim} \frac{15}{\mathcal{R}^*} \frac{\sigma^3}{L}, \quad (1.21)$$

et qui donne toute sa signification au paramètre libre $\mathcal{R}^* = 52$: il est celui qui relie la dissipation moyenne de l'écoulement aux grandes échelles, en fixant le taux de transfert de l'énergie dans les échelles. La constante \mathcal{R}^* joue donc le rôle, généralisé à un contexte intermittent, de la constante de Kolmogorov c_K (que nous pouvons relier [16]).

Transition de Batchelor entre l'inertiel et le dissipatif

Nous nous doutons bien que la transition entre le régime inertiel 1.15 et le régime dissipatif, dont le Holder est décrit par la densité non gaussienne de l'équation 1.19, ne

se fera pas de manière brutale. Afin de modéliser cette transition, nous utiliserons une transition douce, proposée pour la première fois par Batchelor [27], et réutilisée ensuite par Meneveau dans le cadre du formalisme multifractal [28], que nous avons rendu cohérente avec la phénoménologie du régime dissipatif (Eqs. 1.18 et 1.19). Voir la référence [16].

Extension au cadre lagrangien

Dans le cadre lagrangien, une même description peut être écrite de manière analogue aux équations 1.15 et 1.16 et . L'incrément temporel sur une échelle τ se modélise dans le régime inertiel par l'égalité en loi suivante :

$$\delta_\tau v \stackrel{\text{loi}}{=} c \left(\frac{\tau}{T} \right)^h \delta.$$

avec cette fois-ci

$$\mathcal{P}_h(h) \propto \left(\frac{\tau}{T} \right)^{1-\mathcal{D}^L(h)},$$

faisant intervenir un spectre de singularités $\mathcal{D}^L(h)$, a priori différent de sa contrepartie eulérienne $\mathcal{D}^E(h)$. Des travaux de Borgas [20], rappelés dans les références [16, 17], peuvent être adaptés à cette formulation, et permettent de relier ces spectres de la manière suivante

$$\mathcal{D}^L(h) = -h + (1+h)\mathcal{D}^E\left(\frac{h}{1+h}\right), \quad (1.22)$$

qui est bien vérifiée, dans une certaine mesure, par les expériences et les simulations [16, 17]. Aux échelles dissipatives, une description similaire aux équations 1.18 et 1.19 peut être écrite, ce qui permet de décrire les fluctuations de l'accélération.

Modélisation du phénomène de skewness

Dans le cadre eulérien, la loi des 4/5 (Eq. 1.13) est une difficulté supplémentaire. Rappelons que nous avons supposé l'indépendance de la composante gaussienne δ , et du holder h dans l'égalité en loi de l'équation 1.15, ce qui implique nécessairement la nullité du moment d'ordre 3 de l'incrément. Ceci est incohérent avec la loi des 4/5 (Eq. 1.13).

Afin de reproduire les phénomènes liés au transfert d'énergie vers les petites échelles (voir la section 1.2.6), il nous faut corrélérer donc ces deux quantités. Nous développons dans la référence [16] un formalisme qui prend en compte une possible probabilité conjointe non triviale de δ et h . Ceci nous permet de reproduire la loi des 4/5. Néanmoins, la modélisation du moment d'ordre 3 de l'incrément aux échelles dissipatives, sans paramètre libre supplémentaire, reste une question ouverte, puisque nous ne connaissons pas la forme de la densité conjointe de δ et h lorsque h n'est plus gaussien, comme il est requis par la phénoménologie dissipative (Eq. 1.19).

Confrontations aux expériences

Le formalisme développé permet d'obtenir une expression pour la densité des incréments de vitesse à toutes les échelles inertielles et dissipatives, dans le cadre eulérien et lagrangien, se donnant les paramètres de l'écoulement, σ , L et le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e . Il faut ajouter à ces paramètres expérimentaux deux paramètres supplémentaires, le coefficient d'intermittence $c_2 = 0.025$ et le Reynolds critique $\mathcal{R}^* = 52$. Nous représentons les prédictions de ce formalisme dans la figure 1.3. La comparaison avec l'ensemble des données est quantitative. Nous renvoyons le lecteur aux références [16, 21, 22] pour une étude détaillée.

En ce qui concerne la flatness (figure 1.4), le coefficient d'intermittence choisi $c_2 = 0.025$ est choisi de telle sorte à reproduire la loi de puissance du régime inertiel car $\zeta_4^E - 2\zeta_2^E = -4c_2$. Ce formalisme de plus permet alors la prédiction du comportement de la flatness aux échelles dissipatives, et en particulier la dépendance subtile avec le nombre de Reynolds [16].

1.5.2 Une approche axiomatique de la turbulence

L'étude précédente, qui reproduit de manière très satisfaisante les fluctuations de vitesse eulérienne et lagrangienne observées expérimentalement et numériquement, permet d'énoncer l'approche axiomatique suivante :

Dans le cadre de la turbulence pleinement développée forcée homogène et isotrope, à un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e \rightarrow \infty$, les vitesses eulériennes et lagrangiennes sont des processus aléatoires stationnaires de même écart-type σ . Les incréments longitudinaux de vitesse eulérienne $\delta_\ell u$ et temporels lagrangiens $\delta_\tau v$ se comportent de manière universelle comme

$$\mathbb{E}[(\delta_\ell u)^q] \underset{\ell \rightarrow 0}{\propto} \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\zeta_q^E} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[(\delta_\tau v)^q] \underset{\tau \rightarrow 0}{\propto} \left(\frac{\tau}{T}\right)^{\zeta_q^L},$$

les spectres d'exposants ζ_q^E et ζ_q^L étant reliés par la relation de Borgas (Eq. 1.22). En ce qui concerne la turbulence eulérienne, la dissipation moyenne reste finie et est reliée à l'écoulement de grande échelle (Eq. 1.21). De plus, la fonction de structure d'ordre 3 répond à la loi des 4/5 (Eq. 1.13) imposant $\zeta_3^E = 1$. Aux bas ordres, typiquement $q \leq 6$, un modèle quadratique pour ζ_q^E reproduit de manière satisfaisante l'ensemble des données expérimentales (Eq. 1.17)

$$\zeta_q^E = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}c_2\right) - c_2 \frac{q^2}{2}.$$

Cette description nécessite seulement deux paramètres libres universels : (i) le coefficient d'intermittence c_2 dont la valeur est déterminée expérimentalement

$$c_2 = 0.025,$$

et (ii) le nombre de Reynolds critique

$$\mathcal{R}^* = 52.$$

De plus, à un nombre de Reynolds \mathcal{R}_e fini, les valeurs des deux paramètres libres permettent de prédire de manière quantitative les fluctuations de vitesse aux échelles dissipatives, notamment la statistique des gradient de vitesse eulérienne ∂u , ainsi que l'accélération des particules fluides.

Deuxième partie

Ouverture

Chapitre 2

Dynamique lagrangienne du tenseur des gradients de vitesse

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment *décrire* les fluctuations de vitesse eulérienne et lagrangienne observées dans les écoulements pleinement turbulents. Cette approche probabiliste, qui reprend dans un cadre unifié les outils développés pour le formalisme multifractal [2] et pour l'approche du propagateur [24], permet de reproduire les statistiques des incréments de vitesse à toutes les échelles inertielles se donnant, sous l'approximation d'un spectre de singularités quadratique, deux paramètres libres : le coefficient d'intermittence dont la valeur, universelle, $c_2 = 0.025$ est estimée à partir des mesures et des simulations numériques, et un nombre de Reynolds critique, universel lui aussi, $\mathcal{R}^* = 52$, qui détermine le taux de transfert d'énergie dans les échelles. La puissance de cette approche, qui est à ce stade descriptive, réside dans son caractère prédictif aux petites échelles dissipatives, domaine d'échelles dans lequel les fluctuations des incréments reflètent celles des gradients de vitesse. Ainsi, l'observation a permis de construire une *théorie phénoménologique* de la turbulence eulérienne et lagrangienne.

A ce stade, ce coefficient d'intermittence est donc un paramètre libre qui permet schématiquement de stipuler de *combien* se déforment les densités de probabilité d'une échelle à l'autre. Dans toute cette approche, nous ne faisons pas appel aux équations de Navier et Stokes, ou alors de manière anecdotique lors de la prise en compte de la loi des 4/5ième. Nous n'avons donc pas mis en évidence un *mécanisme* fluide permettant de comprendre et justifier les fluctuations observées. En particulier, nous souhaiterions appréhender le phénomène d'intermittence dans le cadre de la mécanique des fluides. Pour cela, nous allons devoir prendre en compte le caractère vectoriel du champ de vitesse, et étudier l'interaction subtile entre la déformation fluide et les taux de rotation. Encore une fois, cette approche théorique est guidée par des faits expérimentaux, que sont (i) l'alignement préférentiel de la vortécité avec les directions propres de la déformation et (ii) la statistique des invariants du tenseur des gradients. L'approche que nous allons présenter s'attache à décrire l'évolution lagrangienne des gradients de vitesse qui fait intervenir un, si ce n'est le, mécanisme fondamental des équations d'Euler : le mécanisme d'étirement de la vortécité.

2.1 Faits expérimentaux

Commençons par définir les quantités que nous allons étudier. Par la suite, nous nous concentrerons sur les petites échelles du fluide, typiquement ses gradients de vitesse. Le tenseur des gradients $A_{ij} = \partial_j u_i$ est une matrice 3×3 de trace nulle (par incompressibilité). Comme de coutume, nous décomposerons ce tenseur en sa partie symétrique S_{ij} (la déformation) et antisymétrique Ω_{ij} (les taux de rotation)

$$A_{ij} = S_{ij} + \Omega_{ij}.$$

A 3 dimensions, Ω_{ij} définit le vecteur vorticité ω de la manière suivante :

$$\omega_i = -\epsilon_{ijk}\Omega_{jk},$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita. La matrice symétrique réelle S a trois valeurs propres réelles $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, dont la somme est nulle (par incompressibilité), ce qui implique que $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_3 \geq 0$, le signe de la valeur propre intermédiaire λ_2 n'étant pas contraint. Nous appellerons e_i les vecteurs propres associés (orthogonaux et unitaires).

Considérons un écoulement cisailé de déformation constante S_0 , et plaçons-nous dans son repère propre. Admettons dans une première approche qu'il fait sens de considérer une déformation figée (ce qui n'est pas vraiment réaliste) et considérons, nous reviendrons sur ce point par la suite, que la vorticité est étirée par la déformation, c'est-à-dire, le long d'une trajectoire lagrangienne, $D\omega/Dt = S_0\omega$. Dans le repère propre, nous obtenons donc

$$\omega(\tau) = \begin{pmatrix} e^{\tau\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tau\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\tau\lambda_3} \end{pmatrix} \omega(0).$$

Nous voyons donc que la projection de la vorticité $\omega(\tau).e_3 = e^{\tau\lambda_3}\omega(0).e_3$ sur le vecteur e_3 associé à la plus grande valeur propre λ_3 ne cesse d'augmenter dans le temps. Autrement dit, la vorticité aura tendance à s'aligner préférentiellement avec e_3 . Nous allons voir qu'en turbulence, une situation radicalement différente se passe.

2.1.1 Alignement préférentiel de la vorticité

Nous représentons dans la figure 2.1 la densité de probabilité du cosinus de l'angle θ entre la vorticité ω et les vecteurs unitaires propres de la déformation e_i obtenue dans un écoulement numérique, les conditions aux limites sont périodiques (à un nombre de Reynolds relativement élevé $\mathcal{R}_\lambda \approx 140$). Nous constatons donc que la probabilité est piquée lorsque le cosinus de l'angle entre vorticité et le vecteur propre intermédiaire e_2 s'approche de 1 : c'est l'alignement préférentiel de la vorticité avec le vecteur propre intermédiaire. C'est une propriété surprenante et caractéristique de la turbulence des fluides : le phénomène d'étirement de la vorticité est fondamentalement non linéaire et a pour conséquence

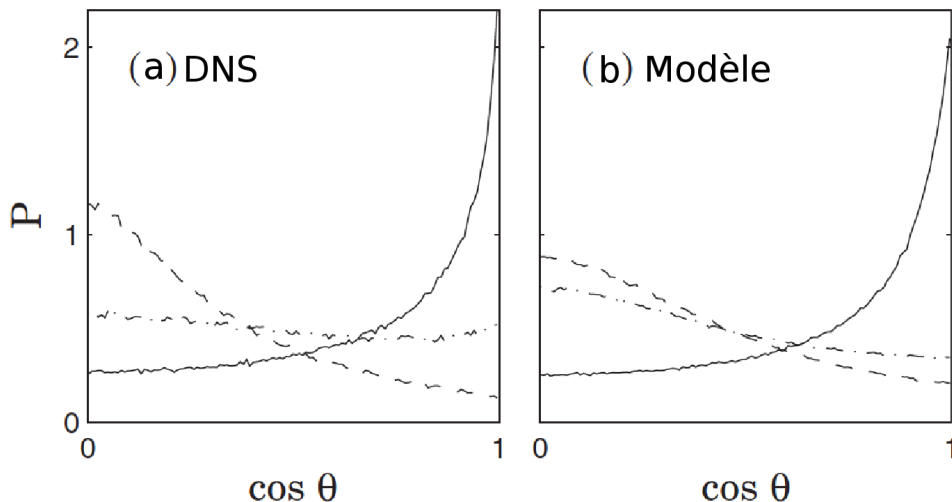


FIGURE 2.1 – Densité de probabilité du cosinus de l’angle entre vorticité et les vecteurs propres de la matrice de déformation : e_1 (tiret), e_2 (continu), e_3 (tiret et point)

l’alignement de la vorticité avec le vecteur propre intermédiaire. C’est une propriété de base de la turbulence tridimensionnelle qu’il nous faudra comprendre et reproduire. Nous discuterons par la suite les prédictions d’un modèle que nous avons proposé en collaboration avec Charles Meneveau [29–31]. Remarquons aussi que l’orientation de la vorticité et de celle du vecteur e_3 associé à la plus grande des valeurs propres sont quasi-indépendantes (la densité est plate). Enfin, nous constatons que typiquement, la vorticité est préférentiellement orthogonale à e_1 .

2.1.2 Densité des invariants du tenseur des gradients

Une autre caractérisation traditionnelle du tenseur des gradients, que nous rappelons vivre dans un espace des phases de dimension 8 (et non 9 car sa trace est nulle), est la statistique de ses valeurs propres. Ceci nous ramène à un espace des phases de dimension 2 puisque leur somme est nulle. Les valeurs propres de A sont solutions du polynôme caractéristique dont les coefficients sont donnés par les invariants (non trivialement nuls) $Q = -\frac{1}{2}\text{tr } A^2$ et $R = -\frac{1}{3}\text{tr } A^3$. Nous étudierons donc par la suite la densité de probabilité conjointe des invariants Q et R . Dans le langage de la mécanique des fluides, bien adapté à décrire le comportement de la déformation S et du taux de rotation Ω , remarquons que Q quantifie la compétition entre dissipation ($\nu \text{tr } S^2$) et l’enstrophie $\nu |\omega|^2$, soit

$$Q = \frac{1}{4}|\omega|^2 - \frac{1}{2}\text{tr}(S^2). \quad (2.1)$$

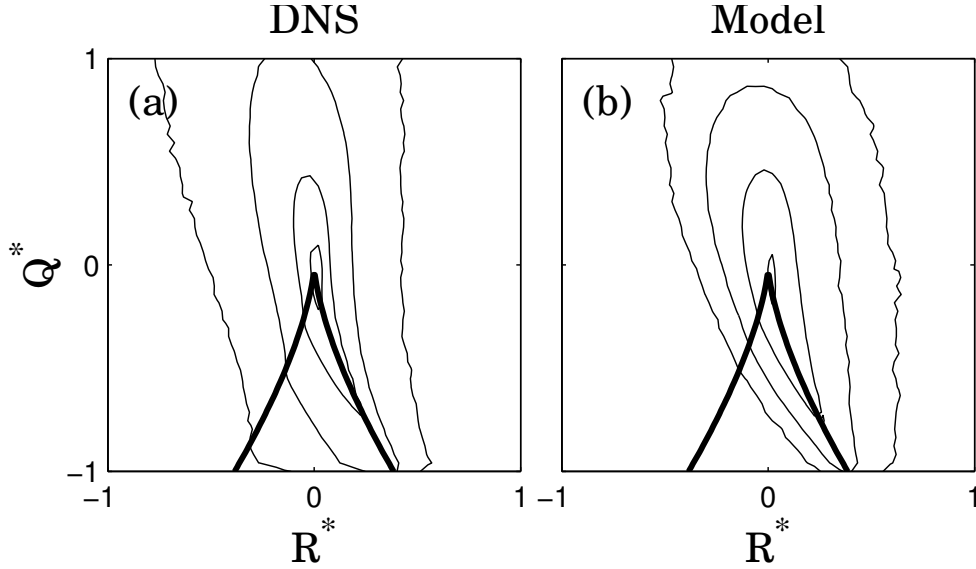


FIGURE 2.2 – Densité de probabilité conjointe des invariants R et Q . Les lignes de contour d’isoprobabilité sont espacées d’un facteur 10.

Ainsi, lorsque Q est positif (resp. négatif), la rotation (resp. la déformation) domine l’écoulement. De la même manière, le troisième invariant R peut s’écrire

$$R = -\frac{1}{4}\omega_i S_{ij} \omega_j - \frac{1}{3}\text{tr}(S^3). \quad (2.2)$$

Il régit schématiquement la compétition entre la *création* d’entrophie $\omega_i S_{ij} \omega_j$ et la *production* de dissipation $-\text{Tr}(S^3)$. Ceci signifie que localement, l’écoulement a une tendance à créer de l’entrophie (lorsque $R \leq 0$) ou de la dissipation (lorsque $R \geq 0$).

Nous représentons dans la figure 2.2 l’estimation de la densité de probabilité conjointe des invariants R et Q dans le même écoulement numérique que précédemment. Nous constatons deux tendances principales de l’écoulement turbulent :

- la probabilité est grande de rencontrer une zone où dissipation et production de dissipation dominant ($Q < 0$ et $R > 0$, quadrant inférieur droit).
- la probabilité est grande de rencontrer une zone où entrophie et production d’entrophie dominant ($Q > 0$ et $R < 0$, quadrant supérieur gauche).

En d’autres termes, dans une zone où la rotation (resp. la déformation) domine, l’écoulement aura tendance à créer encore plus de rotation (resp. de la déformation). L’écoulement turbulent est donc par nature instable et a constamment tendance à accentuer ses caractéristiques locales. Nous discuterons par la suite les prédictions de notre modèle représentées dans la figure 2.2(b).

2.2 Equation de transport du tenseur des gradients

Dans le langage des mécaniciens, intéressons-nous à l'équation de transport du tenseur des gradients A , c'est-à-dire à sa dynamique lagrangienne. En prenant le gradient des équations de Navier et Stokes (Eq. 1.2), nous obtenons aisément

$$\frac{DA_{ij}}{Dt} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} = -A_{ik}A_{kj} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \Delta A_{ij} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (2.3)$$

qui fait intervenir un terme d'interaction locale donné par $-A^2$, le hessien de pression, la dissipation visqueuse et la dérivée de la force f de grande échelle.

2.2.1 Non localité du hessien de pression et correction visqueuse

Remarquons tout d'abord que l'équation de transport du gradient de vitesse (Eq. 2.3) est fermée si on se donne le champ spatial complet des gradients. Autrement dit, la seule connaissance des gradients à une unique position ne permet pas de définir hessien de pression et laplacien. Les termes de pression et visqueux sont ainsi non locaux. Ce n'est pas une surprise.

Néanmoins, le terme d'auto-étirement $-A^2$, qui inclut le mécanisme d'étirement de la vorticité est très important, et est purement local. Il est alors très tentant d'étudier les conséquences de cette interaction locale sur la dynamique du tenseur des gradients. L'équation aux dérivées partielles Eq. 2.3 est aussi complexe que l'équation de Navier et Stokes (Eq. 1.2) elle-même. Nous allons donc adopter une approche de *fermeture* des termes de pression et visqueux qui permettra de les exprimer en fonction de la valeur locale de A , transformant donc une dynamique non locale r g e par une équation aux dérivées partielles en une dynamique locale r g e par une équation aux dérivées ordinaires. C'est une simplification radicale de la dynamique des gradients.

Concentrons-nous sur le hessien de pression. L'équation de Poisson permet d'exprimer le champ de pression en fonction du champ des gradients, et plus précisément le champ de $\text{tr}(A^2)$. A 3 dimensions, la fonction de Green du laplacien est homogène de degré -1 , donc intégrable. Le gradient de pression fait intervenir donc une fonction de Green homogène de degré -2 , intégrable à 3 dimensions. Quant à lui, le hessien fait intervenir un noyau homogène de degré -3 , qui cette fois-ci n'est pas intégrable. Néanmoins, nous allons pouvoir donner un sens à la convolution correspondante dans le cadre des opérateurs intégraux singuliers [32–35], et nous obtiendrons une valeur principale de Cauchy (notée P.V.). On peut alors écrire

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = -\text{tr}(A^2) \frac{\delta_{ij}}{3} - \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^3} k_{ij}(x-y) \text{tr}(A^2)(y) dy \quad (2.4)$$

où k_{ij} est le hessien de la fonction de Green du laplacien

$$k_{ij}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{4\pi|x|} = \frac{|x|^2 \delta_{ij} - 3x_i x_j}{4\pi|x|^5}.$$

L'équation 2.4 montre clairement que seule la partie isotrope du hessien (proportionnelle à δ_{ij}) est locale. Toute la non localité du hessien se retrouve dans la partie anisotrope donnée par le deuxième terme de droite de l'équation 2.4.

2.2.2 Interaction locale et approximation d'Euler restreint

Afin d'étudier les conséquences du terme d'auto-étirement $-A^2$ intervenant dans l'équation de transport des gradients (Eq. 2.3), plaçons-nous dans le cadre des équations d'Euler ($\nu = 0$). Dans ce cadre, le hessien de pression reste donné par la convolution de l'équation 2.4, et est donc non local. Adoptons alors la fermeture la plus simple pour le hessien, dénommée approximation d'Euler restreint, permettant de se ramener à une équation aux dérivées ordinaires le long de la trajectoire lagrangienne. Cette fermeture se propose de ne conserver dans le hessien (Eq. 2.4) que le terme local $-\text{tr}(A^2)\frac{\delta_{ij}}{3}$, qui nous assure que le gradient le long d'une trajectoire conserve une trace nulle, comme il est attendu dans un écoulement incompressible.

Nous obtenons ainsi les équations d'Euler restreint

$$\frac{DA_{ij}}{Dt} = - \left(A_{ik}A_{kj} - \text{tr}(A^2)\frac{\delta_{ij}}{3} \right), \quad (2.5)$$

dont on connaît les solutions exactes pour toutes conditions initiales [31, 36, 37]. Rappelons les propriétés de ces solutions :

- Pour toutes conditions initiales non nulles, au moins une composante du tenseur A diverge à temps fini. Ceci n'est pas surprenant. Nous pouvons aisément nous en convaincre si on considère un ersatz à une dimension de cette équation, dans le cadre des écoulement compressibles de Burgers. Considérons alors le scalaire gradient de vitesse $a = \partial u$. On obtient alors la dynamique simplifiée $Da/Dt = -a^2$, dont la solution, quand elle a un sens, s'écrit $a(t) = 1/(t + 1/a(0))$. Ainsi, si la condition initiale est négative ($a(0) < 0$), la solution diverge sur un temps fini donné par $t^* = -1/a(0)$. L'équation de Burgers développe des chocs.
- Nous pouvons à ce stade constater le caractère très schématique de cette fermeture locale du hessien de pression. Physiquement, cette divergence à temps fini n'est pas acceptable. Néanmoins, il est possible de montrer que lors du développement de cette divergence, la vorticité s'aligne avec le vecteur propre intermédiaire de la déformation. En ce sens, malgré l'existence de la divergence à temps fini, le terme d'auto-étirement contient une mécanique suffisante permettant d'expliquer l'alignement préférentiel de la vorticité avec le vecteur propre intermédiaire de la déformation, comme il est observé dans les expériences et les simulations numériques (c.f. figure 2.1). De plus, nous ne ferons que l'évoquer, la valeur propre intermédiaire λ_2 est positive, ce qui est aussi observé dans les expériences [31].
- Toujours dans ce cadre simplifié des équations d'Euler restreint (Eq. 2.5), la dynamique des invariants R et Q est facilement intégrable, et nous obtenons la constante

du mouvement suivante :

$$\frac{27}{4}R^2(t) + Q^3(t) = \frac{27}{4}R^2(0) + Q^3(0).$$

Ainsi, lors du développement de la divergence à temps fini, $R^2(t)$ tend vers $+\infty$, ce qui implique que $Q(t)$ tende vers $-\infty$. Le terme d'auto-étirement a pour conséquence d'orienter l'écoulement vers le quadrant inférieur droit du plan $R-Q$. Ceci est observé dans les écoulement réels, comme nous le rappelons lors de la discussion de la figure 2.2.

Nous voyons donc que ce modèle simple, qui assimile le hessien de pression à sa seule trace, c'est-à-dire au laplacien, en cohérence avec l'équation de Poisson, et qui néglige les effets visqueux, explique de manière qualitative les deux faits expérimentaux que nous avons présenté, l'alignement préférentiel de la vorticité et la prédominance du quadrant inférieur droit du plan RQ . Afin d'obtenir une prédiction quantitative des statistiques des invariants et du cosinus de l'angle entre vorticité et vecteurs propres de la déformation, il nous faut stationnariser la dynamique des gradients. L'approximation d'Euler restreint ne peut jouer ce rôle car elle mène à une divergence à temps fini. Dans ce contexte, il est naturel d'ajouter à l'équation 2.5 une fermeture pour le terme visqueux, comme par exemple un terme de frottement (proportionnel à A). Il est alors aisé de se convaincre [31] qu'une telle régularisation n'est efficace que pour des conditions initiales de faible amplitude, le terme d'auto-étirement l'emportant lorsque leur amplitude est plus grande et donnant lieu encore une fois à une divergence à temps fini. Nous allons voir que la déformation du fluide est un élément clé dans les modèles de fermeture de la pression et de la viscosité.

2.3 Fermeture basée sur la déformation fluide

2.3.1 Mécanique de la déformation et tenseur de Cauchy-Green

Considérons une particule fluide à la position $x(X, t)$ à l'instant t , qui initialement à l'instant t_0 se trouvait à la position $x(X, t_0) = X$. L'évolution temporelle de la position x est naturellement obtenue à partir du champ eulérien des vitesses, $dx(X, t)/dt = u[x(X, t), t]$, où u est le champ des vitesses. Une physique clé que nous utiliserons pour fermer la dynamique des gradients (Eq. 2.3) est donnée par le *gradient de la déformation* D , défini comme la variation de la position eulérienne $x(X, t)$ lorsque la position initiale X de la particule change,

$$D_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}. \quad (2.6)$$

La dynamique du tenseur des gradients de la déformation est facilement obtenue en dérivant par rapport à X_j la dynamique de la position x_i , et nous arrivons à

$$\frac{dD_{ij}(t_0, t)}{dt} = A_{ik}(t)D_{kj}(t_0, t), \quad (2.7)$$

avec comme condition initiale $D_{ij}(t_0, t_0) = \delta_{ij}$. L'équation 2.7 peut être résolue formellement avec une exponentielle à temps ordonné, nous renvoyons le lecteur à une référence typique de la mécanique des milieux continus. Le tenseur de Cauchy-Green $C(t_0, t)$ est défini comme $C = DD^\top$. Il est symétrique, et ses valeurs et vecteurs propres décrivent la rotation et déformation subit par une portion du fluide. Il est aisé de se convaincre que le tenseur de Cauchy-Green $C(t_0, t)$ n'est pas une quantité stationnaire. La portion de fluide est constamment étirée et déformée dans le temps. Le comportement exponentiel de ses valeurs propres (c.f. [38]) en est une parfaite illustration.

2.3.2 Le modèle de la tétrade et un frottement visqueux non linéaire

Lorsque j'ai débuté mon post-doctorat avec C. Meneveau, l'utilisation de cette physique de la déformation pour fermer les termes non locaux de l'équation 2.3 était dans l'air du temps. En particulier, chronologiquement, le modèle de la tétrade [39] proposait une fermeture pour le hessien de pression qui faisait intervenir, non explicitement, cette physique de la déformation et le tenseur C . De manière explicite, en conservant une fermeture isotrope du hessien de pression, la Ref. [40] proposait une fermeture locale et non linéaire du terme visqueux faisant intervenir le tenseur de Cauchy-Green C . Dans ces deux importants travaux, la dynamique obtenue pour les gradients n'est pas stationnaire puisque fondamentalement, le tenseur de Cauchy-Green ne l'est pas non plus. Dans ce contexte riche, nous avons montré avec C. Meneveau [29] comment réinterpréter la fermeture du hessien utilisé dans la tétrade [39] en terme de tenseur de Cauchy-Green, fortement inspiré par le travail de la Ref. [40]. De plus, nous avons stationnarisé la dynamique en ne considérant seulement la déformation récente, une étape fondamentale afin de comparer les prédictions de la dynamique obtenue après fermeture avec les mesures expérimentales et les simulations numériques.

2.3.3 Transformation lagrangienne et déformation fluide

Le point de départ de l'inclusion de la physique de la déformation dans une fermeture du hessien de pression est le changement de variable suivant

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \approx \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial X_m \partial X_n},$$

le signe \approx rappelle le fait qu'un terme supplémentaire intervient dans ce changement de variable lié à la répartition spatiale du gradient de la déformation, et que nous négligerons par la suite.

Nous avons vu, lors de la présentation de l'approximation d'Euler restreint (c.f. Eq. 2.5) que de ne conserver du hessien de pression seulement sa partie isotrope, donnait lieu à une divergence à temps fini. Néanmoins, certaines propriétés de la turbulence (alignement de la vorticité et distribution des invariants)  taient reproduites qualitativement. De manière

similaire, il est alors très tentant de ne conserver que la partie isotrope du hessien lagrangien de la pression, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial X_m \partial X_n} \approx \frac{\delta_{mn}}{3} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial X_k \partial X_k},$$

ce qui montre une dépendance explicite, dans le cadre de cette approximation, du hessien de pression vis à vis de l'inverse du tenseur de Cauchy-Green

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \approx \frac{1}{3} (C^{-1})_{ij} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial X_k \partial X_k}.$$

Un même changement de variable, appliqué à l'équation de Poisson, relie la quantité lagrangienne $\partial^2 p(x, t) / \partial X_k \partial X_k$ au tenseur des gradients A de la manière suivante :

$$\Delta p = -\text{tr}(A^2) = (1/3) \text{tr}(C^{-1}) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial X_k \partial X_k}.$$

Nous obtenons alors, justifié dans le cadre de la physique de la déformation fluide, le modèle de hessien proposé pour la première fois dans la Ref. [39]

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \approx -\frac{(C^{-1})_{ij}}{\text{tr}(C^{-1})} \text{tr}(A^2). \quad (2.8)$$

Nous voyons que cette approche permet de donner une structure tensorielle non triviale au hessien de pression.

Une approche similaire, déjà explicitement utilisée dans la Ref. [40], permet d'obtenir une fermeture non linéaire du terme visqueux, et nous obtenons

$$\nu \Delta A \approx -\frac{1}{T} \frac{\text{tr}(C^{-1})}{3} A. \quad (2.9)$$

Cette fermeture (Eq. 2.9) fait intervenir la grande échelle de turbulence, ou temps de retournement T . C'est un apport de notre travail par rapport à la Ref. [40]. Elle se justifie de la manière suivante. Le changement de variable eulérien-lagrangien fait intervenir un hessien lagrangien de A , qui, de la même manière, est supposé isotrope. De plus, le laplacien lagrangien $\partial^2 A / \partial X_m \partial X_m$ ainsi obtenu est modélisé par un frottement linéaire de la forme $-(1/\lambda^2)A$ qui fait intervenir l'échelle de Taylor λ , l'échelle spatiale caractéristique parcourue par une particule fluide, advectée par l'écoulement de grande échelle durant un temps de Kolmogorov. En remarquant que λ^2/ν est de l'ordre du temps de retournement T , nous justifions donc le modèle donné dans l'équation 2.9.

Le dernier apport de notre travail a été de stationnariser les deux fermetures (Eqs. 2.8 et 2.9). En effet, à ce stade, le tenseur de Cauchy-Green étant non stationnaire (ses valeurs propres ont un comportement typiquement exponentiel), les fermetures des termes de pression (Eq. 2.8) et de viscosité (Eq. 2.9) ne sont pas stationnaires. La raison est je pense claire : toute l'histoire de la déformation fluide, prise en compte dans l'évolution temporelle du gradient de la déformation D (Eq. 2.7), n'a pas sa place dans la physique du hessien de pression et du terme visqueux. Seule la déformation *récente*, typiquement sur un temps dissipatif (le temps de Kolmogorov τ_K), expérimentée par la particule fluide, doit intervenir.

2.3.4 Déformation fluide récente et stationnarisation

Afin de prendre en compte seulement la déformation fluide récente, nous nous proposons de développer aux temps courts la dynamique du gradient de la déformation D (Eq. 2.7), et nous obtenons

$$\frac{dD_{ij}}{dt} = A_{ik}(t_0)D_{kj} + o(t - t_0) .$$

Dans les fermetures des termes intervenant dans la dynamique des gradients, nous souhaitons inclure la déformation récente subit par la particule, relativement à une situation isotrope, c'est-à-dire relativement à un gradient de déformation initial isotrope, égal à la matrice identité $D_{ij}(t_0, t_0) = \delta_{ij}$. Depuis cette condition initiale isotrope, après un temps $t - t_0 = \tau_K$, le gradient de la déformation acquiert une structure tensorielle toute particulière donnée par l'exponentielle du tenseur des gradients $A(t_0)$. Le temps de Kolmogorov τ_K est caractéristique de l'échelle de corrélation des gradients, nous pouvons donc supposer en bonne approximation que $A(t_0) \approx A(t)$. Ainsi, la physique de la déformation intervenant dans les fermetures sera assimilée au gradient de la déformation récente $D_{\tau_K}(t)$ donnée par

$$D_{\tau_K}(t) = e^{\tau_K A(t)} .$$

Le tenseur de Cauchy-Green correspondant s'écrit alors

$$C_{\tau_K}(t) = e^{\tau_K A(t)} e^{\tau_K A(t)\top} .$$

Nous constatons que pour un profil stationnaire de gradients $A(t)$, les tenseurs D_{τ_K} et C_{τ_K} sont désormais stationnaires.

Finalement, remplaçons dans les fermetures (Eqs. 2.8 et 2.9) le tenseur de Cauchy-Green C par sa version stationnarisée C_{τ_K} , et injectons ces fermetures stationnarisées dans la dynamique des gradients (Eq. 2.3). Nous obtenons, le long de la trajectoire d'une particule lagrangienne, la dynamique suivante [29]

$$dA = \left(-A^2 + \frac{C_{\tau_K}^{-1}}{\text{tr}(C_{\tau_K}^{-1})} \text{tr}(A^2) - \frac{1}{T} \frac{\text{tr}(C_{\tau_K}^{-1})}{3} A \right) dt + dW, \quad (2.10)$$

où dW est un bruit tensoriel gaussien de moyenne nulle, décorrélé en temps et dont la structure de covariance des composantes est cohérente avec celle d'un tenseur isotrope de trace nulle (c.f. [30]). Il modélise l'action du gradient de la force volumique externe f qui intervient dans la dynamique des gradients (Eq. 2.3). Remarquons que le gradient d'un terme lisse, telles que le sont les composantes de la force f , est d'amplitude faible par rapport aux termes déterministes de l'équation 2.10 à grands nombre de Reynolds. Pour cette raison, nous prendrons la variance des composantes de dW de l'ordre de l'unité. Remarquons que le modèle que nous proposons (Eq. 2.10) dépend uniquement, une fois adimensionné, d'un seul paramètre, le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e , défini comme $\mathcal{R}_e \propto (T/\tau_K)^2$ faisant intervenir le rapport de la grande échelle T et de la petite échelle τ_K .

2.3.5 Prédications et confrontation aux expériences

Alignement préférentiel de la vorticité et densité des invariants

Il est alors aisé de simuler les trajectoires aléatoires du processus stochastique de l'équation 2.10 [30]. Nous comparons ses statistiques avec l'écoulement numérique issu de l'intégration des équations de Navier et Stokes dans les figures 2.1(b) et 2.2(b). Au nombre de Reynolds considéré, $\tau_K/T \approx 0.1$, paramètre que nous utilisons pour simuler le modèle. Nous reproduisons de manière très satisfaisante à la fois l'alignement préférentiel de la vorticité, ainsi que la densité conjointe des invariants R et Q .

Courant de probabilité associé au hessien de pression

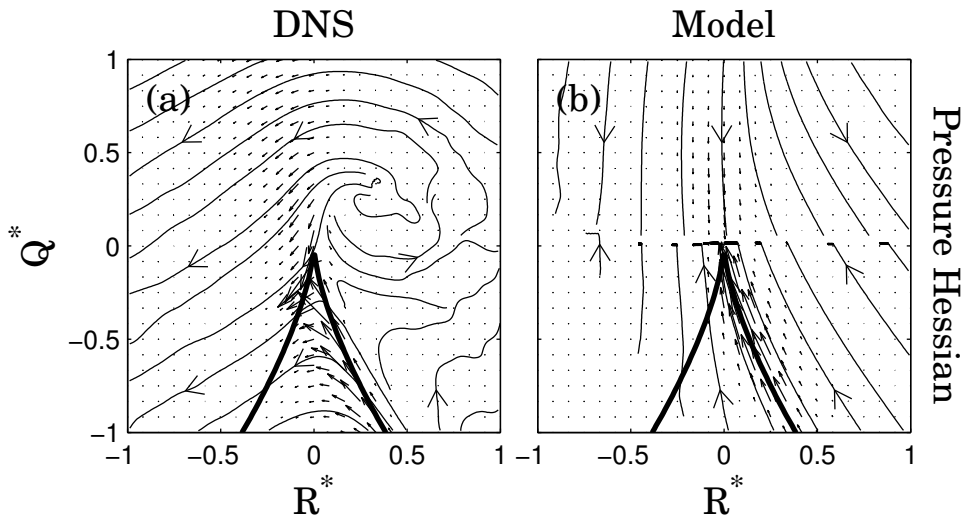


FIGURE 2.3 – Courant de probabilité associé au hessien de pression.

Afin d'aller plus loin dans la caractérisation des statistiques du hessien de pression, à la fois dans la simulation numérique directe (DNS) et dans notre modèle, nous quantifions le courant de probabilité associé à l'action du terme de pression dans le plan RQ , c'est-à-dire le vecteur obtenu par moyenne conditionnelle

$$\mathcal{W}_p = \left\langle \begin{pmatrix} -A_{ik}H_{ki}^p/\sigma^3 \\ -A_{ik}A_{kl}H_{li}^p/\sigma^4 \end{pmatrix} \middle| Q^*, R^* \right\rangle \mathcal{P}(Q^*, R^*), \quad (2.11)$$

où nous avons noté le hessien de pression par

$$H_{ij}^p = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\delta_{ij}}{3} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} \right),$$

et $\mathcal{P}(Q^*, R^*)$ la densité conjointe des invariants R et Q . Le vecteur \mathcal{W}_p intervient dans l'équation de Fokker-Planck de la probabilité conjointe $\mathcal{P}(Q^*, R^*)$. Plus précisément, \mathcal{W}_p

est la contribution de la pression au vecteur de probabilité \mathcal{W} qui régit la dynamique de la densité conjointe $\mathcal{P}(Q^*, R^*)$, selon $\partial\mathcal{P}(Q^*, R^*)/\partial t + \text{div}(\mathcal{W}) = 0$. Nous renvoyons le lecteur à la référence [30] pour plus de précisions.

En DNS, la pression joue deux rôles : (i) elle s’oppose au développement de la singularité à temps fini, engendrée par le terme d’auto-étirement, le long de la ligne de Vieillefosse dans le quadrant inférieur droit, et (ii) redistribue les probabilités vers les deux quadrants gauche. Nous constatons que le modèle reproduit l’action de la pression quant à s’opposer au développement de la divergence, mais est incapable de reproduire la redistribution des probabilités vers les zones dominées par la production de rotation ($R < 0$). Sans cette redistribution fondamentale, le modèle ne peut être poussé à des nombres de Reynolds infiniment grands [30].

Ainsi, la fermeture du hessien de pression que nous proposons donne des statistiques non réalistes à grands nombres de Reynolds, ce qui limite fortement la portée de cette approche. Néanmoins, à un nombre de Reynolds modéré, les prédictions restent réalistes.

Prédiction du coefficient d’intermittence

Néanmoins, dans une bande de Reynolds finie, nous montrons que les densités de probabilité des gradients se déforment continument au fur et à mesure que le Reynolds augmente. Ainsi, nous prédisons un certain aspect du phénomène d’intermittence (voir la référence [41]). De manière surprenante, nous estimons, numériquement, un coefficient d’intermittence compatible avec $c_2 = 0.025$ pour le gradient longitudinal. C’est à ma connaissance la première prédiction du coefficient d’intermittence. C’est une prédiction partielle car (i) on n’a pas accès au champ de vitesse et (ii) la gamme de Reynolds est limitée, mais néanmoins nous pouvons conclure que le terme d’étirement est un mécanisme à l’origine du phénomène d’intermittence.

2.3.6 Perspectives

Depuis la publication de nos travaux, cette approche a été généralisée en présence d’un scalaire passif [42], pour les équations de la magnétohydrodynamique [43] et en présence de rotation [44]. Un travail plus théorique exploite la petitesse de l’amplitude de la force dW afin de calculer explicitement les statistiques du tenseur des gradients depuis le modèle, dans le cadre de la théorie des grandes déviations [45]. Nous avons montré que le modèle pouvait être utilisé afin de prédire les fluctuations de rotation des particules lagrangiennes anisotropes (ellipsoïdales) [46]. Il reste encore beaucoup à faire dire au modèle, notamment dans le contexte de la turbulence en rotation et des particules anisotropes.

L’approche en termes de champs aléatoires, que nous allons développer dans le chapitre suivant semble être une voie fertile. Nous avons montré dans la référence [47] qu’une description gaussienne du champ de vitesse suffisait à reproduire de manière quantitative l’action de la pression observé sur le vecteur de probabilité (c.f. figure 2.3). Dans ce contexte, déduire d’un champ gaussien une possible fermeture du terme de pression donne

des résultats intéressants [48]. Un mélange de notre fermeture, avec celle proposée dans la référence [48] semble prometteuse, et reste à être explorée.

Troisième partie

Une peinture aléatoire de la turbulence des fluides

Chapitre 3

Représentation stochastique de la structure locale de la turbulence

Faisons un bref retour sur les deux premiers chapitres de cette habilitation. Nous avons vu, dans la première phase consacrée à l’observation des fluctuations de vitesse turbulente, que malgré la richesse du signal longitudinal de vitesse, seulement deux paramètres suffisent à décrire l’ensemble des statistiques observées, aussi bien aux échelles inertielles qu’aux échelles dissipatives, et ce dans les descriptions eulériennes et lagrangiennes. Ces deux paramètres libres sont (i) un coefficient d’intermittence $c_2 \approx 0.025$ et (ii) un Reynolds critique $\mathcal{R}^* = 52$, tous universels (indépendants du nombre de Reynolds et de la géométrie de l’écoulement à grande échelle). Nous verrons dans la section 3.4.3 comment prédire \mathcal{R}^* à partir d’un seul paramètre libre lié au c_2 , ce qui nous ramène à une description à un unique paramètre libre.

Dans une deuxième étape, nous avons adopté une approche cinématique qui permet de prendre en compte le terme d’auto-étirement des gradients, qui est le mécanisme fondamental des équations d’Euler. Afin d’obtenir une dynamique lagrangienne des gradients stationnaires, nous avons dû adopter une approche de fermeture permettant de régulariser la divergence à temps fini prédite par le modèle trop schématique des équations d’Euler restreint. Ainsi, nous avons obtenu une dynamique simple, locale, régit par une équation aux dérivées ordinaires, mais néanmoins capable de reproduire deux faits expérimentaux que sont l’alignement préférentiel de la vorticité, et la densité conjointe des invariants du tenseur des gradients. Nous avons vu aussi que quelque part, cette approche cinématique ultra-simplifiée permet de reproduire la déformation continue des densités des gradients, un certain aspect du phénomène d’intermittence, et prédit un c_2 cohérent avec les mesures expérimentales. Mais c’est une prédiction partielle du phénomène d’intermittence, et le coefficient d’intermittence est obtenu lorsque le seul paramètre de ce modèle, le nombre de Reynolds, est modifié. De plus, nous avons montré que la fermeture utilisée pour le hessien de pression reproduit que partiellement aussi le vrai rôle joué par la pression dans les écoulements réels et les simulations numériques. Ainsi, cette approche ne peut être poussée jusqu’à des nombre de Reynolds de Reynolds infiniment grands.

Nous souhaitons dans cette partie adopter une approche radicalement différente qui

consiste à construire un champ aléatoire de vecteurs permettant de reproduire l'ensemble des statistiques de la turbulence, ce qui inclut les lois de Kolmogorov (loi des 2/3, transferts d'énergie et intermittence), ainsi que l'aspect tridimensionnel (alignement préférentiel de la vorticité et distribution des invariants). Pour cela, et dans un premier temps, nous utiliserons la mécanique des équations d'Euler aux temps courts, et plus précisément l'étirement de la vorticité. Nous nous doutons bien que la prise en compte de la seule dynamique aux temps courts ne nous permettra pas de décrire de manière satisfaisante les propriétés statistiques des solutions stationnaires des écoulements de Navier-Stokes. Pour ce faire, nous utiliserons un élément stochastique, appelé *chaos multiplicatif* par J.-P. Kahane [49] (voir à ce propos la revue [50]), qui permet de construire un champ aléatoire dont les statistiques sont intermittentes. Cette étape stochastique, qui va dépendre d'un paramètre libre γ lié au coefficient d'intermittence c_2 , est au jour d'aujourd'hui de l'ordre du phénoménologique, et issue de la culture des *cascades* discrètes [51]. Le lien entre de telles mesures aléatoires et les équations de la mécanique des fluides n'a pas,   ma connaissance, été tissé. En ce sens, nous effectuons une *peinture aléatoire* de la turbulence des fluides, qui va se révéler être surprenamment réaliste des écoulements turbulents. Commençons donc par présenter le chaos multiplicatif, en lien avec la théorie phénoménologique de Kolmogorov et Obhukov KO62 [52, 53].

3.1 Le chaos multiplicatif gaussien

3.1.1 Retour sur les propriétés statistiques du champ de dissipation

Comme nous l'avons évoqué dans le premier chapitre, une phénoménologie de l'intermittence avait déjà été proposée par l' cole russe de la turbulence [52, 53]. Schématiquement, il s'agissait d'expliquer les corrections intermittentes à l'approche *monofractale* de Kolmogorov en prenant en compte des statistiques possiblement exotiques du champ de dissipation, au travers de la dite hypothèse de similarité raffinée [2] qui relie la fonction de structure d'ordre q de l'incrément de vitesse à l'échelle ℓ au moment d'ordre $q/3$ du champ de dissipation ε_ℓ lissé sur l'échelle ℓ selon (  une constante multiplicative près qui ne dépend que de q)

$$\mathbb{E}|\delta_\ell u|^q \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E} \left[\varepsilon_\ell^{q/3} \right] \ell^{q/3}, \quad (3.1)$$

où ε_ℓ est le champ de dissipation filtré (ou *coarse-grained* en anglais) sur l'échelle ℓ . Dans un contexte homogène et isotrope, il est souvent utilisé un lissage sur une boule, de rayon ℓ , de la manière suivante

$$\varepsilon_\ell(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\ell^3} \int_{|x-y|\leq\ell} \varepsilon(y)dy,$$

où ε est le champ de dissipation (Eq. 1.3). Modéliser une correction intermittente sur la fonction de structure d'ordre q (Eq. 3.1), c'est attribuer à ε_ℓ une statistique non triviale

dans les échelles, de la forme (*toujours à une constante multiplicative près qui ne dépend que de q*)

$$\mathbb{E}[\varepsilon_\ell^q] \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}^q[\varepsilon] \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\tau_q}, \quad (3.2)$$

où $\mathbb{E}[\varepsilon]$ est indépendant de la viscosité (aux faibles viscosités) et lié à l'écoulement de grande échelle (Eq. 1.5), et τ_q un spectre d'exposants universel. L'exposant τ_q , qui a été étudié expérimentalement et numériquement [2], est nécessairement contraint par $\tau_0 = \tau_1 = 0$. Ainsi, si on adopte un modèle linéaire pour τ_q , alors τ_q est nul à tous les ordres q , et on retrouve une statistique monofractale $\zeta_q = q/3$ pour le champ de vitesse via l'hypothèse de similarité raffinée (Eq. 3.1). Si τ_q est une fonction non linéaire de l'exposant q , alors on obtient pour le champ de vitesse une correction à la prédiction dimensionnelle de Kolmogorov, à savoir

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \tau_{q/3}.$$

Donnons nous alors le modèle non linéaire le plus simple pour le spectre des exposants τ_q , typiquement un modèle quadratique, comme nous l'avons pour le spectre des singularités (Eq. 1.17), et de plus cohérent avec les contraintes $\tau_0 = \tau_1 = 0$, à savoir

$$\tau_q = \frac{\mu}{2}q(1 - q), \quad (3.3)$$

qui fait intervenir un paramètre libre μ , le coefficient d'intermittence du champ de dissipation, et qui est directement relié au coefficient d'intermittence de la composante longitudinale du champ de vitesse selon $c_2 = \mu/9$. Remarquons qu'aux bas ordres q , les mesures expérimentales sont cohérentes avec $\mu \approx 9 \times 0.025 \approx 0.22$ [2], ce qui donne une vraie cohérence phénoménologique à l'approche KO62.

Il est tentant de penser que le progrès conceptuel lié à expliquer l'intermittence de la vitesse à partir de celui du champ de dissipation est mince. A ce stade, je m'associe à cette tentation. Néanmoins, cette approche a ouvert la voie à la construction stochastique de la turbulence, et il est fort plus aisé de construire un champ scalaire lognormal qu'un champ de vecteurs incompressible intermittent. Une version homogène d'un tel champ scalaire est donnée par le chaos multiplicatif gaussien que nous présenterons dans la section suivante. Néanmoins, la théorie KO62 [52, 53] est loin d'être anecdotique et dit énormément sur la structure spatiale du champ de dissipation. En effet, le comportement en loi de puissance des moments de ε_ℓ (Eq. 3.2) est une manifestation de la covariance du champ de dissipation lui-même. Pour illustrer ce point important, considérons le moment d'ordre $q = 2$, à savoir $\mathbb{E}[\varepsilon_\ell^2]$, et exprimons ce moment en fonction de la structure de covariance du champ de dissipation lui-même (que nous prenons homogène) de la manière suivante :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_\ell^2] = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\ell^3} \int_{|z| \leq \ell} \mathbb{E}[\varepsilon(0)\varepsilon(z)] dz \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}^2[\varepsilon] \left(\frac{\ell}{L}\right)^{-\mu}.$$

Il est alors naturel, afin d'assurer un comportement en loi de puissance des moments du champ ε_ℓ (Eq. 3.2), de donner une structure homogène (et isotrope) pour la corrélation du

champ de dissipation ε lui-même, à savoir

$$\mathbb{E} [\varepsilon(0)\varepsilon(z)] = \mathbb{E}^2 [\varepsilon] \left(\frac{|z|}{L} \right)^{-\mu}, \quad (3.4)$$

une décroissance qui a été vérifiée expérimentalement [54, 55]. Nous voyons donc que les gradients de vitesse se décorrèlent sur une échelle de Kolmogorov η_K , mais que leur amplitude (et en particulier leur carré) reste elle corrélée sur la grande échelle L : c'est une propriété forte du phénomène d'intermittence, les fortes fluctuations des gradients apparaissent par *bouffées intermittentes*, dont la taille caractéristique peut atteindre la grande échelle intégrale.

3.1.2 Un champ aléatoire lognormal pour la dissipation

Historiquement, la première proposition de méthode de construction d'un champ aléatoire scalaire (positif) capable de reproduire le comportement dans les échelles de la théorie KO62 (Eq. 3.2) provient de l'école russe, notamment Yaglom [2]. Ainsi, dans un cadre unidimensionnel, le champ de dissipation peut être défini comme le produit de multiplicateurs aléatoires distribués sur un arbre dyadique (donc discret) dans le plan espace-échelle [56, 57]. Cette méthode de construction puise son origine dans l'idée qu'un processus de *cascade* a lieu dans les échelles, un concept qui avait été déjà énoncé dans les travaux de Richardson [2]. Nous ne présenterons pas de tels processus car ils ne sont pas homogènes et la structure de covariance du champ obtenu dépend de la position dans l'espace. Cette inhomogénéité est inhérente au caractère discret de la cascade. Ce n'est que très récemment que les mathématiciens et physiciens sont parvenus à densifier ces cascades, généralisant l'arbre dans le plan espace-échelle à un *cône*, et permettant d'obtenir un processus homogène dont le spectre d'exposants τ_q peut être plus sophistiqué qu'un simple modèle quadratique. Ces processus sont appelés processus *log-infinitement divisibles* (voir notamment les Refs. [58–60]) à ce sujet. Nous ne parlerons pas non plus de ces processus car, sortis du cadre lognormal, leur mathématique est subtile. Nous nous restreindrons donc à un cas particulier de ces processus continus et homogènes, pour lequel la mathématique est beaucoup plus claire, et qui consiste à prendre l'exponentielle d'un champ gaussien très particulier donc la variance diverge et dont la structure de covariance est logarithmique. Ce processus lognormal est appelé par Kahane [49] (voir aussi la revue [50]) un chaos multiplicatif gaussien.

Le champ libre

Considérons alors un processus scalaire gaussien $X_\epsilon(x)$, et prenons $x \in \mathbb{R}^d$. Rappelons ici que nous allons considérer des processus gaussiens dont la covariance est logarithmique. Ainsi, l'indice ϵ joue le rôle (physique) de l'échelle de Kolmogorov, et nous assure, lorsque ϵ est fini, une variance finie pour X_ϵ . Considérons alors un processus brownien fractionnaire

(Eq. 1.8), pour un exposant de Hurst très particulier $H = 0$. Nous obtenons

$$X_\epsilon(x)_{x \in \mathbb{R}^d} = \int_{|x-y| \leq L} \frac{1}{|x-y|_\epsilon^{d/2}} W(dy), \quad (3.5)$$

où, encore une fois, $W(dy)$ une mesure gaussienne blanche, de moyenne nulle et de variance dy , et $|x|_\epsilon = \sqrt{|x|^2 + \epsilon^2}$ une norme régularisée sur l'échelle ϵ qui converge localement vers $|x|$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. En comparant avec l'expression de l'équation 1.8, nous avons choisi comme fonction de coupure $\varphi_L(x) = 1$ pour $|x| \leq L$, et 0 sinon. Concentrons-nous tout d'abord sur sa variance, sa moyenne étant nécessairement nulle. Le processus étant homogène, il suffit de calculer la variance de $X_\epsilon(x)$ en $x = 0$. Nous obtenons

$$\mathbb{E}X_\epsilon^2 = \int_{|y| \leq L} \frac{1}{|y|_\epsilon^d} dy = \omega_d \int_0^L \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \epsilon^2}} d\rho,$$

où ω_d est le volume de la sphère unité en dimension d . La singularité $1/\rho$ n'est pas intégrable en dimension 1, la variance de ce processus va donc diverger lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Regardons alors sa vitesse de divergence. Elle est obtenue en dilatant la variable d'intégration par ϵ , et nous obtenons

$$\mathbb{E}X_\epsilon^2 = \omega_d \int_0^{L/\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1}} d\rho$$

En découpant l'intervalle d'intégration $[0, L/\epsilon]$ en $[0, 1]$ et $[1, L/\epsilon]$, il est facile de se convaincre que l'intégrale sur le premier intervalle est finie, et que donc la variance du processus est dominée par la deuxième intégrale qui diverge logarithmiquement avec ϵ . On obtient alors

$$\mathbb{E}X_\epsilon^2 \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \omega_d \ln \left(\frac{L}{\epsilon} \right).$$

Considérons maintenant la structure de covariance du champ X_ϵ , et notons

$$K_\epsilon(x-y) = \mathbb{E}[X_\epsilon(x)X_\epsilon(y)].$$

Considérons $x \neq y$ puisque nous avons vu que $K_\epsilon(0) = \mathbb{E}X_\epsilon^2$ divergeait comme le logarithme de $1/\epsilon$. Il est alors facile de se convaincre que $K_\epsilon(x-y)$ converge localement lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et on note

$$K(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} K_\epsilon(x-y) = \int_{\substack{|u| \leq L/|y-x| \\ |u+1| \leq L/|y-x|}} \frac{1}{|u|^{d/2}} \frac{1}{|u+1|^{d/2}} du.$$

L'intégrale précédente fait parfaitement sens. Il est facile de voir que cette intégrale va diverger lorsque $|x-y| \rightarrow 0$ comme

$$K(x-y) \underset{|x-y| \rightarrow 0}{\sim} \omega_d \int_1^{L/|x-y|} \frac{1}{\rho} d\rho \underset{|x-y| \rightarrow 0}{\sim} \omega_d \ln \left(\frac{L}{|x-y|} \right).$$

Nous écrivons donc, de manière plus générale, que la covariance du champ $X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} X_\epsilon$ converge localement vers

$$K(x - y) = \omega_d \ln^+ \left(\frac{L}{|x - y|} \right) + g(|x - y|), \quad (3.6)$$

avec $\ln^+ |x| = \max(\ln |x|, 0)$ et g une fonction bornée qui tends vers 0 à grand argument. En dimension $d = 2$, un tel processus X est appelé *champ libre* dans la littérature mathématique, et peut être défini comme l'unique solution stationnaire de l'équation de la chaleur stochastique (c.f. Eq. 1.6 avec $\nu = 1$) avec forçage f delta-corrélé en temps et en espace (voir par exemple Ref. [61]).

Chaos multiplicatif

Nous allons utiliser ici le champ X_ϵ pour construire un champ aléatoire qui rend compte des propriétés statistiques du champ de dissipation (Eq. 3.2). Revenons en dimension $d = 3$. Pour $x \in \mathbb{R}^3$, le champ libre régularisé sur une échelle ϵ s'écrit

$$X_\epsilon(x)_{x \in \mathbb{R}^3} = \int_{|x-y| \leq L} \frac{1}{|x-y|_\epsilon^{3/2}} W(dy), \quad (3.7)$$

dont la variance diverge comme

$$\mathbb{E}X_\epsilon^2 \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} 4\pi \ln \left(\frac{L}{\epsilon} \right),$$

et dont la structure de covariance asymptotique (lorsque $\epsilon \rightarrow 0$) est donnée par

$$K(x - y) = 4\pi \ln^+ \left(\frac{L}{|x - y|} \right) + g(|x - y|), \quad (3.8)$$

où g est une fonction bornée de $|x - y|$ (c.f. Eq. 3.6). Considérons alors le champ aléatoire $\Gamma_\epsilon(x)_{x \in \mathbb{R}^3}$ suivant

$$\Gamma_\epsilon(x)_{x \in \mathbb{R}^3} = \mathbb{E}[\varepsilon] e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}X_\epsilon^2}, \quad (3.9)$$

où γ est une constante, que nous relierons au paramètre d'intermittence μ intervenant dans le modèle quadratique de τ_q (Eq. 3.3), et X_ϵ l'approximation du champ libre (sur ϵ) défini dans l'équation 3.7. Nous allons voir que le champ aléatoire $\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_\epsilon$ partage avec le champ de dissipation ε (Eq. 1.3) les mêmes propriétés statistiques lorsque le nombre de Reynolds est infiniment grand, à savoir une moyenne finie et donnée par $\mathbb{E}[\varepsilon]$, et des moments du champ filtré (Eq. 3.2) se comportant en loi de puissance. Le champ distributionnel Γ est appelé chaos multiplicatif gaussien [49].

Rappelons que pour une variable aléatoire gaussienne g de moyenne nulle, on a $\mathbb{E}e^g = e^{\frac{1}{2}\mathbb{E}g^2}$. On obtient donc facilement que

$$\mathbb{E}\Gamma_\epsilon = \mathbb{E}[\varepsilon],$$

une propriété qui reste vraie lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ puisque nous le rappelons, à grand nombre de Reynolds, la dissipation moyenne $\mathbb{E}[\varepsilon]$ est indépendante de la viscosité, donc de l'échelle de Kolmogorov η_K , donc de ϵ . Ainsi, le champ de dissipation ε et la distribution aléatoire Γ ont la même moyenne. Considérons alors la version filtrée du champ Γ_ϵ , que nous noterons

$$\Gamma_{\epsilon,\ell}(x) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\ell^3} \int_{|x-y|\leq\ell} \Gamma_\epsilon(y) dy.$$

Ses moments sont donnés par, supposons q entier,

$$\mathbb{E}\Gamma_{\epsilon,\ell}^q = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi\ell^3\right)^q} \int_{|y_i|\leq\ell} \mathbb{E} \prod_{i=1}^q D_\epsilon(y_i) dy_i = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi\ell^3\right)^q} \int_{|y_i|\leq\ell} e^{\gamma^2 \sum_{i<j}^q K_\epsilon(y_i-y_j)} dy_i.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (majorer K_ϵ par une fonction intégrable est aisé) nous assure que si l'intégrale suivante existe, alors le moment d'ordre q existe et est donné asymptotiquement lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Gamma_\ell^q &= \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi\ell^3\right)^q} \int_{|y_i|\leq\ell} e^{\gamma^2 \sum_{i<j}^q K(y_i-y_j)} \prod_i dy_i \\ &= \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi\ell^3\right)^q} \int_{|y_i|\leq\ell} \prod_{i<j}^q \frac{1}{|y_i - y_j|^{4\pi\gamma^2}} e^{\gamma^2 \sum_{i<j}^q g(y_i-y_j)} \prod_i dy_i. \end{aligned}$$

Ainsi, se restreindre à des γ suffisamment petits, tels que $(q-1)4\pi\gamma^2 < 3$ nous assure la convergence de l'intégrale précédente. Nous nous limiterons à cette intervalle de γ et renvoyons le lecteur vers la référence [50] qui permet de largement étendre le domaine de γ afin d'assurer la non dégénérescence de la mesure. En ce qui concerne la physique de la turbulence, le γ étant petit, le développement mathématique proposé sera ici suffisant.

En dilatant les variables d'intégrations y_i par ℓ , nous déterminons le comportement du moment d'ordre q aux petites échelles. On trouve ainsi, pour $(q-1)4\pi\gamma^2 < 3$,

$$\mathbb{E}\Gamma_\ell^q \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} C_q \ell^{\tau_q}, \quad (3.10)$$

avec

$$\tau_q = \frac{4\pi\gamma^2}{2} q(1-q),$$

et

$$C_q = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\pi\right)^q} e^{\gamma^2 g(0) \frac{q(q-1)}{2}} \int_{|y_i|\leq 1} \prod_{i<j}^q \frac{1}{|y_i - y_j|^{4\pi\gamma^2}} dy_i.$$

En comparant avec l'expression donnée dans l'équation 3.3, on retrouve bien une mesure de dissipation intermittente (ou multifractale) dont le coefficient d'intermittence est donné par

$$\mu = 4\pi\gamma^2.$$

Empiriquement, le coefficient d'intermittence est de l'ordre de $\mu = 0.22$, ce qui nous assure des moments finis jusqu'à l'ordre $q = 18$, ce qui nous suffira amplement pour décrire les mesures expérimentales et numériques.

Permettons-nous de calculer la structure de corrélation du champ Γ_ϵ afin de comparer avec la relation 3.4. Nous obtenons

$$\mathbb{E}\Gamma_\epsilon(x)\Gamma_\epsilon(y) = e^{\gamma^2 K_\epsilon(x-y)} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|x-y|^{4\pi\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(|x-y|)} \underset{|x-y| \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{|x-y|^{4\pi\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(0)},$$

en cohérence avec la corrélation à longue portée de l'amplitude des fluctuations des gradients.

3.2 Mécanisme d'étirement de la vortacité

Nous voyons donc qu'il est possible de construire un champ aléatoire capable de reproduire les propriétés statistiques du champ de dissipation de la turbulence. D'autre part, nous avons vu qu'il était aisé de reproduire un champ de vitesse gaussien reproduisant les 3 postulats de la première théorie de Kolmogorov à l'aide du mouvement brownien fractionnaire (Eq. 1.8). Nous souhaiterions maintenant proposer un champ aléatoire homogène et isotrope, cette fois-ci vectoriel, incompressible, qui non seulement reproduirait les statistiques de la composante longitudinale de vitesse (notamment les transferts d'énergie, ou de manière équivalente la loi des 4/5), comme développé dans le premier chapitre, mais aussi les propriétés géométriques du tenseur du gradient de vitesse (alignement préférentiel de la vortacité et statistiques des invariants), comme nous l'avons présenté dans le deuxième chapitre. La référence [62] est une des premières, à ma connaissance, à s'attaquer à cette question ambitieuse. Cet article se termine par un constat d'échec car les auteurs ne sont pas parvenus à construire un champ aléatoire à la fois incompressible, et exhibant des transferts d'énergie. Néanmoins, cet article m'a énormément occupé ces dernières années. Avec les auteurs de cette référence, nous sommes parvenus à inclure à cette approche aléatoire picturale des éléments de mécanique présents dans l'équation d'Euler [63]. Ceci nous a mené à un champ aléatoire capable de reproduire l'ensemble des propriétés statistiques d'un écoulement turbulent, du moins numériquement. C'est le sujet de cette section.

3.2.1 Une forme intégrale des équations d'Euler

Considérons l'équation d'Euler

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

et plus particulièrement sur ses conséquences sur le transport de la vortacité $\omega = \nabla \wedge u$

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = S_{ik}\omega_k, \quad (3.11)$$

où S est la matrice du taux de déformation. Les deux descriptions, en terme de champ de vitesse $u(x, t)$ et champ de vorticité $\omega(x, t)$, sont équivalentes. Le lien entre ces deux champs est donné par la loi de Biot et Savart

$$u(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \wedge \omega(y, t) dy. \quad (3.12)$$

L'équation de transport de la vorticité (Eq. 3.11) fait intervenir aussi la partie symétrique du tenseur des gradients S . Afin d'obtenir une équation fermée en terme du champ de vorticité, il nous faut exprimer le taux de déformation S en fonction de la vorticité ω . Nous nous doutons bien qu'une telle relation sera non locale, puisque la relation entre champs de vitesse et de vorticité (Eq. 3.12) elle-même l'est. Il suffit alors de prendre le gradient de la relation de Biot et Savart (Eq. 3.12). Nous remarquons immédiatement que dériver sous le signe intégral fait apparaître un noyau dont la singularité la plus forte est en $1/|x|^3$, qui n'est pas intégrable en dimension 3. C'est exactement le même genre de technicité que nous avons rencontré lors de l'expression du hessien de pression en terme de champ de $\text{tr}(A^2)$ (c.f. Eq. 2.4). La réponse à cette question est d'ordre distributionnelle et est donnée par la théorie des opérateurs intégraux singuliers [32, 33, 35]. Nous obtenons alors, ne conservant que la partie symétrique du tenseur des gradients

$$S(x) = \frac{3}{8\pi} \text{P.V.} \int \left[\frac{(x - y) \otimes [(x - y) \wedge \omega(\sigma)]}{|x - y|^5} + \frac{[(x - y) \wedge \omega(\sigma)] \otimes (x - y)}{|x - y|^5} \right] dy, \quad (3.13)$$

où encore une fois l'intégrale a un sens en terme de valeur principale de Cauchy (P.V.) et nous notons \otimes le produit tensoriel, c'est-à-dire $(x \otimes y)_{ij} = x_i y_j$. En ayant exprimé le champ de vitesse u (Eq. 3.12) et la déformation S (Eq. 3.13) en terme de ω , nous obtenons une équation fermée pour le transport de la vorticité (Eq. 3.11).

Encore une fois, comme nous l'avons déjà rapidement présenté dans la section consacrée à la déformation fluide (section 2.3.1), considérons une particule lagrangienne à une position initiale X à l'instant initial t_0 , qui se retrouve à la position $x(X, t)$ à l'instant t . La vorticité $\omega(X, t)$ perçue par cette particule à l'instant t qui se trouve à la position $x(X, t)$ peut être écrite de manière formelle, en intégrant l'équation de transport Eq. 3.11 comme

$$\omega(x(X, t), t) = D(t_0, t)\omega(X, t_0),$$

où $D(t_0, t)$ est le gradient de la déformation (c.f. Eq. 2.6) avec la condition initiale $D(t_0, t_0) = I$ (I signifiant la matrice identité). Ainsi, la loi de Biot et Savart (Eq. 3.12) permet d'obtenir une forme intégrée des équations d'Euler à partir d'un champ de vorticité initiale $\omega(X, t_0)$ de la manière suivante

$$u(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - x(X, t)}{|x - x(X, t)|^3} \wedge D(t_0, t)\omega(X, t_0) dX. \quad (3.14)$$

Nous renvoyons le lecteur vers la Ref. [35] pour une présentation détaillée de ces concepts.

On peut montrer rigoureusement que la formulation intégrée (Eq. 3.14) est équivalente aux équations d'Euler [35], et nous sera grandement utile pour construire un champ aléatoire de vecteurs réaliste de la turbulence.

3.2.2 Construction d'un champ aléatoire incompressible de vecteurs

Étirement de la vorticité aux temps courts

La forme intégrée des équations d'Euler (Eq. 3.14) fait intervenir deux éléments fondamentaux : (i) l'étirement à proprement dit du champ initial de vorticité $D(t_0, t)\omega(X, t_0)$ et (ii) le transport des particules $x(X, t)$. Comme nous l'avons déjà mentionné, le gradient de la déformation est un objet complexe, donné par une exponentielle à temps ordonné, qui est très difficile de contrôler à un instant quelconque t . De la même manière, la position des particules $x(X, t)$    un instant quelconque t est très difficile, voir impossible, à prédire. Nous savons d'ailleurs que la turbulence est un mélangeur exceptionnel, beaucoup plus qu'un écoulement laminaire qui peut lui-même, déjà, donner un mélange chaotique difficilement prédictible. Regardons donc l'étirement et le transport aux temps courts, typiquement sur l'échelle de temps de Kolmogorov τ_η .

Choisissons $t_0 = 0$ pour simplifier la présentation. Comme nous l'avons fait dans la section consacrée à la dynamique lagrangienne des gradients, nous allons nous concentrer sur les premiers instants de l'étirement de la vorticité. Notons $\omega_0(y) = \omega(y, 0)$ le champ initial de vorticité, $u_0(y) = u(y, 0)$ le champ initial des vitesses lié à ω_0 par la loi de Biot et Savart (Eq. 3.12), et $S_0(y) = S(y, 0)$ le champ de matrices de déformation initial lié à ω_0 par la transformation donnée dans l'équation 3.13. Aux temps courts, typiquement pour $t \leq \tau_\eta$, le champ de vorticité peut s'écrire

$$\omega[y + tu_0(y), t] \approx e^{tS_0(y)}\omega_0(y).$$

Remarquons que dans une situation turbulente, les composantes de la matrice $\tau_K S_0$ sont de l'ordre de l'unité, alors que la distance parcourue par les particules d   au terme de transport $\tau_K u_0$ est de l'ordre de $\mathcal{R}_e^{-1/2}$. Nous négligerons donc ce terme de transport, et obtenons le champ de vitesse à un instant $t = \tau_K$

$$u(x, \tau_K) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \wedge e^{tS_0(y)}\omega_0(y)dy. \quad (3.15)$$

Le champ brownien fractionnaire incompressible

A la description précédente (Eq. 3.15), nous souhaiterions inclure une nature aléatoire. La manière la plus naturelle est de partir d'une condition initiale aléatoire pour le champ de vorticité ω_0 . Dans un cadre K41, une représentation aléatoire du champ de vitesse est donnée par un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst $H = 1/3$ (c.f. Eq. 1.8). Afin de définir le rotationnel d'un tel champ singulier, il nous faut généraliser l'approche uni-dimensionnelle développée pour la seule composante longitudinale de la vitesse à un champ vectoriel homogène, mais aussi à la fois incompressible et isotrope. Par isotrope, nous entendons l'invariance par rotation de la loi du champ. Dès à présent, nous nous doutons bien que définir le gradient d'un processus aléatoire singulier est une chose subtile. Dans le cadre de la théorie mathématique des mouvement browniens fractionnaires [9],

cette notion à été étudiée et l'objet obtenu devient un *bruit* fractionnaire, distributionnel, dont naturellement la variance diverge et dont la covariance décroît comme l'échelle à la puissance $2(H - 1)$. Dans un cadre gaussien, tout finalement se passe bien. Mais nous éviterons de définir des intégrales stochastiques à l'aide de tels bruits, car, comme nous le verrons par la suite, la manipulation de distributions dans un cadre non linéaire est hasardeuse (en ce qui me concerne). Nous préférons travailler donc avec de *belles* fonctions aléatoires, comme c'est le cas pour le mouvement brownien fractionnaire, seule la mesure blanche est distributionnelle.

Dans ce cadre, l'approche développée dans la Ref. [62] répond parfaitement à ces contraintes de symétrie et de singularité, et l'unique champ vectoriel gaussien incompressible, homogène, isotrope, singulier d'exposant de Hurst $H = 1/3$ est donné par

$$u^{g,\epsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_L(x-y) \frac{x-y}{|x-y|_\epsilon^{5/2-H}} \wedge W(dy) , \quad (3.16)$$

où $W(dy) = (W_1(dy), W_2(dy), W_3(dy))$ est un vecteur blanc, dont les composantes W_i sont de moyenne nulle et de variance dy . De la même manière, la fonction scalaire $\varphi_L(x-y)$ nous assure une variance finie, et décroît très vite au-delà de l'échelle intégrale L . Elle est à symétrie radiale (ne dépend que de la norme de son argument). Le petit paramètre ϵ joue le rôle de l'échelle de Kolmogorov η_K de l'équation 1.8. Nous ne détaillerons pas ici les propriétés statistiques du champ de vecteurs 3.16 et renvoyons le lecteur vers la référence [64] pour plus de détails. Mentionnons néanmoins que sa composante longitudinale est similaire au processus obtenu à une dimension (Eq. 1.8), ainsi que la composante transverse, en cohérence avec un champ isotrope et incompressible [6].

De la nécessité d'un chaos multiplicatif matriciel.

L'étude aux temps courts de l'étirement de la vorticit e nous a menée  a consid erer le champ de vecteurs de l' equation 3.15. Nous proposons dans une premi ere  etape de la Ref. [63] une version al eatoire de ce champ et l' etudions num eriquement. Nous nous doutons bien que la prise en compte de la seule m ecanique se d eroulant  a des temps ant erieurs  a l' echelle de Kolmogorov τ_η ne suffit pas  a reproduire le ph enom ene d'intermittence, car  a petites  echelles, ce champ perd totalement notion de la grande  echelle L . Or nous avons vu que typiquement, l'amplitude des fluctuations du champ de dissipation reste corr el ee sur cette grande  echelle (c.f. Eq. 3.4). Nous montrons aussi que la vorticit e obtenue s'aligne pr ef erentiellement avec le vecteur propre du plus grand  etirement. L' id ee naturelle est d'it erer ce champ en r einjectant comme condition initiale le champ obtenu apr es un temps τ_K . Num eriquement, la convergence vers un point fixe n'a pas  ete vue de mani ere claire, il serait int eressant de d evelopper cette  etude de mani ere plus approfondie.

Au lieu de cela, nous ne pouvons r esister  a associer, avec l'oeil du physicien, la pr esence dans l' equation 3.15 de l'exponentielle de la matrice de d eformation $e^{\tau_K S}$ avec la structure intrins eque du chaos multiplicatif dont une version r egularis ee sur l' echelle ϵ est donn ee par l'Eq. 3.9. Nous ne pouvons nous emp echer non plus de consid erer un champ libre (Eq. 3.5)

qui prend en compte la structure très particulière du champ de la matrice de déformation (Eq. 3.13). Pour ces raisons, nous allons considérer le champ libre matriciel suivant

$$X^\epsilon(x) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int_{|x-y|\leq L} \frac{x-y}{|x-y|_\epsilon^{7/2}} \otimes [(x-y)\wedge W(dy)] + [(x-y)\wedge W(dy)] \otimes \frac{x-y}{|x-y|_\epsilon^{7/2}}. \quad (3.17)$$

Nous pouvons montrer [63, 64] que, tout comme le cas scalaire (Eq. 3.5), la variance des composantes X_{ij} diverge lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et que la structure de covariance des composantes décroît logarithmiquement avec la distance, en particulier, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et $|x|$ non nul,

$$\mathbb{E}[X_{11}(0)X_{11}(x)] \underset{|x|\rightarrow 0}{\sim} \ln\left(\frac{L}{|x|}\right),$$

et

$$\mathbb{E}[X_{12}(0)X_{12}(x)] \underset{|x|\rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{4} \ln\left(\frac{L}{|x|}\right).$$

Nous reviendrons sur cette structure de covariance très particulière dans la section 3.3. Un chaos matriciel est alors obtenu en prenant l'exponentielle de cette matrice aléatoire gaussienne et en incluant un paramètre libre γ qui jouera le rôle du paramètre d'intermittence, et nous considérerons le champ matriciel $e^{\gamma X^\epsilon(x)}$. Le coefficient d'intermittence γ n'a pas de dimension, le champ libre X^ϵ non plus. En comparant avec l'expression 3.15 qui fait intervenir $e^{\tau\kappa^S}$, nous voyons bien que γ ne joue pas le rôle du temps de Kolmogorov, car il n'en a ni la dimension, ni la dépendance dans le nombre de Reynolds. Le chaos multiplicatif, et le champ de vitesse qui va en découler, intervient possiblement dans le cadre de modélisation d'une situation stationnaire, dans laquelle la notion de temps disparaît. Nous abandonnons donc la mécanique aux temps courts pour nous concentrer, dans ce cadre phénoménologique, à une représentation stochastique d'une possible solution stationnaire des équations de Navier et Stokes.

Afin de proposer un tel champ homogène, dont l'ambition est de reproduire les propriétés statistiques d'un écoulement stationnaire isotrope, nous proposons dans la Ref. [63] de perturber le champ de vecteurs gaussien fractionnaire (Eq. 3.16) par un chaos matriciel de la manière suivante

$$u^\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_L(x-y) \frac{x-y}{|x-y|_\epsilon^{5/2-H}} \wedge e^{\gamma X^\epsilon(y)} W(dy), \quad (3.18)$$

et étudions ses propriétés statistiques numériquement.

Simulations numériques et confrontation à l'expérience

Nous reprenons les résultats numériques de la référence [63]. Nous effectuons une simulation numérique du champ de vecteurs (Eq. 3.18) jusqu'à la résolution $N = 1024$, ce qui détermine $dx = N^{-3}$. Nous travaillons avec un coefficient d'intermittence qui va se révéler être réaliste d'une situation turbulente, $\gamma^2 = (8/3)c_2$ et $c_2 = 0.025$, et nous prenons le

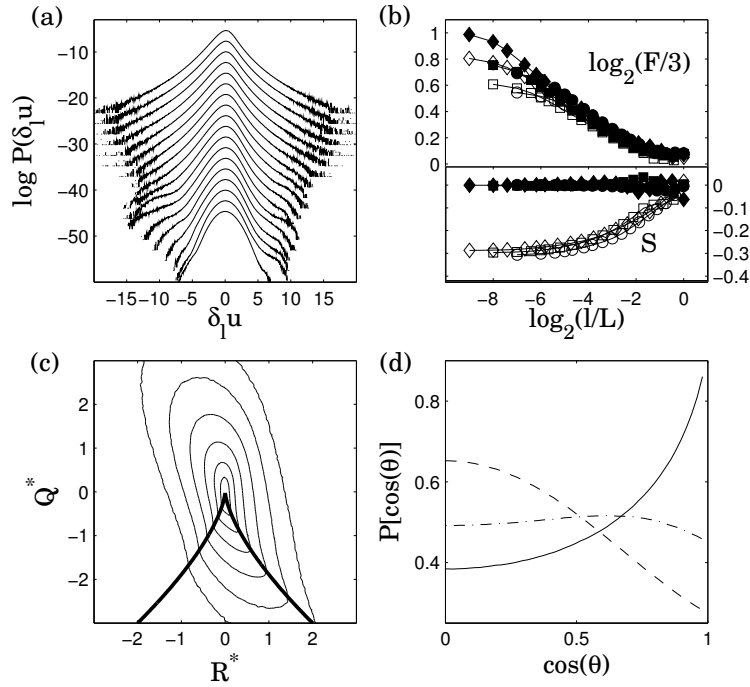


FIGURE 3.1 – Résultats numériques issus de la simulation du champ vectoriel (3.18). Densité de probabilité des incréments longitudinaux (a) ($N = 1024$), les échelles ℓ sont logarithmiquement espacées entre dx et L . (b) Dépendance dans les échelles de la skewness S et de la Flatness (F) des incréments de vitesse : $N = 256$ (\circ), $N = 512$ (\square) et $N = 1024$ (\diamond). (c) Plan RQ , pour $N = 1024$, les lignes de contour correspondent aux probabilités $10^{-2.5}, 10^{-2}, 10^{-1.5}, 10^{-1}, 10^{-0.5}, 1$. (d) Densité du cosinus de l'angle θ entre la vorticité et les vecteurs propres de la matrice de déformation, comme dans la figure 2.1 pour $N = 1024$.

Hurst $H = 1/3$ de la turbulence. Et nous étudions ses statistiques et donnons les résultats dans la figure 3.1.

Dans la figure 3.1(a), nous constatons la déformation des densités de probabilité des incréments longitudinaux de la vitesse, tout comme nous l'avons observé dans les expériences (c.f. Fig. 1.3). Dans la partie haute de la figure 3.1(b), on constate une flatness (Eq. 1.14) qui se comporte comme une loi de puissance de même exposant -0.1 , tout comme observé expérimentalement (c.f. Fig. 1.4). La skewness, définie comme la quantité adimensionnée,

$$S(\ell) = \frac{\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3}{[\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2]^{3/2}},$$

est représentée dans la partie basse de la figure 3.1(b). Elle est effectivement non nulle, et indépendante de la résolution N , comme attendue dans le cadre de la loi des 4/5 (Eq. 1.13). Une fois comparée avec la figure 2.2, la figure 3.1(c) montre que le plan RQ du

champ vectoriel (Eq. 3.18) est très réaliste d'un écoulement turbulent réel. Finalement, la figure 3.1(d) montre clairement l'alignement préférentiel de la vorticité avec le vecteur propre intermédiaire de la matrice de déformation (  comparer avec la figure 2.1).

Ainsi, le champ vectoriel que nous proposons reproduit l'ensemble des faits expérimentaux et numériques que nous avons présenté. En cela, ce champ incompressible est une très bonne représentation stochastique de la structure locale de la turbulence.

3.3 Un chaos multiplicatif gaussien matriciel

Le champ vectoriel (Eq. 3.18) que nous avons proposé dans la Ref. [63] semble être une bonne représentation stochastique de la structure locale de la turbulence. Dans ce cadre, seuls deux paramètres libres interviennent : l'exposant de Hurst H et le coefficient d'intermittence γ . La structure intrinsèque du champ, se donnant H et γ , prédit alors un taux de transfert d'énergie vers les petites échelles. Ainsi, le Reynolds critique \mathcal{R}^* , qui était auparavant un paramètre libre supplémentaire, est désormais lié aux deux autres paramètres (et ce de manière compliquée). Si de plus on se donne la loi des $4/5$, nous nous attendons à ne conserver qu'un unique paramètre libre γ . Afin de correctement lier ces paramètres, il nous faut développer des mathématiques afin de faire dire des choses à ce champ. C'est le sujet de cette partie.

Ainsi, la première étape dans l'élaboration d'une théorie mathématique permettant d'appréhender l'objet vectoriel que nous proposons (Eq. 3.18) est l'extension de la théorie du chaos multiplicatif scalaire, développée dans le paragraphe 3.1.2, au cas matriciel. Ce travail a été effectué en collaboration avec Rémi Rhodes et Vincent Vargas [65].

3.3.1 L'ensemble des matrices gaussiennes isotropes

L'ensemble de matrices symétriques gaussiennes et isotropes le plus connu et le plus étudié [66] est l'ensemble gaussien orthogonal (GOE), et correspond à des matrices symétriques gaussiennes dont les composantes sont indépendantes, la variance des composantes de la diagonale étant 2 fois plus grande que celle des composantes hors de la diagonale. Elles ne sont pas de trace nulle, ce qui impliquerait une corrélation entre les composantes diagonales. Elles ne conviennent donc pas au champ libre X^ϵ (Eq. 3.17) qui nous intéresse tout particulièrement. Dans la Ref. [65], nous montrons que toutes les matrices isotropes gaussiennes ont une structure de covariance bien précise que nous ne donnerons pas ici. Retenons que cette structure, notons N la dimension de la matrice, dépend d'un paramètre $c \in]-1, \frac{1}{N-1}[$, qui détermine notamment le rapport des variances des composantes sur et en dehors de la diagonale. Le cas $c = -1$ correspond au cas scalaire, $c = 0$   l'ensemble gaussien orthogonal et $c = \frac{1}{N-1}$ au cas des matrices de trace nulle (et qui nous intéresse plus particulièrement).

3.3.2 Propriétés multifractales

Se donnant de plus la structure spatiale $x \in \mathbb{R}^d$ d'un champ de matrices de dimension N , cohérente avec la structure de covariance des composantes d'une matrice symétrique gaussienne isotrope de paramètre c et avec une décroissance logarithmique à grande distance garante d'un comportement multifractal, nous montrons alors dans la référence [65] comment obtenir les statistiques dans les échelles de la matrice M_ℓ^ϵ définie par

$$M_\ell^\epsilon = \frac{1}{c_N} \frac{1}{\omega_d \ell^d} \int_{|x| \leq \ell} e^{\gamma X^\epsilon(x)} dx,$$

où $c_N = \mathbb{E}(\text{tr } e^{\gamma X^\epsilon}) / N$ est la constante (scalaire) de renormalisation du champ qui nous assure que

$$\mathbb{E} M_\ell^\epsilon = I_N,$$

indépendamment de ϵ , où I_N est la matrice identité de taille N . Pour $0 < \gamma^2 < d$, nous montrons de plus que lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, l'espérance de la trace du carré de X^ϵ , $\mathbb{E}[\text{tr}(M_\ell^\epsilon)^2]$, converge vers une limite $\mathbb{E}[\text{tr}(M_\ell)^2]$ finie et non nulle, qui se comporte aux petites échelles comme

$$\mathbb{E}[\text{tr}(M_\ell)^2] \underset{\ell \rightarrow 0}{\propto} \frac{\ell^{-\gamma^2}}{[\gamma^2 \ln \frac{1}{\ell}]^{(N-1)/2}},$$

où la constante de proportionnalité peut être calculée de manière exacte, ce qui est, en ce qui me concerne, un véritable tour de force. En comparant avec les statistiques obtenues pour un chaos scalaire (c.f. Eq. 3.10), nous constatons une correction logarithmique à une pure loi de puissance. Cette correction est liée à la nature non commutative du champ de matrices. Et plus généralement, cette fois-ci la constante multiplicative est beaucoup plus difficile à calculer, nous pouvons montrer que pour q entier, et un intervalle raisonnable pour γ^2 ,

$$\frac{\ln \mathbb{E}[\text{tr}(M_\ell)^q]}{\ln \ell} \underset{\ell \rightarrow 0}{\rightarrow} \tau_q,$$

avec

$$\tau_q = \frac{\gamma^2}{2} q(1 - q),$$

tout comme le chaos scalaire (Eq. 3.10).

3.3.3 Densité conjointe des matrices

Ces calculs ont été rendus possible en exploitant l'isotropie de ces matrices gaussiennes. En effet, la densité à 1 point d'une matrice symétrique gaussienne isotrope X est particulièrement simple puisqu'elle ne dépend pas des vecteurs propres, mais seulement des invariants $\text{tr}(X^2)$ et $\text{tr}^2(X)$ (qui s'expriment en fonction des valeurs propres). Ceci permet de calculer la constante de renormalisation c_N [65]. La densité conjointe de deux matrices $X^\epsilon(x)$ et $X^\epsilon(y)$ est aussi particulièrement simple, et s'exprime en fonction des invariants de ces deux matrices, mais aussi d'un terme d'interaction qui code la structure de corrélation

spatiale. Cette interaction est liée à un terme de la forme $\text{tr}(X^\epsilon(x)X^\epsilon(y))$ qui est quant à lui beaucoup plus difficile à traiter puisque les matrices ne sont pas diagonalisables dans la même base (ou autrement dit, elles ne commutent pas). Lors du calcul de $\mathbb{E}\text{tr}(M_\ell^\epsilon)^2$, il va falloir sommer sur les degrés de libertés laissés par les vecteurs propres des matrices. Cette sommation apparaît sous la forme d’une intégrale de Harish Chandra-Itzykson-Zuber (sur le groupe orthogonal), qui est un objet complexe et méconnu (voir la référence [67] à ce sujet). Néanmoins, le caractère divergent du champ de matrice X^ϵ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ permet de pousser les calculs jusqu’au bout. En ce qui concerne la généralisation à k -points de cette approche, je renvoie le lecteur à la référence [65], et plus directement à mes collaborateurs probabilistes pour qui la combinatoire subtile est plus naturelle que pour moi.

3.4 Définition et propriétés statistiques d’une mesure signée 1D

Deuxième gros obstacle à une compréhension fine (et analytique) des propriétés statistiques du champ de vecteurs (Eq. 3.18) est la forte corrélation du chaos matriciel $e^{\gamma X^\epsilon(x)}$ avec la mesure blanche vectorielle $W(dx)$ sous-jacente. Il m’a fallu beaucoup de temps pour répondre à ce type de questionnement. C’est avec Christophe Garban que nous avons pu faire une avancée claire à ce sujet, en concevant et étudiant un ersatz uni-dimensionnel du champ vectoriel complet.

Ecrire un processus unidimensionnel qui reproduit les propriétés statistiques du champ vectoriel complet n’est pas chose aisée. Au jour d’aujourd’hui, il n’existe pas de processus 1d capable de rendre compte de l’approche axiomatique développée dans la section 1.5.2. Le cadre eulérien, qui présente à la fois un phénomène d’intermittence, et des transferts d’énergie, est très difficile à reproduire de manière stochastique.

Ainsi, les modèles étudiés dans la Ref. [62] ne le permettent pas. Néanmoins, les principaux outils probabilistes que nous utiliserons dans la suite sont déjà présents. Un processus dissymétrique (avec un moment impair des incréments non nul) est proposé dans la référence [68]. Malheureusement le Hölder moyen H obtenu doit être pris suffisamment grand, typiquement $H > 1/2$, bien loin du $1/3$ nécessaire pour modéliser de manière réaliste la turbulence. Ceci est encore une fois illustré dans la Ref. [69] dans lequel il n’est pas pris en compte de corrélation particulière mais qui, quand bien même, exhibe des pathologies lorsque H devient plus petit que $1/2$. La raison profonde est reliée à l’utilisation d’un bruit fractionnaire dans les intégrales stochastiques servant à définir les processus aléatoires, et qui devient pathologique lorsque multiplié par une autre variable aléatoire telle qu’un chaos (voir la référence [70] à ce sujet).

3.4.1 Définition d’un ersatz unidimensionnel

L’ersatz unidimensionnel que nous allons vous proposer reprend, de manière un peu artificielle, la géométrie de l’étirement de la vorticité, qui impose une corrélation forte

entre la mesure blanche et le champ libre. Revenons pour quelques temps vers la dimension $d = 1$. Définissons le processus 1d de vitesse suivant :

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{\mathbb{E}e^{\gamma X_\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_L(x-y) \frac{1}{|x-y|^{\frac{1}{2}-H}} e^{\gamma X_\epsilon(y)} W(dy), \quad (3.19)$$

avec, encore une fois,

$$X_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} k_\epsilon(x-y) W(dy). \quad (3.20)$$

et k_ϵ une version régularisée sur l'échelle ϵ du noyau asymptotique impair suivant :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_\epsilon(x) = k(x) = \frac{x}{|x|^{3/2}} 1_{|x| \leq L}. \quad (3.21)$$

De la nécessité de l'imparité du noyau du champ libre

Par rapport à la référence [62], l'originalité du processus que nous proposons (Eq. 3.19) réside dans l'imparité du noyau k_ϵ que nous utilisons pour définir le champ libre associé X_ϵ (Eq. 3.20). Les conséquences de ce choix sont fondamentales. On peut montrer par exemple [62] que choisir un noyau pair de la forme $1/[x^2 + \epsilon^2]^{1/4}$ mène bien à un processus multifractal qui exhibe des transferts d'énergie, mais qui ne respecte pas la loi des 2/3 (le champ est lisse).

L'imparité du noyau k_ϵ est dictée par la physique de l'étirement de la vorticité que nous avons utilisé pour construire le processus vectoriel complet (Eq. 3.18). Rappelons que dans ce cadre, la loi de Biot et Savart (Eq. 3.12) suggère fortement de travailler avec un champ blanc de vecteurs W . Le mécanisme d'étirement de la vorticité quant à lui nous a mené à considérer l'action d'un chaos matriciel $e^{\gamma X}$ sur la mesure blanche W , avec X construit à partir de cette même mesure blanche W et qui rappelle la structure tensorielle du champ de déformation (Eq. 3.17). Oublions pour l'instant la structure tensorielle du champ X_ϵ , et revenons à un chaos scalaire. Le seul champ libre scalaire $X_\epsilon = k_{\epsilon,i} * W_i$ (* est le produit de convolution) qui peut être construit à partir d'une mesure vectorielle W fait nécessairement intervenir le produit scalaire d'un noyau vectoriel $k_{\epsilon,i}$ et du vecteur W_i . Donc k_ϵ est nécessairement de la forme $k_\epsilon(x) = x/|x|^{5/2}$, qui est bien impair. Un tel champ est proposé à la fin de la référence [62], mais n'est pas étudié, si ce n'est son incapacité à exhiber des transferts d'énergie. C'est seulement la nature matricielle du chaos qui permet ces transferts d'énergie.

Il est intéressant de remarquer aussi que le chaos multiplicatif " $e^{\gamma X}$ " lui-même est un bel objet universel, qui notamment ne dépend pas de la forme précise du noyau (parité et régularisation à l'échelle ϵ), mais seulement de son comportement à grand argument $|k_\epsilon(x)| \sim 1/|x|^{d/2}$. En revanche, la mesure aléatoire " $e^{\gamma X} W$ ", avec X et W fortement corrélé comme il se doit, n'est pas canonique, et dépend de manière radicale de la forme précise du noyau régularisé k_ϵ .

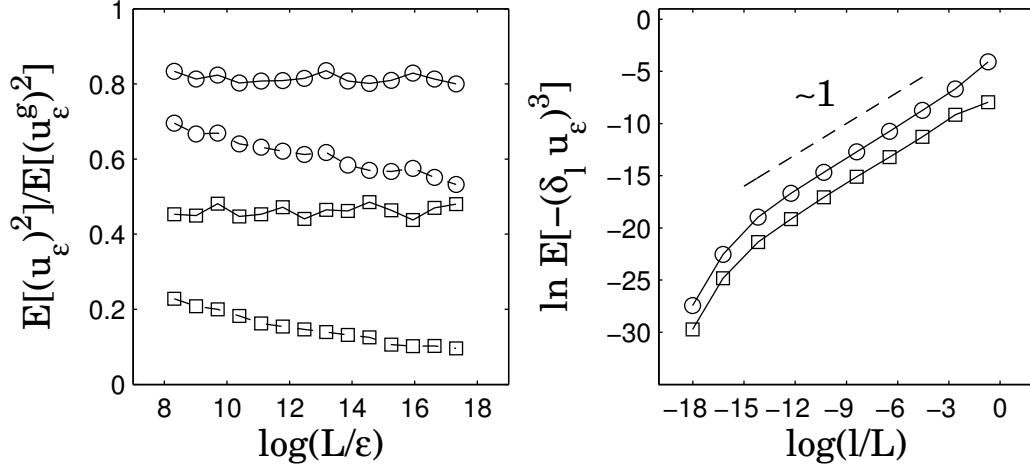


FIGURE 3.2 – Simulations numériques de l’Ersatz 1d de la turbulence u_ϵ (Eq. 3.19) avec $H = \frac{1}{3} + 2\gamma^2$ et $\gamma^2 = 0.025/2$ (symboles \circ) ou $\gamma^2 = 0.1/2$ (symboles \square). Figure de gauche : Variance du processus $\mathbb{E}u_\epsilon^2$, divisée par $\mathbb{E}(u_\epsilon^g)^2$, la variance du Brownien fractionnaire d’exposant de Holder $\frac{1}{3}$ (ce qui revient à prendre $H = 1/3$ et $\gamma = 0$ dans l’équation 3.19), en fonction du rapport entre la grande échelle L et l’échelle de résolution ϵ . Les deux coefficients d’intermittence $\gamma^2 = 0.025/2$ (\circ) et $\gamma^2 = 0.1/2$ (\square) sont représentés avec superposée une ligne continue. Ces mêmes symboles pour lesquels on a superposé des tirets représentent ce même rapport de variances mais lorsque le processus est renormalisé par $\sqrt{\mathbb{E}e^{2\gamma X_\epsilon}}$, et non pas par $\mathbb{E}e^{\gamma X_\epsilon}$. Figure de droite, représentation logarithmique de la fonction de structure d’ordre 3, i.e. $\mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^3$ en fonction de l’échelle ℓ , à la plus haute résolution que nous avons obtenu $L/\epsilon = 2^{27}$, les deux coefficients d’intermittence γ sont représentés par les \circ ($\gamma^2 = 0.025/2$) et les \square ($\gamma^2 = 0.1/2$). Nous superposons la loi de puissance ℓ^{-1} pour convenance.

3.4.2 Simulations

Dans la suite, car nous nous plaçons dans le contexte de la turbulence et voulons reproduire la physique de Kolmogorov, nous utiliserons la valeur particulière suivante

$$H = \frac{1}{3} + 2\gamma^2,$$

une valeur que nous motiverons dans la section 3.4.3. Nous effectuons une simulation numérique à de très hautes résolutions (jusqu’à $\epsilon/L = 2^{27}$) du processus u_ϵ (Eq. 3.19) avec $H = \frac{1}{3} + 2\gamma^2$. Les mesures expérimentales (en soufflerie par exemple) et les simulations numériques des équations de Navier-Stokes montrent toutes qu’il existe une correction intermittente universelle $2\gamma^2 = 0.025$. Nous étudions aussi le même processus, par curiosité, avec un coefficient d’intermittence quatre fois plus fort $2\gamma^2 = 0.1$. Nous utilisons la version

régularisée du noyau k (Eq. 3.21) suivante

$$k_\epsilon(x) = \frac{x}{(x^2 + \epsilon^2)^{3/4}} 1_{|x| \leq L}, \quad (3.22)$$

qui converge localement vers k , et reproduisons nos résultats dans la figure 3.2.

La première chose que nous souhaiterions tester numériquement est la convergence de la variance vers une valeur finie non nulle lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et donc tester si effectivement la bonne constante de normalisation est utilisée. Il est facile de montrer que le processus gaussien sous-jacent (i.e. avec $\gamma = 0$) converge vers une variance finie lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, nous pouvons donc l'utiliser pour adimensionnaliser nos résultats. La figure de gauche montre clairement que la variance du processus, à la convergence statistique près, est indépendante de la résolution ϵ , ce qui montre qu'en effet, le processus semble tendre vers une variance finie, et ceci pour les deux coefficients d'intermittence γ . Nous montrons aussi (avec symboles et tirets superposés) que la normalisation par $\sqrt{\mathbb{E}e^{2\gamma X_\epsilon}}$ n'est pas la bonne car elle implique une variance qui décroît avec ϵ .

La deuxième chose importante à vérifier dans le contexte de turbulence (et de la physique des transferts d'énergie) est la proportionnalité de la fonction de structure d'ordre 3, i.e. $\mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^3$ avec l'échelle ℓ (c.f. Eq. 1.13). Nous représentons dans la figure de droite la fonction de structure d'ordre 3 en fonction de l'échelle à notre plus haute résolution numérique $L/\epsilon = 2^{27}$. Nous constatons clairement une loi linéaire avec l'échelle pour les 2 coefficients d'intermittence. Seule la constante devant l'échelle semble dépendre de γ .

D'autres analyses de ces simulations numériques, en particulier l'analyse des fonctions de structure d'ordres pairs $\mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^2$ et $\mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^4$, non reproduite ici, nous permettent d'émettre la conjecture suivante : Pour $H = 1/3 + 2\gamma^2$, et typiquement $2\gamma^2 < 1$, le processus u_ϵ de l'équation 3.19 converge lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ vers un processus de variance finie, processus limite que nous noterons u . Ce processus limite u est un processus multifractal, et ses fonctions de structure se comportent asymptotiquement comme des lois de puissance

$$\mathbb{E}|\delta_\ell u|^q \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} C_q(\gamma) \left(\frac{\ell}{L}\right)^{\zeta_q},$$

avec

$$\zeta_q = \left(\frac{1}{3} + 3\gamma^2\right) q - \gamma^2 q^2. \quad (3.23)$$

De plus, pour tout γ tels que $2\gamma^2 < 1$, ce champ est *dissipatif*, c'est-à-dire qu'il dissipe (ou transfert) de l'énergie, dans le sens que

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3}{\ell} = -D(\gamma) < 0.$$

Nous rappelons qu'effectivement il est observé numériquement que la constante D est bien non nulle et positive.

3.4.3 Analyse théorique

Nous souhaiterions ici comprendre et calculer les propriétés statistiques de l'ersatz unidimensionnel de l'Eq. 3.19. Pour cela, nous devons donner un sens à la mesure aléatoire

$$"e^{\gamma X(x)}W(dx)",$$

ce qui n'est pas évident a priori puisque nous effectuons le produit de deux distributions aléatoires. Dans ce cadre, nous souhaiterions connaître dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ l'action du champ aléatoire $e^{\gamma X(x)}W(dx)$ sur une fonction test quelconque. Nous nous concentrerons sur les fonctions test suivantes

$$\varphi(x) = \varphi_L(x) \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}-H}} \quad (3.24)$$

et

$$\varphi_\ell(x) = \varphi_L(x - \ell/2) \frac{1}{|x - \ell/2|^{1/2-H}} - \varphi_L(x + \ell/2) \frac{1}{|x + \ell/2|^{1/2-H}}. \quad (3.25)$$

qui définissent le champ de vitesse à l'origine

$$u_\epsilon(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{\gamma X_\epsilon(x)} W(dx)$$

et l'incrément de vitesse à l'origine

$$\delta_\ell u_\epsilon(0) \equiv u_\epsilon(\ell/2) - u_\epsilon(-\ell/2) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\ell(x) e^{\gamma X_\epsilon(x)} W(dx).$$

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A pour des calculs détaillés.

Comme nous l'avons mentionné dans la section 3.4.1, jusqu'à présent, la méthode de régularisation du processus sur l'échelle ϵ n'avait que peu d'importance, et on retrouvait toujours à petites échelles une statistique indépendante à la fois de la forme précise de la fonction de coupure φ_L ainsi que de la régularisation. Dans ce cas précis, dans lequel le noyau k_ϵ est impair, le mécanisme de régularisation est d'importance fondamentale. Nous rediscuterons ce point lors de la simulation numérique du processus. Donnons-nous alors une régularisation très particulière que nous motiverons par la suite.

Supposons qu'il existe un noyau k_ϵ , qui définit complètement le champ libre X_ϵ (Eq. 3.20) et sa structure de covariance $K_\epsilon(h)$ (Eq. A.4), et qui converge localement vers la fonction k (Eq. 3.21), tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^+, \quad 2k_\epsilon^2(h) + K'_\epsilon(h) = g'_\epsilon(h), \quad (3.26)$$

avec

$$(i) \quad \forall h \geq 0, \quad g'_\epsilon(h) \text{ bornée en } h \text{ et } \epsilon \quad (3.27)$$

$$(ii) \quad g'_\epsilon(h) \text{ décroît plus vite que } 1/|h|^{1+a} \text{ avec } a > 0. \quad (3.28)$$

Insistons sur le caractère borné en ϵ de la fonction $g'_\epsilon(h)$ (Eq. 3.27). A des échelles h beaucoup plus grandes que l'échelle de régularisation ϵ , typiquement $2k'_\epsilon(h) \sim 2/h$ et $K'_\epsilon(h) \sim -2/h$, indépendamment de ϵ . La fonction $g'_\epsilon(h)$ est bien bornée en h et ϵ et décroît plus vite que $1/h$. En revanche, aux échelles dissipatives ϵ , il est aisé de se convaincre que $2k'_\epsilon(\epsilon)$ et $K'_\epsilon(\epsilon)$ sont du même ordre $1/\epsilon$ et de signe opposé. Nous demandons donc, si un tel noyau k_ϵ existe, que la différence de ces deux infinis soit bornée en ϵ et que donc $\sup_\epsilon g_\epsilon(h)$ soit fini, ce qui est nullement garanti a priori. Nous rediscuterons les implications de ces contraintes dans la section 3.4.4.

Moyenne, variance et fonction de structure d'ordre 2

L'imparité de k_ϵ assure que le processus u_ϵ (Eq. 3.19) est de moyenne nulle $\forall \epsilon$ (c.f. annexe A). De plus, nous montrons que le processus converge en variance vers

$$\mathbb{E}u^2 = - \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh - \gamma^2 \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)(h) g'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh, \quad (3.29)$$

où nous notons $|h|_+ = \exp[\ln^+ |h|]$, et \star le produit de corrélation (Eq. A.5). De la même manière, la fonction de structure d'ordre 2, $\mathbb{E}[(\delta_\ell u_\epsilon)^2]$, converge lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, vers

$$\mathbb{E}[(\delta_\ell u)^2] = - \int_0^\infty (\varphi_\ell \star \varphi_\ell)'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh - \gamma^2 \int_0^\infty (\varphi_\ell \star \varphi_\ell)(h) g'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh.$$

A petites échelles $\ell \rightarrow 0$, le premier terme va dominer et on obtient le comportement universel

$$\mathbb{E}[(\delta_\ell u)^2] \underset{\ell \rightarrow 0}{\propto} \ell^{2H-2\gamma^2}, \quad (3.30)$$

où la constante multiplicative est donnée dans l'équation A.8. On constate donc que la fonction de structure d'ordre 2 a une correction intermittente.

Fonction de structure d'ordre 3

Des calculs similaires à ceux développés pour la fonction de structure d'ordre 2 nous donnent, pour $H \in]1/6, 1/2[$ et $\gamma^2 < H/2$

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -6\gamma D(\gamma) \varphi_L^3(0) \ell^{3H-6\gamma^2}$$

où $D(\gamma)$ est donnée dans l'équation A.9. Nous voyons que le processus 1d que nous avons proposé (Eq. 3.19) reproduit la loi des 4/5 si on choisit $H = 1/3 + 2\gamma^2$ (comme nous l'avons fait numériquement) et si D n'est pas identiquement nulle. Montrer que la quantité D est non nulle dans le cas général est difficile, permettons-nous alors d'effectuer un développement limité de l'expression précédente au premier ordre en γ . Nous obtenons pour $H \in]1/6, 1/2[$,

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -12\gamma \varphi_L^3(0) \ell^{3H} \int_0^\infty \frac{f_2(h, h)}{\sqrt{h}} dh + o(\gamma).$$

La fonction f_2 est définie dans la proposition 1 de l'annexe A, et l'intégrale précédente fait parfaitement sens. En particulier, pour $H = 1/3$, nous obtenons

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -12\gamma\varphi_L^3(0)\ell \int_0^\infty \frac{f_2(h,h)}{\sqrt{h}} dh + o(\gamma).$$

Un développement similaire sur la fonction de structure d'ordre 2 (Eq. 3.30), au premier ordre en γ , mène à

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} 2\varphi_L^2(0)\ell^{2H} \int_0^\infty \left[\frac{1}{|x+1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x-1/2|^{1/2-H}} \right]^2 dx + o(\gamma),$$

indépendamment de γ , et pour $H = 1/3$ (rappelons que nous sommes au premier ordre en γ), nous obtenons

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} 2\varphi_L^2(0)\ell^{2/3} \int_0^\infty \left[\frac{1}{|x+1/2|^{1/2-1/3}} - \frac{1}{|x-1/2|^{1/2-1/3}} \right]^2 dx + o(\gamma).$$

La première théorie de Kolmogorov prédit une skewness dans le régime inertiel universelle et indépendante de l'échelle ℓ pour les écoulement stationnaires. En utilisant la constante de Kolmogorov c_K définie dans la section 1.2.3, nous pouvons écrire.

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3}{[\mathbb{E}(\delta_\ell u)^2]^{3/2}} = -\frac{4}{5c_K^{3/2}}.$$

Le développement limité des fonctions de structure de notre processus (Eq. 3.19) nous donne

$$-\frac{4}{5c_K^{3/2}} = \frac{-12\gamma \int_0^\infty \frac{f_2(h,h)}{\sqrt{h}} dh}{\left[2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{|x+1/2|^{1/2-1/3}} - \frac{1}{|x-1/2|^{1/2-1/3}} \right]^2 dx \right]^{3/2}},$$

ou de manière équivalente

$$c_K = \frac{2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{|x+1/2|^{1/2-1/3}} - \frac{1}{|x-1/2|^{1/2-1/3}} \right]^2 dx}{\left[15\gamma \int_0^\infty \frac{f_2(h,h)}{\sqrt{h}} dh \right]^{2/3}},$$

qui est bien, en effet, universel. Nous voyons donc que l'approche stochastique adoptée permet de réduire le nombre de paramètres nécessaire à l'élaboration de l'axiomatique du premier chapitre : désormais, il suffit de se donner le seul paramètre d'intermittence γ , qui reste libre à ce stade, et nous en déduisons le Hurst H et la constante de Kolmogorov c_K (ou de manière équivalente le Reynolds critique \mathcal{R}^*). En effectuant une intégration numérique, on trouve pour $H = 1/3$ et $\gamma^2 = 0.025/2$ une constante de Kolmogorov de l'ordre $c_K \approx 1.15$, ce qui est plus petit que les valeurs expérimentales (autour de 2). Néanmoins, (i) cela signifie que la skewness a le bon signe négatif et (ii) la valeur n'est

pas délirante. C'est à ma connaissance le premier travail qui permet de prédire de telles quantités. Une estimation numérique de la skewness sur le champ complet vectoriel (Eq. 3.18) donne des valeurs plus réalistes [63]. Un calcul perturbatif (en puissance de γ) pour le champ vectoriel complet [64, 71] donne des résultats similaires, et révèlent la nécessité de la nature matricielle du chaos impliqué.

Fonction de structure d'ordre 4

Nous montrons dans l'annexe A que la fonction de structure d'ordre 4 se comporte asymptotiquement comme, pour $\gamma^2 < H/3$,

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^4 \underset{\ell \rightarrow 0}{\propto} \ell^{4H-12\gamma^2},$$

où la constante multiplicative est donnée dans l'équation A.10.

Fonction de structure d'ordre q

Il est alors tentant, après avoir calculé les fonctions de structure d'ordre 2, 3 et 4, de conjecturer les spectre d'exposants suivant, pour $\gamma^2 < H/(q-1)$ et $q \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^q \underset{\ell \rightarrow 0}{\propto} \ell^{q(H+\gamma^2)-\gamma^2 q^2}. \quad (3.31)$$

Ce résultat est cohérent avec le spectre observé sur les simulations numériques (Eq. 3.23) lorsque $H = 1/3 + 2\gamma^2$.

3.4.4 Retour sur l'interprétation des simulations numériques

Un oeil aiguisé aura peut être remarqué que la régularisation choisie pour le noyau k_ϵ intervenant dans les simulations numériques (Eq. 3.22) ne répond pas aux critères exigés de l'analyse théorique, en particulier le critère pointé par l'équation 3.27. En effet, le noyau k_ϵ intervenant dans les simulations numériques (Eq. 3.22) est différentiable et on a $k_\epsilon^2(h) = h^2/\epsilon^3 + O(h^4)$. De la même manière, la structure de covariance du champ libre se comporte comme $K'_\epsilon(h) = -\alpha^2 h/\epsilon^2 + O(h^3)$, avec $\alpha^2 = \int_{\mathbb{R}} [k'_1(x)]^2 dx$ une constante strictement positive d'ordre 1 (indépendante de ϵ). Ce qui nous donne

$$g'_\epsilon(h) = 2k_\epsilon^2(h) + K'_\epsilon(h) = 2\frac{h^2}{\epsilon^3} - \alpha^2 \frac{h}{\epsilon^2} + o(h^2).$$

Ainsi, à une échelle infiniment petite $h_* = (\alpha^2/4)\epsilon$, complètement dans le domaine dissipatif, $g'_\epsilon(h_*) = -(\alpha^4/4)\frac{1}{\epsilon}$, elle n'est donc pas bornée en ϵ et diverge. Les conséquences à grandes échelles (de l'ordre de L) de ce comportement non borné aux échelles dissipatives (de l'ordre de ϵ) sont dramatiques, puisque la variance elle-même (Eq. 3.29) va être changée (elle va même diverger), ainsi que le spectre des exposants (Eq. 3.31). Néanmoins, et ceci est surprenant à ce stade, nous observons bien numériquement nos prédictions théoriques!

Conséquences du défaut de régularisation

Regardons l'implication d'un comportement divergent en $1/\epsilon$ de la fonction $g'_\epsilon(h)$. Pour cela, nous définissons les versions dilatées par ϵ des fonctions k_ϵ et K_ϵ :

$$r_\epsilon(h) = \sqrt{\epsilon}k_\epsilon(\epsilon h), \quad (3.32)$$

et il est facile de se convaincre que r_ϵ est une fonction bornée en ϵ et h qui décroît comme $1/\sqrt{h}$ à grand argument. De la même manière, la version rescalée de K_ϵ est donnée par

$$R_\epsilon(h) = K_\epsilon(\epsilon h) - \mathbb{E}X_\epsilon^2, \quad (3.33)$$

qui est très certainement bornée en ϵ , et qui se comporte comme $2 \ln(1/|h|)$ lorsque typiquement $1 < |h| < 1/\epsilon$ et est bornée au voisinage de 0. Nous noterons respectivement $r(h)$ et $R(h)$ leur limite locale lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

Pour un ϵ fini, nous pouvons toujours écrire que, en effectuant une intégration par partie gaussienne (voir l'annexe A),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}u_\epsilon^2 &= e^{\gamma^2 \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) dx - \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\varphi(y)k_\epsilon^2(x-y)e^{\gamma^2 K_\epsilon(x-y)} dx dy \\ &= e^{\gamma^2 \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} (\varphi \star \varphi)(0) - \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} (\varphi \star \varphi)(h)k_\epsilon^2(h)e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh. \end{aligned}$$

Nous voyons que la variance de u_ϵ est donnée, dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, par la différence de deux termes infiniment grands. Ils sont du même ordre, comme nous le pouvons le constater en dilatant sur ϵ la variable d'intégration de la deuxième contribution, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi \star \varphi)(h)k_\epsilon^2(h)e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} (\varphi \star \varphi)(0)e^{\gamma^2 \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} \int_{\mathbb{R}} r^2(h)e^{\gamma^2 R(h)} dh,$$

l'intégrale restante faisant sens pour $\gamma \neq 0$. Asymptotiquement, la variance de u_ϵ diverge, et si la limite n'est pas nulle (et n'a pas de raison de l'être a priori), on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\gamma^2 \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} \mathbb{E}u_\epsilon^2 = (\varphi \star \varphi)(0) \left[1 - \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} r^2(h)e^{\gamma^2 R(h)} dh \right]. \quad (3.34)$$

La limite pointée par l'Eq. 3.34 est très différente de notre prédiction (Eq. 3.29) obtenue en supposant g'_ϵ bornée en ϵ (Eq. 3.27). De plus, ce comportement de la variance (Eq. 3.34) n'est absolument pas observé numériquement, et ce pour 2 raisons. La première raison est que nous observons que la variance du processus que nous simulons (Eq. 3.19) devient indépendante de ϵ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, alors que la limite de l'Eq. 3.34 diverge avec ϵ . Aussi, cette limite n'est pas cohérente avec le spectre d'exposants que nous observons (Eq. 3.23). Ainsi, la limite que nous calculons (Eq. 3.34) ne permet pas d'interpréter les résultats de la figure 3.2.

Essayons quand bien même d'interpréter les simulations numériques en mettant en évidence un terme sous-dominant qui devrait dominer aux ϵ finis que nous considérons dans

une simulation numérique. Afin de mettre en évidence un terme fini (et sous dominant) dans la variance, nous effectuons une intégrale par partie sur h , et obtenons

$$\mathbb{E}u_\epsilon^2 = - \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)'(h) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh - \gamma^2 \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)(h) [2k_\epsilon^2(h) + K_\epsilon'(h)] e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh. \quad (3.35)$$

Il est alors facile de se convaincre que le deuxième terme de l'équation 3.35 va dominer asymptotiquement, et redonnera le même comportement limite (Eq. 3.34). Quant à lui, le premier terme, sous-dominant, de l'équation 3.35, s'écrit

$$(\mathbb{E}u_\epsilon^2)^* = - \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)'(h) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh. \quad (3.36)$$

C'est celui qui dominera la fonction de structure d'ordre 2 aux petites échelles dans le cadre théorique que nous avons développé (Eq. 3.29). Par convergence dominée, cette contribution converge vers une limite que nous noterons $(\mathbb{E}u^2)^*$, et nous obtenons en utilisant la limite locale de K_ϵ (Eq. A.6), l'expression

$$(\mathbb{E}u^2)^* = - \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh. \quad (3.37)$$

où nous notons $|h|_+ = \exp[\ln^+ |h|]$. Ce terme explique le résultat des simulations numériques pour deux raisons : (i) c'est une limite finie et non trivialement nulle (indépendante de ϵ), et (ii) est cohérente, comme nous l'avons montré, avec le ζ_2 observé (Eq. 3.23). Il est alors tentant de comparer ces deux termes, le dominant et le sous-dominant (Eq. 3.36) à un ϵ fini. Dans le contexte de la turbulence, nous travaillons toujours à des coefficients d'intermittence petits devant 1, rappelons que la simulation numérique utilise par exemple $\gamma^2 = 0.025/2$ (la valeur observée dans les expériences) et $\gamma^2 = 0.1/2$. Permettons-nous donc de considérer des valeurs typiques à petits γ . Alors, la contribution sous-dominante de la variance (Eq. 3.36) est de l'ordre de celle que l'on aurait obtenu pour $\gamma = 0$, c'est à dire

$$(\mathbb{E}u_\epsilon^2)^* \approx (\varphi \star \varphi)(0).$$

La contribution dominante de la variance (Eq. 3.36) est quant à elle de l'ordre de sa vitesse de divergence (Eq. 3.34), typiquement

$$e^{\gamma^2 \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} (\varphi \star \varphi)(0) \left[1 - \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} r^2(h) e^{\gamma^2 R(h)} dh \right].$$

Recherchons donc le ϵ typique pour lequel ces deux contributions sont égales. Pour cela, il nous faut estimer l'intégrale de la deuxième contribution car connaître à la fois $r(h)$ et $R(h)$ analytiquement est difficile. Le noyau k_ϵ choisi pour effectuer les simulations numériques (Eq. 3.22) donne

$$r^2(h) = \frac{h^2}{(h^2 + 1)^{3/2}},$$

et approximons R par l'expression suivante

$$R(h) \approx \ln \frac{1}{h^2 + 1},$$

ce qui nous permet d'estimer

$$1 - \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} r^2(h) e^{\gamma^2 R(h)} dh \approx 1 - 2\gamma^2 \int_0^\infty \frac{h^2}{(h^2 + 1)^{3/2 + \gamma^2}} dh = 0.6\gamma^2 + o(\gamma^2).$$

Nous recherchons la valeur de ϵ telle que

$$0.6\gamma^2 \epsilon^{-2\gamma^2} = 1 \leftrightarrow \epsilon = (0.6\gamma^2)^{\frac{1}{2\gamma^2}},$$

qui nous donne $\epsilon = 10^{-85}$ (pour la situation turbulente $\gamma^2 = 0.025/2$) et $\epsilon = 10^{-16}$ (lorsque $\gamma^2 = 0.1/2$). Ainsi, pour les coefficients d'intermittence que nous étudions, nous n'observerons jamais la contribution du terme dominant.

Remarques supplémentaires

Supposons qu'il existe un tel noyau k_ϵ répondant aux critères (Eqs. 3.26, 3.27 et 3.28). Remarquons que la fonction g'_ϵ converge vers la fonction g' de la structure asymptotique de covariance du champ libre (Eq. A.6) et que par définition, $\forall \epsilon > 0$,

$$\int_0^\infty g'_\epsilon(h) dh = 0.$$

Par convergence dominée (en utilisant les critères 3.27 et 3.28), on en déduit que nécessairement $g(0) = 0$ (elle décroît nécessairement vers 0 en ∞). De plus, comme par définition

$$r_\epsilon^2(h) + \frac{1}{2}R'_\epsilon(h) = \epsilon g'_\epsilon(\epsilon h),$$

alors localement

$$r^2(h) + \frac{1}{2}R'(h) = 0,$$

puisque g'_ϵ est supposée bornée en h et ϵ (Eq. 3.27), ce qui implique

$$\gamma^2 \int_{\mathbb{R}} r^2(h) e^{\gamma^2 R(h)} dh = 1,$$

annulant la limite donnée dans l'Eq. 3.34, ce qui est cohérent.

3.4.5 Perspectives

Au jour d'aujourd'hui, nous ne savons pas construire explicitement un noyau k_ϵ répondant aux critères de notre cadre théorique (Eqs. 3.26, 3.27 et 3.28). Nous ne savons pas non plus montrer qu'il existe, ou pas. Néanmoins, ce cadre théorique nous a permis d'interpréter nos simulations numériques. En particulier, toujours dans ce cadre, le processus unidimensionnel proposé (Eq. 3.19) semble être une représentation aléatoire admirable de la composante longitudinale de la vitesse turbulence, en reproduisant notamment une fonction de structure d'ordre 3 non nulle. Comme nous l'avons mentionné, il n'existe pas de tels processus dans la littérature, et en ça, notre approche est un succès.

Ceci signifie aussi que le processus vectoriel complet (Eq. 3.18) devrait, à la limite $\epsilon \rightarrow 0$, émaner de la même manière une loi des 4/5, en cohérence avec les équations de Navier et Stokes. Nous ne pouvons aujourd'hui démontrer cette propriété, car l'application d'une intégration par partie gaussienne sur un champ de matrice est loin d'être triviale : le chaos multiplicatif est construit à partir d'un champ de matrices non commutantes, ce qui rend difficile l'estimation des fonctions de structure. Néanmoins, en collaboration avec Christophe Garban et Rodrigo Pereira, nous montrons dans les références [64, 71] qu'un développement perturbatif en puissance de γ (comme nous l'avons esquissé dans la section 3.4.3 pour le processus $1d$) montre bien que le champ vectoriel présente des transferts d'énergie. Cette étude donne beaucoup d'espoir quand à le définir, un jour, comme une solution stationnaire des équations de Navier et Stokes (dans un certain sens).

Si effectivement nous montrons un jour qu'il n'existe pas de noyau k_ϵ répondant aux critères de notre cadre théorique (Eqs. 3.26, 3.27 et 3.28), alors nous ne serons pas surpris. Rappelons que la régularisation impliquée par la viscosité dans un écoulement turbulent est un phénomène subtil et très particulier (voir Eqs. 1.18 et 1.19). Nous pensons notamment à l'effet différentiel de la viscosité qui gomme à des échelles différentes l'ensemble des singularités caractérisées par l'exposant de holder h . Cette nécessité physique n'est absolument pas reproduite par la régularisation que nous utilisons dans les simulations numériques (Eq. 3.22). Rappelons que le paramètre libre \mathcal{R}^* qui intervient dans la phénoménologie des échelles dissipatives se retrouve à toutes les échelles au travers de la loi des 4/5 (Eq. 1.13). Rappelons aussi que la phénoménologie des échelles dissipatives impliquent une statistique non gaussienne pour l'exposant h dissipatif (Eq. 1.19) alors que les statistiques dans le domaine inertiel sont correctement décrites par des h gaussiens (approche lognormale). Il n'est donc pas clair si l'approche conjointement gaussienne des champs X_ϵ et W soit suffisante pour construire un modèle $1d$ cohérent de la turbulence des fluides.

Toujours est-il que le processus $1d$ (Eq. 3.19) illustre en grande partie le réalisme de la structure locale de la turbulence que nous proposons (Eq. 3.18). Je m'attacherai à l'avenir à construire une représentation stochastique des échelles dissipatives, qui sera nécessaire afin de faire un lien, possiblement, avec les équations de Navier et Stokes.

Annexe A

Calculs relatifs au processus dissipatif

A.1 Préliminaires et notations

Donnons-nous un noyau k_ϵ , s'il existe, qui répond aux critères des équations 3.26, 3.27 et 3.28. En particulier, il est impair et converge localement vers

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} k_\epsilon(x) = k(x) = \frac{x}{|x|^{3/2}} 1_{|x| \leq L}. \quad (\text{A.1})$$

Le noyau k_ϵ définit complètement le champ X_ϵ , à savoir

$$X_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} k_\epsilon(x-y) W(dy). \quad (\text{A.2})$$

La variance de ce champ est donnée par

$$\mathbb{E}X_\epsilon^2 = \int_{\mathbb{R}} k_\epsilon^2(x) dx = 2 \int_0^\infty k_\epsilon^2(x) dx \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln \frac{1}{\epsilon}. \quad (\text{A.3})$$

La covariance du champ X_ϵ est notée K_ϵ et donnée par la fonction paire

$$K_\epsilon(x-y) = \mathbb{E}[X_\epsilon(x)X_\epsilon(y)] = (k_\epsilon \star k_\epsilon)(x-y), \quad (\text{A.4})$$

où \star est le produit de corrélation, c'est-à-dire pour toutes fonctions g_1 et g_2 ,

$$(g_1 \star g_2)(h) = \int_{\mathbb{R}} g_1(x)g_2(x+h)dx. \quad (\text{A.5})$$

Nous rappelons que K_ϵ (c.f. Eq. 3.6) converge localement vers

$$K(x-y) = 2 \ln^+ \left(\frac{L}{|x-y|} \right) + g(|x-y|), \quad (\text{A.6})$$

avec $\ln^+ |x| = \max(\ln |x|, 0)$ et g une fonction bornée qui tends vers 0 à grand argument.

Par la suite, nous ferons appel de nombreuses fois au théorème d'intégration par partie pour les variables conjointement gaussiennes. Donnons nous un vecteur gaussien (g, g_1, \dots, g_n) dont les $n+1$ composantes sont des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle. Donnons une fonctionnelle $F(g_1, \dots, g_n)$ des n variables g_i (voir les conditions sur F dans la référence [72]). Alors nous pouvons écrire

$$\mathbb{E}[gF(\{g_i\}_{1 \leq i \leq n})] = \mathbb{E}[gg_i] \mathbb{E} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Moyenne, variance et fonction de structure d'ordre 2

A.2.1 Moyenne

On en déduit immédiatement que $\mathbb{E}u_\epsilon = 0$, puisque k_ϵ étant une fonction impaire donc nulle à l'origine, une intégration par partie (ipp. Eq. A.7) donne

$$\mathbb{E}[e^{\gamma X_\epsilon(x)} W(dx)] = \gamma \mathbb{E}[X_\epsilon(x) W(dx)] \mathbb{E}[e^{\gamma X_\epsilon(x)}] = \gamma k_\epsilon(0) e^{\frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} dx = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}u_\epsilon = \mathbb{E}u = 0.$$

A.2.2 Variance

La variance du processus est donnée par

$$\mathbb{E}u_\epsilon^2 = \frac{1}{[\mathbb{E}e^{\gamma X_\epsilon}]^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \varphi(y) \mathbb{E} [e^{\gamma[X_\epsilon(x)+X_\epsilon(y)]} W(dx) W(dy)].$$

En exploitant l'imparité de k_ϵ et en effectuant une IPP gaussienne (Eq. A.7), on obtient

$$\frac{\mathbb{E} [W(dx) W(dy) e^{\gamma[X(x)+X(y)]}]}{\mathbb{E} e^{\gamma[X(x)+X(y)]}} = \mathbb{E} [W(dx) W(dy)] - \gamma^2 k_\epsilon^2(x-y) dx dy$$

avec

$$\mathbb{E} e^{\gamma[X(x)+X(y)]} = e^{\gamma^2 [\mathbb{E}X^2 + K_\epsilon(x-y)]}.$$

Une fois intégrée, et en regroupant les termes similaires, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}u_\epsilon^2 &= e^{\gamma^2 \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) dx - \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \varphi(y) k_\epsilon^2(x-y) e^{\gamma^2 K_\epsilon(x-y)} dx dy \\ &= e^{\gamma^2 \mathbb{E}[X_\epsilon^2]} (\varphi \star \varphi)(0) - \gamma^2 \int_{\mathbb{R}} (\varphi \star \varphi)(h) k_\epsilon^2(h) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3.4.4, ces deux termes sont du même ordre, et divergent avec ϵ . Tout comme dans l'équation 3.35, une intégration par partie donne

$$\mathbb{E}u_\epsilon^2 = - \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)'(h) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh - \gamma^2 \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)(h) [2k_\epsilon^2(h) + K'_\epsilon(h)] e^{\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh,$$

qui fait intervenir la fonction $g'_\epsilon(h) = 2k_\epsilon^2(h) + K'_\epsilon(h)$, définie par les équations 3.26, 3.27 et 3.28. Par convergence dominée, on obtient donc la convergence de la variance vers

$$\mathbb{E}u^2 = - \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh - \gamma^2 \int_0^\infty (\varphi \star \varphi)(h) g'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh.$$

Par la suite, nous exploiterons le fait que $g(0) = 0$.

A.2.3 Fonction de structure d'ordre 2

La fonction de structure d'ordre 2 converge donc vers

$$\mathbb{E}[(\delta_\ell u)^2] = - \int_0^\infty (\varphi_\ell \star \varphi_\ell)'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh - \gamma^2 \int_0^\infty (\varphi_\ell \star \varphi_\ell)(h) g'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh,$$

avec φ_ℓ donnée dans l'équation 3.25, que nous rappelons être

$$\varphi_\ell(x) = \varphi_L(x - \ell/2) \frac{1}{|x - \ell/2|^{1/2-H}} - \varphi_L(x + \ell/2) \frac{1}{|x + \ell/2|^{1/2-H}}.$$

Il est alors facile de se convaincre que

$$(\varphi_\ell \star \varphi_\ell)(\ell h) \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} \ell^{2H-1} \varphi_L^2(0) f_1(h),$$

avec

$$f_1(h) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} \right] \left[\frac{1}{|x + h - 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + h + 1/2|^{1/2-H}} \right] dx.$$

Il est aisé de voir que $f_1(0)$ est fini $\forall H \in]0, 1[$, et

$$\forall H \in]0, 1/2[, f_1(h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{1}{2} - H \right) \frac{1}{h^{3/2-H}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} \right] dx.$$

La première contribution à la variance de l'incrément se comporte comme

$$- \int_0^\infty (\varphi_\ell \star \varphi_\ell)'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -\ell^{2H-2\gamma^2} \varphi_L^2(0) \int_0^\infty f_1'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} dh$$

qui fait parfaitement sens pour $H \in]0, 1[$ et $2\gamma^2 < 1$. La deuxième contribution quant à elle se comporte comme

$$\int_0^\infty (\varphi_\ell \star \varphi_\ell)(h) g'(h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h)} dh \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} \ell^{2H-2\gamma^2} \varphi_L^2(0) \int_0^\infty f_1(h) g'(\ell h) \frac{1}{|h|_+^{2\gamma^2}} dh.$$

Je ne sais pas calculer la vitesse de convergence vers 0 de cette contribution, mais si l'on choisit $\gamma^2 < H$, alors il est certain qu'elle tend vers 0 plus vite que $\ell^{2H-2\gamma^2}$, elle est donc négligeable devant la première contribution, et on obtient

$$\forall H \in]0, 1/2[\text{ and } \gamma^2 < H, \mathbb{E}[(\delta_\ell u)^2] \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -\ell^{2H-2\gamma^2} \varphi_L^2(0) \int_0^\infty f_1'(h) \frac{1}{|h|^{2\gamma^2}} dh, \quad (\text{A.8})$$

que l'on peut montrer être positive [71].

A.3 Fonction de structure d'ordre 3

A.3.1 Préliminaires

On utilisera la notation

$$\Phi_\ell(h_1, h_2) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\ell(x) \varphi_\ell(x + h_1) \varphi_\ell(x + h_2) dx.$$

En remarquant que φ_ℓ est une fonction impaire, on a

$$\Phi_\ell(h_1, h_2) = -\Phi_\ell(-h_1, -h_2).$$

Aux petites échelles, elle se comporte comme

$$\Phi_\ell(\ell h_1, \ell h_2) \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -\ell^{3H-1/2} \varphi_L^3(0) f_2(h_1, h_2)$$

où

$$f_2(h_1, h_2) = \int \left[\frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} \right] \left[\frac{1}{|x + h_1 + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + h_1 - 1/2|^{1/2-H}} \right] \\ \times \left[\frac{1}{|x + h_2 + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + h_2 - 1/2|^{1/2-H}} \right] dx.$$

Proposition 1 *Pour $H \in]1/6, 1/2[$, $f_2(h, h)$ est continue. En particulier, comme elle est impaire, $f_2(0, 0) = 0$, et*

$$f_2(h, h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-2H}{|h|^{3/2-H}} \int_0^\infty \left[\frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} \right]^2 dx.$$

Remarquons que

$$f_2(h, h) = f_2(-h, 0) \\ = \int \left[\frac{1}{|x - h + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - h - 1/2|^{1/2-H}} \right] \left[\frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} \right]^2 dx \\ = \frac{1}{|h|^{1/2-H}} \int \left[\frac{1}{|1 - \frac{x+1/2}{h}|^{1/2-H}} - \frac{1}{|1 - \frac{x-1/2}{h}|^{1/2-H}} \right] \left[\frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} \right]^2 dx.$$

Nous pouvons écrire que

$$\frac{1}{|1 - \frac{x+1/2}{h}|^{1/2-H}} - \frac{1}{|1 - \frac{x-1/2}{h}|^{1/2-H}} = (1/2 - H)\frac{1}{h} + o\left(\frac{1}{h}\right).$$

Donc, nous obtenons

$$f_2(h, h) = \frac{1/2 - H}{|h|^{3/2-H}} \int \left[\frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} \right]^2 dx + o\left(\frac{1}{|h|^{3/2-H}}\right),$$

ce qui montre que

$$f_2(h, h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1 - 2H}{|h|^{3/2-H}} \int_0^\infty \left[\frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} \right]^2 dx.$$

Dans la suite, nous ferons l'approximation dans le calcul

$$2k_\epsilon^2(h) + K'_\epsilon(h) \approx 0,$$

ce qui revient à omettre la contribution liée à g'_ϵ . Il reste à vérifier que cette contribution supplémentaire ne domine pas à petites échelles $\ell \rightarrow 0$ [71].

A.3.2 Calcul de la fonction de structure d'ordre 3

Une intégration par partie gaussienne donne

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} [W(dx)W(dy)W(dz)e^{\gamma[X(x)+X(y)+X(z)]}]}{\mathbb{E}e^{\gamma[X(x)+X(y)+X(z)]}} &= \gamma [k_\epsilon(x - z) + k_\epsilon(y - z)] dz \mathbb{E}W(dx)W(dy) \\ &+ \gamma [k_\epsilon(x - y) + k_\epsilon(z - y)] dy \mathbb{E}W(dx)W(dz) + \gamma [k_\epsilon(y - x) + k_\epsilon(z - x)] dx \mathbb{E}W(dy)W(dz) \\ &+ \gamma^3 [k_\epsilon(x - y) + k_\epsilon(z - y)] [k_\epsilon(y - x) + k_\epsilon(z - x)] [k_\epsilon(y - z) + k_\epsilon(x - z)] dx dy dz, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{E}e^{\gamma[X(x)+X(y)+X(z)]} = e^{\gamma^2 \left[\frac{3}{2} \mathbb{E}X^2 + K_\epsilon(x-y) + K_\epsilon(x-z) + K_\epsilon(y-z) \right]}$$

Une fois intégrée, et en regroupant les termes similaires, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^3 &= 6\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\ell(x) \varphi_\ell^2(y) k_\epsilon(y - x) e^{\gamma^2 \mathbb{E}X_\epsilon^2 + 2\gamma^2 K_\epsilon(y-x)} dx dy \\ &- 6\gamma^3 \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\ell(x) \varphi_\ell(y) \varphi_\ell(z) k_\epsilon^2(y - x) k_\epsilon(x - z) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(x-y) + K_\epsilon(x-z) + K_\epsilon(y-z)]} dx dy dz. \end{aligned}$$

En utilisant $h = y - x$ et en intégrant sur x dans la première intégrale, en utilisant $h_1 = x - z$, $h_2 = x - y$ et en intégrant sur x en ce qui concerne la deuxième intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^3 &= 6\gamma \int_{\mathbb{R}} \Phi_\ell(h, h) k_\epsilon(h) e^{\gamma^2 \mathbb{E}X_\epsilon^2 + 2\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh \\ &\quad - 6\gamma^3 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\ell(-h_1, -h_2) k_\epsilon^2(h_2) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_1 - h_2)]} dh_1 dh_2, \\ &= 6\gamma \int_{\mathbb{R}} \Phi_\ell(h, h) k_\epsilon(h) e^{\gamma^2 \mathbb{E}X_\epsilon^2 + 2\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh \\ &\quad + 6\gamma^3 \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\ell(h_1, h_2) k_\epsilon^2(h_2) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_1 - h_2)]} dh_1 dh_2.\end{aligned}$$

Concentrons-nous sur le deuxième terme, et définissons

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi_\ell(h_1, h_2) k_\epsilon^2(h_2) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_1 - h_2)]} dh_1 dh_2.$$

En exploitant les symétries, on obtient

$$\begin{aligned}A &= \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} + \Phi_\ell(h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} \right. \\ &\quad \left. - \Phi_\ell(-h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} - \Phi_\ell(-h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} \right] k_\epsilon^2(h_2) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_1)]} dh_1 dh_2,\end{aligned}$$

ce qui mène à

$$A = 2 \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} + \Phi_\ell(h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} \right] k_\epsilon^2(h_2) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_1)]} dh_1 dh_2.$$

On utilise donc la règle de calcul

$$k_\epsilon^2(h) \approx -\frac{1}{2} K'_\epsilon(h) \text{ pour } h \geq 0,$$

de telle sorte à obtenir

$$A \approx - \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} + \Phi_\ell(h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} \right] K'_\epsilon(h_2) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_1)]} dh_1 dh_2.$$

L'intégration par parties sur h_2 donne

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^+} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} + \Phi_\ell(h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} \right] K'_\epsilon(h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_2)} dh_2 \\ &= -\frac{2}{\gamma^2} \Phi_\ell(h_1, 0) e^{\gamma^2 \mathbb{E}X_\epsilon^2 + \gamma^2 K_\epsilon(h_1)} - \frac{1}{\gamma^2} \int_{\mathbb{R}^+} \partial_{h_2} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} + \Phi_\ell(h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} \right] e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_2)} dh_2\end{aligned}$$

Donc

$$A \approx \frac{2}{\gamma^2} \int_{\mathbb{R}^+} \Phi_\ell(h_1, 0) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 \mathbb{E} X_\epsilon^2 + 2\gamma^2 K_\epsilon(h_1)} dh_1 \\ + \frac{1}{\gamma^2} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \partial_{h_2} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} + \Phi_\ell(h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} \right] k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2)]} dh_1 dh_2.$$

En remarquant que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \Phi_\ell(h_1, 0) k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 \mathbb{E} X_\epsilon^2 + 2\gamma^2 K_\epsilon(h_1)} dh_1 = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \Phi_\ell(h, h) k_\epsilon(h) e^{\gamma^2 \mathbb{E} X_\epsilon^2 + 2\gamma^2 K_\epsilon(h)} dh,$$

nous obtenons

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^3 \approx 6\gamma \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \partial_{h_2} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 - h_2)} + \Phi_\ell(h_1, -h_2) e^{\gamma^2 K_\epsilon(h_1 + h_2)} \right] k_\epsilon(h_1) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2)]} dh_1 dh_2.$$

Si l'expression fait sens, alors le moment d'ordre 3 converge vers

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3 \approx 6\gamma \int_{[0,1]^2} \partial_{h_2} \left[\frac{\Phi_\ell(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1} |h_2 - h_1|^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h_1 - h_2)} + \frac{\Phi_\ell(h_1, -h_2)}{\sqrt{h_1} |h_2 + h_1|^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 g(h_1 + h_2)} \right] \\ \frac{1}{|h_1|^{2\gamma^2} |h_2|^{2\gamma^2}} e^{\gamma^2 [g(h_1) + g(h_2)]} dh_1 dh_2.$$

A.3.3 Comportement asymptotique

Nous pouvons alors montrer que, asymptotiquement aux petites échelles, le moment d'ordre 3 se comporte comme

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^3 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} -6\gamma D \varphi_\ell^3(0) \ell^{3H-6\gamma^2} \quad (\text{A.9})$$

avec

$$D = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \partial_{h_2} \left[\frac{f_2(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1} |h_2 - h_1|^{2\gamma^2}} + \frac{f_2(h_1, -h_2)}{\sqrt{h_1} |h_2 + h_1|^{2\gamma^2}} \right] \frac{1}{|h_1|^{2\gamma^2} |h_2|^{2\gamma^2}} dh_1 dh_2.$$

A.4 Fonction de structure d'ordre 4

Une intégration par partie gaussienne donne

$$\frac{\mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=1}^4 dW(x_i) \right) e^{\gamma \sum_{j=1}^4 X(x_j)} \right]}{\mathbb{E} e^{\gamma \sum_{j=1}^4 X(x_j)}} = \sum \prod \mathbb{E} [dW(x_i) dW(x_j)] \\ + \gamma^2 \sum_{i < j, (k,l) \neq (i,j)} \mathbb{E} [dW(x_i) dW(x_j)] \mathbb{E} \left[dW(x_k) \sum_{p=1}^4 X(x_p) \right] \mathbb{E} \left[dW(x_l) \sum_{p=1}^4 X(x_p) \right] \\ + \gamma^4 \prod_{i=1}^4 \mathbb{E} \left[dW(x_i) \sum_{p=1}^4 X(x_p) \right],$$

avec

$$\mathbb{E}e^{\gamma \sum_{j=1}^4 X(x_j)} = e^{2\gamma^2 \mathbb{E}X^2 + \gamma^2 \sum_{i<j} K_\epsilon(x_i - x_j)}.$$

Une fois intégrée, et en regroupant les termes similaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^4 &= 3 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\ell^2(x_1) \varphi_\ell^2(x_2) e^{4\gamma^2 K_\epsilon(x_1 - x_2)} dx dy e^{2\gamma^2 \mathbb{E}X_\epsilon^2} \\ &+ 6\gamma^2 \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\ell^2(x_1) \varphi_\ell(x_3) \varphi_\ell(x_4) [2k_\epsilon(x_1 - x_3) + k_\epsilon(x_4 - x_3)] [2k_\epsilon(x_1 - x_4) + k_\epsilon(x_3 - x_4)] \\ &\times e^{\gamma^2 [2K_\epsilon(x_1 - x_3) + 2K_\epsilon(x_1 - x_4) + K_\epsilon(x_3 - x_4)]} dx_1 dx_3 dx_4 e^{\gamma^2 \mathbb{E}X_\epsilon^2} \\ &+ \gamma^4 \int_{\mathbb{R}^4} \left(\prod_{i=1}^4 \varphi_\ell(x_i) dx_i \right) \left(\prod_{i=1}^4 \sum_{j \neq i} k_\epsilon(x_j - x_i) \right) e^{\gamma^2 \sum_{i<j} K_\epsilon(x_i - x_j)}. \end{aligned}$$

On définit la fonction

$$\Phi_\ell(h_1, h_2, h_3) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\ell(x) \varphi_\ell(x + h_1) \varphi_\ell(x + h_2) \varphi_\ell(x + h_3) dx.$$

On a, quelle que soit la parité de φ_ℓ ,

$$\Phi_\ell(h_1, h_2, h_3) = \Phi_\ell(-h_1, -h_2, -h_3).$$

Considérons

$$I = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\prod_{i=1}^4 \varphi_\ell(x_i) dx_i \right) \left(\prod_{i=1}^4 \sum_{j \neq i} k_\epsilon(x_j - x_i) \right) e^{\gamma^2 \sum_{i<j} K_\epsilon(x_i - x_j)},$$

que l'on écrira comme

$$I = 3I_1 + I_2,$$

avec

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^4} \left(\prod_{i=1}^4 \varphi_\ell(x_i) dx_i \right) k_\epsilon^2(x_1 - x_2) k_\epsilon^2(x_3 - x_4) e^{\gamma^2 \sum_{i<j} K_\epsilon(x_i - x_j)},$$

et $I_2 = I - 3I_1$.

Effectuons le changement de variables $h_1 = x_1 - x_2$, $h_2 = x_1 - x_3$, $h_3 = x_3 - x_4$ et sommions sur x_1 , on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_\ell(-h_1, -h_2, -h_2 - h_3) k_\epsilon^2(h_1) k_\epsilon^2(h_3) \\ &\times e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_3) + K_\epsilon(h_2 + h_3) + K_\epsilon(h_2 + h_3 - h_1) + K_\epsilon(h_1 - h_2)]} \prod_{i=1}^3 dh_i \end{aligned}$$

que l'on écrira sous la forme

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 + h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2+h_3) + K_\epsilon(h_2+h_3-h_1) + K_\epsilon(h_1-h_2)]} \\ \times k_\epsilon^2(h_1) k_\epsilon^2(h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_3)]} \prod_{i=1}^3 dh_i,$$

de telle sorte que

$$I_1 = \int_{(\mathbb{R}^+)^3} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 + h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2+h_3) + K_\epsilon(h_2+h_3-h_1) + K_\epsilon(h_1-h_2)]} \right. \\ + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 + h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(-h_2+h_3) + K_\epsilon(-h_2+h_3-h_1) + K_\epsilon(h_1+h_2)]} \\ + \Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 - h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2-h_3) + K_\epsilon(h_2-h_3-h_1) + K_\epsilon(h_1-h_2)]} \\ + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 - h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2+h_3) + K_\epsilon(h_2+h_3+h_1) + K_\epsilon(h_1+h_2)]} \\ + \Phi_\ell(-h_1, h_2, h_2 + h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2+h_3) + K_\epsilon(h_2+h_3+h_1) + K_\epsilon(h_1+h_2)]} \\ + \Phi_\ell(-h_1, -h_2, -h_2 + h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(-h_2+h_3) + K_\epsilon(-h_2+h_3+h_1) + K_\epsilon(-h_1+h_2)]} \\ + \Phi_\ell(-h_1, h_2, h_2 - h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2-h_3) + K_\epsilon(h_2-h_3+h_1) + K_\epsilon(h_1+h_2)]} \\ \left. + \Phi_\ell(-h_1, -h_2, -h_2 - h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2+h_3) + K_\epsilon(h_2+h_3-h_1) + K_\epsilon(-h_1+h_2)]} \right] \\ \times k_\epsilon^2(h_1) k_\epsilon^2(h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_3)]} \prod_{i=1}^3 dh_i,$$

afin d'obtenir

$$I_1 = 2 \int_{(\mathbb{R}^+)^3} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 + h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2+h_3) + K_\epsilon(h_2+h_3-h_1) + K_\epsilon(h_1-h_2)]} \right. \\ + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 + h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(-h_2+h_3) + K_\epsilon(-h_2+h_3-h_1) + K_\epsilon(h_1+h_2)]} \\ + \Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 - h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2-h_3) + K_\epsilon(h_2-h_3-h_1) + K_\epsilon(h_1-h_2)]} \\ \left. + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 - h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_2+h_3) + K_\epsilon(h_2+h_3+h_1) + K_\epsilon(h_1+h_2)]} \right] \\ \times k_\epsilon^2(h_1) k_\epsilon^2(h_3) e^{\gamma^2 [K_\epsilon(h_1) + K_\epsilon(h_2) + K_\epsilon(h_3)]} \prod_{i=1}^3 dh_i.$$

Utilisons ensuite $k_\epsilon^2(h_1) \approx -\frac{1}{2}K'_\epsilon(h_1)$ and $k_\epsilon^2(h_3) \approx -\frac{1}{2}K'_\epsilon(h_3)$. On obtient

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{R}^+)^3} \left[\Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 + h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_2+h_3)+K_\epsilon(h_2+h_3-h_1)+K_\epsilon(h_1-h_2)]} \right. \\ & + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 + h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(-h_2+h_3)+K_\epsilon(-h_2+h_3-h_1)+K_\epsilon(h_1+h_2)]} \\ & + \Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 - h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_2-h_3)+K_\epsilon(h_2-h_3-h_1)+K_\epsilon(h_1-h_2)]} \\ & \left. + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 - h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_2+h_3)+K_\epsilon(h_2+h_3+h_1)+K_\epsilon(h_1+h_2)]} \right] \\ & \times K'_\epsilon(h_1) K'_\epsilon(h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_1)+K_\epsilon(h_2)+K_\epsilon(h_3)]} \prod_{i=1}^3 dh_i. \end{aligned}$$

Effectuons l'intégration par parties sur h_1 et h_3 , définissons

$$\begin{aligned} g_\epsilon(h_1, h_2, h_3) = & \Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 + h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_2+h_3)+K_\epsilon(h_2+h_3-h_1)+K_\epsilon(h_1-h_2)]} \\ & + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 + h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(-h_2+h_3)+K_\epsilon(-h_2+h_3-h_1)+K_\epsilon(h_1+h_2)]} \\ & + \Phi_\ell(h_1, h_2, h_2 - h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_2-h_3)+K_\epsilon(h_2-h_3-h_1)+K_\epsilon(h_1-h_2)]} \\ & + \Phi_\ell(h_1, -h_2, -h_2 - h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_2+h_3)+K_\epsilon(h_2+h_3+h_1)+K_\epsilon(h_1+h_2)]}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{2} \int_{(\mathbb{R}^+)^3} g_\epsilon(h_1, h_2, h_3) K'_\epsilon(h_1) K'_\epsilon(h_3) e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_1)+K_\epsilon(h_2)+K_\epsilon(h_3)]} dh_1 dh_2 dh_3 \\ = & \frac{1}{2\gamma^4} \int_{(\mathbb{R}^+)^3} \frac{\partial^2 g_\epsilon(h_1, h_2, h_3)}{\partial h_1 \partial h_3} e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_1)+K_\epsilon(h_2)+K_\epsilon(h_3)]} dh_1 dh_2 dh_3 + \dots, \end{aligned}$$

où les termes additionnels proportionnels à $e^{\gamma^2 \mathbb{E}X^2}$ et $e^{2\gamma^2 \mathbb{E}X^2}$ devraient disparaître (nous le vérifierons plus tard). Donc, ne conservant que le terme dominant, on obtient

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u_\epsilon)^4 \approx \frac{3}{2} \int_{(\mathbb{R}^+)^3} \frac{\partial^2 g_\epsilon(h_1, h_2, h_3)}{\partial h_1 \partial h_3} e^{\gamma^2[K_\epsilon(h_1)+K_\epsilon(h_2)+K_\epsilon(h_3)]} dh_1 dh_2 dh_3.$$

Si l'intégrale suivante fait sens, alors la fonction de structure d'ordre 4 converge vers

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^4 \approx \frac{3}{2} \int_{(\mathbb{R}^+)^3} \frac{\partial^2 g(h_1, h_2, h_3)}{\partial h_1 \partial h_3} e^{\gamma^2[K(h_1)+K(h_2)+K(h_3)]} dh_1 dh_2 dh_3.$$

A.4.1 Comportement asymptotique

Aux petites échelles, on a le comportement asymptotique suivant

$$\Phi_\ell(\ell h_1, \ell h_2, \ell h_3) \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} \ell^{4H-1} \varphi_L^4(0) f_3(h_1, h_2, h_3),$$

avec

$$f_3(h_1, h_2, h_3) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|x + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x - 1/2|^{1/2-H}} \right] \left[\frac{1}{|x + h_1 + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + h_1 - 1/2|^{1/2-H}} \right] \\ \times \left[\frac{1}{|x + h_2 + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + h_2 - 1/2|^{1/2-H}} \right] \left[\frac{1}{|x + h_3 + 1/2|^{1/2-H}} - \frac{1}{|x + h_3 - 1/2|^{1/2-H}} \right] dx.$$

Nous obtenons donc

$$\mathbb{E}(\delta_\ell u)^4 \underset{\ell \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{2} \varphi_L^4(0) \ell^{4H-12\gamma^2} \int_{(\mathbb{R}^+)^3} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)}{\partial h_1 \partial h_3} \frac{1}{|h_1|^{2\gamma^2} |h_2|^{2\gamma^2} |h_3|^{2\gamma^2}} dh_1 dh_2 dh_3, \quad (\text{A.10})$$

avec

$$\mathcal{G}(h_1, h_2, h_3) = f_3(h_1, h_2, h_2 + h_3) \frac{1}{|(h_2 + h_3)(h_2 + h_3 - h_1)(h_1 - h_2)|^{2\gamma^2}} \\ + f_3(h_1, -h_2, -h_2 + h_3) \frac{1}{|(-h_2 + h_3)(-h_2 + h_3 - h_1)(h_1 + h_2)|^{2\gamma^2}} \\ + f_3(h_1, h_2, h_2 - h_3) \frac{1}{|(h_2 - h_3)(h_2 - h_3 - h_1)(h_1 - h_2)|^{2\gamma^2}} \\ + f_3(h_1, -h_2, -h_2 - h_3) \frac{1}{|(h_2 + h_3)(h_2 + h_3 + h_1)(h_1 + h_2)|^{2\gamma^2}}.$$

Bibliographie

- [1] H. Tennekes et J. L. Lumley. *A first Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, 1972.
- [2] U. Frisch. *Turbulence, The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [3] S. B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [4] B. Castaing. Lagrangian and Eulerian velocity intermittency. *Eur. Phys. J. B*, 29 : 357, 2002.
- [5] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, et R. Temam. *Navier-Stokes equations and turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [6] G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1953.
- [7] O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing, et B. Hébral. Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet. *Eur. Phys. J. B*, 17 :309, 2000.
- [8] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura, et A. Uno. Energy dissipation rate and energy spectrum in high resolution direct numerical simulations of turbulence in a periodic box. *Phys. Fluids*, 15(2) :21, 2003.
- [9] B. B. Mandelbrot et J. W. Van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Reviews*, 10 :422, 1968.
- [10] G. Eyink. Turbulence theory. <http://www.ams.jhu.edu/~eyink/Turbulence/notes.html>, 2007.
- [11] J. Duchon et R. Robert. Dissipation d'énergie pour des solutions faibles des équations d'Euler et Navier-Stokes incompressibles. *Séminaire Equations aux dérivées partielles*, page 1, 1999. URL <http://eudml.org/doc/10987>.
- [12] F. Toschi et E. Bodenschatz. Lagrangian properties of particles in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 41 :375, 2009.

- [13] J.-F. Pinton et B. L. Sawford. A lagrangian view of turbulent dispersion and mixing. Dans Peter A. Davidson, Yukio Kaneda, et Katepalli R. Sreenivasan, éditeurs, *Ten Chapters in Turbulence*, pages 132–175. Cambridge University Press, 2012.
- [14] N. Mordant. *Mesure Lagrangienne en Turbulence : Mise en Oeuvre et Analyse*. Thèse, ENS Lyon, 2001.
- [15] H. Kahalerras, Y. Malecot, Y. Gagne, et B. Castaing. Intermittency and reynolds number. *Phys. Fluids*, 10 :910, 1998.
- [16] L. Chevillard, B. Castaing, A. Arneodo, E. Lévêque, J.-F. Pinton, et S. Roux. A phenomenological theory of eulerian and lagrangian velocity fluctuations in turbulent flows. *C.R. Physique*, 13 :899, 2012.
- [17] L. Chevillard, S. G. Roux, E. Lévêque, N. Mordant, J.-F. Pinton, et A. Arneodo. Lagrangian velocity statistics in turbulent flows : Effects of dissipation. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :214502, 2003.
- [18] L. Chevillard. *Description multifractale unifiée du phénomène d'intermittence en turbulence Eulérienne et Lagrangienne*. Thèse, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2004.
- [19] A. Arnèodo, R. Benzi, J. Berg, L. Biferale, E. Bodenschatz, A. Busse, E. Calzavarini, B. Castaing, M. Cencini, L. Chevillard, R. T. Fisher, R. Grauer, H. Homann, D. Lamb, A. S. Lanotte, E. Lévêque, B. Lüthi, J. Mann, N. Mordant, W.-C. Müller, S. Ott, N. T. Ouellette, J.-F. Pinton, S. B. Pope, S. G. Roux, F. Toschi, H. Xu, et P. K. Yeung. Universal intermittent properties of particle trajectories in highly turbulent flows. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :254504, 2008.
- [20] M. S. Borgas. The multifractal Lagrangian nature of turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 342 :379, 1993.
- [21] L. Chevillard, B. Castaing, et E. Lévêque. On the rapid increase of intermittency in the near-dissipation range of fully developed turbulence. *Eur. Phys. J. B*, 45 :561, 2005.
- [22] L. Chevillard, B. Castaing, E. Lévêque, et A. Arneodo. Unified multifractal description of velocity increments statistics in turbulence : Intermittency and skewness. *Physica D*, 218 :77, 2006.
- [23] R. Benzi, L. Biferale, R. Fisher, D. Lamb, et F. Toschi. Inertial range eulerian and lagrangian statistics from numerical simulations of isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 653 :221, 2010.
- [24] B. Castaing, Y. Gagne, et E. Hopfinger. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D*, 46 :177, 1990.

- [25] G. Paladin et A. Vulpiani. Degrees of freedom of turbulence. *Phys. Rev. A*, 35 :1971, 1987.
- [26] M. Nelkin. Multifractal scaling of velocity derivatives in turbulence. *Phys. Rev. A*, 42 (12) :7226, 1990.
- [27] G. K. Batchelor. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 47 :359, 1951.
- [28] C. Meneveau. On the transition between viscous and inertial-range scaling of turbulence structure functions. *Phys. Rev. E*, 54 :3657, 1996.
- [29] L. Chevillard et C Meneveau. Lagrangian dynamics and statistical geometric structure of turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :174501, 2006.
- [30] L. Chevillard, C. Meneveau, L. Biferale, et F. Toschi. Modeling the pressure hessian and viscous laplacian in turbulence : Comparisons with direct numerical simulation and implications on velocity gradient dynamics. *Phys. Fluids*, 20 :101504, 2008.
- [31] C. Meneveau. Lagrangian dynamics and models of the velocity gradient tensor in turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 43 :219, 2011.
- [32] K. Ohkitani. Eigenvalue problems in three-dimensional euler flows. *Phys. Fluids A*, 5 :2570, 1993.
- [33] K. Ohkitani et S. Kishiba. Nonlocal nature of vortex stretching in an inviscid fluid. *Phys. Fluids*, 7 :411, 1995.
- [34] P. Constantin. Geometric statistics in turbulence. *SIAM Review*, 36 :73, 1994.
- [35] A. Majda et A. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [36] P. Vieillefosse. Local interaction between vorticity and shear in a perfect incompressible fluid. *J. Phys. (Paris)*, 43 :837, 1982.
- [37] B. Cantwell. Exact solution of a restricted euler equation for the velocity gradient tensor. *Phys. Fluids A*, 4 :782, 1992.
- [38] A. S. Monin et A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics vol 1&2*. MIT Press, Cambridge, 1971.
- [39] M. Chertkov, A. Pumir, et B. Shraiman. Lagrangian tetrad dynamics and the phenomenology of turbulence. *Phys. Fluids*, 11 :2394, 1999.
- [40] E. Jeong et S. S. Girimaji. Velocity-gradient dynamics in turbulence : Effect of viscosity and forcing. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 16 :421, 2003.

- [41] L. Chevillard et C. Meneveau. Intermittency and universality in a lagrangian model of velocity gradients in three-dimensional turbulence. *C. R. Mec.*, 335 :187, 2007.
- [42] M. Gonzalez. Analysis of scalar dissipation in terms of vorticity geometry in isotropic turbulence. *J. Turbulence*, N41, 2012.
- [43] T. Hater, H. Homann, et R. Grauer. Lagrangian model for the evolution of turbulent magnetic and passive scalar fields. *Phys. Rev. E*, 83 :017302, 2011.
- [44] Y. Li. Small-scale intermittency and local anisotropy in turbulent mixing with rotation. *J. Turbulence*, N38, 2011.
- [45] L. Moriconi, R. M. Pereira, et L. S. Grigorio. Velocity-gradient probability distribution functions in a lagrangian model of turbulence. *J. Stat. Mech.*, P10015, 2014.
- [46] L. Chevillard et C. Meneveau. Orientation dynamics of small, triaxial-ellipsoidal particles in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 737 :571, 2013.
- [47] L. Chevillard, E. Lévêque, F. Taddia, C. Meneveau, H. Yu, et C. Rosales. Local and non local pressure hessian effects in real and synthetic fluid turbulence. *Phys. Fluids*, 23 :095108, 2011.
- [48] M. Wilczek et C. Meneveau. Pressure hessian and viscous contributions to velocity gradient statistics based on gaussian random fields. *J. Fluid Mech.*, 756 :191, 2014.
- [49] J.-P. Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, 9 :105, 1985.
- [50] R. Rhodes et V. Vargas. Gaussian multiplicative chaos and applications : A review. *Probability Surveys*, 11 :315, 2014.
- [51] J.-P. Kahane et J. Peyrière. Sur certaines martingales de benoit mandelbrot. *Advances in Mathematics*, 22 :131, 1976.
- [52] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13 :82, 1962.
- [53] A. M. Obukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 13 :77, 1962.
- [54] Y. Gagne et E. J. Hopfinger. High order dissipation correlations and structure functions in an axisymmetric jet and a plane channel flow. *Proceedings of Turbulent Shear Flow, London*, 1979.
- [55] R. A. Antonia, N. Phan Thien, et B. R. Satyaprakash. Autocorrelation and spectrum of dissipation fluctuations in a turbulent jet. *Phys. Fluids*, 24 :554, 1981.

- [56] R. Benzi, L. Biferale, A. Crisanti, G. Paladin, M. Vergassola, et A. Vulpiani. A random process for the construction of multiaffine fields. *Physica D*, 65 :352, 1993.
- [57] A. Arneodo, E. Bacry, et J.-F. Muzy. Random cascades on wavelet dyadic trees. *J. Math. Phys.*, 39(8) :4142, 1998.
- [58] J. Barral et B. B. Mandelbrot. Multifractal products of cylindrical pulses. *Prob. Theory Relat. Fields*, 124/3 :409, 2002.
- [59] E. Bacry et J.-F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Comm. Math. Phys.*, 236 :449, 2003.
- [60] F. Schmitt et P. Chainais. On causal stochastic equations for log-stable multiplicative cascades. *Eur. Phys. J. B*, 58 :149, 2007.
- [61] S. Sheffield. Gaussian free fields for mathematicians. *Probability Theory and Related Fields*, 139 :521, 2007.
- [62] R. Robert et V. Vargas. Hydrodynamic turbulence and intermittent random fields. *Comm. Math. Phys.*, 284 :649, 2008.
- [63] L. Chevillard, R. Robert, et V. Vargas. A stochastic representation of the local structure of turbulence. *EPL*, 89 :54002, 2010.
- [64] R. Pereira, C. Garban, et L. Chevillard. A random velocity field for fully developed turbulence. *en préparation*, 2015.
- [65] L. Chevillard, R. Rhodes, et V. Vargas. Gaussian multiplicative chaos for symmetric isotropic matrices. *J. Stat. Phys.*, 150 :698, 2013.
- [66] G. W. Anderson, A. Guionnet, et O. Zeitouni. *An introduction to random matrices*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [67] M. Bergère et B. Eynard. Some properties of angular integrals. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 42 :265201, 2009.
- [68] E. Bacry, L. Duvernet, et J.-F. Muzy. Continuous-time skewed multifractal processes as a model for financial returns. *Journal of Applied Probability*, 49 :482, 2012.
- [69] P. Abry, P. Chainais, L. Coutin, et V. Pippas. Multifractal random walks as fractional wiener integrals. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55 :3825, 2009.
- [70] N. Perpète. Construction of multifractal fractionnal random walks with hurst index smaller than $1/2$. *Stoch. Dyn.*, 13 :1350003, 2013.
- [71] L. Chevillard et C. Garban. Axiomatics of turbulence and a unidimensional stochastic representation. *en préparation*, 2015.
- [72] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Springer, Berlin, 2000.